In hoc opere contenta.

Arithmetica decem libris demonstrata
Musica libris demonstrata quattuor
Epitome ī libros arithmeticos diui Seuerini Boetij
Rithmimachie ludus q̃ ⁊ pugna nūerorꝫ appellat

G. Gonterius Cabilonensis: in
laudē Arithmetices ⁊ Musices.

Tempore iam multo docte latuere sorores:
Quas retinet comites flaua minerua suas.
Nūc placide terras post tempora multa reuisunt.
Grata quoq̃ ante alias Gallica terra placet.
His olim celebris fuit omnis Acaica tellus.
Pythagora patriam diffugiente samon.
Hellada nunc linquunt: et doctas palladis vrbes.
Sequaniosq̃ petunt/parhisiosq̃ lares.
Hec venit omnimoda numerorum cincta cāterua.
Atq̃ docet numeris quidquid in orbe situm est.
Altera dulcisono cantu/fidibusq̃ canoris
Edomuisse viros traditur atq̃ feras:
Que sua Pierijs tenet vnica nomina musis
Qꝫ nichil hac musis gratius esse solet.
Attamen artificem stapule misere marine:
Qui leta hoc studijs fronte dicaret opus.
Hoc solum studium atq̃ hec illi cura: iuuare/
Irritus et ne sit/dispereatq̃ labor.

Noua ꝓmentatio in Jordanũ per Jacobum fabrũ stapulẽsem laborata ad clarissimum virum Joannem de Ganay presidentem parisiensem.

Aucis me digne ãmonuisti Clarissime vir: quot cognita ꝓmoditates adducat discipli
p narum parens arithmetica/ q̃tq̃ ignota relinquat tenebras. vt quẽ nullius disciplin e fugiat studium. In primis cui legum autoritas (in quibus potissimũ tua ꝟsat operatibi numeris egere visa est. vt q̃ iusticiã vnicuiq̃ ꝓ dignitate dispẽsat: nunc Arithmetica/ nũc vo Geometrica rõne ꝓstantẽ. que agros/ agrorũ limites/ aquarũ diuergia/ alluuiones q̃ t pleraq̃ sil'ia sollicite ꝓsiderat q̃ Mathematico destituta p̃sidio nunq̃ plane assequi valeat. Hinc imperatores rhomani Vespasian⁹/ Adrianus/ Traian⁹/ Theodosius/ Archadi⁹/ Honorius/ Constãtinus t alioq̃ plurimi legũtur peritos agrimẽsores instituisse: qui podismorum rõem ad publicam vtilitatẽ tenerent quã numerorũ pficit sagacitas. Hic Lucius Moderatus illarũ rerũ studiosus insignem libellũ reliquit. Et Arithmetica cõtẽplatio rite cognita facilem p̃bet musicarũ modulationũ intelligentiã/ astronomicarũq̃ subtilitatũ ingressus. et prisca Theologia numeris olim vt quibusdã ad diuina gradibus tota initebat: q̃uis t nũc in sacris litteris sua retineãt mysteria nũeri. Tolle igit̃ numeros/ numerorũq̃ disciplinã: leges impficis. iusticia ceca relinq̃tur. nulla modulationũ reperiet̃ regl'a. nullus celestiũ ꝓtemplationũ aditus. sacrarũ l'rarũ delitebũt mysteria: imo t vniuersa philosophia q̃ pariter humanorũ/ diuinorũq̃ cognitio describit̃. Quecquidẽ ꝓmoditates assecute discipline/ atq̃ incõmoda neglecte p̃scos mime latuere: vt q̃ haud alio tramite crediderint q̃ p eã incedẽtes nos posse q̃cq̃ digna satis ꝓtẽplatiõe cognoscẽ. Pythagoras cui sine nũerorũ p̃sidio nichil posse sciri ꝓtẽdebat. et Plato in sue academie vestibulo hoc insculpsit epigrãma. Nemo huc mathematice expers introeat. qui i toto ferme Timeo de nat̃a rerũ p numeros disputat: t in octauo t nono reipublice m'lta de hac re disserit. que Theon smirneus mathematicus ob rei arduitatem intacta reliquit.

Quapropt̃ non ab re dolebas hãc numerosam hui⁹ almi parisiẽsi studij philosophãtiũ turbã et bonarũ l'rarũ cupidã: tã necessaria semita/ tum ad diuina assurgẽdi/ tum descẽdẽdi ad hũana esse destitutam. Accipe ergo nũc bũfactor vnice decem Arithmetice discipline Jordani clarissimi viri libellos noua cõmentatiõis lucẽ nris laboribus illustratos/ tuoq̃ nomini dicatos qui cõmoditates enumeratas secũ afferre valebũt sufficiẽtissime. Et si iubes opus tuis auspicijs absolutum iam migret ad ceteros. vt vel sic intelligant omnes presertim tibi se gratias habituros per quem fuerint hanc litterariam facultatem assecuti. Vale felicissime.

Argumentum decem librorum Jordani.

Primus passiones numerorũ cõmunes: suarũ partium/ et quãtũ ex diuisi numeri partibus fiat discutit.

Secundus est de proportionum et proportionalitatum cõmunibus passionibus.

Tertius de numero primo/ composito/ ad alterum primo/ et numeris in aliqua proportione minimis.

Quartus de numeris continue proportionalibus/ cõmensurabilibus t incõmensurabilibus.

Quintus de additione/ subtractione/ et partitione proportionum.

Sextus de numeris quadratis/ cubicis/ superficialibus similibus/ et solidis.

Septimus de numero pari/ impari/ pariter pari/ pariter ipari/ impariter pari/ perfectis/ abũdantibus/ et diminutis.

Octauus de formis numerorum: trigonis/ tetragonis/ pentagonis/ hexagonis/ heptagonis/ octogonis/ pyramidibus/ serratilibus/ et tesseris.

Nonus de equalitate/ inequalitate/ multiplicibus/ superparticularibus/ et superpartientibus

Decimus de medietate Arithmetica/ Geometrica/ Musica: et de medietatibus minus principalibus.

¶ Iordani Nemorarij Clarissimi viri Elementa Arithmetica: cũ demõstratiõibus Iacobi Fabri Stapulensis: ad Ioannẽ de Ganay Senatorẽ Parisiensem.

V Nitas est rei per se discretio. Numerus est quãtitas discretorum collectiua. Naturalis series numerorum dicitur: in qua ꝓm vnitatis adiectionem fit ipsorꝫ computatio. Differẽtia numerorum appellat̃ illeꝫ quo maior super minorem abũdat. Numeri ab aliis equidistare dicũtur: cum ipsorꝫ ad illos equales sunt differentie. Numerus per alium multiplicatur: qui toties coaceruatur sibi: quoties in multiplicãte est vnitas. et qui ex multiplicatione concrescit: productus nominatur. Numerus alium numerare dicitur: qui ꝓm aliquem multiplicatus illum producit. Pars est numerus: numeri minor maioris: cum minor maiorem numerat. et qui numeratur: numerãtis multiplex appellatur. Denominans est numerus: ꝓm quem sumitur pars in suo toto Similes dicũtur partes: que ab eodem numero denominantur. Numerus ꝓm quem alius diuiditur: diuisor nominatur. partes vero in quas distribuitur: diuidẽtia appellantur. Prima ⁊ simpla nũeri pars: est vnitas. quãdo duo numeri partem habuerint cõem: quoties eadem pars fuerit in minore: tot partes maioris dicetur esse minor et tote partes quoties ea cõmunis pars fuerit in maiore. ¶ Dignitates.

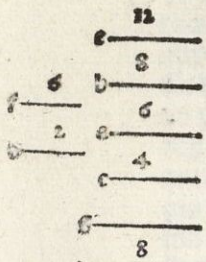
1 Omnis numeri pars: est minor suo toto.
2 O Omnis minor est: que maiorem habet denominationem
3 Quicunꝫ equalium siue eiusdem eque multiplices fuerint: ipsi quoꝫ erunt equales.
4 Quibus idem nũerus eque multiplex fuerit: siue quorꝫ multiplices eq̃les fuerint: ip̃i etiam sunt equales
5 Omnis numeri pars est vnitas: ab ipso denominata.
6 Quilibet numerus totus est ab vnitate: quota pars ipsius est vnitas.
7 Si vnitas in aliquem numerum ducatur: siue idem in vnitatem: seipsum producit.
8 Extremorum differentia ex differentiis eorũdem ad medium est composita.
9 Si numerus numerum superet: differentia minori addita: aut à maiore sublata: numeri relinquuntur equales
10 Qui eidem equantur: inter se sunt equales.
11 Et si ab equalibus equales aut idem cõmunis dematur: relinquũtur equales.
12 Et si ab equalibus dempti sint inequales: relinquentur inequales.
13 Si duo maiores simul addãtur pariter ⁊ duo minores simul: maiorum compositum composito minorum maius euadit.
14 Si equales equalibus addas: toti quoꝫ fient equales.
15 Et si inequales equalibus: toti erunt inequales.
16 Partes simul: suo toti equantur.
17 Quorũcunꝫ ad eundem numerum proportio est vna: ip̃i inter se sunt equales.
18 Quoties numerus a numero substrahi potest: toties in eodem numerabilis est
19 Proportiones que ex equalibus constant ꝓportionibus: inter se sunt equales.
20 Quorꝫ dimidia sunt equalia: et toti sunt equales. ¶ Petitiones.

1 Vilibet numero: quotlibet posse sumi equales.
2 C Quolibet numero: aliquem ꝗtũlibet esse maiorem.
3 Seriem numerorum in infinitum posse extendi.
4 Nullum numerum in infinitum decrescere.
5 Maius non numerare minus
6 Si numerum datum numerus multiplicet: idẽꝫ ꝓductum diuidat: numerũ datum redire. et contra si aliꝫ numerus datum numerum diuidat: ⁊ quod prouenit rursum multiplicet: itidem numerum datum redire.

¶ Dignitates atꝫ petitiones paucas vt disciplina se faciliorẽ vbiꝫ prestet/ adiecimus: quas passim necessarias tanꝫ omnibus notas autor suppressit.

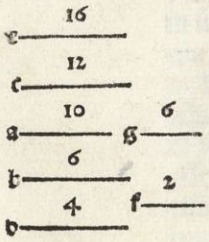
¶ Omnis numerus minor: maioris aut pars est aut partes. 1

¶ Sint a/b/c/d quotlibet numeri: a maior: et b c d minores. dico b esse partem aut ptes a: et c ꝛ d sil. Nam aut minor numerat maiorem vt d numerat a: et tunc d per diffinitionem est pars a. aut minor nõ numerat maiorem quēadmodum b non numerat a: sed est alius eos cõiter numerans qui sit e. et tunc quoties e fuerit in b minore: tot partes b minor per vltimam diffinitionem erit a maioris. qõ si minor non numerat maiorem vt c: non numerat a. neq; numerus cõis eos numerat: cum per quintam conceptionem cuiuslibet numeri vnitas sit pars ab ipso denominata: per vltimam diffinitionez idem efficis. constat igitur oēm minorem maioris esse partem aut partes.



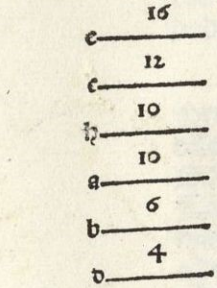
¶ Omnis numerus/circum se positorum ꝛ equaliter ab eo distantium est medietas. Q; si eorũdem fuerit medietas: illos ab eo equidistare conueniet. 2

¶ Sit a quicunq; numerus: et b et c circumpositi et ab eo equidistantes. b maior: et c minor. et sit d differentia cõmunis eadem b ad a: et a ad c. sitq; e numerus cõpositus ex b ꝛ c. dico a esse medietatem e. et si a sit medietas e: dico b et c circumpositos equidistare ab a. Primum autem sic ostenditur. nam ꝗtum a superat c: tm̃ b superat a. dempta ergo d cõi differentia ab b: per scõdam partem none dignitatis residuũ b equatur a. sed et eadem differentia d addita c qõ sit f per primam partem eiusdē dignitatis equatur a. ergo per decimũ ploquiũ residuũ b et f que eidem numero a equãtur: inꝗ se equabũtur. sed residuum b et d et c sit p decimã sextã dignitatem equãtur e. igitur ꝛ residuũ b ꝛ f que eqnt residuo b et d et c simul etiã equãtur e. et residuũ b: ꝛ f monstrata sunt equalia. igitur f est medietas e sed f monstratus est equari a: igitur a medietas est e. qõ est primum. et in oĩbus alijs cõsimili agatur argumento. Scõm aũt sic pz: sit a medietas numeroꝝ b ꝛ c simul iunctoꝝ. si b c non equidistant nũero a: eoꝝ differentie ad a per diffinitionem nõ sunt equales. sit igitur d differentia a ad c illoꝝ numeroꝝ minimum addo d ad a: ꝛ compositus sit g. qz igitur a ad c differẽtia est d ꝛ eadem differẽtia est g ad a igitur per diffinitionem g ꝛ c equidistãt nũero a. qz ergo g ꝛ c equidistant a per immediate mõstratũ a ipsoꝝ simul iunctoꝝ est medietas. sed ꝛ a ponitꝗ medietas b ꝛ c simul iunctoꝝ. per tertiã igitꝗ ꝓceptionem b c simul: et g c simul eidē numero a eque multiplices adinuicem sunt equales. ab vtroq; igitur dempto cõi numero c per vndecimã cõem scientiam residui b et g adinuicem sunt equales. que igitur differentia g ad a: eadem erit b ad a. quare equidistabũt b ꝛ c ab numero a. qõ est ꝓtra hypothesim et propositum.



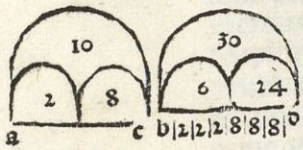
¶ Si duo numeri a duobus numeris circum se positis equaliter distent: illis ꝓiũctis erunt equales. Q; si eis equales fuerint: ab ipsis equidistare necesse est. 3

¶ Eadem que in precedenti demõstratio est. Sint igitꝗ a et b inter c et d equidistãtes: c maximus et d minimus et f differẽtia cõis: sitq; e ꝓpositus ex c d: et dꝛia e ad a sit g. dico numeros a b simul iunctos equales esse c d simul iũctis. et ꝓtra si c d simul iuncti sunt equales a b simul iũctis: a b equidistantes esse c d. Primũ patet: nam cũ d differẽtia sit e ad c Est enim d numerus quo superat e numerũ c: g dꝛia extremoꝝ e a cõstabit ex d f differẽtijs scz extremoꝝ ad medium c. Est enim vt ostensum est d differẽtia e ad c et f differẽtia c ad a per hypothesim: cũ posita sit f cõis differẽtia c ad a et b ad d. at qz b cõstat ex eisdem: qõ patet nam cũ f sit differẽtia b ad d: ea siquidē differẽtia f addita minori numero d p nonã ꝓceptiõem reddit b. est itaq; b equalis g. quare e ꝓstabit ex a b: cũ per cãdez ꝓceptionē ꝓstituatur e ex a et g sua quidem differentia ad a: que equatur ipsi b. Sunt igitur a b iũcti et c d iuncti eidem tertio e equales: adinuicem equales. qõ est primum. Rursum dico si c d simul equantur a b simul: etiã a b equidistare c d. Nam capio h qui equidistet ad c ꝗtum b ad d: qui h b quia sic equidistabunt: per immediate monstratum h b simul equãtur c d. sed et a b ponũtur eisdem c d simul iunctis equari. quare h b et a b eidem tertio equales: adinuicem equabũtur. Substracto igitur ab vtroq; cõi b: remanent p cõem sciam h et a adinuicem equales. ergo equalis differẽtia a ad c et b ad d. quare p diffinitionem adinuicem equidistabunt. quod est scõm atq; totum propositum.



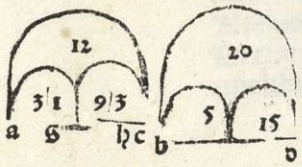
¶ Si fuerit primus scõi quota pars tertius quarti: erunt primus et tertius tota pars secundi ꝛ quarti: quota primus secundi. 4

¶ Sit a primus numerus: b secundus: c tertius: et d quartus. quia a tota pars est ipsius b: quota ps c est ipsius d: intelligo b et d in similes illas partes diuisos. et quia prima vnius cum prima alterius est tanꝗ a c: et similiter scõa cum secũda. et hec coniũctio toties fieri potest quoties ꝑmus in secũdo. toties igitur numerus equalis a c primo et tertio: sumi potest in b d secũdo ꝛ quarto: quoties a in b. quare a c simul primus et tertius per diffinitionem erũt similis et tota pars secundi et quarti quota primus secundi. quod est propositum.

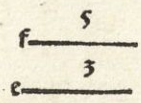


¶ Si fuerit primus tote partes secundi quote tertius quarti: erunt primus et tertius tote partes secundi et quarti: quote primus secundi. 5

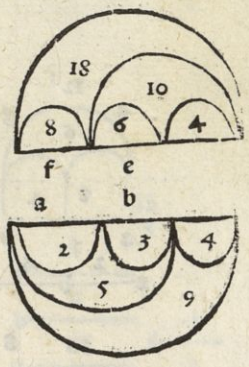
¶ Sit vt prius primus numerus a: secũdus b: tertius c: et quartus d. sitq; a partes b sumpte ꝗm e et denominate in b ꝗm f. sitq; g vna illaꝝ partium a: et h vna partium c. cũ igitur g primus tota pars sit b secũdi quota h tertius est d quarti: per premissam compositum ex g et h primo ꝛ tertio tota ps erit b d secũdi et quarti: atq; denominata ꝗm f. at partes a et c sumũtur ꝗm e: erunt igitur partes a et c ad b d sumpte ꝗm e: et denominate ꝗm f. quare et similes et quote partes fuerit a in b. qõ est propositum



¶ Si fuerint quotlibet numeri totidem aliis eque multiplices: erit quoq; compositus ex eis composito ex illis eque multiplex. 6

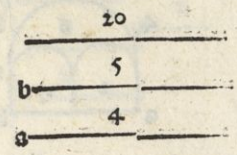


¶ Sint a.b.c.d.e.f quotlibet numeri: sintq; d e f eq̃ multiplices a b c singulis singuli: intelligo itaq; a primum. d scōm. b tertium. e quartum: eritq; per penultimam compositus ex a b pmo ⁊ tertio tota pars compositi ex d e secūdo ⁊ quarto quota pars a est d. quare compositus ex d e eque multiplex ad compositum ex a b vt d ad a. Facio itaq; numerum ex a b compositum primum: et compositum ex d e scōm et c tertium et f quartū: et cōsimiliter argumentor. quia quota pars a b ad d e: tota pars c ad f. cōpositus igitur ex a b ⁊ c primo ⁊ tertio tota pars erit compositi ex d e et f secūdo et quarto: quota pars a b ad d e. q̃re compositus ex d e f eque multiplex ad compositū a b c vt d ad a. et ita si cōplures nūeri succrescerēt: semp vtare precedentium cōposito vsq; dum ad vltimū decūbas: efficiesq; ꝓpositū.



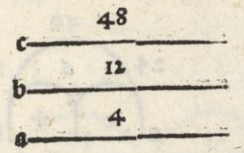
7 ¶ Si quotiēs vnitas in primo totiēs secūdus in tertio: quotiēs vnitas in scōo: totiēs primus in tertio.

¶ Sint a b c tres numeri: a primus. b secūdus. c tertius: sitq; vt quotiēs fuerit vnitas in a toties sit b in c. dico ergo q̃ quotiēs vnitas fuerit in b: totiēs a esse in c. diuido enī a primum nūerū in vnitates ⁊ c tertium in totidem partes: quax quelibet erit equalis b secundo. quia enīz quotiēs prima pars a in prima part e c totiēs secūda in secūda: et tertia in tertia: et ita deinceps. ergo per precedentem cōpositus a tota pars erit compositi c: quota pars prima pars eius ad primam partem c: et c eque multiplex ad avt eius prima pars ad primam ptem a. at quotiēs vnitas in b: totiēs prima pars a in pma parte c. Nam vnitas equatur pme parti a: ⁊ b prime parti c. ergo quotiēs vnitas in b secūdo: totiēs a primus in c tertio. quod erat demonstrandum.



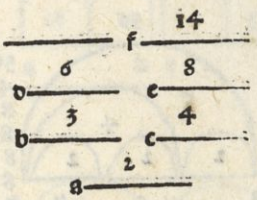
8 ¶ Si alterna fiat duox numerorum multiplicatio: idem numerus vtrobiq; ꝓueniet.

¶ Vt si a multiplicat b et proueniat c: dico etiā si b multiplicat a itidem prouenire c. nam si a multiplicat b et ꝓueniat c: per diffinitionem quotiēs erit vnitas in a: totiēs erit b in c. ergo per premissam quotiēs vnitas in b secūdo: totiēs a primus in c tertio. per diffinitionem igitur si a sibi totiēs cocerua tur quotiēs vnitas in b: per diffinitionem a per b multiplicatur. at cum hoc fit prouenit c. nam ꝓbatū est a toties coaceruari in c: quotiēs vnitas in b. constat ergo propositum.



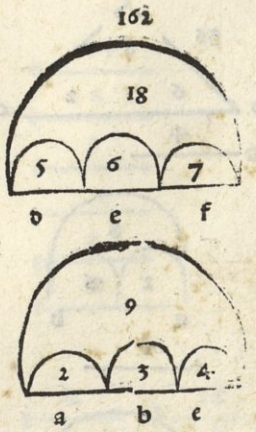
9 ¶ Quod fit ex ductu alicuius numeri in quotlibet: tm̃ est q̃tum est quod fit ex ductu eiusdem in compositum ex illis.

¶ Sit a numerus qui ducatur in b et proueniat d: et in c et proueniat e: dico ergo q̃ compositus ex d e ꝓducitur ex ductu a in compositum b c. cū enim b multiplicet d scōm a: b per diffinitionem nūerat d scōm a: et per idem c numerat e scōm a. sunt igitur d et e eque multiplices b et c: quare per sextam compositus ex d e eque multiplex ad compositum ex b c. Sit igitur f productus ex ductu a in ꝓposito b c. cū itaq; b c multiplicet f scōm a: nūerabit igitur numerus b c ipm f scōm a. quare eque multiplex f ad b c vt d ad b. sed eidem b c aggregatus d e ꝓbatus ē eque multiplex. sunt igitur d e et f eidem b c eque multiplices: per tertiam conceptionem adinuicem equales. Est igitur qd̃ fit ex ductu alicuius numeri in quotlibet tm̃: q̃tum qd̃ fit ex ductu eiusdez in cōpositum ex illis quēadmodū erat ꝓpositū.



10 ¶ Quod fit ex ductu quotlibet numerorum in aliquem: equum est illi quod fit ex cōposito illorum in eundem.

¶ Sit eadem cū precedenti hypothesis sed cōuerso ordine: vt ducātur b et c in a et proueniant d et e Dico quod fit ex ductu b et c in a singillatim equū esse ei quod fit ex composito b c in a. nam p precedēte qd̃ fit ex ductu a in b ⁊ c singillatim: equū est ei quod fit ex ductu a in compositum b c. q̃ alternatim per octauam qd̃ fit ex ductu b et c in a: equū est ei quod fit ex composito b c in eūdem. qd̃ est ꝓpositū.



11 ¶ Quod fit ex ductu quotlibet numerorum in quotlibet numeros: equale ē ei quod fit ex composito ipsorum in compositum ex aliis.

¶ Sint a b c quotlibet numeri qui ducātur in d e f quotlibet alios vt quilibet primorum ducatur in quēlibet secūdox: dico quod fit ex ductu a b c singillatim in quēlibet aliox d e f eq̃le esse ei quod fit ex ductu compositi a b c in compositum d e f. nam qd̃ fit ex ductu a b c singillatim in d: equū est ei qd̃ fit ex ꝓposito a b c in d. et cōsimiliter de ductu a b et c singillatim in e et f argumētabere qd̃ nichil aliud est q̃ qd̃ fit ex ductu a b et c in d e et f singillatim: per precedentem equale esse ei qd̃ fit ex composito a b c in d e et f singillatim. Vt per nonam qd̃ fit ex composito a b c singillatim in d e et f: equum est ei quod fit ex ꝓposito a b c: in compositum d e f. quare cōstat quod fit ex ductu quotlibet numerorum in quotlibet numeros equum esse ei quod fit ex composito illox in compositum ex aliis. Et he quattuor octaua: nona: decima: et vndecima: praxim multiplicandiq; modum: plane declarant.

12 ¶ Quicunq; numerus numerat totum et detractum: numerat et residuum.

¶ Sit a b totum: a detractum et b residuum. dico q̃ si c numerat a b et a: ipm nūerare b. numeret enī a b scōm numerum d e et a quidē scōm d. quia igitur per nonam q̃tum est c in d e: tm̃ est c in d et c in e Vt a equale est ei qd̃ fit ex c in d: igitur a cū eo qd̃ fit ex c in e: equū est a b. quare qd̃ fit ex c in e: equū est b. sed c numerat qd̃ fit ex c in c per diffinitionem: igitur ⁊ b suū equale numerabit. qd̃ est ꝓpositū.

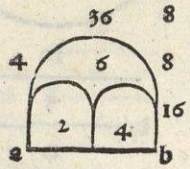
13 ¶ Tm̃ est qd̃ fit ex ductu nūeri in se: q̃tū qd̃ fit ex ductu eiusdem in oēs suas partes.

¶ Sit a quicūq; nūerus quē semel pono diuisum in oēs suas ptes q̃ sint b c d e: ⁊ semel indiuisū: tūc qd̃ fiet ex a in b ⁊ in c ⁊ in d ⁊ e p nonā equū est ei qui fit ex a in ꝓpositū ex b c d e. at ꝓpositū b c d e: est a. qd̃ fit igit̃ ex ductu numeri in oēs suas partes: equū est ei qd̃ fit ex ductu eiusdez numeri in se. q̃re ⁊ alternatim per octauam qd̃ fit ex ductu nūeri in se: tm̃ est q̃tum qd̃ fit ex ductu eiusdē in oēs suas ptes.

¶ Numero in duo diuiso quod fit ex ductu totius numeri in altex illox: est ꝗtum qꝗ fit ex ductu ciusdem in se ⁊ in reliquum. 14

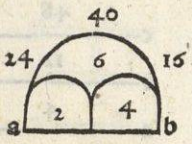
¶ Sit a b nũerus in duo a ⁊ b diuisus: dico qꝗ fit ex ductu a b in a equũ esse ei qꝗ fit ex ductu a in se ⁊ in b. et ita quoꝗ qꝗ fit ex a b in b: equale eẽ ei qꝗ fit ex b in se ⁊ b in a. ducatur ergo a b in a: tunc qꝗ fiet ex ductu a b in a ꝑ octauam equũ erit ei qꝗ fit ex ductu a in a b. at qꝗ fit ex ductu alicuius in a ⁊ in b equũ est per nouã facto ex ductu in compositũ a b. ergo cũ a ducit in seipm a ⁊ in b: tm̃ facit ꝗtum a b in a. et ita argumentare si a b ducatur in b. et consimili modo concludes propositum. Poterit id clarius videre si bis ponis a et bis ponis b.

¶ Si numerus in duo diuidatur: qꝗ fit ex ductu totius in se tm̃ est: ꝗtum quod fit ex ductu vtriusqꝗ diuidentium in se ⁊ vnius bis in altex. 15



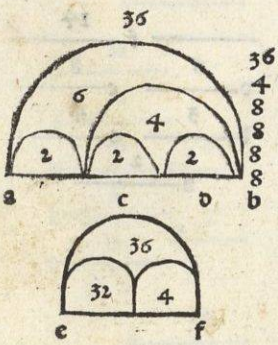
¶ Sit a b numerus in duo a ⁊ b diuisus: dico qꝗ fit ex ductu a b in se equũ eẽ ei quod fit ex ductu a in se ⁊ b in se: et ex ductu bis a in b. Nam qꝗ fit ex a b in se: equũ est ei quod fit ex ductu eius in a ⁊ b ꝑ tri decimam. At qꝗ fit ex ductu a b totius in a ⁊ in b ꝑ precedentem bis sumptam: equũ est ei quod fit ex ductu a in se ⁊ in b et b in se ⁊ in a. sed qꝗ fit ex a in b ⁊ b in a alternatim ꝑ octauã equat ei qꝗ fit ex ductu bis a in b. quod fit igit ex a b in se: equat ei quod fit ex a in se ⁊ b in se: et ex a bis in b qꝗ ꝓponeba tur. Et ex hoc cognoscitur modus eliciendi latus tetragonum.

¶ Si numerus in duo diuidat: qꝗ fit ex toto in se cũ eo qꝗ fit ex altero in se fit: equũ est ei qꝗ ex toto in illud idem bis: qꝗqꝗ ex reliquo in se ducto ꝓducitur. 16



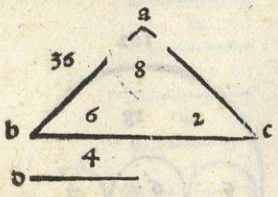
¶ Sit vt prius a b numer⁹ in duo a ⁊ b diuisus: dico quod ꝓducit ex a b in se cũ eo quod fit ex a in se: equũ esse ei quod fit ex a b bis in a / ⁊ b in se. Nam qꝗ fit ex a b in se: ꝑ precedentem tm̃ est ꝗtũ quod fit ex a in se ⁊ b in se: et a bis in b. quod ergo fit ex a b in se cũ eo quod fit ex a in se: tm̃ erit ꝗtum quod ex a in se bis ⁊ a in b bis ⁊ b in se. sed quod fit ex a in se bis / et bis in b per 14 equat ei quod fit ex a b in a bis. cui adde quod fit ex b in se. tunc ꝗqꝗ quod fit ex a b in se cũ eo quod fit ex a in se: equabit ei quod fit ex a b in a bis ⁊ b in se. quod est propositum.

¶ Si numerus in duo diuidatur qꝗ fit ex toto in se: equũ est ei qꝗ fit ex ductu vnius partis in aliud quater: cum eo qꝗ fit ex differentia in se. 17



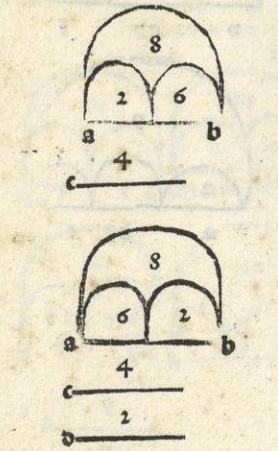
¶ Sit a b nũerus in duo a ⁊ b diuisus sitqꝗ b maio⁹: diuidatqꝗ iterꝗ b in duo scz in d equale a: ⁊ c d tam b ad a. dico quod fit ex a b in se: equũ eẽ ei quod fit ex ductu quater a in b ⁊ c in se. Nã ꝑ decimãquintã quod fit ex a b in se: equũ est ei quod fit ex a bis in b ⁊ a in se ⁊ b in se. at ꝑ ꝑcedentẽ quod fit ex b ĩ se cũ a in se equali d vni ptiũ b: equat ei quod fit ex b bis in a ⁊ c in se: ꝗre alternatim ꝑ octauam ⁊ ei quod fit ex a bis in b ⁊ c in se. Igit a b in se tantus est ꝗtus a quater in b cũ differẽtia c in se. quod intenditur.

¶ Qꝗ fit ex minore diuidẽtium in se cum eo qꝗ fit ex toto in corꝗ differentiam tm̃ est ꝗtum quod ꝓuenit ex maiore corũdem per se multiplicato. 18



¶ Sit a numerus diuisus in b maius ⁊ c minus: sitqꝗ d differentia b ad c. dico quod fit ex c in se: cum eo quod fit ex a in d: tm̃ esse ꝗtum quod fit ex b in se. Nam per decimam quod fit ex a in d: equat ei qꝗ fit ex b in d ⁊ c in d. Sit itaqꝗ illꝗ e. et quia b diuisum est in c ⁊ d differentiam: per 14 quod fit ex b in d altex diuidentium: equum est ei quod fit ex d in se ⁊ in c. et cum per octauam c in d etiam equet d in c: erit igit a in d equum ipis d in se ⁊ bis d in c simul. quibus si addas c in se quod sit f: totum quod ꝓuenit ex a in d ⁊ c in se scz e ⁊ f equabit d in se / c in se / et bis d in c. at b in se (cum ipm diuisum sit in d ⁊ c aut equale) per decimãquintã tm̃ etiã est ꝗtũ d in se c in se: ⁊ bis d in c. scz ꝗtum fit ex ductu vtriusqꝗ partium in se: ⁊ vnius in alteram bis. Est igit quod fit ex a in d toto scz in differentiam: cum c minore parte in se: ꝗtum quod fit ex b maiori parte in se multiplicata. quod intendit propositio.

¶ Si numerus per duo equalia duoqꝗ inequalia secetur: qꝗ ex ductu vnius equaliũ in se producitur tm̃ est: ꝗtum qꝗ fit ex ductu vnius inequalium in reliquũ cum eo qꝗ fit ex differentia in differentiam. 19



¶ Priusqꝗ veniamus ad demonstrationem: notatu dignum arbitror ꝗ quãdo aliqs numerus vt a b in duo equalia pariter ⁊ in duo inequalia vt in a minus ⁊ b maius diuidit: illa duo inequalia ad vnũ equalium quod totius medietas est: eandem atqꝗ cõem habere differentiam. nam cum illorũ duorum inequalium simul iunctorꝗ illud equale sit medietas: illa ab eo equidistare per secũdaz partem secũde huius necesse est: quare ad ipm cõem habebunt differentiam. Hic fit etiãvt differẽtia vnius inequaliũ ad reliquum: dupla sit ad differentiam cõem ipsius equalis ad ipsa. Nam cum ipsa inequalia vt a ⁊ b extrema sint et ipsum equale medium: per octauam conceptionem differentia ipsorꝗ constituta est ex differentijs eorum ad ipm medium. Sed hec statim nota sunt. Nos ergo ad propositi demõstrattõem cõuertamus. Sit a b nũerus diuisus in a maiorem portionem ⁊ b minorem: sitqꝗ cvna eius medietas: et d sit differẽtia cõmunis c ad a et ad b. Nam vt ostẽsum est c ad vtrunqꝗ eandẽ communẽqꝗ habebit differentiã. Dico ꝗ fit ex c in se tm̃ esse quantũ qꝗ fit ex a in b cum eo qꝗ ex d in se. qꝗ enĩ c diuisum ẽ in d et b. ideo per decimãquintã qꝗ fit ex c in se equũ ẽ ei qꝗ fit ex d in se et b in se et b in d bis. et qꝗ a maior portio est totũ et eius partes b et differẽtia dupla ad d. ergo per decimãquartã a in b tantũ est quantũ qꝗ fit ex b in se et b bis in d. adde igitur ei qꝗ fit ex a in b numerũ qui fit ex d in se: ⁊ tunc totũ qꝗ fit ex a in b et d in se equabit ei quod fit ex d in se b in se et b in d bis: cui demonstratum est equari

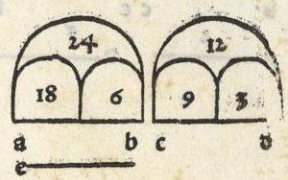
c in se. constat igitur qd̄ fit ex ductu vnius equaliū in se tantū esse ꝗtum qd̄ ex vno ĩequaliū in reliquū cum eo qd̄ fit ex differentia in differentiā.

20 ¶ Si numerus per duas quaslibet diuisiones diuidatur: qd̄ fit ex ductu maximi diuidentiū in minimū cum eo qd̄ fit ex differētia ipsius maximi ad alterū mediorū in differentiam eiusdem ad minimū tantum est ꝗtum qd̄ fit ex ductu duorum mediorꝫ vnius in alterum.

¶ Ut in precedēti id ante animaduertere licet ꝙ cū quilibet numerus duabus hoc pacto diuisionib⁹ secatur vt a vna diuisione in b ⁊ c et secūda in d e. quorū b sit maximus et c minimus ⁊ d mediorꝫ maior et e minor que differētia primi ad secundū eandē esse tertij ad quartū ipsis sic ordinatis. Nam qꝛ d e equales sunt circūpositis b c: ab illis per secundā partē tertie equidistāt. quare q̄ differētia b ad d que sit f: eadē erit e ad c. et etiam que differētia b ad e que sit g: eadē erit d ad c. Nam per octauā conceptionem differētia extremorū b e constituitur ex differētiis b ad d et d ad e. ⁊ differētia d ad c extremorū per idē constituitur ex differētiis d ad e ⁊ e ad c. Sed differētia d ad e est vtriq; cōmunis: et differētia e ad c probata est equalis differētie b ad d. erunt igitur differētie b ad e ⁊ d ad c ex equalibus quidem constitute adinuicem equales. Esto ergo a numerus eo qui positus est modo diuisus et differentie vt posite sunt assignate. dico ergo qd̄ fit ex ductu b maximi diuidentiū in c minimū cū eo qd̄ fit ex f in g: equale esse ei qd̄ fit ex d in e vnius videlꝫ mediorū in reliquū. qd̄ enī fit ex ductu d in e per nonā aduuāte octaua tm̄ est ꝗtum qd̄ fit ex d in c et in f. Nam e diuisum est in c et d ꝛiam f. Sed qd̄ fit ex d in c et f per octauā equū est ei qd̄ fit ex c et f in d. et qd̄ fit ex f in d equat per nonam ei qd̄ fit ex f in c ⁊ g. at qd̄ fit ex f in c tm̄ est per octauā ꝗtum qd̄ ex c in f. ꝙ aūt ex c in d ⁊ in f tm̄ est per nonam ꝗtum qd̄ ex c in b. constat igitur qd̄ fit ex d in e tm̄ esse ꝗtum qd̄ ex c in b cū eo qd̄ fit ex f in g ⁊ propositum.

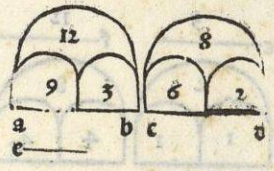
21 ¶ Si quota pars totus totius tota pars detractus detracti: erit residuus residui tota pars quota totus totius.

¶ Sit a b numerus cui⁹ detractus sit b ⁊ residuus a. sitq; alius numer⁹ c d cuius detract⁹ sit d et residuus c ⁊ quota pars totus c d est totius a b: tota pars sit d detractus detracti b. dico ergo totā partem c residuū esse residui a: quota pars est totus c d totius a b. capio numerū e cui⁹ c tota pars sit quota d est b. et intelligo quattuor numeros c primū e secundū d tertiū b quartū. constat enī per quartā qꝛ c tota pars est e quota d est b: compositū c d totam partē esse cōpositi e b quota pars c est e ⁊ tota pars positus est c d ad a b. est igit a b eque multiplex ad c d vt e b ad c d et per tertiā conceptionē adinuicē equales. quare e est equalis a. ⁊ vt c ad e: ita quoq; c ad a. sed c ad e est vt detracti ad detractū ⁊ totius ad totum. est igitur c ad a residuus ad residuū vt totus ad totum et quota pars totus totius quod est propositum.



22 ¶ Si quote partes totus totius tote partes fuerit detractus detracti: erit residuus residui tote partes quote totus totius.

¶ Sit a b numerus cuius detractus sit b et residuus a. ⁊ c d alius numerus cuius detractus sit d et residuus c ⁊ quote partes totus c d est totius a b: tote sit detract⁹ d detracti b. Dico ergo c totas ꝑtes esse a quote c d est ipsius a b. Pone numerū e cuius c tote partes sint quote d est b ⁊ argumētare penitus eodē modo per quintam quomodo in precedenti argumētatus es per quartā.

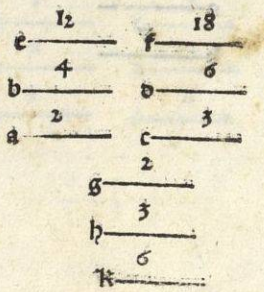


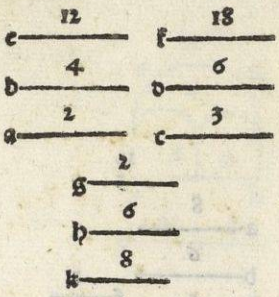
23 ¶ Omnis pars partis: est pars totius denominata a numero qui fit ex ductu duorū numerorꝫ vnius in alterū partes illas denominantiū.

¶ Sit a totus numerus: b eius pars et c pars b ⁊ numer⁹ denominās b in a sit d et denominās c in b sit e. sitq; f numerus qui fit ex ductu d in e. Dico ergo c denomīari in a ab f numero scꝛ qui fit ex ductu duorum denominantiū vnius in alterum. Diuido enim f in partes equales c: ⁊ similiter a in partes equales b. et qꝛ quoties b est in a: toties e est in f. est enim d denoīator vtriusq; cōmunis per hypothesim cum b secundū ipsum numerek in a: et c secundū eundem numerek in f. Ideo quot partes numero habet a ad b: tot habet f ad e. at qꝛ c numerat b secundū e cum ex hypothesi e sit denominās quoties c in b. numerabit igitur c primā partem a equalē ipsi b per primā partez f equalē ipsi e. ⁊ eadē ratione bit a secundū f. per diffinitionē igitur denominabitur quoties c in a secundū f atq; f erit ipsum denorum illas partes denominantiū vnius in alterum quod intenditur.

24 ¶ Si fuerit primus secūdi tota pars quota tertius quarti: itēq; secūdus quinti quota pars quartus sexti: erit primus quinti tota pars quota tertius sexti.

¶ Sint sex numeri: a primus: b secundus: c tertius: d quartus: e quintus: f sextus. sitq; a tota pars b quota c est d ⁊ b tota pars e quota d fuerit f. dico igitur a totā partem esse e quota pars c est ipsius f. sit enī g denominās quoties a in b et h quoties b in e. cum a sit pars b ⁊ b pars e. ducatq; g in h ⁊ p̄ueniat lꝛ. qꝛ igitur a est pars b partis scꝛ ipi⁹ e per precedentē a denominatur pars e a numero lꝛ qui fit ex ductu g in h numerorū illas partes denominantiū vnius in alterum. at numerus h denominās b in e est etiam numerus denominās d in f ⁊ g denominās a in b etiam denominat c in d. denoīabitur igitur per eandem precedentem c in f ab eodem numero lꝛ qui fit ex ductu g in h denominantiū illas





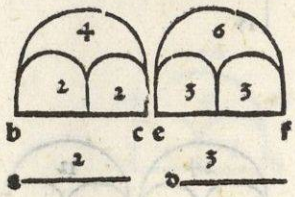
partes quare quota pars est a primus e quinti tota pars est c tertius f sexti vtpote que ab eodem numero lz denominatur: quod est propositum.

¶ Si primus in secundo quotics quartus in sexto: itemq; tertius in quarto quotics scōs in quinto: necesse est toties esse primū in quinto quotics fuerit tertius in sexto. 25

¶ Sint vt prius sex numeri: a primus: b secūdus: c tertius: d quartus: e quintus: f sextus. sitq; a tota pars b quota d est f et c tota pars d quota b est ipsius e. dico a totam partem esse e quota c est f. hec penitus vt precedens demonstratur.

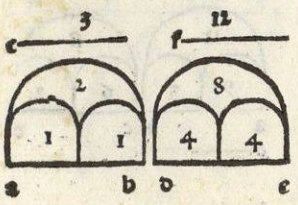
¶ Si fuerit primus tota pars scōi quota tertius quarti: itemq; primus quinti quota tertius sexti erit primus tota pars secundi et quinti quota tertius quarti ⁊ sexti. 26

¶ Sint sex numeri: a primus: b secūdus: c tertius: d quartus: e quintus: f sextus. sitq; primus in scōo vt tertius in quarto et primus in quinto vt ternus in sexto. dico a primū esse totā partem b e secundi et quīti quota c tertius est d f quarti ⁊ sexti. qz per hypothesim primus in secūdo vt tertius in quarto sit ergo g numerus denominās quoties a in b et c in d. ⁊ qz etiam per eandem hypothesim primus in quinto vt tertius in sexto. sit ergo h numerus denominās vtriusq; scz quoties a in e ⁊ c in f. sitq; ꝓpositum ex g h numerus lz. tunc sic: qd̄ fit ex ductu a in g et h: tantū est q̄tum b ⁊ e. et per nonam quod fit ex a in g ⁊ h: tantū est q̄tum qd̄ ex a in lz compositū ex ipsis. Similiter quod fit ex c in g et h: tantū est q̄tum d ⁊ f. et q̄tum qd̄ fit ex c in lz. igitur a primus tota pars est b e secundi et quinti quota c tertius d f quarti et sexti: vt qui numerētur in illis fm eundem numerū lz: quod vult propositio.



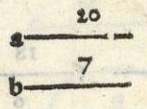
¶ Si fuerit primus secundi tota pars quota tertius quarti primis quidē minoribus erit primus tertij tota pars aut partes quota pars aut partes secundus quarti. 27

¶ Sit a primus numerus: b c secundus: et d tertius: e f quartus: a ⁊ b c simul existētibus minoribus et quota pars a est b c tota pars d sit e f. dico igitur quota pars aut partes b c fuerit e f totam partē aut partes numerū a esse d. Diuido enī b c in partes suas equales a que sint b et c. item diuido e f in partes suas equales d. et qz e f est eque mltiplex ad d vt b c ad a ex hypothesi: ideo tot partes numero erunt ipsius e f quot posite sunt b c. Sint igitur ille e ⁊ f. cum igitur b prima pars b c sit equalis a ⁊ e prima pars ipsius e f sit equalis d quota pars aut partes b erit e tota pars aut partes a est d. et ita de parte c respectu partis f et reliquis partibus vnius ad reliquas partes alterius si plures essent. Intelige igitur b esse primū numerū: e secundum: c tertium: f quartū. et si b est partes e argumētor per quintā: qz primus b probatus est tote partes e secūdi quote ꝓtes est c tertius f quarti. ergo b c primus et tertius tote partes sunt e f secundi ⁊ quarti quote partes b primus est e secūdi. at a ad d monstratus est tote partes quote b est e. igitur et quote b c secundus est e f quarti. et si b esset pars e omnino consimili modo per quartā vt nunc quoq; factum est per quītam elicerem argumentū. Manifestū itaq; est si primus in secundo vt tertius in quarto primis existentibus minoribus: primum totam partem aut partes esse tertij quota pars aut partes secundus ē quarti.



¶ Si primus tote partes secundi quote tertius quarti primo ⁊ secundo minoribus erit primus tota pars aut partes tertij quota ꝑs aut partes secundus quarti. 28

¶ Sint quattuor numeri: a b primus: c secundus: d e tertius: et f quartus. quorum a b ⁊ c duo primi duobus reliquis sint minores: et sit a b tote partes c: quote d e est f. dico a b totam partē vel partes eē d e quota pars vel partes c est f. diuido enī a b in suas partes ad c que sint a ⁊ b et similiter d e ī suas ad f que sint d et e. cum igitur per hypothesim a b tot partes sit c quot partes d e est f: tot erunt ꝓtes numero a b diuisi quot ⁊ d e. et a prima pars a b tota erit c sui totius quota d prima pars d e est sui totius f. quare per precedentē a prima pars a b ad d primaz partem d e tota pars aut partes quota aut quote c ad f. et similiter b secunda pars primi ad e secūdam partem tertij tota pars aut partes quota vel quote c ad f. sicq; de reliquis partibus primi ad reliquas tertij si plures sint partes. At si a ad d sit pars facio a primum numerū: d secundum: b tertium: ⁊ e quartum. et argumentor per quartam: quia a tota pars est d quota b est e. ergo a b ad d c tota pars quota a ad d. sed a ad d mōstratus est tota ꝑs quota c ad f. ergo a b primus ad d e tertium tota pars quota c ad f secundus ad quartum. Quod si a ad d sit partes penitus consimili modo per quītam argumentabere quomodo nunc per quartam de parte constat esse argumentatū. Planum itaq; est solidum esse propositum. Et si contingeret duos primos numeros duobus vltimis esse maiores: conuerso modo concludēdum esset tertium primi totam partem aut partes quota quartus secundi. quod facile monstrari potest ordine permutato constituendo scz duos vltimos priores et primum ⁊ secundū posteriores.

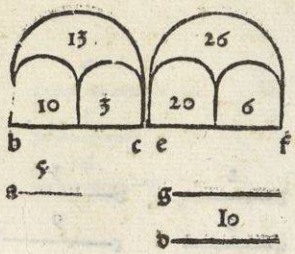


¶ Omnis numerus minor aut maioris pars est: aut eo ab maiore quotics potest detracto relinquetur ipsius aut pars aut partes 29

¶ Sint a b duo numeri a maior et b minor. dico b esse partem a vel eo detracto quoties poterit ab a remanere ipsius b aut partem aut partes. si enim b minor numerat a maiorem per diffinitionē b est pars a. si secus autem b non metitur a. substracto igitur b quoties poterit ab a remanebit minor b. Nam si nichil remaneret numeraret a secundū numerum denominantē quoties substraheretur. quoties enim aliquis numerus ab aliquo substrahi potest: toties in ipso numerabilis est per sextā petitionem qui si remanet minor b per primam propositionem est ipsius b aut pars aut partes: quod est propositum.

30 ¶Si quote partes primus secundi tote tertius quarti primis itidē semp minoribus: quoties erit primus in secūdo toties tertius in quarto. et quota pars vel partes pmi superunt in secūdo: tota pars aut partes tertij superunt in quarto.

¶Sit a primus numerus/secūdus b c/tertius d/et quartus e f. et primi a et b c mīores: sitq; a pmus tot et tote partes b c secūdi quot et quote ptes d tertius est e f quarti. Dico quoties a est in b c: toties d esse in e f. et quota pars vel partes a primi supsunt in b c secūdo totam ptē vl ptes d tertij remanere in e f q̄rto. substrahō enī a primū a scdo b c q̄ties possum: sitq; totus substractus b ⁊ residuus c: sitq; d toties ī g: q̄ties a ī b. quo q̄dē ita posito q: a tote ptes ē b c q̄te d ē e f: ergo p vicesimāoctauā a tota ps vel ptes ē d: q̄ta ps vel ptes b c ē e f. Rursus ītelligo a pmū numerū. b scōm. d tertiū. g quartū: ⁊ ꝓsilr argumētor p vicesimāseptimā. q: a tota ps est b q̄ta d est g p hypothesim: ergo p vicesimāseptimā q̄ta ps vel ptes b ē g: tota ps vel ptes a ē d. at a ostēsus est tota ps vel ptes d q̄ta ps vel ptes b c est e f: igr quota ps vel ptes ē b c ad e f: tota ps vl ptes ē b ad g. at q: q̄t ptes a ē b c: tot ptes d ē e f. et quot ptes a ē b: tot ptes d ē g. nā b ⁊ g eq̄ multiplices: et a ē pauciores tote ptes b q̄ totius b c: igit ⁊ d pauciores tote ptes ē g q̄ e f. substrahat igit g ab e f: sitq; detractus e ⁊ residuus f: ⁊ ꝓstabit primū ꝓpōnis ꝓpositū. scz q̄ties a in b c: toties d eē in e f cū e sit eqlis g. ex hoc etiā manifestū est b totā ptē vel ptes esse e Nā e ⁊ g equant: detracti scz ad detractū q̄ta pars vel ptes ē totus b c ad e f totū. si aūt nūerus b ipl⁹ e tota ps fuerit: g p vicesimāpmā erit c residuus/residui f tota ps q̄ta tot⁹ totius. si aūt tote ptes: erit p vicesimāscdāz c residu⁹ tote ptes residui f: q̄te b c totus e f toti⁹. sz esto g vt b tota ps sit e q̄ta ps totus b c: ē toti⁹ e f. Intelligo c pmū. f scōm. b c tertiū. et e f quartū: ⁊ argumētor p vicesimāseptimā. q̄a quota ps c ē f: tota ps b c ē e f vt mōstratū est: ergo q̄ta ps vel ptes c ē ad b f: tota ps vel ptes f est ad e f. et si b eēt ptes e ꝓsilr argumētare p vicesimāoctauā ⁊ ꝓclude itez p eā c totā ptem vel ptes eē totius b c: quota pars vel partes f est totius e f. et hoc est totum propositum.

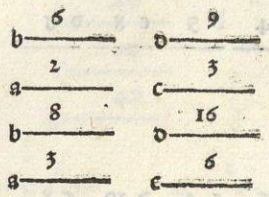


31 ¶Si toties dempto primo de secundo quoties tertio de quarto tota pars vel partes primi relinquātur in secundo quota aut quote tertij in quarto: primū totas eē partes secundi quotas tertium quarti necesse est.

¶Hec est ꝓuersa precedētis quevt p̄cedētes duobus primis nūeris minoribus intelligat. sit igitur a vt prius p̄mus numerus/b c secūdus/d tertius/et e f quart⁹: et sint duo primi mīores ⁊ toties demat primus a secūdo sitq; dēptus b: quoties terti⁹ a quarto qui dēptus sit e et sit vt q̄ta pars vel ptes p̄mi relinquūtur in scdo tota pars vel ptes tertij relinquantur in quarto: sitq; c relicta ps vel ptes in scdo et f in quarto. Dico ergo a primū totas eē partes b c secūdi quote d tertius est e f quarti. Capio g qui sit tote ptes e f quote ptes a est b c ⁊ p precedentem quoties a est in b c: toties g erit in e f. et quota ps aut ptes a supsunt in b c: tota ps aut ptes g superūt ī e f. At toties positus est d eē in e f: q̄ties a est in b c. et totā ptem vel ptes d supesse in e f: quota ps vel ptes a supsunt in b c: igitur g ⁊ d adiuicem sunt equales. quote igitur partes a est b c: tote d est e f. quod est propositum.

¶Primi elementorum Arithmetices Iordani finis.

p Roportio est duaꝝ quātitatum eiusdem generis vnius ad alteram certa in quātitate relatio. ¶Numeri ad numerū dicitur ꝓportio minoris q̄dē ad maiorem in eo q̄ pars est vel partes: maioris vo ad minorem ꝓm q̄ cum cōtinet et eius partem aut partes. ¶Proportionalitas est similitudo ꝓportionū. ¶Continua ꝓportionalitas est qū ꝓnectūtur nō dissociatis mediis. hec aūt ad minus ītēr tres coalescit terios: cū saltem vnū sumēdum sit mediū Incōtinuavo est in qua intercedit mediorū interruptio. Et hec ad mīmum quattuor exigit terios ꝓpter alterius medij sumptionem. ¶Quādo fuerit tres numeri ꝓtinue ꝓportionales: dicetur primi ad tertium proportio primi ad secūdum duplicata et ad quartum triplicata. ¶Cum aūt cōtinuate fuerint vel eedem vel diuerse ꝓportiones: dicetur primi ad vltimum ꝓportio ex oībus composita. Denoiatio dicitur ꝓportiōis minoris quidē ad maiorem pars vel partes quota vel quote illi⁹ fuerint: maioris vo ad minorem numerus ꝓm quem eū cōtinet et pars vel partes minoris que in maiore superfluunt. Similes siue vna alij eadem: dicūtur ꝓportiones que eandem recipiunt denoiationem. maior vo que maiorem: et minor que minorem.



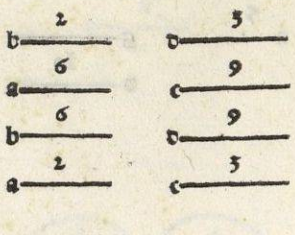
1 ¶Si fuerit proportio primi ad scōm que tertij ad quartum: erit ecōuerso que secūdi ad primum eadem quarti ad tertium.

¶Hec demōstrat ꝓuersam ꝓportionalitatem: que ab euclide quīto geometrie ponit pria spēs ꝓportionalitatum. et est quoties cōcludimus ꝓnis ad añcedens vt ꝓnis ad añs: q̄ añs ad ꝓnis sese habuerit vt añcedens ad ꝓnis. añcedēs enī est primū ꝓportionis extremum: ꝓnis vo scōm. Sint itaq; quattuor numeri: a primus/b secundus/c tertius/d quartus: sitq; vt que proportio a ad b: eadem sit c ad d. dico ecōuerso que proportio b ad a: eādez esse d ad c. Nam cū ea sit ꝓportio c ad d que a ad b p diffinitionē eandem habebūt denomiationem. si itaq; a sit minor b ex diffinitiōibus tota pars vel partes erit a ad

b:quota pars vel partes c ad d. Si aũt sit a ad b tota pars quota c ad d: vt in prima figuratiõe mõstrat tur: erit d eque multiplex ad c vt b ad a. quare que ꝓportio b multiplicis ad a: eadem erit d eque multiplicis ad c. at si a tote partes sit b quote c est d: per tricesimã igitur primi b toties cõtinebit ipm a et totã eius partẽ vel partes: quoties d ꝓtinet c et quotã eius partem vel partes. q̃re silis erit denoiatio b ad a que d ad c: et que ꝓportio b ad a eadem et d ad c. q̃ si a numerus eẽt maior b: ꝓsimili argumẽto pateat propositum ponẽdo b primum numerum/a scõm/d tertium/c quartum.

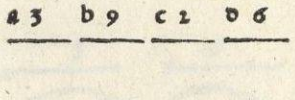
¶ Si fuerit primus ad scõm sicut tertius ad quartum: fueritq̃ primus maior secũdo erit tertius maior quarto. 2

¶ Sint vt prius quattuor numeri: a primus/b secũdus/c tertius/d quartus: sitq̃ a maior b. dico etiã c esse maiorem d. Nam per precedentem qz que ꝓportio a ad b ea est c ad d: ideo ⁊ ꝓtra que ꝓportio b ad a eadem erit d ad c. at b ponit minor a: igit erit per primam primi b pars aut partes a. quare et d tota ꝑs vel ꝑtes c. atq̃ d mior c qd̃ intẽdit. Potes ⁊ directe ꝓbare qz a ẽ maior b aliq̃ties ꝓtinet b vel aliquoties et ptẽ aut partes. et cũ c eandem ꝓportionẽ hẽat ad d: ergo toties c cõtinebit d aut toties et partem aut partes. q̃re c maior est d. qd̃ est propositum. Et cõsilr ꝓbare possis q̃ facillime si ꝑmus minor scõo fuerit: tertiũ quarto eẽ minorem. Nã si primus sit mior scõo per primam primi erit pars vel partes scõi. et cũ tertius ad quartum eãdem habeat proportiõem: tota ꝑs aut partes erit tertius quarti: quare minor quarto. et si primus eẽt equalis scõo ꝓsilr ꝓbabis tertium esse equalem quarto.



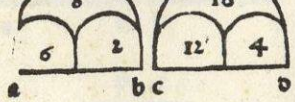
¶ Si fuerit primus ad scõm sicut tertius ad quartum: erit pmutatim sicut primus ad tertium: ita secundus ad quartum. 3

¶ Hec demonstrat pmutatam proportiõalitatem: que est quoties cõcludimus vt añs ad añs: ita ꝓñs ad ꝓñs: q̃ vt añcedens ad ꝓñs: ita añs ad ꝓñs sese habuerat. Sint ergo quattuor numeri: a primus/b secũdus/c tertius/d quartus: sitq̃ similis ꝓportio a ad b et c ad d. dico silem esse proportionem a ad c et b ad d. Nam primo si a sit minor ⁊ pars b: qz similis est proportio a ad b et c ad d: hinc euenit vt q̃ta pars a sit b tota pars c sit d. ergo per vicesimãseptimã primi: quota pars vel partes b est ad d: tota ꝑs vel partes erit a ad c. erit itaq̃ eadem ꝓportio a primi ad c tertium: et b secundi ad d quartum. Scõo si a sit ꝑtes b vt in scõa figuratione: idem ⁊ similiter argumẽtabere per vicesimãoctauã primi. Tertio si a sit maior b: facto b primo/a secũdo/d tertio/c quarto: auxilio prime huius idẽ efficies q̃ facillime.



¶ Si fuerit primus ad scõm sicut tertius ad quartum fueritq̃ primus maior tertio: erit quoq̃ secundus maior quarto. 4

¶ Sit a primus numerus: b secundus/c tertius/d quartus: ⁊ similis proportio a ad b et c ad d: sitq̃ a maior c. dico b eẽ maiorem d. Nam qz vt a ad b: ita c ad d. permutatim igitur per precedentem vt a ad c: ita b ad d. sed a maior est c: ergo et b maior d per secũdam. quod est propositum.

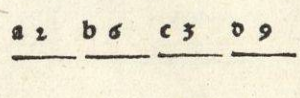


¶ Si sicut totus ad totum fuerit detractus ad detractum: erit residuus ad residuum sicut totus ad totum. 5

¶ Sit a b totus numerus: a detractus/et b residuus: et c d alter totus c ab eo detractus ⁊ d residuus sitq̃ similis proportio a b ad c d: et a ad c: dico b ad d proportionem esse que est a b ad c d. Nam si a b fuerit minor c d: erit per vicesimamprimam ⁊ vicesimamsecũdam primi sub disiũctione q̃ta pars aut partes fuerit a b ad c d: vt tota pars vel partes sit b ad d residui ad residuum. quare q̃ ꝓportio totius ad totum: ea erit ⁊ residui ad residuum. at si a b sit maior c d: ecõuerso quota pars vel partes c d ad a b: tota pars vel partes erit d ad b. quare itex per primam huius cõcluditur propositum.

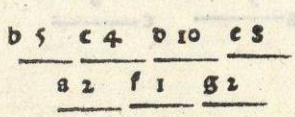
¶ Si fuerit primus ad scõm sicut tertius ad quartũ: erit primus ⁊ secundus ad scõm sicut tertius et quartus ad quartum. 6

¶ In hac demõstratur coniũcta ꝓportionalitas: que est quoties concludimus cõiũctum antecedẽtis et ꝓsequentis ad ꝓsequẽs vt piũctum añtis ⁊ ꝓñtis ad ꝓsequens: q̃ añcedens ad cõsequens se habeat vt antecedẽs ad consequens. Sit vt a primus numerus se habet ad b secũdum: ita c tertius se hẽat ad d quartum. Dico ergo vt a b ad b: ita et c d ad d. Nã quia est similis ꝓportio a ad b et c ad d: si a ergo sit minor b: erit vt quota pars vel partes a est b: tota pars vel partes c sit d. ergo semel b est in a b: et semel d in c d. et in a b superat a tota parsvel partes b: quota pars vel partes c est ipsius d exuperans in c d. quare que proportio b ad a b: eadem erit d ad c d. per primã ergo huius que proportio a b ad b: eadem erit c d ad d. qd̃ est propositum quo ad hoc. Et xo si a ponatur maior b vt in secũda figuratiõe per primam quota pars vel partes b erit ad a: tota pars vl partes d est ad c. ergo b semel se supaddẽs in a b: tota pars vel partes erit a b: quota pars vel partes d erit c d se itidem semel supaddens in c d. quare eadem proportio b ad a b et d ad c d. per primam ergo huius que ꝓportio a b ad b: eadem erit c d ad d. qnod itex est propositum.



¶ Si vnus numerus duos multiplicet: erit ꝓductox ⁊ multiplicatox eadẽ ꝓportio. vnde manifestũ est multipliciũ dñias submultipliciũ differentiis cẽ eque multiplices. 7

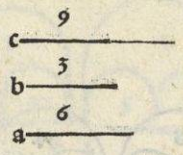
¶ Multiplicet a numerum b ⁊ proueniat d: et idem a multiplicet c ⁊ proueniat e. dico que proportio b ad c/multiplicati scz ad multiplicatum eãdem esse d ad e/ꝓducti scz ad ꝓductum. Nam cũ b sit in d ꝗm a: et c in e etiam ꝗm a: quoties b est in d toties c est in e. ergo q̃ proportio b ad d ea erit c ad e. pmutatim igitur per tertiam q̃ proportio b ad c ea erit d ad e. qd̃ est propositum quo ad hoc: ⁊ correlariũ



hoc intēdit. si g sit differētia d ad e: et f differētia b ad c. q̃ qz d et e sunt sumpti eque multiplices ad b et c: proportionem g ad f esse eque multiplicem vt d ad b. et sint b d duobus reliquis maiores. quia p̃ presentem ea est proportio d ad e: que b ad c. ergo permutatim per tertiam q̃ proportio d ad b totius ad totum: ea est e ad c detracti ad detractum. ergo per quintam g ad f residuus ad residuum vt d ad b totius ad totum. qd̃ est propositum.

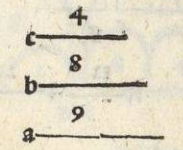
8 ¶ Si duo nūeri cūdem multiplicent: erit multiplicantiū ac ꝓductoꝝ eadem ꝓportio.

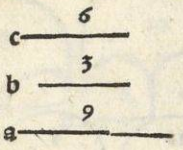
¶ Ut si in figuratione precedētis b multiplicet a: et ꝓueniat d. et c itidem multiplicet a: ⁊ ꝓueniat e. Dico q̃ proportio b ad c multiplicātis ad multiplicantem: eādem esse c ad e productī ad productum. Nam per octauam primi idem ꝓuenit multiplicando a p̃ b ⁊ b per a scz d. et siūiter idem ꝓuenit multiplicando a per c et c per a scz e. sed per precedētem b ⁊ c multiplicatis per a: eadem est ꝓportio b ad c ⁊ d ad e. ergo ⁊ multiplicātibus b ⁊ c a: eadē erit proportio b ad c ⁊ d ad e. qd̃ est propositum.



9 ¶ Si duo nūeri ad tertiū ꝓparent: maioris ad ipm maior erit ꝓportio ⁊ minor/ minor: ipius vo ad maiorem ꝓportio minor/ ad minorē maior. vñ manifestū est si duo nūeri ad eūdem cōparati: eādem seruent ꝓportiōis habitudinē: illis vnū/ cūdēq̃ cē nūcrū.

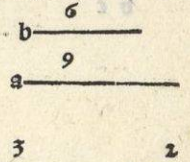
¶ Comparētur a b ad tertium c sitq̃ a maior b: dico ipsius a ad c maiorem eē ꝓportionem q̃ b ad c: dico etiā c ad a minorem esse proportionem q̃ c ad b. Primū patet et sit primo c tertius vtroq̃ a et b maior. qm̃ c est maior a ⁊ maior b: erit a pars vel partes c p̃ primam primi: et per eādem b eiusdē erit pars vel partes. et cū a positus sit maior b ipe erit plures ptes c q̃ b. quare maior proportio a ad c q̃ b ad c. Sit scōo c tertius vtroq̃ a ⁊ b minor: si a pluries ꝓtinebit c q̃ b ipm c ꝓtineat: cōstat ꝓpositū. Et si a ⁊ b equaliter ꝓtinebūt c: qz a maior b plures partes ipius vltra ꝓtinebit a q̃ ꝓtineat ipe b. q̃re idem cōcluditur a scz ad c maiorem eē proportionem q̃ b ad c. Sit tertio c tertius minor a ⁊ maior b: quia denoīatio proportiōis a ad c fit a toto multiplice aut a toto ⁊ parte aut partibus. et denomīatio proportiōis b ad c est a parte aut partibus: ꝓstat ⁊ hoc mō maiorem eē proportionem a ad c q̃ b ad c. et cū non possit c tertius esse maior a ⁊ minor b. qz quicūq̃ est maior maiore maior est ⁊ minore: ꝓstat prima ps quo ad oēs eius modos firma. Scōa pz: ⁊ sit prio c tertius maior a ⁊ b cū c sit maior a et b ⁊ a sit maior b. si c ꝓtinet plres b minorē q̃ a maiorē: ꝓstat proportionē c ad b esse maiorē q̃ c ad a. et si c cōtinet b ⁊ a equalit: cōtinebit insuper plures partes b minoris q̃ a. quare itez idem cōcluditur. Sit scōo c vtroq̃ minor. erit itaq̃ sumptis vnitatibus totidem partes maioris quot minoris. sed maioris per conceptionem erit totidez partes minores: cum partes ille a maiore numero sint denoīate. quare ipsius ad maiorem itez minor proportio. Sit tertio c tertius minor a ⁊ maior b: cū sit solum pars vel partes a ⁊ excedat ipm b: maior erit ipius ad b ꝓportio q̃ ad a. et cū nō possit vt dictum est eē maior a et minor b: cōstat secūda pars quo ad oēs eius partes monstrata. Correlariū ex prima parte facile cognitum esse potest.





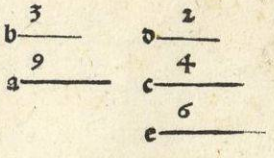
10 ¶ Si idem numerus ad duos cōparet̃ ad quē ipius maior ꝓportio fuerit: minorem/ et ad quem minor: maiorem esse necesse est.

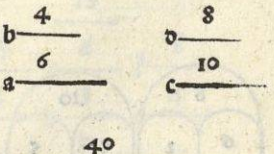
¶ Hec est ꝓuersa precedētis. Sint ergo a b duo nūeri ad quos cōparetur c tertius. et sit c ad a minor proportio: et c ad b proportio maior. dico a eē maiorem: et b minorem. Nam ꝑmo non erunt equales: quia c ad vtrūq̃ eēt eadem proportio. neq̃ a erit minor b. nam per primam partem precedētis: minor eēt a ad c proportio q̃ b ad c. et per scōam partem eiusdem maior c ad a proportio: ⁊ minor c ad b. qd̃ est ꝓtra hypothesim. relinq̃tur igitur propositum verum.

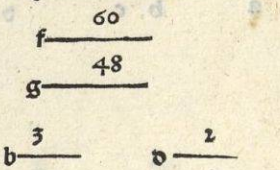


11 ¶ Si fuerit ꝓportio primi ad scōm maior q̃ tertii ad quartum: erit secūdi ad primuū proportio minor q̃ quarti ad tertium.

¶ Hanc in multiplicibus demōstrare pfacile est: vt si sit a ad b in genere multiplici maior proportio q̃ c ad d: dicam b ad a minorem esse proportionem q̃ d ad c. capiam enī e eque multiplicem ad d: vt a ad b. qz ergo a ad b et e ad d eque multiplices: erit a ad b ⁊ e ad d eadem proportio. at proportio a ad b posita est maior q̃ c ad d: ergo ⁊ proportio e ad d maior est q̃ c ad d. per scōam partem igitur none maior est proportio d ad c q̃ d ad e. at qz eadem est proportio a ad b ⁊ e ad d. per primā igitur huius eadem erit proportio b ad a ⁊ d ad e. sed d ad c ꝓbata est maior proportione d ad e: maior igitur erit ⁊ sua equali b ad a. qd̃ est propositum. at qz demōstratio hec non eque aptanda est alīs gñibus: idcirco alia vniūsalior adhibenda est. Sit ergo a ad b maior proportio q̃ c ad d: dico b ad a minorem eē ꝓportionem q̃ d ad c. duco enī c in b et proueniat e: et idē c in a ⁊ ꝓueniat f. per septimā huius q̃. ꝓportio a ad b: eadem erit f ad e. Rursus duco d in a ⁊ ꝓueniat g. qz c ⁊ d multiplicauerūt a p̃ octauam eadem erit proportio f ad g producti ad productum: q̃ c ad d multiplicātis ad multiplicantem. Est igitur f ad e proportio vt a ad b: et f ad g vt c ad d. sed proportio a ad b posita est maior proportiōe c ad d: igitur proportio f ad e maior est proportiōe eiusdē f ad g. per precedētem igitur e minor est ⁊ g maior. igitur per primam partem none huius ꝓportio e ad f minor est q̃ g ad f. sed proportio e ad f est eadē ꝓportioni b ad a: et ꝓportio g ad f eadem proportioni d ad c vt facile per primam huius cognoscere potes: igit̃ proportio b ad a scōi ad primū minor est q̃ ꝓportio d ad c quarti ad tertiū. qd̃ erat demōstrādū.

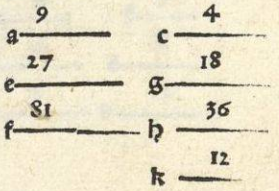






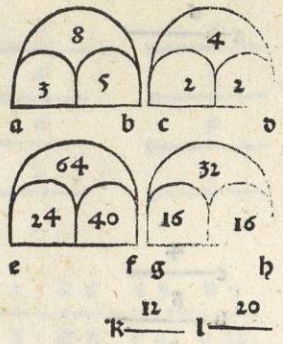
12 ¶ Si fuerit primi ad scōm proportio maior q̃ tertii ad quartum: erit primi ad tertiū maior q̃ secundi ad quartum.

¶ Sint vt prius q̃ttuor numeri: a primus. b scōs. c tertius. d quartus: et sit a ad b ꝓportio maior q̃ c ad d. dico maiorem esse ꝓportiōem a ad c primi ad tertiū: q̃ b ad d secūdi ad quartū. duco enī a in b



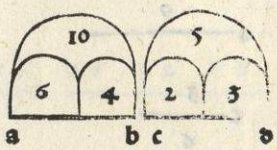
et proueniat e. ⁊ a in se et proueniat f. et in d et proueniat g. et in c et ꝓueniat h. per septimam huius que proportio a ad b: ea est f ad e. et que c ad d: ea h ad g. deinde duco b in c et ꝓueniat k: eritq; ꝑ octauam huius h ad k sicut f ad e. at proportio f ad e qꝛ equatur ꝓportioni a ad b: est maior proportione c ad d. ergo ⁊ proportio h ad k eadem proportioni f ad e: maior est ꝓportione h ad g. cū h ad g equetur c ad d. ergo per decimam k minor est g. et qꝛ f ad e vt h ad k: ꝗ per tertiam vt f ad h: ita e ad k. et qꝛ g ꝓbatus est minor k: ergo per scdam partem none minor erit proportio e ad g q̃ e ad k. sed e ad k per octauam huius aequatur proportioni a ad c primi ad tertium: et e ad g proportioni b ad d secundi ad quartū. Est igitur proportio primi ad tertium maior q̃ secundi ad quartum qd̄ proponitur.

¶ Si fuerit ꝓportio totius ad totum maior q̃ detracti ad detractum: erit residui ad residuum proportio maior q̃ totius ad totum. 13



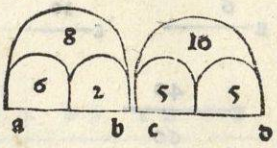
¶ Sit a b totum et ab eo detractus a ⁊ residuus b. sit item c d aliud totum ⁊ ab eo detractus c ⁊ residuus d. sitq; totius a b ad totū c d ꝓportio maior q̃ a ad c: dico b ad d residui ad residuum maiorem esse proportiōem q̃ a b ad c d totius ad totū. duco enī a b in a et in b et proueniat e f cuius detractus sit e ⁊ residuus f. et duco idē a b in c et in d et proueniat g h: cuius g sit detractus ⁊ residuus h. Item ducat a in c d et ꝓueniat k: substrahaturq; k ab toto g h ⁊ relinquatur l. cum enī per nonam primi qd̄ fit ex ductu alicuius numeri in oīs partes alicuius totius: equū sit ei qui fit ex ductu illi⁹ numeri in eūdē totum: totus e f equabitur ei q̃ fit ex ductu a b in seipm a b. et cū idem a b ductus in a ꝓduxerit e detractum e f. per septimā huius que ꝓportio a b ad a: eadem erit e f ad e. et eadē rōne que a b ad b: eadem e f ad f. et que a b ad c d: eadem e f ad g h. et vt c d ad c: ita g h ad g. et g h ad h: vt c d ad d. et cū duo numeri scz totus a b et a detractus: ducti sint in eūdem c d: et ꝓduxerit numerus a b numerū g h et a numerum l: per octauam que proportio a b ad a: eadem est g h ad l. sed et cū e ꝓducatur ex a in a b: et l: ex a in c d. per septimam q̃ proportio a b ad c d: eadē erit e ad l. quare vt e f ad g h: ita ⁊ e ad l detractus ad detractum. per quintam igitur vt e f ad g h: ita f ad l residuus ad residuum. et cū e ad g sit proportio que a ad c: erit proportio e ad g minor q̃ e ad l. quare per decimam l minor est g. igitur et l qui ꝓstabit ex h et differētia l ad g: maior erit h. igitur per eādem decimam ꝓportio f ad h mīorē numerum maior est q̃ ad l. at proportio f ad l ꝓbata est eadem ꝓportioni e f ad g h: quare ⁊ ꝓportiōi a b ad c d totius ad totum. Est igitur ꝓportio f ad h: q̃ est eadem ꝓportioni b ad d residui ad residuū: maior proportione a b ad c d totius ad totum. quod est propositum.

¶ Si vero detracti ad detractū fuerit ꝓportio maior q̃ totius ad totum: erit residui ad residuum proportio minor q̃ totius ad totum. Ex his quoq; perspicuum euadit si fuerit ꝓportio residui ad residuū sicut detracti ad detractum: ꝓportionem detracti ad detractum esse tanq̃ totius ad totum. 14



¶ Sit a b aliquis totus nūerus ⁊ ab eo detractus a ⁊ residuus b: et c d alter totus ⁊ ab eo detractus c et residuus d. sitq; a ad c maior proportio q̃ a b ad c d. dico b ad d minorem esse proportionem q̃ a b ad c d. quia enī a ad c est ꝓportio maior q̃ a b ad c d: per vndecimam huius ecōtra minor erit ꝓportio c ad a q̃ c d ad a b. cū itaq; maior erit ꝓportio c d ad a b totius ad totū q̃ c ad a detracti ad detractū. per precedentem igitur maior est proportio d ad b residui ad residuum q̃ c d ad a b totius ad totum. Intelligo igit d primū numerum. b scdm. c d tertium. et a b quartum. qꝛ d ad b maior est proportio q̃ c d ad a b: per vndecimam ecōtra mīor est proportio b ad d q̃ a b ad c d. est itaq; notum totius ad totū maiorem esse proportionem q̃ residui ad residuum ⁊ propositum. Correlarium patet: nam si totius ad totum maior esset proportio q̃ detracti ad detractum: ergo per precedentem residui ad residuum maior erit proportio q̃ totius ad totum. q̃re multo fortius residui ad residuum maior esset proportio q̃ detracti ad detractum. quod est cōtra hypothesim. Si autem totius ad totum mīor sit proportio q̃ detracti ad detractum: ergo per presentem residui ad residuum minor erit ꝓportio q̃ totius ad totū. quare ⁊ multo fortius residui ad residuum minor erit proportio q̃ detracti ad detractum. qd̄ est itez ꝓtra hypothesim. Cum itaq; ꝓportio totius ad totum neq; maior neq; minor esse possit q̃ detracti ad detractum: relinquitur eidem equalis.

¶ Si primi ad scdm fuerit proportio maior q̃ tertij ad quartum: erit primi ⁊ secundi ad secundum maior proportio q̃ tertij et quarti ad quartum: ad primum vero minor q̃ tertij et quarti ad tertium. 15

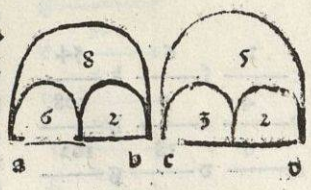


¶ Si a ad b maior ꝓportio fuerit q̃ c ad d: dico ꝑmo a b ad b maiorem eē ꝓportiōem q̃ c d ad d. secdo a b ad a minorem esse q̃ c d ad c. Primū patet: nā si a b ad b ⁊ c d ad d ponātur equales: vt q̃ ꝓportio a b ad b: ea sit c d ad d. ergo pmutatim ꝑ tertiā huius erit ꝓportio a b ad c d: que b ad d. q̃re ꝑ quintā que proportio a b ad c d: ea erit et a ad c residui ad residuum. quare et q̃ b ad d. et cū similes sint a ad c et b ad d: ergo permutatim per tertiam que proportio a ad b ea est c ad d. quod ē ꝓtra hypothesim. Si aūt ponatur a b ad b minor et c d ad d proportio maior: cū c d ad d sit proportio maior q̃ a b ad b ergo per duodecimam huius c d ad a b maior q̃ d ad b detracti ad detractum. ergo per decimā tertiā c ad a maior residui ad residuū q̃ c d ad a b. quare multo potius q̃ d ad b. cū itaq; c ad a sit maior q̃ d ad b: ergo per vndecimam minor est a ad c q̃ b ad d. Intelligo ergo quattuor numeros: b primum. d scdm. a tertiū. c quartū: quia maior est ꝓportio b ad d q̃ a ad c: ergo per duodecimā maior est b ad a q̃ d ad c ꝓportio: ergo ꝑ vndecimam minor a ad b q̃ c ad d. qd̄ est ꝓtra hypothesim. Relinquit igit ꝓportio a b ad b: cū neq; eq̃lis neq; mīor vt ꝓbatū est eē possit: maior eē ꝓportiōe c d ad d. qd̄ est ꝑmū.

Scōm patet:nam p immediate mōstratum a b ad b:maior est ꝓportio q̃ c d ad d.ergo p duodecimam ꝓportio a b ad c d:maior q̃ b ad d detracti ad detractū.ergo p decimātertiā a ad c residui ad residuū maior proportio q̃ a b ad c d.quare itez per duodecimā a ad a b maior q̃ c ad c d.per vndecimā igit̃ a b ad a:minor q̃ c d ad c.quod est scōm ⁊ totum propositum.

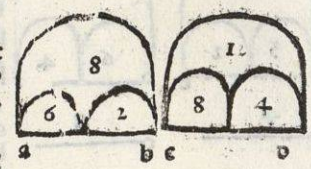
16 ¶ Si inequales nūeri equalibus addātur:erit ꝓpositoꝝ minor ꝓportio q̃z adiūctoꝝ.

¶ Sint a c numeri inequales:b ⁊ d equales ⁊ cōpositi a b ⁊ c d:sitq̃z a maior c.dico a ad c adiūcti ad adiūctum maiorem esse proportiōem q̃ a b ad c d compositi ad compositum.nam cū b ⁊ d idem sint numerus:⁊ a sit maior c:per nonam igitur maior est proportio a ad b q̃ c ad d.ergo per duodecimam maior proportio a ad c detracti ad detractū q̃ b ad d residui ad residuū.ergo maior proportio a ad c detracti ad detractum:q̃ a b ad c d totius ad totum.nam si a ad c:⁊ a b ad c d eadem esset proportio: per quintam eadem eēt a ad c:⁊ b ad d.cuius oppositū demōstratum est.Si autez maior eēt a b ad c d proportio q̃ a ad c:ergo per decimātertiā esset ꝓportio b ad d residui ad residuū:maior q̃ a ad c detracti ad detractū.cuius etiā oppositum modo monstratum est.relinq̃tur igitur a ad c proportio maior adiuncti scz ad adiūctum:q̃ a b ad c d compositi ad compositum ⁊ propositum.



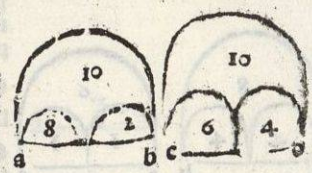
17 ¶ Si fuerit ꝓportio primi ad scōm maior q̃z tertij ad quartū: fueritq̃z primus minor tertio:erit secundus minor quarto.

¶ Sint quattuor numeri:a primus/b secūdus/c tertius/d quartus:sitq̃z a ad b proportio maior q̃ c ad d:et sit a minor c.dico b esse minorem d.nam cū c sit maior a:ergo per nonā maior est ꝓportio c ad b:q̃ a ad b.quare multo fortius c ad b maior est proportio q̃ c ad d.per decimam igitur d maior est b. quod est propositum.



18 ¶ Cum fuerit proportio primi ad scōm maior q̃z tertij ad quartum:et compositum ex primo et secundo equale composito ex tertio et quarto:primum tertio maiorem esse necesse est.

¶ Sit a ad b maior proportio q̃ c ad d:et nūerus cōpositus a b equalis cōposito c d:dico a eē maiorē c.nam primo non erit equalis:qz si a eēt equalis c:etiam b eēt equalis d per conceptiōem.alioquin si equalibus inequalia adderetur:tota fierent inequalia.quare equalis eēt ꝓportio a ad b:⁊ c ad d.qd̃ est ꝓtra hypothesim.neq̃z erit c maior a:et a minor.nam per precedentem b scōs esset minor d quarto per conceptionem igitur a et b duo minores simul sumpti minus sunt q̃ c d duo maiores simul.quod itez est ꝓtra hypothesim.relinq̃tur igitur a eē maiorem c ⁊ propositum.

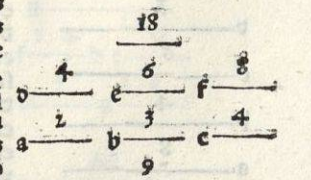


19 ¶ Si primus fuerit maior tertio: ⁊ compositus ex primo ⁊ secundo equalis cōposito ex tertio ⁊ quarto:maior erit proportio primi ad scōm q̃z tertij ad quartum.

¶ Hec est ꝓuersa preceudentis.Sit vt prius a primus nūerus maior c tertio:et cōpositus a b equalis cōposito c d.dico maiorem eē a ad b,ꝓportionē q̃ c ad d.Nam qz a ē maior c:⁊ a b ⁊ c d equales:erit b minor d.non enī esse potest b equalis d.nam ipsis a ⁊ c inequalibus additis:tota non fierent equalia. neq̃z est b maior d.nam per cōceptionem qd̃ fieret ex a ⁊ b duobus maioribus plus esset.quod est ꝓtra hypothesim.et cū sit maior c:ergo p nonam proportio a maioris ad d:maior eēt q̃ proportio c ad d.sz ⁊ cū b demōstratus sit minor d:per decimam igitur a ad b maior proportio q̃ a ad d.quare multo fortius q̃ c ad d.quod est propositum.

20 ¶ Si quotlibet numeroꝝ ad totidem alios fuerit vna proportio:que vnius ad vnum ea oīm ad omnes pariter acceptos erit proportio.

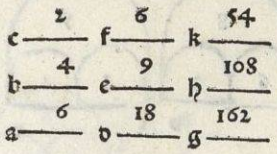
¶ Sint a/b/c q̃tlibet nūeri:et d/e/f totidem alij.et sit a ad d:et b ad e:⁊ c ad f proportio vna.dico que proportio a ad d:eādez eē totius a b c ad totū d e f.nam facile ex scōa huius cognoscis tres aīcedētes eē eque aut maiores aut minores aut equales ad suos ꝓsequētes. Si aūt sint eq̃ miores:quota pars vel ptes erit a ad d tota ps vel ptes erit b ad e:⁊ c ad f.ergo p quartā ⁊ quintā primi sub disiunctione quoties oportuerit repetitas erit totus a b c tota ps vel ptes totius d e f:quota pars vel ptes a ad d. quare eadez erit ꝓportio a ad d:et totius a b c ad d e f.At si sint tres aīcedētes eque maiores quia q̃ ꝓportio a ad d:ea est b ad e ⁊ c ad f.ergo p primā huiꝰ q̃ ꝓportio d ad a:ea est e ad b ⁊ f ad c.q̃re q̃tā psvel ptes d ad a:tota vel tote est e ad b ⁊ f ad c.per quartā igit̃ ⁊ quintā primi sub disiūctione q̃ties opus fuerit repetitas quota psvel ptes est d ad a:tota ps vel ptes est d e f ad a b c.q̃ré q̃,ꝓportio d ad a:eadē erit totius d e f ad totū a b c.ergo p primā huius q̃ ꝓportio a ad d:eadē totius a b c ad totum d e f.qd̃ itez est ꝓpositum.Si d̃o singuli singulis sint equales: statim adiuuāte ꝓceptione si equales numeros equalibus addas totos fieri equales:idem efficies.est itaq̃z totum propositum notum.



21 ¶ Si fuerint quotlibet numeri/aliq̃z ꝓm eundem numerum ꝓtinue in eadem ꝓportione sumpti:extremoꝝ eandem esse proportionem necesse est.

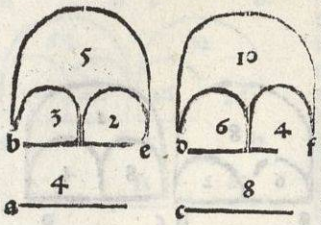
¶ Hec declarat equā ꝓportionalitatem que est quoties sumptis quotlibet numeris ad alios totidē in cōtinua ꝓportionalitate se hñtibus:cōcludimus vt illoꝝ proportio extremi ad extremum:ita hoꝝ extremi ad extremū proportiōem esse. quod aūt sit cōtinua ꝓportionalitas:iam dictū est.et hec equa proportionalitas bifariā formari potest p̃mo directe:ordineq̃z recto.vt si hunc in modum dixero:sicut a ad b:ita d ad e.et sicut b ad c:ita e ad f.q̃ sicut a ad c:ita d ad f.p quo eque proportionalitatis modo ponitur presens ꝓpositio. Scd̃o d̃o formak indirecte ꝓuersoq̃z ordine.vt si dixero que ꝓportio a ad b ea est e ad f:et que b ad c ea d ad e.ergo que ē a ad c:ea est d ad f.,p quo quidē eque proportiōalitatis

modo sequēs ponēt ꝓpositio. Sint ergo a b c quotlibet numeri in cōtinua ꝓportiōalitate ⁊ directe se hābites ad totidē d e f. vt sicut se hēat a ad b: ita d ad e. et sicut b ad c: ita e ad f: dico eādem eē ꝓportionem a ad c ⁊ d ad f. nā qr q̄ ꝓportio a ad b: ea est d ad e. g̃ ꝑmutatim ꝑ tertiā huius q̄ proportio a ad d ea est b ad e. et qr q̄ proportio b ad c ea est e ad f: igit ꝑ eādem tertiā ꝑmutatim q̄ ꝓportio b ad e: ea est c ad f. quare et que a ad d. cum itaq̄ que proportio a ad d ea sit c ad f: ergo ꝑmutatim per tertiam que proportio a ad c: eadem est d ad f: quod est propositum.



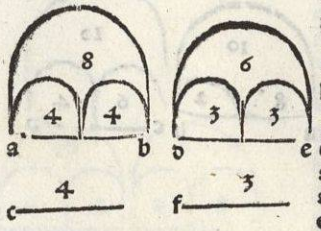
¶ Si quotlibet numeri totidem alijs indirecte proportiōales fuerint: extremi quoq̄ in eadem proportione proportionales erunt. 22

¶ Sit a ad b vt e ad f: et b ad c vt d ad e ꝓuerso ordine proportionales: dico a ad c vt d ad f. Duco enim d in e ⁊ in f: et pueniāt g h: et e in f. et proueniat k. per septimā huiꝰ q̄ proportio e ad f eadem est g ad h quare ⁊ que a ad b: eadem est g ad h. et qr d et e multiplicāt f: ꝑ octauā q̄ proportio d ad e: ea est h ad k q̄re ⁊ q̄ b ad c. et qr g fit ex d in e: et k ex e in f: et idē k ꝑ octauā primi alternatim fit ex f in e: ergo per octauā huius q̄ proportio d ad f: ea est g ad k. Vt ꝑ precedētem qrvt a ad b: ita g ad h. etvt b ad c: ita h ad k. ergo vt a ad c: ita g ad k. et cū proportio g ad k monstrata sit eadem proportioni d ad f: erit igitur vt a ad c: proportio d ad f. quod erat demonstrandum.



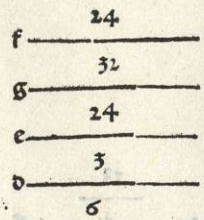
¶ Si fuerit primus ad secūdum: sicut tertius ad quartū. Itēq̄ primus ad quintum sicut tertius ad sextum: erit sicut primus ad scōm ⁊ quintū: ita tertius ad quartum et sextum. 23

¶ Sit ꝑmus nūerus a: scōs b: tertius c: quartus d: quītus e: sextus f. sitq̄ a ad b: sicut c ad d. et a itex ad e sicut c ad f: dico vt a ad totū b e: ita c ad totū d f. quia enī a ad b sicut c ad d erit per primā huiꝰ vt b ad a: ita d ad c. erūt igit ꝓtinue proportiōales vt b ad a: ita d ad c. vt a ad e: ita c ad f. q̄re ꝑ vicesimā primam vt b ad e: ita d ad f. ergo ꝑ sextam huius erunt ꝓiūctim vt b et e ad e: ita d et f ad f: per primā igitur huiꝰ vt e ad b e: ita f ad d f. qr ergo vt a ad e: ita c ad f. et vt e ad b e: ita f ad d f. ergo ꝑ vicesimā primam vt a ad b e: ita c ad d f quod est propositum.



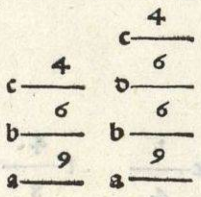
¶ Si fuerit primus ad secundum sicut tertius ad quartū fueritq̄ primus maximus: numerus compositus ex primo ⁊ quarto maior erit numero cōposito ex scōo ⁊ tertio 24

¶ Sit a b primus numerus: c secūdꝰ: d e tertius: f quartus. sitq̄ vt a b ad c: ita d e ad f. et sit a b illoꝝ quattuor numeroꝝ maximus. dico compositum ex a b et f: maiorem esse composito ex c et d e. cū enim a b sit maximus est maior c secūdo: quare per scōam huius d e maior f quarto. et cū vt a b ad c: ita d e ad f. ergo ꝑmutatim per tertiam huius vt a b ad d e: ita c ad f. sed cū a b sit maximꝰ per hypothesim est maior d e. ergo per secūdam huius et c maior f. est itaq̄ f illoꝝ minimus. esto ergo b differentia a b ad c et e differentia: d e ad f. qr sicut a b ad d e: ꝓbatus est c ad f. ⁊ a adequatur c. ⁊ d equatur f. ergo q̄ ꝓportio a b ad d e ea est a ad d detracti scz ad detractum. ergo per quītaz huius vt a b ad d e: ita b ad e residuus ad residuū. q̄re ꝑ scōam huius cū a b sit maior d e: etiā b est maior e. sunt itaq̄ b et f maiores d e. quare itex a b et f maius c et d e. at a et b simul per cōem cōceptum equātur toti a b. est itaq̄ compositus ex a b et f primo et quarto maior composito ex c et d e secūdo ⁊ tertio. qd̄ est propositum.



¶ Si fuerint quattuor numeri ꝓportionales: quod sub extremis continetur equale est ei quod producitur ex medijs. quod si producta fuerint equalia: erunt et numeri proportionales. 25

¶ Id sub extremis contineri dicitur qd̄ ex extremo in extremum producitur. Sint a b c d quattuor numeri proportiōales: itavt q̄ proportio a ad b: ea sit c ad d. dico primo q̄ fit ex a ī d qd̄ sit e equale eē ei quod fit ex b in c quod sit f. Secundo si quod fit ex a in d: equale sit ei qd̄ fit ex b in c numeros illos esse proportionales. Primum patet: ⁊ vt dictum est ex ductu a in d fiat e: et ex ductu b in c fiat f: quos dico esse equales. Duco enim itex a in b ⁊ proueniat g. erit per septimam huius g ad e vt b ad d. sed et quia ex a in b prouenit g alternatim ex b in a prouenit g. et etiam ex b in c prouenit f. ergo itex per septimam g ad f vt a ad c. et quia vt a ad b ita c ad d: ergo permutatim per tertiam vt a ad c: ita b ad d. quare g ad f vt b ad d. et probatus est etiam g ad e vt b ad d quare e et f quoꝝ ad g eūdē numerum est proportio vna: adinuicem sunt equales. quod est primum. Preterea dico si e et f adinuicem sunt equales: a b c d esse proportionales. nam cū e ⁊ f sint equales: iīpius g ad eos est proportio vna. et quia vt dictum est g ad f vt a ad c: et g ad e vt b ad d: erit a ad c vt b ad d. ergo ꝑmutatim per tertiam a ad b vt c ad d qd̄ est numeros a b c d: esse adinuicem proportionales: et secūdum.

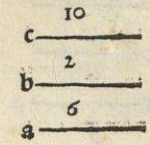


¶ Tribus numeris proportiōalibus q̄ sub extremis continetur / quicq̄ ex medio in se ꝓducit sunt eq̄les. Q̄ si illi eq̄les fuerint: tres q̄q̄ numeri erunt ꝓtinue ꝓportiōales. 26

¶ Sint a b c tres numeri cōtinue proportiōales: dico ꝑmo qd̄ fit ex a in c: equale esse ei qd̄ fit ex b in se. Scōo si qd̄ fit ex b in se: equale sit ei qd̄ fit ex a in c tres numeros a b c eē cōtinue proportiōales. Primam partem probas per primam partem precedentis posito b bis aut quēcunq̄ numerum vt d equalem b. Et scōam partem per p̄cedentis secūdam partem: nec vt demōstretur est difficultas.

¶ Si fuerit proportio primi ad secūdum maior q̄z tertii ad quartum: qui ex primo in quartum producit: maior est producto ex secundo in tertium. Q̄ si ꝓductus ex ꝑmo in quartum sit maior: et proportio primi ad secundum maior erit. 27

¶ Sit a ad b ꝓportio maior q̃ c ad d: dico ꝑmo qꝰ fit ex a in d maius esse eo qꝰ fit ex b in c. Secundo si qꝰ fit ex a in d maius est eo qꝰ fit ex b in c, ꝓportionē a ad b maiorem esse ꝓportione c ad d. Primū patet et duco a in d et pueniat e et b in c et pueniat f: dico e maiorem esse f. Duco ꝑterea b in d et fiat g. quia ḡ a in d producit e ⁊ b in d producit g: ergo per octauam huius q̃ proportio a ad b ea est e ad g et qꝛ f fit ex b in c: et g ex b in d: per septimā huius q̃ proportio c ad d ea est f ad g. mōstratū est igitur vt que ꝓportio a ad b: ea sit e ad g. et que c ad d: ea sit f ad g. At ꝓportio a ad b posita ē maior ꝓportiōe c ad d: ergo proportio e ad g maior est proportiōe f ad g. ergo per nonā huius e maior est f qꝰ est ꝑmū Econuerso dico si e est maior f, ꝓportionē a ad b maiorem esse proportiōe c ad d. Nam quia e est maior f: per nonam maior est proportio e ad g q̃ f ad g. At ꝓportio e ad g ea est q̃ a ad b. et proportio f ad g ea q̃ c ad d vt ostensum est. igit̃ proportio a ad b maior ꝓportiōe c ad d qꝰ est scōm atq; totū ꝓpositū.



28 ¶ Positis duobus numeris an sit tertius cū illis continue ꝓportionalis: perscrutari.

¶ Datis ergo duobus nūcris ponatur eoꝝ quilibet quē voles secūdus: quē duc in seip̃m: si reliquus ꝓductum scōm aliquē numeret numerus scōm quē, ꝓductū numerabit erit tertius nūerus in ꝓtinua proportionalitate ip̃is perviceſimamſextam adiungēdus. Sin reliquus ꝓductum ꝑm aliquē numerū non numerabit: per eādem nullus ipsis adhibebitur ꝓtinue proportionalis.

29 ¶ Datis trib⁹ nūcris an sit tertius ad aliquē ꝑm ꝓportiōem ꝑmi ad scōm: iuestigare.

¶ Eadem facilitate hec pateat. nam datis tribus numeris duc secūdū in tertiū: et si primus numeret ꝓductum ꝑm aliquem: is ꝑm quem productum numerat est per vicesimāquintam ad quem tertius vt primus ad secūdum se habet. At si primus productum ꝑm aliquem non numeret per eādem vicesimā quintam nullus tertio in proportione primi ad scōm adiungetur.

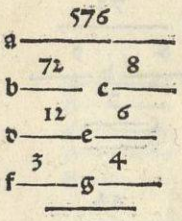
¶ Secundi elementoꝝ arithmetices Jordani finis.

n Umerus primus dicitur: qui non habet partem ꝑter vnitatem. Compositusvero qui habet alium numerum ip̃m numerantem. Cōmensurabiles siue cōicātes vocātur: quos cōiter aliquis nūerus numerat. Cōtra se primi autē dicūtur: qui a nullo cōiter numerātur excepta sola vnitate.

Termini ꝓportionis dicūtur numeri minimi: inter quos inuenitur illa ꝓportio

1 ¶ Omnis numerus primus: ad oēm quem non numerat est primus.

¶ Sit a quicūq; numerus primus: dico a ad quēcunq; numeꝝ quē numerat esse cōmensurabilē atq; cōicantē et ip̃m et quēcunq; alteꝝ quē non numerat esse ꝓtra se primos. Primū patet nā si a aliquem numerū numerat | illū ꝑm seip̃m aliquoties sumptum numerabit: quare ipe a seip̃m ⁊ alteꝝ nūerabit: erit vtiq; per diffinitionem cōmensurabilis atq; cōicans ad alteꝝ. Scōm patet: nam si a aliquem numerum non numerat nullus numerus vtrūq; cōiter numerabit: alioquin numeraret a: et a nō esset primus. quod est ꝓtra hypothesim. ꝑ diffinitionem igitur a ⁊ numerus quem non numerat sunt ꝓtra se primi / et a primus ad illum quod est scōm.

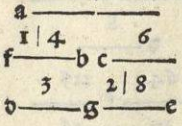


2 ¶ Omnis numerus compositus: ab aliquo primo numeratur.

¶ Sit a quicūq; numerus compositus, ꝓductus ex b in c. aut ergo b aut c est primus: ⁊ sic de eo hētur propositum. aut vterq; est cōpositus. qꝰ si sic: fiat ergo b ex d ī e: si itez vterq; d et e sit compositus: fiat itez d ex f in g. si itez vterq; eoꝝ est compositus: hac rōne in infinitum numeri decrescent. qꝰ est cōtra petitionem et impossibile: nisi deueniatur tādem ad numerum quem nullus alius numerabit. deueni emus igitur tādem ad aliquem numerum quez nullus alius numerabit et ꝓpter hoc primū: qui cum erit pars partis: ergo et per vicesimamtertiam primi erit ⁊ ꝑs totius. quare per diffinitionem partis numerabit ip̃m totum quod est propositum

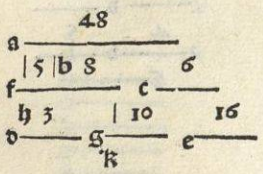
3 Omnis numerus aut est primus: aut a primo numeratur.

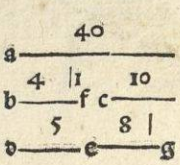
¶ Nam omnis numerus aut est primus aut compositus. atqui per precedentem omnis numerus cōpositus a primo numerat. igit̃ oīs numerus aut est ꝑmus aut a ꝑmo numeratur. qꝰ intēdit ꝓpositio

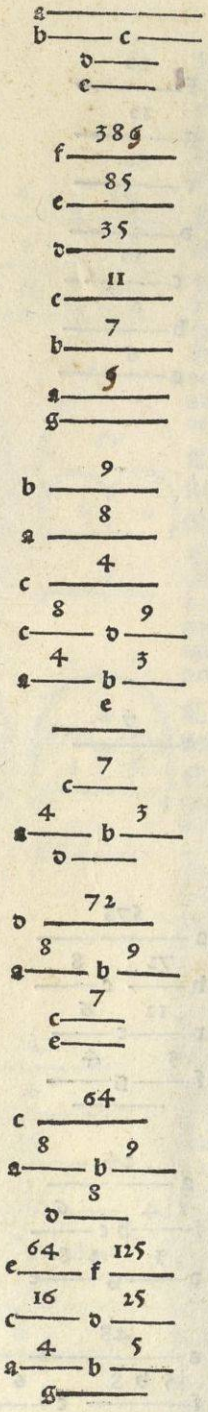


4 ¶ Si aliquis numerus primus numerum ex duobus ꝓductum numeret: necesse est eundem alterum eorum numerare.

¶ Sit a numerus ꝓductus ex b in c: quē numeret numerus primus d scōm e: dico numerū primū d numerare alteꝝ duoꝝ b aut c. Et esto non numeret b: dico ip̃m nūerare c. Intelligo enī primū numerū d: scōm b: tertium c: quartū e. quia qꝰ cōtinet̃ sub extremis d et e: equū est ei qꝰ cōtinetur sub medijs b et c. ergo per secūdam partem vicesimequinte secūdi: d b c e sunt proportionales. vt que proportio d ad b: ea sit c ad e. si ergo b fuerit maior d: etiā et e maior c. vt ex demōstratiōe secūde scōi cognoscitur. Detractis ergo quoties fieri poterit d et c de b et e relinquantur f et g. eritq; per tricesimam primi vt quota par sit partes f relicta sit d: tota pars vel partes g sit c. q̃ si f relicta sit pars d: cuz d sit nūerus primus f est vnitas. quota ergo vnitas est in d: tota pars g est in c. ergo per septimā primi quota pars vnitas est in g: tota pars d erit in c. numerabit igitur d ip̃m c. At ẋo si f relictus sit partes d: est vnitates vt ostensum est: et tote partes erit g ipius c. capiam ergo vnā vnitatem ab f que sit h: ⁊ vnā partem ab g que sit k: ⁊ argumentabor vt prius per septimam ꝑmi. quota pars h vnitas est ad d: tota ꝑs est k ad c. ergo per septimā primi q̃ta pars h ad k: tota d ad c. quare itez d numerat c. At ẋo si d maior est b per scōaz scōi: c est maior e. et qꝛ q̃ ꝓportio d ad b eadē est c ad e: ḡ ꝑ primā scōi etiā que ꝓportio b ad d: eadē erit e ad c. quare quota pars vl partes b est ad d: tota ꝑs vel ꝑtes e ad c. Diuido ḡ b ⁊ e in illas







partes:manifestũ est enĩ cum d sit numerus primus/vnã partiũ b eẽ vnitatẽ.capio ergo vnã partiũ b que sit f: et vnã partiũ e q̃ sit g:q̃a igit̃ quota pars f vnitas est d:tota pars g est ipsius c:ergo per septimã primi quota pars f vnitas ad g:tota pars d est ad c:numerabit igit̃ d ipsũ c q̃d iterũ ẽ ppositũ

¶ Si numerũ ex duobus ꝓductũ tertius numeret:idẽ alteri illoꝝ erit cõmẽsurabilis 5

¶ Sit a numerus ex b in c ꝓductus quẽ numeret d:dico d alteri numeroꝝ b aut c esse cõmensurabilem.nam aut d est primus:aut cõpositus.si primus:ergo per ꝑcedentẽ alterũ eoꝝ numerat/ quare alteri eoꝝ erit ꝓmẽsurabilis.si cõpositus:ergo per secundã huius ab aliquo primo numerat̃ d: qui sit e.q̃a e numerat d:numerabit etiã pervicesimã tertiã primi a:quare e per ꝑcedentẽ numerabit b aut c et cũ etiã cõiter numeret d:sunt per diffinitionẽ d et alter duoꝝ b aut c quos cõiter e idem numerus numerat/ cõmensurabiles:quod intenditur.

¶ Sũptis quotlibet numeris primis:diuersũ ab illis numerũ primũ esse necesse est. 6

¶ Sint a b c quotlibet numeri primi:dico alterũ ab ipsis esse.Duco enĩ numerũ primũ in secũdũ et pueniat d:et tertiũ in ꝓductũ et,pueniat e:et si esset quartus:ducerẽ ipsũ in,ꝓductũ e:et ita deinceps et quia prioꝛes semp erũt partes partiũ vltimi,ꝓducti:ergo pervicesimã tertiã primi et diffinitionẽ: oẽs illi numeri primi numerabũt vltimũ ꝓductũ:cui addo vnitatem:et sit totus,ꝓductus f:qui aut est primus/ sicq̃ cõstabit,ppositũ.aut cõpositus:qui si fuerit cõpositus:per secundã huius ab aliquo primo numerat̃ qui sit g.et cum g sit primus et nõ sit aliq̃s ꝑdictoꝝ:nam si aliquis ꝑdictoꝝ : numeraret f cum numeret detractũ e vt ostensũ est:per duodecimã primi numeraret residuũ: numer⁹ scz vnitatem/quod est impossibile:constat igit̃ aliũ ab ipsis esse numerũ primũ.

¶ Si fuerint duo numeri ꝓtra se primi:q̃cũq̃ numerat alteꝝ est ad reliquũ primus. 7

¶ Sint a et b ꝓtra se primi et c numeret a:dico b ⁊ c esse ꝓtra se primos:alioquin si c numerat b aut alius quicũq̃ b et c:cum idem pervicesimã tertiã primi numeraret a:nõ essent a et b contra se primi quod est contra hypothesim.

¶ Quicunq̃ numerãt numeros contra se primos:et ipsi sunt adinuicem primi 8

¶ Sint a b numerãtes c d numeros cõtra se primos:a quidẽ c et b ipsũ d:dico a b eẽ cõtra se primos nam si sint cõmẽsurabiles sit e eos cõiter numerãs:q̃a ergo e numerabit a etiã pervicesimã tertiã primi numerabit c.et q̃a e etiam numerat b per eãdẽ numerabit d.nõ sũt igit̃ c d contra se primi:q̃d est contra hypothesim.

¶ Numerus cõpositus ex duobus numeris ꝓtra se primis:ad vtrũq̃ illoꝝ est ꝑmus 9

¶ Sint a ⁊ b numeri cõtra se primi:et cõponãt c:dico c ad vtrũq̃ eoꝝ esse primũ.nam si est cõmensurabilis vni eoꝝ vt nũero a: numeret igit̃ eos aliq̃s numerus vt d:q̃a ergo d numerat c et a detractũ: ergo per duodecimã primi d etiã numerat b residuũ.nõ sũt igit̃ a b ꝓtra se primi/ q̃d est cõtra positũ.

¶ Si duorum numerorum vterq̃ ad tertium fuerit primus:et qui ex ipsis producit̃ ad eundem erit primus. 10

¶ Sint a b duo numeri quoꝝ vterq̃ ad c sit ꝑmus:et sit d,ꝓductus ex a in b:dico d esse ꝑmũ ad c.nã si c et d essẽt cõmẽsurabiles:aliq̃s eos vt e cõiter numeraret:qui cũ numeraret d,ꝓductũ ex duob⁹ scz a et b:ꝑ quartã hui⁹ cõicabit alteri eoꝝ: q̃d ꝑ septimã hui⁹ ẽ ipossibile.nõ itaq̃ c et d sũt ꝓmẽsurabiles

¶ Si fuerit duo numeri ꝓtra se ꝑmi:q̃ ex alt̃o ĩ se ducto,ꝓducit̃ ad reliquũ erit ꝑm⁹ 11

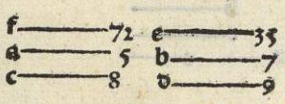
¶ Sint a et b ꝓtra se ꝑmi:et a in se ductus,ꝓducat c:dico c esse ꝑmũ ad b.capio d equale a:et q̃a vterq̃ a et d est primus ad b:ergo per ꝑcedentẽ qui fit ex a in d est ꝑmus ad b.sed qui fit ex a in se: equat̃ ei qui fit ex a in d:igitur qui fit ex a in se est primus ad b.quod est propositum.

¶ Si fuerint duo numeri contra se primi:qui ex eis in se,ꝓducent̃ erũt adinuicẽ primi. Q̃ si iidem in,ꝓductos ducant̃:et qui inde ꝓducẽtur erunt cõtra se primi. Sicq̃ deinceps si principia in,ꝓductos ducantur:,ꝓducti erunt incommensurabiles. 12

¶ Sint a et b cõtra se primi:ducat̃q̃ a in se et fiat c:et b in se et fiat d:dico c d esse cõtra se primos. Item dico si a ducat̃ in c et fiat e:et b in d ⁊ fiat f:sil̃iter e f eẽ incõmẽsurabiles atq̃ cõtra se primos. et si iterũ duxeris a in e et b in f/ qui,ꝓducent̃ esse cõtra se primos:et hoc quoties feceris ita euenire. Primũ patet: nam per ꝑmissã quia a est primus ad b et c fit ex a in se:per ꝑcedentem c est ꝑmus ad b et quia c est primus ad b et d fit ex b in se:per eãdem c est primus ad d quod est primũ. Preterea q̃a vterq̃ a et c est primus ad b:igitur per decimam e qui ex ipsis producitur est primus ad b.quia igit̃ e b sunt contra se primi:et d producitur ex b in se:per precedentem e etiaz est primus ad d.cum itaq̃ vterq̃ duorum b d sit primus ad e vt̃ monstratum est : igitur per decimam f qui fit ex ipsis scilicet ex b in d est primus ad e.et ita q̃tũcunq̃ series ꝓcedat cõclude.et hoc est scõm. ¶ Ex huius prima parte cognoscit̃:tetragonos quoꝝ latera incõmensurabilia sunt esse incõmensurabiles.et ex secũda:tesseras incõmensurabiles esse quarũ latera sunt incõmensurabilia.et cõtra demõstrare promptũ est si latera sunt cõmensurabilia:tetragonos et tesseras esse cõmensurabiles. Vt sint a b latera cõmensurabilia et c tetragonus a:et e eius tessera.d tetragonus b:et f eius tessera : quia a b sũt cõmensurabiles:ergo ẽ nũerus cõiter eos numerãs qui sit g:quia g numerat a:ergo per vicesimã tertiã primi numerat c et e:et quia etiã g numerat b: per eandẽ vicesimã tertiã numerat d et f.sũt igit̃ tetragoni c d: itidẽ et tessere e f adinuicẽ cõmensurabiles.sed de his hactenus:quoꝝ in sexto huius vbi de numeris tum quadratis tum cubis agetur exactissima determinatio futura est.

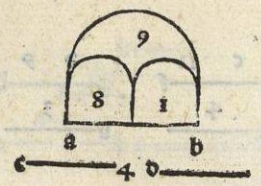
15 ¶ Si duo numeri ad aliquos duos vterq; ad vtrunq; fuerit primus: ⁊ qui ex eis producitur ad productum ex reliquis erit primus

¶ Sint a b primi ad c et primi ad d: ⁊ ex a in b fiat e ⁊ ex c in d fiat f. dico e et f esse inter se primos. nã qꝛ vterq; numerus a ⁊ b est primus ad c per decimã huius e est primus ad c. et qꝛ iterũ vterq; a ⁊ b est primus ad d: ergo per eandẽ e est primus ad d. est itaq; vterq; duorum c d mõstratus primus ad e: quare per eandem decimã f productus ex illis est primus ad e: quod erat demõstrandum.



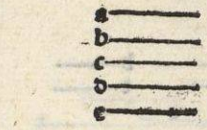
14 ¶ Si fuerint duo numeri contra se primi minorq; de maiore aliquoties detrahãtur: aut relinquetur vnitas aut numerus ad detractum primus

¶ Sint a b et c cõtra se primi: a b maior/ c minor. detrahaq; c de a b aliquoties: sitq; substractus a et residuũ b. dico b aut esse vnitatẽ aut esse numeꝝ primũ ad c. Nam si b sit cõmensurabilis c: sit d illorũ cõis mensura. qꝛ d numerat c p vicesimãtertiam primi etiam numerabit a. et qꝛ etiam numerat b per nonã primi numerabit totum a b. nõ erunt igitur a b ⁊ c contra se primi: qõ est contra hypothesim.



15 ¶ Cum fuerint duo numeri contra se primi et minore de maiori quoad põt detracto: residuũ a prius detracto detrahatur cõtinua hoc pacto detractione facta: vnitatẽ relinqui necẽ est. q; si vnitas residua fuerit: positos nũeros incõmẽsurabiles cẽ ꝓueniet.

