

**VNIVERSIDAD DE SALAMANCA**  
**ESCVELA POLITÉCNICA SVPERIOR DE ZAMORA**



TRABAJO FIN DE GRADO

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA  
APROXIMACIÓN DE RAÍCES MÚLTIPLES  
DE ECUACIONES NO LINEALES**

Fecha de adjudicación: Noviembre 2016

Fecha de presentación: Septiembre 2017

**GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA**

**ALUMNO: JUAN MANUEL RODRÍGUEZ LÓPEZ**

**DEPARTAMENTO MATEMÁTICA APLICADA**

**TUTOR: HIGINIO RAMOS CALLE**

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA  
LA APROXIMACIÓN DE RAÍCES  
MÚLTIPLES DE ECUACIONES NO  
LINEALES**

Juan Manuel Rodríguez López

SEPTIEMBRE-2017

# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>7</b>
1.1. Historia . . . . .	7
1.2. Necesidad de los Métodos Numéricos . . . . .	8
<b>2. CONCEPTOS RELACIONADOS CON LOS MÉTODOS ITERATIVOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES</b>	<b>15</b>
2.1. Orden de convergencia . . . . .	15
2.2. Errores . . . . .	16
2.3. Índices de Eficiencia . . . . .	17
2.4. Orden de convergencia computacional . . . . .	19
<b>3. BREVE DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS MÉTODOS CLÁSICOS PARA APROXIMAR RAÍCES. COMPORTAMIENTO EN EL CASO DE RAÍCES MÚLTIPLES</b>	<b>20</b>
3.1. Método de Newton-Raphson . . . . .	20
3.2. Método de Steffensen . . . . .	23
3.3. Método de Halley . . . . .	24
3.4. Método de Chebyshev . . . . .	28
3.5. Método de Jarratt . . . . .	29
3.6. Limitaciones de los métodos clásicos para obtener raíces múltiples . . . . .	32
3.7. Ejemplo ilustrativo del comportamiento de los métodos clásicos en el caso de raíces múltiples . . . . .	33
<b>4. MÉTODOS ESPECIALMENTE DISEÑADOS PARA APROXIMAR RAÍCES CON MULTIPLICIDAD</b>	<b>37</b>
4.1. Modificaciones del método de Newton-Raphson . . . . .	37
4.2. Modificaciones del método de Halley . . . . .	41
4.3. Modificación del método de Jarratt . . . . .	47
4.4. Construcción de métodos de tercer orden . . . . .	49
4.4.1. Primer método de tercer orden para raíces múltiples . . . . .	49

4.4.2.	Segundo método de tercer orden para raíces múltiples .	51
4.5.	Construcción de métodos de cuarto orden . . . . .	52
4.5.1.	Primera familia de métodos de cuarto orden para raíces múltiples . . . . .	52
4.5.2.	Segunda familia de métodos de cuarto orden para raíces múltiples . . . . .	57
<b>5.</b>	<b>EJEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>61</b>
5.1.	Ejemplos académicos . . . . .	61
5.2.	Resolución del problema de aplicación . . . . .	72
<b>6.</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>74</b>
<b>A.</b>	<b>PROGRAMAS IMPLEMENTADOS EN MATHEMATICA</b>	<b>76</b>
A.1.	Ejemplo sencillo . . . . .	77
A.1.1.	Raíz simple: $f(x) = \cos x - x$ . . . . .	77
A.1.2.	Raíz múltiple: $f(x) = (\cos x - x)^4$ . . . . .	82
A.2.	Ejemplos numéricos con raíces múltiples . . . . .	87
A.2.1.	Ejemplo 3: $f_3(x) = ((x - 1)^3 - 1)^6$ . . . . .	87

# Índice de figuras

1.1.	Sistema de cuatro barras acopladas. . . . .	11
1.2.	Gráfica de la función $F(\phi)$ del lado derecho de la ecuación en (1.2.1) para $\alpha \simeq 0,579998719185927$ . . . . .	13
3.1.	Representación gráfica del procedimiento de obtención de $x_n$ a partir de $x_{n-1}$ en el método de Newton. . . . .	21
3.2.	Representación gráfica del método de Halley . . . . .	25
3.3.	Representación gráfica de $f(x) = \cos x - x$ . . . . .	33
3.4.	Representación gráfica de $f(x) = (\cos x - x)^4$ . . . . .	35
5.1.	Representación gráfica de $f_1(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6$	64
5.2.	Representación gráfica de $f_2(x) = x^2 e^x - \operatorname{sen} x + x$ . . . . .	65
5.3.	Representación gráfica de $f_3(x) = ((x - 1)^3 - 1)^6$ . . . . .	66
5.4.	Representación gráfica de $f_4(x) = (x^2 - e^x - 3x + 2)^5$ . . . . .	67
5.5.	Representación gráfica de $f_5(x) = (1 + \cos x)(e^x - 2)^2$ . . . . .	68
5.6.	Representación gráfica de $f_6(x) = \ln^2(x - 2)(e^{x-3} - 1) \operatorname{sen}(\pi x/3)$	69
5.7.	Representación gráfica de $f_7(x) = (\operatorname{sen} x - 1/\sqrt{2})^2 (x + 1)$ . . .	70

# Índice de tablas

3.1.	Primeros términos de $E_p(x)$ . . . . .	30
3.2.	Ejemplo sencillo con raíz simple: $f(x) = \cos x - x$ (tolerancia: $10^{-10}$ , raíz: 0,7390851) . . . . .	34
3.3.	Ejemplo sencillo con raíz múltiple: $f(x) = (\cos x - x)^4$ (tolerancia: $10^{-10}$ , raíz: 0,7390851) . . . . .	36
4.1.	Método básico de Newton . . . . .	40
4.2.	Método de Ralston y Rabinowitz (MRR) teniendo en cuenta la multiplicidad, con $m = 2$ . . . . .	40
4.3.	Método de Newton modificado (MNM). . . . .	40
4.4.	Método básico de Halley . . . . .	46
4.5.	Primera modificación del método de Halley para raíces múltiples (PMH) teniendo en cuenta la multiplicidad, con $m = 2$ . . . . .	46
4.6.	Segunda modificación del método de Halley para raíces múltiples (SMH) teniendo en cuenta la multiplicidad, con $m = 2$ . . . . .	46
5.1.	Multiplicidad y valor aproximado de las raíces de los ejemplos $f_i(x)$ obtenidas. . . . .	63
5.2.	Ej. $f_1$ : $x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6$ ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 1.) . . . . .	64
5.3.	Ej. $f_2$ : $x^2 e^x - \sin x + x$ ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 0.) . . . . .	65
5.4.	Ej. $f_3$ : $((x - 1)^3 - 1)^6$ ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 2.) . . . . .	66
5.5.	Ej. $f_4$ : $(x^2 - e^x - 3x + 2)^5$ ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 0,25753029) . . . . .	67
5.6.	Ej. $f_5$ : $(1 + \cos x)(e^x - 2)^2$ ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 0,69314718) . . . . .	68
5.7.	Ej. $f_6$ : $\ln^2(x - 2)(e^{x-3} - 1) \sin(\pi x/3)$ ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 3.) . . . . .	69
5.8.	Ej. $f_7$ : $(\sin x - 1/\sqrt{2})^2(x + 1)$ ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 0,78539816) . . . . .	70
5.9.	Ej. de aplicación: $F(\phi) = \frac{5}{3} \cos(\alpha) - \frac{5}{2} \cos(\phi) + \frac{11}{6} \cos(\alpha - \phi)$ ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 5,478397894601) . . . . .	73

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Historia

Hasta el siglo XVII la teoría de ecuaciones estuvo limitada, puesto que los matemáticos no fueron capaces de aceptar que los números negativos y los números complejos podían ser raíces de ecuaciones polinómicas.

Mucho antes, los egipcios utilizaron el método de **la Falsa Posición** o *Regula Falsi* para encontrar una raíz en ecuaciones de segundo grado sencillas (aunque este nombre le fue dado posteriormente). Por ejemplo, para hallar una solución aproximada de la ecuación  $x + \frac{x}{7} = 19$ , primero se toma una aproximación de la  $x$  que simplifique el cálculo del primer término, como  $x = 7$ . Al sustituir la  $x$  por 7, el resultado es 8, en vez de 19. Por lo que se necesita un factor de corrección, que se obtiene dividiendo 19 entre 8. Este factor es 2, que se multiplica por el primer valor, 7, obteniéndose así que la raíz aproximada de la ecuación es 16.

Para ecuaciones cuadráticas con una variable  $x$ , como  $x^2 - 5x = 6$ , ya se encontraban soluciones hacia el año 2000 A.C. en libros de los matemáticos Babilónicos. Aunque estos no conocían las raíces negativas ni complejas, su método para las raíces positivas es el mismo método de la Falsa Posición que se utiliza en la actualidad, y que utilizaron también los egipcios.

Un matemático y científico importante fue Herón de Alejandría, que en el siglo I ideó un método de aproximación de la raíz de ecuaciones como  $x^2 = 2$ . En este método, primero se toma una aproximación como  $\frac{3}{2}$  para calcular una nueva aproximación utilizando la regla:  $\frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}}{2}$  ó  $\frac{17}{12}$ . Repitiendo este método se llega a  $\frac{577}{408}$ , que es una buena aproximación de  $\sqrt{2}$ , llamando a estas aproximaciones y cálculos repetidos **iteraciones**.

En 1635 el matemático y filósofo francés *René Descartes* publicó un libro sobre la teoría de ecuaciones, hablando en él de su regla de los signos para saber el número de raíces positivas y negativas de una ecuación.

Unos años más tarde, el físico y matemático inglés *Isacc Newton* descubrió un método iterativo para encontrar las raíces de una ecuación. Hoy se denomina **Método de Newton-Raphson** porque la forma en que se usa actualmente corresponde a la utilizada por Raphson. Es uno de los métodos más utilizados para encontrar las raíces de ecuaciones no lineales, y a partir de él han surgido numerosas modificaciones tratando de mejorar sus características. En estas modificaciones se busca aumentar el orden, mejorar la rapidez de convergencia (métodos aceleradores de la convergencia), tratar de eliminar el uso de derivadas, aplicar el método para obtener raíces múltiples, utilizar más de un punto anterior en cada iteración (métodos multipunto), mejorar las cuencas de atracción (regiones que convergen a cada raíz, considerando para ello ecuaciones polinómicas sencillas), etc., siendo amplísimo el número de artículos que tratan sobre estos temas.

## 1.2. Necesidad de los Métodos Numéricos

La ciencia y la tecnología describen los fenómenos reales mediante modelos matemáticos. El estudio de estos modelos permite conocer en profundidad el proceso del fenómeno, así como su evolución futura. La matemática aplicada es la rama de las matemáticas que se dedica a buscar y aplicar las herramientas más adecuadas para la resolución de este tipo de problemas basados en los modelos matemáticos.

Desgraciadamente, no siempre es posible aplicar métodos analíticos clásicos por diferentes razones, entre otras:

- Cuando no se dispone de métodos analíticos que se adapten a un modelo particular.
- Su aplicación es muy compleja. En estos casos es preferible disponer de una solución aproximada.
- La solución formal es muy complicada y hace difícil cualquier interpretación posterior.
- No existen métodos analíticos capaces de proporcionar soluciones al problema.



Todas estas dificultades han hecho que las técnicas que utilizan métodos numéricos hayan avanzado de forma importante. En este avance ha influido sin lugar a dudas el hecho de que la informática se ha simplificado notablemente y se ha extendido, hasta el punto de que cualquiera puede disponer de un ordenador y de software que permite programar cualquier algoritmo. Los métodos numéricos proporcionan soluciones aproximadas muy exactas (en el sentido de que los errores se pueden hacer tan pequeños como se quiera especificando una tolerancia a priori).

Tal es el caso de la resolución de las ecuaciones no lineales, las cuales aparecen en numerosos campos de la ciencia. Y más concretamente, dentro de la Ingeniería están presentes en la resolución de problemas donde se aplican ciertos principios fundamentales de la física, relacionados con el balance de masas, energía, calor, fuerzas, etc. En cada uno de estos problemas se llega a una ecuación que ha de resolverse para obtener la solución buscada, y habitualmente se hace necesaria la utilización de métodos numéricos para su resolución.

Ejemplos concretos de este tipo de problemas pueden ser:

- La determinación de la profundidad del agua de un canal puede obtenerse combinando en una sola ecuación la ecuación de continuidad (que establece la relación entre el flujo y la profundidad) y la ecuación de Manning (que expresa cómo la velocidad depende de la rugosidad). Se obtiene una ecuación no lineal, que ha de resolverse por algún método numérico.
- Las Leyes de Kirchhoff se utilizan para estudiar el comportamiento de los circuitos eléctricos en estado estacionario. La aplicación de estas leyes a un circuito da lugar a una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

donde  $q$  es la carga,  $L$  la inductancia,  $R$  la resistencia del resistor y  $C$  la capacitancia.

La solución de esta ecuación diferencial está dada por

$$q(t) = q_0 e^{-Rt/(2L)} \cos \left[ \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right]$$

y un problema típico consiste en la determinación del resistor apropiado para disipar energía a una razón especificada, para valores conocidos

de  $L$  y  $C$ . Pero la obtención de  $R$  en la ecuación anterior para valores concretos de los demás parámetros requiere el uso de métodos aproximados.

- En el diseño del sistema de suspensión de un automóvil una cuestión a considerar es la constante  $k$  del resorte (de los amortiguadores) conocido el coeficiente de amortiguamiento,  $c$ , y la masa del automóvil,  $m$ , que debe dar lugar a un compromiso entre comodidad y estabilidad.

La ecuación que resulta viene dada por:

$$\cos\left(0,05\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\right) + \frac{c}{\sqrt{4km - c^2}} \operatorname{sen}\left(0,05\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\right) = 0$$

y, puesto que es no lineal, conocidos los valores de  $c$  y  $m$ , será necesario utilizar métodos aproximados para obtener la solución buscada.

- La altura mínima que debe tener una catenaria en uno de sus extremos, considerando el otro fijo para que en el punto más bajo tenga una determinada altura se obtiene resolviendo una ecuación no lineal, la cual ha de resolverse por métodos aproximados.
- La determinación del punto de máxima deflexión de una viga uniforme sujeta a una carga distribuida linealmente de forma creciente se obtiene resolviendo, para valores conocidos de los parámetros, la ecuación de la curva elástica. Esta ecuación no lineal deberá resolverse por métodos aproximados.
- Muchos problemas de optimización en ingeniería dan lugar a ecuaciones no lineales para cuya solución han de emplearse métodos aproximados. La mayor parte de las ecuaciones que han de resolverse en ingeniería son no lineales, y se necesitarán métodos aproximados para resolverlas.
- La elaboración de tablas de todo tipo de uso común en ingeniería frecuentemente requiere la resolución de ecuaciones no lineales para distintos valores de los parámetros implicados.

Se podría continuar enumerando problemas relacionados con la ingeniería que requieren de la resolución de ecuaciones, pero tan sólo se mostrará un ejemplo detallado, en relación con la obtención de raíces múltiples, que es el tema que nos ocupa.

En los problemas anteriores, donde aparecen diferentes parámetros, y una incógnita cuyo valor queremos obtener, para ciertos valores de los parámetros

puede que la raíz buscada sea una raíz múltiple. En tales casos, el uso de los métodos clásicos para la determinación de raíces no resulta eficaz como se verá en el próximo capítulo (el método de Newton-Raphson es uno de los más utilizados, pero en el caso de raíces múltiples puede presentar una convergencia muy lenta e incluso no converger).

### Ejemplo de aplicación desarrollado:

Consideremos el sistema formado por cuatro barras acopladas como se muestra en la Figura 1.1, sabiendo que  $r_1 = 10$ ,  $r_2 = 6$ ,  $r_3 = 8$  y  $r_4 = 4$  y donde  $\alpha$  es un parámetro que corresponde al ángulo de entrada. Se pide resolver el mecanismo con estos datos, es decir, encontrar el valor del ángulo de salida  $\phi$ .

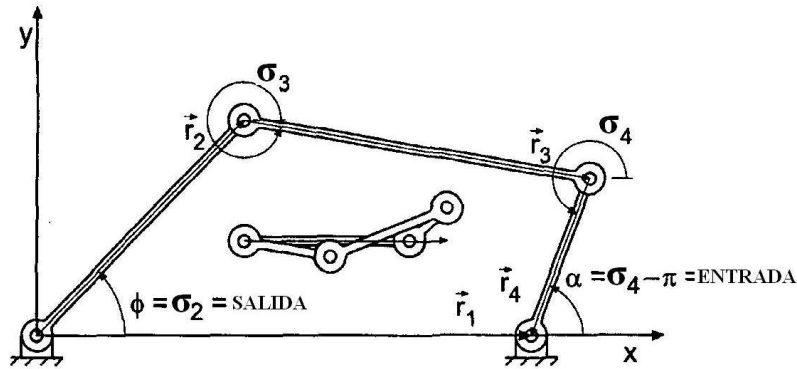


Figura 1.1: Sistema de cuatro barras acopladas.

En dicho sistema una de las barras permanece fija, lo que hace que las uniones de los extremos de dicha barra sólo tengan posibilidad de giro, mientras que las otras dos uniones del sistema tienen capacidad de giro y desplazamiento. Teniendo en cuenta diversas relaciones de ángulos de giro y vectores se puede llegar a una ecuación cuya resolución nos permitirá resolver el problema.

Considerando en el mecanismo el acoplamiento de la barra cuatro tal como aparece en la Figura 1.1, el ángulo  $\alpha = \sigma_4 - \pi$  es la entrada a este mecanismo y el ángulo  $\phi = \sigma_2$  es la salida, con lo que podemos obtener una

relación entre  $\alpha$  y  $\phi$  por medio de la siguiente ecuación:

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 - \vec{r}_1 = 0.$$

Situando  $\vec{r}_1$  a lo largo del eje  $OX$  la ecuación vectorial anterior se puede escribir como dos ecuaciones escalares, correspondientes a las componentes  $x$  e  $y$  de los vectores  $\vec{r}$ , por lo que la ecuación anterior es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} r_2 \cos(\sigma_2) + r_3 \cos(\sigma_3) + r_4 \cos(\sigma_4) - r_1 &= 0 \\ r_2 \operatorname{sen}(\sigma_2) + r_3 \operatorname{sen}(\sigma_3) + r_4 \operatorname{sen}(\sigma_4) &= 0 \end{aligned}$$

Combinando las anteriores ecuaciones escalares, sustituyendo  $\phi = \sigma_2$  y  $\alpha = \sigma_4 - \pi$  podemos simplificar y resulta la siguiente ecuación:

$$R_1 \cos(\alpha) - R_2 \cos(\phi) + R_3 \cos(\alpha - \phi) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r_1}{r_2} \\ R_2 &= \frac{r_1}{r_4} \\ R_3 &= \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_4}. \end{aligned}$$

Considerando el acoplamiento particular de la barra cuatro y los valores conocidos

$$r_1 = 10, r_2 = 6, r_3 = 8, r_4 = 4$$

sustituyendo en las expresiones anteriores queda

$$R_1 = \frac{5}{3}; R_2 = \frac{5}{2}; R_3 = \frac{11}{6}$$

por lo que la ecuación de antes nos queda simplificada de la siguiente manera

$$F(\phi) = \frac{5}{3} \cos(\alpha) - \frac{5}{2} \cos(\phi) + \frac{11}{6} \cos(\alpha - \phi) = 0. \quad (1.2.1)$$

Nótese que en esta ecuación sólo hay una incógnita ( $\phi$ ), puesto que el otro parámetro que aparece ( $\alpha$ ) es el ángulo de entrada, que se supone conocido. Para el valor de

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{5(a-b)}{11 \left( \frac{1}{4} (75\sqrt{2473} - 1331) - 286 \right)} \right)$$

con

$$a = \frac{11}{10} (75\sqrt{2473} - 1331) \sqrt{\frac{1}{346} \left( \frac{11}{692} (75\sqrt{2473} - 1331) - 1 \right)}$$

$$b = \frac{3146}{5} \sqrt{\frac{2}{173} \left( \frac{11}{692} (75\sqrt{2473} - 1331) - 1 \right)}$$

(expresado en radianes  $\alpha \simeq 0,579998719185927$ , que corresponde a un ángulo de entrada de  $33^\circ 13' 53''$ ) resulta que la ecuación presenta una raíz múltiple, como se puede apreciar en la gráfica de la Figura 1.2 (el eje  $OX$  es tangente a la curva en un punto entre  $\phi = 5$  y  $\phi = 6$ ).

