La desigualdad de Penrose luminosa y la versión para capas delgadas en Minkowski

Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas
Universidad de Salamanca

VNiVERSiDAD
Đ SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Alberto Eduardo Soria Marina

Resumen de la Tesis Doctoral, 2017

D. Marc Mars Lloret, Profesor Titular de la Universidad de Salamanca

Da el visto bueno y autoriza la presentación del resumen en español de la Tesis Doctoral *"The null Penrose inequality and the shell version in Minkowski"*, presentada por **D. Alberto Eduardo Soria Marina** para optar al título de doctor, y que ha sido realizada en su totalidad bajo su dirección .

Salamanca, 29 de mayo de 2017.

D. Marc Mars Lloret

Profesor Titular de Universidad

Universidad de Salamanca

Contenido

1

Introducción

La teoría de la Relatividad General (RG) fue desarrollada por Einstein y completada en 1915 y es, hasta el momento, la teoría más precisa a la hora de describir la física gravitatoria. Ésta generaliza la teoría Especial de la Relatividad, publicada en 1905. Einstein comprendió que en presencia de campos gravitatorios, el espacio-tiempo es una variedad diferenciable de dimensión cuatro dotada de un tensor métrico de signatura $(3,1)$ solución a las llamadas *ecuaciones de campo de Einstein de la Relatividad General*, que son fundamentales para estudiar la interacción gravitatoria. La teoría de Einstein hace afirmaciones sorprendentes con respecto a la estructura del espacio y del tiempo y de la naturaleza del campo gravitatorio. La teoría usa complejas y poderosas herramientas matemáticas. Einstein publicó sus famosas ecuaciones de campo de la gravedad en su artículo „Die Feldgleichungen der Gravitation“ (“Las ecuaciones de campo de la Gravitación”) el 25 de Noviembre de 1915 en la Academia Prusiana de las Ciencias [10].

La teoría de la RG puede ser aplicada a numerosas áreas de la física. Entre otras, nos permite el estudio de la evolución del universo como un todo. También es usada para estudiar el comportamiento de objetos astronómicos altamente energéticos y compactos, como los quasars y las fuentes compactas de rayos X. Es asimismo la mejor teoría para estudiar el colapso gravitatorio de un objeto masivo y predice con precisión el comportamiento de cuerpos que se mueven en campos gravitatorios fuertes. La teoría de Einstein también predijo en 1916 la existencia de ondas gravitacionales, ondulaciones de un espacio-tiempo distorsionado que viajan a la velocidad de la luz y que son causadas por objetos masivos que aceleran. Recientemente, la teoría ha sido firmemente confirmada mediante la detección de ondas gravitacionales por el observatorio LIGO el 14 de Septiembre del 2015 [20].

El tema central de esta tesis es la llamada conjetura de la desigualdad de Penrose. Para describir el contexto general de donde surge comenzamos dando algunas pinceladas sobre colapso gravitatorio.

Para estudiar el proceso de colapso, el espacio-tiempo usualmente se divide en dos regiones bien diferenciadas, el interior de un cuerpo masivo y su exterior. La métrica exterior generada por el objeto masivo aislado es modelada por la llamada *solución de vacío asintóticamente plana* (daremos una definición precisa en el Capítulo 2). Los espacio-tiempos asintóticamente planos requieren restricciones "lejos" de las fuentes. Más concretamente se pide que la métrica y un número finito de sus derivadas se aproximen a los valores de Minkowski con un ritmo adecuado en la región alejada. El límite puede tomarse a lo largo de direcciones luminosas (infinito luminoso) o direcciones espaciales (infinito espacial). Como consecuencia, existen varias nociones de asintoticidad plana.

El descubrimiento de la solución de vacío de Schwarzshild de las ecuaciones de campo de Einstein en 1915, combinado con el trabajo de Oppenheimer, Snyder, y Volkoff [29, 30] en 1939 sobre el colapso gravitatorio, permite comprender el proceso completo de colapso de una estrella sin rotación esféricamente simétrica y la consiguiente "formación" de un *agujero negro de Schwarzshild* y de una *singularidad*.

Los agujeros negros son un posible desenlace del colapso gravitatorio. Otro, y de hecho más genérico es la existencia de singularidades. De hecho, hay teoremas en RG que prueban que bajo ciertas circunstancias generales cuando el colapso ha pasado un cierto punto la formación de una *singularidad* es inevitable (ver por ejemplo [16, 38]). La definición básica de singularidad es la existencia de curvas no necesariamente geodésicas, incompletas, e inextendibles en el espacio-tiempo. Para que esta definición tenga sentido es necesario que el espacio-tiempo sea asimismo inextendible.

La teoría de singularidades se desarrolló mayormente en los 60. El primer teorema de singularidades fue publicado por Penrose en 1965 [31], el cual probó incompletitud geodésica luminosa bajo condiciones iniciales bastante generales que describían estados de colapso. Esto se indicó por la presencia de una *superficie atrapada cerrada*. El uso de tales superficies ayudó a probar muchos otros importantes teoremas de singularidades, incluyendo el más importante debido a Hawking y Penrose en 1970 [17]. Estos teoremas son notables puesto que pueden aplicarse a situaciones cosmológicas, al colapso de una estrella o galaxia y a la colisión de ondas gravitacionales.

Un tema fundamental es si las singularidades y los agujeros negros siempre vienen juntos cuando el colapso gravitatorio ocurre. Más específicamente, en un contexto de colapso gravitatorio, una posibilidad es que un *horizonte de sucesos* comience a formarse en una fase lo suficientemente temprana como para que la estrella que colapsa y la consiguiente singularidad queden escondidas dentro del horizonte de sucesos. En este caso ni siquiera la luz puede escapar y alcanzar a un observador que se encuentre alejado en la región exterior. El espacio-tiempo contiene una "región de no escape" no vacía, que está causalmente desconectada del infinito luminoso futuro. Un espacio-tiempo que satisface esta propiedad se llama *agujero negro*. Los teoremas de singularidades de Hawking y Penrose no afirman que una singularidad cubierta se forme necesariamente a consecuencia del colapso gravitatorio. Por otra parte, si la formación del horizonte de sucesos se retrasa lo suficiente (o no se forma) durante el colapso, el resultado es una *singularidad desnuda*, y radiación de la singularidad podría escapar al infinito. Esto podría ocurrir por ejemplo si la formación de la singularidad en el centro de la estrella esférica que colapsa se hallara en el pasado causal del instante en que la superficie de la estrella alcanzara su radio de Schwarzschild.

Se ha probado que las singularidades desnudas son posibles, e.g. en el colapso de polvo cósmico inhomogéneo esféricamente simétrico, dependiendo de la naturaleza del dato inicial. Sin embargo, se acepta ampliamente que la hipótesis de simetría juega un papel importante para la existencia de tales modelos. El desenlace del colapso gravitatorio es crucial para el problema de la predictabilidad asintótica. La diferencia entre los dos tipos de singularidades es muy significativa. En un espacio-tiempo que desarrolla una singularidad desnuda, habría una pérdida total de predictabilidad en el futuro del punto singular. En el caso de la singularidad cubierta, la predictabilidad se mantendría al menos en la región del espacio-tiempo fuera del horizonte. Este hecho tiene gran importancia para la astrofísica y la teoría de agujeros negros. La validez de muchos teoremas acerca de la dinámica de agujeros negros depende de la hipótesis de la ausencia de singularidades desnudas.

La conjetura que afirma que, *genéricamente*, las singularidades del colapso gravitatorio están contenidas en agujeros negros fue propuesta por Penrose en 1969 y se conoce como la *conjetura de la censura cósmica débil* [32]. En términos físicos, la idea principal detrás de esta conjetura es que cualquier observador que esté lo suficientemente lejos de un objeto que colapsa no encontrará ni singularidades ni efectos que vengan de ellas. En otras palabras, la censura cósmica débil conjetura que observadores distantes pueden vivir su vida libres de los sucesos catastróficos que ocurren en la región de colapso del espacio-tiempo. Como consecuencia, si surgen singularidades, no pueden ser vistas desde infinito. Como ya se ha mencionado, el resultado del colapso no es siempre un agujero negro y una singularidad desnuda puede ocurrir en algunas situaciones. Aún así, la cuestión más importante es la *genericidad* y *estabilidad* de tales singularidades desnudas que surgen de un dato inicial regular. La censura cósmica débil se cumpliría en caso que el subespacio de datos iniciales que da lugar a singularidades desnudas tuviera medida cero según cierta medida apropiada. En otras palabras, la censura cósmica débil permite singularidades desnudas, siempre y cuando no sean genéricas. Otra conjetura relacionada, llamada *conjetura de la censura cósmica fuerte*, también formulada por Penrose en 1979 [34], afirma que, *genéricamente*, las singularidades temporales nunca pueden ocurrir, de forma que un observador que cae en un agujero negro nunca "verá" la singularidad.

Hasta el momento ninguna versión de la censura cósmica débil ha sido demostrada en completa generalidad. Uno de los problemas principales es que el horizonte de sucesos es una característica que depende de todo el comportamiento futuro de la solución de las ecuaciones de campo en un período de tiempo infinito. Cualquier prueba de la censura cósmica débil requiere un conocimiento mucho más profundo de las propiedades globales generales de las ecuaciones de Einstein que el que tenemos hoy en día. Una posible vía para abordar el problema es estudiar la estabilidad de espacio-tiempos particularmente relevantes.

Como veremos en detalle en el Capítulo 2, la conjetura de la censura cósmica débil junto con suposiciones adicionales físicamente razonables implican la desigualdad que es el núcleo de esta tesis: *la desigualdad de Penrose*. Esta desigualdad involucra el concepto de masa/energía del espacio-tiempo, y el área de superficies relacionadas con agujeros negros quasi-locales. La energía total está definida en términos de integrales en la correspondiente región asintótica, donde la métrica es cercana a Minkowski, y su definición depende del infinito elegido, espacial o luminoso. En cualquier caso, ambas energías están definidas como componentes de dos respectivos vectores: el vector energía-momento ADM donde la integral se calcula en el infinito espacial, y el vector energía-momento de Bondi donde la integral se toma en el infinito luminoso. Ambos se transforman como vectores de Lorentz bajo transformaciones apropiadas, y sus longitudes Lorentzianas se denominan masas (masa ADM y masa de Bondi respectivamente). La masa ADM es una cantidad conservada en la evolución y la masa de Bondi es monótona decreciente con respecto al tiempo retardado. Más información sobre tales vectores energía-momento puede encontrarse e.g. en [41]. Estas diferentes masas originan diferentes versiones de la desigualdad de Penrose.

En esta tesis centraremos principalmente nuestra atención en la llamada *desigualdad de Penrose luminosa*, que como su nombre indica, está relacionada con el vector energía-momento de Bondi del espacio-tiempo. A pesar de ello, en esta introducción y, por completar el argumento, también discutimos brevemente la "versión espacial". En 1973, Penrose [33] llegó a la conclusión de que la masa ADM de un espacio-tiempo asintóticamente plano debería ser al menos la masa del agujero negro que contiene, si la densidad de energía es no negativa en todas partes. El argumento heurístico de Penrose (en parte basado en la hipótesis de la censura cósmica débil y que será expuesta en el próximo capítulo en detalle) le condujo a formular la llamada *conjetura de la desigualdad de Penrose* (las definiciones precisas serán dadas más tarde):

Conjetura 1.1 (**La desigualdad de Penrose para la masa ADM en espacio-tiempos asintóticamente planos).** *Sea (M, g) un espacio-tiempo de cuatro dimensiones que satisface la condición dominante de energía, y que admite una hipersuperficie espacial asintóticamente plana (Σ, γ, K). Asumamos que Σ contiene una superficie débilmente atrapada hacia el exterior S (i.e. con vector curvatura media causal y futuro) cerrada (compacta y sin frontera). Entonces*

$$M_{ADM} \geq \sqrt{\frac{|\mathcal{S}_{\min}(S)|}{16\pi}},$$

donde M_{ADM} es la masa ADM del espacio-tiempo, y $\mathcal{S}_{\min}(S)$ es la superficie de área *mínima necesaria para encerrar a S (i.e. la más externa de todas las superficies en Σ que encierran a S y tienen igual o menor área que cualquier superficie que encierra a S). Es más, si se alcanza la igualdad, (Σ, γ, K) puede ser embebido isométricamente en el espacio-tiempo de Schwarzschild.*

Aunque el argumento heurístico de Penrose fue originalmente formulado en un contexto de cuatro dimensiones, la desigualdad de Penrose para la masa ADM en espacio-tiempos asintóticamente planos puede también formularse en dimensión arbitraria. La forma de la desigualdad en un espacio-tiempo $(n+2)$-dimensional es

$$M_{ADM} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{|\mathcal{S}_{\min}(S)|}{\omega_n}\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

donde ω_n es el área de la n-esfera unitaria.

Exponemos a continuación la forma de la *desigualdad de Penrose luminosa*, que es el tema principal de esta tesis. Esta desigualdad involucra espacio-tiempos que admiten una hipersuperficie luminosa Ω que se extiende regularmente al infinito pasado luminoso La forma precisa para la conjetura de Penrose en este contexto es

Conjetura 1.2 (La desigualdad de Penrose para la masa de Bondi en espacio-tiempos asintóticamente planos). *Sea (M, g) un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, asintóticamente plano en el infinito luminoso, que satisface al condición dominante de energía, y que admite una hipersuperficie luminosa Ω que se extiende regularmente a infinito luminoso pasado. Asumamos que Ω tiene una superficie débilmente atrapada hacia el exterior S cerrada y embebida. Entonces*

$$M_B \geq \sqrt{\frac{|S|}{16\pi}}, \tag{1.1}$$

donde M_B es la masa de Bondi del espacio-tiempo determinada por el corte de Ω con el infinito pasado luminoso. Además, la desigualdad pasa a ser igualdad si y sólo si Ω es isométrica (intrínsecamente y extrínsecamente) a una hipersuperficie luminosa esféricamente simétrica en el espacio-tiempo de Schwarzshild.

La construcción original que llevó a Penrose a formular su desigualdad en 1973 es una capa delgada de polvo luminoso que colapsa en el espacio-tiempo de Minkowski y que, después de pasar, deja dos regiones bien diferenciadas separadas por una hipersuperficie luminosa a lo largo de la cual la capa delgada se propaga. La región interior es isométrica al espacio-tiempo de Minkowski, mientras que la región exterior no es plana. Una vez que una sección transversa S de Ω se elige, el contenido de la capa delgada puede ajustarse de tal forma que S sea una superficie débilmente atrapada hacia el exterior con respecto a la geometría exterior. La ventaja crucial de la construcción es que la desigualdad (1.1) puede reescribirse exclusivamente en términos de la geometría interior (daremos los detalles de la construcción en el siguiente capítulo). Específicamente, la forma equivalente de (1.1) en dimensión arbitraria en términos de la geometría de Minkowski es

$$\int_S \theta_\ell \boldsymbol{\eta_S} \geq n(\omega_n)^{\frac{1}{n}} |S|^{\frac{n-1}{n-}}, \tag{1.2}$$

donde θ_ℓ es la expansión luminosa exterior de S, y ω_n es el área de la n-esfera. Nos referiremos a la desigualdad (1.2) como la *desigualdad de Penrose para capas delgadas en Minkowski*.

En esta tesis hemos estudiado la desigualdad de Penrose luminosa en detalle. Hemos sido capaces de probar la desigualdad en algunos casos y de dar una prueba completa de una desigualdad tipo-Penrose. Los métodos generales presentados aquí abren nuevas posibilidades para abordar el problema. De hecho, un reciente trabajo de Roesch [36] usa como herramienta clave el resultado principal de [27] correspondiente en esta tesis al Teorema 6.13 del Capítulo 6. Aprovechando el límite de la energía de Hawking a lo largo de Ω Roesch es capaz de probar la desigualdad de Penrose luminosa en caso que Ω admita una foliación geodésica satisfaciendo ciertas restricciones.

2

Fundamentos para la desigualdad de Penrose

Todas las variedades en esta tesis serán diferenciables y Hausdorff. Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana orientada de dimensión m de signatura arbitraria. Los tensores en M llevan índices griegos y denotamos por ∇ la conexión de Levi-Civita en M. La convención que usaremos para el tensor de curvatura es

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

donde X, Y, Z son campos vectoriales en M. El tensor de Riemann Riem^g de (M, g) se define en términos del tensor de curvatura mediante $\mathrm{Riem}^g(X, Y, Z, T) := g(T, R(Z, T)Y)$. Contrayendo el primer y tercer índices de Riem^g, obtenemos el tensor de curvatura de Ricci $\mathrm{Ric}^g(X, Y) = \mathrm{tr}_g\left(\mathrm{Riem}^g(\cdot, X, \cdot, Y)\right)$, y su traza es la curvatura escalar Scal^g. El tensor de Einstein Ein^g de (M, g) es

$$\mathrm{Ein}^g = \mathrm{Ric}^g - \frac{1}{2}\mathrm{Scal}^g g.$$

Las variedades embebidas jugarán un papel relevante en este trabajo. Los objetos básicos son los que siguen: sea N una subvariedad n-dimensional embebida en (M, g) con primera forma fundamental γ no degenerada. La fórmula de Gauss relaciona la conexión ambiente ∇ con la conexión inducida ∇^N mediante la fórmula

$$\nabla_X Y = \nabla^N_X Y + (\nabla_X Y)^\perp, \tag{2.1}$$

para cualesquiera vectores X, Y tangentes a N, donde '$^\perp$' es el operador que da la componente ortogonal a N de un vector. El segundo término del lado derecho de (2.1) define el llamado vector segunda forma fundamental.

Definición 2.1 (**Vector segunda forma fundamental).** *El vector segunda forma fundamental de N como variedad embebida en M es el tensor de tipo* $(1, 2)$

$$\vec{K}(X, Y) = -(\nabla_X Y)^\perp. \tag{2.2}$$

El vector segunda forma fundamental es por construcción, ortogonal a N. $\vec{K}$ también es simétrico en X, Y.

Definición 2.2 (**Vector curvatura media).** *La traza $\vec{H}$ del vector segunda forma fundamental con respecto a la métrica inducida en N es el vector curvatura media, i.e.*

$$\vec{H} := tr_N \vec{K}.$$

Consideremos un campo vectorial ν normal a N, i.e. un vector ν que satisface $\nu(p) \in T_pN^\perp \ \forall p \in N$.

Definición 2.3 (**Tensor segunda forma fundamental a lo largo de $\boldsymbol{\nu}$).** *El tensor segunda forma fundamental a lo largo de ν se define como*

$$K^\nu(X,Y) \equiv \langle \nu, \vec{K}(X,Y)\rangle_g = -\langle \nu, \nabla_X Y\rangle_g = \langle \nabla_X \nu, Y\rangle_g, \quad con \quad X, Y \in \Gamma(TN).$$

El tensor segunda forma fundamental es simétrico, i.e. $K^\nu(X,Y) = K^\nu(Y,X)$, a consecuencia de la simetría de $\vec{K}$.

Definición 2.4 (**Expansión a lo largo de $\boldsymbol{\nu}$).** *La expansión de N a lo largo de ν, denotada por θ_ν, es la función*

$$\theta_\nu = tr_N(K^\nu).$$

Definición 2.5 (**Forma de volumen).** *La forma de volumen $\boldsymbol{\eta_M}$ de (M, g) es la m-forma*

$$(\boldsymbol{\eta_M})_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \sqrt{|\det g|}\epsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$$

en cualquier carta coordenada del atlas orientado asociado, donde $\epsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ es el símbolo Levi-Civita y $\det g$ *es el determinante de g en esta carta.*

Todo lo dicho es válido para cualquier signatura. Para definir la noción de espacio-tiempo necesitamos el concepto de **orientabilidad temporal** y **orientación temporal**:

Definición 2.6. *Una variedad Lorentziana (M, g) es orientable temporalmente si y sólo si existe un campo vectorial $u \in \mathfrak{X}(M)$ que es temporal en todas partes. En este caso una orientación temporal es una elección de un campo vectorial temporal u que es declarado como futuro.*

Definición 2.7 (**Espacio-tiempo).** *Un espacio-tiempo (M, g) es una variedad de Lorentz m-dimensional, conexa y orientable, dotada de una orientación temporal.*

La métrica g satisface las ecuaciones de campo de Einstein, que toma la forma

$$\mathrm{Ein}^g + \Lambda g = \chi T, \quad \chi = \frac{8\pi G}{c^4},$$

donde G es la constante gravitacional de Newton, c es la velocidad de la luz en el vacío, T es el tensor energía-momento de todos los campos no gravitatorios y Λ es la constante cosmológica.

Las condiciones de energía están normalmente definidas en términos del tensor energía-momento T. Podemos expresarlas en términos del tensor de Einstein Ein^g porque en nuestro contexto la constante cosmológica Λ es nula. Definiendo las condiciones de energía directamente en términos de Ein^g podemos olvidarnos de las ecuaciones de campo de Einstein de forma que todos nuestros resultados sean aplicables a cualquier teoría geométrica de la gravedad. Las condiciones de energía que usamos son

Definición 2.8. *Sea (M, g) un espacio-tiempo. Entonces*

- *(M, g) satisface la* **condición nula de energía** *si el tensor de Einstein Ein^g satisface $\mathrm{Ein}^g(k, k) \geq 0$ para cualquier vector luminoso $k \in \mathfrak{X}(M)$.*
- *(M, g) satisface la* **condición dominante de energía** *si el tensor de Einstein Ein^g satisface que $-{\mathrm{Ein}^g}^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu}|_p$ es un vector causal futuro para cualquier vector causal futuro $X \in \mathfrak{X}(M)$ y todo $p \in M$ (o equivalentemente cuando $\mathrm{Ein}^g(X, Y) \geq 0$ para cualquier par de vectores causales futuros).*

Observación 2.9. Nótese que la condición nula de energía es obviamente más débil que condición dominante de energía.

En términos físicos, la condición dominante de energía significa que cualquier observador mide una densidad de energía positiva para el campo y que la energía fluye a una velocidad acotada por c.

Sea S una superficie compacta, embebida, orientada y de codimensión dos en un espacio-tiempo (M, g) m-dimensional. El vector curvatura media $\vec{H}$ de S juega un papel importante puesto que la superficie S puede ser clasificada con respecto a su carácter causal. Puesto que la superficie es de codimensión dos, podemos considerar una base luminosa futura de vectores $\{k, \ell\}$ normales a S y normalizados tal que $\langle k, \ell \rangle = -2$. En este caso el vector curvatura media se descompone en la forma

$$\vec{H} = -\frac{1}{2} \left(\theta_\ell k + \theta_k \ell \right).$$

Definición 2.10. *Una superficie cerrada es*

- **Superficie atrapada hacia el futuro** *si $\theta_k < 0$ y $\theta_\ell < 0$. O equivalentemente, si $\vec{H}$ es temporal y futuro.*
- **Superficie débilmente atrapada hacia el futuro** *si $\theta_k \leq 0$ y $\theta_\ell \leq 0$. O equivalentemente, si $\vec{H}$ es causal y futuro.*

- **Superficie marginalmente atrapada hacia el futuro** *si o bien,* $\theta_k = 0$ *y* $\theta_\ell \leq 0$ *en todas partes, ó,* $\theta_k \leq 0$ *y* $\theta_\ell = 0$ *en todas partes. Equivalentemente, si* $\vec{H}$ *es futuro y es o bien proporcional a* k *o proporcional a* ℓ *en todas partes.*

En dimensión cuatro, la energía de Hawking de la superfice S, con S superficie espacial cerrada con topología esférica es

Definición 2.11 (**Energía de Hawking).** *La energía de Hawking de* S *está definida por*

$$m_H(S) = \sqrt{\frac{|S|}{16\pi}}\left(1 - \frac{1}{16\pi}\int_S \vec{H}^2 \boldsymbol{\eta_S}\right), \tag{2.3}$$

donde $\vec{H}$ *es el vector curvatura media de* S *y* $|S|$ *es el área de* S*.*

La noción de espacio-tiempo asintóticamente plano es apropiada para describir objetos aislados. Hay dos nociones de espacio-tiempos asintóticamente planos dependiendo del infinito considerado. Comenzamos con la asintoticidad plana en el infinito espacial.

Definición 2.12. *Un* **final asintóticamente plano** *de una hipersuperficie espacial* Σ *con primera forma fundamental* g *y segunda forma fundamental* K *es un subconjunto* $\Sigma_0^\infty \subset \Sigma$ *que es difeomorfo a* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R}$*, donde* B_R *es una bola abierta de radio* R*. Es más, en coordenadas Cartesianas* $\{x^i\}$ *inducidas por el difeomorfismo, las siguientes condiciones de decaimiento se cumplen:*

$$\mathrm{Scal}^g = O(r^{-4}), \quad \nabla_b^\Sigma (K^b{}_a - (tr_g K)\delta^b{}_a) = O(r^{-4}), \tag{2.4}$$

donde $r = |x| = \sqrt{x^a x^b \delta_{ab}}$, Scal^g *es la curvatura escalar de* g *y* ∇^Σ *es la conexión Levi-Civita de* Σ*.*

Definición 2.13 (**Hipersuperficie espacial asintóticamente plana).** *Una hipersuperficie espacial* Σ *con primera forma fundamental* g *y segunda forma fundamental* K*, posiblemente con frontera, es* **asintóticamente plana** *si* $\Sigma = \mathcal{K} \cup \Sigma^\infty$*, donde* $\mathcal{K}$ *es un conjunto compacto y* $\Sigma^\infty = \bigcup_i \Sigma_i^\infty$ *es una unión finita de finales asintóticamente planos* Σ_i^∞*.*

Definición 2.14 (**Espacio-tiempo asintóticamente plano en el infinito espacial).** *Un espacio-tiempo es asintóticamente plano en el infinito espacial si admite una hipersuperficie espacial asintóticamente plana.*

Caracterizaremos a continuación los espacio-tiempos asintóticamente planos en el infinito luminoso. Para ello necesitaremos recordar que dado $A \subset M$, $J^+(A)$ y $J^-(A)$ son el futuro y pasado causal del conjunto A respectivamente. Para definir el concepto de espacio-tiempo asintóticamente plano en el infinito luminoso, consideramos una compactificación del espacio-tiempo (ver e.g. [41] para las definiciones), donde el infinito espacial se denota por i^0, y las hipersuperficies que representan el infinito pasado y futuro luminoso se denotan por $\mathscr{I}^-$ y $\mathscr{I}^+$ respectivamente.