¶ Sint a b duo numeri: cõtra se ꝓmi: a maior et b minor: detrahaq; b ab a quoties id fieri põt et relinquaꝫ c qui detrahaꝫ quoties põt a nũero b. ⁊ ita continue hoc pacto detractio quoad põt. dico primo tandẽ relictũ tri vnitatẽ. dico secõdo q; si hoc pacto cõtinuata detractiõe relicta sit vnitas datos nũeros esse cõtra se primos. Primũ pz. nam detrahaꝫ b de a quoties põt et relictũ residuũ sit c: ipm c relictũ minus ẽ b. ⁊ p ꝓcedentẽ aut est vnitas aut nũerus primus ad b. si vnitas cõstat qõ ꝓponit. si nũerus ꝑmus ad b detraho ipm quoties possuꝫ ab ipso b ⁊ relinq̃tur minꝰ c qõ sit d. quod q̃ dẽ ꝓ per ꝑcedentẽ sitꝛ est vnitas aut nũerus primꝰ ad c. si nũerus ꝑmus ad c ipm detrahã ab c: quare aut semp decrescet numerꝰ dando minorẽ ad primũ ꝑm exigentiã ꝑcedẽtis: aut relinq̃tur vnitas qõ est primũ. Scõm pz. nã si a et b sunt cõmẽsurabiles idẽ numerꝰ nũerabit totũ ⁊ detractũ. quare p duodecimã primi idẽ numerabit residuũ numerus scz vnitatẽ qõ est ipossibile. qõ quidẽ vt clarius ꝓcipias sic ꝓsidera. si a et b sint ꝓmẽsurabiles d: ergo eos cõiter numeret: substrahaq; b ab a quoties põt et reliquaꝫ c si c sit vnitas cũ numerꝰ d numeret b nũerabit oẽm numeratũ ab b p 23 ꝑmi: quare totũ detractũ ab a ⁊ nũerat etiã a vt positũ est. ergo p duodecimã primi d etiã numerabit residuũ scz c: numerus scz vnitatẽ qõ est ipossibile. ⁊ si c sit nũerꝰ qꝛ d nũerat totũ a et detractũ vt ꝓbatũ ẽ: ergo p duodecimã ꝑmi d etiã numerabit c residuũ. detrahaq; ergo quoties põt c de b ⁊ relinquaꝫ e. si e est vnitas argumẽtare vt prius numerũ d numerare e vnitatẽ. si vero e sit nũerus consiliꝛ d ipsum numerabit. et sic ꝓcedẽdo habebis q; q̃ncũq; dabitur vnitas ipam d numerabit: qõ est ipossibile. Et ex hac demõstratione elice si duoꝝ ꝓmẽsurabiliũ alter ab altero quoties põt substrahaꝫ sitq; residuus residuũ illis esse cõmensurabile.

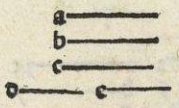


16 ¶ Datis duobus numeris cõicantibus: maximũ eos numerantẽ inuenire. vnde manifestũ est q; oĩs numerus duos quoscunq; numerãs maximũ eos numerantẽ nũerabit

¶ Sint a b duo numeri cõicantes: a maior et b minor ꝓpositũ est maximũ numeꝝ ipsos numerãtem inuenire. Si enĩ b nũerat a: cũ b se etiã numeret ipse est maximꝰ eos numerãs. sinautẽ b nõ numerat a detrahaꝫ b ab a quoties ꝑt et sit relictus c: q̃ si nũeret vtrũq; ipse ẽ numerꝰ petitus. si nõ nũeret detrahaꝫ ergo iterũ c ab b quoties ꝑt et sit relictus d q̃ erit minor c. si numeret d vtrũq; b ⁊ a ipse ẽ petitus. at si nõ numerat qꝛ nõ decrescet numerus in infinitũ neq; decumbet ad vnitatẽ: qꝛ per ꝑcedentẽ a et b essent cõtra se primi tandẽ deuenietꝫ ad aliquẽ qui añ relictũ numeret quẽ q̃ primũ habebimꝰ dico ipz esse maximũ numeꝝ eos cõiter numerantẽ. nã si eo maior ponaꝫ: accidet p duodecimã primi maiorẽ numerare minorẽ: qõ est ipossibile. Ex hoc correlariũ est notum. ponãꝫ enĩ a b numeri cõicantes et b minor substractꝰ ab a quoties põt ⁊ relictus c: et c substractus ab b quoties põt ⁊ relictus d q̃ substractus ab c nichil relinquat: q̃ ideo erit maximus numerãs a ⁊ b per ꝑtem: et sit g cõiter numerãs a b. dico g nũerare d maximũ numerantẽ. si enĩ g sit idẽ numero d: cum oĩs numerus seip̃m numeret etiã de eo verum est propositũ. si est alius ab d nõ erit maior d. nã d nõ esset maximus numerus numerãs a b verũ potius g. erit ergo minor de necessitate: qui q̃a numerat b. ergo p vicesimãtertiam primi numerabit totum detractũ ab a. ⁊ cum etiã numeret a: per duodecimã primi numerabit residuũ c: ⁊ cum numeret c per vicesimãtertiam primi numerabit totum detractũ a numero b. et cum numeret b: ergo per duodecimã primi numerabit residuũ scz d: quod est propositum.

17 ¶ Propositis quotlibꝫ nũeris adiuicẽ ꝓpositis maximũ eos cõiter nũerãtẽ reperire.

¶ Sint a b c quotlibet nũeri adinuicẽ ꝓpositi ꝓpositũ est maximũ numeꝝ eos nũerantẽ inuenire. Inuenio enĩ per ꝑcedentẽ maximũ numerãtẽ a et b q̃ sit d. q̃ si numerat c: ille ẽ qui petitꝫ alioquĩ si dabis maiorẽ accidet p duodecimã primi minorẽ numerare maiorẽ. si aũt d nõ numerat c: qꝛ ergo q̃cunq; numerat a b c nũerat a b. ⁊ q̃cunq; nũerat a b p correlariũ ꝑcedẽtis numerat d maximũ numeꝝ eos numerantẽ. ergo d ⁊ c sunt ꝓmẽsurabiles. inuenio ergo p ꝑcedentẽ maximũ numeꝝ numerantẽ c ⁊ d q̃ sit e quẽ dico esse maximũ numerantẽ a b c. nã si sit quicũq; alius maior e eos cõiter numerãs: is sit f. q̃a ergo f numerat a b p correlariũ ꝑcedẽtis numerat d maximũ eos numerantẽ. ⁊ q̃a numerat d et etiã c per positũ: ergo per idẽ correlariũ numerat e maximũ eos nũerantẽ. at f ponitꝫ maior e. nũerat igitꝫ maior minorẽ: qõ est ipossibile. relinq̃tur igitur e esse maximũ numerantẽ a b c et propositũ.

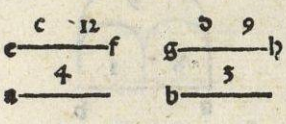


¶ Quilibet duo numeri in sua proportione minimi: sunt contra se primi. 18

¶ Sint a b duo nūeri in sua ꝓportione mīmi: dico eos esse contra se ꝑmos. nā si sint ꝓpositi sit cōis eoꝝ mēsura c q̄ nūeret a ꝑm d et b ꝑm e ꝑ septimā scōi q̄ ꝓportio d ad e ea est a ad b. at cū d sit minor a et e minor b non erant a ⁊ b in sua ꝓportione minimi: quod est contra positum.

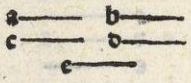
¶ Numeri quilibet in sua proportione minimi numerant quoslibet in eadem proportione sumptos minor minorē ⁊ maior maiorem equaliter. 19

¶ Sint a et b mīmi in sua ꝓportione: a maior b minor: sintq̄ eiusdē proportionis c d: c quidē maior d minor. dico a numerare c et b numerare d equalit̄. nā qr vt a ad b ita c ad d: ergo permutatī per tertiā secūdi vt a ad c ita d ad b. quota ergo pars vel ꝑtes est a ad c tota pars vel ꝑtes est b ad d. si tota pars constat ꝓpositū a equalit̄ nūerare c ⁊ b numerare d. si tote partes ergo ꝑ tricesimā primi qr toties erit a in c quoties b in d. et quota pars vel ꝑtes a remāserint in c: tota pars vel ꝑtes b remanebūt in d. substraho ergo quoties possum a de c ⁊ detractꝰ sit e et residuus f. similit̄ substraho quoad possum b de d et detractus sit g ⁊ residuus h. qr ergo a nūerat e: ⁊ b numerat g equalit̄ atq̄ ꝑm eundē numerū. ergo per octauā scōi que proportio a ad b ea est e ad g: ergo ⁊ q̄ proportio c ad d totius ad totū: ea est e ad g detracti ad detractū. igitur ꝑ quintā secundi q̄ ꝓportio c ad d totius ad toum: ea est f ad h residui ad residuū. quare iterum q̄ proportio a ad b: ea est f ad h. at cum f et h relicta sint minora a ⁊ b: nō erant itaq̄ a et b in sua proportione minimi: quod est contra hypothesim. constat ergo quoscūq̄ in sua proportione minimos ceteros vt dictum est numerare.



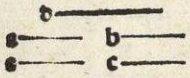
¶ Si fuerint duo numeri adinuicē primi ipsi erunt in sua ꝓportione minimi. 20

¶ Sint a et b nūeri adinuicē primi: a maior b minor. dico eos in sua ꝓportione esse mīmos. nā si sint alij q̄ sint in illa ꝓportione mīmi: sint ergo illi c d: qr ergo c d sunt in illa ꝓportione mīmi ꝑ p̄cedentē numerabūt quoslibet in eadē ꝓportione minor minorē ⁊ maior maiorē equalit̄. nūeret ergo c numeꝝ a scōm e ⁊ d numeret b secundū eundem numerū e manifestū est q̄ e numerabit a et b: quare nō sunt a ⁊ b contra se primi: quod est contra hypothesim.



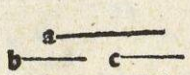
¶ Positis duobus numeris contra se primis si alter ducatur in numeꝝ quē reliquus nō numerat productus quoq̄ ab eodem non numerabitur. 21

¶ Sint a b numeri contra se primi et a ducatur in c ⁊ proueniat d et b nō numerat c: dico b nō numerare d. Si ergo b numeret d: numeret ergo ipsum ꝑm e intelligo primū numerū a: secundū b: tertiū e et quartū c. qr ergo qd̄ cōtinetur sub extremis a c equū est ei quod cōtinetur sub mediis b e. ergo per vicesimā quintā secundi que proportio a ad b: ea est e ad c. qr ergo a b sunt primi per precedētem sunt in sua proportione minimi: ergo per ante precedentē a numerabit e: ⁊ b numerabit c equaliter: quod est contra hypothesim. positū enim erat b nō numerare c.



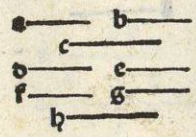
¶ Si numerum a duobus productum tertius numeret: idem alterum eorum numerabit aut erit vtriq̄ commensurabilis. 22

¶ Sit a numerus productus ex b in c quē d numeret: dico d numerare b aut c aut esse vtriq̄ cōmensurabilem. Si enī alteri fuerit incōmensurabilis vt verbi causa b: cū ergo b et d sint contra se primi ⁊ b in c producat a: ergo per precedentē si d nō numerat c neq̄ quidē d numerabit a. at positus est d numerare a. numerat igitur d alterū eoꝝ. Si itaq̄ vni fuerit incōmensurabilis necessario numerat alterū ideo vtriq̄ incōmēsurabilis eē nequit q̄ fit vt aut nūeret alterū aut vtriq̄ sit ꝓmēsurabilis ⁊ ꝓpositū.



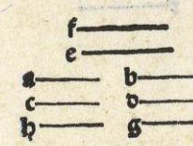
¶ Numeros minimos: ꝑm proportionē numeroꝝ assignatorū perscrutari. patetq̄ ex hoc maximū duos numeros cōiter numerantē: ꝑm mīmos illius ꝓportionis nūerare 23

¶ Sint a b in aliqua ꝓportione: propositū est mīmos numeros ꝓportionis a ad b reperire. aut enim a ⁊ b sunt contra se primi et tunc per vicesimā huius illi sunt in sua ꝓportione minimi neq̄ alij q̄rendi sunt. aut sunt cōpositi ⁊ tunc per decimā sextam huiꝰ quero maximū numerū eos numerantē qui sit c nūeretq̄ a ꝑm d: et b ꝑm e. ꝑ septimā ergo scōi eadē est ꝓportio a ad b ⁊ d ad e. dico itaq̄ d et e esse mīmos nūeros in illa ꝓportione. si enī sint alij sint f ⁊ g: qr f et g sunt mīmi in illa ꝓportione. ergo ꝑ decimānonā huius numerāt a b: maior maiorē ⁊ minor minorē ꝑm eundē numerū qui sit h. intelligo ergo quattuor nūeros: c primū: f secundū: h tertiuz: et d quartū. qr a cōtinetur sub extremis c d: ⁊ idē a sub mediis f h: ergo ꝑ vicesimā quintā secundi q̄ proportio c ad f ea est h ad d. ergo ꝑmutatī per tertiā scōi eadē est ꝓportio c ad h et f ad d. sed f positꝰ est mīor d: ergo et c minor h. tūc sic c est maximꝰ numerus numerās a b ꝑ hypothesim et h positus est etiā numerare a b: ergo h ꝑ correlariū decimesexte huius numerabit c maior scz minorē quod est ipossibile. nō dabūtur igitur alij ab ipsis d e in illa ꝓportione minimi quod est propositū: et in hoc etiam correlariū notum est.



¶ Quilibet duo numeri minimos numeros sue proportionis maior minorē et minor maiorē multiplicantes: minimū ab ipsis numeratum producunt. Ex quo constat minimum quē duo numerant: quēlibet ab eis numeratū numerare. 24

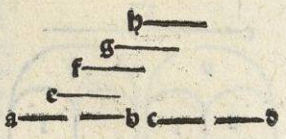
¶ Sint duo nūeri a b multiplicātes c d mīmos sue ꝓportionis maior minorē ⁊ minor maiorē: dico ipsos minimū ab ipsis numeratū ꝓducere. nā qr sicut a ad b ita c ad d: ergo per vicesimā quintā scōi qui cōtinetur sub extremis a d equus est ei q̄ continet sub mediis b c qui sit e quem dico esse minimū ab ipis numeratū. Si enī sit alter esto ergo ipse f quē a ꝑm g ꝓducat et b scōm h. positis ergo ordine ꝑminis a b h g: qr qui cōtinetur sub extremis a g equal̄ ei qui cōtinetur sub mediis b h. ergo per vice



simã quintã secundi q̃ proportio a ad b ea est h ad g: quare et q̃ c ad d. et qz a ꝓducit e scõm d et idem a ꝓducit f scõm g. ergo p septimã secũdi q̃ proportio d ad g: ea est e ad f. at cũ c ad d sicut h ad g: ergo pmutatim sicut c ad h: ita d ad g. quare sicut c ad h: ita e ad f. sed c numerat h per decimãnonã huius ergo et e numerat f: et f positus est minor e. numerat igitur maior minorẽ: quod est impossibile ⁊ propositum. Et ex modo demonstrationis patet corrolarium.

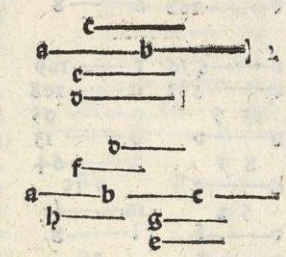
25 ¶ Propositis quotlibet numeris: minimũ ab eis numeratũ inuestigare.

¶ Sint a b c d quotliber numeri: quoꝝ proponiꝯ minimũ ab eis numeratũ inuenire. quero primo minimũ quem numerãt a et b: q̃ si a numerat b certũ est b esse minimũ ab eis numeratũ. et si a et b sunt cõtra se primi duco vnũ in alterũ. et qz illi sunt ꝑmi: ergo p vicesimã huiꝰ erũt in sua ꝓportione mĩmi p precedentẽ igiꝯ ꝓductus ab ipsis erit mĩmus quẽ numerabũt. at si ipsi fuerint cõicantes sumo per ꝑcedentẽ minimũ quẽ numerãt q̃ sit e: et consiꝯ capiã minimũ quẽ numerãt c e q̃ sit f et minimũ quẽ numerãt d f q̃ sit g quẽ dico eẽ minimũ numeꝝ quẽ numerãt a b c d. numerabunt enĩ eum p 23 primi. at q̃ nõ numerẽt minorẽ p3. nã si sit dabilis nũerus minor g quẽ numerãt a b c d sit ille h: qz ergo a b numerãt h. ergo p correlariũ ꝑcedẽtis e mĩmus ab eis numeratꝰ nũerat h. et qz e ⁊ c numerãt h: ergo p idẽ correlariũ f mĩmus ab eis nũeratus nũerat h. et qz f nũerat h et d positꝰ est etiã ipsum nũerare ergo per idem correlariũ g minimus ab f ⁊ d numeratus numerabit h. at h positus est minor g: numerat igitur maior minorẽ: quod est impossibile.



26 ¶ Si minimũ numeꝝ a quotlibet numeratum aliquis primus numeret: eundẽ quoꝝ aliquem illorum numerare necesse est.

¶ In duobꝰ numeris id facile ꝑpendiꝯ. Sint ergo a b duo nũeri: c mĩmus ab eis numeratꝰ: et d nũerus ꝑmus numerans c: dico d nũerare a vel b. numeret enĩ a minimũ numeratũ c scõm e: ergo per 24 huiꝰ e est vnus mĩmor ꝓportiõis a ad b numerãs b. tũc sic d numerꝰ primꝰ nũerat c ꝓductũ a duobꝰ nũeris a et e. ergo p quartã huius d nũerat alterũ numeroꝝ a aut e. si a cõstat ꝓpositũ: si e itidẽ. nã p vicesimãquartã numerabit b. In pluribus aũt consiꝯ ostẽditur. Sint a b c quotlibet nũeri d mĩmus ab eis nũeratus: e nũerus ꝑmus numerãs d: dico e nũerare a b aut c. capio enĩ ꝑm exigentiã ꝑcedẽtis mĩmũ numeꝝ quẽ numerãt a b q̃ sit f: et mĩmũ numeꝝ quẽ numerãt f c quẽ ex ꝑcedẽti manifestũ est eẽ d et nũeret c mĩmũ d scõm g q̃ per 24 huius est vnus nũeroꝝ ꝓportionis f ad c et q̃ numerat f. Cum itaq̃ e numerus ꝑmus numeret d ꝓductũ ex duobꝰ numeris c g: ergo p quartã huius e nũerat alterũ numeroꝝ c g. si numerat c cõstat ꝓpositũ: si numerat g ergo p vicesimãquartã numerat f. qz ergo f est mĩmus numerꝰ quẽ numerãt a b. nũeret ergo a minimũ f scõm h q̃ per sepe sumptã vicesimãquartam huiꝰ erit vnus mĩmoꝝ ꝓportionis a ad b et numerãs b. cum ergo e ꝓbatus sit nũerare f ꝓductũ ex duobus numeris a h: ergo per quartam huius numerat a aut h. si numerat a constat propositum. si h itidẽ. nam h numerat b: quare e per vicesimãtertiam primi etiã numerabit b: et propositũ.

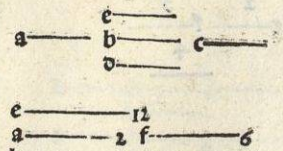


27 ¶ Cum fuerint quotlibet numeri ad aliquem primi: et minimus quem numerant ad eundem erit primus.

¶ Sint a b c quotlibet numeri primi ad d: sitq̃ e mĩmus numerꝰ quẽ numerãt a b c: dico e esse primũ ad d. nã si d est cõmẽsurabilis ad e: ergo est aliq̃s numerꝰ eos cõiter numerãs q̃ sit f. Si enĩ f sit nũerꝰ ꝑmus cũ numeret e: ergo p ꝑcedentẽ nũerabit a b aut c. et cũ etiã nũeret d nõ sunt ergo a b c ꝑmi ad d q̃d est contra hypothesim. at si f sit nũerus ꝓpositus ergo p scõam huius f ab aliquo ꝑmo numeratur q̃ sit g: qui p vicesimãtertiã primi numerabit d et e: qz ergo g est primus ⁊ nũerat e. ergo p precedentẽ nũerabit a b aut c et etiã numerat d. nõ sunt igitur a b et c primi ad d: quod est contra hypothesim.

28 ¶ Si sumatur minimus numerus quẽ numerant aliquot primi numeri assignati: aliũ ab illis numerum primũ: eundem numerare impossibile est.

¶ Sit e mĩmus nũerus quẽ nũerãt a b c quotlibet nũeri ꝑmi: dico nullũ ipsis ꝑmũ aliũ ab ipsis nũerare. nã si darek aliusvt d: qz ipse nũeraret e. ergo p 26 nũeraret etiã a b aut c: q̃d est ꝗ hypothesim.

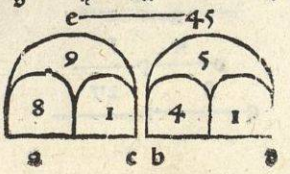


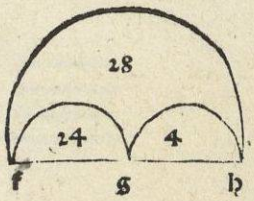
29 ¶ Numerũ minimũ: propositarũ denoiationum partes habentẽ inuenire.

¶ Si propositarũ partium vt verbi cã vnius secũde tertie quarte ⁊ sexte ꝓpositũ sit minimũ numeꝝ ꝑtes illas hãtem reperire. capio a b c d nũeros partes illas denoiantes quoꝝ mĩmus ab eis nũeratꝰ sit e: nũeretq̃ a minimũ e scõm f: et b eundẽ scõm g: et c eundẽ scõm h: ⁊ d eundẽ e scõm k. alternatim ergo p octauã primi f g h k numerabũt e ꝑm a b c d datos nũeros: erũt ergo in e partes denoiãte ab a b c d quẽ ⁊ dico esse minimũ in quo ꝑtes ille reperiãtur. q̃ enĩ partes illas habeat: iam notũ est: sed si nõ sit mĩmus sit ergo ille l minor eo illas habẽs: ⁊ eius partes ab illis denominate sint m n o p. erunt ergo alternatim per octauam a b c d partes l denominate ab m n o p. nõ erat ergo e minimus quẽ numerabant a b c d. nam l ponitur minor: quod est contra hypothesim.

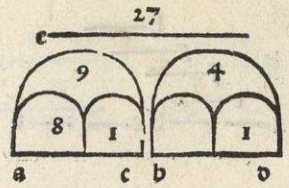
30 ¶ Sumptis duobꝰ numeris contra se primis quorũ minore de maiori quoad potest detracto residua sit vnitas: multiplicem cuiuslibet eorum qui super alterius multiplicem: solam apponat vnitatem reperire.

¶ Sint a b nũeri ꝓtra se ꝑmi: a maior b mĩor: detractoq̃ b de a quoties põt reliquat vnitas: ꝓpositũ est dare mltiplicẽ ad a: sola vnitate multiplicẽ ad b supantẽ. detraho ergo q̃tũ possum b ꝑtiale de totali a et sit totus detractꝰ a ꝑtialis: q̃ quidẽ est idẽ aut mltiplex ad b. et sit c relicta vnitas ⁊ addo ad b vnitatẽ q̃ sit d. et duco a totũ in b d ⁊ ꝓueniat e quẽ manifestũ est eẽ multiplicẽ totalis a. Deĩde duco



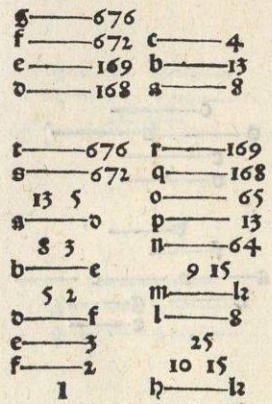


a partialē eundē scz aut multiplicē ad b in b d et ꝓueniat f l2 quē manifestū est ꝑ 23 primi eē mltiplicē ad b ꝑtiale. Deiñ duco c vnitatē in b d et veniat l2 g q̃ qz vnitas in quēcunq̃ numeꝝ ducat illū ꝓducit est eq̃lis b d: sed b d supat b sola vnitate. ergo l2 g superat b sola vnitate. Manc igit demo q̃ sit h g tūc aggregat⁹ f h est mltiplex ad b: sed aggregat⁹ f h superat totū f g sola vnitate h g. sed cū f g fiat ex ductu a partialis ⁊ c in b d equat e q̃ fit ex ductu a totalis in b d per decimā primi. at dictū est e eē multiplicez ad a ⁊ f h multiplicē ad b. igit e multiplex ad a equalis quidē f g supat f h multiplicē ad b sola vnitate qd̃ erat demōstrandū et propositū quo ad vnā partē. Sed rursum demōstrandū est dabilē esse multiplicē ad b q̃ solā hz vnitatē super multiplicē ad a: aufero vnitatē ab b totali q̃ sit d et duco b partiale in totalē a et proueniat e manifestū est e eē multiplicē ad a. et duco iterū b partialē in a partiali equali aut multiplice totius b et proueniat f g manifestū est f g esse multiplicē ad totū b. deinde duco b d in c vnitatē ⁊ fiat g h qui qz quicūq̃ numer⁹ in vnitatē ducat seipsum ꝓducit g h est equalis toti b quare totus f h est mltiplex ad b. Sed cū per nonā primi qd̃ fit ex b ꝑtiali in a c equat ei q̃ fit ex eodē b partiali in a et in c: ⁊ ille q̃ fit ex b ꝑtiali in a: et b totali in c solāvnitatē superaddat illi q̃ fit ex b ꝑtiali in a et in c. sequtur ergo q̃ multiplex ad b scz f h q̃ fit ex b partiali in a et b ꝑtiali in c: solā addet vnitatē super e multiplicē ad a qui fit ex b partiali in a c: quod est secundū et totum propositū.



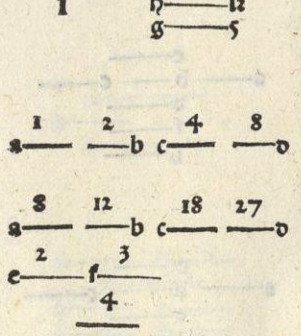
¶ Propositis duobus numeris cōtra se primis: multiplicē cuiuslibet eoꝝ inuestigare cuius ad multiplicē alterius differētia sit dato numero equalis. 31

¶ Sint a b duo nūeri contra se ꝑmi quoꝝ cuiuslibet iubemur assignare multiplicē cuius dria ad multiplicē alteri⁹ sit dato nūero q̃ sit c equalis. capio f̄m exigentiā precedētis multiplicē a q̃ sit d et multiplicē b q̃ sit e addēs super multiplicē a solāvnitatē ⁊ multiplico d per c numeꝝ datū et proueniat f ⁊ e ꝑ eundē c et ꝓueniat g. ⁊ qz tm̄ est c in e q̃tum c in d et vnitatē per nonā primi ⁊ oīs nūerus in vnitatē seipm̄ producit. ergo dria g ad f est nūerus datus c. et cū a sit pars d et d ꝑs f: ⁊ silr b pars e ⁊ e pars g ergo ꝓvicesimātertiā primi a est pars f et b ꝑs g. quare f et g multiplices sunt ad a b int̄ quos nūerus assignat⁹ est dria. et posses silr ꝑ ꝑcedentē capere multiplicē a q̃ supadderet vnitatē mltiplici ipius b. deinde ꝓcedere vt dictū est. Ceterū si minor quoties pōt de maiore detract⁹ nō solā relinquat vnitatē sed vlterior fiat substractio quo min⁹ per ꝑcedentē operari posses hoc mō poteris operari. Datis enī a b nūeris contra se ꝑmis et c numero cui sit capiēda dria multiplicū equalis et detracto b ab a quoties pōt remaneat d et d detracto ab b quoties ꝑt reliqu⁹ sit e: ⁊ e detracto ab d quoties pōt maneat f et qz tandē per decimāquintā huius relinq̃tur vnitas sit ergo vt detracto f ab e quoties poterit relinquat vnitas. si ergo multiplex a debet addere supra multiplicē b sumo alterū extremoꝝ qui est in situ ipari ab a vt f et sumat h multiplex eius q̃ addat vnū super multiplicē e ⁊ ī quo sit f f̄m g ducat q̃ g in d et fiat h l2 q̃ addet super multiplicē e vnitatē: qm̄ g in d q̃tum in e vel eius multiplicē ⁊ in f. dempto ergo vno de h l2 remaneat m l2 vt sit m et vnitas equale h sitq̃ e in m l2 f̄m l q̃ ductus in b faciat n: cui addito vno fiat o quē numerabit o eadē rōne ⁊ sit vt scōm p q̃ ductus in a faciat r: qui silr addit super multiplicē b qui sit q vnitatē. multiplico igit r et q per c numeꝝ datū et producātur s ⁊ t q̃ erunt multiplices b ⁊ a int̄ se dria f̄m c numeꝝ assignatū seruātes. Tertij elemētoꝝ arithmetices Jordani finis



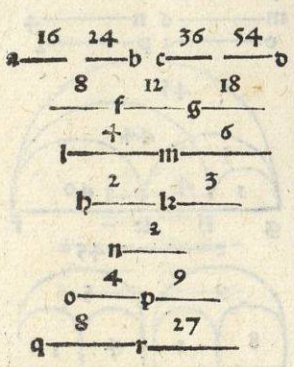
J fuerint quotlibet numeri continue proportionales: duo et duo proximi erunt commensurabiles. 1

¶ Sint a b c d quotlibet nūeri continue proportiōales: dico a b esse cōmensurabiles. Itē ⁊ b c et c d. Si enī a nūeret b manifestū est a et b esse cōmensurabiles. et qz q̃ proportio a ad b ea est b ad c ⁊ c ad d ideo b nūerabit c: et c nūerabit d. quare cōstabit propositū: a b: b c: c d: esse cōmensurabiles. at si a non nūerat b: qz īpossibile est tūc a et b eē in sua proportione mīmos. nā si a et b essent in sua ꝓportione minimi essent ꝑ decimāoctauā tertij adinuicē primi: et per decimānonaz numerarēt quoslibet in sua proportione: ⁊ qz q̃ proportio a ad b: ea est b ad c. a ergo nūeraret b ꝑmus cōtra se primū qd̃ est īpossibile et etiā oppositū positi. nō erunt ergo a et b in sua ꝓportione mīmi. capiā ergo ꝑ vicesimātertiaz tertij e f mīmos in illa ꝓportione q̃ per decimānonā eiusdē numerabūt a b f̄m eundē numerū equalr vt f̄m g: et consilr b c et c d. sunt igit a b: b c: ⁊ c d adinuicē cōmensurabiles: quod est propositū.



¶ Si nūeroꝝ cōtinue ꝓportionaliū duo extremi fuerint cōicantes erit nūerus cōiter oēs numerās maximusq̃ q̃ oēs numerabit erit maximus extremos numerās. Ex hoc cōstat q̃ si aliquot ꝓportionales int̄ duos cōicantes ceciderīt: totidē inter vtrūq̃ eoꝝ et maximū numerū eos cōiter numerantē cadere necesse est. Palāq̃ fit etiā maximos qui binos ⁊ binos numeroꝝ proportionaliū cōiter numerāt esse cōtinue ꝓportiōales 2

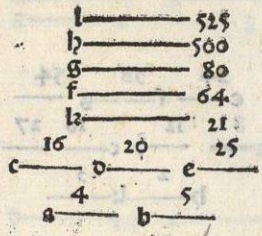
¶ Sint a b c d nūeri ꝓtinue ꝓportōales quoꝝ a d extremi sint cōicātes: dico ꝑmo aliquē esse numerū eos oēs cōiter nūerantē. secōo maximū nūeꝝ oēs numerātē esse maximū numerantē extremos. Cū enī ꝑ ꝑcedentē a b cōicent ⁊ silr b c et c d: capio ꝑ 16 tertij maximū numeꝝ numerātē a b q̃ sit e: ⁊ maximū nūerantē b c q̃ sit f. et maximū nūerātē c d q̃ sit g. ponoq̃ h l2 mīmos in ꝓportiōe a ad b et per 23 tertij et 19 eiusdē e f g numerabūt a b c f̄m h: et g nūerabit d f̄m l2. sumo itē maximū numerantē e f q̃ sit l ⁊ maximū numerantē f g q̃ sit m: per vicesimātertiam tertij l nūerabit e ⁊ m f f̄m h. et iterū l nūerabit f f̄m k ⁊ m numerū g secōm k. per. 19. tertij et l ⁊ m sunt diuersi nūeri ab h k. nā si idē essent h in se produceret e ⁊ l2 in se produceret g ⁊ h in e producit a et l2 in g producit d ⁊ h l2 per .18. tertij sunt contra se primi. erūt ergo a d per duodecimā tertii cōtra se primi qd̃ est contra hypothesim. sunt ergo l ⁊ m alit ab h l2. qz ergo h l2 numerāt l et m equalit: numerēt ergo ipsos scōz n q̃ per. 23. tertii est maximus eos



numerãs qui ⁊ idẽ n per.23.primi numerabit a b c d: qd̃ est primũ in propõne intentũ. Et per decimã septimã tertii n erit inuẽtus maxim⁹ numerus numerãs a b c d alioqn p cozrelariũ 16 accidet maiozẽ numez numerare minozẽ. ⁊ qz h denoiat n in l ⁊ l in e: ergo p 23 primi nũerus q̃ fit ex h in se qui sit o denoiat n in e. ⁊ qz h etiã denoiat e in a: ergo p eandẽ 23 numerus qui fit ex h in o q̃ sit q denominat n in a. et eadẽ rõne qz lz denoiat n in m et m in g. ergo per vicesimã tertiã primi numer⁹ qui fit ex lz in se qui sit p denoiat n in g: et etiã qz lz denominat g in d: igit̃ per eandẽ numerus q̃ fit ex lz in p qui sit r denoiat n in d. numerat igitur n numerũ a scõm q et numerũ d scõm r. et qz h lz sunt adinuicẽ primi: ergo per duodecimã tertii q et r sunt cõtra se primi: quare per vicesimã eiusdẽ in sua ꝓportione mĩmi. Per cozrelariũ igitur vicesimetertie eiusdẽ q et r numerabit a ⁊ d scõm maximũ numez numerantẽ a et d. est igitur n maximus nũerus numeros a d extremos numerãs quod est secundũ. Primũ cozrelariũ hinc cognoscit̃. nam qz idẽ numerus h in n l e: producit l e a. ergo per septimã primi a e l n erunt cõtinue ꝓportionales. ⁊ per idẽ qz l in n m g producit m g d: ergo d g m n erũt continue ꝓportionales quare sicut inter a ⁊ d cadũt b c duo medii ꝓportionales sil̃r inter a ⁊ n cadũt duo e l. et inter d ⁊ n cadunt g m duo medii ꝓportionales scz totidẽ medii ꝓportionales inẽ duos cõicantes et totidem inter vtrũq; eoz et maximũ eos cõiter numerantẽ: qd̃ est primũ cozrelariũ. scõm vero hinc fit notũ. nam qz per vicesimã tertiam tertii ⁊ decimãnonam h in e in f et in g ꝓducit a b c. ergo per septimam secundi a b c ⁊ e f g sunt cõtinue ꝓportionales: qd̃ est secundũ cozrelarium ⁊ propositũ.

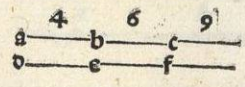
5 ¶ Numeros diuersarum proportionũ sumere: quorum maximi cõmuniter binos et binos numerantes sint continue proportionales.

¶ Sint a b nũeri contra se primi: a minoz et b maioz ⁊ a in se ꝓducat c et in b ꝓducat d ⁊ b in se producat e: per septimã secũdi q̃ proportio a ad b ea est c ad d. et p octauã eiusdẽ iterũ que ꝓportio a ad b ea est d ad e. sunt ergo c d e cõtinue proportiõales. duco g̃ a in c et fiat f ⁊ in d ⁊ fiat g: eritq; p septimã secũdi g ad f sicut d ad c. quare ⁊ sicut b ad a et qz q̃ proportio a ad b ea est c ad d: ergo per 25 secundi qd̃ fit ex a in d equũ est et qd̃ fit ex b in c. at qd̃ fit ex a in d positũ est esse g. quod ergo fit ex b in c est g. et qd̃ fit ex c in a est f. ergo p cozrelariũ vicesimetertie tertii c est maxim⁹ numerus numerãs f g. Item duco d in e ⁊ pueniat h: qz ergo d in a ꝓducit g: ⁊ d in e ꝓducit h. ergo p septimã scõi q̃ ꝓportio e ad a ea est h ad g: et proportio e ad a nõ est vt b ad a. nã e ⁊ b totũ scz et pars equarent: quod est ĩpossibile. ergo ꝓportio h ad g nõ est ꝓportio g ad f. Itẽ qz a b sunt cõtra se p̃mi et e ꝓducit̃ ex b in se. igit̃ e p vndecimã tertij est p̃mus ad a. sunt igit̃ e ⁊ a in sua ꝓportione mĩmi. at d nũerat g p̃m a ⁊ idẽ d nũerat h p̃m e. igit̃ p cozrelariũ vicesimektie ẽtij d ẽ maxim⁹ nũerus numerãs g et h. sumo ergo lz primũ ad d et maiozẽ d in alia quidẽ ꝓportione q̃ b ad a et q̃ e ad a: ⁊ duco ipm̃ lz in e et pueniat l. qz ergo e in d facit h et e in lz facit l per septimã secũdi q̃ ꝓportio lz ad d ea est l ad h. at ꝓportio lz ad d posita est alia a ꝓportiõe b ad a et e ad a. ergo ẽ alia q̃ g ad f et h ad g. et qz lz d sunt ꝓtra se p̃mi ⁊ iõ in sua ꝓportione mĩmi ⁊ numerãt h l p̃m e. est igit̃ p idẽ cozrelariũ 23 tertij e maxim⁹ nũerus numerãs h et l. sũpti sunt igr̃ f g h l numeri diuersar ꝓportionũ quoz maximi c d e binos ⁊ binos cõiter numerãtes sunt ꝓtinue proportionales: quod est propositum.



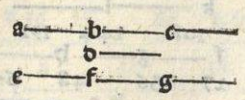
4 ¶ Si numeroz continue ꝓportionalium duo extremi sunt contra se primi: erunt oẽs illi in sua proportione minimi

¶ Sint a b c cõtinue proportionales quoz a ⁊ c sint cõtra se primi: dico tres nũeros a b c esse mĩmos in ꝓportione a ad b. nã si sint tres mĩozes sint d e f: qz p vicesimã ꝓtimã scõi et equã proportionalitatẽ q̃ proportio a ad c ea est d ad f et a ⁊ c p hypothesim sunt contra se primi. ergo p vicesimã tertij sunt in sua ꝓportione minimi. numerãt ergo numeri a c per decimãnonam eiusdẽ numeros d ⁊ f: maiozes scz minozes quod est ĩpossibile.



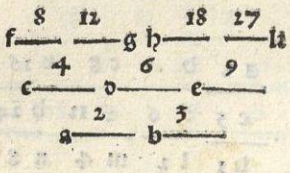
5 ¶ Si quotlibet nũeri fuerit in sua ꝓportiõe mĩmi: ipsoz duo extremi erũt ꝓtra se p̃mi

¶ Hec est cõuersa p̃cedentis. Sint ergo a b c in sua ꝓportione minimi: dico a et c esse contra se p̃mos. Nã si a et c sint cõicantes erit nũerus aliq̃s idem p secundã hui⁹ eos oẽs cõiter numerãs q̃ sit d quos qz a b c sunt tres nũeri inequales: nũerabit p̃m tres diuersos nũeros. numeret ergo a p̃m e ⁊ b p̃m f et c p̃m g: per septimã secundi e f g sunt in eadem proportione cum a b c et cũ sint minozes a b c vtpote q̃ sunt eorum partes nõ sunt igitur a b c dati minimi: quod est contra hypothesim.

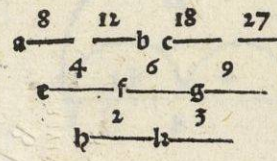


6 ¶ Numeros quotlibet p̃m datã proportionẽ minimos iuestigare. Vtũ manifestũ erit ex duoz in aliqua ꝓportione minimoz primo in ambos et scõo in se: tres. et ex eodẽ p̃mo in illos tres codẽq; scõo in tertiũ: quattuoz ꝓtinus enasci illius ꝓportionis minimos. q̃ si primũ hoc pacto in omnes ducere pergis et secundũ in vltimũ: quotquot libuerit in aliqua proportione minimos efficies.

¶ Illius ꝓportionis mĩmi p vicesimãtertiã tertij reperiãtur q̃ sint a b: duco a in se ⁊ pueniat c et a in b ⁊ pueniat d et b in se et proueniat e per septimã ⁊ octauã scõi tres nũeri c d e erũt continue ꝓportionales et p duodecimã tertij extremi c e sunt cõtra se p̃mi quare per quartã hui⁹ illi tres nũeri sunt in sua ꝓportione mĩmi. Itẽ duco a in oẽs illos et proueniãt f g h ⁊ b in e et pueniat lz ⁊ eadẽ rõne f g h lz sunt cõtinue ꝓportionales et extremi f ⁊ lz contra se p̃mi et illi q̃ttuoz in sua proportione mĩmi. et hoc processu quinq; sex septẽ et quotquot voles reperiãtur. Cozrelariũ ex mõ demõstrationis cognitũ est.



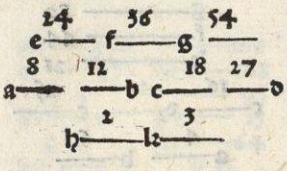
7 ¶ Si numeri cõtinue ꝓportionales in sua proportione fuerint mĩmi: quotcũq; inter extremos fuerit medij totidẽ inter vtrũq; extremoz ⁊ vnitatẽ ꝓportiõales eẽ ꝓuenient



¶Sint a b c d nũeri cõtinue proportionales in sua ꝓportione mĩmi: dico quot fuerint medij cõtinue proportiõales inꝗ a et d totidẽ esse medios, ꝓportionales inꝗ a ⁊ vnitatẽ et totidẽ inꝗ d ⁊ vnitatẽ. nã qꝛ ꝑ primã huiꝰ ꝗlibet duo nũeri proximi erũt cõmẽsurabiles sumo maxios binos ⁊ binos numerãtes ꝗ sint e f g qui ꝑ scõm corrlariũ scõe huiꝰ erũt cõtinue proportionales ⁊ sumo maxios illoꝝ maximoꝝ duos et duos numerãtes ꝗ sint h l: erũtq; h l ꝛ vt a ad b ꝙ ꝑ vicesimã tertiã tertij numerãt e f et f g ꝑm mĩmos illius proportõis. at cũ e numeret a: et g nũeret d ⁊ sint a et d ꝑ quintã huiꝰ contra se ꝑmi erũt ergo e ⁊ g ꝑ octauã tertij contra se ꝑmi. et eadẽ rõne h ⁊ l ꝛ sunt cõtra se ꝑmi. ideoq; in sua proportione mĩmi. ꝑ corrlariũ igiꝗ vicesimẽ ⁊ tertij e nũerat a scõm h et h nũerat e scõm h. et itẽ g nũerat d ꝑm l ꝛ et l ꝛ g scõm l ꝛ. quoties ergo ꝑ diffinitionẽ eius qd̃ est numerũ ꝑ aliũ multiplicari vnitas in h et h in e ⁊ e in a. et ſilr quoties vnitas in l ꝛ toties l ꝛ in g et g in d. sunt igiꝗ vnitas h e a ꝓtinue proportiõales ſilr et vnitas l ꝛ g d cõtinue proportiõales. q̃re sicut inꝗ extremos a d ꝓtinẽtur b c duo medij proportionales. ſilr inꝗ a et vnitatẽ ꝓtinẽtur duo e h et inter d et vnitatẽ itidẽ duo g et l ꝛ medij proportionales: quod est propositũ.

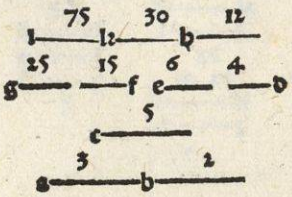
¶Si inter vtrunq; duoꝝũ numeroꝝ et vnitatẽ numeri proportionales equales nũero ceciderint: inter ipsos quoq; totidẽ cadere necesse est. 8

¶Hec est cõuersa p̃cedẽtis vt si inꝗ vnitatẽ ⁊ a cadãt h et e duo nũeri cõtinue proportiõales et inꝗ vnitatẽ ⁊ d cadant l ꝛ g: totidẽ medij proportiõales dico inꝗ a et d totidẽ cadere. Nã qꝛ quoties vnitas in h toties h in e. iõ h in se ductꝰ producet e ⁊ ꝑ idẽ l ꝛ in se producet g et h ⁊ l ꝛ ducti in e et g producũt a et d duco ergo h in l ꝛ et fiat f manifestũ erit ꝑ septimã et octauã scõi e f g in ꝓtinua proportiõe eẽ vt h ad l ꝛ deinde duco h in f et fiat b ⁊ l ꝛ in f et fiat c cõstabitq; ꝑ septimã scõi vt a ad b ita b ad c et c ad d cadent itaq; duo nũeri b et c medij proportiõales inꝗ a et d quẽadmodũ cadebãt inter vnitatẽ ⁊ a et inter vnitatem et d: quod est propositũ.



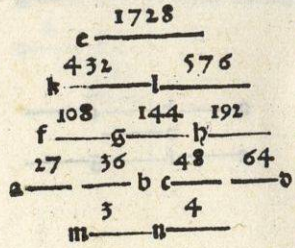
¶Si fuerint quotlibet numeri continue proportionales: minimi quos duo et duo proximi numerant: in eadem proportione proportionales erunt. 9

¶Sint a b c d numeri ꝓtinue ꝓportiõales at vero mĩmi quos duo et duo proximi numerãt sint e f g dico e f g eẽ ꝓtinue proportiõales. sumo enĩ h l ꝛ in illa proportiõe mĩmos ⁊ ꝑ 24 tertii a b c numerãt e f g ꝑm l ꝛ. ⁊ b c d nũerãt eosdẽ ꝑm h. ergo ꝑ septimã ꝑmi e f g sũt ꝓtinue proportõales: qd̃ ẽ propositũ



¶Numeros diuersarum proportionum sumere: a quorum binis ⁊ binis numerati minimi: sint continue proportionales. 10

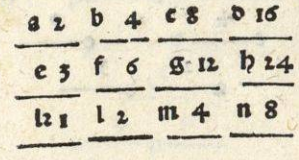
¶Volo sumẽ nũeros diuersaꝝ proportionũ a quoꝝ binis ⁊ binis mĩmi numerati sint proportiõales Capio a b nũeros cõtra se ꝑmos a quidẽ maiorẽ ⁊ b minorẽ quoꝝ cõpositus sit c ꝗ cum vtroq; ꝑ nonã tertii ẽ primꝰ. et duco b in se et proueniat d et b in a ⁊ proueniat e et a in c et fiat f et c in se et fiat g: per septimã primi q̃ proportio a ad b ea ẽ e ad d et f ad e tanq̃ c ad b et c ẽ maius a ergo ꝑ nonã scõi maior est f ad e q̃ e ad d et g ad f vt c ad a que non est vt b ad a. nã c b essent eq̃les neq; vt a ad b. nã per primã huiꝰ qꝛ esset cõtinua proportionalitas c ad a et a ad b proide c et a cõicarent. est itaq; proportio g ad f alia a proportiõe f ad e et e ad d. capio ergo minimũ quẽ numerãt d e ꝗ sit h et mĩmũ quẽ numerãt e f. et sit l ꝛ et minimũ quẽ numerãt f g et sit l. dico h l ꝛ l esse cõtinue proportiõales. nam ꝑ 24 tertii b in e facit h. et qꝛ f ad e tanq̃ c ad b et c b sunt in sua proportiõe mĩmi ergo ꝑ eandem 24 b in f producit l ꝛ est ergo l ꝛ ad h vt f ad e quare vt c ad b. et qꝛ per idẽ c ducit in f ad producẽdũ l. nã f est mĩor et g maior ergo ꝑ octauã scõi erit l ad l ꝛ tanq̃ c ad b. nã b in f facit l ꝛ et c in f facit l. sunt igiꝗ l l ꝛ h cõtinue proportionales mĩmi a binis et binis numeroꝝ diuersarũ proportionũ sumptoꝝ nũerati: qd̃ est propositũ



¶Si inter duos numeros quotlibet cõtinua proportionalitate sumãtur: inter vtrũq; eorum et minimũ quem omnes numerãt totidem assignari necesse est. 11

¶Sint a b c d nũeri cõtinue proportiõales quoꝝ ꝑ 25 tertii e sit inuẽtus mĩmus quẽ numerãt: dico quot nũeri cõtinue proportiõales cadũt inꝗ a et d: totidẽ cõtinue proportiõales cadere inꝗ a et c et inꝗ d et e. sint f g h mĩmi quos a b: b c: et c d bini et bini numerãt. erũt f g h ꝑ nonã huius cõtinue in eadẽ proportiõe a ad b ꝓportiõales. Itẽ mĩmi quos f g et g h bini et bini numerãt sint l ꝛ l dico l ꝛ eẽ mĩmũ quẽ numerãt a b c. nã si esset mĩor ꝑ corrlarium 23 tertii f et g eundẽ numerarẽt quare ⁊ ꝑ idẽ corrlariũ l ꝛ mĩmus ab eis numeratꝰ: maior scz minorẽ qd̃ est ipossibile. et eodẽ argumẽto l est mĩmus quẽ numerãt b c d et ex eodẽ oñdetur mĩmũ quẽ numerãt l ꝛ l eẽ minimũ quẽ numerãt a b c d. at mĩmꝰ quẽ numerãt a b c d positꝰ est c. igiꝗ c est mĩmus quẽ numerãt l ꝛ l. Sint p̃terea m et n mĩmi proportionis a ad b: ergo ꝑ 24. tertii a numerat f et f l ꝛ et l ꝛ e ꝑm n ⁊ per idẽ d numerat h et h l et l e scõm m. quare ꝑ octauã scõi a f l ꝛ e sunt ꝓtinue proportiõales. Itẽ ⁊ d h l e: atq; sicut inꝗ a et d sunt b c duo medii proportionales: ita inter a et e sunt duo f l ꝛ et inter d et e duo h l itidẽ medii proportionales: qd̃ est propositũ

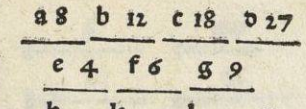
¶Si primus ad secundũ sicut tertius ad quartũ quotcunq; inter primũ et secundum totidem inter tertium ⁊ quartum ꝓportionaliter medios cõsistere necesse est. 12



¶Sit a ad d sicut e ad h: et inꝗ a ⁊ d sint b c duo medij ꝓportiõales. dico etiã inꝗ e ⁊ h eẽ duos medios ꝓportiõales. Sumo q̃tuoꝝ mĩmos illius ꝓportiõalitatis ꝗ sint l ꝛ l m n: ꝑ 21 secũdi et equã proportionalitatẽ l ꝛ ad n sicut a ad d quare ⁊ sicut e ad h. et qꝛ per quintã p̃ñtis l ꝛ n sunt cõtra se ꝑmi erunt ꝑ 20 tertij in sua proportione mĩmi et ꝑ decimãnonã eiusdẽ minimi l ꝛ n numerabũt equaliꝗ e ⁊ h. numerẽt igiꝗ numeri l m numeros f et g ꝑm eundẽ numerũ. et per septimã secundi e f g h erunt cõtinue proportionales. sunt igiꝗ f g itidẽ duo medij proportionales inꝗ e ⁊ h vt duo d c inꝗ a ⁊ d: qd̃ est propositũ.

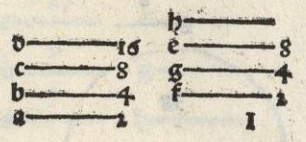
15 ¶ Numerorũ continue proportionaliũ si primus nõ numeret secundũ nõ numerabit aliquis eorum vltimũ. q̃ si primus numeret vltimũ numerabit et secundũ.

¶ Sint a b c d numeri cõtinue ꝓportionales et a nõ numeret b: dico nullũ eorũ nũerare d. ⁊ certũ est qꝛ sicut a ad b: ita c ad d. et a nõ numerat b: c etiã non numerare d. at q̃ b nõ numeret d pz. capio enim e f g tres mĩmos ꝓportionis a ad b. per equã enĩ proportionẽ que ꝓportio e ad g: ea est b ad d. at e ⁊ g per quintã sunt cõtra se primi: ergo e nõ numerat g: quare neq̃ b numerabit d. si enĩ e numerat g ipm e esset vnitas. et cũ que proportio e ad f: ea sit a ad b ⁊ e vnitas numeret f a etiã nũeraret b: qd̃ est ꝯtra hypothesim. et cõsimiliter pbabis a nõ numerare d acceptis quattuor mĩmis in illa ꝓportione q̃ sint h k l m. nã cum p̃mus nõ sit vnitas (alioquĩ oẽs numeraret ⁊ ita a oẽs) primꝰ ⁊ vltimus p quintã huiꝰ erũt contra se primi ⁊ primꝰ h nõ numerabit m: quare neq̃ a numerabit d. vt enĩ h ad m: ita p equam ꝓportionalitatẽ a ad d qd̃ est primũ. Scõm pz ex opposito ꝯntis huiꝰ vltimi mõstrati. Si enĩ a nõ numerat b: etiam nõ numerat d. vt monstratũ est p primã partem: ergo ex opposito ꝯntis si a numerat d numerat ⁊ b: quod est secundum.



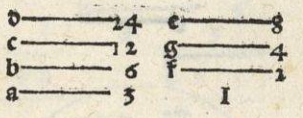
14 ¶ Si primus in tertio quoties vnitas in secundo: inter primũ et tertium et inter vnitatem ⁊ secundũ numeri proportionales numero equales inuenientur.

¶ Sint tres numeri a e d: a primꝰ: e secũdus: d tertius. et sit vt quoties a est in d: toties vnitas sit in e dico ergo quot numeri inter a ⁊ d cõtinue ꝓportionales inueniũtur: totidẽ inter vnitatẽ ⁊ e reperiri. Reperiãtur enĩ inꝯ a ⁊ d duo nũeri b c cõtinue ꝓportionales: qm̃ enĩ a numerat d ergo p premissam a nũerabit b. vnitas ergo numeret f quoties a ẽ in b: itẽq̃ f numeret g quoties b nũerat c: nũeret etiã g toties quẽcunq̃ numerũ. vt verbi cã h quoties c nũerat d: qꝛ ergo vt a ad b: ita vnitas ad f et vt b ad c. ita f ad g. et vt c ad d: ita g ad h. ergo p equã proportionalitatẽ vt a ad d: ita vnitas ad h. sed ⁊ vt a ad d ita ⁊ vnitas ad e. sunt ergo h ⁊ e idem numerus: quare inter vnitatẽ ⁊ e duo pariter numeri f et g reperiuntur medij proportionales vt inter a et d duo b ⁊ c: quod est propositum.



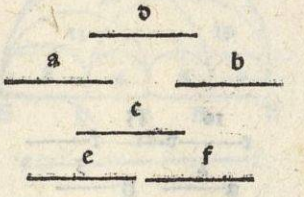
15 ¶ Si fuerint duo numeri contra se primi quotcũq̃ inter alterũ eorũ et minimũ quem numerãt: totidem inter reliquũ ⁊ vnitatẽ proportionales reperiri cõtingit.

¶ Sint cõtra se primi a ⁊ e et mĩmus quẽ numerãt sit d: dico q̃ si inꝯ a et d cadũt b c duo medij ꝯtinue ꝓportionales totidẽ cadẽ inter vnitatẽ ⁊ e: qꝛ a e sunt contra se primi. et ideo in sua ꝓportione mĩmi et d est mĩmus quẽ numerãt: ergo p vicesimãquartã tertij a nũerat d secũdum e. est ergo toties a in d quoties vnitas in e: ergo per precedentẽ quot numeri inueniunꝯ inter a ⁊ d primũ ⁊ tertium: totidem continue proportionales inueniunꝯ inter vnitatem ⁊ e secundũ: quod est propositum.



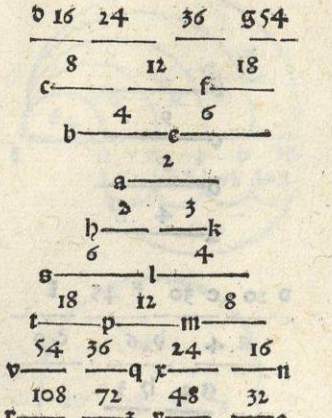
16 ¶ Si fuerit duo numeri cõicantes: quotcũq̃ inter alterũ eorũ ⁊ maximũ q̃ eos nũerat totidẽ inter reliquũ ⁊ minimũ ab eis numeratũ ꝯtinue ꝓportionales ꝯsistere ncẽ est.

¶ Sint a b nũeri adinuicẽ ꝯmẽsurabiles et c maximꝰ eos numerãs ⁊ d mĩmus ab eis numeratꝰ: dico quot ꝓportionales cadũt inter c et b: totidẽ cadere inter a ⁊ d. itẽ quot cadũt inter c ⁊ a: totidẽ cadere inꝯ b ⁊ d. Sint enĩ e ⁊ f mĩmi in ꝓportione a ad b: ergo p vicesimãtertiã tertii e in c facit a. et per vicesimãquartã eiusd̃ e in b facit d: ergo p septimã scõi q̃ proportio c ad b ea est a ad d. ergo p duodecimã huiꝰ quotcũq̃ cadũt medij ꝓportiõales inꝯ c ⁊ b primũ et scõm: totidẽ cadũt inꝯ a ⁊ d tertiũ et quartũ et iterũ qꝛ vt c ad b: ita a ad d. ergo pmutatĩ c ad a vt b ad d: quare p eandẽ duodecimã quot medij proportionales cadẽt inꝯ c et a: totidẽ cadent inꝯ b ⁊ d. manifestũ est ergo quotcũq̃ inter alterũ eorũ et maximũ eos numerantẽ cadant: totidẽ inter reliquũ ⁊ minimũ ab eis numeratũ cadere: qd̃ est ꝓpositũ.



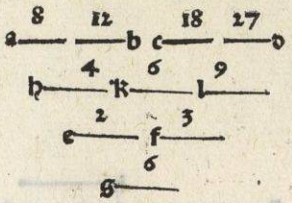
17 ¶ Si ab vno principio duo ordines numerorũ ꝓportionaliũ numero equaliũ sumanꝯ quotcunq̃ inter primum et alterũ extremorũ: totidem inter extremos medii secũdum ꝓportionem proximorum a primo ꝓportionales erunt.

¶ Incipiat ab a ad d vnus ordo numerorũ continue proportionaliũ et ab eodẽ a ad g secundus ⁊ numero quidẽ equaliũ: dico quot medij proportionales continebũtur inter a ⁊ d: totidem cõtineri inter d ⁊ g ꝯm ꝓportionẽ proximorũ a primo. cõtineanꝯ ergo b c medij ꝓportionales inter a ⁊ d: ⁊ e f medij proportionales inꝯ a ⁊ g: totidẽ cõtineri dictũ est inter d g ꝯm proportionẽ b e: qd̃ ostendiꝯ. Capio enĩ h k: mĩmos proportionis b ad e ⁊ duco h in oẽs illos et fiant l m n o ex vna parte: et ex altera pte fiant l p q r per septimã secundi l m n o sunt cõtinue proportionales: similiꝯ et l p q r. et per eandẽ que proportio b ad e: ea est m ad p. Deinde duco k: in a e ⁊ f et proueniant s t v: eruntq̃ per septimã secundi s ad t ⁊ t ad v sicut l ad p: p ad q et q ad r. ⁊ per octauam eiusdem sicut h ad k: ita ⁊ l ad s. quare m ad p sicut l ad s. et qꝛ p fit ex h in e ⁊ t ex k: in e: ides per octauam secundi p ad t vt h ad k: quare vt m ad p. sunt igitur continue proportionales m p t. et qꝛ dictũ ẽ vt s ad t ⁊ t ad v: ita l ad p: p ad q et q ad r. est ergo econuerso r ad q vt v ad t: ergo permutatim r ad v vt q ad t. ⁊ quia iterum q ad p vt t ad s: ergo permutatim q ad t vt p ad s: quare p ad s: q ad t et r ad v erunt in eadem proportione. ⁊ quia que proportio m ad k: ea est n ad m ⁊ o ad n: ⁊ m ad l probata est vt p ad s. ergo vt n ad m: ita q ad t. ergo permutatim que proportio n ad q: ea est m ad t. ergo per duodecimam huius cum inter m ⁊ t contineatur vnum medium proportionale scz p secundũ proportionem m ad p: itidem continebiꝯ vnum medium proportionale inter n q secundũ proportionẽ m ad p qd̃ sit x. ⁊ qꝛ q fit ex h in f ⁊ v ex k: in f per octauã primi erit proportio q ad v vt h ad k: quare vt m ad p. sunt igitur n x q v continue proportionales ꝯm



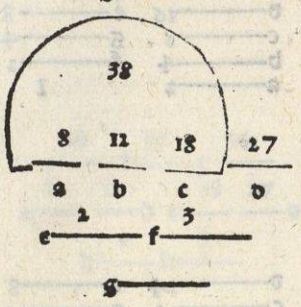
ꝓportionē m ad p. at rursum cū que ꝓportio o ad n ea sit r ad v. ergo ꝑmutatī o ad r vt n ad v: sed inē n et v cōtinentur ꝛ q duo medij ꝓportionales ꝑm proportionē m ad p. ergo per duodecimā huius ꝑm eandē proportionē totidem cōtinebuntur medij inter o ⁊ r q̄ sint y ⁊ z. at cū o fiat ex h in d et r ex h in g. ergo per septimā secundi que ꝓportio o ad r ea est d ad g. ergo per duodecimā huius quot medij proportionales cōtinentur inter o et r ꝑm proportionē m ad p totidem continebūtur inter d et g. at duo medij y ⁊ z vt monstratū est ꝑm proportionē m ad p siue b ad e qd̄ idem est continētur inter o et r. igitur et duo ꝑm eandē proportionē continentur inter d ⁊ g: qd̄ erat demonstrandū.

¶ Si fuerint quotlibet numeri in sua proportione minimi: quicunq̄ aliquem illorum numerat alteri terminorū illius proportionis erit cōmensurabilis. 18



¶ Termini diffiniti sunt q̄ in aliqua ꝓportione sunt mīmi. Sint ergo a b c d quotlibet numeri ꝓtinue ꝓportionales in sua ꝓportione minimi et sint e f termini in ꝓportione a ad b et numeret g numerū a aut b aut c aut d: vt verbi cā c: dico g esse cōmensurabilē e aut f. capio tres mīmos in ꝓportione a ad b per sextā huius q̄ sint h ⁊ l. qz igitur ex correlario eiusdē sexte ex e in l fit c. ergo ꝑ quintā tertij g cōmunicabit cum e aut cum l. si cum e constat propositum. si autem cum l: qz per idem correlarium ex f in se fit l per eandem quintam tertij cōmunicabit cum f: quod est propositum.

¶ Si fuerint quotlibet numeri in sua proportione minimi: quilibet eorum ad compositum ex reliquis erit primus. 19



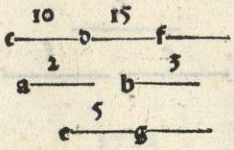
¶ Sint a b c d quotlibet numeri continue ꝓportionales in sua ꝓportione minimi. e f vero termī proportionis a ad b. dico ꝓpositū ex a b c esse primū ad d. Nam si aliquis numeraret ꝓpositū ex a b c et d. ergo ꝑ precedentē cōicabit cum e aut f erit ergo aliq̄s numerus cōiter numerās e aut f. et compositū ex a b c et d q̄ sit g: qz ergo g numerat e aut f et ꝓpositum ex a b c et numerū d et vterq̄ e ⁊ f numerat b et c per decimānonā tertij. ergo per vicesimātertiā primi g numerabit b et c. ergo et g per quintā scōi numerabit a residuū: sed g positus est etiā numerare d: et a ⁊ d per quintā huius sunt contra se primi igitur g numerat contra se primos qd̄ est impossibile. nō ergo cōpositus ex a b c est cōpositus ad d sed necessario primus: quod est propositū. et ita de quolibet alio ad cōpositum ex reliquis argumētare

¶ Si quotlibet numeri fuerint in sua proportione minimi: qui ex omnibus componitur ad quemlibet eorum erit primus. 20

¶ Hoc ideo est q̄ numerus cōpositus ex duobus contra se primis ad quēlibet eorū per nonam tertij est primus. at ꝑ precedētem quilibet numerorꝫ in sua ꝓportione minimorū ad compositū ex reliquis est primus: ergo cōpositus ex illis per eandē nonam ad quēlibet illorum numerorū et compositū ex reliquis est primus. quare ad quēlibet illorum erit primus: quod est propositum.

¶ Si fuerint duo numeri contra se primi: tertium eis in continua proportionalitate adiungi est impossibile. 21

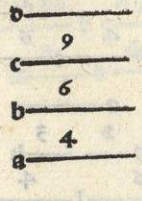
¶ Nam si tertius eis in cōtinua ꝓportionalitate adiūgeretur: ergo per primā huius primus ⁊ scōs erunt cōmensurabiles: quare nō erunt contra se primi quod est contra hypothesim ⁊ propositū.



¶ Si duo numeri contra se primi numerent alios duos ꝑm numerū a neutro eorum numeratum: illis quoq̄ in continua proportionalitate non adiungetur tertius. 22

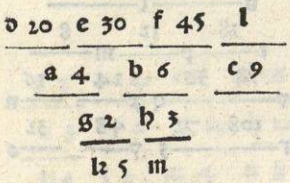
¶ Sint a b numeri contra se primi ⁊ e numerus neq̄ ab a neq̄ ab b numeratus ꝑm quē a numeret c et b numeret d: dico non esse numerū in continua ꝓportionalitate numeris c et d adiungendū. Si enī sit aliquis esto ille f: qz per octauā secūdi ꝓportio c ad d vt a ad b erit: ergo d ad f vt a ad b. et a b sunt contra se primi quare per vicesimā tertij sunt in sua ꝓportione minimi ⁊ per decimānonam eiusdem quoties a numerat d toties b numerat f. sit ergo vt equalis numerēt ꝑm g: cum itaq̄ b numeret d ꝑm e ⁊ f ꝑm g. ergo per septimā secundi q̄ proportio d ad f: ea est e ad g. quare ⁊ q̄ a ad b: ea est e ad g. et a b ꝓbati sunt in illa ꝓportione mīmi. igitur ꝑ decimānonam secūdi a b numerāt e g equalis. numerabit igit alter numerorꝫ a aut b numerū e: quod est contra hypothesim.

¶ Si numeri proportionales fuerint in sua proportione minimi: non erit extremi ad aliquem proportio que primi ad secundum. 23



¶ Sint a b c continue ꝓportionales in sua ꝓportione mīmi: dico c ad nullū esse ꝓportionē q̄ a ad b. Si enī sit aliq̄s esto ille d. qz ergo a ad b sicut c ad d: ergo ꝑmutatī a ad c sicut b ad d. ⁊ qz a b c sunt in sua ꝓportione mīmi: ergo ꝑ quintā hui⁹ a c sunt cōtra se ꝑmi. quare ꝑ vicesimā tertij in sua ꝓportiōe mīmi quare ꝑ decimānonā eiusdē a nūerabit b: ⁊ c nūerabit d equalī. at si a nūerat b: etiā b nūerat c. nam eadem ꝓportio quare per vicesimātertiam primi ⁊ a numerabit c: verūtamen a c erant contra se primi. hoc igitur impossibile ⁊ propositum.

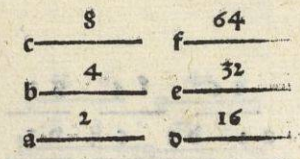
¶ Si quotlibet numeri in sua proportione minimi totidē alios numerēt ꝑm numerū a neutro illius proportionis numeratū: nō erit alius cum illis cōtinue ꝓportionalis. 24



¶ Sint a b c nūeri ꝓtinue ꝓportionales in sua ꝓportione minimi q̄ numerēt totidē d e f ꝑm k ⁊ q̄ neq̄ numereⁿ ab g neq̄ ab h in ꝓportione a ad b mīmis: dico q̄ d e f nō est adiūgendꝰ aliq̄s cū illis ꝓtinue ꝓportionalis. Si enī fuerit aliq̄s sit l q̄ adiūgat post f: nūerabunt ergo a b c tres mīmi tres vltimos illius ꝓportiōis e f l equalī: sitq̄ id ꝑm m. ⁊ qz c numerat f ꝑm k ⁊ l ꝑm m: ꝑ septimā ergo scōi k ad m sicut f ad l: quare ⁊ sicut g ad h per decimānonam. ergo tertij g h in illa ꝓportione minimi nūerabunt k m equaliter: qd̄ est contra hypothesim. positū enī erat neq̄ g neq̄ h numerare k.

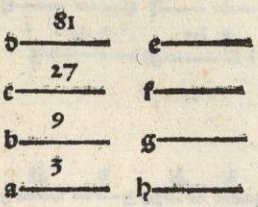
25 ¶Si sumantur numeri ab vnitate cõtinue proportionales: nullus eorum numerabit vltimum nisi ꝑm aliquem in illa serie dispositorum.

¶Sint a b c d e f numeri cõtinue ꝓportiõales ab vnitate: dico nullũ eorꝫ numerare f/ nisi ꝑm aliquẽ in illo ordine positorꝫ. nam qꝛ quoties vnitas in a toties e in f: ergo per diffinitionem e numerat f scõs a. Item qꝛ vt vnitas ad a: ita d ad e. et vt a ad b: ita e ad f. ergo per equã ꝓportionalitatem vt vnitas ad b ita d ad f. quoties ergo vnitas in b: toties d in f. per diffinitionẽ igiꝯ d nũerat f scõm b. et qꝛ item per equã ꝓportionalitatem per vicesimam primã secundi vt vnitas ad c: ita c ad f. quoties ergo vnitas in c toties c in f: quare c numerat f scõm se. et qꝛ mõstratus est d numerare f scõm b: ergo alternatim per octauam primi b numerat f scõm d. et qꝛ etiã e mõstratus est nũerare f scõm a: alternatim a nũerabit f scõm e. est itaq; ostensum a b c d e numerare f vltũ ꝑm aliquẽ in illo ordĩe positorꝫ. qõ erat ꝓpositũ.



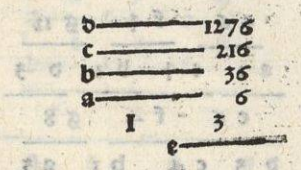
26 ¶Si numerorum ab vnitate continue proportionaliũ secundus ab vnitate fuerit numerus primus: nullus numerabit vltimũ nisi aliquis in ordine antecedentiũ.

¶Sint a b c d numeri ꝓtinue ab vnitate ꝓportiõales: et a numerus ꝑmus. dico q̃ nullus numerabit d: nisi aliq̃s precedentiũ d in ordine numerorꝫ a b c d. Si enĩ aliq̃s alius numeret d sit e qui nũeret eũ scõm f. qꝛ ergo a nũerus ꝑmus nũerat d ꝓductũ ex e in f: ergo p quartã tertij a nũerat e aut f. sit ergo vt numeret e intelligo q̃ttuor nũeros: a/e/f/c: et qꝛ per precedẽtem a in c extremus in extremũ ꝓducit d ꝛ eũdẽ ꝓducit e in f medius in mediũ. ergo per vicesimã quintam scõi vt a ad e: ita f ad c. sꝫ a nũerat e: ergo et f numerat c. numeret ergo f nũerũ c scõm g: eadẽ rõne f vel g nũerabit b: sitq; id scõꝫ h. p idẽ quoq; tandẽ ꝓcludes g aut h nũerare a: q̃re a non ẽ nũerus ꝑmus. qõ ẽ ꝓtra hypothesim. at si g aut h ponat eq̃lis a: argumẽtaberis p ꝑmissam reliquos eẽ equales iis qui sunt in ordĩe a b c d: et ꝓpositũ.



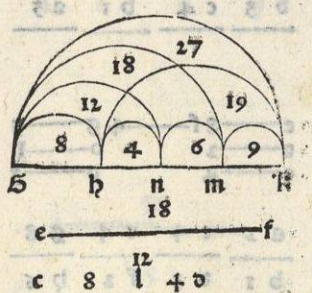
27 ¶Numeris ab vnitate proportionalibus si aliquis primus vltimum numeret: secundum quoq; ab vnitate numerabit.

¶Sint a b c d ꝓtinue ꝓportiõales ab vnitate: sitq; e numerus primus qui nũeret d/ vltũ: dico iꝑm e numerare a scõm ab vnitate. Si enĩ e primus non nũerat a: ergo p primã tertij e erit primus ad a. et cũ quoties vnitas in a toties a sit in d: ergo a scõm se numerat d. quare per vndecimã tertij d est ꝑmꝰ ad e. et cũ quoties vnitas in a toties b sit in c: q̃ b nũerat c secũdũ a. quare per decimã tertij e est ꝑmus ad c. et item quoties vnitas in a toties c in d: ergo c numerat d secũdum a. per eãdem ergo decimam: e est primus ad d. non ergo e numerat d. quod est oppositum positi.



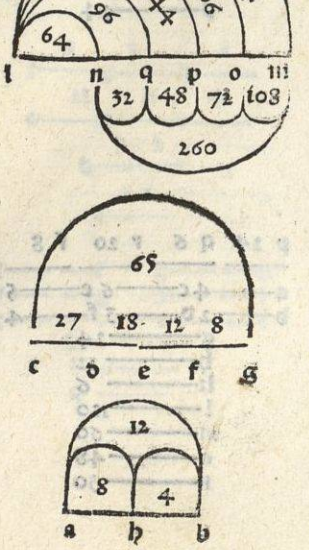
28 ¶Si numerorum continue proportionalium primus de secundo et vltimo tollatur: que proportio fuerit residui secundi ad primũ ea est residui vltimi ad cõpositum oĩm precedentium.

¶Sint a. b. c. d. e. f. et g k: numeri ꝓtinue ꝓportiõales ꝛ detrahat a b primus de c d secũdo: sitq; residuus secũdi l d. Itẽ detrahat a b de vltimo g k/ sitq; residuus h k. dico que ꝓportio l d ad a b: eã esse h k ad ꝓpositũ ex a. b. c. d. et e f. sumo enĩ ex g k nũerꝫ g m equalẽ e f/ ꝛ g n equalẽ c d. et intelligo g k. g m. et g n. vt tria tota. qꝛ ergo g m equat e f: que proportio g k ad e f: ea est totius g k ad totũ g m. et qꝛ g n equat c d: ideo que ꝓportio e f ad c d: ea est totius g m ad totũ g n. et per idem q̃ ꝓportio c d ad a b: ea est g n ad g h. et vltra q̃ ꝓportio totius g k ad totũ g m: ea est g m detracti g k ad g n detractum g m/ q̃ numeri g. k. e. f ꝛ c. d positi: sint ꝓtinue ꝓportiõales. et q̃ ꝓportio totiꝰ g m ad totũ g n: ea est g n detracti g m ad g h detractũ g n. quare p quintã scõi m l: ad n m/ ꝛ n m ad h n residuorꝫ ad residua vt totorꝫ ad tota: id est m l: ad n m: sicut e f ad c d. et n m ad h n sicut c d ad a b. ergo ꝑmutatim per tertiã secũdi sicut m l: ad e f: ita n m ad c d et h n ad a b: ergo p vicesimam secũdi h n m l: sit qui sũt h l: ad h positũ ex e f c d et a b: sicut h n vnius illorꝫ ad a b vnum horꝫ. at cũ g n equetur c d/ et g h equetur a b: ergo g h equabitur c l. equat ergo h n nũero l d. ablatis enĩ equalibus ab equalibus: residua sũt equalia. q̃re ergo que proportio l d ad a b: ea erit h l: ad ꝓpositũ ex oĩbus precedẽtibus. qõ est propositum.



29 ¶Propositis duobus numeris/ sumptisq; quotlibet secũdũ proportionem eorꝫ ꝓportionalibus: si minor in minorem ꝛ maior in maiorem ducatur ꝛ ꝓductorum differentia per differẽtiam ꝓpositorꝫ diuidatur: exibit numerus qui ex omnibus aliis coaceruat.

¶Sint a b et a h duo numeri et h b eorꝫ differẽtia: et sint c d/ d e/ e f/ et f g: quotlibet in ꝓtinua ꝓportione a b ad a h: ducaturq; a b in c d ꝛ pueniat l m. item a h in f g ꝛ pueniat l n: sitq; differentia l m ꝛ l n numerus n m. dico q̃ si n m diuidatur p h b: differẽtiam primi ad scõm puenire c g numerꝫ ex c d e f g cõpositum. Nam ex a b in d e fiat l o et in e f fiat l p et in f g fiat l q. qꝛ per decimã primi qõ fit ex ductu a b in f g: equũ est ei quod fit ex ductu a h ꝛ h b in eũdẽ nũerũ f g: et ex a b in f g fit l q: et ex a h in eũdẽ fit l n. ergo ex h b in f g per eãdem decimã fit n q. Preterea intelligo quattuor numeros: a b primum/ a h secũdũ/ e f tertiũ/ et f g quartũ. et qꝛ q̃ proportio primi ad scõm ea est tertij ad quartũ: q̃ p vicesimã quintam secũdi quod fit ex ductu a b in f g primi in vltimũ: equũ est ei qui fit ex a h in e f medio in medium. at quod fit ex a b in f g est l q: ergo quod fit ex a h in e f est l q. at xo qõ fit ex toto a b in e f est l p: ergo per decimam primi quod fit ex h b in e f est q p. Et eadẽ ꝓsimilicq; argumẽtatione: quod fit ex h b in d e est p o: et in c d est o m. quare per nonam primi h b in toto c g producit n m. ergo per sextam petitionem primi si ꝓductus n m diuidatur per eũdem numerũ h b: redibit prior numerus c g. qõ erat demonstrandum.



¶Quarti elementorum Arithmetices Jordani finis.

Omnis ꝓportio sup aliã quãlibet addere ꝓportionem dicit: que cũ illa ꝓti-
o nuata ipam componit. differẽtia ꝓportiõis ad aliam: vocatur illa ꝓportio
qua eadem supra reliquam abundare dicitur.

¶ Quod addit ꝓportio primi ad scõm sup ꝓportionẽ tertii ad quartũ: est
ꝓportio que est inter ꝓductum ex primo in quartum ⁊ ꝓductũ ex secũdo in tertium. 3

e 6	f 4	g 3	
a 2	b 1	c 4	d 3

¶ Hec docet substrahere ꝓportionẽ a ꝓportione: et q̃/ quãtaq̃ ꝓportio minore ꝓportiõe a maiore substracta relicta sit: quã hic dicam ꝓportiõis a ꝓportiõe noiamus. Sint quattuor numeri: a pm⁹/ b secũdus/ c tertius/ d quartus: et sit maior ꝓportio a ad b q̃ c ad d/ et ex a in d fiat e: et ex b in c fiat f Dico ꝓportiõem quã addit a ad b sup ꝓportiõem c ad d: eã esse q̃ est inter e et f. duco enim item b in d ⁊ fiat g. qr enim b in c facit f/ ⁊ in d facit g: ergo p septimã secũdi q̃ ꝓportio c ad d: ea est f ad g. et quia a in d facit e: et b in d facit g: ergo per octauã scõi e ad g vt a ad b. et qr posita est a ad b maior ꝓportio q̃ c ad d: ẽ ergo ⁊ e ad g maior ꝓportio q̃ f ad g. quare p nonã secũdi e maior est q̃ f. est itaq̃ ex diffinitione ꝓportiõis ꝓposite ex scõo huius habita ꝓportio e ad g ꝓposita ex ꝓportionibus e ad f et f ad g. addit ergo ꝓportio e ad g ꝓportiõem e ad f: sup ꝓportionẽ f ad g. quare ⁊ ꝓportio a ad b eãdẽ ꝓportionem e ad f addit sup ꝓportionem c ad d. quod est propositũ. ¶ Id tñ aliaduerti dignũ est si semel minore ꝓportione de maiore substracta relicta sit differentia ꝓportio maior: item ab ea demak minor et id toties fiat q̃ũsq̃ relicta sit aut substracte equalis aut ea minor. sicq̃ cognoscere ꝓptũ erit q̃ties ꝓportio minor fuerit in maiore et quã insup superaddet minorem: si vltra supaddat.

¶ Quo abundat ꝓportio primi ad scõm super ꝓportionem tertii ad quartum: eo 2
abundat ꝓportio primi ad tertium sup ꝓportionẽ scõi ad quartum. Itẽq̃ ꝓportio quarti ad tertium super ꝓportionem secundi ad primum.

e 6	f 4	g 12	
a 2	c 4	b 1	d 3
e 6	f 4	g 8	
d 3	c 4	b 1	a 3

¶ Sit eadem hypotesis q̃ prius: dico ꝑmo qua ꝓportiõe vt e ad f abũdat ꝓportio a ad b sup ꝓportionem c ad d: eadẽ ꝓportiõe abũdare a ad c sup ꝓportionẽ b ad d. Scõo eadem q̃q̃ ꝓportione abũdare d ad c sup ꝓportionẽ b ad a. Primũ patet: nã qr a ad b primi ad scõm maior ẽ ꝓportio q̃ c ad d tertũ ad quartum. ergo p duodecimam secũdi maior est ꝓportio a ad c primi ad tertiũ: q̃ b ad d secũdi ad quartum. fac ergo a primum/ c scõm/ b tertiũ/ d quartum: et argumentare per precedentem ⁊ videbis propositum. Scõm similiter patet: nam quia a ad b maior q̃ c ad d: ergo per vndecimã secũdi erit d ad c maior q̃ b ad a. fac ergo d primum/ c secũdum/ b tertium/ a quartũ: ⁊ argumentare per precedẽtem: et facile videbis propositum.

¶ Si addat aliqua ꝓportio super alteram q̃tum tertia sup quartam: erit vt cõposita 3
ex prima ⁊ quarta composite ex reliquis sit equalis.

c — 3	f — 4	g — 3	
a — 2		b — 1	
c — 4		d — 3	
a 2	c 4	e 4	g 8
b 1	d 3	f 2	h 6

l — 16
lz — 8
m — 6
n — 64
q — 48
o — 32
p — 24

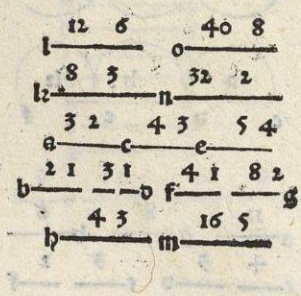
¶ Priusq̃ ad ꝓpositũ demõstrandũ veniamus: volo demõstrare quo pacto ꝓportio ꝓportiõi addẽda sit: et dico ꝓportiõem ꝓductoꝝ ex ꝑmo terio vni⁹ ꝓportiõis in primũ alterius: ⁊ ex secũdo in scõm eẽ ex duabus illis ꝓportiõibus ꝓpositã. Sint enim a ad b et c ad d due ꝓportiões: quas volo illi addere atq̃ ex ipsis ꝓpositã ꝓflare. duco c in a ⁊ pueniat e: et d in b ⁊ pueniat g. dico ꝓportionem e ad g: eẽ ꝓpositã ex ꝓportiõibus a ad b ⁊ c ad d. duco enim item c in b ⁊ pueniat f: et per septimam scõi q̃ ꝓportio a ad b: ea est e ad f. et per octauam eiusdem q̃ ꝓportio c ad d: ea ẽ f ad g. et ꝓportio e ad g ꝓponitur ex ꝓportiõibus e ad f ⁊ f ad g. quare ⁊ ex ꝓportiõibus a ad b: ⁊ c ad d: quod intẽdebatur. Nunc ergo ad demõstrãdum ꝓpositũ veniamus. Sit ergo vt q̃tũ ꝓportio a ad b addit sup ꝓportionẽ c ad d tñ addat ꝓportio e ad f sup ꝓportionẽ g ad h. dico ergo ꝓportiõem ꝓpositã ex ꝓportiõibus a ad b ⁊ g ad h: eẽ equalẽ ꝓportioni ꝓposite ex ꝓportiõibus c ad d ⁊ e ad f. duco enim g in a ⁊ in b et fiant l lz et b in h et fiat m: per septimã ergo ꝑmi l ad lz sicut a ad b. et qr b in g facit lz et in h facit m: per eãdem lz ad m sicut g ad h. quare erit ꝓportio l ad m ꝓposita ex ꝓportiõibus a ad b et g ad h prĩa scz vltĩa Deinde duco c in l/ in lz/ ⁊ in m: et pueniãt n/ o/ p: qui p septimã secũdi erũt ꝓportiõales ꝑmi ꝓportiões l. lz. m. qr ergo n ad o sicut l ad lz: et o ad p sicut lz ad m: ergo per equã ꝓportiõalitatem n ad p sicut l ad m. quare equales sunt ꝓportiões l ad m ⁊ n ad p. deinde duco d in l ⁊ pueniat q. qr ergo n fit ex c in l ⁊ q ex d in l: per octauam ergo secũdi est n ad q sicut c ad d. Itẽ qr l ad lz sicut a ad b: addet l ad lz sup ꝓportiõem c ad d q̃tũ a ad b addit sup eãdem ꝓportionem c ad d. Intelligo ergo q̃ttuor numeros l/ lz/ c/ d. et quia l in d facit q: ⁊ lz in d facit o vt mõstratũ est: ergo p primã huius q ad o est qd addit a ad b sup ꝓportionem c ad d. et qr eãdem ꝓportiõem addit e ad f sup g ad h: addit q̃ e ad f ꝓportiõem q ad o sup ꝓportionem g ad h. at ꝓportio o ad p est vt g ad h/ et q ad o est qd addit e ad f sup g ad h: ergo q ad p ꝓstãs ex q ad o: et o ad p equak ꝓportioni e ad f. et n ad q vt dictũ est equak c ad d: ⁊ n ad p equak l ad m ꝓposite ex ꝑma ⁊ vltĩa. et n ad p ꝓstituik ex scõa ⁊ tertia. sic itaq̃ ꝓstructũ est propositum

¶ Si inequales ꝓportiones vni addãtur: erit additaꝝ ⁊ ꝓpositarũ eadem dria. 4

p 24	q 6	r 20	s 8
a — 4	c — 6	e — 5	
b — 2	d — 3	f — 4	
g — 24			
h — 12			
lz — 6			
l — 120			
m — 60			
o — 48			
n — 30			

¶ Sit a ad b quecũq̃ ꝓportio: sintq̃ c ad d ⁊ e ad f due ꝓportiões inequales vt c ad d maior/ ⁊ e ad f minor: addak q̃q̃ ꝓportio c ad d ꝓportioni a ad b: sitq̃ ꝓposita ꝓportio p ad q. addak item ꝓportio e ad f eidem ꝓportioni a ad b ⁊ proueniat ꝓposita r ad s: dico eãdem eẽ differẽtiã ꝓportionis p ad q ad ꝓportionem r ad s q̃ est ꝓportiõis c ad d ad ꝓportiõem e ad f. duco enim c in a ⁊ in b ⁊ proueniat g h: et b in d ⁊ proueniat lz. per septimam secũdi erit ꝓportio g ad h vt a ad b: et h ad lz vt c ad d quare ꝓportio g ad lz est ꝓposita ex ꝓportiõib⁹ a ad b ⁊ c ad d: atq̃ eadem ꝓportioni p ad q. duco item e in g/ in h/ et in lz: et proueniãt l m/ n ꝓportiõales per septimam secundi g h lz. et duco f in h et

proueniat o.erit enī l ad m sicut g ad h:quare sicut a ad b.et qz e in h producit m:⁊ f in h producit o:ꝗ per octauam secūdi q̄ proportio e ad f:eadē est m ad o.quare proportio l ad o cōposita ē ex proportiōe a ad b et e ad f.atq̄ eadem proportiōi r ad s.at qz l ad n et g ad lz et p ad q equātur:et sīlr l ad o ⁊ r ad s adinuicem equātur:et l ad n superat l ad o proportiōe o ad n.erit o ad n dr̄ia p ad q:et r ad s proportionum ꝓpositaꝝ.at cū m ad n equetur c ad d:et m ad o equetur proportioni e ad f vt hec oīa mōstrata sunt:⁊ proportio m ad n supet proportionem m ad o in proportione o ad n.erit ergo eadem proportio o ad n differētia c ad d et e ad f proportionum scz additaꝝ et ꝓpositaꝝ.quod est propositum.

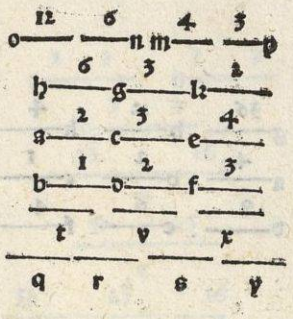


5 ¶ Proportiones minores minoribus siue eqlib⁹ addite: minorē ꝓportionē ꝓstituūt.

¶ Sit a proportio minor b:et c minor d:et e mior f.dico proportionem ꝓsitā ex a c miorem eē proportione ꝓsita ex b et c et proportiōem ex c e miorem eē proportiōe ex d e.sit itē proportio g equalis proportioni f.dico proportionem ex e g:minorem eē proportiōe ex f g.Primū pz:nam cū proportiōes a b sint inequales ⁊ b sit maior a.sit ergo h differētia qua abūdat b sup a:et proportio ex b addita c sit lz et ex a addita c sit l:per p̄cedentē eadē erit dr̄ia lz ad l et b ad a.sed b est maior a in proportiōe h:igīt et lz maior l in eadē proportiōe.et eadē rōe mōstrabis proportiōem ꝓsitā ex d e maiorem eē proportione ꝓsita ex c e.qd̄ est p̄mū.Scd̄m p idē pz:nā q̄a f maior ē e sit m differētia f ad e.⁊ ꝓsita ex f g sit n:et ex e g sit o.per p̄cedētem eadem est differentia f ad e et n ad o.sed f maior est e in proportiōe m igīt et n proportio ꝓsita ex f g:maior ē proportiōe o ꝓsita ex e g:in eadē proportiōe m.qd̄ ē scd̄m.

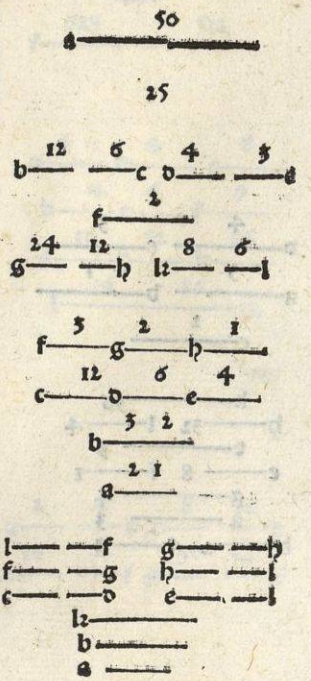
6 ¶ Datas proportiones:in minimis terminis cōtinuare.

¶ Sint a ad b.c ad d.et e ad f:date proportiōes in mīmis terminis:quas in proportiōalitate ꝓtinua in mīmis numeris assignare iubemur.capio mīmū quē nūerāt b c qui sit g.et quoties b ē in g:toties sit a in h.et per septimā secūdi tunc q̄ proportio a ad b:ea est h ad g.et quotics c est in g:toties sit d in lz.per eādem septimam eadē erit proportio c ad d et g ad lz.erūt ergo due ꝓportiōes a ad b ⁊ c ad d in ꝓtinua ꝓportiōalitate in numeris h g lz:et etiā in mīmis numeris.nā si in mīoribus eē possint ꝓtinue sit ergo vt in t v x.per decimānonam tertij b sīlīter ⁊ c nūerabit v.quare ⁊ p correlariūvicesimequarte tertij g mīm⁹ ab eis nūeratus etiā numerabit v.nō sunt igīt t v x mīmi hoc pacto ꝓtinuativt poēbat. et si e numeraret aliq̄ties lz: caperem l quem p̄m eūdē numeraret f.quare p septimā secūdi q̄ ꝓportio eēt f ad e:eadem eēt lz ad l:sicq̄ addita eēt tertia ꝓportio in ꝓtinua ꝓportionalitate ⁊ in mīmis terīs In mīmis quidē ꝓpter causam īmediate adductā.at qz h e non nūerat k:capio mīmum numerū quē numerant e ⁊ k qui sit m.et quoties k est in m scd̄m eūdē numerum sit g in n et h in o. Item quoties e est in m toties|scd̄mq̄ eūdē numerum sit f in p.⁊ per septimam secūdi erit o ad n sicut h ad g.q̄re sicut a ad b.et n ad m:sicut c ad d.et m ad p:sicut e ad f.q̄re tres ꝓportiōes date sunt in ꝓtinua ꝓportiōalitate in numeris o ad n/n ad m/et m ad p.et etiā in mīmis numeris.nā si assignarētur minores:vt q r s y:per decimānonam secūdi b ⁊ c numerarent r.ergo g mīmus ab eis nūeratus p correlariumvicesime quarte tertij etiā numerat r.et cū que ꝓportio g ad lz ea sit r ad s:ergo pmutatim que ꝓportio g ad r ea est lz ad s.sed g numerat r:ergo lz numerat s.et etiaꝝ per decimānonam tertij e numerat s.quare ⁊ m mīmus ab eis nūeratus p correlariūvicesimequarte tertij numerabit s.nō sunt igīt q/r/s/y mīmi: illas ꝓportiones ꝓtinue retinētes:vt ꝓponebat.quare nulli tales erūt:p̄ter o n m p.qd̄ est ꝓpositum.



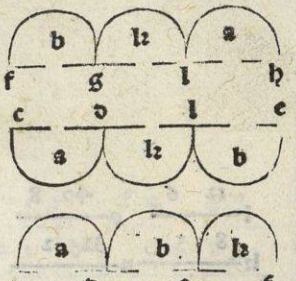
7 ¶ Numerum propositum per partes inequales p̄m assignatas ꝓportiones continue sumptas:diuidere.

¶ Numerus datus is eē debet qui per numerum proportōes assignatas in mīmis ꝓtinentem diuidi possit:alioquin in eo partes assignatis proportiōibus rñdētes inuenire eēt impossibile. Sit ergo tris nūerus datus a:quē ꝓpositum est diuidere in quattuor ꝓtes inequales:quaꝝ pria ad scdam sit dupla scda ad tertiam sesqualtera/et tertia ad quartam sesquitertia.ꝓtinuo per precedētem tres assignatas ꝓportiones scz duplam/sesqualterā/⁊ sesquitertiā in mīmis terminis qui sint b c d e:sitq̄ totus ex ipīs compositus b e.et quia a ex hypothesi diuidi potest per b e:diuidat ergo per b e scz f:eritq̄ f nūerus ex diuisione pueniēs.duco b c d e in f et pueniant g h lz l qui p octauam secūdi ꝓtinebūt easdē ꝓportiones cū b c d e:ita vt sit g ad h vt b ad c/et h ad lz vt c ad d/et lz ad l vt d ad e.et qz per decimam primi quod fit ex ductu b e in f:equat̄ ei quod fit ex ductu b c/c d/et d e in f.et per sextam petitionem p̄mi ducto b e in f fit atq̄ reuertitur a.est ergo a diuisus in quattuor partes inequales g h lz l in ꝓtinua ꝓportionalitate proportiones assignatas ꝓtinētes.quod est propositum.



8 ¶ Quotlibet proportiōes quocūq̄ ordine cōtinuate:eādem proportionem ꝓstituūt.

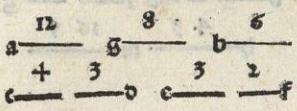
¶ Id primo in duabus ꝓportiōibus ostēdendū est.Sint ergo a b quecūq̄ due ꝓportiones vt a dupla et b sesqualta:et continuetur primo dupla sesqualte in numeris c d e:ita vt dupla ꝓportio precedat:⁊ sesqualta sequat.erit enī c ad d duplus:et d ad e sesqualt.ꝓtinuētur secūdo eedē ꝓportiōes in nūeris f g h:ita tñ vt sesqualta p̄cedat et dupla sequat.erit enī f ad g sesqualter:et g ad h duplus.dico c ad d et d ad e:item f ad g et g ad h eādem cōstituere ꝓportiōem.Nam q̄ proportio g ad h ea est c ad d:et q̄ f ad g ea est d ad e.ergo p vicesimā scd̄am secūdi et equā ꝓportionalitatē indirectam:q̄ proportio f ad h eadem est c ad e.quod est propositum in duobus ꝓclusum. Jn tribus aūt ꝓportiōib⁹ id adiuuātibus duabus ostēdit.vt si qua sit tertia ꝓportio q̄ ipsis ꝓtinuāda sit:ꝓtinuet ergo illis p̄mo in fine.vt e ad l sit ꝓportio lz.et sīlīter h ad l.quia vt ostēsum ē:que ꝓportio f ad h:ea est c ad e.et que h ad l: ea est ad l. ergo p equā ꝓportiōalitatem q̄ proportio f ad l: ea est c ad l.et ita sīvtriq̄ p̄ponat.at sīvni postponat vt e l sit proportio lz postposita:et l f eadem p̄posita.qz que ꝓportio f ad h ea ē c ad e:et que l ad f ea est



e ad l.ergo p indirectam ꝓportiõalitatem q̃ ꝓportio l ad h:eadẽ est c ad l.et si h inserat duabus alijs ita vt c ad d sit ꝓportio a/ꝛ d ad l sit h/et l ad e sit b.item f ad g sit b/et g ad l sit h/et l ad h sit a.que ꝓportio l ad h ea ẽ c ad d:et que g ad l ea est d ad l:et que f ad g ea l ad e.ergo p equã ꝓportionalitatem directam q̃ proportio f ad h:eadẽ est c ad e.et si hic postponat h/illic ꝯo inserat vt fit in duabus vltimis figuratiõibus:quia q̃ ꝓportio d ad l ea est e ad l.et que l ad e ea est d ad e.ergo p indirectam ꝓportionalitatem que ꝓportio d ad e:ea ẽ d ad l.addita ergo vtriq; eadẽ ꝓportiõe c ad d:erit tota ꝓportio c ad e:equalis toti c ad l.at ꝓportio f ad h equat proportioni c ad e:ergo ꝛ proportioni c ad l.quod est propositum.Et si de quattuor ꝓportiõibus id desideras adiuuãtibus tribus adinuicem ꝓtinuatis id efficere studeas.nam idem demõstrandi modus est.

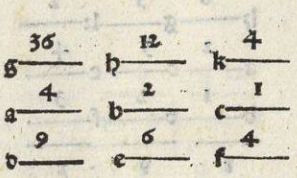
¶ Oim duoꝝ compositoꝝ proportio que est vnius ad alterum : est ex laterum suorũ ad latera alterius composita proportionibus. 9

¶ Latera ꝓsiti dicũtur nũeri qui in seinuicem ducti:ꝓsitũ ꝓducũt.Sint ergo duo ꝓsiti a b.et latera a:sint c d:c quidẽ maius ꝛ d minus.et latera a b sint e f:e q̃dẽ maius/f minus.dico ꝓportiõem a ad b ꝓsitam eẽ ex proportiõibus c ad e ꝛ d ad f.duco enĩ c maius laterũ a:in f minus laterum b:ꝛ proueniat g.quia enĩ c in d facit a:ꝛ c in f facit g:ergo p septimã secũdi que ꝓportio d ad f ea est a ad g.et quia f in c facit g et f in e facit b:ergo p eãdem septimam que proportio c ad e ea/est g ad b.at proportio a ad b ꝓstituit ex proportionibus a ad g et g ad b:ergo ꝛ ex proportiõibus c ad e et d ad f.quod est propositum.



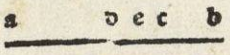
¶ Si numeri continue proportionales in totidem alios ꝓtinue etiam proportiõales ducantur:et qui inde prouenient continue proportionales erunt. 10

¶ Sint a b c numeri ꝓtinue proportiõales itidẽ ꝛ d e f alij totidẽ cõtinue proportiõales:ꝛ ducat d in a ꝛ proueniat g/ꝛ e in b ꝛ proueniat h/ꝛ f in c ꝛ proueniat k.dico productos g h k eẽ ꝓtinue proportiõales.Nam cũ latera g sint d a:ꝛ latera h sint e b:ꝛ latera k sint f c:ergo p precedẽtem proportio g ad h cõstat ex proportiõibus d ad e ꝛ a ad b.ꝛ proportio h ad k ex proportiõibus e ad f ꝛ b ad c.sꝫ proportiones e ad f ꝛ b ad c:eedem sũt proportiõibꝰ d ad e ꝛ a ad b:ergo ꝛ proportio h ad k ex illis ꝓstãs:eadẽ est proportioni g ad h.que igit proportio g ad h ea est h ad k.qõ demonstrandum erat ꝛ propositum.



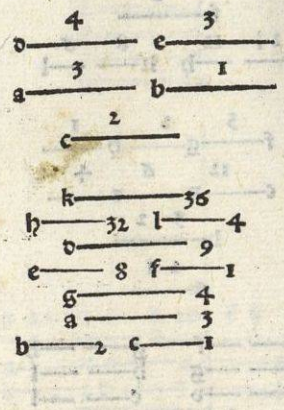
¶ Numerum ita diuidere vt q̃ totius ad maiorem portionem:ea maioris ad minorẽ sit ꝓportio est impossibile. 11

¶ Si ei hoc pacto quisq̃ nũerus diuideret:diceret diuidi fm proportiõem hñtem medij ꝛ extrema. hec itaq; ꝓponit nullũ numerum fm proportiõem hñtẽ medij ꝛ extrema diuidi posse.Nam si aliq̃s hũc in modũ diuidi potest:sit ille a b q̃ sit diuisus in a d minorem portiõem ꝛ d b maiorem: sitq; vt a b ad d b:ita d b ad a d.detraho ab maiori portione d b numerum c d equalem a d.et qꝛ que proportio a b ad d b:ea est d b ad a d.et quia a d ꝛ d c equant:q̃ q̃ proportio totius a b ad totum d b ea est d b ad d c detracti ad detractũ.ergo p quintam secũdi q̃ proportio a b ad d b:ea est a d ad c b residui ad residuũ quare ꝛ eadem d c ad c b.quare itez q̃ proportio d b ad d c:ea est d c ad c b.capio itez d e equalẽ c b.et quia sicut d b ad d c:ita d c ad c b ꝛ d e equat c b.ergo sicut d b ad d c totus ad totũ:ita d c ad d e detractus ad detractum.quare per quintam secundi sicut d b ad d c totus ad totum:ita c b ad e c residuꝰ ad residuum.quare itez simili argumentatione detracto e c ab c b:erit residuus ad residuum perinde vt totus ad totum.atq; hoc/abibit in infinnitum.qõ per quartam petitionem ẽ impossibile certũ est ergo numerum aliquem ita diuidi non posse.



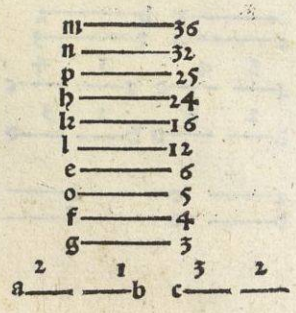
¶ Numerum ex duobus constãtem inuenire:cuius ad maiorem proportio addet sup proportionem eorũdem data proportione minus. 12

¶ Sint a b mĩmi termini ꝓportionis date:a maior et b minor:et sit ꝑmo differentia a ad b numerus c ꝛ maior proportio a ad b q̃ b ad c:et sit d numerus ꝓstitutus ex duobus scz a ꝛ b quẽ dico minorẽ hñe proportiõem ad a maiorem eius portionem q̃ sit a ad b proportio assignata:sit e ꝓpositus ex b c.quia enĩ proportio a ad b primi ad scõm maior est q̃ b ad c tertij ad quartũ:ergo p primam ptẽ decieqnte secũdi d ad b proportio maior q̃ e ad c.et per scõam ptem eiusdez erit d ad a proportio mĩor q̃ e ad b. at cũ e ꝓstituat ex b ꝛ c dñia a ad b:equabit ipsi a.ergo d ad a proportio minor q̃ a ad b.qõ ẽ,ꝓsitũ. Sit scõo vt minor sit ꝓportio a ad b q̃ b ad c:capio quẽcunq; numerum maiorem a qui sit d:a quo detraho f equalẽ c ꝛ residuum sit e.et intelligo c detractũ ab a ꝛ b residuũ.et qꝛ maior est ꝓportio d ad a totius ad totum q̃ f ad c detracti ad detractũ:ergo p decimãtertiam secũdi:maior est proportio e ad b residui ad residuũ q̃ d ad a totius ad totum.etvltra maior est proportio e ad b q̃ d ad a.ergo p duodecimam eiusdẽ maior est proportio e ad d q̃ b ad a.quare pervndecimam eiusdem erit proportio d ad e minor q̃ a ad b.et cũ e f ꝓstituãt d:ꝛ e maior sit f:si vterq; e ꝛ f sit nũerus ꝓstat d numerum ex duobus e ꝛ f ꝓstitutũ eẽ quem querimus.q̃ si f sit vnitas:duco aliquẽ numerum vt g in e et ꝓueniat h/et in d et proueniat k.et in f et proueniat l.per septimam secũdi que ꝓportio e ad d et d ad f:ꝓsitis est h ad k et k ad l.et cũ per nonam ꝑmi quod fit ex g in e ꝛ in f equet ei qui fit ex g in d:ergo k ꝓstituit ex duobꝰ numeris h et l.quare k est talis numerus qui queritur.



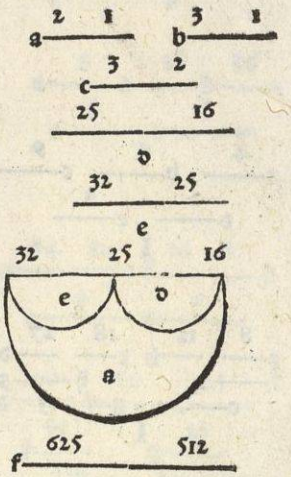
¶ Duabus ꝓportiõibus incqualibus ꝓpositis:tertiam reperire que duplicata: miore sit maior/et maiore minor. 13

¶ Sint termini maioris ꝓportionis a b: ⁊ termini minoris c d: et a ⁊ c numeri maiores/ ꝓpositūq; sit tertiam ꝓportionem repire q̄ duplata: minore sit maior ⁊ maiore mīor. ducam enī a in c et in d ⁊ pueniant e f: et b in c et, pueniat g. manifestū est enī per septimam secūdi e esse ad f vt c ad d: et p octauam eiusdē e ad g eē vt a ad b. et quia e ad f minor est proportio q̄ c ad g: ergo p decimam secūdi f est maior g. deinde duco f in e et in se et in g et, pueniāt h/k/l qui p septimā secūdi erūt in ꝓportiōe e/f/g: vt scz h k sit vt e f/ et h l vt e g. deinde duco e in se et, pueniat m. tūc enī ḋa f in e facit h/ et e in se facit m: ergo p octauam secūdi m ad h vt e ad f: quare et vt h ad k. Si ergo ꝓportio m ad k ex duabus ꝓportiōibus minori assignate equalibus ꝓstituta: sit minor ꝓportione h ad l quero aliquē numerum vt o: qui in se ductus ꝓducat p maiorem h et minorem aut equalem m. et dico proportiōem o ad f esse cuius dupla maior est proportiōe c ad d ⁊ minor proportiōe a ad b. nam cū f in se faciat l2/ et o in se faciat p: ergo p ea que in principio tertie propōnis huius demōstrata sunt est ꝓportio o ad f addita ad seipsam. quare et proportio p ad k dupla ad proportiōem o ad f. at cū p sit maior h ꝓportio p ad l2 per nonam secūdi maior est q̄ proportio h ad l2. quare et proportiōe c ad d. et cū proportio m ad l2 minor eēt proportiōe h ad l/ etiā et proportio p ad l2 proportioni quidē o ad f assignate dupla minor eēt eadē ꝓportiōe h ad l: quare et proportione a ad b et propositū. at si proportio m ad l2 maior est proportiōe h ad l: sit ergo illaꝫ differētia m ad n. tūc enī proportio n ad l2 erit eq̄lis proportioni h ad l. ⁊ tūc querā aliquē nūerū vt o qui ductus in se, ꝓducat p: maiorem quidē h sed minorem n. et argumētabor vt prius proportiōez p ad l2 duplā quidē proportioni date o ad f maiorem eē proportiōe h ad l2 quare ⁊ proportiōe c ad d. ⁊ minorem eē proportione n ad l2 quare et proportione h ad l et proportione a ad b. qd̄ itez est ꝓpositū Hic tñ attende q̄ vbi non facile possis inuenire numerum similem o/ tunc duc l2 in h in se ⁊ in l: et itez h in se donec oportune talis numerus tibi occurrat.



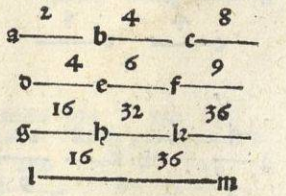
14 ¶ Quālibet proportiōem in duas diuidere: quaꝫ dēia sit data proportiōe minor.

¶ Sit b data proportio: propositūq; sit a alteram proportionem datam in duas ꝓportiōes diuidere: quaꝫ vnius ad alteram differentia sit data proportione b minor. capio p primam huius differentiam proportionis b ad a que sit c. Si c sit eq̄lis aut maior a/ oportet c minorem eē b. cū p diffinitiōem c eēt proportio qua b superaret ꝓportiōem a. quare et a aut eque aut multo fortius minor eēt b. in quascūq; ergo duas proportiōes diuidat: ille erunt minores a. nā eius ꝑtes. quare et differētia vnius ad alteram (cū ea sit alicius partis portio q̄ sup alteram addit) minor erit altera partium: quare mīor toto a. quare ⁊ multo fortius minor toto b/ sicq; in quascūq; diuideret: haberet propositū. Q̄ si ꝓportio c minor sit a inuenio p precedentem proportionem aliquā cuius dupla sit maior c/ et minor a. sitq; illa duplata proportio d. capioq; dēiam d ad a p primam huius q̄ sit e quā dico eē minorem b. nā si ipsi eēt equalis: cū b c equētur a: ergo d que est maior c. cū e equali b maiorem proportiōem ꝓstituēt sit a. nō ē ergo e differētia a ad d qd̄ est ꝓtra hypothesim. Et si e eēt maior b multo fortius d et e maiorē ꝓportionem ꝓstituūt q̄ b ⁊ c. quare maiorem proportiōem q̄ sit a: qd̄ itez eēt e nō esse dēiam a ad d ⁊ ꝓtra hypothesim. Relinquit ergo proportiōem e esse minorem proportione b. et quia due proportiones d ⁊ e equātur proportioni a: intelligo proportiōem a in illas esse diuisam: et dico differentiam illaꝫ scz d ad e que sit f eē data proportione b minorem. nam si esset equalis b: cū b et d maiorem ꝓstituāt proportionem q̄ a vt dictum est etiā d et f maiorem ꝓstituerēt a: quare ⁊ d ⁊ e. quare f non eēt dēia d ad e et p idem f non potest esse maior b. cōstat ergo propōem a vt ꝓponit ꝓpositio eē diuisam ⁊ ꝓpositum.



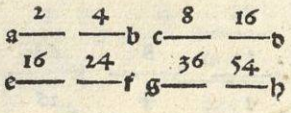
15 ¶ Si tres nūeri ꝓtinue ꝓportiōales: tribus aliis ꝓtinue ꝓportiōalibus comparētur: extremoꝫ ad extremos ꝓportiōes ꝓtinuate erunt tanq̄ mediorū ꝓportio duplicata.

¶ Sint a b c tres numeri ꝓtinue proportiōales: item d e f tres alij ꝓtinue proportiōales. dico ꝓportiones a ad d et c ad f adinuicem ꝓtinuatas: equari proportioni b ad e: duplicate. duco enī c in a ⁊ in d ⁊ pueniāt g/ h/ et f in d et, pueniat l2. eritq; per septimam secūdi proportio g ad h vt a ad d: ⁊ h ad l2 per octauam eiusdem vt c ad f. atq; proportiones a ad d et c ad f adinuicem ꝓtinuate per g h l2 et p tertiā huius addo proportiōem a ad d ꝓportioni c ad f ducēdo a in c et, pueniat l. et d in f et, pueniat m. manifestū est proportionem l ad m ꝓstitutā esse ex proportiōibus g ad h et h ad l2: atq; ipsis simul sūptis equari. deinde duplo proportionem b ad e addendo per tertiam huius proportiōem b ad e sibijpi ducendo scz b in se. et quia a b c sunt ꝓtinue proportiōales: p vicesimāsextam secūdi pueniet l: ⁊ ducēdo e in se et p eādem vicesimāsextam secūdi pueniet m. quare duplata proportio b ad e equat proportiōi l ad m que pbata est equari proportiōibus g ad h et h ad l2 scz ꝓportiōibus a ad d et c ad f adinuicem continuatis. quod est propositum.

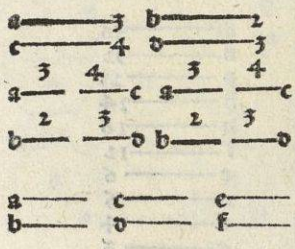


16 ¶ Si quattuor numeris cōtinue proportiōalibus alij totidem cōtinue proportiōales adaptentur: erunt proportiones extremorū ad extremos ꝓiūcte tanq̄ proportiones mediorum ad medios cōtinuate.

¶ Sint a/ b/ c/ d: quattuor numeri ꝓtinue ꝓportiōales: et e/ f/ g/ h totidem alij ꝓtinue proportiōales. dico proportionem cōpositam ex proportiōibus a ad e et d ad h equari proportiōibus ꝓtinuatis b ad f et c ad g. ꝓtinuatis sicdē ꝓportiōibus b ad f et c ad g: vt in p̄cedenti factum est. p septimā ⁊ octauam secūdi hec ex tertia huius ⁊vicesimaquīta secundi cognoscitur vt precedens ex vicesimasexta.



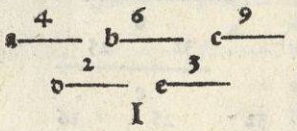
17 ¶ Si quotlibet numeri ad totidem alios comparētur: proportiōes eoꝫ quolibet mō sumptorum eandem proportionem componunt.



¶ In duobus nũeris id ꝑmo vidẽdum est. sint enĩ a et b duo numeri/et c d duo alij qui duobus ꝑmis comparenĩ: dico eãdem ꝓportiõem ꝓpositam esse ex a ad b ⁊ c ad d/et ex c ad d et a ad b. Si enĩ nũeri illi eẽnt equales: statim de se notum eẽt. Siliter si duo primi eẽnt equales inter se/ et duo secũdi inter se: et silr si tres eẽnt equales ⁊ vnus inequalis. sed esto proportio a ad b maior proportiõe c ad d facio a ad b primam ꝓportiõem/c ad d scõdam/⁊ itez a ad b tertiam/⁊ c ad d quartam. et quia q̃tum a ad b prima addit sup c ad d scõdam tm̃ addit a ad b tertia supra c ad d quartam. ergo ꝑ tertiã hui⁹ ꝓposita ex a ad b et c ad d prima ⁊ quarta equaĩ cõposite ex c ad d et a ad b secũda et tertia. quod intẽdebaĩ. Idem quoq; in tribus efficies. Sint a/c/e: tres nũeri qui ꝓparenĩ b/d/f. dico eandem compositam eẽ ex a ad b/c ad d/et e ad f: et ex c ad d/a ad b/ et e ad f. nam per immediate mõstratũ eadem ẽ ꝓposita ex a ad b et c ad d/et ex c ad d et a ad b: ergo ꝓportiõe e ad f vtriq; addita: ꝓportiões erũt equales. qõ erat ꝑbandum. dico item eãdem eẽ compositam ex a ad b/et c ad f/et c ad d: et ex e ad f/a ad b/et c ad d. Nam per nup mõstratũ eadẽ est ꝓportio cõposita ex a ad b et e ad f: et ex e ad f/⁊ a ad b. ergo ꝓportione c ad d: vtriq; adiecta fiũt ꝓportiões a ad b/e ad f/et c ad d. item e ad f/a ad b/⁊ c ad d: adinuicem equales. qõ ꝓponebaĩ ꝑbãdum. Et ita alias ꝗbinatiões ꝑba et adiuuãtibus trib⁹: de q̃ttuor expedi Et ita consequẽter. ¶ Quinti elementoꝝ Arithmetices Jordani finis.