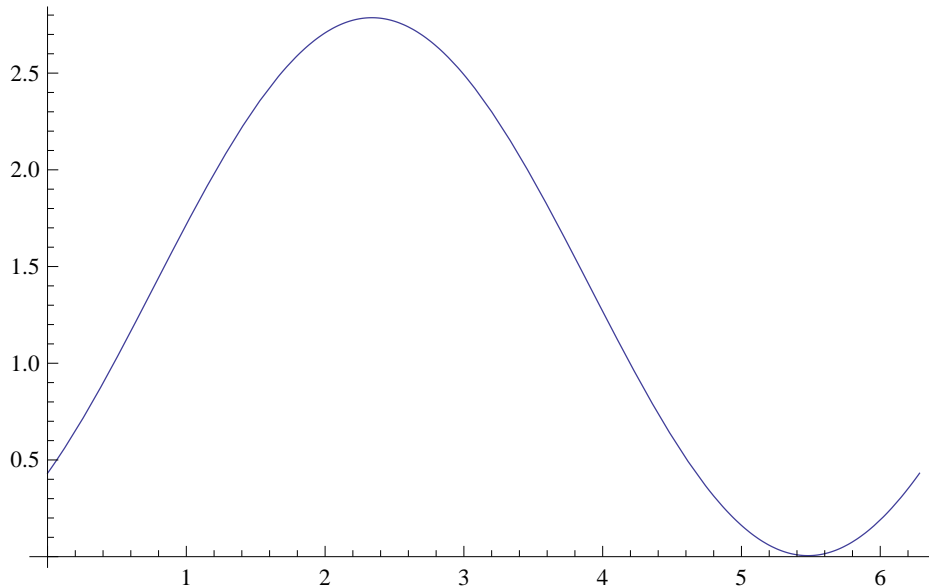


Figura 1.2: Gráfica de la función  $F(\phi)$  del lado derecho de la ecuación en (1.2.1) para  $\alpha \simeq 0,579998719185927$ .

La solución de la ecuación anterior utilizando el comando `FindRoot` del programa *Mathematica*, que utiliza una versión modificada del método de Newton-Raphson, da lugar a un mensaje de advertencia sobre la dificultad de hallar la raíz:

```
FindRoot::lstol: The line search decreased the step size to
within tolerance specified by AccuracyGoal and PrecisionGoal
```

but was unable to find a sufficient decrease in the merit function.

You may need more than `MachinePrecision` digits of working precision to meet these tolerances.

En tales casos resulta necesario el disponer de métodos especiales de resolución que permitan obtener las raíces que presentan multiplicidad. Y a este propósito obedece el tema del trabajo propuesto.

## Capítulo 2

# CONCEPTOS RELACIONADOS CON LOS MÉTODOS ITERATIVOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

### 2.1. Orden de convergencia

En análisis numérico, el orden de convergencia es una medida de la velocidad con la cual una sucesión converge a su límite. Este concepto es muy importante desde el punto de vista práctico si necesitamos trabajar con la sucesión de sucesivas aproximaciones de un método iterativo.

**Definición 2.1.1.** Supongamos que la sucesión de números reales  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\alpha$  y sea  $\varepsilon_n = x_n - \alpha$  para cada  $n \geq 0$ , el error en cada iteración. Si existen dos constantes positivas  $A > 0$  y  $R > 0$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^R} = A, \text{ siendo } A \neq 0, \infty$$

entonces se dice que la sucesión converge a  $\alpha$  con orden de convergencia  $R$  y el número  $A$  se llama constante asintótica del error.

Siendo  $\varepsilon_n = x_n - \alpha$  el error en la  $n$ -ésima iteración obtenida a partir de la sucesión  $\{x_n\}$ , se tiene que para un  $n$  suficientemente grande podemos poner

$$\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^R} \simeq A \Leftrightarrow |\varepsilon_{n+1}| \simeq A |\varepsilon_n|^R$$

lo cual se puede escribir en la forma

$$\varepsilon_{n+1} = A \varepsilon_n^R + O(\varepsilon_n^{R+1}) = O(\varepsilon_n^R)$$

donde  $R$  es el orden de convergencia del método, que nos da una medida de la disminución del error entre una iteración y la iteración siguiente. Según sea el valor de  $R$ , se tienen distintos nombres para el tipo de convergencia:

- Si  $R = 1$ , se dice que la convergencia es lineal.
- Si  $1 < R < 2$  se dice que la convergencia es superlineal.
- Si  $R = 2$ , se dice que la convergencia es cuadrática.
- Si  $2 < R < 3$  se dice que la convergencia es supercuadrática.
- Si  $R = 3$ , se dice que la convergencia es cúbica.

y así sucesivamente.

Cuanto mayor sea el orden de convergencia, o para el mismo orden, cuanto menor sea la constante asintótica, mayor será la rapidez con que la sucesión de aproximaciones converge a la raíz buscada.

## 2.2. Errores

En el campo del análisis numérico dentro de las matemáticas, o en el campo de las ciencias y la ingeniería en general, el término error está relacionado con la duda o incertidumbre de los resultados o los datos de partida, sin que ello signifique que los resultados estén equivocados. Es decir, no se pone en duda la fiabilidad del método, sino que lo que analiza el error es el grado de incertidumbre de los valores numéricos.

A la hora de analizar el grado de confianza de un método o algoritmo, es cuando adquiere mayor relevancia el estudio de los errores que pueden afectar a los cálculos, operaciones que intervienen en el algoritmo, y así ver cómo estos errores pueden afectar a los resultados.

Se ha de tener en cuenta que los errores pueden estar generados por varios motivos, y así, según la fuente que los origina habrá distintos tipos de errores:

**Error inherente:** Es el error de los datos de entrada, puede ser debido a un error en la medición, o provenir de errores en cálculos previos.



**Error por truncamiento o error de discretización:** Es el error que aparece al transformar un procedimiento infinito en uno finito. Al hablar de una iteración, el error por truncamiento se entiende como el error por no seguir iterando y aproximando a la solución de manera indefinida.

**Error por redondeo:** Se origina debido a la imposibilidad de tomar todas las cifras que resultan de manera exacta, debido a que se tiene que aproximar el último decimal que queremos considerar en la solución resultante.

**Error humano y/o de máquina:** Es el error producido por la intervención humana, puede ser por una mala interpretación de los datos, o por programas mal diseñados o configurados.

Considérese que para todos los tipos de errores habrá un valor verdadero de manera que se tiene:

$$\text{valor verdadero} = \text{valor aproximado} + \text{error}$$

En los métodos numéricos una de las partes más importantes es el estudio de los errores, y en particular, de la relación entre el error que se comete entre la parte aproximada calculada y la verdadera solución. Se distinguen dos tipos de errores.

**Error absoluto (Ea):** Viene dado por la expresión  $Ea = |\alpha - x^*|$ , siendo  $\alpha$  la solución exacta y  $x^*$  la solución obtenida en la aproximación (valor aproximado).

**Error relativo (Er):** Viene dado por la expresión  $Er = \frac{Ea}{|\alpha|}$ . Se suele representar de manera porcentual, dado que de esta forma se aprecia más fácilmente el error cometido.

$$Er = \frac{Ea}{|\alpha|} 100$$

## 2.3. Índices de Eficiencia

La eficiencia de un método iterativo está relacionada con el tiempo que se requiere para obtener la solución del problema en cuestión. Este tiempo depende de la cantidad de operaciones aritméticas que se tengan que realizar, es decir, un algoritmo será más eficiente cuantas menos operaciones se tengan que realizar para obtener la solución (considerando una tolerancia prefijada).

**Definición 2.3.1.** (Índice de eficiencia, [5]): Para un método de orden  $p > 1$  en el que cada iteración necesita  $r$  unidades de trabajo (en nuestro caso  $r$  evaluaciones de la función o sus derivadas), se define el índice de eficiencia del método por:

$$\varepsilon(p, r) = p^{1/r}.$$

Consideremos un ejemplo para aclarar mejor los conceptos. Supongamos que tenemos un método A de orden  $p > 1$  que utiliza  $r$  unidades de trabajo en cada iteración (el tiempo de calculo es proporcional a  $r$ ) y otro método B de orden  $p^2$  que necesita  $2r$  unidades de trabajo por iteración.

Cuando realizamos  $r$  unidades de trabajo con el primer método, es decir, una iteración, el número de cifras exactas se multiplica por  $p$ . Entonces si realizamos otra iteración, tendríamos un total de  $2r$  unidades de trabajo y el número de cifras exactas se multiplicaría de nuevo por  $p$ . En total, el número de cifras exactas queda multiplicado por  $p^2$ . Por tanto vemos que los dos métodos son equivalentes en cuanto a eficiencia computacional.

Teniendo en cuenta la definición de Índice de eficiencia tenemos que en general es:

$$\varepsilon(p^n, nr) = \varepsilon(p, r) = p^{1/r}.$$

Cuanto mayor sea el índice de eficiencia de un método, mejor es el método.

Es importante resaltar que para obtener unos buenos índices de eficiencia se deben comenzar las iteraciones en puntos iniciales  $x_0$  cercanos a la raíz buscada, para que el procedimiento sea convergente. Por tanto la convergencia y la eficiencia están relacionadas entre sí. Mayor será la eficiencia del método cuanto más cerca esté el punto inicial de la raíz.

Por otra parte, Kung y Traub [11] conjeturaron que un método multipaso iterativo que necesita  $n$  evaluaciones en cada paso puede alcanzar como mucho un máximo orden de convergencia igual a  $2^{n-1}$ . A los métodos que alcanzan dicho orden se les llama métodos óptimos, éstos son los más interesantes desde el punto de vista de la eficiencia computacional y, por ello, se han ido desarrollando una gran multitud en los últimos años.

El índice de eficiencia de un método óptimo es

$$\varepsilon(2^{n-1}, n) = (2^{n-1})^{1/n} = 2^{\frac{n-1}{n}},$$

cuyo límite cuando  $n \rightarrow \infty$  es 2, así que asumiendo la conjetura de Kung y Traub, el índice de eficiencia de cualquier método será menor que 2.

## 2.4. Orden de convergencia computacional

Cuando no sea posible hallar el orden de convergencia de un método, para conocer el comportamiento real del mismo en cuanto a la rapidez de convergencia, se puede utilizar el llamado orden de convergencia computacional. Es una aproximación al orden de convergencia teórico del método.

**Definición 2.4.1.** Sea  $\alpha$  la raíz de una ecuación  $f(x) = 0$  y supongamos que  $x_{k+1}$ ,  $x_k$  y  $x_{k-1}$  son tres iteraciones consecutivas que aproximan el valor de  $\alpha$ . Se define el orden de convergencia computacional de la siguiente forma [14]:

$$\rho = \frac{\ln |(x_{k+1} - \alpha)/(x_k - \alpha)|}{\ln |(x_k - \alpha)/(x_{k-1} - \alpha)|}.$$

Pero, como la mayoría de la ocasiones desconocemos el valor exacto de  $\alpha$ , que es la raíz que queremos calcular, en la práctica se suele utilizar la aproximación introducida por Cordero y Torregrosa en [4]

$$\rho \approx ACOC = \frac{\ln |(x_{k+1} - x_k)/(x_k - x_{k-1})|}{\ln |(x_k - x_{k-1})/(x_{k-1} - x_{k-2})|}. \quad (2.4.1)$$

## Capítulo 3

# BREVE DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS MÉTODOS CLÁSICOS PARA APROXIMAR RAÍCES. COMPORTAMIENTO EN EL CASO DE RAÍCES MÚLTIPLES

En este capítulo se recogen algunos de los métodos clásicos más frecuentes para aproximar raíces, y se analiza su comportamiento en el caso de raíces múltiples.

### 3.1. Método de Newton-Raphson

Sin duda alguna, el método de Newton es el método de aproximación de raíces más estudiado y usado para resolver ecuaciones.

Se trata de un método de intervalo abierto, ya que solo requiere un valor inicial, cercano a la raíz, para obtener un valor más aproximado a la raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ .

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $\alpha \in [a, b]$  un cero de la función  $f$ . Suponiendo que  $f$  admite derivada hasta el segundo orden y es continua en  $[a, b]$ , siendo  $f' \neq 0$ , entonces existe un  $\delta > 0$  tal que la sucesión definida por:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.1.1)$$

converge hacia  $\alpha$  para cualquier valor inicial  $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ .

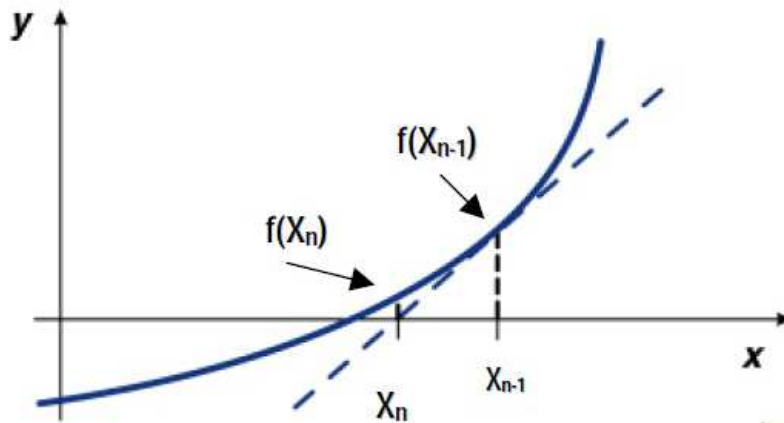


Figura 3.1: Representación gráfica del procedimiento de obtención de  $x_n$  a partir de  $x_{n-1}$  en el método de Newton.

Para estimar el valor inicial  $x_0$  se puede utilizar otro método más sencillo como, por ejemplo, el método de Bisección. Después se aproxima la función por la recta tangente en el punto  $(x_0, f(x_0))$ , se corta esta recta con el eje  $OX$  y se despeja para hallar el valor  $x_1$ . Este valor será, generalmente, una aproximación mejor a la raíz de la función que el  $x_0$ . Seguidamente se procede de forma análoga y se aplican tantas iteraciones como sean necesarias para lograr una exactitud dentro de la tolerancia especificada.

Existen algunas condiciones suficientes que garantizan la convergencia de la sucesión de valores generadas por el método de Newton, como por ejemplo, la Regla de Fourier [3]:

**Teorema 3.1.2** (Regla de Fourier). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y dos veces continuamente diferenciable en  $[a, b]$  y tal que verifica*

1.  $f(a)f(b) < 0$
2.  $f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b]$
3.  $f''(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b]$

Entonces, el método de Newton converge si tomamos  $x_0 = a$  o  $x_0 = b$  de tal forma que  $f'(x_0)f''(x_0) > 0$ .

En el caso de que esto no ocurra deberemos contraer el intervalo o coger un punto más próximo a la raíz. Disminuiremos la amplitud del intervalo hasta que se verifique la condición.

Es importante que  $f'(x_0) \neq 0$  porque si no, el método no se puede aplicar. Geométricamente significa que la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$  es horizontal y por lo tanto no intercepta al eje  $OX$  en ningún punto.

El orden de convergencia de este método es cuadrático, con lo que el índice de eficiencia es  $\varepsilon(2, 2) = 2^{1/2} \simeq 1,4142$ . Pero si la raíz buscada es de multiplicidad algebraica mayor que uno (doble, triple, etc.), el método de Newton-Raphson pierde su convergencia cuadrática y pasa a ser lineal.

***Algoritmo para el Método de Newton-Raphson:***

Para hallar una raíz de  $f(x) = 0$ , los pasos a seguir son:

1. Analizar la función  $f(x)$  de la cual se quiere obtener su raíz y hallar su derivada  $f'(x)$ .
2. Establecer un punto de inicio  $x_0$ , tal que  $f'(x_0) \neq 0$ , para comenzar las iteraciones.
3. Si  $f'(x_0) = 0$ , finalizar, pues habrá división por cero. Si no, continuar.
4. Si  $f(x_0) = 0$  entonces la raíz es  $x_0$ , finalizar e ir al paso 6. Si no,

-calcular  $x_1$  mediante la expresión:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

-Hacer  $x_0$  igual a  $x_1$ .

5. Repetir paso 3 hasta que  $|f(x_0)| \leq \delta$  (o bien otro criterio de parada teniendo en cuenta el error relativo, o el número de iteraciones, etc.)
6. Mostrar  $x_0$ .

## 3.2. Método de Steffensen

Este segundo método, el método de Steffensen, en realidad podría considerarse como una variante del método de Newton. Surge con el fin de mejorarlo eliminando el cálculo de la derivada de éste, haciendo con ello los cálculos más fáciles, sobre todo en el caso de funciones cuyas primeras derivadas sean complicadas.

Para poder deducir el método de Steffensen de forma que quede expresado mediante una fórmula matemática partimos del método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ahora sustituimos  $f'(x_n)$  por  $g(x_n)$  siendo

$$g(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$$

Entonces, nos queda:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

lo cual se puede escribir en la forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(f(x_n))^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}. \quad (3.2.1)$$

Nótese que para llegar a la fórmula matemática del método de Steffensen simplemente hay que sustituir la derivada  $f'(x_n)$  que aparece en el método de Newton por la función  $g(x_n)$  anterior. Obsérvese que el valor  $g(x_n)$  es una aproximación de la derivada, calculada a partir de la definición de derivada, tomando como tamaño de paso  $h = f(x_n)$ .

Recordemos que la definición de derivada de una función  $f$  en un punto  $x$  está definida por el límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde:

$$f(x+h) - f(x) = \Delta_h f(x)$$

expresado utilizando la definición de diferencia progresiva. Con ello conseguimos librarnos del cálculo de la derivada de la función, que en determinados casos puede dificultar bastante las operaciones.

Una desventaja en este caso es que se necesita realizar una evaluación doble de la función ya que hay que calcular:  $f(x_n)$  y  $f(x_n + f(x_n))$ , es decir, hay que evaluar dos veces la función. Esto es una desventaja si la función a evaluar es complicada ya que incrementa el coste computacional. Pero en cualquier caso, esta desventaja se ve compensada puesto que a cambio no hay que calcular la primera derivada, que siendo la función complicada, se espera que también lo sea. El índice de eficiencia es igual que el del método de Newton,  $\varepsilon(2, 2) = 2^{1/2} \simeq 1,4142$ .

La principal ventaja es la convergencia cuadrática, como en el método de Newton, y que este método está libre de derivadas. Solo hay que procurar que el valor inicial  $x_0$  sea lo suficientemente cercano a la raíz buscada para lograr que el método converja a dicha raíz.

***Algoritmo para el Método de Steffensen:***

Para hallar una raíz de  $f(x) = 0$ , los pasos a seguir son:

1. Estudiar la función  $f(x)$ . Y si se puede, dibujar la gráfica, ya que ayuda a la hora de establecer un punto inicial.
2. Establecer un punto de inicio  $x_0$  para comenzar las iteraciones, próximo al valor de la raíz buscada. Establecer una tolerancia numérica máxima  $\varepsilon$  o un número máximo de iteraciones nMáx.
3. Si  $f(x_0) = 0$ , la raíz buscada es  $x_0$ , finalizar, si no,
  - Calcular  $x_1$  mediante la fórmula:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)^2}{f(x_0 + f(x_0)) - f(x_0)}$$

4. Comprobar si  $|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$  o  $n^\circ \text{ iter} \geq \text{nMáx}$ , y mostrar  $x_1$ . Si no se cumple lo anterior hacer  $x_1 = x_0$  y repetir paso 3 con hasta que se alcance la tolerancia o se supere el número de iteraciones máximo establecido.