Definición 2.15 (**Espacio-tiempo asintóticamente plano en el infinito luminoso).** *Se dice que un espacio-tiempo (M, g) es asintóticamente plano en el infinito luminoso si existe una variedad $\overline{M}$ con frontera, con métrica diferenciable $\overline{g}$, y una isometría conforme de M al interior de $\overline{M}$ con factor conforme Ω. La frontera $\mathscr{I}$ de $\overline{M}$ satisface las siguientes condiciones:*

(i) *$\mathscr{I}$ se escribe como la unión disjunta de dos piezas $\mathscr{I}^+$ y $\mathscr{I}^-$, tal que $\mathscr{I}^+ \cap J^-[\mathrm{int}(M)] = \emptyset$ y $\mathscr{I}^- \cap J^+[\mathrm{int}(M)] = \emptyset$.*

(ii) *Ω se extiende a una función C^∞ en todo $\overline{M}$. En $\mathscr{I}^+$ y $\mathscr{I}^-$ tenemos $\Omega = 0$ y $d\Omega \neq 0$.*

(iii) *La topología de cada componente conexa de $\mathscr{I}$ es $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.*

(iv) *Existe una función diferenciable f definida en $\overline{M}$, con $f > 0$ en $M \cup \mathscr{I}^+ \cup \mathscr{I}^-$ y que satisface $\overline{\nabla}_\alpha(f^4 n^\alpha) = 0$ en $\mathscr{I}^+ \cup \mathscr{I}^-$ (donde $\overline{\nabla}_\alpha$ es la conexión asociada a $\overline{g}$), y tal que el campo vectorial $f^{-1}n^\alpha$ es completo en $\mathscr{I}^+ \cup \mathscr{I}^-$.*

Ambos tipos de asintoticidad se combinan en el siguiente definición:

Definición 2.16 (**Espacio-tiempo asintóticamente plano).** *Un espacio-tiempo (M, g) es asintóticamente plano si es asintóticamente plano en el infinito luminoso y admite una hipersuperficie espacial asintóticamente plana.*

En un espacio-tiempo asintóticamente plano existe una noción de energía total de un sistema aislado que es descrita mediante el *cuadrivector de energía-momento P*. Este vector se define en un espacio-tiempo de Minkowski abstracto con métrica η. La componente temporal de este vector es la energía E del espacio-tiempo, y el resto de componentes definen un tres-momento espacial p. Su longitud Minkowskiana es la masa total del espacio-tiempo.

El tipo de infinito que consideramos define el cuadrivector energía-momento correspondiente. El cuadrimomento ADM (Arnowitt, Deser, Misner) $P_{ADM} = (E_{ADM}, p_{ADM})$ está asociado a espacio-tiempos que son asintóticamente planos en el infinito espacial i^0, y el cuadrivector energía-momento de Bondi $P_B = (E_B, p_B)$ es medido en un corte S_∞ del infinito luminoso $\mathscr{I}$, donde S_∞ es una sección espacial de la hipersuperficie luminosa $\mathscr{I}$. El cuadrimomento de Bondi depende del corte y se aproxima al cuadrimomento ADM en i^0 bajo condiciones apropiadas [44].

La energía ADM representa la energía total disponible en el espacio-tiempo, mientras que la energía de Bondi es interpretada como la energía sobrante en el espacio-tiempo con respecto al "tiempo retardado" determinado por la sección transversa S_∞ de $\mathscr{I}^+$, después de la emisión de radiación gravitacional.

Tanto la energía ADM como la de Bondi forman parte de las distintas versiones de la desigualdad de Penrose. El argumento heurístico ideado por Penrose para la formulación de la conjetura de la desigualdad de Penrose se basa en *conjetura de la censura cósmica débil*. Como ya se mencionó en la Introducción, esta conjetura afirma en pocas palabras que las singularidades están siempre escondidas en un *agujero negro*.

Un espacio-tiempo (M, g) es un agujero negro si es asintóticamente plano en el infinito luminoso y si hay sucesos causalmente desconectados de la región asintótica, i.e. no hay curvas causales que comenzando en el suceso en cuestión alcancen la región asintótica. La región de agujero negro $\mathcal{B}$ del espacio-tiempo está definida como

$$\mathcal{B} = M \setminus I^-(\mathscr{I}^+),$$

donde el pasado cronológico I^- está considerado en el espacio-tiempo conformemente completado. El *horizonte de sucesos* $\mathcal{H}$ del agujero negro está definido como la frontera de $\mathcal{B}$ en M

$$\mathcal{H} = \partial\mathcal{B}.$$

El horizonte de sucesos $\mathcal{H}$ es la frontera topológica de la región de agujero negro. $\mathcal{H}$ es una hipersuperficie luminosa (de Lipschitz) gobernada por geodésicas luminosas futuras inextendibles [16].

Un enunciado más preciso de la conjetura de la censura cósmica débil es el siguiente:

Conjetura de la censura cósmica débil: Sea $(\Sigma, g, K; \psi)$ un dato inicial asintóticamente plano de las ecuaciones de campo de Einstein con materia *apropiada* (donde ψ representa los campos de materia). Entonces, *genéricamente*, su evolución de Cauchy maximal es asintóticamente plana en el infinito luminoso futuro, con $\mathscr{I}^+$ completo.

Estamos ahora en condiciones de describir el argumento heurístico de Penrose para la formulación de su desigualdad. Uno de los resultados que se utilizan en tal argumento es que en espacio-tiempos que satisfacen la condición nula de energía, el horizonte de sucesos satisface el *teorema del área*, que esencialmente dice que en tales espacio-tiempos el área de las secciones transversas del horizonte de sucesos crece con el tiempo [14, 15, 8].

Por otra parte, se espera que todo agujero negro se asiente asintóticamente a un estado estacionario en un futuro distante, y se espera que el espacio-tiempo asintótico sea de electrovacío y estacionario. El teorema de unicidad para agujeros negros (ver e.g. [7, 18]) puede aplicarse para concluir que la región exterior del agujero negro asintótico es isométrica a la región exterior de un agujero negro de Kerr-Newman, en que todas las secciones S del horizonte de sucesos $\mathcal{H}$ son isométricas entre sí y tienen área

$$|S| \leq 16\pi m^2,$$

donde m es la masa del agujero negro de Kerr Newman.

La masa de Bondi M_B decrece hacia el futuro y su límite en i^0 es la masa ADM M_{ADM}. Recordemos que la masa de Bondi del espacio-tiempo de Kerr-Newman es m. Usando esta información, Penrose obtuvo la siguiente cadena de desigualdades:

$$|\mathcal{H}_\Sigma| \le |\mathcal{H}_{\Sigma_\infty}| \le 16\pi m^2 \le 16\pi M_B^2 \le 16\pi M_{ADM}^2,$$

donde la primera desigualdad es consecuencia del teorema del área, la segunda es una propiedad del espacio-tiempo de Kerr-Newman, y las dos últimas son consecuencias de las propiedades del vector energía-momento total en un espacio-tiempo asintóticamente plano.

La desigualdad resultante $|\mathcal{H}_\Sigma| \le 16\pi M_{ADM}^2$ no involucra ninguna propiedad asintótica en el futuro, pero involucra el horizonte de sucesos, que es un concepto global en el espacio-tiempo. A priori uno no sabe si el horizonte de sucesos existe o dónde se encuentra. La segunda observación principal de Penrose fue que el paradigma de colapso gravitatorio también implicaba una desigualdad "local en el tiempo" como describimos a continuación.

Algunos campos gravitatorios fuertes pueden ser detectados por la presencia de superficies débilmente atrapadas hacia el futuro. Consideremos un espacio-tiempo asintóticamente plano (M, g) que satisface la condición dominante de energía. Asumamos que el espacio-tiempo contiene una superficie débilmente atrapada hacia el exterior S embebida en una hipersuperficie espacial asintóticamente plana Σ con un final. Bajo estas hipótesis se sigue [31, 13] (ver también [38] para una review de singularidades) que el espacio-tiempo (M, g) tiene una singularidad. Bajo la conjetura de la censura cósmica débil, esta singularidad está cubierta por un horizonte de sucesos y M es necesariamente un agujero negro. Una propiedad fundamental de los espacio-tiempos de agujero negro es que cualquier superficie débilmente atrapada hacia el exterior S está necesariamente contenida en la región de agujero negro [41, 9]. Consideremos la hipersuperficie espacial Σ que contiene a S. Esta hipersuperficie interseca al horizonte de sucesos en una sección transversa $\mathcal{H}_\Sigma$. Si el área de S fuera menor que el área de $\mathcal{H}_\Sigma$, se seguiría

$$|S| \le |\mathcal{H}_\Sigma| \le 16\pi M_B^2 \le 16\pi M_{ADM}^2, \tag{2.5}$$

i.e. $|S| \le 16\pi M_{ADM}^2$, que sólamente involucra la geometría de la hipersuperficie espacial Σ. El problema es que no es necesariamente cierto que $|S| \le |\mathcal{H}_\Sigma|$, puesto que del hecho de que $\mathcal{H} \cap \Sigma$ encierre a S no se sigue que su área sea necesariamente mayor. El problema se resuelve si consideramos la superficie de área mínima necesaria para encerrar a S, que denotaremos por $\mathcal{S}_{\min}(S)$, y que satisface $|\mathcal{S}_{\min}(S)| \le |\mathcal{H} \cap \Sigma|$. De (2.5), se sigue

$$M_{ADM} \ge \sqrt{\frac{|\mathcal{S}_{\min}(S)|}{16\pi}},$$

y considerando el supremo entre todas las superficies débilmente atrapadas hacia el exterior, obtenemos finalmente

$$M_{ADM} \ge \sup \sqrt{\frac{|\mathcal{S}_{\min}(S)|}{16\pi}}.$$

Así llegamos a las dos desigualdades

$$|\mathcal{S}_{\min}(S)| \leq 16\pi M_B^2 \quad \text{y} \quad |\mathcal{S}_{\min}(S)| \leq 16\pi M_{ADM}^2. \tag{2.6}$$

Para estas desigualdades no se requiere saber nada acerca del futuro del espacio-tiempo. Las desigualdades (2.6) se llaman **desigualdades de Penrose** y son el tema principal de este trabajo.

En esta tesis nos concentramos en la llamada **desigualdad de Penrose luminosa**. Para este caso, asumimos que (M, g) admite una hipersuperficie luminosa Ω que se extiende regularmente hasta el infinito pasado luminoso $\mathscr{I}^-$ y que contiene una superficie débilmente atrapada hacia el exterior S. Usando un argumento análogo al que acabamos de ver, se sigue que

$$|S| \leq 16\pi M_B^2(\Omega) \leq 16\pi E_B^2(\Omega).$$

La desigualdad $|S| \leq 16\pi E_B^2(\Omega)$ es la llamada **desigualdad de Penrose luminosa** y sólamente involucra la geometría a lo largo de Ω.

Un caso particular e interesante de la desigualdad de Penrose luminosa es la obtenida mediante la construcción original de Penrose [33] en 1973, que consiste en el colapso de una capa delgada de polvo cósmico que se mueve hacia el interior del espacio-tiempo de Minkowski. La capa delgada separa el espacio-tiempo en dos componentes. La interior tiene una métrica de Minkowski y la exterior no es plana. Las dos componentes están unidas por una hipersuperficie luminosa. Uno de los objetivos principales de este capítulo es recuperar la expresión para capas delgadas que Penrose descubrió para su desigualdad. La cálculos que haremos con capas delagadas en relación a esta desigualdad están basados en resultados de Mars presentados en [23, 24].

La capa delgada considerada por Penrose tiene topología $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y la materia de la que ésta está compuesta es polvo luminoso (las partículas no tienen masa y todas las presiones son nulas). Para tener una métrica plana en el interior de la capa delgada, es necesario que ningún punto en el interior esté en el futuro causal de la misma. El polvo que colapsa puede emitir ondas gravitatorias que alteran la métrica del espacio-tiempo fuera de la capa delgada, por lo que cuando ésta ha pasado la métrica ya no continúa siendo plana.

Sea t un tiempo Minkowskiano elegido en el interior de la capa delgada. Sea k el vector luminoso futuro tangente a Ω y normalizado mediante $k(t) = 1$. Consideremos cualquier superficie S cerrada, espacial y embebida en Ω y sea $\boldsymbol{\ell}$ su normal luminosa futura transversa a Ω y que satisface $\langle k, \boldsymbol{\ell}\rangle = -2$. El tensor energía momento del espacio-tiempo es una distribución con soporte en Ω y que se expresa $T_{\alpha\beta} = 8\pi\rho k_\alpha k_\beta \boldsymbol{\delta}$, donde ρ es la densidad de energía de la capa delgada y la delta $\boldsymbol{\delta}$ de Dirac está definida con respecto a la forma de volumen inducida por la normal k en Ω. Los tensores que estén definidos con respecto a la geometría exterior llevarán un $+$, y los definidos con respecto a la interior un $-$. La expansión luminosa θ_ℓ salta a través de Ω, y este salto puede ser determinado usando la ecuación de Raychaudhuri (ver e.g [41]) y algunas propiedades de la delta $\boldsymbol{\delta}$ de Dirac (ver e.g. [22]). De todas formas, calculamos este salto de una manera independiente.

Supongamos que el espacio-tiempo exterior (M^+, g^+) satisface la condición dominante de energía y que existe una sección transversal compacta S que satisface $\theta_\ell^+ = 0$ (i.e. S es una superfice marginalmente atrapada hacia el exterior después de que la capa delgada haya pasado). Veremos posteriormente que dada cualquier sección transversa $S \subset \Omega$ la capa delgada siempre puede elegirse de forma que S sea una superfice marginalmente atrapada hacia el exterior con respecto a la geometría externa. Usando el argumento heurístico descrito anteriormente, se sigue

$$E_B^+ \geq \sqrt{\frac{|\mathcal{H} \cap \Omega|}{16\pi}} \geq \sqrt{\frac{|S|}{16\pi}}, \tag{2.7}$$

donde E_B^+ es la energía de Bondi del infinito luminoso pasado en el corte definido por Ω en el espacio-tiempo exterior.

La gran idea de la construcción de Penrose para capas delgadas es que esta desigualdad puede expresarse completamente en términos de la geometría interior usando las propiedades de las capas delgadas. Por otra parte, la energía de Bondi puede calcularse usando límites en el infinito de la energía de Hawking a lo largo de foliaciones apropiadas.

Las superficies de nivel de la función $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ solución de la ecuación $k(\lambda) = -1$ con valor inicial $\lambda|_{S_0} = 0$ definen una foliación de superficies $\{S_\lambda\}$, a lo largo de Ω con $S_{\lambda_0} = \{p \in \Omega : \lambda(p) = \lambda_0\}$. En coordenadas adaptadas, $k = -\partial_\lambda$. La normalización $k(t) = 1$, hace que $\{S_\lambda\}$ tienda a grandes esferas. Por tanto se sigue que

$$\lim_{\lambda\to\infty} [M_H(S_\lambda)] = E_B^+, \tag{2.8}$$

puesto que la energía de Bondi de Minkowski es nula.

Está claro que para calcular el lado izquierdo necesitamos evaluar el salto de la energía de Hawking a través de las hojas de la foliación $\{S_\lambda\}$ de Ω. De (2.3) tenemos

$$[M_H(S_\lambda)] = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{\frac{|S_\lambda|}{16\pi}} \int_{S_\lambda} [\vec{H}^2]\eta_{S_\lambda}. \tag{2.9}$$

Consideremos el vector luminoso ℓ ortogonal a cada S_λ y normalizado por $g(k, \ell) = -2$. La descomposición de $\vec{H}$ en la base $\{k, \ell\}$ es $\vec{H} = -\frac{1}{2}\theta_\ell k - \frac{1}{2}\theta_k \ell$, y por tanto

$$[\vec{H}^2] = -\theta_k[\theta_\ell],$$

donde hemos usado que $[\theta_k] = 0$, pues es una propiedad intrínseca a Ω.

En el caso de capa delgada de polvo luminoso, tenemos la libertad de elegir parte del salto de la geometría transversa. Se puede realizar de modo que

$$[\theta_\ell] = \theta_\ell^+ - \theta_\ell^- = -16\pi\rho, \tag{2.10}$$

y entonces (2.9) queda

$$[M_H(S_\lambda)] = -\sqrt{\frac{|S_\lambda|}{16\pi}} \int_{S_\lambda} \theta_k \rho \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}}. \tag{2.11}$$

Para calcular el límite del lado derecho de (2.11) evaluado en esta foliación, usaremos el desarrollo asintótico de θ_k, $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}}$ y ρ en $\lambda = \infty$. Como veremos en el Capítulo 6, el desarrollo de θ_k tiene la forma

$$\theta_k = \frac{-2}{\lambda} + \frac{\theta_k^{(1)}}{\lambda^2} + o(\lambda^{-2}), \tag{2.12}$$

y la forma de volumen admite la expresión $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}} = (\lambda^2 + o(\lambda^2))\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}$, donde $\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}$ es la forma de volumen de la esfera unitaria.

Sólo queda calcular el desarrollo asintótico de ρ. Para ello utilizamos las ecuaciones de las capas delgadas, que en este caso se traducen a

$$k(\rho) + \rho\theta_k = 0. \tag{2.13}$$

Integrando esta ecuación se prueba que ρ presenta el desarrollo

$$\rho = \frac{\hat{\rho}}{\lambda^2} + o(\lambda^{-2})$$

para alguna función $\hat{\rho}$ independiente de λ.

Sustituimos ahora los desarrollos de θ_k, $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}}$ y ρ en el lado derecho de (2.11) para calcular este límite. Puesto que $\sqrt{|S_\lambda|} = \sqrt{4\pi}\lambda + o(\lambda)$, se sigue

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left(-\sqrt{\frac{|S_\lambda|}{16\pi}} \int_{S_\lambda} \theta_k \rho \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}} \right) = \int_{\mathbb{S}^2} \hat{\rho} \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}.$$

Todavía necesitamos relacionar esta integral en el infinito con las integrales a lo largo de $\{S_\lambda\}$. Esto se consigue gracias a las dos observaciones siguientes. Primeramente

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{S_\lambda} \rho \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}} = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\hat{\rho}}{\lambda^2} + o(\lambda^{-2}) \right) (\lambda^2 + o(\lambda^2)) \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} = \int_{\mathbb{S}^2} \hat{\rho} \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}, \tag{2.14}$$

y segundo, $\int_{S_\lambda} \rho \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}}$ es una constante independiente de λ porque

$$k\left(\int_{S_\lambda} \rho \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}} \right) = \int_{S_\lambda} k(\rho) \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}} + \int_{S_\lambda} \rho \pounds_k \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}} = \int_{S_\lambda} (-\rho\theta_k) \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}} + \int_{S_\lambda} (\rho\theta_k) \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S_\lambda}} = 0, \tag{2.15}$$

donde hemos usado (2.13) y la expresión para la derivada de Lie de una forma de volumen a lo largo de k, i.e. $\pounds_k \boldsymbol{\eta}_{S_\lambda} = \theta_k \boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}$. Juntando (2.8), (2.11), (2.14) y (2.15) obtenemos

$$\begin{aligned} E_B &= \lim_{\lambda\to\infty}[M_H(S_\lambda)] = \lim_{\lambda\to\infty}\left(-\sqrt{\frac{|S_\lambda|}{16\pi}}\int_{S_\lambda}\theta_k\rho\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}\right) = \int_{\mathbb{S}^2}\hat{\rho}\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{S_\lambda}\rho\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda} \\ &= \int_{S_\lambda}\rho\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda} \quad \forall\lambda. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Hasta el momento, hemos usado la ecuación de evolución (2.13), pero todavía no hemos fijado ninguna condición inicial para ρ. Es inmediato ver que S es una superfice marginalmente atrapada hacia el exterior en el espacio-tiempo externo $((\theta_\ell^+)|_S = 0)$ si y sólo si

$$\rho|_S = \frac{1}{16\pi}(\theta_\ell^-)|_S.$$

Combinando con (2.16), tenemos

$$\int_S \theta_\ell^- \boldsymbol{\eta}_S = 16\pi E_B,$$

y la desigualdad de Penrose (2.7) finalmente llega a ser

$$\int_S \theta_\ell^- \boldsymbol{\eta}_S \geq \sqrt{16\pi|S|}. \tag{2.17}$$

Esta desigualdad tiene la propiedad notable de no hacer referencia alguna a la geometría exterior en la construcción. Puesto que la densidad ρ puede elegirse con libertad, esta desigualdad debería cumplirse para toda superficie espacial cerrada S en el espacio-tiempo de Minkowski cuyos conos de luz pasados sean regulares en todas partes. Subrayamos que desigualdades de Penrose tipo-capa delgada (también llamadas desigualdades de Gibbons-Penrose en la literatura) existen para espacio-tiempos de dimensión arbitraria.

3

Proyección a lo largo del Killing en espacio-tiempos estáticos

Después de haber explicado la conjetura de la desigualdad de Penrose y de haber intruducido las nociones fundamentales que vamos a usar, comenzamos con la presentación de los resultados originales de esta tesis.

En este capítulo abordamos la desigualdad de Penrose para capas delgadas mediante una proyección vertical a lo largo de la dirección del vector de Killing. Como explicamos en la Introducción, éste fue el método propuesto por Gibbons para atacar el problema. Aunque su implementación fue incorrecta, la idea es de cualquier modo interesante y merece la pena investigarla. En vista de las aplicaciones potenciales del método en contextos más generales que Minkowski, analizamos en detalle la proyección de superfices generales espaciales de codimensión dos embebidas en un espacio-tiempo estático. La proyección se realiza a lo largo de un Killing estático sobre una hipersuperficie ortogonal al mismo. Estudiamos la relación entre la geometría intrínseca y extrínseca de la superficie original con la proyectada. En particular, encontramos expresiones explícitas para la relación entre las métricas inducidas, las segundas formas fundamentales y la conexión del fibrado normal entre ambas superficies. Los resultados de este capítulo han sido publicados en [26].

En relación a la desigualdad de Penrose para capas delgadas, también explicamos dónde y por qué razón el cálculo de Gibbons falla. Asimismo aplicamos nuestros resultados para dar una prueba independiente del teorema de Brendle & Wang [4] mencionado en la Introducción y que da condiciones suficientes para la validez de la desigualdad de Penrose para capas delgadas en términos de la convexidad de la superficie proyectada. Como ya hemos dicho, obtuvimos la prueba de nuestro teorema al mismo tiempo que Brendle & Wang de una forma completamente independiente.

En esta tesis y a no ser que se indique lo contrario, (M, g) representa un espacio-tiempo $(n+2)$-dimensional. Siempre se considerará $n \geq 2$. En una variedad con métrica γ, denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_\gamma$ el producto escalar respeto de dicha métrica. Cuando se utilice la métrica asociada a g, simplemente escribimos $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definición 3.1 (**Campo vectorial de Killing).** *Sea ξ un campo vectorial en un espacio-tiempo (M, g). ξ es un campo vectorial de Killing si satisface la relación*

$$\mathcal{L}_\xi g = 0. \tag{3.1}$$

Esta condición equivale a:

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0. \tag{3.2}$$

Definición 3.2 (**Espacio-tiempo estacionario).** *Sea (M, g) un espacio-tiempo que admite un campo vectorial de Killing ξ. (M, g) es estacionario si ξ es temporal.*

Definición 3.3 (**Espacio-tiempo estático).** *Un espacio-tiempo (M, g) es estático si es estacionario, y si además existe una hipersuperficie espacial Σ ortogonal a las curvas integrales correspondientes al campo de Killing ξ en cada punto. En este caso ξ es un campo de Killing estático. Por el teorema de Fröbenius, un espacio-tiempo con vector de Killing ξ es estático si y sólo si*

$$\xi_{[\alpha} \nabla_\beta \xi_{\gamma]} = 0. \tag{3.3}$$

El siguiente teorema es también conocido.

Teorema 3.4. *Sea (M, g) un espacio-tiempo que admite un campo de Killing estático ξ de norma $\xi^\alpha \xi_\alpha = -V^2$, con V una función estrictamente positiva. Entonces existe localmente en M una función diferenciable t tal que*

$$\xi_\alpha = -V^2 \nabla_\alpha t, \tag{3.4}$$

y un sistema de coordenadas donde la métrica se expresa como

$$g = -V^2 dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j,$$

con h_{ij} una métrica definida positiva.

Observación 3.5. Una función t es localmente definida en M cuando está definida en algún entorno abierto $U(p)$ no vacío para todo punto p.

Desde ahora asumimos estar en el contexto del Teorema 3.4. Uno de los ingredientes en el Teorema 3.12 de Brendle & Wang [4] es un cálculo que relaciona las curvaturas extrínsecas de una superficie espacial S de codimensión dos embebida en un espacio-tiempo estrictamente estáticoc con la geometría de su proyección $\overline{S}$ sobre una hipersuperficie definida por un tiempo estático constante. Un análisis similar y más exhaustivo en el caso del espacio-tiempo de Minkowski fue llevado a cabo en conexión a una nueva definición de masa quasi-local en [42], [43]. Resultados de este tipo en el caso estático general han aparecido también en [3]. Aún así, no nos consta que exista en la literatura una relación exhaustiva entre toda las propiedades geométricas intrínsecas y extrínsecas de S y de su proyección $\overline{S}$, ni en Minkowski ni en el caso general estrictamente estático. Dedicamos este capítulo a ello.

Consideremos una superficie espacial S de codimensión dos en M. Puesto que todos los cálculos son locales podemos asumir sin pérdida de generalidad que S está embebida, y como antes sea $t : M \to \mathbb{R}$ la función definida por $\boldsymbol{\xi} = -V^2 dt$. Escojamos cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ y sea $\Sigma_{t_0} = \{t = t_0\}$. La proyección $\overline{S}$ de S sobre Σ_{t_0} a lo largo de las órbitas de ξ define una superficie de codimensión dos que también puede considerarse embebida (restringiendo S si fuera necesario). Entonces, tenemos un difeomorfismo $\pi : S \to \overline{S}$ definido por la proyección a lo largo de ξ. La métrica inducida y la derivada covariante en S (resp. $\overline{S}$) se denotan por γ y D (resp. $\overline{\gamma}$ y $\overline{D}$). La función tiempo-atura $\tau := t|_S - t_0$, que mide la distancia que separa S de Σ_{t_0}, y $V_S := V|_S$ jugarán un papel importante para relacionar la geometría de las dos superficies. Las funciones escalares en S serán asimismo definidas en $\overline{S}$ mediante π conservando sus nombres, y se distinguirán por el contexto. De ahora en adelante $|Df|^2_\gamma = \gamma^{AB} f_{,A} f_{,B}$ para cualquier función $f : S \to \mathbb{R}$, y análogamente $|Df|^2_{\overline{\gamma}} = \overline{\gamma}^{AB} f_{,A} f_{,B}$.