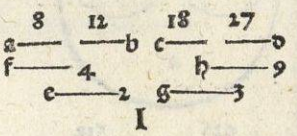
Altera numeroꝝ dicũtur: quoꝝ multiplicatiõe: numeri ꝓducũtur. Supficialis appellaĩ numerus: qui duobus lateribus continctur. Solidus ẋo qui sub tribus: ex quoꝝ ꝗtinua multiplicatione habet ꝓcreari. Quadratus est numerus supficialis equalibus lateribus cõtẽtus. Altera parte longior: est cuius latera sunt ineqũlia sed sola vnitate distãtia. Cubus est numerus solidus equalibus consistens in lateribus. Similes dicũtur numeri siue supficiales siue solidi: quoꝝ latera sunt proportionalia.

¶ Si tres numeri fuerint in sua proportione mĩmi: duo extremi erunt quadrati. 1



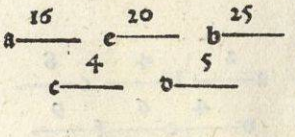
¶ Sint a b c tres nũeri cõtinue proportiõales in sua ꝓportiõe mĩmi: dico a esse numerum quadratũ atq; siliter c esse numerum quadratum. Nã per septimã quarti erit vnus medius ꝓportiõalis inĩ a ⁊ vnitatẽ qui sit d: et siliter vnus inĩ c et vnitatem qui sit e. quia ergo quoties vnitas in d toties d est in a: ergo d in se ductus multiplicat/atq; ꝓducit a. est ḡ a quadratus. nam d ⁊ d eius latera sunt equalia Et qz etiam quoties vnitas in e toties e est in c: ergo e in se ductus ꝓducit c. quare c etiam quadratus. quod est propositum.

¶ Si fuerint quattuor numeri in sua proportione mĩmi: duo extremi erunt cubi. 2



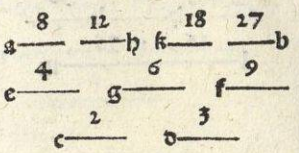
¶ Sint a/b/c/d quattuor numeri ꝗtinue proportiõales: in sua proportiõe minimi. dico a cubum esse atq; d cubum esse. Nam ꝑ septimam quarti erũt duo medij proportiõales inter a et vnitatem qui sint e et f: et silr duo inter d ⁊ vnitatem qui sint g et h. et quia quoties vnitas in e toties e in f: ergo e in se ꝓducit f. et quoties vnitas in e toties f in a: ergo e in f suũ quidẽ quadratũ ꝓducit a. est igiĩ a cubus. et per idem quia quoties vnitas in g toties g in h: ergo g in se ꝓducit h. et quoties vnitas in g toties h in d: ergo g in h suum quadratum: ꝓducit d. quare etiã d cubus. quod est propositum.

¶ Ois q̃drati ad quadratũ est tanq; lateris ipius ad latus alĩius ꝓportio duplicata. 3



¶ Sint duo quadrati a et b: ⁊ latus a sit c/et latus b sit d. dico proportiõem a ad b eẽ tanq; proportio c ad d duplicata. duco enĩ c in d ⁊ fiat e. et erit ꝑ septimam secũdi a ad e sicut c ad d. et ꝑ octauã eiusdez e ad b vt c ad d: est ergo a ad e vt e ad b. at proportio a ad b constat ex ꝓportiõib⁹ a ad e et e ad b: quaꝝ quelibet equatur c ad d. est ergo a ad b tanq; ꝓportio c ad d duplicata: vt ꝓponebatur.

¶ Proportio cubi ad cubũ: est tanq; lateris ad latus triplicata. vnde manifestum est inter quoslibet duos quadratos vnũ: atq; inĩ cubos duo ꝓportiõaliĩ media ꝗsistere. 4



¶ Sint duo cubi a ⁊ b. et latus a sit c: et latus b sit d. sitq; e quadratũ c/et f quadratũ d. inter quos ex demõstratione precedẽtis est vnus medius ꝓportiõalis qui sit g. deiñ duco c in e et certũ est ꝓuenire a: et c in g et ꝓueniat h: et d in f et certũ est ꝓuenire b: et d in g ⁊ ꝓueniat k. manifestũ est ex precedẽti eandem esse proportionem e ad g et c ad d: et eãdem g ad f et c ad d. sed ꝑ septimã secũdi a ad h vt e ad g. quare vt c ad d: et per octauam eiusdẽ l2 ad b vt g ad f. q̃re vt c ad d. est igitur quelibet trium proportionum a ad h/h ad k/et k ad b alteri equalis: atq; equalis c ad d. sed proportio a ad b ꝗstat ex illis tribus. est igiĩ proportio a ad b tanq; ꝓportio c ad d triplicata. Et correlarium ex modo demõstrationis cognitum est ⁊ propositum.

¶ Quoꝝ latera ꝓportiõalia sunt quadratos ꝓportiõales eẽ: atq; si quadrati ꝓportionales sunt: et latera ꝓportionalia esse necesse est. 5

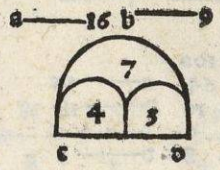
¶ Sint a/b/c tres numeri ꝗtinue proportiõales: quoꝝ quadrati sint d/e/f. dico quadratos d/e/f esse ꝗtinue proportiõales. Itẽ dico si d/e/f sunt ꝗtinue proportiõales: ⁊ a/b/c eoꝝ latera eẽ proportiõalia. Prima pars statim ex decima quĩti cognoscitur. et scõa ostendiĩ. Nam quia proportio d ad e ꝑ nonã quinti est composita ex ꝓportiõibus a ad b ⁊ a ad b: et silr ꝓportio e ad f ꝗposita ex ꝓportiõibus b ad c et b ad c: ḡ ꝓportiões a ad b et b ad c sunt equales. alioquin ꝑ quintam eiusdem singulis addite sue equales: non ꝗstituerẽt d ad e et e ad f proportiones equales. qõ est ꝗtra hypothesim.

6 ¶Si cubi fuerint proportiōales: erunt ⁊ latera ꝓportionalia. ꝙ si latera ꝓportiōalia fuerint: cubi quoq; proportionales erunt.

¶Sit hypothesis ea q̄ prius: sed g/h/k sint cubi numeroꝝ a/b/c. Scā pars hui⁹ patet ducendo a b c ꝯtinue proportiōales in d e f suos quadratos qui p primam ptem p̄cedentis sunt ꝯtinue ꝓportiōales et ꝓcuēt g h k qui p decimam quinti sunt ꝯtinue proportiōales. qd̄ est scd̄m. Et p̄ma pars declarat̄ Nam per nonam quinti proportio g ad h ꝯposita est ex proportiōibus d ad e ⁊ a ad b. et ꝓportio h ad k cōposita ex proportiōibus e ad f ⁊ b ad c. et si a ad b et ad c nō sunt ꝓportiōabilia: neq; d e f. si ergo a ad b maior sit proportio q̄ b ad c: ergo per quintam quinti maior erit d ad e q̄ e ad f. ergo per eandem quintam g ad h ꝯstituta ex d ad e et a ad b maioribus ꝓportionibus erit maior q̄ h ad k. nō sunt igit̄ g h k proportionales. quod est ꝯtra hypothesim ⁊ totum propositum.

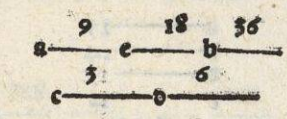
7 ¶Quo abūdat quadrat⁹ super quadratū est nūerus ex lateribus ipsoꝝ coaceruatus et ꝯm laterum differentiam multiplicatus.

¶Sint a ⁊ b duo quadrati: a maior/ et b minor. sitq; c latus a: ⁊ d latus b. dico numerum quo a supat b: esse numerum qui ꝓcreat̄ ex ductu differētie c ad d in coaceruatum c d. Intelligo enī coaceruatum c d esse diuisum in c maiorem numerum: ⁊ d minorem. et quia p decimāoctauam p̄mi quod fit ex d in se: cū eo quod fit ex differētia c ad d in coaceruatum c d: equū est ei quod fit ex c in se. sed qd̄ fit ex c ī se est quadratū maius a: ⁊ qd̄ fit ex d in se est b quadratū minus: g̃ b quadratū minus supat̄ ab a q̄drato maiore in eo nūero q̄ fit ex dꝛia c ad d in coaceruatū c d. abūdat g̃ a sup b in eodē nūero. qd̄ ē ꝓpositū.



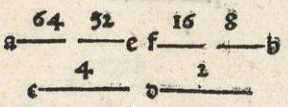
8 ¶Si quadratus quadratum numeret: et latus suū latus alterius nūerabit. ꝙ si latus a latere numerabitur: et quadratus a quadrato numerabitur.

¶Sint a b duo quadrati/ et a numeret b: sitq; c latus a ⁊ d lat⁹ b. dico c nūerare d. dico itē si c nūerat d: etiā a numerare b. sit enī p corrlariū quarte huius e medium proportiōale inter a ⁊ b: erūt enim a ad e et e ad b in ꝯtinua proportiōe vt c ad d. sed a primus numerus p hypothesim numerat b vltimū: ergo per decimātertiā quarti: a p̄mus nūerat e scd̄m. quare c numerabit d. qd̄ est p̄mū. Scd̄m pz: mā si c nūerat d: g̃ ⁊ a nūerat e ⁊ e nūerat b. q̄re p vicesimātertiā p̄mi a nūerabit b. qd̄ ē scd̄m ⁊ totū ꝓpositū



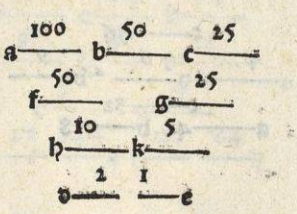
9 ¶Si cubus cubum nūeret: ⁊ latus ipsius latus alterius numerabit. ꝙ si latus nūerat latus: et cubus cubum numerabit.

¶Quod de quadratis modo ostensum est/ hic de cubis demōstrandum ꝓponitur. Et p̄ma ps positis medijs ꝓportiōalibus inf̄ cubos p corrlariū quarte huius vt p̄ma p̄cedētis cognoscit̄: ⁊ scd̄a vt scd̄a.



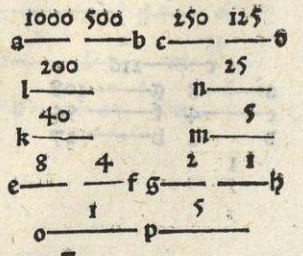
10 ¶Trium numeroꝝ cōtinue proportionalium: si primus fuerit quadratus: tertium quoq; quadratum esse necesse est.

¶Sint a b c tres numeri ꝯtinue proportionales: et sit a quadratus: dico c eē quadratum. sint enī d e mīmi in proportiōe a ad b. per decimānonam tertij d numerabit a. sitq; id scd̄m f. ⁊ e etiam per eādem numerabit c. cū per hypothesim eadē sit proportio a ad b ⁊ b ad c: sit ergo id scd̄m g. et quia a ponitur quadratus: sit ergo eius latus h. q̄a enī h in se tīn est q̄tum d in f: ergo p scd̄az ptem vicesimesexte scd̄i d/h/f sunt ꝯtinue proportiōales. et p nonam quīti ꝓportio a ad c: ꝯposita ex proportiōibus d ad e ⁊ f ad g. ergo q: a ad b vt d ad e: erit b ad c vt f ad g. est ergo d ad e vt f ad g. ergo pmutatim d ad f sicut e ad g. ergo per duodecimam quarti inter e et g tot media proportiōalia cadūt: quot inter d ⁊ f. at inf̄ d et f cadit h vnū medium ꝓportiōale: igit̄ ⁊ inter e et g cadet vnū q̄ sit k. et q: ex e in g positū est fieri c: ergo p vicesimāsextam secundi ex l: in se fiet idem c. est igit̄ c quadratus. quod erat demonstrandum.



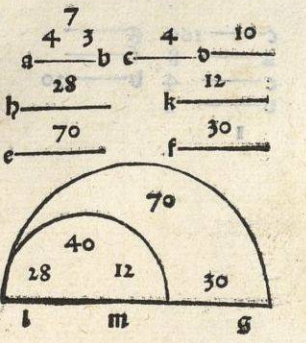
11 ¶Si q̄ttuoꝝ numeroꝝ ꝓportiōaliū p̄mus fuerit cubus: quartū q̄q; cubū eē ꝯcuniet.

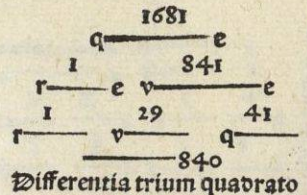
¶Sint a/b/c/d quattuor nūeri ꝯtinue proportiōales: quoꝝ a p̄mus sit cubus. dico d quartū eē cubū. sicut enī e/f/g/h quattuor in eadem proportiōe mīmi: erūtq; per scd̄am hui⁹ e ⁊ h cubi. et q: e ⁊ a sunt cubi: erūt p corrlariū quarte huius duo proportiōales medij inter e et a qui sint k l. et quia p equam proportiōalitatem que ꝓportio e ad h ea est a ad d: ergo pmutatim q̄ ꝓportio e ad a: ea est h ad d. sed inter e et a ꝓbat̄ sunt eē duo ꝓportiōales medij. ergo p duodecimam quarti ⁊ inf̄ h ⁊ d duo sil̄r erūt ꝓportiōales medij qui sint m ⁊ n. et q: p decimānonam tertij h nūerat d: ergo per scd̄am ptem decime tertie quarti h numerabit m. Sit igit̄ o latus cubi h: sitq; quoties h in m toties o in p. q: igit̄ ꝓportio d ad h tanq̄ m ad h triplicata: erit eadē ꝓportio d ad h tanq̄ ꝓportio p ad o triplicata. et q: p quartā huius eadem est ꝓportio inf̄ cubum p et cubū h. erit igit̄ d cubus: ⁊ eius latus erit p. qd̄ est ꝓpositū.



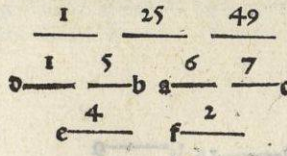
12 ¶Quadratos tres inuestigare: quoꝝ ꝯtinue sumptoꝝ differentie sint equales.

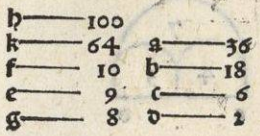
¶Sit c duplum cuiuslibet numeri. addat̄q; c cuilibet nūero vt b. sitq; a ꝯpositus ex b c. et ex a ⁊ b fiat d. et ex c in a ⁊ in b fiāt h ⁊ k. et ex a ⁊ b in d fiant e et f. et ponatur numerus l/m/g equalis numero e: ita vt g sit equalis f. quia enī e/ et l/m/g equātur: et ex a in d fit e: etiā ex a in d fit l/m/g. sed g equatur f qui fit ex b in d: ergo residuū l et m per decimam primi equū est ei q̄ fit ex c in d. quare p nonā eiusdez l et m sunt tanq̄ h et k. Sit ergo l equalis h: et m equalis k. dico ergo l g posse diuidi in duo equalia. Nam cū b in d fiat g: et d sit tanq̄ b bis ⁊ c: ite; b in se bis. hoc est in suū duplum. et in c facit g. ⁊ a in c facit l. erūt ergo l g tanq̄ qd̄ fit ex b in se bis. et a b (quod est d) in c: cui⁹ dimidiū est quod fit ex b in se semel: et ex d in dimidium c. est ergo numerus l g: in duo media eidez dimidio eq̄lia diuisibile. diuido





Differentia trium quadratorum continue eadem



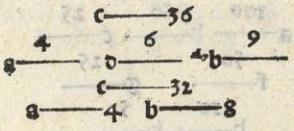


ergo l g in duo media eqlia: sitq; r differētia vni⁹ illoꝝ dimidioꝝ ad g. et v numerus equalis dimidio. et q differētia dimidij l g: ad totū l m g. dico tres q̃dratos numeroꝝ r. v. ⁊ q: q̃ sint r e: v e: q e: eē qui petūtur. Nam cū differētie quadratoꝝ sint p septimam huius q̃ ex differētijs laterum in ꝓposita ex ipis ꝓducūtur: ꝓtinue videbis ex dr̃ia r ad v in ꝓpositū r v qd̃ est g. et ex dr̃ia v ad q in ꝓpositum v q qd̃ est l m g: eqlem numerū ꝓduci p vicesimamquītam secūdi q; eadem sit ꝓportio differētie r ad v ad dr̃iam v ad q. sicut aggregati q v ad aggregatum r v. siue sicut l m g ad m g: quod idem est. Sed hocvltimum facilius forte capies in minoribus numeris ⁊ eodē ingenio inuentis. vt sit a senarius. et primi hinc ⁊ inde sint b ⁊ c. b minor: ⁊ c maior. certū est b eē quinariū: cuius dr̃ia ad a sit d. quā certū est eē vnitatē sitq; e differētia d ad b vnitatis ad quinariū: quā ꝓstat esse quaternarium. sitq; f differētia b ad c. que quia dupla differētie b ad a: ideo erit binarius. est itaq; e ad f duplus. sed d b per ꝓceptiōem sunt a. et per scōam primi b c simul sunt duplus ad a. igit̃ et b c simul: sunt duplus ad d b. quare que ꝓportio e ad f differētie ad differentiam ea est aggregati b c ad aggregatum d b. ergo per vicesimāquītam scōi tm̃ est quod fit ex e in d b q̃tum qd̃ ex f in b c. ergo per septimam huius tres quadrati numeroꝝ d b ⁊ c sunt quales propositi sunt inueniri possibiles. quod est propositum.

¶ Numerum quadratū inuenire: q̃ cū quadrato dato numerum quadratū ꝓstituat. 13

¶ Sit p̃mo datus nūerus quadratus a: qui diuisibilis sit in duo equalia. cuius medietas sit b. latus aūt eius sit c. sitq; d binarius. quia ergo qd̃ fit ex d in b: equat̃ ei quod fit ex c in se: erit p vicesimāsextā secūdi c ꝓportiōaliter medius inter binarium ⁊ b. et quia d binarius est numerus primus: ⁊ p primā quarti cōicat cū c ⁊ c cū b: etiā d cōicabit cū b. p p̃mā g̃ tertij d nūerabit b. cuius q̃dē b: medietas sit e. et nūeri circūpositi sint f maior ⁊ g minor: quoꝝ q̃drata sint h ⁊ k. dico g̃ quadratū h eē tanq̃ numerū quadratum l: numero quadrato a additum. Nam differētia f ⁊ g ē binarius ⁊ ꝓpositus ex ipsis per secūdam primi est b. et quia ex binario in b per hypothesim fit a: ergo per septimam huius cū a fiat ex differētia laterū in cōpositū ex ipsis a est dr̃ia q̃dratoꝝ h ⁊ l. q̃drat⁹ ergo l additus quadrato dato a ꝓstituit numerum quadratum h. qd̃ est ꝓpositum. Sed esto secūdo vt sit quadratus a assignatus: sed in duo equalia partiri nō possit. cū ergo binarius eum nō numeret: et sit binarius numerus primus: ergo per primam tertij binarius ad ipm erit primus. quare p decimāquintam tertij binari⁹ nūerabit inferiorem numerum quadrato a: vnitate dempta qui sit b. cuius medietas sit c: ⁊ maior eo vnitate sit d: cuius quadratus sit e: et quadrat⁹ c sit f. dico ergo quadratum e abūdare sup quadrato a q̃tum est f quadratus c. Nam quia c bis cū vnitate ꝓstituit a: ergo per decimāoctauam primi quod fit ex c in se cū eo qd̃ fit ex a in dr̃iam d maioris partis ad c: equū est ei qd̃ fit ex d maiore parte in se. excedit igitur quadratus d quadratum nūeri c in quadrato dato a. nam differētia d ⁊ c erat vnitas. qd̃ est ꝓpositū.

¶ Si quadratus in quadratum ducatur: ꝓducet̃ quadratus. Si vero in non quadratū non quadratus ꝓueniet. Vnde pz si quadratus quadratum numeret: ipm secundum quadratum numerare. 14

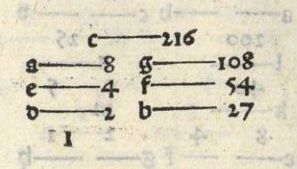


¶ Sint p̃mo a ⁊ b duo quadrati: ducaturq; a in b et ꝓueniat c. dico c eē quadratū. Nam p corrlariū quarte huius inē a et b est vnus ꝓportiōalit̃ medius. sit ergo ille d. quia ergo a d ⁊ b sūt ꝓtinue ꝓportiōales: ergo p vicesimāsextam secundi quod fit ex a in b: equū est ei qui fit ex d in se. at quod ex a in b ꝓducitur est c. est igitur c quadratus. qd̃ intēditur. Secūdo: sit a quadratus ⁊ b non quadratus: ducaturq; a in b et ꝓueniat c: dico c non esse quadratum. Nam si c esset quadratus p scōam ꝓtem vicesime sexte secundi latus quadrati c eēt medius ꝓportiōalis inter a ⁊ b. quare cū a primus sit quadratus p decimā huius ⁊ b eēt q̃dratus. qd̃ est ꝓtra hypothesim. Corrlariū ex his duabus ꝓtib⁹ satis ꝓstat.

¶ Quadratus non quadratum: scōm non quadratum numerat. 51

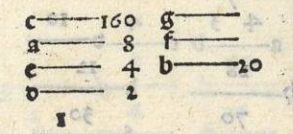
¶ Nam si ponat̃ possibile quadratū scōm quadratū: ipm numerare: ergo per primam ꝓtem p̃cedēt̃ ꝓductus erit quadratus. at ponitur q̃dratus numerare nō quadratum: sequtur igitur ex hoc ꝓtrariū hypothesis. quod est propositum.

¶ Si cubus in cubum ducatur: qui ꝓducetur erit cubus. 16



¶ Sint a b duo cubi: ⁊ ducatur a in b et ꝓueniat c: dico c esse cubum. Sumo enī latus cubi a quod sit d: et quadratum lateris d q̃ sit e. manifestum est d ⁊ e eē ꝓportiōales inter vnitatem et a. et q: q̃ties vnitas in a toties b in c. cū a multiplicet c scōm b. per decimāquartam quarti quot medii ꝓportiōales erūt inter vnitatem ⁊ a: totidem erūt inter b et c. sunt ergo duo medij siliter ꝓportiōales inē b et c q̃ sint f g. cū ergo b f g c sint quattuor numeri ꝓportiōales: et b primus per hypothesim sit cubus: ergo per vndecimam huius ⁊ c quartus erit cubus. quod est propositum.

¶ Si in non cubum cubus ducatur: ꝓducetur nō cubus. Ex quo liquet q; si cubus cubum numeret: ipm scōm cubum numerare. 17



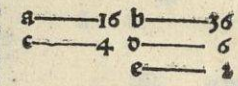
¶ Ducatur a cubus in numerum b nō cubum et ꝓueniat c: dico c non esse cubum. Nam si c ꝓductus ponatur eē cubus: manifestum est vt in precedenti per decimamquartam quarti quot medij ꝓportiōales erūt inter vnitatem et a: totidem esse inter b ⁊ c. sint ergo similiter duo scilz f ⁊ g. quia ergo c g f b sunt ꝓtinue ꝓportionales: ⁊ c est positus cubus. ergo per vndecimam huius: b etiam erit cubus. at b per hypothesim positus ē non cubus: accidet itaq; ꝓtrariū hypothesis. qui igitur inde ꝓducetur: nō erit cubus. quod est propositum. Corrlarium satis ex hac ⁊ precedenti cognitum est.

¶ Si non cubum cubus numeret: scōm non cubum eum numerabit. 18

¶ Nā si ponat numerari fm cubū: p penultimā qui ꝓducetur erit cubus. at positus est nō cubus nō itaq; ipsum numerabit fm cubū: quare si ipsum cubus numeret: fm nō cubū nūerabit: qd intēditur.

19 ¶ Si quadrati cōmunicant: latera quoq; cōmunicabunt. si vero quadrati sint incommensurabiles: et latera ipsorum incōmensurabilia erunt.

¶ Sint a b duo quadrati et c latus a et d latus b: dico primo si quadrati a b cōicant et eorū latera c d cōicare. nā si c d nō cōicant: ergo per duodecimā tertij neq; quadrati a b cōicabunt. ex opposito igitur ꝑnitis si quadrati cōicabunt ⁊ eorū latera cōicant. dico secō si quadrati a b non cōicant neq; eorū latera cōicare. nā si c d latera cōicant est aliqs nūerus eos cōiter numerās q̄ sit e: qz ergo e numerat c ergo p vicesimātertiā primi etiā numerat a. et qz etiā e nūerat d: p eandē vicesimātertiā nūerabit et b. si ergo latera sunt cōmunicātia et quadrati cōicant: quare ex opposito ꝑnitis si quadrati non cōmunicāt neq; latera cōmunicabunt: quod est secundū ⁊ totum propositum.

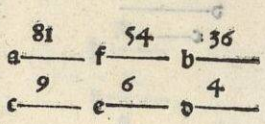


20 ¶ Si cubi fuerit ꝑmēsurabiles: tūc. q̄ si cubi nō cōicent: neq; ipsorū latera cōicabūt

¶ Huius prima pars vt precedentis prima ⁊ secunda vt precedentis secunda patescunt.

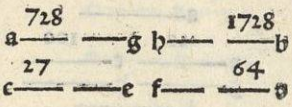
21 ¶ Si quadrati ad aliquem fuerit proportio tanq; quadrati ad quadratum illum aliquem: quadratum esse necesse est.

¶ Sit a quadratus qui ad aliquē numerū vt b eam habeat ꝓportionē que quadrati c ad quadratū d dico b esse numerū quadratū. nā qz c et d sunt quadrati per correlariū quarte huius est vnus medius ꝓportionalis inter c et d qui sit e. ⁊ qz que ꝓportio c ad d ea est a ad b: ergo per duodecimā quarti erit vnus medius proportionalis inter a et b qui sit f. qz ergo a f b sunt ꝓportionales ⁊ a primꝰ positus ē quadratus: ergo per decimā huius et b tertius est quadratus: quod est propositum.



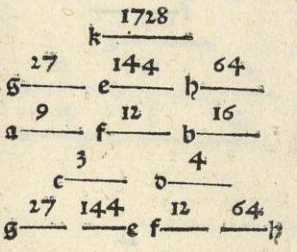
22 ¶ Quicunq; se hz ad cubū sicut cubus ad cubū: idē ex necessitate erit cubus.

¶ Si ad a numerū cubum se habeat aliquis numerus vt b sicut d cubus ad c cubū: dico b esse cubum nā per correlariū quarte huius inter c et d erunt duo medij ꝓportionales. et cū que ꝓportio c ad d ea sit a ad b. ergo per duodecimā quarti cadent cōsimiliter duo medij ꝓportionales inter a et b: et a primus ponitur cubus erit igitur et b per vndecimā huius cubus quod erat demōstrandum.



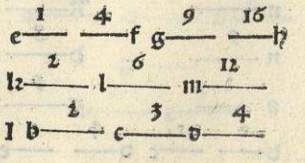
23 ¶ Si quadratus in quadratum vel cubus in cubum ducatur: latus producti erit numerus qui ex latere vnius in latus alterius producitur.

¶ Sint primo duo quadrati a b: et latus a sit c: et latus b sit d. ducatq; a in b: et pueniat e q̄ per decimāquartā huius erit quadratus: et ducat c in d: ⁊ pueniat f. dico f esse tetragonicū latus e. nā per septimā et octauā secundi f est medius ꝓportionalis inter a ⁊ b. et p vicesimāsextaz eiusdē qd fit ex a in b equū est ei q̄ fit ex f in se. ē igit f latus quadrati e qd erat ꝓbandū. secō sint g et h cubi laterū c et d ⁊ g in h ꝓducat lz q̄ per decimāsextā huius erit cubus. dico f esse latus cubicū lz. qz enī c in a ꝓducit g et f in se ꝓducit e erit p nonā quinti ꝓportio g ad e cōposita ex ꝓportionibꝰ c ad f et a ad f. et qz iterū ex c in d fit f: et ex d in b fit h erit per eandē nonā ꝓportio f ad h cōposita ex ꝓportionibꝰ c ad d et d ad b: sz c ad d est sicut a ad f: sed et permutati d ad b sicut c ad f: q̄ eadē esset ꝓportio c ad d et f ad b. est igitur ꝓportio f ad h equalis ꝓportionibus a ad f et c ad f: quare ꝓportioni g ad e. ordinatis ergo quattuor nūeris g e f h: qz que ꝓportio g ad e ea est f ad h. ergo p vicesimāquintā secundi idē est nūerus q̄ ꝓducitur ex g in h et ex f in e suū quidē quadratū quare ꝓducti cubi lz latus ē f: qd est totū propositū.



24 ¶ Si dispositis ab vnitate numeris quadratis: ꝓportionaliter medij inter proximos quoscq; sumantur: fient omnes parte altera longiores. et cuiuslibet illorum ad illos differentiam lateri suo equalem esse constabit.

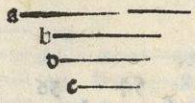
¶ Sint e f g h quotlibet nūeri quadrati ab vnitate ꝑnitē dispositi: eorū vero latera vnitas: et b c d numeri ꝑnitē ab vnitate sumpti. dico medios ꝓportionales inf proximos quoscq; quadratos sumptos eē altera pte lōgiores. duco enī vnitatē in b ⁊ pueniat lz q̄ est medius ꝓportionalis inter e ⁊ f. et qz eius latera vnitas et b sunt ēequalia sola vnitate distātia: p diffinitionē lz est altera pte longior. sicr duco b in c et pueniat l q̄ erit medius ꝓportiōalis inf proximos quadratos f g. et per idē vt prius altera pte longior. et ita de reliqs ꝓportionalibꝰ mediis proximorū quadratorū quotquot ꝑnitē assignati fuerit quadrati. Dico preterea differentiā lz ab quadrato f equalē esse b lateri f: et differentiā l a quadrato g esse equalē c lateri g: et ita cōsequenter. qz enī b superat vnitatē sola vnitate: intelligo ergo b diuisum in duas vnitates. et qz b in se facit f: ergo per decimātertiam primi b ductus in primā ⁊ secundam vnitatem procreat equū f: sed substracto qd fit ex b in vna vnitate remanet lz. est igitur substractū eius qd fit ex b in vna vnitate differētia lz ad f: sed et idem substractū est equale b: q̄ vnitas in quēcunq; numerum ducta idem faciat. constat ergo id esse verum de lz. de l autem consimiliter ostenditur: qz c excedit b sola vnitate. diuido ergo c latus scilicet quadrati g in b et vnitatem. ⁊ quia c in se facit g et idem c in b et vnitatem facit equale g: per eandem decimātertiam primi: et substracto eo qui fit ex c in vnitatem remanet l. differentia igitur l et g est quod fit ex c in vnitatem: sed ⁊ illud est equale c per idem quod prius. constat igitur propositum de altera parte longiore l. et ita de quibuslibet aliis argumentabere Similiter etiam ostendes differentiam lz ad e esse vnitatem: et differentiam l ad f esse b et m ad g esse c. Nam cum b sola vnitate superet vnitatem: intellecto ergo b in duas vnitates diuiso per decimamquartam primi quod fit ex b in alteram vnitatum equale est ei qui fit ex illa in se: ⁊ illa in alteram. sed



qꝫ fit ex illa vnitate in se est quadratũ e ⁊ vnitas. et qꝫ fit ex illa in alterã itidẽ est vnitas et equalevnitati. constat ergo dziam l: ad e essevnitatẽ. Similiter diuido c in duas partes scz vnitatẽ ⁊ b: et qz per eandẽ decimãquartam primi quod fit ex c in b scz l: equũ est ei qui fit ex b in se q̃ est quadratus f: ⁊ ex b in vnitatem qui est latus b. constat ergo differentiã l ad f esse b: et ita per decimãquartam primi de singulis ostende. constat ergo totum propositum.

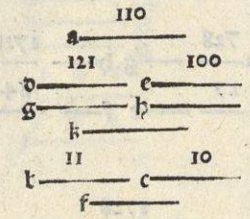
¶ Si sumantur ab vnitate numeri altera parte longiores proximis quibusq̃ coniunctis: dimidiis coniunctorum sumptis prouenient omnes quadrati 25

¶ At parte altera lõgioribus figuratis quẽadmodũ in supiori factũ est: dico l: et l altera lõgiorũ simꝫ sumptoꝝ medietatẽ esse quadratũ. Similiꝫ l et m simul sumptoꝝ medietatẽ esse quadratũ ⁊ ita binoꝝ et binorũ ꝓtinue sumptoꝝ quotquot essent: medietatẽ esse tetragonicã. Nam q̃a per secundã partem p̃ceuentis monstratũ est dziam l: minoris ad f esse b: et l maioris ad f etiã esse b: l: et l sunt circũpositi atq̃ equidistãtes f. ergo p secũdã primi f est numeroꝝ l: et l simul sũptorũ medietas. at f cognoscꝫ eẽ quadratũ: ergo de l: et l constat ꝓpositum esse verũ. et cõsimiliter de l ⁊ m cõstabit: qz eoꝝ differentia ad g per p̃ceuentẽ est c latus g: quare per secundã primi concluditur quadratus g esse numeroꝝ l et m simul iunctorum medietatem.



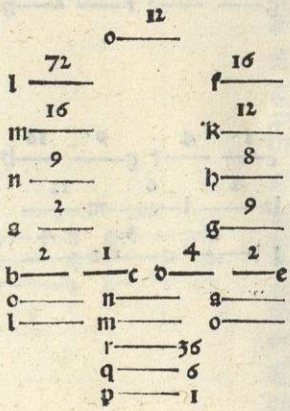
¶ Nullus altera parte longior est quadratus vel cubus. 26

¶ Nã si aliq̃s altera ꝑte longior vt a esset quadratꝰ: per diffinitionẽ eius latera essent equalia. et q̃a esset altera ꝑte longior eius latera sola vnitate distarẽt. si ergo illa dẽtur et sint b maior ⁊ c minor: q̃a etiã a esset quadratꝰ sit eius tetragonicũ latus d. et qz qꝫ fit ex b in c est equale ei q̃ fit ex d in se: ergo p vicesimãsextã secundi b d c sunt cõtinue ꝓportionales qꝫ est ĩpossibile. Nam cum b et c sola vnitate distẽt inter b ⁊ c nullus cadit nũerus medi⁹. sed ꝗ dicat aduersariꝰ d eẽ equale b aut c. cũ ergo b c d cõtinue ꝓportionẽ ꝫ oportet b et c esse equalia qꝫ est cõtra hypothesim. At dicat d esse maiorẽ b ⁊ c. tũc ergo b ad d est ꝓportio minoris nũeri ad maiorẽ: ⁊ d ad c ꝓportio maior ad minorẽ. et ille ponũꝫ eedẽ hoc aũt ĩpossibile. At dicat vltiõ d vtrocq̃ et b ⁊ c esse minorẽ: et tũc ꝓportio b ad d ẽ maior ad minorẽ et d ad c minoris ad maiorẽ: ⁊ ponunꝫ eedẽ hoc itecq̃ ĩpossibile nõ est igiꝫ a altera ꝑte lõgior: quadratus qꝫ est primũ. ostẽdo deinde a altera ꝑte longiorẽ nõ esse cubũ. nã si id possibile ẽ sit a altera ꝑte lõgior cubus ⁊ eius laꝫa sint: maius quidẽ b et minus c et quadratũ b sit d ⁊ quadratũ c sit e: sitq̃ f latus a in eo q̃ cubus: cui⁹ quadratũ sit l:. erit enĩ p corrlariũ quarte huiꝰ vnus medius ꝓportiõalis inꝫ d et l: q̃ sit g. et p idẽ vnus inꝫ e ⁊ l: q̃ sit h: ⁊ p septimã secundi q̃ ꝓportio b ad f ea est d ad g: et g ad l:. et siꝫ q̃ ꝓportio c ad f ea erit e ad h et h ad l:. et qz ex l: in f fit a ⁊ idẽ fit p hypothesim ex b in c: ergo p scdam partẽ vicesimequãte secũdi erit l: ad b sicut c ad f. ⁊ etiã pmutati l: ad c sicut b ad f. erũt igiꝫ inter d ⁊ c cõtinue ꝓportionales g et l: ⁊ siꝫ inter e ⁊ b. itidem duo h et l:. et qz b ⁊ e vel erunt ꝓmẽsurabiles vel cõtra se p̃mi. si ꝓmẽsurabiles cũ b numeret d eius quadratũ: ergo p vicesimãtertiam primi q̃cunq̃ numerus nũerabit b etiã numerabit d. quare d ⁊ e erunt cõmensurabiles. at tũ qz b et c sunt cõtra se p̃mi d et e esse cõmensurabiles p duodecimã tertij est ĩpossibile. si aũt b ⁊ e sint incõmensurabiles p scdam huiꝰ b et e sunt cubi. Siꝫ si c et d essent cõmensurabiles p idem qꝫ prius d et e essent ꝓmensurabiles qꝫ p duodecimã tertij est ĩpossibile. Si aũt c ⁊ d sint incõmẽsurabiles ergo p scdam huiꝰ vtrocq̃ ẽ cub⁹ quare inꝫ b et c erũt duo media ꝓtinue ꝓportiõalia p corrlariũ quarte huiꝰ at nõ mõ duo vel vnũ quidẽ inꝫcidere mediũ vt in p̃ma parte mõstratũ est: est ĩpossibile. cõstat igitur verũ esse ꝓpositũ.



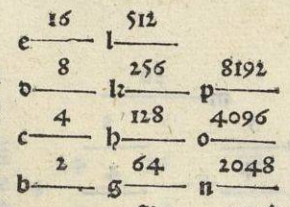
¶ Dato altera parte longiore: alium ab eo altera parte longiorem inuenire cuius ad illum sit proportio que quadrati ad quadratum. 27

¶ Sit a datus nũerus altera ꝑte longior et eius maius latus sit b: minꝰ vero sit c: sitq̃ d duplus ad b ⁊ e duplus ad c: ⁊ quadratꝰ d sit f: et primus sub eo quadratꝰ sit g quo nũerus vnitate mior sit h ⁊ ꝑte altera lõgior inter f et g sit l:. qz enĩ per secundã partẽ vicesimequarte huius dzia f et l: est d: et dzia l: ad g est mũerus eo minor vnitate. ideo dzia l: ad h ẽ equalis d. et cũ dzia d et e sit binarius: qm̃ duplũ dzie b ad c. nã per corrlariũ septime scdi duplatoꝝ: duple sunt dzie. ⁊ cũ ex d in se fiat f et ex d in binariũ qui est dzia eius ad e fiat dzia f ad h: qz fit dzia f ad l: et l: ad h q̃ est dupla ad d: vt p̃ostẽsum est. erit igiꝫ h reliquus nũerus q̃ fit ex d in e. duco igiꝫ g in h q̃ numeri solavnitate distare sunt positi: fiatq̃ l altera ꝑte longior quẽ dico esse: quẽ querim⁹. ducaꝫ enĩ b in h et fiat m: ⁊ c in g ⁊ fiat n. eritq̃ p octauã secũdi ea ꝓportio l ad m q̃ g ad b. et per eandẽ etiã ea ꝓportio n ad a que g ad b. quare ea est ꝓportio l ad m que n ad a. et q̃a ex b in h fit m: et ex c in g fit n: ideo p nonã quinti erit ꝓportio m ad n ꝓposita ex ꝓportionibus b ad c et h ad g. ⁊ q̃a d in se facit f: et d in e facit h erit ꝓportio f ad h q̃ d ad e. quare ⁊ q̃ b ad c: et q̃a ꝓportio f ad g cõposita est ex ꝓportionibus f ad h equali b ad c et h ad g: ergo ꝓportio m ad n equaꝫ ꝓportioni h ad g. et q̃a per corrlariũ quarte huiꝰ inter f et g est vnus ꝓportionalis mediꝰ erit vnus similiꝫ ꝓportionaliꝫ medius inter m et n q̃ sit o. cũ sit ergo o ad n sicut m ad o et n ad a sicut l ad m. ergo per equã ꝓportionalitatẽ indirectã erit l ad o sicut o ad a. capio ergo in ꝓportione l ad o tres numeros in cõtinua ꝓportionalitate mĩmos q̃ sint r q p: manifestũ est r et p esse quadratos: tunc sic q̃ ꝓportio r ad q ea ẽ l ad o: et q̃ q ad p ea est o ad a: ergo p equã ꝓportiõalitatẽ que ꝓportio r ad p quadrati ad quadratũ ea est l ad a altera parte longioris ad altera parte longiorẽ: qꝫ est ꝓpositũ.



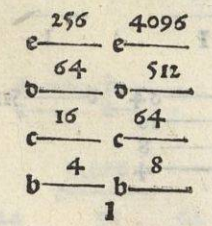
¶ Si numeri ab vnitnte ꝓportionales disponãtur tertium ab vnitate quadratũ: atq̃ vno intermisso tertium semper esse quadratũ quartũ vero ab vnitate cubum ⁊ duob⁹ intermissis quartũ semper esse cubum: septimũ autem quadratũ cubicum atq̃ quinq̃ intermissis septimũ semper esse quadratum cubicum est necesse 28

¶ Quadratus cubicus est quadratus q̃ pariter est et cubus. Posita enī vnitate ⁊ b c d e f g h k l m n o p: vel quotquot voles numeris cōtinue ab vnitate, pportionalibus hec statim ex decima ⁊ vndecima huius cognoscit. qr enī vnitas potētia et quadrat⁹ est ⁊ cubus. ideo per decimā huius c erit quadrat⁹ et p vndecimā d erit cubus. ⁊ per eandē decimā e iterum erit quadratus et iterū per decimā: qr e est quadratus g erit quadrat⁹. Sed et qr d est cubus p vndecimā g etiā erit cubus q̃ venit vt liq̃do cōstat septimus ab vnitate: quare septimus ab vnitate quadratus ē cubicus. et ita cōtinue procede similēq̃ offendes demonstrandi modum vbiq̃.



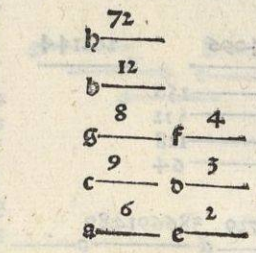
26 ¶ Si numerorū ab vnitate cōtinue, pportionaliū secūdus ab vnitate fuerit quadrat⁹ omnes erunt quadrati. q̃ si idem fuerit cubus: erunt et omnes cubi.

¶ Prima pars pater. nā per p̄missā etiā terti⁹ erit quadratus. ⁊ q̃a secūdus est quadratus p decimā huius tertius ab illo q̃ est quartus etiam est quadratus. et per p̄missam q̃a tertius est quadratus vno intermisso quītus erit quadratus. et ita deinceps quare numerorū ab vnitate cōtinue, pportionalium si secūdus est quadratus oēs erunt quadrati. Scda pars mōstratur. nā si secūdus fuerit cubus: cum quoties vnitas in secūdo toties secūdus in tertio. scdus in se q̃ est cubus producet tertiū: quare p decimam sextā huius tertius erit cubus. et per p̄missam quartus etiā erit cubus. et per vndecimā huius a quolibet illorū assumptus quartus erit cubus. at illis cōtinue sumptis oēs sumentur. constat itaq̃ si secūdus fuerit cubus omnes cubos esse.



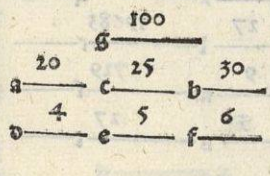
30 ¶ Si proximorū altera parte longiorū vnus in aliū ducat: pducet altera pte longior

¶ Sint a et b duo hunc in modū altera parte lōgiores et medius inter eos quadratus sit c cui⁹ latus sit d qd̄ per vicesimā quartā huius erit differētia inter a et c ⁊ inter c et b. sitq̃ a minoris altera parte longioris latus alterū e. eritq̃ d maius e vnitate. ⁊ qr d in se facit c et d in e facit a erit pportio c ad a tanq̃ d ad e. Sit itē vt ex d in f fiat b erit f vnitate maior d. addat itaq̃ e ad a et sit cōpositus g: qr ex d in e fit a ex f in e fiet g: vt facile p decimā primi ostēdatur cū numerus f numerū d solavnitate superet et q̃a f in e facit g et d in e facit a: erit per octauā secundi ea pportio g ad a q̃ est f ad d. scd ⁊ p septimā eiusdē etiā b ad c sicut f ad d: quare ⁊ b ad c sicut g ad a. quare pmutatī b ad g sicut c ad a: ergo p vicesimā quintā secundi qd̄ fit ex b in a datis altera parte lōgioribus equale est ei q̃ fit ex g in c at q̃ fit ex g in c est altera pte longior p diffinitionē: cū g et c sola vnitate differāt. q̃ g sit cōpositus ex a et e ⁊ dria a ab ipso quadrato c sit dria qua q̃dem dria d numerus e additus a in cōpositione sola distat vnitate. cōstat igitur numerū qui pducetur ex b in a esse altera parte longiorē. ⁊ propositum.



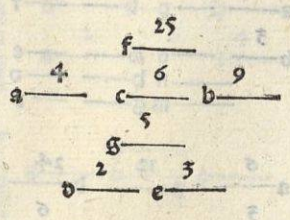
31 ¶ Si primi quiq̃ pte altera lōgiores cū duplo quadrati inter eos cōstituti pponant pducet quadrat⁹ cui⁹ radix erit ex minore minoris ⁊ maiore maioris laterib⁹ pstituta

¶ Sint enī a et b duo quicūq̃ proximi altera pte longiores et eorū medius quadratus c. sintq̃ d e latera altera pte lōgioris a: ⁊ e f latera alterius altera pte longioris b. dico q̃ si a b cōponātur cū duplo c totū aggregatū vt g esse quadratū: cuius radix est cōposita ex d et f. nā per vicesimā quartā huius e est dria a ad c et b ad c: ergo p secundā primi cōpositum ex a ⁊ b est duplū ad c. at duplū c cum a b duplo eiusdē erunt eius quadruplū quod q̃dem positū est g. quattuor igit in c pducūt g. at quattuor nūerus est quadratus cum producat ex duobus in se ductis ⁊ sit c positus est quadratus. ergo p decimā quartam p̄sentis et g est quadratus. et cū g quadratus quadrupl⁹ sit ad c quadratū: ergo per tertiā huius pportio lateris g ad latus c erit dupla. at cū e sit radix c et d ⁊ f circūpositi eq̃distent ipsi e. ergo p scdam primi d et f simul sunt duplū e lateris c: quare radix quadrati g est pposita ex d et f: qd̄ est ppositū.



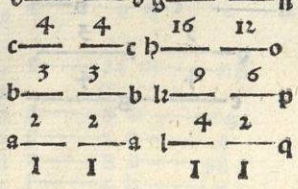
32 ¶ Si duo quilibet proximi quadrati cū duplo medij inter eos altera pte longioris cōiungātur: cōpositus erit quadratus latusq̃ ipsius ex laterib⁹ ipsorū compositū.

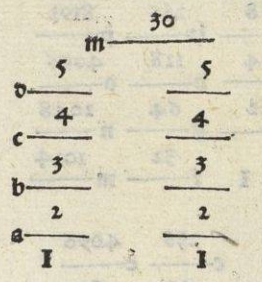
¶ Sint a b duo quilibet proximi quadrati et c medius inter eos altera parte lōgior et d e eorū latera dico quadratos a b cū duplo c efficere quadratū vt f cui⁹ latus erit cōpositum ex d e. Nam p vicesimā quartā huius ex d in e fiet c altera parte lōgior inter a et b: quare per nonā primi erunt a et c tanq̃ qd̄ fit ex d in pppositū ex d e: quod q̃dem cōpositum sit g et per eandē c cū b tanq̃ quod fit ex e in pppositum d e id est in g. et p eandē nonā qd̄ ex d et e in g tanq̃ quod fit ex g in se. erit igit quadratū numeri g tūtum q̃tum a ⁊ c ⁊ c: ergo q̃tum a et b ⁊ c bis. fuit enī c bis scz semel cū a et semel cum b sumptū: sed illud quod fiebat ex a et b ⁊ c bis positū est esse f. est igitur f quadratus cuius latus est g. et q̃a g est pposit⁹ vt positum est ex d et e lateribus quadratorū a et b: constat totum propositum.



33 ¶ Si ad duos vsq̃ nūeros vnitate distātes: oēs numeri ab vnitate coaceruētur: q̃ ex coacceruatione proucniet erit nūerus quadratus latusq̃ ipsius coaceruatorū maxim⁹.

¶ Sint nūeri ab vnitate dispositi p duos ordīes vsq̃ ad e ⁊ d duos q̃dē nūeros vnitate distātes p̄mus hoc mō vnitas a, b c d e: ⁊ scdus hoc mō vnitas a b c d: ⁊ sit quadrat⁹ e numerus f. dico quadratū f esse tanq̃ oēs numeri illorū duorū ordinū coaceruati Signo enī oēs quadratos iferiores f q̃ sint dispositi p ordinē f g h k l vnitas. eritq̃ g quadrat⁹ d: et h quadrat⁹ c: ⁊ k quadratus b: et l quadrat⁹ a. ⁊ postea vnitas q̃ est p̄me vnitatis quadrat⁹. Intelligo sit m n o p q medios altera pte lōgiores. et q̃a per vicesimā quartā huius dria f ad m est e: ⁊ dria m ad g est d. ergo p octauā conceptionē dria extremorū f g ē e d. et sit argumēto dria g ad h est d c. et dria h ad k est c b: ⁊ dria k ad l est b a: et dria l ad vnitatē est a et vnitas. addita ergo vnitate ad a et vnitatē: fiet l. et additis b a dria scz l ad k. ad a. ⁊ duplā vnitatē. i. ad l: fiet k. addita insup c b dria k ad h ad b a ⁊ a et duplā vnitatē. i. ad k fiet h: ⁊ simil f addita d c dria h ad g ad c b: b a: a et duas vnitates: hoc est ad h: fiet g. et addita e d dria g ad f ad d c: c b. b a: a et duas vnitates fiet f. per nonam igitur conceptionē constat pppositum demonstratum.

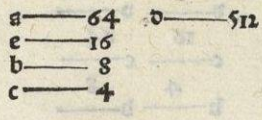




¶ Quicunq; ex numeris ab vnitate bis sumptis coaceruatur: est parte altera longior minusq; laterum ipsius: coaceruatorũ maximus 34

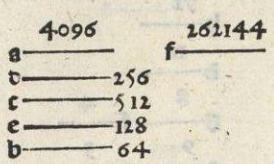
¶ Sint huiusmodi nũeri bino ordine sumpti vnitas a b c d q̃ simul aggregẽtur fiãtq; m: quẽ dico eẽ altera pte longiorẽ: eiusq; minus latus eẽ d. nã per p̃cedentẽ si p̃dictis nũeris addo e fiet quadratus f: cuius dria a medio altera pte lõgiore est e. remoto igit numero e a quadrato f remanet altera pte longior medi⁹ inter f ⁊ proximũ minorẽ quadratũ. Sed q̃ remanet ãmoto e est aggregat⁹ duoꝝ assignatoꝝ ordinũ scz m: igit m est altera pte longior medi⁹ inter f et proximũ minorẽ quadratũ. Sed ille medi⁹ altera pte lõgior fit ex d in e illorũ quadratoꝝ laterib⁹ pervicesimãquartã pãtis d aũt minus est: ergo altera pte lõgioris m min⁹ latus ẽ d. at d ordinũ assignatoꝝ maxim⁹ ẽ nũerus. ꝓstat g̃ tota ꝓpõ firma

¶ Si fuerit nũerus q̃dratus cubic⁹: latus quidẽ q̃drati erit cub⁹ latus ꝫo cubi q̃drat⁹ 35

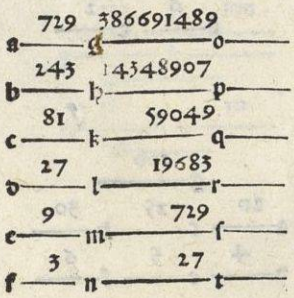


¶ Sit a nũerus quadrat⁹ cubicus cui⁹ quatenus quadrati latus sit b: quatenus vero cubi latus sit c: dico b esse cubuz et c esse quadratũ. Primũ pz. duco enĩ b in a ⁊ fiat d ppalã est d esse cubũ et a cubus ipm numerat ꝑm b: ergo p correlariũ decimeseptime huius b est cubus q̃d est primũ. Scõm ostẽditur sit e quadratũ c: qz q̃d sub c et e extremis cõtinetur equũ est ei q̃d fit ex b in se. ergo p vicesimãsextam secundi e b c sunt continue proportionales sed e primus est positus quadratus: igitur et c per decimã huius est quadratus: sicq; totum constat propositum.

¶ Si fuerint duo numeri quadrati cubici: medius inter illos in continua proportionalitate erit cubus: duorum vero mediorũ vterq; quadratus. 36



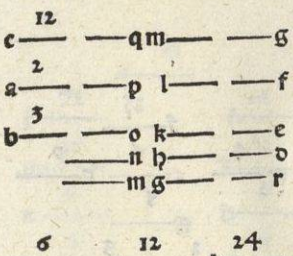
¶ Sint a et b duo quadrati cubici: qz a ⁊ b sunt quadrati p correlariũ quarte huius ẽ inter eos vnus medius ꝓportionalis q̃ sit c. et qz a ⁊ b sunt cubi p idem correlariũ inter eos dẽ sunt duo medij ꝓportionales q̃ sint d ⁊ e. dico ergo c esse cubũ et d ⁊ e esse quadratos. c aũt esse cubũ declarat. nam duco a in b et pueniat f: qz a ⁊ b sunt cubi: f etiã per decimãsextam huius erit cubus et cũ a c ⁊ b sint proportionales: ergo p vicesimãsextam secũdi f cubus fiet ex c in se. quare f est quadratus ipsius c. est igitur f quadrat⁹ cubicus: quare c latus f vt quadrati per p̃cedentẽ est cubus q̃d est primũ. sed d et e esse quadratos hinc liquet: qz b e d sunt cõtinue proportionales et b primus est quadratus. igitur ⁊ tertius d per decimã huius. Item a d et e sunt numeri ꝓportionales et a primus est quadratus igit per eandẽ decimã ⁊ e tertius quadratus. Est igitur tota propositio nota.



¶ Duos q̃dratos cubicos iuenire: int̃ quos nũeri quotlibet medij ꝓportiõalit̃ sumãt̃ 37

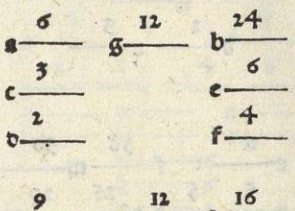
¶ Si duos q̃dratos cubicos iubeor iuenire inter quos quotlibet int̃iaceãt medij ꝓportionales sumo nũeros ꝓportionales plres duobus: ipsis medius: quos iubeor iuenire. verbi cã si iubeor iuenire duos quadratos cubicos int̃ quos sint quattuor medij ꝓportionales sumo sex nũeros cõtinue ꝓportiõales vt a b c d e f: quorũ per ordinẽ sumãtur cubi g h k l m n: q̃ per sextã huius sunt etiã ꝓportionales quisquidẽ cubi in se per ordinẽ ducãtur et proueniãt o p q r s t. dico itaq; o et t esse duos tales quadratos cubicos. nã cum g h et ceteri in se ducãtur o p q ⁊ ceteri sunt quadrati: et qz g h ⁊ ceteri eorũ scz latera sunt ꝓportiõales: per quintã huius o p q et ceteri eorũ quadrati sunt ꝓportionales. at cum g et n sint cubi ergo per decimãsextã huius o et t erunt cubi. sunt igitur o et t quadrati cubici inter quos quattuor numeri p q r s sunt medij proportionales: q̃d est propositũ.

¶ Duos q̃dratos cubicos repire: int̃ q̃s medios ꝑm datos nũeros sumẽ sit possibile



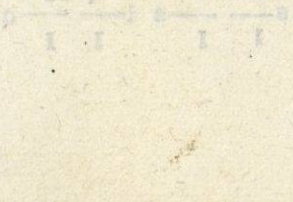
¶ Sint dati nũeri a ⁊ b: ꝓpositũq; sit duos quadratos cubicos iuentre: inter quos sint numeri ꝓportionales ꝑm a ⁊ etiã ꝑm b: sitq; a binarius et b ternari⁹. q̃a enĩ ꝓportiones semp sunt vno plures ipsis medius et a est binarius: nõ vt medij inueniãtur ꝑm a oportet tres esse ꝓportiones. et q̃a b est ternari⁹ vt inueniãtur medij scõm b opz quattuor esse ꝓportiones. Duco ergo tria in quattuor et proueniat c et scõm c ordino cõtinue ꝓportiões in nũeris r d e f g h k l m n o p q: quoꝝ q et r p̃cedentẽ ponantur quadrati cubici: et ꝓiũgo quattuor ex illis ꝓportiõib⁹ vt hic scõm quaknos et q̃ternos ordines: ⁊ hẽbo tres medios ꝓportiõales scz n k f p equã ꝓportiõalitatẽ. ⁊ sim̃ ꝓiungo tres ex illis vt hic p quinos ⁊ q̃nos ordines et hẽbo m ⁊ g duos medios ꝓportiõales int̃ q et r quadratos cubicos: q̃d est ꝓpositũ 38

¶ Int̃ q̃slibet duos supficiales sil̃es: tertiũ in ꝓtinua ꝓportiõalitate medij cẽ ncẽ est



¶ Sint a et b nũeri supficiales sil̃es: et latera a sint c ⁊ d: et latera b sint e ⁊ f. dico int̃ a et b eẽ vnũ numerũ in cõtinua ꝓportionalitate. nã q̃a a et b sunt sil̃es p diffinitionẽ eius latera sunt ꝓportionalia. ideo q̃ ꝓportio c ad d: ea est e ad f. quare pmutati q̃ ꝓportio c ad e: ea est d ad f. duco ergo e in d et fiat g: et q̃a c in d facit a: et b in eundẽ d facit g: ergo p octauã scõi, ꝓportio a ad g vt c ad e. ⁊ q̃a iterũ e in d facit g et e in f facit b: ergo ꝓportio g ad b vt d ad f. sed ꝓbata est ꝓportio c ad e vt d ad f: ergo proportio a ad g vt g ad b. est igitur inter a et b nũerus g medius ꝓportionalis: q̃d erat demõstrandum 39

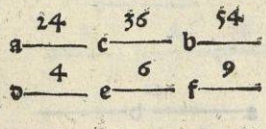
¶ Qz si tert⁹ int̃ eos medi⁹ ꝓportiõalit̃ ccidcrit: duo q̃libet nũeri erit supficiales sil̃es



¶ Hec est cõuersa p̃cedẽtis. Sint enĩ a et b q̃cunq; duo nũeri inter quos sit c medi⁹ ꝓportiõalis: dico a et b supficiales cẽ ⁊ sil̃es. capio enĩ d e mĩmos in ꝓportione a ad c q̃ qz mĩmi per decimãnonã tertij numerabũt a et c equalit̃: sitq; id scõm f et sim̃ nũerabũt c et b equalit̃: sitq; id scõm g manifestũ itaq; est cũ a sub duobus lateribus d et f: et b sub duobus e g cõtineat: a et b p diffinitionẽ esse supficiales. Sed q̃ sint similes pz. nã qz per hypothesim d et e numerãt c et b secundũ g: d numerat c scõm g: et e numerat c secundũ f vt et positũ est. igitur per vicesimãquintã secundi d f et e g sunt proportionales: sz d f sunt latera a: et e g sunt latera b. sunt igit a et b per diffinitionẽ supficiales sil̃es: q̃d est ꝓpositũ. 40

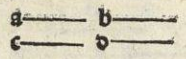
41 ¶ Si fuerit duo nũeri supficiales sil'es: erit ppozoni⁹ ad alterꝫ tãq̃ q̃dzati ad q̃dzatũ

¶ Sint a et b duo supficiales similes: dico ꝓportionẽ a ad b esse q̃ quadzati ad quadzatũ. nam p ante p̃missam erit inter eos vnus medius ꝓportionalis q̃ sit c. Sumo ergo tres minimos in eoꝫ ꝓportiõe q̃ sint d e f p primã huius d ⁊ f erũt quadzati. et cum q̃ ꝓportio d ad e ea sit a ad c. ⁊ q̃ e ad f ea sit c ad b ergo p equã ꝓportionalitatẽ q̃ ꝓportio d ad f quadzati ad quadzatũ ea est a ad b: qd̃ est propositũ.



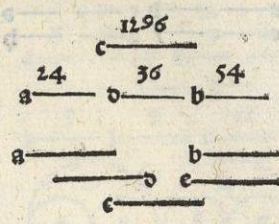
42 ¶ Si duozum numerozum proportio fuerit que quadzati ad quadzatum illos superficiales similes esse necesse est.

¶ Hec est cõuersa precedẽtis. Sint a et b quadzati ⁊ sit ꝓportio c ad d q̃ a ad b: dico c d numeros esse supficiales sil'es. Nam p corrolariũ quarte huiꝰ est vnus medi⁹ ꝓportiõalis inẽ a ⁊ b. q̃re ⁊ p duodecimã quarti vn⁹ erit medi⁹ ꝓportiõalis inẽ c et d. q̃re p 40 huiꝰ c ⁊ d sunt supficiales sil'es: qd̃ ẽ ꝓpositũ



43 ¶ Si duoꝫ superficialiũ similiũ alter in alterũ ducat: quadzatus numerus producet.

¶ Sint a et b supficiales similes: ducaturq̃ a in b ⁊ pueniat c: dico c esse quadzatũ. Nam p tricesimã nonã huius inter a ⁊ b est vnus medius ꝓportionalis q̃ sit d. q̃a ergo a d b sunt cõtinue ꝓportiõales per vicesimãsextam secundi idem est qui fit ex a in b ⁊ ex d in se. at qd̃ ex d in se fit est quadzatũ: igitur et c quod fit ex a in b: quod est propositum.



44 ¶ Si ex ductu duozum numerozum vnius in alterum producatur quadzatus: illos duos superficiales similes esse conuenit.

¶ Hec conuertit precedentẽ. vt si ex a in b producatur c quadzatus: dico a et b esse supficiales similes Nam per vicesimãsextam secundi latus tetragonicum c erit medius proportionalis inter a et b. ergo per quadzagesimã huius a et b sunt superficiales similes: quod intenditur.

45 ¶ Si duo numeri supficiales vni fuerint similes: erunt et inter se similes.

¶ Sint a b duo numeri supficiales similes c: dico a et b esse inter se similes. Nam q̃a a ẽ similis c inẽ a et c est vnus medius proportiõalis qui sit d. et q̃a b etiam similis c inter b ⁊ c similiter vnus medius proportionalis qui sit c. igitur per decimãsextam quarti et inter a ⁊ b erit vnus medius ꝓportionalis quare per quadzagesimã huius a et b erunt superficiales similes: et propositum.

46 ¶ Si aliquis numerus in superficialem ducatur: proueniens erit solidus.

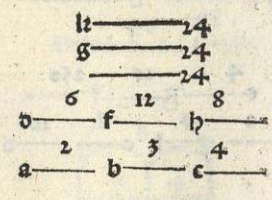
¶ Nam superficialis fit ex ductu numeri in numerũ facta vna multipllcatione. qui igitur ex ductu alicuius in ipsum producetur tribus lateribus cõtinebatur cõtinua facta multiplicatione. quare per diffinitionẽ erit solidus: quod intendebatur.

47 ¶ Omnis solidus ab aliquo superficiali numeratur.

¶ Nam oĩs solidus per diffinitionẽ habet tria latera quoꝝ tertium ducit in productũ ex reliquis. at talis ꝓductus est supercialis. numerat̃ igitur oĩs solidus ab aliquo supficiali vt proponebat̃.

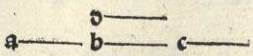
48 ¶ Datis trib⁹ nũeris cũ triplici mõ solid⁹ ꝓcreet: vnus tũ idẽq̃ erit q̃ ex oib⁹ ꝓducet

¶ Sint tria latera a b c: et primo ex a in b fiat d: ⁊ ex c in d fiat solidus e. secũdo ex b in c fiat f et ex a in f fiat solidus g. tertio ex a in c fiat h et ex b in h fiat solidus l. dico tres solidos e g l ex tribus lateribꝰ triplici mõ creatos eos dẽ esse atq̃ equales. Nã qꝰ a in b facit d: et c in b facit f. ergo p octauã secundi d ad f vt a ad c. ergo p vicesimãquintã secũdi idẽ est q̃ fit ex a ĩ f et c in d: sed a in f facit g ⁊ c in d facit e sunt igit̃ e g solidi equales. Itẽ qꝰ ex b in c fit f et ex a in c fit h: ergo p eandẽ octauã que ꝓportio b ad a ea est f ad h. ergo p vicesimãquintã secundi iterũ idem fiet ex a in f et b in h. sed ex a in f fit solidus g: et ex b in h fit solidus l. sunt igit̃ solidi e ⁊ l ad̃uicẽ equales: sed et solid⁹ e posit⁹ est equalis solido g q̃ p cõem sciam l. et e sunt solidi eq̃les. sunt igit̃ vt ꝓponebat̃ tres solidi e g l ad̃uicẽ eq̃les: ⁊ ꝓpositũ



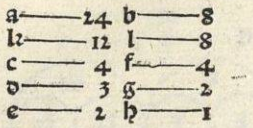
49 ¶ Omnis numerus a tribus numeris numeratus solidus esse probatur.

¶ Sint a b c tres nũeri numerãtes d: dico d esse numeꝫ solidũ. nãvel a est p̃mus vel ꝓposit⁹. si ꝓposit⁹ ergo p quadzagesimãsextã huius q̃cunq̃ nũerus in ipm̃ ducat̃ ꝓducet solidũ: sicq̃ cõstabit propositũ. Si aũt sit primꝰ qꝰ b nũerat d p̃m aliquẽ numerũ: ergo p quartã tertij a numerat b: vel alterũ p̃m quẽ nũerat. quare b aut is p̃m quẽ nũerat est supficialis. erit itaq̃ p quadzagesimãsextã: vt prius d solid⁹.



50 ¶ Dim duoꝫ solidozũ ꝓportio: ẽ ex laterũ vni⁹ ad latera alteri⁹ ꝓducta ꝓportiõib⁹.

¶ Sint a et b duo solidi: sintq̃ c d e latera a: et f g h latera b. dico proportionẽ a ad b esse cõpositã ex ꝓportionibus c ad f: d ad g: ⁊ e ad h. duco enĩ c in d et pueniat l ⁊ f in g et proueniat l. p nonã igitur quinti proportio l ad l cõposita est ex proportionibus c ad f ⁊ d ad g. et qꝰ per quadzagesimãoctauã huius si e ducatur in l: et h in l proueniẽt a ⁊ b. ergo per nonã quinti proportio a ad b vt l ad l et e ad h: sed proportio l ad l monstrata est cõposita ex c ad f et d ad g. ergo: proportio a ad b composita est ex proportionibus c ad f: d ad g: et e ad h: quod est propositum.

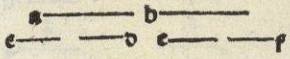


51 ¶ Si duo solidi sil'es alios duos equalit̃ numerẽt: illos quoq̃ solidos sil'es eẽ ncẽ ẽ.

¶ Sint a b duo solidi similes: numerẽtq̃ d e equaliter vt secundũ c. dico d e pariter eẽ solidos similes assigno enim f g h latera a: et l l m latera b. ducoq̃ f in g ⁊ pueniat n et l in l ⁊ pueniat o. et qꝰ h in n p quadzagesimãoctauã huius facit a: et m in o facit b. est itaq̃ n in a p̃m h: et a in d p̃m c. ergo p vicesimãtertiã primi n est in d secundũ productũ ex c in h q̃ sit p. et similiter qꝰ o est in b p̃m m et b in e p̃m c: per eandẽ vicesimãtertiã o est in e p̃m productũ ex c in m q̃ sit q. ⁊ qꝰ c in h facit p et c in m facit q. ergo que ꝓportio h ad m p septimã secundi ea est p ad q: quare ⁊ q̃ f ad l et g ad l. sed p in n facit d ⁊ q in o facit e vt monstratũ est. Sed tm̃ est f in g q̃tum n: et l in l q̃tum o. ergo p f g in se faciẽt d: et q l l in se

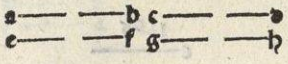
facient e. sunt ergo d & e solidi et latera d sunt p f g & latera e sunt q l: l. sed illa probata sunt proportionalia: ergo d et e sunt etiam similes: quod est totum propositum monstratum.

¶ Inter quoslibet duos solidos similes: duo numeri in continua proportionalitate medij intercidunt. 52



¶ Nam p penultimam propositionem erit proportio vnius illorum solidorum ad reliquum tanquam lateris ipsius ad latus alterius proportio triplicata. Sumam ergo quattuor numeros in proportione lateris ad latus. & quia primi ad quartum erit proportio lateris ad latus triplicata: illa erit eadem proportioni solidi ad solidum. ergo per duodecimam quarti quot media sunt inter primum & vltimum tot erunt inter solidum et solidum. at media sunt duo: ergo inter solidum & solidum itidem erunt duo: quod est propositum.

¶ Si fuerint quattuor numeri continue proportionales: duo extremi erunt solidi similes. 53



¶ Hec est conversa precedentis. Sint a b c d quattuor numeri continue proportionales: dico a et d esse solidos similes. Sumo enim e f g h quattuor illius proportionis minimos quia si cum assignatis itidem fuerint cum p secundam huius & e & h sint cubi similes a et d erunt cubi. quare solidi similes sicque firmum stabit propositum. Porro si itidem non sint cum e & h per quintam quarti sint contra se primi: quare per vicesimam tertij in sua proportione minimi et p decimanonam eiusdem equaliter numerabunt a et d. sed e & h cum p secundam huius sint cubi ipsi sunt solidi similes. ergo iterum per quinquagesimam primam huius a et d sunt solidi similes: quod est propositum.

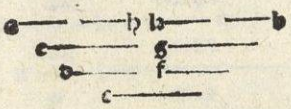
¶ Omnium duorum solidorum similium: est proportio vnius ad alterum tanquam cubi ad cubum. 54

¶ Sint a et d solidi similes: dico proportionem a ad d esse proportionem tanquam cubi ad cubum. quia p quinquagesimam secundam huius inter a & d sunt duo medij proportionales. sint ergo illi b c: capio vt prius e f g h in illa proportione minimos quorum p secundam huius constat e & h esse cubos quia si itidem sint cum proximis constat propositum si non itidem: quia p equam proportionalitatem quia proportio e ad h cubi ad cubum eadem e a ad d: quod iterum est propositum.

¶ Quia si vnius ad alterum fuerit proportio tanquam cubi ad cubum: quoslibet duos numeros solidos similes esse necesse est. 55

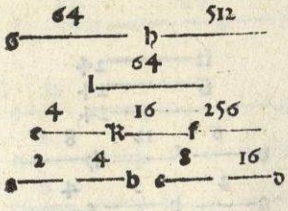
¶ Hec est conversa precedentis quia ideo vera esse convincit: quia p correlarium quarte huius inter quoslibet cubos duo inseriantur medij proportionales. igitur p duodecimam quarti et inter illos solidos itidem duo inseracebunt medij proportionales. ergo p 53 huius duo extremi quia erunt solidi assignati erunt solidi similes: quod est propositum.

¶ Si fuerint duo solidi vni solido similes: ipsi quoque inter se erunt similes. 56



¶ Sint a b duo solidi similes solido c: dico a et b esse solidos inter se similes. Nam quia a c sunt solidi inter se similes: ergo per quinquagesimam secundam huius inter a & c sunt duo medij proportionales quia sint d e. et similiter per eandem inter b et c quia sint f g. igitur p decimam septimam quarti duo similes erunt inter a & b. quare a & b per quinquagesimam tertiam huius inter se sunt solidi similes: quod erat demonstrandum.

¶ Si fuerint quattuor numeri proportionales et duorum extremorum quilibet in quadratum alterius ducatur: prouenient cubi aliorum. 57



¶ Sint a b c d quattuor numeri continue proportionales: sitque e quadratum a et f quadratum d ducaturque d in e & pueniat g et a in f & pueniat h. dico igitur g et h esse cubos b & c. duco enim b in se & fiat l: quia e & l: sunt quadrati quorum latera sunt a b erit per tertiam huius proportio e ad l: tanquam proportio a ad b duplicata: quare tanquam b ad d: ergo per vicesimam quintam secundi idem est qui fit ex b in l et e in d. sed qui fit ex b in l: est cubus b. qui autem ex e in d est g: igitur g est cubus b. similiter si ducatur c in se & fiat l erit per eandem tertiam huius proportio l ad f tanquam a ad b duplicata. quare tanquam a ad c: quare per vicesimam quintam secundi vt prius idem erit qui fit ex c in l et a in f: qui autem fit ex c in l est cubus c: & qui fit ex a in f est h igitur h est cubus c: quod est propositum.

¶ Datis lateribus siue laterum proportionibus: solidorum summam hitudinemque inuestigare. 58

¶ Hec in solidis continuis eqa et discretis eandem habet veritatis certitudinem. si primo detur latera duc quoque illa in seinuicem tria scz vnius et tria alterius et puenient statim p quadragesimam octauam huius solidorum summe. si autem laterum proportiones detur compone per tertiam quinti laterum proportiones: siue eas per sextam quinti continua et proportio ex laterum proportionibus composita per quinquagesimam huius aut quia ex continuatis componetur: erit proportio solidi ad solidum sicque nota erit solidorum habitudo atque totum quod propositio proponit notum. Sexti elementorum arithmetices Jordani finis.

p Ar numerus est qui in duo equalia diuidi potest. Impar est in quo aliqua prima pars est absque pari: additque supra parem vnitatem. Parium numerorum alius pariter par: alius pariter impar: et alius impariter par. Pariter par est quem nullus impar numerat. Pariter impar est quem quicunque pares numerant: cum scom imparem numerant. Impariter par est quem quidam par & impar & quidam & impar numerant. Medius inter duos numerus dicitur: qui inter eos positus equaliter ab vtroque distat. Medij dicuntur duo numeri qui non habentes aliquem interpositum: equales habent ad extremos differentias. Perfectus numerus appellatur qui ex omnibus suis partibus coniunctis perficitur. Abundans dicitur: ad quem omnes suae partes comparatae: maius habere reperiuntur. Diminutus vero cuius partes coniuncte omnes minus ipso constituunt.

1 ¶ Si quotlibet sibi coaceruentur pares: qui proueniet erit par.

¶ Nam ex diffinitiõe paris quotquot assignabũtur eorꝫ qlibet hꝫ medietatẽ. at oẽs eorꝫ medietates p sextã primi adinuicẽ coniũcte: coaceruati dimidiũ constituũt. coaceruatus igitur cum in duo equa diuidi possit erit par: quod intendebatur.

2 ¶ Si par et impar coniungantur: compositus erit impar.

¶ Nam si ab impari auferatur vnitas cũ solam vnitatẽ per diffinitionẽ super parẽ addat: relinq̃tur par. qui si addatur alteri pari: per p̃cedentẽ compositus erit par. cui quidẽ si ablata restituat vnitas: totus per diffinitionẽ fiet impar. at ille erit q̃ ex pari ⁊ ipari cõstat. ratũ est ergo qõ propõ intẽdebat.

3 ¶ Si impar impari addatur: proueniet numerus par.

¶ Nam si ab vtroꝫ eorum dematur vnitas relinquẽtur duo pares qui per ãteprẽmissam cõstituent numerũ parem: cui quidẽ composito si iungãtur due ablate vnitates que parẽ constituunt per eandẽ anteprẽmissam totus rursum euadet par. hoc autẽ intendebat propositio.

4 ¶ Si impares numero pares sibi coaceruẽtur: totus ex eis cõflatus erit par.

¶ Nã cũ nũerus quo eos sumim⁹ sit par: in eo binari⁹ aliquoties sumet q̃ toties p p̃cedentẽ binario copulati erũt pares. igit̃ per primã hui⁹ adinuicẽ simul additi ꝓstituunt numerꝫ parẽ: qõ est ꝓpositũ.

5 ¶ Si impares numero impares coaceruentur: cõpositus erit impar.

¶ Nam si vnus eorꝫ omittatur per precedentẽ compositus erit par: ergo per secundã pãtis si ꝓposito addatur omissus ipar: totus q̃ inde nascitur ex oĩbus compositus erit impar qõ est propositũ.

6 ¶ Si a pari detrahatur par: reliquetur par.

¶ Nam si relinq̃retur impar: idem cum detracto additus per secundã presentis cõstituisset imparẽ: quod est contra hypothesim. verum igitur est propositum.

7 ¶ Si impar a pari tollatur: residuus erit impar.

¶ Nam si residuus poneretur par: idem detracto appositus per secundã huius cõstituisset imparẽ: quod est contra hypothesim. erit igitur verum propositũ.

8 ¶ Si ab impari impar tollatur: remanebit par.

¶ Nam si remaneret impar: idem ablato additus per tertiã huius cõstituisset parem: at positus est impar. relinquitur igitur par: quod est propositum.

9 ¶ Si par impari substrahatur: reliquus erit impar.

¶ Nam si residuus esset par: substracto additus p primã huius cõstituisset parẽ: quod est contra positum. relinquitur igitur propositum verum.

10 ¶ Omnis numerus per parem multiplicatus: parem producit.

¶ Nã si multiplicat parẽ p diffinitionẽ toties multiplicat⁹ erit in ꝓducto quoties vnitas in mltiplicãte. ⁊ cũ multiplicat⁹ sit par tot illi pares simul additi p primã hui⁹ ꝓstituũt ꝓductũ parẽ. si aũt mlti plicet iparẽ p idẽ toties erit mltiplicat⁹ ipar in ꝓducto quoties vnitas in mltiplicãte. at vnitas in eo ponit̃ esse in numero pari: ergo p quartã huius illi impares: nũero pares simul additi ꝓstituunt itemꝫ parem: quod est totum propositum.

11 ¶ Si impar in imparem ducatur: qui producetur erit impar.

¶ Nam multiplicatus impar per diffinitionẽ toties erit in producto quoties vnitas in multiplicãte impari. at in illo vnitas est in numero impari. igitur per quintã huius illi impares et numero quidẽ impares simul additi cõstituent productũ imparem: quod est propositum.

12 ¶ Quemcunq̃ par numerat: eum esse parem necesse est.

¶ Nam par numerãs p diffinitionẽ põt in duo equa diuidi in cuius medietates si numer⁹ secundũ quẽ numerat ducat: per nonã primi eundẽ productũ ꝓducit. at idẽ numer⁹ in alterã medietatũ duct⁹ ꝓducti ꝓducit dimidiũ. igit̃ ꝓductus vt q̃ põt in duo equa ꝑtiri p diffinitionẽ est par: qõ est ꝓpositũ.

13 ¶ Quicunq̃ imparem numerat: impar est

¶ Nam si ponas q̃ q̃ eum numerat sit par: per precedentẽ numeratus erit par: quod est contra hypothesim. qui igitur eũ numerabit si quis numeret: erit impar: quod est propositum.

14 ¶ Si impar imparem numeret: secundum imparem eum numerabit.

¶ Nam si impar numeraret imparẽ secundũ parem: ergo alternati per octauã primi par numeraret eundẽ secundũ imparẽ: quod p duodecimã huius est ipossibile. verum igitur propositũ.

15 ¶ Si impar parem numeret: secundũ parem eum numerare conueniet.

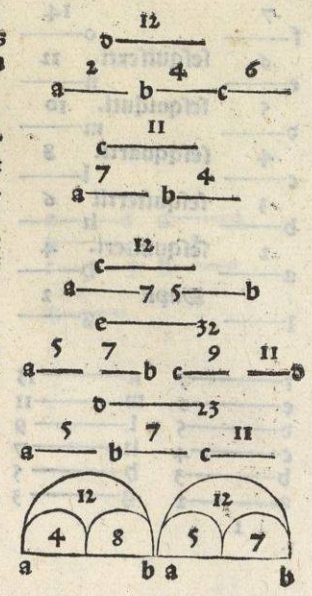
¶ Nam si impar secundũ imparẽ eum numeraret: ergo p vndecimam huius totus esset impar. at positus est par. acciderет itaq̃ contra hypothesim. relinquetur igitur propositum.

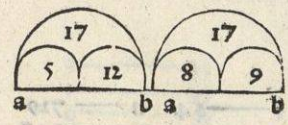
16 ¶ Si parem impar numeret: dimidium quoq̃ ipsius numerabit.

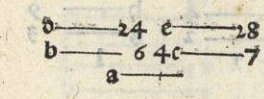
¶ Nam si impar parem numeret: per premissam secundũ parem eũ numerabit. cum itaq̃ omnis par medietatẽ habeat impar ergo ille per illius medietatẽ multiplicatus per octauam et nonam primi producet totius medietatẽ. numerabit igitur impar ille: numeratꝫ dimidiũ: quod est ꝓpositum

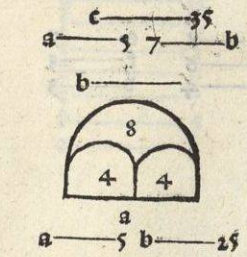
17 ¶ Si nũerus ipar ad aliquẽ numerꝫ fuerit prim⁹: idẽ quoq̃ ⁊ ad eius duplũ erit p̃m⁹

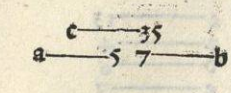
¶ Ut si ipar a sit primus ad b dico ip̃m esse primũ ad c duplũ b. nã si nõ fuerit primus ad c ergo a ⁊ c cõicabunt. erit igitur p diffinitionẽ numerus cõiter numeros a et c numerãs: qui sit d. ⁊ q̃a d nũerat a ⁊ c: et c est par q: duplus b. et ideo q̃ põt in duo equa partiri: igitur p precedentẽ d etiã numerabit d dimidiũ c. quare a ⁊ b cõicabunt: quod est contra hypothesim. erit igit̃ a primus ad c: qõ est ꝓpositũ.

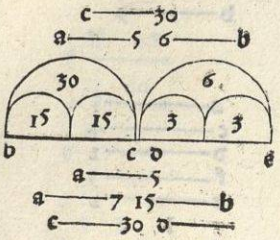


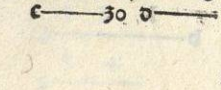




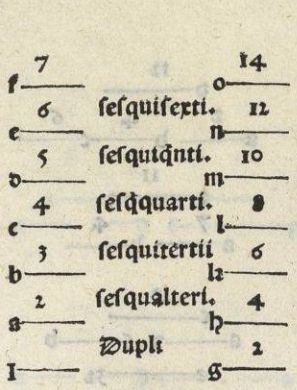








¶ Si dispositorum ab vnitate numerorũ secundũ naturalem seriem: omniũ dupli sumantur: proueniẽt omnes pares ab vnitate: eruntq; parium eodẽ ordine sumpte que et numerorum ab vnitate dispositorũ proportiones. 18



¶ Dispono numeros ab vnitate secũdũ naturalẽ seriem vnitas a b c d e f: quoq; per ordinẽ sumo duplos g h k l m n o. dico primo oẽs pares ab vnitate vsq; o esse acceptos. secũdo q̃ proportiones sunt numeroꝝ ab vnitate dispositoꝝ: vt a ad vnitatẽ: b ad a: c ad b: d ad c: e ad d ⁊ f ad e: tales esse per ordinẽ in ordine parium: vt h ad g et l2 ad h ⁊ l ad l2 et ita ceteroꝝ. Primũ patet. nam primo duplos esse pares manifestũ est cum quilibet eorum in duo dimidia que equa sunt diuidi possit. Et q̃ nullus alius ab acceptis sit par certũ est qꝝ talis nõ haberet medũ in numeris: q̃ si haberet vllũ coincideret cũ aliquo assignatoꝝ. certũ est ergo oẽs pares fuisse acceptos. Secundũ patet. nã que ꝓportio a ad h: ea est vnitatis ad g. ergo ꝑmutatĩ per tertiã secũdi q̃ ꝓportio a ad vnitatẽ: ea est h ad g. Itẽ que b ad l2: ea est a ad h. ergo ꝑ eandẽ q̃ b ad a: ea est l2 ad h. et ita ꝑ eandẽ consilr ꝓcede ⁊ totũ firmũ ꝓcludes ꝓpositũ.

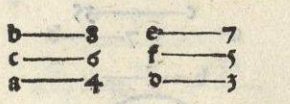
¶ Si numeroꝝ ab vnitate naturali serie dispositorũ: duo ⁊ duo continue cõiungãtur fient oẽs ĩpares ab vnitate. ipsorũq; impariũ proximi quiq;: erunt contra se primi. 19

¶ Disponat ordo numeroꝝ ab vnitate ꝑm eorum naturalẽ seriem: cõiungãturq; quiq; duo ⁊ duo proximi. dico primo omnes ab vnitate fieri ĩpares. secũdo vero quosq; duos ꝓximos esse contra se primos. Primũ patet. nã quicunq; duo ꝓximi in naturali serie numeroꝝ ꝑ diffinitionẽ sola vnitate distãt: q̃re eoꝝ alter est par et alius ĩpar. ipsi igitur simul additi ꝑ secundã huius totũ constituũt imparẽ. Sed q̃ nullus sit impar preter illos sic cõstat alioquin nõ posset ille impar diuidi in ꝑmas partes quaꝝ vna super alterã addit vnitatẽ quod est contra diffinitionẽ. aut si diuidat cõstituetur ex duobus numeris in naturali serie numeroꝝ proximis qd̃ est propositum. Secundũ patet. nã cum oĩs impar ab vnitate addita vnitate ⁊ vnitate substracta habeat circũpositos pares: et oĩs par circũpositos impares ab eo sola vnitate distãtes per cõceptionẽ igitur dẽa quorũcunq; ꝓximoꝝ impariũ est binarius. at binariꝰ est numerus primus cũ a nullo alto nũero preter vnitatẽ numerẽt. additus igitur binarius q̃ est numerus primus vnitati cõstituet primũ imparẽ numeꝝ primum: q̃quidem binarius numerus primus additus ternario numero etiã primo: per primã tertij cõstituet numeꝝ ad alterum primũ. Itidẽ ⁊ per nonã tertij argumẽtabere: ⁊ ita de quibuslibet duobus ꝓximis ostendere ꝑfacile est: qd̃ est propositũ.

¶ Si numeroꝝ ab vnitate ꝓportionaliũ secundus ab vnitate fuerit par reliquos oẽs pares esse: q̃ si idem fuerit impar: reliquos itidem ĩpares esse necesse est. 20

¶ Nã si secũdus est par q̃a numerat ab vnitate scõus nũerabit tertiũ ⁊ tertius quartũ: sicq; deinceps quare ꝑ vicesimã tertiã primi scõus q̃ est par nũerabit oẽs reliquos. sunt igit reliq̃ oẽs ꝑ duodecimã huiꝰ pares qd̃ est ꝓpositũ quo ad hoc. et si scõus est ĩpar q̃a nũerat ab vnitate: iõ ipse in se ductꝰ nũerabit tertiũ et per vicesimã quintaꝝ scõi tertius ꝑm eundẽ quartũ ⁊ ita deinceps. igitur per vndecimã huius eorum quilibet erit impar: quod est totum propositũ.

¶ Inter quoslibet duos numeros quoꝝ vterq; par est aut vterq; impar: vnus est medius q̃ si vnus fuerit medius vtrũq; parẽ aut imparẽ esse necesse est. 21

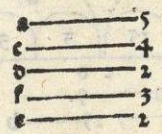


¶ Nã si vterq; fuerit par: ipsi simul additi ꝑ primã huius cõstituunt numerũ parem. ⁊ si vterq; fuerit impar ꝑ tertiã huius idẽ eueniet. si itaq; illius sumat medietas ꝑ scõam partẽ secunde primi illa erit nũerus a quo illi numeri eq̃distabũt ꝑ diffinitionẽ. igit numerꝰ ille erit inter illos medius. Scõm pz nã si int eos sit medius ꝑ primã partẽ scõe primi idẽ duplicatꝰ est tanq̃ illi ꝓiũcti q̃ cũ sit par eo q̃ est duplꝰ si alter eoꝝ sit par: ꝑ sextã huius et reliquus. et si alter eoꝝ sit ĩpar ꝑ septimã eiusdẽ ⁊ reliquus quod est propositum.

¶ Inter parem et imparem vel nullus est medius vel duo: q̃ si duo fuerint inter eos medij: alterum parem ⁊ alterum imparem esse cõuincitur. 22

¶ Si vnitate distiterit par atq; ĩpar: inter eos nullus incidet medius. q̃ si ãplius q̃cunq; distiterint vt par a et ĩpar b: dico int a ⁊ b eẽ duos medios. nã ꝑ secundã huius a et b iũcti ꝓstituũt numeꝝ ĩparẽ vt c. q̃ per nonã eiusdẽ diuidi poterit in duos vnitate distãtes q̃ sint d e: quos dico ꝑ tertiã primi equidistare a et b. quare per diffinitionẽ sunt medij qd̃ est primũ. Scõd dico q̃ si inter a ⁊ b sint duo medij alterũ esse parẽ ⁊ alteꝝ imparẽ. nã si duo vt d e interiacẽt medij: ꝑ diffinitionẽ vnitate distabũt. quare eoꝝ alter erit par et alter impar. cõiuncti igit d e ꝑ scõam huius constituent imparẽ. at a b coniuncti per tertiã primi cõstituunt eandẽ. quare si alter fuerit par per nonam huius reliquus erit impar. et si alter fuerit impar per octauã huius reliquus erit par: quod est propositũ.

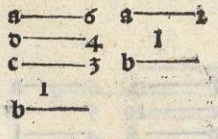
¶ Inter quelibet imparẽ et vnitatem vnus est medius: idẽq; est maior ipsius portio. q̃ si inter vnitatẽ ⁊ ipm vnus medi⁹ extiterit: quelibet talẽ numeꝝ imparẽ esse ꝓuenient 23



¶ Sit a quilibet impar et b vnitas: dico inter a ⁊ b esse vnum medũ qui est maior portio a. dico etiã q̃ si inter a ⁊ b vnus sit medius numerũ a esse imparẽ. Primũ patet. nã cum a numerus ĩpar superet b vnitatẽ in numero pariv in c q̃ est differẽtia a ad b. et qꝝ c est par diuidat in duo equa d atq; e. capio ergo numerũ f cuius e sit differẽtia ad b: quẽ dico esse medũ inter a ⁊ b. nã q̃a per conceptionẽ differentia a ad b cõstituta est ex differẽtiis a ad f et f ad b: ⁊ differẽtia a ad b sit c. erit ergo c cõstitutus ex e differẽtia f ad b eius dimidio et d altero eius dimidio: quare d equalis e differẽtia est a ad f. est igit

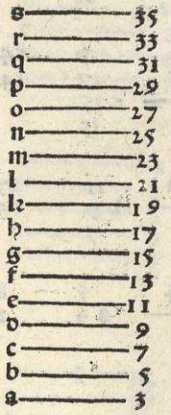
f medius inter a ⁊ b. et cū a addat vnitatē super c differentiā eius ab vnitate b: ⁊ e f similiter vnitatē super c: erit a constitutus ex portionibus e f. at f qui est medius numerus maior est portio ⁊ e minor. cōstat itaq; inter imparē ⁊ vnitatē esse vnū mediū: eundēq; esse īparis maiorē portionē qō est primū. Scōm siliter. nā si inter a ⁊ vnitatem b sit f medius: per diffinitiōem a ad f et b ad f equales sunt dīe sed cū per ꝓceptiōem differētia a ad b ꝓposita sit ex differētijs a ad f et b ad f. illa cū in duo equa diuidi possit: erit par. at illam numerus a vnitate supat. a igitur per diffinitionem est impar. qō est scōm et totum propositum.

24 ¶ Inter parem ⁊ vnitatem vel nullus erit medius: vel duo minorq; paris dimidium. q; si inter ipm ⁊ vnitatem duo fuerint medij: eum esse parem necesse est.



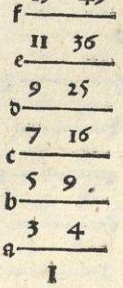
¶ Sit a quilibet par/ ⁊ b vnitas: si a sit par ꝓprime sequēs vnitatem cū sola vnitate distent: inter a et vnitatem nullus erit medius. q; si āplius vnitate distent: dico pmo inē a ⁊ b duos eē medios/ minorēq; esse paris dimidiū. Scōo q; si iter a quēcunq; nūerum ⁊ b vnitatem duo medij ꝓstiterint: a eē parem. Primum ostēditur. nam a paris: ab vnitate b differētia est impar. q̄ ideo p parem ⁊ imparem vnitate distātes per nonam huius partiri potest. partiatur itaq; illa dīa in duas tales portiones. tūc capio c numerum: cuius quidē minor portio sit differētia ad b. per ꝓceptiōem maior portio erit differētia a ad c. at maior portio minorē vnitate supat. capio ergo numerum ꝓtinue sequentem c q̄ sit d. differētia enī a ad d: minor erit vnitate differētia a ad c. quare differētia a ad d et c ad b sūt equales. sunt igitur c ⁊ d medij inter a et b. et quia per scōam primi c est medietas d ⁊ dīe c ad b simul iūctoꝝ: et d ⁊ dīa c ad b equātur a: cū d ⁊ dīa c ad b addant vnitatem a ad c et c ad b. est igitur c: minor medioꝝ medietas paris a. et hoc est primum. Scōm declaratur. nam si inter a ⁊ vnitatem b: sint duo medij vt c d: quoꝝ c sit minor/ et d maior: dīa c ad b minor est vnitate dīa ipius c ad a. eaꝝ igiē vna est par/ et alta impar. addite igitur simul per scōam huius ꝓstituūt numerum imparem: qui per ꝓceptionem est differentia a ad b: cui sicdē addideris vnitatem: ꝓstitues a. est igitur a par. quod est scōm.

25 ¶ Si impares oēs ab vnitate disponantur ⁊ totidem post quēlibet sumātur: quotus ipse ab vnitate fuerit: extremū ab illo numerari ꝓueniet. et item totus ab illo quotus ipse a primo idē a pmo nūerabitur: sicq; deinceps. oēsq; in medio relicti erunt primi.



¶ Sint a/b/c/d/e/f/g/h/k/l/m/n/o/p/q/r/s impares ab vnitate ꝓsequēter dispositi: et quotquot vlterius voles. dico primo q; si accepto a q̄ ternariꝰ est primo ab vnitate impare: quotus ipe ē ab vnitate totum imparem post ipm accipias vt d: id est tertium: a ipm numerare. et si totum iteꝝ post d accipias vt g: iteꝝ a ipm numerare. et si totum post g vt l: iteꝝ a ipm numerare. ⁊ ita ꝓsequenter. Scōo: medios oēs vt b c/e f/h k: et ita cōsequēter ad a esse primos. Primum pz. nam q̄a ternarius ētius est ab vnitate: tres post accepti impares et ipse: sunt quattuor. quare inter a ternarium ⁊ d tertium post ipsum sunt b et c duo impares medij: et tres differētie equales. impartium enī ꝓtinue ordinatoꝝ ad impares: differētia est binarius: dīe scz totidem quot sunt vnitates in illo. sed tota dīa d ad a per ꝓceptionem bis repetitam: ꝓponiē ex illis tribus differētijs. igitur a in vnam illaꝝ ductus: ꝓducit totam. at ipse toti differētie additus: ꝓstituit d. igitur a numerat d. et siliter ostēdiē a numerare g. sunt enim quinq; inēmedij impares ⁊ sex binarij dīe equales: duple q̄dē tribus primis. et dīa g ad a ē ꝓposita ex illis sex. ergo a per vicesimamtertiam primi illā numerabit. at a toti dīe g ad se additus ꝓstituit g: a igiē numerat g. et siliter nūerabit l. q̄a dīa l ad a erit tripla dīe d ad a. ꝓsiliterq; nūerabit o. q̄a differētia quadrupla. et hūc in modum ꝓsequēter. Scōm pz. nam pmo a non nūerabit b: qūquidē detracto a de b. per duodecimam primi a nūeraret binarium differētiam residuā maior scz minorem. qō est impossibile. neq; p idem nūerabit c. nam ipo substracto d c nūeraret differentiam c ad a. que cū sit binarius bis sumptus: si substrahatur ab illa dīa numerabit residuū dīam scilz dīe q̄ erit vnitas: maior scilz minorem: et numerus vnitatem. qō est impossibile. Ita quoq; pbabis e ⁊ f ⁊ reliquos intermedios eē primos ad a. nam si a nūeraret e: substraho e ab g. et q̄a a numerat g vt ostēsum ē/ ⁊ e per hypothesim numerum substractum: ergo per duodecimam primi numerat dīam e ad g: que ē ꝓstituta ex duobus binarijs. qō nuper mōstratum est impossibile. Siliter si numeraret f substraho f ab numero g: et residuus erit binarius vt notum est: ⁊ a numerat g ⁊ detractum f: ergo nūerat residuum qui est binarius maior minorem. qō est impossibile. Et ita ꝓba b nūerare g/ n/ s: sed intermedios oēs esse ad b pmos. et c nūerare l et s ⁊ inēmedios ad ipm esse primos. habebisq; ꝓsimili vbiq; argumentatiōe ꝓpositum. atq; ita habeē impares relictos q̄ post aliquē totoꝝ toti nonveniunt: oēs p tridecimā huiꝰ esse pmos.

26 ¶ Si ab vnitate impares coaccruētur: qui ꝓueniet erit quadratus.



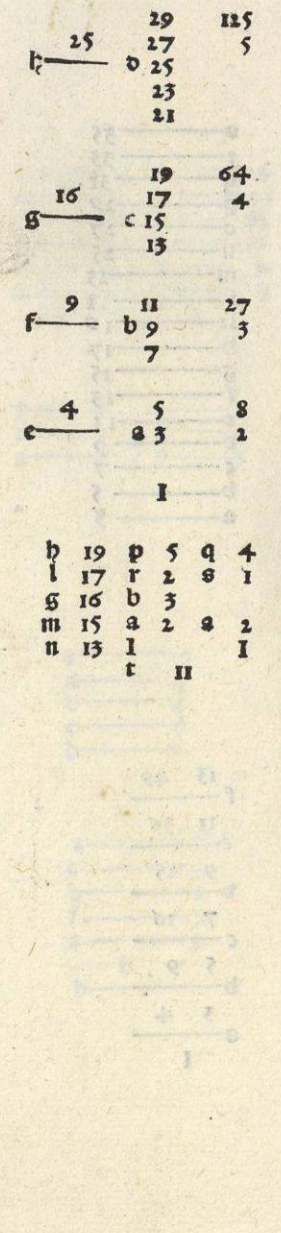
¶ Sit vnitas: ⁊ suo ordine ꝓsequētes impares a/b/c/d/e/f. dico vnitatem ⁊ a ꝓstituere quadratum. Item vnitatem a ⁊ b ꝓstituere quadratum: et vnitatem a b et c. et ita ꝓsequēter quotquot sil' aggregaueris. diuido enī a primum imparem in duas portiones vnitate distātes: et certū est maiorem distare vnitate ab vnitate ⁊ minorem vnitati eē equalem: quas vno ordine situo iuxta primam vnitatem certū est duos esse ordines ab vnitate sumptos vsq; ad duos vnitate distātes (vnitatem enī hic nomīe nūeri censemus) ergo per tricesimamtertiam sextivnitas ⁊ due ille portiōes aggregate ꝓstituūt quadratū. at due ille portiones equātur impari vnitatem sequēti. vnitas igitur ⁊ a impar sequens simul iuncta: ꝓstituūt quadratum. Item resoluto a in vnitatem ⁊ binarium: cum binarius sit dīa b ad a: b resoluēt per nonam huius in duas portiones: quaꝝ vna erit binarius/ ⁊ alta binario vnitate maior: id est equa a. q̄ cū prima vnitate statuātur vno ordine iuxta portiōes a. tūc erūt duo ordines ab vnitate ad nūeros vsq; vnitate distātes dispositi: ergo per eādem tertiam ⁊ tricesimam sexti illi simul aggregati ꝓstituūt

quadratum. at vnitas cū portiōibus b ⁊ portionibus a equatur vnitati a et b simul: igitur vnitas a ⁊ b sit aggregata ꝓstituūt quadratū. Sitq; si diuidas c in duas portiōes vnitate distātes: cū c supet b solo binario maior eiꝰ portio sola vnitate maior erit maiore portione b/ ⁊ minor eqlis maiori. statuā ergo eas iuxta portiones b. et tūc erūt duo ordīes ab vnitate vsq; ad nūeros vnitate distātes dispositi. ergo illi sit aggregati per eādem tricesimātertiam sexti efficient quadratum. at vnitas et ille portiones sit equāturvnitati a/b/ ⁊ c. igitur illa simul aggregata sititer ꝓstituūt quadratum. ⁊ ita de quolibet alio argumētabere: ordinādo portiones vnitate distātes vt inceptum est p duos ordines. Nā quia sequēs impar ab inferiore sp binario distat: ideo eius mior portio maiori inferiorīs equabit: ⁊ maior sequēti eādem inferiorīs maiorem vnitate supgredietur. sicq; clarum habebis ꝓpositū. Et ex hac cognoscit qō in tertio auditiōis phisice ex Pithagora adducit aristoteles suis quadratis ꝓsequēter adiūctos impares nunq; mutare spēm: sed sp q̄dratos relinq̄re. hincq; impares quadratoꝝ gnomonas appellari.

¶ Si pares ab vnitate sibi coaceruētur: coaceruatus ab oībus erit altera pte lōgior. 27

¶ Dispono pares ab vnitate a/b/c/d/e/f: ⁊ quotquot voluero: dicoq; a ⁊ b simul: eē altera pte lōgiorē et a/b/et c. sititer a/b/c/ ⁊ d. et ita ꝓsequēter. nam ipsos p equalia diuido: quoꝝ vnas medietates hinc et alias illinc ordino. et quia p decimāoctauam huius illi erant dupli numeroꝝ ab vnitate seriatim ꝓcedentiū: ordines illi abvnitate fm naturalem numeroꝝ seriem ꝓcedunt: ergo per tricesimāquartam sexti: duo prima media ⁊ duo secūda simul coaceruata ꝓstituūt altera parte longiorem. at illa equant a ⁊ b simul ⁊ p eādem tricesimāquartam duo tertia media cū medijs prius positis cōstituūt altera pte longiorem: et illa equātur a b et c: et ita ꝓsequēter. sicq; constat propositum.

¶ Si dispositis imparibus ab vnitate duo primi postvnitatem piūgant: ac post illos tres: post quos ꝯo quattuor sicq; deinceps scōm naturale numerorum augmentum: qui ꝓducētur erunt cubi. latusq; cuiuslibet ꝓiunctoꝝ imparium numerus. 28

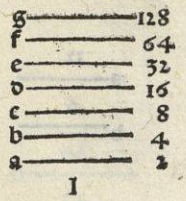


¶ Disponātur ab vnitate impares: pmo vnitas p se que est cubus ⁊ cubi eiꝰ: latus. deinde primi duo impares vt a. post quos tres sequētes p se vt b. post quos quattuor vt c. dehinc quinq;. postea sex. et ita ꝓsequēter fm naturale augmentū numeroꝝ dico duos pmos aggregatos facere cubum: cuius latus est numerus imparium: id est binarius. Sititer tres alios ꝓgregatos cōstituere cubum: cuiꝰ latus est nūerus illoꝝ imparīū piūctoꝝ. i. fnariꝰ. et ita deinceps. capio primo aliquē nūerum fm quē sumūtur impares ad cubum ꝓstituendū: sitq; pmo par vt c: cuius quadratus sit g. qz enī c per ꝓceptiōem totus est ab vnitate quota ps eius est vnitas: erit vt ipse et vnitas et omis infra eum numeri vt a et b tot sint numeri quot in ipso sunt vnitates. et cū numeri fm naturale nūeroꝝ augmentum sint capti: ipse totus erit parium quot sub ipso sūt impares vnitatem enī imparem voco: tot igitur impares sub eo sunt q̄t in eius dimidio sunt vnitates. disponātur ergo duo ordines ab vnitate: quoꝝ vnus terminetur in c/ ⁊ alter in b: sitq; b minor c vnitate. quia enim per tricesimamtertiam sexti illi simul aggregati ꝓstituūt quadratum: cuius latus est c. quidē quadratus positus est eē g ⁊ c ē par: quare p decimā huius/ ⁊ g eius q̄dratus est par. Et hinc q̄q; euenit vt medietas c cū b ⁊ inferiorīs b sit tanq; medietas q̄drati g. ideo quot vnitates in b et inferiorīs eius et dimidio tot erūt impares vsq; g: q; numeris p ordinē dispositis q̄libet par tot impares sub se hēat: quot in eius medietate ꝗtinet vnitates. Sumo item tot impares vltra g: quot sunt vnitates in reliqua medietate c: sitq; vltimꝰ h. erit ergo h totus imparium ab vnitate quot vnitates sunt in c ⁊ in inferiorīs eius: sed prius sumptorum imparium vltīm vt k totum abvnitate eē manifestum est. erit igitur k idem cū h. et qm̄ imparium fm se sumptoꝝ medietas est supra g sumpta: reliqua medietas erit infra g locata. et q̄a g per scōdam primi duoꝝ circūstantium ꝓximorū est medietas: vt in figuratiōe l et m. et per eādē duoꝝ alioꝝ: vt h et n medietas. et ita quot q̄t fuerint. ergo adiuuantevn decima primi euenietvt numerus ex illis imparibus aggregatus sit tanq; numerus ex c imparium nūero in g ꝓductus. erit igitur ꝓductus ex illis imparibus cubus atq; nūerus imparium latus eius. qō est ꝓpositū quo ad hoc. Sit scōo b numerus impar aliquoꝝ imparium fm quem ꝓstituēdus est cubus: cuius quadratus sit f. quia enī b est impar: igitur pvndecimam huius ⁊ f est impar. diuido enī f in duas portiones inequales ⁊ vnitate distātes p decimānonā huius quaꝝ maior sit p/ et minor q. quia enī f numerus impar supfluit fm numeroꝝ seriem absq; pari hinc fiet vt quoties vnitas in p totus imparium sit f ab vnitate: et quoties vnitas in q tot sint pares sub ipso. cōstituo itaq; duos ordines: primum ab vnitatevsq; b/ et scōm abvnitatevsq; a. sitq; b maiorvnitate a. et intelligo b diuisum in duas partesvnitate distātes: qz est impar. quaꝝ maior sit r/ et minor sit s. per tricesimātertiam sexti: illi aggregati ꝓstituūt quadratū: cuius latus est b. ille aūt quadratus positus est f. quare adiuuāte eadem a cū suis inferiorīs ⁊ r maiore portione b: tot cōtinent vnitates: quot ⁊ continētur in p. sunt igitur tot impares supra f: quot vnitates in s. sit ergo vltimus t. quia enī f totus erat imparium ab vnitate quot sunt vnitates in a in inferiorīs ⁊ in r. ergo t totus est imparium ab vnitate: quot sunt vnitates in b ⁊ in oībus suis inferiorīs. sed ⁊ sumptoꝝ imparium vltimus totus erat ab vnitate. q̄re t est illoꝝ vltimus. numeri igit b: assignatoꝝ imparium tot sunt supra f quot infra eritq; f illoꝝ medius. oēs igitur per idem qō prius cū f ꝓnumerati: erunt tm̄/ q̄tum ipse per numerum oīm: id est b multiplicatus. et qm̄ b in se ꝓducit ipm f/ manifestum est b in ipm ꝓducere cubum: cuius latus est ipse b numerus assignatoꝝ imparium. sicq; totum constat propositum.

¶ Numeri ab vnitate dupli: sunt pariter pares tantum. 29

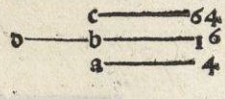
¶ Ordinētur abvnitate oēs ꝓsequēter dupli: dico eos oēs esse pariter pares. et nullos preter eos esse pariter pares. cum eī duplus vnitate sit binarius qui est par/ ⁊ secūdus illoꝝ numeroꝝ ab vnitate

ꝓportiõaliũ:ꝑ vicesimam huius oẽs alij sunt pares.et cũ binarius scõs ab vnitate sit nũerus ꝑmus: ergo per vicesimãsextam quarti quicũq assignabiť eo facto vltimo:nullus iꝑm numerabit nisi aliqs in ordine illoꝝ parium ãncedẽtiũ positus.quare cũ quilibet erit par quẽ nullus impar ꝑter vnitatem nũerat:ꝑ diffinitiõem ꝗlibet eoꝝ erit pariter par.at ꝙ nullus ꝑter eos sit pariter par pz.nam si detur alius:diuidať per mediũ:et eiꝰ medietas ꝑ mediũ.et ita donec occurrat ꝗ nõ possit ãplius diuidi. qui si fuerit impar qm̃ ꝑ vicesimãtertiam ꝑmi nũerabit extremũ:non erit nũerus datus pariter par/q̃lis ponebatur.si aũt fuerit vnitas:qꝛ eius duplum fuit binarius:ipse erit de numeris abvnitate duplis.



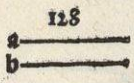
30 ¶ Si pariter par in pariter parem ducatur:ꝓducetur pariter par.

¶ Sint a ⁊ b duo numeri pariter pares:ducaturq alter in alterum ⁊ ꝓueniat c.dico c esse numerum pariter parem. Nã si c non sit pariter par:numeret ergo eum quicũq impar si possibile est qui sit d.qꝛ ergo d impar numerat c ꝓductum ex duobus a ⁊ b in se ductis:ergo per quitam tertij d impar cõicat cum altero a aut b.numerabit ergo cõiter quicũq numerus:d ⁊ a aut b.qui ꝗa d ponitur impar: per decimãtertiam huius erit impar.numerabit igitur impar a aut b numerum scz pariter parem.qõ est impossibile.non igitur c numerabiť ab impari:qui cũ per duodecimam huius sit par: ꝑ diffinitiõem constat iꝑm esse pariter parem.quod est propositum.



31 ¶ Quicunq numerat pariter parem:ipse quoq est pariter par.

¶ Sit a pariter par:quẽ numerat b quicũq numerus:dico b esse numerum pariter parem. nam si b esset nũerus impar cũ positus sit numerare a:non eẽt a nũerus pariter par.quod ẽ ꝓtra hypothesim. erit igitur b numerus par:qui si non fuerit pariter par numerabit eum aliquis impar.quare ⁊ idem impar ꝑvicesimãtertiam ꝑimi numerabit a numerum pariter parem.qõ est impossibile.manifestum est ergo nullum imparem numerare b.quare per diffinitionem est pariter par.



32 ¶ Si sumãtur quotlibet nũeri pariter pares ab vnitate ꝓcedentes:oẽs ⁊ vnitas cum eis coacceruata numerum ꝓximo pariter pare:vnitate minorem efficient.

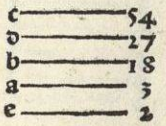
¶ Sit vnitas:⁊ a/b/c/d/e ordine,ꝓcedẽtes pariter pares:dico ꝙ vnitas a b c d sit aggregata ꝓstituũt numerum vnitate mĩorem e.nam ꝑ vicesimãnonam huius quilibet sequẽtiũ est duplus ꝓcedẽtis:q̃re sequens est tanq̃ ꝓcedens duplicatus. At a secũdus ab vnitate supat eã vno:quare vnitas ⁊ a minus sunt vno q̃ ipse a duplicatus,ergo minꝰ vno q̃ b.quare vnitas a ⁊ b minus vno q̃ b duplicatus:ergo q̃ c.q̃re vnitas a b et c minus vno q̃ d.q̃re itez vnitas a/b/c/et d simul minus vno q̃ e.qõ est ꝓpositũ.

33 ¶ Omnis numerus cuius medietas est impar:est pariter impar.

¶ Sit numerus par a:cuius medietas sit c numerus impar ⁊ b binarius:dico a eẽ numerum pariter imparem.nam ꝗa c est medietas a:ergo b binarius numerabit a scõz se.dico rursum ꝙ quicũq alius par numerabit a scõm imparem iꝑm numerare.et esto vt e alius par iꝑm numeret scõm d:dico d esse imparem.nam ꝗa qõ sit ex d in e est a/et qõ ex b in c siliť est a:ergo ꝑvicesimãquitam secũdi q̃ ꝓportio d ad b ea est c ad e.ergo ꝑmutatim que d ad c:ea est b ad e.at cũ oĩs numerus par alius a binario fiat cõtinue addẽdo binarium ꝑmo ad binarium ⁊ deinde ad suũ ꝓcedentem:binarius ergo oẽm parem numerat.b ꝗ numerabit e:quare ⁊ d numerabit imparem c.est ergo d per decimãtertiam huiꝰ impar. quicũq ergo par numerat a scõm imparem eum numerat:quare ꝑ diffinitiõem a est pariter impar. quod est propositum.

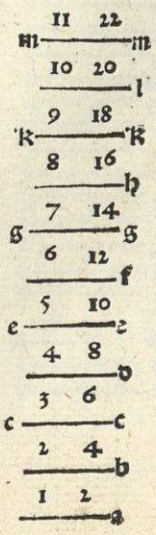
34 ¶ Si impar in numerum pariter imparem ducatur:qui ꝓueniet erit pariter impar.

¶ Sit a numerus impar;b ꝛo pariter impar:et c numerus,ꝓductus ex a in b.dico c eẽ numerum pariter imparem:sit enĩ d medietas c cũ c per duodecimam huius sit par/⁊ e binarius.ꝗa e in d facit c ⁊ siliter a in b facit eũdem c:ergo ꝑ vicesimãquintam secũdi que ꝓportio e ad a:ea est b ad d.quare permutatim que ꝓportio e ad b ea est a ad d.sed e binarius impariter est in b:cũ b sit pariter impar.ergo et a impar est impariter in d. nũeratq a nũerum d scõm imparẽ. ergo ꝑ vndecimam huiꝰ d est impar et c per ꝓcedentem:cũ eius medietas d sit impar:erit pariter impar.quod est propositum.



35 ¶ Numeris paribus ab vnitate dispositis tertius a ꝑmo:atq ab illo tertius: vno q̃q intermisso oẽs a ꝓius sumptis tertij:sunt pariter impares tm̃.

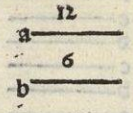
¶ Continuẽtur pares ab vnitate:sintq a/b/c/d/e/f/g/h/k/l/m:et sic ꝓsequẽter.dico tertiũ c:⁊ ektiũ ab illo:et g rursus ab hoc tertium ⁊ ita deinceps vno ꝑ intermisso eẽ pariter impares. Nã ꝑ decimã octauam huius illoꝝ parium medietas sunt numeri ab vnitate naturali ordine dispositi: quoꝝ vnus est par/⁊ alius impar alternatim positi.ꝓimi ergo parium.i.binarij qm̃ medietas eius ẽ vnitas que potẽtia ẽ impar: erit ⁊ potẽtia pariter impar.secũdus ꝛo ab eo nõ erit pariter ĩpar:qꝛ eius medietas est par. At c tertius ⁊ quitꝰ ⁊ septimus ⁊ nonus erũt pariter impares per penultimam huius cũ eoꝝ medietates sint impares.qõ est ꝓpositum quo ad hoc. Neq alij pares quicũq erũt pariter impares: qꝛ eoꝝ medietates sunt pares sicq par vt binarius eos scõm parem numerabit: quare ꝑ diffinitiõem non erunt pariter impares.quod est totum propositum.



36 ¶ Numerorum pariter imparium continue sumptorum:equales sunt differentie.

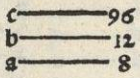
¶ Hoc enĩ ideo est ꝙ si oẽs pares ꝓtinue sumanť:erit oĩm illoꝝ eadem dꝛia.nã binarius.Sũptis igiť ꝑm exigẽtiam ꝓcedẽtis paribus ⁊ ꝓtinue pariter impares vno intermisso:erunt per ꝓceptiõem eoꝝ differẽtie ex differẽtijs ipsoꝝ ad medios composite:quaꝝ cũ media sint equalia/⁊ tote per ꝓceptiõem erunt equales.quod est propositum.