### **3.3. Método de Halley**

La función de iteración de Halley para aproximar las raíces de una función de una sola variable tiene una larga historia que se remonta a 1694. Este método se conoce con frecuencia como el método de las hipérbolas tangentes, y puede ser descrito de manera sencilla de la siguiente manera:



Dada una función  $f(x)$  y un valor inicial  $x_0$  lo suficientemente próximo a la raíz de la función, consiste en la construcción de una hipérbola que es tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto  $x_0$  hasta el segundo orden. El punto en que la hipérbola tangente corta al eje de las abscisas, será nuestra primera estimación  $x_1$ . Una vez obtenida esta, volvemos a hacer otra vez el mismo proceso, pero en lugar de partir del valor  $x_0$ , ahora partimos del último valor estimado  $x_1$ , y así procederemos sucesivamente. Evidentemente, cuanto mayor número de estimaciones, mayor precisión obtendremos en nuestro resultado, es decir, tendremos un menor error en relación al valor real  $\alpha$ , el cuál debe estar dentro de los límites establecidos por el método.

Todo esto lo podemos observar en la figura siguiente, donde para obtener la solución de la función  $f(x) = 0$ , es decir, el valor de la raíz  $\alpha$ , partimos de un valor inicial  $x_0$ , y vamos realizando sucesivas iteraciones, obteniendo los valores  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , donde cuantas más iteraciones se realicen, más próximo a la solución  $\alpha$  será nuestro valor estimado.

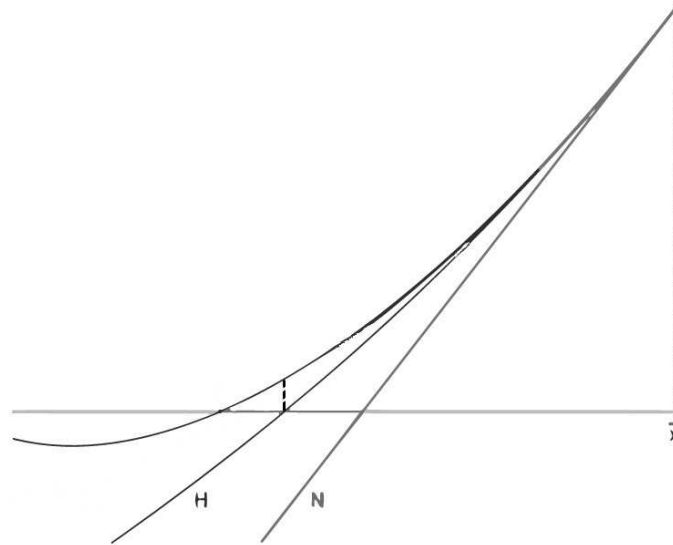


Figura 3.2: Representación gráfica del método de Halley

La proximidad a la raíz de  $f(x)$  del valor inicial  $x_0$  dependerá de la naturaleza intrínseca de la función, ya que esta puede presentar distintos puntos de inflexión o pendientes muy pequeñas, lo que hace que aumenten las probabilidades de que el algoritmo diverja.

Pero veamos cómo se obtiene geoméricamente el método de Halley.

Como hemos dicho, este puede obtenerse aproximando una función por medio de hipérbolas. Para aproximar la solución de una ecuación  $f(x) = 0$ , a partir de un valor inicial  $x_0$ , vamos a considerar una hipérbola de la forma:

$$y(x) = \frac{(x - x_0) + c}{a - (x - x_0) + b}$$

a la que imponemos que cumpla las siguientes condiciones de colocación:

$$\begin{cases} y(x_0) = f(x_0) \\ y'(x_0) = f'(x_0) \\ y''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

Este tipo de curvas, denominadas osculatrices, coinciden con  $f(x)$  en  $x_0$  hasta la segunda derivada. En consecuencia, estas hipérbolas aproximan mejor a una curva que la recta tangente, donde la coincidencia sólo es hasta la primera derivada. Esta mejor aproximación se ve reflejada en una convergencia más rápida para el método de Halley que para el de Newton: el primero tiene orden tres mientras que el segundo tiene orden dos. De forma breve, se puede decir que el orden de convergencia mide la velocidad con la que una sucesión se aproxima a su límite: a mayor orden, mayor velocidad. Para que la hipérbola cumpla las condiciones requeridas, sus coeficientes  $a, b$  y  $c$  deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x_0) = \frac{c}{b} \\ f'(x_0) = \frac{b - ac}{b^2} \\ f''(x_0) = \frac{2a \cdot (ac - b)}{b^3} \end{cases}$$

de manera que al resolver el sistema anterior se obtienen las soluciones:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{-f(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)} \\ b &= \frac{2f'(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)} \\ c &= \frac{2f(x_0)f'(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)} \end{aligned} \right\}$$

Una vez encontrada la hipérbola oscultriz, tomamos como nueva aproximación su intersección con el eje de abscisas, es decir el punto tal que  $y(x_1) = 0$ . Dada la forma de la hipérbola, se tiene que tras despejar el valor  $x_1$  en la ecuación anterior resulta ser:

$$x_1 = x_0 - c = x_0 - \frac{2f(x_0)f'(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)} = x_0 - \frac{2}{2 - L_f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

donde

$$L_f(x_0) = \frac{f(x_0)f''(x_0)}{f'(x_0)^2}.$$

Debido a esta interpretación geométrica, el método de Halley es llamado a veces el método de las hipérbolas tangentes [16], [17].

Resumiendo, la función de iteración que utiliza el método de Halley es:

$$H(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}. \quad (3.3.1)$$

El orden de convergencia de este método es cúbico si el valor inicial es lo suficientemente cercano a la raíz, pero por otro lado, necesita una evaluación más que el método de Newton. El índice de eficiencia para este método es  $\varepsilon(3, 3) = 3^{1/3} \simeq 1,4422$ , que es un poco mayor que el de Newton y Steffensen.

La siguiente formulación alternativa muestra la similitud entre el método de Halley y el método de Newton, donde la expresión  $f(x_n)/f'(x_n)$  sólo se calcula una vez, y es particularmente útil cuando se puede simplificar  $f''(x_n)/f'(x_n)$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[ 1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \right]^{-1}$$

Observamos en la expresión (3.3.1) que cuando la segunda derivada es muy cercana a cero, el último término se comporta de manera parecida al

último término de la fórmula de Newton. Es decir, en esa situación el método de Halley se comportará de manera parecida al método de Newton.

### 3.4. Método de Chebyshev

El método de Chebyshev es un conocido método iterativo para aproximar las raíces de una ecuación  $f(x) = 0$ , su expresión clásica es

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)\right) u(x_n), \quad (3.4.1)$$

donde

$$u(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{y} \quad L_f(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}.$$

Al igual que el método de Halley, el método de Chebyshev tiene un orden de convergencia cúbico, y también necesita tres evaluaciones, por tanto, el índice de eficiencia para este método es el mismo que el del método de Halley  $\varepsilon(3, 3) = 3^{1/3} \simeq 1,4422$ .

Este método, junto con sus mejoras, aplicaciones y modificaciones ha llamado la atención de muchos investigadores. Por ejemplo, desde el punto de vista histórico, podemos encontrar una forma equivalente para escribir el método iterativo en (3.4.1) conocida como fórmula de Schröder (véase [2], [18]):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^3}.$$

El método de Chebyshev puede deducirse de diferentes maneras [8], utilizando interpolación cuadrática inversa, mediante el método de las parábolas tangentes, etc. Veamos como ejemplo una forma clásica de construcción de métodos iterativos, que consiste en la aproximación de la función inversa de  $f(x)$ . Esta forma se conoce como *interpolación cuadrática inversa*, la cual ha sido estudiada por autores como [1], [13] y [20].

Dada la función  $y = f(x)$ , llamaremos  $x = \phi(y)$  a la función inversa de  $f$  (se supone que se dan las condiciones en un intervalo para la existencia de dicha función inversa). Haciendo el desarrollo en series de Taylor, en torno a un punto, digamos  $y_0$ , entonces tenemos

$$\phi(y) \approx \phi(y_0) + \phi'(y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\phi''(y_0)(y - y_0)^2$$

Encontrar la raíz  $\alpha$  de la ecuación  $f(x) = 0$ , es lo mismo que encontrar la imagen del cero por medio de la función  $\phi$ , es decir calcular  $\phi(0)$ . Así, si  $x_0$  es un valor próximo a  $\alpha$  y  $f(x_0) = y_0$ , entonces,

$$\alpha = \phi(0) \approx \phi(y_0) - \phi'(y_0)(y_0) + \frac{1}{2}\phi''(y_0)(y_0)^2.$$

De aquí podemos deducir una nueva aproximación a  $\alpha$ , que denotamos  $x_1$ :

$$x_1 = x_0 - \phi'(y_0)f(x_0) + \frac{1}{2}\phi''(y_0)f(x_0)^2 \quad (3.4.2)$$

Ahora calculamos  $\phi'(y)$  y  $\phi''(y)$  para sustituirlo en (3.4.2). Sabemos que  $x = \phi(y)$ ,  $y' = f'(x)$  e  $y'' = f''(x)$ , de modo que, por el teorema de la función inversa,

$$\phi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)} \quad (3.4.3)$$

y

$$\phi''(y) = \frac{d\phi'(y)}{dy} = \frac{d(1/f'(x))}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3} \quad (3.4.4)$$

Sustituyendo (3.4.3) y (3.4.4) en (3.4.2) tras evaluarlas en los puntos adecuados se obtiene

$$x_1 = x_0 - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_0)\right) \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Repetiendo el mismo proceso para el punto  $x_1$ , conseguimos la nueva aproximación  $x_2$ , y por recurrencia obtenemos la expresión (3.4.1), que representa el algoritmo iterativo del método de Chebyshev.

### 3.5. Método de Jarratt

A partir del trabajo de Traub [20], Jarratt [9] desarrolló el suyo partiendo de la siguiente expresión

$$\varphi(x) = x - a_1w_1(x) - a_2w_2(x) - a_3\frac{w_2^2(x)}{u(x)}. \quad (3.5.1)$$

Para deducir las propiedades de (3.5.1) Jarratt desarrolla  $\varphi(x)$  como una serie de potencias en  $u = f(x)/f'(x)$  y la compara con una secuencia básica

de métodos iterativos. Dicha secuencia es

$$E_p(x) = x - \sum_{j=1}^{p-1} Y_j u^j,$$

donde  $Y_j$  cumple la siguiente ecuación de recurrencia

$$jY_j(x) - (j-1)\frac{f''(x)}{f'(x)}Y_{j-1}(x) + Y'_{j-1}(x) = 0,$$

con  $Y_1(x) = 1$ .

Los primeros términos  $E_p$  se ven en la siguiente tabla:

$p$	$E_p$
2	$x - u$
3	$x - u - A_2 u^2$
4	$x - u - A_2 u^2 - (2A_2^2 - A_3)u^3$
5	$x - u - A_2 u^2 - (2A_2^2 - A_3)u^3 - (5A_2^3 - 5A_2 A_3 + A_4)u^4$

Tabla 3.1: Primeros términos de  $E_p(x)$ .

donde  $A_r(x) = \frac{f^{(r)}(x)}{r!f'(x)}$ .

Para expresar (3.5.1) como una serie de potencias en  $u$ , se necesitan los desarrollos de  $w_2(x)$  y  $w_2^2(x)/u$ .

Se tiene

$$f'(x+\beta u(x)) = f'(x) (1 + 2\beta A_2(x)u + 3\beta^2 A_3(x)u^2 + 4\beta^3 A_4(x)u^3 + 5\beta^4 A_5(x)u^4 + O(u^5))$$

de lo cual se deduce

$$\begin{aligned} w_2(x) &= f(x)/f'(x + \beta u(x)) \\ &= u - 2\beta A_2(x)u^2 + \beta^2(4A_2^2(x) - 3A_3(x))u^3 + \beta^3(3A_2(x)A_3(x) \\ &\quad - A_4(x) - 2A_2^3(x))u^4 + O(u^5), \end{aligned}$$

y con ello se puede calcular

$$\begin{aligned} w_2^2(x)/u &= u - 4\beta A_2(x)u^2 + 6\beta^2(2A_2^2(x) - A_3(x))u^3 + 4\beta^3(9A_2(x)A_3(x) \\ &\quad - 2A_4(x) - 8A_2^3(x))u^4 + O(u^5). \end{aligned}$$

Sustituyendo los desarrollos anteriores en (3.5.1) se tiene

$$\begin{aligned}\varphi(x) = & x - (a_1 + a_2 + a_3)u + 2\beta(a_2 + 2a_3)A_2(x)u^2 - \beta^2(4(a_2 + 3a_3)A_2^2(x) \\ & - 3(a_2 + 2a_3)A_3(x))u^3 - 4\beta^3(3(a_2 + 3a_3)A_2(x)A_3(x) - (a_2 + 2a_3)A_4(x) \\ & - 2(a_2 + 4a_3)A_2^3(x))u^4 + O(u^5).\end{aligned}$$

Y finalmente comparando  $\varphi(x)$  con  $E_5$  se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi - E_5 = & [1 - (a_1 + a_2 + a_3)]u + [1 + 2\beta(a_2 + 2a_3)]A_2(x)u^2 + ([2 - 4\beta^2(a_2 + 3a_3)] \\ & A_2^2(x) - [1 - 3\beta^2(a_2 + 2a_3)]A_3(x))u^3 - ([5 + 12\beta^3(a_2 + 3a_3)]A_2(x)A_3(x) \\ & - [1 + 4\beta^3(a_2 + 2a_3)]A_4(x) - [5 + 8\beta^3(a_2 + 4a_3)]A_2^3(x))u^4 + O(u^5).\end{aligned}$$

Para que  $\varphi(x)$  tenga cuarto orden, los coeficientes de  $u$ ,  $u^2$  y  $u^3$  han de ser cero, por lo que se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_2 + 2a_3 &= -1/2\beta \\ a_2 + 3a_3 &= 1/2\beta^2 \\ a_2 + 2a_3 &= 1/3\beta^2,\end{aligned}$$

del que resultan los siguientes valores para los parámetros

$$\begin{cases} a_1 = 5/8, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 3/8, \\ \beta = -2/3. \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Por tanto, se obtiene el siguiente método iterativo para raíces simples que presenta un orden de convergencia cuatro para los valores de 3.5.2

$$\begin{cases} y_n = x_n + \beta w_1(x_n) \\ x_{n+1} = x_n - a_1 w_1(x_n) - a_2 w_2(x_n) - a_3 \frac{w_2^2(x_n)}{w_1(x_n)} \end{cases} \quad (3.5.3)$$

donde  $w_1(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ,  $w_2(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(y_n)}$ ,

Se puede ver que el método de Jarratt es óptimo según la conjetura de Kung-Traub [11], ya que necesita tres evaluaciones y tiene una convergencia

de orden cuatro, por tanto, el índice de eficiencia de este método es  $\varepsilon(4, 3) = 4^{1/3} \simeq 1,5874$ .

Pero en el caso de raíces múltiples pierde el cuarto orden de convergencia, el error en este caso pasa a ser lineal según la siguiente expresión

$$e_{n+1} = \left( 1 - \frac{5}{8m} - \frac{3}{8m} \left( 1 - \frac{2}{3m} \right)^{2-2m} \right) e_n + O(e_n)^2,$$

donde, como es habitual,  $m$  corresponde al orden de multiplicidad de la raíz.

### 3.6. Limitaciones de los métodos clásicos para obtener raíces múltiples

Recordemos qué significa el orden de multiplicidad de una raíz. Dada una función  $f(x)$ , si  $f(\alpha) = 0$  y además se cumple que  $f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$  pero  $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$ , entonces se dice que  $\alpha$  es una raíz de  $f(x)$  de orden de multiplicidad  $m$ .

Las raíces múltiples ofrecen ciertas dificultades cuando tratamos de aproximarlas con los métodos numéricos:

- El hecho de que la función no cambie de signo en las raíces con multiplicidad par impide el uso de los métodos que utilizan intervalos.
- Otro posible problema se relaciona con el hecho de que no solo  $f(x)$ , sino también  $f'(x)$  se aproxima a cero. Este problema afecta por ejemplo al método de Newton-Raphson, el cual contiene la primera derivada en el denominador de la función de iteración. Esto provocaría una división entre valores próximos a cero cuando la sucesión converge a un punto muy cercano a la raíz. Una forma simple de evitar estos problemas, la cual ha sido demostrada teóricamente por Ralston y Rabinovitz [15], se basa en el hecho de que  $f(x)$  siempre alcanza un valor igual a cero antes que  $f'(x)$ . Por lo tanto, si se compara  $f(x)$  con cero dentro del programa, entonces los cálculos se pueden terminar antes de que  $f'(x)$  tome el valor cero.
- Pero el principal problema es que presentan una convergencia muy lenta y, por ello, aparecen modificaciones de éstos métodos para conseguir el resultado deseado con una velocidad razonable.



### 3.7. Ejemplo ilustrativo del comportamiento de los métodos clásicos en el caso de raíces múltiples

Para observar las características y el comportamiento de los métodos descritos en este capítulo utilizaremos el siguiente ejemplo sencillo: sea la función  $f(x) = \cos x - x$ , que presenta una raíz simple entre 0,5 y 1, como se puede apreciar en la Figura 3.3. Hallaremos esta raíz mediante los métodos previamente descritos.

Se utilizarán los mismos puntos de inicio en todos los métodos, y se comparará el número de iteraciones, tiempo de procesamiento del programa y orden de convergencia computacional aproximado. En todos los casos se estableció una tolerancia  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

Para ver con detalle los cálculos realizados con *Mathematica* con los que se ha elaborado la tabla 3.2 véase el apéndice A.1.1.

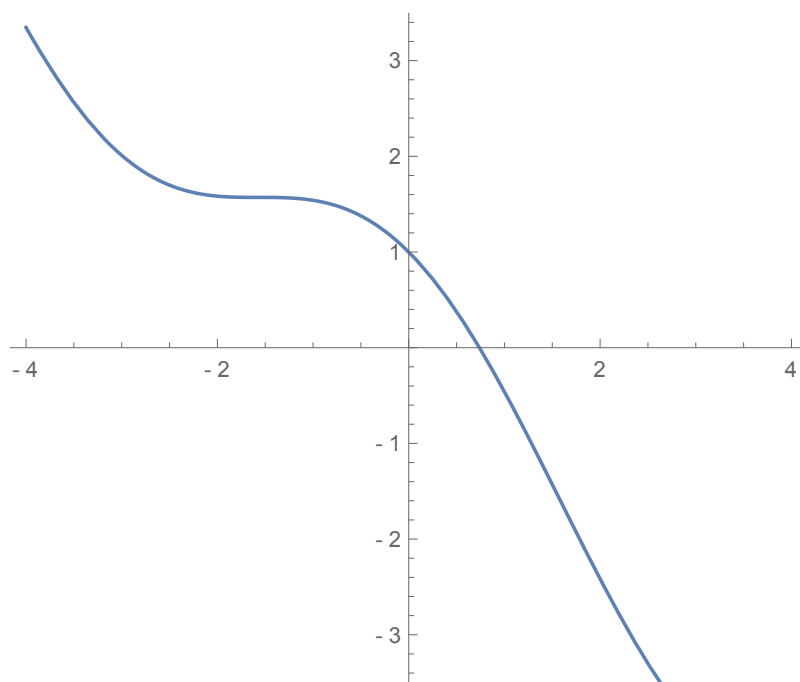


Figura 3.3: Representación gráfica de  $f(x) = \cos x - x$

Método	$x_0$	Nº iteraciones	Tiempo de CPU	$\rho$ (ACOC)
Newton-Raphson	2.	4	0.	1.1021
	4.	71	0.	1.43981
Steffensen	2.	5	0.	1.99985
	4.	5	0.	1.99986
Halley	2.	4	0.	2.20682
	4.	6	0.	2.98771
Chebyshev	2.	4	0.	2.17748
	4.	9	0.	No converge
Jarratt	2.	3	0.	-
	4.	400	0.	No converge
	10.	7	0.	4.18447

Tabla 3.2: Ejemplo sencillo con raíz simple:  $f(x) = \cos x - x$  (tolerancia:  $10^{-10}$ , raíz: 0,7390851)

Se observan varias cuestiones interesantes a analizar a partir de los resultados plasmados en la Tabla 3.2:

- Se obtienen en todos los métodos, en los casos en que hay convergencia, valores del orden de convergencia computacional aproximado similares a los valores teóricos indicados durante el capítulo.
- Para el método de Jarratt, se empleó otro punto de inicio más, ya que para  $x_0 = 2$  no podía obtenerse un valor de  $\rho$  al haber sólo tres iteraciones, y para  $x_0 = 4$  el método no convergía a la raíz. Se vio al utilizar este tercer punto de inicio, que  $x_0 = 4$  presenta un comportamiento singular, el método funcionó correctamente usando un valor más alejado de la raíz.
- En el método de Newton-Raphson, se observa un incremento del número de iteraciones muy significativo si no se escoge un valor próximo a la raíz. En otros métodos se observa que ni siquiera convergen si el punto de inicio está demasiado alejado de la raíz.
- El tiempo de procesamiento del programa no resulta un factor diferenciador en este caso.
- Al tener dos métodos de orden cuadrático, Newton-Raphson y Steffensen, resulta interesante compararlos entre sí. En este caso concreto, el método de Steffensen resulta más eficaz. Una observación similar se

puede hacer viendo los métodos de orden cúbico, Halley y Chebyshev. A priori, parece que el método de Halley funciona mejor.