Para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(S)$ denotamos su proyección $d\pi(X) \in \mathfrak{X}(\overline{S})$ como $\overline{X}$. Dado el vector $\overline{X}$ lo extendemos a lo largo de las órbitas del vector de Killing ξ mediante el transporte paralelo, es decir, resolviendo $[\xi, \overline{X}] = 0$. Nuevamente conservaremos el nombre para el vector extendido. Apréciese que $\overline{X}$ es en todas partes ortogonal a ξ. Con estas definiciones, para cada punto $p \in S$ se cumple

$$X|_p = \overline{X}(\tau)\xi|_p + \overline{X}|_p. \tag{3.5}$$

Una consecuencia es que las métricas γ y $\overline{\gamma}$ están relacionadas por

$$\gamma(X,Y)|_p = \langle \overline{X}(\tau)\xi + \overline{X}, \overline{Y}(\tau)\xi + \overline{Y}\rangle|_p = \left(\pi^*(\overline{\gamma}) - V_S^2 d\tau \otimes d\tau|_p\right)(X,Y)|_p,$$

donde hemos usado $d\pi|_p(X) = \overline{X}|_{\pi(p)}$ y $\overline{X}(\tau) = d\tau(X)$. Entonces concluímos

$$\gamma = \pi^\star(\overline{\gamma}) - V_S^2 d\tau \otimes d\tau. \tag{3.6}$$

La relación de las métricas inversas es

$$\overline{\gamma}^{-1} = d\pi(\gamma^{-1}) - \frac{V_S^2}{W^2}\mathrm{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau) \otimes \mathrm{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau), \qquad W := \sqrt{1 - V_S^2 |d\tau|^2_{\overline{\gamma}}}, \tag{3.7}$$

que tiene, como consecuencia

$$d\pi(\mathrm{grad}_\gamma(\tau)) = \frac{1}{W^2}\mathrm{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau), \quad |d\tau|^2_\gamma = \frac{|d\tau|^2_{\overline{\gamma}}}{W^2}, \quad W = \frac{1}{\sqrt{1 + V_S^2 |d\tau|^2_\gamma}}. \tag{3.8}$$

La cota $1-V_S^2|d\tau|^2_{\overline{\gamma}} > 0$ (necesaria para que W sea real) es una consecuencia de que S es espacial en todo punto. Es inmediato probar que las respectivas formas de volumen $\boldsymbol{\eta}_S$ y $\boldsymbol{\eta}_{\overline{S}}$ quedan relacionadas mediante

$$\boldsymbol{\eta}_S = W\boldsymbol{\eta}_{\overline{S}}. \tag{3.9}$$

Para estudiar la relación entre las geometría extrínseca de S y $\overline{S}$ es útil elegir una base para el fibrado normal en cada superficie. Para $\overline{S}$, una elección natural es $\{\overline{\nu}, V_S^{-1}\xi|_S\}$, donde $\overline{\nu}$ es la normal unitaria a $\overline{S}$ como hipersuperficie en Σ_{t_0}. Denotamos por $\overline{K}$ la segunda forma fundamental de $\overline{S}$ a lo largo de $\overline{\nu}$. Con respecto a S, la extensión de Lie de $\overline{\nu}$ a lo largo de ξ define una normal espacial y unitaria con respecto a S, que también denotamos como $\overline{\nu}$. Para el segundo vector, notemos que $\xi|_S$ no es tangente a S en ningún punto, y por tanto su componente normal $\xi^\perp$ en la descomposición ortogonal $T_pM = T_pS \oplus N_pS$ nunca es cero, y de hecho, resulta ser temporal. De $\boldsymbol{\xi} = -V^2 dt$, tenemos que para cada $X \in T_pS$, $\langle \xi|_S, X\rangle = -V_S^2 d\tau(X)$, que significa que la componente tangente de $\xi|_S$ es $-V_S^2 \text{grad}_\gamma(\tau)$, o equivalentemente $\xi^\perp = \xi|_S + V_S^2\text{grad}_\gamma(\tau)$. Siguiendo [43], denotamos por u al vector futuro unitario tangente a $\xi^\perp$. Su forma explícita es

$$u = \frac{W}{V_S}\left(\xi|_S + V_S^2\text{grad}_\gamma(\tau)\right) \tag{3.10}$$

a consecuencia de que u es unitario y ortogonal a $\text{grad}_\gamma(\tau)$ y de que $\langle \xi,\xi\rangle = -V^2$. Nótese que $\{\overline{\nu}, u\}$ define una base ortonormal del fibrado normal de S.

La geometría extrínseca de S está codificada en su vector segunda forma fundamental $\vec{K}$ y en la conexión del fibrado normal $\boldsymbol{\alpha}$. En términos de la base descrita arriba, esta información geométrica viene dada por dos tensores simétricos $K^u := \langle \vec{K}, u\rangle$, $K^{\overline{\nu}} := \langle \vec{K}, \overline{\nu}\rangle$ y de la uno-forma $\boldsymbol{\alpha}_{\overline{\nu}}(X) := \langle \nabla^M_X \overline{\nu}, u\rangle$, $X \in \mathfrak{X}(S)$. La siguiente proposición relaciona estos objetos con la geometría de la superficie proyectada:

Proposición 3.6. *En términos de la notación recién descrita,*

$$K^{\overline{\nu}} = \pi^*(\overline{K}) - V_S\overline{\nu}(V)|_S d\tau \otimes d\tau, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} K^u = &\frac{1}{W}\left(dV_S \otimes d\tau + d\tau \otimes dV_S + V_S\pi^*(Hess_{\overline{\gamma}}(\tau))\right) \\ &- \frac{V_S^2}{W} dV_S(grad_{\overline{\gamma}}(\tau)) d\tau \otimes d\tau, \quad W = \sqrt{1 - V_S^2|d\tau|^2_{\overline{\gamma}}}\,, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\overline{\nu}} = \frac{1}{W}\left(V_S\pi^\star(\overline{K}(grad_{\overline{\gamma}}(\tau), \cdot)) - \overline{\nu}(V)|_S d\tau\right). \tag{3.13}$$

Observación 3.7. Aunque hemos asumido que ξ es temporal, los cálculos anteriores son análogos cuando ξ es espacial y distinto de cero en todas partes. En particular las relaciones geométricas entre S y su proyección $\overline{S}$ en un contexto puramente Riemanniano donde $\langle \xi, \xi \rangle = V^2$ y $\boldsymbol{\xi} = V^2 dt$ son

$$\begin{aligned}
\gamma &= \pi^\star(\overline{\gamma}) + V_S^2 d\tau \otimes d\tau, \\
\boldsymbol{\eta}_S &= W \boldsymbol{\eta}_{\overline{S}} \qquad W = \sqrt{1 + V_S^2 |d\tau|^2_{\overline{\gamma}}}, \\
K^{\overline{\nu}} &= \pi^*(\overline{K}) + V_S \overline{\nu}(V)|_S d\tau \otimes d\tau, \\
K^u &= -\frac{1}{W} \left(dV_S \otimes d\tau + d\tau \otimes dV_S + V_S \pi^*(\mathrm{Hess}_{\overline{\gamma}}(\tau)) \right) - \frac{V_S^2}{W} dV_S(\mathrm{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau)) d\tau \otimes d\tau, \\
\boldsymbol{\alpha}_{\overline{\nu}} &= \frac{1}{W} \left(-V_S \pi^\star(\overline{K}(\mathrm{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau), \cdot)) + \overline{\nu}(V)|_S d\tau \right),
\end{aligned}$$

donde esta vez el vector unitario u es

$$u = \frac{W}{V_S} \left(\xi|_S - V_S^2 \mathrm{grad}_\gamma(\tau) \right).$$

Observación 3.8. Las expresiones obtenidas arriba contienen la información necesaria para relacionar cualquier cantidad geométrica en S con información geométrica en su proyección $\overline{S}$. Por ejemplo, el vector curvatura media de S puede ser relacionado con la geometría proyectada simplemente tomando la traza en $K = K^{\overline{\nu}} \overline{\nu} - K^u u$ con la métrica γ^{-1} y usando (3.6) junto con los resultados de la Proposición 3.6. Si elegimos otra base luminosa cualquiera $\{k, \ell\}$ del fibrado normal, normalizada de forma que $\langle k, \ell \rangle = -2$, tiene que ser necesariamente de la forma

$$k = f(-\overline{\nu} + u), \quad \ell = f^{-1}(\overline{\nu} + u), \tag{3.14}$$

donde $f : S \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es diferenciable.

De forma similar, las segundas formas fundamentales luminosas K^k, K^ℓ de S a lo largo de la base de vectores luminosos $\{k, \ell\}$ puede ser obtenida directamente de la Proposición 3.6 usando la descomposición de $\{k, \ell\}$ en la base $\{\overline{\nu}, u\}$. De hecho, si consideramos una combinación lineal $\omega = a\overline{\nu} + bu$ de los vectores $\{\overline{\nu}, u\}$ tenemos

$$K^\omega_{AB} = \langle \nabla_{X_A}(a\overline{\nu} + bu), X_B \rangle = a \langle \nabla_{X_A} \overline{\nu}, X_B \rangle + b \langle \nabla_{X_A} u, X_B \rangle = a K^{\overline{\nu}}_{AB} + b K^u_{AB}.$$

Por tanto, usando las descomposiciones (3.14) y la Proposición 3.6, obtenemos

$$\begin{aligned}
K^k_{AB} &= f(K^u_{AB} - K^{\overline{\nu}}_{AB}) \\
&= f \Bigg(\frac{1}{W} \left(dV_S \otimes d\tau + d\tau \otimes dV_S \right) + \frac{V_S}{W} \pi^*(\mathrm{Hess}_{\overline{\gamma}}(\tau)) - \pi^*(\overline{K}) \\
&\quad + \left(V_S \overline{\nu}(V)|_S - \frac{V_S^2}{W} dV_S(\mathrm{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau)) \right) d\tau \otimes d\tau \Bigg),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
K^\ell_{AB} &= f^{-1}(K^u_{AB} + K^{\overline{\nu}}_{AB}) \\
&= f^{-1} \Bigg(\frac{1}{W} \left(dV_S \otimes d\tau + d\tau \otimes dV_S \right) + \frac{V_S}{W} \pi^*(\mathrm{Hess}_{\overline{\gamma}}(\tau)) + \pi^*(\overline{K}) \\
&\quad - \left(V_S \overline{\nu}(V)|_S + \frac{V_S^2}{W} dV_S(\mathrm{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau)) \right) d\tau \otimes d\tau \Bigg).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Tomando la traza de (3.15) con la forma contravariante de la métrica γ finalmente obtenemos una expresión para θ_ℓ en términos de la geometría de la superficie proyectada:

$$\theta_\ell = \frac{1}{f}\left(\overline{H} + \frac{V_S^2}{W^2}\left(\overline{K}(\text{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau), \text{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau)) - \frac{\overline{\nu}(V)|_S}{V_S}|d\tau|^2_{\overline{\gamma}}\right) + \frac{1}{V_S}\overline{\nabla}_A\left(\frac{V_S^2}{W}\overline{\nabla}^A\tau\right)\right).$$

Un simple cálculo nos da $\langle k, \xi\rangle = -f\frac{V_S}{W}$. Así, si normalizamos k tal que $\langle k, \xi\rangle = -1$, el valor de f (que llamaremos en este caso $f^\star$) asociado es

$$f^\star = \frac{W}{V_S}.$$

Este valor es especial al calcular la curvatura luminosa extrínseca total $\int_S \theta_\ell \boldsymbol{\eta_S}$, puesto que la divergencia de θ_ℓ se anula en la integración (recordemos la relación entre las formas de volumen (3.9)). En otras palabras, para $f = f^\star$ la curvatura luminosa extrínseca total es

$$\int_S \theta_\ell \boldsymbol{\eta_S} = \int_{\overline{S}}\left(\overline{H}V_S + \frac{V_S^3}{W^2}\left(\overline{K}(\text{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau), \text{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau)) - \frac{\overline{\nu}(V)|_S}{V_S}|d\tau|^2_{\overline{\gamma}}\right)\right)\boldsymbol{\eta_{\overline{S}}}. \qquad (3.16)$$

En lo que respecta a la uno-forma de conexión, su comportamiento ante cambio de base no es tensorial (siendo una conexión), así que merece la pena dar su expresión explícita en la base luminosa $\{k, \ell\}$

$$\boldsymbol{s} = -\frac{df}{f} + \frac{1}{W}\left(\overline{\nu}(V)|_S d\tau - V_S\pi^\star(\overline{K}(\text{grad}_{\overline{\gamma}}(\tau), \cdot))\right).$$

El siguiente lema muestra que las curvaturas luminosas K^k y K^ℓ de cualquier superficie espacial S en un espacio-tiempo estrictamente estático no son independientes entre sí. En el caso del espacio-tiempo de Minkowski el resultado fue demostrado en [12].

Lema 3.9 (**Relación entre las curvaturas luminosas extrínsecas).** *Sea (M, g) un espacio-tiempo estático $(n+2)$-dimensional con campo de Killing estático ξ. Sea S una superficie espacial en (M, g). Con la notación anterior, tenemos*

$$-\langle\xi, k\rangle K^\ell - \langle\xi, \ell\rangle K^k - 2V_S(d\tau\otimes dV_S + dV_S\otimes d\tau) - 2V_S^2 Hess_\gamma\tau = 0, \qquad (3.17)$$

donde k y ℓ son una base de vectores luminosos normales a S que satisfacen $\langle k, \ell\rangle = -2$, y donde V_S y τ son respectivamente, la restricción de V y t a S.

Observación 3.10. Si elegimos una base $\{X_A\}$ del espacio tangente a S, la relación (3.17) puede ser expresada en notación indicial como

$$-\langle\xi, k\rangle K^\ell_{AB} - \langle\xi, \ell\rangle K^k_{AB} - D_A(V_S^2 D_B\tau) - D_B(V_S^2 D_A\tau) = 0. \qquad (3.18)$$

Corolario 3.11. *Bajo las mismas hipótesis que en el lema previo,*

$$\langle \xi, \ell \rangle \langle \xi, k \rangle = V_S^2 (1 + V_S^2 |D\tau|_\gamma^2). \tag{3.19}$$

La proyección a lo largo del Killing en espacio-tiempos estáticos ha jugado un papel crucial en los intentos de probar la desigualdad de Penrose para capas delgadas luminosas en el espacio-tiempo de Minkowski. A pesar de la simplicidad de la geometría ambiente, probar tal desigualdad es notablemente difícil. En 1997 Gibbons [12] pensó haber probado tal teorema. Lo cierto es qus su argumento contiene un fallo que invalida la demostración y el problema permanece abierto. Este fallo fue mencionado por primera vez en [22] sin entrar en detalles. A continuación discutimos con mayor detenimiento el argumento usado por Gibbons y mostramos dónde falla.

Siguiendo la notación anterior, denotaremos por S a la superficie espacial, espaciotemporalmente convexa de la desigualdad. Por otra parte, siendo también fieles a la notación usada por Gibbons en [12] en la medida de lo posible, llamaremos a las normales futuras luminosas k y L, y satisfacen la normalización $\langle k, \xi \rangle = -1$ y $\langle L, k \rangle = -1$.

La estrategia en [12] se basó en proyectar S a lo largo de ξ sobre un hiperplano de tiempo constante ortogonal a ξ. La superficie proyectada se denota por $\overline{S}$. La idea principal es reescribir la desigualdad de Penrose para capas delgadas luminosas

$$\int_S \rho \boldsymbol{\eta_S} \geq \frac{n}{4} (\omega_n)^{\frac{1}{n}} |S|^{\frac{n-1}{n}} \tag{3.20}$$

en términos de la geometría de $\overline{S}$ como una hipersuperficie del espacio Euclídeo, donde $2\rho := \nabla_\alpha L^\alpha$ es la expansión nula a lo largo de L (entonces $\rho = \frac{1}{4}\theta_\ell$ cuando comparamos con la normalización que usamos en (3.3), puesto que $\ell = 2L$), y $\boldsymbol{\eta_S}$ es la forma de volumen de S.

El error de Gibbons ocurre en el siguiente cálculo erróneo de la expansión nula total a lo largo de L:

$$\int_S \rho \boldsymbol{\eta_S} = \frac{1}{4} \int_{\overline{S}} \overline{H} \boldsymbol{\eta_{\overline{S}}}. \tag{3.21}$$

Es claro que (3.21) contradice nuestro resultado (3.16) en donde obtenemos el valor de la expansión nula total a lo largo de L en un espacio-tiempo estático. En las condiciones de normalización actuales ($V = 1$), en lugar de (3.21) nosotros hallamos

$$\int_S \rho \boldsymbol{\eta_S} = \int_{\overline{S}} \frac{1}{4} \left(\overline{H} + \frac{1}{W^2} \overline{K}(\mathrm{grad}_{\overline{\gamma}} \tau, \mathrm{grad}_{\overline{\gamma}} \tau) \right) \boldsymbol{\eta_{\overline{S}}}. \tag{3.22}$$

La expresión (3.22) difiere de (3.21) puesto que $\overline{K}(\mathrm{grad}_{\overline{\gamma}} \tau, \mathrm{grad}_{\overline{\gamma}} \tau) \neq 0$ en general.

Expliquemos con más detalle el método de la proyección usado por Gibbons y veamos dónde falla. Gibbons extiende primeramente k a lo largo de una superficie luminosa

$\mathcal{N}$ que se cierra hacia el futuro resolviendo las ecuaciones de la geodésica afínmente parametrizada $\nabla_k k = 0$ con dato inicial k en S. Similarmente, L es extendido a un campo vectorial luminoso a lo largo de una superficie luminosa $\mathcal{L}$ que se abre hacia el futuro y que contiene a S, y que es tangente a L. Estos vectores son luego extendidos a un entorno de S mediante transporte paralelo a lo largo de ξ. Con esta extensión, tenemos $\langle k, \xi \rangle = -1$ en todo lugar. Definiendo β en este entorno como $\beta := -\langle \xi, L \rangle$, introducimos el siguiente campo vectorial

$$\hat{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}(L - \beta k). \tag{3.23}$$

Se sigue inmediatamente que $\hat{\nu}$ es en todo lugar ortogonal a ξ. Además, este campo es ortogonal a $\overline{S}$ y unitario en esta superficie proyectada (de hecho coincide con el $\overline{\nu}$ que introdujimos en la primera parte del capítulo).

Gibbons usó en [12] que la curvatura media $\overline{H}$ de la superficie proyectada $\overline{S}$ puede expresarse como $\overline{H} = \nabla_\alpha \hat{\nu}^\alpha|_{\overline{S}}$. Éste es uno de los problemas principales en su argumentación, porque esta expresión no se satisface generalmente. En esta tesis, nosotros calculamos la (correcta) expresión para la curvatura media, siendo ésta

$$\overline{H} = \nabla_\alpha \hat{\nu}^\alpha|_{\hat{T}} - \frac{1}{2}\nabla_{\hat{\nu}}\langle \hat{\nu}, \hat{\nu}\rangle|_{\hat{T}}. \tag{3.24}$$

Gibbons comete un segundo fallo al calcular $\nabla_\alpha \hat{\nu}^\alpha$. La siguiente expresión se encuentra en [12]

$$\overline{H} = \nabla_\alpha \hat{\nu}^\alpha = \nabla_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}} L^\alpha - \frac{\beta}{\sqrt{2\beta}} k^\alpha \right) = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}(\nabla_\alpha L^\alpha) - \frac{\beta}{\sqrt{2\beta}}(\nabla_\alpha k^\alpha), \tag{3.25}$$

lo que implícitamente asume que las derivadas de β a lo largo de k y L son cero. Usando la extensión $\nabla_L L = 0$ y que ξ es covariantemente constante es inmediato comprobar que $\nabla_L \beta = 0$. Por el contrario, tal y como veremos con un ejemplo, no es cierto que $\nabla_k \beta = 0$. En resumen, Gibbons halla la expresión errónea (cf. (5.11) en [12])

$$\overline{H} = \sqrt{\frac{2}{\beta}}\rho + \sqrt{2\beta}\mu, \tag{3.26}$$

donde $-2\mu = \theta_k$. La expresión correcta para $\overline{H}$ es, combinando (3.24) y (3.25)

$$\overline{H} = \sqrt{\frac{2}{\beta}}\,\rho + \sqrt{2\beta}\,\mu - \nabla_k \left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \right) - \frac{1}{2}\nabla_{\hat{\nu}}\langle \hat{\nu}, \hat{\nu}\rangle \bigg|_{\overline{S}}, \tag{3.27}$$

donde hemos usado $\nabla_L \beta = 0$.

La expresión (3.27) coincide con (3.26) sólo si los últimos términos se cancelan mutuamente. Ni $\nabla_{\hat{\nu}}\langle \hat{\nu}, \hat{\nu}\rangle$ ni la derivada de β a lo largo de k tienen que anularse necesariamente en $\overline{S}$. Es más, no tienen ni siquiera que cancelarse mutuamente. Es posible obtener expresiones generales tanto para $\nabla_k\beta$ como para $\nabla_{\hat{\nu}}\langle\hat{\nu},\hat{\nu}\rangle$ en $\overline{S}$ (o S), lo que prueba que esas cancelaciones no tienen lugar. En lugar de eso, encontramos más conveniente presentar un ejemplo explícito donde los dos últimos términos de (3.27) no se cancelen mutuamente. Adicionalmente, también evaluamos $\overline{H}$, ρ y μ explícitamente en este ejemplo y mostramos que (3.26) no es válida.

Para el ejemplo, usamos coordenadas esféricas $\{t, r, \theta, \phi\}$ en Minkowski, y consideramos el cono de luz pasado Ω_p del origen p $\{t = 0, r = 0\}$. La ecuación que define Ω_p es $t + r = 0$, por lo que la tangente luminosa k que satisface $\langle k, \partial_t\rangle = -1$ es

$$k = \partial_t - \partial_r.$$

Consideramos una superficie espacial S con simetría axial (con respecto al vector de Killing ∂_ϕ) embebida en Ω_p. El embebimiento viene dado por

$$F : (\theta, \phi) \to (-R(\theta), R(\theta), \theta, \phi),$$

donde R es una función diferenciable y positiva, (y satisface como siempre ciertas condiciones de regularidad en el polo norte y sur de la esfera). Tras algunos cálculos hallamos que

$$\nabla_k\beta = \frac{2(R')^2(-RR'' + (R')^2)}{R^3(R^2 + (R')^2)},$$

que generalmente es distinto de cero, lo que pone de manifiesto uno de los errores en los cálculos de Gibbons. Usando este cálculo, es inmediato obtener la expresión para el cuarto término del lado derecho de (3.27):

$$-\nabla_k\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}\right) = \frac{-1}{4}\sqrt{\frac{2}{\beta}}(\nabla_k\beta) = \frac{(R')^2(R''R - (R')^2)}{R^2(R^2 + (R')^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.28}$$

Queda por calcular el último término de (3.27). Considerando (3.23), se obtiene

$$\frac{-1}{2}\nabla_{\hat{\nu}}\langle\hat{\nu},\hat{\nu}\rangle\Big|_{r=R(\theta)} = \frac{-(R')^2}{R^2\sqrt{R^2 + (R')^2}}, \tag{3.29}$$

que no sólo no es cero, sino que tampoco se cancela con (3.28) en general. Esto concluye nuestra exposición de los problemas existentes en la disertación de Gibbons.

Por completitud del argumento, también daremos el valor para la curvatura media de $\overline{S}$:

$$\overline{H}|_{\overline{S}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (R')^2}}\left(\frac{2R^2 + 3(R')^2 - RR''}{R^2 + (R')^2} - \frac{R'}{R}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right). \tag{3.30}$$

El valor de la curvatura para Gibbons sería, usando su expresión (errónea) (3.26)

$$\sqrt{\frac{2}{\beta}}\,\rho + \sqrt{2\beta}\,\mu\Big|_{\overline{S}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (R')^2}}\left(\frac{2R^2 + 2(R')^2 - RR''}{R^2} - \frac{R'\cos\theta}{R\sin\theta}\right),$$

lo que es claramente diferente de la expresión $\overline{H}|_{\overline{S}}$ en (3.30). Esto prueba que (3.26) no puede ser correcto. Si en lugar de ello realizamos la sustitución análoga en (3.27), hallamos la expresión correcta.

Brendle & Wang [4] han demostrado una generalización de la desigualdad de Penrose para capas delgadas luminosas en Minkowski en el espacio-tiempo de Schwarzschild. La desigualdad es válida para una gran clase de superficies cuya proyección a lo largo de la dirección del Killing sobre un hiperplano de tiempo constante es convexa. Relacionar las las geometrías de la superficie inicial S y de la proyectada $\overline{S}$ les ayuda a reescribir la desigualdad de Penrose para capas delgadas luminosas en Schwarzschild en términos de la geometría proyectada, y la validez de la desigualdad es consecuencia de la desigualdad estándar de Minkowski en el espacio Euclídeo cuando $\overline{S}$ es convexa.

En el siguiente teorema recuperamos el resultado de Brendle & Wang [4] y damos una prueba que de hecho obtuvimos independientemente antes de que ellos publicaran su resultado.

Teorema 3.12 (S. Brendle & M.T. Wang). *Sea $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$ un espacio-tiempo de Minkowski $(n+2)$-dimensional con un tiempo Minkowskiano t que define un Killing unitario $\boldsymbol{\xi} = -dt$. Sea S una superficie cerrada, conexa, orientable y espaciotemporalmente convexa en $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$, con métrica contravariante γ^{-1}. Sea $\pi : \mathcal{M}^{1,n+1} \to \Sigma_{t_0}$ la proyección ortogonal sobre el hiperplano $\Sigma_{t_0} = \{t = t_0\}$ y definamos $\overline{S} = \pi(S)$. Denotemos por $\boldsymbol{\eta}_{\overline{S}}$ su forma de volumen y por $\overline{K}$ su segunda forma fundamental como hipersuperficie del espacio euclídeo $(n+1)$-dimensional con respecto a la normal exterior unitaria. Entonces la desigualdad de Penrose con respecto a ξ para S es equivalente a*

$$\int_{\overline{S}} tr_{d\pi(\gamma^{-1})} \overline{K}\, \boldsymbol{\eta}_{\overline{S}} \geq n(\omega_n)^{\frac{1}{n}} |S|^{\frac{n-1}{n}}, \tag{3.31}$$

y se cumple si $\overline{S}$ es convexa.