¶ Numerus a duobus non duplus cuius medietas est par: est impariter par. 37



¶ Sit a ḋlibet nũerus par: cui⁹ medietas b sit par: et non sit a de nũero duplorũ ab vnitate sumptor. dico a esse numerum impariter parem. Nam cũ eius medietas b sit par: non est pariter impar. ⁊ cum nõ sit de numero duplorum ab vnitate sumptor: ergo per vicesimãnonam huius non est pariter par. a sufficienti igitur diuisiõe est impariter par. qõ est ꝓpositum. Sed ⁊ ostẽsiue sic. cũ medietas a sit par/ et binarius nũerus par scõm eam ipm numeret: per diffinitiõem a: non est nũerus pariter impar. sed et cum non sit de numero duplorũ ab vnitate sumptor si ipse in duo media diuidatur: ⁊ media iter in media. in hac ꝯtinua diuisiõe necesse ẽ aliud ab vnitate occurrere: qõ diuisionem in duo media sistat. quare numerus ille erit impar. et qꝛ ille est pars partis: ergo p vicesimãtertiam primi est ⁊ ps totius. quare per decimãquintam huius ille impar totũ scõm parem numerabit. at cũ par ipm scõm parem numeret: ergo per diffinitionem a totus: est impariter par. quod iter est propositum.

¶ Ex ductu pariter paris in impariter parem: pucnit impariter par. 38



¶ Sit a numerus pariter par: ducatq; in b impariter parem ⁊ pueniat c. dico c esse nũerũ impariter parem. Nam p hypothesim a numerus par numerat c scõm b qui est par. et qꝛ impar numerat b cum sit impariter par: idẽ impar p vicesimãtertiam pmi numerabit c. et non nisi scõm parem: alioquin per vndecimam huius c eẽt impar. cõstat ergo p diffinitionem: c esse impariter parem. et propositum.

¶ Dis impariter par fit ex pariter pare in parit imparem. Quo fit vt oẽm impariter parem: numeret pariter par impariter. 39

¶ Sit a quilibet nũerus imparit par: dico ipz fieri ex pariter pare in pariter imparem. nã medietas a ẽ par. alioquin a esset pariter impar. esto itaq; b medietas a: si medietas b sit impar: ḋ b p tricesimã tertiam huius est pariter impar. et cũ binarius numeret a ꝑm b cõstat pariter parem numerare a ꝑm pariter imparem. at si b medietas impariter paris a/ sit par: sit ea d cuius quidẽ medietas sit impar. Ideo d per tricesimãtertiam huius erit pariter impar. et p vicesimãtertiam primi numerabit a. sitq; hoc ꝑm e: et sit c binarius. qꝛ b nũerat a ꝑm c: et d nũerat eũdẽ scõm e: ergo p vicesimãquintam scõi q̃ poꝛtio b ad d ea est e ad c. sed b est duplum d: igit ⁊ e duplũ c. quare per decimãoctauam huius e est pariter par: ⁊ numerat a ꝑm d pariter imparem. ꝯstat ergo iter ꝓpositũ. et si tertius nũerus primum diuisione facta occurreret pariter impar: accepto penultimo parium loco b/ ⁊ eius dimidio loco d ⁊ e loco c: per eãdem vicesimãquintam secũdi ꝯcludes ꝓpositum. et vniuersaliter quoties hec subdiuisio fiet: toties fiat ab vnitate parit pariũ duplatio. et sumpto penultimo parium cũ suo dimidio p tricesimãtertiam huius ⁊ vicesimãquintam scõi ꝯsilit ꝯcludes ꝓpositum. Corrolariũ patet accepta medietate pariter imparis ⁊ duplo parit paris: quidẽ pariter par cũ pariter impare nũerabat impariter parem adiuuante sp vicesimaquinta secundi.

¶ Si disponãtur in longum pariter pares: ⁊ in latum pariter impares: qui scõm angulares cõuentus ꝓducũtur: sunt impariter pares tm. et ipor in longitudine quidem est similitudo ꝓportionum: in latitudine vo differẽtiarum equalitas. 40

Longitudo

¶ Continue proportionales.

26	52	104	208	416	832	1664
22	44	88	176	352	704	1408
18	36	72	144	288	576	1152
14	28	56	112	224	448	896
10	20	40	80	160	320	640
6	12	24	48	96	192	284
	2	4	8	16	32	64
	b	c	d	e	f	

¶ Pariter pares.

Latitudo — ¶ Pariter impares: m l k h g

Longitudo

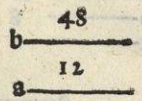
¶ Thorũ equales sunt differentie

¶ Disponãtur b/c/d/e/f parit pares ꝑm longum: ⁊ g h k l m: pariter impares scõm latum Dico pmo qui ꝓducũtur ex b in g/h k l m ⁊ ex c in eisdem: ⁊ silliter ex d/e ⁊ f in eisdẽ: esse impariter pares ⁊ solos tales. nam oẽs illi fiunt ex ductu pariter paris in pariter imparem. ḋ per tricesimãoctauam huius quilibet eor est impariter par. et si alius esset impariter par ꝓter eos d̃ ex illis parit paribus ꝑm suã sertẽ ordiãtis ⁊ pariter imparib⁹ ꝓducũtur: ille nõ fieret ex pariter pare in pariter imparem. qõ per pcedentem est impossibile. ratum est ergo qõ dicitur. ¶ Secũdo dico oẽs in lõgitudine vt oẽs in linea g ⁊ oẽs in linea h: ⁊ ita de reliquis/ eẽ ꝯtinue ꝓportiõales. nam d̃a b binarius pmus pariter parium ducit in g: manifestũ est scõm in linea g: qui inde ꝓducitur esse duplum ad g: ⁊ in ꝓportiõe c ad b. sed ⁊ qꝛ b in g facit scõm ab ipo g et c in g facit tertium: ergo p octauam secũdi q̃ ꝓportio c ad b ea ẽ tertij ad scõm. et ita ꝯsiliter ostẽde de reliquis p octauam secũdi adiuuãte vicesima nona huius que b/c/d e f continue proportionales eẽ demõstrat. Et ex hoc demõstrare prõptum est pervicesimãsextam secũdi qõ fit ex ductu vnius medior in se: tm esse q̃tum qõ fit ex ductu circũpositor vni⁹ in alterũ. et p vicesimãquitam eiusdẽ quod fit ex ductu vnius medior in alium: tm esse q̃tum quod fit ex ductu circũpositor ⁊ equalit ab eis distãtium vnius in alterum. ¶ Tertio dico oẽs numeros ꝑm latitudinem in vnaquaq; linear ab g incipiẽtes et ad m in latum euadentes: equales hr̃e differẽtias. q̃ enĩ in prima linea que est pariter imparium dr̃ie ꝯtinue sint equales: statim per tricesimãsextam huius est cognitũ. Sz q̃ secũde linee numeror eq̃les sint differẽtie/ declarat. nam p nonam primi tm est qõ fit ex b in g ⁊ in differentia h ad g q̃tũ quod fit ex b in h. addit igit qõ fit ex b in h secũdus scz impariter parium secũde linee sup eo quod fit ex b in g

pmo scz imparitter parium eiusdem linee:tm̃ ꝗtum est quod fit ex b in differẽtiam g ad h.et quia itez per eandem nonam primi tm̃ est quod fit ex b in h ⁊ in differentiam k ad h:ꝗtum qd̃ fit ex b in k.addit igitur qd̃ fit ex b in k sup eo qd̃ fit ex b in h scz tertius imparitter parium sup secũdum:ꝗtum est qd̃ fit ex b in differẽtiam k ad h.sed differẽtia k ad h tanta esse ꝓbata est:ꝗta differẽtia h ad g.est igit eq̃lis dr̃ia illoꝝ imparitter parium.⁊ ita ꝓsequẽter p nonam de reliquis expedies.Et ex hoc facile demõstrabile est p scdam pmi q̃ q̃libet illoꝝ duplatus tm̃ est:ꝗtum duo circũpositi ꝓiũcti.et p tertiaz eiusdem primiq̃ duo medij ꝓiũcti tm̃ sunt:ꝗtum circũpositi/et equali inkuallo ab eis distãtes pariter accepti.

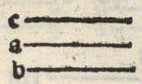
41 ¶ Quẽcunq̃ numerat imparitter par:idem etiam est imparitter par.

¶ Sit a quicũq̃ nũerus imparitter par:qui numeret b.dico b esse imparitter parem.Nam quia a par numerat b:ergo per duodecimam huius b erit par.quo fit vt quoties a numerat b: toties medietas a numeret medietatem b.sed medietas a cũ sit imparitter par est par. igitur p duodecimã huius ⁊ medietas b est par.sed ⁊ aliq̃s impar numerat a numerum imparitter parem:igitur idem numerabit b p vicesimãtertiam primi.est igitur b per diffinitiõem numerus imparitter par.quod est propositum.



42 ¶ Si pariter impari imparitter par:siue pariter par sup binarium ꝓiũgatur: ꝓpositus erit pariter impar.

¶ Sit a quicũq̃ pariter impar:cui adiũgat̃ b quicũq̃ imparit̃ par aut pariter par sup binariũ: sitq̃ c compositus.dico c esse pariter imparem.nam qꝛ a est pariter impar:eiꝰ medietas est impar.et quia b est imparitter par:per tricesimãseptimam huius:eius medietas est par.medietas igit̃ b ⁊ medietas a simul p scdam huius ꝓstituũt numerum imparem.at numerus ex medietate a ⁊ medietate b ꝓstitutus:est medietas compositi c.igit̃ per tricesimãsextam huius c est pariter impar.⁊ ita argumẽtabere si pariter impari additur numerus pariter par sup binarium.quod est propositum.

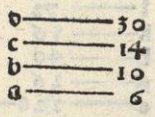


43 ¶ Si pariter impares nũero pares ꝓiũgant̃:ꝓpositꝰ erit pariter par vl̃ imparit̃ par.

¶ Nam quia cuiuslibet illoꝝ medietas est impar:per quartam huius compositi medietas erit par. non est igitur compositus per tricesimãtertiam huius:pariter impar.quare a sufficiẽti diuisione erit aut pariter par/aut imparitter par.quod est propositum.

44 ¶ Si pariter impares numero impares coniũgant̃:componetur pariter impar.

¶ Nam quia cuiuslibet illoꝝ pariter imparum medietas est impar/et sunt in numero impari:igitur per quintam huius illoꝝ medietates coaceruate ꝓstituũt numerum imparem. ꝓpositi igit̃ medietas est impar.ergo per tricesimãtertiam huius:compositus est pariter impar.quod intenditur

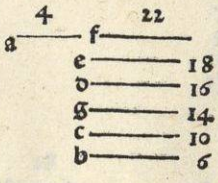


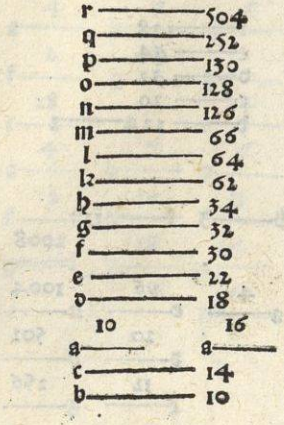
45 ¶ Si diuersi pariter pares q̃libet supra binarium sibi coaceruẽtur:ex ipis cõstitutus erit imparitter par.

¶ Sint a/b/c/d quotlibet nũeri parit̃ pares supra binarium ⁊ d maximus:sitq̃ e duplus ad d:sitq̃ f ꝓpositus ex a/b/c/d.dico f cẽ imparitter parem.nam q̃a a b c d sunt pares: p primam huius f est par. et qꝛ sunt a b c d pariter pares supra binarium:eoꝝ medietates sunt numeri pares.addite ergo simul per primam huius ꝓstituũt parem.et qꝛ p tricesimãscdam huius a/b c d simul aggregati minus sunt ꝗ e:ergo f est minoꝛ e.at e est pmus pariter par post d:igitur f non est pariter par.et cum eius medietas sit par:ergo per tricesimãseptimam huius:est imparitter par.quod est propositum.

46 ¶ Pariter impares ꝓm datũ nũerum parem inuenire:qui ꝓiũcti faciãt parit̃ parem.

¶ Sit primo a nũerus par ꝓm quem iubemur parit̃ impares tales qui ꝓponũtur inuenire:q̃ ⁊ idem a sit pariter par.quot ergo sunt vnitates in a:tot ꝓtinuo pariter impares ab vnitate quoꝝ medietas sit b c:sitq̃ d ꝓximus ascẽdendo pariter par.et si inter c ⁊ d sit itez aliq̃s pariter impar:circa d hinc ⁊ inde sumo pariter impares ꝓm dimidium a:itavt oẽs sint sumpti ꝓm numerum a. sintq̃ inferiores:c g/et superiores e f.quia enĩ d est par/⁊ nõ est parit̃ impar:per tricesimãquãtam huius ꝓximi pares hic ⁊ inde g ⁊ e sunt pariter impares.quare ⁊ g c equalit̃ distant a nũero d.et qꝛ similiter p eãdem vno pari inꝓposito post e scq̃tur f:⁊ vno interposito post g seq̃tur c.etiã equidistabũt hic ⁊ inde c ⁊ f ab numero d.ergo p scdam pmi g ⁊ e simul sunt duplum pariter paris d.quare p vicesimãnonam huius g ⁊ e simul sunt pariter par.et p eãdem scdam primi c ⁊ f simul:sunt duplum d eiusdez pariter paris.sunt igitur pariter impares simul sumpti ꝓm numerum a scz g/e/⁊ c f quadruplum d:⁊ duplũ duplo ad d.quare perviceſimãnonam huius c/g/e/f simul sunt parit̃ par siue sunt tm̃ ꝗtum qd̃ fit ex a pariter pare:in d pariter parem.quare p tricesimam huius:q̃ inde ꝓducitur est pariter par.quod itez est propositum: quo ad hoc.At si a non sit pariter par:capio quẽcunq̃ numerum pariter parem vt a alterũ:quivltro/citroq̃ hẽat pariter impares:vt b/c/d/e.et sumo duplum a:q̃ sit g.qui etiã per vicesimãnonam huius est pariter par.sintq̃ f/h sui circũpositi pariter impares.deinde capio l duplũ g: qui etiam est pariter par.⁊ k/m circũpositos pariter impares.similiter capio o duplum l ⁊ circũpositos pariter impares n/p et hoc toties eoq̃ vsq̃ fiat quousq̃ habeamus pariter impares acceptos ꝓm numerum datum a:quos quia hic totiẽ accepi dico numerum ex b/c/d/e/f/h/k ⁊ ceteris sumptis pariter imparibus:ꝓpositũ esse pariter parem.et sit q pariter par acceptus duplus ad o.quia enĩ per scdam primi c d simul:sunt ꝗtum g duplum a.et etiam per eãdem b e:ꝗtum g duplum a.igitur c/d/⁊ b/e simul:ꝗtum l duplũ g. sed per eandem scdam primi f h ꝗtum l duplum g.ergo b/c/d/e/f/h:ꝗtum o duplum l.sed k m:ꝗtum o duplum l p eãdem scdam.igitur b/c d e f h k m:ꝗtum q duplum o.sed ⁊ per eãdem scdam n p ꝗtum q duplum o.igitur b/c d e f h k m n p simul:ꝗtum duplum q.qui perviceſimãnonam huius est pariter par.sicq̃ constat propositum.





m——64
l——34
h——32
k——30
g——18
e——16
f——14
a——6
d——10
b——8
c——6

¶ Scōm datum parem: pariter impares sumere: q̄ impariter parem ꝓiuncti ꝓstituāt. 47

¶ Sit a datus numerus par fm quē iubear sumere numeros pariter impares: qui ꝓiuncti ꝓstituant numerum impariter parem. sumo b/e h/ ꝓtinue numeros pariter pares post binarium fm medietatē nūeri a circa quos sint c d f g k l circūpositi pariter impares. dico c d f g l: l parīt impares fm nūerū a sumptos: simul iunctos ꝓstituere numerum ipariter parem. et sit m duplum h qui etiā p vicesimam nonam hui⁹ est pariter par. quia enī per secūdam p̄mi c d simul sunt tm̄ q̄tum e duplum b: et p eandē f g q̄tum h. et l: l q̄tū m. erūt c d f g l: l sit q̄tum tres pariter pares c h m ꝓtinue sumpti post binariū. at e h m simul p quadragesimam quintā huius ꝓstituūt impariter parem: igitur et c d f g l: l simul. qō est propositum.

¶ Impariter pares quotlibet reperire: qui cocceruati faciant pariter parem. 48

¶ Sit p̄mo a nūerus datus par fm quē ꝓpositū est impariter pares repire: qui coaceruati ꝓstituant pariter parem: inuenio p q̄dragesimāsextam hui⁹ totidem parīt impares q̄ coaceruati ꝓstituāt nūerū pariter parem: qui sint b c d e. et duco aliquē pariter parem in quēlibet eoꝝ: ⁊ ꝓueniāt f g h l: totidem qui p tricesimāoctauā huius erūt parīt pares. at p nonam p̄mi idē est qō fit ex illo parīt pare in b c d e: et in ꝓpositum ex b c d e. at cōpositum ex b c d e per hypothesim est pariter par: ergo p tricesimam huius quod fit ex pariter pare in b c d e est pariter par. illud aūt est cōpositū ex impariter paribus f g h l: fm datum nūerū inuētis. est igitur effectū qō ꝓponebat quo ad hoc. ¶ Sit secūdo vt a sit impar scōm quem ꝓpositum sit reperire impariter pares qui cōstituūt pariter parem sumo per immediate mōstratū impariter pares scōm parem minorem vno a: qui aggregati ꝓstituāt pariter parem: sintq̄ b c. sitq̄ d pariter par ex b c coaceruatus. sumo f tertiū pariter parem ab ipo: e quidē medio parīt pare inꝓposito. et qꝝ differētia f ad d cōstat ex differētia d ad e q̄ est d pariter par ⁊ differētia e ad f que est e pariter par: cum sp sequens sit p̄cedētis duplus. ergo p quadragesimam quītam huius dēia f ad d est impariter par. sit ergo dēia illa g. dico ergo b c g eē impariter pares qui petūtur. nam b c simul sunt d quibus additus impariter par g tm̄ facit sicut f. nam erat differētia d ad f. at ꝓo f est nūerus pariter par. constat ergo totum propositum demōstratum.

a——3
f——128
e——64
d——32
g——96
c——20
b——12

¶ Ex dato nūero: imparīt pares ex quibus ꝓiūctis impariter par efficiat̄ inuestigare 49

m——104
l——72
k——56
h——40
g——26
e——22 a——4
d——18
c——14
b——10
f——4

¶ Sit p̄mo datus nūerus par qui sit a scōm quem iubemur impariter pares inuestigare: qui ꝓiūcti ꝓstituāt impariter parem. inuenio totidem pariter impares p quadragesimāsextam hui⁹ qui cōiūcti ꝓstituāt pariter parem: sintq̄ b c d e. capio g ꝓxīm pariter imparē post e. qui qꝝ solo quadrario distat ab e: manifestū est b c d g simul plus eē pariter pare b c d e simul ⁊ minus duplo b c d e simul. quare p vicesimānonam huius: aggregatus ex pariter imparibus b c d g nō est pariter par. et cū p primā hui⁹ sit par: idem erit a diuisiōe aut pariter impar aut impariter par. duco ergo f nūerum quēcunq̄ parīt parem in b c d g: ⁊ ꝓueniāt h l: l m: totidē quot vnitates in a: qui p tricesimāoctauam huius sunt impariter pares. at aggregatum ex h l: l m tm̄ est q̄tum qō fit ex f in b c d g simul p nonam primi. at si b c d g simul sunt pariter impar: p tricesimāoctauam huius: aggregatus ex h l: l m erit impariter par. et si b c d g sit impariter par: idem accidet p quadragesimāprimā huius: licq̄ sp habebitur ꝓpositū. At ꝓo si a sit numerus impar: sumo totidem pariter impares: qui aggregati p quadragesimāquartā huius erunt parīt impar. quos multiplico per quēlibet pariter parem: ⁊ ꝓueniēt totidem impariter pares p tricesimāoctauam huius. et qꝝ ipi impariter pares simul tm̄ sunt q̄tum quod fit ex illo parīt pare in aggregatum ex pariter imparibus qui monstratus est pariter impar. ergo per tricesimānonā erit aggregatus ex impariter paribus impariter par. quod est propositum.

¶ Quotlibet impariter pares: ⁊ pariter pares sup binarium: sil' iuncti: pariter parem vel impariter parem component. 50

¶ Nam oīm medietates pares sunt. at ipe simul: ꝓpositi medietatem ꝓstituūt: ergo p primam huius compositi medietas est par. non est igitur compositus pariter impar. a diuisione ergo aut est pariter par/ aut impariter par. quod intendebatur.

f——128
e——64
d——32
c——20
b——12 a——2

¶ Pariter pares ⁊ ipariter pares q̄tlibet inuestigare: q̄ ꝓiūcti parīt parem cōstituāt. 51

¶ Sit a numerus datus scōm quē debemus aggregare pariter pares ⁊ impariter pares qui ꝓstituāt parīt parem. capio totidē imparīt pares qui p quadragesimāoctauā huius simul cōgregati cōstituāt pariter parem: sintq̄ b ⁊ c. et sit parīt par quē ꝓstituūt d. capio totidem ꝓtinue parīt pares supra d q̄ sint e ⁊ f: certū est e esse duplum d et f duplum e. dico ergo impariter pares b c/ ⁊ totidē pariter pares d ⁊ e simul ꝓstituere pariter parem. Nam qꝝ b c simul ꝓstituūt d: ergo b c ⁊ d simul ꝓstituūt e duplū d sed et per idem b c d et e simul cōstituent f duplum e. at f est pariter par: igitur totidem pariter pares et totidem impariter pares quota ꝓstituūt pariter parem. quod est propositum.

b——3 f——128
2008
l
4 96 1004
a e h
20 502
d h
12 256
c g

¶ Scōm datū numerum pariter pares reperire: qui cū quotlibet impariter paribus numerum impariter parem constituant. 52

¶ Sit datus nūerus a: scōz quē iubeamur reperire pariter pares: qui cū quotlibet imparīt paribus vt sumptis scōm b ꝓstituant numerum impariter parem. sumo p̄mo p quadragesimāoctauam huius impariter pares scōm b qui sit ꝓstituāt pariter parem: sintq̄ c d e ⁊ ꝓstituant f pariter parem. ⁊ sumo pariter pares post f scōm a nūerum datū q̄ sint g h l: l quos dico cū impariter paribus c d e ꝓstituere impariter parem. nam qꝝ c d e ꝓstituūt f: ergo c d e ⁊ f ꝓstituūt g duplū f. et c d e f ⁊ g nūerum h duplū g. ergo c d e ⁊ g plus ꝓstituūt q̄ duplum f: ⁊ minus q̄ duplū g. et ita argumētabere ꝓsequēter c d e et h

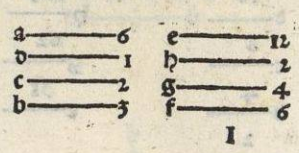
plus ꝓstituere q̃ duplũ g ⁊ minus duplo h. et similiꝑ c d e g ⁊ l: plus ꝓstituere duplo h et minus duplo l: sicq; deinceps. quare c/d e g h l: l simul p vicesimãnonam huius non ꝓstituẽt pariter parem. ergo p quinquagesimam huius c d e g h l: l simul ꝓstituũt impariter parem. quod est propositum.

53 ¶ Omnis numerus primus: est diminutus.

¶ Nam oĩs numerus solam partem habet vnitatem: que vt certum est minus eo ꝓstituit. est igiꝑ oĩs talis per diffinitionem diminutus. quod est propositum.

54 ¶ Quilibet pariter par: diminutus esse ꝓbatur.

¶ Nam per vicesimãnonam huius oĩs talis est de duplis ab vnitate sumptis: quẽ p vicesimãsextam quarti nullus nũerabit nisi aliq̃s in illo ordine sumptus. at p tricesimãsecũdam huius oẽs in illo ordĩe sit aggregati p̃cedẽtes min⁹ illo ꝓficiũt. cõstat igiꝑ p diffinitiõem illũ esse diminutum. qõ est ꝓpositũ.



55 ¶ Oĩs quem numerat numerus aut abundans aut perfectus: vt abundet necesse est.

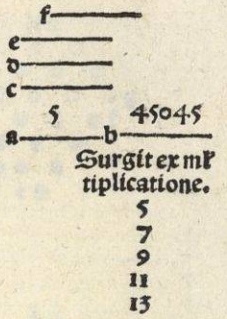
¶ Sit a nũerus pfectus aut abũdans: habẽs tres ꝑtes b c d easdẽq; scõdam/tertiã/⁊ sextam: ducaꝑq; a in quẽcunq; numerum vt in c ⁊ pueniat e. erũt ꝓsiles tres ꝑtes q̃ sint f g h. eedẽq; scõda tertia sexta. quia q̃ ꝓportio b ad a ea est f ad e: ergo pmutatim b ad f vt a ad e. Itẽ c ad a vt g ad e: ergo pmutatim c ad g vt a ad e. Itẽ d ad a vt h ad e: ergo ⁊ pmutatim d ad h vt a ad e. erunt ergo tres numeri b c d ad totidem f g h in eadẽ ꝓportiõe vt que est a ad e. ergo p vicesimam secũdi b c d simul ad f g h simul sũt in eadem ꝓportiõe q̃ a ad e. tunc sic. b c d simul ad f g h simul vt a ad e: ergo pmutatim b c d simul ad a vt f g h simul ad e. ergo si b c d simul abũdat sup a: et f g h siꝑ abũdabit sup e. et si b c d ꝓiũcte pficiunt a: itidem ⁊ f g h ꝓiũcte pficiẽt e. at si f g h ꝓiũcte pficiũt e: cum e p ꝓceptiõem habeat aliam partem ab ipso denoĩatam que est vnitas: ea sicdẽ ꝑdict⁄ adiuncta facit totum abũdare sup e. erit igiꝑ quicũq; talis quem numerat aut abundans aut pfectus: abundans. quod est propositum.

56 ¶ Quicunq; perfectum numerat: est diminutus.

¶ Nam si is qui numerat pfectũ diminutus non sit: a diuisione erit aut pfectus aut abũdans: qui si est pfectus aut abũdans p ꝑceedentem ille quẽcunq; nũerat est abũdans at ponitur pfectus. non est igitur perfectus aut abũdans. relinquiꝑ igiꝑ quẽadmodum ꝓponitur eẽ diminutus. qõ est ꝓpositũ.

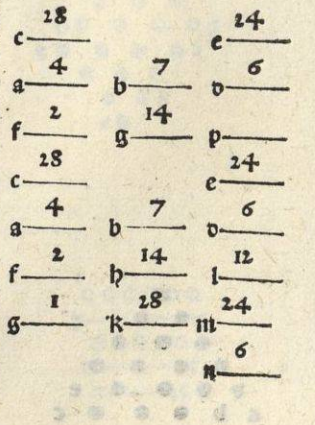
57 ¶ Numerum imparem abundantem inuenire: cuius sumptaꝝ partiũ maxia: a posito impare denominetur.

¶ Hec videtur supponere aliquem imparem eẽ abundãtem: qõ ⁊ verum est. Sit ergo a impar posit⁹ qui maxiam partium sumptaꝝ imparis abundãtis denoĩare debet et b quicunq; imparium abũdans qui si sit minor a: duco ipm in aliquẽ imparem donec eueniat impar maior a qui p quinquagesimam quãtam hui⁹ erit abũdãs. si aũt sit maior a: non quero aliũ. et ita sit in ꝓposito. deĩde sumo impares denoĩantes quotquot volo supra a: ita vt a sit denoĩatiuũ minus. alioquin ꝓxitatem ꝓpositio hꝗ nõ posset: sintq; c d e et duco a in c ⁊ pueniet impar p vndecimam huius ⁊ d in ꝓductum: ⁊ e in vltimum ꝓductum: et ille vltimus ꝓductus p vicesimãtertiam primi hẽbit ꝑtes denoĩatas ab a c d e. deiñ duco in ipm totum: b. sitq; ꝓductus f qui pvndecimam huius erit impar: sed et p quinquagesimãquintam huius erit abũdans. q̃a b est abundans ⁊ habet ꝑtes denoĩatas p vicesimãtertiam pmi ab a c d e ⁊ b. et q̃a ptiũ assumptaꝝ ꝑs denoĩata ab a habet minorem denoĩationem: q: positus est a oĩm denoĩans minimus per ꝓceptiõem ꝑs denoĩata ab a est oĩm sumptaꝝ scz scõm a c d e: ⁊ b maxia. qõ est ꝓpositũ.

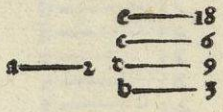


58 ¶ Si aliq̃s in nũerũ primum ductus pfectũ numerum ꝓduxerit idem in eo minorem et se non numerantem ductus: ꝓducet numerum abundantem.

¶ Sit b numerus p̃mus: ⁊ a ductus in b ꝓducat c q̃ sit nũerus pfectus: sitq; d minor b nec numeret a et ducatur itez a in d ⁊ pueniat e. dico e esse numerum abundãtem. nullus enĩ in alium ductus nũerabit c: quoꝝ alter non numeret a. vt si f in g ꝓducat c: intelligo f primum/a scõm/b tertium/⁊ g quartũ per vicesimãquintam secũdi f ad a vt b ad g. sed ⁊ per quartã tertij b numerat alteꝝ. at cum b maior sit a/et g maior f vt supponiꝑ: b nũerabit g. q̃re ⁊ f nũerabit a. ꝓstat q̃ q̃ nullus in aliũ ductus nũerabit c quoꝝ alter non numeret a. et ideo si a eẽt primus non haberet c nisi a ⁊ b ⁊ vnitatem ꝑtes suas: et a ⁊ b vnitate distarent. at nulli sunt primi vnitate distãtes nisi binarius ⁊ ternarius: cũ oportеat alterũ eoꝝ esse parem/⁊ alteꝝ imparem: et oĩs alius par a binario/sit compositus. quicũq; igiꝑ sumeretur sub b non habebit ꝑtes q̃ nisi e f ⁊ vnitatem. at ꝓductus ex illis toties habet in se maiorẽ e quoties vnitas est in f. at vnitas ⁊ f simul minus faciũt q̃ e aliq̃ties sumptus: ergo f ⁊ e ⁊ vnitas non ꝓstituũt pfectũ. erit ergo a ꝓpositus. sint ergo eius partes f ⁊ g: que p vicesimãtertiam primi numerabunt c. numerẽt ergo ipm scõm h ⁊ l: et eedem partes p idem etiã numerabunt e: sitq; scõm l ⁊ m. eritq; per septimam secundi ter repetitam c ad b h k: sicut e ad d l m. cum ergo c supet b ⁊ h in numeris a f g: supabit etiã e numeros d l: sitq; id in numero n. quẽ dico eẽ minus q̃ a f g. qõ sic ostenditur. qz c ad b h: sicut e ad d l. ergo vt c ad e totus ad totum: et b h ad d l detractus ad detractum. ergo residuus a f g: ad n residuum vt c totus ad e totum. at c maior est e: igitur ⁊ a f g maior n. igitur a f g partes itidem e addite ad d l: plus faciunt q̃ e. est igitur e numerus abundans. quod erat demõstrandum.

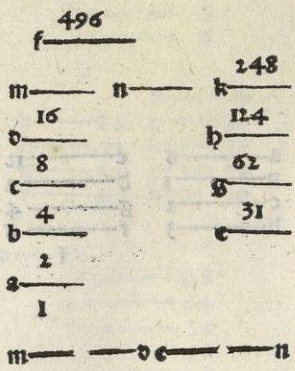


59 ¶ Si numerus in alium ductus perfectum vel abundantem ꝓduxerit: in quẽlibet ab eo numeratum ductus abundantem ꝓducet.



¶Sit a quicũq; numerus qui in alium ductus vt b ꝓducat c numerum pfectum aut abundãtem: ⁊ b numeret d. dico q; a ductus in d ꝓducit nũerum abũdantem. nam quia p septimam secũdi q̃ ꝓportio b ad d ea est c ad e: sed b per hypothesim nũerat d: igitur ⁊ c numerabit e. c aũt positus est pfectus aut abundans. igitur p quinquagesimã quintam huius ⁊ e abundabit. quod est propositum

¶Cum dispositi fuerint ab vnitate nũeri pariter pares qui ꝓiũcti fecerint numerum primum: extremus in illum ductus ꝓducet numerum perfectum. 60

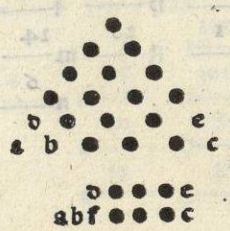


¶Sit vnitas: ⁊ a b c d ꝓtinue dupli: qui p vicesimã nonam huius erunt pariter pares: ⁊ coaceruatus ex eis et vnitate sit e qui ponat esse primus et d extremus parium ducat in e oĩm aggregatum ⁊ pueniat f. dico f eẽ numerum pfectum. manifestum est enĩ per vicesimã tertiam p̃mi a/b c d duplos sũptos oẽs numerare f. sitq; id scõm e/g h k vt scz d numeret f scõm e: c scõm g: b scõm h: et a scõm k. quoties ergo vnitas in d toties e in f: et quoties vnitas in c toties g in f. quare ⁊ adiuuãte vicesima secũda scõi ⁊ equa ꝓportiõalitate quoties a in d toties g in f: et p idem quoties b in d toties h in f. et quoties c in d toties k in f. Hinc tote ptes sunt e/g h k ad f: q̃te vnitas a b c ad d. sed p tricesimã secũdam hui⁹ vnitas et a b et c simul min⁹ sunt vnitate q̃ sit d. quedã vnitas est ps d denoĩata per conceptiõem ab d. ergo e g h k simul minus facũt f vna eius pte denoĩata a numero d. pars aũt f denoĩata a numero d: est e. sunt igitur e g h k simul minus f in numero e. at vnitas a b c et d sunt tanq̃ e: igitur e g h k vnitas a b c d simul tũ sunt sicut f. si aũt f plures partes non habeat: constat p diffinitiõem ipm f numerum esse perfectum. sed q; nullam aliam habeat declaratur. nam si hoc sit possibile numeret ergo m: numerum f scõm n. qz enĩ e est p̃mus qui nũerat f: numerabit ergo per quartam tertij m aut n. quare p vicesimã quintam secũdi reliquus eoꝝ numerabit d. et cũ a secũdus ab vnitate sit numerus p̃mus: ergo p vicesimã sextam quarti quicũq; nũerat d est aliqs in ordine precedentium: vt c b a. at si sit c nũerat f scõm g/ et si b scõm h/ et si a scõm k partes scz prepositas et vt dictum est. constat ergo nullum alium a p̃dictis nũerare f. quare p̃dicti sunt oẽs sue partes. et ipsi simul mõstrati sunt ipm complere atq; pficere. constat ergo diffinitionem numeri perfecti ei ꝓgruere: ipmq; existere perfectum. quod est ꝓpositum.

¶Septimi elementorum Arithmetices Jordani finis.

Ordine numerorum ex vnitatũ dispositiõe ꝓpendũtur. ¶Est aũt dispositio
f prima in longum tũ: altera in longum ⁊ latum: tertia ꝯo in lõgum/latum/ ⁊ altum. ¶Cuius vnitatum dispositio in longum tũ est: linearis numerus dicitur. ¶In latum disponũtur supficiales linearibus vndiq; ꝓclusi: quoꝝ vnitates directe ⁊ ad se ⁊ ad alias equales habent distantias. Ꝯ fit dupliciter scz vt vt vnitates vnitatibus directe adaptẽtur: vel eaꝝ intuallis opponãtur: ita vt singlꝝ ordinum termini in lateribus reliquis excipiãtur. ¶In altum ꝯo dispositio solidorũ est: coaptatis insimul supficialibus: ex quoꝝ lateribus directe sibi appositis solidorũ supficies erecte constituũtur. ¶Numerorum in superficie dispositorum: quidam sunt triangulares tria habentes latera: alij quadrilateri: alij pẽtagoni: alij plurũ laterum. ¶Quadrilaterorũ aũt quidam latera opposita habẽt equidistãtia: quidam minime. ¶Numerorum autem quoꝝ latera opposita sunt equidistãtia: alij oĩa latera habent equalia ⁊ tetragoni dicũtur. alij siquidẽ latera habent vnitate distantia ⁊ parte altera longiores vocãtur: aut amplius ⁊ dicũtur aníl̃ogiores. ¶Numeroꝝ in altũ ꝓpositoꝝ diuersas esse bases cõtingit: quorũdã triangulas/atq; quadrãgulas: et ita de ceteris. ¶Horum oĩm quidam habent latera simul applicata: ⁊ dicũtur pyramides. quidam habent latera: que etsi insimul tendãt: non tũ ꝓueniũt: et curte pyramides appellant. quidam habent latera equidistãtia ⁊ equaliter erecta: qui supiorem ⁊ inferiorem supficiem habent similes. Istorũ quicũq; habent basim triangulam: serratiles vocant: q̃ quadrangulam ⁊ ipsi in longum/latum/ ⁊ altum equaliter distẽduntur: cubi dicũtur. quicunq; ꝯo bases habuerint pentagonas hexagonas siue plurium laterum: ⁊ latera equidistantia erecta: colũne nominentur.

¶Omis numerus triangularis: tria habet latera equalia. Etĩ manifestum est quẽlibet 1
triangularem ex numeris ab vnitate ordine cõtinuo dispositis: esse compositum: atq; latus trianguli esse serici numerum.

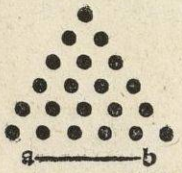


¶Sint a b c vnitates basis trianguli: a b ꝓxĩe: et a c extremitates. dico ergo q; in secũdo ordĩe cuius extremitates sunt d e: erunt pauciores vnitates. nam si totidem fuerint in ordinibus a c ⁊ d e: latera a d ⁊ c e erunt eqdistãtia. qm̃ vnitates in vtroq; ordine equalĩ distant: sicq; non cõcludent triangulum. pauciores ergo erunt in ordine d e. et qm̃ q̃tum distat a ab b tũ distat a ab d ⁊ c ab e: si ergo ponitur f tota ab c quota d ab e: distabit f ab d q̃tum c ab e. et ideo q̃tum a ab d. si ergo f non fuerit ꝓrima post a sed fuerit b vnitas media: cũ distent a ab d q̃tum a ab b: erit longitudo inter a ⁊ f q̃ta inter a ⁊ d et inter f ⁊ d vt amplius: sicq; vnitates et ad seinuicem et ad alias non equales seruabũt distãtias. quod est impossibile. Ordo ergo d e minor est ordine a c vnitate. et eadem rõne sp ordo sequens minor vno

q̃ precedẽs donec extremũ sit vnitas. et qz ideo totidem erunt ordines quot in base sunt vnitates: pz retroagendo vnitatẽ esse primũ potentia triangulũ cui due adiuncte secundũ claudunt triangulum: cui secundo tres addite facient tertiũ: qz semper est vnitate maior precedẽti. et ita cõsequenter scõm naturalem numerorũ progressum sicq; propositio ⁊ correlariũ nota sunt.

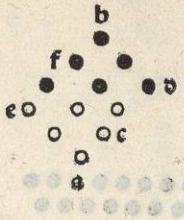
2 ¶ Si a quolibet triangulari numero latus suum detrahatur: relinquetur triangulus ipsi descendendo proximus.

¶ Triãgulus triãgulo descendẽdo proximus: est cuius latus latere alterius est vnitate minus. a triãgulo ergo a b substracto latere a b: dico q̃ relinquit triãgulus ipsi triãgulo a b descẽdendo proximus nã qz triãgulus a per p̃cedentẽ habet tria latera equalia: et sequẽtia sola vnitate vincentia. substracto ergo latere a b erũt reliqua latera vno cõtractiora. sz ⁊ qz vnitatũ ordines fm vnitatẽ semp decrescũt pz per correlariũ precedẽtis residuũ esse triãgularẽ. ⁊ qm̃ latus eius vnitate vinci a latere triãguli a b cognitũ est: patet relictũ triãgularem esse proximũ descẽdendo triãgulo a b: qd̃ est propositũ.



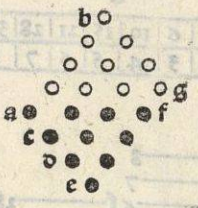
3 ¶ Omnis triangularis duplicatus: parte altera longiorem efficit.

¶ Sumãtur a et b duo triãgulares equales: adiiciaq̃ lateri c trianguli a d extrema vnitas triãguli b. itidẽ lateri f triãguli b adiciaq̃ e extrema vnitas triãguli a: fientq; duo latera vnitate quotlibet latus a triãgulorq; a et b superãtia. et si addis aptasq; hoc pacto medios ordines vnius mediis ordinib̃ alterius: fient per tertiam primi cõpositi ordines sibi mutuo et extremis ordinibus e f et c d equales. verbi cã vt si ordinẽ sequentẽ latus c addis adaptasq; ordini sequenti vnitatẽ d. qz enĩ per correlariũ prime huius ordo sequens latus c tantũ distat ab c q̃tum ordo sequens vnitatẽ d distat ab d. ergo per tertiã primi illi simul iuncti equãtur ordini c d. et ita de aliis mediis ordinib̃ si qui medij relicti sunt tunc ergo cõpletus erit quadrãgulus cuius latera opposita erunt equalia ⁊ ob hoc equidistãtia. vt qz latus e f equale esse mõstratũ est lateri c d et mediis: ergo vnitates lateris b d equidistabũt vnitatib̃ lateris a e. ⁊ similiter qz latus b d equatur lateri e a. nã sunt latera triangulorq; equalium et mediis ordinibus: latus e f equidistabit lateri c d. ⁊ qz latera b d et e a opposita ⁊ equidistãtia sunt latera triangulorũ assignatorq;: ⁊ duo reliqua e f ⁊ c d similiter opposita ⁊ equidistãtia quorum quodlibet reliquo aliorũ vnitate sunt maiora. patet p diffinitionẽ totã figurã a b d e ex duobus equalibus triãgularib̃ cõstitutam (quare ⁊ ex triãgulari vno duplicato) esse altera pate longiorẽ: quod est propositũ.



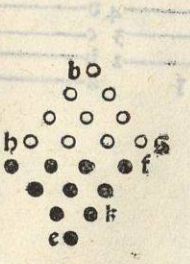
4 ¶ Cuiuslibet altera parte longioris: medietas est triangularis.

¶ Hec est cõuersa precedẽtis. Sit altera parte longior quicunq; a b e ⁊ vnum eius longius latus a b. dico eius medietatẽ esse triangularẽ. de latere enim longiori a b detraho vnitatẽ a et de c secundo ordine duas: de d tertio tres: de e quarto quattuor. ⁊ si plures sunt tot cõsequenter auferã quotus ordo ille fuerit ab vnitate: per correlariũ prime huius totus detractus vt a e f est triangularis. et per idem qz continue minus vno relinquebat̃ vsq; ad vnitatem: relictus est triãgularis. sed et qz detracti latus e f equatur residui lateri g b. nam latus g e superabat latus g b vna vnitate: sed ⁊ g e superat latus f e vna vnitate. equantur igitur g b et f e: quare ⁊ reliqua vnius reliquis alterius cum per primã huius omnis triãgularis sit equilat̃ ⁊ totus trigonus a e f toti trigono a b g equalis. est igitur datus altera parte longior in duas medietates diuisus quarq; quelibet est triãgularis: quod est propositũ.

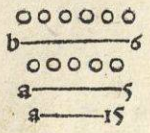


5 ¶ Quilibet duo triangulares proximi: tetragonum constituunt

¶ Sit vt in precedẽti a b g e quicunq; altera parte longior qui per eandem diuidatur in b g h et e a f duos triãgulos equales. erit vt a e sit latus triãguli e a f et latus b a altera pte longioris ⁊ suũ oppositũ se g maius latere a e ⁊ sequẽtibus ordinib̃ vnitate Ammoto ergo latere a e remanebit b h equale lateri h l: l g et g b. ⁊ ideo quatuor illa latera adinuicẽ distantia: quod ergo per diffinitionẽ relictum est: est tetragonus. sed ⁊ ammoto latere a e ab trigono a e f per secundã huius relinquit̃ triangularis triãgulari a e f proximus: quare ⁊ triangulari h b g sibi equali proximus. constat ergo tetragonus h l g b ex duobus proximis triãgularibus: quod est propositũ. ¶ Potest quoq; et id esse notum quod tricesimoquinto capitulo sue Arithmetices diuus affert Seuerinus omnẽ tetragonũ si ei proprium latus adiiciatur aut ab eo detrahatur altera parte longiorem fieri. Nam cum tetragonus omnis vnpozro si latus vnum a quopiam detrahatur: relinquẽtur latera vnitate distãtia: quare vtrobiq; facti erunt altera parte longiores. Quo fit iterũ vt proximi quiq; altera parte lõgiores a medio tetragono equali differentia distent. Nam equali latere substracto ⁊ addito.



6 ¶ Latere pposito numeri triãgularis summã inuenire. Unde manifestũ est si datus sit numerus impar summã triangularis prouenire si paris proxime maioris subduplum in ipsum imparẽ ducatur. et si numerus sit par: summa triangularis prouenie si paris medietas in imparem ducatur proxime maiorem.



¶ Sit a datũ latus cuiuslibet numeri triãgularis cuius summa querit̃: duco a in b proximũ numerũ maiorẽ ⁊ per diffinitionẽ proueniet altera parte longior cuius b maius latus erit vnitate maius a mi

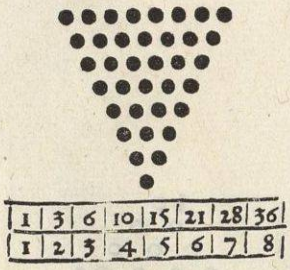
nore latere ⁊ latere triãguli cuius summa petit. per quartã ergo huius summa triãguli petiti est medietas altera parte longiozis inuenti: sicq; constat ꝓpositum. ¶ Correlariũ ex demõstratione conclusionis adiuuãte decima primi notũ est. et hec cũ correlario suo praxim ꝓgressionis demõstrat.

¶ Omne perfectum est trinum. i. numerus perfectus est trigonus,

¶ Ternarius totus est religione sacer et a Pythagoricis Magis et Sacerdotib⁹ olim in arcanis mirum in modum veneratus. et Aristoteles Pythagoricoꝝ symbolis insistens corporeã magnitudinẽ ipsumq; vniuersum perfectũ astruit q; ipsum trinũ sit. ꝛmo vero trinũ est: qꝛ ipsum perfectũ est qõ prio Pythagoras cõperit in numeris: numerorũq; mysteriis. hic ergo suscipit demonstrãdum omnẽ numerum perfectũ esse trigonum. Nam per tricesimã secundam septimi quotcunq; nũeri pariter pares cõnumerata vnitate coaceruati efficiunt numerũ proximo sequente pariter pare: vnitate minorẽ qui quidem proxime sequens pariter par per vicesimãnonam septimi est coaceruatorũ maximi duplus: quare totus coaceruatus est impar. at per sexagesimã septimi oĩs numerus perfectus gignitur ex coaceruatione vnitatis et pariter pariũ quoties coaceruat⁹ est primus qui vt dictũ est p vicesimãnonã septimi sola vnitate distat a proximo pariter pari: qui ad aggregatoꝝ maximũ duplus est. ergo maximus aggregatorũ subduplus paris numerũ aggregatoꝝ imparẽ proxime sequẽtis: in ipsum imparẽ ductus: per primã partem correlarij precedẽtis cõstituit numerũ triangularẽ. est igitur oĩs numerus perfectus triãgularis atq; trigonus: qõ est propositũ. Et eius latus p precedẽtem ⁊ correlariũ prime huius erit ille impar ex omnibus coaceruatus.

¶ Omnis numerus par media sui parte multiplicatus tanto minorẽ summã ꝓducit q̃ omnes summe que in ipso sunt coaceruate: q̃tum sua ipsius medietas.

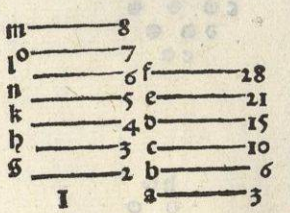
¶ Hec ex analyticis numerorũ deprõpta est. et ex secũda parte correlarij superioris cõclusionis adiuuãte nona primi ⁊ cõi dignitate: vnitatẽ in quẽcunq; numerũ ductã: ipsum ꝓducere: statũ cognita esse põt.



1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8

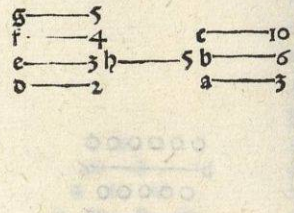
¶ Si sumantur triangulares ab vnitate: duos primos impares et sequẽtes duos pares atq; ita vicissim duos et duos impares atq; pares inueniri necesse est. 7

¶ Quia enĩ per correlariũ prime huiꝰ triãgulares creãtur ex nũeris ordine cõtinuo ab vnitate dispositis et vnitas ꝑmus est potẽtia triãgularis ⁊ potẽtia impar. addita igit̃ numero sequẽti q̃ est par cõstituet p correlariũ prime huius ꝑm triangularẽ ⁊ per secundã septimi imparẽ. erunt ergo duo primi triãguli nũeris hoc pacto dispositis ĩpares. Sed ⁊ qꝛ tertius numer⁹ est ĩpar et cũ precedẽti triãgulo p idem correlariũ cõstituit triangulũ ⁊ p̃cedens mõstratus est ĩpar: ergo p tertiã septimi tertius triãgularis erit par. et qꝛ quartus ab vnitate nũerus est par q̃ cum p̃cedẽti triãgulo pari p idem cõstituit quartum triangulum. ergo quartus triãgularis per primã septimi est par, erunt ergo duo sequentes pares. et iisdem rationibus mõstrentur duo sequẽtes esse impares ⁊ vicissim alij duo sequẽtes pares sicq; sine difficultate certum apparebit propositum.



¶ Si post vnitatem sumantur numeri triangulares: inter duos et duos disiunctim: erunt que inter numeros ab vnitate naturali serie: sumpte proportiones. 8

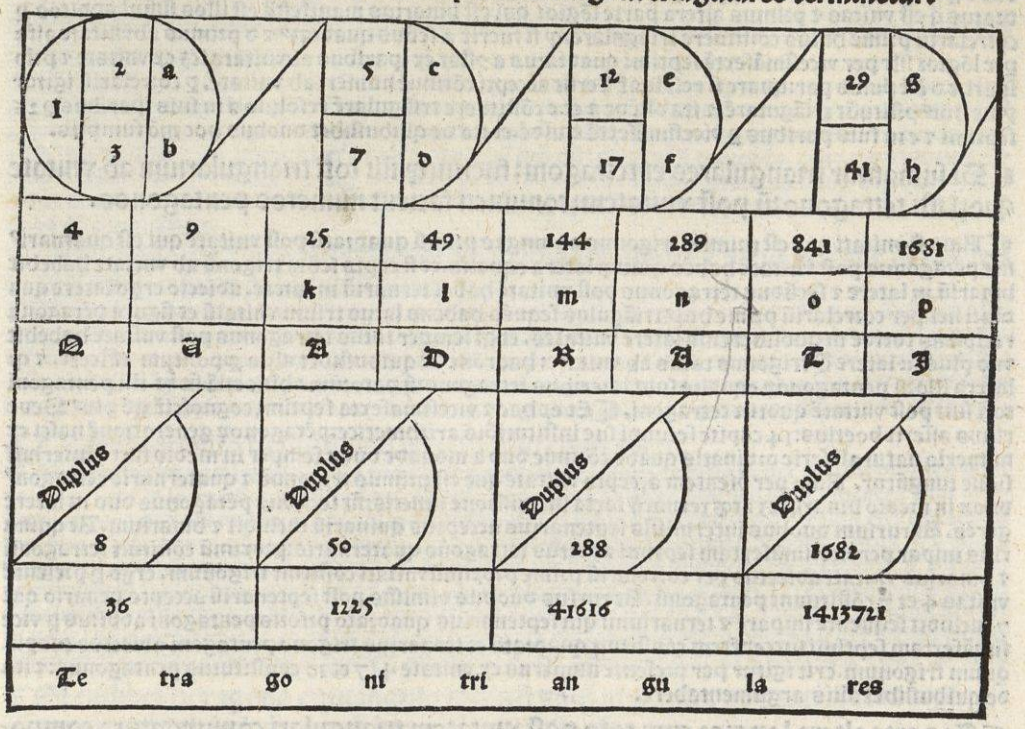
¶ Sit primus triãgularis post vnitatẽ a ⁊ b c d e f ordine ꝓsequẽtes sitq; vnitas et g h lꝛ nũeri ab vnitate naturali serie, precedẽtes: dico que ꝓportio g ad vnitatẽ eã esse b ad a: et q̃ h ad g eã esse d ad c: ⁊ que lꝛ ad h eã esse f ad e. ⁊ ita ꝓcedẽdo in his disiũctim: in illis vero cõiunctĩ. nam p precedẽtem a est ĩpar b c pares: d e ĩpares: et f par. sumo enĩ quattuor pares ab vnitate q̃ sint g lꝛ l m et medij inter eos impares sint h n o. et qꝛ g q̃ est binariꝰ est latus a q̃ est ternariꝰ. ⁊ per correlariũ prime huiꝰ h latus b ⁊ lꝛ latus c et n latus d ⁊ l latus e et o latus f: ergo p quartã huius g in h facit altera ꝑte longiorẽ duplũ a et h in lꝛ duplũ b ⁊ lꝛ ĩ n duplũ c et n in l duplũ d ⁊ l in o duplũ e: atq; per eandẽ o in m duplũ f. qꝛ ergo g in h et lꝛ in h cõstituunt duplũ ad a et ad b. erit ergo per octauã secundi vt que ꝓportio lꝛ ad g ea sit dupli b ad duplũ a: sed ⁊ b ad a subduplus ad subduplũ per correlariũ decimequarte secũdi sicut eoꝝ duplorũ duplus ad duplum. ergo sicut lꝛ ad g ita b ad a. et per idẽ sicut l ad lꝛ ita d ad c. ⁊ sicut m ad l: ita f ad e. ⁊ cũ g lꝛ l m sint sumpti ab vnitate cõtinue pares: ergo p decimãoctauã septimi est ꝓportio b ad a vt g ad vnitatẽ ⁊ d ad c vt h ad g et f ad e vt lꝛ ad h: quod est propositum.



¶ Si tres continui triangulares statuantur: qui sub extremis continetur erit altera parte longior: cuius laterum maius erit illorum trium medius. 9

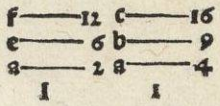
¶ Sint a b c tres continui triangulares ⁊ eorũ latera d e f: sitq; g vno maior f. dico qõ fit ex a in c esse altera ꝑte longiorẽ cuiꝰ maius latus erit b. nã qꝛ a b c sunt ꝓtinui triãgulares: ergo p correlariũ prĩe huius d e f sunt ꝑm continuã seriẽ numeroꝝ sumpti. et qꝛ per quartã huius d in e cõstituit duplũ ad a ergo si d est par quẽadmodũ hic est: medietas d in e cõstituit a. et per idem medietas f in e cõstituit b. et medietas f in g cõstituit c. si aũt d esset impar numeraret a ꝑm medietatẽ e: ⁊ f b ꝑm medietatẽ e. et sic cõsequenter ꝑm medietatẽ parium ĩpares numerarẽt triãgulares. ergo per octauã primi adiuuãte correlario decimequarte secũdi que ꝓportio f ad d: ea est b ad a. et q̃ g ad e: ea est c ad b. ⁊ qꝛ a b c sunt continue sumpti triãgulares: ergo p correlariũ prime huius b superat a q̃tum est e. sumo ergo h vno minorẽ b: manifestũ est h superare a q̃tum est d. et quo abũdat c super b est f. ⁊ quia b ad a sicut f ad d ꝛiam h ad a. et sicut detractus ad detractũ: ita residuus ad residuũ. erit ergo vt sicut b ad a ita c ad h totus ad totũ: quod igit̃ fit ex a in c p vicesimãquintã secũdi tm̃ est q̃tum qõ fit ex h in b. at manifestũ est qõ fit ex h in b esse altera parte longiorẽ. igitur et qõ fit ex a in c. est altera ꝑte longior cuius maius laterũ est b illorum triangulorũ medius. et propositum.

10 ¶Si sumãtur primi post vnitatem par et impár: ⁊ cõposito ex ipsis minor addatur: itemq; ex his confecto minor aduciatur: erit vt cum primorũ primus sit par: sequẽtes sint impares. tertiorũ primus par et sequentes impares ac sic deinceps. duplocq; quadrati parium et quadrato extremi impariũ: tetragoni triãgulares terminẽtur.



¶Sint a et b numeri primi post vnitatẽ par ⁊ impar binarius scz atq; ternarius q̃ iuncti faciãt c cui addito a fiat d. item c et d cõponent e cui addak̃ c ⁊ fiat f atq; e ⁊ f componant g et e addatur g ⁊ fiat h. dico primo a esse parẽ et b imparẽ ⁊ c d impares. item e parẽ f et g h impares. a enĩ esse parem ⁊ b imparem est hypothesis. et qz c cõponitur ex a ⁊ b: per secundã septimi c etiã est impar. et qz d constat ex a pari et c impari per eandẽ secundã d est impar. ⁊ qz e constat ex c d duobus imparibus e per quartã eiusdẽ erit par. et qz f constat ex c ⁊ e impari atq; pari per secundã eiusdẽ f est impar et per eandẽ erũt g et h impares: qõ intendebak̃. Secũdo dico duplũ quadrati a terminare tetragonicũ triangularem. terminare enĩ tetragonicũ triangularẽ est esse latus quadrati qui pariter est ⁊ triãgularis. Patet id nã qz vnitas duplicata cõstituit a et a bis sumptus suum perficit quadratũ: duabus igit̃ vnitatibus a distat a suo quadrato et vnicum suscipit mediũ scz b: cuius differẽtia ad a est vnitas. et qz per septimã sexti quo abundat quadratus b super quadratũ a est quod fit ex vnitate in b et a simul. sed b et a simul sunt vno maius quadrato a qui duplus erat ad a. igitur quadratus b est vno maior duplo quadrati a. sed ⁊ qz duplũ quadrati a in quadratũ b cum sola vnitate distent ꝓducit per diffinitionẽ altera parte longiorẽ quadratus a qui est medietas in quadratũ b per octauam secundi ꝓducit illius altera parte lõgioris medietatẽ. ergo per quartã huius quadratũ a in quadratũ b producit triãgularem. ⁊ qz producitur ex ductu quadrati in quadratũ: ergo per decimãquartam sexti idem erit ⁊ tetragonicus. effectum est ergo qõ dicebak̃. Tertio dico quadratũ d extremi impariũ terminare tetragonicũ triangulatum. sumo enĩ quadratũ c qui sit l: ⁊ quadratũ d qui sit l: dico lz duplicatũ excedere vno l. nam quadratum c duplicatũ per decimãquintam primi est tanq̃ duplũ quadrati a et duplũ quadrati b. et quod fit ex b in a quater et qz per eandẽ decimãquintam quadratũ d est q̃tum c in se et a in se ⁊ a in c bis: sed c in se est tãtum per eãdem q̃tum b in se et a in se et a in b bis. et a in c bis est tm̃ per nonã primi q̃tum a in se bis et a in b bis. ergo qõ fit ex d in se est q̃tum quod fit ex b in se et quadruplũ quadrati a ⁊ quadruplum ꝓducti ex a in b. sed cum duplũ quadrati c sit monstratũ q̃tum duplum quadrati b et duplũ quadrati a et quadruplũ quod fit ex a in b: et ex secunda parte huius quadratũ b excedat vno duplum quadrati a. sit ergo vt duplum quadrati c cõtinens quadratũ b loco huius q̃ quadratũ d ꝓtinet duplũ quadrati a ceteris omnibus cõsimilibus excedat vno quadratũ d. duplũ ergo quadrati c in quadratũ d per diffinitionẽ producit altera parte longiorem cuius longius latus excedit vno quadratũ d. illius ergo dupli dimidius qui est quadratus lz in l quadratũ d producit illius altera parte longioris dimidium per octauam secundi qui per quartam huius est triangularis et cuius latus est l quadratus extremi imparium qui et idem per decimãquartam sexti est tetragonus. et hac ratione de sequentibus molire id quod propositũ est ostendere: et omnino constabit propositum.

¶ Si abvnitate continue designentur parte altera logiores et quadrati: duo ⁊ duo cõ iuncti: triangulares omnes efficient. 11

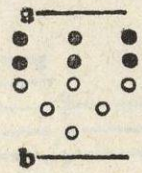


¶ Designo ab vnitate a b c quadratos et ab vnitate altera parte lõgiores qui sint d e f: dico quoslibet duos ꝓximos quadratũ et altera parte lõgiorem simul: cõstituere triãgularem. nã si fuerit prim⁹ quadratus q̃ est vnitas ⁊ primus altera parte lõgior qui est binarius manifestũ est illos simul additos p correlariũ prime huius cõstituere triãgularẽ. q̃ si fuerit a scũs quadrat⁹ ⁊ d primus abvnitate alta pte lõgior ſiſt per vicesimãsextã septimi quadratus a ꝓstat ex ĩparibus abvnitate sc3 ex vnitate ⁊ prio ĩpari ⁊ d est ꝑmus par: quare si resoluat a erũt accepti cõtinue numeri ab vnitate. p correlariũ igitur ꝑme hui⁹ ꝓstituũt triãgularẽ. ⁊ ita ostẽde a et e cõstituere triãgularẽ resoluto a in suis ĩparibus p 26 septimi ⁊ e in suis paribus p vicesimãsextã eiusdẽ. et ita de quibuslibet duobus hoc mõ sumptis.

¶ Si sumantur triangulares et tetragoni: fuerintq̃ illi toti triangularium ab vnitate quoti isti tetragonorũ post vnitatem: coniuncti facient numeros pentagonos. 12

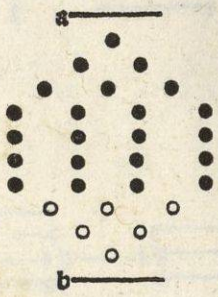
¶ Nam si vnitati que est primus trigonus adiungas primũ quadratũ post vnitatẽ qui est quaknari⁹ fiet pẽtagonus post vnitatẽ habẽs quinq̃ latera equalia. et si capis scõm trigonũ ab vnitate habebit binariũ in latere ⁊ secũdus tetragonus post vnitatẽ habet ternariũ in latere. adiecto ergo latere quadrati fiet per correlariũ prime hui⁹ triãgulus sequẽs habens latus trium vnitatũ et figura pẽtagona recipiens totidẽ in quolibet eius latere vnitates. et q̃ semper totus tetragonus post vnitatẽ habebit vno plus in latere q̃ trigonus totus ab vnitate: hac rõne de quibuslibet aliis ꝓpositum efficere. ⁊ q̃ latera illorũ pentagonorũ equalia sunt lateribus tetragonorũ datorum: hinc etiã fit vt illi pentagoni toti sint post vnitatẽ quoti ⁊ tetragoni. ¶ Et ex hac ⁊ vicesima sexta septimi cognoscit q̃ diu⁹ Seuerinus asserit boetius: 14 capite secundi sue institutiõis arithmetice: pẽtagonorũ generatione nasci ex numeris naturali serie ordinatis quãdo cõtinue duo a monade duorũ semper in medio facta intermissione iungũtur. Nam per ꝑsentem accepta vnitate que est primus trigonus ⁊ quaternario tetragon⁹ duorũ in medio binariũ sc3 atq̃ ternariũ facta inꝑmissione iunctis: fit secũdus pẽtagonus duo in latere gerẽs. At rursum duobus intermissis septenarius acceptus quinariũ includit ⁊ binarium. At quinarius impar vicesimãsextam septimi additus tetragono quaternario: proximũ cõstituit tetragonũ ⁊ binarius vnitati adiectus per correlariũ prime proximũ vnitati cõstituit trigonum. ergo p presentẽ vnitas 4 et 7 cõstituunt pentagonũ. At rursus duobus dimissis post septenariũ accepto denario qui 7 includit sequentẽ imparẽ ⁊ ternarium: qui septenarius quadrato prioris pentagoni additus p vicesimãsextam septimi succedẽtem constituit quadratũ et ternarius trigono pentagoni adiectus propinquum trigonum. erit igitur per presentẽ numerus ex vnitate 4/7 et 10 constitutus pentagonus: ⁊ ita de quibuslibet aliis argumentabere.

¶ Si parte altera longior cum toto post vnitatem triangulari coniungatur: compositus erit pentagonus post vnitatem totus. 13



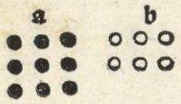
¶ Sit a aliquotus ab vnitate altera parte longior vt secũdus: cuius ideo minus latus erunt due vnitates: sitq̃ b triãgulus totus post vnitatẽ cui⁹ latus ideo erit ternarius ⁊ equale maiori lateri altera parte longioris. adiungo ergo maius latus trigoni b maiori lateri altera parte longioris a: et fiet tetragonus sed ⁊ illud quod restat dempto maiore latere b per secundam huius est triangulus minor descendendo ergo per precedentem ille cum quadrato ex altera parte longiore ⁊ lõgiore latere trianguli cõstituto: erit pentagonus: quod est propositum.

¶ Quilibet pentagonorũ post vnitatẽ cum toto triangulari ab vnitate: hexagonum post vnitatem simili loco positũ constituit: et huiusmodi tetragonicus dicatur. 14



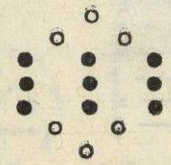
¶ Unitas oĩs numeri potestatẽ optinere dicit cuius equalia latera designãtur. hinc ipsa est primus triangulus primus tretragonus pentagonus hexagonus ⁊ ita deinceps. et predictorũ numerorum primus post ipsam est cuius latus fuerit binarius: ⁊ secũdus post ipsam cuius latus fuerit ternarius secũdus vero ab vnitate cuius latus fuerit binarius. et dicitur hexagonus tetragonicus cuius latus est equale lateri medij tetragoni. dico ergo q̃ si capiatur aliquotus pẽtagonus post vnitatẽ vt a: qui verbi causa post vnitatẽ sit tertius et b totus triãgulus ab vnitate: dico a cum b cõstituere hexagonũ post vnitatẽ totum pariterq̃ ⁊ tetragonicũ. nam per duodecimã huius quotus pẽtagonus fuerit post vnitatẽ ex toto post vnitatẽ tetragono constat et triãgulari ab vnitate toto. ergo equalis triãgularis qui est quẽ propõ proponit ex opposito tetragoni latere appositus hexagonũ constituet: cuius latus erit equale lateri medij tetragoni. et q̃ latus eius ẽ equale lateri medij tetragoni est ⁊ equale lateri pentagoni quare ⁊ hexagonus totus erit post vnitatẽ quotus et pẽtagonus. ⁊ q̃ eius latus est equale lateri medij tetragoni est idẽ ⁊ tetragonicus: q̃d. est propositũ. Ex hac et duodecima hui⁹ ⁊ correlario ꝑme cognoscẽ promptũ est gñationẽ hexagonorũ eo pacto q̃ docet Boeci⁹ 15 capite scõi arithmetices

¶ Oĩs tetragonus cũ precedẽte altera pte longiore: hexagonũ tetragonicũ ꝓstituit. 15



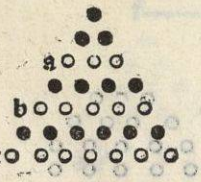
¶ Primus enim altera parte longior post vnitatem est qui habet vnitatem minus latus ⁊ secundus qui h̃z duitatẽ et ita deinceps. ⁊ precedẽs tetragonũ est cuius minus latus est vno minus latere tetragoni qui ⁊ post vnitatẽ totus ẽ quotus ⁊ altera parte lõgior ab vnitate. dico ergo quẽcunq̃ tetragonũ vt a cũ precedẽte altera parte longiore vt b cõstituere hexagonicũ tetragonũ. nã p quartã hui⁹ altera

parte lōgior b diuidit in duos triāgulares quorū vterq; totus est ab vnitate quotus pte altera lōgior post vnitatē: qz latus illorū triāgulorum equale sit minori lateri altera parte lōgioris. quare ⁊ vterq; totus est ab vnitate quotus tetragonus a post vnitatē. vnus ergo illorū trigonorū per duodecimā huiusmodi cū tetragono a cōstituit pentagonū post vnitatē totū: sed et per precedentē idem pēta gonus cū altero triāgulari qui est totus ab vnitate ꝓstituit hexagonū tetragonicū. a igitur cum b altera parte lōgiore precedēte cōstituit hexagonū tetragonicū: quod erat demōstrandum ⁊ ꝓpositum.



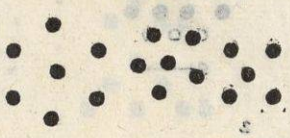
16 ¶ Si disponant triangulares ab vnitate: tertius atq; vno intermisso a prius sumpto tertius: erit hexagonus.

¶ Nā per vndecimā huius dispositis ab vnitate pte altera lōgioribus et quadratis si duo ⁊ duo ꝓiungātur fient oēs triāgulares. at cū primus triāgularis post vnitatē fiat ex vnitate ⁊ p̄mo altera pte longiore: secūs triāgularis post vnitatē q̄ est tertius ab vnitate fiet ex p̄mo tetragono post vnitate ⁊ p̄mo post vnitatē altera pte lōgiore per eandē vndecimā qui est tetragonū precedēs. ergo p precedentē tertius triāgularis ab vnitate ē hexagon⁹. sed ⁊ eadē rōne qz vno inūmisso tertius semp a q̄drato et p̄cedente altera pte longiore p vndecimā huius nascit: ergo per p̄cedentē tertius semper erit hexagonus quod est propositum.



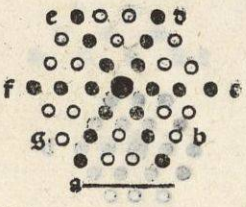
17 ¶ Si sex vnitates vni circūponantur: ita vt illarū adinuicē ⁊ ad illam eadē sit distātia hexagonum equiangulū constituent.

¶ Nā quelibet due illarū vnitatū cum media vnitate triāgulum equilaterū constituunt. fient ergo sex triāguli equilateri quos dico etiā esse adinuicē equiāgulos. nā cum illorū vnitates adinuicē ⁊ a media distēt vnitate: si vnitates vnius vnitatis⁹ cuiuslibet alterius applicent erunt supra se inuicē apposite et āguli vnius āgulos alterius nō excedētes: quare sex āguli hexāguli erunt equales. erit igitur talis hexagonus equiāgulus qō intēditur. et ita de tetragono equiāgulo ⁊ pēta gono si placeret ostēderet.



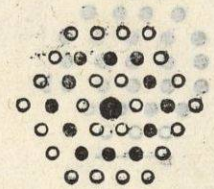
18 ¶ Latere proposito hexagonum equiangulū constituere.

¶ Sit a vnitates dati lateris q̄bus vna plures applico: ita semp augēdo donec tot sint ordines quot vnitates sunt in latere. fiatq; hoc mō descēdendo donec tot cōpleant ordines quot vnitates sunt in eodem latere. ⁊ qz fiunt tria latera equalia ascēdēdo et tria similia descēdendo pz creatū esse hexagonū quē dico equiāgulum. nā medius ordinū semp per vicesimātertiā septimi ē impar q̄ totus sit a nūero lateris quotus nūerus lateris ab vnitate. habet igit ille maximus numerus vnum medū. ⁊ si signas extremitates sex laterum per b c d e f g erit illa media vnitas media ordinis f c: e b: et ordinis d g. qz equales sunt et ea cōtcant. distat ergo equalit ab f ⁊ c et ab e ⁊ b et ab d ⁊ g. quare sex triāguli: scz media vnitas f e: media vnitas e d: media vnitas d c: media vnitas c b: et media vnitas b g: ⁊ media vnitas g f: adinuicē eqlateri sunt et vt in p̄cedēti equiāguli. ē igit hexagon⁹ b c d e f g equiāgul⁹: qō ē ꝓpositū



19 ¶ Si cuilibet hexagono equiangulo totus senarij multiplex addatur quotus ipse est ab vnitate: similem hexagonū prouenire necesse est.

¶ Si p̄mo hexagono q̄ est vnitas senarius circūponat per penultimā fiet sequēs hexagonus equiangulus. nā habēs duo in latere q̄ si eorū interualis que etiā sunt sex: sex aptēturvnitates in eadē distantia: atq; ipsis sex vnitatib⁹ alie sex angularit: fiet sequēs hexagonus equiāgulus habens ternariū in latere. ⁊ vt precedēs hexagonus secūdus erat ab vnitate ita acceptus est totus senari multiplex: scilz duplus ad senariū qui est duodenarius: cui si rursum circūponas triplū senarij: scz duodeci vnitates in duodeci interuallis et sex ad sex āgulares vnitates efficis sequētem hexagonū equiāgulum quivt in precedēte probarat habet quaternariū suū latus. et qz semp iterualla crescūt in senario tot āgulis semp manētibus apposito sequēti senarij multiplici semp efficies hexangulū equiāgulū eadem rōne sequētem: quod intendit propositio.

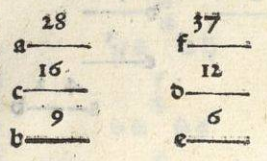


20 ¶ Si ordinentur ab vnitate triangulares et singuli secundū senarium multiplicētur: producti addita vnitate erunt hexagoni equianguli.

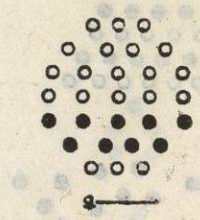
¶ Si enim vnitatē que primus triāgularis est senario multiplices: secūdus hexagonus nascitur: qui addita vnitate circūclusa cognoscit ⁊ equiāgulus. et qz per precedētem quilibet hexagonus tot addit senarios super p̄cedētem quotus ipse p̄cedēs fuerit ab vnitate. ⁊ q̄libet triāgularis p correlariū p̄me tot hz vnitates supra p̄cedētem quotus ipse fuerit ab vnitate. ergo si scōs triāgularis q̄ ideo hz duas vnitates supra primū multiplicet p sex addet tot senarios supra p̄cedētem hexagonū qui fuit scōs: quotus ipse scōs hexagon⁹ fuit ab vnitate. ergo p p̄cedētem erit sequēs hexagon⁹. ⁊ ita quoq; ꝯtio triāgulari q̄ addit tres vnitates supra scōz p sex multiplicato: ⁊ quolibet alio: addes ex multiplicatiōe tot senarios quotus ⁊ triāgularis ⁊ precedēs hexagonus fuerit ab vnitate: sicq; p precedētem semp concludes propositum.

21 ¶ Omnis hexagonus equiangulus tanto abundat super hexagonum tetragonicum simili post vnitatē loco sumptū: q̄tus est tetragonus ab vnitate similiter dictus

¶ Sit exēpli cā a quartus ab vnitate hexagon⁹ tetragonic⁹ q̄ ⁊ tertius ē post vnitatē: sitq; b totus ab vnitate tetragonus id est tertius: ⁊ quartus tetragonus c ⁊ medius altera parte lōgior d. dico tertiū hexagonū equiangulū post vnitatē tantū distare ab a q̄tus est b tertius ab vnitate tetragonus. nam per decimāquintā huius c et d cōponunt a: sed ⁊ qz differētia b ad d per vicesimāquartam sexti est ternarius latus b: ⁊ differētia c ad d est quaternari⁹ latus c. erūt ergo p secundā primi b ⁊ c simul maius vno q̄ duplum d, capio e totum ab vnitate triangularem quotus est b tetragonorū: quia minus latus

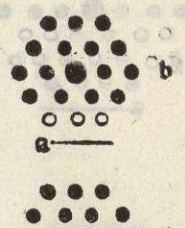


altera parte longiozis d est latus b: quodquidē idem est latus e. ergo per quartā huius d erit duplus c: sed ⁊ b c mōstrata sunt vno maius duplo d. sunt ergo b c vno maius q̄druplo e: ergo b c d simul sunt vno maius sexcuplo e. at per p̄cedentē e sexies sumptus addita vnitate tertiū post vnitatē creat hexagonum equiāgulum qui sit f. constat ergo f ex b c et d: sed a solū constat ex c dvt ostensum est. abundat ergo f hexagonus equiangulus ab a hexagono tetragonico toto post vnitatē q̄tum est b totus abvnitate tētragonus: qō est propositū. ¶ Animaduerte quēadmodum diuus mōstrat seuerinus heptagonos continue fieri ex hexagonis et inferiozibus trigonis duobus equis iferiozibus eminus adiūctis trigonis. quod ⁊ idem euenit si dispositis naturalis numeris: extremi cōtinue quattuoz in medijs relictis iungātur. vt secūdus heptagon⁹ fit ex senario scō hexagono ⁊ vno: p̄mo trigono emin⁹ equali adiūcto trigono. qui idē fit ex vno et senario quattuoz in medio p̄termissis numeris: ⁊ tertius heptagonus fit ex 15 tertio hexagono ⁊ ternario scō trigono e regiōe adiūcto equali trigono hexagoni qui idē fit ex vno senario ⁊ vndenario. et hoc pacto in figuratione ⁊ collectione suozū numerozū in ceteris est procedendum.



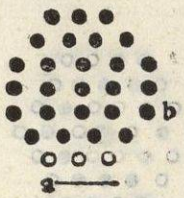
¶ Supra datum numerum octogonum equilaterum constituere. 22

¶ Sit a datus nūerus supra quē iubemur octogonū equilaterū cōstituere. p̄cedo ei apponēdo ozdies vno semper se excedētes donec totidē sint quot sunt vnitates i latere: erūtq̄ facta tria latera equalia et maximo ozdini addo ozdies equales quousq̄ tot sint quot sunt vnitates in latere erūtq̄ facta quinq̄ latera equalia. deinde ab vltimo ozdine p̄cedendo appono ozdines cōtinue vnitate minozes donec tot sint quot in dato latere vnitates fientq̄ sic descēdendo tria latera p̄dictis equalia eruntq̄ simul octo equalia latera atq̄ octogonus equilaterus cōstitutus: qō erat faciendū. ¶ Alia apud diuū seuerinū octogonoꝝ inueniēdozum ratio moduscq̄ est vt cōtinue ex toto heptagono et sub se trigono surgant. ⁊ idē fiunt si ex dispositis naturalis numeris cōtinue in medio quinq̄ relictis: extremi iungātur. vt si 7 scō heptagono iungas vnum primū trigonū surgit octonarius et scūs octogonus. qui idē fit ex vno et septē quinq̄ numeris binario ternario quinario senario ēterstitibus: dimissis. et si 18 tertio heptagono iungas ternariū: secundū trigonū: fiet 21 tertius octogonus. qui idem colligitur ex 1/7/13/ ⁊ hoc pacto in reliquis est procedendum



¶ Si cuilibet hexangulo equiangulo post vnitatē: totus tetragonus ab vnitate cum sequēte altera parte lōgiozc iungatur, pueniet octogon⁹ post vnitatē sili loco sumpt⁹. 23

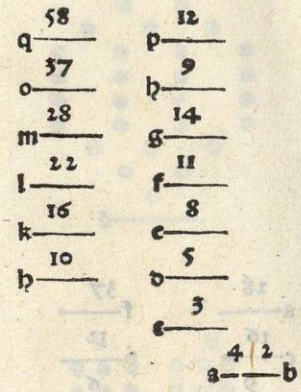
¶ Sit quilibet hexagonus equiāgulus cuius latus sit a et maximus ozdinū eius sit b qui addat sup a numerū c. q̄m enim hexagonus datus habet triāguloꝝ in media vnitate cōicantium latera equalia: hinc ozdinis b maximi: linea minoz est vno: duplo lateris a ergo c minoz vno q̄ a. addo ergo ad b ozdines equales secundū c. et qz ab a ad b fiunt tria latera equalia fient rursus ab b cum additis ozdinib⁹ duo alia equalia quibus addo relictos hexagoni post b: fientq̄ rursus tria alia reliquis equalia eritq̄ formatus octogonus. et qz per nonā primi c in b p̄m ozdines additos est tantum q̄tum c in se ⁊ in a. at qō in se facit est tetragonus: et quod in a facit est altera parte lōgioz. cum c et a sola vnitate distent: et tetragonus ille totus sit ab vnitate quotus octogonus formatus post vnitatem. nam hexagonus vno maius latus habet latere tetragoni: ⁊ altera parte longioz sequēs tetragonū. cōstat ergo q̄ hexāgulo equiāgulo assignato post vnitatē: additus totus ab vnitate tetragonus cū sequēte altera pte lōgiozc cōstituit octogonū qui cū equalia hexagono latera hēat: totus erit post vnitatē octogonus: ⁊ p̄positū



¶ Formarū sex equilaterax quālibet p̄m vnitatū dispōnem figuraliter cōstituere. 24

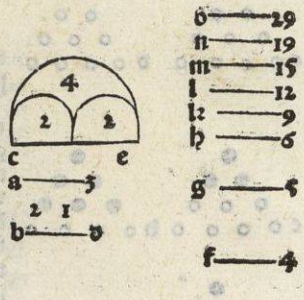
¶ Si enim triāgulos tetragonos pēragonos hexagonos tetragonicos hexāgulos equiāgulos ⁊ octogonos secundū vnitatū dispōnem figuraliter cōstituere desideras: ex prima huius trigonos figurare disce. ex quīta tetragonos: ex duodecima pēragonos: ex decima quarta hexagonos tetragonicos: et ex decima septima ⁊ decima octaua hexagonos equiangulos: et ex vicesima secunda octogonos. sicq̄ peruium habebis propositum.

¶ Latere dato figurarum p̄assignatarū cuiuslibet summā reperire. 25



¶ Sit latus datū a qui ponat esse par ⁊ medietas a sit b: sitq̄ c minoz vno a ⁊ d eodē vno maioz. addi toq̄ c ad d fiat e. ⁊ iterū c addito ad e fiat f. et sil⁹ c addito ad f fiat g: ducatq̄ b in d et sequentes ⁊ pueniant h l: l m. qz enī a in d p̄stituit altera pte longiozē cuius triāgularis lateris a est medietas. ergo p quartā huius b medietas a in d p̄ducit triāgularē lateris a: sicq̄ h ostēdit summā triāgularis lateris dati. et qz c d simul cōstituūt e qui p secundā primi est duplus a. ergo b a e sunt cōtinue p̄portionales qō ergo fit ex b in e per vicesimā sextā secundi est quadratū a. et cū id sit l: ostendet l: summā tetragoni lateris dati a. ⁊ qz qō fit ex b in f per nonā primi tm̄ est q̄tum qō ex b in e ⁊ in c. et cum c in a cōstituat altera parte longiozē cuius medietas est triāgulus c per quartā huius. ergo b medietas a in c p̄ducit triangularē cuius latus est c. sed et b in e p̄ducit tetragonū a qui totus est post vnitatē quotus triangularis c a vnitate. ergo per duodecimā huius b in f p̄ducit totum post vnitatē pentagonū. at ille est pentagonus a et productus est l. ostendet igitur l summam pentagoni lateris a. ⁊ qz quod fit ex b in g est tātum q̄tum quod fit ex b in c et in f. ⁊ dictum est ex b in c fieri triāgularem totum ab vnitate quotus est post vnitatē pentagonus ex b in f factus. ergo per decimā quartā huius b in g constituet hexagonum tetragonicū totum post vnitatē quotus ⁊ post vnitatē est pentagonus at hexagonus ille erit hexagon⁹ a ⁊ p̄ductus m monstrat itaq̄ m summam hexagoni a: lateris assignati. Duco item c in se ⁊ p̄ueniat n qui erit totus ab vnitate tetragonus quotus hexagonus tetragonicus m est post vnitatē. addo ergo m et n simul ⁊ p̄ueniat o qui per vicesimā primam erit hexagonus equiangulus a. nam totus post vnitatē quotus hexagonus m. duco item c in a: et p̄ueniat p qui erit altera parte longioz

sequens tetragonum c scz n. additis ergo iterum n ⁊ p tetragono scz et sequẽte altera parte longiore hexãgulo equiãgulo o pvicesimãtertiã huius, puenit octogon⁹ totus postvnitatẽ quotus post vnitatẽ erat hexãgulus equiãgulus o. quare octogonus proueniẽs qui sit q erit octogon⁹ lateris dati a atq; summã petitã ostendẽs. Sed esto rursus a latus datũ numerus ĩpar et b c circũpositi pares b minor ⁊ c maior et medietas b sit d et medietas c sit e: per secundã primi d ⁊ e simul cõstituent a. addo d super a et fiat f: ⁊ super f et fiat g: ⁊ duco a in e ⁊ pueniat h qui ea ratione qua superius erit triãgularis a. et duco a in se ⁊ proueniat l: qui erit eius tetragonus et a in f ⁊ pueniat l: qui ea ratione qua prius erit pentagonus a et duco a in g ⁊ proueniat m qui etiã per decimãquartam huius erit hexagonus tetragonicus lateris dati a: sed et hexagonũ equiãgulum et octogonũ a quere vt paulo ante monstratũ est.

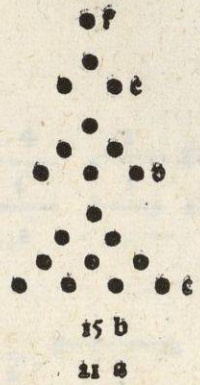


26 ¶ Omnis pyramis cui⁹ basis triãgula est: quattuor triãgularibus et equalib⁹ ꝓtinet.

¶ Nã tres a tribus laterib⁹ basis triãgulares erigũtur q̃ simul applicãtur atq; cõueniunt ⁊ basis est quartus triãgularis. Et qm̃ duo et duo latus habent cõmune: erunt omnes inter se equilateri: quare et equales. quod igitur asseritur per diffinitionẽ ratum est.

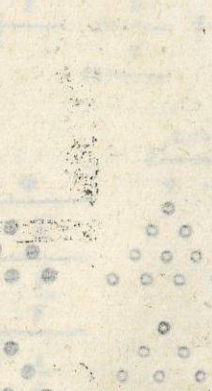
27 ¶ Si triãgulares ab vnitate in altum sibi continue adaptentur: proueniẽt omnes ab vnitate pyramides: ⁊ cuiuslibet basis erit triãgulorum suorũ maximus.

¶ Sint a b c d e f ad f vsq; vnitatẽ scz quotlibet sumpti triãgulares cõtinue vno minores q̃ sibiimuicẽ co ordine aptẽtur applicẽturq; ita vt b supponat a: et c supponat b: et d ipsi c ⁊ e ipsi d: et f itidẽ ipsi e dico pyramides abvnitate esse sumptas oẽs ⁊ cuiuslibet basim suor triãgulor esse maximũ. cum enĩ numeri illi in altũ constituti invnitatẽ conueniãt per diffinitionẽ constituũt pyramidẽ: erũtq; p corrlariũ prime huius oẽs ab vnitate sumpti triãgulares. si itaq; vnitatẽ consideras eadẽ est et prima potentia pyramis. si primũ triãgularẽ cuius latus est binari⁹ cũ ipsi suprapposita coaptataq; vnitate appositi appareãt equales simulq; cõueniẽtes triãgulares: erit cõstituta scda pyramis cui⁹ latus erit secundus triãgularis. et cũ sint in altũ continue accepti triãgulares erit ⁊ tertia pyramis cõstituta cui⁹ latus erit tertius triãgularis: et quarta cuius quartus triãgularis erit latus atq; ita deinceps. sed q̃ cuiuslibet basis sit suor triangulariũ maximus hoc iõ est q̃ p precedentẽ basis ẽ triãgularis cuilibet triangulariũ laterum equalis. si itaq; latus sit quintus triãgulus p corrlariũ prime huius ex oĩbus precedẽtibus triãgulis ꝓstitutus ita et basis quintus erit triãgulus ⁊ ex oĩbus inferiorib⁹ cõstitutus qui erit illius pyramidis maximus: et ita de quacũq; altera sicq; cõstare potest propositũ



28 ¶ Si cuilibet numero equaliũ laterum oẽs ab vnitate sibi similes in altũ apponãtur: qui cõponetur erit pyramis basemq; ipsius eãdem esse cõueniet. si vero citra vnitatẽ huiusmodi ciusdẽ generis formarũ in altum suppositio erectioq; deficiat: quot ab vnitate illius generis relicte fuerint: toties curta pyramis nascetur.

¶ Hec docet tetragonice basis/pentagone/hexagone/heptagone/octogone/ennagone/decagone: et quotquot angulor volueris eodẽ ingenio quo ⁊ precedẽs de triãgularibus pyramides formare. nam si hoc pacto tetragoni ab aliquo dato ad vnitatẽ vsq; suppositi aptentur: oĩa latera (que p corrlariũ p̃me huius erũt triãgulares numeri ab vnitate cõtinue sumpti sint) invnũ verticẽ concurrẽt totãq; pyramidẽ ꝓstituent cui⁹ basis erit datus tetragon⁹ sup cuius latera sunt erecta latera pyramidis invnũ cacumen conuenientia ĩmo oẽs tetragonice pyramides infra illã essent formate. ⁊ ita si pẽtagoni hexagoni et sequẽtes hunc in modũ aptẽtur pẽtagonas/hexagonas/octogonas/ẽnagonas: reliquasq; oẽs formabis pyramidas Scda pars stati nota est nã si detur quotuscũq; triãgularis vt sextus abvnitate cui supponãtur mõ ãtedicto p ordinẽ quĩtus quart⁹ tertius et scdus. at desit vnitas q̃uis latera illi⁹ simul tendãt non tũ conueniũt: ideo figura illa p diffinitionẽ erit curta pyramis. q̃ si quĩtus quartus ⁊ tertius soli suprapositi in altũ fuissent: defuissẽtq; duo scdus et vnitas hec biscurta pyramis diceret q̃ si omissi fuissent tres diceretur tricurta. et ita quotquot omitterẽtur toties curta diceret. et ita de curtis pyramidibus que a quadratis pentagonis hexagonis ⁊ sequẽtibus figuris nascũtur sentiendũ est. est itaq; notum quod proponitur.

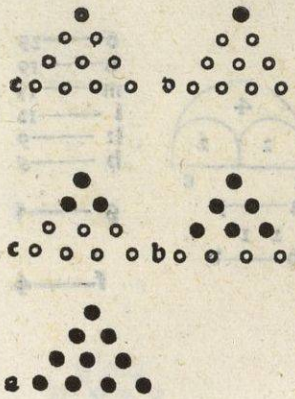


29 ¶ Si duc pyramides quarum bases sunt triãgulares proximi coniungãtur: efficietur pyramis cuius basis erit tetragonus maiori triãgularium equilaterus.

¶ Nã quelibet earũ erit cõposita ex oĩbus triãgularibus q̃ sunt a triãgulari basis sueq; advnitatẽ at basis minoris primus est triãgularis post basem maioris. cõiuncti igit simul p quintã hui⁹ faciũt tetragonũ et scdus vnius ⁊ scdus alteri⁹ sequentẽ tetragonũ. et sic eousq; dũ extrema vnitas minoris cũ penultimo alterius triãgulari primũ post vnitatẽ cõficiat tetragonũ. vnitas igitur si apponat oẽs ad ipsãusq; tetragonos suprapositos habebim⁹ ab illo scz tetragono cui⁹ latus est equale lateri triãgularis basis maioris pyramidis. at per p̃missam ex oĩb⁹ ab vnitate tetragonis cõponitur pyramis cuius basis est quadrãgula ⁊ coniunctorũ vltimus tetragonus. effectũ est igitur qd̃ proponebat.

30 ¶ Si quotlibet triãgulares equales in altũ cõponãtur: fiet ex eis numerus serratilis.

¶ Nam qr equales erunt poterũt directe cõtinue in altum latera vnius super latera alterius aptari applicariq; vt latus d e supra latus a b ⁊ d f: et f e supra latera a c ⁊ c b: et latus g h supra latus d e: et latera g k et k h supra latera d f et f e: ⁊ ita de consequentibus vsq; ad vltimũ. et quoniã omniũ latera sunt equalia: erit vt supra posita directe latera que suprемũ locum optinent extremis equalia sint et equidistãtia. patet itaq; per diffinitionẽ factum esse serratilẽ quod proponebatur.



¶ Omnis serratilis pyramide sue basis vno altior: addit super eam: pyramidē cuius basis tetragona est: basi alterius equilatera. 31

¶ Nam dēpta triangula pyramide: ita videlicet vt basis in basi tollatur et de secūdo equalium triangulorū secundus pyramidis detrahat et de tertio tertius: sicq; deinceps. qz serratilis vno altior pyramide sue basis positus est de penultimo triāgularīū equalīū auferet suprema vnitas atq; pyramidis vertex: sicq; totus vltimus triāgularis serratilis integer relinqtur. at qz in basi serratilis fuit ablata basis triāgule pyramidis. ideo per secundā huius: secundi triāgularis relictū est latus ⁊ in omnibus superioribꝰ similiter qui qm̄ tot sunt quot in illo latere vnitates: constat latus ipsum cū sequētium lateribus summā quadrati pficere. preterea qz tertij triangularis serratilis remanet latus suū ⁊ minor sequēs et in sequētibus similiter: erit vt illa sint sequētis quadrati latera. et hoc pacto ad vnitatē vsq; quadratorꝫ numerus excrescit. erit ergo vt in supremo triangulari residua sit vnitas et que est primus tetragonus. ergo per vicesimāoctauam huius constat relictam esse tetragonā pyramidē. et qz latus basis eius dē est latus triangularīū equalium et latus basis piramidis triāgule ablate idē: constat pyramidē relictam esse pyramidi basis serratilis equilaterā atq; ipsum serratilē eam super pyramidem basis sue addere: quod est propositum.

¶ Omnis serratilis pyramide sue basis duobus altior: eidē triplus esse probat 32

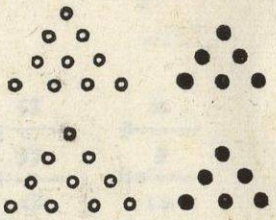
¶ Substrahe enī ab ipso serratili extremū triangularīū relinquetq; serratilis vno altior piramide: q̄ per precedentē in duas secabilis est piramidas: quarū vna est triangula pyramis basis serratilis ⁊ altera tetragonica cuius basis tetragona est et basi alterius eqlatera. sed ⁊ hec eadē tetragonica pyramis perviceſimānonam huius in duas rursus secabilis est triāgulas pyramides: quarū vna triāgule prioři est equalis et altera ea minor ꝗtum est basis triāgule prioris. addito igitur prius dēpto triāgulari eidē basi prioris triāgule pyramidis equali ad minorē: illa fiet alteri equalis. sic fiēt tres equales triangule pyramides totum serratilem constituentes. constat itaq; totum huiusmodi serratilem pyramidi sue basis esse triplum: quod est propositum.

¶ Latere basis triāgularis dato: triāgule pyramidis sup eam ꝓstitute summā repire. 33

¶ Reperiatur triāgularis lateris dati per sextā huius: in quē latus ipsum ducatur ⁊ habebimus serratilē eque altū pyramidi cui adice duos equales triāgulares ꝓueniet; serratilis duobꝰ pyramide sue basis altior cuius tertiā partem accipe ⁊ p precedētē habes pyramidis sup latus cōstitute summā atq; qd̄ ex triāgulari lateris dati vna cū oībus suis inferioribꝰ triāgularibꝰ coaceruat: qd̄ ē ꝓpositū.

¶ Pyramidis totius summā reperire: cuius basis tetragona: eiusdemq; basis latus datum fuerit. 34

¶ Ut precedēs docuit dato triāgularis latere qd̄ ex ipso ⁊ oībus sub eo cōtentis coaceruat inuenire ita quoq; et p̄sens nos instruit dato tetragoni latere qd̄ ex ipso et omnibus sub eo ꝓtentis tetragonis coaceruat reperire. hoc enī est tetragone pyramidis summā repere quod ostēditur. nam dato latere quero per sextā huius eius triāgularem in quē vt in precedētī factū est duco latus propositū et proueniet serratilis eque atq; eius pyramis altus cui addo vnū consimiliū triāgulorum et ꝓueniet serratilis vno pyramide sue basis altior. detracta igitur p precedentē inuenta basis pyramide: per triceſimā primā huius relinquetur tetragona pyramis cuiusquidē basis tetragona est atq; triangulari equilatera que scz est summa petita et propositum.



¶ Si duo serratiles quorum bases triāgulares proximi existant: et quorum altitudo vna: et lateri maioris equa fuerit: coniungantur: efficietur cubus. 35

¶ Nam bases in ipsis equaliter scz secūdum numerū lateris maioris serratilis sunt multiplicate ⁊ basis vnius et basis alterius cōiuncte per quintā huius tetragonū efficiūt cuius latus lateri maioris est equale ⁊ secūdus triāgulus vnius secundo alterius cōiunctus per eandē tetragonū consimilē. ⁊ ita cōsequenter vt tot tetragoni equales superponātur sibiq; inuicē aptētur quot in latere sunt vnitates at cum ex illis figura sit constituta basim quadrangulā habens in longum latum et altum equaliter distensa per diffinitionem concluditur esse cubus.

¶ Si cuilibet cubo adiungatur basis sua et triāgularis basi sue equilaterus: efficietur triplus sue pyramidi. 36

¶ Sumo duos triāgulares proximos quorū maior sit equilaterus tetragono cubi assignati et constituo per triceſimā huius super eos serratiles quorū altitudo sit equalis lateri basis maioris qui duo serratiles cōiuncti per p̄cedentē equabūtur cubo assignato. ⁊ qz maior illorꝫ serratiliū est eq̄ altus sue pyramidi: duplo ergo sue basis sibi addito per triceſimāsecundā huiꝰ fiet pyramidi sue basis triplus. at qz alter serratilis est alteri eque altus: erit vno altior sua pyramide. basi igitur ipsi semel addita fiet eidē sue pyramidi triplus. at basis sua cum basi alterius per quintā huius faciūt tetragonū cubi: quare si predicto cubo addatur basis sua cū basi maioris serratilis que est triāgularis basi sue equilaterus: efficietur numerus piramidi sue triplus: qd̄ erat demonstrandū. ¶ Sunt preterea collūne que vt serratiles per triceſimā huius facile formabūtur et quarū summa ducendo basim in costā cognoscitur que qz facilia sūt autor omisit. sunt etiā numeri circulares qui proprij semp principij reuersione formātur. et eadē ratione sphere sphericiq; cubi vt vigintiquinq; et trigintasex qui a radicibus

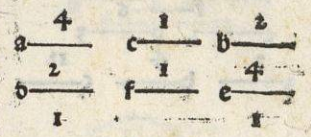
quinaria scz ⁊ senaria nascũtur numeri circulares dicũtur ⁊ centum vigintiquinq; similr ducẽta decem ⁊ sex sphere sphericiq; cubi noiant qui a radicibus quinaria ⁊ senaria in suos circulares quadratos ductis pcreãtur. Sed quia hi numeri a paucis ⁊ pstitutis numeris nascũtur quinario scz et senario ⁊ demõstrationis difficultatem non requirant: aut similem cũ ceteris quadratis ⁊ cubis normam obseruent: hoꝝ ampliorem determiatiõem autor non ab re omisisse videtur.

¶ Octaui elementorum Arithmetices Jordani finis.

e Qualitas est inequalitatis principium. Inequalitatis quinq; sunt species: aut enim maior terminorum ptinet minorem aliquoties vt nichil supfluat: et dicit multiplex ꝓportio. aut semel tm ⁊ eius aliquã partem: et supparticularis appellatur. aut semel ⁊ eius aliquot partes: et dicit suppartiens. aut pluries ⁊ eius aliquã partem: et multiplex supparticularis vocatur. aut pluries ⁊ eius aliquot partes: et multiplex suppartiẽs noiatur. ¶ Minoris quoq; ad maiorẽ habitudo totidem species cõtinet: que inter se sicut priores fm denoiantium diuersitatem variãtur. ¶ Scõm partem aliqd multiplicare: est totam illius sumere partem: quota fuerit que multiplicat. ¶ Quodcunq; aliud multiplicet: illud ꝓduci dicimus qd ita se habet ad multiplicatum: sicut multiplicans ad vnũ. diuidi dicit aliqd per aliud: cum illud sumitur diuidens qd per idem multiplicatum summam diuisi restituat.

1 ¶ Inequalium numerorum maioris ad minorem ea est: que partis ab ipo minore denominate: ad partem a maiore dictam ꝓportio.

¶ Sint a ⁊ b numeri inequales: a maior/et b minor. sintq; d e partes ab ipis denoiate d scz denoiata ab b et e denomiata ab a. dico eãdem ꝓportiõem eẽ a ad b et d ad e. pono enim vnũ inter a et b qd sit c: ⁊ vnum inter d et e qd sit f. et qa que ꝓportio a ad vnum ea ẽ vnius ad partem ab a denoiatam: at ea est ꝓportio f ad e. et que ꝓportio c vnius ad b: ea est partis denoiate ab b ad vnum. at ea est d ad f. igitur per vicesimã secũdi ⁊ equã proportiõalitatem indirectam que ꝓportio a ad b ea est d ad e: ptis scz a minore denoiate/ad partem a maiore denoiatam. quod est propositum.

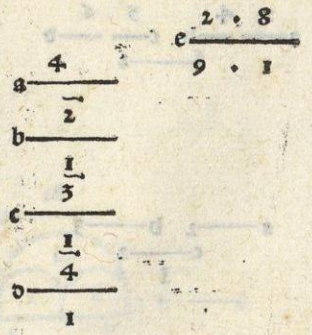


2 ¶ Partes quotlibet in partes equales redigere.

¶ Sint partes date a/b c: et numeri eas denoiantes d/e f: et ꝓpositũ sit reducere a b c in ptes eiusdẽ denoiatiõis atq; equales. sumo per vicesimãquitam tertij minimum nũerum quẽ numerant d e f: q̃ sit g numerẽtq; ipm fm h/k l: et sit m pars denoiata ab g. erit enim per precedentem vt g ad d: ita a ad m. at d nũerat g fm h: igitur ⁊ m numerabit a fm h. et per eandem vt g ad e: ita b ad m. e aũt numerat g fm k igitur ⁊ m numerabit b fm k. itidem ⁊ m numerabit c fm l per idem. erũtq; reducte partes ille in ptes equales scz a in partes dictas ab g fm h/et b in easdem fm k/et c in easdez partes ab g dictas scõm l. at si a b c singule non sint pars: sed b sit partes ⁊ c partes idem eueniet. erũtq; partes dicte ab g fm h k l. ⁊ ducẽdo a in h, pueniũt partes a dicte ab g. et ducẽdo b in k, pueniũt partes b ab eodẽ nũero dicte et ducendo c in l, pueniũt reducte partes c dicte ab g. quas sivna colligis collectum ostendit summam partium a b c ad eandem denoiationem scz g reductaꝝ.

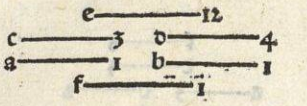
3 ¶ Numerum cum parte vel partibus datum: in partes similes reducere.

¶ Sit a numerus: ⁊ b/c d partes date: et iubeat primo a ⁊ b in partes similes reducere. duco numerum denoiantez partem b in a. et qa b est pars vnius ⁊ vnum pars totius a: denoiata ab a: ergo pvicesimã tertiam pmi b est pars a denoiata a nũero qui fit ex ductu denoiantiũ in se scz denoiantis b: in a denominãtem vnius: partis scz a. duco ergo b in a ⁊ ꝓducet numerus denoians illam partem: ⁊ p diffinitionem multiplicans a fm illam partem. capio ergo similes illi parti fm ꝓductum numerum qui erit oẽs similes partes a cui addo partem b ⁊ sit aggregatus e factũq; apparebit propositum. Q; si iubeamur a numerum et partes b c ⁊ d in psimiles partes reducere: reduco pmo p precedẽtem b c ⁊ a in psimiles ptes. deinde vt prius duco numerum denoiantem in a et pueniet nũerus denoians illam partem quem vt prius compleo ⁊ cui addo nũerum partium ad eandem denoiationem reductaꝝ: et efficit ꝓpositum.



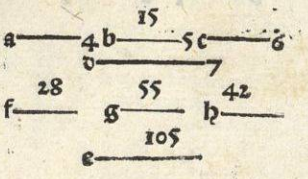
4 ¶ Quod fit ex ductu duaꝝ partium vnius in aliam: ẽ pars denoiata ab numero qui fit ex ductu duoꝝ numeroꝝ vnius in alium illas partes denoiantium.

¶ Sint a ⁊ b due partes: ⁊ nũeri eas denoiantes sint c ⁊ d: ⁊ ex c in d fiat e: et pars denoiata ab e sit f. dico f esse partem ꝓductam ex a in b. erit enim ex diffinitiõe vt vnum ad c: ita d ad e. sed ⁊ vt vnum ad c: ita a ad vnum. ergo vt a ad vnum: ita d ad e. sed p primam huius vt d ad e: ita f ad b. at p diffinitiõem vt a ad vnum: ita ꝓductum ex a in b ad b. at f ita se habet ad b. est igitur f p diffinitiõem qd fit ex a in b. quod est propositum.

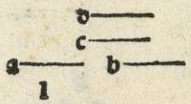


5 ¶ Si plura quotlibet in aliqd ducant: tm ꝓducit ẋtum si qlibet eoꝝ ducat in illd.

¶ Hec decime primi similis est sed cõior. sit nũerus a c collectus ex a b c q̃ multiplicet d siue d sit nũerus siue ps vel ptes ⁊ pueniat e. et ex ductu a in d fiat f/et b in d fiat g/et c in d fiat h. dico f g h simul tm eẽ ẋtum e. nam ex diffinitiõe erit vnum ad a/et ad b et ad c: tanq̃ d ad f/et ad g ⁊ ad h. ergo pvicesimam tertiam secũdi vnum ad a b ⁊ c: sicut d ad f g ⁊ h. at p diffinitionem sicut vnum ad a b ⁊ c: ita d ad e. sunt igitur f g ⁊ h simul ẋtum e. quod est propositum

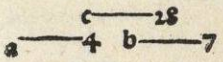


¶ Si duoꝝ quodlibet in reliquum ducatur: que ꝓducẽtur equa esse necesse est. 6



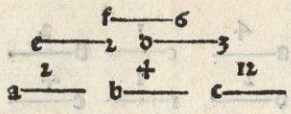
¶ Hec fere est octaua ꝑmi sed paulo cõior q̃ etiã ad minutias/fractionesq̃ se extendat. vt si a nũerus pars vel partes multiplicet b numerum ꝑtem vel ꝑtes et ꝓueniat c: et b multiplicet a et ꝓueniat d. dico c ⁊ d eẽ equalia. nã ex diffinitiõe erit c ad b sicut a ad vnũ: ergo ꝑmutatim c ad a sicut b ad vnum. ergo ex ꝓuersiõe diffinitiõis b in a ꝓducit c. est igit̃ d qd̃ fit ex b in a equũ c. quod erat demõstrandũ.

¶ Producti ex duobus erit ad vtrũq̃ ꝓportio a reliquo denoiata. q̃ si eius ad alterũ fuerit ꝓportio a reliquo dicta: idem ex ductu alterius in alterum ꝓducetur. 7



¶ Ex duobus nũeris a in b ꝓducatur c: dico proportiõem c ad a eẽ denoiatam ab b: et proportiõem c ad b esse denoiatam ab a. nam ꝑ ꝑcedentẽ ex a in b fit c: et ex b in a fit etiã c. et ꝑ diffinitiõem ea ẽ ꝓportio b ad vnũ: que c ad a. at ꝓportio b ad vnũ denoiatur ab b: igitur ⁊ ꝓportio c ad a denoiabitur ab b. et ꝓsimilẽ q̃ ex a in b fit c: ꝑ diffinitiõem que ꝓportio a ad vnũ: ea est c ad b. at ꝓportio a ad vnũ denoiatur ab a: igitur ꝓportio c ad b denoiabitur ab a. quod est propositum. Cõuersum ꝓsimili ꝓuersio modo ꝓbabit̃. Et ex hac ad quẽlibet numerum q̃tũlibet multiplicem demõstrare possumus. capiẽdo totum numerum ab vnitate quotus numerus multiplex ad nũerũ sit petitus ⁊ ducẽdo numerum ab vnitate totum acceptũ in nũerum assignatũ. et per presentem totus ꝓueniet ad numerũ assignatũ multiplex.

¶ Omis ꝓportio ex duabus cõposita: ex ductu vnius eaꝝ in reliquam ꝓducitur. 8

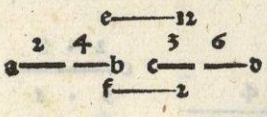


¶ Ducere ꝓportiõem aliquã in aliam: est ducere denoiationẽ vnius in denoiatiõem alterius. hĩc duas ꝓportiões aliquã ꝓpositã ꝓducẽ: est denoiatiões illaꝝ duaꝝ ꝓportionũ denoiatiõem ꝓposite ꝓducẽ. Esto g̃ ꝓportio c ad a ꝓposita ex ꝓportiõib̃ c ad b ⁊ b ad a. dico ꝓportiõez c ad a ꝓduci ex ductu ꝓportiõis c ad b: in ꝓportiõez b ad a. capio enĩ d denoiantẽ ꝓportiõis c ad b ⁊ e denoiantẽ ꝓportiõis b ad a et f denoiantẽ totĩ̃ c ad a. q̃ enĩ ꝓportio c ad a denoiat̃ ab f: ergo ꝑ scõam ꝑtem ꝑcedẽtĩ f in a facit c et ꝑeãdẽ e in a facit b. ergo ꝑ septimam scõi sicut c ad b ita f ad e: sed d est denoians ꝓportiõem c ad b per hypothesim. ergo ꝑ scõam partem ꝑcedẽtis d in e ꝓducit f denoians scz vnius illaꝝ proportionũ in denoiatiõez alterius ꝓducit totius denoiatiõem. quod est propositum.

¶ Trium ꝓtinue proportiõalium qd̃ fit ex primo in vltim equũ est ei: quod ex medio in se ducto ꝓducitur. 9

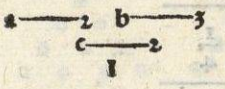
¶ Hec fere in vicesima sexta secũdi mõstrata est: nisi q̃ hec paulo latior est/ atq̃ hic alio demõstrandi modo innitimur. Sint ergo a b c tria ꝓtinue proportiõalia/ atq̃ ex b in se fiat d: et sit e denoians ꝓportionis b ad a. dico equũ esse qd̃ fit ex a in c: ⁊ b in se. nã q̃ e denoiat proportiõem b ad a: etiã denoiabit proportionem c ad b. ergo ꝑ scõam ꝑtem penultime e in b ꝓducit c. ergo ꝑ octauam secũdi q̃ ꝓportio d ad c ea est b ad e: sed ⁊ ꝑ eãdẽ scõam ꝑtẽ penultime a in e facit b. ergo per primam partem eiusdẽ: a denoiat ꝓportiõem b ad e: quare ⁊ proportionem d ad c. ergo a in c per eiusdẽ scõam ꝑtem ꝓducit d. constat igitur quod fit ex b in se: equũ esse ei qd̃ fit ex a in c. et propositum.

¶ Si primum ad scõm sicut tertiũ ad quartũ: quod fit ex primo in quartum: equale est ei qd̃ ex secundo in tertium ꝓducitur. 10



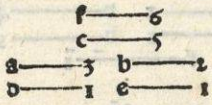
¶ Hec sic̃ qd̃ vicesima quĩta secũdi ꝓponit. Sit ergo proportio a ad b vt c ad d: et ex b in c fiat e. dico e tm̃ esse q̃tum qd̃ fit ex a in d. sit enĩ f denoians proportiõem b ad a: denoiabit etiã ꝓportiõem d ad c. ergo ꝑ scõaz partem septime huius f in c ꝓstituit d. ergo ꝑ octauam scõi e ad b sicut d ad f. sed ⁊ f in a per eãdem scõam partem septime huius facit b: ergo ꝑ primã ꝑtẽ eiusdẽ a denoiat ꝓportiõem b ad f. quare ⁊ proportiõem e ad d. per scõam ergo partem eiusdem a in d facit e. qd̃ est ꝓpositum.

¶ Si scõm alteꝝ duoꝝ nũcrorum sumãtur partes a reliquo dicte: erit ab eo quod ex eis ꝓponit̃ proportio eiusdem ad reliquum denoiata. vnde manifestum est q̃ oẽs ille se habent ad vnum sicut reliquus ad denoiantem. 11



¶ Sint a ⁊ b duo nũeri: sumãturq̃ fm̃ a ꝑtes denoiate ab b: sitq̃ c cõpositum ex ipis. dico ꝓportiõem a ad b denoiari ab c. nam q̃ tot sunt in vno partes sĩles: quot sunt vnitates in b. erit vt sicut a ad b: ita partes ille ad vnum. sed vnũ in illis ꝓducit ipm̃ c: ergo ꝑ septimã huius proportio c ad vnum denoiat̃ ab c composito ex ipis partibus. ergo ⁊ proportio a ad b ab eodem denoiatur. Corrolarium ex modo demõstrandi notum est. ponebat enĩ hinc esse notũ sicut c ad vnũ: ita a ad denoiantem b qui positus erat denoiare c. et hoc fuit ostensum.

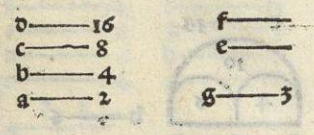
¶ Que a ꝓtra se primis partes denoiantur: vnam non cõstituũt. 12



¶ Sint a ⁊ b numeri ꝓtra se ꝑmi: et aggregatus ex ipis sit c qui ꝑ nonam tertij est primus ad vtrũq̃ a ⁊ b: et sit d pars denoiata ab a/ et e pars denoiata ab b. dico d et e nõ ꝓstituere partem vnã. duco enĩ a in b: et ꝓueniat f qui ꝑ vicesimã quĩtam tertij est mĩmus quẽ nũerant a b: qui ⁊ idem f per decimam eiusdem tertij est primus ad c. et ꝑ scõam huius: d est reducte ꝑtes denomiate ab f ⁊ sumpte fm̃ b. et e reducte partes denoiate ab f et sumpte fm̃ a. quare d e simul sunt ꝑtes denoiate ab f: et sumpte fm̃ c. quare per corrolarium ꝑcedentis d e simul ad vnũ: sicut c ad f. at c nõ est ꝑs f: cũ ipsi mõstratus sit esse primus: igitur neq̃ d e pars vnius. non ꝓstituũt igitur d e partem vnam. qd̃ est propositum.

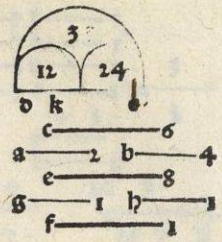
¶ Si a quotlibet nũeris numeroꝝ ab vnitate proportionalium partes denominent̃: vnam ex eis componi est impossibile. 13

¶ Sint a b c d numeri ab vnitate ꝓtinue proportionales: et a quotlibet eorꝫ vt c d denominẽtur e et f scz e ab c/ et f ab d. dico e ⁊ f non ꝓstituere ptem vnã. et sit g aggregatũ ex a ⁊ vnitate. qz enĩ c numerat d manifestum est ꝑ vicesimãquintam tertij d eẽ mimum numerũ quẽ nũerant c d. at ꝑ vicesimãquitam secũdi c numerat d scõm a: et d seiꝑm ꝓm vnitatem. et per scõam huius e est reducte ꝑtes denoĩate ab d et sumpte ꝓm a. et f est pars denoĩata ab d sumpta scõm vnitatem. igitur e f simul est ꝑtes denoĩate ab d sumpte scõm g. quare ꝑ correlariũ penultime huius e f simul ad vnũ vt g ad d. sed g non est pars d. nam si g sit numerus primus ⁊ numeraret d: ꝑ vicesimãseptimam quarti etiã numerabit a totũ scz suam partem. qõ est impossibile. et si g sit compositus: ergo ꝑ scõam tertij ab aliquo ꝓmo nũerabitur qui ꝑ vicesimãtertiam primi nũerabit d. quare ꝑ vicesimãseptimam quarti numerabit a: ⁊ etiã nũerat totum g. ergo ꝑ duodecimam ꝓmi numerabit residuũ: numerus scz vnitatẽ. qõ est impossibile. non est igitur g pars d: quare necꝫ e f pars vnius. non igiꝯ e f ꝓstituũt partem vnam. quod est propositum.