Con lo visto anteriormente, queda patente la efectividad de los métodos clásicos para la aproximación de raíces simples, pero veamos ahora el comportamiento de los mismos con la presencia de una raíz múltiple. Para poder comparar estos resultados con los de la Tabla 3.2 se utilizará la función  $f(x) = (\cos x - x)^4$ , ver Figura 3.4, que lógicamente tiene el mismo valor de la raíz pero en este caso hemos alterado la función para que presente una multiplicidad  $m = 4$ , bajo las mismas condiciones de antes, mismos puntos de inicio y tolerancia  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

Para ver con detalle los cálculos realizados con *Mathematica* con los que se ha elaborado la Tabla 3.3 véase el apéndice A.1.2.

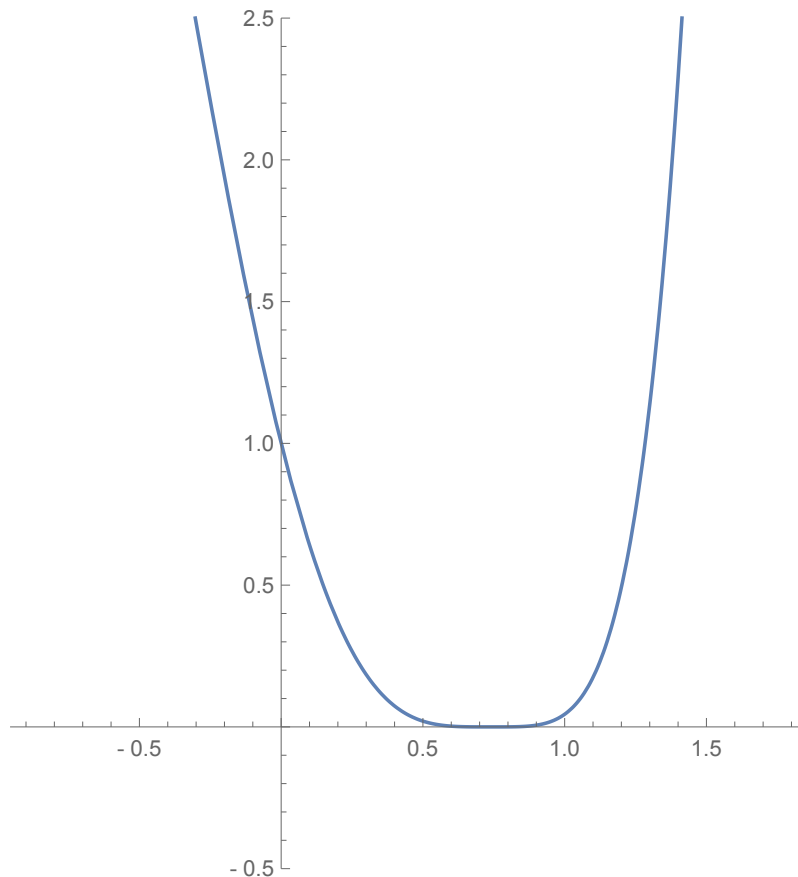


Figura 3.4: Representación gráfica de  $f(x) = (\cos x - x)^4$

Método	$x_0$	Nº iteraciones	Tiempo de CPU	$\rho$ (ACOC)
Newton-Raphson	2.	78	0.	1.00001
	4.	74	0.	1.
Steffensen	2.	287	0.	1.45001
	4.	400	0.	No converge
Halley	2.	46	0.	1.
	4.	48	0.	0.999998
Chebyshev	2.	55	0.	0.999998
	4.	15	0.	No converge
Jarratt	2.	41	0.	1.00001
	4.	391	0.0312002	No converge

Tabla 3.3: Ejemplo sencillo con raíz múltiple:  $f(x) = (\cos x - x)^4$  (tolerancia:  $10^{-10}$ , raíz: 0,7390851)

Aparecen diferencias notables entre las Tablas 3.2 y 3.3:

- En primer lugar, todos los métodos estudiados han perdido el orden de convergencia que tenían para raíces simples, y dicho orden ha pasado a ser lineal en el caso de raíces múltiples, lo que resulta en una velocidad de convergencia lenta y está relacionado con que se necesite un número de iteraciones mucho mayor.
- Se observa también, que en varios métodos el método no converge a la raíz para  $x_0 = 4$ , mientras que en el método de Steffensen sí lo hacía en el caso de una raíz simple, ver Tabla 3.2.

Por otro lado, cabe aclarar que, en el método de Steffensen con  $x_0 = 2.$ , se eliminaron las dos últimas iteraciones, ya que no proporcionaban resultados útiles.

## Capítulo 4

# MÉTODOS ESPECIALMENTE DISEÑADOS PARA APROXIMAR RAÍCES CON MULTIPLICIDAD

### 4.1. Modificaciones del método de Newton-Raphson

El método de Newton también se puede utilizar para encontrar las raíces múltiples de ecuaciones no lineales, con las limitaciones señaladas anteriormente. Para tratar de superar dichas limitaciones Ralston y Rabinowitz [15] consideraron ciertas modificaciones, como son las siguientes:

1. Incluir en la fórmula de Newton-Raphson la multiplicidad de la raíz en la siguiente forma.

Si  $\alpha$  es una raíz de multiplicidad  $m$  de  $f(x)$ , entonces considerando la función  $f(x)^{1/m}$ , es decir, la raíz  $m$ -ésima de  $f(x)$ ,  $\alpha$  será raíz de esta función con multiplicidad 1. Si se aplica el método de Newton a esta función resulta el método iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.1.1)$$

siendo necesario conocer  $m$ , la multiplicidad de la raíz buscada.

La convergencia de este método para hallar la raíz de multiplicidad  $m$  es dos (véase [15], p. 355). En este caso tendríamos que conocer la multiplicidad, pero como ésta en general no se conoce a priori, es preferible considerar un método que sea independiente de la multiplicidad.

2. La otra alternativa propuesta por Ralston y Rabinowitz es la de definir una nueva función  $u(x)$ , que es el cociente de la función cuya raíz queremos calcular, y su derivada

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Aplicando el método de Newton para esta función podemos deducir la fórmula de recurrencia de la siguiente forma. Siendo

$$u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

el método de Newton para  $u(x)$  se expresa como sigue

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{(f'(x_n))^2 f(x_n)}{((f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n))f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{f'(x_n)f(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)}. \end{aligned}$$

Esta fórmula ya aparecía en el trabajo de Schröder [18], pero se conoce como método de Newton-Raphson modificado:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)f(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (4.1.2)$$

La principal desventaja de esta alternativa sería lo costoso que pudiera ser hallar  $u(x)$  y  $u'(x)$  si  $f(x)$  no es fácilmente derivable.

En resumen, hemos descrito hasta ahora tres métodos para evaluar raíces múltiples: el método básico de Newton (3.1.1) (aunque da muchos problemas), el método básico de Newton con la multiplicidad  $m$  incluida (4.1.1), y el método de Newton modificado considerando la función  $u(x)$  (4.1.2). Estos

tres métodos se pueden aplicar para obtener la raíz de cualquier ecuación no lineal.

Para entender cómo funcionan estas tres formas de resolver las raíces múltiples presentamos un sencillo ejemplo, que nos permita comparar el funcionamiento de las mismas.

**Ejemplo 4.1.1.** *Sea la ecuación polinómica de tercer grado*

$$f(x) = P_3(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 1) = x^3 - x^2 - x + 1 = 0.$$

*Calcular por métodos aproximados la raíz doble  $\alpha = 1$ .*

**Resolución:** Las derivadas de  $f(x)$  son respectivamente

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$f''(x) = 6x - 2.$$

Tomamos como valor inicial  $x_1 = 1'50$ , por lo que sustituyendo obtenemos

$$f(1'5) = 0'6250$$

$$f'(1'5) = 2'750$$

$$f''(1'5) = 7'0$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de los tres métodos obtenemos las siguientes aproximaciones para caada uno de los métodos

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \longrightarrow x_2 = 1'5 - \frac{0'6250}{2'750} = 2'272727$$

$$x_{i+1} = x_i - m \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \longrightarrow x_2 = 1'5 - 2'0 \frac{0'6250}{2'750} = 1'045455$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)f(x_i)}{(f'(x_i))^2 - f(x_i)f''(x_i)} \longrightarrow$$

$$x_2 = 1'5 - \frac{2'750 \cdot 0'6250}{(2'750)^2 - 0'6250 \cdot 7'0} = 0'960784$$

Estos resultados y los resultados de las iteraciones siguientes que se muestran en las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 requieren alcanzar la tolerancia de convergencia,  $|\Delta_{x_{i+1}}| \leq 0,000001$ .

El método básico de Newton requirió 20 iteraciones, mientras que los dos otros métodos requirieron solamente cuatro iteraciones cada uno. La ventaja de estos dos métodos sobre el método básico para la aproximación de raíces múltiples es obvia.

Seguidamente se representan las tablas de cálculo de los distintos métodos.

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$x_{i+1}$	$f(x_{i+1})$
1	1'50	0'6250	1'272727	0'16904583
2	1'272727	0'16904583	1'144082	0'04451055
3	1'144082	0'04451055	1'074383	1'01147723
...	.....	.....	.....	.....
19	1'000002	0'00000000	1'000001	0'00000000
20	1'000000	0'00000000	1'000001	0'00000000
	1'000001	0'00000000		

Tabla 4.1: Método básico de Newton

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$x_{i+1}$	$f(x_{i+1})$
1	1'50	0'6250	1'045455	0'00422615
2	1'045455	0'00422615	1'005000	0'00000050
3	1'005000	0'00000050	1'000000	0'00000000
4	1'000000	0'00000000	1'000000	0'00000000
	1'000000	0'00000000		

Tabla 4.2: Método de Ralston y Rabinowitz (MRR) teniendo en cuenta la multiplicidad, con  $m = 2$ .

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$x_{i+1}$	$f(x_{i+1})$
1	1'50	0'6250	0'960784	0'00301543
2	0'960784	0'00301543	0'999600	0'00000032
3	0'999600	0'00000032	1'000000	0'00000000
4	1'000000	0'00000000	1'000000	0'00000000
	1'000000	0'00000000		

Tabla 4.3: Método de Newton modificado (MNM).



## 4.2. Modificaciones del método de Halley

En este apartado vamos a ver como se puede aplicar el método de Halley para la obtención de raíces múltiples, para lo que consideraremos algunas posibles modificaciones o transformaciones del mismo.

El método de Halley necesita de las segundas derivadas para su puesta en práctica, lo que en ocasiones puede añadir dificultad al cálculo. Por esta razón queremos dar a conocer algunas variantes del método de Halley libre de la segunda derivada para la búsqueda de raíces múltiples. El método de Halley cúbicamente convergente para raíces simples, vimos que se puede escribir como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.2.1)$$

donde  $L_f(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}$ . Para quitar la segunda derivada del método de Halley, Ezquerro y Hernández [6], [7] sustituyen la segunda derivada utilizando la fórmula

$$f''(x_n) \simeq \frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{y_n - x_n},$$

siendo  $y_n$  un valor cercano a  $x_n$ .

De esta manera se sustituye  $L_f(x_n)$  por una aproximación donde intervienen valores de la función y de su primera derivada, y se obtiene la clase de métodos libres de la segunda derivada basados en el método de Halley (4.2.1) dada por

$$\begin{cases} y_n = x_n - \theta u_n \\ x_{n+1} = x_n - \frac{2\theta f(x_n)}{(2\theta - 1)f'(x_n) + f'(y_n)} \end{cases} \quad (4.2.2)$$

donde  $\theta \in (0, 1]$  es un parámetro, y

$$u_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (4.2.3)$$

Siendo  $y_n = x_n - \theta f(x_n)/f'(x_n)$ , donde  $\theta$  es un parámetro real distinto de cero, considerando la expansión de Taylor de  $f(y_n)$  en torno a  $x_n$  resulta

$$f(y_n) \simeq f(x_n) + f'(x_n)(y_n - x_n) + \frac{1}{2} f''(x_n)(y_n - x_n)^2$$

lo que implica

$$f(y_n) \simeq (1 - \theta)f(x_n) + \frac{1}{2}\theta^2 \frac{f''(x_n)f(x_n)^2}{f'(x_n)^2}$$

Ahora, a partir de la expresión anterior podemos obtener la aproximación

$$L_f(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} \simeq 2 \frac{f(y_n) + (\theta - 1)f(x_n)}{\theta^2 f(x_n)}.$$

Sustituyendo esta aproximación de  $L_f(x_n)$  en la ecuación (4.2.1) resulta

$$\begin{cases} y_n = x_n - \theta u_n \\ x_{n+1} = x_n - \frac{\theta^2 f(x_n)}{(\theta^2 - \theta + 1)f(x_n) - f(y_n)} u_n \end{cases} \quad (4.2.4)$$

donde  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \neq 0$  y  $u_n$  viene dado por (4.2.3).

Ahora lo que vamos a hacer es generalizar las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.4) para raíces múltiples y de este modo obtener dos familias modificadas del método de Halley libres de la segunda derivada para obtener raíces múltiples. Ambos métodos presentan convergencia cúbica.

## PRIMERA MODIFICACIÓN

En primer lugar, se generaliza la ecuación (4.2.2) para raíces múltiples y se considera el siguiente algoritmo de iteración

$$\begin{cases} y_n = x_n - \theta u_n \\ x_{n+1} = x_n - \frac{\beta f(x_n)}{\gamma f'(x_n) + f'(y_n)} u_n \end{cases} \quad (4.2.5)$$

donde  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\theta$  son parámetros que se determinan para que los métodos tengan tercer orden de convergencia para el caso de raíces múltiples.

Para los valores que proporciona Li (véase Teorema 1 en [12]),

$$\beta = -\frac{(m\theta + \theta - 2m)m\theta}{(m - \theta)^2} \mu^m \quad \text{y} \quad \gamma = -\frac{(m - \theta)^2 - m\theta + m\theta^2}{(m - \theta)^2} \mu^m,$$

siendo  $\mu = \frac{m - 1}{m}$ , se obtiene la primera familia uniparamétrica de métodos iterativos de Halley para raíces múltiples, que viene dada por

$$\begin{cases} y_n = x_n - \theta u_n \\ x_{n+1} = x_n - \frac{m\theta(m\theta + \theta - 2m)\mu^m f(x_n)}{((m - \theta)^2 - m\theta + m\theta^2)\mu^m f'(x_n) - (m - \theta)^2 f'(y_n)} \end{cases} \quad (4.2.6)$$

donde  $\theta$  es un parámetro real con  $\theta \neq 0, m, \frac{2m}{m+1}$ . Nosotros vamos a considerar el caso en que  $\theta = 1$ , que es al que llamaremos *primera modificación del método de Halley para raíces múltiples* y que abreviaremos por **PMH**. Para este valor se obtiene el método

$$\begin{cases} y_n = x_n - u_n \\ x_{n+1} = x_n + \frac{m\mu^m f(x_n)}{(m - 1)[\mu^m f'(x_n) - f'(y_n)]} \end{cases} \quad (4.2.7)$$

siendo  $\mu = \frac{m-1}{m}$ ,  $u_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , y que satisface la ecuación de error

$$e_{n+1} = \left[ \frac{m-2}{2m(m+1)^2(m-1)} A^2 - \frac{(m-2)}{m^2(m+1)(m+2)} B \right] e_n^3 + O(e_n^4),$$

donde, para simplificar, hemos puesto

$$A = \frac{f^{(m+1)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}, \quad B = \frac{f^{(m+2)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}, \quad (4.2.8)$$

siendo  $m$  la multiplicidad de la raíz buscada. A la vista de la ecuación del error vemos que el método presenta convergencia de tercer orden para  $m > 1$ .

## SEGUNDA MODIFICACIÓN

De forma similar, podemos generalizar la ecuación en (4.2.4) para raíces múltiples considerando la siguiente iteración

$$\begin{cases} y_n = x_n - \theta u_n \\ x_{n+1} = x_n - \frac{\beta f(x_n)}{\gamma f(x_n) - f(y_n)} u_n \end{cases} \quad (4.2.9)$$

Si  $\beta = \frac{m\theta^2}{m-\theta} \mu^m$ ,  $\gamma = \frac{m-\theta+\theta^2}{m-\theta} \mu^m$  (véase Teorema 2 en [12]), se obtiene

otra familia modificada del método de Halley libre de la segunda derivada

$$\begin{cases} y_n = x_n - \theta u_n \\ x_{n+1} = x_n - \frac{m\theta^2\mu^m f(x_n)}{(m - \theta + \theta^2)\mu^m f(x_n) - (m - \theta)f(y_n)} u_n \end{cases} \quad (4.2.10)$$

donde  $\theta$  es un parámetro real al que se exige que  $\theta \neq 0, m$ .

Nosotros vamos a considerar el caso en que  $\theta = 1$ , que es el que llamaremos *segunda modificación del método de Halley para raíces múltiples* y denotaremos para abreviar por **SMH**. El método que resulta se escribe

$$\begin{cases} y_n = x_n - u_n \\ x_{n+1} = x_n - \frac{m\mu^m f(x_n)}{m\mu^m f(x_n) - (m - 1)f(y_n)} u_n \end{cases} \quad (4.2.11)$$

siendo  $\mu = \frac{m-1}{m}$ ,  $u_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , y el cual satisface la ecuación de error

$$e_{n+1} = \left[ \frac{m+3}{2m(m+1)^3} A^2 - \frac{1}{m^2(m+2)} B \right] e_n^3 + O(e_n^4),$$

donde  $A$  y  $B$  son como en (4.2.8), de donde se sigue que este método también posee convergencia cúbica.

**Ejemplo 4.2.1.** Consideremos la función polinómica de tercer grado

$$f(x) = P_3(x) = (x-1)(x+1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$$

Vamos a calcular por los métodos aproximados que acabamos de ver la raíz doble  $x = -1$ .

**Resolución:** Vamos a resolver el ejercicio anterior mediante la aplicación de tres métodos:

1. Método clásico de Halley.
2. (PMH) Primera modificación del método de Halley para raíces múltiples.
3. (SMH) Segunda modificación del método de Halley para raíces múltiples.