Proof. Con la normalización que hemos usado hasta ahora ($\langle k, \xi \rangle = -1$ y $\langle k, \ell \rangle = -2$) la desigualdad de Penrose para capas delgadas luminosas en dimensión arbitraria es

$$\int_S \theta_\ell \boldsymbol{\eta}_S \geq n(\omega_n)^{\frac{1}{n}} |S|^{\frac{n-1}{n}}.$$

Podemos usar ahora la expresión (3.16) para la curvatura extrínseca luminosa total en espacio-tiempos estáticos con $f = f^\star$ (puesto que k ha sido elegido satisfaciendo $\langle k, \xi \rangle = -1$), y con $V = 1$. Esta expresión se transforma en este caso en

$$\int_S \theta_\ell \boldsymbol{\eta}_S = \int_{\overline{S}} \left(\overline{H} + \frac{1}{W^2} \overline{K}(\mathrm{grad}_{\overline{\gamma}} \tau, \mathrm{grad}_{\overline{\gamma}} \tau) \right) \boldsymbol{\eta}_{\overline{S}} = \int_{\overline{S}} \mathrm{tr}_{d\pi(\gamma^{-1})} \overline{K}\, \boldsymbol{\eta}_{\overline{S}}, \tag{3.32}$$

y la desigualdad de Penrose para capas delgadas puede ser reescrita como (3.31).

Para concluir, vemos que si $\overline{S}$ es convexa se sigue $\overline{K}(\mathrm{grad}_{\overline{\gamma}}\tau, \mathrm{grad}_{\overline{\gamma}}\tau) \geq 0$, y esto implica

$$\int_S \theta_\ell \boldsymbol{\eta}_S \geq \int_{\overline{S}} \overline{H} \boldsymbol{\eta}_{\overline{S}} \geq n(\omega_n)^{\frac{1}{n}} |\overline{S}|^{\frac{n-1}{n}} \geq n(\omega_n)^{\frac{1}{n}} |S|^{\frac{n-1}{n}},$$

donde hemos usado la desigualdad de Minkowski para superficies convexas en el espacio Euclídeo, y que $|\overline{S}| \geq |S|$.

□

Observación 3.13. Por definición, una superficie espaciotemporalmente convexa S embebida en un hiperplano de tiempo constante Σ_{t_0} es una superficie Euclídea convexa. Cuando esto ocurre, el vector ℓ descompone como $\ell = \xi + \nu$ y por tanto $\theta_\ell = \langle \vec{H}, \xi + \nu \rangle = \langle H\nu, \xi + \nu \rangle = H$. Como consecuencia

$$\int_S \theta_\ell \boldsymbol{\eta}_S = \int_S H \boldsymbol{\eta}_S,$$

y la desigualdad de Penrose para capas delgadas resulta ser en este caso la desigualdad de Minkowski para superficies convexas en el espacio euclídeo, que de hecho se cumple pues S es convexa. Este resultado también es recogido en (3.32) estableciendo $\tau = 0$. Este caso particular de la desigualdad de Penrose para capas delgadas fue primeramente probado por Gibbons [12]. Nótese que esta desigualdad de Penrose para capas delgadas es con respecto al Killing ortogonal al hiperplano Σ_{t_0}.

Aunque Gibbons usara una prueba alternativa, este caso es inmediatamente cubierto por el Teorema 3.12. De hecho, este teorema implica también la validez de la desigualdad de Penrose para S con respecto a *cualquier* otro Killing, como muestra nuestro siguiente resultado.

Teorema 3.14. *Sea S una superficie cerrada, conexa y convexa embebida en en hiperplano espacial $\Sigma'_{t'_0} \hookrightarrow \mathcal{M}^{1,3}$. Sea ξ un vector de Killing unitario (no necesariamente ortogonal a $\Sigma'_{t'_0}$). Entonces la desigualdad de Penrose con respecto a ξ se cumple para S.*

4

Proyección a lo largo del cono de luz pasado Ω en Minkowski

En el capítulo anterior hemos estudiado la proyección en la dirección del Killing sobre hiperplanos de tiempo constante en espacio-tiempos estáticos. Otra proyección natural que resulta ser de utilidad para la desigualdad de Penrose es aquélla en que se arrastra la superficie inicial a lo largo de su cono de luz pasado. Este arrastre será estudiado en detalle en el Capítulo 7. En éste nos concentramos en el caso de Minkowski. La mayor parte del contenido del capítulo fue publicado en [25], donde esta proyección se empleó por primera vez para abordar la desigualdad de Penrose para capas delgadas.

Sea Ω una hipersuperficie luminosa de un espacio-tiempo (M, g) $(n+2)$-dimensional, y k un campo vectorial futuro luminoso tangente a Ω que no se anula en ninguna parte. Este campo vectorial está definido unívocamente salvo multiplicación con una función positiva $F : \Omega \to \mathbb{R}^+$. Se sabe (ver e.g. [11]) que dado un punto $p \in \Omega$, se puede establecer una relación de equivalencia en $T_p\Omega$ tal que $X \sim Y$ si y sólo si $X - Y = ck$ con $c \in \mathbb{R}$. La clase de equivalencia de $X \in T_p\Omega$ se denota por $\overline{X}$ y el espacio cociente por $T_p\Omega/k$. El conjunto $T\Omega/k = \bigcup_{p\in\Omega} T_p\Omega/k$ está dotado naturalmente con una estructura de fibrado vectorial sobre Ω (con fibras de dimensión n), y es llamado *fibrado cociente*.

Dados $\overline{X}, \overline{Y} \in T_p\Omega/k$, se sigue que $\gamma^\Omega(\overline{X}, \overline{Y}) := \langle X, Y\rangle$ es una métrica definida positiva en este espacio cociente. El tensor $K^\Omega(\overline{X}, \overline{Y}) := \langle \nabla_X k, Y\rangle$ está bien definido (i.e. es independiente de los representantes $X, Y \in T_p\Omega$ de $\overline{X}, \overline{Y}$ y de la extensión de Y a un entorno de p). Este tensor es simétrico y juega el papel de segunda forma fundamental en Ω. La *aplicación de Weingarten*, que denotaremos por $\boldsymbol{K}^\Omega$, es el endomorfismo obtenido de K^Ω subiendo un índice con la inversa de γ^Ω. Finalmente, la traza de $\boldsymbol{K}^\Omega$ con respecto a γ^Ω es la expansión luminosa θ_k de Ω. Bajo el reescalado $k \longrightarrow Fk$, estos tensores se transforman $K^\Omega \longrightarrow FK^\Omega$, $\boldsymbol{K}^\Omega \longrightarrow F\boldsymbol{K}^\Omega$ y $\theta_k \longrightarrow F\theta_k$.

Una derivada en $T\Omega/k$ puede definirse mediante $(\overline{X})' := \overline{\nabla_k X}$. Nuevamente esta derivada está bien definida (i.e. es independiente del representante elegido en la definición). Nótese, sin embargo, que depende de la elección de k. Como siempre, esta derivada se extiende a tensores en $T\Omega/k$ con la regla de Leibniz.

Una importante propiedad de las hipersuperficies luminosas es que la métrica cociente γ^Ω, la curvatura extrínseca cociente K^Ω y la geometría ambiente (M, g) están relacionadas mediante las siguientes ecuaciones, que son las análogas en el caso luminoso a las ecuaciones estándar de Gauss-Codazzi para variedades no degeneradas:

$$
\begin{aligned}
&(\gamma^\Omega)' = 2K^\Omega, \\
&(\boldsymbol{K}^\Omega)' + \boldsymbol{K}^\Omega \circ \boldsymbol{K}^\Omega + \boldsymbol{R} - Q_k \boldsymbol{K}^\Omega = 0, \qquad \text{(Ecuación de Ricatti)}
\end{aligned}
$$

donde $\boldsymbol{K}^\Omega \circ \boldsymbol{K}^\Omega$ es la composición de endomorfismos, $\boldsymbol{R}(\overline{X}) := \overline{\mathrm{Riem}(X, k)k}$ y Q_k está definida mediante $\nabla_k k = Q_k k$ (las curvas integrales de k son necesariamente geodésicas luminosas pero el parámetro a lo largo de las mismas no tiene por qué ser afín).

Para transformar este último sistema de ecuaciones en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinario para las componentes tensoriales, elijamos k afínmente parametrizado, i.e. satisfaciendo $\nabla_k k = 0$. Elijamos también n campos vectoriales X_A $(A, B, C = 1, \cdots, n)$ tangentes a Ω y que satisfagan las propiedades (i) $[k, X_A] = 0$ y (ii) $\{k|_p, X_A|_p\}$ es una base de $T_p\Omega$ en un punto $p \in \Omega$. Denotemos por $\alpha_p(\sigma)$ una geodésica luminosa afínmente parametrizada y que contenga a p y con vector tangente k (por conveniencia todavía no fijamos el origen del parámetro afín σ). Entonces $\{\overline{X}_A|_{\alpha_p(\sigma)}\}$ es una base de $T_{\alpha_p(\sigma)}\Omega/k$ y los coeficientes tensoriales $\gamma^\Omega_{AB}(\sigma)$, $K^\Omega_{AB}(\sigma)$ de $\gamma^\Omega|_{\alpha_p(\sigma)}$ y $K^\Omega|_{\alpha_p(\sigma)}$ en esta base satisfacen las ODEs

$$
\begin{aligned}
\frac{d(K^\Omega)^A{}_B}{d\sigma} &= -(K^\Omega)^A{}_C (K^\Omega)^C{}_B - R^A{}_B, \\
\frac{d(\gamma^\Omega)_{AB}}{d\sigma} &= 2(K^\Omega)_{AB},
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

donde $R^A{}_B$ está definido como $\boldsymbol{R}(\overline{X}_B) = R^A{}_B \overline{X}_A$ y los índices son bajados y subidos con la métrica $(\gamma^\Omega)_{AB}$ y su inversa $(\gamma^\Omega)^{AB}$.

Nos restringiremos en este capítulo al espacio-tiempo de Minkowski $(n+2)$-dimensional $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$ $(n \geq 2)$. Tomemos un sistema de coordenadas Minkowskiano (t, x^i) y definimos $\xi = \partial_t$. Los hiperplanos de tiempo constante $t = t_0$ se denotarán por Σ_{t_0}.

Un objetivo principal de este capítulo es reescribir la desigualdad de Penrose para capas delgadas en función de la geometría de la superficie Euclídea proyectada que se obtiene intersecando el cono de luz pasado de la superficie original (siempre que satisfaga condiciones apropiadas de regularidad) con un hiperplano de tiempo constante. Las superficies consideradas son las siguientes:

Definición 4.1 (**Hipersuperficie luminosa espaciotemporalmente convexa).** *Sea Ω una hipersuperficie luminosa en $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$ maximalmente extendida. Ω es* **espaciotemporalmente convexa** *si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ para el que la superficie $\widehat{S}_0 = \Omega \cap \Sigma_{t_0}$ es* *cerrada (es decir, regular, compacta y sin frontera), conexa y convexa como una hipersuperficie de la geometría Euclídea de* Σ_{t_0}*, y la expansión nula del generador luminoso futuro* k *de* Ω *evaluado en* $\widehat{S}_0$ *satisface* $\theta_k|_{\widehat{S}_0} < 0$*. A* Ω *la denominaremos* **espaciotemporalmente convexa en sentido estricto** *si* $\widehat{S}_0$ *es estrictamente convexa, esto es, con curvaturas principales positivas en cada punto.*

Dada una hipersuperficie luminosa espaciotemporalmente convexa Ω, siempre normalizamos el vector tangente luminoso k mediante la condición $\langle k, \xi\rangle = -1$. Este campo vectorial siempre será normal a cualquier superficie espacial embebida en Ω. Puesto que la desigualdad de Penrose para capas delgadas involucra precisamente este tipo de superficies la siguiente definición es útil:

Definición 4.2 (**Superficie espaciotemporalmente convexa).** *Una superficie espacial* S *embebida en* $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$ *es llamada espaciotemporalmente convexa (en sentido estricto) si puede embeberse en una hipersuperficie luminosa espaciotemporalmente convexa (en sentido estricto)* Ω *de* $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$*.*

Es intuitivamente obvio que una superficie S espacial, cerrada y conexa puede ser embebida como mucho en una hipersuperficie luminosa espaciotemporalmente convexa Ω. Entonces, para cada una de esas superficies podemos definir inequívocamente una base luminosa $\{\ell, k\}$ de su fibrado normal que cumpla las condiciones de que k es tangente a la hipersuperficie luminosa espaciotemporalmente convexa Ω que contiene a S, y que satisface la normalización $\langle k, \xi\rangle = -1$, $\langle \ell, k\rangle = -2$. Nos referiremos a ℓ como la normal luminosa exterior y a k como la normal luminosa interior.

En el siguiente teorema publicado en [25] vemos cómo la desigualdad de Penrose para capas delgadas es reescrita en función de la geometría de la superficie proyectada $\widehat{S}_0 = \Omega \cap \Sigma_{t_0}$ y de la función tiempo-altura τ, que describe cuánto dista S del hiperplano Σ_{t_0}:

Teorema 4.3 (**Desigualdad de Penrose para capas delgadas en Minkowski en función de geometría Euclídea).** *Sea* $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$ *el espacio-tiempo de Minkowski con un sistema de coordenadas Minkowskiano* (t, x^i)*,* $\xi = \partial_t$ *elegido. Sea* (S, γ) *una superficie espaciotemporalmente convexa en* $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$ *y* Ω *la hipersuperficie luminosa espaciotemporalmente convexa que contiene a* S*. Consideremos la superficie cerrada y convexa* $\widehat{S}_0 = \Omega \cap \Sigma_{t_0}$ *como una hipersuperficie del espacio Euclídeo* $(\mathbb{R}^{n+1}, g_E)$*, y sea* γ_0 *su métrica inducida,* $\boldsymbol{\eta}_{\widehat{S}_0}$ *su forma de volumen,* K_0 *su segunda forma fundamental con respecto a la normal unitaria exterior y* $\boldsymbol{K}_0$ *el operador de Weingarten asociado. Entonces la desigualdad de Penrose para capas delgadas para* S *puede escribirse como*

$$\int_{\widehat{S}_0} \left(1 + [(\boldsymbol{Id} - \tau\, \boldsymbol{K}_0)^{-2}]^A{}_C (\gamma_0^{-1})^{CB} \tau_{,A}\tau_{,B}\right) tr\left[\boldsymbol{K}_0 \circ (\boldsymbol{Id} - \tau\, \boldsymbol{K}_0)^{-1}\right] \Delta[\tau] \boldsymbol{\eta}_{\widehat{S}_0} \geqslant$$

$$\geqslant n(\omega_n)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\widehat{S}_0} \Delta[\tau] \boldsymbol{\eta}_{\widehat{S}_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{4.2}$$

con ω_n el área de la n-esfera, $\boldsymbol{Id}$ es el endomorfismo identidad, $\tau = t|_S - t_0$ y $\Delta[\tau] :=$ $\det(\boldsymbol{Id} - \tau\, \boldsymbol{K}_0)$.

El endomorfismo $\boldsymbol{Id} - \tau \boldsymbol{K}_0$ es invertible siempre que τ satisfaga la cota

$$\tau < \frac{1}{\max\limits_{1 \le A \le n} \{\kappa_A\}}, \tag{4.3}$$

donde $\{\kappa_1, \cdots, \kappa_n\}$ son las curvaturas principales de $\boldsymbol{K}_0$. Así la versión (4.2) de la desigualdad de Penrose para capas delgadas es conjeturada para funciones $\tau : \widehat{S}_0 \to \mathbb{R}$ que satisfacen (4.3).

Una propiedad notable de las hipersuperficies convexas en el espacio Euclídeo es que una función determina todas sus propiedades geométricas, intrínsecas y extrínsecas. Esta función es conocida como función soporte. En el Teorema 4.3 hemos escrito la desigualdad de Penrose para capas delgadas en función de la geometría de superficies euclídeas convexas. El siguiente paso es usar la función soporte de estas superficies convexas para obtener una forma alternativa de la desigualdad para capas delgadas. Esta expresión es interesante porque toma la forma de una desigualdad para funciones definidas en la esfera.

La función soporte se define de la siguiente manera:

Definición 4.4 (**Función soporte).** *Sea $\widehat{S}_0$ una hipersuperficie cerrada, convexa y conexa en el espacio Euclídeo $(\mathbb{R}^{n+1}, g_E)$. Sea $x(p)$ el vector de posición de $p \in \widehat{S}_0$. La función soporte $h : \widehat{S}_0 \to \mathbb{R}$ se define por $h(p) = \langle x(p), \nu(p)\rangle_{g_E}$, donde $\nu(p)$ es la normal unitaria en p hacia el exterior de $\widehat{S}_0$.*

Las hipersuperficies cerradas, convexas y conexas en $(\mathbb{R}^{n+1}, g_E)$ son topológicamente siempre la esfera $\mathbb{S}^n$. Es maś, si la superficie es estrictamente convexa la aplicación de Gauss $\nu : \widehat{S}_0 \to \mathbb{S}^n$ es un difeomorfismo. Nos restringiremos al caso estrictamente convexo de ahora en adelante. Esto no conlleva ninguna pérdida de generalidad para la desigualdad de Penrose pues cualquier superficie convexa $\widehat{S}_0$ puede aproximarse por superficies estrictamente convexas (e.g. mediante el flujo de curvatura media [19]). Denotamos por $\mathring{q}$ el pull-back sobre $\widehat{S}_0$ de la métrica estándar de la n-esfera y por $\mathring{\nabla}$ su correspondiente conexión. Entonces, la métrica inducida γ_0 y la segunda forma fundamental K_0 de $\widehat{S}_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ pueden reescribirse en términos de la función soporte de la la siguiente manera:

$$(K_0)_{AB} = \mathring{\nabla}_A \mathring{\nabla}_B h + \mathring{q}_{AB} h, \tag{4.4}$$

$$(\gamma_0)_{AB} = (\mathring{q}^{-1})^{CD} (K_0)_{AC} (K_0)_{BD}. \tag{4.5}$$

Combinando estas expresiones con el Teorema 4.3, es posible reescribir la desigualdad de Penrose para capas delgadas como una desigualdad en la esfera que involucra dos funciones diferenciables, τ y h. Obtenemos a continuación la forma explícita de esta desigualdad. Para ello, es conveniente introducir el endomorfismo $\boldsymbol{B}$ obtenido al subir un índice de K_0 con la métrica esférica $\mathring{q}$, i.e. $B^A{}_B := (\mathring{q}^{-1})^{AC}(K_0)_{CB}$. Es inmediato por (4.5) que $\boldsymbol{B}$ es el endomorfismo inverso de la aplicación de Weingarten $\boldsymbol{K}_0$. Puesto que $\widehat{S}_0$ es difeomorfa a $\mathbb{S}^n$ mediante la aplicación de Gauss, podemos identificar ambas variedades y podemos pensar en $\mathring{q}$, h, $\boldsymbol{B}$ etc. como objetos definidos en $\mathbb{S}^n$. Esto se aplica en particular a la función $\tau : \widehat{S}_0 \to \mathbb{R}$. Con esta notación, podemos enunciar y probar el siguiente teorema, donde obtenemos la desigualdad de Penrose para capas delgadas en términos de la función soporte.

Teorema 4.5 (**Desigualdad de Penrose para capas delgadas en términos de la función soporte).** *Sea (S, γ) una superficie espaciotemporalmente convexa en sentido estricto en $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$. Con la misma notación que en el Teorema 4.3, sea h la función soporte de $\widehat{S}_0$. Entonces la desigualdad de Penrose para capas delgadas puede escribirse como*

$$\int_{\mathbb{S}^n} \left(1 + [(\boldsymbol{B} - \tau \boldsymbol{Id})^{-2}]^A{}_C (\mathring{q}^{-1})^{CB} \tau_{,A} \tau_{,B}\right) tr[(\boldsymbol{B} - \tau \boldsymbol{Id})^{-1}] \det(\boldsymbol{B} - \tau \boldsymbol{Id}) \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} \geqslant$$
$$\geqslant n(\omega_n)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\mathbb{S}^n} \det(\boldsymbol{B} - \tau \boldsymbol{Id}) \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{4.6}$$

donde $\mathring{q}$, $\mathring{\nabla}$, $\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}$ son la métrica estándar, la conexión y la forma de volumen de $\mathbb{S}^n$,

$$B^A{}_B := (\mathring{q}^{-1})^{AC} \mathring{\nabla}_C \mathring{\nabla}_B h + \delta^A{}_B h, \tag{4.7}$$

$h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ es la función soporte de $\widehat{S}_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y $\tau : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ es la función tiempo-altura de S.

A continuación discutimos el caso particular para la desigualdad de Penrose para capas delgadas cuando ésta tiene forma esférica. Siguiendo [40] nos referimos a este caso como "caso esférico" (nótese que la capa delgada no tiene por qué llevar una distribución de materia esféricamente simétrica). Dicho de otro modo, consideramos el caso en que la hipersuperficie luminosa Ω es el cono de luz pasado de un punto en Minkowski y S es cualquier superficie embebida en Ω. La forma explícita para esta desigualdad en dimensión cuatro apareció en [33] y puede expresarse como una desigualdad para funciones positivas en la esfera. Esta desigualdad resultó ser altamente no trivial. Tod [39] fue capaz de probar la desigualdad usando funciones apropiadas en $\mathbb{R}^4$ y una desigualdad de Sobolev. Demostraremos que la desigualdad de Penrose para capas delgadas con forma esférica se cumple en cualquier dimensión.

Nos restringimos al caso en que Ω es el cono de luz pasado de un punto. A consecuencia del Teorema 4.5, la desigualdad de Penrose se transforma en este caso en una desigualdad para una sola función positiva en la esfera. Su validez será consecuencia de la desigualdad de Beckner [1] que acota por arriba la norma L^q de una función en la esfera en términos de su norma H^2. Específicamente

Teorema 4.6 (**Beckner, 1993).** *Sea $F \in C^1(\mathbb{S}^n)$ y denotemos como ya hemos dicho la métrica estándar, la forma de volumen y la conexión en la esfera unitaria n-dimensional por $\mathring{q}$, $\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}$, $\mathring{\nabla}$. Entonces*

$$\frac{q-2}{n}\int_{\mathbb{S}^n}|\mathring{\nabla}F|^2_{\mathring{q}}\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}+\int_{\mathbb{S}^n}|F|^2\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\geq(\omega_n)^{1-\frac{2}{q}}\left(\int_{\mathbb{S}^n}|F|^q\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\right)^{\frac{2}{q}}, \tag{4.8}$$

donde $2 \leq q < \infty$ si $n = 1$ ó $n = 2$ y $2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}$ si $n \geq 3$.

El siguiente teorema [25] establece la desigualdad cuando Ω es el cono de luz pasado de un punto:

Teorema 4.7 (**Desigualdad de Penrose para capas delgadas para el cono de luz pasado de un punto).** *Consideremos un punto $p \in \mathcal{M}^{1,n+1}$ $(n \geqslant 2)$ y Ω_p el cono de luz pasado de p. Sea S una superficie espacial cerrada embebida en Ω_p. Entonces la desigualdad de Penrose para capas delgadas para S es*

$$\int_{\mathbb{S}^n}\left(r^{n-1}+r^{n-3}|\mathring{\nabla}r|^2_{\mathring{q}}\right)\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\geq(\omega_n)^{\frac{1}{n}}\left(\int_{\mathbb{S}^n}r^n\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{4.9}$$

donde $r = t(p) - t|_S$. Es más, esta desigualdad se cumple a consecuencia del teorema de Beckner.

Un caso particular que también hemos estudiado más detalladamente es cuando el espacio-tiempo de Minkowski tiene dimensión cuatro. La expresión general para la desigualdad de Penrose para capas delgadas en términos de la función soporte obtenida en el Teorema 4.5 involucra la inversa del endomorfismo $\mathbf{B} - \tau \boldsymbol{Id}$, donde $B^A{}_B = \mathring{\nabla}^A\mathring{\nabla}_B h + \delta^A{}_B h$ (por simplicidad en la notación subiremos y bajaremos los índices con la métrica esférica $\mathring{q}$ y su inversa). En esta parte nos restringimos a dimensión cuatro, donde las expresiones se simplifican notablemente. La razón es que, en este caso, el endomorfismo $\boldsymbol{B}$ actúa en espacios vectoriales bidimensionales donde las inversas son mucho más sencillas de calcular.

La forma específica de la desigualdad de Penrose para capas delgadas en términos de la función soporte en el espacio tiempo de Minkowski de cuatro dimensiones [25] viene descrita por el siguiente teorema

Teorema 4.8. *Sea (S, γ) una superficie espaciotemporalmente convexa en sentido estricto en el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathcal{M}^{1,3}, \eta)$. Con la misma notación que en el Teorema 4.5, la desigualdad de Penrose para capas delgadas puede ser escrita en la forma*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{S}^2}\left(1+W_1|\mathring{\nabla}\tau|^2_{\mathring{q}}-W_2(\mathring{\nabla}^A\mathring{\nabla}^B h)\mathring{\nabla}_A\tau\mathring{\nabla}_B\tau\right)\Big(\triangle_{\mathring{q}}h+2(h-\tau)\Big)\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\geqslant\\ &\geqslant\sqrt{16\pi\int_{\mathbb{S}^2}\left((h-\tau)^2+(\triangle_{\mathring{q}}h)(h-\tau)-\frac{1}{2}(h\triangle_{\mathring{q}}h)\right)\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}},\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $\triangle_{\mathring{q}}$ es el Laplaciano de la dos-esfera unidad y

$$W_1 := \frac{(h-\tau)^2 + 2(h-\tau)\triangle_{\mathring{q}}h + \frac{1}{2}\left[(\triangle_{\mathring{q}}h)^2 + (\mathring{\nabla}_C\mathring{\nabla}_D h)(\mathring{\nabla}^C\mathring{\nabla}^D h)\right]}{\left[(h-\tau)^2 + (h-\tau)\triangle_{\mathring{q}}h + \frac{1}{2}[(\triangle_{\mathring{q}}h)^2 - (\mathring{\nabla}_C\mathring{\nabla}_D h)(\mathring{\nabla}^C\mathring{\nabla}^D h)]\right]^2}, \tag{4.11}$$

$$W_2 := \frac{\triangle_{\mathring{q}}h + 2(h-\tau)}{\left[(h-\tau)^2 + (h-\tau)\triangle_{\mathring{q}}h + \frac{1}{2}[(\triangle_{\mathring{q}}h)^2 - (\mathring{\nabla}_C\mathring{\nabla}_D h)(\mathring{\nabla}^C\mathring{\nabla}^D h)]\right]^2}. \tag{4.12}$$

Es sabido que cuando la superficie S se encuentra en un hiperplano de Minkowski, la desigualdad de Penrose para capas delgadas (1.2) se transforma en la desigualdad clásica de Minkowski para la curvatura media total H de una superficie en el espacio Euclídeo. En el espacio-tiempo de Minkowski de cuatro dimensiones, dicha desigualdad se expresa

$$\int_S H\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{S}} \geq \sqrt{16\pi|S|}. \tag{4.13}$$

La desigualdad de Minkowski puede expresarse en términos de la función soporte:

Corolario 4.9 (Desigualdad de Minkowski en $(\mathbb{R}^3, g_E)$ en términos de la función soporte). *Sea S una superficie espaciotemporalmente convexa en sentido estricto y embebida en un hiperplano de tiempo constante en el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathcal{M}^{1,3}, \eta)$. Entonces, la desigualdad de Minkowski (4.13) en términos de la función soporte h de S toma la forma*

$$\left(\int_{\mathbb{S}^2} h\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\right) \geqslant \sqrt{4\pi \int_{\mathbb{S}^2}\left(h^2 + \frac{1}{2}h\triangle_{\mathring{q}}h\right)\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}}. \tag{4.14}$$

Finalmente, probaremos la validez de (4.10) para un subconjunto de funciones $\{h, \tau\}$ admisibles que tiene interior no vacío (en una topología razonable) de tal forma que la familia de superficies para las que la desigualdad se cumple es bastante grande.