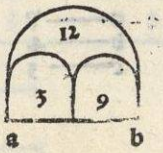
14 ¶ Partes a duob⁹ nũeris dicte sic se hũt ad partem a nũero ex eis ꝓposito denoĩatã: sicut quadratum ꝓpositi ad numerum qui ex ductu vnius in alterum ꝓducitur.

¶ Sint a ⁊ b duo numeri: et c ex ipis ꝓpositus: sitꝫ d quadratus c. et ducatur a in b ⁊ fiat e. et sit f ꝑs denomĩata ab c. et sit rursus g ꝑs denoĩata ab a: et h pars denoĩata ab b. dico vt d ad e: ita g ⁊ h ad f. duco enĩ c in a et fiat k/ ⁊ c in b ⁊ fiat l. erũtꝫ ꝑ nonam primi k ⁊ l sit tanq̃ d. intelligo ergo sex nũeros e/k/f/h/l/g quorꝫ dico e ad k primũ ad scõm: sicut f ad h tertiũ ad quartũ. Itẽ e ad l ꝓmũ ad quintum sicut f ad g tertiũ ad sextum. nam ꝑ septimã secũdi e ad k tanq̃ b ad c. sed ꝑ primam huiꝰ b ad c tanq̃ f ad h. est igitur e ad k tanq̃ f ad h. Item per eãdem septimam secũdi e ad l tanq̃ a ad c. sed ꝑ primam huius a ad c tanq̃ f ad g. est igitur e ad l tanq̃ f ad g. ergo ꝑ vicesimãtertiam secũdi e primus ad k et l simul scõm scz ⁊ quintum tanq̃ f tertius ad g ⁊ h simul quartum ⁊ sextum. at k ⁊ l simul sunt d: igitur d ad e tanq̃ g ⁊ h simul ad f. quod est propositum.



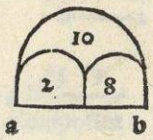
15 ¶ Si duo numeri componãtur fueritꝫ compositi ad alterum multiplex proportio: erit reliquus alteri equalis aut multiplex.

¶ Sit numerus a b cõpositus ex duobus a ⁊ b: sitꝫ compositus a b multiplex ad a. dico b eẽ equalẽ a vel eidem multiplicem. nam cũ a b sit multiplex ad a: ipe a numerat totũ a b ⁊ seiꝑm etiã detractum numerat. ergo ꝑ duodecimam primi numerat b residuum. qꝫ si semel a numeret b: ipe a erit equalis b. at si a multoties numeret b: erit per diffinitiõem b multiplex ad a. quod est propositum.



16 ¶ Si totius ad alterum fuerit ꝓportio supparticularis: erit illius ad reliquum similis denominationis proportio multiplex.

¶ Proportio tota supparticularis aut tota multiplex dicit quotus fuerit supparticularis aut multiplex: vt ꝓmus supparticularis est sesqualter ⁊ sequũtur ꝑ ordinem sesquiktius/ sesquiquartus. ⁊ ita deinceps ꝓm numerorꝫ seriem. et primus multiplex est duplus: ⁊ sequũtur ꝑ ordinem triplus/ quadruplus/ quĩcuplus: sicꝫ deinceps ꝓm seriem numerorꝫ. sit a b totus numerus ꝓstitutus ex a ⁊ b: sitꝫ a b supparticularis ad b. dico b totũ esse multiplicem similisꝫ denoĩatiõis ad a. nam ꝗa compositus a b supparticularis ad b addit sup b numerum a: ergo ꝑ diffinitionem a est ꝑs aliqua b. at quota fuerit a pars b totus est a b supparticularis ad b. et quota pars a fuerit b totus erit b multiplex ad a. per diffinitiones igitur quota fuerit proportio supparticularis a b ad b: tota erit b ad a ꝓportio multiplex. quod est propositum.

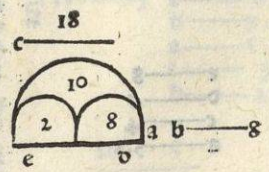


17 ¶ Si alterius ad alterum fuerit proportio multiplex: erit totius ad ipsum proportio superparticularis.

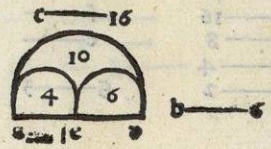
¶ Hec est ꝓuersa p̃cedẽtis. vt sit b ad a ꝓportio multiplex: dico cõpositi a b ad b totam eẽ ꝓportiõem supparticularem. nam qz b est multiplex ad a: erit a ꝑ diffinitiõem aliqua ꝑs b. at totã ꝑtem b addit a b sup b. nam addit a. igitur quota fuerit b ad a ꝓportio multiplex: tota erit a b ad b ꝓportio supparticularis. quod intenditur.

18 ¶ Si maioris ad minꝰ fuerit supparticlaris vel mltiplex supparticlarꝭ ꝓportio: ꝓpositi ex eis ad minorẽ multiplex supparticularꝭ: ad maiorẽ ꝯdo suppartiẽs erit ꝓportio.

¶ Sit a maior numerus/ ⁊ b minor: ⁊ sit a ad b proportio supparticularis: et sit c cõpositus ex a et b. dico c ad b proportiõem esse multiplicem supparticularem: et c ad a proportiõem eẽ suppartientem. capio enĩ ab a maiore numero ꝑtem equalem b que sit d: ⁊ residuũ sit e. quia enĩ a est supparticularis ad b: manifestum est a addere sup b q̃tum est e: et e esse ꝑtem b. et qz c est q̃tum e d et b: et d b duplum est ad b cui supaddit c q̃tum ẽ e. igitur c addit sup b duplũ ad b et q̃tum est e pars eius aliqua. ꝓtinet igiꝯ c bis b ⁊ totam eius partem quota est e. estigiꝯ ꝑ diffinitiõem c ad b multiplex supparticularis. qõ est primum. Sed ⁊ c ad a eẽ suppartiẽtem ostẽditur. nã cum b sit minor a ⁊ nõ sit pars a/ alioquin a ad b eẽt proportio multiplex. qõ est ꝓtra hypothesim. ergo ꝑ primam ꝓmi b est partes a. sed c addit sup a q̃tum est b. erit igitur c ꝓtinẽs a ⁊ partes eius: ad a ꝓportio suppartiens. quod est propositum. Et si maioris ad minorem fuerit ꝓportio multiplex supparticularꝭ: ꝓpositi ad minorem eẽ multiplicẽ supparticularem ⁊ ad maiorem esse suppartientem eadem demonstratio est accepto maiore numero multiplice supparticulari ad minorem.



19 ¶ Si maioris ad minorem fuerit ꝓportio suppartiẽs vel multiplex suppartiens: erit cõpositi ad maiorem suppartiens: ad minorem ꝯdo multiplex suppartiens proportio.



¶ Sit a ad b suppartiens: ⁊ ꝓpositus ex a ⁊ b sit c. dico c ad a esse suppartiente: ⁊ c ad b eē multiplicē suppartientem. Sumo enī ex maiore a: numerum d equalem b: sitq; e residuus qui qz a est suppartiēs ad b: p diffinitiōem erit partes b. et ḋa c est tanq̄ e d ⁊ b: et d b duplum est ad b: addet c q̄tum est e sup duplum b. at e mōstratus est esse partes b: ergo c ꝓtinet b aliquoties ⁊ ptes eius. est igitur p diffinitionem c ad b multiplex suppartiens. qō est p̄sentis theorematis scōm. Primum aūt q̄ c sit suppartiēs ad a patet. nam ḋa e est partes b erit vt b sit partes a: alioquin a eēt multiplex ad b. qō est ꝓtra hypothesim. ar c addit sup a q̄tum est b. est igitur c ad a suppartiens. quod est propositum.

¶ Ois ꝓpositi ad maiorem ꝓponentiū supparticulari vl suppartiēs: ad minorem vo multiplex/ multiplex supparticularis vel multiplex suppartiēs ꝓportio reperitur. 20

¶ Primum q̄ ꝓpositus ad maiorem ꝓponentiū sit supparticulari aut suppartiēs patet. nā ꝓpositus addit super maiorem ꝓponētium q̄tum est minor qui per primam primi erit pars vel partes maioris si pars maioris per diffinitionem ꝓpositus ad maiorem ꝓponētium est supparticularis. si partes erit suppartiens. multiplex aūt ad maiorem nunq̄ eē potest. Scōm q̄ ꝓpositus ad minorem sit multiplex/ multiplex supparticularis aut multiplex suppartiens ostenditur. nā maioris ꝓponentiū ad minorem ꝓportio: a diuisione aut est multiplex aut supparticularis aut suppartiens aut multiplex supparticularis aut multiplex suppartiens. Si aūt maioris ꝓponentium ad minorem proportio sit multiplex: cū minor maiorem numeret ⁊ etiam seip̄m ipse aliq̄ties sumptus nūerabit totū. quare tūc ꝓpositus erit multiplex ad ip̄m. et si maior ad minorem sit supparticularis aut multiplex supparticularis p decimā octauam huius compositus ad minorem est multiplex supparticularis. et si maior ad minorem sit superpartiēs aut multiplex suppartiēs: per decimānonam huius erit cōpositus ad minorem multiplex superpartiēs. est igitur totum propositum notum.

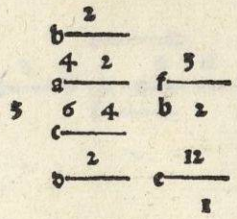
¶ Quecūq; maioris ad minorem ꝓportio multiplici addatur: tota erit aut multiplex/ aut multiplex supparticularis/ aut multiplex suppartiens. 21

¶ Sit quecūq; ꝓportio multiplex data: et alia quecūq; maioris ad minus: que p sextam quinti ꝓtinētur in minimis terminis a/ b/ c. ita vt a ad b sit data ꝓportio multiplex: et b ad c sit altera maioris hitudinis. dico totā ꝓportiōem a ad c esse multiplicem aut multiplicem supparticularem aut multiplicē suppartiētem. nam qz a est maior b/ ⁊ b maior c/ et a ad b ꝓportio est multiplex: per nonam scōi ꝓportio a ad c maior est ꝓportiōe a ad b. addit igit̄ ꝓportio a ad c sup ꝓportiōem a ad b vel nūerum. sicq; tota erit multiplex vel partem aut numerum cū parte: et sic erit multiplex supparticularis: vl partes aut numerum cū partibus et sic erit multiplex suppartiens. est itaq; notum quod dicitur.

¶ Si duc multiplices coniungantur: composita erit multiplex. 22

¶ Nam vtraq; a nūero denoiat̄: quoꝝ si alter in alterum ducatur ꝓueniet nūerus a quo p octauam huius denoiatur composita: quare erit multiplex. quod est propositum.

¶ Data multiplice supparticularem inuenire: que cū illa multiplicem cōstituat. vnde perspicuum est ex qualibet multiplice cū tota supparticulari: multiplicē vno maioris denoiationis ꝓuenire. 23

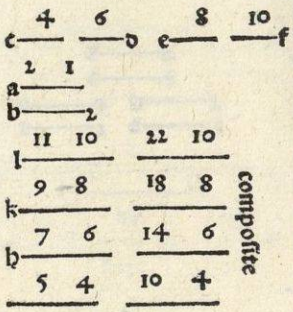


¶ Multiplices ⁊ supparticulares tote dicūtur: quaꝝ denoiatio multiplicis ⁊ denoiatio partis superparticularis ab eodem nūero sumitur. vt dupla ⁊ sesqualtera. dupla enī a duobus ⁊ sesqualtera similit̄ sumitur. nam sesqualtera ꝓtinet totum ⁊ vnam scōam. tripla ⁊ sesquiterta/ quadrupla/ ⁊ sesquiquarta: sicq; deinceps. Sit a quecūq; multiplex ꝓportio data ⁊ b numerus eam denoians: et sit c ꝓportio supparticularis cuius numerus d denoiet partem. sitq; d equalis b. et sit e totalis denoiatio proportiōis supparticularis c: quequidē denoiatur ab vno ⁊ numero partis. et qz vnū in b facit b ⁊ pars denoiata ab b in b facit vnum: g̃ tota denoiatio e ducta in b facit nūerum vno maiorem b qui sit f: ⁊ qui p octauam huius est denominans ꝓportionis composite ex a ⁊ c. est igitur ꝓportio ꝓposita ex a ⁊ c: a numero sez denoiata: multiplex. et quia numerus denominans compositam est vno maior nūero denoiante ꝓportionem a: ex hoc corrolarium et totum propositum notum est.

¶ Data supparticulari quotlibet multiplices reperire: quaꝝ quelibet cum illa multiplicem componat. 24

¶ Sit enī a data ꝓportio supparticularis ⁊ pars que cum vno eam denominat sit b. capio quotquot multiplices voluero: quaꝝ cuiuslibet numerus denoians: sit totū ad b/ ⁊ b pars. et ex mō demōstrādi precedētis a: cū qualibet illaꝝ multiplicium ꝓstituet multiplicem/ efficieturq; propositum.

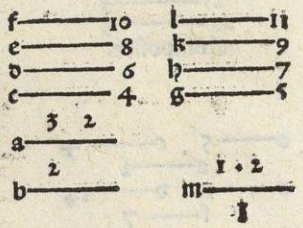
¶ Data multiplice quotlibet sumere supparticulares: quaꝝ quelibet cum ea efficiat multiplicem supparticularem. 25



¶ Sit a data ꝓportio multiplex ad quā iubemur quotlibet supparticulares inuenire: quaꝝ quelibet cū ea ꝓstituat multiplicem supparticularem. capio b numerum denoiantem ꝓportiōem multiplicem a: et sumo c/ d/ e/ f ⁊ quotquot voluero multiplices ad b: et ptes ab ip̄is denoiatas p ordinem. et capio supparticulares denoiatas a ptibus c/ d/ e/ f: que sint g/ h/ k/ l quaꝝ quālibet cū data multiplice dico cōstituere multiplicem supparticularem. nam ḋa g supparticularis sumpta ab c ⁊ tua parte: denoiat̄ a toto c ⁊ parte denoiata ab c. et b in toto c semel ꝓstituit multiplicē: et in parte c ꝓstituit totam ptem quota ps ipe positus sit ad c. ꝓposita g̃ ex a data multiplice ⁊ g supparticulari sumpta a pte c ꝓstituūt multiplicem supparticularem. et eadem rōne ꝓposita ex a ⁊ h/ ⁊ ex a ⁊ k/ ⁊ ex a ⁊ l. qō est propositum.

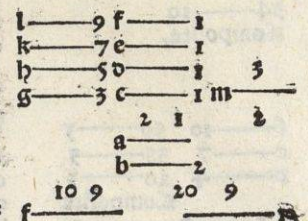
26 ¶ Quotlibet multiplices inuenire: que cũ data supparticulari multiplicem supparticularem constituant.

¶ Sit a data supparticularis / ⁊ b numerus denoians eius ptem / ⁊ m tota eius denoiatio cui ꝗtlibet multiplices supassumãtur: vt quoꝝ nũeri denoiantes sint c / d / e / f: manifestũ est per vicesimãtertiam huiꝰ b in c / ⁊ in d / ⁊ in e / ⁊ in f ꝯstituere nũerũ multiplicisq; denoiatiõez. capio ergo g / h / k / l totidem multiplices vno maiozis denoiationis. et qꝛ g addit vnũ sup multiplicẽ c: si ergo m totalis denoiatio ꝓportionis supparticularis ducatur in g pueniet numerus cũ parte denoiata ab b: quare proportio multiplex supparticularis. vt in presenti figuratiõe pueniret ꝓportio septupla / sesqualka. et ita de h / et k / ⁊ l demonstrabis.



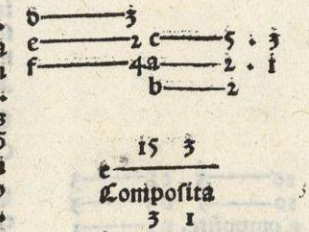
27 ¶ Data multiplice quotlibet supparticulares inuenire quaꝝ quelibet cũ eadem multiplicem suppartientem componat.

¶ Sit a data multiplex / ⁊ b numerus ipam denominãs: sumo quotlibet numeros eo maiozes sed nõ multiplices qui sint g h k l et partes ab ipsis denomiate sint c d e f. vt c sit denoiata ab g / ⁊ d ab h: sicq; ꝯsequẽter. dico g̃ q̃ b in c / in d / in e / ⁊ in f non partem sed partes ꝓducit. nam si ducat b in c ⁊ pueniat m ptes denoiate ab g: p correlariũ vndecime huiꝰ q̃ ꝓportio b ad g: ea ẽ m ad vnũ. sed p hypothesim b est ptes g: igit ⁊ m est ptes vnius. et ita si b ducat in d ⁊ e ⁊ f puenient ptes. itaq; supparticulares ab illis partibus dicte cum data multiplice quelibet ꝯstituet multiplicem superpartientem.



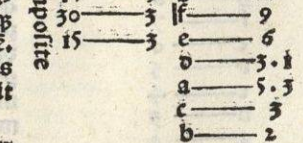
28 ¶ Sola supparticularium sesqualtera: est q̃ cũ nulla multiplice / multiplicem suppartientem producit.

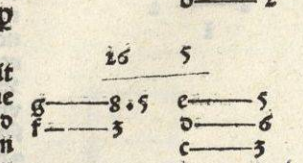
¶ Nam qꝛ sesqualka denoiatur a scõa que est vnius dimidium et dimidiũ in oẽm numerum ductum aut vnum ꝓducit aut numerum aut dimidium addit. nam binarius oẽm nũerũ numerat aut supfluit vnitas ergo denoians partis sesqualke in denoiantem multiplicis: aut multiplicem ꝓducet / aut multiplicem supparticularem. non itaq; cũ multiplice multiplicem suppartientem ꝓducet. at q̃ ois alia supparticularis cũ aliqua multiplice multiplicem suppartientem efficere possit hinc cognoscitur. qꝛ si sumas numerum denoiantem multiplicem vno minozem numero denoiante partem date supparticularis ex precedẽte efficies ꝓpositum. potes ⁊ primam partem facile ex modo demõstrandi vicesime sexte huius cognoscere: quẽadmodum secundam partem ex precedente cognoscis.



29 ¶ Sola multiplicium dupla: cũ nulla suppartiẽte multiplicem efficit proportionem.

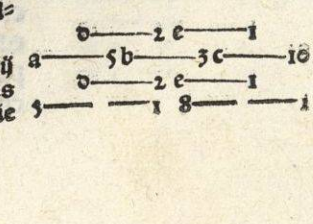
¶ Hec ꝓponit duplam cũ nulla suppartiẽte multiplicem ꝯstituere ⁊ oẽm aliã multiplicem cũ aliqua suppartiẽte: posse multiplicem constituere. Primum patet et sit a ꝓportio dupla et b numerus ipam denoians: sitq; c quecũq; ꝓportio suppartiens. dico a cum c non constituere ꝓportiõem multiplicem. Sumo enĩ partes c q̃ denominẽtur ab d et numerẽtur ab e: et duco b in illas partes ⁊ pueniẽt partes sikes ⁊ numerate a numero qui fit ex binario: id est b in e. sit ergo nũerus illaꝝ partium f: quẽ dico nõ esse numerum. nam nõ erit equalis d: qꝛ e numeraret d. neq; d ipm numerabit. nam fm vnitatem non numerabit: qꝛ eẽt ei equalis. neq; fm binarium qꝛ d et e equarẽtur. neq; fm maiozem binario: quia d maiozest e. cũ ergo b in e denoians in partes alkius non ꝯstituat numerum non ꝓducetur multiplex. Scõm patet nam data quacũq; alka multiplice vt a: capio b numerum ipam denoiantem quem facio aliquaꝝ partium denoiatozem: et sumo numerum partium vno minozem b qui sit c: sitq; d suppartiẽs partium c. dico a et d simul ꝯstituere multiplicem. nam qꝛ b est denoians a et denoians ptiũ d: ideo b in c ꝯstituet nũerum. denoiabitur itaq; cõposita a numero: quare erit multiplex. qd̃ est ꝓpositum.





30 ¶ Data superparticente multiplices quotlibet reperire: quaꝝ quelibet in illam ducta producat multiplicem.

¶ Sit a data suppartiens: et numerus partium sit b: ⁊ nũerus illas denoians sit c. capio ꝑmo multiplicem que denoietur ab c que sit d: deinde que denoietur ab multiplicib̃ c quotquot voluero: sintq; sui denoiantes e f g. dico a datam suppartiẽtez cũ qualibet multipliciũ d e f ⁊ g ꝯstituere multiplicẽ. nam b in c ꝯstituet numerum ⁊ in e etiã numerum qꝛ duplum et in f triplũ ⁊ g quadruplum acceptis scz per ordinem multiplicibus denoiantis c. ergo suppartiẽs a cũ qualibet illaꝝ multipliciũ cõstituit multiplicem. quod est propositum.



31 ¶ Quotlibet suppartientes / quaꝝ quelibet cum ꝓposita multiplice multiplicem supparticularem constituat / inuenire.

¶ Sit ꝓposita multiplex a cuius numerus denoians sit b: sumo quẽlibet nũerum maiozem b qui sit c. et duco b in c ⁊ fiat d. et capio e minozem vno d. capio item partes denoiatas ab e fm nũerum c que sint f. qm̃ enim b in c ꝯstituit d: ideo b in f cõstituet sikes partes fm numerum d. at ipe fm numerum d sumpte faciũt vnũ ⁊ vnã amplius. sit itaq; g suppartiens denoiata a ptibus dictis ab e ⁊ sumptis fm numerum c q̃ (qꝛ b in f ꝯstituit numerum ⁊ partem) eadem suppartiẽs cũ a ꝯstituet supparticularem ⁊ quotq̃t voles eadem rõne tibi sumas suppartiẽtes q̃ cũ a ꝯstituent supparticularem. qd̃ est ꝓpositũ.

32 ¶ Multiplices aliquot sumere: que in datam supparticularem ducte: pcreent multiplices superparticulares.

¶ Sint a ⁊ b mĩmi fmini date, ꝓportionis suppartiẽtis: qui qꝛ sunt ꝯtra se ꝑmi quero p vltimã tertij multiplicem a q̃ addat sup multiplicem b vnitatem que sit c: sitq; nũerus fm quẽ a numerat c nũerus d. sumo vnitatem que sit e. eritq; d ad e multiplex denoiata ab d. at per demõstratũ in principio tertie

10——3
25——3
40——3
Composite.

quinti ꝓportio composita ex a ad b ⁊ d ad e est que est inter ꝓductum ex d in a:ad ꝓductum ex e in b. at e in b facit b:⁊ d in a facit c cõtinens aliq̃ties b ⁊ eius vnã partem.nam positus est c maior vnitate multiplice ad b.igitur ꝓposita ex data suppartiente ⁊ multiplici d ad e est multiplex supparticularis: quod intendit.et ita quãlibet aliam inuenias.

¶ Suppartiẽtes quotlibet que cũ data multiplice ꝓficiant suppartiẽtes multiplices: inquirere. 33

b——5 c——4
a——2
e——10 d——14
f——7
g1 7——10
34——10
Composita.

¶ Sit a denoians multiplicem:sumo duos numeros c d quorꝫ vnus non nũeret alium:sitq̃ b maior ⁊ primus ad a per vltimam tertij quero multiplicem ad a:qui addat sup mltiplicem b nũerum c.sitq̃ huiusmodi multiplex ad a numerus d quẽ numerat a ꝑm f:et multiplex ad b sit e.dico suppartiẽtem cuius denoians partium sit e multiplex b:et nũerus partium sit f esse vnam suppartientum q̃ querũ tur.nam a in f partes illas ductus sil'es partes ꝓducit:quarꝫ numerus est d:ideo numerum ꝓducunt sed ⁊ supfluũt partes ꝑm numerum c que non numerant b:ergo a ⁊ suppartiens ptiũ f denoiatarꝫ ab e que sit g cõstituent ꝓportiõem multiplicem suppartientem.et hoc pacto quotquot voles quere.

¶ Proposita suppartiente multiplices perscrutari : que cum eadem multiplices sup- 34
partientes constituant.

f——10 50——5
e——7 35——5
d——4 20——5
Composite
a 5——3
b ——3
c ——2

¶ Sit a suppartiẽs data/⁊ b denoians ꝓtes:cꝯo numerus partium : et sit d maior b vno/ducaturq̃ c in d ⁊ pueniet multiplex b/⁊ insup totidem ꝓtes.quare multiplex denoiata ab d cum suppartiente assignata a ꝓstituet mltiplicẽ suppartiẽtem.et ita fiet si q̃libet mltiplice ad b maior vno sumat vt e ⁊ f Hecq̃ has ꝓpõnes que inuẽtionem ꝓponũt accuratius exequi curaui:que vbi exactior ꝓsecutio facta fuisset etiam legentibus allatura fuisset fastidium.

¶ Supparticularis ⁊ simul multiplex supparticularis cum eadem multiplice:similes producunt proportiones. 35

c 6——4 12——4
b 3——2 6——2
a 2——1 Composite.

¶ Sit a ꝓportio multiplex/et b ꝓportio supparticularis/et c ꝓportio multiplex supparticularis sit Dico ꝓportiões compositas ex b ⁊ a:et ex c et a esse sil'es.nam cũ supparticularis denoiẽtur ab vno ⁊ parte/⁊ mltiplex supparticularis denoiẽtur a numero ⁊ eadem parte:numerus igitur multiplicis in vnum ⁊ numerum ductus semp facit numerũ.addito igitur vtrobiq̃ qd̃ fit ex eodẽ multiplicis nũero in partem que supest si cum vno nũerum facit et cũ reliquo facit eũdem:et si cum vno pars vel partes supfluũt:itidem ⁊ cum reliquo.quare pueniẽt sil'es ꝓportiões. Id tamen aduerte q̃ si q̃titas denominatiõis crescit in altera ꝓductarꝫ qd̃ maxime in suppartientibus accidere solet:non tñ inde genus ꝓportionis mutabitur.

¶ Quãcunq̃ ꝓportiõem suppartiens cum multiplice constituit:eiusmodi ctã cum 36
eadem efficiet simul multiplex supparticns.

16——3 c8——3
10——3 b5——3
Composite. a2——1

¶ Sit a multiplex:b suppartiens'quecũq̃:et c simul suppartiens multiplex.dico b et a simul/item c et a simul similem constituere ꝓportiõem.huius vt precedentis demonstratio est.

¶ Si ab vnitate numeri cõtinue disponãtur: et singuli ad ꝓximos descẽdendo com- 37
parẽtur:fient oẽs supparticulares proportiones: tanto minores q̃to remotiores.ad vnitatem vero omnes multiplices:tanto minores quãto ꝓpinquiores

k——10
h——9
g——8
f——7
e——6
d——5
c——4
b——3
a——2
I

¶ Sint a/b/c/d/e/f/g/h k numeri ab vnitate continue sumpti:dico ꝓmo k ad h esse supparticularem proportionem.et h ad g.et g ad f.sicq̃ deinceps vsq̃ ad vnitatem.et k ad h minorem esse proportiõem q̃ h ad g et cetere inferiores.et h ad g minorem q̃ cetere inferiores.nam cũ vnitas sit cuiuslibet nũeri pars:et quilibet superiorum addat vnitatem ipsam tñ excludendo sup ꝓximum inferiorem:ergo per diffinitionem k ad h et h ad g atq̃ ita deinceps:est ꝓportio supparticularis.et quia per conceptiõem pars ea minor est que maiorem habet denoiationem et vnitas similiter per conceptiõem sit cuiuslibet numeri pars ab ipo denoiata:ergo ꝓportiones ille ab vnitate remotiores:que a minori parte denominãtur sunt minores.et quãto ipsi vnitati ꝓpinquiores a maiori parte denoiantur: quare tum crũt maiores.et si tota series numerorum esset ordiata:omñs supparticulares specie quidem habite essent non aũt ꝑm numerum accepte.nam ea ꝓportio que est ternarij ad binarium:est senarij ad quaknariũ et duodenarij ad octonarium:non tamen due vltĩe in ordine proximorum numerorum essent accepte. Secũdo dico omnes cõsimiliter ꝓtinue ad vnitatem sumptas esse multiplices tanto minores q̃to ipsi vnitati viciniores.nam a primus post eam nũerus bis eam ꝓtinet et b ter ⁊ c quater.et ita ꝓsequẽter ꝑm oẽs species multiplicium sed ⁊ ꝓtinue a maiore numero denoiak multiplex.et q̃to vnitati vicinior a minore:nullus enim binario minor est.est igitur cognitum quod erat demonstrandum.

¶ Si a cõmuni angulo naturalis series numerorum in longum ⁊ latum extendatur: 38
et ipsis inuicem multiplicatis:⁊ qui pueniũt in angulari cõuentu positis: si singulorꝫ ordinum ad primum fiat collatio ordo cõtinuus multiplicium ꝓcedet : si ad ꝓximos preterq̃ ad primum ordo supparticularũ.et qui circa diametrum collocati sunt: oẽs erunt quadrati.qui vero his hinc inde ꝓximi:sunt altera parte longiores.

Longitudo.

1.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Compartio vbiq; ad primã
2	4.	6	8	10	12	14	16	18	20	Dupla ad eandem.
3	6	9.	12	15	18	21	24	27	30	Tripla ad eandem
4	8	12	16.	20	24	28	32	36	40	Quadrupla ad eandem
5	10	15	20	25.	30	35	40	45	50	Quincupla ad eandem.
6	12	18	24	30	36.	42	48	54	60	Sescupla ad eandem.
7	14	21	28	35	42	49.	56	63	70	Septupla ad eandem.
8	16	24	32	40	48	56	64.	72	80	Octupla ad eandem.
9	18	27	36	45	54	63	72	81.	90	Nõcupla ad eandem
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100.	Decupla ad eandem.
Latitudo.										

Equatio ad alterũ primũ trinsecũ primũ. Dupla. Sesquialtera. Sesquitertia. Sesquiquarta. Sesquiquinta. Sesquisexta. Sesquiseptima. Sesquioctava. Sesquinona.

¶ Formata ergo hac mẽsula Pythagore ⁊ dispositis vt ꝓponit ꝓpositio numerorꝫ ordinibus: dico ꝑmo q̃ si singuli ordines ad primum comparẽtur ꝓuenire per ordinem mltiplices. nã cum vnitas sit caput prime linee: et secũde linee caput ꝑmusq̃ numerus sit binarius. est ergo primus numerus scde linee ꝑmo numero duplus ⁊ ꝑmus multiplex. et quia binarius multiplicat oms nũeros prime linee: et ex multiplicatione ꝯtinue scda linea ꝓcreat ⁊ secũdus numerorꝫ ordo. ergo ꝑ diffinitiõem quoties vnitas in binario toties ꝯtinue singuli ꝑmi ordinis in singulis secundi existunt. igitur singuli secũdi ordinis ad singlos primi dupli sunt atq; eque multiplices. et qꝛ primus tertij ordinis est triplus ꝑmo primi qui est vnitas et ex ꝯtinua multiplicatione singulorꝫ primi ordinis per ipm producũtur singuli tertij ordinis: ergo ꝑ idẽ qd̃ prius singuli tertij ordinis sunt tripli ad singulos primi ordinis. hac q̃q; rõne ꝓbabis singulos quarti ad singulos ꝑmi esse quadruplos/ et quinti quincuplos: sicq; deinceps. Secũdo dico q̃ si fiat comparatio tertij ordinis ad scõm/ ⁊ quarti ad tertium/ et quinti ad quartum/ et sexti ad quintum: et ita ꝯsequẽter ꝯtinue supparticularium ordines surgere. nam ꝯtinue videmus singulos horũ ⁊ singulos illorꝫ ex ductu duorꝫ primorꝫ numerorum descẽdendo ab vnitate sumptorũ in eos enasci. at per precedẽtem illi numeri ꝯtinue seriem supparticularium complent. igit̃ ⁊ singuli posteriorꝫ ordinis ad priorem ordinem sim̃ retinebunt ꝓportiõem. qd̃ est scõm. Tertio dico nũeros qui constant circa diametrum esse quadratos. illi enĩ sunt quorꝫ caput est vnitas: et supremus est oim maximus quasi lõgissima linea: et numerorũ ordines quasi ex equo ꝑ medium secãtes. quos dicimus esse quadratos. nam illos ꝯtinue videbis ex lateribus equalibus ꝓductos vno sp̃ ꝑm nũerorũ seriem crescentibus. erũt igit̃ oẽs quadrati. et si lineas ad eorꝫ latera equidistãter ꝓtraxeris: ꝯtinue quadratam cõcludes figuram. Quarto dico numeros hinc ⁊ inde quadratis altrisecus prime adiacẽtes: esse altera parte longiores. nam oẽs illi ꝑm numerorum seriem ꝓducũtur ex lateribus vno distãtibus: q̃ vnum eorꝫ latus sit quadrati latus: et alterũ sit vno latere eiusdẽ quadrati minus. sicq; tota cognoscit̃ ꝓpositio. Et ex hoc q̃q; notum eẽ potest q̃ si singuli altera parte lõgiores singulis quadratis quibus altrinsecus circũsistunt comparẽtur: a ꝓportione dupla oẽs supparticularium species ꝓcreantur: vt duo primus altera parte lõgior vnitati primo quadrato cõparatus est duplus. et 6 altera ꝑte longior ad 4 scõm quadratum relatus per scdam partem huius est sesqualter. et 12 tertius alta parte lõgior ad 9 tertium quadratũ ꝑ idem est sesquitertius: et hoc pacto ꝯsequẽter. ¶ Et idem de supparticularũ speciebus euenerit: si primum altera parte longiorem secũdo quadrato/ et scõm alta parte lõgiorem tertio/ et tertium quarto. et hoc pacto deinceps comparaueris. ¶ Et rursum si primum altera parte longiorem inter primum quadratũ ⁊ scõm collocaueris: similis ꝓportionũ habitudo seruatur/ eritq; cõtinue ꝓportio dupla. ¶ Et si scõm alta parte longiorem/ inter scõm quadratum ⁊ tertium collocaueris: ꝯtinue sesqualta habitudo seruabitur ex prima ⁊ scda parte huius. et ita ꝯsequenter reliquas supparticularũ ꝯiũctas hĩtudines reperias si reliquos lõgilateros nũeros suis quadratis medios inknexueris: ex quibus digna illa ꝯtemplatio ad Pythagoricã ⁊ Platonicam intelligentiam momẽtum habens q̃ de quadratis ⁊ alta parte longioribus diuus Seuerinus 33 capite scõi sue Arithmetices elegantissime affert: vel perspectissima esse potest.

39 ¶ Si supparticulares ab vnitate sumãtur: binis ⁊ binis disiũctim ꝯiũctis prima multiplicium: ac consequẽter oim supparticularium species ꝓuenire cõueniet.

¶ Sint a/b/c/d/e/f/g/h/k ꝯtinue ab vnitate sumpti supparticulares numeri: ⁊ ꝯiungãtur disiũctim bini ⁊ bini scz c a. e c. g e. et k g. dico c ad a esse primam multiplicium et e ad c et g ad e ⁊ k ad g ꝯtinue ꝯstituere species supparticularium. nam ꝑ penultimam erũt a/b c d e f g h k numeri ꝯtinue ab vnitate sumpti: sed ⁊ vno sp̃ intermisso hoc pacto binis ⁊ binis disiunctim sumptis: sumuntur oẽs ab vnitate pares. quare per decimãoctauam septimi ipsorꝫ ꝯtinue sunt eedem ꝓportiões que numerorũ ab vnitate cõtinue dispositorꝫ. at binarij ad vnitatem est prima multiplicium et sequẽtium ad suũ precedentem est series supparticularium. constat igitur quod erat demonstrandum.

k——10
h——9
g——8
f——7
e——6
d——5
c——4
b——3
a——2
1

¶ Si ꝓpositis ab vnitate quadratis: nũeri eis vno minores sumãtur: supparticlares ab illis dicte: proportionum ab vnitate erunt differentie. 40

c 4 — f 16 — k 15
b 3 — e 9 — h 8
a 2 — d 4 — g 3
1

¶ Sit vnitas: et numeri post ipam a b c: et quadrati eoꝝ d e f: et minores eis vno g h k. dico supparticulares denomiatas ab g/h/k que sint d ad g. e ad h. et f ad k: esse differẽtias ꝓportionum ab vnitate sumptaꝝ vt d ad g esse proportionem qua abundat dupla sup sesqualteram et e ad h esse qua abundat sesqualtera sup sesquitertiam: hũcq̃ in in modum ꝓsequẽter. Nam p primam quiti differẽtia qua abũdat a ad vnitatẽ. et b ad a est ꝓportio q̃ fit ex ꝓductis a in se ⁊ vnitatis in b: sed a in se facit d qñquidẽ d est eius quadratus ⁊ vnitas in b per scdam ⁊ decimãnonam primi q̃tum g. igitur ꝓportio d ad g est differẽtia ꝓportionis a ad vnitatem ⁊ b ad a. et hac rõne ostẽdetur ꝓportiõem e ad h esse differẽtiam ꝓportiõis b ad a et c ad b. et ita de quibuslibet consequẽter. quod est propositum.

16 15 — h; 5 4 — f; 4 1 — c
9 8 — g; 4 3 — e; 3 1 — b
3 2 — d; 2 1 — a
20 12 — 12 1
Composite mediarum.
18 10 — 10 1
Composite extremarũ.

¶ Si ordinẽtur ꝓtinue multiplices ⁊ supparticulares: erit vt extremarũ multiplicium quelibet duc comũcte minus sint q̃ media duplicata vel due medie comũcte: supparticulares vero maiores. 41

¶ Sint primo ꝓtinue multiplices a b c: dico cõpositam ex a ⁊ c minorem esse proportiõem q̃ ꝓportio b duplicata. nam quia denominãtes ꝓtinue equaliter se excedũt: ergo per scdam primi denoians b est medietas denoiantiũ a ⁊ c simul sumptoꝝ. et p decimãnonam eiusdẽ denoians b in se maiorem ꝓducit numerum q̃ a in c. at p octauam huius b in se ꝓducit equalẽ composite ex ꝓportione b duplicata que per vicesimãscdam huius erit multiplex. et denoians a in denoiantem c, ꝓducit denoiantem per idem multiplicis ex a ⁊ c. igitur multiplex ex b duplicata: a maiore nũero denoiata q̃ multiplex ꝓposita ex a et c maior est multiplice cõposita ex a ⁊ c. qõ est primum. Sint secũdo d e f ꝓtinue sumpte supparticulares quaꝝ d sit maxima: ⁊ differẽtie eaꝝ g ⁊ h. dico ꝓportiões d ⁊ f simul maiorem ꝓstituere proportionem q̃ sit ꝓportio e duplicata. nam qꝝ per precedẽtem partes g denoiant a minori numero et partes h ab maiori: nam a numeris cõtinuorũ quadratoꝝ vno minoribus. ergo per primam huius ꝓportio g maior est ꝓportiõe h. at d ⁊ f sunt tanq̃ e g ⁊ f. nam d per se tm̃ est q̃tum e g. et e bis tanq̃ e f et h. et monstrata est e maior h. igit per quintam quinti erũt d ⁊ f maius q̃ c duplicata. et hoc modo facile idem ꝓ vtraq̃ parte ostendas si due ponãtur medie ꝓportiões. sicq̃ cõcluditur propositum.

c 5 — d 5 — 1
b 4 — c 4 — 1
a 3 — b 3 — 1
2 — a 2 — 1

¶ Si impares post ternarium ꝓtinue sumpti: ad nũeros post binarium naturali serie ordinatos comparẽtur: exibunt supparticientes ꝓtinua denoiatione crescentes. 42

¶ Sint a b c numeri post binarium cõtinue sumpti: et d e f sumpti cõtinue impares post ternarium. dico d ad a/ et e ad b/ et f ad c supparticiẽtes ꝓtinua denoiatiõe crescẽtes. nam cũ differẽtia imparium sit binarius d addit sup a binarium qui minor est eo vno. igitur d ad a est supparticiẽs. et itez cum differẽtia imparium sit binarius: et nũeroꝝ ab vnitate dispositoꝝ differẽtia sit vnitas: addet e sup b vno plus q̃ d sup a. sed et qꝝ c/ e/ f sunt continue impares: addet f sup c adhuc vno plus q̃ e sup b. crescunt igitur differentie imparium sup nũeros ab vnitate sumptoꝝ sicut ⁊ ipsi nũeri: ita q̃ cõtinue precedẽs est differẽtia imparis sup sequẽtem. sed numeri vnitate distãtes sunt ꝓtra se primi. igitur differẽtia q̃ est numerus precedẽtis ad sequẽtem numeroꝝ ab vnitate dispositoꝝ: non est pars sequẽtis. est igitur p primam ꝑmi eius ꝑtes. erit igit ꝓportio e ad b supparticiens/ ⁊ f ad c supparticiẽs. et qꝝ sue partes fm numeroꝝ vnitate dispositoꝝ q̃titatem crescunt: erũt ⁊ eaꝝ ꝓtinue crescẽtes denoiationes: imo ⁊ quia denoiant a numeris ꝓtra se primis ꝓtinue ꝓcedent diuerse supparticientiũ species. qõ est propositum.

f 9 — c 5
e 7 — b 4
d 5 — a 3

¶ Si compositus ex primo pari ⁊ impari ⁊ qui ex reliquis imparibus eidem ꝓiũctis aggregãtur: ad numeros a duobus dispositos comparẽtur: ꝓueniẽt diuerse multiplices supparticulares fm nũeros multiplicium ⁊ denoiationes partium siles habẽtes. 43

¶ Sunt a b c d nũeri a binario ꝓtinue succedẽtes: sintq̃ e/ f/ g/ h nũeri a ternario ꝓsequẽter impares sitq̃ k compositus ex a ⁊ e primo pari ⁊ impari. et l compositus ex f ⁊ k. et m cõpositus ex g ⁊ l. et n ex h ⁊ m: dico k/ l/ m/ n cõpatos ad a/ b/ c/ d/ facere multiplices supparticulares fm nũerum multipliciũ ⁊ siles partium denoiationes. nam k ꝓponit ex a ⁊ e binario ⁊ ternario. at e addit sup a partem vnam ab ipso denoiatam scz vnam mediam seu scdam qõ idem valeat: ergo k compatus ad a bis ipm ꝓtinet et eius mediam et ad ipm est primus multiplex supparticularis. sed ⁊ p decimãnonam septimi f cõponitur ex a et b. et g ex b et c. et h ex c et d. et per septimã sexti quadratũ cuiuslibet addit sup quadratũ ꝓimi qõ ex ipsis cõponit vt quadratum b sup quadratum a: q̃tum qõ cõponit ex a ⁊ b. et quadratũ c sup quadratum b q̃tum cõponit ex b ⁊ c. et ita deinceps. et quia k addit sup quadratũ a vnitatem: l similiter addet sup quadratum b: et m sup qnadratum c: et n super quadratum d vnitatem. quare singuli eoꝝ singulos illoꝝ cõtinent fm se et partem p conceptiõem ab ipis dictam. erũt igitur ꝓsequẽter fm ipsos: multiplices supparticulares. quod est propositum.

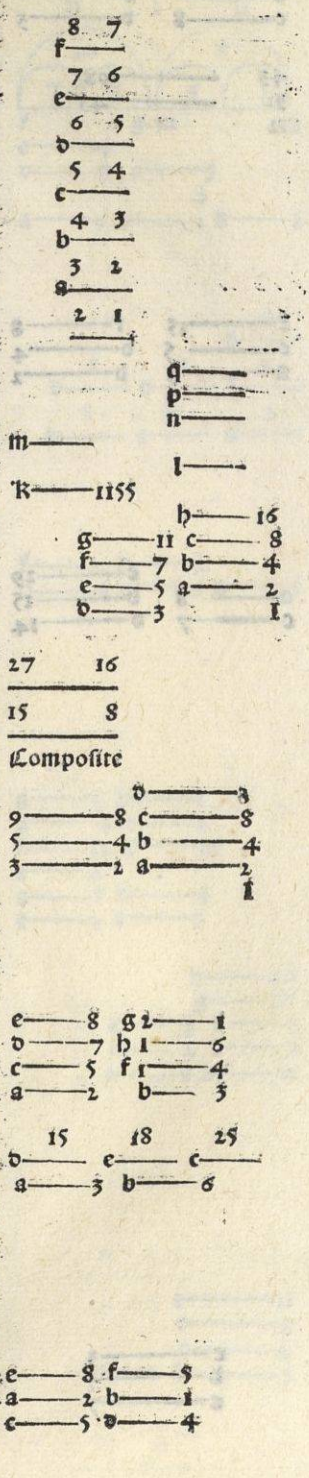
d 5 — h 9 — n 26
c 4 — g 7 — m 17
b 3 — f 5 — l 10
a 2 — e 3 — k 5

o 6 — k 35 — f 11
n 5 — h 24 — e 9
m 4 — g 15 — d 7
l 3 — c 8 — b 5
a 3

¶ Si duo ꝑmi impares ꝓiũgant: cõpositoq̃ reliqui ipares applicẽtur: erit vt ꝓportiones cõpositoꝝ ad nũeros post binarium sumptos sint diuerse multiplices supparticientes ⁊ ab eodem numero ⁊ partes numeratas ⁊ multiplices denoiatas habẽtes. 44

¶ Sint duo primi ipares a ⁊ b: et cõpositꝰ sit c: sintq̃ reliq̃ ipares d e f qui addãt ꝓposito c: sintq̃ aggregati g/ h/ k/ et l/ m/ n/ o/ numeri ꝓtinue post binariũ sumpti. dico c ad l/ et g ad m/ et h ad n/ et k ad o diuersas eẽ multiplices supparticiẽtes ⁊ singulas ab eodem numero multiplices denoiatas ⁊ partes

numeratas.nã b addit super a binariũ:ergo c bis continet a illi superaddẽs binariũ. sed binarius est vno minor a:ergo est eius totidẽ partes.est igitur c ad a prima multiplex superpartiẽs: quare ꝛ ad l: qꝛ a et l sunt idem numerus. Item qꝛ vtvisum est c addit binariũ super eo qõ fit ex binario in a.et binarius in m per nonã primi facit c:ergo c bis cõtinet m.sed et per decimãnonam septimi d cõstat ex l et m:ꝛ g cõstat ex c et d.ergo g cõtinet ter m.ꝛ insuper l tres scꝛ eius partes.eritq; g ad m secũda multiplex suppartiens.et hunc in modũ probabis l in n cõstituere g.ꝛ per decimãnonã septimi m n constituere e.ꝛ h cõtinere n secundũ m.et insup m quattuor scꝛ partes n.et ita cõsequenter inuenies multiplicium denoiationes et ab eodẽ numero suppartientiũ partes numeratas:qõ est propositũ.



45 ¶ Si due diuerse superparticulares coniũgantur composita aut erit dupla aut superparticularis aut superpartiens.

¶ Sint a b c d e f quotlibet per ordinẽ supparticulares:dico q̃ si due quelibet simul iungant̃ compositam esse aut duplã aut superparticularẽ aut suppartiẽtem. nam si a et b sesqualterã et sesquitertiã cõiungis cõposita erit dupla.nã constituta dupla:inuenis per primã quinti sesquitertiã ꝓportionem quã abundat dupla super sesqualterã.constituet igitur due prime duplã.sed si cum a aut c aut d aut e aut f cõiunxeris:qꝛ per tricesimãseptimã huius quelibet est minor b cõposita ꝓportio erit illa dupla minor et ideo nõ multiplex. est em̃ dupla per eandẽ tricesimãseptimã huius multipliciũ minima:igit̃ cõposita ꝓportio aut erit supparticularis aut superpartiẽs:quod est propositũ.

46 ¶ Superparticularem inuenire:cum qua quotlibet superparticularium quelibet:superparticularem componant.

¶ Sint a b c quotlibet numeri ab vnitate ꝓportionales:et sit d primus ad a qui idẽ etiã per vicesimã septimã quarti erit primus ad b et c ꝛ cõiungatur d cuilibet eorum et prouenĩãt compositi e f g.eritq; per nonã tertij quilibet eorũ ad quelibet eorũ et quoslibet alios illius ordinis ꝓportionaliũ primus. sumo iterũ cõtinue ꝓportionalẽ post primos qui sit h et per vicesimãquintã tertij minimũ quẽ numerant d e f g qui sit k qui per vicesimãseptimã tertij erit primus ad h.sit itẽ pervltimã tertij l multiplex h ꝛ m multiplex k.addatq; l super m q̃tum est d.deinde addo sigillatim ad l numeros a b c et prouenĩãt cõpositi n p q:manifestũ est l esse superparticularẽ ad m. nã ei superaddit suã partem scꝛ d:sed et n ei superaddit d ꝛ a quod est e.et p ei superaddit d et b quod est f.ꝛ q ei superaddit d et c quod est g.ꝛ per vicesimãtertiam primi e f g quilibet est pars m:qꝛ est pars k.igitur n p q pariter et l sunt supparticulares ad m.constare ergo potest propositum.

47 ¶ Data superparticulari:quotlibet alias inquirere quarum quelibet cum eadem:superpartientem efficiat.

¶ Sit a denominãs partem date supparticularis.sumo ab vnitate cõtinue ꝓportionales quorũ ipse sit vnus qui sint a b c.dico ꝓportionẽ superparticularẽ dictã ab a cum supparticulari cuius pars denominat̃ ab b vel ab c constituere superpartientẽ:qualiũ presens proponit inuentionẽ.nam cõposita ex ꝓportione supparticulari denoiata ab a et denoiata ab b habet in denoiatione suiunũ et partes q̃ dicũtur ab a ꝛ ab b per octauã huius. q̃quidẽ partes per quartã huius denominãtur ab eo qõ fit ex a in b qui sit d sed ille per decimãtertiã huius nõ constituunt partẽ:ergo cũ ꝓportio cõposita ex demõstratione penultime nõ sit multiplex neq; supparticularis:qꝛ partes composite non cõstituunt partẽ vnã.relinquit̃ ergo compositã esse superpartientẽ: ꝛ ita de qualibet alia.

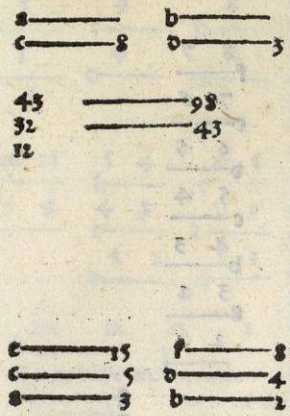
48 ¶ Omnis supparticularis cũ qualibet suppartiẽte:cõstituit ꝓportionẽ tripla minorẽ

¶ Nam dupla cũ sesqualtera que per tricesimãseptimã huius est maxima superparticulariũ ponunt per corrolariũ vicesimetertie huius triplã: sed oĩs proportio suppartiens est minor ꝓportione dupla igitur quecũq; ꝓportio superpartiẽs cũ maxima supparticulari aut minori supparticulari p quintã quinti cõstituet proportionẽ tripla minorẽ:quod est propositũ.

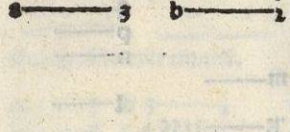
49 ¶ Datã proportionẽ que tripla minor sit:in supparticularẽ ꝛ suppartientẽ partiri.

¶ Sit primo supparticularis quecunq; data que hoc modo diuidi petatur.capio a ꝛ b minimos terios a quidẽ minorẽ ꝛ b maiorẽ inter quos cõsistat.qui per tricesimãseptimã huius erunt numeri in continua serie numerorũ sumpti:solaq; vnitate distãtes.sitq; c cõpositus ex eis cui addatur a et pueniat d: quoquidẽ maior vnitate sit e ꝛ ducãtur a et b in d et prouenĩãt f et g.eritq; per octauã secũdi ꝓportio g ad f ea que b ad a. Itẽ duco a in e ꝛ pueniat h:addetq; h super f per nonã primi q̃tum ẽ a:et a est ps f.nã a positus est numerare f secundũ d:igitur h ad f est ꝓportio supparticularis. Item qꝛ b est maior a vnitate per decimã primi g addit super f q̃tum est d.ergo g addit super h minus d quantũ est a: sed substracto a ab d manet c.igitur g addit super h quantũ est c ꝛ per nonam ꝛ decimã tertij c est primus ad g.erit itaq; g ad h ꝓportio superpartiẽs:quare proportio supparticularis assignata que est g ad f in duas diuisa est:scꝛ h ad f supparticularẽ et g ad h superpartientẽ:quod est propositũ quo ad hoc. Secundo sit superpartiẽs inter a et b minimos terminos:sitq; b maior terminus et ducatur b in se et in a et prouenĩãt c ꝛ d. eritq; per septimã secundi ꝓportio c ad d ea suppartiẽs que b ad a. Item addo a ad d et prouenĩãt e.per decimã primi a numerabit e secundũ numerũ vno maiorẽ b.quare e ad d est superparticularis.et quia per decimam tertij e est primus ad b:ergo per vnd decimã eiusdem est etiam primus ad c.et cum differentia c ad e non sit vnitas sed vnitate maior:ergo non erit supparticularis. Relinquitur igitur c ad e proportionẽ esse superpartiẽtem:quare suppartiẽs assignata c ad d diuisa est in duas:scꝛ e ad d superparticularẽ ꝛ c ad e superpartiẽtem quẽadmodũ erat propositũ. Tertio sit

inter a et b ꝓportio dupla que qꝛ vt demõstratum est in quadragesimaquita huius constat ex sesqualtera ⁊ sesquitertia substrahak per primã quinti ꝓportio supparticularis c ad d quecũq; minoꝛ sesquitertia a ꝓportione a ad b: sitq; residua e ad f qua abũdat a ad b super c ad d. ⁊ qꝛ maioꝛ est ꝓportione sesqualtera que est maxia superparticulariũ neq; est multiplex: qꝛ ꝓportio a ad b est minima multipliciũ que nõ resoluitur in multiplices. reliquitur ergo ꝓportionẽ e ad f esse suppartiẽtem. et qꝛ c ad d ⁊ e ad f cõstituunt ꝓportionẽ a ad b constat ꝓportionẽ duplam in supparticularẽ ⁊ superpartiẽtem esse diuisam. Quarto sit inter a et b quelibet ꝓportio a dupla ad triplã cõstituta: sitq; inter c et d proportio cõposita ex dupla ⁊ sesquitertia si proportio a ad b est minoꝛ ꝓportione c ad d. ergo substracta ꝓportione sesquitertia a ꝓportione a ad b remanebit proportio minoꝛ dupla: sed maioꝛ sesqualtera. quare illa residua erit superpartiẽs: ⁊ sic ꝓportio a ad b esset cõposita ex supparticulari vt sesqtertia et suppartiente atq; in eas diuisibilis. ⁊ si a ad b sit equalis c ad d aut maioꝛ: qꝛ ꝓportio addita duple in ꝓportione a ad b: erit minoꝛ sesqualtera cũ dupla ⁊ sesqualtera per corrlariũ vicesimetertie huiꝰ constituãt triplã. et sesqualtera addita sesqualtere minus cõstituat ꝯ dupla cũ sesquitertia q̃ sesqualtera et due sesquitertie plus sint ꝯ sesqualtera sesquitertia ⁊ sesquiocraua. at per primã quinti he cognoscũtur equari duplate sesqualtere: ⁊ illi duple et sesquitertie. ergo substracta sesqualtera de proportiõe a ad b remanebit ꝓportio minoꝛ dupla: sed ⁊ maioꝛ sesqualtera. quare suppartiẽs. esset itaq; proportio a ad b in ꝓportionẽ supparticularẽ sesqualterã et superpartiẽtem quomodo propositũ est secabilis: quod est propositum.

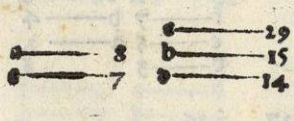


¶ Maximã superpartientẽ inuenire: que ex duabus supparticularibus ꝓducitur. 50



¶ Sit a ad b ꝓportio sesqualtera et c ad d ꝓportio sesquiquarta: sitq; e ad f ꝓportio ex his cõposita dico proportionẽ e ad f esse maximã suppartiẽtem que ex duabus supparticularibus ꝓducitur. nã qꝛ dupla ex quadragesimaquita huius producit ex sesqualtera ⁊ sesquitertia que sunt maxie supparticulares: ergo ꝓportio e ad f est minoꝛ ꝓportione dupla. sed ⁊ eadẽ maioꝛ est sesqualtera: q̃ ex ea cum altera cõposita fit. ergo e ad f est ꝓportio suppartiens: sed ⁊ quelibet minoꝛ supparticularis cũ proportione a ad b sesqualtera: aut c ad d sesquiquarta p̃ quintã quinti minorẽ ꝓportionẽ cõstituet ꝯ e ad f. est igitur e ad f maxima suppartiẽs ex duabus supparticularibꝰ ꝓducta: quod est ꝓpositum.

¶ Superpartientẽ inuenire: que in duas superparticulares diuidi non possit. vnde patet qualibet superpartiente aliam esse maioꝛem. 51

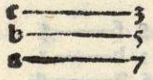


¶ Sit b ad a maxima ꝓportio suppartiens per p̃cedentẽ cognita: que ex duabus supparticularibus ꝓducta sit ⁊ differẽtia b ad a sit c: manifestũ est a esse maioꝛẽ c suis quidẽ partibus. capio itẽ numerũ d vno minorẽ b: ⁊ tunc ꝓportio a ad c: qꝛ a maioꝛe parte denoĩatur maioꝛ est ꝯ proportio b ad d. addo ergo d cũ b et fiat e: manifestũ est e ad b esse suppartientẽ cum cõtineat b ⁊ d eius ꝓtes. et per secundã partẽ decimequãte secundi erit maioꝛ ꝓportio e ad b ꝯ b ad a. et qꝛ ꝓportio b ad a diuidit in maxias supparticulares constituẽtes suppartiẽtem vt ex precedenti cognoscit et suppartiens e ad b sit maioꝛ superpartiẽte b ad a. nõ diuidet ergo suppartiens e ad b in duas minoꝛes ꝯ b ad a: neq; in easdem in quas diuidit b ad a. relinquit ergo in nullas duas supparticulares superpartiẽtẽ e ad b posse diuidi quod est propositũ. Et corrlariũ ex modo demõstrationis cognoscit.

¶ Sola multiplice qualibet non potest sumi minoꝛ: et sola superparticulari qualibet non potest sumi maioꝛ. 52

¶ Dico primo qualibet multiplice posse sumi maioꝛẽ. nã per tricesimãseptimã huius oẽs numeri ad vnitatẽ ꝓparati cõstituunt multiplices et tãto maioꝛes quãto ab vnitate remotioꝛes ⁊ series nũeroꝛ in ĩmensum euadit. igit qualibet multiplice potest sumi maioꝛ. Secõdo dico q̃ nõ qualibet multiplice põt sumi minoꝛ. nã per eãdem quãto numerus ꝓpinquioꝛ vnitate fuerit: tanto ille ad vnitatẽ minorẽ cõstituit multiplicẽ. at descẽdendo nõ abitur in infinitũ. non igit qualibet multiplice est dare minorẽ qd̃ in aliis minime quẽadmodũ monstrabit accidet. Tertio dico qualibet supparticulari esse minorẽ Nã pars per primã huius que a minoꝛi numero denoĩatur maioꝛ est: et quãto a maioꝛi minoꝛ. et qꝛ series numeroꝛũ in infinitũ succrescit: nõ dabitur pars adeo parua qua minoꝛ dari non possit. qualibet igitur supparticulari potest dari minoꝛ. Quarto dico nõ qualibet supparticulari esse maioꝛẽ. naꝫ pque a numero ꝓpinquioꝛe vnitati denominak maioꝛ est: ⁊ qꝛ nõ contigit numerũ in infinitũ decrescẽ dabit ergo tandẽ supparticulariũ maxima. at vtriusq; oppositũ vt iam ostẽsum est in multiplicibus accidebat. Quãto dico qualibet suppartiente esse maioꝛẽ. hoc ex corrlario p̃cedentis notũ est. Sexto dico omni suppartiente esse minorẽ. nam quacũq; data vt verbi causa supbipartiẽte tertias sumo aliã a totidẽ partibus: denominatis a maioꝛe numero quẽ nõ numerẽt: vt supbipartientẽ quãtas q̃quidẽ qꝛ a totidẽ minoꝛibus ꝓtibus denominak: neq; pluribus erit minoꝛ suppartiente data. qua supbipartiente quãtas supbipartiens septimas minoꝛ est et hac supbipartiens nonas: sicq; cõsequenẽ ꝑm crementum numeroꝛ infinitũ: quod est ꝓpositum. Potest ⁊ id vltimũ ostendi ex tertia parte presentis: adiuuante quadragesima nona huius.

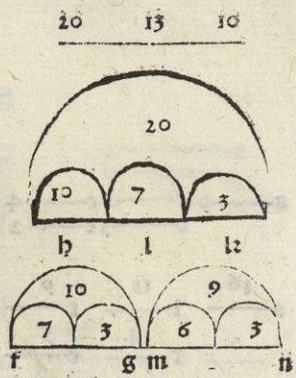
¶ Quelibet due supparticntes coniũcte: proportionẽ quadrupla minorẽ constituẽt. 53



¶ Sit inter a et b proportio superpartiẽs: itidem inter b ⁊ c. dico proportionẽ a ad b et b ad c simul: minorẽ quadrupla constituere proportionem. nam a est minus duplo b: et b similiter minus duplo c. ergo a ad c per quintam quinti est minoꝛ proportione quadrupla: que per octauam huius ex duabus duplis constat. est ergo clarum propositum.

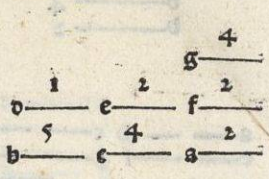
54 ¶ Datã proportionẽ que quadrupla minor sit in duas superpartientes diuidere.

¶ Sint date ꝓportionis minimi termini a et a b: qui coniuncti faciant d: sitq; e maior d vno qui coniuncti faciant f: cui addatur equale d. sitq; totus f g: ducaturq; a in f g et ꝓueniat h: ⁊ ex a b in eũdem fiat h l: l. patet igitur q̃ ex b in f g fit l2 l: et ex b in g fit l2. quare ex b in f fit l. sit item c triplus ad a et ex c in g fiat m n: sitq; n equalis l2. per octauam secundi erit proportio h l/l2 ad h tanq̃ a b ad a. ⁊ quia a b per hypothesim est minus q̃ quadruplũ a: est ergo b minus q̃ triplum a. quare minus q̃ c. ⁊ quia g est equale d et n equalis g: constat m esse equalem vel multiplicem ad d per duodecimã primi. Item q; d et e sunt contra se primi: ergo per nonam tertij f erit ad vtrunq; primus. et per eandẽ f et g simul ad d primus. et q; a est minor d ⁊ ad ipsum primus per eandẽ nonam: quod fit ex a in f g scz h non numerabitur per decimã eiusdem ab d. et q; d numerat l2 ⁊ d nõ numerat h: ergo l2 per vicesimãtertiam primi nõ numerabit h. et quia f g maius est q̃ triplum d: ergo maius erit h q̃ n: maius ergo q̃ l2. erit ergo l2 partes h. et eadem ratione q; a b est minor ⁊ primus ad f nõ numerabit f quod fit ex a b in f g: scz h l2 l. et q; f numerat l: ergo l nõ numerabit h l2 l: quare neq; h l2. ⁊ q; per nonã primi l est quãtum l2 bis et b. ⁊ n est equalis l2 et m equalis vel maior d ⁊ maior b et h maior m n: erit h l2 maior l. erit igr l partes eius. constat itaq; h l2 ad h esse superpartientẽ ⁊ h l2 l ad h l2 etiam esse suppartientẽ: in quas diuisa est proportio quc est inter a et a b: factumq; esse propositum.



55 ¶ Omnis multiplex supparticularis addit super similez multiplicẽ: superparticularẽ a numero qui fit ex ductu numeri multiplicis in numerũ partis denominatã.

¶ Sit b ad a proportio multiplex superparticularis: sitq; c ad a similis multiplex. dico proportionẽ b ad a addere super proportionem c ad a supparticularem denominatam a numero qui fit ex ductu numeri multiplicis in numerũ denominantẽ partis superparticularis. Sit enĩ d quo abundat b supẽ et denominãs multiplicis sit e ⁊ denominans superparticularis sit f: manifestũ est ergo q̃ a erit in c secundũ e: ⁊ d in a secundum f. fiat ergo g ex e in f: eritq; per vicesimãtertiam primi d in c secundũ g. quare b continebit c et partem denominatã ab g. continet igitur proportio b ad a proportionẽ superparticularem denominatã ab g numero qui fit ex ductu e denominãtis multiplicis in f numerũ denominantem partis superparticularis: quod est propositum.

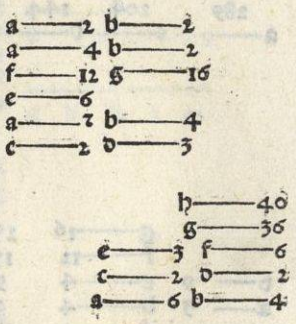


56 ¶ Omnis multiplex superpartiẽs cuius multiplicis numerus partes numerat: addit super eandem multiplicẽ: superparticularẽ ab vna partium denominatã.

¶ Sit ꝓportio b ad a ꝓportio multiplex suppartiens: sitq; d numerus denominãs multiplicẽ scõm quẽ sit sumptus numerus partiũ b ad a. dico ꝓportionẽ b ad a addere super similẽ multiplicẽ: superparticularẽ denominatã ab vna illarum partiũ. Sumo enĩ c ad a similẽ multiplicẽ. ⁊ q; b maior est c: sit f quo abundat b super c. q; enĩ f est partes a sumpte scõm d et denominate ab a: ⁊ a est pars c denominata ab d. et cũ ex d in a fiat c ex f in a fiet c. est ergo f pars c denomĩata ab a. continet igitur b ad a proportionem superparticularẽ super ꝓportione c ad a denominatã ab vna partium superpartiẽtis: quod erat demonstrandum.

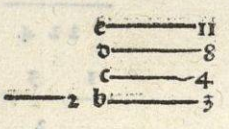
57 ¶ Multiplicẽ superpartientẽ inuenire: quc super totã multiplicẽ addat superparticularem: cũ sint numerus partiũ ⁊ numerus denoians multiplicẽ dati cõmensurabiles.

¶ Proponit hec: q̃ si dati numeri quorũ vnus denoiat multiplicẽ et alter est numerus partiũ simul multiplicis suppartiẽtis: sint ad inuicẽ cõmensurabiles inuenire multiplicẽ suppartiẽtem que super similem multiplicẽ addat supparticularẽ. Sint ꝑmo a numerus denominãs multiplicẽ ⁊ b numerus partiũ dati cõmensurabiles. sitq; b numerus sumptus scõm a et per ꝑcedentẽ factum erit ꝓpositum. Sint secõo a ⁊ b cõmensurabiles: sed b sit pars a et adiuuãte ꝑcedente ꝑuicesimãtertiam primi cõcludes ꝓpositũ. Sit tertio a pars b dicta ab c: sumo quẽlibet numerũ maiorẽ a: quẽ tamen nõ numeret qui sit d: et duco c in d et ꝓueniat e. ⁊ q; c in a facit b: erit e maior b. et q; p septimã secũdi b ad e sicut a ad d et a nõ numerat d. igitur neq; b numerabit e. duco a in e ⁊ ꝓueniat f: cui adiuncto b fiat g. dico ergo g ad e esse suppartientẽ que querit. nam g cõtinet e secundũ a et insup b partes e. ⁊ q; b est pars f q̃ e multiplex sit ad c: ⁊ a in c faciat b. addet igitur g sup f multiplicẽ ad e denominatũ ab a: numerũ b eius partẽ: quod est ꝓpositum. Quarto sint a ⁊ b cõmensurabiles: sed neuter alterũ numeret. ⁊ sit c maximus cos numerãs: numeretq; c numerũ b secõm d. capio e quẽcunq; numerũ maiorẽ c: quẽ tamẽ c nõ numeret: quẽ duco in d et ꝓueniat f qui erit maior b: neq; ab eo numerabitur. dico ergo vt in precedenti parte ĩmediate mõstratũ est: ꝓportionem suppartientẽ denominatã ab a ⁊ a partibus dictis ab f sumptis secundũ numerum b: addere super multiplicem dictam ab a: superparticularẽ. hoc vt in precedenti parte monstratur: sicq; totum construitur propositum.



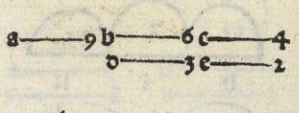
58 ¶ Multiplicẽ superpartientẽ cuius multiplicis numerus et numer⁹ partes numerãs fuerint adinuicẽ primi: super similẽ multiplicẽ: suppartientẽ addere necesse est.

¶ Sit a numer⁹ multiplicis et b numerus partiũ superpartiẽtis: sintq; a ⁊ b numeri adinuicẽ primi dico multiplicẽ superpartientẽ denominatã ab a et partiũ b: super similẽ multiplicẽ addere proportionẽ superpartientẽ. sit enĩ c denominãs partes b manifestũ est c esse maiorẽ b: neq; b ipm numerare duco ergo a in c ⁊ fiat d per vicesimãprimam tertij b nõ numerabit d. addo igitur b super d et fiat e: q; enĩ e continet c secundũ a. et insuper partes c sumptas secundũ b est proportio e ad c multiplex superpartiens denoiata ab a et partium b. sed ⁊ proportio d ad c est multiplex dicta ab a: et e addit super d

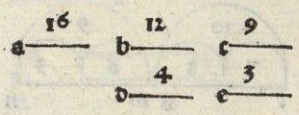


numerū b qui monstratus est partes d. constat itaq; ꝓportionē multiplicē superpartientē dictā ab a: et partiū b addere super similē multiplicē: vt ꝓponebat ꝓportionē suppartientē: qd est propositū.

¶ Sola superparticulariū sesqualtera multiplicē superparticularē procreat. 59



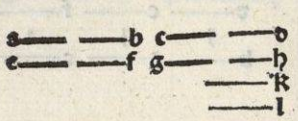
¶ Esto a ad b sesqualtera et b ad c similiter. manifestū est ꝓportionē a ad c compositā esse ex duabus sesqualteris et a continet b ⁊ eius medietatē que sit d: et b cōtinet c ⁊ eius medietatē que sit e. et quia per quintā secundi d ad e sicut b ad c: ergo d continet e ⁊ eius medietatē. d ergo et e simul tantū sunt q̄tum c et vna pars dicta ab c. cōtinet ergo a numerū c bis: et vnā eius partē. q̄ a cōtineat c et d e totā differentiā a ad c: quare due sesqualtere cōstituunt multiplicē superparticularē. Secundo ostendit nullā aliam supparticularē duplicatā constituere multiplicē superparticularē. et sūto a b c ꝓportionales alie supparticulares: vt ꝓportio a ad c sit ꝓportio a ad b duplicata. a cōtinet b et partem eius que sit d: quequidē bis sumpta minuit a toto aut seipsaz semel si esset tertia: aut bis si quarta: aut pluries ꝑm q̄ minor pars fuerit. et similit b continet c ⁊ similē partem eius que sit e. et qr d ad b sicut e ad c: ergo d ad e sicut b ad c. cōtinet ergo d semel e et eius vnā similē partem: ergo d et e simul minus sunt q̄ c. quare a ad c nō est multiplex sed et cū d ⁊ e sint contra se primi vt supponim⁹: d et e simul per nonā tertij est primus ad e. sed et per vndecimā eiusdē c etiam erit primus ad d et e simul. ergo d et e simul nō numerabūt c. est ergo a ad c ꝓportio suppartiens: quod est ꝓpositum.



¶ Multiplex ꝓportio in aliqt equales ꝓportiones distribui non pōt ꝑter mltiplices. 60

¶ Sit ꝓportio a ad b multiplex que diuidat in quotlibet ꝓportiones equales q̄ sint a ad c: c ad d et d ad b. qr enim b ad d ⁊ d ad c et c ad a sunt continue ꝓportionales et b primus per hypothesim numerat a vltimum: ergo per decimātertiam quarti b numerabit d secundū. quare ⁊ d numerabit c et c itidem a. diuisa est igitur a ad b in ꝓportiones multiplices: quod intēdebatur.

¶ Nulla supparticularis ꝓportio in aliquot equales ꝓportiones est diuisibilis. 61

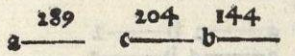


¶ Sit a ad d quelibet ꝓportio superparticularis: que diuidat si possibile est in ꝓportiones equales a ad b: b ad c: et c ad d. capio e f g h ꝓportiones in minimis terminis ꝓportionis a ad b: et per eqnam proportionalitatē que proportio a ad d ea est e ad h. sed a cōtinet d et eius partē: igitur et e cōtinebit h et eius partē que sit l: que si fuerit numerus cū l: numerabit h ⁊ etiā e. ergo h et e nō erunt minimi quod per quintā quarti repugnat hypothesi. alioquī si l: est vnitas est pars denoīata ab h. addo ad h vnitatē: sitq; cōpositus l: eritq; que proportio a ad d ea l ad h. ergo per duodecimā quarti quot medij ꝓportionales intercidūt inter a et d: totidē ⁊ inter l et h sola vnitate distātes: qd est ipossibile. Ex hac cognoscit tonus in musica qui ex sesqoctaua ꝓportione nascitur: in duo equa parti nō posse.

¶ Superpartientē proportionē que duplicata suppartientē constituat: inuenire. 62

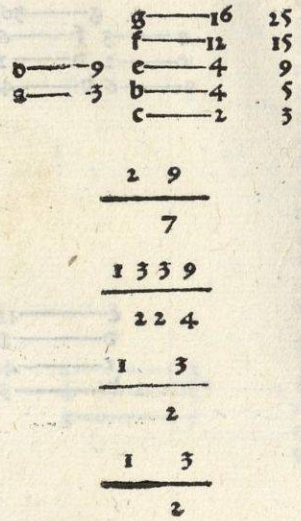
¶ Sumo quālibet proportionē que minor sit dupla quā per quinquagesimāquartā huius partior in duas superpartientes quarū minor si dupletur efficietur proportio minor dupla: quare qualibet multiplice. que qr per precedentē nō erit superparticularis alioquin supparticularis in duo equa secaretur: constat eam esse superpartientē: factumq; esse propositum.

¶ Multiplicē supparticularē q̄ ex duab⁹ suppartiētibus equalib⁹ ꝓponat: reperire. 63



¶ Sumo secundū exigentiā decime octaui quadratos a et b ꝑter primos quorū a addat super duplū b vnitatē manifestū est ꝓportionē a ad b esse multiplicē superparticularē. at ex illa decima facile cognosces proportionē lateris a ad latus b esse superpartientē. sumo ergo secundū exigentiā correlarij quarte sexti medū proportionale inter a et b: eritq; per tertiā eiusdē sexti proportio a ad c tanq̄ proportio lateris a ad latus b. quare constat proportionē multiplicē superparticularē a ad b compositā esse ex proportionibus a ad c et c ad b duabus scz equalibus suppartientibus: qd est propositū.

¶ Superpartientē inuenire que duplicata multiplicē superpartientē constituat. 64



¶ Sit a quilibet impar et b proximus par maior cuius medietas sit c. capio superpartientē sumptā a partibus denominatis ab a ⁊ numeratis ab c: quam duplicatā dico esse petitam. nam si illa in se duplicatur proueniet numerus et partes numerate ab a ⁊ a quadrato c qui sit e: et denominate a quadrato a qui sit d. sed cum a ⁊ c sint contra se primi alioquin a et b cōmunicarēt. ergo per vndecimā tertij a est primus ad e: ⁊ per nonā eiusdem a et e simul sunt primus ad a. quare a et e simul per vndecimā eiusdē sunt primus ad d. ergo partes numerate ab a et e nō numerabūt d. quare ꝓportio superpartiēs que assignata erat duplicata cōstituit multiplicē superpartientē. Q; si hec demōstratio tibi suboscura videtur pro hac ⁊ sequētibus declarationē accipe. qr enī in presenti superpartiēs inuenta erat superbipartiēs tertias que denominat ab vno ⁊ duabus tertiis. duc ergo denominationē superbipartientis tertias per octauā huius in denominationē superbipartiētis tertias scz ducēdo primo duas tertias in duas tertias. et per quartā huius proueniūt quattuor none. secūdo duas tertias in vnū ⁊ pueniūt due tertie. tertio vnū in duas tertias et iterum proueniūt due tertie. ⁊ quartovnū in vnum: et puenit vnum: habebisq; quattuor nonas duas et duas tertias ⁊ vnū: sed due ⁊ due tertie: id ē quattuor tertie faciunt vnum integrū et vnam tertiam: quodquidē vnum alteri vni additū constituit binarium et vna tertia est tres none: quod per secundā huius facile cognoscas. que siquidem tres none aliis quattuor nonis primo inuētis addantur fiunt septem none. Patet itaq; proportionē superbipartientē tertias duplicatam: constituere duplam et superseptupartientē nonas que est multiplex superpartiens: vt proponebat propositio: quod est propositū declaratum.

65 ¶ Multiplicem superparticularem inuestigare: que multiplicem superparticularem duplicata producat.

¶ Capio a numerū quēcunq; quem duco in se ⁊ proueniat b cui addo vnitatē: sitq; totus c manifestū est proportionē c ad a esse multiplicē superparticularē: que si in se ducatur est tātum q̄tum a in se ⁊ in partē bis et pars in se: sed a in se ⁊ in partem bis numerū producit: et pars in se producit partē. igit quod producitur est numerus et pars. erit itaq; proportio composita multiplex superparticularis. Posses item probare vt quinquagesimānonam huius.

c ——— 5
b ——— 4
a ——— 2

66 ¶ Multiplicem superparticularem inquirere: que bis sumpta multiplicem superpartientem componat.

¶ Sit quilibet impar a et b proximus par ⁊ eius medietas sit c. sumo multiplicē superparticularem cuius multiplicis numerus sit c et pars dicta ab a. que proportio sit d ad e: dico proportionem multiplicem superparticularē d ad e bis sumptā constituere multiplicē superpartientē. nam si hec in se ducatur, pueniet quadratus c et partes similes sumpte ꝑm b ⁊ pars a quadrato a dicta. ille autē partes vnum constituūt et vna supfluit cū illa. et q̄ ille due partes per duodecimā huius vnā non cōstituunt productum erit numerus et partes. quare proportio composita erit multiplex superpartiēs. ⁊ in proposito esset quincupla superquadripartiens nonas.

49 9
b ——— 4
a
c ——— 3 d ——— 7 e ——— 3
——— 2 5 9
4

67 ¶ Multiplicem superpartientem perscrutari: que duplicata multiplicem superparticularem componat.

¶ Sumo per sexagesimātertiam huius superpartientē que duplicata multiplicē superparticularē cōponat et numer⁹ denominās partes sit a ⁊ numerās sit b et vno maior q̄ a sit c: atq; c ducatur in a: et producto addatur b. sitq; totus d manifestū proportionē d ad a esse multiplicē superpartientē cui⁹ numerus denominās multiplicis est c et denominās partiū est a ⁊ numerus earū est b: quā duplicatā dico esse multiplicē superparticularē. nam denominatio ipsius in se ducta producet numerū et partē quod vt in precedentibus videre promptum est.

d ——— 161
c ——— 13
a ——— 12
b ——— 5

68 ¶ Multiplicem superpartientem: ex qua geminata multiplex superpartiens prouenat: demum restat inspicere.

¶ Queratur per sexagesimāsecundam huius suppartiens que geminata multiplicē superpartientē constituat: qua inuenta vt in precedente procedendū est.

69 ¶ Datam proportionem in proportiones: quarum quotlibet sint superparticulares equales redigere.

¶ Sint minimi termini date ꝓportionis a et b: sitq; c numerus ꝑm quem sumēde sunt superparticulares equales. deinde maior c ducatur in a et in b ⁊ fiant d et e: ita tamen vt inter d ⁊ e sint plures numeri q̄ vnitates in c et ꝓimus post d qui erit maximus eorū sit f. manifestū est ꝓportionē f ad d esse proportionem superparticularē ⁊ minimā omnium que continue sunt inter numeros ab d vsq; ad e: q̄ denominata est a minore parte. continuo proportionē f ad d vno plures q̄ sit numerus c: sintq; g h k l m: eritq; proportio h ad m composita ex ꝓportionibus f ad d sumptis secundū numerum c. ⁊ quia d per decimānonam tertij est aliquoties in h sit e toties in n manifestū est h ad n eē vt d ad e. quare vt a ad b. constat ergo proportionē a ad b esse diuisam in ꝓportiones quarū aliquot sumpte erunt equales supparticulares secundū numerum assignatū: quod est propositū.

f ——— 13
d ——— 12 e ——— 6
c ——— 3
a ——— 2 b ——— 1
———
g h k l m

70 ¶ Propositis quotlibet equalibus terminis ex illis totidē in ordine duplos: atq; ex illis triplos procreare: atq; ex prius inuētis totidē in proxima multiplicitate cōtinue ꝓportionales producere. itemq; ex illis similes elicere superparticulares.

¶ Figura equalitatis quotcumq; terminorum equalium.

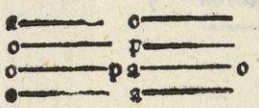
SEMAR									SEPTEMARIA						
EQUALITAS			4	4	4				Equalitas	4	4	4			
Equalitas	A	1	1	1	1	1	1	tes.	1	1	1	1	1	1	1
Dupl.	B	1	2	4	8	16	32		1	2	4	8	16	32	64
Tripli.	C	1	3	9	27	81	243		1	3	9	27	81	243	729
Quadrupli	D	1	4	16	64	256	1024		1	4	16	64	256	1024	4096
Sesq̄lteri.	E	32	48	72	108	162	243		64	96	144	216	324	486	729
Sesq̄tertii.	F	243	324	432	576	768	1024		729	972	1296	1728	2304	3072	4096
Sesq̄q̄rti.	G	1024	1280	1600	2000	2500	3125		4096	5120	6400	8000	10000	12500	15625
			H	K	L	M	N			H	K	L	M	N	O

¶ Precepta sunt hec.
1 Primum.
2 Primum/ secundū.
3 Primū scōz bis: ꝛtiū

Figura trinee qualitatis:

				O	P						O	P				O	P
Trina e=	A	1	1	1	qua=	2	2	2	li=	3	3	3	tas.	4	4	4
Dupli.	B	1	2	4		2	4	8		3	6	12		4	8	16
Tripli.	C	1	3	9		2	6	18		3	9	27		4	12	36
Quadrupli	D	1	4	16		2	8	32		3	12	48		4	16	64
Dupli cōuersi.	E	4	2	1		8	4	2		12	6	3		16	8	4
Sesqualteri.	F	4	6	9		8	12	18		12	18	27		16	24	36
Tripli cōuersi.	G	9	3	1		18	6	2		27	9	3		36	12	4
Sesquitertij.	H	9	12	16		18	24	32		27	36	47		36	48	64
Quadrupli cōuersi.	K	16	4	1		32	8	2		48	12	3		64	16	4
Sesquiquarti.	L	16	20	25		32	40	50		48	60	75		64	80	100
			M	A			M	A			M	A			M	A

¶ Pythagorici/ Magi/ Prisci sacerdotes atq; qui p̄cipue de rebus agunt diuinis admirātur equalitatē pariter ꝛ trinitatē in suis archanis in imagine numeroꝝ venerātur taciti: tanq̄ rerum omnīū p̄ncipia: a quibus oīs rerū profluit ꝓportio: ꝓportionū nexus: oīsq; admirabilis harmonia et in quanū ē reuocatū eunt oīa. Propter ergo mysteria priscoꝝ qd̄ autor generalius intēdit: primū in trina demōstrādum ē equalitate. ad qd̄quid ē rite peragendū tria satis sunt vbiq; veteꝝ p̄cepta a Viuo nob ānotata Seuerino. Primū est: Primū. Scōm est: Primū/ scōm. Tertiū est: Primū/ scōm bis/ tertiū Sint ergo a o p tres termini equales quicūq; vt monadū/ dyadū/ triadū aut cuiuscūq; alterius nūeri voles. Utor primo p̄cepto capioq; primā vnitatē quā colloco sub p̄ma sitq; b. deinde vtēdo scōo p̄cepto capio primā ꝛ scōam simul: quas colloco sub scōa. sintq; m et vtēdo tertio p̄cepto: capio primā ꝛ scōaz bis: et tertiā semel: quas colloco sub tertia sintq; n. dico b m n ꝓtinue ex equalitate natos duplos. Nā cū a prima vnitas ꝛ b sint idē: et prima et scōa vnitas sint duplū ad primā vnitatē a et p̄ma ꝛ secunda vnitas sint m: ergo nūerus m duplus ē ad b: et cū scōa vnitas bis sūpta equet m et sitr prima ꝛ tertia simul equentur m ꝛ n sit scōa vnitas bis et p̄ma ꝛ tertia semel. ergo n duplus est ad m. sunt igit b m n ꝓtinue dupli ab equalitate scz quēadmodū dictū est prime geniti. ¶ Potes idē mōstrare p vicesimā et sextā secundi. Nā qz a ad o: vt o ad p. ergo p vicesimā secundi o et p ad a ꝛ o vt o ad a. et qz o ꝛ p ad a et o: sicut o ad a. ergo p sextā eiusdē secundi o p et a o: ad a ꝛ o sicut o et a ad a. at o p et a o simul sunt n et a ꝛ o sunt m et a est idē b. igit b m n cōtinue, ꝓportionātur: sed m ad b cognit⁹ est duplus igit et n ad m duplus. Et in oībus sequētibus hic argumētandi modus ē efficax. Et q̄cunq; trina capiet termīoꝝ equalitas: ea dē valeāt argumēta. ¶ Scōo dico ex b m n duplis cōtinue, p creari triplos. capio equale b et colloco sub b in tertia linea sitq; c. deīde capio b m sit ꝛ colloco sub m sintq; m tertie linee rursum capio b m bis et n ꝛ colloco sub n: sitq; suo modo n. dico c m n tertie linee eē triplos. Nā per vicesimā scōi adiuuāte sexta eiusdē c m n sunt cōtinue ꝓportionales: sed et qz c equatur b ꝛ m supius duplus ē ad b: igit b et m supius sunt triplus ad b. sed b ꝛ m superi⁹ sunt m iferius: igit inferius m ad c tripl⁹. quare n ad idem m etiā triplus. sunt igit c m n cōtinue tripli. et eisdē preceptis ꝛ demōstrationib⁹ ex triplis nascētur quadrupli. ex quadruplis quīcupli. ꝛ ex cōsequētibus hoc pacto multiplices eēs qui libet ex primo minore. ¶ Tertio dico ex multiplicib⁹ cōtinue nasci supparticulares. vt ex duplicib⁹ sesqualteri ex triplis sesqtertij. ex quadruplis sesqquarti. ꝛ ita ꝓsequētes supparticulares per o: dinē ex naturalis ꝓnūtibus multiplicib⁹. Cōuerto duplos q̄ reperti sunt: sintq; conuersi e m n: eritq; e ad m duplus et m ad n duplus: quare m dimidiū e. Capio equale e qd̄ sit f ꝛ colloco sub e. deinde capio e m simul et collōco inferius sub m: sintq; m iferius. rursus capio e m bis ꝛ n simul: et colloco inferi⁹ sub n sintq; it idē inferius n. p vicesimā secūdi adiuuāte sexta eiusdē f m n cōtinue ꝓportionātur. sed cū e ꝛ f equētur et m sit dimidium e: ergo e m simul cōtinet totum e ꝛ dimidiū. quare e m ad e per diffinitionē ē sesqualt sed e m simul sunt m iferius. ergo m inferi⁹ est sesqualter ad f. quare ꝛ n ad m etiā sesqualt qd̄ est ꝓpositū. et ita eisdē preceptis expedi de sesqtertiis/ sesqquartis/ sesquiquītis ꝛ reliqs supparticularibus cōuertēdo terios suaꝝ multitudinū. Nunc idē superest demōstrandū qd̄ autor intēdit sumptis quotcūq; termīs. Quotq̄t sumpti fuerit termini equales: dupli cōtinue nascētur si cōtinuat/ rite vtamur suprioribus p̄ceptis. ꝓmo quidē capiēdo primū terminū et collocādo sub primo. Et scōo capiendo primū et scōm ꝛ collocādo sub secūdo. Et tertio capiendo primū scōm bis et tertiū: et collocādo sub tertio. deīde intelligēdo tertiā quartā et quintā equalitatē cōtinue sumi fm numeꝝ tertij extremi subter collocati. et resume p̄cepta primo capiēdo primū terminū trine equalitat/ ꝛ collocādo sub ꝛtio īmo iam collocatū reperies. Secūdo capiēdo primū et scōm ꝛ collocādo sub quarto. Et tertio capiēdo primū scōm bis et tertiū ꝛ collocādo sub quīto. et secundū numeꝝ illius quinti termī subter collocati intelligo iterū cōtinue tres terios equalitatis scz quintū sextū et septimū. et resumptis p̄ceptis cum quinto iam habito: perficio sextū et septimū inferiores termīos et secundū exigentiā septimi extremi intelligo rursum trine equalitatis termīos: scz septimū octauū et nonū et a singulo quoq; tertio loco cōiunctim trinā equalitatē intelligo cuius quilibet terminus intelligit secundū numerū extremi in singulo quoq; loco subter veniētis. et si id placet in infinitū extendi libet. ꝛ dico cōtinue collocatos eē duplos. id resumptis demōstrationibus quoties erunt resumpte equalitatū trinitates: sicut et superiora facillime demonstrabis. Si cupis triplos eodem ferme modo nascētur de duplis. Id solum obseruandū est vt in tertiis quibusq; locis cōiunctim capiant termini triplorū a tribus duplis qui nas=



cuntur ex trina equalitate terminorũ sumptorum secundũ numerũ tertij cuiusq; extremi triplorum. ⁊ quadrupli cõsimiliter à triplis acceptis cõtinue tribus triplis secundũ exigentiã equalitatis tertij extremi triplorũ et hac analogia in consequẽtibus multiplicibus. Et sesqualteri sesquitertij sesquiquarti ⁊ consequẽtes nascentur cõuersis duplis triplis quadruplis et consequẽtibus sumptis simili obseruantia duplis conuersis triplis quadruplis et reliquis quoties oportet a trina equalitate: sed quoq; multipliciũ conuersorũ primum atq; maximũ extremoq; equetur singulo quoq; tertio supparticulariũ etubiq; vt in precedẽtibus est idem demonstrandi modus.

71 ¶ Datis superparticularibus vel multiplicibus supparticularibus multiplices superparticulares et superpartientes: datis vero superpartientibus aut multiplicibus suppartientibus superpartiẽtes et multiplices superpartiẽtes procreare.

d	e	f	
4	6	9	Supparticulares
4	10	25	Multiplices sup
a	b	c	particulares

¶ Sint a b c supparticulares termini et sumatur a semel ⁊ sit e primus numerus et a semel ⁊ b semel et sit f secũdus numerus ⁊ ita secundũ trine profectionis precepta vt in precedẽti factũ est et pueniãt d e f qui vt in precedẽti erunt continue ꝓportionales. at per decimãoctauam huius proportio e ad d est multiplex supparticularis: igiꝯ et f ad e. erunt igitur cõtinue d e f multiplices supparticulares. et eodẽ modo ex multiplicib⁹ supparticularib⁹ nascẽtur multiplices supparticulares. Si vero cõuersis terminis ab c incipias per eandẽ decimãoctauã huius proueniẽt cõtinue superpartiẽtes. sicq; constat primũ. Secũdum vero eodẽ modo patebit per decimãnonam huius dato ordine superpartientiũ aut multipliciũ suppartientiũ. nam si aggregatio a minori incepta fuerit per dictã decimãnonam prouenient multiplices suppartientes. si a maiori termino: proueniẽt suppartiẽtes: sicq; constat ꝓpositum.

¶ Ex duab⁹ vltimis cõclusiõib⁹ colligẽ potes. Ex eq̃litate prime nasci duplos. Ex duplis triplos. Ex triplis q̃druplos: ⁊ hoc pacto de reliq̃s multiplicib⁹ ꝓsequẽter. Et ex multiplicib⁹ conuersis nasci supparticulares: vt ex duplis sesqualteros. Ex triplis sesquitertios: et ita de cõsequẽtibus supparticularibus ex sequẽtibus multiplicib⁹. Et ex supparticularib⁹ multiplices supparticulares: vt ex sesqualteris duplos sesqualteros. Ex sesq̃tertiis duplos sesq̃tertios: et hũc in modũ de reliquis. Ex multiplicibus supparticularib⁹ itidẽ multiplices supparticulares: sed ex duplis supparticularibus tripli supparticulares. Et ex triplis supparticularib⁹ quadrupli supparticulares. Ex supparticularib⁹ et multiplicibus supparticularib⁹ cõuersis suppartiẽtes: vt ex sesqualteris supbipartientes. Ex sesq̃tertiis suptripartiẽs. Ex duplis sesqualteris ⁊ ex duplis sesq̃tertiis cõsiliꝫ supbipartiẽtes et suptripartiẽtes Ex suppartiẽtibus multiplices suppartiẽtes: vt ex supbipartiẽtibus duplas supbipartiẽtes. Ex suptripartiẽtibus duplas suptripartiẽtes. Ex multiplicib⁹ suppartiẽtibus: itidẽ multiplices suppartiẽtes: sed ex duplis triplis aut quadruplis suppartiẽtibus: tripli quadrupli aut quĩcupli suppartiẽtes. Ex cõuersis suppartiẽtibus aut multiplicib⁹ suppartiẽtibus: nascũtur suppartiẽtes. Et ex tribus preceptis hec vbiq; latissime patẽt. ⁊ expressa q̃tũcunq; voles longa serie: supparticulariũ cõtinue ꝓportionaliũ si cõtinue tria p̃cepta tribus ⁊ tribus terminis serici aptãdo ꝓcedis: nascẽtur multiplices supparticulares sed solũ per tres et p tres cõtinue ꝓportionales. et eodẽ pacto conuerso ordine nascẽtur suppartiẽtes sed solũ in tribus ⁊ tribus terminis cõtinue ꝓportionales. at de his hactenus.

72 ¶ Datas superparticulares in multiplices atq; easdem in minores multiplices donec ad equalitatem perueniant: reducere.

l	m	n
g	h	k
9	12	16
a	b	c
9	6	4
d	e	f

¶ Id aĩaduertere licet ꝓportiones in illas tm̃ resolui ex q̃bus procreãt. Quo fit vt in oĩbus idẽ resoluendi modus appeat: in q̃bus idẽ erat modus ꝓcreãdi. Sint a b c dati termĩ ꝓtinue supparticulares et sit d equalis a ⁊ ꝑmus nũerus: et ab b tollat̃ d ⁊ remaneat e ⁊ de c tollatur d et e bis ⁊ remaneat f. dico d e f esse cõtinue ꝓportionales et multiplices. q̃ sint cõtinue ꝓportionales declarat̃. capio enĩ g h k tres terminos in cõtinua ꝓportione d ad e: q̃ ex illis superiori aggregãdi modo pueniẽt erunt ex p̃cedẽtibus cõtinue ꝓportionales et sint l m n. et qꝛ l ad g sicut a ad d ⁊ m ad h sicut b ad e. ⁊ ita ꝓnter igitur d e f sunt cõtinue ꝓportionales. et qꝛ b ad a p hypothesim est supparticularis p decimãsextam huius erit c ad f similis denoĩationis multiplex. quare supparticulares date: sunt in suas mltiplices reducte. si itaq; superparticulares date erant sesquitertie resolute sunt in triplas si sesqualtere in duplas q̃ si reducte sint in triplas eodẽ modo quo prius adiuuante septuagesima huius probabis illas multiplices reduci in duplas et duplas in equalitatẽ: quod est propositum.

73 ¶ Multiplices superparticulares in superparticulares: ⁊ multiplices superpartiẽtes in superpartientes resoluere.

¶ Sint a b c tres ꝓmini multiplices supparticulares. et d equalis a q̃ substrahat̃ ab b ⁊ relinquatur e ⁊ eo mõ quo in precedẽti substrahãtur. si b ad a erit multiplex supparticularis vtriq; ab eodẽ nũero denoĩatus p quadragesimãprimã huius factũ erit ꝓpositũ. et ita de suppartiẽttbus. At si multiplex sit maioris denoĩationis nõ fiet hoc ꝑma resolutione: sed resoluem⁹ primo in multiplices vno minoris denoĩationis denoĩatione partis semper eadẽ manente: donec ad hoc veniamus vt eadẽ sit denoĩatio multiplicis et partis sicq; quod ꝓponitur facile apparebit.

¶ Quaslibet superpartientes in superparticulares reduci est possibile.

9	15	25
a	b	c
9	6	4
d	e	f

74 ¶ Nam qꝛ per septuagesimãprimam huius suppartientes ex supparticularibus nascũtur. ideo sint a b c huiusmodi superpartiẽtes ⁊ d equetur a: substrahaturq; d ab b et relinquat̃ e ⁊ d et e bis ab c: et relinquatur f ⁊ venient per illam septuagesimamprimam superparticulares a quibus nascebantur. at non oportet id semper in prima reductione contingere quod tamen nunc cõtingebat. sed aliquãdo resoluẽtur prima resolutione in multiplices superparticulares que per p̃cedentẽ in supparticulares tandẽ reducent̃: quo facto factũ erit propositũ. Aliq̃n in suppartiẽtes aut multiplices suppartientes

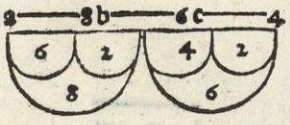
et multiplex suppartiens per p̃cedentẽ reducit in suppartientẽ que tex reducetur in supparticularẽ vt si detracto d de b remaneat e quẽ contineat d et eius partes: vel in supparticularẽ si eo detracto remaneat e quẽ contineat d et eius partẽ. at si remaneat e quẽ contineat d et partes. qz illa detractio in infinitũ fieri non põt vt semp in suppartiẽtes resoluatur aliqñ occurret supparticularis. factũq; apparebit propositũ. Occurret dico tandẽ superparticularis et nõ multiplex: qz ex multiplicibus non ime diate suppartientes sed superparticulares per septuagesimã huius gignũtur.

¶ Datas proportiones quascunq; ad equalitatem reducere. 75

¶ Nam per septuagesimãtertiam huius multiplices suppartientes reducũtur in superpartiẽtes et multiplices supparticulares in superparticulares ⁊ per p̃cedentẽ suppartiẽtes in supparticulares. et per septuagesimãsecundam huius supparticulares reducũtur in multiplices et multiplices in alias multiplices donec in equalitatẽ restitute sint. omnes igitur in equalitatẽ reducũtur.

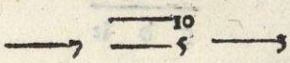
Moni elemẽtorũ Arithmetices Jordani finis.

Medietas est connectio extremorũ: habitudine vtriusq; ad mediũ. Medietatum quedam sunt principales: et quedam principalibus collaterales. Principales sunt tres. Prima est quãdo maioris/medij/ac minoris equales sunt differẽtie. et hec dicitur Arithmetica medietas. Secũda est quãdo maximi ad mediũ eadẽ est proportio: q̃ medij ad minimũ. et hec geometrica vocatur Tertia est qñ maximi ad minimũ eadẽ est ꝓportio: que dr̃ie maximi ad mediũ ad differentiã medij ad minimũ. et hec musica nũcupatur. Collaterales sunt octo. Prima est qñ maximus ad mediũ sicut dr̃ia minorũ ad differentiã maiorum. Scõa est qñ medius ad minimũ: sicut dr̃ia minorũ ad differẽtiam maiorũ. Terna est qñ maximus ad mediũ sicut dr̃ia extremorũ ad differentiã maior. Quarta est qñ medius ad minimũ sicut dr̃ia extremorũ ad differẽtiam maiorũ. Quinta est qñ medius ad minimũ: sicut differẽtia extremor ad differentiã minorum. Sexta est qñ maximus ad minimũ: sicut differẽtia minorũ ad dr̃iam maiorũ. Septima est qñ maximus ad minimũ: sicut dr̃ia extremorũ ad differentiã maiorum. Octaua est quando maximus ad minimũ: sicut differentia extremorum ad differentiam minorum.



¶ Si fuerint tres numeri in arithmetica medietate dispositi: erit maioris ad medium minor proportio q̃ medii ad minimum. 1

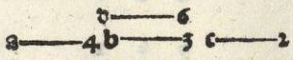
¶ Sint a b c tres numeri in arithmetica medietate dispositi quor maximus sit a: dico a ad b minorẽ esse ꝓportionẽ q̃ b ad c. nã per diffinitionẽ a ad b et b ad c equales sunt dr̃ie: qz igitur a ⁊ b sunt vt cõpositi ex b et c ipsis additis numeris equalibus scz differentiis eorũ. ergo per decimãsextam secundi ꝓportio a ad b minor erit proportione b ad c: quod est propositum.



¶ In eadẽ medietate duo extremi cõiuncti tm̃ reddunt: q̃tum medius duplicatus. 2

¶ Nam p diffinitionẽ primi ad mediũ et medij ad extremũ equales sunt dr̃ie: igitur p secundã primi medius est extremorũ coniũctor medietas. duplicat igitur equal extremis ꝓiũctis: qd̃ est ꝓpositũ.

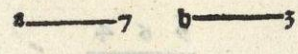
¶ In eadẽ medietate quod sub extremis continetur cum quadrato differẽtie equale est quadrato medii. 3



¶ Nam per premissam duo extremi simul sunt tanq̃ duplus medij. Ponat ergo duplus medij q̃ sit d diuisus p duo equalia quor medius est vnũ: ⁊ per duo inequalia q̃ sint a c extremi: et p decimãnonã primi erit quadratus b vnius equalium q̃tum quod fit ex a in c cum eo quod fit ex differẽtia a ad b in differentiã b ad c. at qz differentie ille sunt equales: tantum ergo erit quadratũ medij b q̃tum quod cõtinetur sub extremis a ⁊ c cum quadrato dr̃ie medij ad extremũ: quod est propositũ.

¶ In eadem quoq; medietate quadrata extremorum: duplum sunt quadrato medii et quadrato differentie. 4

¶ Sint a b c numeri in hac medietate dispositi: sitq; d quadrata a et c. dico d duplũ esse quadrato medij ⁊ quadrato dr̃ie simul. Sit enĩ f qd̃ fit ex a in c bis ⁊ quadrata b medij bis sint e: qz enĩ per secundã huius a et c cõiuncti tantũ sunt q̃tum duplus b. et per decimãquintã primi d ⁊ f simul tm̃ sunt q̃tum quadratũ totius a c: sed ⁊ per eandẽ decimãquintã e erit medietas d ⁊ f simul. igit per secundã partẽ secũde primi e ad d ⁊ ad f equales sunt dr̃ie. igitur per diffinitionẽ e hac medietate medius est inter d et f. ⁊ qz per p̃cedentẽ qd̃ fit ex a in c semel cũ quadrato dr̃ie tantũ est q̃tum b in se. igit e addit super f duplũ quadrati dr̃ie: quare ⁊ d tantum addet sup e. quare ⁊ duplũ quadrati differẽtie b ad a equal d. igitur quadratus b q̃ est medietas e cũ quadrato differẽtie b ad a est medietas d: qd̃ est propositũ.

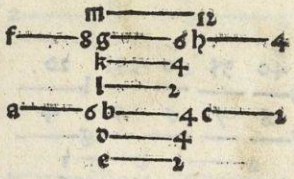


¶ Trium numeror in hac medietate dispositor duob̃ extremis datis: mediũ repire. 5

¶ Sint a b duo extremi in hac proportione: illos simul addo atq; aggregati sumo medietatẽ que per secundam huius erit medius petitus: factumq; erit propositũ.

6 ¶ Si fm ꝓportiõem medii datorũ numeroꝝ ad dñiam: sumãtur tres nũeri in eadem medietate: erit medii illoꝝ ad differẽtiam: que inter extremos ꝓassignatoꝝ ꝓportio.

¶ Sint a b c tres numeri in Arithmetica medietate quoꝝ maximus sit a. et sit d differẽtia a ad c: et e medietas que est differentia a ad b ⁊ differentia b ad c. sumo item in eadem medietate numeros f g h quoꝝ extremoꝝ sit ꝓportio tanꝗ b ad e: sitq; f maximus. dico g ad differẽtiam f ad g q̃ sit l eam ꝓportionem esse que a ad c. capio enĩ differẽtiam f ad h q̃ sit k: cuius medietas sit l. et cõpositus ex f et h sit m. qz enĩ per hypothesim b ad e tanꝗ f ad h: et b ⁊ e sunt a. igitur p sextam secundi a ad e sicut m ad h. et quia vt dictũ est b ad e vt f ad h: ergo ꝑmutatim b ad f totus ad totũ: sicut e ad h detractus ad detractum. igitur per quintam secundi c ad k residuus ad residuum sicut totus ad totũ. quare q̃ ⁊ vt e ad h: ita c ad l. permutatim ergo e ad c vt h ad l. ergo p vicesimãprimam secũdi ⁊ equã ꝓportiõalitatem m ad l sicut a ad c. ergo q̃ per scõdam huius g sit dimidium m: erit a ad c sicut g ad l: dimidium scilz ad dimidiam differentiam sicut totum m ad l totam differentiam. quod est propositum.



7 ¶ Si fuerint tres nũeri in hac medietate dispositi: extremoꝝ ⁊ medij ad differẽtiam eandem esse proportionem impossibile est. maiorem ꝗ̃o siue minorem: possibile.

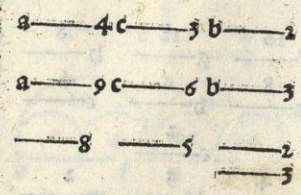
¶ Sint tres numeri a b c in hac medietate ꝓstituti: et a maximus: et differentia a ad b/ et b/ad c sit d. dico impossibile esse eãdem proportiõem a ad c ⁊ b ad d. nam si id possibile fozet: ponat ergo vt sit a ad c tanꝗ b ad d. ergo p vicesimãquintam secũdi q̃ sit ex a in d: equũ est ei qui fit ex b in c. at p decimam quartam primi q̃ fit ex a in d ĩm est q̃tum q̃ fit ex d in se et d in b qui sint e ⁊ f. sed per eandem b in c tm̃ est q̃tum q̃ fit ex c in d ⁊ c in se qui sint g ⁊ h. equabũtur ergo adinuicem e f simul et g h simul. q̃ est impossibile. q̃ sic ostẽdo. nam p septimam secũdi f ad e sicut b ad d. et per eandem h ad g sicut c ad d. sed p nonam secũdi ꝓportio b ad d maior est q̃ ꝓportio c ad d. igit ⁊ ꝓportio f ad e maior erit ꝓportione h ad g. quare si f equet h: p eãdem e erit minor g. quare e ⁊ f non equabũtur g ⁊ h. et si f sit mĩor h ergo p decimãseptimãlecundi e etiã erit minor g. quare compositus ex e ⁊ f duobus minoribus non equabitur cõposito ex g ⁊ h. at si f ponit maior h/ et compositus e ⁊ f equetur cõposito g ⁊ h: ergo per decimãnonam scõi ꝓportio f ad e minor erit q̃ ꝓportio h ad g: cui⁹ oppositum mõstratum est. cõstat ergo q̃ dictũ est. ¶ Sed extremi ad extremum ꝓportio maior possibilis est q̃ medij ad differentiam si ab vnitate tres ꝓtinue ponant terminꝰ qui erũt in hac medietate. et qz extremi sez ternarij ad vnitatem est ꝓportio tripla: sed medij binarij ad vnitatem (que differẽtia est) ꝓportio dupla: ꝓstat extremi ad extremum maiorem esse proportiõem q̃ medij ad differẽtiam. et ita si post vnitatem in hac medietate numeri apte discõtinue sumãtur. ꝗ Possibilis est etiã extremi ad extremum ꝓportio mĩor q̃ medij ad differẽtiam. nam acceptis quibuscũq; tribus terminis continue post vnitatem: maior erit ꝓportio medij ad vnitatem que erit differentia q̃ extremi ad extremum quoꝝ differentia semp est binarius.

8 ¶ Tres numeros in hac medietate inuenire quoꝝ ꝓportionis medij ad differẽtiam: ad proportionem extremorum differentia sit qualibet data proportione maior.

¶ Sint a ⁊ b nũeri date ꝓportiõis ⁊ b maior: addo b ad a ⁊ fiat c cui etiã addo b et fiat d. manifestum erit d c a esse tres numeros in hac medietate cõstitutos cũ b sit cõis differẽtia d ad c ⁊ c ad a: quoꝝ dico differẽtiam ꝓportionis c ad b medij ad differẽtiam: ad ꝓportionem d ad a esse data ꝓportione b ad a maiorem. nam ꝓportio c ad a addit sup proportionem c ad b proportionem b ad a. et proportio d ad a est maior ꝓportione c ad a. addet igit ꝓportio d ad a sup proportiõem c ad b maius proportiõe data b ad a. est itaq; differẽtia ꝓportiõis c ad b ad proportiõem d ad a data proportione maior.

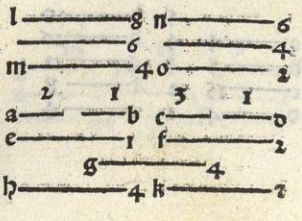
9 ¶ Si extremꝰ extremi duplus: erit medius differentie triplus: et cõuertitur. q̃ si alter alterius maius duplo fuerit: erit medius minus triplo differentie: et ecõuerso.

¶ Nam si a maximus sit duplus b mĩmi: erit b duplus differentiaꝝ. quare c ex b ⁊ differẽtia illa cõstitutus eidem differẽtie erit triplus. et si c est triplus ad differentiam cũ ꝓstituat ex illa differẽtia et b: ergo b erit duplus ad differẽtiam. quare a ꝓstitutus ex b ⁊ dupla differẽtia que equatur b itez inueniet ur duplus ad b. quod est primum. et si a est triplus ad b: idem b equabit vni differentiaꝝ. at b ⁊ vna equalium differentiaꝝ ꝓstituũt c. igitur c duplus est ad differentiam. et si c duplus est ad differẽtiam erit rursus a triplus ad b. nam si c sit duplus ad differentiã cũ sit ꝓstitutꝰ ex differẽtia ⁊ b: differentia illa equabitur b. sed b cum equali differẽtia bis sumpta ꝓstituit a. igitur a triplus est ad b. et vniuersaliter si maximi ad mĩmum proportio maior q̃ dupla inueniatur: erit semp mĩmus ad differentiam minor q̃ duplus. igit ⁊ medius ex mĩmo ⁊ differentia cõstitutus ad differẽtiam minor erit q̃ triplus Et cõuertitur vt in alijs quoq; monstratum est.



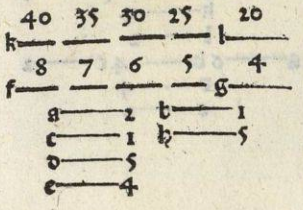
10 ¶ Datis quibuslibet duabus ꝓportiõibus: fm vtrãq; in Arithmetica medietate tres terminos ordinare: quoꝝ adinuicem differentie sint equales.

¶ Sint minimi termini duarũ datarũ ꝓportionum a b ⁊ c d. et differẽtie illoꝝ sint e ⁊ f. sumo itez g nũerum aliquem quem cõiter numerent differentie e ⁊ f. et sint numeri fm quos ipm numerãt h et k. deinde multiplico a ⁊ b per h: ⁊ pueniãt l ⁊ m. et multiplico c et d per k et pueniãt n et o. p septimam secũdi l ad m vt a ad b. et n ad o vt c ad d. et differẽtia l ad m est g. ⁊ siliter differẽtia n ad o est g. si igit g est par: sumo medium inter l et m qui cõstabit ex m et dimidio g. et mediũ inter n et o qui cõstabit ex o et dimidio g. et erũt tres termini l ⁊ m cũ suo medio fm ꝓportiõem a ad b/ et tres alij n et o cõnũerato eoꝝ medio fm ꝓportiõem c ad d in arithmetica medietate quoꝝ adinuicem differẽtie sunt equales



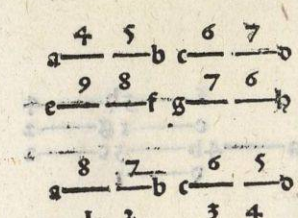
si aũt g esset impar duplãdi essent l/m/n/et o et dupla ad g p correlariũ septime secũdi pueniret differentia. si ergo inter illos medij sumãtur tam horũ q̃ illoꝝ differentia ad medium erit g. sicq̃ totum manifestum erit propositum.

¶ Quotlibet numeros fm Arithmeticam medietatem sumere: quoꝝ differẽtie dato numero non sint minores: extremoꝝ vero ꝓportio sit date ꝓportioni equalis. 11



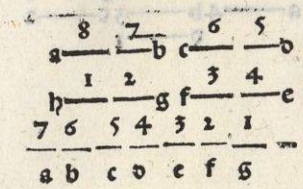
¶ Sint a ⁊ b termini date proportionis: et c eoꝝ differentia: et d sit numerus fm quem sumendi sunt quotlibet numeri: ⁊ e numerus quo non minores debeãt esse differentie. multiplico a ⁊ b fm nũerum vno minorem d ⁊ pueniant f et g: quoꝝ differẽtia c toties nũerabit. sumo ergo media fm differentias equales c et fiet vt oẽs numeri sint fm nũerum d. multiplicek item c donec pueniat maior e: et fiat hoc fm h. ducoq̃ h in f ⁊ g et omnes medios et pueniãt k l ⁊ medij inter illos. manifestũ est extremorum proportionem esse proportioni a ad b equalem: et numerum sumptum esse fm d ⁊ differẽtias inter se equales et numero e dato maiores. quod est propositum.

¶ Si sumptis quotlibet nũeris in hac medietate: alij totidem eandem habentes differẽtiam maiores minoribus coniũgant: numeros equales puenire necesse est. 12



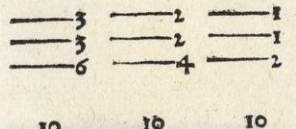
¶ Sint a b c d ꝗlibet numeri in hac medietate quoꝝ a sit minus: ⁊ e f g h totidem in hac medietate et e illoꝝ maximus: sintq̃ hoꝝ et illoꝝ equales differẽtie. dico a et e simul equari b et f et reliquis hoc modo sequẽtibus. nam quia a ⁊ e sunt circũpositi b ⁊ f et equales per hypothesim differẽtie: ergo per tertiam primi a et e simul equãtur b et f. et hunc in modum de reliquis argumentare.

¶ Numeros quotcunq̃ in hac medietate datos coaceruare. 13



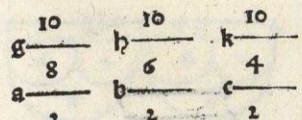
¶ Hec demõstrat aggregatoꝝ summam reperire: quã nõnulli ꝓgressiõem vocant. si enĩ sunt in nũero pari vt a b c d. e f g h q̃ igit p precedentem a h equãtur b g et c f et d e fm seriei medietatem. si ergo in coaceruatum ex a ⁊ h duob⁹ extremis ducat totius seriei medietas pueniet summa totalis ex oĩbus coaceruata. At si numerus eoꝝ sit impar vt a b c d e f g erit vnus eoꝝ medius vt d. et eius ad extremos a et g eadem erit differentia. quare per secãm primi est medietas a et g/et similiter medietas b ⁊ f/et medietas c ⁊ e. numerus igitur seriei oĩm in ipm ductus oĩm summam cõficit. quod est propositum.