Para aplicar estos métodos, será necesario conocer las derivadas primera y segunda de la función

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1, \quad f''(x) = 6x + 2$$

Tomando como valor inicial  $x_0 = -2$ , sustituyendo obtenemos

$$f(x_0) = -3, \quad f'(x_0) = 7, \quad f''(x_0) = -10.$$

Ahora vamos a determinar el valor de los distintos parámetros para poder realizar la aplicación de los métodos (PMH) y (SMH)

$$\mu = \frac{m-1}{m} = \frac{2-1}{2} = 1/2$$

$$u_0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -3/7$$

$$y_0 = x_0 - u_0 = -11/7$$

$$f(y_0) = -288/343$$

$$f'(y_0) = 160/49$$

Ahora, sustituyendo estos valores en las expresiones que nos proporcionan los diferentes métodos, obtendremos

1. Método clásico de Halley: fórmula (3.3.1)

$$x_1 = (-2) - \frac{2(-3)(7)}{2(7)^2 - (-3)(-10)} = -47/34 \simeq -1,38235$$

2. (PMH) Primera modificación del método de Halley para raíces múltiples: fórmula (4.2.7)

$$x_1 = (-2) + \frac{(1/2)^{2-1}(-3)}{(1/2)^2 \cdot 7 - (160/49)} = -100/99 \simeq -1,0101$$

3. (SMH) Segunda modificación del método de Halley para raíces múltiples: fórmula (4.2.11)

$$x_1 = (-2) - \frac{(1/2)^{2-1}(-3)}{(1/2)^{2-1}(-3) - (-288/343)}(-3/7) = -155/151$$

$$\simeq -1,02649.$$

Todos estos resultados y los resultados obtenidos para el resto de iteraciones se pueden observar en las siguientes Tablas 4.4,4.5 y 4.6, donde se requiere alcanzar un error  $|x_{n+1} - x_n| \leq 1 \cdot 10^{-9}$ , requisito que en el método clásico de Halley se cumple en la iteración número 20, mientras que en el método PMH tan solo se requieren 2 iteraciones y en el método SMH se necesitan tres iteraciones. De modo que estas dos modificaciones del método de Halley para raíces múltiples convergen a la raíz de forma mucho más rápida que el método clásico.

$n$	$x_n$	$ x_{n+1} - x_n $
1	-1,3823529411764705621	0,3823529411764705621
2	-1,1355247718907218496	0,1355247718907218496
3	-1,0462068054530732461	0,0462068054530732461
...	...	...
19	-1,0000000010859420344	$1,0859420344 \cdot 10^{-9}$
20	-1,0000000003619806782	$3,619806782 \cdot 10^{-10}$

Tabla 4.4: Método básico de Halley

$i$	$x_n$	$ x_{n+1} - x_n $
1	-1,01010101010101016605	0,01010101010101016605
2	-1,00000000047825241982	$4,78252419822269811773 \cdot 10^{-10}$
3	-1,00000000000000000000	$2,45227959674430240419 \cdot 10^{-39}$

Tabla 4.5: Primera modificación del método de Halley para raíces múltiples (PMH) teniendo en cuenta la multiplicidad, con  $m = 2$ .

$i$	$x_n$	$ x_{n+1} - x_n $
1	-1,02649006622516525411	0,02649006622516525411
2	-1,00000113152282369224	$1,13152282369224483714 \cdot 10^{-6}$
3	-1,00000000000000000009	$9,05460441470516243320 \cdot 10^{-20}$

Tabla 4.6: Segunda modificación del método de Halley para raíces múltiples (SMH) teniendo en cuenta la multiplicidad, con  $m = 2$ .

### 4.3. Modificación del método de Jarratt

El método de Jarratt en (3.5.3) resulta muy interesante ya que es óptimo [11] de orden cuatro. Numerosos autores han realizado modificaciones del mismo para conseguir esta característica también con raíces múltiples. A continuación mostramos con cierto detalle la modificación realizada por Sharma y Sharma [19] del mismo, la cual se recoge en el siguiente teorema:

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $\alpha \in I$  una raíz múltiple de multiplicidad  $m$  de una función suficientemente diferenciable  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  para un intervalo abierto  $I$ . Si  $x_0$  es lo suficientemente cercano a  $\alpha$ , el proceso iterativo definido en 3.5.3 tiene cuarto orden de convergencia siempre que  $\beta = \frac{-2m}{m+2}$ ,  $a_1 = \frac{1}{8}m(m^3 - 4m + 8)$ ,  $a_2 = -\frac{1}{4}m(m-1)(m+2)^2 \left(\frac{m}{m+2}\right)^m$  y  $a_3 = \frac{1}{8}m(m+2)^3 \left(\frac{m}{m+2}\right)^{2m}$ .*

**Demostración:** Usando el desarrollo de Taylor de  $f(x_n)$  y  $f'(x_n)$  en  $\alpha$ , tenemos

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} e_n^m [1 + A_1 e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + A_4 e_n^4 + O(e_n^5)], \quad (4.3.1)$$

donde  $e_n = x_n - \alpha$ ,  $A_j = \frac{m!}{(m+j)!} \frac{f^{(m+j)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} e_n^{m-1} [1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + B_3 e_n^3 + B_4 e_n^4 + O(e_n^5)], \quad (4.3.2)$$

donde  $B_j = \frac{(m-1)!}{(m+j-1)!} \frac{f^{(m+j)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$ .

Tomando  $\widehat{e}_n = y_n - \alpha$ , estando  $y_n$  definido en 3.5.3 y desarrollando  $f'(y_n)$  en  $\alpha$ , se obtiene

$$f'(y_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} \widehat{e}_n^{m-1} \left[ 1 + D_1 \widehat{e}_n + D_2 \widehat{e}_n^2 + D_3 \widehat{e}_n^3 + O(\widehat{e}_n^4) \right]. \quad (4.3.3)$$

Sustituyendo 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3 en 3.5.3 y operando con *Mathematica* se obtiene la siguiente ecuación de error

$$e_{n+1} = M_1 e_n + M_2 e_n^2 + M_3 e_n^3 + M_4 e_n^4 + O(e_n^5),$$

donde

$$M_1 = 1 - \frac{a_1}{m} - \frac{a_2 \mu^{1-m}}{m} - \frac{a_3 \mu^{2-2m}}{m},$$

$$M_2 = \frac{1}{\mu^{2m} m^5} \left[ 2a_3 \beta^3 + m^2 \beta (\beta + 3) (2a_3 + a_2 \mu^m) + m \beta^2 (a_2 \mu^m + a_3 (2\beta + 7)) + m^3 (a_3 + (a_2 + a_1 \mu^m) \mu^m) \right] A_1,$$

$$M_3 = N_1 A_1^2 + N_2 A_2,$$

$$N_1 = \frac{\mu^{-1-2m}}{2m^8} \left[ -6a_3\beta^5 - 2m\beta^4(a_2\mu^m + a_3(6\beta + 19)) - 2m^2\beta^3(2a_2(\beta + 3)\mu^m + a_3(3\beta^2 + 26\beta + 41)) - 2m^3\beta^2(a_2(\beta^2 + 8\beta + 11)\mu^m + a_3(7\beta^2 + 38\beta + 37)) - 2m^6(a_3 + (a_2 + a_1\mu^m)\mu^m) - m^5(2a_3(3\beta^2 + 9\beta + 1) + (2a_1(\beta + 1)\mu^m + a_2(3\beta^2 + 10\beta + 2))\mu^m) - m^4\beta(2a_3(7\beta^2 + 26\beta + 13) + (2a_1\mu^m + a_2(4\beta^2 + 19\beta + 14))\mu^m) \right],$$

$$N_2 = \frac{\mu^{-2m}}{m^6} \left[ 4a_3\beta^4 + m^3\beta(3\beta + 8)(2a_3 + a_2\mu^m) + 2m\beta^3(a_3(\beta + 8) + a_2\mu^m) + m^2\beta^2(a_2(\beta + 6)\mu^m + a_3(8\beta + 26)) + 2m^4(a_3 + (a_2 + a_1\mu^m)\mu^m) \right],$$

y  $\mu = \frac{m+\beta}{m} \neq 0$ .

Para alcanzar el cuarto orden de convergencia, los coeficientes  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  deben anularse. Resolviendo  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 0$ , se obtiene

$$a_1 = \frac{\mu^{-2m} a_3 \beta (\beta^3 + m\beta^2(\beta + 4) + m^2\beta(2\beta + 5) + m^3(\beta + 2)) + m^3(m^2 + m\beta(\beta + 3) + \beta^2)}{m^2\beta(\beta + m(\beta + 2))},$$

y

$$a_2 = -\frac{\mu^{-m}(a_3\beta(4m^2 + 6m\beta + 2m^2\beta + 2\beta^2 + 2m\beta^2) + m^4\mu^{2m})}{m\beta(\beta + m(\beta + 2))}.$$

Para anularse  $M_3$ , deben anularse  $N_1$  y  $N_2$ . Con los valores de  $a_1$  y  $a_2$  en las expresiones de  $N_1$  y  $N_2$ , y resolviendo  $N_1 = 0$  y  $N_2 = 0$ , se obtiene

$$\beta = \frac{-2m}{m+2},$$

$$a_3 = \frac{1}{8}m(m+2)^3 \left( \frac{m}{m+2} \right)^{2m}.$$

Sustituyendo los valores de  $\beta$  y  $a_3$ , se obtienen finalmente los parámetros  $a_1$  y  $a_2$ :

$$a_1 = \frac{1}{8}m(m^3 - 4m + 8)$$

$$a_2 = -\frac{1}{4}m(m-1)(m+2)^2 \left( \frac{m}{m+2} \right)^m.$$



Por lo tanto, el método (3.5.3) para obtener una raíz múltiple de multiplicidad  $m$  viene dado por la misma expresión, pero en este caso, los parámetros toman distintos valores:

$$\begin{cases} y_n = x_n + \beta w_1(x_n) \\ x_{n+1} = x_n - a_1 w_1(x_n) - a_2 w_2(x_n) - a_3 \frac{w_2^2(x_n)}{w_1(x_n)} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

donde  $\beta = \frac{-2m}{m+2}$ ,  $a_1 = \frac{1}{8}m(m^3 - 4m + 8)$ ,  $a_2 = -\frac{1}{4}m(m-1)(m+2)^2 \left(\frac{m}{m+2}\right)^m$  y  $a_3 = \frac{1}{8}m(m+2)^3 \left(\frac{m}{m+2}\right)^{2m}$ , y la ecuación del error viene dada por la siguiente expresión:

$$e_{n+1} = M_4 e_n^4 + O(e_n^5),$$

donde

$$M_4 = \frac{(m^5 + 6m^4 + 14m^3 + 14m^2 + 12m - 8)A_1^3}{3m^4(m+2)^2} - \frac{A_1 A_2}{m} + \frac{m A_3}{(m+2)^2}.$$

Así, basándose en el método de Jarratt para raíces simples, Sharma y Sharma [19] obtuvieron un método de cuarto orden para raíces múltiples. Por ello, se denomina método de Jarratt modificado (MJM). Nótese, que para  $m = 1$  se obtiene el método de Jarratt. Al igual que este último, el método de Jarratt modificado es óptimo según la conjetura de Kung-Traub [11] ya que necesita tres evaluaciones y tiene una convergencia de orden cuatro, por tanto, el índice de eficiencia de este método también es  $\varepsilon(4, 3) = 4^{1/3} \simeq 1,5874$ .

## 4.4. Construcción de métodos de tercer orden

En esta sección analizaremos dos métodos de un paso con convergencia cúbica para raíces múltiples desarrollados por Kansal, Kanwar y Bhatia [10] construidos de forma similar, donde cada método requiere tres evaluaciones por iteración:  $f(x_n)$ ,  $f'(x_n)$  y  $f''(x_n)$ .

### 4.4.1. Primer método de tercer orden para raíces múltiples

Se parte de los siguientes métodos iterativos

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

y

$$x_{n+1} = x_n - (m-1) \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

que convergen cuadráticamente para raíces múltiples de ecuaciones no lineales.

Se toma la media aritmética de dichas expresiones y se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left( m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (m-1) \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \right), \quad (4.4.1)$$

que tiene convergencia cuadrática y sigue la siguiente ecuación de error:

$$e_{n+1} = \frac{c_1 e_n^2}{m-1} + O(e_n^3).$$

Para aumentar el orden de convergencia, se introducen dos parámetros  $a$  y  $b$  en (4.4.1), y se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left( m \frac{af(x_n)}{f'(x_n)} + (m-1) \frac{bf'(x_n)}{f''(x_n)} \right), \quad (4.4.2)$$

Para encontrar los valores adecuados de los parámetros  $a$  y  $b$  en (4.4.2), se utilizará el siguiente teorema.

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable definida en un intervalo abierto  $D$ , y que encierra una raíz múltiple de  $f(x)$  con multiplicidad  $m > 1$ . La familia de métodos iterativos definida en (4.4.2) tiene orden de convergencia cúbico para  $a = 1 + m$  y  $b = 1 - m$ .*

**Demostración:** Sea  $x = \alpha$  una raíz múltiple de  $f(x)$ . Utilizando el desarrollo de Taylor de  $f(x_n)$ ,  $f'(x_n)$  y  $f''(x_n)$  en  $\alpha$ , se tiene

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} e_n^m [1 + A_1 e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + O(e_n^4)], \quad (4.4.3)$$

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} e_n^{m-1} [1 + B_1 e_n + B_2 e_n^2 + B_3 e_n^3 + O(e_n^4)], \quad (4.4.4)$$

y

$$f''(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-2)!} e_n^{m-2} [1 + C_1 e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)], \quad (4.4.5)$$

donde  $A_j = \frac{m!}{(m+j)!} \frac{f^{(m+j)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$ ,  $B_j = \frac{(m-1)!}{(m+j-1)!} \frac{f^{(m+j)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$ ,  $C_j = \frac{(m-2)!}{(m+j-2)!} \frac{f^{(m+j)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Sustituyendo (4.4.3), (4.4.4) y (4.4.5) en (4.4.2) se obtiene

$$e_{n+1} = e_n - \frac{1}{2} \left( m \frac{af(x_n)}{f'(x_n)} + (m-1) \frac{bf'(x_n)}{f''(x_n)} \right) = \frac{1}{2}(2-a-b)e_n \\ + \frac{(a(m-a) + b(m+a))c_1 e_n^2}{2m(m-1)} + O(e_n^3) = B_1 e_n + B_2 e_n^2 + O(e_n^3)$$

Para alcanzar el orden de convergencia tres, los coeficientes  $B_1$  y  $B_2$  de  $e_n$  y  $e_n^2$  han de ser cero. Resolviendo el sistema  $B_1 = 0$ ,  $B_2 = 0$ , se obtiene

$$a = 1 + m \quad y \quad b = 1 - m.$$

Sustituyendo los valores de  $a$  y  $b$  en (4.4.2) se obtiene, finalmente, el siguiente proceso iterativo (PMTO)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left( m(m+1) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (m-1)^2 \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \right), \quad (4.4.6)$$

que satisface la siguiente ecuación de error

$$e_{n+1} = \frac{((1+m)^2 c_1^2 - 2m(m-1)c_2)e_n^3}{2m^2(m-1)} + O(e_n^4).$$

#### 4.4.2. Segundo método de tercer orden para raíces múltiples

Partiendo de

$$x_{n+1} = x_n - (m-1) \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

y el método de Schröder para raíces múltiples [18]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)},$$

y siguiendo un proceso similar al anterior, se toma la media aritmética de ambas expresiones y resulta la siguiente expresión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left( (m-1) \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} + \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)} \right), \quad (4.4.7)$$

que tiene convergencia cuadrática y sigue la siguiente ecuación de error:

$$e_{n+1} = \frac{c_1 e_n^2}{m(m-1)} + O(e_n^3).$$

Ahora, para aumentar el orden de convergencia de dos a tres, se introducen dos parámetros,  $k_1$  y  $k_2$ , y se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left( (m-1) \frac{k_1 f'(x_n)}{f''(x_n)} + \frac{k_2 f(x_n) f'(x_n)}{f'^2(x_n) - f(x_n) f''(x_n)} \right),$$

que sigue la siguiente ecuación de error:

$$e_{n+1} = \frac{2 - k_1 - k_2}{2} e_n + \frac{(a + b + am + bm)c_1}{2m(m-1)} e_n^2 + O(e_n^3) = B_3 e_n + B_4 e_n^2 + O(e_n^3).$$

Por tanto, para alcanzar el orden de convergencia cúbico, los coeficientes  $B_3$  y  $B_4$  de  $e_n$  y  $e_n^2$  han de ser cero. Resolviendo el sistema  $B_3 = 0$  y  $B_4 = 0$ , se obtiene

$$k_1 = \frac{m-1}{m} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{m+1}{m}.$$

Sustituyendo los valores de  $k_1$  y  $k_2$  se obtiene, finalmente, el siguiente método iterativo (SMTO)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2m} \left( \frac{(m-1)^2 f'(x_n)}{f''(x_n)} + \frac{(m+1) f(x_n) f'(x_n)}{f'^2(x_n) - f(x_n) f''(x_n)} \right), \quad (4.4.8)$$

que sigue la siguiente ecuación de error

$$e_{n+1} = \frac{((-3 - 2m + m^2)c_1^2 - 2m(m-1)c_2)e_n^3}{2m^2(m-1)} + O(e_n^4).$$

## 4.5. Construcción de métodos de cuarto orden

En esta sección, se muestran dos familias de métodos multipaso con convergencia de cuarto orden para raíces múltiples, desarrolladas por Kansal, Kanwar y Bhatia [10]. Cada método requiere tres evaluaciones por iteración:  $f(x_n)$ ,  $f'(x_n)$  y  $f'(y_n)$  y son, por tanto, óptimos.

### 4.5.1. Primera familia de métodos de cuarto orden para raíces múltiples

Considerando  $y_n = x_n - \theta \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  una iteración del tipo Newton con  $\theta \neq 0$ , y el desarrollo de Taylor de  $f'(y_n)$  en un punto  $x_n$

$$f'(y_n) \approx f'(x_n) + f''(x_n)(y_n - x_n),$$

que produce

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n)(f'(x_n) - f'(y_n))}{\theta f(x_n)}.$$

Usando ésta aproximación de  $f''(x_n)$  en (4.4.1) y con  $\theta = \frac{2m}{m+2}$ , se obtiene un método modificado libre de derivadas de segundo orden

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left( m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{2m(m-1)f(x_n)}{(m+2)(f'(x_n) - f'(y_n))} \right), \quad (4.5.1)$$

que sigue la ecuación de error dada por

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2(m-1)m}{(2+m)(2(\frac{m}{2+m})^m + m((\frac{m}{2+m})^m - 1))} \right) e_n + O(e_n^2).$$

Además, para aumentar el orden de convergencia, se introducen dos parámetros  $a_1$  y  $a_2$  en (4.5.1) para obtener

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left( m \frac{a_1 f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{2a_2 m(m-1)f(x_n)}{(m+2)(f'(x_n) - f'(y_n))} \right), \quad (4.5.2)$$

que sigue la ecuación de error dada por

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( 2 - a_1 + \frac{2a_2(m-1)m}{(2+m)(2(\frac{m}{2+m})^m + m((\frac{m}{2+m})^m - 1))} \right) e_n + O(e_n^2) \\ &= B_5 e_n + B_6 e_n^2 + O(e_n^3). \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema dado por los coeficientes  $B_5 = 0$  y  $B_6 = 0$ , se puede ver que para

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \left( 4 - 2m + m^2 \left( -1 + \left( \frac{m}{2+m} \right)^{-m} \right) \right), \\ a_2 = - \frac{\left( \frac{m}{2+m} \right)^{-m} (2+m) \left( 2 \left( \frac{m}{2+m} \right)^m + m \left( -1 + \left( \frac{m}{2+m} \right)^m \right) \right)^2}{4(m-1)}, \end{cases} \quad (4.5.3)$$

el método (4.5.2) presenta convergencia cúbica y sigue la siguiente ecuación de error:

$$e_{n+1} = \frac{2 \left( -1 + \left( \frac{m}{2+m} \right)^m \right) c_1^2}{m^2 \left( 2 \left( \frac{m}{2+m} \right)^m + m \left( -1 + \left( \frac{m}{2+m} \right)^m \right) \right)} e_n^3 + O(e_n^4).$$

El método (4.5.2), por tanto, no es óptimo, por lo que para obtener un método óptimo de cuarto orden se sugiere el siguiente proceso iterativo

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left[ \frac{a_1 m f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{2a_2 m(m-1)f(x_n)}{(m+2)(f'(x_n) - f'(y_n))} \right] Q \left( \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} \right), \end{cases} \quad (4.5.4)$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  corresponden a los definidos en (4.5.3) y  $Q(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$  es cualquier función de peso de valor real tal que el orden de convergencia alcance el nivel óptimo sin consumir más evaluaciones funcionales. El siguiente teorema indica las condiciones en la función de peso que garantizan el orden de convergencia cuatro.