La prueba se basa en el flujo de superficies usado por Ludvigsen & Vickers [21] y por Bergqvist [2] en su intento de probar la desigualdad de Penrose general (caso luminoso) en términos de la masa de Bondi. En nuestro caso encontramos condiciones suficientes para la validez de la desigualdad de Penrose para capas delgadas en Minkowski de forma que la familia de superficies que encontramos es mucho más grande que la cubierta por el argumento de Bergqvist. Asimismo generalizaremos en el Capítulo 7 este argumento a espacio-tiempos más generales con un infinito pasado luminoso completo y donde se satisface la condición dominante de energía.

Los flujos de superficies usados por Ludvigsen & Vickers [21] y Bergqvist [2] consisten en arrastrar la superficie inicial S a lo largo del cono de luz pasado Ω a través de geodésicas luminosas afínmente parametrizadas. Asimismo se emplean cantidades monótonas a lo largo de estos flujos, de gran utilidad a la hora de atacar la desigualdad. En nuestro caso utilizaremos un funcional que se conoce usualmente como *masa de Bergqvist*, pues fue introducido por Bergqvist en [2]. Comenzamos introduciendo el flujo y definiendo la masa de Bergqvist en nuestro contexto.

Sea S una superficie espaciotemporalmente convexa en $(\mathcal{M}^{1,3}, \eta)$, Ω es la hipersuperficie luminosa espaciotemporalmente convexa donde S yace y $\widehat{S}_0 = \Omega \cap \Sigma_{t_0}$ es cerrada. Sea la función $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ la única solución de $k(\lambda) = -1$ tal que $\lambda|_S = 0$. Se tiene que λ es un parámetro afín a lo largo de los generadores luminosos de Ω (con este parámetro el vector tangente es $-k$ y las geodésicas nacen en S). Las superficies de nivel $S_{\lambda_0} = \{\lambda^{-1}(\lambda_0), \lambda_0 \geq 0\}$ de esta función definen superficies espaciotemporalmente convexas embebidas en Ω. La colección $\{S_\lambda\}$, $\lambda \in [0, \infty)$ define un flujo que comienza en $S = S_0$. Denotemos por γ_λ y $\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}$ la métrica inducida y la forma de volumen en S_λ, y por $\theta_\ell(\lambda)$ la expansión luminosa de S_λ en la dirección transversa a Ω (con la normalización $\langle \ell, k \rangle = -2$). Entonces la masa de Bergqvist viene definida como

$$M_b(\lambda) := \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{16\pi} \int_{S_\lambda} \theta_\ell(\lambda) \boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}. \tag{4.15}$$

Bergqvist probó su monotonicidad derivando M_b con respecto a λ.

Teorema 4.10 (**Bergqvist [2]).** *Con las definiciones anteriores tenemos*

$$\frac{dM_b(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\lambda} \langle \boldsymbol{s_\lambda}, \boldsymbol{s_\lambda} \rangle_{\gamma_\lambda} \boldsymbol{\eta}_{S_\lambda} \geq 0,$$

donde $\boldsymbol{s_\lambda}$ es la uno-forma de conexión de S_λ, definida como $\boldsymbol{s_\lambda}(X) := \frac{1}{2}\langle \nabla_X k, \ell \rangle_{\gamma_\lambda}$ para cualquier campo vectorial X tangente a S_λ.

En esta tesis utilizamos también este funcional en otros espacio-tiempos más generales.

La monotonicidad de M_b nos ayuda a probar el resultado principal de este capítulo, en el que obtenemos una clase de superficies para las que la desigualdad de Penrose para capas delgadas en Minkowski se cumple. Esta familia de superficies viene determinada por la función soporte h y la función tiempo-altura τ

Teorema 4.11 (**Clase de superficies para las que la desigualdad de Penrose para capas delgadas en $\mathcal{M}^{1,3}$ se cumple).** *Sea (S, γ) una superficie espaciotemporalmente convexa en sentido estricto en $(\mathcal{M}^{1,3}, \eta)$. Con las suposiciones y notación del Teorema 4.8, sea h la función soporte de $\widehat{S}_0$ como hipersuperficie del espacio Euclídeo y $\tau = t|_S - t_0$. Si estas dos funciones satisfacen la desigualdad*

$$4\pi \int_{\mathbb{S}^2} \left((\triangle_{\mathring{q}} h)^2 + 2h \triangle_{\mathring{q}} h \right) \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} \geqslant 4\pi \int_{\mathbb{S}^2} u^2 \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} - \left(\int_{\mathbb{S}^2} u \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} \right)^2 \tag{4.16}$$

donde $u := \triangle_{\mathring{q}} h + 2(h - \tau)$, entonces la desigualdad de Penrose para capas delgadas (2.17) se cumple para S.

El Teorema 4.7 muestra que la desigualdad de Penrose para capas delgadas en el caso esférico se cumple a consecuencia de la desigualdad de Beckner. Es interesante ver qué relación guarda el caso esférico con la clase de funciones cubierta por el Teorema 4.11. El único "caso esférico" incluído en el Teorema 4.11 es cuando la superficie S es esféricamente simétrica, que es el caso trivial. De alguna manera las clases cubiertas por la desigualdad de Beckner (que es esencialmente analítica) y las cubiertas por el flujo geométrico usado en el Teorema 4.11 son mutuamente excluyentes. Esto parece indicar que cualquier intento de probar la desigualdad de Penrose para capas delgadas para superficies espaciotemporalmente convexas requerirá algún tipo de combinación de ambas técnicas y casi seguro una combinación de argumentos analíticos y geométricos.

5

Grafos normales en el espacio Euclídeo. Aplicaciones a la desigualdad de Penrose para capas delgadas en Minkowski

En los dos capítulos anteriores realizamos dos proyecciones naturales de superficies espaciales en el espacio-tiempo de Minkowski. En el Capítulo 3 obtuvimos expresiones explícitas para la geometría de la superficie inicial S en función de la proyección a lo largo del Killing. En el Capítulo 4, la solución a la ecuación de Ricatti y de la métrica a lo largo del cono de luz pasado de S fue usada para encontrar la relación entre la geometría de S y la geometría de la superficie convexa correspondiente a la intersección del cono de luz pasado con un hiperplano de tiempo constante. El siguiente paso natural es relacionar las geometrías de las dos superficies proyectadas. Éste es el propósito del presente capítulo.

Sea $\overline{S}$ la proyección vertical de la superficie inicial S sobre el hiperplano de tiempo constante $\{t = t_0\}$, y $\widehat{S}_0$ la proyección de S a lo largo del cono de luz pasado Ω sobre el mismo hiperplano Euclídeo. Es intuitivamente claro, y se demuestra en esta tesis, que $\overline{S}$ queda determinada de manera única una vez que conocemos $\widehat{S}_0 = \Omega \cap \{t = t_0\}$ y la función tiempo-altura $\tau = t|_S - t_0$, que describe cuán lejos yace S de $\{t = t_0\}$. En esta construcción $\overline{S}$ resulta ser un grafo sobre $\widehat{S}_0$ en el espacio Euclídeo $\{t = t_0\}$. Por esta razón, la primera parte del capítulo está dedicada a calcular las expresiones que relacionan la geometría de una superficie orientable dada embebida en el espacio Euclídeo de dimensión arbitraria con otra hipersuperficie que es un grafo sobre la primera. Por completar el resultado, también damos las relaciones análogas cuando las variedades están embebidas en el espacio-tiempo de Minkowski de dimensión arbitraria, y son estrictamente espaciales o temporales. Estas relaciones fueron publicadas en [26] y, cuando se aplican al contexto descrito arriba, se obtienen las expresiones de la primera y segunda formas fundamentales de la proyección vertical $\overline{S}$ en función de la primera y segunda forma fundamental de $\widehat{S}_0$ y de la función τ.

Recordemos que Brendle & Wang (Capítulo 3, Teorema 3.12) probaron que la convexidad de la superficie $\overline{S}$ es una condición suficiente para la validez de la desigualdad de Penrose para capas delgadas en Minkowski. Como consecuencia de nuestros resultados, somos capaces de reescribir esta condición explícitamente como una desigualdad que involucra al tensor $\mathcal{T}_{AB}$ definido en $\widehat{S}_0$, y que involucra la geometría de $\widehat{S}_0$ y de la función tiempo-altura τ de S.

Para concluir el capítulo, presentamos dos ejemplos sencillos. En el primero $\overline{S}$ es un grafo sobre el cilindro (truncado apropiadamente y cerrado) y en el segundo ejemplo $\overline{S}$ es un grafo sobre la esfera. En ambos casos el tensor $\mathcal{T}_{AB}$ que codifica las condiciones de convexidad de los grafos respectivos es calculado explícitamente.

Consideremos el espacio Euclídeo $(\mathbb{R}^{n+1}, g_E)$ de dimensión $n+1$, con $n \geq 2$. La conexión natural se denota por ∇. Consideremos dos variedades embebidas $\widehat{S}_0$ y $\overline{S}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ y asumamos que hay un difeomorfismo $\psi : \widehat{S}_0 \longrightarrow \overline{S}$. Asumamos también que $\widehat{S}_0$ es una hipersuperficie orientable y seleccionemos un campo vectorial normal unitario ν. Elijamos una función diferenciable $\sigma : \widehat{S}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ y consideremos el conjunto de puntos situados a distancia σ de cada $p \in \widehat{S}_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a lo largo de la normal $\nu(p)$. La congruencia de geodésicas normales a $\widehat{S}_0$ no contienen ningún punto focal para distancias σ que satisfagan las cotas

$$1 + \sigma\kappa_A > 0 \quad A = 1, \cdots, n \tag{5.1}$$

donde $\{\kappa_A\}$ son las curvaturas principales de $\widehat{S}_0$. Asumiendo esta cota de ahora en adelante, tenemos que la aplicación $\psi' : \widehat{S}_0 \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$\psi'(p) = p + \sigma(p)\nu(p), \tag{5.2}$$

(estamos obviamente usando la estructura afín de $\mathbb{R}^{n+1}$) es tal que $\overline{S} := \psi'(\widehat{S}_0)$ es una hipersuperficie embebida en el espacio Euclídeo, y, de hecho, un grafo sobre $\widehat{S}_0$.

Uno de los resultados principales de este capítulo es aquél que relaciona la geometría del grafo $\overline{S}$ con la geometría base de $\widehat{S}_0$:

Teorema 5.1. *Consideremos las hipersuperficies $\widehat{S}_0$, $\overline{S}$ del espacio Euclídeo $(\mathbb{R}^{n+1}, g_E)$ con función con signo σ y difeomorfismo ψ, como se ha definido anteriormente. Las respectivas métricas inducidas γ_0 y $\overline{\gamma}$ y segundas formas fundamentales K_0 y $\overline{K}$ con respecto a las normales ν y $\overline{\nu}$ están relacionadas por*

$$\begin{aligned} \psi^\star(\overline{\gamma}) &= \gamma_0 + 2\sigma K_0 + \sigma^2 K_0 \circ K_0 + d\sigma \otimes d\sigma, & (5.3)\\ \frac{1}{W}\psi^\star(\overline{K}) &= K_0 + \sigma K_0 \circ K_0 + \sigma D\, K_0(\cdot, T, \cdot) + d\sigma \otimes K_0(T, \cdot) + \\ &\quad + K_0(T, \cdot) \otimes d\sigma - Hess_{\gamma_0}(\sigma), & (5.4)\end{aligned}$$

donde $T = (\boldsymbol{Id} + \sigma \boldsymbol{K}_0)^{-1}(grad_{\gamma_0}(\sigma))$ y $W = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_0(T,T)}}$, $K_0 \circ K_0$ es la traza de $K_0 \otimes K_0$ en el segundo y tercer índices, D es la derivada Levi-Civita de γ_0 y $Hess_{\gamma_0}(\sigma)$ es el Hessiano de σ con respecto a esta métrica.

Observación 5.2. El carácter Riemanniano del espacio Euclídeo ambiente ha sido empleado sólamente al evaluar $g_E(\nu,\nu)$ y $g_E(\overline{\nu},\overline{\nu})$. Con los mismos argumentos que antes, sea $\widehat{S}_0$ una subvariedad embebida en el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathcal{M}^{1,n+1},\eta)$ con una métrica inducida no degenerada γ_0 y normal unitaria ν satisfaciendo $\langle\nu,\nu\rangle_\eta=\epsilon$, con $\epsilon=\pm1$. $\overline{S}$ es construída como antes, donde la orientación de la normal unitaria $\overline{\nu}$ es elegida de tal manera que satisfaga $\langle\widetilde{\nu},\nu\rangle_\eta=\epsilon W$, con $W>0$. Bajo estas condiciones

$$\psi^\star(\overline{\gamma})=\gamma_0+2\sigma K_0+\sigma^2K_0\circ K_0+\epsilon d\sigma\otimes d\sigma, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{W}\psi^\star(\overline{K})=K_0+\sigma K_0\circ K_0+\sigma D\,K_0(\cdot,T,\cdot)+d\sigma\otimes K_0(T,\cdot)+\\ +K_0(T,\cdot)\otimes d\sigma-\epsilon\mathrm{Hess}_{\gamma_0}(\sigma),\end{aligned} \tag{5.6}$$

donde todas las definiciones son como antes y la descomposición $\widetilde{\nu}=W(\nu-T)$ se mantiene, pero esta vez $T=\epsilon(\boldsymbol{Id}+\sigma\boldsymbol{K}_0)^{-1}(\mathrm{grad}_{\gamma_0}(\sigma))$ y W es

$$W=\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon\gamma_0(T,T)}}.$$

La condición $1+\epsilon\gamma_0(T,T)>0$ es necesaria para que $\overline{S}$ tenga el mismo carácter causal que $\widehat{S}_0$.

Ahora podemos aplicar toda esta maquinaria a la construcción expuesta al principio del capítulo que relaciona las tres superficies en el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathcal{M}^{1,n+1},\eta)$ $(n+2)$-dimensional, con $n\geq2$, esto es, la superficie inicial espaciotemporalmente convexa S embebida en la hipersuperficie luminosa Ω, las superficies Euclídeas $\widehat{S}_0=\Omega\cap\Sigma_{t_0}$ y $\overline{S}$, que es la proyección de S a lo largo del Killing ξ sobre el hiperplano de tiempo constante Σ_{t_0}.

Para cualquier superficie cerrada espaciotemporalmente convexa S, $\overline{S}$ debe estar embebida en Σ_{t_0} (de lo contrario dos puntos diferentes de S con diferentes alturas proyectarían el mismo punto en Σ_{t_0}, lo que es imposible dado que están sobre una hipersuperficie luminosa). Podemos aplicar el Teorema 5.1 para relacionar la geometría de $\widehat{S}_0$ y $\overline{S}$ de la siguiente manera.

El Teorema 3.12 requería la convexidad de la superficie proyectada $\overline{S}$ como condición principal para la validez de la desigualdad de Penrose para capas delgadas para S. En la construcción de arriba y usando los resultados del Teorema 5.1, podemos reescribir la segunda forma fundamental de $\overline{S}$ en función de la segunda forma fundamental de $\widehat{S}_0$ y de la función con signo entre las dos superficies Euclídeas, que como veremos coincide con la función tiempo-altura τ de S salvo en signo. De esta manera la condición de convexidad para $\overline{S}$ puede ser descrita mediante condiciones apropiadas sobre la geometría de la superficie $\widehat{S}_0$ y de la función tiempo-altura que separa a la superficie S del hiperplano de tiempo constante Σ_{t_0}. Esta condición de convexidad subyacente en $\overline{S}$ puede convertirse en una condición de que un tensor dos covariante definido en la superficie $\widehat{S}_0$ sea definido positivo, tal y como mostramos a continuación:

Teorema 5.3 (Condición suficiente para la desigualdad de Penrose para capas delgadas en términos de geometría espaciotemporalmente convexa). *Sea $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$ un espacio-tiempo de Minkowski $(n+2)$-dimensional con t un tiempo Minkowskiano que define un Killing unitario $\boldsymbol{\xi} = -dt$. Sea S una superficie cerrada, conexa, orientable y espaciotemporalmente convexa en $(\mathcal{M}^{1,n+1}, \eta)$, y Ω la hipersuperficie luminosa espaciotemporalmente convexa que contiene a S. Consideremos $\widehat{S}_0 := \Omega \cap \Sigma_{t_0}$ y sea K_0 su segunda forma fundamental como superficie Euclídea de Σ_{t_0} con respecto a su normal exterior unitaria ν, D la conexión Levi-Civita de la métrica γ_0 de $\widehat{S}_0$, y $grad_{\gamma_0}(\tau)$ y $Hess_{\gamma_0}(\tau)$ el gradiente y el Hessiano de τ de la métrica γ_0 respectivamente, donde $\tau := t|_S - t_0$. Si el tensor*

$$\mathcal{T} = K_0 - \tau K_0 \circ K_0 - \tau D\, K_0(\cdot, T, \cdot) - d\tau \otimes K_0(T, \cdot) - K_0(T, \cdot) \otimes d\tau + Hess_{\gamma_0}(\tau) \quad (5.7)$$

es semidefinido positivo, donde $T = -(\boldsymbol{Id} - \tau \boldsymbol{K}_0)^{-1}(grad_{\gamma_0}(\tau))$, entonces la desigualdad de Penrose con respecto a ξ se cumple para S.

En este capítulo estudiamos dos casos particulares que ilustran la teoría desarrollada. Consideremos una superficie $\widehat{S}_0$ cerrada, convexa, axialmente simétrica en un hiperplano espacial Σ_{t_0} de $\mathcal{M}^{1,3}$, y asumimos que esta superficie es un cilindro entre los dos planos paralelos $z = z_0$ y $z = z_1$ ortogonales al eje de simetría. Sea ρ_0 el radio del cilindro. En coordenadas cilíndricas $\{\varphi, z\}$, (5.7) es, en la región $z_0 \le z \le z_1$,

$$\mathcal{T}_{AB} = (\rho_0 - \tau)\boldsymbol{\delta}^{\varphi}_A \boldsymbol{\delta}^{\varphi}_B + \tau_{,AB} + \frac{\tau_{,\varphi}}{\rho_0 - \tau}(\tau_{,A}\boldsymbol{\delta}^{\varphi}_B + \tau_{,B}\boldsymbol{\delta}^{\varphi}_A). \quad (5.8)$$

Asumiendo que τ es también axialmente simétrica, entonces $\mathcal{T}$ es semidefinido positivo si y sólo si $\tau_{,zz} \ge 0$. Así, cualquier superficie S axialmente simétrica que proyecte $\widehat{S}_0$ a lo largo del cono de luz pasado y para el que τ satisface $\tau_{,zz} \ge 0$ en $z \in [z_0, z_1]$, y es constante τ_1 en $z \ge z_1$ y constante τ_0 en $z \le z_0$ (aunque no sea la única manera de definirlo, podemos considerar dicha τ para obtener una superficie proyectada compacta $\overline{S}$), satisface la desigualdad de Penrose para capas delgadas (con respecto a la traslación temporal ortogonal al hiperplano Σ_{t_0}).

Otro ejemplo ilustrativo se obtiene cuando $\widehat{S}_0$ es la esfera de radio r_0 en Σ_{t_0}. En coordenadas esféricas $\{\theta, \varphi\}$, la no negatividad del tensor $\mathcal{T}$ se expresa

$$\mathcal{T}_{AB} = \left(\frac{r_0 - \tau}{r_0^2}\right)\gamma_{0AB} + D_A D_B \tau + \frac{2}{r_0 - \tau}\tau_{,A}\tau_{,B} \ge 0, \quad (5.9)$$

donde un cálculo directo revela que $D_A D_B \tau = \tau_{,AB} + \sin\theta\cos\theta\,\tau_{,\theta}\boldsymbol{\delta}^{\varphi}_A\boldsymbol{\delta}^{\varphi}_B - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau_{,\varphi}(\boldsymbol{\delta}^{\theta}_A\boldsymbol{\delta}^{\varphi}_B + \boldsymbol{\delta}^{\varphi}_A\boldsymbol{\delta}^{\theta}_B)$. En caso que S sea axialmente simétrica, las condiciones $\mathcal{T}_{\theta\theta} \ge 0$ y $\mathcal{T}_{\varphi\varphi} \ge 0$ son equivalentes a (en coordenadas esféricas donde $\tau(\theta)$)

$$(r_0 - \tau)^2 + (r_0 - \tau)\tau_{,\theta\theta} + 2(\tau_{,\theta})^2 \ge 0, \qquad (r_0 - \tau)\sin\theta + \cos\theta\,\tau_{,\theta} \ge 0. \quad (5.10)$$

En nuestro trabajo probamos que si $\rho(z)$ satisface $\rho_{,zz} < 0$ y $\rho - z\rho_{,z} > 0$, entonces el teorema de la función implícita puede ser usado para definir $z(\theta)$, y así poder construir la función $\tau(\theta)$ dada por

$$\tau = r_0 - \sqrt{z^2 + \rho(z)^2}|_{z=z(\theta)}.$$

Entonces, la superficie S definida mediante este tiempo-altura sobre la esfera $\widehat{S}_0$ se proyecta sobre una superficie Euclídea convexa $\overline{S}$ que está en un hiperplano constante Σ_{t_0}, y por tanto usando el Teorema 3.12 de Brendle & Wang, probamos que la superficie construída S satisface la desigualdad de Penrose para capas delgadas.

6

La energía de Hawking a lo largo de hipersuperficies luminosas asintóticamente planas

La energía de Hawking es un funcional que actúa sobre superficies bidimensionales cerradas y con topología esférica en un espaciotiempo de cuatro dimensiones, y que tiende a la energía de Bondi a lo largo de flujos que se aproximan a *esferas grandes*. El objetivo principal de este capítulo es el estudio del límite de la energía de Hawking cuando esta condición se relaja. Para ello estudiaremos los elementos geométricos (métrica, curvaturas extrínsecas y uno-forma de conexión) en las hojas de flujos generales en función de los elementos geométricos de un flujo especial de referencia que llamaremos *foliación base*. Esto nos permitirá analizar su comportamiento asintótico en el infinito luminoso pasado. Como consecuencia, obtenemos en el Teorema 6.13 una expresión para el límite de la energía de Hawking a lo largo de estos flujos generales en términos de la geometría de la foliación base. Estos resultados fueron publicados en [27].

En la parte final del capítulo, particularizamos a flujos a lo largo de la hipersuperficie luminosa Ω que tienden a esferas grandes, y consideramos la correspondencia uno-uno entre su límite asintótico en el infinito luminoso pasado y las soluciones de la *ecuación de las esferas grandes*. Nuestros resultados nos permiten dar en el Corolario 6.16 una expresión explícita para el vector energía-momento de Bondi P_B en función de la geometría de la foliación base.

En el capítulo anterior trabajamos principalmente en el espacio-tiempo de Minkowski. Volvamos a un ambiente más general. Sea (M, g) un espacio-tiempo orientado de dimensión $n+2$, $n \geq 2$, que admite una hipersuperficie embebida Ω, regular y conexa. Sea k un campo vectorial luminoso futuro, que no se anula en ninguna parte y tangente a Ω (i.e. un generador luminoso). Puesto que las curvas integrales de k son geodésicas, existe $Q_k \in \mathcal{F}(\Omega)$ tal que $\nabla_k k = Q_k k$. Hacemos la suposición de que hay una superficie espacial y conexa S_0 embebida en Ω (con embebimiento Φ_0) tal que cualquier curva integral de $-k$ intersecta a S_0 sólamente una vez. Esto conlleva a la existencia de una aplicación diferenciable $\pi : \Omega \longrightarrow S_0$ (identificamos S_0 con su imagen, distinguiendo según el contexto) que hace corresponder $p \in \Omega$ con la intersección de la curva integral α_p^k de $-k$ que pasa por p con S_0. La aplicación π es una submersión. Elegimos el parámetro λ de la curva α_p^k tal que $\alpha_p^k(0) = p$.

Dados k y S_0, una función escalar $\lambda \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define mediante $k(\lambda) = -1$ y $\lambda(p) = 0$ para todo $p \in S_0$. Sea $(\lambda_-(p), \lambda_+(p))$ el rango de la función λ restringida a la curva α_p^k. Asumimos también que el intervalo abierto $(\Lambda_- := \sup_{S_0} \lambda_-, \Lambda_+ := \inf_{S_0} \lambda_+)$ es no vacío. Si el gradiente de la función λ no se anula nunca, las superficies de nivel $S_{\lambda_1} = \{\lambda = \lambda_1\}$ son o bien vacías o bien hipersuperficies embebidas de forma diferenciable (no necesariamente conexas). La colección $\{S_\lambda\}$ es una foliación de Ω. Para $\lambda_1 \in (\Lambda_-, \Lambda_+)$ las hipersuperficies S_{λ_1} son de hecho conexas y difeomorfas a S_0.

En cualquier $p \in \Omega$ sea $\ell|_p \in T_pM$ el único campo vectorial luminoso que satisface $\langle k, \ell \rangle|_p = -2$ y $\langle \ell, X \rangle|_p = 0$ para cualquier $X \in T_pS_{\lambda(p)}$. S_λ está dotada con una métrica inducida γ_{S_λ}, con dos segundas formas fundamentales luminosas K^k, K^ℓ y con una uno-forma de conexión en el fibrado normal $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}}(X) := \frac{1}{2}\langle \nabla_X k, \ell \rangle$, $X \in \mathfrak{X}(S_\lambda)$.