¶ Si ꝗlibet nũeri huius medietatis alijs totidẽ siue eq̃libus siue in eadem medietate sumptis minores minoribus addãtur: ꝓsiti quoq̃ fm eãdem medietatẽ disponẽtur. 14



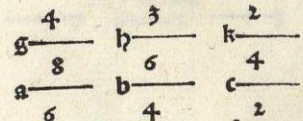
¶ Nam siue equales equalibus addãtur siue hoc modo nũeri quicũq̃ totidem alijs in eadem medietate cõstitutis: quia equalib⁹ differẽtijs equales differẽtie addẽtur et tote differẽtie adinuicem erũt equales. quare per diffinitionem compositi erunt in hac medietate ꝓstituti. quod est propositum.

¶ Si equales totidem auferant̃ siue ipi ab eq̃libus substrahãtur: residuum in eadem medietate inuenietur. 15



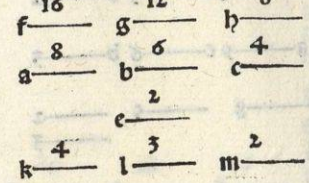
¶ Nam equalibus de quibuslibet eoꝝ demptis erũt eedem residuoꝝ que ⁊ totoꝝ differẽtie idẽtidem quibuslibet eoꝝ ab equalibus demptis eedem que substracteꝝ manebunt differentie. igitur per diffinitionem residua erunt in arithmetica proportione. quod intendebatur.

¶ Si vero de eisdem alii in eadem medietate dati minores a minoribus tollãtur: residui vel erunt equales vel eiusdem medietatis rationem suscipient. 16



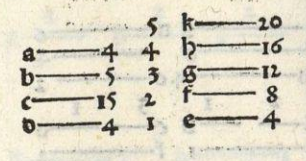
¶ Hec quodãmodo decimequarte et decimequite ꝓuersa est. nam datis a b c in hac medietate maioribus et d e f minoribus: quoꝝ ad primos differentie sint equales: substractis d e f ab a b c. residui erũt equales: differentie a ad d. quare adiuicem equales. at si numeri sumpti vt g h k non hẽant singuli ad singulos a b c equalem differẽtiam. qꝛ detractorum ⁊ totorum eq̃les sunt differentie: erũt ⁊ residuoꝝ equales differentie. et cũ residua nõ sint equalia: inter eos erit hec medietas. quod est propositum.

¶ Si qnotlibet numeri huius medietatis fm eundem nũerum vel multiplicentur vel diuidãtur: erunt ⁊ ꝓducta ⁊ diuidentia in hac medietate eodem ordine continuata. 17



¶ Sint dati quotlibet numeri in hac medietate: vt a b c qui multiplicẽtur p e et pueniant f g h ⁊ qui diuidãtur per e: et pueniant k l m. dico ꝓducta f g h et diuidẽtia k l m eodem ordine in hac medietate ꝓtinuata. nam qꝛ multiplicatorum a b c differentie sunt equales: ergo per corlariũ septime secundi et productorum. et etiam per idem quoties diuidentia k l m numerabunt a b c: ⁊ toties differẽtie numerabunt differentias et eodem ordine. est ergo notum quod proponitur.

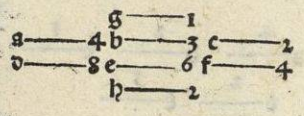
¶ Datum nũerũ in quotlibet partes que arithmetica medietate se excedãt diuidere. 18



¶ Sit numerus diuidẽdus a: et b nũerus fm quem ꝓponit diuidi. Inuenio per decimãtertiã huius numerum ex oĩbus ab vnitate ad b coaceruatum qui sit c. et qui sit vt partes ab ipo denoãte. et resoluas si vis a in cõsimiles partes: dehinc resolutum diuidas per c et reuertetur numerus fm a qui sit d per quem multiplica oẽs numeros ab vnitate ad b qui sunt in hac medietate vt notum est et pueniãt f g h lꝛ partes denoãte ab c que per precedentem erũt in hac medietate. et per nonã primi manifestũ est eas cõstituere a. et sunt sumpte fm numerum b. effectum est igitur propositum.

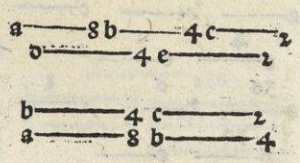
¶ Si inter numeros ꝓportiõales medii fm hanc medietatem designẽtur: erit extremorum ad illos proportio vna. 19

¶ Sint a b c numeri in hac medietate cõstituti ⁊ silliter totidem d e f: sitq; a ad c sicut d ad f. dico a ad b vt d ad e et b ad c vt e ad f. nam si a c ⁊ d f sint equales: constat propositũ. si non: sint ergo d f maiores et a c minores. quia enim que ꝓportio d ad f totus ad totum: ea est a ad c detracti ad detractum: ergo p quintam secũdi differẽtia d ad f ad differentiam a ad c residuum ad residuum: sicut d ad f totũ ad totũ quare m: ꝓdietas differẽtie d ad f que sit h ad dimidiũ differẽtie a ad c que sit g per correlariũ decime quarte secundi sicut d ad f. et cum que ꝓportio d ad f ea sit a ad c: ergo ꝑmutatim d ad a sicut f ad c. cum itaq; f ad c sicut h ad g: ergo per idem correlariũ e ad b sicut d ad a. quare ꝑmutatim d ad e sicut a ad b. et consiliter ꝓbabis f ad e sicut c ad b aut ecõtra. quod est propositum.



20 ¶ Si in geometrica medietate tres numeri statuant̃: erit que maximi ad medium: ea differentie ipsoꝝ ad differentiam medii ad mĩmum ꝓportio.

¶ Sint a b c tres numeri in geometrica medietate dispositi p diffinitiõem que ꝓportio a ad b ea est b ad c. et sit dꝛia a ad b nũerus d. et differẽtia b ad c medij ad mĩmũ nũerus e. dico eãdẽ eẽ ꝓportiõem a ad b et d ad e. capio enim b et vt totum et vt detractum. et qr que ꝓportio a ad b totiꝰ ad totum: ea est b ad c detracti ad detractum. igitur q̃ ꝓportio a ad b totius ad totũ ⁊ maximi ad medium: ea est dꝛie a ad b ad differẽtiam b ad c per quintam secundi residui ad residuum. quod est propositum.

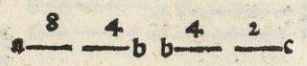


21 ¶ In hac medietate quod sub extremis cõtinetur: equale est quadrato medii.

¶ Hec ex diffinitione et vicesima sexta secundi statim cognoscitur.

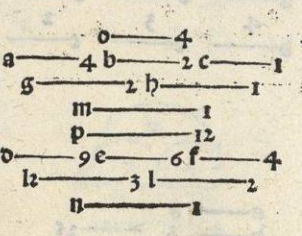
22 ¶ In eadem medietate duo extremi ꝓiũcti: maius sunt q̃ medius duplicatus.

¶ Hec itidem statim cognoscitur per vicesimã quartam secundi: sumpto medio ꝑ secundo ⁊ tertio.



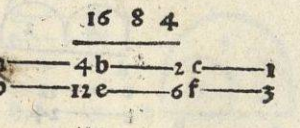
23 ¶ In eadem medietate quãto maximi ad medium maior est ꝓportio: tanto etiam maximi ⁊ minimi ad duplum medii maior erit ꝓportio.

¶ Sint a b c ꝓtinue ꝓportiõales: et d e f idẽtidem cõtinue ꝓportiõales sed in maiore ꝓportione. dico q̃ quãto maior est ꝓportio a ad b q̃ d ad e: tãto maiorem esse ꝓportiõem a et c ad duplum b q̃ ꝓportio e et f ad duplum e. sit enim g differẽtia a ad b/ et h differentia b ad c/ silliter k differentia d ad e/ et l differẽtia e ad f. et quo g excedit h sit m/ quo ꝯo k excedit l sit n. quia enim maior est ꝓportio a ad b q̃ d ad e: ergo p duodecimam secũdi a ad d totius ad totum maior est ꝓportio q̃ b ad c detracti ad detractum. ergo per decimãtertiam eiusdem g ad k residui ad residuum maior est ꝓportio q̃ a ad d totius ad totum: quare multo fortius q̃ b ad e detracti ad detractum. qr igitur g ad k maior est ꝓportio q̃ b ad e: igitur p duodecimam eiusdẽ g ad b maior ꝓportio q̃ k ad e. quare per vndecimam eiusdem b ad g mĩor ꝓportio q̃ e ad k. et per vicesimam huius g ad h maior est ꝓportio q̃ k ad l. nam g ad h vt a ad b/ et k ad l vt d ad e. quare eadem argumẽtatiõe qua pauloante g ad m mĩor ꝓportio q̃ k ad n. quare per quintam quinti erit b ad m minor ꝓportio q̃ e ad n. per eandem igitur dupli b vt o ad m minor ꝓportio q̃ dupli e vt p ad n. et qr a et c sunt duplum b q̃tum est m: et siliter cõpositus ex d ⁊ f excedit p duplum e q̃tum est n: vt facile ex precedente cognoscas. et ꝓportio p ad n maior ꝓportione o ad m. igitur per scdam partem decimequãte scdi p ⁊ n ad p mĩor ꝓportio q̃ o ⁊ m ad o. igitur d ⁊ f simul ad p ꝓportio minor q̃ a et c simul ad o. quod est propositum.



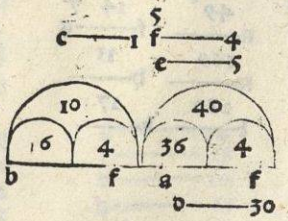
24 ¶ Si quotlibet numeris in hac medietate sumptis totidem alii eiusdem ꝓportionis maiores maioribus addãtur: compositi quoq; in hac medietate inuenietur dispositi.

¶ Nam si que ꝓportio a ad b et b ad c: ea sit d ad e et e ad f. igitur ꝑmutatim que ꝓportio a ad d: ea est b ad e ⁊ c ad f. igitur per vicesimam secũdi que ꝓportio a ad b: ea erit compositi ex a d ad ꝓpositũ b e. et compositi b e ad compositum c f. quod est propositum.



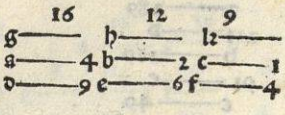
25 ¶ Si dispositis aliquot numeris in hac medietate numeri equales singulis addãtur: erit inter compositorum maiores ꝓportio maior.

¶ Sint a b c in geometrica medietate dispositi: et d e eoꝝ differẽtie: et f numerus singulis addẽdus. quia igit quo abundat f a sup f b est d. et quo abundat f b sup f c est e. et per nonam secũdi f ad d mĩor est ꝓportio q̃ f ad e. et per vicesimam huiꝰ permutatim argumentando a ad d vt b ad e: per idem erit f a ad e maior ꝓportio q̃ b f ad e. itidem ⁊ ꝓportio b f ad e maior q̃ c f ad e. et quia d ad e vt a ad b vt dictum est: et differẽtia a f ad b f est d. et differẽtia b f ad c f est e: erit ꝓportio a f ad b f maior q̃ b f ad c f. et quãto differẽtia fuerit maior: tanto dꝛia vnius ꝓportionis sup differẽtiam alterius erit maior.

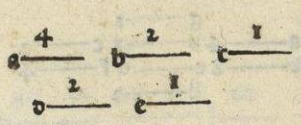


26 ¶ Si quotlibet numeris in hac medietate datis: totidem alii in eadem quidẽ medietate sed non ꝑm eandem ꝓportionem sumpti: maiores minoribus addantur: inter compositorum maiores: maiorem esse ꝓportionem conueniet.

¶ Sint ꝓtinue ꝓportiõales a b c ⁊ siliter d e f: sed in mĩori ꝓportiõe. dico q̃ a d ad b e maior ꝓportio q̃ b e ad c f. Sit enim qd̃ ex a in f ꝓducit/ g. et qd̃ ex b in e/ h. et qd̃ ex d in c: k. per primam quinti ꝓportio g ad h est dꝛia ꝓportiõis a ad b sup ꝓportiõem e ad f. sed ⁊ ꝓportio h ad k est per eãdem dꝛia ꝓportionis b ad c sup ꝓportiõem d ad e. quare sicut g ad h: ita h ad k. quare per vicesimãscdam huiꝰ g et k plus sunt q̃ duplũ h. et qr qd̃ ex a in c ⁊ qd̃ ex d in f sũt q̃tũ qd̃ ex b in se ⁊ e in se p vicesimãsextam scdi erũt ergo eadez cũ g ⁊ k maius q̃ quadrata b ⁊ e cum duplo h. maiꝰ g qd̃ ex a d in c f q̃ qd̃ ex b e in se. et ideo maior ꝓportio a d ad b e q̃ que est b e ad c f p vicesimãseptimam secũdi. qd̃ est propositum.

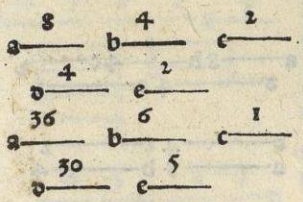


¶ Tribus numeris in hac medietate sumptis: maximi ad mimũ et medii ad alteram differentiarum eandem esse proportionem impossibile est. 27



¶ Sint a b c tres nũeri in hac medietate: ⁊ differentie eoꝝ d et e. dico impossibile eẽ eãdẽ ꝓportiõem a ad c ⁊ b ad d vel b ad e. nam si esset a ad c sicut b ad e: ergo ꝑmutatim esset a ad b sicut c ad e. et qꝛ per vicesimam huius b ad c sicut d ad e erit ꝑmutatim b ad d sicut c ad e. quare que ꝓportio a ad b ea erit b ad d: sed a ẽ maior d. igitur per quartam secũdi b maior d. igitur que ꝓportio a ad b maiorem eius portionem erit b maioris portionis ad minorem. qõ per vndecimã quinti est impossibile ⁊ ꝓpositum.

¶ Trium numerorum huius medietatis quo maximi ad mimũ maior est proportio: eo medii ad quãlibet differentiarum proportio minor. 28

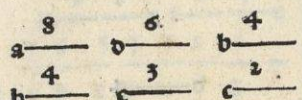


¶ Sit hypothesis vt prius. hoc enĩ ideo est q̃ quãto a ad c maior: tanto differentia b ad c erit maior quare tanto numerus e maior. et ideo ꝓportio b ad e minor sititer quanto a ad c maior tanto etiã a ad b maior et quãto a ad b maior tanto d differentia maior. quãto aũt d differẽtia maior: tãto b ad ipam proportio minor. quod est propositum.

¶ Numeros quotlibet in geometrica medietate ꝓtinuare: quoꝝ extremoꝝ ꝓportio non sit data ꝓportiõe maior: minorum ẋo differentia non sit dato numero minor. 29

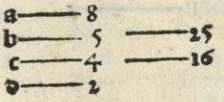
¶ Diuido per sexagesimãnonam nonij ꝓportiõem datam in ꝓportiões quaꝝ quotlibet sint equales: et si differẽtia minorum sit equalis dato numero aut maior: effectum est propositum. si aũt minorum differentia sit dato numero minor. duco datum numerum in quẽlibet numerum illaꝝ proportionum et factum apparebit propositum.

¶ Si inter numeros eiusdem medietatis: ꝓm arithmeticam medietatem medii statuantur: illi quoq̃ in geometrica medietate disponẽtur. 30



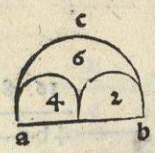
¶ Sint a b c cõtinue in hac medietate dispositi: sitq̃ d medius inter a ⁊ b: et e inter b ⁊ c ꝓm arithmeticam medietatem. dico que ꝓportio a ad b: eam esse d ad e. nam ꝑ decimãnonam huius vt a ad d: ita b ad e. igitur permutatim vt a ad b: ita d ad e. quod est propositum.

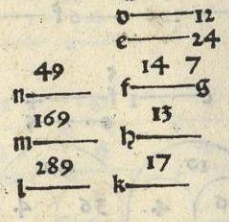
¶ Si inter duos numeros medij duo proponãtur alter in arithmetica ⁊ alter in geometrica medietate: qui est scõm arithmeticam reliquo tanto amplius potest q̃tum est quadratum differentie ipius ad alterutrum extremorum. 31



¶ Ut inter a ⁊ d sint b c duo medij: scz b in arithmetica medietate/ ⁊ c in geometrica. dico b amplius tanto posse sup c q̃tũ est quadratum differẽtie b ad a aut b ad d: qõ idem est. nam ꝑ vicesimãprimam huius qõ fit ex a in d tm̃ est q̃tum quadratum c. at ꝑ tertiã huiꝰ quadratum b addit sup id qõ fit ex a in d q̃tum quadratum differẽtie a ad b. igitur ⁊ tm̃ addet sup quadratum c. quod est propositum.

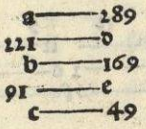
¶ Tres numeros in arithmetica medietate reperire: inter quoꝝ binos ⁊ binos scõm geometricam medietatem medios assignare cõtingat. 32





¶ Sint a ⁊ b duo nũeri pares: et b aut equalis aut numerãs a. et ꝓpositus ex a ⁊ b sit c cuius duplus sit d. ducaturq̃ a in c ⁊ pueniat e. quia ꝑ primam septimi cõpositus ex a et c est par: et ꝑ duodecimam eiusdẽ e est par. ergo ꝑ sextam eiusdẽ si ꝓpositꝰ ille detrahat ab e: relinquet par. sit ergo par relictus f. et eius medietas g. et compositus ex g et c sit h. itemq̃ h et a componãt k sintq̃ l m n quadrati l: h g quos dico esse numeros quales querimus. nam ꝑ decimãquintam primi l quadratum l: addit sup m quadratum h: q̃tum est quadratum a. et qõ fit ex h bis in a. hoc est q̃tum quadratum a ⁊ qõ fit ex a in d et f. et qõ fit ex a in se et in f minuit ex eo qõ fit ex a in e q̃tum est qõ fit ex a in c. et qõ fit ex a in d est q̃tum qõ fit ex b in c. et qꝛ qõ ex a et b in e equat ei qõ ex c in e: erit qõ addit quadratum k sup quadratum h minus eo qõ ex c in e q̃tum est qõ fit ex c in a. et ex eodem patere potest q̃ quadratum h addit sup quadratum g q̃tũ qõ fit ex c in se ⁊ in f: qõ minꝰ est eo qõ fit ex c in e q̃tum est qõ fit ex c in a. quare quanto l abundat sup m tanto m abundat sup n. quare quadrati l m n sunt in arithmetica medietate constituti. et ꝑ correlarium quarte sexti inter l et m est vnus medius ꝓportiõalis: ⁊ sititer inter m ⁊ n. factum est ergo propositum.

¶ Si sumptis tribus terminis in arithmetica medietate medij inter illos ꝓm geometricam medietatem statuãtur: inter quadratos illoꝝ quadratũ medii alioꝝ in arithmetica medietate constare necesse est. 33



¶ Sint a b c numeri in arithmetica medietate cõstituti ꝑ precedentem inuẽti inter quos sint d e ꝓm geometricam medietatem. dico quadratũ medij b eẽ in arithmetica medietate inẽ quadrata medioꝝ d ⁊ e. nam qꝛ quadratum d ꝑ vicesimãsextam secũdi est q̃tum qõ fit ex b in a. q̃ per nonam primi quadratum d addet sup quadratum b q̃tum qõ fit ex b in dẋiam suam ad a. ⁊ ꝓsititer quadratum b addet sup quadratum e q̃tum qõ fit ex b in dẋiam suam ad c. sed b ad a ⁊ b ad c equalis est differẽtia: igitur quadrata numerorum d b e: sunt in arithmetica medietate. quod est propositum.

¶ Ordiatis tribus terminis in harmonica medietate: erit maximi ad mediũ: q̃ medij ad minimum maior proportio. 34

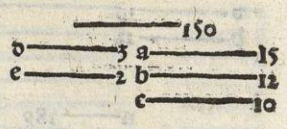
¶ Sint a b c tres nũeri in harmonica medietate ꝓstituti: sitq; a maximus. dico a ad b maiorem esse ꝓportionem q̃ b ad c. Sit enĩ d differẽtia a ad b: et e differẽtia b ad c. erit enĩ per diffinitionem d ad e sicut a ad c. et per nonam secũdi a ad c maior ꝓportio q̃ a ad b. quare a ad b minor proportio q̃ d ad e totius scz ad totũ minor ꝓportio q̃ detracti ad detractum. ergo ꝑ decimãquartam secũdi b ad c residui ad residuum minor ꝓportio q̃ a ad b totius ad totum. quod est ꝓpositum.

35 ¶ In eadem medietate duo extremi ꝓiũcti: maius medio duplicato efficient.

¶ Nam per scõam secũdi differẽtia maiorum est maior q̃ differẽtia minorum. sumpto ergo numero minore maximo extremorq; qui addat sup medium q̃tum sup mĩmum: ꝑ scõam ꝓimi ille cũ mĩmo equabunt medio duplicato. igitur per cõem sciẽtiam maximus extremorum qui eo est nũerus maior cũ eodem mĩmo constituet numerum medio duplicato maiorem. quod est propositum.

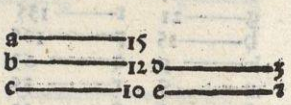
36 ¶ In eadem medietate qõ cõtinetur sub extremis est q̃tum quadratum medij cũ eo quod fit ex differentia in differentiam.

¶ Sint vt ꝓius a b c tres numeri in hac medietate cõstituti: et eorq; differẽtie d z e. dico qõ fit ex c in a esse tm̃ q̃tum quod fit ex b in se cũ eo quod fit ex d in e. nam qõ fit ex c in a est tm̃ q̃tum quod fit ex c in b z in d per nonam primi. et ꝑ vicesimãquintam secũdi qõ fit ex c in d est q̃tum qõ fit ex e in a. et qõ fit ex e in a q̃tum qõ ex e in b et d. et quod ex e z c in b per decimam primi q̃tum quod ex b in se. ergo quod fit ex c in a est q̃tum qõ b in se et e in d. quod ꝓponitur.



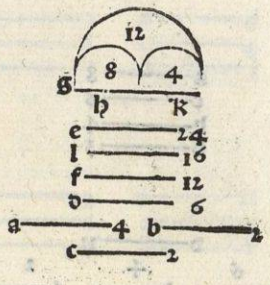
37 ¶ In eadem quoq; medietate quod fit ex medio in extremos: duplum est eius quod continetur sub eisdem.

¶ Nam quod fit ex b in a est q̃tum quod ex c in a et e in a per decimam primi. et q̃ ex e in a q̃tũ quod ex d in c per vicesimãquintam secũdi z ꝑ decimam primi itẽq; quod ex d in c cũ eo quod ex b in c q̃tum quod ex a in c. quare q̃tum quod ex c in a. est itaq; quod astruitur notum.



38 ¶ Inter vnitatem z aliquem numerum: siue inter numeros in sua ꝓportiõe mĩmos: scõm harmonicam medietatem non est assignare medium.

¶ Inter numerum z vnitatem non assignabil. nam cũ que ꝓportio numeri dati ad vnitatem ea esset differẽtie numeri dati ad medium ad differẽtiam medij ad vnitatem. et dr̃ia numeri dati ad medium minor eẽt numero dato: oporteret medij numeri dati z vnitatis ad vnitatem: minorem eẽ differẽtiam vnitatis. de numeris aũt in sua ꝓportiõe mĩmis idem statim patet. nam cum eadem eẽt differentie ad differentiam que illorq; nũerorũ adinuicem ꝓportio z eorq; differentie sint minores. illi ergo non essent in sua proportione minimi. quod est ꝓtra hypothesim.

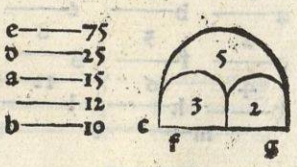


39 ¶ Scõm datam proportiõem: musicam inuenire medietatem.

¶ Sint a z b extrema date proportiõis: et c differẽtia eorq; et cõpositus ex eis sit d. ducãtur igit̃ a et b in d et pueniãt e z f. sitq; eorq; differẽtia g. quã ꝑ nonam primi d nũerabit ꝓm c. et quia d est tanq̃ a z b ergo c ductꝰ in a z in b facit g. et eo quod fit ex c in a quod sit h: dempto de g remaneat l z: quẽ ꝓducet b in c. sumatur ergo l medius inter e z f cuius differentia ad e sit h: certum est differentiam eius ad f esse k. et quia per septimam secũdi h ad k tanq̃ a ad b. et per octauam eiusdem etiam e ad f tanq̃ a ad b. constat ergo per diffinitionem factum esse propositum.

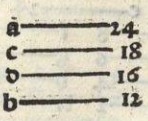
40 ¶ Terminis extremis ꝓposit: medium inter eos ꝓm harmonicam medietatẽ repire.

¶ Sint a z b extremi harmonice medietatis quorq; iubear medium inuenire. capio eorq; differentiam que sit c: et cõpositum ex ipsis qui sit d. deinde duco a in c et pueniat e qui diuidatur ꝑ b: et diuidens sit f. eritq; per cõuersam vicesime quinte secundi que proportio d ad a eadem c ad f. dempto ergo f de c remaneat g. eritq; f ad g sicut a ad b. quod ostẽdo. nam qz sicut d ad a: ita c ad f. ergo ꝑmutatim d ad c totus ad totum vt a ad f detractus ad detractum. quare itẽq; vt a ad f: ita b ad g residuus ad residuũ. ergo permutatim a ad b sicut f ad g. sumo igitur inter a z b medium numerum cuiꝰ differẽtia ad a sit f. et quia relinquetur differentia eius ad b esse g: per diffinitionem cõstat factum esse propositum.



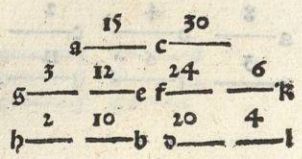
41 ¶ Si inter duos numeros duo statuantur medii: alter ꝓm arithmeticam z alter scõm harmonicam medietatem: qui ꝓm arithmeticam maior est z q̃ maximi ad ipm eadem alterius ad minimum proportio.

¶ Sint extremi a b. et mediꝰ ꝓm arithmeticam medietatem c. et ꝓm harmonicam d. dico c eẽ maiorẽ d: et eam eẽ ꝓportiõem a ad c q̃ d ad b. q̃ aũt c maior sit d: statim patet q̃ ꝑ diffinitiõem ea sit ꝓportio dr̃ie a ad d ad dr̃iam d ad b que a ad b. sed dr̃ia a ad c z c ad b equãtur: ergo maior erit dr̃ia a ad d q̃ a ad c. et q̃ ea sit ꝓportio a ad c que d ad b patet. nam ꝑ quintam huiꝰ c est medietas a z b sil'iunctorum et per tricesimamseptimam huius quod ex d in a z in b ꝓducitur duplum est ad id quod fit ex a in b. igitur qõ fit ex d in c dimidium per scõam primi a z b: equabitur ei qõ fit ex a in b. igitur ꝓvicesimam quintam secundi a c d b sunt proportionales vt dicitur. quod est propositum.



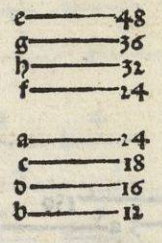
42 ¶ Si inter numeros proportionales medii ꝓm harmonicam medietatem statuãtur: extremorum ad illos erit proportio vna.

¶ Sit ꝓportio a ad b sicut c ad d. et sit e medius harmonice inter a z b. et siliter f medius inter c z d. dico a ad e sicut c ad f. Sint enĩ dr̃ie g h et k l. qz q̃ ꝓportio a ad b ea est c ad d. et q̃ a ad b ea est g ad h. et que c ad d ea ẽ k ad l. idcirco erit g ad h vt k ad l. quare ꝑmutatim g ad k vt h ad l. quare ꝑ vicesimã



secūdi g h ad k l sicut g ad k. et itez qz pmutatim a ad c sicut b ad d: erit per idem a ad c sicut g h ad k l quare sicut g ad k. et qz a z c sūt tota et g z k detracta: erit ergo e ad f residuus ad residuum p quitam secundi vt a ad c totus ad totum. quare pmutatim a ad e sicut c ad f. quod est propositum.

¶ Si inter duos numeros alij duo medii ꝓportionaliter sumantur: sumaturq; maior fm arithmeticam medietatē: sumetur minor fm harmonicam. q; si minor fm harmonicam: maior fm arithmeticam sumetur. 43



¶ Sit enim a ad c sicut d ad b. et c maior sit medius fm arithmeticam medietatem inter a z b. dico d esse medij fm harmonicam medietatē inē a z b. et ꝓuertitur. Sumo enī p quadragesimāprimā huiꝰ e z f q̄ sint in ꝓportiōe a ad b. inter q̄s sit g fm arithmeticam medietatē mediꝰ / z h fm harmonicam. quia igit p quadragesimāprimam e ad g sicut h ad f. et p decimānonam huius e ad g sicut a ad c. q̄re cū d ad b vt a ad c: et h ad f vt e ad g. erit g h ad f vt d ad b. sed z qz h est medius harmonicus ad quem f extremum habet eam proportiōem q̄ b ad d: facile p precedentem inuenies d eē in harmonica medietate inter a et b. cōuersum aūt facile ꝓbabis per quadragesimāprimā huiꝰ ostēdēdo medij arithmetice medietatis quēcunq; inuentum: esse equalem c maiori.

¶ Numeros quotlibet in arithmetica medietate ꝓtinuare: inter quoz binos z binos fm harmonicam medietatem possint assignari medij. 44

¶ Ut si iubear continuare tres numeros in arithmetica medietate inter quoz binos z binos possint assignari in harmonica medietate medij. capio a b c totidem numeros in arithmetica medietate cōstitutos: quoz differētia sit par: z inter illos sumātur medij in eadem medietate qui sint d z e. et multplicentur oēs per e. et ꝓueniant f / g / h / k / l qui p decimāseptimam huius erūt in arithmetica medietate. ducaturq; itez c in b z fiat m. et quia p septimam secūdi que ꝓportio c ad e ea est h ad k. et p octauam eiusdem itez q̄ c ad e ea est m ad l. et inter h z l numerus k maior est in arithmetica medietate mediꝰ. igitur p precedētem m est medius inter h z l in harmonica medietate. multiplicētur item oēs hi per d: et ꝓueniāt n / o / p / q / r / s et erūt vt prius n / o / p / q / s in arithmetica medietate: et r inter p z s in harmonica medietate. ducatur item a in h z ꝓueniat t. et eadem rōne qua prius mōstrabis ipm eē medij in harmonica medietate per precedentem inter n z p. sicq; erūt ꝓtinuati vt ꝓpositum est in arithmetica medietate numeri / factūq; apparebit propositum. ¶ Et si de pluribus ageretur: quoties erit apponendus medius harmonicus: toties facienda erit modo predicto multiplicatio.

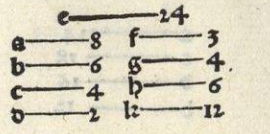
¶ Duobus numeris ad alios duos proportionalibus: vtrozūq; alterū inter reliquos medium esse in harmonica medietate: est impossibile. 45

¶ Ut sit a ad b sicut c ad d: dico c nō eē medium fm medietatem harmonicam inter a z b: neq; b inter c et d. si enī possibile sit: esto ergo c in harmonica medietate inter a z b: et b inter c z d. quia enī a ad b sicut c ad d. et inter a z b et c z d numeros quidē ꝓportionales: ꝓstituūtur c z b medij fm medietatem harmonicam. igitur per quadragesimam secōam huius erit proportio a ad c sicut c ad b maximi scz ad medium que medij ad minimum. quod per tricesimāquartam huius est impossibile et propositum.

¶ Si tres numeri in arithmetica medietate sumpti aliquem numerum numerent: illi fm quos cum numerant in ordine harmonice medietatis inuenētur. 46

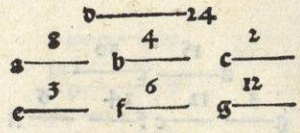
¶ Sint a b c in medietate arithmetica sumpti: numerētq; d fm e f g. dico e f g esse in harmonica medietate ordinatos. Sint enī tres dupli eoz h k l qui et iidem erūt vt patebit in harmonica medietate et sit m inter h z l in arithmetica medietate medius. qz enī a in e z c in g cōstituūt d: ergo p vicesimam quintam secundi que ꝓportio a ad c ea est g ad e: et que g ad e per quintam secūdi ea est l ad h. sed per decimānonam huius l ad m sicut a ad b. et qz per eādē vicesimāquintam secūdi a ad b sicut f ad e: erit ob hoc l ad m sicut k ad h. sed p quadragesimātertiam huius k est medius harmonice inter l z h. igit et f harmonice medius inter g z e. quod est propositum.

¶ Numeros quattuor perscrutari: quoz secundus inter primum z tertium: z tertius inter secundum z quartum in harmonica medietate cōstituatur. 47



¶ Sint a b c d quattuor numeri in arithmetica medietate cōstituti qui numerent eūdem numerum e fm f / g / h / k. dico f g h k esse quattuor numeros quoz g secūdus est in harmonica medietate inter f z h primum z tertiū. et h tertius itidem eē in harmonica medietate inter g z k scōm z quartum. nam qz tres nūeri a b c in arithmetica medietate ꝓstituti numerant e fm f / g / h: ē per precedētem f / g / h sunt in harmonica medietate. et per idem quia b / c / d tres alij arithmetice medietatis numerant eundem e fm g / h / k. ergo g h k sunt in harmonica medietate. est igit vt ꝓponebat g medius harmonice inter a et h: et h itidem medius harmonice inter g z k. quod est propositum.

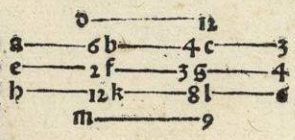
¶ Si tres numeri geometrice medietatis aliquem numerum numerent: et illos scōm quos numerant in eadem inueniri necesse est. 48



¶ Ut sint a b c in geometrica medietate ꝓstituti q̄ nūerent d fm e / f / g: dico g / f / e in eadem ꝓportione reperiri. nam pervicesimāquintam secundi vt a ad b ita f ad e: et per eandem vt b ad c ita g ad f. quare erit e ad f vt f ad g: et f in geometrica mediate medius. quod est propositum.

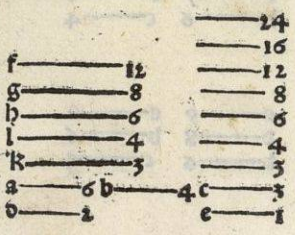
¶ Si tres numeri musice medietatis aliquem numerent: illi fm quos cum numerant in arithmetica medietate disponētur. 49

¶Hec est ꝓuersa quadragesimesexte. sint ergo a b c in harmonica medietate dispositi qui numerent d fm e f g. dico e f g esse in arithmetica medietate constitutos. Sumo h l2 l duplos ad a b c qui siliter erũt in harmonica medietate ⁊ in medium fm arithmeticam medietatem inter h ⁊ l. eritq; ꝑ quadragesimãprimam huius h ad m sicut l2 ad l. quare sicut g ad f adiuuãte vicesima quĩta secundi. sed ⁊ per eãdem vicesimãquĩtam scõi cognoscet g ad e sicut h ad l. sed h ad m medium: sicut g ad f suũ medium et m ad l vt f ad e. igitur per decimãnonam huius f medius erit in medietate arithmetica inter g ⁊ e. quod est propositum.



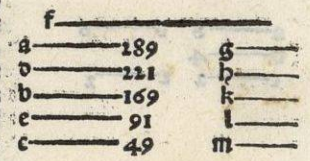
50 ¶Quotlibet nũeros in geometrica medietate fm datam ꝓportiõem ꝓtinuare: inter quoꝝ singulos fm harmonicam medietatem medios assignare sit possibile.

¶Per tricesimãnonam huiꝰ sumãtur fm datam proportiõem a/b/c tres numeri in harmonica medietate: et sint d e terminꝰ ꝓportionis a ad c. et ducat d in oẽs illos ⁊ pueniant f g h qui ꝑ septimam secũdi erunt in eadẽ medietate q̃ per correlarium eiusdem septime differẽtie f ad g ⁊ g ad h sint equemultiplices ad d e. ducatq; e in c ⁊ pueniat l2. eritq; ꝑ octauam secũdi f ad h sicut h ad l2. Itẽ ducatur e in b ⁊ pueniat l. eritq; l ad l2 sicut b ad c. quare l harmonice medi⁹ inter h ⁊ l2. sicq; habes duos fm datam ꝓportiõem geometrice ꝓtinuatos: inter quos ⁊ duo medij harmonice medietatis sunt inuẽti. ¶Si plures desideras duc d in oẽs inuẽtos ⁊ e in duos extremos ⁊ habebis tres ĩ medietate geometrica ꝓtinuatos ⁊ inter binorũ singulos ea rõne qua ꝓius medios in harmonica medietate sumptos et hoc quoq; pacto quotquot voles inuenies.



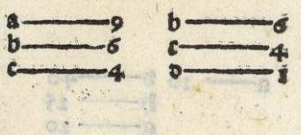
51 ¶Tres numeros in harmonica medietate disponere: ita vt iter binos ⁊ binos medii fm medietatem geometricam cõsistant.

¶Scõm exigentiam tricesimesecunde huius inueniãtur a b c tres numeri in arithmetica medietate ꝓstituti: inter quos sint d ⁊ e in geometrica medietate. et sit f numerus quẽ oẽs numerant: numerẽtq; eum fm g h l2 l m. et patet ꝑ quadragesimãsextam huius g/l2/m eẽ in harmonica medietate: sed ⁊ per quadragesimamoctauam huiꝰ h inter g ⁊ l2: et l inter l2 ⁊ m erũt in geometrica medietate. sicq; patet effectum propositum.



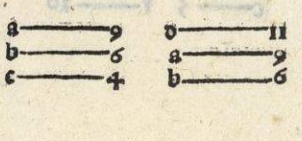
52 ¶Primam residuarum medietatum: in numeris constituere.

¶Hec a geometrica sumitur. Et sint a b c in geometrica medietate ita tamen vt c minimus sit maior q̃ dꝛia maiorum. substrahat igitur differẽtia maiorum ab c mĩmo/⁊ residuũ sit d. dico b c d eẽ in hac ꝓima collateralium medietatum ꝓstitutos. nã quia a b c sunt in geometrica medietate cõstituti: ideo que ꝓportio a ad b: ea est ꝑ vicesimam huius differentie maiorum ad differentiam minorum. sed differentia a ad b est eadem differentie c ad d. igitur differentia c ad d minorum ad differentiam b ad c maiorum sicut a ad b. quare sicut b ad c maximi ad medium. per diffinitionem itaq; patet ꝓpositum.



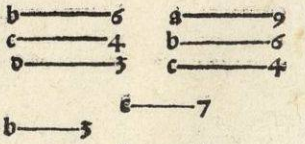
53 ¶Secunde inuentionem declarare.

¶Sint vt ꝓius a b c in geometrica medietate quoꝝ differentiam minorum addo ad a. et ꝓpositũ sit d. dico d ad b esse in secũda reliquaꝝ medietate. nam per vicesimam huius que ꝓportio a ad b ea erit differentie maiorum ad differentiam minorum nũerorũ in geometrica medietate ꝓstitutoꝝ. et eadem est proportio differẽtie a ad b ad differẽtiam a ad d. igitur per diffinitionem cõcluditur propositum.



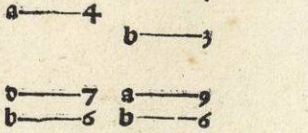
54 ¶Tertiam carũdem in numeris assignare.

¶Hec etiam habetur ꝑ geometricam medietatem. sit ergo precedẽtium hypothesis ⁊ maiorum differẽtia dematur ab b medio: sitq; residuum d. dico b/c/d esse in tertia medietate. nam que differẽtia a ad b: ea est b ad d. igitur que ꝓportio differẽtie a ad b ad differentiam b ad c ea est differẽtie c ad d ad differentiam b ad c. quare que ꝓportio b maximi ad c medium: ea est differentie b ad d extremorum ad dꝛiam b ad c maiorum. cõstat igit ꝑ diffinitionem b c d eẽ in ꝓposita medietate. qd̃ est ꝓpositum.



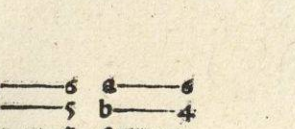
55 ¶Quartam in terminis manifestare.

¶Sint a b quilibet duo numeri: et cõpositus ex ipis sit c. dico c/a/b eẽ tres terios in hac quarta medietate datos. qꝛ enĩ dꝛia c ⁊ b extremoꝝ: est a. et dꝛia c a maiorũ: est b. q̃ que ꝓportio a ad b mediꝰ ad mĩmũ: ea erit dꝛie extremoꝝ ad dꝛiam maiorum. per diffinitionem itaq; ꝓstat factum esse ꝓpositum.



56 ¶Quinte demonstrationem explicare.

¶Hec a geometrica medietate elicitur. Sint igitur vt ꝓius a b c tres nũeri ĩ geometrica medietate quoꝝ c mĩmo addo differentiam maiorum: et cõpositus sit d. dico d b c esse in ꝓposita medietate. nam differentia d c extremorum est differentia a ad b: igitur adiuuante vicesima huius que ꝓportio b ad c mediꝰ ad minimum: ea erit differentie d ad c extemorum ad differentiam b ad c minorum. Itaq; per diffinitionem demonstratum est propositum.



57 ¶Sextam sub exemplo demonstrare.

¶Hec ex harmonica cognosci potest. Sint a b c in harmonica medietate: ꝑ diffinitiõem que ꝓportio a ad c ea est dꝛie maiorum ad dꝛiam minoꝝ. capio nũerum d inter a ⁊ c: cuius dꝛia sit ad a que b ad c. erũt itaq; trãsmutate differẽtie. quia que differentia a ad b maiorum: ea est d ad c mĩorum. ⁊ que b ad c minorum: ea erit a ad d maiorum. dico itaq; a d c esse qui petũtur. nam que ꝓportio a ad c extremoꝝ ea est differẽtie d c minorum ad differentiam a d maiorum. per diffinitiõem igitur patet effectum esse ꝓpositum. Quod si capite secũdi sue arithmetices diuus Seuerinus testatur huic medietati quam suo ordine quartam ponit ꝓpꝛium esse vt qd̃ cõtinetur sub maiore terio ⁊ medio duplum sit ei quod

cõtinetur sub medio ⁊ paruissimo: hoc indubitatũ est per septimam secũdi quoties maximi ad mimũ est habitudo dupla/alioquin per eandem non teneat sed per eandem semper que ꝓportio maximi ad mimum ea erit eius quod cõtinetur sub maximo ⁊ medio ad id qõ continetur sub medio ⁊ mimo/imo id omni medietati cõmune est.

¶ Septime terminos inuestigare. 58

a——9 a——9
d——7 b——6
b——6 c——4

¶ Hec ex geometrica. Sint a b c tres numeri in geometrica medietate ab a maximo eoꝝ substraho differentiam minorum ⁊ sit residuum d. et patebit vt prius que ꝓportio a ad b maximi ad mimũ: eam esse differentie extremoꝝ ad differentiam maiorum. quare per diffinitionem constabit propositum.

¶ Octauam demum restat explanare. 59

a——9 a——9
d——8 b——6
b——6 c——4

¶ Hec etiam ex geometrica. Sint sepius dati numeri a/b/c in geometrica medietate: et minorũ differentia addatur medio: fiatq; compositus d. dico a/d/b esse in hac vltia medietate. nam que ꝓportio a ad b maximi ad mimum: ea est a diuuãte vicesima huius differẽtia a ad b extremorũ ad differẽtiam d b minorũ. nam equatur differentie b ad c. igitur per diffinitionem a/d/b sunt in hac medietate. sicq; constant octo collaterales medietates monstrate.

¶ Trium numerorum maximi ad medium: atq; differentie maximi ad minimum ad differentiam medij ad ipm: eandem esse proportionem impossibile est. 60

a——8 d——6
b——4
c——2 e——2

¶ Sint a/b/c tres diuersi numeri quicũq; quoꝝ a sit maximus/b medius/et c mimus: et differentia a ad c sit d. et differentia b ad c sit e. dico impossibile esse eandem ꝓportionẽ a ad b maximi ad medij que d ad e differentie maximi ⁊ minimi ad differentiam medij ad mimum. nam si ea ꝓportio sit a ad b que d ad e totius scz ad totum que detracti ad detractũ: erit c residui ad c residuũ: que a ad b totius ad totum. est enim c vtriusq; residuum. quare a et b idem sunt numerus atq; equales. quod est contra hypothesim.

¶ Si inter duos numeros sumãtur tres medij: vnus fm arithmeticam medietatem: et vnus fm geometricam: et tertius fm harmonicam: arithmeticum maximũ: ⁊ harmonicum mimum: atq; inter illos geometricum medium esse ꝓportiõalit̃ est necesse. 61

a——10 d——40
h——25
g——20
b——8 e——16
c——5 f——10

¶ Sit a ad c ꝓportio quecũq; que potest in duo equa diuidi. vt exempli causa quadrupla inter cuius extrema per tricesimãnonam huius sit inuentus b in harmonica medietate duplo a b et c ⁊ queniant d/e/f qui ꝓsiliter erũt in eadem medietate. et quia per septimam secũdi d ad f vt a ad c: et a ad c posita est partibilis in duas equas ꝓportiones: partietur etiam d ad f in equas. diuidatur igitur per g. erit igitur d ad g vt g ad f. quare g per diffinitionem medius est geometricus inter d ⁊ f. et quia f ⁊ d sunt pares: ipsorũ simul iunctorum capio medietatem que sit h: que per quintam huius est in arithmetica medietate inter d ⁊ f. habemus igit̃ inter duos numeros d et f tres medios h g e scz h in arithmetica medietate/g in geometrica/⁊ e in harmonica demõstratos. qõ supponebat ꝓpositio. dico igitur d esse maximum mediorum: et e mimũ: et g medium ꝓportiõaliter atq; geometricum inter h ⁊ e. nam quia h est medius inf d ⁊ f fm arithmeticam medietatẽ ⁊ e fm harmonicam: ergo p quadragesimãprimaꝝ huius h maior est q̃ e. et que ꝓportio d ad h ea est e ad f. igitur per vicesimãquintam secũdi qõ fit ex d in f: equũ est ei qui fit ex h in e. sed quia g est medius ꝓportiõalis inter d ⁊ f: igitur per vicesimãsextam eiusdem quod fit ex d in f: equũ est ei qui fit ex g in se. quare quod fit ex g in se tm̃ est q̃ tum quod ex h in e. igitur per secũdam partem eiusdem vicesime sexte secundi h g e sunt proportiõales. quare h erit maximus: g medius proportionalis: ⁊ e minimus. quod intendebat propositio.

¶ Duos numeros quoꝝ ꝓportio non sit data proportione maior / inuestigare: inter quos fm tres dictas medietates medios assignare sit possibile. 62

¶ Datam proportionem quãcunq; diuidamus per sexagesimãnonam noni in quotlibet ꝓportiones: quaꝝ due sint equales: que ꝓposite nõ sint data proportiõe maior. fm igit̃ illam ꝓportiõem ꝓpositam quero medium harmonicum fm exigentiam tricesimenone huius et oĩno consimiliter operãdo vt in principio precedentis factum est inueniam tres medios modo qui in precedenti dictus est; inter duos numeros quoꝝ proportio non erit data proportione maior. sicq; constabit propositum.

¶ Decimi elementorum arithmetices Jordani finis.

¶ Jacobi Fabri Stapulensis Elementa Musicalia ad clarissimũ virũ Nicolaum de haqueville inquisitorium Presidẽtem.

Ecreuerã clarissime vir nulli meas elementorꝫ musicaliũ qualescunꝫ sunt prius dicare vigilias: ꝗ probatas cognouisse. Cuis id me mime lateret/demõstrationes: in quibus vel solis vis scientie cõsistit: nõ probari non potuisse. Verũ si presentiũ iudicia parui ducis/reputasꝫ: hi tibi ex ãtiquis sũmopere musicos cõmendare laborẽs iure valebunt.

Mercurius	Tamyras	Ptolomeus
Orpheus	Hysmenias Thebanus	Eubolides
Pythagoras Samius	Terpander lesbius	Hippasus
Amphion thebanus	Lycaon Samius	Aristoxenus
Linus	Prophrastus Periotes	Philolaus Pythagoricus.
Arion lesbius	Estiacus Colophonius.	Archytas tarentinus
Mydas Phrygius	Tymotheus milesius	Albinus
Corebus lydius	Nicomachus	Diuus Seuerin⁹ Boecius.
Hyagnis Phryx	Plato	
Marsias	Aristoteles.	

Et similium ꝗplurimi quos oẽs eterna memoria disciplinarũ eblãditissima Musica reddidit isignes inter quos: duos pceptores meos Jacobũ Labiniũ ⁊ Jacobũ turbelinũ ãnumero: tanꝫ ea arte posteritati victuros. Comẽdant ⁊ eã mirifici eius effect⁹. Pythagorici enĩ animorꝫ ferociã tibiis/fidibusꝫ emollicebant. Esclepiades fremẽtis vulgi seditiones crebro cantu compescuit. Idẽꝫ tuba surdis medebatur. Damon pythagoricus ebrios et proinde petulãtes adolescẽtes: grauiorib⁹ modulis ad tẽperantiam reduxit. Febrẽ ⁊ vulnera: musica modulatione curauit antiqtas Eadẽ quoꝫ suauitate schias/corpendicũꝫ dolores emẽdauit: qõ hismenias theban⁹ tẽtasse memoratur. Theophrastus ad animi pturbationes moderãdas musicos adhibuisse memorat modulos. Nec iniuria quidẽ. est enĩ musica vt quedã moderationis lex atꝫ regula. Quamobrẽ bono iure eos ridebat diogenes musicos: qui cũ citharã ad harmonicos cõsensus haberent temperatã: animũ gererent incõpositũ et prorsus harmonia vite destitutũ. Xenocrates organicis modulis lymphaticos liberauit. Tales Cretensis suauitate citharę: morbos/pestilentiãꝫ fugauit. Terpãder et arion Alones ⁊ lesbios cantu a grauissimis morbis leuasse: diuus Seuerinus autor est. Herophilus medicus egrorum venas musicis pensiculabat numeris. Tymotheus aũt musicus dum voluit efferatũ reddidit alexandrũ ad armaꝫ furentẽ atꝫ aliter cũ libuit ab armis ad cõuiuia retraxit emollitũ. Thracius Orpheus feraꝫ sensus fidibus/cãtuꝫ inflexit. hoc est ferinos hoim mores leges ad citharã canendo ad moderatã humanitatẽ reduxit. Cerui fistulis capiũtur studioꝫ modulationũ detinentur. Cygni hyperborei citharę cãtibus alliciũtur. Elephãtes indi organica dulcedine permulcẽtur. Auicule fistulis irretiũtur. Teneros adhuc infantiũ sensus permouent cãtus/crepitaculaꝫ vagientũ sedãt. Delphinos suis sibi fidibus cõciliauit arion Serpẽtes cãtibus rũpuntur. Sepultorꝫ manes cantibus excitãtur. In actiaco littore mare citharã personare memorãtur. Megaris citharã personat saxũ: et ad cuiuslibet pulsantis ictum fidicinat. Et possem pleraꝫ talia vir clarissime ad musicã cõmendationẽ adducere. at tot/tantisꝫ ⁊ recentiũ ⁊ priscorꝫ cõmendatã autoritatibus tibi nũc ab me atꝫ bonarũ litterarꝫ studiis dicatã disciplinã: equo suscipias animo tuis auspicis lucem habiturã. Et me vnum inter tuos cliẽtulos tuarum virtutũ/tuiꝫ nominis obseruatorem esse cognoscito. Vale.

¶ Jacobus Stapulensis Jacobo Labinio ⁊ Jacobo Turbelino Musicis: suis charissimis preceptoribus.

Quod inter oratorē atq; rhetora: id inter cantorem ⁊ musicum interesse volunt: neq; oratorem quemq; dici mereri qui idem rhetor non sit. ita vestruz semper iudicium fuit: vt ne cantor quidē dici mereatur vnq;: qui idem musicus non fuerit: pulchre mimos/ et hystriones a cantorum honesto cetu sequestrātes tanq; Epicureos a sobria mensa/ castoq; philosophorū dogmate. nec iniuria nam Homerus diuinus Poeta vbiq; doctum et seria modulatū introducit cantorem vt apud Odysseam vbi Penelopē Phemiū Fidicinē ad neruos verba mouētem his verbis allocutam effingit.

Preterea illachrimans diuum est affata canentem
Phemi multa tenes hominum mulcentia pectus
Facta hominum atq; deum: et que laudē autoribus addunt.

Ex iis pange aliquid.

Et quales Homerus probat: vos minime tales esse dubito vt qui dudū a vobis pria musices rudimenta perceperim. Quapropter ad vos nostros labores examinandos cōmitto. quos eo libentius me suscepisse fateor: quo musicalē scientiā neq; apud grecos neq; latinos quidē vnq; elementis traditam esse legerī: at introductiones q̄plurimas inter quas ea omniū nobilissima est quam diuus Seuerinus Boecius sui monumentū reliquit. quem vnū in hac re preserti delegi meorū studiorū ducē. Si ergo probaueritis satis michi est. In re enim nostra malumus aliorū iudicia sequi: q̄ propria probare. Valete.

Antiqui qui de musica scripserunt		Insignes ex recentioribus qui de eadē scripsere.
Democritus	Plato	Ibinus
Heraclides ponticus	Aristoteles	Diuus Seuerinus
Thimotheus milesius	Theophrastus	Basilius
Philolaus Pythagoricus	Nichomacus	Hylarius
Architas tarentinus	Aristoxenus	Augustinus
Duo Theodori	Ptolomeus	Ambrosius
Xanthus athenienſis		Gelasius.

Argumentum quattuor librorū musices.

¶ Primus liber interualla musicis modulationibus acōmoda discutit. multiplex: duplare/ triplare/ quadruplare. superparticulare: sesqualtex/ sesquitertiū/ sesquioctauū/ bis sesquioctauū/ ter sesquioctauū/ quater sesq̄octauū/ quinq̄ies ⁊ sexies sesquioctauū

¶ Secundus de tono/ integro toni dimidio/ semitonio minore/ semitonio maiore/ cōmate/ schismate/ atq; diaschismate.

¶ Tertius de sesquitono/ ditono diatessarū/ diapente/ diapente ⁊ tono/ diapason/ diapason ⁊ trisemitonio/ diapason et ditono/ diapason et diatessarō/ diapason ⁊ diapēte/ diapason diapente ⁊ tono/ disdiapason/ ac integro toni ⁊ cōsonantiarū oīm dimidio. Et de maximarum Harmoniarum consonantiis: et quarundā medietatum.

¶ Quartus de monochordo/ tetrachordo/ pentachordo/ heptachordo/ octochordo/ pentadecachordo/ diatonicis/ chromaticis/ enarmonicis melodiis. Et de melodiarū modis. et hec sub breuitate contracta: argumentū libri sunto.

¶ Jacobi Fabri Stapulensis Elementorũ musicaliũ ad clarissimum virum Nicolaum de haqueville presidentem parisiensem liber primus.

Interuallum est soni grauis / acutiq; spaciorum habitudo.
Spacium vocamus neruũ / chordam / expiratum aerem / et quidquid simile est: a quo sonum elicimus.
Multiplex interuallũ est quoties maius spaciũ continet minus pluries. vt bis: et duplex interuallum dicitur. vt tertio: et dicitur triplex. vt quarto et quadruplex nuncupat̃. ⁊ hoc pacto deinceps
Interuallum superparticulare est cum maius continet minus: et partem eius aliquam.
Pars est que metitur totum: ipsum aliquoties sumpta restituens.
Si maius continet minus et eiusdẽ dimidium: sesqualterũ nominatur interuallum.
Si maius continet minus et minoris partem tertiam: dicitur sesquitertium.
Si vero cõtinet minus et eiusdẽ minoris partem octauã: epogdoum / sesquioctauũq; nominatur. Et ita reliqua superparticularia iterualla: perfacile est diffinire: seo parũ musico conducunt proposito.
Superpartiens autem diceretur interuallum: si maius contineret minus et minoris partes aliquot: que partẽ vnam non efficiunt.
Numeri sunt adinuicem primi: quos sola metitur vnitas.

Dignitates.

1 Quidquid metitur alterum: metitur et omne mensuratũ ab illo.
2 Compositum in ea resoluitur simplicia: ex quibus componitur.
3 Cuiuslibet numeri pars est vnitas: ab eo denominata.
4 Vnitas in quemcunq; numerum ducta: ipsum producit.
5 Quidquid metitur detractum et residuum: metitur ⁊ totum.
6 Quecunq; vni et eidem equa sunt: ⁊ ea inter se sunt equa.
7 Et que inter se sunt equa: eiusdem sunt eque multiplicia aut submultiplicia.
8 Eorum quorum tota sunt equa: et dimidia sunt equa.
9 Quidquid bis auctum aliquid transcendit: id vltra illius dimidiũ esse necesse est.
10 Et quod duplicatum non implet integrum: id profecto non continet dimidium.
11 Omne totum est maius sua parte.

¶ Petitiones.

1 Data equali chorda: que spacij ad spaciũ proportio est: eam esse ⁊ soni ad sonum.
2 Inter numeros sola vnitate distantes: nullum intercipi posse medium.
3 Spacium quodlibet in quotlibet equas partes diuidere.
4 Totum ad suam partem / et laxius ad se tensum: grauiorem sonum edere.
5 Omnem proportionem esse tanq; numeri ad numerum.
6 Si numerus numerũ datum multiplicet: idẽq; productũ diuidat: numer̃ datũ redire
7 Si numerũ datũ numer⁹ diuidat: ⁊ qd̃ puenit rursus multiplicet: numer datũ redire.
8 Extremorũ proportionẽ ex mediorũ proportionib⁹ vt suis partibus esse compositã.
Extremi ordinatarũ proportionũ: maximus / minimusq; terminus intelliguntur.

¶ Sciẽtia subalternata qualis ad Arithmeticã Musica est: principiis et demõstratis scientie prioris subalternãtisq; vtitur. at studuimus vt q̃ fieri potest rarissime id in hac disciplina fiat. verum plerũq; vbi oportunũ videbitur alio q̃ in arithmeticis factũ est vtemur demõstrandi mõ: quo singula magis ex propriis facta videãtur q̃uis arithmetico suffragio atq; iis que in arithmeticis monstrata sunt eadem prõptius faciliusq; fierent: attamen quando id fiet ⁊ quando nõ sequentibus demõstrationibus cuilibet per q̃ perspicuum euadere poterit.

¶ Si interuallum multiplex binario multiplicetur: id quod fit ex hac multiplicatione interuallum multiplex est. 1

d	e	c	
16	8	4	Multiplex ex duplatione.
4	2		Multiplex interuallum.
A	B		

¶ Interuallum binario multiplicare: est interualli habitudinem duplare que quo pacto duplāda sit dudum tertia propositione quinti Arithmetices notum esse potest. vt si a b sit interuallum quodcūq; quod binario multiplicare iubeamur: ipsum per tertiam quinti multiplicabimus si ducimus a in se et b in se prouenianteq; d c eritq; productorum d et c duplex interuallum interuallo producentiū a b. Q; si rursum ducimus a in b prouenianteq; productum e erit per sextam quarti que proportio d ad e ea dem e ad c et interuallum d c in duo equa partitum. Sed esto nunc vt interuallum a b sit multiplex quēadmodum proponit propositio quod modo pauloante dicto: binario multiplicetur: sitq; duplum d c et ea proportio d ad e r e ad c: dico interuallū d ad c esse multiplex. Nam cum a ad c multiplex sit interuallum cum geminatur manifestum est multiplex addi multiplici quare per vicesimā secundam noni Arithmetices statim notum est interuallum compositum multiplex esse. r propositū. Sed idem aliter hic demonstratur. Quoniā enim que proportio a ad b ea est d ad e et e ad c. nam vtraq; proportionis duplate a ad b medietas. Proportio aūt a ad b posita est multiplex: igitur et proportio d ad e multiplex est. metiē igitur per diffinitionē multiplicis: e ipsum d vel bis vel ter vel deinceps. Et eodē quoq; iure c toties metitur ipsum e. quare r c per primū communē conceptū etiam metitur ipsum a. Quicquid enim alterū metitur: metitur et omne quod mensuratū est ab illo. est itaq; per diffinitionē interuallum a c multiplex. quod erat ostendendum.

¶ Si fuerint termini ꝓportionaliter constituti: cum primus fuerit vltimo cōparatus si primus vltimum fuerit mensus: metietur et secundum. 2

2	4	8	1	2	4	A b c tres termini proportio-
a	b	c	d	e	f	nales quorū a numerat b.

¶ Tametsi hanc decimatertia quarti demōstret sufficienter: eam tamen āplius hoc in loco volumus manifestare. Sint enim a b c termini proportionabiliter constituti et a numeret c: dico idem a numerare b. capio enim d e f terminos in ea proportione minimos. Quoniā enim d ad e vt a ad b: et e ad f vt b ad c. igitur per equam proportionalitatē quam vicesima prima secundi Arithmetices monstrat d ad f vt a ad c. sed a per hypothesim metitur c: igitur et d metietur f. At quia d e f positi sunt in sua proportione minimi. ergo per quintam quarti d et f sunt adinuicem primi. Et cum d seipsum metiat pariter et f per diffinitionē d est vnitas. At vero cum vnitas sit omnis numeri pars: d ergo metietur e Et cum a ad b vt d ad e: metietur igitur a ipsum b secundū terminum: quod erat cognoscendum atq; propositum.

¶ Si interuallum binario multiplicatū: multiplex effecerit interuallum: ipsum quoq; multiplex erit. 3

2	4	8	A b interuallum binario multiplicatū
a	b	c	multiplex efficiens.

¶ Hec est conuersa prime: cuius hec est ratio. Nam cum interuallum compositū multiplex sit et per secundam cōmunem scientiam resoluatur in id interuallum ex cuius multiplicatione creuit siquidē compositū omne: in ea simplicia dissoluitur ex quibus coalitū | concretum | compositūq; esse cognoscit per sexagesimā noni interuallum simplex multiplex erit. At id idem aliter ostenditur. Nam si a b c geminatum interuallū sit multiplex sic vt c multiplex sit ad a et ea proportio a ad b r b ad c: quoniā c ad a erit multiplex: a per diffinitionē metietur ipsum c. quare r per precedentem a metietur ipsum b. est igitur interuallum simplex b ad a per diffinitionem multiplex. et propositum.

4 ¶ Si terminorũ interualli primus ad secundũ comparatus sese vt tertius ad quartũ habuerit: quot proportionaliter medij primo et secundo: totidem tertio ⁊ quarto interuenire necesse est.

E medium proportionale inter d et f tertium ⁊ quartum vt b inter primũ et secundum.

27	18	12		18	12	8		9	6	4		2
a	b	c		d	e	f		g	h	k		l

¶ Hanc duodecima quarti monstrat cuius adhuc hic vt ad sequentia momentum habens: cognitio promptior habeatur: repetitur demonstratio.
¶ Sit a cuiuscunq; interualli primus terminus ad c secundũ vt d tertius ad f quartũ: et sit b medius proportionaliter constitut⁹ inter a ⁊ c. dico etiam inter d et f interuenire vnum proportionalis medij.
Capio enim per sextam quarti g h l: tres minimos secundũ proportionẽ a ad b et argumentor ex vicesima prima secundi per equam proportionalitatẽ g ad h vt a ad b et h ad l: vt b ad c. igitur g ad l: vt a ad c. quare ⁊ vt d ad f. at si d et f sunt iidem termini cũ g l: manifestum iam est inter d et f interuenire vnũ proportionaliter medij. Sin minus: ergo per vicesimã tertij Arithmetices g et l: metiẽtur d et f equaliter: sitq; id secundũ l. duco ergo l m g h et l: ⁊ proueniant d e f per septimam secundi d ad e vt g ad h et e ad f vt h ad l:. quare e interuenit ꝓportionaliter medius terminis d ⁊ f: qd̃ erat mõstrandũ.

5 ¶ Superparticularis interualli medius numerus: neq; vnus neq; plures proportionaliter interuenient.

Q; proportio superparticularis: in duo equa diuidi non possit.

27		18						a c spacium superparticulare.
a	b	c		d	e	g	f	d e f tres minimi proportionis a ad b.

¶ Hanc intelligimus: nullum superparticulare interuallum in duas aut plures interuallor habitũdines proportionesq; secabile esse. quod demonstratione proxime subiuncta perq; facile liquebit.
¶ Sit a c interuallũ superparticulare quod diuidatur in duo equalium habitudinũ spacia a b ⁊ b c certis cõstitutisq; numeris si possibile est. sitq; iccirco vt a ad b ita b ad c. capio per sextã quarti arithmetices d e f tres minimos continue ꝓportionales in proportione a ad b. et q: d ad e vt a ad b et e ad f vt b ad c: ergo per equã proportionalitatẽ d ad f vt a ad c. atqui a ad c positũ est supparticulare interuallũ: igitur ⁊ d ad f est superparticulare. Atvero quoniam d e f sunt tres illius habitudinis minimi termini: igit d et f primus ⁊ vltimus per primã quarti sunt adinuicẽ primi. At cũ d mõstratus sit superparticularis ad f: per diffinitionẽ d continet f et eius partem que ideo per diffinitionẽ metitur f. Et si ea pars sit numerus cum ea etiam per cõmunem conceptũ metiatur d: metietur enim se partem de tractam ⁊ residuũ quod equũ est f. non erũt ergo d et f adinuicem primi cuius oppositũ iam monstratum est ⁊ impossibile. erit ergo ea pars vnitas. Tunc addo vnitatem ipsi f ⁊ fiat g: vt g et f solius vnitatis discrimine distent mox argumentor d ad f vt g ad f. sed inter d et f positus est vnus interuenire medius igitur per precedentẽ ⁊ inter g et f numeros sola vnitate distantes interuenit intercipiturq; aliquis numerus medius quod per secundã petitionem est impossibile. non igitur superparticularis interualli vnus medius interuenit numerus. neq; quoq; eodem argumẽto interueniẽt plures. Et hãc etiam demõstrat sexagesima prima noni. Et ex hac quoq; cognoscitur reprehẽsionem demõstrationis Architecq; nulla superparticularis in duo equa diuidi possit quam tertio institutionis musice capite vndecimo videtur diuus Seuerinus adducere nõ tam esse diui Seuerini q̃ Nichomachi aut aliorũ quos interpretatur elegantissime qui ⁊ simile in plerisq; tum Arithmetice tum Musice institutionis locis fecisse comperitur. Et non verentur quidã (pace omniũ dixerim) eius libros perlustrare non vt sciant sed vt exsurculent et canino more si quid hians | subsultansq; appareat: altius dentem infigant / mordeant ⁊ reprehendant et sanctũ ⁊ venerabile Philosophie nomen et suorũ conniciis lacerent: et quod aliorũ vicium est si quod est: diui Seuerini exclament errorem faciantq; aliorũ crimine reum. et cum nichil nor: intvolunt litterarios duces insectãdo | carpendo | laniãdo omnia scire videri: atq; supra Philosophicos vertices sese gloriabundos extollere | faciuntq; quod est apud Comicũ ne intelligẽdo vt nichil intelligant quos idem statim vt maledicere desinãt ammonet malefacta ne cognoscant sua. Sed hec preter presentis negocij officium. de Philosophis enim qui recte fuerint natura instituti vel absq; monitione semper recte cogitabunt qui enim secus faciunt ab eorum se segregant consortio et vt Philosophi quales se videri volunt non amplius esse cognoscantur necesse est.

¶ Si interuallum non multiplex binario multiplicetur: id quod fit ex hac multiplicatione neq; multiplex est/neq; superparticulare. 6

9	6	4	A c interuallum neq; multiplex neq; superparticulare.
A	b	c	A c duplatum interuallum a b qd quidem est non multiplex.

¶ Sit interuallũ non multiplex a b: et duplum sit a c. ita vt ea sit proportio a ad b ⁊ b ad c. dico interuallum a c neq; multiplex esse neq; superparticulare. quoniã si a c primo ponatur multiplex: ergo per tertiã presentis et a b interuallũ erit multiplex at positum est nõ multiplex. Et si secundo dixeris a c esse interuallũ superparticulare cũ sit a ad b vt b ad c erit interualli superparticularis medius proportionalis terminus quod per precedentẽ est impossibile. est itaq; notum si interuallũ nõ multiplex binario multiplicetur compositum interuallum minime aut multiplex aut superparticulare esse. et propositum.

¶ Si iteruallum binario multiplicetur: atq; id quod ex ea multiplicatione creabitur multiplex non sit: ipsum quoq; non erit multiplex. 7

¶ Hec est conuersa precedentis. Sit ergo superioris propositionis figura in qua interuallũ a c proueniat ex duplatione habitudinis interualli a b et nõ sit a c interuallum multiplex. dico itidem interuallum a b nõ esse multiplex. Nam si a b interuallũ multiplex est: cũ a c per hypothesim ex interuallo a b binario multiplicato surgat: ergo per primã presentis interuallũ a c multiplex erit. at positũ est nõ multiplex: ergo si interuallũ non multiplex ex alicuius interualli binario multiplicatione nascat neq; ipsum quoq; ex cuius multiplicatione ortũ est multiplex erit: qd erat monstrandũ.

¶ A numero partiũ superparticularis interualli que in vnum adacte totum restituũt et numero vno maiore: quot interualli maiores termini simul: minoribus simul acceptis respondeant: cognoscuntur. 8

A	3	4	5	6	7	8	9
B	2	3	4	5	6	7	8
C	2	3	4	5	6	7	8
D	3	4	5	6	7	8	9

¶ Sit a ad b interuallũ superparticulare manifestũ est per diffinitionẽ superparticularis a cõtinere b et vnam partiũ b. ea igitur pars secundũ numerum c: constituat suum totũ b: et sit d numerus vno maior c: dico a sumpta secundũ numerum c equa esse b sumptis secũdum d. Nam a secundũ c sumpta continent b secũdum c sumpta et insuper partes b sumptas secundũ c. Atqui positũ est eas secundũ c constituere vnũ b. igitur a secundũ c sumpta continent b sumpta secundũ numeꝝ vno maiorem c. At vero d positus est numerus vno maiore c. ergo a sumpta secundum c: continent b sumpta secundũ d. quod erat monstrandũ. ¶ Et si exemplarẽ requiris declarationẽ: st a ad b interuallũ est sesqualterũ: quoniã a sesqualterũ est ad b. ergo a continet b ⁊ eius dimidiũ: et duo dimidia per cõmune proloquiũ suum totũ reddunt. dico ergo duo a tantũ esse ꝗtum tria b: quoniã enim duo a continent duo b. et insuper duo dimidia b que vnũ b restituunt: ergo duo a continent tria b/tribusq; euadunt equalia. Et si a ad b est sesquitertiũ a continet totum b ⁊ tertiam partẽ b. at tres tertie b eque sunt vni b. ergo superiore argumento tria a cõtinent quattuor b/quattuorq; euadunt equalia. imo data quacũq; superparticulari maiores termini secundũ proportionis minorẽ numerũ: equantur minoribus terminis scõm proportionis maiorẽ numerũ sumptis. vt si a ad b sit sesquiquinta: quoniã minimi sesquiquinte sunt 6 et 5. idcirco quinq; a equi sunt sex b. et in nõ minimis quoniã 12 et 10 sunt termini sesquiquinte 10 a equantur 12 b. Et si a ad b sit sesquioctaua: quoniã minimi sesquioctaue sunt 9 et 8. idcirco 8 a tantũ sunt ꝗtum nouem b. Et qr rursum 18 ad 16 sesqoctaua: ideo sexdecim a equi sunt 18 b. et ita in ceteris Sed si id nõ modo particulariter sed ⁊ vniuersaliter contẽplari cupis id vniuersaliter verũ erit.

¶ Data quacunq; proportione: maiores termini secũdum numerũ minorum sumpti: equi sunt minoribus secundum numerum maiorum sumptis. 9

A Supti	3	4	5	6	7	8	9	Mlti=	2	3	4	5	6	Supp	5	7	9	11
B culares	2	3	4	5	6	7	8	plices.	1	1	1	1	1	tiētes.	3	4	5	6

¶ Ut sit a ad b quecunq; proportio et a maior terminus: b vero minor. dico a sumptos secundū b numerum minorē equos esse b sumptis secundū a numerū maiorem. Nam per octauam primi Arithmetices quod fit ex a in b: equum est ei quod fit ex b in a. Ut vero quod fit ex a in b: sunt a sumpti secundū b. et quod fit ex b in a sunt b sumpti secundū a. igitur a sumpti secundū b equātur b sumptis secūdum a et in quibuslibet aliis eadē est demōstratio ⁊ propositū.

10 ¶ Cum aliquot maiores termini aliquot minoribus equi sunt: ea vnius maiorum ad vnum minorum reperitur ꝓportio: que ⁊ numeri minorum collectorum ad maiorum collectorum numerum.

¶ Hec est cōuersa p̄cedentis. Quoniā per precedētem minores collecti secundum numerū maiorum equi sunt maioribus secundū numerum minorū collectis. Sed numerus maiorū est vnus terminus maior et numerus minorū vnus terminus minor. ergo eadem est proportio vnius maiorū ad vnum minorū: que numeri minorū collectorū ad numerū maiorum collectorū. ¶ Et quāq; he due vltime conclusiones faciles sunt: vsus tamē earum paulo latētior est. Per primā enim earū que nona est: habemus si numerus maior ad minorē sesqualter est vt trium ad duo: duo maiores equi sunt tribus minoribus. Et si maior ad minorē sesquitertius vt 4 ad 3: tres maiores equi sunt quattuor minoribus. Et si maior sesquiquartus vt 5 ad 4: quattuor maiores equi sunt quinq; minoribus. Si vero maior sesquioctauus: octo maiores equi sunt nouē minoribus. ⁊ ita in cōsimilibus. In multiplicibus aūt si maior duplus est vt duorū ad vnum: vnus maior equus est duobus minoribus. Si triplus: vnus maior equus est tribus. Si quadruplus: vnus equus est quattuor. Si octuplus: vnus equat ad octo. In superpartientibus vero consimile est: vt si maior est superbitertius vt 5 ad 3: tres maiores equi sunt quinq; minoribus. Si supertriquartus vt 7 ad 4: quattuor maiores equi sunt septē minoribus. Si vero superoctupartiēs vt 17 ad 9: nouem maiores equi sunt decem ⁊ septē minoribus. et hoc pacto in reliquis.
¶ Ex vltima autem hanc in superparticularibus vtendi regulā elicimus. Si duo maiores equi sunt tribus minoribus quattuor ad sex|sex ad nouē|octo ad duodecī: vnus maior ad vnum minorē sesqualter est. Et si tres equi sunt ad quattuor: sex ad octo maior ad minorē est sesquitertius. Si quattuor maiores equi sunt quinq; minoribus: aut octo ad decē: vnus maior vnius minoris est sesquiquartus. Si vero octo maiores nouē minoribus sunt equi: vnus maiorū ad vnum minorū cognoscit sesquioctauus. In multiplicibus. si vnus duobus: duo ad quattuor|tres ad sex equi sunt: maior minoris est duplus. Si vnus tribus|duo ad sex: vnus maior minoris est triplus. Si vnus ad quattuor: et duo ad octo: vnus maiorū ad vnum minorū est quadruplus. Si vero vnus ad octo|duo ad sedecim: maior minoris est octuplus. In superpartiētibus. si tres maiores equi sunt quinq; minoribus: aut sex ad decē: vnus maior ad minorē est superbitertius. Si quattuor maiores septē minoribus: maior minoris est supertriquartus. Si vero nouē equi sunt ad decem ⁊ septem: maior minoris est superoctupartiēs. Et in compositis numeris simile est. vt si duo a equi sunt quattuor b ⁊ dimidiū vnius: quēadmodum in duobus coniūctis sesqualteris. quoniā 4 et vnius dimidiū ad 2 duplū sunt et sesquiquartū: iccirco vnus a ad vnum b duplus est atq; sesquiquartus. Si tres a equi sunt ad quattuor b et tertiā vnius: vt in duobus sesqtertiis quoniā quinq; ⁊ tertia vnius cōtinent tres semel|duas tertias et vnam nonam: proinde vnus a continebit b vnum|duas eius tertias et vnam eius nonā. Si quattuor equi sunt ad sex et quartā vnius: vt in duobus iunctis sesquiquartis: quoniā sex ⁊ quarta vnius cōtinent|quattuor dimidiū et decimam sextam ex quattuor: ideo vnus maior cōtinet minorē semel|eius dimidiū|⁊ eius vnam decimā sextam. Si vero octo valent decē ⁊ octauam vnius vt in duobus sesquioctauis: quoniā decem continent octo: et quartam: ⁊ octaua vnius ad octonos vna est sexagesima quarta: ideo vnus maiorū continet minorē semel|eius quartā partem|et eius sexagesimā quartam. Et si cōpositionis series protensior euadit: vt si duo a equi sunt sex b|medietati vnius et quarte vt in coniūctione trium sesqualterorū: quoniā sex cōtinent duos ter ⁊ dimidiū vnius est quarta pars duorū: et quarta pars vnius est octaua pars duorū. Iccirco vnus a triplex est bvnius insuper quartā atq; octauam partē b continens. Et si tres equi sunt ad septem ⁊ nonā vnius quod in tribus sesquitertiis coniunctis euenit: quoniā septem: bis continent tres: ⁊ trium tertiā partem: et nona vnius ad tres est vicesima septima. ideo vnus maiorū continet minorem bis|eius tertiam|et eius vicesimā septimam. Et si quattuor equi sunt septē duodanti vnius hoc est tribus quartis et insuper decimesexte vnius: vt in coniūctione trium sesquiquartorū: quoniā septē cōtinent semel quattuor et tres quaternarij partes: et tres quarte vnius ad quattuor sunt tres decimesexte: ⁊ decima sexta vnius est ad quattuor vna sexagesima quarta. iccirco vnus maior continet vnum minorē semel|et duodantē|⁊ tres decimas sextas atq; vnam sexagesimā quartā. Si vero octo equi sunt ad vndecim|tres octauas vnius ⁊ vnam sexagesimā quartam: vt in tribus sesquioctauis ꝓiunctis: quē vndecim cōtinent semel octonarīū et octonarij tres partes: ⁊ tres octaue vnius sunt ad octo tres sexagesime quarte. ⁊ vna sexagesima quarta ad octo est vna quingētesima duodecima. hinc fit vt vnus maiorum cōtineat minorem semel|tres eius octauas|tres sexagesimas quartas et vnam quingentesimā duodecimā. Et hec adiecimus quousus harū duarum vltimarū in sequētibus patentior manifestiorq; habeatur.

¶ Duplex interuallũ ex duobus maximis supparticularibus: sesqualtero atq; sesquitertio coniungitur. 11

6	4	3	A c duplex interuallum.
a	b	c	A b sesqualter. b c sesquitertius.

¶ Sint a b c interuallũ: a quidem sesqualter ad b: b vero sesquitertius ad c: dico a duplum esse ad c. Quoniã enim a sesqualter est ad b: ergo per octauã huius duo a equi sunt ad tres b. et rursus quia b sesquitertius ad c: igitur per eandem tres b equi sunt quattuor c: et tres b positi sunt equi duobus a. duo igitur a equi sunt ad quattuor c. cum quecũq; vni eidemq; equalia sunt inter se sint ⁊ equalia. et quattuor numerus minorũ collectorũ duplex est duorum numeri scz collectorũ maiorũ. igitur per precedentẽ vnus a duplex erit ad vnũ c. qd erat demõstrandũ potest ⁊ hoc vltimũ etiam demõstrari. Nã eni duo a equi sunt quattuor c: vnus a per octauũ proloquiũ equus est duobus c. quorũ enim tota equa sunt et eorũ quoq; dimidia sunt equa. At duo c dupli sunt vnius. igitur et vnus a duobus c equus: duplex erit c vnus quod fuisset monstrandum.

¶ Ex duplici interuallo atq; sesqualtero: triplex nascitur interuallum. 12

6	3	2	A c triplex interuallum.
a	b	c	A b duplex inkuallũ. b ⁊ c sesqualterũ.

¶ Sint a b c interuallũ: et a quidẽ ad b duplex ⁊ b ad c sesqualter. dico a eius quod est c triplicẽ esse quoniã enim a ad b duplex est: ergo a per diffinitionẽ continet bis b. igitur a equatur duobus b. et qꝛ b sesqualter est ad c: igitur b continet c et eius partem dimidiã. ergo per octauam huius duo b equi sunt tribus c: et duo b equi erant vni a. igitur ⁊ tres c equi erunt vni a. tres autem triplex sunt vnius. igitur per decimã vnus a triplex est vnius c: quod erat demonstrãdum.

¶ Duo duplicia interualla: quadruplex coniungunt interuallum. 13

4	2	1	A c duplex interuallum
a	b	c	A c geminatũ duplex inkuallũ

¶ Sit a duplex ad b: et b duplex ad c. dico quoniã a quadruplex est ad c. Nam quia a duplex est ad b: igitur duo b equi sunt vni a. et rursus qꝛ b duplex est ad c: igitur duo c equi sunt vni b. et si duo c equi sunt vni b: quattuor c equi erunt duobus b. at duo b positi sunt equi vni a: igitur et quattuor c equabuntur vni a. at quattuor quadruplũ sunt vnius. igitur per decimam vnus a quadruplex est vnius c: quod erat ostendendum.

¶ Terminũ reperire: ad quẽ quotcunq; volumus: liceat supparticulares assignare. 14

9	8	6	A ad c sesqualter.
a	b	c	B ad c sesquitertius

¶ Sit propositũ terminum reperire ad quem sesqualterũ ⁊ sesquitertiũ valeamus assignare. Capio duo ⁊ tria numeros denominãtes partes sesqualteri atq; sesquitertij: duo siquidẽ sesqualterũ et tria sesquitertiũ denominãt. ⁊ duco duo in tria: proueniatq; ductu illo c. manifestum est c habere partem dimidiã pariter ⁊ tertiam. iungo ad c partẽ eius dimidiã: ⁊ compositus sit a. et iterũ ad c iungo partẽ eius tertiã: et sit cõpositus b. quoniã enim a continet c et eius partem dimidiã: ergo per diffinitionẽ a ad c sesqualter est. et quoniã b continet c et eius partem tertiã: b itidem ad c sesquitertius. c igitur repertus est terminus ad quẽ petiti superparticulares rite sunt assignati. et hac lege de quibuslibet esset operandũ: vt si essent assignãdi sesquioctauus et sesquinonus duc octo in nouẽ ⁊ surget terminꝰ octauam/ nonãq; partem possidens: ad quẽ ⁊ sesquioctauũ et sesquinonũ rite assignaueris. et eodem quoq; pacto modo tres: modo quattuor aut quotquot libuerit ad eundem terminum assignabis.

640	600	576	540	480
a	b	c	d	

vt si ad eundẽ terminũ peterentur assignari sesquitertius/ sesqquartus/ sesquiquintus ⁊ sesqoctauus ducãtur tria/ quattuor/ quinq; et octo in seinuicẽ ⁊ proueniat e qui ircirco habet in se tertiã/ quartam quintã et octauam. adiungo e suam tertiã compositusq; sit a. et suam quartã ⁊ compositus sit b. suam quintã compositus sit c. suã denicq; octauã ⁊ ꝓpositus sit d. dico demõstratione superiore: quoniã ad e constituti sunt a b c d sesquitertius/ sesquiquartus/ sesquiquintus/ et sesquioctauus: quẽadmodum prefixa monstrat formula.

15 ¶ Si sesqualtero interuallo sesquitertium demptum fuerit interuallum: erit qd̄ relinquitur sesquioctauum.

9	8	6	A c sesqualter. B c sesquitertius.
a	b	c	A ad b sesquioctauus.

¶ Sit c terminus ad quem p precedentē assignati sint a sesqualter: ⁊ b sesquiterti⁹. Ab a c sesqualtero subduco interuallum sesquiertium b c: relicto interuallo a ad b: quod dico esse sesquioctauū. qm̄ enim a eius quod est c est sesqualter: a semel habet c et eius dimidiam partem. quare per octauā huius duo a equi sunt tribus c. ⁊ quattuor a sex c. et octo a ad duodecim c. Rursus qm̄ b huius quod est c sesquitertius est. b igit̄ habet in se c ⁊ eius tertiā partem. quō fit vt p eandē octauā tres b equi sint q̄ttuor c. et sex b octo c et nouē b ad duodecim c. at octo a quidē equi erāt ad duodecim c: igit̄ octo a equi sunt ad nouem b. per decimam igit̄ a ꝓtinet b ⁊ eius octauā partem. estq̄ a sesquioctauus ad b et ꝓpositū.

16 ¶ Interualli quarta ⁊ duodecima: vnam eius tertiarum restituunt.

¶ Nam quattuor interualli quarte: totū complēt inuallū. ⁊ duodecim eiusdē interualli duodecime: totū itidem cōplent interuallū. quare quattuor quarte ⁊ duodecim duodecime adinuicē equātur. due igitur quarte sex duodecimis/ ⁊ vna quarta tribus duodecimis sunt eque. quoꝝ enī tota equa sunt: ⁊ eoꝝ dimidia. At quattuor duodecime: duodecim duodecimarū sunt vna tertia: q̄re ⁊ vna totius tertia cui quidē duodecim ille duodecime cognoscūtur esse idem atq̄ eque. vna igit̄ totius quarta q̄ tribus duodecimis equa esse mōstrata est et vna duodecima illi adiuncta: totius tertiam partem restituunt. Equātur enī vna tertia ⁊ vna duodecima quattuor duodecimis. qd̄ erat demōstrandum. Et q̄uis hec demonstratio sequētis gratia particlariter facta sit: possis tm̄ modo ꝓsimili monstrare oēm minorem cuiuscūq̄ totius interualli partem: prime maiorem partem efficere: illi adiecta vna partium a nūero qui ex ductu denoiationū vtriusq̄ partium enascitur: denoiata. vt totius tertia pars minor est: ⁊ scēa prime maior: et si duo in tria duxeris sunt sex: iccirco vna tertia atq̄ vna sexta vnam restituūt scēam. Similiter quoq̄ quarta ⁊ quinta partes sunt prime maior atq̄ minor: et si ducis quīq̄ in quattuor surgunt viginti: proinde vna quinta ⁊ vna vicesima: vnā quartam restituūt. et hoc pacto in sequētibus vt subiecta monstrat formula.

Tertia et sexta	vnam secundam efficiunt.
Quinta et vicesima	vnam quartam.
Sexta et tricesima	vnam quintam.
Septima ⁊ quadragesima secūda	vnam sextam.
Octaua ⁊ quinquagesima sexta	vnam septimam.
Nona ⁊ septuagesima secūda	vnam octauam.

17 ¶ Duc proportiones sesquioctaue: minores sunt sesquitertio interuallo.

81	72	64	54	A c duo sesquioctaui conīūcti.
a	b	c	d	A d sesquitertiū interuallū.

¶ Cōtinua per sextam quarti Arithmetices duas sesquioctauas inter a ⁊ c: ita vt a sesquioctau⁹ sit ad b/ et b sesquioctauus ad c. et sit a ad d sesquitertium interuallū. dico a ad c minus eē interuallum: q̄ a ad d. Qm̄ enī a sesquioctau⁹ est ad b: ergo p octauam huius octo a equi sunt ad nouem b. sed ⁊ qr b etiam sesquioctauus est ad c: per eādem octo b tm̄ sunt atq̄ nouem c. Et cum vnus b equus sit vni c ⁊ octaue eius: ergo nouem b equi sunt decem c ⁊ octauevnius c. Atqui nouem b mōstrati sunt equi esse octo a: igitur octo a equi sunt decem c ⁊ octaue vnius. at decem ⁊ octauavnius ꝓtinet octo semel/ eius quartam ⁊ eius vnā sexagesimāquartā. ergo per decimā huius vnus a ꝓtinet vnū c/ vnā eius quartā/ ⁊ vnam sexagesimāquartam: et vna quarta ⁊ vna sexagesimaquarta per precedētem minus sunt vna tertia: cōplent enī quarta ⁊ duodecima vnā tertiam. duo igit̄ sesquioctaui minus sunt vno sesquiterti interuallo. quod erat demonstrandum.

18 ¶ Tres sesquioctaui: amplius sunt sesquitertio: minus aūt sesqualtero interuallo.

729			512	A d tres sesquioctaui cōtūcti
a	b	c	d	

¶ Sint a b c d tres conīūcti sesquioctaui: vt a ad b primus sit sesquioctauus/ b ad c secūdus/ et c ad d tertius: dico primo a ad c amplius esse sesquitertio. Qm̄ enī a ad b ⁊ b ad c duo sūt sesquioctaui: ergo per octauam huius octo a equi sunt decem c ⁊ octauevnius. Sed ⁊ cum c item ad d positus sit sesquioctauus: ergo p eādem octo c equi sunt nouem d/ et nouē c equi decem d ⁊ octaue vni⁹ et decem c equi vndecim d ⁊ duabus octauis. et cū octo octauc c ꝓtineant nouem d: q̄ per decimam huius vna octaua c continet octauam d ⁊ eius octauam partem: hoc est vnam sexagesimāquartam. decem ergo c et vna octaua vnius equātur vndecim d/ tribus octauis/ et vni sexagesimequarte. et per decimā vt vndecim res octaue ⁊ vna sexagesimaquarta ad octo: ita a ad d. sed vndecim cōtinent octonos semel trēs eoꝝ

partes/tres octauas/et vnã sexagesimãquartam vnius.ac tres octonorũ partes amplius sunt tertia eorꝫ parte.Superãt enĩ tres octonarij partes:tertiam eiusdẽ partem triente vnius:hoc ẽ tertia vnius parte.a fortiori igitur tres octonorũ partes/et tres octaue vnius ⁊ vna sexagesima quarta ita ãplius sunt tertia octonorum parte.cõtinent ergo vndecim/tres octaue vnius/⁊ vna sexagesima quarta:octo semel ⁊ amplius eorꝫ parte tertia.quare ⁊ a cõtinet d ⁊ ãplius tertia eius parte.est itaqꝫ a ad d ãplius sesquitertio interuallo.Scõo dico a ad d minorem eẽ sesqualtero inkuallo.Nam vndecim ꝓtinẽt octo ⁊ tres octauas:deest ergo vna octaua ad complẽdas quattuor octauas/q̃ sunt octonorum dimidium. Atvero q̃ superãt:tres octaue vnius/et vna sexagesima quarta minus efficũt dimidio vnius octaue. quare ⁊ multo minus efficient vna octaua.vndecim ergo/⁊ tres octaue/⁊ vna sexagesima quarta vnius: cõtinent octo semel et minus octonorũ dimidio.ergo per decimam huius ⁊ a cõtinet d semel ⁊ minus eius dimidio.est itaqꝫ interuallum a ad b minus sesqualtero interuallo.

¶ Quattuor sesquioctaui coniũcti:sesqualterum superant interuallum. 19

6561				4096	A e quattuor sesqui=
a	b	c	d	e	octaui coniũcti.

¶ Sint a b c d e quattuor ꝓiũcti sesquioctaui:a ad b primus/b ad c secundus/c ad d tertius/⁊ d ad e quartus:dico qm̃ inkuallum a e amplius est sesqualtero inkuallo.Nam vt in precedẽti visum est octo a equi sunt vndecim d/tribus octauis/⁊ vni sexagesimequarte vnius.et vndecim d/tres octaue vnius ⁊ vna sexagesima quarta:equãtur duodecim e/sex octauis/quattuor sexagesimis quartis/⁊ vni quingentesime duodecime.ergo octo a equi sunt duodecim e/sex octauis/ quattuor sexagesimis quartis/ et vni quingẽtesime duodecime.Atvero duodecim/sex octaue/q̃ttuor sexagesimequarte/ et vna quingentesima duodecima cõtinent octo semel et amplius q̃ octonorum dimidium:qm̃ cõtinẽt octo semel ⁊ dimidium:et insup sex octauas/quattuor sexagesimas quartas/⁊ vnã quingentesimã duodecimam vnius.igitur per decimam huius a cõtinet e semel ⁊ amplius q̃ eius dimidium. supat itaqꝫ a e inkuallum quattuor sesquioctauis ꝓiũctũ:sesqualterum interuallum.quod erat monstrandum.

¶ Quinqꝫ coniũcti sesquioctaui:minus duplici interuallo coniũgunt. 20

¶ Nam vndecimam huius duplex interuallum ex duobus maximis supparticularibus:sesqualtero scz et sesquitertio ꝓiũgit.at ꝓstitutis quinqꝫ sesquioctauis tres ꝑmi sesquioctaui:per decimã octauã huius minus sunt sesqualtero interuallo.⁊ duo sequẽtes sesquioctaui qui vna cũ tribus ꝑoribus quinqꝫ cõplent:per decimã septimam huius minus sunt sesquitertio. coniũgunt igitur quinqꝫ sesquioctaui minus duplici interuallo.

¶ Sex proportiones sesquioctaue:maiores sunt vno duplici interuallo. 21

531441						262144	A g sex sesqui=
a	b	c	d	e	f	g	octaui cõiũcti.

¶ Sit a g interuallum sex ꝓiũctorꝫ sesquioctauorꝫ:ita vt a ad b sit primus sesquioctauus/ b ad c secũs/ c ad d tertius/d ad e quartus/e ad f quintus:f aũt ad g sextus.dico qm̃ a ad g amplius est duplici interuallo.Qm̃ enĩ a ad b sesquioctauus est:ergo per octauã huius octo a equi sunt nouem b. et nouem b per eãdem equi sunt decem c/⁊ octaue vnius.et decem c ⁊ octaua vnius:equa sunt vndecim d/tribus octauis/et vni sexagesimequarte vnius.et vndecim d/tres octaue/et vna sexagesima quarta vnius:equã tur duodecim e/ sex octauis/q̃ttuor sexagesimis quartis/ et vni quingentesime duodecime.duodecim aũt e/sex octaue/quattuor sexagesimequarte/et vna quingentesima duodecima:equantur tridecim f/ decem octauis/decem sexagesimis quartis/quinqꝫ quinq̃gesimis duodecimis/et vni quarte millesime nonagesime sexte.Atvero decem octaue vnũ cõtinent integrum ⁊ insup duas octauas. quo fit iterꝫ vt duodecẽ e/sex octaue/q̃ttuor sexagesimequarte/⁊ vna quingentesima duodecima:equãtur q̃ttuor decẽ f/duabus octauis/decem sexagesimis quartis/quinqꝫ quingentesimis duodecimis/et vni quarte millesime nonagesime sexte.Atvero q̃ttuor decim f/due octaue/decem sexagesimequarte/quinqꝫ quingẽtesime duodecime/et vna quarta millesima nonagesima sexta:equa sunt quĩdecim g ⁊ octo octauis eius (hoc est equa sunt sedecim g) duodecim sexagesimis quartis/ quindecim quingentesimis duodecimis sex quartis millesimis nonagesimis sextis/⁊ vni tricesime secũde millesime septigẽtesime sexagesime octaue.At sedecim ⁊ duodecim sexagesimequarte/⁊ reliquę sequẽtes particule: continent octo bis et amplius.igitur per decimã huius a ad g maius ẽ duplici inkuallo. sex igiꝫ sesquioctaui maiores sunt vno duplici inkuallo:vt intẽdit ꝓpositio. ¶ Et si hec ꝓpositio quo ad suã demõstratiõez nõnullis subdifficilior videat:hoc iccirco puenit q̃ illis prõptitudo,vtẽdiqꝫ habilitas octaue,none,⁊ decime huius deerit.iccirco par,cõsentaneũqꝫ erit eos qui in musicis modulatiõibus ⁊ earꝫ ꝓtẽplatiõibus se exercitare volent:multos sesqualteros/deinde sesquitertios/et alios sequentes supparticulares colligere: quousqꝫ vsus colligendarꝫ ꝓportionũ ipsis iam sit factus puius/patensqꝫ ⁊ q̃si iam ipis domesticus.

¶ Primi Elementorum Musicalium finis.

c ¶ Consonātia est soni grauis/acutiq; mixtura:suauiter/ vniformiterq; auribus incidens:ex multiplici aut supparticlari ratione ꝓfecta [redacted]. ¶ Dissonātia est duoꝝ sonorum non se natura suauiter miscentium : ad aurem pueniens aspera/iniocūdaq; percussio. ¶ Tonus est consonātie principiū:ex soni ad sonum sesquioctaua ꝓportione pueniens. ¶ Semitonium minus qd̄ et diesis dicit : est toni pars:qua sesquitertia ꝓportio duobus tonis maior est. ¶ Semitoniū maius quam ⁊ vocant Apothomen:est toni reliqua ꝑs : et qua ipe semitoniū minus supat. ¶ Comma est quo sesquioctaua ꝓportio:duobus semitoniis minoribus maior est: qd̄ et idem est quo Apothome semitonium minus vincit ac superat ¶ Schisma est cōmatis dimidiū. ¶ Diaschisma ē dimidium semitonij minoris. ¶ Hemisphcrium:musicū est instrumētum per qd̄ aut neruo aut chorde vt decet suppositum:semitonia/tonos/ ꝓsonātiasq;/⁊ consonātiarū particulas:ad sensum puestigamus. ¶ Sonus emmelis is est quo apte vtimur in melo. ¶ Ecmelis ẋo is dicitur:quē melos/concentusq; non admittit. ¶ Equales soni atq; similes dicūtur:q̄ ex eadem interualli ꝓportione nascūtur ¶ Numerorū atq; interuallorum pars ea maior est:que a minore nūero denoiat. et minor que denoiatur a maiore. ¶ Multiplex ꝓportio maior est:quā maior denoiat numerus.et minor : que denoiatur a minore. ¶ Supparticularis ꝓportio maior est: que a maiore denomiatur parte.minor aūt:que denominatur a minore.

1 ¶ Tonum super datam chordam collocare.

A c| | | | | | | | b|

¶ Sit a b c chorda quecūq; supra quā iubeamur tonū collocare:diuido ꝑ tertiam petitionem chordā a b in nouem equas portiones:ita vt c b illaꝝ nouenarū octo teneat ⁊ a c vnam. dico qm̄ a b ⁊ c b tonū ꝓtinēt/ ꝓstitutūq; supra datā chordam esse tonum. Nā totū chorde spaciū a b ꝓtinet spaciū c b ⁊ insup octauam eius partē:q; a c vni illaꝝ octauaꝝ equa st.igit per diffinitiōem spaciū a b epogdoū:sesquioctauūq; est spacio c b.quare per primam petitiōem ea erit soni totius chorde a b ad sonum c b ꝓportio.Est itaq; tonus in chorda a b qui in epogdoa/sesquioctauaq; ratione consistit:collocatus.

2 ¶ Tonum tono et quotquot libuerit:in data chorda subiungere.

A c| d| e| | | | | | | | b|

¶ Sit data chorda a b in qua ꝓpositum sit tres ꝗsequētes tonos subiūgere partior per tertiam petitionem vt in precedēti factum est spaciū totius chorde a b in nouem equas portiōes.et in nota octaue portionis pono c:ita vt b c octauus illaꝝ nouem partium teneat. manifestū est per precedētem a b ⁊ c b esse tonum et per eādem petitiōem partior spacium c b in nouem equas portiōes.et in terio octaue particle pono d:ita vt d b ꝓtineat octo eaꝝ partium quaꝝ c b nouem ꝓtinet.per preceudentem c b ad d b sonat tonum/estq; iam vni tono:tonus vnus subiūctus. Rursum spacium d b ꝓsimili modo in nouem equas portiōes diuco:⁊ notam octaue sectionis littera e designo:ita vt e b octo eaꝝ partiū cōtineat: quaꝝ d b ꝓtinet nouem per preceudentem d b ad e b resonat tonum.sunt igitur in data chorda a b tres ꝓtinue subiūcti toni:scz a b/c b.c b/d b.d b/e b.qd̄ erat ꝓpositum.et hoc pacto quotquot lubet subiūgere q̄ facillimū est.Et si id sensu experiri/deprehēdereq; cupias post pulsuꝫ totī chorde a b suppone hemisphcrium chorde a b in signo c:ita vt sola perstrepat resonetq; particla c b et sensus iudicio deprehendes soni totius a b ad sonū c b esse toni iteruallū.q; si hemisphcriū trāsfers ad notam d: ex pulsu c b ⁊ d b itez tonum deprehēdas.sed ex totius a b sono ad sonū particule d b duos tonos/duorūq; tonorum inūuallū perpendet auditus.et hoc pacto sensuum iudiciis quotq̄t voles tonos deprehendēdos cōmitteres:et eoꝝ mixturas tum suaues/tum incōcinnas (quas auditus tanq̄ offensus horret refugitq;)decernendas.

3 ¶ Tonorum continuatorum:minimos numeros assignare.

59049	52488	46656	41472	36864	32768	Quinq; tonorum adinuicem conti=
n	o	p	q	r	s	nuatorum minimi numeri.
6561	5832	5184	4608	4096		Quattuor tonorum adinuicem cō=
h	i	k	l	m		tinuatorum minimi numeri.
729	648	576	512			Trium tonorum adinuicem conti=
d	e	f	g			nuatorum minimi numeri.
81	72	64				Duorum tonorum adinuicem con=
a	b	c				tinuatorum minimi numeri.

¶ Si duo/tres/q̄ttuor/quinq; aut quotlibet toni sint ꝓtinue in neruo ꝓstituti:sic eoꝝ mīmos nūeros reperiemus.Nm̄ enī nouem ⁊ octo mīmi sunt numeri toni duco nouem in se ⁊ pueniat a: ⁊ nouem in

octo ⁊ pueniat b:⁊ octo in se ⁊ pueniat d:per vicesimã tertiã tertij Arithmetices ink a b ⁊ b c sunt duo sesquioctaui in mĩmis numeris ꝓiũcti/⁊ pinde duo toni in mĩmis numeris ꝓtinuati. Et si nouẽ ducõ in a b c et octo in c et surgant d e f g. per eandem inter d e f g tres sunt in mĩmis numeris sesquioctaui cõstituti: quare d e f g sunt trium cõtinuatoꝝ tonorum mĩmi nũeri. Et si ducis nouem in d e f g et octo in g et surgãt h i k l m per idem qd̃ prius h i k l m quattuor ꝓtinuoꝝ sesquioctauorũ mĩmi sunt nũeri: quare ⁊ quattuor cõtinuorũ tonorum. Et si rursum hoc pacto ducis nouem in h i k l m et octo in m et surgant n o p q r s: iĩi erũt quinq̃ cõtinuorũ tonorum mĩmi numeri. et hoc modo quotquot tonorum voles mĩmos numeros reperias. Attamen in modis musicis tot cõtinue subiũgere opus non est: sed tonis semitonia subiũgunk: de quibus posterior ꝓprius/accõmodusq̃ expectãdus est sermo.

¶ Spacio quolibet per quotlibet equa spacia diuiso: totius ad totam ꝓxime sectiõis partem minor est ꝓportio: q̃ eiusdẽ partis ad totam reliquã ꝓxime sectiõis partem. Quo fit vt quanto tonus tono subiũgit acutior: tanto iĩm ꝓtractiora ꝓtineãt spacia. 4

A	c	d	e	f	g	h	i	k	b

¶ Chordam/neruũ/tibiam/eflatũ aera/es tinnulũ ⁊ quidd̃ sonũ edit in harmonicis modis (vt iam quoq̃ dictũ est) spacium nũcupamus: in quibus analogie ratio vim/naturãq̃ seruat eãdem. Sit ergo a b totum spacium per a c/c d/d e/e f: ⁊ reliquas nouem equas partes vt fit in interuallo toni habendo diuisum: quotq̃t enĩ alias posueris idem valuerit. dico minorem eẽ ꝓportiõez a b ad c b q̃ c b ad d b. Nam cũ a b positũ sit in nouem equas partes per medias notas c d e f ⁊ reliquas diuisum: c b cõtinet solũ eaꝝ partiũ octo: quaꝝ a b ꝓtinet nouem. ergo a b ꝓtinet spaciũ c b et eius octauam partem. sed ⁊ cũ c b octo partes parti c d equas ꝓtineat: ergo d b ꝓtinet partiũ totaꝝ solũ septẽ. ergo c b ꝓtinet spacium d b ⁊ insup eius septimã partem. at octaua ꝓs per diffinitiõem minor ẽ parte septima: igit̃ itez per diffinitiõem a b ad c b ꝓportio supparticularis minor est q̃ c b ad d b vtpote q̃ a minore parte denoĩetur. est enĩ hec a septima parte sesquiseptima ꝓportio: illa xo ab octaua sesquioctaua. Et hãc nõ modo in supparticularib⁹: verũ ⁊ quibuslibet medietatibus demõstrat ꝑma decimi Arithmetices vbi scz ratio medietasq̃ arithmetica cõperiat̃. qd̃ ⁊ in dicta spacij diuisiõe ⁊ sumpta (vt ꝓpositũ est) ꝓportione: inuentũ ꝓspiciebat̃. ¶ Correlariũ xo hinc cognoscat̃ q̃ totũ per quartam petitionem ad suam partem graui⁹ sonat: pars aũt ad suũ totũ acutius. Itaq̃ si tono a b ⁊ c b tonũ subiũxeris: subiũctus erit acutior. Et qm̃ spaciũ c b in nouem equas partes partirek: quaꝝ quelibet mĩor erit spacio c d qd̃ eius octaua est: nam quelibet caꝝ est nona ⁊ a maiore nũero denoĩata. erit igit̃ ⁊ quelibet eaꝝ nouem partiũ minor spacio a c. equa sunt enĩ a c et c d. et hoc pacto de q̃buslibet subiũct/ acutiorib⁹ tonis eẽt dicẽdum. manifestũ est igit̃ vt quãto tonus tono subiũgit acutior: tãto iĩm ꝓtractiora ꝓtineãt spacia.

¶ Medio extremitatũ toni spacio in duo equa diuiso: ton⁹ mĩme in duo secat̃ cõlia. 5

A	c	d	e	f	g	h	i	k	b
l	m	n	o	p	q	r	s	t	

¶ Hec ⁊ sequentia intelligũtur vt tonus mĩme in duo equa ratione geometrica dirimat̃: non autem arithmetica. nam ⁊ hic tonus toniq̃ interuallum in duo equa rõne arithmetica dirẽptum est. diuido ergo spacium a b vt prius in nouem equa spacia: per notas a/c/d/e/f/g/h/i/k/ b manifestũ est a b ⁊ c b esse toni extremitates/ tonũq̃ cõtinere. dico ergo qm̃ a c medio harũ extremitatũ interstitio in duo equa p signum l dirẽpto: tonus mĩme in duo equa partiat̃/ q̃q̃ sonus a b ⁊ l b equalis non sit l b ⁊ c b. diuido enĩ singula reliquoꝝ octo equaliũ spaciorũ ꝓsimili modo p equalia per notas m/n/o/p/q/r/s/t: manifestum est totũ spacium a b diuisum eẽ in 18 equalia spacia que sunt a/l/c/m/d/n/e/o ⁊ reliqua. ergo per precedẽtem mĩor est ꝓportio a b ⁊ l b q̃ l b ⁊ c b. est enĩ hec sesquisextadecima: illa xo sesquiseptiadecima. non est ergo tonus hoc pacto in duo equa diuisus. et soni a b l b/⁊ l b c b p diffinitiõem adinuicem inequales: quiquidem soni ecmeles sunt/ musicoq̃ melo perparũ apti.

¶ Toni spacio hoc modo diuiso: totius medie sectionis sonus: maioris extremi toni sonum acumine: minoris vero grauitate superat. 6

A	c	d	e	f	g	h	i	k	b
l									

¶ Sit a b vt in precedẽti iam dictũ est diuisum: itavt a b ad c b recrepet tonum. dico qm̃ sonus l b acumine superat sonũ a b/ q̃q̃ idem sonus l b grauitate vincit c b. Nam a b totum est ⁊ l b eius pars: ergo per quartam petitionem a b grauiorem sonũ edit ⁊ l b graciliorem. et per eãdem qm̃ l b totũ est ad c b: sonus l b grauior est sono c b. superat ergo l b maius toni extremum acumine: ⁊ minus grauitate. quod propositum erat demonstrandum.

¶ Tonum in duo equa: certo/ cõstitutoq̃ numero diuidi impossibile est. 7

¶ Nam per quintam primi huius nullũ supparticulare interuallum in plura equalia dirimit̃: ⁊ que ꝓportio spaciorũ inkualli inter se ea quoq̃ est ⁊ soni ad sonum. Atqui tonus ex supparticulari nascit̃ interuallo. nascit̃ enĩ ex epogdoa/ sesquioctauaq̃ ratõe. igitur tonus mĩme in duo equalia dirimitur/ diuidit̃q̃. ĩmo xo neq̃ in plura duobus equa: vt in tria aut quattuor. ¶ Ex quo facile cognoscit̃ Aristoxenus musicus auriũ iudicio cuncta cõmittẽs perparũ eẽ, pbãdus. qui semitonia secus q̃ Pythagorici non arbitrat̃ esse dimidio tono ꝓtractiora: sed quãadmodũ semitonia dicũtur: ita quoq̃ et esse integra tonorum dimidia. Hec minus Martianus felix simili lapsus erroze deprehẽdit̃: qui nõmodo

tonum in duo equalia:sed ⁊ in tria|⁊ quattuor dirimit atq; secat. Secat enim in primis tonum in duo equalia q̃ iccirco hemitonia vocat. Secũdo in tria ⁊ eaꝝ tertiaꝝ quãlibet diesim tritemeriã nũcupat. Tertio in quattuor et hãc toni partem quartã :vocat diesim tetrartemeriam:q̃ he dieses nunc tertie nũc quarte toni sunt partes. Est enim tritos tertius|tetrartos quartus|⁊ meros pars. Ponit ⁊ tertiaꝝ dieseos acceptiõem vt eaipsa toni tertia ⁊ tertie dimidia pars dicat. Et rursum primi modi primeq; acceptiõis dieses:chromaticas vocat|secũdas vocat enermonicas|tertias vero enarmonice diuisionis hemiolias:partim Aristoxeno sikiter:partim aũt dissilik. Similik quidẽ q̃ Aristoxenus toni dimidiũ semitoniũ ponat et toni tertiam diesim chromaticam vocet sed chromatis molis:⁊ toni quartã diesim enarmonicam. at dissikiter q̃ toni quartam cũ ꝓpa quarte medietate vocet diesim chromat| hemiolij. Et certe vel Martianꝰ in tertia dieseos acceptiõe nouo errore lapsus putãdus est:vel eũdem putasse hemitoniũ ⁊ diesim enarmonici hemiolij idem esse. nam cũ omne totum tribus suis tertijs integretur: vnam ergo tertiaꝝ ⁊ tertie medietatem totius dimidium implere necesse est. Sed cũ hec se satis falsa esse ꝓdant|⁊ nulla sui pte cohereãt:nõ est cur in his diutius sermo sit ꝓtrahẽdus. Sic enim qui stolidũ sensus iudicium sequẽtes intellectum relinquũt:facile ex disciplinarum aditis se explosos sentiunt.

8 ¶ Quicunq; numerus in terminos toni ducatur:interuallum toni relinquet.

¶ Nam cum tonus ⁊ toni interuallum in ꝓportione sesquioctaua ꝓsistat: sui termini erũt nouem ac octo aut quicũq; alij qui siki sibi ꝓportiõe respõdeant. At cũ per septimã secũdi Arithmetices:si vnus idẽq; numerus duos multiplicet ꝓductorũ ⁊ multiplicatorũ eadem sit ꝓportio:ergo quicũq; nũerus ducet in terios sesquioctaue:sesquioctauam ꝓducet|relinquetq; tonum atq; toni interuallũ. quod est ꝓpositũ. Et nõ modo de sesquioctauo ⁊ toni inkuallo id sentiẽdum est:sed ⁊ de quolibet alko inkuallo.

9 ¶ Omnis numerus:extremorum toni differentia constitui potest.

¶ Si enim tonus in minis ꝓstituat vt sunt nouem atq; octo monas atq; differentia est:cũ nouenarius atq; octonarius sola vnitate dissentiãt. Et si ducat binarius in nouenariũ ⁊ octonarium et ꝓducãtur a ⁊ b per precedẽtem a ⁊ b erũt toni extrema. At vero per nonam primi Arithmetices quod fit ex binario in nouenarium tm̃ est q̃tum quod fit ex binario in octonarium ⁊ vnitatem. sed binarius in vnitatem per cõmune ꝓloquiũ seipm̃ ꝓducit:igitur extremorum toni a ⁊ b binarius differẽtia cõstituit. Et si ducatur ternarius in nouem ⁊ octo:eodem quoq; argumẽto ternarius extremorũ toni differẽtia cõstituet. Et ita quicũq; alter numerus in eosdem minos toni terios ducet:idem extremoꝝ toni differẽtia ꝓstituetur. Manifestum itaq; est oẽm numerum extremorũ toni differẽtiam ꝓstitui posse. Et quãq̃ ita est placuit tm̃ Philolao Pythagorico primordiũ toni/primordialẽq; eius dr̃iam ternarium cõstituere: qui p̃mus cubũ a p̃mo impari numero ꝓcreat/ ac gignit. q̃ is numerus apud Pythagoricos maxĩe honorabilis fuerit. Nam cũ ternarium primũ quidẽ imparem nũerũ tertio duxeris:nouem ꝓsurgũt. que ter ducta septem supra viginti:scz cubum a p̃mo impari reddunt. at 27 ad 24 tono distant/ toniq; claudũt interuallum:et horũ differẽtia ternarius ꝓstituit. est enim ternarius summe 24 pars octaua:q̃ eidem adiecta summe:primũ a ternario cubũ rursus instaurat atq; ꝓficit. Et idem Philolaus summã septem ⁊ viginti in duas partes secuit 13 ⁊ 14 quaꝝ hec maior/ illa vero minor habet/ et hãc primordiũ Aporomes facit:q̃ est toni portio maior :illam aũt facit principium dieseos:que est toni decisio minor atq; portio:⁊ quã posterius semitoniũ minus nũcupabimus. et illaꝝ duarũ partium differẽtiam que est vnitas facit cõmatis principium. Sed de his satis.

10 ¶ Numeri dati partem quotãcunq; reperire. Quo fit vt cuiuslibet nũeri pars ab ipo sit numerata:et a denoiante eiusdem partis sit denominata.

272	17	306	18	136	17
c	d	g	h	m	n
17	16	18	17	17	8
A	b	e	f	k	l

¶ Quãuis enim numerorum numerãtium qui exẽplares in aĩa sunt:vnitas insecabilis existat:nũeroꝝ tm̃ numeratoꝝ quales in physicis sunt motuũ nũeri/ in geometricis lineaꝝ ⁊ planorũ/ in astrologicis temporũ/ in musicis aũt tonorũ atq; interuallorũ vnitas aut verius vnum sectiõem recipit. Sit ergo a quicũq; numerus cuiꝰ vna partium denoiata ab b q̃sita sit:resoluo a in omẽs suas partes denoiatas a quicũq; numerus cuiꝰ vna partium denoiata ab b q̃sita sit:resoluo a in omẽs suas partes denoiatas ducendo scz denoiantem numeri a in denoiantẽ partis b:ita vt pueniat c. manifestũ est partes c ab b:ducendo scz denoiantem numeri a in denoiantẽ partis b:ita vt pueniat c. manifestũ est partes c simul denoiatas ab b equari toti numero a. diuido igit c per b ⁊ pueniat d:dico d esse partẽ petitam/ ⁊ numeratam ab a. hoc est a nũero denoiante a. Q; ei sit pars a denoiata ab b q̃ petita erat:patet q: a in d per septimam petitiõem reproducit c:quare d est pars c denoiata ab b. at c equat a. igitur ⁊ d pe est a denoiata ab b. Sed ⁊ q̃ d numeretur ab a:p3.q: a in b ꝓducit c:ergo p sextam petitiõem c diuiso per b redibit a. sed ⁊ eodẽ c diuiso per b ꝓus veniebat d. numerat igitur a semel d. et sic ꝓpositio atq; iuũ correlarium nota sunt. ¶ Et q̃uis hecvt mõstret pfacilis sit:vsus tm̃ eius aliquãto latẽtior:quem exẽplaris deductio facile cuiq; reddet illustriorem. vt quesita sit vbi causa sũme decem et septẽ pars sextadecima duco vtriusq; denoiantes in seinuicem. hoc est 17 et 16 et surgẽt 272 sextedecime. tot enim sextadecimas ꝓtinet numerus 17 resolutus. diuido ergo 272 per 16 ⁊ pueniẽt 17 sextedecime:q̃ erũt totius summe partium 272 pars sextadecima. quare ⁊ numeri 17 pars itidẽ sextadecima. at 17 sextedecime vnitatem cõtinent ⁊ vnã sextãdecimã. est itaq; vnitas ⁊ vna sextadecima:dati numeri 17 pars sextadecima. Et si numeri decem ⁊ octo quereret pars septimadecima duco decem et octo in decem

⁊ septem et ꝓductum diuido per 17 et veniẽt 18 septimedecime: quevnum cõplent integrum/ vnam septimãdecimam. Est ergo vnitas ⁊ vna vnitatis septimadecima date summe decem ⁊ octo p rs vnã septimadecima. Si vo summe decem ⁊ septem volo partem octauã repire: duco 17 in octo ⁊ qõ ꝓductum fuerit diuido per octo ⁊ ꝓueniẽt 17 octaue q̃ duas vnitates ⁊ vnam octauam efficiũt. erũt g̃ duo ⁊ octaua vnius totius sũme decem ⁊ septem pars octaua. qõ querebat. Et ita in quibuslibet se quiuis valeat exercitare: habent tñ q̃ particulari/ exẽplariq̃ demõstratiõe sunt ostensa: ad sequentia põdus ac momentum.