**Teorema 4.5.1.** *Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable definida en un intervalo abierto  $D$ , y que encierra una raíz múltiple de  $f(x)$  con multiplicidad  $m > 1$ . La familia de métodos iterativos definida en (4.5.4) presenta cuarto orden de convergencia para*

$$\begin{cases} Q(\mu) = 1, \\ Q'(\mu) = 0, \\ Q''(\mu) = \frac{m^4 \left(\frac{m}{2+m}\right)^{-2m} \left(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right)}{4 \left(2 \left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m \left(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right)\right)}, \\ |Q'''(\mu)| < \infty, \end{cases}$$

donde  $\mu = \left(\frac{m}{2+m}\right)^{m-1}$ , siendo la ecuación de error la dada por

$$e_{n+1} = \frac{p_1 c_1^3 - p_2 c_2^3}{3m^9(2+m)^2(2p^m + m(p^m - 1))^2} e_n^4 + O(e_n^5),$$

donde

$$p = \frac{m}{2+m},$$

$$\begin{aligned} p_1 = & (2+m)^2 (128Q'''(\mu)p^{5m} - 4m^6(-3+p^m) + 128Q'''(\mu)mp^{4m}(-1+p^m) \\ & + m^{10}(-1+p^m)^2 + 32Q'''(\mu)m^2p^{3m}(-1+p^m)^2 + 8m^5p^m(-6+5p^m) \\ & + 8m^7(-1+p^m+p^{2m}) + m^9(2-8p^m+6p^{2m}) + 2m^8(1-6p^m+7p^{2m})), \end{aligned}$$

$$p_2 = 3m^8(2+m)^2(2p^m + m(p^m - 1))^2 c_1 c_2 + 3m^{10}(2p^m + m(p^m - 1))^2.$$

**Demostración:** Sea  $x = \alpha$  una raíz múltiple de  $f(x)$ , utilizando el desarrollo de Taylor de  $f(x_n)$  y  $f'(x_n)$  en  $x = \alpha$ , se tiene

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} e_n^m (1 + c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4) + O(e_n^5),$$

y

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!} e_n^{m-1} \left( 1 + \frac{m+1}{m} c_1 e_n + \frac{m+2}{m} c_2 e_n^2 + \frac{m+3}{m} c_3 e_n^3 + \frac{m+4}{m} c_4 e_n^4 \right) + O(e_n^5),$$

respectivamente. Mediante *Mathematica*, se obtiene

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a_1 m f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{2a_2 m(m-1) f(x_n)}{(m+2)(f'(x_n) - f'(y_n))} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( a_1 - \frac{2a_2 m(m-1)}{(m+2)(-m + \frac{m}{m+2}(m+2))} \right) e_n + O(e_n^2). \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Se tiene además

$$\begin{aligned} \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} &= \left( \frac{m}{2+m} \right)^{m-1} - \frac{4 \left( \left( \frac{m}{2+m} \right)^m c_1 \right)}{m^3} e_n + \frac{4 \left( \frac{m}{2+m} \right)^m \left( (2+m^2)c_1^2 - 2m^2 c_2 \right)}{m^5} e_n^2 \\ &\quad - \left( 8 \left( \left( \frac{m}{2+m} \right)^m \left( (2+m)^2(6+m+5m^2 - m^3 + m^4)c_1^3 - 3m^2(2+m)^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. (4+m^2)c_1 c_2 + 3m^4(6+6m+m^2)c_3 \right) \right) e_n^3 \right) / (3(m^7(2+m)^2)) + O(e_n^4). \end{aligned}$$

Siendo  $\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \mu + v$ , donde  $\mu = \left( \frac{m}{2+m} \right)^{m-1}$ , entonces  $v = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} - \mu$  tiene el mismo orden de  $e_n$ . Considerando el desarrollo de Taylor de la función de peso  $Q \left( \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} \right) = Q(\mu + v)$  en el entorno de  $\mu$  se obtiene

$$Q \left( \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} \right) = Q(\mu) + Q'(\mu)v + \frac{Q''(\mu)v^2}{2!} + \frac{Q'''(\mu)v^3}{3!} + O(e_n^4). \quad (4.5.6)$$

Usando (4.5.5) y (4.5.6) en (4.5.4), se obtiene la siguiente ecuación de error

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{1}{2} \left[ \frac{a_1 m f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{2a_2 m(m-1) f(x_n)}{(m+2)(f'(x_n) - f'(y_n))} \right] Q \left( \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} \right) \\ &= K_1 e_n + K_2 e_n^2 + \frac{1}{2} (K_3 + K_4 + K_5 + K_6) e_n^3 + e_n^4 + O(e_n^5), \end{aligned}$$

donde

$$K_1 = 1 - \frac{a_1 Q(\mu)}{2} + \frac{a_2 m(m-1) Q(\mu)}{(m+2)(2p^m + m(p^m - 1))},$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2m^3} \left[ 4Q'(\mu) \left( \frac{m}{2+m} \right)^m \left( a_1 - \frac{2a_2(m-1)m}{(2+m)(2(\frac{m}{2+m})^m + m(-1 + (\frac{m}{2+m})^m))} \right) \right. \\ &\quad \left. - Q(\mu)m^2 \left( -a_1 + \frac{2a_2(m-1)(-4(\frac{m}{2+m})^m + 2m(\frac{m}{2+m})^m + m^2(-1 + (\frac{m}{2+m})^m))}{(2+m)(2(\frac{m}{2+m})^m + m(-1 + (\frac{m}{2+m})^m))^2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$K_3 = \frac{4Q'(\mu) \left(\frac{m}{2+m}\right)^m \left( -a_1 + \frac{2a_2(m-1)(-4\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + 2m\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m^2(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m))}{(2+m)(2\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m))^2} \right) c_1^2}{m^4},$$

$$K_4 = -\frac{4\left(\frac{m}{2+m}\right)^m}{m^6} \left( a_1 - \frac{2a_2(m-1)m}{(2+m)(2\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m))} \right) \\ \left( \left( 2Q''(\mu) \left(\frac{m}{2+m}\right)^m + Q'(\mu)m(2+m^2) \right) c_1^2 - 2Q'(\mu)m^3c_2 \right),$$

$$K_5 = -Q(\mu) \left( \frac{2a_2(m-1)m \left( 1 + m - \frac{\left(\frac{m}{2+m}\right)^m(-4 + 2m + 3m^2 + m^3)}{m^2} \right) c_1^2}{(2+m)(m - \left(\frac{m}{2+m}\right)^m(2+m))^2} \right. \\ \left. - \frac{2a_2(m-1)mc_2}{(2+m)(2\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m))} \right) + Q(\mu) \frac{a_1((1+m)c_1^2 - 2mc_2)}{m^2},$$

y

$$K_6 = \frac{-Q(\mu)}{(2+m)(m - \left(\frac{m}{2+m}\right)^m(2+m))^2(2\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m))} (2a_2m(m-1) \\ ((1+m - \frac{\left(\frac{m}{2+m}\right)^m(-4 + 2m + 3m^2 + m^3)}{m^2})^2 c_1^2 - (m - \left(\frac{m}{2+m}\right)^m(2+m)) \\ (2c_2 + mc_2 + \frac{\left(\frac{m}{2+m}\right)^m(4(m-2)c_1^2 - m^2(-8 + 4m + 4m^2 + m^3)c_2)}{m^4}))) \right).$$

Resolviendo  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = 0$ ,  $K_3 = 0$ ,  $K_4 = 0$ ,  $K_5 = 0$  y  $K_6 = 0$ , para lograr un orden de convergencia cuatro, se obtiene

$$\begin{cases} Q(\mu) = 1 \\ Q'(\mu) = 0, \\ Q''(\mu) = \frac{m^4\left(\frac{m}{2+m}\right)^{-2m}(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m)}{4(2\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m))}, \end{cases}$$

donde  $\mu = \left(\frac{m}{2+m}\right)^{m-1}$ .

Se obtiene así un método de cuarto orden que requiere tres evaluaciones funcionales por iteración.



Finalmente, bajo las condiciones del Teorema 4.5.1, se obtiene el siguiente método (PFCO)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m}{4} f(x_n) \left( \frac{4 - 2m + m^2(p^{-m} - 1)}{f'(x_n)} - \frac{p^{-m}(2p^m + m(p^m - 1))^2}{f'(x_n) - f'(y_n)} \right) \cdot \left( 1 + \frac{Q'''(\mu)}{6} \left( \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} - p^{m-1} \right)^3 + \frac{m^4 \left( -\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} + p^{m-1} \right)^2 (p^m - 1)}{8p^{2m}(2p^m + m(p^m - 1))} \right), \quad (4.5.7)$$

donde  $|Q'''(\mu)| < \infty$  y  $p = \frac{m}{2+m}$ .

#### 4.5.2. Segunda familia de métodos de cuarto orden para raíces múltiples

De forma similar al caso anterior, usando la aproximación

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n)(f'(x_n) - f'(y_n))}{\theta f(x_n)}$$

en (4.4.7) y con  $\theta = \frac{2m}{m+2}$  obtenemos un método modificado libre de la segunda derivada dado por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left[ \frac{2mf(x_n) \left( \frac{m-1}{f'(x_n) - f'(y_n)} + \frac{m+2}{f'(x_n)(m-2) + f'(y_n)(m+2)} \right)}{m+2} \right].$$

Y sigue la siguiente ecuación de error

$$e_{n+1} = \left( 1 - \frac{m \left( \frac{m-1}{m - (\frac{m}{2+m})^m (m+2)} + \frac{m+2}{(m-2)m + (\frac{m}{2+m})^m (m+2)^2} \right)}{m+2} \right) e_n + O(e_n^2).$$

Introduciendo los parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se tiene la familia de métodos dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left[ \frac{2mf(x_n) \left( \frac{\alpha_1(m-1)}{f'(x_n) - f'(y_n)} + \frac{\alpha_2(m+2)}{f'(x_n)(m-2) + f'(y_n)(m+2)} \right)}{m+2} \right],$$

que sigue la siguiente ecuación de error

$$e_{n+1} = \left( 1 - \frac{m \left( \frac{\alpha_1(m-1)}{m - (\frac{m}{2+m})^m (m+2)} + \frac{\alpha_2(m+2)}{(m-2)m + (\frac{m}{2+m})^m (m+2)^2} \right)}{m+2} \right) e_n + O(e_n^2).$$

Para los siguientes valores

$$\alpha_1 = -\frac{\left(\frac{m}{2+m}\right)^{-m}(m+2)\left(2\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m\left(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right)\right)^2}{8(m-1)m^3} \left(-8\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m^3\left(1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right) + m^2\left(-2 + 4\left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right)\right), \quad (4.5.8)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\left(\frac{m}{2+m}\right)^{-m}\left(-4\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + 2m\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m^2\left(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right)\right)}{8m^3} \left(4\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m^2\left(1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right) + m\left(-2 + 4\left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right)\right)^2, \quad (4.5.9)$$

el método tiene orden de convergencia cúbico y sigue la siguiente ecuación de error:

$$e_{n+1} = \left(2\left(16\left(\frac{m}{2+m}\right)^{2m} - 4m^2\left(\frac{m}{2+m}\right)^{2m} + 2m^3\left(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right)^2 + m^4\left(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^{2m}\right)\right)c_1^2\right) / \left(m^4\left(2\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m\left(-1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right)\right)\left(4\left(\frac{m}{2+m}\right)^m + m^2\left(1 + \left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right) + m\left(-2 + 4\left(\frac{m}{2+m}\right)^m\right)\right)\right) e_n^3 + O(e_n^4).$$

Se puede ver que el método no es óptimo, y se considera la siguiente familia de métodos iterativos para conseguir el orden óptimo

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left[ \frac{2mf(x_n) \left( \frac{\alpha_1(m-1)}{f'(x_n) - f'(y_n)} + \frac{\alpha_2(m+2)}{f'(x_n)(m-2) + f'(y_n)(m+2)} \right)}{m+2} \right] Q\left(\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\right), \end{cases} \quad (4.5.10)$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  corresponden a los definidos en (4.5.8) y (4.5.9), y  $Q(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$  es cualquier función de peso de valor real tal que el orden de convergencia alcance el nivel óptimo sin necesitar más evaluaciones funcionales. El siguiente teorema indica las condiciones en la función de peso que garantizan el orden de convergencia cuatro.

**Teorema 4.5.2.** *Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable definida en un intervalo abierto  $D$ , y que encierra una raíz múltiple de  $f(x)$  con multiplicidad  $m > 1$ . La familia de métodos iterativos definida*

en (4.5.10) presenta cuarto orden de convergencia para

$$\begin{cases} Q(\mu) = 1, \\ Q'(\mu) = 0, \\ Q''(\mu) = \frac{p^{-2m}(16m^2p^{2m} - 4m^4p^{2m} + 2m^5(p^m - 1)^2 + m^6(p^{2m} - 1))}{4(2p^m + m(p^m - 1))(4p^m + m^2(p^m + 1) + m(-2 + 4p^m))}, \\ |Q'''(\mu)| < \infty, \end{cases}$$

donde  $\mu = (\frac{m}{2+m})^{m-1}y p = \frac{m}{2+m}$ . Obedece a la siguiente ecuación de error

$$e_{n+1} = \frac{(2p^m + m(p^m - 1))^{-2}((2+m)^2\beta_1c_1^3 - \beta_2)e_n^4}{3m^9(2+m)^2(4p^m + m^2(1+p^m) + m(4p^m - 2))^2} + O(e_n^5),$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_1 = & 2048Q'''(\mu)p^{7m} + 2048Q'''(\mu)mp^{6m}(-2 + 3p^m) + m^{14}(-1 + p^{2m})^2 \\ & + 512Q'''(\mu)m^2p^{5m}(6 - 16p^m + 15p^{2m}) + 64m^7p^m(-6 + 15p^m - 23p^{2m} \\ & + 14p^{3m}) + 2m^{13}(-1 + 4p^m - 6p^{2m} - 4p^{3m} + 7p^{4m}) + 8m^{11}(-1 - 2p^m \\ & + 16p^{2m} - 42p^{3m} + 37p^{4m}) + 2m^{12}(-1 + 8p^m - 2p^{2m} - 40p^{3m} + 43p^{4m}) \\ & + 16m^9(-5 + 5p^m + 7p^{2m} - 47p^{3m} + 56p^{4m}) + 16m^8(3 + 10p^m - 6p^{2m} \\ & - 54p^{3m} + 71p^{4m}) + 4m^{10}(13 - 32p^m + 84p^{2m} - 176p^{3m} + 155p^{4m}) \\ & + 128m^4p^{3m}(-12 + Q'''(\mu) + 18p^m + 4Q'''(\mu)p^{2m} - 16Q'''(\mu)p^{3m} \\ & + 15Q'''(\mu)p^{4m}) + 32m^6p^{2m}(12 - 4p^m - 26p^{2m} + Q'''(\mu)p^m(-1 + p^{2m})^2) \\ & + 1024m^3p^{4m}(3 + Q'''(\mu)(-1 + 3p^m - 6p^{2m} + 5p^{3m})) + 128m^5p^{3m}(6 \\ & - 10p^mQ'''(\mu) + (-1 + 2p^m - 2p^{2m} - 2p^{3m} + 3p^{4m})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & (8p^{2m} + 4mp^m(-2 + 3p^m) + m^3(-1 + p^{2m}) + m^2(2 - 4p^m + 6p^{2m}))^2 \\ & (3m^8(2+m)^2c_1c_2 + 3m^{10}c_3). \end{aligned}$$

**Demostración:** La demostración es similar a la del teorema 4.5.1, por lo que se omite aquí.

Finalmente, bajo las condiciones del Teorema 4.5.2 en (4.5.10), se obtiene una nueva familia de métodos de cuarto orden (SFCO)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{8m^2p^m}(A_1 + A_2) \left( 1 + \frac{1}{6}Q'''(\mu) \left( \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} - p^{m-1} \right)^3 + A_3 \right), \quad (4.5.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{(4p^m - 2mp^m - m^2(p^m - 1))(4p^m + m^2(p^m + 1) + m(4p^m - 2))^2}{f'(x_n)(m - 2) + f'(y_n)(m + 2)}, \\ A_2 = \frac{(2p^m + m(p^m - 1))^2(-8p^m + m^3(p^m + 1) + m^2(4p^m - 2))}{f'(y_n) - f'(x_n)}, \\ A_3 = \frac{(f'(y_n)m - f'(x_n)(m + 2)p^m)^2(16p^{2m} - 4m^2p^{2m} + 2m^3(p^m - 1)^2 + m^4(p^{2m} - 1))}{8p^{2m}f'(x_n)^2(2p^m + m(p^m - 1))(4p^m + m^2(p^m + 1) + m(4p^m - 2))}, \end{array} \right.$$

donde  $\mu = (\frac{m}{2+m})^{m-1}$  y  $p = \frac{m}{2+m}$ .

# Capítulo 5

## EJEMPLOS NUMÉRICOS

### 5.1. Ejemplos académicos

En este apartado presentaremos diversos ejemplos numéricos para analizar el comportamiento y los resultados de la aplicación de los diferentes métodos. Para ello utilizaremos los diferentes programas implementados en Mathematica, que nos ayudarán a comprender mejor cómo funciona cada método. Para una descripción detallada del algoritmo utilizado véase el apéndice A.2. En él sólo se ha incluido un ejemplo, ya que poner todos los programas para cada ejemplo tratado consideramos que es innecesario. Designándolos por las siglas que indicábamos en cada caso, los métodos que hemos considerado para resolver los ejemplos numéricos son:

- Método de Ralston y Rabinowitz, MRR (4.1.1).
- Método de Newton modificado, MNM (4.1.2).
- Primera modificación del método de Halley para raíces múltiples, PMH (4.2.7).
- Segunda modificación del método de Halley para raíces múltiples, SMH (4.2.11).
- Método de Jarratt modificado, MJM (4.3.4).
- Primer método de tercer orden para raíces múltiples, PMTO (4.4.6).
- Segundo método de tercer orden para raíces múltiples, SMTO (4.4.8).
- Primera familia de métodos de cuarto orden para raíces múltiples, PF-CO (4.5.7) para  $Q'''(\mu) = 0$ .

- Segunda familia de métodos de cuarto orden para raíces múltiples, SF-CO (4.5.11) para  $Q'''(\mu) = 0$ .

Una vez elegida la tolerancia, aplicamos los métodos para hallar la raíz buscada. En las tablas se presentan los siguientes datos:

1. el valor de la raíz buscada
2. los valores de arranque que se toman
3. el número de iteraciones necesarias para calcular la raíz dentro de la tolerancia especificada
4. el tiempo de procesamiento del programa para el cálculo de dicha raíz
5. el orden de convergencia computacional aproximado, calculado según la expresión en (2.4.1)

Haremos un tabla para cada ejemplo en la que figurarán los métodos antes mencionados con los resultados proporcionados por el programa *Mathematica*, y comentaremos brevemente los datos obtenidos. La tolerancia se ha fijado para todos los ejemplos en  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

Como ejemplos de estudio se han escogido diferentes tipos de ecuaciones no lineales típicas para comparar los resultados con los distintos métodos:

$$f_1(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6$$

$$f_2(x) = x^2 e^x - \text{sen } x + x$$

$$f_3(x) = ((x - 1)^3 - 1)^6$$

$$f_4(x) = (x^2 - e^x - 3x + 2)^5$$

$$f_5(x) = (1 + \cos x)(e^x - 2)^2$$

$$f_6(x) = \ln^2(x - 2)(e^{x-3} - 1) \text{sen } \frac{\pi x}{3}$$

$$f_7(x) = \left( \text{sen } x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 (x + 1)$$

En la Tabla 5.1 aparecen el valor de la raíz que se calculará con los métodos y el valor de la multiplicidad de dicha raíz, que es necesario conocer a priori en todos los métodos utilizados salvo en MNM.