Para obtener el límite de la energía de Hawking a lo largo de foliaciones generales, necesitamos relacionar la geometría de diferentes superficies espaciales embebidas en Ω. Consideremos una hipersuperficie espacial S embebida en Ω. con embebimiento $\Phi : S \longrightarrow \Omega$, y sea $p \in S$. Esta hipersuperficie está unívocamente definida por el difeomorfismo $\Psi : S \longrightarrow \Psi(S) \subset S_0$ y una función $F \in \mathcal{F}(S)$ de la manera que sigue. Para todo $p \in S$ definamos $F(p) = \lambda(\Phi(p))$ y $\Psi(p) = (\pi \circ \Phi)(p)$. Recíprocamente, una función $F \in \mathcal{F}(S)$ con imagen en $(\lambda_-(p), \lambda_+(p))$ y un difeomorfismo Ψ como hemos descrito antes define un embebimiento

$$\begin{aligned} \Phi : S &\longrightarrow \Omega \\ p &\longrightarrow \alpha^k_{\Psi(p)}(\lambda = F(p)). \end{aligned}$$

Queremos relacionar la geometría intrínseca y extrínseca de S en p con la geometría de la superficie $S_{\lambda=F(p)}$. Puesto que todos los cálculos son locales, podemos asumir $\Psi(S) = S_0$, lo que hace la presentación más sencilla. Extendemos F a una función en Ω definida por $F(q) = F((\Psi^{-1} \circ \pi)(q))$. Mantendremos el mismo símbolo para la extensión. Es claro que $k(F) = 0$. Para la geometría extrínseca de S (nuevamente identificamos a S con su imagen) definimos en $p \in S$, la normal luminosa $\ell_S|_p$ mediante las condiciones $\langle \ell_S, k \rangle|_p = -2$ y $\langle \ell_S, X \rangle = 0$ para todo $X \in T_pS$. La métrica inducida γ_S, las segundas formas fundamentales luminosas K^{ℓ_S}, K^k y la uno-forma de conexión normal s_{ℓ_S} vienen definidas de manera similar como antes.

La siguiente proposición es conocida (ver e.g. [37]) cuando la foliación base $\{S_\lambda\}$ es afín (i.e. $Q^k = 0$). Aunque ésta sea la situación que requeriremos más tarde, incluímos también el caso general no afín por completar el argumento.

Proposición 6.1. *Sea $p \in S$, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} T_F : T_p S_{\lambda=F(p)} &\longrightarrow T_p S \\ X &\longrightarrow X' := X - X(F)k \end{aligned}$$

es un isomorfismo bien definido. La métrica inducida γ_S, segundas formas fundamentales K^{ℓ_S}, K^k y conexión del fibrado normal $\boldsymbol{s}_{\ell_S}$ de S vienen dadas por

$$\gamma_S|_p(X', Y') = \gamma(X, Y), \tag{6.1}$$
$$K^k(X', Y')|_p = K^k(X, Y), \tag{6.2}$$
$$\boldsymbol{s}_{\ell_S}(X')|_p = \boldsymbol{s}_{\ell}(X) - K^k(X, gradF) + X(F)Q_k, \tag{6.3}$$
$$\begin{aligned} K^{\ell_S}(X', Y')|_p = &K^{\ell}(X, Y) + |DF|^2 K^k(X, Y) + 2X(F)\boldsymbol{s}_{\ell}(Y) + 2Y(F)\boldsymbol{s}_{\ell}(X) \\ &- 2X(F)K^k(Y, gradF) - 2Y(F)K^k(X, gradF) - 2Hess\, F(X, Y) \\ &+ 2Q_k X(F)Y(F), \end{aligned} \tag{6.4}$$

donde γ, K^k, K^{ℓ}, $\boldsymbol{s}_{\ell}$, grad, Hess y $|DF|^2 = \langle grad\, F, grad\, F\rangle$ están referidas a la superficie $S_{\lambda=F(p)}$ y están evaluadas en p.

El siguiente corolario es una consecuencia de cómo se transforman las segundas formas fundamentales y la conexión del fibrado normal bajo un "boost" en $\{\ell_S, k\}$.

Corolario 6.2. *Sea S como antes, y para todo $p \in S$ sea $k'|_p = \alpha(p)k|_p$ y $\ell'_S|_p = \frac{1}{\alpha(p)}\ell_S$, donde $\alpha : S \mapsto \mathbb{R}$ es una función positiva diferenciable extendida a Ω mediante $k(\alpha) = 0$. Entonces*

$$\boldsymbol{s}_{\ell'_S}(X'), = \boldsymbol{s}_{\ell}(X) - K^k(X, gradF) + X(F)Q_k - \frac{1}{\alpha}X(\alpha), \tag{6.5}$$
$$K^{k'}(X', Y') = \alpha K^k(X, Y), \tag{6.6}$$
$$\begin{aligned} K^{\ell'_S}(X', Y')|_p = &\frac{1}{\alpha}\Big(K^{\ell}(X, Y) + |DF|^2 K^k(X, Y) + 2X(F)\boldsymbol{s}_{\ell}(Y) + 2Y(F)\boldsymbol{s}_{\ell}(X) \\ &-2Hess\, F(X, Y) - 2X(F)K^k(Y, gradF) - 2Y(F)K^k(X, gradF) \\ &+2Q_k X(F)Y(F)\Big). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Las trazas de K^k y K^{ℓ} en S_λ con la métrica inducida definen las expansiones luminosas de S_λ y se denotan respectivamente por θ_k y θ_{ℓ}. La relación entre las expansiones luminosas θ_k, θ_{ℓ_S} de un grafo S con las correspondientes en la curva de nivel $S_{\lambda=F(p)}$ se siguen de la Proposición 6.1.

Corolario 6.3. *Sean S, k' y ℓ'_S como en el Corolario 6.2. Las expansiones luminosas $\theta_{k'}$ y $\theta_{\ell'}$ en $p \in S$ y las expansiones luminosas θ_k, θ_{ℓ} de $S_{\lambda=F(p)}$ en p están relacionadas por*

$$\theta_{k'} = \alpha\theta_k, \tag{6.8}$$
$$\theta_{\ell'_S} = \frac{1}{\alpha}\left(\theta_{\ell} + |DF|^2\theta_k + 4\boldsymbol{s}_{\ell}(gradF) - 4K^k(gradF, gradF) - 2\Delta F + 2Q_k|DF|^2\right), \tag{6.9}$$

donde ΔF es el Laplaciano de S_λ con la métrica inducida.

Impondremos ahora condiciones globales sobre Ω y nos restringiremos a un espacio-tiempo de dimensión cuatro. Primeramente asumimos que Ω admite una sección transversal global S_0 de topología esférica. También asumimos que para cualquier elección de generador luminoso afín k (i.e. que satisfaga $\nabla_k k = 0$) la correspondiente curva integral que comienza en $p \in S_0$ tiene dominio maximal $(-\infty, \lambda_+(p))$, es decir, los generadores luminosos son completos hacia el pasado. Podemos asumir que Ω está foliada por las superficies de nivel $\{S_\lambda\}$ de la función $\lambda \in \mathcal{F}(\Omega)$ definida mediante $k(\lambda) = -1$, $\lambda|_{S_0} = 0$ y que todas las superficies de nivel son difeomorfas a S_0. La función λ se llama *función de nivel de k*. Una hipersuperficie Ω que satisface estas propiedades es llamada *extendible a infinito luminoso pasado*, y generaliza el concepto de *hipersuperficie luminosa espaciotemporalmente convexa* definido en el Capítulo 4 para hipersuperficies en el espacio-tiempo de Minkowski que también se extienden al infinito luminoso pasado.

Para definir asintoticidad plana a lo largo de Ω, necesitamos imponer el decaimiento de varios objetos en el infinito. Primero notemos la existencia de campos de tensores covariantes T en Ω completamente ortogonales a k (i.e. satisfaciendo $T(k, \cdots) = T(\ldots, k) = 0$). Llamamos a tales tensores **transversos**. Un campo tensorial T (no necesariamente transverso) se llama *Lie constante* si y sólo si $\pounds_k T = 0$.

Una base local $\{X_A\}$ para cualquier sección transversal de $\mathfrak{X}(\Omega)$ extendida mediante $[k, X_A] = 0$ implica

$$(\pounds_k T)(X_{A_1}, \cdots, X_{A_q}) = k(T(X_{A_1}, \cdots, X_{A_q})).$$

El siguiente resultado muestra la relación entre tensores transversales y Lie constantes con colecciones de tensores definidos exclusivamente en las hojas de la foliación $\{S_\lambda\}$ a lo largo de Ω:

Lema 6.4. *Un tensor transverso T en Ω está en correspondencia uno-uno con una colección diferenciable de campos tensoriales covariantes $\{T(\lambda)\}$, con cada $T(\lambda)$ definido en cada superficie de nivel S_λ. Si además T es Lie constante, entonces T está en correspondencia uno-uno con tensores covariantes $\hat{T}$ en una hoja fija S_λ. Es más, todos los $T(\lambda)$ están difeomórficamente relacionados entre sí y con $\hat{T}$.*

Observación 6.5. Usando este lema, con las colecciones $K^{\boldsymbol{\ell}}_{S_\lambda}$ y $\boldsymbol{s_\ell}(S_\lambda)$ podemos definir los correspondientes tensores transversos $K^{\boldsymbol{\ell}}$ y $\boldsymbol{s_\ell}$.

Definición 6.6. *Un campo tensorial transverso T es* **definido positivo** *si y sólo si la correspondiente colección de tensores $\{T(\lambda)\}$ es definida positiva para todo λ.*

Consideremos una base local $\{X_A\}$ en S_0 extendida unívocamente a $\mathfrak{X}(\Omega)$ mediante $[k, X_A] = 0$. Con esta extensión $\{X_A\}$ define una base en cada superficie de nivel S_λ. Desde ahora $\{X_A\}$ una base construída de esta manera.

Diremos que el campo tensorial transverso T en Ω es $T = O(1)$ si y sólo si $T_{A_1 \cdots A_q} := T(X_{A_1}, \cdots, X_{A_q})$ está uniformemente acotado. Escribimos $T = O_n(\lambda^{-q})$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si

$$\lambda^q T = O(1), \quad \lambda^{q+1} \pounds_k T = O(1), \quad \cdots \quad , \lambda^{q+n} \underbrace{\pounds_k \cdots \pounds_k}_{n} T = O(1).$$

También escribimos $T = o(\lambda^{-q})$ si y sólo si $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^q T(\lambda)_{A_1 \cdots A_q} = 0$ y $T = o_n(\lambda^{-q})$ si y sólo si $\lambda^{i+q}(\pounds_k)^i T = o(1)$ para todo $i = 0, 1, \cdots, n$. Dado un campo tensorial transverso T el tensor $\pounds_{X_A} T$ es también transverso. Escribimos $T = o_n^X(\lambda^{-q})$ si y sólo si

$$\lambda^q \underbrace{\pounds_{X_{A_1}} \cdots \pounds_{X_{A_i}}}_{i} T = o(1) \qquad \forall i = 0, 1, \cdots, n$$

Es claro que todas estas definiciones son independientes de la elección de $\{X_A\}$.

Definición 6.7 (**Hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado).** *Sea (M, g) un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Una hipersuperficie luminosa Ω es asintóticamente plana hacia el pasado si se extiende regularmente hasta el infinito pasado luminoso y existe una elección de sección transversal S_0 y de generador afín luminoso k con su correspondiente función de nivel λ con las siguientes propiedades:*

(i) Existen dos campos tensoriales $\hat{q}$ y h simétricos, dos-covariantes, transversales y Lie constantes tales que $\tilde{\gamma} := \gamma - \lambda^2 \hat{q} - \lambda h$ es $\tilde{\gamma} = o_1(\lambda) \cap o_2^X(\lambda)$.

(ii) Existe una uno-forma $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}}^{(1)}$ transversa, Lie constante tal que $\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{\ell}} := \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}} - \frac{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}}^{(1)}}{\lambda}$ es $\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{\ell}} = o_1(\lambda^{-1})$.

(iii) Existen funciones Lie constantes $\theta_{\ell}^{(0)}$ y $\theta_{\ell}^{(1)}$ tal que $\tilde{\theta}_{\ell} := \theta_{\ell} - \frac{\theta_{\ell}^{(0)}}{\lambda} - \frac{\theta_{\ell}^{(1)}}{\lambda^2}$ es $\tilde{\theta}_{\ell} = o(\lambda^{-2})$.

(iv) El escalar $\mathrm{Riem}^g(X_A, X_B, X_C, X_D)$ a lo largo de Ω es tal que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^2} \mathrm{Riem}^g(X_A, X_B, X_C, X_D) < \infty,$$

y su doble traza satisface $2\mathrm{Ein}^g(k, \ell) - \mathrm{Scal}^g - \frac{1}{2}\mathrm{Riem}^g(\ell, k, \ell, k) = o(\lambda^{-2})$.

A veces será conveniente complementar esta definición con una noción más fuerte donde condiciones de decaimiento adicionales para algunas componentes del tensor de Einstein y para el tensor sobrante $\tilde{\gamma}$ son asumidas. Concretamente, decimos que la hipersuperficie luminosa Ω asintóticamente plana satisface la **condición de decaimiento de flujo energético** si

$$\mathrm{Ein}^g(k, X_A)|_{\Omega} = o(\lambda^{-2}), \qquad \pounds_k \tilde{\gamma} = o_1^X(1).$$

Consideremos una hipersuperficie luminosa Ω asintóticamente plana hacia el pasado con una elección de k y de función de nivel λ. La siguiente proposición determina la expansión asintótica de K^k y da una expresión explícita para $\theta_\ell^{(0)}$.

Proposición 6.8. *Sea Ω una hipersuperficie luminosa Ω asintóticamente plana hacia el pasado con una elección de generador luminoso k afínmente parametrizado y correspondiente función de nivel λ. Sea $\gamma(\lambda)^{AB}$ la inversa de $\gamma(\lambda)$. Entonces*

$$\gamma(\lambda)^{AB} = \frac{1}{\lambda^2}\hat{q}^{AB} - \frac{1}{\lambda^3}\hat{h}^{AB} + o(\lambda^{-3}), \tag{6.10}$$

$$K^k_{AB} = -\hat{q}_{AB}\lambda - \frac{1}{2}h_{AB} + o(1), \tag{6.11}$$

$$\theta_\ell = \frac{2\mathcal{K}_{\hat{q}}}{\lambda} + \frac{\theta_\ell^{(1)}}{\lambda^2} + o(\lambda^{-2}). \tag{6.12}$$

$\hat{q}^{AB}$ es la inversa de $\hat{q}_{AB}$, índices en tensores con sombrero son subidos y bajados con estas métricas y $\mathcal{K}_{\hat{q}}$ es la curvatura de Gauss de $\hat{q}_{AB}$.

Observación 6.9. Nótese que la expansión de K^k sólo depende del ítem (i) en la definición de asintoticidad plana. La expresión para $\theta_\ell^{(0)}$ depende sin embargo de los ítems (i), (iii) y (iv).

Observación 6.10. Podemos subir el índice del tensor $K^k(\lambda)$ con la métrica contravariante γ^{AB}. Combinando los desarrollos asintóticos (6.10) y (6.11) llegamos a

$$K^k(\lambda)^A{}_B = -\frac{1}{\lambda}\delta^A{}_B + \frac{1}{2}\hat{h}^A{}_B\frac{1}{\lambda^2} + o(\lambda^{-2}), \tag{6.13}$$

y tomando la traza

$$\theta_k = -\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{\hat{q}}\hat{h})\frac{1}{\lambda^2} + o(\lambda^{-2}) := -\frac{2}{\lambda} + \theta_k^{(1)}\frac{1}{\lambda^2} + o(\lambda^{-2}). \tag{6.14}$$

Nuestro objetivo es considerar foliaciones muy generales en Ω y obtener el límite de la energía de Hawking a lo largo de las mismas refiriendo todos los objetos de una foliación base afín que tienda a esferas grandes. Es importante remarcar que como toda métrica Riemanniana en una variedad $\simeq \mathbb{S}^2$ es conforme a la de la dos-esfera unitaria $\mathring{q}$, entonces siempre existe una elección (no única) del generador luminoso afín k en una Ω asintóticamente plana con foliación base $\{S_\lambda\}$ que tiende a esferas grandes.

Definición 6.11. *Sea Ω luminosa y asintóticamente plana con una elección del generador luminoso afínmente parametrizado k y función de nivel λ. Se dice que la foliación $\{S_\lambda\}$* **tiende a grandes esferas** *si y sólo si el término dominante $\hat{q}$ en la expansión de γ que aparece en el ítem (i) de la Definición 6.7 es la métrica estándar $\mathring{q}$ de la dos-esfera unidad.*

Observación 6.12. Una métrica $\hat{q} = \phi^2 \mathring{q}$ conforme a la esférica también será esférica si y sólo si la función ϕ satisface la **ecuación de las esferas grandes**

$$\triangle_{\mathring{q}} \log \phi + \phi^2 = 1. \tag{6.15}$$

A partir de ahora consideramos el generador luminoso afínmente parametrizado k y su correspondiente función de nivel λ de tal forma que la geometría de las superficies de nivel S_λ se aproxime, a la métrica estándar de la esfera unitaria. Aparte de proveer con la métrica $\mathring{q}$ a cada S_λ, también consideraremos en cada hoja la correspondiente derivada covariante $\mathring{D}$. Los tensores que suban y bajen índices con $\mathring{q}$ tendrán un círculo arriba.

Consideramos una foliación $\{S_{\lambda'}\}$ de carácter general y calcularemos el límite de la masa de Hawking a lo largo de la misma en el Teorema 6.13. Dada una base luminosa $\{k', \ell'\}$ ortogonal a una sección S de Ω y que satisface $\langle k', \ell' \rangle = -2$, la curvatura media $\vec{H}$ de S se descompone $\vec{H} = -\frac{1}{2}(\theta_{k'}\ell' + \theta_{\ell'}k')$, y la energía de Hawking es

$$m_H(S) = \sqrt{\frac{|S|}{16\pi}} \left(1 + \frac{1}{16\pi} \int_S \theta_{k'}\theta_{\ell'}\eta_S \right). \tag{6.16}$$

El siguiente teorema da una relación para el límite en infinito de la fórmula (6.16) en términos de la geometría de la foliación base. De hecho, citamos dos expresiones diferentes para el límite.

Teorema 6.13 (Límite general de la energía de Hawking). *Sea Ω una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado, dotada de una foliación base $\{S_\lambda\}$ afínmente parametrizada con generador k, y que tiende a esferas grandes. Definamos la foliación $\{S_{\lambda^\star}\}$ as $S_{\lambda^\star} = \{p \in \Omega : \lambda(p) = \frac{1}{\Psi(p)}\lambda^\star + \tau(p) + \xi(p)\}$, donde las funciones grafo son*

$$\lambda|_{S_{\lambda^\star}} = F_{\lambda^\star} := \frac{1}{\Psi}\bigg|_{S_{\lambda^\star}} \lambda^\star + \tau|_{S_{\lambda^\star}} + \xi|_{S_{\lambda^\star}},$$

con $\Psi > 0$, y τ son funciones Lie constantes en Ω y $\xi = o_1(1) \cap o_2^X(1)$ con $k(\xi) = o_1^X(\lambda^{-1})$. El límite de la energía de Hawking a lo largo de $\{S_{\lambda^\star}\}$ es

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda^\star \to \infty} m_H(S_{\lambda^\star}) =& \frac{-1}{8\pi\sqrt{16\pi}} \left(\sqrt{\int_{\mathbb{S}^2} \boldsymbol{\eta}_{\hat{q}}} \right) \int_{\mathbb{S}^2} \left(\mathcal{K}_{\hat{q}} \theta^{(1)}_{k^\star} + \theta^{(1)}_{\ell^\star} \right) \boldsymbol{\eta}_{\hat{q}} \\
=& \frac{1}{8\pi\sqrt{16\pi}} \left(\sqrt{\int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\Psi^2} \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}} \right) \\
& \times \int_{\mathbb{S}^2} \left(\triangle_{\mathring{q}} \theta^{(1)}_k - (\theta^{(1)}_k + \theta^{(1)}_\ell) - 4\operatorname{div}_{\mathring{q}}(\boldsymbol{s}^{(1)}_{\boldsymbol{\ell}}) \right) \Psi \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}},
\end{aligned} \tag{6.17}$$

donde $\hat{q}$, $\theta^{(1)}_{k^\star}$ y $\theta^{(1)}_{\ell^\star}$ hacen referencia tanto a la foliación $\{S_{\lambda^\star}\}$ como a la foliación afín $\{S_{\lambda''}\}$ definida mediante $S_{\lambda''} = \{p \in \Omega : \lambda(p) = \frac{1}{\Psi(p)}\lambda'' + \tau(p)\}$, y cuyas respectivas *funciones grafo son* $\lambda|_{S_{\lambda''}} = F_{\lambda''} := \frac{1}{\Psi}\Big|_{S_{\lambda''}} \lambda'' + \tau|_{S_{\lambda''}}$*, y* $\mathring{q}$*,* $\theta_k^{(1)}$*,* $\theta_\ell^{(1)}$ *y* $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}}^{(1)}$ *hacen referencia a la foliación base* $\{S_\lambda\}$*.*

Como mencionamos anteriormente, el límite de la energía de Hawking cuando la foliación se aproxima a esferas grandes es la energía de Bondi. Para finalizar queremos recuperar este hecho de nuestra expresión general. Recordemos que el grupo conforme de la dos-esfera está definido como el conjunto de difeomorfismos $\Phi : (\mathbb{S}^2, \mathring{q}) \mapsto (\mathbb{S}^2, \mathring{q})$ que satisfacen $\Phi^\star(\mathring{q}) = \Theta^2 \mathring{q}$, $\Theta \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^+)$ (i.e. el grupo de difeomorfismos conformes). Nos restringimos a la componente conexa de la identidad en este grupo. Es bien sabido (ver e.g. [35]) que este grupo es isomorfo a la componente conexa de la identidad en el grupo de Lorentz de Minkowski $\mathcal{M}^{1,3}$, y también isomorfo al grupo de Möbius de la esfera de Riemann

$$F : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{S}^2 \tag{6.18}$$

$$z \mapsto F(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), \tag{6.19}$$

donde $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^2$. En estas coordenadas, la métrica estándar de la esfera es $\mathring{q} = \frac{4}{(1+z\overline{z})^2} dz d\overline{z}$ y el armónico esférico $l = 1$ es

$$Y_1^1 = \frac{z + \overline{z}}{1 + z\overline{z}}, \qquad Y_2^1 = \frac{z - \overline{z}}{i(1 + z\overline{z})}, \qquad Y_3^1 = \frac{z\overline{z} - 1}{1 + z\overline{z}}.$$

Observación 6.14. Los armónicos esféricos en este capítulo no están normalizados.

Para un vector $a \in \mathbb{R}^3$ escribimos $a \cdot Y^1 := \sum_{i=1}^3 a^i Y_i^1$. Estas propiedades nos permiten obtener fácilmente la solución general de la ecuación de esferas grandes (6.15).

Proposición 6.15 (Solución de la ecuación de las esferas grandes). *Una función diferenciable* $\phi : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}^+$ *resuelve la ecuación (6.15) si y sólo si existe* $a = (a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$\Psi := \frac{1}{\phi} = \sqrt{1 + |a|^2} + a \cdot Y^1. \tag{6.20}$$

Se puede probar que el vector a es

$$a = (a^1, a^2, a^3) = \left(\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}\beta + \overline{\gamma}\delta)\,, \mathrm{Im}\,(\overline{\alpha}\beta + \overline{\gamma}\delta)\,, \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 + |\gamma|^2 - |\delta|^2}{2} \right). \tag{6.21}$$

A su vez, cada transformación de Möbius se corresponde con una única transformación de Lorentz restringida; recíprocamente cada transformación de Lorentz restringida se corresponde precisamente con dos transformaciones de Möbius, una opuesta de la otra. La transformación de Lorentz $x'^\mu = \Lambda(F)^\mu{}_\nu x^\nu$ asociada a la transformación de Möbius F tiene la forma (ver página 17 en [35])

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha\bar\alpha+\beta\bar\beta+\gamma\bar\gamma+\delta\bar\delta & \alpha\bar\beta+\beta\bar\alpha+\gamma\bar\delta+\delta\bar\gamma & i(\alpha\bar\beta-\beta\bar\alpha+\gamma\bar\delta-\delta\bar\gamma) & \alpha\bar\alpha-\beta\bar\beta+\gamma\bar\gamma-\delta\bar\delta \\ \alpha\bar\gamma+\gamma\bar\alpha+\beta\bar\delta+\delta\bar\beta & \alpha\bar\delta+\delta\bar\alpha+\beta\bar\gamma+\gamma\bar\beta & i(\alpha\bar\delta-\delta\bar\alpha+\gamma\bar\beta-\beta\bar\gamma) & \alpha\bar\gamma+\gamma\bar\alpha-\beta\bar\delta-\delta\bar\beta \\ i(\gamma\bar\alpha-\alpha\bar\gamma+\delta\bar\beta-\beta\bar\delta) & i(\delta\bar\alpha-\alpha\bar\delta+\gamma\bar\beta-\beta\bar\gamma) & \alpha\bar\delta+\delta\bar\alpha-\beta\bar\gamma-\gamma\bar\beta & i(\gamma\bar\alpha-\alpha\bar\gamma+\beta\bar\delta-\delta\bar\beta) \\ \alpha\bar\alpha+\beta\bar\beta-\gamma\bar\gamma-\delta\bar\delta & \alpha\bar\beta+\beta\bar\alpha-\gamma\bar\delta-\delta\bar\gamma & i(\alpha\bar\beta-\beta\bar\alpha+\delta\bar\gamma-\gamma\bar\delta) & \alpha\bar\alpha-\beta\bar\beta-\gamma\bar\gamma+\delta\bar\delta \end{pmatrix}$$

A una foliación base $\{S_\lambda\}$ de Ω que tienda a esferas grandes con una métrica asintótica reescalada $\mathring{q}$ se le puede asignar un sistema de referencia inercial $\{t, x^i\}$ en un espacio-tiempo de Minkowski abstracto. Esto es posible puesto que dada otra foliación $\{S_{\lambda'}\}$ con métrica asintótica reescalada $\phi^2\mathring{q}$, (con ϕ solución de la ecuación de la esferas grandes), uno puede asociar una transformación de Möbius F (determinada por la función ϕ), y a F se le puede asociar una única transformación de Lorentz restringida $\Lambda(F)$. A su vez $\Lambda(F)$ define un nuevo sistema de referencia inercial asintótico $\{t', x'^i\}$. El observador inercial asociado a $\Lambda(F)$ es definido por el vector

$$u := \partial_{t'} = \frac{\partial t}{\partial t'}\partial_t + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial t'}\partial_{x^i} = \Lambda(F)^0{}_0\partial_t - \sum_{i=1}^{3}\Lambda(F)^0{}_i\partial_{x^i}.$$

Toda esta construcción tiene sentido porque la energía de Bondi E_B^u asociada a la métrica asintótica esférica $\mathring{q}$ correspondiente a un observador inercial asintótico u puede ser escrita en la forma (η es la métrica de Minkowski)

$$E_B^u = -\eta(P_B, u),$$

donde el cuadrimomento de Bondi P_B es independiente de u. Más adelante en el Corolario 6.16 recuperamos estos hechos desde nuestros resultados sobre el límite de la energía de Hawking.