¶ Si duo inequales numeri ad eundem minorem comparentur: maioris ad ipsum maior est proportio/ et minoris minor. 11

9	8	7
a	b	c

¶ Ut sint a b duo inequales nũeri quorꝫ a sit maior/ et b minor: qui comparẽtur ad eũdem minorem c. dico a ad c maiorem eẽ ꝓportiõem q̃ b ad c. Nam cũ per octauam petitiõem extremorꝫ a ad c ꝓportio ꝓposita sit ex ꝓportiõibus a ad b ⁊ b ad c vt suis partibus: ergo ꝓportio b ad c pars est ꝓportiõis a ad c et ꝓportio a ad c totũ. et cũ per vltimũ cõmune ploquium Oẽne totũ maius sit sua parte: igitur ꝓportio a ad c maior est ꝓportione b ad c. et ita de quibuslibet alijs simili argumẽto est agendum.

¶ Sesquisextadecima ꝓportio: integrum toni dimidium superat. 12

a	c	d	e	f	g	h	i	k	b
l	m	n	o	p	q	r	s	t	

¶ Quĩta huius monstrauit medio extremorꝫ toni spacio in duo equa diuiso: tonũ mĩme in duo equa geometrice partiri: et sectionem hinc ⁊ inde altrinsecus sesquiseptimãdecimã/ et sesquisextãdecimã retinere ꝓportiõem. Hec vo ostẽdit sesquisextãdecimã ꝓportiõem que illic ex parte intensionis acuminisq̃ relinquit: hemitonio/ integroq̃ toni dimidio esse maiorem. et sequẽs mõstrabit sesquiseptimãdecimam ex grauiori parte sumptam: eodẽ toni dimidio esse minorem. Sit ergo vt in quĩta huius spacium a b in decem ⁊ octo equas partes per a c d e f ⁊ reliquas notas diuisum. itavt a b eaꝫ partiũ ꝓtineat decem ⁊ octo/ ⁊ c b sedecim/ ⁊ l b decem ⁊ septem. manifeũst est a b ⁊ c b vt prius visum est esse tonum: et l b 17 ad c b 15 eẽ sesquisextãdecimã quã habitudinem dico esse integro semitonio maiorẽ. qm̃ enĩ per decimam huius vnitas ⁊ sextadecima vniꝫ est summe decem ⁊ septem pars sextadecima. q̃ si eidẽ sũme adijciat fient decẽ ⁊ octo/ et sextadecima vnius. at octodecim ⁊ sextadecima vniꝫ ad decẽ ⁊ septem p diffinitiõez est sesquisextadecima. Sunt g̃ decẽ ⁊ octo ⁊ sextadecia vnius ad decẽ ⁊ septem et decem ⁊ septem ad sedecim due ꝓiũcte sesquisextedecime. sed decem ⁊ octo ⁊ sextadecima vnius: p precedentem maior est sesquioctaua ad sedecim. Nam decem ⁊ octo ad sedecim vt prius visum est: sesquioctaua est. igit sesquisextadecima bis aucta tonum/ toniq̃ interuallum trãscẽdit. quare p nonum ploquiũ sesquisextadecima ꝓportio integrũ toni dimidium superat. quidq̃d enĩ bis auctũ trãscendit aliq̃d: id vltra eius dimidium eẽ necesse est. Ex quo valẽtiore iure cognoscit sesquiquĩtamdecimam ⁊ oẽm proportiõem sesquisextadecima maiorem: integrum toni dimidium superare.

¶ Sesquiseptimadecima: minor est integro toni dimidio. 13

19	1	19	1	18	17	a ad b sesquidecimãseptimam ꝓportionem
d	8	c	17	a	b	ꝓtinet: q̃ integro toni dimidio ꝓtractior est.

¶ Sint a decem ⁊ octo interualli partes ⁊ b decem ⁊ septem/ c decem ⁊ nouem ⁊ vna septimadecima/ d vo decem ⁊ nouem ⁊ vna octaua. per decimã huius a ad b est sesquiseptimadecima. et c ad a similit sesquiseptimadecima. sunt ergo c ad b due sesquiseptimedecime adinuicem coniũcte. sed et p eandem d ad b sesquioctaua est atq̃ tonus. d enĩ cõtinet b ⁊ eius partem octauam. at d ad b ꝓportio maior est ꝓportiõe c ad b. nam vnius ꝑs octaua maior est vna septimadecima. ergo sesquiseptimadecima ꝓportio per decimum ploquiũ minor est integro semitonio. qõ enĩz duplatũ non implet integrum: neq̃ id quoq̃ continet dimidium. Est ergo notum sesquiseptimãdecimam ꝓportionem integro toni dimidio esse minorem.

¶ Integram toni medietatem: inter sesquisextamdecimam ⁊ sesquiseptimãdecimam proportiõem cadere necesse est. 14

¶ Nam per duodecimam sesquisextadecima maior est toni dimidio: ⁊ p decimãtertiã minor est eodẽ toni dimidio. at per cõem sciẽtiam inter maius atq̃ minus dimidio: iꝑm dimidiũ cõsistere necesse est. ergo integrum toni dimidium inter sesquisextãdecimam et sesquiseptimãdecimam cadere necesse est Sed id in noto/ integroq̃ numero nullo pacto vt septima huius mõstrauit fieri cõtinget: vt neq̃ in geometricis diameter quadrati: eius coste certo/ ꝓstitutoq̃ numero cõmensurari potest. Sed hoc vltim ex altero loco requirendum est.

¶ Semitonium minus: duobus tonis in chorda subiũgere. 15

A	c	d	e				b

¶ Intelligiť ſemitonium ſubiũgi qñ ex acutiori parte duob⁹ quidẽ tonis ad grauiorem ptẽ relictis ipm ſemitonium collocať. preiũgi ẋo qñ ipm ex parte remiſſiori duob⁹ tonis adhibeť. ¶ Cõtinuo ergo per ſcõam huius duos tonos in chorda a b per notas a c d b. ſitq; a b c b: primus. et ſcõs ſit c b d b qui quia per diffinitiõem in ſeſquioctaua ꝓportiõe conſiſtũt: et per decimãſeptimã primi hui⁹ due ſeſquioctaue minores ſunt ſeſquitertia ꝓportiõe. erit ergo a b et d b minus ſeſquitertio. diuido ergo a b in quattuor partes equas: et initiũ tertie ſectiõis, facio notam e. ita vt e b tres eax quartax cõtineat: per diffinitiõem igitur a b ad e b ſeſquitertia ꝓportio eſt. ſed ſeſquitertia ꝓportio a b ⁊ e b ſuperat duos tonos a b et d b in proportiõe d b et e b. eſt igiť d b et e b per deſcriptionem ſemitoniũ minus duobus tonis: vt propoſitum erat ſubiunctum.

16 ¶ Semitonium minus: duobus tonis preponere.

A	e	d	c								b

¶ Facio a b ad c b ſeſquitertiũ interuallũ et diuido c b in octo equas partes et ſupra c verſus a: facio d c vni eax octo partium equã: ita vt d b eax partiũ nouem ꝓtineat. et per diffinitiõem d b ⁊ c b vnum ꝓſtituũt tonum. Similiť diuido d b in octo equas partes: et vnã eax adiũgo ſupra d p notam e. quare itex e b ⁊ d b erit tonus. ſuntq; duo toni e b et c b. ſed a b et c b ſeſquitertia ꝓportio: maior eſt duobus illis tonis in ꝓportione a b ⁊ e b. eſt igitur per diffinitionem a b ⁊ e b ſemitonium minus. qõ cum ſit duobus tonis prepoſitum: qm̃ ex parte remiſſa illis adiũctum. factum eſt propoſitum.

17 ¶ Duobus tonis: dieſim/ ſemitoniũq; minus interponere.

A	d	e	c	b

¶ Idem dieſim atq; ſemitoniũ minus hic (vt iam quoq; dictum eſt) intelligimus. Sit ergo a b ⁊ c b vt in precedenti ſeſquitertia ꝓportio in tota chorda a b. ab a: cverſus: intẽdo tonum per notam d. et ab c verſus a remitto tonũ vt in precedẽti factũ eſt per notam e: ita vt a b et d b ſit tonus/ et ſimiliť e b et c b tonus. manifeſtum a b et c b ſeſquitertiã ꝓportiõem ſuperare duos illos tonos in media ꝓportiõe d b et e b. eſt igitur per diffinitionem d b et e b ſemitoniũ minus duobus tonis interceptũ et ꝓpoſitũ.

18 ¶ Semitonij minoris mimos numeros reperire: et quomodolibet ſemitoniũ minus in chorda vna aut pluribus collocare.

324	288	256	243
f	g	h	k
81	72	64	
c	d	e	
9	8		
a	b		
4	3		
l	m		

¶ Sit a nouenarius ⁊ b octonarius minimi numeri toni. duco a in ſe/ et a in b/ et b in ſe 'et cõſurgant numeri c d e. inter quos per ſextam quarti Arithmetices erũt duo ſeſquioctaui/ duoq; toni in mimis numeri c d e. inter quos per ſextam quarti Arithmetices erũt duo ſeſquioctaui/ duoq; toni in mimis ꝓtinuati. Sit preterea l quadnarius et m ternarius. duco l in c d e ⁊ proueãt f g h: inter quos p ſeptimã ſecũdi Arithmetices ſimiliť cõiũcti ſunt duo ſeſquioctaui/ ⁊ pinde duo toni. duco preterea itidẽ m in c et pueniat k p octauã ſecũdi Arithmetices f ad k eſt ꝓportio ſeſquitertia q̃ p 17 primi hui⁹ maior eſt f h et differẽtia ẽ h k. dico ergo h k eſſe mimos nũeros ſemitonij minoris. q̃ cũ ſint numeri ſemitonij minoris per diffinitiõem notũ eſt. ſed q̃ mimi: id iam declarandũ eſt. Nam qr c e ſunt in ſua ꝓportiõe mimi: per decimãoctauã tertij Arithmetices ſũt ꝓtra ſe p̃mi. et qr etiã l ⁊ a quadnarius ⁊ nouenarius ſunt cõtra ſe primi. ergo per vndecimam tertij Arithmetices l eſt p̃mus ad c. et per decimã eiuſdem h qui naſciť ex l ⁊ e p̃mis eidẽ numero c: erit primus ad c. Rurſus m ⁊ b ternarius atq; octonarius ſunt adinuicem p̃mi. ergo p vndecimã tertij ⁊ m primus eſt ad e ſed ⁊ cũ l/ m quadnarius ⁊ ternarius ſint etiã primi: ergo per decimam eiuſdem m etiã primus eſt ad h. Cũ ergo c ⁊ m mõſtrati ſunt primi ad h ergo per eãdem decimã tertij numerus k ex c ⁊ m, ꝓductus: primus eſt ad h. ſunt itaq; h ⁊ k ſemitonij ergo per eãdem decimã tertij Arithmetices in ſua ꝓportione mimi. minoris numeri adinuicem primi: quare per viceſimam tertij Arithmetices in ſua ꝓportione mimi. minoris numeri adinuicem primi: quare per viceſimam tertij Arithmetices in ſua ꝓportione mimi. eſt, ꝓpoſitũ quo ad hoc. Et data quacunq; chorda ſi eã diuides ſcõm nũerũ h ⁊ eax partiũ accipias qõ eſt, ꝓpoſitũ quo ad hoc. Et data quacunq; chorda ſi eã diuides ſcõm nũerũ h ⁊ eax partiũ accipias ſcõm numerum k numeros ſcz ſemitonij minoris vbilibet in eadem chorda ꝓſtitutũ erit ſemitonij mi ſcõm numerum k numeros ſcz ſemitonij minoris vbilibet in eadem chorda ꝓſtitutũ erit ſemitonij mi nozis interuallum. In diuerſis aũt facillime idem feceris: ſi eas chordas equales eq̃liter tenſas vni ſonaſq; poſueris/ et partiaris eax quãcũq; voles ſcõm h quax partium alterius acceperis ſcõm k erit tum in pluribus chordis ſemitonij minoris conſtitutum interuallum. quod eſt totum propoſitum.

19 ¶ Semitonium minus in minore q̃ ſeſquiſeptimadecima ſit: proportione conſiſtit. Quo fit vt regula ſemitonij ſumendi: non ſit differẽtiam extremorũ toni in duo equa partiendo.

324	288	257 5	256	243	
f	g	l 17	h	k	

¶ Sint vt in precedenti h k minimi numeri semitonij minoris vt ducenta quinquaginta sex ⁊ ducēta quadraginta tria. capio p decimam huius: septimādecimā partem nūeri k ducentorū scz quadrginta trium/ eritq; quattuordecim ⁊ quinq; septimedecime. addo itaq; quattuordecim et 5 septīasdecimas ad k ⁊ fiat l numerus 257 et 5 septimedecime. erit ergo nūerus l ad k sesquiseptimusdecimus. at l ducenta quinquaginta 7 et 5 septimedecime trāscēdit h qui solū est ducentorū quinquaginta sex. psistet itaq; semitoniū minus per vndecimam huius in minore ꝓportiōe q̄ sit ꝓportio sesquiseptimadecima. quare et a fortiore in minore cōsistit ꝓportiōe q̄ sit sesquisextadecima. Correlarium hinc notum est. Nam hoc pacto partiēdo extremorū toni spacium: ex quīta huius cognoscūtur sesquisextadecia atq; sesquiseptimadecima altrinsecus constitut: quapvtraq; presens mōstrauit semitonij minoris habitudinem esse minorem.

¶ Sesquioctauadecima proportio: semitonio minore rursus maior cuadit. 20

256 1	256	243	
c 2	a	b	

¶ Sint a b mīmi numeri semitonij minoris per decimāoctauā huius reperti scz ducēta quinquagīta sex/ et ducenta quadraginta tria. capio per decimā huius octauā decimā partem nūeri b: quā reperio esse trīdecim ⁊ semis: quā quidē addo numero b/ fiatq; aggregatus c. tunc c ad b sesquioctauadecima ꝓportio est. at c maior numerus est a. nam a dūtaxat cōtinet ducenta quinquaginta sex: c vero equalīū partiū totidē ⁊ insup semissem vnius. est igit sesquioctauadecima ꝓportio semitonio minore maior.

¶ Sesquinonadecima: est semitonio minore minor. Quo fit vt semitoniū minus inter sesquioctauādecimam/ et sesquinonamdecumam consistat collocatum. 21

256	255 15	243	
a	c 19	b	

¶ Sint vt prius mīmi termini semitonij minoris a et b: dico sesquinonādecimā ꝓportiōem minorem esse ꝓportione a ad b. capio enī per decimam huius: nonādecimā partem numeri b: quā inuenio esse duodecim ⁊ quindecim nonasdecimas. quā partem adijcio numero b ⁊ fiat c. ꝓportio c ad b est sesquinonadecima. sed a maius est q̄ c. igitur p vndecimam huius maius est semitoniū minus sesquinonadecima ꝓportiōe/ atq; sesquinonadecima ꝓportio semitonio minore minor. Correlariū vero vt decima quarta huius notum esse potest.

¶ Semitonium maius: in data chorda constituere. 22

a	c							b

¶ Sit a b ⁊ c b semitonij minoris interuallum. diuido c b in octo partes equas: quibus equam facio partem c d. ita vt d b nouem ꝓtineat. ergo d b ⁊ c b erit tonus. demo igitur a tono d b et c b semitoniū minus scz a b ⁊ c b/ relinquetq; d b ⁊ a b toni reliqua pars ⁊ qua ipe semitonium minus superat. igit per diffinitiōem d b ⁊ a b semitonium maius est in data chorda (vt ꝓpositū erat) cōstitutū. et quēadmodum semitonium maius collocasti ad partem grauiorem ita quoq; ad partem ꝓacuminis collocare facillimum esset.

¶ Semitonij maioris: minimos numeros reperire. 23

2187	2048		1944
e	d		c
	256		243
	a		b
		8	
		f	

¶ Sint a b minimi numeri semitonij minoris ex decimaoctaua huius reperti et f octonarius. qm̄ ex demōstratiōe decimeoctaue huius f octonarius primus est ad b. ergo f non numerat b. non habet igitur b octauam partem. duco igitur f in b et a et cōsurgant c d: per septimam secūdi elementorū Arithmetices d ad c vt a ad b. est igitur inter d c semitonium minus/ semitonijq; minoris interuallum. et qc habet ꝓtem octauā vt b: addo eidem nūero c ꝓtem octauam eius b: et coaceruatus fiat e. cōtinet igit e numerum c/ et partem eius octauam. quare e c tonus. et quia tonꝰ e c superat semitoniū minus d c

2187
2048
139
102
37
28
9
1

interuallo e d: ergo e d sunt nũeri semitonij maiozis. Q; autẽ iidẽ sint minimi facile ex decima quinta tertij arithmetices cognoscas distrahẽdo d ab e ⁊ quod reliquũ fuerit iterꝝ quoties potes distrahẽdo ab d. et hoc pacto deinceps ⁊ videbis ad vltimum relictam vnitatẽ | eritq; modo qui ad latus apparet distractio. quare per eandem decimãquintam d et e sunt adinuicem primi. sunt igitur per vicesimam eiusdem in sua proportione minimi: quod est propositum.

24 ¶ Semitonij maiozis habitudo: sesquiquintãdecimam superat proportionẽ.

2187	2184 8	2048	136 8
a	c 15	b	d 15

¶ Sint a b minimi termini habitudinis semitonij maiozis per precedẽtem reperti: dico habitudinẽ a ad b maiorẽ esse sesquiquintadecima. sumo enĩ vt in precedẽtibus iam sepe factũ est per decimã huiꝰ quintãdecimam partẽ numeri b et hec inuenitur | centũ trigintasex et octo quintedecime vnius q̃ sit d adicio ergo d ad b et fiat c: certũ est c ad b esse sesquiquĩtamdecimã. at c minoz numerꝰ est q̃ a. est enĩ a numerus duum milĩũ centũ octuagintaseptẽ. c autem solum duũ milium centũ octuagĩtaquattuor et fere semis paulo amplius. Est igitur per vndecimã huius semitonij maiozis habitudo sesquiquĩta decima ꝓportione maior eamq; superans: quod est propositum.

25 ¶ Apotomes interuallum: minus est sesquiquartodecimo interuallo. Vnde manifestum est semitonij maiozis proportionem inter sesquiquintãdecimam ⁊ sesquiquartã decimam reperiri collocatam.

2194 4	2187	2048	146 4
c 14	a	b	d 14

¶ Apotomẽ ⁊ semitoniũ maius: idem esse iam diximꝰ. Sint ergo a b mĩmi nũeri semitonij maiozis vt duo milia centũ et octuagintaseptẽ ⁊ duo milia quadragintaocto. sumo per decimã huius quartã decimã partem b scz duum milĩũ et quadragintaocto quã inuenio esse centũ quadragintasex et quattuor quartedecime que sit d. addo eam quartãdecimam ad b: et fiat numerus aggregatus c. tunc numeri c ad b sesquiquartadecima ꝓportio est. at c maior numerus est a siquidẽ duo milia quadragĩta octo et centũ quadragintasex et quattuor quartedecime summã simul attollant c: duum milĩũ | centũ nonagintaquattuor | et fere quartãvnius. et a solum summa sit duum milĩũ centum octuagintaseptẽ. constat ergo sesquiquartãdecimam proportionẽ maiorem esse semitonio maiore: atq; propositum. Correlarium vt precedentium notum est.

26 ¶ Semitonium minus atq; semitonium maius in superparticulari proportione non cadunt: sed ea in superpartiente ratione consistere necesse est.

¶ Nam semitoniũ minus per correlariũ vicesimeprime huius cadit inter sesquioctauã decimam et sesquinonãdecimam. atqui inter sesquioctauãdecimam et sesquinonãdecimã nulla cadere valet interceptа | mediaq; superparticularis habitudo. sunt enĩ ille supparticulares proxime maior atq; minor igitur semitoniũ minus in superparticulari ratione non consistit. neq; per idem semitonium maius. Nam per correlariũ precedẽtis cadit in aliqua ꝓportione media inter sesquiquintãdecimã et sesquiquartãdecimam duas proximas superparticulares: que superparticularẽ mediam nullã admittunt nõ igitur semitoniũ maius cadit in superparticulari ratione. | sed et cum rationes semitonij minozis atq; maiozis multis superparticularibus vt iam visum est sint minores: erũt etiam minores ratione duplari que multiplicium minima est: vt que a minimo numero denominetur. nullus enim numerus binario minor. nõ est ergo semitonij minozis habitudo multiplex | similiter neq; semitonij maiozis. relinquitur igitur a sufficienti diuisione cum ille sint inter maiorẽ terminum | ⁊ minorẽ: eas esse in supparticulari genere. quod est propositũ. ¶ Id tamẽ propter sophistas aduertere licet q̃ tonus ⁊ sue partes cõsonantie | ⁊ consonãtiarum partes intense: semper in supparticulari | superpartiẽti aut multiplici habitudine cadunt: remisse vero in subsuperparticulari | subsuperpartiẽti aut submultiplici. At vero et si ita sit: solemus tamen eas omnes dicere esse in superparticulari habitudine superpartienti | aut multiplici idem supparticulare et subsuperparticulare reputãtes ⁊ pro vno computantes. similiter superpartiens et subsuperpartiens ⁊ multiplex et submultiplex

27 ¶ Musicum comma in chorda reperire.

a	f	g	c	b
256		243		
d		e		

¶ Sit a b chorda supra quam sit propositũ reperire musicũ comma: in qua a b et c b sit sesquioctaua proportio atq; tonus. sint preterea d e minimi termini semitonij minozis. diuido spaciũ a b in partes equales secundũ d: ex quarum numero ab ipso b versus a: capio secundũ numerũ e | ⁊ in termino earũ pono notam f. tunc que proportio d ad e: ea erit a b ad f b. quare a b ad f b semitoniũ minus. Rursum c b spacium seco in equas partes secundũ numerum e ⁊ earum partium ab ipso b versus a metiendo: sumo secundũ numerum d: et in earum termino pono notam g. manifestũ etiam est g b et c b esse semi

tonium minus. sed et cum a b ⁊ f b probatum sit etiam semitonii minus. ergo interuallum f b et g b est quo sesquioctaua proportio a b et c b: maior est duobus semitoniis minoribus. est igitur per diffinitionem f b et g b inuentum musicum comma: quod erat monstrandum.

¶ Comma: in minimis numeris constituere. 28

531441	524288		497664	472392
l	g		h	i
	65536		62208	39049
	c		d	e
	256		243	
	A		b	
		8		
		f		

531441
524288
7153
2119
796
527
269
258
11
5
1

¶ Sint a b minimi numeri semitonij minoris. duco a in se ⁊ in b/et b in se ⁊ exurgant c d e: erūtq; c d ⁊ d e duo semitonia minora cōiuncta. sit preterea f octonarius qui ex decima octaua huius est primus ad b. quare per vndecimā tertij arithmetices et primus ad e. non habet igitur e octauam. duco ergo f octonariū in c d e: ⁊ proueniant g h i: vt i scz oriatur ex f in e. certū est etiam inter g h et h i esse duo semitonia minora. et qr e est octaua pars i addo e ⁊ i simul/sitq; eorum aggregatus l. dubiū nullum est l ad i esse sesquioctauā: et l g esse proportionem qua sesquioctaua maior est g h et h i duobus semitoniis minoribus. sunt igitur l g numeri cōmatis. sed q̄ sint minimi ex decimaquinta tertij arithmetices notum est. Nam substracto vt ea ipsa docet g ab l/ et eo quod relictū est substracto quoad potest ab g. et sic deinceps tandē vt ad latus adiectū apparet: relinquitur vnitas. Et quēadmodum comma duabus diesibus est prepositum: ita quoq; q̄ facillimū est comma duabus diesibus subiungere/ aut duabus interserere.

¶ Sesquiseptuagesimaquarta: commatis proportione transcenditur. 29

531441	531372 72	524288	7084 72
A	d 74	b	c 74

¶ Sint enī a b minimi numeri cōmatis per p̄cedentē reperti. elicio per decimā huius septuagesimā quartā b que sit c. adiicio itaq; b et c simul/ ⁊ coalescat aggregeturq; numerus d. qui si ad b conferat cōperitur/sesquiseptuagesimus/quartus. atqui idē d minor a esse deprehēditur. superat ergo per vndecimam huius ratio cōmatis septuagesimāquartam proportionem

¶ Cōmatis ratio: sesquiseptuagesimatertia proportione minor est. vnde fit vt cōmatis ratio inter septuagesimāquartā et septuagesimātertiā constituta reperiat habitudinē 30

531470 2	531441	524288	7182 2
d 73	A	b	c 73

¶ Sint a b vt prius minimi numeri cōmatis. capio septuagesimātertiam partē b que sit c. iūgo b ⁊ c simul et aggregetur d. eritq; d ad b sesquiseptuagesimustertius. et d maior a esse conspicitur. ergo cōmatis ratio sesquiseptuagesimatertia proportione minor est: quod erat monstrandum.

¶ Correlarium vt alia notum est.

¶ Commatis ratio: in superparticente ratione consistit. 31

¶ Non enī in supparticulari cōsistet quādoquidē due supparticulares proxime sesquiseptuagesima quarta et sesquiseptuagesimatertia omnē prorsus mediā excludant supparticularē. ⁊ tanto minus in gñe multiplici cōsistere valebit. vt que septuaginta duas superparticulares habeat se maiores. relinquitur ergo vt ea in superpartiēte genere consistere possit. est enī ea maioris et minoris habitudo.

¶ Rationes schismatis atq; diaschismatis sunt ignote/atq; irrōnales. quo fit vt quadrimimi nūcri tetragonicū latus nō habeāt: medietatū rōnes ignote irrōnalesq; sint oēs 32

256	243				
A	b	c	d	e	
531441	524288				

¶ Eas rationes ignotas atq; irrationales dicimus que nullo certo/cōstitutoq; numero designari valent vnq̄: vt neq; in geometrici diametri et coste quadrati proportio: quales schismatū/diaschismatūq;

ꝓportiones esse dicim⁹. Sint ergo ꝑmo a b minimi numeri semitonij minoris: p decimãoctauã huiꝰ inuẽtis: b enim vt illic quoq; mõstratũ est nascit ex nouenario in se ⁊ ternario in productũ nouenarij in se at nũerus q̃ ex ductu nouenarij in se exurgebat: er at quadratꝰ et ternarius nõ est quadratꝰ: ergo per decimãquartã sexti arithmetices b minꝰ semitonij minoris extremũ ex ductu q̃dẽ nõ q̃drati in q̃dratũ proueniẽs: nõ est numerus quadratus. si possibile est ergo vt diaschismatos ꝓportio in numeris sit nota: sint ergo per sextã quarti arithmetices duo diaschismata in minimis c d e cõiuncta. manifestũ enim est cum diaschisma sit semitonij minoris dimidiũ c d et d e simul esse semitoniũ minus. ⁊ c ad e esse semitonij minoris interuallũ. sed et cum ꝓportiones c d ⁊ d e sint cõtinuate in minimis ergo per quintam quarti arithmetices c e sunt in sua ꝓportione minimi. sunt ergo minimi in ꝓportione semitonij minoris. sed et tales positi sunt a ⁊ b: igitur c et e idem erunt numeri cũ a ⁊ b scz c idem a et e idem b Preterea qz que proportio c ad d ea est d ad e: ergo per primã sexti arithmetices c numerus est quadratus et e numerus quadratus: quare ⁊ b idem numero e etiam quadratus. at b demõstratus est nõ quadratus. erit itaq; idem numerus quadratus et nõ quadratus: quod est impossibile. nõ igitur diaschisma note ꝓportionis habebitur. et idem de proportione schismatos monstrabitur. sint enim a b subter designati minimi numeri cõmatis: q: per vicesimãoctauam huius b minoꝛ proportionis commatis terminus fit ex ductu octonarij in quadratũ lateris ducẽtorum quinquagintaseꝛ. et octonarius nõ est quadratus: ergo per decimãquartam sexti arithmetices b minoꝛ terminus cõmatis nõ est quadratus. nõ igitur simili vt priorꝛis partis demõstratione a b certis designatisq; numeris potest equis proportionibus diuci. est igitur schismatos eius scz medietatis ratio ignota/atq; irrationalis. Corrclarium ex modo demõstrationis notum est.

35 Tonus: duobus semitoniis minoribus/et commate constat.

Nam ratio sesquioctaua duobus semitoniis minoribus atq; vno cõmate constat. superat enim duas dieses duoq; semitonia minoꝛa vno commate: ac tonus in eadem ratione consistit. cõstat igitur tonus ex duobus semitoniis minoribus et commate.

34 Tonus a duobus semitoniis minoribus: vno commate distat.

Nam substracto a sesquioctaua ꝓportione vno cõmate relinquũtur duo semitonia minoꝛa: igitur et eodem cõmate a tono diducto due dieses ⁊ duo semitonia minoꝛa relinquũtur. distat ergo tonus a duobus semitoniis minoribus vno commate.

35 Semitonium minus tribus commatibus maius est: minus vero quattuoꝛ. vnde manifestum est apotomen plura quattuoꝛ et paucioꝛa quinq; continere cõmata.

r	277531995223258301621530747994112
q	328128389443693511257285776231761
p	263600061952401802360312389697536
o	21783961796329506267463 68
n	21536939630755577663 10747
m	20678954309879648527319 04
l	17098604835172352
k	16677181699666569
h	16231265527136256
g	134217728
f	129140163
e	127401984
d	524288
c	531441
b	243
A	256

Non ẽ greca curiositas calculi laboꝛe deterrita quo minus quot cõmata in diesi quot in apotome quot deniq; in tono sint: perũestigaret. quod nisi a priorꝛibus tẽtatum cognouissem cũ id quoq; plus laboꝛis q̃ (vt michi visum est) in musicis modulationib⁹ vsus/vtilitatisq; afferat: missuz fecissem. qui tamẽ id cognoscẽ desiderauerint hoc pacto deprehẽdent. Sint a b minimi numeri semitonij minoꝛis et c d minimi cõmatis: per decimãseptimã ⁊ decimãoctauam huius reperti: duco b in c et d ⁊ pueniãt e f et a in c ⁊ veniat g: per septimã secundi arithmetices f ad e est cõmatis habitudo/et per octauam eiusdem g ad e habitudo dieseos/semitoniq; minoꝛis. Deinde duco e in e ⁊ f in f et e in g ⁊ nascantur h k l: per sextam quarti arithmetices perq̃ facile cognosci potest k h continere duo commata. et per

septimam secundi eiusdē l ad h esse semitonium minus. Deinde duco d in h/ et c in k/ et d in l: ⁊ eo ordine veniant m n o: per eandem sextam quarti cognitu facillimū est n m continere tria commata. et per septimam secundi: o m cōtinere semitonium minus. at n numerus cognoscitur esse minor o. ergo o ad m semitonium minus tria vincit/ exsuperatq; commata. Deinde duco h in h et k in k et h in l. et suo ordine exsurgāt/ orianturq; p q r. manifestū est per idē qō prius q p cōtinere quattuor cōmata et r p cōtinere semitoniū minus. at numerus r minor est numero q. igitur quattuor cōmata amplius sunt semitonio minore. Correlariū autem hinc notū est q̄ semitoniū maius solo cōmate superat semitonium minus. atqui semitoniū minus plura tribus ⁊ paucioza quattuor vt modo visum est continet cōmata. igitur vnico superadiecto cōmate semitoniū maius quod vocant apotomē: plura quattuor ⁊ paucioza quinq; continere est necesse.

¶ Tonum: plura septem continere commata necesse est. 36

¶ Nam tonus ex semitonio minore ⁊ apotome coalescit atq; cōstituitur. at semitoniū minus per penultimā tria continet cōmata ⁊ amplius: et per precedentē apotome quattuor et amplius tria autem et quattuor ⁊ amplius: septē sunt et āplius. igitur tonus plura q̄ septem cōtinet commata.

¶ Secundi Elementorum Musicalium finis.

Esquitonus: est qui tonum ac semitonium minus continet. quem et trihemitoniū/ trisemitoniūq;: inferius dicemus.
Ditonus est qui duos cōplectitur tonos.
Tritonus vero qui tres.
Consonantie simplices sunt: diatessaron/ diapente ⁊ diapason.
Composite vero: diapason diapente/ bis diapason.
Diatessaron est cōsonantia: que ex interualli sesquitertia ratione nascitur.
Diapente: que nascitur ex sesqualtera.
Diapason vero: que ex dupla.
Diapason diapente: est quā adinuicē iuncte constituūt diapason ac diapēte ꝓsonātie
Bis diapason: est quam coniūgunt due diapason consonantie.

¶ Nec altius ascēdunt Pythagorici q̄ altius ascendētibus voces quod pacto illis stridule vise sint ⁊ q̄ vnicuiq; ferme sue vocis modū/ limitesq; ad consonātiam bis diapason natura fecerit/ q̄q; habita contēplatione musica adusq; cōsonantiam bis diapason: reliquā vt habeatur q̄ facillimā putauerunt vt qui ad ter atq; quater diapason musicos modulos aptare voluerint. et hac quoq; de causa musici ferme oēs in definiēda/ determināda q̄ atq; tradēda disciplina musica limites Pythagore nō transcendūt: putātes eius limitibus cōtenti: et priscam/ veterēq; autoritatē secuti sufficiēter determinasse. quod ⁊ nos in hoc opere tētabimus imitari.

¶ Sesquitonus inter sesquiquintam atq; sesquisextam collocatus est. vnde fit vt etsi sesquitonus iocunde/ suauiterq; auditū feriat: nondū tamen consonātia ponēdus sit. I

291 3	288	283 3	256	243	48 3	40 3
d 5	A	e 6	b	c	f 5	g 6

¶ Sit ergo a ducenta octuagintaocto: b vero ducenta quinquagintasex: et c ducenta quadragintatria. per decimāoctauam secūdi huius manifestū est a ad b esse tonū/ ⁊ b ad c esse semitoniū minus. quare a ad c per diffinitionē erit sesquitonus. quē dico in ꝓportione minore consistere q̄ sit sesquiquinta/ et maiore sesquisexta. Nam capio per decimam secundi huius quintā partem c et veniet numerus 48 et tres quinte qui sit f. addo igitur f ad c et aggregatus fiat d: qui maior inuenitur q̄ a. igitur per vndecimam secūdi huius d ad c ꝓportio maior est q̄ a ad c. At vero d ad c sesquiquinta est. est itaq; sesquitonus in ꝓportione minore cōstitutus q̄ sit sesquiquīta proportio. Capio deniq; per eandē decimam secundi sextā partem c et veniet michi numerus 40 et semis qui sit g. aggregatus igitur g ad numerū c restituat numerū e. certum est numerū e minorē esse q̄ a. quare vt prius a ad c sesquitonus maior est q̄ e ad c: qui in sexquisexta ꝓportione cōstituitur. quod est propositū. Correlariū enim cognoscitur. ⁊ primū q̄ sesquitonus suauiter feriat auditum: cuiuslibet musicis modulationibus intēti fidem facit sensus. q̄ vero nōdum cōsonantia sit: iccirco euenit q̄ sesquitonus in superparticulari ratione nō consistit: quādoquidem inter sesquiquintā ⁊ sesquisextā proximas supparticulares nulla cadit interstes/ mediaq; superparticularis habitudo. neq; quidē est in multiplici genere: quoniā per vndecimā primi huius dupla ꝓportio que multipliciū minima est: ex sesqualtera/ et sesquitertia ꝓportione maximis quidē superparticularibus: exurgit atq; nascitur. cōsonantia autem omnis per diffinitionē in superparticulari aut multiplici ratione consistit. est ergo totum propositum notum.

2 ¶ Itidem ditonus inter sesquitertiam atq; sesquiquartam medius: minime musicam complet atq; perficit harmoniam.

85 1	81	80	72	64	21 1	16	
D 3	A	E	B	C	F 3	G	

¶ Harmoniã et consonãtiam idem dicimus et huius vt precedẽtis procedit demonstratio. Sint ergo a b c duo toni in minimis constituti. vt 81|72|64. dico ditonum a ad c consistere in proportione minore sesquitertia: et maiore sesquiquarta ⁊ musicam cõsonantiam haud quaq; perficere. Capio enĩ tertiam partem c per decimã secundi huius vt sepe factum est. et venit vnum ⁊ viginti cum triente vnius: qui numerus sit f. addo itaq; f 21 et trientẽ ad numerũ c 64. et aggregatus est 85 cum tertia parte vnius: qui idem sit d. manifestũ est d ad c esse sesquitertiũ. at d maior est a: continet enĩ a dumtaxat vnum et octuaginta: d vero octuaginta quinq; ⁊ amplius. est ergo sesquitertia proportio ditono maior. Et rursum capio quartam partem c que sit g: quam addo ad c et surgat e: qui erit ad c sesquiquartus. at a maior est e. igitur per vndecimã secundi huius: ditonus sesquiquartũ transcendit. et cum inter sesquitertium ⁊ sesquiquartũ nullus cadat superparticularis medius neq; multiplex: erit ergo ditonus in proportione superpartiẽti collocatus. quare musicam consonãtiam (etsi in musicis modulationibus sit euphonus suauiterq; auditum feriens) nõdum tamen perficit.

3 ¶ Ditoni interuallum: sola sesquitonum superat apotome.

¶ Nam sesquitonus vnum tonum cõtinet integrum et secundi toni cõtinet semitoniũ minus. sed cũ tonus ex semitonio minore ⁊ apotome constet euadatq; coalitus. ergo sesquitono ad secũdi toni completionẽ sola deest apotome. at ditonus solos duos incolumes integrosq; possidet tonos. ergo ditoni interuallum sola apotome/ solo q; semitonio maiore: sesquitoni superat interuallũ. qõ est propositũ.

4 ¶ Diatessaron consonantiam in data chorda collocare.

4	3			
A	c	d	e	b

¶ Cum enim epitrita/ sesquitertiaq; proportio: cõsonantiam diatessaron creet: iccirco data quacũq; chorda vt a b eam in quattuor equas portiones diuido. vt a c: c d: d e: ⁊ e b. et dico a b ad c b consonare diatessaron. Nam a b continet c b et insuper a c que tertie parti c b equatur. est ergo interuallum a b sesquitertiũ ad c b. ergo a b ad c b per diffinitionẽ consonat diatessaron: et cõsonantia diatessaron in chorda a b data: collocata. quod est propositum.

5 ¶ Tritonus: consonantiam diatessaron transcendit.

¶ Nam per decimãoctauam primi tres sesquioctaue proportiones amplius sunt sesquitertio interuallo. atqui in tribus sesquioctauis: per diffinitionẽ tres consistunt toni. igitur in tribus sesqoctauis consistit tritonus. ⁊ in epitrito/ sesquitertioq; interuallo consistit cõsonantia diatessaron. igitur cõsonantiam diatessaron transcendit vt proponebatur: tritonus.

6 ¶ Consonantiã diatessaron: duobus tonis atq; semitonio minore constare necesse est Vnde facile comparatum est sesquitonum tono/ et ditonum semitonio minore citra diatessaron concẽtum deficere. Compertum item est consonãtiam diatessaron quinq; dieses et duo commata continere.

Diatessarum consonantia

A	c			b

¶ Sit a b et c b consonantia diatessaron. dico eam duobus tonis ⁊ semitonio minore constare. Nam cum a b ⁊ c b sit diatessaron: erit a b et c b per cõuersionem diffinitionis sesquitertius. at cum semitonium minus per diffinitionẽ sit id quo sesquitertia duobus tonis maior est. continet ergo a b ⁊ c b semitonium minus et duos tonos. igitur consonantia diatessaron duobus tonis/ semitonioq; minore constat. Et primũ correlariũ hinc facile cognoscitur. Cum enim sesquitonus solũ tonum ⁊ semitoniũ minus contineat: deest igitur ipsi ad cõsonantiam diatessaron complẽdam per presentẽ vnus tonus. et cum ditonus solum duos cõplectatur tonos: deerit ipsi ad eandem complẽdam semitoniũ minus. Secũdum vero hinc haud difficile perspicitur cognitũ. Nam cum tonus per tricesimãtertiam secũdi duas dieses ⁊ vnum comma cõtineat: duo toni quattuor dieses ⁊ duo cõtinebunt cõmata. at per presentem diatessaron consonantia duobus tonis vnam diesim superaddit. continet igitur consonantia diatessaron quinq; dieses atq; duo commata. quod est totum propositum.

¶ Quinq; toni: duas diatessaron consonantias vno commate vincunt/ euadunt q; maiores. 7

¶ Putauit Aristoxenus musicus diatessaron cõsonantiam duobus tonis et integro semitonio constare. ⁊ proinde duas diatessaron cõsonantias: quinq; tonos ĩplere. cuius error ex tertio musices diui Seuerini boecij/ et ex hac ⁊ precedẽte facile cõuincitur. Nam per precedẽtem cõsonantia diatessaron nõ ex duobus tonis et semitonio integro constat: verũ ex duobus tonis ⁊ semitonio minore. quod ex vicesimaprima secũdi inter sesquioctauã decimam et sesquinonã decimã proportionẽ collocatur. integrũ autẽ semitoniũ per decimãquartam eiusdem: inter sesquisextã decimã ⁊ sesquiseptimã decimã collocaretur. diminutius est ergo semitoniũ minus integro semitonio. Quia ergo vt per precedẽtem dictũ est: cõsonantia diatessaron duos tonos et semitoniũ minus cõtinet: due igitur diatessaron cõsonantie cõtinebunt tonos quattuor/ et duo semitonia minora. et q; per tricesimãtertiam secũdi tonus cõtinet duo semitonia minora et vnum cõma. ergo due diatessaron cõsonantie quinq; tonos vno commate minus: cõtinent. quinq; igitur toni: duas diatessaron cõsonantias vno cõmate vincũt atq; euadunt maiores. quod intẽdebatur.

¶ Consonantiã diapente: in assignato neruo constituere. 8

3	2	1	Consonãtia diapẽte.
A	c	d	b

¶ Sit assignatus numerus a b supra quẽ iussum sit cõsonantiã diapente collocari: diuido a b in tres adinuicẽ equas partes per notas a c d b: ita vt a b tres cõtineat et c b earum contineat duas. erit per diffinitionẽ a b ad c b hemiliũ/ sesqualterũq; interuallũ. sed cum cõsonãtia diapẽte: per diffinitionẽ ex ea interualli ratione nascat. ergo a b ad c b cõsonabit diapẽte. eritq; a b ad c b in data chorda assignatoue neruo cõsonantia diapẽte collocata.

¶ Tres toni: consonantia diapente minus sunt. ⁊ quattuor eandem consonantiam transcendunt. 9

¶ Etsi ex quinta huius satis cognoscat tritonũ nõ posse efficere diapẽte cõsonantiã: hec etiã ostẽdit tritonum diapẽte consonãtia esse minorem. Nam per decimãoctauam primi huius tres sesquioctaui minus sunt sesqualtero interuallo. et per decimãnonam eiusdẽ quattuor sesquioctaui sesqualterum superãt interuallũ. consonãtia aũt diapẽte in sesqualtero sita est. ergo tres toni in tribus sesq; octauis constituti: minus sunt cõsonantia diapente. ⁊ quattuor toni in quattuor ꝯsistentes sesquioctauis eãdem consonãtiam magnitudine transcẽdunt: quod est totum propositum.

¶ Consonantia diapente: tribus tonis/ semitonioq; minore constat. Quo fit vt a diapente subducto tono: diatessaron consonantia relinquatur. subducta autẽ diatessaron consonantia: relinquatur et tonus. 10

¶ Nam per decimãquintam primi si a sesqualtero interuallo sesquitertiũ demptũ fuerit: relinquet sesquioctauum. sed vt in demõstratione sexte huius visum est: sesquitertiũ continet duos tonos cum semitonio minore. ergo cõsonantia diapente sesquioctauũ hoc est tonum vltra duos tonos cum semitonio minore continens: tribus tonis et semitonio minore constabit quemadmodum propositum est. Correlariũ cognoscitur. Nam diapente per presentem continet tres tonos cum semitonio minore. at substracto tono residui sunt duo toni: atq; semitoniũ minus. et per sextam huius duo toni cũ semitonio minore constituunt cõsonantiam diatessaron. substracto igitur tono a cõsonantia diapente: relinquitur diatessaron. sed et cum diapẽte constet ex tribus tonis cum semitonio minore: substracta ergo diatessaron cõsonantia que duobus tonis et semitonio minore completur: relinquet quẽadmodum secunda pars correlariũ proponit: tonus. quod est totum correlarium.

¶ Diapente consonantia: minus octo semitoniis minoribus continet. 11

¶ Nam cum tonus vnus duo semitonia minora et vnum cõma cõtineat: tres toni ⁊ vnum semitoniũ minus septem semitonia minora ⁊ tria commata cõtinebunt. ac tria commata per tricesimãquintam secundi huius semitonio minore sunt contractiora. ergo diapente que per precedẽtem tribus tonis et semitonio minore constat: minus octo semitoniis minoribus cõtinebit. sed quẽadmodum facile monstratum est diapente cõsonantiam nõdum octauum attingere semitoniũ minus/ octauãq; diesim: ita quoq; facile monstratu esset: eandem consonãtiam nõdum septimam attingere apotomẽ.

¶ Diapente consonantia: ditono/ sesquitonoq; coniungitur. 12

¶ Nam diapente per penultimã tribus tonis et semitonio minore constat. et ditonus ⁊ sesquitonus simul tres tonos et semitoniũ minus efficiunt. igitur ditonus atq; sesquitonus pariter copulati cõsonantiam diapente iungunt: quod intenditur.

¶ Consonantiarũ diapente ⁊ diatessaron: tonus differentia est. quo fit vt diatessaron consonantia adiuncto tono: consonantiam diapente restituat. 13

¶ Differētia hic vocat ea ꝓportio qua maior superat minorē. Nam p correlariū decime huius subducto tono a cōsonantia diapente relinquit consonātia diatessaron. solo igitur tono consonantia diapente cōsonantia diatessaron est maior. est igitur per diffinitionē: harum cōsonantiarū tonus dria. ⁊ correlariū statim ex propositione notum est.

¶ Bis diatessaron: sesquitono consonantiam diapente transcendit.

14 ¶ Diatessaron enī p sextā huius duos tonos atq; semitoniū minus cōtinet. ergo bis diatessarō quattuor tonos et duo semitonia minora ꝓtinebit. atqui a quattuor tonis ⁊ duobus semitoniis minoribꝰ dempto sesquitono: relinquūtur tres toni et semitoniū minus. Atuero per decimā huius cōsonantia diapente totidē tonos cū semitonio minore cōplectitur. ergo bis diatessaron: sesquitono consonantiā diapente transgreditur transcēditq; quēadmodum proponitur.

15 ¶ Cōsonantie diatessaron/ac diapente: in maximis supparticularibus sunt collocate

¶ Nam ex diffinitione cōsonantia diatessaron in epitrita sesquitertiaq; ꝓportione collocatur. et diapente in hemiolia atq; sesquitertia. at nulle supparticulares sesqualtera ⁊ sesquitertia sunt maiores nam a secūda ⁊ tertia parte q̄ maxime sunt sese cōsequētes partes: denominātur. igitur he cōsonantie ex maximarum superparticulariū oziginibus ducte: in maximis superparticularibus sunt collocat quod est propositum.

16 ¶ Bis diatessaron/aut bis diapente: nullam consonantiam cōponere potest.

¶ Hec proponit duas diatessaron cōsonantias aut duas diapente consonantias: nullā conflare posse cōsonantiā. Nam et diatessaron ⁊ diapēte nō in multiplicibus sed supparticularibus sunt constitute et per primā petitionē que ĩterualli ad interuallū proportio est: ea quoq; est et soni ad sonū. at p sextā primi duo similia interualla nō multiplicia: neq; multiplex neq; supparticulare creant interuallum. quare neq; illorū soni in multiplici: neq; in supparticulari gñe existunt. omnis aūt consonātia aut in supparticulari aut in multiplici rōne collocāda est. sic enī consonantie noīe hoc in loco Pythagoricā sequētes autoritatē: suscepimus vtēdum. ergo due cōsonantie diatessaron aut due diapente: nullam efficiēt cōsonantiā. et nō modo idverū sit: sed ⁊ quotquot ꝓsonantie diatessarō in īmensum copulētur et quotquot diapēte: nullā vnq̄ consonātiam ex quinta primi huius efficere valebūt.

17 ¶ Adiuncto ad cōsonantiam diapente tono: nulla parabitur consonantia. item neq; ad diatessaron trisemitonio.

B	11			Numeroꝝ dria		T	3384					Numerorū R S dria
E	27	F	16	Sexta maior		R	9216	S	5832			Sexta minor
C	9	D	8	Tonus		P	2304	Q	1944			Sesquitonus
A	3	B	2	Diapente		M	4	O	3			Diatessaron
						L	256	N	243			Semitoniū minus
						H	9	K	8			Tonus

¶ Et si hic sonorū congressus nōdum cōsonantia sit: euphonū tamen musici reputant melo|modulamibusq; aptum: sextāq; q̄ sex impleatur vocib⁹ nostri nunc nūcupant. et quattuor tonis atq; vna diesi hoc est semitonio minore constat. qui q̄ nōdum cōsonātia sit patet. Accipio enī a ⁊ b ternariū et binarium: minimos scz numeros cōsonantie diapente. ⁊ c d nouenariū atq; octonariū minimos numeros toni. et duco c in a ⁊ veniat d septem supra viginti. et d in b ⁊ veniat e decem et sex. per tertiam quinti Arithmetices d ad e cōtinet sesqualterū ⁊ sesquioctauū: quare d ad e cōtinet diapente atq; adiunctū tonum. at manifestū est d ad e 27 scilicet ad 16 nō esse multiplex. nam septem ⁊ viginti nō continēt bis aut tertio aut deīceps sedecim. neq; d superparticularis est ad e. nam dria numeri d ad e est vndecim qui numerus summe 16 pars nulla est. transcēdit enī vndenarius sedenarū dimidiū. igitur adiūctus ad consonātiam diapente tonus: nullam parit cōsonantiā. et simili argumento adiecto ad cōsonantiā diatessaron sesquitono: nulla fit cōsonantia vt ex secūda figuratione perfacile patere potest. fit tamē euphona vocum congressio: quā item sextam nūcupant: sed que a prima contractior tota distet apotome. est ergo hec minor|illa vero maior, constat enim prima vt dictum iam est: quattuor tonis et vna diesi/secunda vero tribus tonis ⁊ duabus diesibus. Primā sonat Parhypate hypaton ad mesen: secūdam vero que contractior est: sonat hypate hypaton ad Lichanon meson. que autem hypate|que parhypate: qui lichani|et que mese dicātur: sequēs liber declarabit.

18 ¶ Quo pacto diapason consonantia: in chorda sit adiungenda.

	A		C		B	Cōsonantia diapason

¶ Hec ꝓsonātiarum vt in libro probleumatū testatus est Aristoteles: elegātissima|pulcherrimaq; est Chordam ergo a b seco per medium per notā c. et quia a b ad c b est dupla interualli habitudo. ergo per diffinitionem a b ad c b consonat diapason.

¶ Consonantia diapason: in sex tonis minime consistit. sed quinq; amplior: sex vero tonis: consonat contractior. 19

¶ Nam per vicesimã primi quinq; cõiuncti sesquioctaui: minus duplici interuallo coniũgunt. et per vicesimã primam eiusdẽ sex coniuncti maiores vno duplici interuallo euadunt. ergo quinq; toni minores sunt diapason cõsonantia/et sex eadem sunt ampliores. consonat ergo diapason quinq; tonis amplior: sed et sex eadem modulabitur inferior.

¶ Diapason: ex diatessaron et diapente consonantiis coniungitur. 20

¶ Nam per decimã quartam huius diatessaron et diapente in maximis supparticularibus sunt collocate. at per vndecimã primi duplex interuallũ ex duobus maximis supparticularibus cõiungitur. et duplex interuallũ: consonãtie diapason interuallũ existit. igitur consonantiã diapason: diatessarõ et diapente consonantie simul coniungunt. quod est propositum.

¶ Cõsonantia diapason: quinq; tonis et duobus semitoniis minoribus quc tonũ minime cõplent: perficitur. Vnde quoq; manifestũ esse potest: cõsonantiam diapason solo a sex tonis commate distare. 21

¶ Per precedẽtem enĩ diatessaron et diapente consonãtiam diapason iungunt. diatessaron aũt per sexta huius duobus tonis et semitonio minore constare mõstrata est: et diapente p̃ nonã tribus tonis semitonioq; minore. at duo toni et semitoniũ minus ⁊ tres toni et itidem semitoniũ minus simul conflati: quinq; efficiũtur toni atq; duo semitonia minora. atqui duo semitonia minora tonum non perficiunt: verũ ab eo deficiunt cõmate. igitur consonãtia diapason quinq; tonis et duobus semitonis minoribus: que tonũ minime ĩplent quẽadmodũ iam propositũ est perficiẽ. ¶ Correlariũ ex demonstrationis calce notũ esse potest. Ex quo liquet pfacile esse in neruo musicũ cõma peruestigare Nam in eo a principio constitutis/cõtinuatisq; sex tonis et ab eodẽ nerui initio ad mediã chorde notam intensa diapason cõsonantia quod inter mediã nerui notam et vltimũ sex tonorũ signum cõtinetur: ex precedentis correlario erit cõmatis interstitiũ.

¶ Dempta ex diapason cõsonantia diapente: relinq̃tur diatessaron. et ex eadẽ dẽpta cõsonantia diatessaron: relinquitur diapente. demptis autem ex ea diapente et tono relinquitur sesquitonus. 22

¶ Prima pars et secunda statim per penultimã cognite sunt. Item ⁊ per p̃cedentẽ. Nam per precedentẽ diapason quĩq; tonis ⁊ duobus semitoniis minorib⁹ constat: a quibus si tres tonos et vnũ semitoniũ minus tollas que per decimã huius diapente cõsonantiã continẽt: relinquũtur duo toni ⁊ semitoniũ minus: q̃ per sextã huius diatessaron cõsonantiã efficiunt. dẽpta igitur ex diapason consonãtia diapente: relinquit diatessaron: quod est primũ. Secundũ eadẽ facilitate declaratur. Nam ex quinq; tonis et duobus semitoniis minorib⁹ si duos tonos ⁊ semitoniũ minus tollas: relinquũtur tres toni et semitoniũ minus. Tertiũ consimiliter. demptis enĩ a consonãtia diapason hoc est a quinq; tonis et duobus semitoniis minoribus demptis inquã quattuor tonis et semitonio minore reliquus est tonus vnus ⁊ semitoniũ minus. Et quot dieses quot apotomas quot deniq; cõmata contineat diapason: de prehẽsionis sunt facillime: in nulla tamen equaliter: tota ipsa diuidua est quãdoquidem diapason in multiplici ratione consistit que omnino in quotlibet equas proportiones que multiplices nõ sint per sexagesimam noni arithmetices diuidi non potest.

¶ Nulla simplex cõsonantia: in duo equalia: certo/cõstitutoq; nũcro diuisibilis est. 23

¶ Simplices consonãtias vocamus diatessaron/diapente/diapason. de diatessaron autẽ ⁊ diapente constat q̃ ex supparticularibus interuallis surgũt: que per quintã primi nullo/pacto hunc in modum dirimi possunt. de diapason vero cõsonantia idẽ subit iudiciũ. Nam quoniã minimi eius numeri sunt duo et vnum: ⁊ duo quadratus nõ est: igitur per correlariũ tricesimesecũde secundi huius cõsonantia diapason q̃ consistit in ꝓportione duorũ ad vnum minime in duo equalia partiet. et eodẽ quoq; iure neq; eadẽ consonãtia in plura duobus dimetiet/dirimeturq; equalia. Et profecto velle hoc pacto consonantiã diapason in plura equa diducere. est in geometricis diametrũ coste quadrati velle cõmensurare. sed id vltimũ musicum nõ est

Diapason ac diatessaron: consonantiam non esse. 24

E	8				f	3		8	2
	⁊		1		4		3		
	A		b		c		d		

¶ Etsi in diapason ac diatessaron sit duarũ vocum dulcis/amenaq; cõgressio vt quẽadmodum cum pulsatur sesquitonus: nõ iccirco tamẽ euenit diapason ac diatessaron ꝓsonantiã dici mereri. Tametsi Ptholomeo secus q̃ Pithagoricis hac in re visum sit: quod monstratu facillimũ est. Sint enĩ a et b binarius ⁊ vnitas: minimi scz numeri consonãtie diapason et c d quattuor ⁊ tria minimi idẽtidem cõsonantie diatessaron duco c in a et veniet octonarius qui sit e: ⁊ d in b et veniet ternarius: qui sit f. per tertiam quinti Arithmetices e ad f continet duplã et sesquitertiã: quare diapason ac diatessarõ.

sed e octonarius non est multiplex ad f ternarium/ neq; supparticularis q eũ bis cõtineat et insuper binariũ qui ternariũ nõ pars vlla est sed partes. est enĩ octonarius ad ternariũ duplex subpipartiẽs. Non est igitur diapason ac diatessaron ꝓsonãtia. oĩs enĩ consonãtia aut in supparticlari/ aut in multiplici genere ex diffinitione cõsistit. Et in hoc facile cognosci potest ex nouo ꝓbleumatũ libro q̃ Pythagoricis cõsensit Aristoteles: cũ inquirit cur non bis diapente/ aut bis diatessaron reddi ꝓsonãtia potest: vt bis diapason coaptari solet. Hoc inquit ideo est q diapẽte consonãtia posita in proportione sesqualtera est diatessaron ẋo in sesquiftia. q si duo sesqualteri aut sesquitertij numeri ordine disponãtur: extremi nullam inuicem proportiõem habebũt. neq; enĩ supparticulares neq; multiplices esse poterũt. at diapason ꝓcinẽtia qm̃ in duplari proportione cõsistit: hac gemĩata: quadruplam inuicem extremi tenebũt habebũtq; ꝓportiõem. Ĩdes ergo quo pacto Aristoteles consonãtiarũ ꝓportiones solas supparticulares aut multiplices efficit: suppartiẽtes q̃si prorsus nulle sint repudians. Et re ẋa Ptholomei cũ Pythagoricis magis in noĩe q̃ in reipsa dissentio putanda est. sed de his hactenus.

25 ¶ Diapason ac diapente: in triplici consistit ratione. estq; diapason ac diapente consonantia vna.

¶ Si enim diapason ac diapente in tripla rõne cõsistat: hoc ideo est q ex duodecima primi ex duplici atq; sesqualko interuallo triplex nascit interuallũ. duplex aũt ꝛ sesqualtex sunt ꝓsonãtiax diapason et diapente in ſualla. igitur iuncte ꝓsonãtie diapason ac diapente in tripla rõne cõsistunt. sed cũ sensu iam satis sit explorata hũc cõcentũ modulate/ suauiterq; ad auditũ pueniret ergo per diffinitiõem is concẽtus consonãtia est. quod est totum propositum.

26 ¶ Diapason diapente ac tonus: melos citra consonantiam eliciunt.

27			8
e			f
3	1	9	8
a	b	c	d

¶ Melos hic vocamus suauem auribus acceptam voculationem/ amenũq; plurũ vocum cõgressum. sed q diapason diapente ꝛ tonus simul iuncta melos constituũt: statim notum est. Nam hec sonorum voculatio suauiter vt experiẽtia discitur auribus accidit. sed q consonãtiam nullã parer: ostẽdit. qm̃ enĩ per precedẽtem diapason ac diapente in tripla proportiõe consistit. sint ergo a b tria ꝛvnũ minimi consonãtie diapason ac diapente numeri/ et c d nouem ꝛ octo minimi numeri toni. duco c in a ꝛ d in b et veniãt e f 27 scz et 8 inter que est diapason diapente atq; tonus. sed e ad f neq; supparticularis neq; multiplex: quinĩmo e ꝓtinet f ter et tres eius octauas: estq; e ad f triplus suptripartiẽs octauas. non cõcinit igitur e f aliqua consonãtia. quod totum est propositum.

27 ¶ Bis diapason consonantia: in quadruplari constituta reperitur habitudine.

¶ Si enĩ bis diapason in quadruplari cõsistat: statim est manifestum. Nã per decimãtertiã p̃mi duo duplicia interualla quadruplex iungunt inſuallũ. diapason aũt in duplari cõsistit. igit bis diapason quadruplarem iungit habitudinem: que est multiplex. et cũ bis diapason ad auditũ suauis/ emodulatacq; pueniat vt id quoq; sensu satis perceptum est. q̃ p diffinitiõem erit ꝓsonãtia. qd̃ erat mõstrandũ.

¶ Pythagorici ꝛ priores musici oẽs: ꝓcentũ modũ in terminis quadruple atq; in finibus ꝓsonãtie bis diapason perstrinxerũt: non temere lõgius progressi aut q inter illos terminos vnicuicq; factus a natura reperitur sue vocis modus/ aut q stridul⁹ ille canor illis vt iam quoq; dictũ est visus est q ve seriam iam relinquũt mediocritatem/ aut q hactenus contẽplatio satis ipis esse visa est ad musicam institutiõem. posteritas aũt ad ter diapason vel ꝛ amplius adauxit ad terios vsq; octuple lõgius euagata: de quibus necessaria speculatio non incũbere videtur: sed pauca paucis strinxisse satis erit. Nã qui modulatiõem supra bis diapason cognoscere desiderabũt: facili demõstratiõe vt precedẽtia pcipient. bis enĩ diapason ac diatessaron in ꝓportiõe quicupla sesquitertia cõsistit. et proinde plane cõsonãtia putãda nõ est. bis diapason ac diapente in ꝓportiõe sescupla et ideo consonãtijs ãnumerata. ter vero diapason in proportione octupla.

28 ¶ Omnes consonantias: in data chorda suo ordine subiũgere: et eas sensu perceptibiliter experiri.

A	c	d	e	f	g	b

¶ Sit a b data chorda in qua ꝓpositũ sit ꝓsonãtias diatessaron/ diapẽte/ diapason/ diapason ac diapente/ et bis diapason situare. colloco in signo a brachiũ circini ĩmobile et ad totius chorde quartam partem extendo circini brachiũ mobile: et in termio eius pono notam c. deinde extendo idem brachiũ ad eiusdem chorde partem tertiã: et in terio pono d. mox ad totius chorde partẽ mediam quã designo nota e. deinde eodẽ brachio capio totius chorde bissen: hoc est duas tertias: et in terio bisses pono f. mox extẽdo circinũ ad chorde dodrãtem: hoc est ad tres eius completas quartas: in cuius fine affigo notam g. tunc sic a b ꝛ c b per quartã huius ꝓsonat diatessaron. a b ꝛ d b per octauã diapente a b ꝛ e b per decimãoctauam diapason a b ꝛ f b per vicesimãquintam diapason ac diapente. postremo ẋo a b ꝛ g b per precedẽtem bis diapason. Suppone igit musicale hemisphertũ sensim singulis chorde notis et sonos ad totius chorde sonum diligẽter attẽde. et suo ordine ꝓpositas ꝓcinẽtias annotabis. quod prõptius experiri valebis: si chorde a b chordam equisonam/ vnisonãq; etiã collocaueris: cuius sonũ cum singulis sectionum a b pcussionibus non segniter attenderis.

¶ Consonantiarũ hoc pacto digestarum: finis consonantie diatessaron: ad finem diapente sonat tonum / ad finem diapason: consonat diapente. ad finem diapason ac diapente: incõsonus. ad finem vero bis diapason: consonat diapente ac diapason. 29

A	c	d	e	f	g	b

¶ Sint a / c / d / e / f / g / b modo qui dictus est digeste consonãtie: dico c b finem ꝓsonãtie diatessaron ad d b sonare tonum / ad e b esse diapente / ad f b incõsonũ esse / ad g b ꝛo cõsonare diapente ac diapason. Nam per precedentem a b ⁊ c b est diatessaron et a b et d b diapente. dẽpta ergo a b ⁊ c b diatessaron cõsonãtia ab c b ⁊ d b diapente: per correlariũ decime huius relinquiꝫ tonus. qõ aũt relinquiꝫ est c b ⁊ d b: igitur c b ad d b sonat tonum. et qm̃ per precedentẽ a b ⁊ e b ꝓcinit / modulaturq; diapason substracta: igiꝫ a b et c b diatessaron ab a b et e b ꝓvicesimãscẽdam huius qõ relinquiꝫ est diapente. atqui quod relinquiꝫ est c b et e b: igitur c b ad e b ꝓsonat diapente. et qꝛ per precedentem a b ⁊ f b consonat diapason ac diapẽte: subducta igitur a b ⁊ e b ꝓsonãtia diapason: qõ relinq̃tur est diapente. quod aũt relinquiꝫ est e b ⁊ f b. igitur e b ⁊ f b consonantia est diapẽte. sed ꝑ modo monstratũ c b ⁊ e b etiã diapente est: igitur c b ⁊ f b est bis diapente. at ꝑ decimãquartã huius bis diapente ꝓsonãtia componi nõ potest: igiꝫ c b ad f b incõsonus est. postremo qm̃ vt ex ꝑcedẽti notũ est a b ⁊ g b ꝓsonat bis diapason. dẽpta igiꝫ a b ⁊ e b diapason ꝓsonãtia relinq̃tur e b et g b eẽ diapason. atqui c b ⁊ e b per scẽdam ꝑtem huius mõstrata est esse diapente. igitur adiũcta c b et e b consonãtia diapente ad e b ⁊ g b cõstituitur diapente ac diapason. cõsonat ergo c b ⁊ g b diapente ac diapason. quod est totum propositum.

¶ Sic positis consonãtijs: finis diapente ad finem diapason modulatur diatessaron / et ad finem diapason ac diapente: modulatur diapason. ad finem vero bis diapason euphonus est: sed qui nondum consonantia est. 30

A	c	d	e	f	g	b

¶ Esto precedẽtiũ hypothesis: dico d b finem diapente ad e b consonare diatessaron. ad f b diapason. et ad g b sonare diatessaron ac diapason. Nam per penultimã a b et e b cõsonãtia est diapason. et a b et d b diapente. substracta igitur a b ⁊ d b diapente: ab a b ⁊ e b ꝓsonãtia diapason: per vicesimãscẽdam huius relinq̃tur diatessaron. qõ aũt relinq̃tur est d b et e b: igiꝫ d b ad e b ꝓsonat diatessaron. et qꝛ in precedẽti monstratũ est e b ⁊ f b eẽ diapente: et nũc d b et e b esse diatessaron: ergo per vicesimã huius d b et f b ex illis duabus cõflata / coalitaq; cõsonãtia modulabiꝫ diapason. Rursum cũ e b ⁊ g b in ꝑcedenti mõstrata sit diapason: et e b et f b diapẽte: ergo per vicesimãscẽdam huiꝰ f b ⁊ g b est diatessaron. et d b et f b nunc mõstrata est diapason. igitur d b ⁊ g b est diapason ac diatessaron: que cũ modulatio sit euphona ⁊ eã monstrauerit vicesimaquarta huius non esse ꝓsonãtiã totũ liquet mõstratũ ꝓpositũ. et ex hac quoq; pariter cognitũ est finem diapason: ad finem diapason ac diapente modulari diapẽte vt e b ad f b et ad finem bis diapason cõsonare diapason.

¶ Consonãtiaꝝ sic collocataꝝ: totius chorde atq; cuiusq; sectiõis nũeros designare. 31

24	18	16	12	8	6	
a	c	d	e	f	g	b

¶ Duco duo / tria / et quattuor in seinuicem: et numerũ inde surgentem atq; ꝓductũ qui hẽbit scẽdam tertiam ⁊ quartã: pono totius linee numerum quẽ iccirco voco numerum a b ab quo demo quartam partem et reliquus sit c b: et erit ꝑmus numerus ad ipm̃ sesquitertius. quare diatessaron. et ab eodem numero demo partem tertiam ⁊ residuus sit d b: eritq; a b ad d b sesqualter: quare cõsonãtia diapẽte. et iterꝫ ab a b diduco ꝑtem mediã et residuus sit e b: eritq; a b ad e b duplus. ãcirca diapason ꝓsonãtia inter eos exurget. et nũeri a b sumo solã tertiam q̃ sit f b: erit ergo a b ad f b hĩtudo tripla. cõtinebũt igiꝫ a b et f b diapason ac diapẽte. Rursum numeri a b sola quarta sit g b: erit a b ad g b quadruplus. quare a b et g b sunt numeri bis diapason. sunt itaq; totius chorde a b ⁊ cuiusq; sectionis eius fm̃ assignatas consonãtias designati numeri. quod erat demonstrandum.

¶ Quotcunq; harmonicas medietates assignare: inter quaꝝ terminos eorũq; differentias omnes musice reperiantur consonantie. 32

Harmonice	12	8	6		Epitritus	b c	Diatessaron	
Medietates	6	4	3		Hemiolus	a b	Diapente	
	a	b	c		Duplaris	a c	Diapason	
Differentie		2	1		Triplaris	c e	Diapason diapente	
		d	e		Quadruplaris	b e	Bis diapason.	

¶ Harmonica medietas in Arithmeticis diffinita est qm̃ trium terioꝝ vt maximus ad mĩmũ: ita dẽ maiorũ ad dẽtam minorum. Sit ergo c quicũq; nũerus partem tertiam habens que sit e: duplo c. sitq; duplatus a. manifestũ est a ad c esse duplum. et qꝛ c ꝓtinet tria e: ipm̃ a ꝓtinet sex e. addo e ad c ⁊ fiat b

et erit notũ b ad c esse sesquitertiũ: et b cõtinere quattuor e atq; e esse dñiam b ad c. Itidẽ q: b cõtinet quattuor e et a cõtinet sex e: a erit sesqualter ad b. et q: b equatur quattuor e/ et a sex: ergo dñia a ad b equatur duobus e que sit d. quia eni d equat duobus e: ergo d duplus est ad e. dico ergo a b c datam esse harmonicam medietatem: inter cuius termios a b c ⁊ eoꝝ differentias d e oẽs musice consonãtie reperiãtur. nam a ad b maximi ad mimũ mõstrata est ꝓportio eẽ dupla et siliter habitudo d ad e dñie scz maiorũ ad differẽtiam minorũ etiã ostensa dupla. sunt igitur per diffinitiõem a b c termini in harmonica medietate ꝓstituti. At si b ad c cõpares mõstratus est sesquiftius: quare ꝓsonãtie diatessaron interuallũ. et si a ad b: mõstratus est sesqualter atq; hemiolus et diapẽte interuallũ. et si a ad c: duplũ habes ⁊ ꝓsonantiã diapason. si ꝛo c ad e cõtuleris: habes triplũ: et ꝑ vicesimãquintã tertij ꝓsonantiã cõpositam diapason ac diapente. et si b ad e: quadruplũ/ et ꝑvicesimãseptimam tertij bis diapason. at cũ cetera mõstrata sint non eẽ consonãtias: cõstat diatessaron/ diapente/ diapason/ diapason ac diapente/ ⁊ bis diapason oẽs consonãtias quibus in disciplinis se exercere solent musici: inter termios harmonice medietatis ⁊ eoꝝ differẽtias: fuisse repertas. et si duxeris binariũ in a b c ⁊ in illos q̃ inde ꝓuenerint et quoties volueris in ꝓueniẽtes: ex septima secũdi Arithmetices cognoscere ꝓõptum est toties cõstitui harmonicam medietatem cõsimiles inter suos terios ⁊ suorũ terioꝝ dñias: cõsonãtias musicas seruãtem. et idem fuerit si quẽcunq; alterũ numerum in illos terios duxeris. placuit tñ diuo Seuerino quadragesimo octauo capite secũdi sue Arithmetices ad oẽs ꝓsonãtias musicas cõplectẽdas: duas ordinare medietates harmonicas: vnam in duplari/ et alteram in triplari. sed ⁊ idem etiã fieri posse vna sola constituta iam satis monstratum arbitramur.

33 ¶ Quotlibet maximas harmonias quaꝝ quelibet primordium consonantiarũ / consonãtiasq; contineat omnes: constituere.

Maxima har.	24	18	16	12				
Maxima har.	12	9	8	6		Epogdous	b c	Tonus
	a	b	c	d		Epitritus	a b	Diatessaron,
Differentie	3			3		Hemiolus	a c	Diapente
	c			f		Duplaris	a d	Diapason
Differentie	4			2		Triplaris	d h	Diapason diapẽte
	g			h		Quadruplus	c h	Bis diapason.

¶ Maximam harmoniam vocant qñ quattuor solidorũ terioꝝ in geometrica medietate cõstituto·ũ: inter maxũ/ vnũ mediorum ⁊ mimũ medietas Arithmetica ꝓtinet: et rursum inter maxim terioꝝ/ alterũ mediorũ/ et mimũ cõtinetur harmonica. Medietas geometrica est qñ terminorũ est ꝓportionũ siliitudo. Arithmetica ꝛo qñ terioꝝ est differẽtiarũ equalitas. quid Harmonica iam dictũ est. Solidi termini dicunt qui ex triũ in se laterũ ductu ꝓducũtur. sed hec oia ex Arithmeticis ñotissima sunt. Primordium ꝓsonãtiaꝝ appellamus tonum. ¶ Capio ergo d numerũ quẽcũq; qui scõdam ⁊ tertiam hẽat: sitq; eius secũda f et tertia h. duplo d et sit duplatus a: quiquidẽ a duplus erit ad d. addo h ad d sitq; cõpositus c. eritq; sesquitertius ad d. sed et cũ a mõstratus sit duplus ad d: q̃ per vndecimam ꝑmi huius a ad c est sesqualter. Preterea f scõdam partem d addo ipi d et cõpositus sit b: certũ est b ad d esse sesqualterũ. q̃re ꝑ eãdẽ vndecimam ꝑmi a ad b est sesquiftius. Ab a c igit qui mõstratus ẽ sesqualter: ablato a b sesquitertio per quitãdecimã primi relinq̃tur b ad c sesquioctauus. Sit preterea g dñia a ad c q: d ꝓtinet tria h: c continebit q̃ttuor et a sex. ergo g dñia a ad c ꝓtinet duo h. est itaq; g ad h duplus. et quia f est medietas d/ et b est sesqualterũ ad d: ergo b cõtinet tria f. est itaq; f tertia ꝑs b. sed ⁊ a sesquitertius ad b addit sup eũ tertiaꝝ ꝑtem ipius b: ergo dñia a ad b que sit e equat f. dico ergo a/ b/ c/ d maximã cõstituere harmoniam: que tonũ ꝓsonãtiarũ elementum/ ⁊ oẽm cõplectit ꝓsonantiã. Nam a ad b mõstratus sesquiftius ⁊ siliter c ad d sesquitertius. cõtinẽt igit a ad b et c ad d per diffinitiõem: geometricam medietatem. et dñia a ad b maximi ad vnũ mediorum est e/ et b ad d eiusdẽ medij ad mimũ est f/ et e ⁊ f mõstrate sunt equari. igitur per diffinitiõem a ad b et b ad c constituũtur in Arithmetica medietate. sed ⁊ a ad d maximus ad mimũ mõstratus est duplus: et siliter g dñia a ad c maximi ad reliquũ mediorum demõstrata dupla ad h dñiam c ad d eiusdem medij ad mimũ. igitur per diffinitiõem a c d ꝓsistũt in harmonica medietate. Cõstat igit ꝑ diffinitiõem a/ b/ c/ d si solidi sint cõstituere maxiam harmoniam. q̃ si solidi non sint: duc quẽcunq; nũerũ in quẽlibet ipsoꝝ et ꝓueniẽt solidi in eisdem habitudinibus quoꝝ cuiuslibet latera erũt vnitas/ numerus in illos ductus et singuli eoꝝ ad singulos: sicq; cõstabit maxiam constitutam esse harmoniam. sed iam ostensus est b ad c sesquioctauus: igitur per diffinitiõem b ad c cõtinet tonũ consonãtiarũ ꝑmordiũ. et a ad b est sesquiftius. igit a ad b ꝓtinet diatessaron. et a ad c mõstratus est sesqualter: igitur a ad c cõtinet diapente. et a ad d duplus: igitur a ad d diapason. et d ad h triplus: igitur d ad h diapason ac diapente. et c ad h mõstratus quadruplus: igitur c ad h cõtinet bis diapason. et quotics duxeris quẽcunq; numerum in a/ b/ c/ d aut in ꝓductos ex illis adiuuãte septima secundi Arithmetices ⁊ diffinitõibus: toties cõstitues maximã harmoniã: tonum et oẽs consonãtias continentem. est igit effectum qõ ꝓponebatur. Et ex hac intelligere potes esse demõstratum que diuus Seuerinus affert de harmonia cubi quadragesimonono/ et de maxima harmonia quinquagesim: o quarto capite secundi sue Arithmetices.

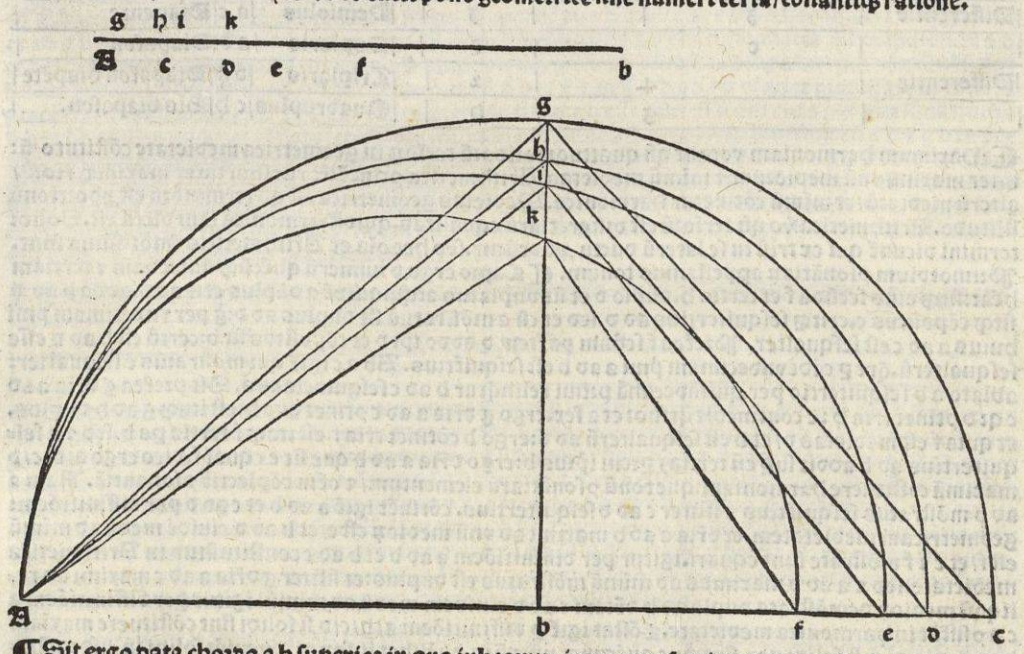
34 ¶ Dis numerus ternaria ꝓgressione ad se adiectus: oẽm consonantiam in Arithmetica medietate complet.

Cõsonãtie i Arithmetica medietate				A primavnitate				A scõa vnitate				A tertiavnitate			
3	6	9	12	1	2	3	4	10	20	30	40	100	200	300	400
duplus diapason		sesquiterti⁹ diates.		duplar		epitrit⁹		diapas.		diates.		diapason		diatessa.	
sesqualt diapẽte				hemiol.				diapẽ.				diapente			
Triplus. diapason diapẽ.				Triplaris				diapa. diap				diapa. diapẽte			
Quadruplus. bis diapason				Quadruplaris				Bis diapason				Bis diapason			

¶ Intelligit ternaria ꝓgressiõe ad se addi numerus qñ additur ꝑmo ad se semel/ deinde bis/ deinde ter. dico ergo quẽcunq; numerũ ad se hoc pacto additum: oẽm cõstituere consonãtiaꝫ musicam. Nam semel sibi adiectus: duplex ad se efficit/ ⁊ diapason consonãtiam. et bis sibi additus: ad ꝑmã additionem sesqualtex cõstituit ⁊ diapente: et ad se triplũ atq; diapason ac diapente. nam in ꝑma additiõe bis/ ⁊ in secũda ter cõtinetur. terxo sibi additus ad scõaꝫ additiõem facit sesquitertiũ ⁊ diatessaron: nam primus nũerus hic quater/ illic xo ter cõtinetur. et ad se quadruplũ facit et bis diapason. in hac igitur ꝓgressione oĩs cõtinetur cõsonãtia musica. et qꝫ cõtinue numerozũ ex eius additiõe surgentiũ ipse numerus additus est differẽtia: ergo reperte consonãtie in Arithmetica medietate continetur. et ex hac cognoscitur cur in oĩm vnitatum quaternaria ꝓgressione que vbiq; denariũ Pythagorici plenitudinem implet: oẽs consonantie musice et in Arithmetica quidem medietate reperiãtur.

¶ Tonum et oẽm consonantiam simplicem: in duo equa partiri/ veraq; medietatum puncta in chorda: geometrice monstrare. 35

¶ Precedẽtes septima scõi/ ⁊ vicesimatertia tertij preterẽdũt tonũ/ diatessaron/ diapẽte ac diapason: in duo equa diuidi non posse. hecxo mõstrat quo pacto ea omnia possint in duo equa partiri. nec hoc quidẽ repugnat. Nã precedẽtes contẽdunt id effici non posse Arithmetice certo/ cõstitutoq; numero/ atq; ratiõali habitudine: hec xo id effici posse geometrice sine numeri certa/ cõstantiq; ratione.



¶ Sit ergo data chorda a b superior in qua iubeamur integrum semitonium/ et ꝓsonãtiarũ diatessaron/ diapente/ ac diapason vera media reperire. facio a b ⁊ c b tonum. a b et d b diatessaron. a b ⁊ e b diapente. a b et f b diapason eo qui in predevẽtibus mõstratus est modo. deinde in inferiori linea a c indefinite quãtitatis capio a b equalẽ linee superiori a b et b c ꝓtinue equalem linee b c superiori. et a puncto b versus c: capio lineam b d equalem chorde b d et b e equalẽ chorde b e et b f chorde b f. et intelligo q̃tuor dimidios circulos a c/ a d/ a e/ a f. et a puncto b educo perpẽdicularẽ linee a c ad circũ: a g/ c g/ a h/ d h/ a i/ e i/ a k/ f k. at per nonã sexti geometrie a b ad b g vt b g ad b c. facio igit in chorda superiore a b lineam b g equalẽ inferiori linee b g et cũ ꝓportio a b ad g b vt b g ad c b vt preostẽsum est: secẽtur tonum a b ⁊ c b esse in duo equa diuisum: ⁊ pũctũ g esse medium veri semitonij signũ. et per eãdem quẽ ꝓportio a b ad b h ea sit b h ad b d. esto igitur h b in chorda a b equalis linee b h per idem vt prius: ea erit ꝓportio a b ad h b que h b ad d b. quare a b et d b diatessaron in duo equa partita est. et eodem pacto facta chorda i b superiori equali linee b i. et chorda k b equali linee b k: mõstrabis cõ-

sonātias diapēte ⁊ diapason in duo equa esse partitas. et re ꝑa hoc pacto ꝑa schismata atq; diaschismata/ et dieses tetrartemerias reperias assignat/ cōmatis/ dieseos/ atq; cōpleti semitonij interuallis et sumptis vt in precedentibus factum est medijs, ꝓportiōalibus chordis. sed hec statim aliq̃tulum in geometricis exercitatis nota esse possunt. Hec aūt posteaq̃ repereris disce (si libet) per chordam in voce tonum mediare/ et semitonium: et quācunq; voles in arte musica consonantiam.

¶ Tertij elementorum Musices finis.

h Armonica regula instrumentū est: quo cum (ratiōis adhibito iudicio) consonantie/ consonātiarūq; partes: in chorda perquirūtur. Melorū tria sūt genera: Diatonicum/ Chromaticū/ Enarmonicū. Diatonicum genus: melos est cuius partitio per semitonium minus ⁊ duos tonos cōtinue ꝓcedit. Chromaticum: qd̄ per duo inequalia semitonia ⁊ trihemitonium cōscēdit. Enarmonicū vo: qd̄ per duas dieses conscēdit et ditonum. Diesis hoc in loco semitonij minoris medietas est: ex differētie extremoꝝ habitudinis eius: partitione ꝓueniens: que ⁊ tetrartemeria dicta est. sed vt eaꝝ semp maior que acutior/ et minor q̄ grauior: reperiatur necesse est. Voces/ nerui/ chorde/ spacia: hoc ordie a graui in acumen nitentia in vnoq̃q; melorum gn̄e sunt nūcupata.

Grece nuncupationes	Nuncupationes latine.
¶ Proslambanomenos	Acquisitus
Hypate hypaton	Principalis principalium
Parhypate hypaton	Subprincipalis principalium
Lichanos hypaton	Index principalium
Hypate meson	Principalis mediarum
Parhypate meson	Subprincipalis mediarum
Lichanos meson	Index mediarum
Mese	Media
Trite synezeugmenon	Tertia coniunctarum
Paranete synezeugmenon	Penultima coniunctarum
Nete synezeugmenon	Ultima coniunctarum
Paramese diezeugmenon	Submedia disiunctarum
Trite diezeugmenon	Tertia disiunctarum
Paranete diezeugmenon	Penultima disiunctarum
Nete diezeugmenon	Ultima disiunctarum
Trite hyperbolcon	Tertia excellentium
Paranete hyperboleon	Penultima excellentium
Nete hyperbolcon	Ultima excellentium

¶ Monochordum: est qd̄ vnica chorda cōtinet modulatiōem. Tetrachordum: quod chordis quattuor. Polichordum vo: quod pluribus chordis id cōtinet q̃ quattuor. vt pentachordum: qd̄ quinq;. hexachordum: quod sex. et ita de heptachordo/ octochordo/ ennachordo/ decachordo/ endecachordo/ dodecachordo/ tridecachordo/ tessaradecachordo/ ⁊ pentadecachordo est intelligendum: qd̄ vltimum oīno quindecim constat chordis. ¶ Proslambanomenos: est in vnoq̃q; genere: primo tetrachordorū grauissimus neruus adiūctus: a ꝓximo primi tetrachordi neruo: toni intuallo distās. Tetrachordum coniūctū: est cuius principiū est precedētis tetrachordi finis. Disiūctum vo: cuius primordialis neruus in vnoquoq; melorum genere: a ꝓximo precedentis tetrachordi finali neruo: vno tono disiungitur.

¶ Tetrachorda sunt quicq: Tetrachordũ hypaton/Tetrachordũ meson/Synezeugmenon/Diezeugmenon/Hyperboleon.

¶ Tetrachordum hypaton est:	Tetrachordum synezeugmenon.
Hypate hypaton	Hese
Parhypate hypaton	Trite synezeugmenon
Lichanos hypaton	Paranete synezeugmenon
Hypate meson	Mete synezeugmenon
Tetrachordum meson est:	Tetrachordon diezeugmenon.
Hypate meson	Paramese diezeugmenon
Parhypate meson	Trite diezeugmenon
Lichanos meson	Paranete diezeugmenon
Hese	Mete diezeugmenon

Tetrachordum hyperboleon
Mete diezeugmenon
Trite hyperboleon
Paranete hyperboleon
Mete hyperboleon

¶ Modũ hic vocamus remissionem aut intensionem oim tetrarchordorũ gradatim in aliquo genere melorum: sui generis progressionem seruans.

¶ Modi sunt septem.

¶ Primus Hypodorius	1
Secundus Hypophrygius	2
Tertius Hypolydius	3
Quartus Dorius	4
Quintus Phrygius	5
Sextus Lydius	6
Septimus Mixolydius	7

¶ Monochordi regularis partitionem: in diatonico genere demonstrare.

¶ Quãuis instrumẽta musices ꝯpluria reperiãtur vt Cithare/Tibie/Tube/Lituí/Multiforatiles fistule: Dextre/Leue/Simplices/Duplices: in quib⁹ vno spiritu animãdis vt inquit Apuleius. fere Magnis Lydorũ rex Marsieq pater ꝑmus in canẽdo manus discapedinasse: preterea vt Pelte/Chordaciste/Sambuci/Hydraule/Habilie/Psalteria/Magades/Barbiti/Haula/Pẽtades/Cornua/Heptagona/Mele/Testudo/Barbati/Plectra/Monochorda/Tetrachorda/Polychorda: et cetera id gen⁹ musica instrumẽta. placnit tñ Philosophis in Monochordis/Tetrachordis/atq Polychordis monstrãdis: ceterorũ nos intelligere rõem/atq compositionem. quocirca vt de Monochordorum et Tetrachordorũ compositione intelligemus: ita de reliquis est intelligendum. nunc ergo ad Monochordi regularis nos ostensionem cõuertamus.

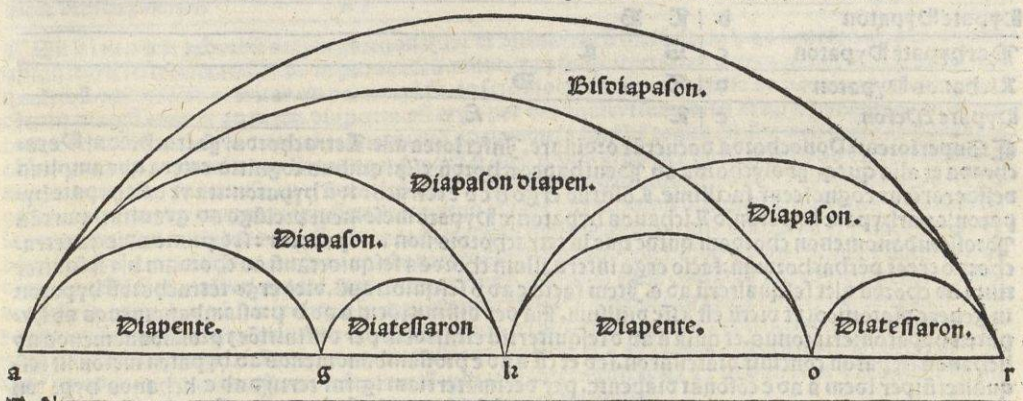
Monochordũ diatonicum.																
A	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	b		
T	S	T	T	S	T	T	T	S	T	T	S	T	T			
c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r		

T Tonus S Semitonium minus

¶ Monochordum igit regkare iccirco dicitur q̃ in vnico neruo musice consonãtie harmonica regula peruestigẽtur. Sit ergo a b chorda in qua volumus in diatonico gñe cõsonãtias regularit collocare.

Accipio c planissimã regulam/nullaq; ex parte subsultãtem:equalem linee a b.et per primã ⁊ decimã octanam secũdi huius ab c in d intẽdo tonum.et ab d in e semitoniũ minus. et ab e in f ⁊ f in g intẽdo duos tonos.et ab g in h semitoniũ minus.ab h in i et i in k duos tonos.Rursus ab k in l tonum.et ab l in m semitonium minus.ab m in n et n in o duos tonos.ab o in p semitoniũ.ab p in q et q in r duos tonos.ita q; ꝓtinue semitonio minori subiũcti sint duo toni:dẽptis c d qui ꝑ proslambanomeno ꝑmo semitonio prepositus est tonus:et k l tono qui tetrachordi diezeugmeni hoc est disiũcti principiũ est. Rursum applico totam regulã harmonicam c r toti chorde a b.itavt c sit cum a/et r cũ b.et in chorda a b vbi applicãtur d/e/f/g/ ⁊ reliquę sectionum regule note:signo d/e/f/g/h/i/k/l/m/n/o/p/q et dico monochordũ a b esse in gñe diatonico regulariter diuisum.Omñ enim sua interualla interuallis regle c r rñdent/euadũtq; equalia a b et d b sonat tonũ et d b et e b semitoniũ:et iterũ e b et f b tonũ ꝓtinet. igitur a b et f b duos tonos ⁊ semitoniũ minus ꝓtinẽs: per sextam tertij ꝓsonat diatessaron. Et quia f b et g b vt in regula cõtinet tonum.et g b et h b semitonium minus.et h b:i b.⁊ i b ⁊ k b duos tonos. ergo per decimam tertij f b et k b tres tonos semitoniũq; minus cõtinens:cõcinit diapẽte.Sed ⁊ mõstratũ est a b ⁊ f b modulari diatessaron: q̃ per vicesimam tertij a b et k b qũ ex cõsonãtijs diatessaron ⁊ diapente cõsurgit coalitum:cõsonat diapason.Rursus k b et l b sonat tonum/l b et m b semitonium minus m b n b et o b duos tonos:quare k b et o b tres tonos ⁊ semitoniũ minus cõtinens:per decimã tertij cõsonat diapẽte.Sed a b et k b mõstrata est diapason cõsonãtia:ergo a b ⁊ o b cõsonat diapason ac diapẽte.Preterea qz o b ⁊ p b semitoniũ est et p b q b et b duo toni:ergo o b et b cõcinit diatessaron. k b igitur et b ex diapente/diatessaronq; cõstans:per vicesimã tertij cõsonat diapason.At ẋo a b ⁊ k b itidẽ mõstratũ est cõcinere diapason.ergo a b ⁊ b ꝓcinũt bis diapason.Et qz hec monochordi partitio per semitoniũ ⁊ duos tonos facta,ꝓcessit:et ee que modo mõstrate sunt cõsonantie harmonice regule suffragio peruestigate:ergo monochordi regularis partitio in genere diatonico per diffinitiõem mõstrata est.quod est propositum.

2 ¶ Monochordi regularis constitutionem:in genere Chromatico declarare.



¶ In omni Monochordo/atq; Polyphordo hec obſuaſ ꝑpetas vt octaua modo nota/modo chorda prime:et decima quĩta octaue:in consonãtia diapason recrepet.etvbiq; ꝑ proslambanomeno preiũgiſ tonus/ inſeriſq; vbiq; inter mesen atq; paramesen,ꝑ concẽtu disiũcto tonus.hoc est in monochordis a prima nota in secũdam et ab octaua in nonam collocatur tonus. Sit ergo a b vt prius chorda in qua volumus cõsonantias in genere chromatico regulariter reperire.capio c r regulam planissimã et illi assignare corde equã.facioq; per primam secũdi huius c d tonum: et ꝑ decimãoctauã eiusdẽ d e semitoniũ minus:et iterꝑ per primam d f toni interuallũ.erit ergo e f semitoniũ maius:et d e et e f duo semitonia:sz ⁊ ab f ad g metior tonum ⁊ semitoniũ minꝰ:que equa erũt trihemitonio:et g h et h i facio duo semitonia:minus scz atq; maius et i k extẽdo ad tonũ ⁊ semitoniũ minus. Simili quoq; pacto k l fiat tonus:et l/m/n duo semitonio:et n o trihemitoniũ.et iterꝑ o/p/q duo semitonia: q r ẋo trihemitonium.Et regulã hoc pacto diuisam applico ex equo linee a b:et in linea a b signo ꝓsimiles ⁊ ꝓsimilꝭ distãtijs notas:scz a|d|e|f|g|h|i|k|l|m n|o p|q|b.quo pacto dico lineam a b esse regulariter in melodia chromatica diuisam.Mã c d tonus et d f tonus et f g tonus ⁊ semitoniũ minus. quare a ⁊ g continent tres tonos ⁊ semitoniũ minus.ergo per decimã tertij a ad g cõsonat diapẽte.et qz g h i cõtinent tonũ: et i k trihemitoniũ:igitur g ad k duos tonos ⁊ semitoniũ minus cõtinens per sextam tertij modulaſ diatessaron.sed et a g ꝑbata est diapente:ergo a k cõstans ex a g et g k diapente ⁊ diatessaron per vicesimam tertij cõcinit diapason.Et penitus eadem rõne ꝑbaueris k o cõsonare diapente/ et k b diapason.quare a o diapason ac diapente ⁊ a b recrepabit bis diapason:quã consonãtiaz nos trãscẽdere Pythagoricorũ vetat autoritas.qui tñ volet vlterius conscẽdere ex his q̃ iam demõstrata sunt ⁊ que

postea demōstrāda suscipienk: facile cōscēdet. Et cū iam mōstrata partitio per semitoniū ⁊ semitoniū et trihemitoniū processerit: nisi vbi integer adiectus est tonus vt tum diapason/tum cōcētus diſlūcti seruek ꝓpētas: Patet ꝗ ex diffinitiōe factū eē qd̄ in chromatico gñe ꝓponebak faciēdū atq; ꝓpositū.

¶ Idem: in enarmonico genere regulariter ostendere. 3

Monochordum Enarmonicum.

A																			b
	T	D	D	TT	D	D	TT	T	D	D	TT	D	D	TT					
c	d	e	f	g	h	i	lz	l	m	n	o	p	q	r					

D. Diesis tetrartemeria. TT. Ditonus.

¶ Sit vt prius chorda a b et c r regula eidem vt in ceteris equa: ab puncto c ad d extēdo tonum: et ab d ad f semitoniū min⁹: et spaciū d f partior in equalia per notam e. erūtq; d e f due dieses. et f g facio duos tonos: qui ditonū implent. g h i vt prius duas dieses. i lz ditonum. lz l tonum. l m n duas dieses. n o ditonum. o p q duas dieses. et q r ditonum. quā regulā hoc pacto partitam equalik applico linee a b: et silēs notas/equaliaq; interualla in linea a b designo per medias inter a ⁊ b litteras d/e/f/g/h/i/lz l/m/n/o/p/q b. et quia a d ton⁹: et d e f due dieses semitoniū minus implentes: et f g ditonus: ergo a g tres toni ⁊ semitonium minus per decimam tertij sonāt diapente. sed ⁊ g h i due dieses et i lz ditonus duos tonos et semitoniū minus cōtinētes: per sextam tertij sunt diatessaron. igik vt prius ꝑ vicesimā tertij a lz cōtinet diapason. et hoc pacto mōstrek lz o cōtinere diapēte: et lz b diapason: q̄re a o ꝓsonare diapason ac diapente/et a ad b cōsonare bis diapason. et qz hec modulationis ꝓgressio ꝑ duas dieses et ditonū ꝓcedit: cōstat per diffinitiōem monochordū enarmoniū regularik esse partitū: in eoq; musicas situatas esse consonātias et propositum.

¶ Tetrachordum hypaton: in diatonico melo diuidere. 4

Proslambanomenos	A	A						
Hypate Hypaton	b	T	B					
Parhypate Hypaton	c	S		C				
Lichanos Hypaton	d	T			D			
Hypate Meson	e	T				E		

¶ Superiores: Monochorda docuerūt ordinare. Inferiores aūt: Tetrachorda/Pētachorda/Hexachorda et alia queq; Polychorda ad Penthadecachordū vsq;: quibus cognitis cetera que amplius desiderarētur cognoscenk facillime. Cōstituo ergo b c d e tetrachordū hypaton: ita vt b sit hypate hypaton/c parhypate hypaton/d Lichanos hypaton/e Hypate meson: cui preiūgo ad grauitat̄ partē a Proslambanomenon chordam quidē que in tetrachordis non computatur: sed primo adiecta tetrachordo creat pēthachordum. facio ergo interuallum chorde a sesquioctauū ad chordam b/⁊ sesquitertium ad chordā d/et sesqualterū ad e. Item facio c ad d sesquioctauū. dico ergo tetrachordū hypaton in genere diatonico (vt dictū est) esse diuisum. Nā per diffinitiōem a ad b proslambanomenos ad hypaten hypaton: erit tonus. et quia a ad d sesquitertiū est: itidem per diffinitiōez proslābanomenos ad lichanon hypaton concinit diatessaron. sed et cū a ad e proslambanomenos ad hypaten meson sit sesqualterū: per idem a ad e cōsonat diapente. per decimā tertiam igitur tertij d ab e lichanos hypaton ab hypate meson tono diſlungik. Rursum qz c ad d sesquioctauū est: ergo c ad d sonat tonū. at ꝗ d̄a a ad d diatessaron est: et a b tonus est/et c d tonus: igitur per sextam tertij b ad c relinq̄tur semitonium minus. Est itaq; hypate hypaton ad parhypaten hypaton semitoniū min⁹. et parhypate hypaton ad lichanon hypaton ton⁹: lichanos hypaton ad hypaten meson ton⁹. cōstitutū est ꝗ b/c/d/e tetrachordū hypaton: per semitoniū minus ⁊ duos subiūctos tonos ꝓcedēs: per diffinitiōem in genere diatonico pariter ⁊ pēthachordū a/b/c/d/e. Sed incidit dubitatio forsan: cur nr̄a tempestate musici duos tonos ad tetrachordoꝝ partem seriam/grauēq; prelocāt: nos aūt solū tonum qui est proslambanomeni atq; hypates hypaton: responsio peruia/in prōptuq; est musicos nostra tempestate proslambanomeno alteram chordam tono distantem prefixisse et id primum memorāt Gregorium factitasse.

¶ In eodem diatonico melo: tetrachordum meson subiungere. et in octochordo: a proslambanomeno in mesen: diapason contineri. 5

Proslambanomenos	A	A							
Hypate Hypaton	b	T	B						
Parhypate Hypaton	c	S		C					
Lichanos Hypaton	d	T			D				
Hypate Meson	e	T				E			
Parhypate Meson	f	S					F		
Lichanos Meson	g	T						G	
Mese	h	T							H

¶ Sit e/f/g/h tetrachordū meson. facio e sesquitertiū ad h/et g sesquioctauum ad h/et f sesquioctauū ad g: erit ergo per diffinitionem e ad h hypate meson ad mesen diatessaron. et qz g ad h tonus ⁊ sil̄iter

f ad g tonus. nam vtrũq; ex ſeſquioctaua ꝓportiõe naſcitur. ergo ꝑ ſextam tertij e ad f erit ſemitoniũ minus. eſt itaq; e|f|g|h tetrachordum meſon per ſemitonium minus ⁊ duos tonos ꝓcedens in genere diatonico diuiſum. et q: a e proſlambanomenos ⁊ hypate meſon in precedẽti mõſtrata ſunt cõſonare diapente: et in p̄ſenti e h hypate meſon ⁊ meſe diateſſaron. ergo per viceſimã tertiũ: porſlãbanomenos ad meſen cõſonat diapaſon. cõtinet igitur octochordum a|b|c|d|e|f|g|h conſonãtiam diapaſon. quod eſt totum propoſitum.

6 Prepoſito octochordo: in eodem genere tetrachordum diſiunctarum ſubmittere. et dodecachordum diapaſon ac diapente continere.

Proſlambanomenos	A		A
Hypate hypaton	b		b
Parhypate hypaton	c		c
Lichanos hypaton	d		d
Hypate meſon	e		e
Parhypate meſon	f		f
Lichanos meſon	g		g
Meſe	h		h
Parameſe diezeugmenon	k	Trite coniunctarum	k
Trite diezeugmenon	l	Paranete cõiunctarũ	l
Paranete diezeugmenon	m	Nete coniunctarum	m
Nete diezeugmenon	n		n

Sit k l m n tetrachordũ diezeugmenon quod et diſiunctarũ dicit᷑. facio h ad k meſen ad parameſen diſiunctarũ ſeſquioctauã. et ad m paraneten diſiunctaꝝ ſeſquitertiã. ad n vero neten diſiunctarũ ſeſqualterã. deinde l ad m triten ad paranetẽ facio ſeſquioctauã: ſic ergo meſe ad paranetẽ diſiũctarum cõcinit diateſſaron et ad neten diapente. eſt ergo per decimãtertiam tertij m ad n paranetes ad neten toni interuallũ. et l ad m trites diezeugmenõ ad paranetẽ ſimilit᷑ tonus eſt. ſed ⁊ cũ meſe ad paranetẽ cõſonet diateſſaron et l ad m ſit tonus ⁊ ſimilit᷑ h ad k tonus ergo per ſextã tertij k ad l erit ſemitoniũ minus. erit itaq; parameſe ad triten diezeugmenõ ſemitoniũ minus: trite ad paraneten tonus: et paranete ad neten diezeugmenon ꝯſimiliter tonus. quare tetrachordũ diſiunctaꝝ ſuperiori octochordo in diatonico genere ſubiunctũ eſt. Et cum precedens mõſtrauerit a h eſſe diapaſon et preſens h n eſſe diapẽte: igit᷑ a n proſlãbanomenos ⁊ nete diezeugmenõ in dodecachordo a b c n cõtinent diapaſon ac diapente. Q; ſi in molliori canẽdi modo: tetrachordũ a chorda meſe coniũctũ partiri/ cõſtituereq; volemus: ſit id tetrachordũ h k l m: que ſunt meſe trite ſynezeugmenõ paranete ſynezeugmenõ nete ſynezeugmenõ: facioq; meſen ad neten ſynezeugmenon ſeſquitertiã. quare ⁊ cõcinentẽ diateſſaron et l ad m paranetẽ ſynezeugmenõ ad neten tono diſtãtem pariter et k ad l tono. erit ergo per ſextã tertij h ad k meſes ad triten ſynezeugmenon ſemitonij minoris interuallũ et k l ⁊ l m duo toni ⁊ tetrachordum ſynezeugmenon hoc eſt diſiunctarũ in genere diatonico diuiſum.

7 Tetrachordum hyperboleon in eodem diatonico genere predictis copulare: et in pentadecachordo: bis diapaſon conſonãtiam compleri

A re	Proſlambanomenos	A			A
b mi	Hypate hypaton	b			b
c faut	Parhypate hypaton	c			c
d ſolre	Lichanos hypaton	d			d
e lami	Hypate meſon	e			e
F faut	Parhypate meſon	f			f
G ſolreut	Lichanos meſon	g			g
a lamire	Meſe	h			h
b mi	Parameſe diezeugmenõ	k	b fa	Trite ſyn.	k
C ſolfaut	Trite diezeugmenon	l	c ſolfaut	Paranete ſyn.	l
d laſolre	Paranete diezeugmenon	m	d laſolre	Nete ſyn.	m
e lami	Nete	n			n
f faut	Trite hyperboleon	o			o
G ſolreut	Paranete hyperboleon	p			p
a lamire	Nete hyperboleon	q			q

	Tetrachordũ hypaton							Tetrachordũ diezeug.						
	To.	Semi.	To.	To.	Semi.	To.	To.	To.	Semi.	To.	To.	Semi.	To.	To.
A	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n	o	p	q
				Tetrachordũ meson							Tetrachordũ hypboleõ			

¶ Sit n o p q tetrachordũ hyperboleon facio vt in prioribus n neten diezeugmenon ad q netẽ hyperboleon sesquitertiã: et iccirco ad eam cõcinentem diatessaron. et p ad q facio toni interuallũ. ⁊ o ad p itidem toni interuallũ. per sextam tertij n ad o erit semitoniũ minus. est ergo tetrachordum hyperboleon n o p q ex semitonio minore duobus subiunctis tonis in genere diatonico dimẽsum. sed et p precedentẽ h mese ad n neten diezeugmenon ꝓsonat diapente: ergo h ad q mese ad neten hyperboleon ex cõsonantia diapente ⁊ diatessaron constans: cõsonat diapason. ergo a ad q proslãbanomenos ad netẽ hyperboleon cõsonabit bis diapason. et cum totum polychordum a q omnino quindecim perficiatur chordis: in pẽtadecachordo ⁊ in genere diatonico cõstitutum est bis diapason. qd̃ est totũ propositũ.

¶ Pentadecachordi in diatonica melodia constituti: numeros reperire.

8

Proslambanomenos	A	9	216	1728	13824		
Hypate hypaton	b	8	192	1536	12288	Tonus	
Parhypate hypaton	c			1458	11664	Semi. minus	
Lichanos hypaton	d		162	1296	10368	Tonus	
Hypate meson	e		144	1152	9216	Tonus	
Parhypate meson	f				8748	Semi. minus	
Lichanos meson	g			972	77[illegible]	Tonus	
Mese	h		108	864	6912	Tonus	
Paramese diezeugmenõ	k			768	6144	Tonus	
Trite diezeugmenon	l			729	5832	Semi. minus	
Paranete diezeugmenõ	m		81	648	5184	Tonus	
Nete diezeugmenon	n		72	576	4608	Tonus	
Trite hyperboleon	o				4374	Semi. minus	
Paranete hyperboleon	p			486	3888	Tonus	
Nete hyperboleon	q		54	432	3456	Tonus	
		p̃m⁹	scõus	tertius	q̃rtus loc⁹		

¶ Numeri qui in musica disciplina precipue desiderantur: sunt duplares/triplares/quadruplares/hemiolij/epitriti epogdoi: hoc est dupli/tripli/quadrupli/sesqualteri/sesquitertij/et sesquioctaui. quo circa si desideras cognoscere ad quem numerũ numerus maior est duplus: ipsum partire p duo. Ad quem triplus partire per tria. Ad quem quadruplus partire per quatũor. Ad quem sesqualter partire per tria et tertiã auge per duo. Ad quem sesquitertius partire per quattuor et quartã auge per tria. Ad quem sesquioctauus partire per nouem ⁊ nonam auge per octo. Et numeri: per octauã secundi Arithmetices vbiq̃ surgent petiti: si maior duplus/triplus/quadruplus/sesqualter/sesquitertius/aut sesquioctau⁹ est. ¶ Et si rursum cognoscere desideras quẽ numerus minor duplũ habet: ipsum auge per duo. Quem triplum: auge per tria. Quem quadruplũ: auge per quattuor. Quem sesqualterũ: partire per duo ⁊ illi medietatẽ adde. Quem sesquitertiũ: partire per tria/⁊ tertiam adde. Quem sesquioctauũ: partire per octo/et octauam adde. Et statim per eandẽ octauã et diffinitiones cognosces petitũ. ¶ Sed nunc ad monstrandũ propositum nos cõuertamus. Sit pentadecachordũ in diatonico genere modo repertum: cuius numeri querũtur: a b c d e f g h i k l m n o p q. duco in seinuicem duo/tria/quattuor/et minimos toni: hoc est vigintiquatruor in 9 et 8 minimos terminos toni et veniant in secundo loco a b que per septimã secundi arithmetices sunt in ꝓportione sesquioctaua/et continentia tonum. capio sesquitertiũ numeri a: sitq̃ d/et sesqualterũ qui sit e ⁊ subduplũ qui sit h Rurium sumo sesquitertium numeri h qui sit m et sesqualterum qui sit n ⁊ eius subduplum qui sit q. quia a ad d est diatessaron et a ad e diapẽte: g̃ per decimãtertiam tertij d ad e tonus est et eadẽ quoq̃ ratione m ad n tonus. Et si d octauã partem haberet ea eidẽ adiecta facerẽ c sesquioctauũ ad d: et c d cõtinentia tonũ. modo autẽ qꝰ d cõperitur octaua parte carere: augeo a b d e h m n q p octo: surgãtq̃ tertio loco a b d e h m n q: q̃ nũeri per eandẽ septimã adinuicẽ eandẽ seruabũt ꝓportionẽ: quã ⁊ nũeri secũdo loco positi. qꝰ g̃ d tertio loco positus hz octauã: ea igit̃ adiecta ad d fiat c: eritq̃ c ad d sesq̃octau⁹ atq̃ cũ eo tonũ ꝓtinẽs. itidẽ adiecta octaua parte h ad h fiat g. et octaua pte m ad m fiat l. ⁊ octaua q.

ad q fiat p. eruntq; idẽtidem g ad h l ad m et p ad q sesquioctaui ⁊ numeri tonorum. et h comperitur habere nonam partẽ: illam augeo per octo et veniat k: eritq; h ad k per octauã secundi arithmetices sesquioctauus. Et si g octauã partem haberet facerẽ f sesquioctauũ ad g. At vero qm ea caret: augeo oẽs numeros tertio loco repertos per octo et exurgant in quarto loco a b c d e g h k l m n p q: qui per eandẽ septimã erunt in eisdem adinuicẽ habitudinibus vt et numeri tertij loci. adiecta igitur octaua eius parte ad g facio f. ⁊ octaua parte ad p facio o. dico ergo numeros quarto loco cõstitutos esse numeros pẽtadecachordi. Nã a ad d est diatessaron / et a ad b tonus: ⁊ c ad d tonus. ergo per sextã tertij b ad c semitoniũ minus. et q: a h est diapason ⁊ a e diapente: ergo pervicesimã tertij e h est diatessarõ et g h ⁊ f g monstrati sunt sesquioctaui atq; toni. ergo per sextã tertij e f est semitoniũ minus. et eodẽ pacto ostendas k l et n o esse semitonia minora: ⁊ ceteri adinuicẽ sunt cogniti toni. igitur pentadecachordi diatonici numeri sunt reperti. Est enĩ numerus proslãbanomeni ad numerũ hypates hypatõ tonus: ⁊ hypates hypaton ad parhypatẽ hypatõ semitoniũ minus. parhypates hypaton ad lichanõ hypaton: et lichani ad hypaten meson duo toni. hypates meson ad parhypaten meson semitoniũ minus. parhypates meson ad lichanõ meson: et lichani ad mesen: ⁊ meses ad paramesen disiunctarum: tres toni. parameses ad triten semitoniũ minus. trites ad paranetẽ / ⁊ paranetes ad neten: duo toni. Netes ad triten hyperboleon semitoniũ minus. trites ad parancten et paranetes ad neten duo toni. est igitur notum propositum.

9 ¶ Tres diatonice diatessarõ consonãtie species a proslambanomeno ad parhypatẽ meson cõcinunt. et quattuor diapente species a proslãbanomeno ad triten diezeugmenon. septẽ vero diapason spẽs inter proslãbanomenon ⁊ paraneten hyperboleon.