$f_i$	$m$	$\alpha$
$f_1$	3	1.0000000000000000
$f_2$	2	0.0000000000000000
$f_3$	6	2.0000000000000000
$f_4$	5	0.2575302854398607
$f_5$	2	0.6931471805599453
$f_6$	4	3.0000000000000000
$f_7$	2	0.7853981633974483

Tabla 5.1: Multiplicidad y valor aproximado de las raíces de los ejemplos  $f_i(x)$  obtenidas.

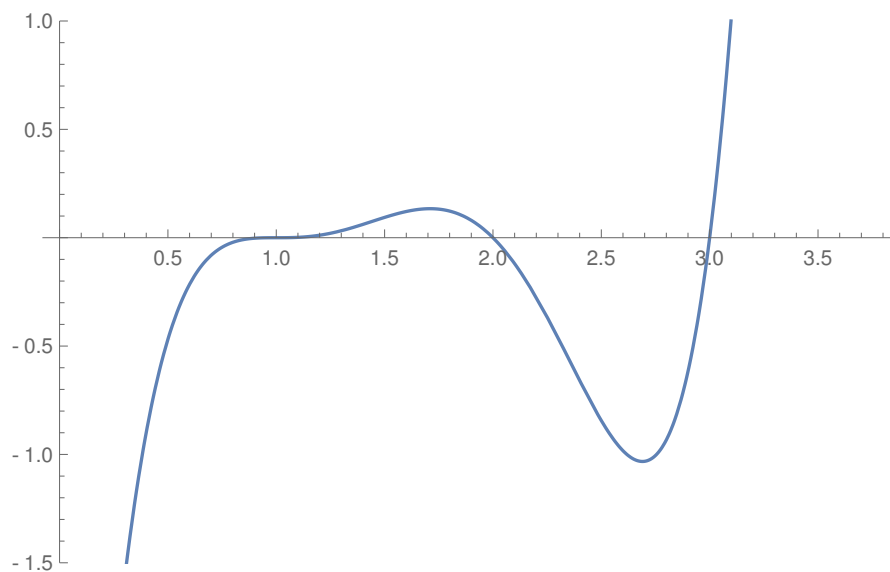


Figura 5.1: Representación gráfica de  $f_1(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6$

Método	$x_0$	Nº iteraciones	Tiempo de CPU	$\rho$ (ACOC)
MRR	0.5	11	0.	No calcula
	1.5	7	0.	No calcula
MNM	0.5	6	0.	No calcula
	1.5	5	0.	No calcula
PMH	0.5	3	0.	No calcula
	1.5	4	0.0156001	No calcula
SMH	0.5	6	0.0624004	No calcula
	1.5	4	0.	No calcula
MJM	0.5	3	0.0156001	No calcula
	1.5	9	0.0312002	No calcula
PMTO	0.5	12	0.	No calcula
	1.5	68	0.0156001	No calcula
SMT0	0.5	12	0.	21.4464
	1.5	400	0.0312002	0.99754
PFCO	0.5	3	0.0156001	No calcula
	1.5	5	0.	No calcula
SFCO	0.5	3	0.0156001	No calcula
	1.5	111	0.0468003	No calcula

Tabla 5.2: Ej.  $f_1: x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6$  ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 1.)



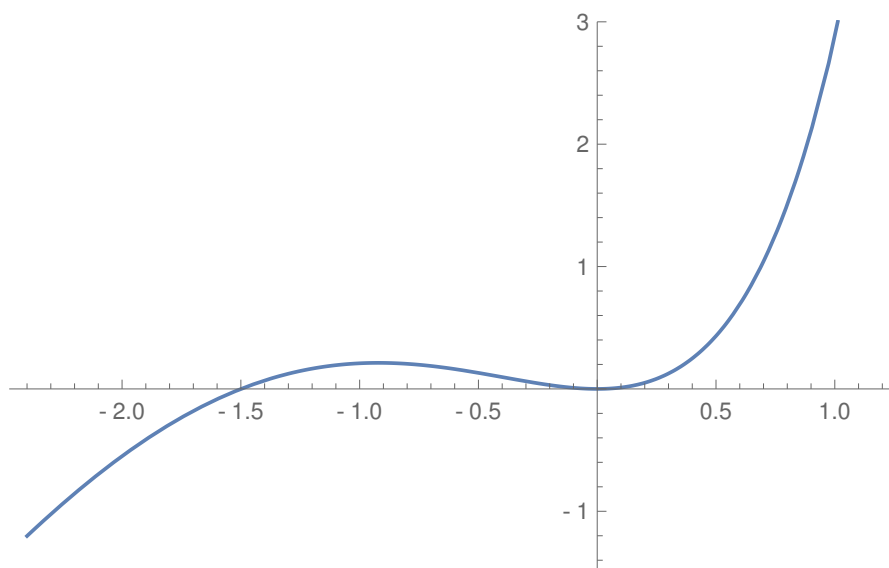


Figura 5.2: Representación gráfica de  $f_2(x) = x^2 e^x - \text{sen } x + x$

Método	$x_0$	Nº iteraciones	Tiempo de CPU	$\rho$ (ACOC)
MRR	-0.5	6	0.	1.99998
	1.	6	0.	2.00003
MNM	-0.5	6	0.	1.99946
	1.	7	0.	2.01817
PMH	-0.5	4	0.	3.4587
	1.	4	0.0156001	1.78274
SMH	-0.5	4	0.	2.36217
	1.	4	0.	2.17222
MJM	-0.5	4	0.	3.44121
	1.	4	0.	No calcula
PMTO	-0.5	6	0.	2.944
	1.	5	0.0312002	No calcula
SMTO	-0.5	400	0.0312002	No calcula
	1.	5	0.	2.63922
PFCO	-0.5	4	0.	3.52491
	1.	4	0.	1.59428
SFCO	-0.5	4	0.	3.45339
	1.	4	0.	1.8116

Tabla 5.3: Ej.  $f_2: x^2 e^x - \text{sen } x + x$  ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 0.)

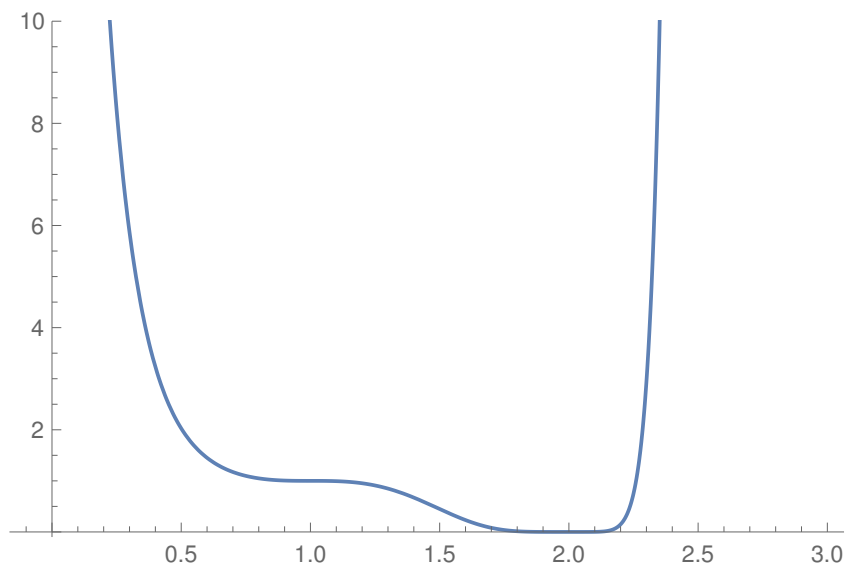


Figura 5.3: Representación gráfica de  $f_3(x) = ((x - 1)^3 - 1)^6$

Método	$x_0$	Nº iteraciones	Tiempo de CPU	$\rho$ (ACOC)
MRR	1.5	7	0.	2.00016
	2.5	6	0.	1.99821
MNM	1.5	7	0.	1.96042
	2.5	6	0.	2.00034
PMH	1.5	4	0.	1.15271
	2.5	4	0.	2.20184
SMH	1.5	5	0.	1.06946
	2.5	4	0.	2.20068
MJM	1.5	8	0.0156001	3.85699
	2.5	4	0.	1.71174
PMTO	1.5	17	0.	2.9818
	2.5	5	0.	No calcula
SMT0	1.5	6	0.0156001	No calcula
	2.5	4	0.	2.15937
PFCO	1.5	9	0.	3.19019
	2.5	4	0.	1.3793
SFCO	1.5	9	0.	3.51401
	2.5	4	0.	1.46665

Tabla 5.4: Ej.  $f_3: ((x - 1)^3 - 1)^6$  ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 2.)

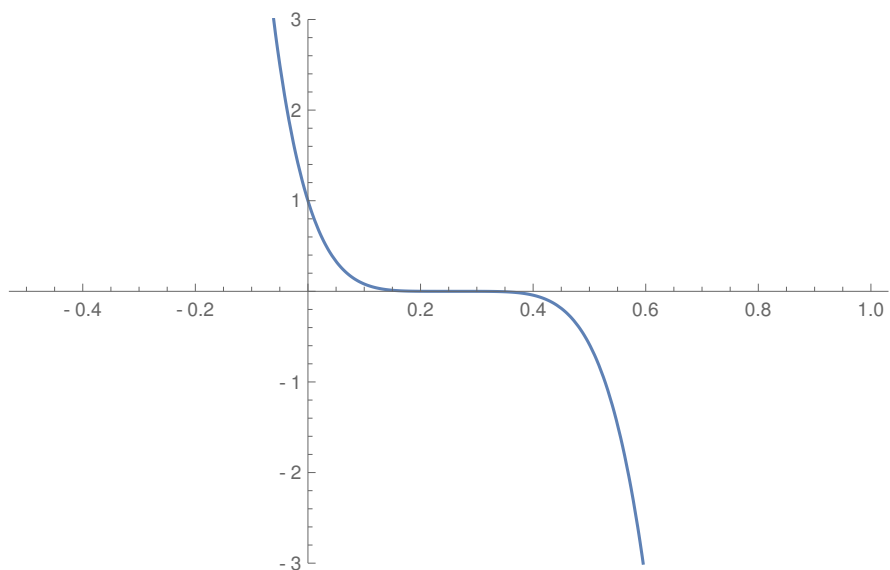


Figura 5.4: Representación gráfica de  $f_4(x) = (x^2 - e^x - 3x + 2)^5$

Método	$x_0$	Nº iteraciones	Tiempo de CPU	$\rho$ (ACOC)
MRR	0.	4	0.	1.34561
	0.5	4	0.	1.31365
MNM	0.	4	0.	1.35747
	0.5	4	0.	1.27955
PMH	0.	3	0.	-
	0.5	3	0.	-
SMH	0.	3	0.	-
	0.5	3	0.0156001	-
MJM	0.	3	0.	-
	0.5	3	0.	-
PMTO	0.	3	0.	-
	0.5	3	0.	-
SMTO	0.	3	0.	-
	0.5	3	0.	-
PFCO	0.	3	0.	-
	0.5	3	0.	-
SFCO	0.	3	0.	-
	0.5	3	0.0156001	-

Tabla 5.5: Ej.  $f_4$ :  $(x^2 - e^x - 3x + 2)^5$  ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 0,25753029)

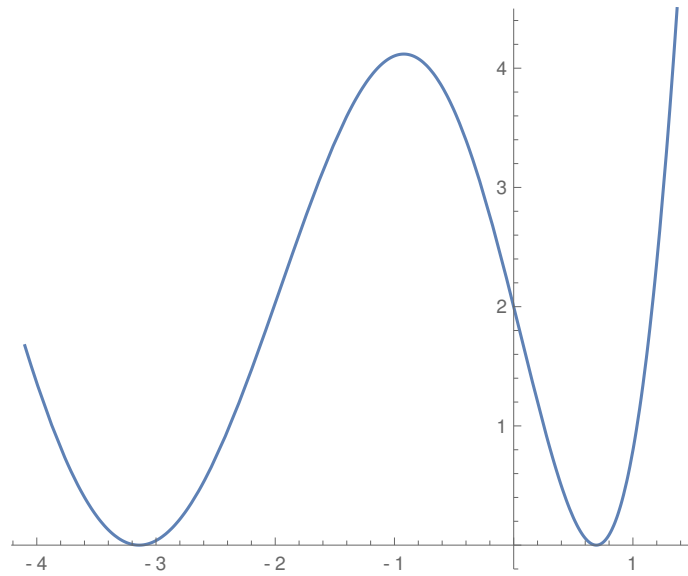


Figura 5.5: Representación gráfica de  $f_5(x) = (1 + \cos x)(e^x - 2)^2$

Método	$x_0$	Nº iteraciones	Tiempo de CPU	$\rho$ (ACOC)
MRR	0.	6	0.	1.81382
	1.	5	0.	1.81382
MNM	0.	6	0.	1.93819
	1.	5	0.0156001	No calcula
PMH	0.	4	0.	2.06
	1.	3	0.	-
SMH	0.	4	0.	2.13255
	1.	4	0.	0.792565
MJM	0.	4	0.	2.17883
	1.	3	0.	-
PMTO	0.	23	0.	4.51265
	1.	4	0.	No calcula
SMTO	0.	400	0.0312002	0.
	1.	3	0.	-
PFCO	0.	4	0.	1.92116
	1.	3	0.	-
SFCO	0.	6	0.0468003	No calcula
	1.	3	0.	-

Tabla 5.6: Ej.  $f_5: (1 + \cos x)(e^x - 2)^2$  ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 0,69314718)

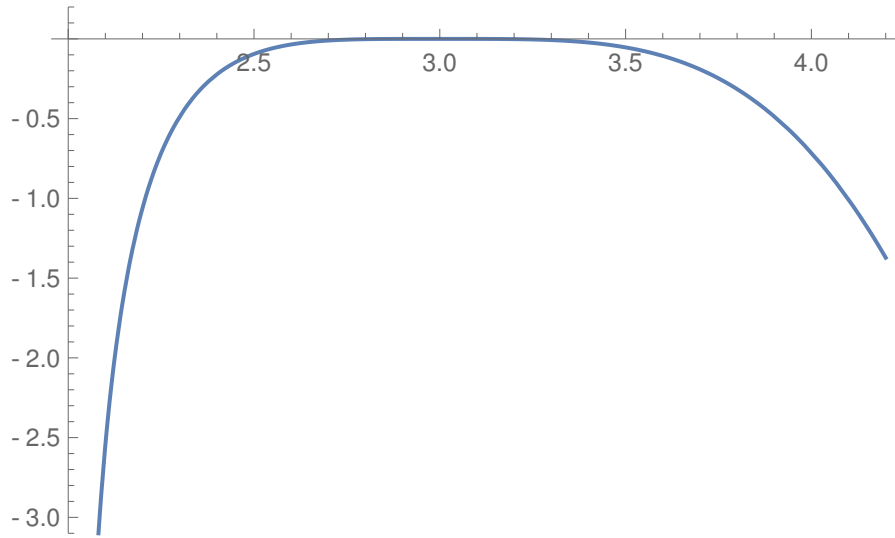


Figura 5.6: Representación gráfica de  $f_6(x) = \ln^2(x - 2)(e^{x-3} - 1) \text{sen}(\pi x/3)$

Método	$x_0$	Nº iteraciones	Tiempo de CPU	$\rho$ (ACOC)
MRR	2.5	5	0.	No calcula
	4.	5	0.	2.00407
MNM	2.5	5	0.	1.99933
	4.	5	0.0156001	1.99739
PMH	2.5	4	0.	1.12695
	4.	4	0.0936006	No calcula
SMH	2.5	7	0.	2.70431
	4.	4	0.	1.14721
MJM	2.5	3	0.	-
	4.	4	0.	0.541595
PMTO	2.5	4	0.	No calcula
	4.	4	0.0156001	No calcula
SMTO	2.5	4	0.	2.41312
	4.	3	0.	-
PFCO	2.5	3	0.	-
	4.	4	0.	0.563928
SFCO	2.5	3	0.187201	-
	4.	4	0.	0.609447

Tabla 5.7: Ej.  $f_6$ :  $\ln^2(x - 2)(e^{x-3} - 1) \text{sen}(\pi x/3)$  ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 3.)

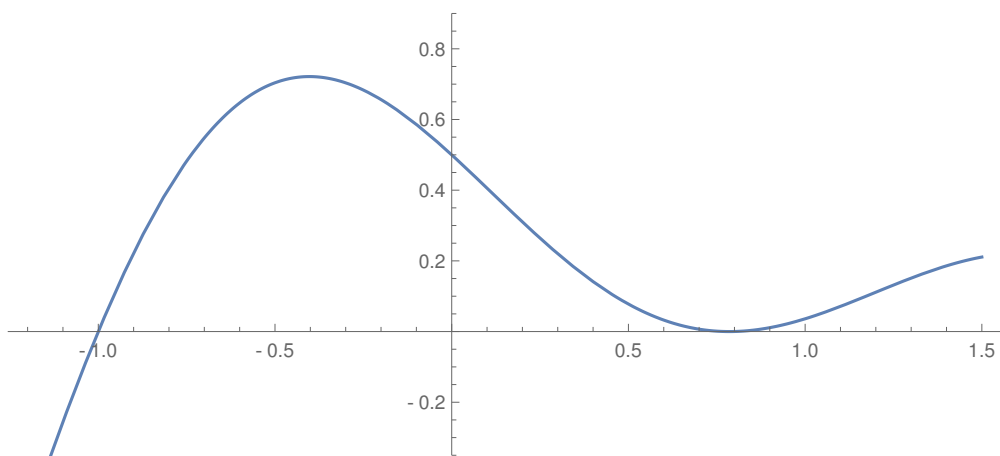


Figura 5.7: Representación gráfica de  $f_7(x) = (\text{sen } x - 1/\sqrt{2})^2 (x + 1)$

Método	$x_0$	Nº iteraciones	Tiempo de CPU	$\rho$ (ACOC)
MRR	0.4	4	0.	1.24206
	1.2	5	0.	1.99902
MNM	0.4	5	0.	1.96797
	1.2	5	0.	2.01075
PMH	0.4	3	0.	-
	1.2	4	0.	1.5623
SMH	0.4	4	0.	1.46206
	1.2	4	0.	1.96844
MJM	0.4	3	0.	-
	1.2	4	0.	1.52653
PMTO	0.4	4	0.	2.24187
	1.2	8	0.	No calcula
SMT0	0.4	4	0.	1.67771
	1.2	5	0.0156001	No calcula
PFCO	0.4	3	0.	-
	1.2	7	0.	1.60063
SFCO	0.4	3	0.	-
	1.2	4	0.0780005	No calcula

Tabla 5.8: Ej.  $f_7: (\text{sen } x - 1/\sqrt{2})^2 (x + 1)$  ( $\varepsilon = 10^{-10}$ , raíz: 0,78539816)

Observando las gráficas correspondientes, se toman dos valores iniciales  $x_0$  para cada función, a izquierda y derecha de la raíz, para analizar la convergencia a la raíz desde ambos lados. Si en otros casos fuera necesario escoger valores más próximos a la raíz para asegurar la convergencia, se utilizarán otros procedimientos como Bolzano, Bisección, Interpolación, etc. En casos de funciones con poca o mucha pendiente, hay que tener especial cuidado al escoger el punto de inicio para evitar problemas de convergencia. En el cálculo de la raíz de  $f_2(x)$ , también se ha prestado especial atención debido a que la raíz de la función es cero y la convergencia se presenta para valores muy próximos a él, lo que puede hacer que se anulen los denominadores, dando lugar a una indeterminación antes de converger. En aquellos ejemplos que presentan varias raíces, se escogen valores iniciales que permitan la convergencia hacia la deseada.