Comparando $\Lambda^0{}_i(F)$ en la transformación de Lorentz con la expresión para a en (6.21), se sigue que en el caso de hipersuperficies luminosas que se extienden hasta infinito luminoso pasado,

$$u = \sqrt{1+|a|^2}\partial_t + a^i\partial_{x^i},$$

en función de los coeficientes a^i en el factor conforme ϕ.

Podemos ahora recuperar el resultado en que la energía de Hawking tiende a la energía de Bondi para foliaciones esféricas. Obtenemos asimismo la expresión explícita para las cuatro componentes del cuadrimomento de Bondi P_B en función de la geometría de la foliación base:

Corolario 6.16. *Sea Ω una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado dotada de una foliación base $\{S_\lambda\}$ afínmente parametrizada con generador k y que tiende a esferas grandes. Consideremos otra foliación asociada al parámetro λ^* tal que $\lambda = \phi\lambda^* + \tau + \xi$, como en el Teorema 6.13, donde $\phi > 0$ satisface la ecuación de* *las esferas grandes (6.15). Sea $u \in \mathcal{M}^{1,3}$ el observador inercial asintótico asociado a esta foliación. Entonces*

$$\lim_{\lambda^* \to \infty} m_H(S_{\lambda^*}) = -\eta(P_B, u) := E_B^u,$$

donde η es la métrica de Minkowski y el cuadrimomento de Bondi P_B es

$$E_B := P_B^0 := \frac{-1}{16\pi} \int_{\mathbb{S}^2} (\theta_k^{(1)} + \theta_\ell^{(1)}) \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}, \tag{6.22}$$

$$P_B^i := \frac{1}{16\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \left(-\triangle_{\mathring{q}} \theta_k^{(1)} + (\theta_k^{(1)} + \theta_\ell^{(1)}) + 4 \mathrm{div}_{\mathring{q}}\, s_\ell^{(1)} \right) Y_i^1 \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{6.23}$$

Si, además, la condición de decaimiento del flujo de energía se cumple, entonces el tres-momento de Bondi se simplifica

$$P_B^i = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\triangle_{\mathring{q}} \theta_k^{(1)} + (\theta_k^{(1)} + \theta_\ell^{(1)}) \right) Y_i^1 \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{6.24}$$

7

Sobre la desigualdad de Penrose a lo largo de hipersuperficies luminosas

Dedicamos este último capítulo de esta tesis a estudiar las principales propiedades de flujos generales a lo largo de hipersuperficies luminosas en espacio-tiempos asintóticamente planos que satisfacen la condición dominante de energía con el propósito de abordar la versión luminosa de la desigualdad de Penrose. Es este capítulo probamos la desigualdad para una gran clase de superficies. Además, otra desigualdad geométrica de la misma naturaleza que la desigualdad de Penrose luminosa se prueba en completa generalidad. Los resultados de este capítulo fueron publicados en [28].

La herramienta fundamental que usamos en este capítulo es un funcional sobre superficies que acota por arriba la raíz cuadrada del área de cualquier superficie débilmente atrapada hacia el exterior. Si la foliación tiende a esferas grandes, el límite del funcional es la energía de Bondi medida por el observador que el flujo determina. Este funcional no es monótono en general, pero puede romperse en una parte monótona, que definimos como la masa de Bergqvist en el Capítulo 4, y un término D que es una renormalización del área en cada hoja. Éste último jugará un papel importante a la hora de encontrar condiciones suficientes para la validez de la desigualdad de Penrose luminosa.

En el Capítulo 4, la desigualdad de Penrose para capas delgadas fue abordada mediante el uso de dos funcionales sobre una foliación afín $\{S_\lambda\}$ que tendía a esferas grandes a lo largo de una hipersuperficie luminosa Ω hacia el pasado. Concretamente,

$$M_b(\lambda) := \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{16\pi}\int_{S_\lambda} \theta_\ell(\lambda)\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}, \tag{7.1}$$

que se definió como la masa de Bergqvist y es monótona (ver el Teorema 4.10 en el Capítulo 4), y

$$D(\lambda) := \sqrt{\frac{|S_\lambda|}{16\pi}} - \frac{\lambda}{2},$$

que se definió en analogía con la definición de M_b. La desigualdad de Penrose para capas delgadas luminosas en Minkowski era equivalente a probar

$$M_b(\lambda = 0) + D(\lambda = 0) \leq 0.$$

Esta expresión sugiere que el nuevo funcional definido por $M_b(\lambda) + D(\lambda)$ puede tener interés en sí mismo. En la suma, los términos en λ se cancelan y encontramos una expresión que depende sólamente de la superficie S y de la elección de $\boldsymbol{\ell}$ (por el término θ_{ℓ} en (7.1)). En este capítulo el funcional

$$M(S, \boldsymbol{\ell}) := \sqrt{\frac{|S|}{16\pi}} - \frac{1}{16\pi} \int_S \theta_{\ell} \boldsymbol{\eta_S} \tag{7.2}$$

es un objeto fundamental. Analizaremos sus propiedades y estudiaremos su utilidad a la hora de abordar la desigualdad de Penrose.

Notemos que una superficie débilmente atrapada hacia el exterior S satisface, por definición, $\theta_{\ell} \leq 0$ independientemente de la escala de $\boldsymbol{\ell}$, y por tanto

$$\sqrt{\frac{|S|}{16\pi}} \leq M(S, \boldsymbol{\ell}).$$

Así, si $M(S, \boldsymbol{\ell})$ tuviera buenas propiedades de monotonicidad en ciertos flujos y su valor sobre grandes esferas en un contexto asintóticamente plano pudiera ser relacionado con la masa total del espacio-tiempo, este objeto sería potencialmente útil para abordar la desigualdad de Penrose y quizá jugaría un papel similar al que la energía de Hawking tiene en el contexto de simetría temporal.

Sea Ω una hipersuperficie luminosa conexa embebida en (M, g) y que admite una sección transversal global S_0. Pongámonos en el mismo contexto que en el Capítulo 6, y consideremos foliaciones $\{S_\lambda\}$ a lo largo de Ω. Queremos investigar la derivada de $M(S_\lambda, \boldsymbol{\ell})$ con respecto a λ. Para mantener la máxima generalidad, no haremos ninguna suposición sobre el vector luminoso $\boldsymbol{\ell}$ ortogonal a S_λ (aparte que la de ser futuro y transverso a Ω). Los generadores luminosos de Ω no tienen que ser necesariamente afínmente parametrizados, esto es, cumplen

$$\nabla_k k = Q_k k,$$

con Q_k no necesariamente cero. Dada una función positiva diferenciable $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{R}^+$, hay una única elección de normal luminosa $\boldsymbol{\ell}$ para S_λ (que denotamos por $\boldsymbol{\ell}^\varphi$) y que satisface

$$\langle k, \boldsymbol{\ell}^\varphi \rangle = -\varphi.$$

Obviamente, $\boldsymbol{\ell}^\varphi$ depende de la foliación $\{S_\lambda\}$, por lo que no es una propiedad intrínseca a Ω. La elección $\varphi = 2$ será relevante más tarde y denotaremos $\boldsymbol{\ell}^{\varphi=2}$ simplemente por $\boldsymbol{\ell}$ de ahora en adelante. Como antes, $\boldsymbol{s_{\ell^\varphi}}$ es también una cantidad dependiente de la foliación. La evolución de $M(S_\lambda, \boldsymbol{\ell}^\varphi)$ en este contexto general viene dada por el siguiente lema:

Lema 7.1. *Sea Ω una hipersuperficie luminosa embebida en el espacio-tiempo (M^4, g). Asumamos que Ω es de topología $S \times \mathbb{R}$ con el generador luminoso tangente al factor $\mathbb{R}$. Consideremos una foliación $\{S_\lambda\}$ de Ω mediante hipersuperficies espaciales, todas difeomorfas a S. Sea k el generador luminoso futuro que satisface $k(\lambda) = -1$ y $\boldsymbol{\ell}^\varphi$ la normal luminosa a S_λ que satisface $\langle k, \boldsymbol{\ell}^\varphi \rangle = -\varphi$. Entonces*

$$\frac{dM(S_\lambda, \boldsymbol{\ell}^\varphi)}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{64\pi|S_\lambda|}} \int_{S_\lambda} (-\theta_k)\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda} + \frac{1}{16\pi} \int_{S_\lambda} \Big[\mathrm{Ein}^g(\boldsymbol{\ell}, k) - \frac{\varphi}{2}\mathrm{Scal}^{S_\lambda} + \varphi \left(-div_{S_\lambda} \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}^\varphi} + |\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}^\varphi}|^2_{\gamma_{S_\lambda}} \right) + \left(\frac{1}{\varphi} k(\varphi) - Q_k \right) \theta_{\boldsymbol{\ell}^\varphi} \Big] \boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}, \qquad (7.3)$$

donde Q_k está definido mediante $\nabla_k k = Q_k k$, Ein^g es el tensor de Einstein de (M^4, g), $\mathrm{Scal}^{S_\lambda}$ la curvatura escalar de $(S_\lambda, \gamma_{S_\lambda})$, y $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}^\varphi}$ es la conexión del fibrado normal de S_λ. Si, además, φ es constante y k es afín ($Q_k = 0$), entonces

$$\frac{dM(S_\lambda, \boldsymbol{\ell}^\varphi)}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{64\pi|S_\lambda|}} \int_{S_\lambda} (-\theta_k)\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda} - \frac{\varphi\chi(S_\lambda)}{8} + \frac{1}{16\pi} \int_{S_\lambda} \Big(\mathrm{Ein}^g(\boldsymbol{\ell}^\varphi, k) + \varphi |\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}^\varphi}|^2_{\gamma_{S_\lambda}} \Big) \boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}, \quad (7.4)$$

donde $\chi(S_\lambda)$ es la característica de Euler de S_λ.

Asumamos a partir de ahora que λ es un parámetro afín. Hacemos la suposición global de que $\Omega = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Asimismo usaremos las nociones de *transverso* y *tensor Lie constante*, y *asintoticidad plana*, introducidos en el Capítulo 6.

Nuestro siguiente objetivo es analizar el límite de $M(S, \boldsymbol{\ell}^\varphi)$ en infinito. Las expresiones son más sencillas si introducimos el radio-área en el infinito como

$$R^2_{\hat{q}} := \frac{1}{4\pi} \int_{\hat{S}} \boldsymbol{\eta}_{\hat{q}},$$

donde $\hat{S}$ representa la superficie S dotada de la métrica asintótica $\hat{q}$ a lo largo de la foliación $\{S_\lambda\}$. Realizando el cálculo, obtenemos

$$M(S, \boldsymbol{\ell}^\varphi) = \left(\frac{R_{\hat{q}}}{2} - \frac{\varphi}{4} \right) \lambda + \frac{1}{16\pi} \int_{\hat{S}} \left(\theta^{(1)}_k \left(\frac{1}{R_{\hat{q}}} - \varphi \mathcal{K}_{\hat{q}} \right) - \frac{\varphi}{2} \theta^{(1)}_{\ell} \right) \boldsymbol{\eta}_{\hat{q}} + o(1), \quad (7.5)$$

donde la función Lie-constate $\theta^{(1)}_k$ viene definida por la expansión

$$\theta_k = \frac{-2}{\lambda} + \frac{\theta^{(1)}_k}{\lambda^2} + o(\lambda^{-2}). \qquad (7.6)$$

La expresión (7.5) tiene límite finito en el infinito si y sólo si se reescala $\boldsymbol{\ell}^\varphi$ de tal forma que $\varphi = 2R_{\hat{q}}$. Esto lleva a la siguiente definición:

Definición 7.2. *Sea Ω una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado y $\{S_\lambda\}$ la foliación cuya existencia se asume en la Definición 6.7 en el Capítulo 6. El campo vectorial $\boldsymbol{\ell}^\star$ es aquél que es luminoso, ortogonal a cada hoja S_λ y normalizado mediante $\langle k, \boldsymbol{\ell}^\star \rangle = -2R_{\hat{q}}$.*

Nótese que $\boldsymbol{\ell}^\star$ viene definido por $\varphi = 2R_{\hat{q}}$ de forma que su relación con el $\boldsymbol{\ell}$ canónico es $\boldsymbol{\ell}^\star = R_{\hat{q}}\boldsymbol{\ell}$. Con esta elección,

$$\lim_{\lambda\to\infty} M(S_\lambda, \boldsymbol{\ell}^\star) = \frac{1}{16\pi} \int_{\hat{S}} \left(\theta_k^{(1)} \left(\frac{1}{R_{\hat{q}}} - 2R_{\hat{q}}\mathcal{K}_{\hat{q}} \right) - R_{\hat{q}}\theta_{\boldsymbol{\ell}}^{(1)} \right) \boldsymbol{\eta}_{\hat{q}}. \tag{7.7}$$

Es útil relacionar este límite con el correspondiente límite de la energía de Hawking a lo largo de $\{S_\lambda\}$. La siguiente proposición recoge el resultado:

Proposición 7.3. *Con la elección $\boldsymbol{\ell}^\star = R_{\hat{q}}\boldsymbol{\ell}$, los límites de $M(S_\lambda, \boldsymbol{\ell}^\star)$ y $m_H(S_\lambda)$ quedan relacionados mediante*

$$\lim_{\lambda\to\infty} M(S_\lambda, \boldsymbol{\ell}^\star) = \lim_{\lambda\to\infty} m_H(S_\lambda) + \frac{1}{16\pi} \int_{\hat{S}} \theta_k^{(1)} \left(\frac{1}{R_{\hat{q}}} - R_{\hat{q}}\mathcal{K}_{\hat{q}} \right) \boldsymbol{\eta}_{\hat{q}}. \tag{7.8}$$

Observación 7.4. Hay dos casos interesantes en los que el límite de $M(S_\lambda, \boldsymbol{\ell}^\star)$ coincide con el límite de la energía de Hawking a lo largo de la foliación. El primero ocurre cuando $\hat{q}$ tiene curvatura positiva constante (caso en que la foliación tiende a esferas grandes), donde como ya sabemos la energía de Hawking tiende a la energía de Bondi. El segundo se corresponde con aquellas foliaciones que satisfacen $\theta_k^{(1)} = constante$. Estudiaremos ahora este último tipo de foliaciones.

Ludvigsen & Vickers [21] y Bergqvist [2] trabajaron la versión de la desigualdad de Penrose luminosa. Un ingrediente fundamental de su trabajo involucraba foliaciones afines para las que el primer término significativo en el desarrollo en el infinito de θ_k era cero. Como veremos, estas foliaciones están muy relacionadas con foliaciones afines con $\theta_k^{(1)}$ constante.

Primeramente necesitamos un lema que muestre que el término dominante $\theta_k^{(1)}$ siempre es estrictamente positivo independientemente de la foliación afín considerada.

Lema 7.5. *Sea Ω una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado con una elección de generador luminoso k afínmente parametrizado y correspondiente a la función de nivel λ. Asumamos que el espacio-tiempo satisface la condición dominante de energía. Entonces $\theta_k^{(1)} > 0$.*

El siguiente resultado prueba la existencia de foliaciones con $\theta_k^{(1)}$ constante

Lema 7.6. *Sea Ω una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado con una elección de generador luminoso k afínmente parametrizado y correspondiente a la función de nivel λ. Existe una función positiva Lie-constante $f \in \mathcal{F}(\Omega)$, tal que reescalar $k' = fk$ hace que el término $\theta_{k'}^{(1)}$ en la expansión asintótica de $\theta_{k'}$ sea constante.*

Estas foliaciones surgen naturalmente en el contexto de compactificaciones conformes del infinito luminoso y están relacionadas con las coordenadas de Bondi cerca del infinito luminoso. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 7.7 (**Foliación geodésica asintóticamente Bondi asociada a S_0).** *Consideremos una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado con una elección de sección transversal S_0. Una foliación geodésica-afín $\{S_\lambda\}$ se llama geodésica asintóticamente Bondi (GAB) y asociada a S_0 si y sólo si*

(i) $S_{\lambda=0} = S_0$,

(ii) $\theta_k^{(1)}$ *es constante.*

Las foliaciones GAB son únicas en el siguiente sentido:

Lema 7.8 (**Unicidad de GABs).** *Sea Ω una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana y S_0 una sección transversal. Dos foliaciones GAB $\{S_\lambda\}$ y $\{S_{\lambda'}\}$ asociadas a S_0 están necesariamente relacionadas por $\lambda = a\lambda'$ para alguna constante positiva a.*

Ya podemos enunciar nuestro resultado principal con respecto a las foliaciones GAB:

Teorema 7.9 (**Una desigualdad tipo-Penrose para foliaciones GAB).** *Sea Ω una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado y S_0 una sección transversal. Asumamos que el espacio-tiempo satisface la condición dominante de energía. Entonces, el área $|S_0|$ satisface la cota*

$$\sqrt{\frac{|S_0|}{16\pi}} - \frac{1}{16\pi}\int_{S_0} \theta_{\ell^\star} \boldsymbol{\eta}_{S_0} \leq \lim_{\lambda\to\infty} m_H(S_\lambda), \tag{7.9}$$

donde el límite es considerado a lo largo de la foliación GAB $\{S_\lambda\}$ asociada a S_0. En particular, si S_0 es una superficie débilmente atrapada hacia el exterior, entonces

$$\sqrt{\frac{|S_0|}{16\pi}} \leq \lim_{\lambda\to\infty} m_H(S_\lambda). \tag{7.10}$$

Cuando Ω admite una foliación GAB que tiende a esferas grandes, entonces el límite de la energía de Hawking a lo largo de esta foliación es la energía de Bondi E_B asociada a este observador en el infinito, y la desigualdad tipo-Penrose (7.10) se transforma en la desigualdad de Penrose estándar, recuperando así el resultado original de Ludvigsen & Vickers [21] y Bergqvist [2].

El ingrediente fundamental que nos permite probar la desigualdad tipo-Penrose (7.10) es $D(S_\lambda, \ell^\star) \leq \lim_{\lambda\to\infty} D(S_\lambda, \ell^\star)$. De hecho, el argumento en la prueba del Teorema 7.9

combinado con la Proposición 7.3 muestra que cualquier superficie que satisfaga la desigualdad

$$D(S_0, \boldsymbol{\ell}^\star) \leq \lim_{\lambda\to\infty} D(S_\lambda, \boldsymbol{\ell}^\star) = \frac{1}{16\pi R_{\hat{q}}} \int_{\hat{S}} \theta_k^{(1)} \boldsymbol{\eta}_{\hat{q}} \tag{7.11}$$

a lo largo de la foliación afín $\{S_\lambda\}$ que comienza en S_0, en un espacio-tiempo que satisface la condición dominante de energía, automáticamente satisface la desigualdad

$$\sqrt{\frac{|S_0|}{16\pi}} - \frac{1}{16\pi}\int_{S_0} \theta_{\ell^\star} \boldsymbol{\eta}_{S_0} \leq \lim_{\lambda\to\infty} m_H(S_\lambda) + \frac{1}{16\pi}\int_{\hat{S}} \theta_k^{(1)} \left(\frac{1}{R_{\hat{q}}} - R_{\hat{q}}\mathcal{K}_{\hat{q}}\right) \boldsymbol{\eta}_{\hat{q}}. \tag{7.12}$$

Ésta es la desigualdad de Penrose cuando S_0 es una superficie débilmente atrapada hacia el exterior y el lado derecho sea la energía de Bondi E_B a lo largo de $\{S_\lambda\}$. Para ello es suficiente que $\{S_\lambda\}$ tienda a esferas grandes y este será el caso que nos interese de aquí en adelante.

A partir de ahora necesitaremos más términos en los desarrollos asintóticos que estamos manejando. Para poder hacer esto posible necesitamos una definición ligeramente más fuerte de asintoticidad plana:

Definición 7.10 (**Fuerte asintoticidad plana hacia el pasado).** *Una hipersuperficie luminosa Ω en un espacio-tiempo (M^4, g) es fuertemente asintóticamente plana hacia el pasado si es asintóticamente plana hacia el pasado con (i) en la Definición 6.7 en el Capítulo 6 reemplazada por la condición más fuerte*

(i)' Existen campos tensoriales dos-covariantes $\hat{q}$ (definido positivo), h y Ψ_0 transversos y Lie constantes tal que $\tilde{\gamma}$ definido por $\gamma = \lambda^2 \hat{q} + \lambda h + \Psi_0 + \tilde{\gamma}$ es $\tilde{\gamma} = o_1(1) \cap o_2^X(1)$.

Una de las consecuencias más importantes de este nuevo ítem es que θ_k admite la expansión

$$\theta_k = \frac{-2}{\lambda} + \frac{\theta_k^{(1)}}{\lambda^2} + \frac{\theta_k^{(2)}}{\lambda^3} + o(\lambda^{-3}) \tag{7.13}$$

con $\theta_k^{(2)}$ Lie constante.

Buscamos condiciones que impliquen la validez de (7.11) y por tanto de la desigualdad de Penrose cuando las foliaciones tienden a esferas grandes. Por ello asumiremos a partir de ahora que $\hat{q}$ es la métrica de la esfera unidad $\mathring{q}$. En tal caso, $R_{\hat{q}} = 1$ y $\boldsymbol{\ell}^\star = \boldsymbol{\ell}$. Queremos investigar la condición

$$\frac{d}{d\lambda} D(S_\lambda, \boldsymbol{\ell}^\star) \geq 0, \tag{7.14}$$

que de hecho implica (7.11) y consecuentemente la validez de la desigualdad de Penrose luminosa.

La derivada de $D(S_\lambda, \ell)$ es

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}D(S_\lambda,\ell) &= \frac{1}{2\sqrt{16\pi S_\lambda}}\left(\frac{d}{d\lambda}|S_\lambda| - \sqrt{16\pi S_\lambda}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{16\pi S_\lambda}}\left(\int_{S_\lambda}(-\theta_k)\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda} - \sqrt{16\pi S_\lambda}\right).\end{aligned}$$

Dado que $\theta_k < 0$, la desigualdad $\frac{d}{d\lambda}D(S_\lambda,\ell) \geq 0$ puede ser escrita de forma equivalente y más convenientemente como $G(\lambda) \geq 0$, donde

$$G(\lambda) := \left(\int_{S_\lambda}(-\theta_k)\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}\right)^2 - 16\pi|S_\lambda|.$$

Comenzamos calculando el límite de $G(\lambda)$ en infinito.

Proposición 7.11. *Sea Ω una hipersuperficie luminosa fuertemente asintóticamente plana hacia el pasado y $\{S_\lambda\}$ una foliación afín que tiende a esferas grandes. Entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty} G(\lambda) = F_\infty = \left(\int_{\mathbb{S}^2}\theta_k^{(1)}\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\right)^2 - 8\pi\int_{\mathbb{S}^2}\left(\theta_k^{(1)}\right)^2\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} - 8\pi\int_{\mathbb{S}^2}\theta_k^{(2)}\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}. \tag{7.15}$$

Asumiendo que estamos en la situación en que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} G(\lambda) \geq 0$, podemos asegurar que $G(\lambda) \geq 0$ mediante la condición $G'(\lambda) \leq 0$. Esta derivada es, usando la ecuación de Raychaudhuri (ver e.g. [41]),

$$\begin{aligned}G'(\lambda) &= 2\left(\int_{S_\lambda}\theta_k\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\left(\int_{S_\lambda}\theta_k\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}\right) + 8\pi\right)\\ &= 2\left(\int_{S_\lambda}\theta_k\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}\right)\left(\int_{S_\lambda}\left(\mathrm{Ric}^g(k,k) - \frac{1}{2}\theta_k^2 + \Pi^k_{AB}\Pi^{kAB}\right)\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda} + 8\pi\right),\end{aligned}$$

donde $\Pi^k_{AB} = K^k_{AB} - \frac{1}{2}\theta_k\gamma_{AB}$ es la parte sin traza de K^k_{AB}. Puesto que el primer término es siempre negativo, $G'(\lambda) \leq 0$ es equivalente a que $H(\lambda) \geq 0$, donde hemos definido

$$H(\lambda) := \int_{S_\lambda}\left(\mathrm{Ric}^g(k,k) - \frac{1}{2}{\theta_k}^2 + \Pi^k_{AB}\Pi^{kAB}\right)\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda} + 8\pi.$$

Procedemos con el cálculo de la derivada de esta función y de su límite en infinito.

Proposición 7.12. *Con las mismas suposiciones que el la Proposición 7.11,*

$$\lim_{\lambda\to\infty} H(\lambda) = 0$$

y la derivada de $H(\lambda)$ es

$$H'(\lambda) = \int_{S_\lambda}\left(-2\theta_k\mathrm{Ric}^g(k,k) + 2(\Pi^k)^{AB}R_{AB} + \frac{d}{d\lambda}\mathrm{Ric}^g(k,k)\right)\boldsymbol{\eta}_{S_\lambda}, \tag{7.16}$$

donde $R_{AB} := \mathrm{Riem}^g(X_A, k, X_B, k)$.

Podemos combinar los cálculos anteriores para encontrar un conjunto de condiciones suficientes que permitan aplicar el método del área renormalizada.

Teorema 7.13 (**Condiciones suficientes para el método del área renormalizada).** *Sea Ω una hipersuperficie luminosa fuertemente asintóticamente plana hacia el pasado y $\{S_\lambda\}$ una foliación afín que tiende a esferas grandes. Asumamos que el espacio-tiempo satisface la condición dominante de energía. Si las dos condiciones*

(i) $$\left(\int_{\mathbb{S}^2} \theta_k^{(1)} \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\right)^2 - 8\pi \int_{\mathbb{S}^2} \left(\theta_k^{(1)}\right)^2 \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} - 8\pi \int_{\mathbb{S}^2} \theta_k^{(2)} \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} \geq 0,$$

(ii) $$\int_{S_\lambda} \left(-2\theta_k \mathrm{Ric}^g(k,k) + 2(\Pi^k)^{AB} R_{AB} + \frac{d}{d\lambda}\mathrm{Ric}^g(k,k)\right) \boldsymbol{\eta}_{S_\lambda} \leq 0, \qquad \forall \lambda \geq 0$$

se cumplen, entonces

$$\sqrt{\frac{|S_0|}{16\pi}} - \frac{1}{16\pi}\int_{S_0} \theta_\ell \, \boldsymbol{\eta}_{S_0} \leq E_B, \tag{7.17}$$

donde E_B es la energía de Bondi asociada a la foliación $\{S_\lambda\}$. En particular, si S_0 es una superficie débilmente atrapada hacia el exterior, entonces la desigualdad de Penrose $E_B \geq \sqrt{\frac{|S_0|}{16\pi}}$ se cumple.