		Species diatessarõ			Species diapente				Species diapason						
Poslamba.	A	pma	scda	tertia	pma	scda	tertia	qrta	pma	scda	tertia	qrta	quita	sexta	septia
Hypate hyp.	b	To.	o	o	To.	o	o	o	To.	o	o	o	o	o	o
Parhyp. hyp.	c	Se.	Se.	o	Se.	o	o	o	Se.	Se.	o	o	o	o	o
Licha. hyp.	d	To.	ton9	ton9	To.	ton9	o	o	To.	ton9	tonus	o	o	o	o
Hypate me.	e		ton9	tonus	To.	ton9	o	o	To.	ton9	ton9	ton9	o	o	o
Parhyp. me.	f			Semi		Se.	Se.	o	Se.	Se.	Se.	Se.	Se.	o	o
Licha. me.	g					ton9	tonus	ton9	To.	ton9	ton9	ton9	ton9	ton9	o
Mese	h						tonus	ton9	To.	ton9	tonus	ton9	tonus	ton9	tonus
Para. die.	k						tonus	ton9		ton9	tonus	ton9	ton9	ton9	tonus
Trite die.	l							Se.			Se.	Se.	Se.	Se.	Se.
Para. die.	m											ton9	ton9	ton9	tonus
Nete die.	n												ton9	ton9	tonus
Trite hyper.	o													Se.	Se.
Para. hyp.	p														tonus
Nete hyp.	q														

¶ Prima species diatessaron tono / semitonio minore atq; tono constat. Secũda semitonio et duob9 tonis. Tertia duobus tonis et sequẽte semitonio. ¶ Prima species diapẽte est que constat ex tono / semitonio minore ⁊ duobus tonis. Secũda duobus tonis / semitonio / atq; tono. Tertia semitonio et tribus tonis. Quarta tribus tonis et semitonio. ¶ Prima species diapason est que constat ex tono / semitonio minore / duobus tonis / semitonio minore / atq; duobus tonis. Secunda semitonio / duobus tonis. semitonio et tribus tonis. Tertia duob9 tonis / semitonio / trib9 tonis / atq; semitonio. Quarta tono / semitonio / tribus tonis / semitonio / atq; tono. Quinta semitonio / tribus tonis / semitonio / duobus tonis. Sexta tribus tonis / semitonio / duobus tonis / semitonio. Septima duobus tonis / semitonio / duobus tonis / semitonio / atq; tono. ¶ Erit itaq; p diffinitionẽ prima diatessarõ spẽs a proslãbanomeno in lichanõ hypaton. Nã proslãbanomenos ad hypaten hypatõ tonus est: et hypate hypaton ad parhypatẽ hypaton semitoniũ minus ẽ: parhypate vero hypatõ ad lichanõ hypaton tonus. ⁊ itidẽ per diffinitionẽ secũda diatessaron species ab hypate hypaton in hypaten meson reperiet. ⁊ tertia a parhypate hypaton in parhypaten meson. ¶ Species vero diapente hoc pacto per diffinitiones sumentur. Prima a proslãbanomeno in hypaten meson. Secunda a parhypate hypaten in lichanon meson. Tertia ab hypate meson in paramesen diezeugmenon. Et quarta a parhypate meson in triten diezeugmenon. ¶ Et septẽ species diapason cõsimiliter per diffinitiones querentur. Prima a proslãbanomeno in mesen. Secũda a parhypate hypaton in paramesen diezeugmenõ. Tertia a parhypate hypaton in triten diezeugmenon. Quarta a lichano hypaton in paranetẽ diezeugmenõ. Quinta ab hypate meson in neten diezeugmenõ. Sexta a parhypate meson in triten hyperboleõ. Septima vero a lichano meson in paranetẽ hyperboleõ. ſz hec cognitu facilia sunt: ĩspecta diligẽter suptoze figura.

¶ Chromaticum principalium tetrachordum: constituere.

10

Proslambanomenos	A		A	
Hypate hypaton	b	Tonus	b	
Parhypate hypaton	c	Semi.minus	c	
Lichanos hypaton	d	Apotome		d
Hypate meson	e	Trisemitonium		e

¶ Chromata apud Lachedemonios induxit olim Timotheus milesius moliorē cātum superiore diatonico: in quo canendi modo hic tetrachordū hypaton querimus. Sit ergo b c d e tetrachordū ad hypatas in chromatico melo ꝓstituendas assignatū. prepono chordam a: que sit proslābanomenos: quā facio sesquioctauam ad b hypaten hypaton primam tetrachordi cōstituendi chordam: deinde facio a sesqualterā ad e hypaten meson: eritq; vt in omnibus a ad b tonus/ et a ad e diapente. deinde facio b ad c semitoniū minus et b ad d tonum. erit ergo c ad d apotome. ⁊ qz per decimā tertij dēpto a b tono ab a e cōsonantia diapente: relinquitur diatessaron. ergo b e modulabitur diatessaron. Sed cum per sextā tertij diatessaron ex duobus tonis et semitonio minore constet ⁊ b c et c d simul sint tonus: ergo d e continet tonum et semitoniū minus. est igitur d e trisemitoniū. Cum ergo b c hypate hypaton et parhypate hypaton sit semitoniū minus. ⁊ c d parhypate hypaton ⁊ lichanos hyparon sit semitoniū maius et d e lichanos hypaton ⁊ hypate meson trisemitoniū vt mōstratum est. constat ergo p diffinitionē tetrachordū b c d e in gne chromatico eē ꝓstitutū. idē enī trisemitoniū et trihemitoniū dicim⁹.

¶ Chromaticum tetrachordum meson: subiungere.

11

Proslambanomenos	A		A	
Hypate hypaton	b	Tonus	b	
Parhypate hypaton	c	Semi.minus	c	
Lichanos hypaton	d	Apotome	d	
Hypate meson	e	Trisemitoniū	e	
Parhypate meson	f	Semi.minus	f	
Lichanos meson	g	Apotome	g	
Mese	h	Trisemitoniū	h	

¶ Sint pro tetrachordo meson in gne chromatico ꝓstituēdo e f g h: facio a ad h duplā et concinētem diapason. ⁊ e ad f semitoniū minus ⁊ idē e ad g facio tonū. erit g f ad g apotome. sed cū a ad e mōstrata sit ꝓsonātia diapēte. ea igitur substracta ab a h cōsonātia diapason: per vicesimā secundā tertij relinquitur diatessarō. Est ergo e ad h hypate meson ad mesen diatessaron. ⁊ cum diatessaron duos tonos et semitoniū minus ipleat: ⁊ e g sit tonus ergo g h cōtinet tonum et semitoniū minus. erit ergo g h trisemitoniū. erit igitur e f g h ex duobus semitoniis e f ⁊ f g: et trisemitonio g h constitutum in genere chromatico tetrachordum. quod erat monstrādum.

¶ Reliqua duo tetrachorda: in eodem genere predictis adiicere. et in pētadecachordo consonantiam bis diapason collocare.

12

Proslambanomenos	A		A		
Hypate hypaton	b	Tonus	b		
Parhypate hypaton	c	Semi.min⁹	c		
Lichanos hypaton	d	Apotome		d	
Hypate meson	e	Trisemitoniū		e	
Parhypate meson	f	Semi.minus		f	
Lichanos meson	g	Apotome			g
Mese	h	Trisemitoniū			h
Paramese diezeugmenon	k	Tonus	Trite syn. Semi.minus		k
Trite diezeugmenon	l	Semi.mi.	Paranete syn. Apotome		l
Paranete diezeugmenon	m	Apotome	Nete syn. Trisemitoniū		m
Nete diezeugmenon	n	Trisemitoniū			n
Trite hyperboleon	o	Semi.minus			o
Paranete hyperboleon	p	Apotome			p
Nete hyperboleon	q	Trisemitoniū			q

¶ Sint pro reliquis tetrachordis complendis k l m n o p q: qz tetrachordum meson disiunctum est a tetrachordo netarum diezeugmenon: iccirco facio meses ad paramesen diezeugmenon distantiã esse tonum. et mesen ad neten diezeugmenon facio consonare diapente. ⁊ ad netẽ hyperboleon diapason et tetrachordũ k l m n partior vt tetrachordũ hypaton. tetrachordũm vero n o p q partior vt in precedenti tetrachordũ meson eritq; vtrũq; in genere chromatico diuisum. et qz a ad h cognita est esse diapason: et h ad q itidem diapason. ergo a ad q consonat bis diapason. Q; cum quindecim vocibus atq; chordis contẽtum sit: constat effectũ esse id quod erat propositũ. Sed si k l m facis tetrachordũ synezeugmenon ipsum partiaris vt tetrachordũ chromaticum meson. et facile factũ intuebere ꝓpositũ.

13 ¶ Chromatici pentadecachordi numeros assignare.

Proslambanomenos	A		2592	5971968	
Hypate hypaton	b	256	2304	5308416	Tonus
Parhypate hypaton	c	243	2187	5038848	Semi. minus
Lichanos hypaton	d		2048	4718592	Semi. maius
Hypate meson	e		1728	3981312	Trisemitoniũ
Parhypate meson	f			3779136	Semi. minus
Lichanos meson	g			3538944	Semi. maius
Mese	h		1296	2985984	Trisemitoniũ
Paramese diezeugmenõ	k		1152	2654208	Tonus
Trite diezeugmenon	l			2519424	Semi. minus
Paranete diezeugmenõ	m			2359296	Semi. maius
Nete diezeugmenon	n		964	2221056	Trisemitoniũ
Trite hyperboleon	o			2108268	Semi. minus
Paranete hyperboleon	p			1974272	Semi. maius
Nete hyperboleon	q		648	1492992	Trisemitoniũ

¶ Sint b et c minimi numeri semitonij minoris per decimãoctauam secũdi huius reperti. qz b nona parte caret: augeo b et c per nouem et veniãt b et c in secundo loco. quoniã igitur in secundo loco b nonam partẽ habet: eam augeo per octo et fiat d. tunc b ad d per septimã secundi arithmetices erit sesq; octauus. quare b d cõtinentia tonum. et b ⁊ c per eãdem est semitonium minus. ergo c d est apotome. Rursum qz b habet octauã adiicio eidem suam octauã ⁊ fiat a: eritq; a ad b sesquioctauus atq; tonus et quoniã a habet tertiam facio a ad e sesqualterũ. ⁊ qz habet secũdam facio itidem a duplum ad h. Reperio item h habere nonam tertiã et secũdam. facio igitur h sesquioctauũ ad k: sesqualterũ ad n ⁊ duplũ ad q. quo facto duco b secundi loci in a b c d e h k n q et veniant in tertio loco a b c d e h k n q. Deinde duco c d secundi loci in e secundi et veniant f g ⁊ in k et veniant l m et in n ⁊ veniant o p in tertio loco. eruntq; per septimã et octauam secundi arithmetices numeri pẽtadecachordi chromatici in tertio loco assignati. Nam a b erit tonus et b c semitoniũ minus ⁊ c d apotome. et qz a ad e est sesqualter: a et e sunt numeri diapente. ⁊ a b numeri toni. dempto igitur a b tono relinquitur b e diatessaron et b c ⁊ c d simul sunt tonus. igitur per sextam tertij d e sunt trisemitoniũ. Et a h est diapason ⁊ a e diapente. igitur e h est diatessaron. et per octauam secundi arithmetices e f ⁊ f g sunt semitoniũ minus ⁊ apotome. igitur g h est trisemitonium et cõsimiliter monstrabis h k esse tonũ k l ⁊ l m duo semitonia et m n trisemitoniũ n o p duo semitonia ⁊ p q trisemitoniũ. clarum igitur euadit propositum.

14 ¶ Modorum diatonici et chromatis parhypate parhypatis: paramese paramesis/ atq; trite tritis correspondent.

¶ Nam in vtrisq; generibus hypate ad parhypatas semitonij minoris obseruãt interuallũ. et mese ad paramesas tonum. ⁊ trite ad tritas minus semitoniũ. est igitur notum illas voculas in vtroq; canendi modo sibiinuicẽ respõdere. ⁊ nõ modo id verum sit: sed et hypate hypatis ⁊ mese mesis et nete netis correspõdent. Nam vtrobiq; proslãbamenoni ad hypatas hypaton cõcinunt tonum. et ad hypatas meson diapente. ad mesas diapason. ad netas distũctarum diapason ac diapente. ⁊ ad netas hyperboleon bis diapason. est ergo quod ꝓponebatur et amplius: facile cognitũ.

¶ Pentadecachordum enarnonium constituere. 15

Proslambanomenos	A	A													
Hypate hypaton	b	Tonus	b												
Parhypate hypaton	c	diesis		c											
Lichanos hypaton	d	diesis			d										
Hypate meson	e	ditonus				e									
Parhypate meson	f	diesis					f								
Lichanos meson	g	diesis						g							
Mese	h	ditonus							h						
Paramese diezeugmenon	k	tonus	Trite syn. diesis							k					
Trite diezeugmenon	l	diesis	Paranete syn. diesis								l				
Paranete diezeugmenon	m	diesis	Mete syn. ditonus									m			
Mete diezeugmenon	n	ditonus											n		
Trite hyperboleon	o	diesis												o	
Paranete hyperboleon	p	diesis													p
Mete hyperboleon	q	ditonus													q

¶ Huius cōpositio perfacilis est. facio enī vt in ceteris precedētibus a ad b interuallū toni. et a ad e diapēte. ⁊ b ad d facio semitoniū minus. et diuido chordā c in medio differētie b ad d erit ergo b ad c diesis tetrartemeria atq; quadripartialis pariter et c ad d diesis. sed per quartam secundi huius hec latior illa vero contractior neq; per tricesimā secundam eiusdem semitoniū minus in duo equa certo/ cōstitutoq; numero diuidi potest. et a ad e diapente. substracto igitur a b tono relinquitur b ad e esse diatessaron. et cum diatessaron semitoniū minus ⁊ duos tonos cōplectatur: et b ad d sit semitonium minus: relinquit igitur d ad e esse ditonus. erit igitur b c d e hypates hypaton parhypates hypaton lichanicq; hypatō et hypates meson tetrachordū: per b c: c d: et d c diesim ⁊ diesim et ditonū procedēs p diffinitionē in enarmonico gñe diuisum. Similiter cōstituas e f g h tetrachordū meson faciēdo a ad h diapason. et e ad g semitoniū minus. ⁊ partiēdo mediā drīam per f itaut e f et f g sint due dieses Mā ab a h cōsonantia diapason subducta a e cōsonantia diapēte: relinquit e h esse diatessarō. et cū e g sit semitoniū min⁹: igit g h erit ditonus. ⁊ cū e f et f g sint due dieses ⁊ g h diton⁹. & hec tetrachordi partitio in genere enarmonico facta cōspicitur. Et facta h mese ad netē disiunctarum diapente: ⁊ ad neten hyperboleon diapason: et chorda mese a paramese tetrachordi disiunctarū tono discluia: perinde ac proslābanomeno ab hypate hypaton: partieris tetrachordum disiunctarū k l m n vt b c d e tetrachordū hypaton. et tetrachordum n o p q hyperboleon excellentiūq; vt e f g h tetrachordū meson. tetrachordū autem cōiunctarum h k l m partieris vt tetrachordū meson et id quoq; facile est.

¶ Pentadecachordi enarmonica: numeros colligere. 16

Proslambanomenos	A	13824		13824		
Hypate hypaton	b	12288	Tonus	12288	Tonus	
Parhypate hypaton	c	11664	Semi mi.	11976	diesis	
Lichanos hypaton	d	10368	Tonus	11664	diesis	
Hypate meson	e	9216	Tonus	9216	ditonus	
Parhypate meson	f	8748	Semi mi.	8982	diesis	
Lichanos meson	g	7776	Tonus	8748	diesis	
Mese	h	6912	Tonus	6912	ditonus	
Paramese diezeugmenon	k	6144	Tonus	6144	Tonus	
Trite diezeugmenon	l	5832	Semi mi.	5988	diesis	
Paranete diezeugmenon	m	5184	Tonus	5832	diesis	
Mete dizeugmenon	n	4608	Tonus	4608	ditonus	
Trite hyperboleon	o	4374	Semi mi.	4491	diesis	
Paranete hyperboleon	p	3888	Tonus	4374	diesis	
Mete hyperboleon	q	3456	Tonus	3456	ditonus	

¶ Sint numeri a b c d e f g h k l m n o p q in primo loco constituti numeri pētadecachordi diatonici per octauam huius reperti. pono iterum a b e h k n q in secūdo loco⁊ in respōdentibus locis rursum c in secundo loco transmuto ad d et f ad g ⁊ l ad m et o ad p. quibus ita in secundo loco dispositis: ex ipsis quidem in secundo loco capio differentiam b d ⁊ eius medietatem adicio ad d et fiat c. similiter differentiā e g et medietatem addo ad g ⁊ fiat f. et differētiam k m ⁊ medietate differentie adiecta ad m fiat l. et differentiam n p ⁊ medietate adiecta ad p fiat o. dico a b c d e f g h k l m n o p q numeros secundo loco positos esse numeros pentadecachordi enarmonici. Nam a b erit tonus. b c | et c d due dieses cōstituentes semitoniū minus b d. quod enī est b c in diatonico factum est b d in enarmonico et d e est ditonus. Nam quod est in diatonico c e est hic in enarmonico d e. at diatonice modulationis c e ditonus est. Nam cōtinens c d tonū et d e tonum. ⁊ hoc pacto reperiētur e f g due dieses ⁊ g h diton⁹. h k tonus: k l m due dieses: m n ditonus. n o p due dieses: p q ditonus Sunt itaq; collecti numeri pentadecachordi enarmonici quēadmodum propositum fuerat. quod est propositum.

17 ¶ Modi diatonici parhypate hypaton: in enarmonica modulatione transit in lichanon: et parhypate meson in lichanon meson atq; trite in paranetas.

¶ Id prospici statim promptū est. Nam in diatonico pētadecachordo a proslābanomeno ad hypatē hypaton incidit tonus. et ab hypate ad parhypaten hypaton semitoniū minus. in enarmonico vero a proslābanomeno ad hypaten hypaton similiter incidit tonus. et ab hypate ad lichanon hypaton semitoniū minus. diatonica igitur parhypate: in enarmonica modulatione permutatur: transitq; in lichanon. et hoc pacto de reliquis ostēdatur. quod ⁊ facile sensu deprehēdetur: si in vtroq; emodulādi genere ⁊ diatonico et enarmonico proslābanomeni ponantur equisoni. tunc enī manifestū erit huius lichanos: illius parhypatis esse equisonos: vnisonosq; : pariter et huius paranetas : illius tritis esse equisonas.

18 ¶ Consentiunt in tribus modulationū generibus: proslambanomeni/hypate principales/hypate medie/mese/paramese/nete/cum disiuncte/tum coniuncte/atq; excellē tibus netis excellentes.

¶ Nam in tribus generibus per quartā/quintam/sextam/septimā/decimam/vndecimā/duodecimā et quintādecimam huius proslābanomeni ad hypatas hypaton sonant tonum. et idem ad hypatas meson sonant diapente. ad mesas diapason. ad netas disiūctas sonant diapason ac diapēte. ad netas autem cōiunctas dempto tono sonarent diapason ac diatessaron. et ad netas excellētes: cōsonant vbi libet ꝓslambanomeni bis diapason. cōsentiunt igitur in tribus generibus que adducte sunt vocule. quod est propositum

19 ¶ Que chorde mobiles queue imobiles in pētadecachordis existant: inuestigare.

Proslambanomeni	A | Stabiles	
Hypate hypaton	b | Stabiles	
Parhypate hypaton	c | Instabiles	
Lichani hypaton	d | Instabiles	
Hypate meson	e | Stabiles	
Parhypate meson	f | Instabiles	
Lichani meson	g | Instabiles	
Mese	h | Stabiles	
Paramese diezeugmenon	k | Stabiles	Trite synezeugmenon. Instabiles
Trite diezeugmenon	l | Instabiles	Paranete synezeugmenon. Instabiles
Paranete diezeugmenon	m | Instabiles	Nete synezeugmenō. Stabiles
Nete diezeugmenon	n | Stabiles	
Trite hyperboleon	o | Instabiles	
Paranete hyperboleon	p | Instabiles	
Nete hyperboleon	q | Stabiles	

¶ Chordas stabiles īmobilesq; vocamus: que in omni pentadecachordorū diuisione: eadem seruant interualla: eandēq; ad proslābanomenon habitudinem. Instabiles vero atq; mobiles : que id nō seruant. sic ergo stabiles ac instabiles reperiemus. cum enim per precedentem in tribus generibus consentiant proslābanomeni: principales hypate: medie hypate: mese: paramese: nete tum synezeugmene tum diezeugmene ac hyperboles : et eadem vt ex demonstratis iam patet seruent interualla. erunt ergo proslambanomenos hypate hypaton : hypate meson : mese : paramese nete synezeugmenon : nete diezeugmenon : et nete hyperboleon : simpliciter immobiles atq; firme. Sed cum decima septima huius monstrauerit parhypatas diatonice modulationis : in enarmonico melo transire

permutariq; in lichanas|ꝛ tritas in paranetas:constat ergo reliquas a predictis esse mobiles:vt par hypaten hypaton|lichanon hypaton|parhypaten meson|lichanon meson| triten synezeugmenon| paranetē synezeugmenon| triten diezeugmenō|paranetē diezeugmenon|triten hyperboleon|paranetē hyperboleō. Id tamen animaduerti dignū est q̃ cum per decimāquartam huius parhypate|ꝛ trite in diatonicis et chromaticis respōdeant|similiaq; possideāt interualla: eas nō vsq; adeo(vt cetere sunt) esse instabiles. Et proinde partī mobiles|partimq; īmobiles bono iure dici posse videntur.

¶ In tetrachordis diatonicis ab hypate hypaton primo limite consonantiarum: ad quartum vsq; limitem ter diatessaron cōtinetur sed semel dumtaxat in stabilibus/immobilibusq;. Et ad quintū limitem idētidem ter diapente: semel in mobilibus/semel partim variabilis/et semel penitus inuariabilis atq; firma. ad octauum vero septies consonabit diapason: ter in īmobilibus/et quater in mobilibus. 20

Hypate hyp|et consequentes suis locis.

	Semi	Ton⁹	Ton⁹	Semi	Ton⁹	Ton⁹	Ton⁹	Semi	Ton⁹	Ton⁹	Semi	Ton⁹	Ton⁹
Stabiles b			e			h	i			m			p
Instabiles	c	d		f	g			k	l		n	o	

¶ Cum dicitur a primo limite ad quartū vsq; limitē quintū|ac octauum: primus limes nō excludit sed quartū quintū/ac octauū excludi ītelligimus. Sint ergo b c d e f vsq; ad p quattuor tetrachorda et b hypate hypaton/ceterevero cōsequētes. Dico primo ab b vsq; e ter cōtineri diatessaron:sed semel solū in īmobilibus. Nam per quartā huius b ad c continet semitoniū minus et c ad d tonum et d ad e tonū. ergo b ad e cōsonat diatessaron:eritq; b ad e prima diatessaron cōsonantia reperta. Et cum ostē sum sit c ad d et d ad e esse duos tonos et per quintā huius e ad f sit semitoniū minus: ergo c ad f consonat diatessaron. eritq; c ad f secūda diatessaron. Item mōstratus est d ad e esse tonus et e ad f semitoniū minus: et per quintā huius f ad g est tonus. ergo d ad g est diatessaron/eritq; d ad g tertia diatessaron. Sed cū prima harū trium que est b ad e sit ab hypate hypaton ad hypaten meson: quas mōstrauit precedēs stabiles īmobilesq;:et secunda ab c in f prahypate hypaton in parhypaten meson:et tertia ab d in g lichano hypaton in lichanon meson. et parhipate ꝛ lichane monstrate sunt mobiles. constat ergo ab b ad e ter diatessaron sed semel dūtaxat in stabilibus/īmobilibusq; cōtineri. ¶ Secō dico ab b hypate hypaton ad f vsq; parhypaten meson:solū ter contineri diapente. Nam per decimā tertij diapente tribus tonis semitonioq; minore constat. sed per quartā ꝛ quintā huius b ad f solum duos tonos ꝛ duo semitonia minora ꝓtinet:q̃ duo semitonia minora p 34. secī minus vno tono:cōmate restituūt. q̃ vt b ad f diapente cōsonantiā ꝓpleat:plena deest apotome. nō ꝓstituit ergo b ad f diapēte. Itē c ad g per quartā et quintā huius cōtinet tres tonos qui sunt c ad d:d ad e:ꝛ f ad g:et vnum semitoniū minus quod est e ad f. igitur per decimā tertij e ad f ꝓsonat diapēte. eritq; c ad g prima diapēte et per easdem d ad h continet tres tonos:qui sunt d ad e:f ad g:et g ad h:ꝛ semitonium minus e ad f. ergo d ad h cōsonat diapente:eritq; d ad h secūda diapente. ꝛ ab e ad i per quartā et sextā cōsimiliter continētur tres toni et semitoniū minus. erit ergo e ad i tertia diapēte. ter igitur ab b vsq; ad f continetur diapēte. sed cū prima sit ab c parhypate hypatō in g lichanō meson. et parhypatas ꝛ lichanas mōstrauerit decimanona huius esse mobiles. erit ergo c ad g prima diapēte in mobilibus constituta. ꝛ cum secunda sit ab d lichano principaliū in h mesen:lichanos autē mobilis sit/et mese īmobilis: secunda igitur diapēte partim variabilis existit. Et cū tertia sit ab e hypate meson ad i paramesen que per eandē decimānonam stabiles mōstrate sunt. erit igitur tertia diapēte omnino stabilis atq; firma ¶ Tertio dico ab b hypate hypatonvsq; ad i paramesen septies cōtineri diapason:sed solū ter in īmobilibus|quater autē in mobilibus. Nam b ad i per quatrā/quintā et sextam huius cōtinet quinq; tonos et duo semitonia minora. ergo per vicesimāprimā tertij b ad i cōsonat diapason|eritq; b ad i ꝑma diapason. Et per idē c ad k:d ad l ꝛ e ad m:singule intercipiūt quinq; tonos et duo semitonia minora erit ergo c ad k secūda diapason. et d ad l tertia. ꝛ e ad m quarta. sed per quartam|quintā|sextam atq; septimā simul f ad n similiter continebit quinq; tonos ꝛ duo semitonia minora. similiter et g ad o ꝛ h ad p. erit ergo quīta diapason f ad n. sexta g ad o. et septima h ad p. igitur ab b ad i vsq;:cōtinetur septies diapason. atqui primam prebent hypate hypaton ꝛ paramese diezeugmenō. et quartam hypate meson ꝛ nete diezeugmenō. et septimā mese ꝛ nete hyperboleō. hypatas autem mesas paramesas et netas mōstrauit decimaoctaua īmobiles atq; stabiles. igitur inter illas septē diapason cōsonantias: diapason ter in īmobilibus reperit. Sed secūdam prebent parhypate hypaton et trite diezeugmenō Tertiā lichanos hypaton et paranete diezeugmenō. Quintam parhypate meson ꝛ trite hyperboleō Sextā licanos meson et paranete hyperboleon sed decimanona parhypatas|tritas| lichanas ꝛ paranetas:mōstrauit esse mobiles. igitur inter illas septem cōsonantie diapasonvices:quater in mobilib⁹ mutabilibūsq; facta reperitur:quod est totum propositum. ¶ Q/ autem diuus Seuerinus sapientū latinorū disciplinas sectantiū primus :quē ꝛ in hoc opere quātum valem⁹ imitamur suis disciplinis nō parum adiuti decimotertio capite quarti sue musices species diapēte numerādo eas quattuor faciat:id introductorie factum putetur:vbi precisam nō curauit veritatē. sed cōmunem secutus illic est extimationē. quod facile ex eius superiori determinatione cognoscitur. hic autem nō introductionis sed exacte determinationis locus est.

21 ¶ Tessaradecachordi chromatici inter assignatos limites ter itidē diatessaron: solū semel immobiliter. bis diapēte: semel immobiliter/ semelq; partim mobiliter. septies aūt diapason: ter vt in diatonico gñe immobiliter/ quaterq; mobiliter cōtinet.

Semi.	Apo.	Trise.	Semi.	Apo.	Trise	Tonus	Semi.	Apo.	Trisc.	Semi.	Apo.	Trise.
b		e			h	i			m			p
	c	d	f	g			k	l		n	o	

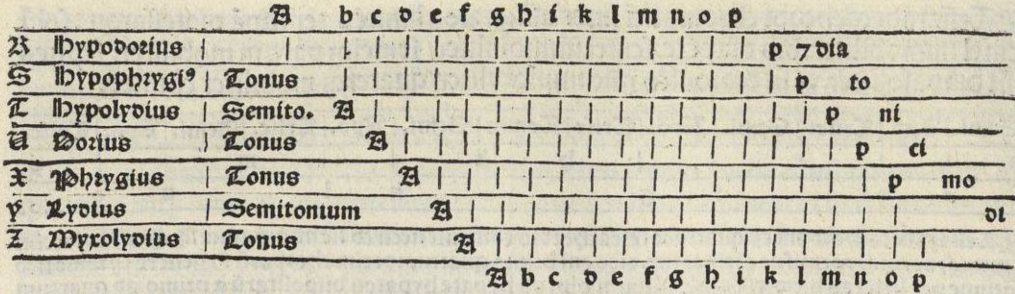
¶ Tessaradecachordum ex quattuor tetrachordis cōstituit: iccirco sic nūcupatum: q; quattuordecim chordis/ neruis/ voculisue cōtineatur. dico enī primo quattuordecim chordarū in genere chromatico cōtinue per litteras b|c|d|e|f|g|h|i|k|l|m|n|o|p| ab hypate hypaton dispositarū a primo ad quartum vsq; limitem: ter cōtineri diatessaron solū semel immobiliter. Nā per decimam b ad e cōcinit diatessaron. eritq; b ad e pma diatessaron. sed ⁊ quia per decimam c ad d est apotome et d ad e trisemitonū: ergo c ad e cōtinet duos tonos. et per vndecimā e ad f est semitoniū. ergo per sextam tertij c ad f duos tonos et semitoniū cōtinens: erit diatessaron. erit igitur c ad f secūda diatessaron. et quia rursus per vndecimam e ad f est semitonium minus et f ad g apotome: ergo e ad g tonus. sed d ad e monstratum est trisemitoniū. ergo d ad g ꝓtinet duos tonos ⁊ semitoniū: estq; d ad g tertia diatessaron. Et cū pma b ad e sit ab hypate hypaton in hypaten meson per decimāoctauā fit īmobilis. secūda ꝛo c f/ et tertia d g: sunt a parhypate ⁊ lichano principalium: q̄ decimanona patefecit esse mobiles. cōstat ergo pmū. ¶ Scdo dico solū bis intra quintū limitem cōtineri diapente. quia enī b ad e per īmediate mōstratū est diatessaron. et e ad f/ et f ad g simul tonus. ergo p decimātertiā tertij b ad g cōcinit diapente. eritq; b ad g prima diapente. ea tñ sex vocibus ⁊ non quinq; explebit: proprietatem diapente nō seruans. at c ad g non explebit diapente. Nā per modo mōstratū ad diapēte cōplementū deerit b ad c semitoniū minus. neq; c ad h. Nā per vndecimam huius g ad h cōtinet trisemitoniū. at c g ad diapente cōplemētum solū deerat semitonium minus: superat igitur c h consonātiaz diapente completo tono. neq; d h cōtinet diapente. Nam cū c h superet consonātiam diapente integro/ cōpletoq; tono: dempta ergo c d apotome relinquet d h superās diapente cōsonātiam semitonio minore. sed e ad i cōsonat diapēte: est enī h ad i per duodecimam tonus. sed d ad h per īmediate mōstratum superat consonātiam diapente semitonio minore. dēpto ergo d e trisemitonio minore: relinqtur e h deficiens tono a diapēte: addito igitur h i tono fiet diapente. est itaq; e ad i secūda diapēte. Ab b igitur ad f quintū limitem solum bis sumitur diapēte. Et cū prima diapente b g sit ab hypate hypaton īmobili ad lichanon meson partim mobilem: fit ergo primo partim mobiliter. At ꝛo cū secūda e i sit ab hypate meson ad paramesen que mōstrate sunt immobiles: fit ergo secūdo modo immobiliter seruatq; secūdo modo diapēte proꝓetas vt de quinto loco in quintum fiat locum. ¶ Tertio dico septies fieri diapason ter īmobiliter/ quater ꝛo mobiliter. Nam cū b ad e per primam partem huius monstrata sit diatessaron: et per scdam e ad i diapente. ergo per vicesimā tertij b ad i cōsonat diapason. erit itaq; b ad i prima diapason. Preterea quia c ad f fuit inuēta secunda diatessaron: et f g est apotome g h trisemitoniū: ergo f h duo sunt toni et h i tonus et i k semitoniū. ergo f k diapēte: et c f vt iā dictū est diatessaron. cōcinit igitur c ad l: diapason: eritq; c l: secunda diapason. et eodē iure d l tertia diapason adiuuāte duodecima huius. et e m quarta. f n quinta. g o sexta. et h p septima. Sed ter fieri immobiliter et quater mobiliter eodē modo vt in vicesima monstratur.

22 ¶ In tetradecachordo enarmonico: inter assignatos limites ter diatessaron ⁊ septies diapason vt in precedētibus continetur. at semel dūtaxat diapente atq; immobiliter.

Die.	Die.	Dito.	Die.	Die.	Dito.	Tonus	Die.	Die.	Dito.	Die.	Die.	Dito.
b		e			h	i			m			p
	c	d	f	g			k	l		n	o	

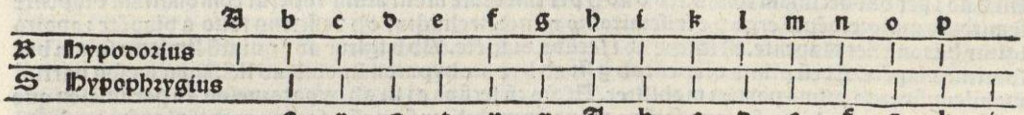
¶ Tetradecachordum ⁊ tessaradecachordum idē dicimus. sit igit b|c|d|e|f|g|h|i|k|l|m|n|o|p| tessaradecachordū enarmonicū. dico pmo inter b e ter cōtineri diatessaron. Nā quia per decimāquītam huius b c d sūt due dieses tetrartemerie: erit b d semitoniū minus. et d e est ditonus. erit igit b e pma diatessaron. et eodem iure c f secūda. et d g tertia. et quia b e sunt hypate hypaton ⁊ hypate meson: fit igitur prima immobiliter. et c d sunt parhypate hypaton ⁊ lichanos hypaton mobiles: fit igit et duobus modis mobiliter. ¶ Scdo dico solū semel a primo ad quintum limitem fieri diapente: et id quidē immobiliter. nam non fiet diapente b f quia solā supaddit consonātie diatessaron b e diesim tetrartemeriam. neq; b g quia solū supaddit consonantie diatessaron duas dieses que sunt semitoniū minus. neq; fiet b h quia cōsonātie diatessaron supaddit semitonium minus ⁊ duos tonos. neq; per idem fiet diapente c g aut c h. nam hic abundabit tonus ⁊ diesis: illic aūt deerit tonus min⁹ vna diesi. neq; d g. nam deerit tonus. neq; d h. nam tonus abundabit. at ꝛo cū e h sit diatessaron: nā e f g due dieses/ ⁊ g h ditonus/ et cū h i sit tonus: erit igitur e i diapēte. et cū e sit hypate meson et i paramese q̄ monstrate sunt immobiles. fit igitur inter assignatos limites solū semel diapēte atq; immobilis. Tertio septies fieri diapason vt in diatonicis ex decima quinta declarat quēadmodum vicesima huius mōstrata est.

23 ¶ Diatonice modulationis: septem modos ordine collocare.



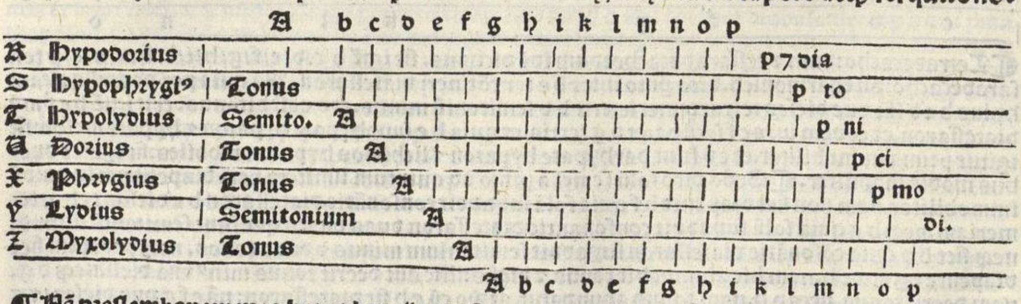
Sit a b c d vſqꝫ ad p pentadecachordum diatonicum. ſit r ꝓ hypodorio pentadecachordum diatonicum a b c d e f g h i k l m n o p grauiſſimũ: qđ vt alioꝝ baſis atqꝫ fundamẽtum ſtatuaꝛ: extendo vno tono in acumen proſlambanomenon pentadecachordi s ampliusꝙ ſit proſlambanomenos r ad quem ceteras voces ſuo ordine per quartã/ quintã ⁊ ſextam huius in diatonico modulãdi genere ſubiũgo. eritqꝫ pentadecachordum s per diffinitionem hypophrygij modi. ſimiliꝛ extẽdo proſlambanomenon pentadecachordi t ſemitonio ãplius ꝙ tenſus ſit proſlãbanomenos pẽtadecachordi s cui tetrachorda per quartã/ quintã/ ⁊ ſextam huius vt prius coapto. eritqꝫ per diffinitiõem t pentadecachordũ hypolydij modi. et proſlãbanomenon v vno tono extẽdo amplius ꝙ hypolydij: cui ceteras voces ſuo ordine ſequẽtes in diatonico genere coapto. eritqꝫ cõcentus pẽtadecachordi v per diffinitionem dorius. et ſi amplius extẽdo x vno tono: erit pentadecachordi x cantus phrygius. et ſi y ſemitonio mĩore: erit eius concẽtus lydius. At z amplius extenſo vno tono: fiet concentus myxolydius. ſicqꝫ factũ ꝑ diffinitiões patebit propoſitum.

Que diuerſorũ modorum in aliquo genere fuerit p̄me vocis ad primã habitudo: ea erit ſecunde ad ſecundam et tertie ad tertiam et cuiuſlibet totius ad totam ſimilis/ eademqꝫ habitudo. 24



Sit a/ b/ c/ d ad p vſqꝫ pentadecachordum hypodoriũ in aliquo gñe vt diatonico: et q/ r/ s ⁊ ſequẽtes pentadecachordũ hypophrygiũ. diſtabitqꝫ iccirco q proſlambanomenos hypophrygij ab a proſlãbanomeno hypodorij modi acutior vno tono. dico ergo ſingulas hypophrygij: ſingulis hypodorij vt hypatas hypatis/ parhypatas parhypatis/ lichanas lichanis et ita conſequẽtes: ſil̄iter tono/ toniqꝫ proportione diſtare. Nam cũ pentadecachordum a p et pentadecachordum q g ſint vtraqꝫ a proſlãbanomeno in neten hyperboleon diatonice extẽſa: ergo que ꝓportio a ad b ea eſt per quartã huius q ad r: ergo per tertiam ſecundi Arithmetices permutatim vt a ad q ita b ad r. at a ad q mõſtratus eſt eſſe tonus: igitur et b ad r tonus. et cõſimiliter de ſequentibus oſtendatur.

Totus ordo diatonicus pẽtadecachordi hypophrygij modi: totum hypodorium vnius acumine toni ſuperat: et totus hypolydius eũdem triſemitonio. ſingule quoqꝫ dorij ſingulas hypodorij diateſſaron conſonantia. totus vero phrygius conſonantia diapente. lydius aũt diapẽte atqꝫ ſemitonio. et myxolydius diapẽte atqꝫ ſeſquitono. 25



Nã proſlambanomenos hypophrygij tono ſuperat acumine proſlambanomenon hypodorij. ergo per precedẽtem totus hypophrygius ordo totũ hypodorium ordinem: toni ſuperat acumine. et quia proſlambanomenos hypolydij ſuperat acumine ſemitonij minoris hypophrygiũ: ergo idem ſuperat acumine proſlambanomenon hypodoriũ triſemitonio. igitur per precedẽtem totus hypolydius ordo totũ hypodoriũ ordinẽ triſemitonio ſuꝑeuadit acutior. ſed ⁊ qꝛ dorius toni acutie vincit hypolydiũ: ergo dorius duobus tonis ⁊ ſemitonio acutior eſt hypodorio. ergo per ſextã tertij eo acutior eſt cõſe-

nantia diatessaron. quare per precedentem singule dorij singulis hypodorij diatessaron consonantia sonant acutiores. et phrygius addit tonum in acumine dorio: igitur totus phrygius toto hypodorio diapente cõsonãtia modulatur acutior. et lydius phrygio addit semitoniũ min⁹ et myxolydius lydio tonum. igitur lydius hypodorio diapente ⁊ semitonio ⁊ myxolydius diapente et sesquitono sonabit acutior. quod totum est propositum.

26 ¶ Hypolydius diatonicus hypophrygium diatonicum semitonio/ ⁊ dorius trisemitonio/ phrygius diatessaron/ lydius diatessaron ⁊ semitonio/ myxolydius diatessaron consonãtia/ atq; sesquitono supercuadit acutior: ⁊ dorius hypolydio tono/ phrygius ditono/ lydius diatessaron ⁊ myxolydius diapente: phrygius autez ad dorium sonat tonum lydius trisemitonium ⁊ myxolydius diatessaron/ lydius phrygio semitonium et myxolydius sesquitonum: myxolydius autem lydio tonum.

¶ Hec vt precedens vel q̃ facillime monstrabitur.

27 ¶ Septem modos chromatice modulationis constituere.

			A b c d e f g h i k l m n o p
R	Hypodorius		p 7
S	Hypophrygi⁹	Tonus	p Chro
T	Hypolydius	Semito. A	p ma
U	Dorius	Apotome A	p tici
X	Phrygius	Trisemitoniũ A	p mo
Y	Lydius	Semitonium A	di
Z	Myxolydius	Apotome A	
			A b c d e f g h i k l m n o p

¶ Facio r pentadecachordum chromaticũ per decimam/ vndecimam/ ⁊ duodecimam huius ⁊ similiter sex alia sez s/ t/ v/ x/ y/ z: faciocq; pentadecachordum s tono acutius r. ⁊ t pẽtadecachordum semitonio sex alia sez s/ t/ v/ x/ y/ z: faciocq; pentadecachordum s tono acutius r. ⁊ t pẽtadecachordum semitonio acutius s. v vero apotomes interuallo acutius t. et x trisemitonio amplius q̃ v. y semitonio amplius q̃ x. et z apotome trãscẽdere y: dico ergo septem modos chromatice modulatiõis esse ordinatos. nam r erit hypodorius s p diffinitiõem hypophrygius chromaticus. t hypolydius. v dorius. x phrygius. y lydius. z myxolydius.

28 ¶ Quo pacto singuli cuilibet inter se chromatici modi respõdeant: ostendere.

¶ Distat p precedẽtẽ hypophrygius ab hypodorio chromatico tono. et hypolydius ab hypophrygio semitonio. distat igiẽ hypolydius ab hypodorio acutior trisemitonio. et dorius ab hypolydio distat apotome. igitur dorius ab hypodorio remotus est ditono. phrygius aũt ab dorio trisemitonio. igitur phrygius ab hypodorio remouet tribus tonis ⁊ semitonio: hoc est totius consonãtie diapente inẽual lo. et lydius a phrygio semitonio. igitur lydius ab hypodorio diapẽte atq; semitonio. myxolydius ab lydio distat apotome. igitur myxolydius ab hypodorio diapente consonãtia distat acutior/ atq; tono. Et hoc pacto de reliq̃s ex precedẽte pfacilis ẽ ostẽsio. vt hypolydi⁹ ab hypophrygio distat semitonio. dorius tono. phrygius diatessaron. lydius diatessaron et semitonio myxolydi⁹ diapẽte. dorius a phrygio distat apotome. phrygius ditono. lydius diatessaron. myxolydius tritono. Phrygius a dorio tri semitonio. lydius tono et duobus semitonijs minoribus. myxolydius xo diatessaron. Lydius a phrygio semitonio et myxolydius tono. distat autẽ myxolydius vt iã quoq; dictũ est a lydio maiore semitonio. sicq; constructum est propositum.

29 ¶ Septem itidem enarmonicos modos ordinare.

			A b c d e f g h i k l m n o p
R	Hypodorius		p 7
S	Hypophrygi⁹	Tonus	p Enar
T	Hypolydius	Diesis A	p mo
U	Dorius	Diesis A	p ni
X	Phrygius	Ditonus A	p ci
Y	Lydius	Diesis A	mo
Z	Myxolydius	Diesis A	di.
			A b c d e f g h i k l m n o p

¶ Sint r/ s/ t/ v/ x/ y/ z septem pẽtadecachorda: et sit per decimãquintam huius r pentadecachordum enarmonicum: intendo proslambanomenon pentadecachordi s vno tono amplius pẽtadecachordo r. et t diesi amplius q̃ s. et v diesi amplius q̃ t. et x ditono amplius q̃ v. ⁊ y amplius diesi x. et z amplius et t diesi amplius q̃ s. et v diesi amplius q̃ t. et x ditono amplius q̃ v. ⁊ y amplius diesi x. et z amplius itidem diesi q̃ y. erũt ergo fm acumen intensa sex post primum pentadecachorda: primo tono. deinde duabus diesibus et ditono. demum duabus diesibus: qui quidẽ intendẽdi modus enarmonice modu

lationi peculiaris ꝓpriusq; habetur. sunt igitur septem pēdecachorda r/s/t/v/x/y/z: septem enarmonice modulationis modos continētia. quod demonstrari propositum erat.

¶ Singulorum enarmonicorum modorum: ad quēlibet habitudines demonstrare. 30

¶ Huius ex precedēti demōstratio clara esse potest Primo hypophrygij ab hypodorio distantiā esse tonum. hypolydij tonum ⁊ diesim. dorij sesquitonum. phrygij diapente. lydij diapente ac diesi. myxolydij diapente ⁊ semitonio. Secūdo hypolydiū distare ab hypophrygio diesi. doriū semitonio. phrygium diatessaron. lydium diatessaron et diesi. myxolydium diatessaron ⁊ semitonio. Tertio doriū ab hypolydio diesi. phrygium ditono ⁊ diesi. lydiū diatessaron. myxolydium diatessaron ⁊ diesi. Quarto phrygyum a dorio ditono. lydiū ditono et diesi. myxolydium diatessaron. Quinto lydium a phrygio diesi. et myxolydium semitonio. Sexto myxolydium distare diesi a lydio. ¶ Septem enī modos ⁊ nō plures adiecit priscorum autoritas pythagoricorū. vt enī numerus a monade ad denariū vsq; varius crescens ꝓgredīt: mox xo sequens denarius vnitatis vicem obtinet primāq; explicat vnitatem eiusdē indiuidue monadis consors/ et emulus: q̄ ad centenariū vsq; rursus nouenaria ꝓgressiōe se extendit: relapsus tādem in tertiam vnitatem. Ita quoq; vocū dissimilitudo ac varietas ex quibus instar celestis harmonie concentus humani/ modiq; formātur ad octonariū vsq; surgit. suntq; septem cōtinue voces inter se varie quibus succedens octonaria vocis plenitudo (Primus enīz numeralis cubus primaq; tessera octonarius) ad primā rursus sonat vt eadē: et ad eam sese habens perinde ac denarius ad vnitatem. Et hec octonaria series in omni modulationis genere sic rata procedit: vt cōtinue octauo quoq; loco octauū per similem sibi ⁊ pene eundem sonus offendat sonum. itavt ex duobus natiua quadam/ concordiq; affinitate iam vnū sonum ⁊ non multos parere videātur: vsq; adeo enī se miscēt/ et mutua se iungūt/ copulātq; amicitia. Et hax septem vocum q̄ grauissima tardissimaq; est: Saturno debetur. prima Jouī: tertia Martī. quarta Phebo. quinta Veneri. sexta Mercurio. septima xo eax acutissima/ cōcitatissimaq; Lūe octaua aūt rursum reuoluīt ad Saturnū/ nona ad Jouem/ decima ad Martem. et hoc pacto ꝓsequētes: vt sapiens voluit antiquitas. Et revera totius vniuersi harmonia septenario cōpleta est. et hec septem in celo celestem: in his aūt inferioribus corpoream/ sensibilēq; tēperāt harmoniam. sed hec magi plenius discutiāt. hinc licet cognoscere cur hypermyxolydius: septem pythagoricis modis haud multū veniat accōmodādus. Nā si in diatonico genere myxolydium pēdecachordū ꝓ hypermyxolydio vno tono amplius acuat: totus is vbiq; modus ad hypodoriū ꝓsonaret diapason/ octauusq; natus esset sonus: qui ad primū idem/ congeneusq; naturali affinitate redditur. quare non ab hypodorio primo modo omnifariam varius putandus est. et eque si myxolydius intenderetur trisemitonio in chromate et ditono in enarmonio: sed de his forte āplius q̄ presenti negocio par sit dictum est. Et modi quos adiecere recentiores vt diuus Gregorius ab hac modorū antiquitate recedūt. et pleraq; alia q̄ posteriores musici inculcauerunt ⁊ que ab illis facile requiras. et nra quoq; tempestate musicum modulamen/ atq; oēm concinētiam ad celeritatem quādā precipitēq; leuitatem reducere conātur: modestam grauem seriāq; ac decorem cōcentuū moderatiōem perparū attēdētes. a moderatiōe enī dicti sunt modi. parū item attēdentes priscū musices honestatis/ grauitatisq; decus: qua amentes arreptitioq; soluebāt. sanitates inducebant feros hominum mores vt olim Thracius Orpheus/ ad māsuetos ⁊ virtutis callem reuocabant. et ex sensibiliū harmonia ad celestis harmonie desiderium captiuas aīas tanq̄ sui iam memores exilij vbertim fluentibus oculis euocabant. hoc enī modox accōmoda mediocritate Pythagore discipuli faciebāt. non enī is inter hoīes modestior: cuiq; oīs incessus cursus videt. neq; is cuius preceps nimium loquela presentium ludit intelligentiam. Ita quoq; neq; ij modestiores modi: qui nimia sui festinantia q̄si in venerea chorea lasciuiētes prekfugiūt auditum. Hac enim de causa Pythagorea schola molles chromatis modos repudiauit et Spartiate solēni decreto Thimotheum Millesiū increpuerūt vehemēter diatonicos concētus potius approbātes. qui si apte moderētur virtutis pre se ferunt modestiam. vt enī nimia tarditate ceu torpore quodā fastidimur inani. ita nimia celeritas molliciem quādaz pre se fert inhonestam. medium enī neq; celeritate preceps nec ignaua tarditate pigrum: laudabile virtutisq; emulū. quā oīs etas ꝓbauit ꝓbaturaq; est: et ad quā musici modi tanq̄ moderationis animi quedā certe regule nos perducere debent: ⁊ ad diuina mentes nostras iugiter rapere. et felices ij erunt qui hoc fine et musicen et oēm mundanam philosophiam quesierint. neq; talib⁹ deesse solet celestis fauor atq; presidium. qui autez secus faciunt miseri: quales nullos ad quos nostra hec modulationū elementa peruenerint futuros desideramus: quin eis oīs harmonie vite decus: feliciter optamus/ nostriq; victuros memores.

¶ Quarti elementorum Musices Jacobi Stapulensis finis.

¶ Jacobus Faber Stapulēsis Magnifico dño: Joanni Stephano Ferrerio designato Episcopo Versellensi studiorum amantissimo.

Is diebus metallicis formulis Arithmetices pariter atq; Musices cōmissis elemētis: cogitanti michi dignissime presul quid illoꝝ facilem
h prepararet intelligētiam: occurrit si introductio quedā ex diuina illa et Pythagorica diui Seuerini Boetij nūerorū institutione in medīū afferretur: que ⁊ vt domestica/familiarisq; ante aliorū lectiōem ⁊ tāta demonstrationū pōdera directrix haberet. Ita enī ferme compatum est vt nisi mens rite preparata fuerit: nullum in disciplinis capiat emolumentum. Vt enī periti medici potiones/digerentiaq; fortibus p̄mittunt pharmacijs quo firmiorē inducant valitudinem: ita quoq; in omni disciplinarū genere operepretium est introductiones p̄mittere vt faciliorem assequamur disciplinę intelligētiam velut quādam perfectam nr̄e mētis sanitatem. Quapropter ilico ex libris diui Seuerini Epitomen sum aggressus: cuius multiplex cōmoditas futura est. Ea enim assecuta: ad numeroꝝ demonstratiōes vt quibusdam Pythagore ritibus iniciati preparatiq; accedent atq; illorum librorum prisca sapientia refertorum institutionis Arithmetices: perfacilem capessent intelligentiam. imo ex vltima comparationis diui Seuerini ⁊ Jordani formula vniuersam elegātissime ⁊ nunq; satis laudate numerorum institutionis cōmentationem consequētur facillime et ad quecunq; quę numerorum desiderant operam: viam perfacilem atq; aditum. Hanc ergo introductiunculam dignissime Presul non dubitaui nomini tuo designare: tametsi tue dignitatis habita ratione res sit exigua. Vt qui norim q̄z feruidus oia studia complecteris/q̄z in illis versaris assiduus schole ꝓpe Socratice assertor: nullum preter sapientiam bonum esse/ nullum preter studia litterarum. Non potest ergo obseruantia in te mea in re litteraria grata non fore: qui facis litteras/litteratosq; omnes obseruando: vt te debeant omnes obseruare littere. quod vtinam aliquādo pro dignitate facere possim tue virtutis iam satis longa consuetudine probate: iugis/assiduusq; cultor. Vale.

¶ Jacobi Fabri Stapulensis Epitome in duos libros Arithmeticos diui Seuerini Boecij ad Magnificum dñm: Joannem Stephanum Ferrerium Episcopum Uersellensem.

Inter disciplinas mathematicas quibus neglectis omnis obscuratur disciplina: tanq̃ ceterarũ parens/dux atq̃ domina: primum sibi vendicat rithmetice locum que vt rite cognoscat̃ quẽadmodũ et cetere certis eget adminiculis. inter que primo menti figenda est vniuersorũ circa que versatur subiecta formula/mox singulorũ diffinitiones/post quas numerorum affectiones/proprietatesq̃/post proprietates: quo et loco vniuerse sunt monstrande.

¶ Formula vniuersorum circa que negociat̃ Arithmetica.

Numerus
- Secundum se 2.
- Adaliquid 4.2.
- Scõm figurã 3.

Numerus scõm se
- Par 2.
- Impar 3.

Par
- Pariter par 4.
- Pariter impar 6.
- Impariter par 12.
- Perfectus 6.
- Diminutus 4.
- Abundans 12.

Impar
- Primus 3.
- Compositus 9.
- Ad alt̃ũ p̃ 9.25.

Numerus adaliq̃d
- Eq̃litas 10.10.
- Ineq̃litas 10.5.

Inequalitas
- maior ineq̃. 10.5.
- minor ineq̃l. 5.10.

Maior inequalitas
- Multiplex 2.1.
- Supptic'ar' 3.2.
- Supparties 5.3.

Multiplex
- Duplus 2.1.
- Triplus 3.1.
- Quadrupl' 4.1.
- Quincuplus 5.1.

Superparticularis
- Sesqualter 3.2.
- Sesquiterti' 4.3.
- Sesq̃quart' 5.4.
- Sesquiquintus 6.5.

Superpartiens
- Superbipartiens 5.3.
- Supertripartiens 7.4.
- Superquadripartiens 9.5.
- Superquintupartiens 11.6.
- Supersextupartiens 13.7

Multiplex superparticularis
- Duplus sesqualter 5.2.
- Duplus sesquitertius 7.3.
- Duplus sesquiquartus 9.4.
- Triplus sesqualter 7.2.
- Triplus sesquitertius 10.3.
- Triplus sesquiquartus 13.4.

Multiplex superpartiens
- Duplus supbipartiens 8.3.
- Duplus suptripartiens 11.4.
- Duplus supq̃dripartiẽs 14.5.
- Triplus supbipartiens 11.3.
- Triplus suptripartiens 15.4.
- Triplus supq̃dripartiẽs 19.5.

Numerus scõm figuram
- Linearis 2.
- Planus 4.
- Solidus 8.

Planus
- Trigonus 3.
- Tetragonus 4.
- Pentagonus 5.
- Hexagonus 6.
- Heptagonus 7.
- Octogonus 8.
- Ennagonus 9.
- Decagonus 10.
- Endecagonus 11.
- Dodecagonus 12.
- Altera parte longior 6.
- Ante longior 15.

Solidus
- Pyramis 4.
- Cubus 8. latus 2.

Pyramis
- Trigona 4.
- Tetragona 5.
- Pentagona 6.
- Hexagona 7.
- Curta pyramis 29. Sui tetragoni sũt 16.9.4.
- Biscurta 25. sui tetragoni sunt 16.9.
- Tricurta 41. Sui tetragoni sunt 25.16.
- Laterculus 18. Latera sunt 3.3.2.
- Asser 12. Latera sunt 2.2.3.
- Cuneus 24. Latera sunt 2.3.4.
- Mũcrus circularis 25.
- Sphericus 125.
- Parallelepipedus 12. Latera sunt 2.3.2.

Medietas 6.4.2.
- Arithmetica 6.4.2.
- Geometrica 9.6.4.
- Musica 6.4.3.

Arithmetica
- Continua 6.4.2.
- Disiuncta 7.5.6.4.

Geometrica
- Continua 9.6.4.
- Disiuncta 9.6.3.2.
- Quarta medie. 6.5.3.
- Quita medietas 5.4.2.
- Sexta 6.4.1.
- Septima 9.8.6.
- Octaua 9.7.6.
- Nona 7.6.4.
- Decima 8.5.3.

Umerus est multitudo ex vnitatibus aggregata.

n Numerus scōm se sumptus est numerus qui in comparatione ad alterum minime considerat/neq; vt ad figuras geometricas applicatur.

Numerus ad aliquid: est qui in comparatione ad alterum sumptus: consideratur.

Numerus scōm figuram dicitur: prout ad figuras geometricas applicatur.

Numerus par: est qui in duo equa diuidi potest.

Numerus impar: est qui in duo equa minime diuidi potest.

Numerus pariter par: est numerus par cuius partes in duo equa ad vnitatem vsq; sectionem recipiunt.

Numerus pariter impar est numerus par cuius media: equalium partitionem non admittunt.

Numerus impariter par: est numerus par cuius media equaliū partiōem admittūt sed partium in duo equa partitio citra vnitatem deficit.

Numerus perfectus est numerus par: cuius omnes cōposite simulq; accepte partes: sui totius summam implent. Pars est que aliquoties sumpta neq; excrescēdo neq; deficiendo suum totum metitur.

Numerus diminutus est cuius collecte partes: minus ipso toto reddunt. qui ⁊ imperfectus dicitur.

Numerus abundans: est cuius in vnum adiecte partes totius summam excedunt: qui et idem superfluus nuncupatur.

Numerus primus est numerus impar: qui sola vnitate metitur. et idem quoq; incōpositus nominatur.

Numerus compositus est numerus: quem nō sola vnitas sed ⁊ alter numerus ipsum mensurat: qui ⁊ idem secundus appellatur.

Numerus solum ad alterū primus est numerus: qui fm se compositus est: ad alterū vero comparatus sola cū illo cōmuni metitur vnitate. Par. impar.

Equalitas: est cum equalis numerus ad equalem comparatur.

Inequalitas vero est cum inequalis ad inequalem comparatur.

Maior inequalitas: est cum numerum maiorem ad minorem comparamus.

Minor vero inequalitas contra: quoties minorem maiori comparamus.

Numerus multiplex est cum maior nūerus minori comparatus: eūdem plusq; semel continet vt bis/ter/quater: et ita deinceps.

Unitatem numerorum fontem/principiūq; etiam numeri appellatiōe censemus.

Duplus est cum maior numerus minori comparatus: minorem bis continet.

Triplus cum ter continet.

Quadruplus cum quater.

Quincuplus cū quinquies: et hoc pacto deinceps fm naturalē nūerorꝝ ꝓgressiōem.

Numerus superparticularis est cum maior numerus minori comparatus totum in se numerum minorem continet: et eius partem aliquam.

Sesqualter est numerus supparticularis cum maior totum cōtinet minorem: et eius medietatem. et idem dicitur hemiolius.

Sesquitertius est cum maior continet totum minorem: et eius tertiam partem. qui ⁊ dicitur epitritus.

Sesquiquartus est cū maior continet totum minorem: et eius quartam partem. Et si quintam cōtinet vocatur sesquiquītus. et ita deinceps fm numerorum seriem.

Numerus supparticns est cū maior continet in se totū minorem: et eius insup aliquot partes vt duas/tres/q̄ttuor aut quotquot attulerit ipsa cōparatio. De ius partibus id intelligitur: que minoris vnam partem non efficiunt.

Superbipartiens est cum maior continet minorem et duas eius partes.

Supertripartiens est cum tres eius partes insuper continet.

Superquadripartiens cum quattuor: et hoc pacto deinceps.

Numer⁹ multiplex supparticularis est quotiens maior numerus ad minorē ꝓparatus habet eum plusq̃ semel et eius partem aliquā.
Et si bis continet ⁊ eius medietatē vocatur duplus sesqualter.
Et si bis et tertiam duplus sesquitertius.
Et si ter et medietatē triplus sesqualter ⁊ ita deinceps: ex vtriusq̃ denominatione multiplicis et supparticularis prout cōparatio attulerit noīa colligendo.
Numerus multiplex supparticens est quotiens maior numerus minori cōparatus minorem plusq̃ semel continet ⁊ insuper eius aliquot partes. ⁊ noīa sumit ꝓposita ex vtraq̃ cōparationis denoiatione. vt hec: duplus superbipartiens/duplus supertripartiens/triplus/quadruplus/quincuplus supbipartiens et similia. Et quo pacto quinq̃ sumunt̃ species cōparando maiorē numerum ad minorē eo pacto sumūtur quinq̃ correlatiue cōparato minore ad maiorē: quorum et suorū specialiū modorꝫ specierūq̃ nomina: sola sub ꝓpositione addita effingimus: que sunt. submultiplex subsuperparticularis/subsuperpartiens/submultiplex subsupparticularis/submultiplex subsuperpartiens. et species submultiplicis sunt subduplus/subtriplus/subquadruplus/subquincuplus. et hoc pacto deinceps.
Species subsuperparticularis: subsesqualter/subsesquitertⁱ⁹/subsesquiquartus/subsesquiquintus. et hoc pacto deinceps.
Species subsuperpartientis sunt subsuperbipartiens/subsupertripartiens/ subsuperquadripartiens. et hunc in modum consequenter.
Species submultiplicis subsupparticularis subduplus subsesqualter/ subtriplus subsesqualter et similes.
Species submultiplicis subsuppartiētis sunt subduplus subsupbipartiēs subduplus subsupertripartiens atq̃ cetere similes secundum rationis/cōparationisq̃ naturā. sed hec statim nota sunt.
Numerus linearis est qui per plures in vnam/eandēq̃ partem adiectas: describitur vnitates.
Numerus planus est qui per suas vnitates descriptus: in longū atq̃ latum porrigit̃.
Numerus autē solidus est qui per suas vnitates descriptus longitudini et latitudini crassitiem superaddit/ trinoq̃ distenditur interuallo.
Trigonus est numerus planus: qui suis vnitatibus explicatus tria latera possidet equalia.
Tetragonus: quattuor equalibus angulis perficitur.
Pentagonus: quinq̃.
Hexagonus sex.
Heptagonus septem.
Octogonus octo.
Ennagonus nouem.
Decagonus decem.
Endecagonus vndecim et hunc in modū deinceps: quos appellatione latina nuncuparc possumus triāgulos/quadrāgulos/quinquāgulos/ sexangulos/ septangulos octangulos/nonāgulos/ decāgulos/ vndecāgulos et hoc pacto cōsequenter.
Numerus altera parte longior est numerus planus qui per vnitates descriptus: longitudini latitudinē habet vnitate discrepātem. ⁊ idem longilaterus appellat̃.
Numerus vero antelongior: est qui per vnitates descriptus latera sua habet plusq̃ vnitate disiuncta. hoc est longitudinē latitudini plusq̃ vnitate dissentientē.
Pyramis est numerus solidus cuius singula latera sunt ab vno planorū ad vnum cacuminis verticē eleuata. Et planus nūcerus a quo latera erigunt̃: pyramidis basis nuncupat̃. Punctus autem/vnitasq̃ in quā conuentiunt pyramidis conus/mucro/ vertexq̃ dicitur. que si ex base triangula nascitur: pyramis triangula nominatur. Si ex base quadrangula: pyramis tetragona. et hoc pacto deinceps.

Perfecta pyramis ea est cuius laterũ adverticẽ erectio: citra vnitatẽ non deficit.
Curta vero pyramis ea est cuius laterũ erectio ad vnitatẽ vsq; nõ ascendit: cui si sola monas deest q̃ est prima pyramis: curta dicit. Si vnitas et planus vnus: bis curta. Si duo tricurta nominatur. et hoc pacto deinceps.
Cubus est nũerus solidus sex equis supficialibus/ planisq; numeris contentus: equã de se longitudini et latitudini altitudinẽ prebens. et iidẽ numeri: tessere nũcupant que duodecim equa latera semp habent/ solidos angulos octo/ atq; supficies sex.
Laterculus is solidus est: qui longitudini latitudinem equam habens: altitudinem possidet contractiorem.
Asser: cuius cũ longitudo latitudini sit equa: altitudinẽ habet maiorem.
Cuneus vero qui longitudinẽ/ latitudinem/ et altitudinẽ in se cõtinet inequales
Circularis numerus est cũ latus in se ducitur et tetragonus inde nascens in idem terminatur. et rursum cũ idem latus in tetragonũ: nascitur cubus qui in idẽ reuoluit et is cubus sphera/ sphericusq; cubus appellat. Et cum rursus quotiẽs idem latus in cubum vel si in infinitũ duxeris: qui inde nascitur numerus: in eiusdẽ lateris numerum terminat/ reuoluiturq;.
Parallelepipedus solidus numerus est equidistãtibus supficialibus/ planisq; nũeris cõtentus neq; omnino quidẽ equalibus neq; omnino inequalibus.
Medietas est duax/ pluriũue proportionũ similis habitudo.
Medietas arithmetica est medietas: cuius termini equas seruant drias.
Termini sunt numeri: medietatis proportiones constituentes.
Differentia est quo numerus numerum superat ac vincit.
Continua medietas arithmetica ea est que in tribus continue numeris continetur. Si vero in quattuor discõtinue cõtineat: disiũcta medietas arithmetica nũcupat.
Medietas geometrica est medietas cuius termini equas seruãt proportiones. Que si in tribus continue terminis cõtinetur: cõtinua. Si vero in quattuor discõtinue: disiuncta nominatur.
Medietas harmonica ea est in qua quẽadmodum maximus terminus ad minimum ita differẽtia maiorum ad differentiã minorum sese habet.
Quarta medietas est in qua quẽadmodum maximus terminus ad minimũ: ita differentia minorum ad differentiam maiorum.
Quinta medietas in qua quẽadmodum medius ad minimũ: ita minorum differentia ad differentiam maiorum.
Sexta est in qua quẽadmodum maximus ad medium: ita minorũ differentia ad differentiam maiorum.
Septima vt quẽadmodum maximus ad minimũ: ita extremorum differẽtia ad differentiam minorum.
Octaua quemadmodum maximus ad minimum: sic eorum differentia ad differentiã maiorum.
Nona quẽadmodum medius ad minimum: sic extremorũ differentia ad differentiam minorum.
Decima quẽadmodum medius ad minimũ: ita extremorũ differentia ad differentiã maiorũ. Et he septem vltime presertim adiecte: quo Pythagore denarius impleat in tribus terminis consistunt.

Nu me ri pro pri e ta tes.

Omnis numerus circum se proxime positorum atq; simul iunctorum comperitur medietas. 1
Omnis numerus duorũ quorũcunq; extrinsecus iacentium et ab eo equaliter distantium: itidem est medietas. 2

Numeri pariter pro priete tes

1 Cum numerus par in duo partitur: si earum partium vna par est et alterã parem esse necesse est.
2 Cum par itidem in duo partitur si earum partiũ vna impar est: altera erit impar.
3 Par parem si multiplicet semper nascitur par.
4 Par imparem si multiplicet nascitur par.

Numeri impariter pro priete tes.

1 Quilibet numerus impar in duo partitus: vt vnam partem parem ⁊ alterã imparem habeat necesse est.
2 Impar imparẽ si multiplicet protinus nascitur impar.
3 Impar si multiplicet parem: procreabitur par.

Numeri pariter pariter pro priete tes.

1 Quilibet numerus pariter par partem quãlibet ⁊ nomine et quãtitate parem habet. Nomine quidem q̃ denominationẽ habeat a numero pariter pare: quãtitate vero q̃ ea ipsa numerus sit pariter par.
2 Omnis numerus pariter par est aliquis dupliciũ ab vno continue sumptoꝝ. Et quẽlibet duplorũ ab vno et solum talem: pariter parem esse necesse est.
3 Quotcũq̃ pariẽ pares ab vno cõnumerata vnitate collecti: sequẽti minꝰ vno restituũt
4 Omnis numerus pariter par est diminutus.
5 Omnis numerus pariter par: ex respondentibus sibi mutuo partibus procreatur. Partes mutuo sibi respondentes: pars denominãs/ et denominata.
9 Numerorũ pariter parium cõtinue dispositoꝝ si series est impar: quod sub extremis cõtinetur equũ est ei qui continetur sub medio in se ducto. deinde sub circũpositis vsq̃ ad seriei expletionẽ. Si vero fuerit par: equum est ei qui sub duobus mediis ꝓtinet. deinde iis q̃ altrisecus illis adiiciũtur et hoc pacto vsq̃ ad seriei expletionẽ

Numeri pariter impariter pro priete tes.

1 Quilibet numerus pariter impar: medietatẽ habet imparem.
2 Omnis numerus pariter impar quãlibet sui partẽ alterius quãtitatis retinet/ pariter et denoiationis. Nã si quãtitas est par: denoiatio erit ipar/ ⁊ contra semp eueniat.
3 Omnis numerus pariter impar gignitur ex imparibus continue ab vnitate sumptis: in quos binarius ducitur.
4 Omnes numeri pariter impares sese quaternaria numerositate trãscendũt: quattuor naturali serie inꝗceptos cõtinue relinquẽtes/ ⁊ ab sese cõtinue quinto loco distãtes
5 Omnis numerus pariter impar: duoꝝ simul pariter impariũ altrinsecus equidistãter iacentium et naturali serie collectorũ est medietas.
6 Omnium numeroꝝ pariter impariũ pari/ ꝓtinuaq̃ serie dispositoꝝ: duas medietates simul iunctas suis proxime altrinsecis numeris et illis qui super illos sunt vsq̃ ad vnitatẽ: simul/ in vnũq̃ collectis equari necesse est.

Numeri impariter pariter pro priete tes.

1 Omnis numerus impariter par aliquas eius partes habet ⁊ denominatione et quantitate respondentes: aliquas vero denominatione/ quãtitateq̃ dissentientes.
2 Omnis numerus ipariter par ex numero pariter pari et pariter ipari procreat.
3 Completa ad longitudinẽ ⁊ latitudinem impariter parium serie: qui per longitudinẽ descripti sunt: sextam pariter parium seruãt proprietatẽ. qui aũt in latitudine sextã seruant pariter imparium. Longitudo serici est que a sinistro porrigitur in dextrũ. Latitudo vero que ab imo euadit ad sursum.

Nu me ri per fe cti pro pri e ta tes.

Omnis numerus pfectus alternatim altero senario/octonarioq; terminatus cōperiť. 1

Omnis numerus pfectus ex pariter paribus ab vnitate sua serie collectis nascit: qui in vnum congesti/congregatioq;: numeq; primum constituūt: in quē ducitur aggregatorum maximus. 2

Nu me ri di mi nu ti et abun dan tis pro prie tates

Omnis numerus diminutus: a sola monade aut a numero diminuto numerat. 1

Numerus abundans: solum abundantem numerat. 2

Nu me ri pri mi et com po si ti pro pri e ta tes.

Omnis numerus primus ad omnē quem nō numerat primus est. 1

Omnis numerus compositus: a primo numeratur. 2

Omnis numerus ꝓpositus post aliquem impariū naturali serie dispositoq; totus esse probat: quotus numer° ille ipar ab vnitate fuerit aut post aliquē supra ipm iparē totorū: totus. Quotus/et totus: vt tertius/quitus/septimus ⁊ hoc pacto deinceps. 3

Omnis numerus primus aliquis impariū est hoc pacto dispositoq; qui post nullum imparē aut aliquem supra ipsum totorum: totus venerit quotus aliquis imparium fuerit ab vnitate. 4

Nu me ri ad al te rum pri mi pro pri e ta tes.

Omnes numeri adinuicē primi singuli in se ducti: numeros adinuicē primos ꝓcreāt 1

Omnis numerus minor qui ad maiorē est primus a maiore detractus quotus potest et eo qui relinquet quoties potest a minore detracto: ⁊ hoc pacto cōtinue quoties opus est: tandē que detractionis vicem impediat: relinquit vnitas. 2

E qua li ta tis et ine qua li ta tis pro prie ta tes

Equalitas est inequalitatis principium. 1

Omnis inequalitas ex equalitate nascitur. 2

Omnis inequalitas in equalitatem resoluitur. 3

Mul ti pli cis pro pri e ta tes.

Multiplices ceteris inequalitatibus sunt antiquiores/originēq; priores. 1

Omnis multiplex ex continua numeroq; serie ad vnitatem relata consurgit. Multiplex/ multiplicis modus atq; species. 2

Omnis multiplex maiorem habet multiplicem. 3

Spe cie rum mul tipli cis pro prie ta tes.

Omnes dupli ex singulis paribus a binario sumptis ad singulos serici numerorum ab vnitate continue comparatis: nascuntur. 1

Omnis triplus: a ternario duobus post singulū quēq; triplum naturalis serici numerorum continue dimissis procreatur. 2

Quadruplus itidem continue tribus post singulū quemq; quadruplū relictis numeris nascitur. et hoc pacto de quincuplo/sescuplo ⁊ ceteris. 3

Su per par ti cu la ris pro prie ta tes.

Omnis supparticularis: supparticularem supra se relinquit minorem. Minorē enim eam esse dicimus: cuius pars a maiori numero denominat. 1

Omnis supparticularis ex continua serie numerorum: continue proxime sequētis ad suum precedentem comparati: sumit inicium. 2

Spe cie rum su per par ti cu la ris pro pri e ta tes.

Omnis sesqualter ex naturalibus/cōtinuisq; triplis: ad naturales/ cōtinuosq; duplos comparatis enascitur. 1

Omnis sesquitertius pari pacto ex continuis quadruplis ad continuos triplos comparatis elicitur. 2

Omnes sesquiquarti ex continue quincuplis ad continuos quadruplos comparatis simili origine extrahuntur. Et hoc pacto sesquiquinti ex sescuplis et quincuplis. et sesquisexti ex septuplis et sescuplis ⁊ ita deinceps. 3

Su per par ti en tis pro pri e ta tes.

1 Omnis superparticns maiorē supra se superpartientē relinquit. Maior ea est: que a maiore numero suam denominationē sumit.

2 Omnes superpartiētes ex continue a quinario imparibus ad numeros cōtinus serie ternario succedentes comparatis surgunt.

Spe ci e rum su per par ti en tis pro pri e ta tes

1 Continue superbipartientes nascentur si in vtrunq; terminū primi superbipartientis binarius ducitur et rursus in terminos producte superbipartientis et ita quotiens in productos terminos ducetur binarius.

2 Continue suptripartientes simili creatione surgent si in terminos prime supertripartientis ternarius ducitur et in productos termios. ⁊ ita deinceps. Et superquadripartientes si in primos eiusdem inequalitatis terminos duxeris quaternariū. Et idem quoq; valuerit si aliū quēcunq; duxeris numerū. et simili creatione reliquas superpartiētis specierum formationes elicias.

Mul ti pli ciū su per par ti cu la riū pro prie ta tes

1 Multiplices superparticulares continue nascūtur ex imparibus suo ordine a quinario collectis continue numeris a binario succedentibus cōparatis.

2 Dupli sesqualteri continue creantur: si continuis a binario paribus: numeri a quinario sese continue quinario transilientes cōparabuntur.

3 Dupli sesquitertij itidem orientur: si perpetua serie a ternario surgentibus triplis: numeri a septenario sese coutinuo septenario excedentes cōparabuntur.

4 Dupli sesquiquarti nascentur: si a quaternario continue quadruplis: numeri a nouenario sese continue nouenario trāsilientes coaptabuntur / cōparabunturq;. ⁊ hoc pacto sesquiquīti ex quīcuplis et vndenariis ⁊ eque in reliquis pfacilis est inuētio.

Mul ti pli ciū su per par tien tiū pro pri e ta tes

1 Dupli superbipartientes nascentur: si octonarius ternario / et continue se octonario transgredientes continue se ternario excedentibus cōparabuntur.

2 Dupli supertripartientes certa lege nascentur: si ab vndenario et se continue eodem numero excedētes quaternario et se quoq; indiscōtinuata serie iugiter quaternarij summa transilientibus: continue cōparabuntur.

3 Et dupli superquadripartiētes a decimoquarto et se eodem transgrediētibus et quinario eodēq; se excedētibus reperiūtur. Et ita omniū hac industria facillima est inuentio. Et de triplis superbipartientibus / supertripartientibus et quibuslibet aliis hac arte facile series colligitur.

Nu me ri pla ni et so li di pro pri e ta tes.

1 Omnis numerus planus in triangulos est resolubilis.

2 Omnes figure plane sibi proxime adinuicē comparate vt tetragonus trigono et pentagonus tetragono ⁊ hoc pacto consequētes sese triangulo superant.

3 Omnis numerus solidus primordiū sui tenet pyramidem.

Spe ci e rum nu me ri pla ni pro pri e ta tes.

1 Omnes trigoni surgunt si disposita naturali numerorum quātitate: prioribus semper proxime sequens adiciatur.

2 Tetragoni sunt omnes qui numeris naturaliter et in longum ⁊ in latum duplici serie dispositis et in seinuicē quolibet in quēlibet ductis: angulares reperiunt. Angulares dicuntur qui sursum a monade diametralē seriem ad angulum e regione oppositum complent.

Omnes tetragoni ex naturali serie ordinatis imparibus in vnam summã coaceruati 3
collectisq; nascuntur.
Omnis tetragonus ex duobus proximis quibusq; trigonis exurgit cõpositus. 4
Tetragoni: sumptis quarũcunq; ab vnitate continue similium habitudinũ numeris: 5
locis imparibus vno semper in medio intermisso sumuntur.
Omnes tetragoni vna medietate iunguntur. 6
Si tetragonus tetragonũ multiplicet: tetragonus prouenit. 7
Si vero tetragonus altera parte longiorẽ: nunq; proueniet tetragonus. 8
Pienthagoni surgũt ex numeris naturali serie ab vnitate sequẽtibus: duoq; continuo 9
post penthagonũ facta intermissione vna cũ priore vel prioribꝰ pẽthagonis collectis
Omnis penthagonus ex toto tetragono et proxime minori trigono cõponitur. 10
Hexagoni hoc pacto tribus in medio dimissis generãtur. 11
Omnis hexagonus ex trigono et proxime sequenti penthagono cõstituitur. 12
Heptagoni quattuor in medio hoc pacto dimissis numeris generantur. 13
Omnis heptagonus ex hexagono et proxime inferiori trigono constituitur. In crea 14
tione huius figure duo trigoni proxime minores debent eminus constitui.
Octogoni: quinq; gignuntur intermissis. 15
Omnis octogonus ex heptagonor proximo sub se trigono surgit cõpositus. Et hoc 16
pacto de ennagonis/ decagonis/ endecagonis/ dodecagonis continue vno plura
intermittendo sentiendũ est. et ex proximis minoribus figuris ⁊ trigonis proxime
sub illis minoribus instar alioq; constituũtur. Quo fit vt omnes figure ex trigonis
consurgere ⁊ in cosdẽ resolui facillime deprehendãtur: quod cum ad Pythagoricã
tum ad nõnulloq; Platonicoq; intelligentiã nõnichil presidij affert ⁊ momenti

Al te ra par te lon gi o ris pro pri e ta tes.

Altera parte lõgiores ex dispositis naturaliter paribus adinuicẽ coaceruatis perinde 1
ac quadrati ex imparibus procreãtur omnes.
Omnis altera parte longior procreabitur si naturaliter ordinati pares: in naturaliter 2
dispositis imparibus singulatim ducantur.
Omnes longilateri/ alteraq; parte longiores circũstant angulares quadratos duabꝰ 3
naturaliter numerorũ seriebus scõm longum latũq; dispositis et in seinuicẽ ductis
Singuli altera parte longiores naturaliter dispositi singulis quadratis itidem dispo 4
sitis comparati: omnẽ numerorum partem gignunt/ et procreant.
Singuli altera parte longiores naturaliter siti singulis tetragonis a secundo natura 5
liter ordinatis comparati: similiter omnes restituent superparticulares.
Altera parte longiores differẽtiis paribus perinde ac quadrati iparibus disiũgunt. 6
Altera parte longiores cõtinue in proximorũ quadratorum medio collocati: eãdem 7
proportionis habitudinẽ seruant. iterũq; a dupla proportione in omnẽ superpar=
ticularium speciem se porrigunt atq; diffundunt.
Omnis altera parte longior bis sumptus cum duobus altrinsecis quadratis coacer 8
uatus: quadratum efficit.
Proximi quiq; altera parte longiores cum duplo medij quadrati itidem tetragonũ 9
efficiunt.
Parte altera longiores duplati suis duobus altrisecis quadratis aggregati: quadra= 10
tos reddunt sed quos aliquis impar numeret.
Proximi altera parte lõgiores cum duplo medij quadrati itidẽ quadratos sed quos 11
numerus par numeret: efficiunt.
Altera parte longiores naturaliter ordinati: singuli singulis naturalem seriem seruã= 12
tibus quadratis copulati: continua serie triãgulares numeros cõstituunt.
Omnes altera parte longiores: continuo ex quadratis vno detracto latere nascunt. 13

14 Altera parte longiores continue alternatim quadratis interiecti: ad quadratos habitudiuũ similitudinẽ: non autem differentiarũ seruant. Contra vero intercepti quadrati ad altera parte longiores relati: continue differentiarũ equalitatẽ: non autẽ proportionũ retinent/obseruantq; similitudinẽ

15 Alternati constitutis altera parte longioribus atq; quadratis: a binario differẽtie duplantur et adinuicẽ eandẽ que ⁊ totorũ est inter se: seruant habitudinẽ.

Pyramidis proprietates

1 Omnis pyramis ex aliqua numeroꝝ multangula figura: cui oẽs congenee/similesq; figure superponãtur: consurgit.

2 Cuiuslibet pyramidis basis est multangulorũ numeroꝝ in pyramidis structurã aptatorum maximus

3 Pyramis trigona ex continue trigonis ad vnitatẽ vsq; supra seinuicẽ erectis gignit.

4 Et tetragona ex tetragonis et penthagona ex pẽthagonis/ hexagona ex hexagonis hoc pacto supra seinuicẽ erectis et ita deinceps.

Cubi proprietates

1 Cubi producentur omnes si dispositis naturaliter post vnitatẽ imparibus duo primi conũgantur. post quos alij tres. post quos quattuor. et hoc pacto consequẽter.

2 Numeri cubi duabus eiusdẽ proportionis medietatibus iungũtur.

3 Si cubus cubum multiplicet: cubi forma conficitur.

4 Si cubus altera parte longiorẽ numeret: nunq; nascetur cubus.

Medietatis Arithmetice proprietates

1 Medietas Arithmetica suoꝝ terminorũ semper proportionũ dissimilitudinẽ gerit

2 Medietas Arithmetica cõtinue nascetur si naturalis numeroꝝ series indiscõtinuata protrahatur. Similiter et numeris hoc modo digestis si simili intercapedine abinuicem distantes: continue accipiãtur. Quo fit vt pares: naturaliter sese cõsequẽtes itidem et impares hanc medietatis normam inuiolabiliter seruent

3 Arithmetice medietatis coniuncte medius terminus extremorũ simul iunctorum est medietas.

4 Arithmetice medietatis disiuncte extremi simul iuncti collectis/ coniunctisq; mediis adequantur.

5 Eiusdẽ medietatis vt termini ad seipsos: ita differentie ad differentias.

6 Medietas Arithmetica cõiuncta: sub extremitatibus minus continet eo numero qui ex medietate conficitur quantũ possunt sub se duc differentie que inter ipsos sunt terminos constitute.

7 Disiuncta vero tanto minus sub extremitatibus cõtinet eo qui cõtinetur sub mediis: quantum est quod fit ex differentia maximi ad vnum mediorũ in differentiã medij eiusdem ad minimum.

8 Huius medietatis quotcunq; cõtinue dispositoꝝ numerorũ minores ꝗmini maiores proportiones: maiores vero: minores proportionũ habitudines cõtinue seruãt.

9 Arithmetice medietatis determinatoꝝ extremorum medius reperitur numerus: si extremorum coniunctorũ medietas accipitur.

Geometrice medietatis proprietates.

1 Geometrice medietatis quorũcunq; terminoꝝ continue dispositorum et maiorum et minorũ terminoꝝ equales sunt proportionũ habitudines.

2 Geometrica medietas suorũ terminoꝝ conuersam seruat proportionalitatẽ vt semp si primus ad secundũ quẽadmodũ secundus ad tertiũ: ita ecõuerso tertius ad scõ3 vt secundus ad primũ quod ⁊ in disiũcta medietate siliter cuenire cognoscit.

Eadem quoq; medietas quattuor terminis distributa semper permutatā proportio- 3
nalitatem retinet. vt si quēadmodum primus ad secundū: sic tertius ad quartum.
ita vt primus ad tertium et secundus ad quartum.
Medietatis geometrice terminorū et eorūdem dierum similis est proportio. 4
Medietatis geometrice que in multiplicibus existit: maior numerus ad minorē com 5
paratus: ipsum minorē suam habet differentiā/aut multiplicē minoris/vno minus
q̄ maioris ad minorem sit habitudo.
In continua medietate geometrica: quod continetur sub extremis/equū est ei qui ex 6
medio in se ducto nascit. Et in discōtinua ei q̄ fit ex duab⁹ in se ductis medietatib⁹
Continue proportionalitatū species: quadratis ab vnitate ⁊ altera parte lōgioribus 7
alternatim vna serie dispositis: a prima multipliciū medietate in omnes superparti
cularium habitudines/ proportionesq; discurrunt.
Geometrice medietatis determinatis extremis medius proportionalis reperitur: si 8
numeri sub extremitatibus contenti tetragonicū latus accipiatur.

Me di e ta tis har mo ni ce pro pri e ta tes

Medietas harmonica in maioribus terminis maiorē seruat proportionē 1
Musice medietatis medius terminus in collectas extremitates ductus: duplum nu- 2
mero qui fit ex extremo in extremū producit.
Musice medietatis determinatis extremis: medius reperitur terminus si per extre- 3
morū coniunctorū numerū: numerus qui ex differentia extremorū in minimū con-
surgit diuiditur/ isq; qui ex diuisione relinquitur accipiatur atq; minimo extremo
aggregēt. diciturq; is nūerus q̄ ex diuisione relinquit latitudo/latitudinisq; latus
Contingit ex harmonica medietate: primordiū consonantiarū consonātiasq; musicas 4
omnes elicere.

Re li qua rū me di e ta tū pro pri e ta tes

Si quarte medietatis extremi adinuicē sunt habitudinis duple: quod continetur sub 1
maximo et medio duplū est ei qui cotinetur sub medio ⁊ minimo. Et omnino que
habitudo maximi ad minimū. ea erit eius quod sub maximo et medio continetur
ad id quod continetur sub medio ⁊ minimo et id in omni medietate cōmune est
Si quinte medietatis medius ad minimū sit duplus: quod cōtinetur sub maximo ter 2
minorū et medio: duplū erit ad id quod cōtinetur sub extremis. Et omnino q̄ habi
tudo medij ad minimū: ea erit numeri qui fit ex maximo in medium et minimū. et id
quoq; omnibus publicū atq; cōmune est.

Diuus Seuerinus medietatū denariā Pythagore plenitudinē implcuit: Iordan⁹
autē denario vnitatē adiecit.

Denarius medietatū Boetij.		Undenarius medietatū Iordani.	
Prima	1.2.3.	Prima	1.2.3.
Secunda	1.2.4.	Secunda	1.2.4.
Tertia	3.4.6.	Tertia	3.4.6.
Quarta	3.5.6.	Quarta	1.4.6.
Quinta	2.4.5.	Quinta	6.9.11.
Sexta	1.4.6.	Sexta	3.4.6.
Septima	6.8.9.	Septima	3.4.7.
Octaua	6.7.9.	Octaua	4.6.7.
Nona	4.6.7.	Nona	3.5.6.
Decima	3.5.8.	Decima	6.7.9.
		Undecima	6.8.9.

Formula proprietatū ex Boetio reperiendarū/ atq; ex Iordano demonstrandarum.

Di uus Se uc ri nus	Bo e ti us		Ior da nus.	
Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
Numerus.				
1	7	1	2	1
2	7	1	2	1
Numerus par.				
1	5	1	2	7
2	5	1	2	7
3	46	2	10	7
4	46	2	12	7
Numerus impar.				
1	5	1	3	7
2	46	2	11	7
3			10	7
Numerus pariter par.				
1	9	1	31	7
2	9	1	29	7
3	9	1	32	7
4	9	1	54	7
5	9	1	25	4
6	9	1	26.40	2.7
Numerus pariter impar.				
1	10	1	33	7
2	10	1	34	7
3	10	1	35	7
4	10	1	35	7
5	10	1	2	1
6	10	1	3	1
Numerus impariter par.				
1	11	1	37	7
2	11	1	38	7
3	11	1	40	7
Numerus perfectus				
1	20	1	0	0
2	20	1	60	7
Numerus diminutus et abundās				
1	0	0	55	7
2	0	0	55	7
Numerus primus et compositus				
1	0	0	1	3
2	0	0	2	3
3	17	1	25	7
4	17	1	25	7
Numerus ad alterum primus.				
1	17	1	12	3
2	18	1	15	3

Di uus Se ue ri nus Bo e ti us Jor da nus.

Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
Equalitas/inequalitas.				
1	32	1	70	9
2	32	1	70	9
3	1	2	75	9
Multiplex.				
1	26.27.	1	38.70	9
2	23	1	37	9
3	23	1	52	9
Species multiplicis.				
1	23	1	38	9
2	23	1	38	9
3	23	1	38	9
Superparticularis.				
1	24	1	52	9
2	24	1	37	9
Species superparticularis.				
1	24	1	38	9
2	24	1	38	9
3	24	1	38	9
Superpartiens.				
1	28	1	52	9
2	28	1	42	9
Species superpartientis.				
1	28	1	7	2
2	28	1	7	2
Multiplex superparticularis				
1	29	1	43	9
2	29	1	7	2
3	29	1	7	2
4	29	1	7	2
Multiplices suppartientes.				
1	31	1	7	2
2	31	1	7	2
3	31	1	7	2
Numerus planus.				
1	6	2	0	0
2	19	2	0	0
Numerus solidus.				
1	21	2	0	0
Species numeri plant.				
1	9	2	1	8
2	27	1	38	9
3	12	2	26	7
4	18	2	5	8
5	38	2	10	6
6	46	2	4	6

CDi uus Se uc ri nus Bo e ti us CJor da nus.

Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
7	46	2	14	6
8	46	2	14.26	6
9	14	2	12	8
10	18	2	12	8
11	15	2	14	8
12	18	2	14	8
13	16	2	21	8
14	18	2	21	8
15	16	2	22	8
16	00	0	00	0
Parte altera longior.				
1	26	2	27	7
2	28	2	38	9
3	27	1	38	9
4	33	2	38	9
5	33	2	38	9
6	33	2	27	7
7	33	2	38	9
8	33	2	32	6
9	33	2	31	6
10	33	2	32	6
11	33	2	31	6
12	34	2	11	8
13	35	2	10.5	1.8
14	37	2	38.5.2.22	9.8.1.10
15	37	2	20	10
Pyramis.				
1	23	2	28	8
2	23	2	28	8
3	23	2	27	8
4	23	2	28	8
Cubus.				
1	39	2	28	7
2	46	2	4	6
3	46	2	16	6
4	46	2	17.26	6
Medietas arithmetica.				
1	43	2	1	10
2	45	2	0	0
3	43	2	2	1
4	43	2	3	1
5	43	2	0	0
6	43	2	3	10
7	43	2	20	1
8	43	2	16	2
9	50	2	5	10

Di uus Se ue ri nus Bo e ti us Jor da nus.

Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
Medietas geometrica.				
1	43	2		
2	44	2	1	2
3	44	2	3	2
4	44	2	20	10
5	44	2	5	2
6	44	2	25.26	2
7	44	2	0	0
8	50	2	38	9
Medietas musica.				
1	45	2	34	10
2	47	2	37	10
3	50	2	40	10
4 ex musica	48	2	32	3
Quarta medietas.				
1	51	2	7	2
Quinta medietas.				
1	51	2	7	2

Epitomes librorum Arithmeticorum Boetij finis.

Jacobus Stapulensis Bernardo Alencario doctori medico numerorum amatori.

Onsiderasti mi Bernarde: oēs disciplias ad quas generoso spiritu sit annitendum difficiles esse siquidem virtus oīs circa difficile versetur. c verū hāc difficultatem nullos vnq̄ absterrere: preter eos solos qui de re litteraria male meriti quod capere diffidant ceteris dissuadent: aut q̄ ipīs inuideant velut feliciorib̄us/aut potius q̄ eos ipōs nescire pudibūdum sit. At scis q̄ procul presertim ab hoc p̄clarissimo Parhisiēsi studio liuor oīs absit/q̄ ignorātia pellat/ q̄q̄ probent Clitomachū Cartaginiensem qui quadragesimū annum natus: primū studia litterarū petijt. in quibus adeo ꝓfecit vt Carneadi sederit successor. quominus dubitādum est hūc locum: tutam eē disciplinarum stationem/securūq̄ portum: et vndecunq̄ aduenerint benigno excipi fauore/ peramicoq̄ hospitio. Quapropter cum Arithmetice ⁊ Musice superioribus diebus in studentū fauorem: huic loco tanq̄ asyllo cōmitterētur voluisti Rithmimachiā simul formari: ludum quidem numerorū non illiberalem/sed quem deceat studiosos adolescentes cognoscere ne nimiū tetrice videātur aduentasse disciplinę ⁊ quo interdum studio defessi primi earum Tyrones solent animum et cum vtili ocio/tum honesto vires custodiāt incolumes. tale profecto consilium medicum decuit. Et si qui hanc ludi honestatem amabunt: gaudebunt tua opera post serias disciplinas hic esse insertum. Introducunt Alcmeon mathematicus Pythagore discipulus: ⁊ Brōtinus ⁊ Bathillus eius temporis adolescentes. Tale.

Alchmeon q̃ tempestiuus ades. Alc. quid hoc o adolescẽtes. Bat. qm̃ non nichil abs te ego ⁊ Brõtin⁹ perdiscere cupimus. Alc. quid nam id o Bathille. Bat. Priusq̃ in secentorum numero Pythagoram cõgrediamur: cupimus in rudibus aliq̃tulũ formari. Et cũ iam e nocturno cõgressu redeunt Pythagore discipuli sciscitamur leuiora quedã que silenda non tradiderit. Atq̃ nosipsi iam Abacum atq̃ mensulam perdidicimus. nũc aũt ludum quendã querimus inter vos confictũ: plerũq̃ vestras curas post seria studia leuantem ⁊ quem vos ipi in numeris vt et pleraq̃ alia exercere soletis. Alc. Rithmimachiam o Bathille forsitan itelligis. Bat. Eam ipsam Alcmeon. Alc. Dic age igitur Bathille quot numerorũ simplices inequalitates. Bat. Tres: multiplex/ supparticularis/ ⁊ superpartiens. Alc. Maioris scz habitudinis ad minorem. et in his tribus gñib⁹ oĩno cõsistit ludus a te ⁊ Brõtino nũc a me petitus. Quid maxima harmonia: et quid harmonia minor. Bat. Maxima harmonia est cũ quattuor numerorũ in geometrica medietate cõstitutorũ: extremi ad vnũ mediorũ Arithmeticam/ ad alterũ ho Musicam seruãt medietatẽ. Et harmonia minor solum in q̃ttuor terminis duas seruat medietates. Et quid medietas Arithmetica/ quid Geometrica/ et quid Musica vocek: dudum perqsiuimus/ atq̃ satis qd̃ sint nos ipi nobis tenere psuademus. Alc. Recte multa tenes o Bathille. attã paulo latius hoc in loco noĩc vtũtur maxime harmonie: vt eaipa dicak quoties in quattuor terminis minoribus quidẽ maiores gradatim sequẽtibus: he tres repiũtur ꝓportionũ medietates. mox disponunt p̃mo duobus ordinibus multiplices ex quattuor primis paribus ortos atq̃ ab ipis denoĩatos: duplos/ quadruplos/ sescuplos/ octuplos in leui/ planaq̃ area q̃ sit sexaginta q̃ttuor quadris spacijs diremptą alternis se intersecãtibus lineis. post quos itidem duobus ordinibus cõsimiles supparticulares locant: sesqualteros/ sesquiquartos/ sesquisextos/ atq̃ sesquioctauos. dehinc cõsimilik supportientes illis quidẽ affines/ atq̃ cõgeneos: supbipartiẽtes/ supquadripartiẽtes/ supersextupartiẽtes/ atq̃ supoctupartiẽtes. et spacia illa campos vocant et ordinatos in ipsis numeros parium aciem. Et e regione in totidem campis/ similiq̃ processu multiplices ordinant a quattuor p̃mis imparibus ductos atq̃ ab eisdem denoĩatos: triplos/ quincuplos/ septuplos/ nõcuplos. post quos consĩles supparticulares. post superparticulares cõsimilis affinitatis suppartiẽtes/ structeq̃ erũt e regione duobus ordinibus hic imparium/ illic vero parium acies hoc pacto

Acies Parium in Rithmimachia.

Duces superpartientium.			25	81	169	289			Calculi quadrãtales.
Comites suppartientium.			15	45	91	153			
Duces supparticularium.			9	25	49	81			Triquetri.
Comites supparticularũ.			6	20	42	72			Triquetri.
Duces multiplicium.			4	16	36	64			Rotundi.
Comites multiplicium.			2	4	6	8			Rotundi.
Primi campi prime aree.									
Primi campi secunde aree									
Comites multiplicium.			3	5	7	9			Calculi rotundi.
Duces multiplicium.			9	25	49	81			Rotundi.
Comites supparticularũ.			12	30	56	90			Triquetri.
Duces superparticularũ.			16	36	64	100			Triquetri.
Comites suppartientium.			28	66	120	190			Quadrãtales.
Duces superpartientium.			49	121	225	361			Quadrãtales.

Acies Imparium in Rithmimachia.

Bat. Satis hanc numerorum assituationem appẽdo. Alc. Ubiq̃ consilium respõsus vt campi sibi inuicem subiecti duplos/ sesqualteros/ mox superbipartiẽtes tenent: et iterũ sibi mutuo subiecti quadruplos/ hinc sesquiquartos/ atq̃ supquadripartiẽtes. Et hoc pacto de reliquis. Attã assignati numeri designatos sibi vendicant calculos eisdẽ numeris inscriptos: multiplices quidẽ rotũdos supparticulares trigonos/ suppartiẽtes tetragonos: excepto decimi noni loci parium numero qui tetragona Pyramis est sex p̃mis tetragonis orta: ⁊ hinc sex basium/ sexq̃ faciẽrũ Pyramis dicitur. Huic ergo numero mete Pyramidisq̃ forma debita est: que primos sex quadratos minoribus quidẽ maioribus suppositis: habeat inscriptos. et hec pfecta Pyramis nũcupatur q̃ citra vnitatem eius Pyramidis mucro atq̃ vertex non deficiat. Cõsimili quoq̃ modo vicesimi loci imparium nũero imperfecte Pyramidis tetragonice forma debita est cui Pyramidi tres p̃mi tetragoni ad complementũ desunt atq̃ iccirco tricurta dicitur et quia ex quinq̃ sequentibus tetragonis surgit: iccirco quinq̃ basium/ faciẽrũq̃ eadem Pyramis nũcupatur. et illi quinq̃ tetragoni suis lateribus suo modo inscribũtur.

Bront. quid est Alcmeon q̃ calculos in officinis extornãtium multicolores sepenũero egoipse aspexerim. Alc. neq̃ absurde queris Brontine. hoc ad acierũ discrimen existimãt: sed duo colores michi satis esse videntur vt acies pariũ sit nigricans q̃ pares ad mundũ pertineant sensibilẽ. acies autem impariũ niuea sit et candicãs: q̃ impares masculi sint et indiuiduc semperq̃ eiusdẽ substantie exprimant similitudinẽ. Pyramides tamẽ ob excellentiã cum sue nature tum diuinitatis quadratorũ substantie ex quorũ coaceruatione surgunt coalescuntq̃ nobili quodã par est insignire colore. vt perfectã pyramida rubro et tricurtã ceruleo. Bat. Perfectiore colorem pyramidi parium tribuis q̃ ei que presidet aciei impariũ. Alc. Nec iniuria o Bathille nam et eadẽ impar est et in eius mucrone ac vertice summo residet diuinitas. et latus sue basis infime: primus est a monade perfectus numerus/ et suarũ basium numerus eiusdẽ sue basis latus est/ numeruq̃ perfectus. et illa eadẽ sua basis primus est sensibiliũ/ rerũq̃ mobiliũ circulus: verũtamẽ in ordine circulorũ tertius. primus enĩ simplicissim⁹ est atq̃ plenissimus cuius centrum vbiq̃ est et circunferentia nusq̃. secundus est eternitatis horizon atq̃ supra tempus. tertius est horizon cui at cũ tempore indefessa ẋtigine reuolutus. primus est nr̃e pyramidis sũmus mucro/ sũmusq̃ vertex. secũdus secũda basis. tertius prima/ infimaq̃ basis. Bat. Paradigmata fingis Alcmeon: ludum querimus non symbola. Alc. Recte ãmones Bathille. verũ ego memeriꝑm negligebã: et a suscepto officio deerrabam longius. colores ergo vestri arbitriũ sunto. nam cũ et alijs vsi fueritis nichil refert. verũ quod superest his paucis deprehẽdet̃ regulis: et quo in re parua modicus vobis satis sit sermo regularum Prima sit hec.

¶ Calculi vndecũq̃ in vacuos dimoueãtur campos: rotondi in scõm. trigoni in tertium. tetragoni cũ sua pyramide in quartum. Bat. Dimouere in scõm intelligis forte in primũ campum. Alc. Ita volunt. est enim secundus a se sed post se primus. 1

¶ Seda. Calculus oĩs quõcũq̃ recto incessu calculum tollere potest: ꝫ angulari atq̃ obliquo nunq̃. 2

¶ Tertia. Numerus numerum partis aduerse et quãtitatis eiusdẽ ꝫ suo recto cursu offendẽs: eũdem tollit. 3

¶ Quarta. Si duo numeri eiusdẽ partis: numero partis aduerse quẽ iuncti cõstituũt: circũponãtur: clausum auferũt. hinc fit vt ternarius ꝛ quinarius clausum octonariũ partis aduerse tollant: et quaternarius ꝛ octonarius duodenarium. et hoc pacto de similibus. 4

¶ Quinta. Si inter duos aduerse partis numeros vacui interiacẽtes campi per minorem numerum multiplicati maiorem efficiant: numerus tollit̃ maior. hinc euenit vt binarius duodenariũ sex interiacentibus campis auferat/ et sextum denarium octo. et ternarius senariũ interiacẽtibus duobus/ et nouenarium tribus: et quintum denarium quinq̃. 5

¶ Sexta. Quicũq̃ numerus: cui vt recto calle dimoueatur oĩs adempta est potestas: tollitur. 6

¶ Septima. Si maxima pyramidis basis offendit pyramidem: eam tollit. si offenditur: tollitur. 7

¶ Octaua. Si numerus per interceptos cãpos multiplicatus basim pyramidis maximam restituat eandem tollit. 8

¶ Nona. Si alie bases pyramidem offendant cõsimilis in campis (si adest) auferat̃: et idem eueniat si numerus per interualla multiplicatus aliquam illarũ basium efficiat. si offendãtur: eedem tollãtur. 9

¶ Decima. Victoria parta est si in aduersis castris maxima constituit̃ harmonia. itidem sed inferior ignobiliorq̃: si constituitur harmonia minor. 20

¶ Undecima. Calculi acquisiti ad complendam harmoniam aduerse parti auxiliares accipiũtur. 11

¶ Duodecima. Cũ maxima harmonia parat̃ calculus ad complendam harmoniam acquisitus a suo loco non dimouetur. 12

Maxime	d	c	b	A				
Victorie	2	3	4	6	2.4.6 Medietas arith.	2.3.4.6 Geo.	2.3.6 har.	1
Pro acie	4	6	8	12	4.8.12 Medietas arith.	4.6.8.12 Geo.	4.6.12 har.	2
Parium	6	8	9	12	6.9.12 Medietas arith.	6.8.9.12 Geo.	6.8.12 har.	3
	4	6	9	12	6.9.12 Medietas arith.	4.6.9 Geo.	4.6.12 har.	4
	2	9	16	72	2.9.16 Medietas arith.	2.9.16.72 Geo.	9.16.72 har.	5
Maxime	3	5	15	25	5.15.25 Medietas arith.	3.5.15.25 Geo.	3.5.15 har.	1
Pro acie	5	9	45	81	9.45.81 Medietas arith.	5.9.45.81 Geo.	5.9.45. har.	2
Impariũ	5	25	45	225	5.25.45. Medietas arith.	5.25.45.225. Geo.	25.45.225. har.	3
Minores	5	15	25	45	5.25.45 Medietas arith.	5.15.45 Geometrica.		1
Victorie	12	15	16	20	12.16.20 Medietas arith.	12.15.16.20 Geometrica.		2

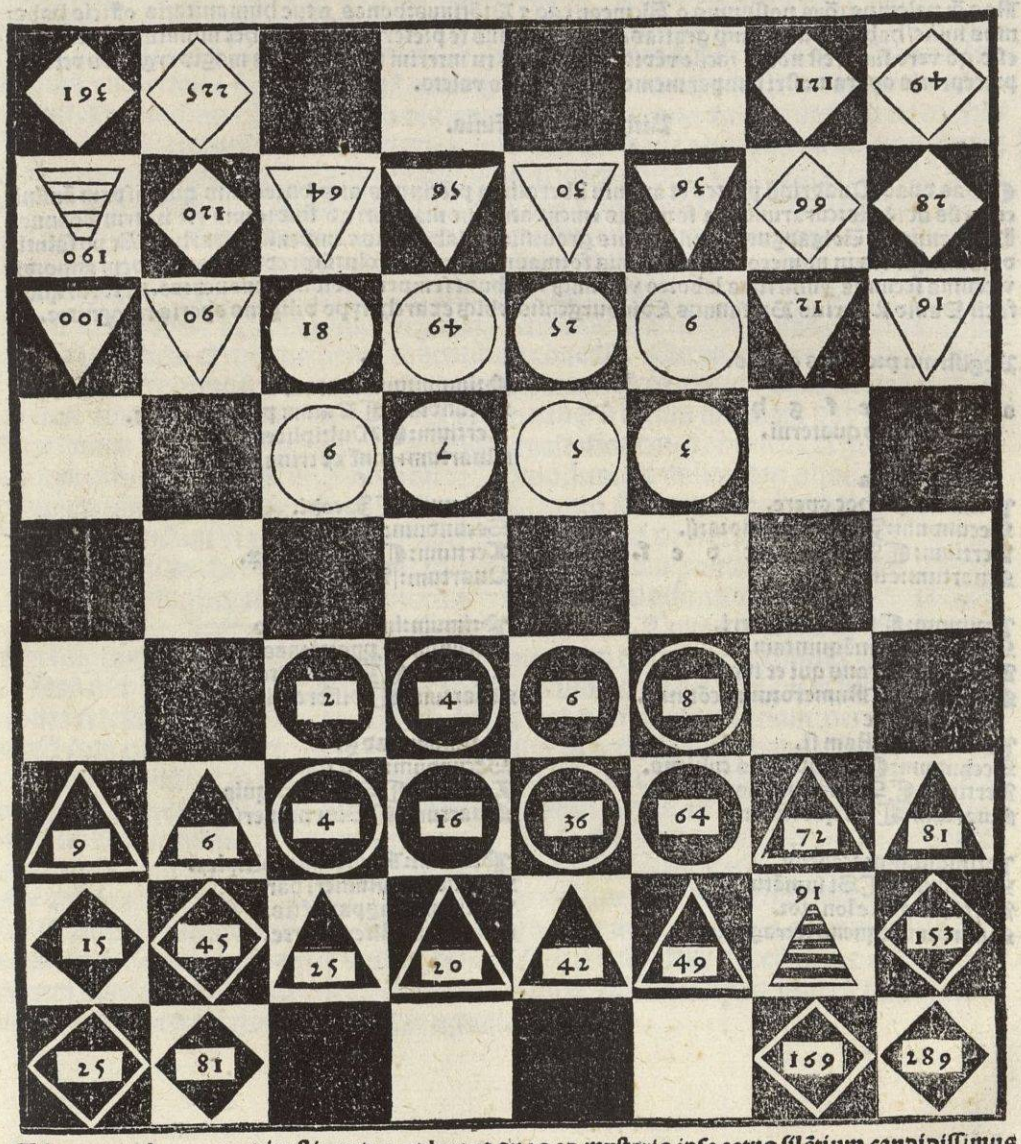
Prime maxime victorie	Secunde maxime victorie	Tertie maxime victorie
comonantie musice	consonantie musice	consonantie musice
A b diapente	A b diapente	A b diatessaron
B c diatessaron	B c diatessaron	B c tonus cõsonantiarũ principiũ.
A c diapason	A c diapason	A c diapente
A d diapason ac diapente	A d diapason ac diapente	A d diapason
B ad triam c d bis diapason	B ad triam c d bis diapason	A ad triam a c diapasõ ac diapẽte
		C ad triam c d bis diapason

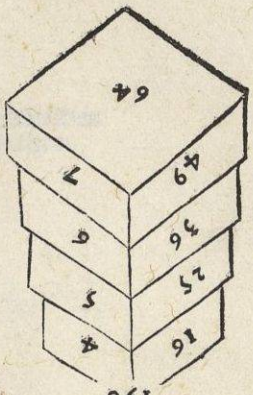
¶ Minores victorias ꝑpaucas posui: vt vos venatoribus similes relinquã: qui magis fere inuẽtione ꝗ oblata sine venatione gaudere solent. Ex tribus tamen Bathille preceptis minorum victoriarum cognitio pendet.

¶ Primum. Datos duos camporũ numeros iunge: iũctorũ dimidium est inter eos in Arithmetica medietate medius numerus.

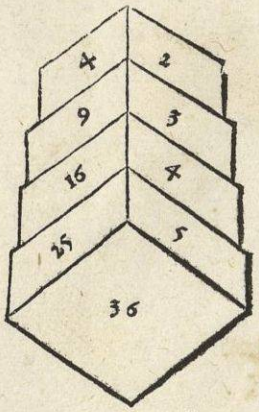
¶ Secundum. Datis itidem duobus nũeris: duc primũ in scõm: et ꝓducti accipe latus tetragonicũ. et illud est eorum rationis geometrice medius numerus.

¶ Tertium. Datos duos numeros aggrega: et qui aggregatus est serua. duc primũ in scõm/ et ꝓductum dupla/ et duplatũ diuide per seruatum aggregatũ: et qui ꝓuenit est illoꝝ numerorũ harmonice ꝓportiõalitatis medius. Et si hoc pacto quẽadmodũ hec tria docẽt preceptа integros numeros non reperias: numeri dari nullos habebũt in illa rõne/ ꝓportiõalitateq medios. et nõ modo minores victorias: seu sint ex Arithmetica et Geometrica/ seu ex Arithmetica et Harmonica/ seu ex Geometrica et Harmonica reperias: sed et si volueris maximas. Verũ solent o Bathille aliter cãpos/ acierũ duces/ comitesq ordinare. vt area sit camporũ sexaginta quattuor. aut limite camporum medio aciem vtranq diriment esse superadiecto duorum atq septuaginta.





Pyramidis summa.



¶ Et campis hoc modo digestis rudes adhuc et quos ad mysteria ipse cetus sillẽtium candidissimus pater nondum admittit ex supioribus preceptis inter se concertant. mox ꝗo puerilibus actis/ iocisq relectis ad sillentia hymnosq assuefacti: presentia preceptoris tanꝗ numinis cuiusdã fruũtur/ solan

tur/ et vitam sine crimine transigunt innocuam/ labeq; carentem. hoc illis studium/ hoc solamen/ hec vigilantissima cura:
Ut sese totos rimentur ad vnguem
Ne quid hiet/ ne quis perturbet se angulus/ equis
Partibus vt coeat/ nil vt declinet amussis.
Nec prius in dulcem declinant lumina somnum:
Omnia q̃ longi reputarint acta diei.
Quo pretergressi/ quid gestum in tempore/ quid non.
Offensi prauis: dant palmam et premia rectis.
¶ Tales candidi discipulos decet esse Pythagore. Ergo meum consilium est o Bathille ⁊ Brontine generosi adolescentes: vt tantisper ludo indulgeatis dum tenerior etas vos ad altiora conscēdere non sinit/ dum tardat aditum. mox aūt plusculo robustiores animo facti: nostrum silētium querite/ et vos nostro cetui comites asciscite: vitam semper que frugi sit querentes innocuam. ⁊ me potius magistro (aut si mauultis vobiscū condiscēte) doctrinam/ moresq; q̃ iocos discite. vos aūt dū etas teneriuscula patitur: a iunioribus que petiti ludi supsunt vel q̃ facillime discetis/ nūcq; ambo recte valete. Bat. Nos q̃ valemus/ q̃q; possumus o Alcmeon ego ⁊ Brōtinus: bonas p tue humanitatis officio habemus nunc/ habebimusq; semp gratias. ⁊ cognoscimus te preter dignitatem hec minutula percōtatos esse. qō vero superest nobis facile vēdicabimus. atq; tu interim dū te ad seria magis erga nos vtemur preceptoris opera: nostri semper memor felicissimus valeto.

Rithmimachie Finis.

¶ Has duas Quadriuij partes et artium liberalium precipuas atq; duces cum quibusdam āminicularijs adiectis: curarunt vna formulis emendatissime mandari ad studiorum vtilitatem Joannes Higmanus/ et Wolgangus Hopilius suis grauissimis laboribus ⁊ impensis Parhisij Anno salutis domini: qui oīa in numero atq; harmonia formauit 1496 absolutūq; reddiderunt eodem anno: die vicesima secunda Jullij suos labores vbicunq; valebunt semper studiosis deuouentes. Et idem quoq; facit Dauid Lauxius Brytannus Edinburgensis: vbiq; ex archetypo diligens operis recognitor.

Registrum presentis operis.

a b c d e f g h i
Omnes quaterni.

a
Primum: In hoc opere.
Secundum: Jordani Memorazij.
Tertium: ¶ Sint a b c d e f.
Quartum: cin se.

b
Primum: ¶ Si duo numeri.
Secundum: simāquintam.
Tertium: nūerans qui et idem.
Quartum: ¶ Numerorum cōtinue.

c
Primum: ¶ Nam si.
Secundum: ¶ Quadratus cubicus.
Tertium: ¶ Si fuerint duo numeri.
Quartum: ¶ Si quotlibet.

d
Primum: q̃ precedens.
Secundum: ¶ Si sumātur.
Tertium: parte longior.
Quartum: sequens tetragonum.

e
Primum: numeratas.
Secundum: ¶ Natam proportionem.
Tertium: ¶ Multiplicem.
Quartum: cunk ex trina.

f
Primum. ¶ Jacobi.
Secundum: ¶ Jacobi.
Tertium: ¶ Si terminor.
Quartum: A supparti.

g
Primum: interuallo e d
Secundum: pportiones esse.
Tertium: ¶ Itidem ditonus.
Quartum: ¶ Differentia.

h
Primum: f ad g.
Secundum: ad q fiat p.
Tertium: ¶ Sint p reliquis.
Quartum: ¶ Sint numeri.

i
Primum: Numerus multiplex.
Secundum: Numeri paris.
Tertium: Suppartiētis.
Quartum: Altera parte.