Respecto al número de iteraciones, es lógico esperar que los métodos de mayor orden de convergencia requieran un menor número de iteraciones, y en general es así, pero no siempre, podemos ver por ejemplo que con la función  $f_1(x)$ , los métodos PMTO y SMTO (tercer orden) necesitan más iteraciones que MNM (segundo orden), o con la función  $f_3(x)$ , los métodos PFCO y SFCO (orden cuatro) necesitan más iteraciones que MRR, MNM, PMH, SMH (orden dos y tres). Se observa, por tanto, que el tipo de función afectará al comportamiento general de los métodos, y en base a esto debe escogerse aquel más adecuado. Se aprecia también en la función  $f_4(x)$  por ejemplo, que al aumentar el orden de convergencia de los métodos no siempre resultan diferencias significativas entre ellos, por lo que puede haber casos en los que resulte más adecuado utilizar uno más sencillo.

En cuanto al tiempo de cómputo, se ve que en la mayoría de los casos es nulo (lo que significa que no es medible por el programa), y en los que no es nulo, es muy bajo, por lo que podemos decir que los métodos convergen rápidamente, excepto en ciertos casos en que algún método no funciona correctamente ya sea por particularidades de la función o por otros factores independientes del método como puede ser una mala elección de  $x_0$ .

Por otro lado, se puede ver, en general, que el orden de convergencia computacional aproximado  $\rho$ , si bien en algunos ejemplos pueden aparecer valores extraños, se corresponde con los valores teóricos. En algunos casos no puede calcularse  $\rho$  porque las dos últimas iteraciones del programa proporcionan el mismo valor, y al ser una de las diferencias de valores en la expresión de  $\rho$ , cero, aparece una indeterminación. Nótese que con la notación (-) en las tablas como valor de  $\rho$  en aquellos casos que el método requirió tres iteraciones, se pretende indicar que no es posible calcularlo, ya que se necesitan cuatro valores.

Resumiendo, los métodos de mayor orden presentan un mejor comporta-

miento en general, pero habrá que tener en cuenta también las particularidades de la función y del entorno de la raíz.

## 5.2. Resolución del problema de aplicación

Para finalizar la parte de ejemplos numéricos consideraremos el problema planteado en el capítulo 1 relativo a la determinación del ángulo de salida  $\phi$  en un sistema de cuatro barras acopladas. Recordamos que se trataba de resolver la ecuación (1.2.1) para el caso en que el ángulo de entrada es  $\alpha \simeq 0,579998719185927$ . La raíz exacta es

$$\phi = 2\pi - \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{22\sqrt{346} \left( \frac{11}{692} (75\sqrt{2473} - 1331) - 1 \right)}{75\sqrt{2473} - 1331} \right)$$

siendo el valor aproximado proporcionado por el programa *Mathematica*, con veinte cifras significativas

$$\phi \simeq 5,4783978946010816983.$$

Se utilizarán como puntos de arranque para los métodos los valores  $x_0 = 5$  y  $x_0 = 6$ , para comprobar la convergencia a la raíz desde ambos lados de la misma, ya que, como se ve en la figura 1.2, la raíz se encuentra entre estos dos valores.

Presentamos los resultados obtenidos con *Mathematica* en la tabla 5.9, donde se observa que la mayoría de los métodos funcionan correctamente con este ejemplo salvo PFCO y SFCO. En dicha tabla aparece el valor aproximado de la raíz obtenido y se observa que los valores difieren a partir de la novena cifra decimal, por tanto, gracias a estos procedimientos, hemos podido conocer la raíz aproximada de 1.2.1 con ocho cifras decimales exactas, lo que no era posible con el comando `FindRoot` del programa *Mathematica*, que está basado en el método de Newton.



Método	$x_0$	Nº iteraciones	Tiempo de CPU	$\alpha$
MRR	5.	8	0.	5.4783978940
	6.	8	0.	5.4783978949
MNM	5.	4	0.	5.4783978940
	6.	6	0.	5.4783978961
PMH	5.	3	0.	5.4783978946
	6.	3	0.	5.4783978946
SMH	5.	3	0.	5.4783978937
	6.	3	0.	5.4783978960
MJM	5.	3	0.	5.4783978946
	6.	15	0.	5.4783978946
PMTO	5.	40	0.	5.4783978946
	6.	14	0.	5.4783978943
SMTO	5.	348	0.078125	5.4783978949
	6.	38	0.	5.4783978947
PFCO	5.	400	0.171601	No converge
	6.	400	0.171601	No converge
SFCO	5.	400	0.234002	No converge
	6.	400	0.218401	No converge

Tabla 5.9: Ej. de aplicación:  $F(\phi) = \frac{5}{3} \cos(\alpha) - \frac{5}{2} \cos(\phi) + \frac{11}{6} \cos(\alpha - \phi)$   
 $(\varepsilon = 10^{-10}, \text{ raíz: } 5,478397894601)$

# Capítulo 6

## CONCLUSIONES

Con este trabajo se pretenden estudiar distintos métodos numéricos para la resolución de ecuaciones no lineales en el caso en que presenten raíces múltiples. Es un tema poco conocido dentro del temario de ingeniería, pero al que se ha dedicado numerosa investigación en las pasadas décadas, y sobre el que se sigue investigando. Resulta de crucial importancia en el caso en que los problemas que se tienen que resolver presenten raíces con multiplicidad mayor que la unidad. Como se mostró en el ejemplo de aplicación del primer capítulo, podemos necesitar resolver un problema donde aparece una ecuación con una raíz múltiple, y en este caso los métodos clásicos no son eficaces. En los dos primeros capítulos se abordan cuestiones generales sobre la evolución que han tenido los métodos para la resolución de ecuaciones y se describen distintos conceptos que aparecen en este contexto.

En el capítulo 3 se han descrito algunos métodos clásicos para aproximar raíces. Su comportamiento en el caso de raíces simples era satisfactorio, pero al utilizar esos mismos métodos para aproximar raíces múltiples el resultado era muy distinto, se observaban muchos problemas de convergencia. Debido a esta dificultad, surge la necesidad de nuevos métodos para resolver aquellas ecuaciones que presentan raíces múltiples, por lo que se han modificado estos métodos clásicos obteniéndose nuevos métodos especialmente diseñados para aproximar raíces con multiplicidad.

En el capítulo 4 se vio cómo se pueden obtener nuevos métodos a partir de los ya existentes, y también cómo mejorarlos para conseguir una convergencia más rápida. Aparecen también algunos conceptos muy importantes como es el de **método óptimo**, aquel que presenta el mayor orden de convergencia posible para un determinado número de evaluaciones funcionales, por lo que, desde el punto de vista de la eficiencia computacional, éstos son los más interesantes. Por ello se han ido desarrollando diferentes métodos óptimos en los últimos años. Estos nuevos métodos presentados en el capítulo 4, fueron

objeto de estudio en el capítulo 5.

Como podemos deducir de todo lo visto a lo largo del proyecto, en general, los métodos numéricos con mayor orden de convergencia son más eficaces que los de menor convergencia. Esto sólo es cierto en la mayor parte de los casos, ya que como hemos visto en algún que otro ejemplo en el estudio práctico de los métodos, a veces al intentar resolver una ecuación vemos que métodos con orden de convergencia mayor no son nada eficientes. Esto puede deberse a la forma de la propia función o a que cuando se procede para calcular las sucesivas iteraciones se llega un punto en que nos encontramos con una división por valores próximos a cero, lo que nos paraliza el proceso de iteración, o nos aleja de la raíz buscada. Además, puede resultar más eficiente desde el punto de vista computacional, usar métodos óptimos de menor orden frente a uno de mayor orden que requiera un mayor coste computacional.

Para evitarnos problemas cuando se procede al cálculo de las sucesivas iteraciones hay que prestar atención al hecho de elegir unos valores iniciales adecuados, ya que en algunos casos será la diferencia entre el éxito o el fracaso de la obtención de la raíz, o como poco, disminuirá el número de iteraciones, es decir, el número de veces que hay que utilizar el método. Para ello se pueden utilizar otros procedimientos como el método de Bisección, Interpolación, etc., o bien una opción nada despreciable pero sí menos precisa, que consiste en hacer un estudio gráfico de la función de iteración.

Cabe mencionar también, que en todos los métodos para raíces múltiples utilizados salvo en el Método de Newton modificado (MNM), se ha de conocer previamente el valor de la multiplicidad  $m$ , que puede requerir un estudio previo, y por tanto podría resultar indispensable utilizar éste si no se pudiera calcular el valor de  $m$  o si resultara excesivamente complicado. Por contra, este método es el que peor índice de eficiencia presenta, ya que precisa de tres evaluaciones para lograr convergencia cuadrática,  $\varepsilon(2, 3) = 2^{1/3} \simeq 1,2599$ , mientras que los métodos de mayor índice de eficiencia de este trabajo son los de cuarto orden (MJM, PFCO y SFCO),  $\varepsilon(4, 3) = 4^{1/3} \simeq 1,5874$ .

Y para acabar, a pesar de que pueden surgir problemas de cálculo, bien por el método, la función, o las condiciones que se apliquen, y se pueden dar algunas situaciones desfavorables, como la de raíces próximas entre sí, puntos de inflexión, o la generación de un bucle en el proceso iterativo, podemos concluir que los métodos recogidos en el trabajo son procedimientos adecuados para la resolución de ecuaciones no lineales con raíces múltiples. Pero siempre analizando con cuidado la ecuación a resolver, y siendo cautelosos a la hora de programar, incluyendo un número de iteraciones máximo, de manera que el programa se aborta si se alcanza este número.

# Apéndice A

## PROGRAMAS IMPLEMENTADOS EN MATHEMATICA

En este apéndice se muestran los programas de los distintos métodos utilizados con los correspondientes ejemplos considerados para realizar las tablas del ejemplo de la sección 3.7 y de los ejemplos numéricos con los métodos para raíces múltiples del capítulo 5. Dichos programas han servido para la obtención de los datos tales como el valor de la raíz de los distintos ejemplos, el número de iteraciones necesarias para llegar a esa solución, el tiempo de procesamiento del programa o el orden de convergencia computacional aproximado del método utilizado, datos que permiten comprender un poco mejor cómo funcionan estos métodos y los problemas que pueden surgir.

Todos estos algoritmos se han realizado con ayuda del programa *Mathematica*, gracias al cual se han podido obtener resultados con rapidez y precisión.

Los programas tienen una estructura común, hay una entrada que es la función  $f(x)$ , a partir de la cual, según el método elegido, se genera la función de iteración  $g$ . Se introduce también el valor inicial  $x_0$ , el valor de la multiplicidad  $m$  (en aquellos métodos que sea necesaria), la tolerancia, y el número máximo de iteraciones permitido (por defecto se ha establecido este número en 400, aunque se puede cambiar). Un contador va acumulando el número de iteraciones. El algoritmo procede iterativamente mientras el error relativo  $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$  o el valor de la función  $|f(x_{n+1})|$  sean mayores que la tolerancia. Cuando el algoritmo finaliza devuelve el número de iteraciones, el tiempo de procesamiento del programa, el valor aproximado de la raíz y el valor de la función en la aproximación de la raíz. Además, se calcula posteriormente el





















```
{0., {15.000000000000000000000000000000, Indeterminate, Indeterminate}}
```

```
aproxim
```

```
{4., 39.034, 30.8385, -243.496, -206.822, -505.621, 13625.9, 2.6691*10^8,  
-6.62571*10^15, 2.17564*10^31, -4.12219*10^59, -4.53186*10^118,  
-5.85283*10^236, 3.407088342405960*10^473, Indeterminate}
```

## MÉTODO DE JARRATT

```
f[x_] := (Cos[x] - x)^4  
y = x - 2/3 w1; w1 = f[x]/f'[x]; w2 = f[x]/f'[y];  
g[x_] = x - 5/8 w1 - 3/8 (w2)^2/w1 // Simplify;
```

```
metodo[x0_, tol_, maxiter_: 400] :=  
SetPrecision[(xn = x0; xn1 = g[xn]; cont = 1; aproxim = {xn}; While[  
  (Abs[xn1 - xn] > tol || Abs[f[xn1]] > tol) && cont < maxiter,  
  cont++; xn = xn1; xn1 = g[xn];  
  aproxim = Append[aproxim, xn1]]; {cont, xn1, f[xn1]}), 30]
```

```
Timing[metodo[2., 10^(-10)]]
```

```
{0., {41.000000000000000000000000000000, 0.739085133307187835960405664082,  
5.62708720581491488939280202756*10^-40}}
```

```
l1 = Length[aproxim];
```

```
ACOC = Abs[  
  Log[Abs[aproxim[[l1]] - aproxim[[l1 - 1]]]/  
  Abs[aproxim[[l1 - 1]] - aproxim[[l1 - 2]]]]/  
  Log[Abs[aproxim[[l1 - 1]] - aproxim[[l1 - 2]]]/  
  Abs[aproxim[[l1 - 2]] - aproxim[[l1 - 3]]]]]
```

```
1.00001
```

```
Timing[metodo[4., 10^(-10)]]
```

```
Power::infy: Infinite expression 1/0.^2 encountered.
```

```
{0.0312002, {391.0000000000000000000000000000, Indeterminate,
```









```
{0., {4.00000000000000000000000000000000, 2.000000000000000000000000000000, 0}}
```

```
l1 = Length[aproxim];
```

```
ACOC = Abs[  
  Log[Abs[aproxim[[l1]] - aproxim[[l1 - 1]]]/  
    Abs[aproxim[[l1 - 1]] - aproxim[[l1 - 2]]]]/  
  Log[Abs[aproxim[[l1 - 1]] - aproxim[[l1 - 2]]]/  
    Abs[aproxim[[l1 - 2]] - aproxim[[l1 - 3]]]]]
```

```
2.20184
```

### SMH

```
f[x_] := ((x - 1)^3 - 1)^6  
y = x - f[x]/f'[x]; \[Mu] = (m - 1)/m;  
g[x_] = x - (m \[Mu]^m f[x])/(m \[Mu]^m f[x] - (m - 1) f[y]) f[x]/  
  f'[x]; m = 6;
```

```
metodo[x0_, tol_, maxiter_: 400] :=  
  SetPrecision[(xn = x0; xn1 = g[xn]; cont = 1; aproxim = {xn}; While[  
    (Abs[xn1 - xn] > tol || Abs[f[xn1]] > tol) && cont < maxiter,  
    cont++; xn = xn1; xn1 = g[xn];  
    aproxim = Append[aproxim, xn1]]; {cont, xn1, f[xn1]}], 30]
```

```
Timing[metodo[1.5, 10^(-10)]]
```

```
{0., {5.00000000000000000000000000000000, 2.000000000000000000000000000000, 0}}
```

```
l1 = Length[aproxim];
```

```
ACOC = Abs[  
  Log[Abs[aproxim[[l1]] - aproxim[[l1 - 1]]]/  
    Abs[aproxim[[l1 - 1]] - aproxim[[l1 - 2]]]]/  
  Log[Abs[aproxim[[l1 - 1]] - aproxim[[l1 - 2]]]/  
    Abs[aproxim[[l1 - 2]] - aproxim[[l1 - 3]]]]]
```

```
1.06946
```

```
Timing[metodo[2.5, 10^(-10)]]
```







```

Infinity::indet: Indeterminate expression 0. ComplexInfinity encountered.

{0.0156001, {6.000000000000000000000000000000, Indeterminate, Indeterminate}}

ll = Length[aproxim];

ACOC = Abs[
  Log[Abs[aproxim[[ll]] - aproxim[[ll - 1]]]/
    Abs[aproxim[[ll - 1]] - aproxim[[ll - 2]]]]/
  Log[Abs[aproxim[[ll - 1]] - aproxim[[ll - 2]]]/
    Abs[aproxim[[ll - 2]] - aproxim[[ll - 3]]]]

Indeterminate

Timing[metodo[2.5, 10^(-10)]]

{0., {4.000000000000000000000000000000, 2.000000000000000000000000000000, 0}}

ll = Length[aproxim];

ACOC = Abs[
  Log[Abs[aproxim[[ll]] - aproxim[[ll - 1]]]/
    Abs[aproxim[[ll - 1]] - aproxim[[ll - 2]]]]/
  Log[Abs[aproxim[[ll - 1]] - aproxim[[ll - 2]]]/
    Abs[aproxim[[ll - 2]] - aproxim[[ll - 3]]]]

2.15937

PFCO

f[x_] := ((x - 1)^3 - 1)^6
y = x - (2 m)/(m + 2) f[x]/f'[x]; p = m/(m + 2);
g[x_] = x - m/4 f[x] ((4 - 2 m + m^2 (p^-m - 1))/f'[x] - (
  p^-m (2 p^m + m (p^m - 1))^2)/(f'[x] - f'[y])) (1 + (
  m^4 (-f'[y]/f'[x]) + p^(m - 1))^2 (p^m - 1))/(
  8 p^(2 m) (2 p^m + m (p^m - 1))); m = 6;

metodo[x0_, tol_, maxiter_: 400] :=
  SetPrecision[(xn = x0; xn1 = g[xn]; cont = 1; aproxim = {xn}; While[
    (Abs[xn1 - xn] > tol || Abs[f[xn1]] > tol) && cont < maxiter,

```







# Bibliografía

- [1] C. ALTMAN, *Iterative methods of higher order*, Bull. Acad. Poll. Sci. (Sér. Sci. Math; Astr. Phys.) **IX** (1961) 62–68.
- [2] S. AMAT, S. BUSQUIER, S. PLAZA, *Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view*, Scientia, series A: Mathematical Sciences, **Vol. 10** (2004) 3–35.
- [3] I. K. ARGYROS, *Newton Methods*, Nova Science Publishers, New York (2005).
- [4] A. CORDERO, J. R. TORREGROSA, *Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas*, Applied Mathematics and Computation **190** (2007) 686–698.
- [5] J. M. DÍAZ MORENO, F. BENÍTEZ TRUJILLO, *Introducción a los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones*, Servicio de publicaciones Universidad de Cádiz.
- [6] J. A. EZQUERRO, M. A. HERNÁNDEZ, *A uniparametric Halley-type iteration with free second derivative*, Int. J. Pure Appl. Math. **6** (2003) 103–114.
- [7] J. A. EZQUERRO, M. A. HERNÁNDEZ, *On Halley-type iterations with free second derivative*, J. Comput. Appl. Math. **170** (2004) 455–459.
- [8] M. GARCÍA OLIVO, *El método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales*, Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja (2013).
- [9] P. JARRATT, *Some efficient fourth order multipoint methods for solving equations*, BIT **9** (1969) 119–124.
- [10] M. KANSAL, V. KANWAR, S. BHATIA, *On some optimal multiple root-finding methods and their dynamics*, Appl. Appl. Math. **Vol. 10, Issue 1** (2015) 349–367.

- [11] H. T. KUNG, J. F. TRAUB, *Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration*, J. Assoc. Comput. Math. **21** (4) (1974) 634–651.
- [12] S. LI, H. LI, L. CHENG, *Some second-derivative-free variants of Halley’s method for multiple roots*, Applied Mathematics and Computation **215** (2009) 2192–2198.
- [13] A. MELMAN, *Geometry and convergence of Euler’s and Halley’s methods*, IAM **39** 4 (1997) 728–735.
- [14] M. PETKOVIC, B. NETA, L. PETKOVIC, J. DZUNIC, *Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations*, Academic Press, Elsevier (2013).
- [15] A. RALSTON, P. RABINOWITZ, *A first course in numerical analysis*, Dover Publication, New York (2001).
- [16] G. S. SALEHOV, *On the convergence of the process of tangent hyperbolas*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **82** (1952) 525–528.
- [17] T. R. SCAVO, J. B. THOO, *On the Geometry of Halley’s Method*, The American Mathematical Monthly (May 5, 1994).
- [18] E. SCHRÖDER:, *Über unendlich viele algorithmen zur auflösung del gleichungen*, Math. Annal. **2** (1870) 317–365.
- [19] J.R. SHARMA, R. SHARMA, *Modified Jarratt method for computing multiple roots*, Appl. Math. Comput. (2010).
- [20] J. F. TRAUB, *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1964).