Hemos comprobado que el método del área renormalizada en el caso de espacio-tiempos de vacío que admiten hipersuperficies luminosas Ω sin cizalladura (i.e. que satisfacen $K^k = \frac{1}{2}\theta_k \gamma$) es infructuoso. A pesar de ello, el funcional $M(S_\lambda, \boldsymbol{\ell})$ puede usarse para probar la desigualdad de Penrose, que en este contexto ya fue probada por Sauter [37] en toda generalidad aprovechando propiedades de la energía de Hawking.

En nuestro trabajo hemos probado cómo el método que involucra el funcional $M(S_\lambda, \boldsymbol{\ell})$ puede puede establecer la desigualdad de Penrose en el caso de vacío libre de cizalladura. Sin embargo el argumento no se basa en la monotonicidad de $M(S_\lambda, \boldsymbol{\ell})$ (de la cual carece, en general) sino que se basa en la integración de (7.4), que a su vez puede realizarse pues toda la información geométrica a lo largo de Ω puede ser calculada explícitamente en este contexto.

El método del área renormalizada funciona particularmente bien en el espacio-tiempo de Minkowski. De hecho, el tensor de curvatura se anula en este espacio-tiempo, y por la Proposición 7.12 tenemos que $H(\lambda)$ es constante y por tanto cero, pues su límite en el infinito siempre se anula. Por tanto, $G(\lambda)$ es constante y su signo puede deducirse mediante su valor asintótico (7.15). Necesitamos determinar $\theta_k^{(1)}$ y $\theta_k^{(2)}$. En el espacio-tiempo de Minkowski esto es simple pues $R^A{}_B = 0$ hace que la ecuación de Ricatti sea explícitamente integrable.

Realizando el desarrollo asintótico de θ_k en el infinito, obtenemos

$$\theta_k = \frac{-2}{\lambda} + \frac{-\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{K}_0^k)^{-1}\right)}{\lambda^2} + \frac{-\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{K}_0^k)^{-2}\right)}{\lambda^3} + o(\lambda^{-3}). \tag{7.18}$$

Entonces,

$$\theta_k^{(1)} = -\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{K}_0^{\boldsymbol{k}})^{-1}\right), \qquad \theta_k^{(2)} = -\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{K}_0^{\boldsymbol{k}})^{-2}\right), \tag{7.19}$$

donde $\boldsymbol{K}_0^{\boldsymbol{k}}$ es el endomorfismo asociado a la segunda forma fundamental a lo largo de k de S_0. Puesto que como se vio en el Capítulo 4, $\boldsymbol{K}_0^{\boldsymbol{k}} = -(\boldsymbol{K}_0) \circ (\boldsymbol{Id} - \tau_0 \boldsymbol{K}_0)^{-1}$, con $\boldsymbol{K}_0$ el endomorfismo de Weingarten de $\widehat{S}_0$, y a su vez $\boldsymbol{B} := (\boldsymbol{K}_0)^{-1}$, donde $B^A{}_B = (\mathring{q}^{-1})^{AC}\mathring{\nabla}_C\mathring{\nabla}_B h + \delta^A{}_B h$, con $\mathring{q}$ la métrica esférica, $\mathring{\nabla}$ la conexión esférica y h la función soporte de $\widehat{S}_0$, se deduce

$$\theta_k^{(1)} = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{B} - \tau_0 \boldsymbol{Id}\right) = \triangle_{\mathring{q}} h + 2(h - \tau_0) := u.$$

Insertando estos valores en (7.15) se llega a

$$F_\infty = \lim_{\lambda\to\infty} G(\lambda) = \left(\int_{\mathbb{S}^2} u \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\right)^2 - 16\pi|S_0|.$$

Hemos demostrado entonces que la desigualdad de Penrose para capas delgadas en Minkowski se cumple si

$$\left(\int_{\mathbb{S}^2} u \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\right)^2 \geq 16\pi|S_0|. \tag{7.20}$$

La fórmula para el área de S_0 en función de h y τ_0 es

$$|S_0| = \int_{\mathbb{S}^2} \left((h-\tau_0)^2 + (\triangle_{\mathring{q}} h)(h-\tau_0) - \frac{1}{2} h \triangle_{\mathring{q}} h\right) \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}},$$

Después de algunas manipulaciones, (7.20) puede escribirse de la forma

$$4\pi \int_{\mathbb{S}^2} \left((\triangle_{\mathring{q}} h)^2 + 2h\triangle_{\mathring{q}} h\right)\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} \geq 4\pi \int_{\mathbb{S}^2} u^2 \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}} - \left(\int_{\mathbb{S}^2} u \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\right)^2.$$

Esta es precisamente la condición suficiente para la desigualdad de Penrose para capas delgadas en Minkowski obtenida en el Capítulo 4.

Con respecto a las aplicaciones de las foliaciones GAB, estudiaremos ahora la particularización de la desigualdad general tipo-Penrose obtenida en el Teorema 7.9 en el espacio de Minkowski de cuatro dimensiones. Para ello necesitamos información del límite de la energía de Hawking a lo largo de foliaciones GAB. Nos serán de gran utilidad los resultados obtenidos en el Capítulo 6, donde estudiamos el límite de la energía de Hawking en el infinito para una gran clase de foliaciones $\{S_\lambda\}$ a lo largo de hipersuperficies luminosas asintóticamente planas.

Sea $\{S_\lambda\}$ una foliación base afín que tiende a esferas grandes, y definamos $\theta_k^{(1)}$, $\theta_{\boldsymbol{\ell}}^{(1)}$ y $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}}^{(1)}$ como en la Definición 6.7. Consideremos otra foliación afín $\{S_{\lambda'}\}$ que nazca de la misma sección transversal S_0. Las funciones de nivel λ y λ' están necesariamente relacionadas mediante $\lambda = f\lambda'$, con $f > 0$ y Lie constante en Ω. Entonces el límite de la energía de Hawking a lo largo de $\{S_{\lambda'}\}$ es (ver Teorema 6.13 en el Capítulo 6)

$$\lim_{\lambda'\to\infty} m_H(S_{\lambda'}) = \frac{1}{8\pi\sqrt{16\pi}}\left(\sqrt{\int_{\mathbb{S}^2} f^2 \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}}\right)\int_{\mathbb{S}^2}\Big(\triangle_{\mathring{q}}\theta_k^{(1)} - (\theta_k^{(1)} + \theta_{\boldsymbol{\ell}}^{(1)}) \\ -4\mathrm{div}_{\mathring{q}}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\ell}}^{(1)})\Big)\frac{1}{f}\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}. \qquad (7.21)$$

Construyamos la foliación base afín de la siguiente manera. Sea un tiempo Minkowskiano t, y normalizemos el campo luminoso futuro k tangente a Ω tal que $k(t) = 1$. Sea λ la función de nivel asociada a k, y $\{S_\lambda\}$ la foliación afín determinada por λ, que tiende a esferas grandes. La función tiempo-altura τ_λ de la superficie de nivel S_λ con respecto al hiperplano $\{t = 0\}$ está definida como

$$\tau_\lambda := t|_{S_\lambda}.$$

De hecho, $\tau_\lambda|_p = \tau_0|_{\pi(p)} - \lambda$ a consecuencia de la elección de normalización para k.

En el siguiente lema podemos ver los desarrollos asintóticos de las expansiones luminosas y de la uno-forma de conexión de cada hoja de la foliación:

Lema 7.14 (Desarrollo asintótico en $\lambda = +\infty$). *Sea Ω una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado en $\mathcal{M}^{1,3}$ y $\{S_\lambda\}$ una foliación afín asociada a la elección del sistema de coordenadas Minkowskiano $\{t, x^i\}$ que satisface $\langle k, \xi = \partial_t\rangle = -1$. Sea ℓ ortogonal a $\{S_\lambda\}$ y que satisface $\langle \ell, k\rangle = -2$. Entonces tenemos los siguientes desarrollos asintóticos*

$$\theta_k = \frac{-2}{\lambda} + \frac{u}{\lambda^2} + o(\lambda^{-2}), \qquad u = -tr\big((\boldsymbol{K}_0^{\boldsymbol{k}})^{-1}\big) \qquad (7.22)$$

$$\theta_\ell = \frac{2}{\lambda} + \frac{-u + 2\triangle_{\mathring{q}}\tau_0}{\lambda^2} + o(\lambda^{-2}), \qquad \tau_0 := t|_{S_0} \qquad (7.23)$$

$$s_{\ell A} = \frac{-\mathring{\nabla}_A\tau_0}{\lambda} + o(\lambda^{-1}), \qquad (7.24)$$

donde $\boldsymbol{K}_0^{\boldsymbol{k}}$ es la segunda forma fundamental de S_0 a lo largo de k.

El Lema 7.14 nos permite calcular el límite de la energía de Hawking a lo largo de foliaciones muy generales utilizando los resultados del Capítulo 6. En el caso particular de foliaciones GAB asociadas a S_0, la función de reescalado es $f := \frac{\theta_k^{(1)}}{c} = \frac{u}{c}$, $\quad c > 0$, con $\lambda = \frac{u}{c}\lambda'$, y si sustituímos esta información en (7.21) obtenemos

$$\lim_{\lambda'\to\infty} m_H(S_{\lambda'}) = \frac{1}{8\pi\sqrt{16\pi}}\left(\sqrt{\int_{\mathbb{S}^2} u^2\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}}\right)\int_{\mathbb{S}^2}\triangle_{\mathring{q}}(u + 2\tau_0)\frac{1}{u}\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}.$$

Entonces, la particularización del Teorema 7.9 al contexto de Minkowski es

Teorema 7.15. *Sea Ω una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado en $\mathcal{M}^{1,3}$ y S_0 una sección transversal espacial de Ω. Entonces, la siguiente desigualdad se cumple:*

$$\sqrt{\frac{|S_0|}{16\pi}} \leq \frac{1}{16\pi}\int_{S_0} \theta_{\ell^\star}\boldsymbol{\eta}_{S_0} + \frac{1}{8\pi\sqrt{16\pi}}\left(\sqrt{\int_{\mathbb{S}^2} u^2 \boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}}\right)\int_{\mathbb{S}^2} \triangle_{\mathring{q}}(u+2\tau_0)\frac{1}{u}\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}, \qquad (7.25)$$

donde $u = -tr\big((\boldsymbol{K}_0^k)^{-1}\big)$, $\tau_0 = t|_{S_0}$ con t una coordenada temporal Minkowskiana. La métrica $\mathring{q}$ de la esfera unidad queda definida mediante $\mathring{q} = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{\gamma(\lambda)}{\lambda^2}$, y $\{k, \ell\}$ son las normales luminosas futuras de S_0 con k tangente a Ω y satisfaciendo $k(t) = 1$ y $\langle k, \ell\rangle = -2$.

En términos de θ_ℓ, la desigualdad (7.25) se expresa

$$\sqrt{\frac{|S_0|}{16\pi}} \leq \frac{1}{32\pi\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\int_{\mathbb{S}^2} u^2\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}}\right)\left(\int_{S_0}\frac{1}{u}\theta_\ell\boldsymbol{\eta}_{S_0} + \int_{\mathbb{S}^2}\triangle_{\mathring{q}}(u+2\tau_0)\frac{1}{u}\boldsymbol{\eta}_{\mathring{q}}\right),$$

donde $u = -\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{K}_0^k)^{-1}\right) = \triangle_{\mathring{q}} h + 2(h-\tau_0)$.

Cerramos finalmente el capítulo volviendo al contexto general de hipersuperficies luminosas asintóticamente planas hacia el pasado en espacio-tiempos que satisfacen la condición dominante de energía. También volvemos a las foliaciones afines que no tienden necesariamente a esferas grandes. El último resultado para esta tesis es una cota superior general para el área $|S_\lambda|$ en términos de cantidades asintóticas intrínsecas a Ω. Encontramos una desigualdad que es más débil que la desigualdad $D(S_\lambda, \ell^\star) \leq \lim\limits_{\lambda\to\infty} D(S_\lambda, \ell^\star)$, siendo la diferencia entre ambas un término de la desigualdad de Hölder.

Proposición 7.16. *Sea Ω una hipersuperficie luminosa asintóticamente plana hacia el pasado embebida en un espacio-tiempo que satisface la condición dominante de energía, S_0 una sección transversa y $\{S_\lambda\}$ una foliación afín que nace en S_0. Sea $\theta_k^{(1)}$ el coeficiente asintótico definido en (7.6) y $\hat{q}$ la métrica asintótica asociada a $\{S_\lambda\}$. Entonces,*

$$|S_\lambda| \leq \frac{1}{4}\int_{\hat{S}}\left(\theta_k^{(1)} + 2\lambda\right)^2\boldsymbol{\eta}_{\hat{q}}, \qquad (7.26)$$

y en particular $|S_0| \leq \frac{1}{4}\int_{\hat{S}}(\theta_k^{(1)})^2\boldsymbol{\eta}_{\hat{q}}$.

8 Conclusiones

En esta tesis hemos abordado la conjetura de la desigualdad de Penrose luminosa y hemos obtenido varios resultados que respaldan tanto la validez de la versión general de la desigualdad como la de su respectiva versión para capas delgadas. Las proyecciones en espacio-tiempos estáticos, grafos sobre hipersuperficies en el espacio Euclídeo y flujos de superficies a lo largo de hipersuperficies luminosas han sido las herramientas principales que hemos usado para abordar el problema. La siguiente lista resume los resultados principales de esta tesis.

1. Dada una superficie espacial S embebida en un espacio-tiempo estático, hemos obtenido las expresiones para su geometría intrínseca y extrínseca en función de la geometría de su proyección a lo largo del Killing sobre un hiperplano de tiempo constante. Hemos calculado también las expresiones análogas cuando la proyección se realiza en un contexto puramente Riemanniano.

2. Hemos analizado con todo detalle el error en el intento de Gibbons [12] para probar la desigualdad de Penrose para capas delgadas en el espacio-tiempo de Minkowski usando la proyección a lo largo de la dirección del Killing, y hemos calculado la expresión correcta para la expansión luminosa exterior total $\int_S \theta_\ell \boldsymbol{\eta_S}$ en función de la geometría de la superficie proyectada $\overline{S}$. La expresión correcta para la curvatura media $\overline{H}$ de $\overline{S}$ que involucra las expansiones luminosas de la superficie inicial S también se obtiene.

3. Hemos probado la validez de la desigualdad de Penrose para capas delgadas en Minkowski para superficies convexas embebidas en un hiperplano de tiempo constante. Este resultado fue obtenido simultáneamente e independientemente por Brendle & Wang [4].

4. Hemos obtenido una expresión para la desigualdad de Penrose para capas delgadas en el espacio-tiempo de Minkowski de dimensión arbitraria en función de la llamada

función tiempo-altura τ, que describe cuán lejos está la superficie inicial S del hiperplano de tiempo constante, y en función de la geometría Euclídea de la superficie obtenida al intersecar el cono de luz pasado Ω de la superficie inicial S con un hiperplano de tiempo constante. Esto ha sido posible formulando y resolviendo las ecuaciones de la segunda forma fundamental cociente (ecuación de Ricatti) y de la métrica de Ω en Minkowski, lo que nos permite reescribir la geometría de la superficie inicial S en función de la proyectada a lo largo de su cono de luz pasado.

5. Considerando el resultado anterior, y puesto que la geometría de cuerpos convexos está completamente determinada por la llamada *función soporte h* asociada a la proyección de S a lo largo de su cono de luz pasado, hemos obtenido una expresión para la desigualdad de Penrose para capas delgadas en Minkowski en función de h y de la función tiempo-altura τ de S. Usando esta forma de desigualdad de Penrose para capas delgadas, hemos demostrado la validez en el caso particular que la superficie S se encuentre en el cono de luz pasado de un punto en el espacio-tiempo de Minkowski de dimensión arbitraria.

6. La expresión para la desigualdad de Penrose para capas delgadas en términos de la función soporte involucra las inversas de endomorfismos representados por matrices de tamaño $n \times n$. En el caso particular $n = 2$ (espacio-tiempo de dimensión cuatro), hemos calculado explícitamente esta inversa y hemos obtenido una expresión explícita de la desigualdad para capas delgadas en términos de la función soporte y de la función tiempo-altura.

7. En un contexto Euclídeo, y dada una hipersuperficie orientable $\widehat{S}_0$, hemos estudiado la geometría de un grafo sobre $\widehat{S}_0$, y hemos obtenido las expresiones que relacionan la primera y segunda forma fundamental del grafo con las de la hipersuperficie base y la función grafo. Este resultado nos ha permitido relacionar las dos proyecciones de S en el espacio-tiempo de Minkowski: la proyección en la dirección del Killing $\overline{S}$ y la proyección $\widehat{S}_0$ a lo largo del cono de luz pasado Ω sobre un hiperplano de tiempo constante. Esto se ha aplicado para reescribir la condición de convexidad de $\overline{S}$ en términos de la geometría de la superficie convexa $\widehat{S}_0$ y de la función tiempo-altura τ.

8. En un espacio-tiempo general que admite una hipersuperficie luminosa Ω, hemos obtenido las expresiones de la métrica, curvaturas luminosas extrínsecas y uno-forma de conexión de cualquier sección transversa de Ω en términos de elementos geométricos definidos en las hojas de una foliación base asociada a un campo vectorial luminoso futuro k dado y tangente a Ω.

9. Hemos obtenido una fórmula que da el límite de la energía de Hawking a lo largo de flujos de carácter general en una hipersuperficie luminosa Ω asintóticamente

plana hacia el pasado en términos de la geometría de una foliación base afínmente parametrizada que tiende a esferas grandes. La expresión del cuadrivector energía-momento de Bondi P_B asociado a la geometría base ha sido también calculado en términos de la geometría base.

10. Hemos introducido la noción de foliación GAB a lo largo de una hipersuperficie luminosa Ω en un espacio-tiempo asintóticamente plano y que satisface la condición dominante de energía, y hemos obtenido una desigualdad tipo-Penrose para cualquier sección S de Ω que involucra el límite de la energía de Hawking a lo largo de tal foliación. En el caso particular en que S es una superficie débilmente atrapada hacia el exterior, la desigualdad toma la misma forma que la desigualdad de Penrose luminosa, pero con la energía de Bondi reemplazada por el límite de la energía de Hawking a lo largo de la foliación GAB. Además, si la foliación GAB tiende a esferas grandes, nuestra desigualdad se transforma en la desigualdad de Penrose luminosa estándar.

11. Combinando los resultados anteriores con la expresión para el límite de la energía de Hawking a lo largo de flujos generales en hipersuperficies luminosas Ω, hemos probado la validez de una desigualdad de Penrose tipo-capa delgada en el espacio-tiempo de Minkowski de dimensión cuatro.

12. Finalmente, hemos desarrollado un método para abordar la desigualdad de Penrose luminosa en espacio-tiempos asintóticamente planos y que satisfacen la condición dominante de energía, y que hemos llamado *método del área renormalizada*. Hemos hallado dos condiciones suficientes para que el método pueda aplicarse. En el caso particular del espacio-tiempo de Minkowski de dimensión cuatro, este método prueba la validez de la desigualdad de Penrose para capas delgadas para el mismo conjunto de superficies que en el Capítulo 4, las cuales fueron obtenidas aprovechando propiedades del espacio-tiempo de Minkowski. Así, el método del área renormalizada puede considerarse una generalización de la táctica usada en el Capítulo 4 para espacio-tiempos generales que satisfacen la condición dominante de energía.

Los resultados de esta tesis representan un avance importante en la comprensión de la desigualdad de Penrose luminosa. De hecho, algunos de nuestros resultados (definición de hipersuperficie luminosa asintóticamente plana y el límite general de la energía de Hawking) han jugado un papel fundamental en un reciente acercamiento a la desigualdad de Penrose luminosa publicado por H. Roesch [36].

Bibliography

[1] W. Beckner, "Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality", *Ann. Math.* **138**, 213-242 (1993). 4

[2] G. Bergqvist, "On the Penrose inequality and the role of auxiliary spinor fields", *Class. Quantum Grav.* **14**, 2577-2583 (1997). 4, 4.10, 7, 7

[3] H.L. Bray, M.A. Khuri, "P.D.E.'s which imply the Penrose Conjecture", *Asian J. Math* **15**, 557-610 (2011). 3

[4] S. Brendle, M.T. Wang, "A Gibbons-Penrose inequality for surfaces in Schwarzschild Spacetime", *Commun. Math. Phys.* **330**, 33-43 (2014). 3, 3, 3, 8

[5] Y. Choquet-Bruhat, *General Relativity and the Einstein Equations*, Oxford University Press (2009).

[6] D. Christodoulou, S. Kleinerman, "The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space" in *Princeton Mathematical series*, volume 41, Princeton NJ, Princeton University Press (1993).

[7] P.T. Chruściel, J. Lopes Costa, "On uniqueness of stationary vacuum black holes", *Astérisque* **321**, 195-265 (2008). 2

[8] P.T. Chruściel, E. Delay, G.J. Galloway, R. Howard, "Regularity of horizons and the area theorem", *Annals Henri Poincaré* **2**, 109-178 (2001). 2

[9] P.T. Chruściel, G.J. Galloway, D. Solis, "Topological censorship for Kaluza-Klein space-times", *Annals Henri Poincaré* **9**, 893–912 (2009). 2

[10] A. Einstein, "Die Feldgleichungen der Gravitation", *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 844-847 (1915) 1

[11] G.J. Galloway, "Null Geometry and the Einstein Equations" in *The Einstein Equations and the Large Scale Behaviour of Gravitational Fields*, P.T. Chruściel, H. Friedrich (Editors) (2000). 4

[12] G.W. Gibbons, "Collapsing shells and the isoperimetric inequality for black holes", *Class. Quantum Grav.* **14**, 2905-2915 (1997). 3, 3, 3, 3, 3, 3.13, 8

[13] S.W. Hawking, "The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities", *Proc. Roy. Soc. London A.* **A300**, 187-201 (1967). 2

[14] S.W. Hawking, "Gravitational Radiations from colliding black holes", *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1344-1346 (1971). 2

[15] S.W. Hawking, "Black holes in General Relativity", *Commun. Math. Phys.* **25**, 152-166 (1972). 2

[16] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press (1973). 1, 2

[17] S.W. Hawking, R. Penrose, "The singularities of gravitational collapse and cosmology", *Proc. Roy. Soc. London A.* **314**, 529-548 (1970). 1

[18] M. Heusler, *Black hole uniqueness theorems*, Cambridge Lecture Notes in Physics, Cambridge University Press, Cambridge (1996). 2

[19] G. Huisken, "Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres", *J. Diff. Geom.* **20**, 237-266 (1984). 4

[20] LIGO Scientific Collaboration, "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger", *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016). 1

[21] M. Ludvigsen, J.A.G. Vickers, "An inequality relating the total mass and the area of a trapped surface in general relativity", *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 3349-3353 (1983). 4, 7, 7

[22] M. Mars, "Present status of the Penrose inequality", *Class. Quantum Grav.* **26**, 193001 (2009). 2, 3

[23] M. Mars, "Introduction to the Penrose inequality for null shells", *Seminar at University of Málaga (Spain)* , (13-04-2011). 2

[24] M. Mars, "Constraint equations for general hypersurfaces and applications to shells", *Gen. Rel. Grav.* **45**, 2175-2221 (2013). 2

[25] M. Mars, A. Soria, "On the Penrose inequality for dust null shells in the Minkowski spacetime of arbitrary dimension", *Class. Quantum Grav.* **29**, 135005 (2012). 4, 4, 4, 4

[26] M. Mars, A. Soria, "Geometry of normal graphs in Euclidean space and applications to the Penrose inequality in Minkowski", *Annales Henri Poincaré* **15**, 1903-1918 (2014). 3, 5

[27] M. Mars, A. Soria, "The asymptotic behaviour of the Hawking energy along null asymptotically flat hypersurfaces", *Class. Quantum Grav.* **32**, 185020 (2015). 1, 6

[28] M. Mars, A. Soria, "On the Penrose inequality along null hypersurfaces", *Class. Quantum Grav.* **33**, 115019 (2016). 7

[29] J.R. Oppenheimer, H. Snyder, "On Continued Gravitational Contraction", *Phys. Rev.* **56**, 455-459 (1939). 1

[30] J.R. Oppenheimer, G.M. Volkoff, "On Massive Neutron Cores", *Phys. Rev.* **55**, 374-381 (1939). 1

[31] R. Penrose, "Gravitational collapse and space-time singularities", *Phys. Rev. Lett.* **14**, 57 (1965). 1, 2

[32] R. Penrose, "Gravitational collapse: The role of General Relativity", *Nuovo Cimento* **1**, 252-276 (1969). 1

[33] R. Penrose, "Naked singularities", *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **224**, 125-134 (1973). 1, 2, 4

[34] R. Penrose, "Singularities and Time-Asymmetry", in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, S.W. Hawking and W. Israel (Editors), Cambridge, Cambridge University Press (1979). 1

[35] R. Penrose, W. Rindler, *Spinors and space-time*, Cambridge University Press (1987). 6, 6

[36] H. Roesch, "Proof of a Null Penrose Conjecture using a new Quasi-local Mass", arXiv:1609.02875v1 [gr-qc] (2016). 1, 8

[37] J. Sauter, Ph.D. thesis: *Foliations of null hypersurfaces and the Penrose inequality*, ETH Zürich (2008). 6, 7

[38] J.M.M Senovilla, "Singularity theorems and their consequences", *Gen. Rel. Grav.* **30**, 701-848 (1998). 1, 2

[39] K.P. Tod, "Penrose quasi-local mass and the isoperimetric inequality for static black holes", *Class. Quantum Grav.* **2**, L65-L68 (1985). 4

[40] K.P. Tod, "The hoop conjecture and the Gibbons-Penrose construction of trapped surfaces", *Class. Quantum Grav.* **9**, 1581-1591 (1992). 4

[41] R.M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984). 1, 2, 2, 2, 7

[42] M-T. Wang, S-T. Yau, "Quasilocal mass in General Relativity", *Phys. Rev. Lett.* **102**, 021101 (2009). 3

[43] M-T. Wang, S-T. Yau, "Isometric embeddings into the Minkowski space and new quasi-local mass", *Commun. Math. Phys.* **288**, 919-942 (2009). 3, 3

[44] X. Zhang, "On the relation between ADM and Bondi energy-momenta", *Adv. Theor. Math. Phys.* **10**, 261-282 (2006). 2