

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

# Bases para la realización de un dispositivo de irradiación de células mediante haces de rayos X generados por aceleración láser



Guillermo Hernández

Memoria presentada para la obtención del título de Doctor

Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas

Julio de 2018

Copyright © 2018 Guillermo Hernández. Todos los derechos reservados.

Esta tesis, con 84 figuras y 24 tablas, se ha realizado en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X usando una modificación personal de la clase tufte-book. Las figuras se han generado, con alguna excepción, mediante la biblioteca Matplotlib y el formato VFD.

Impreso en Salamanca, en julio de 2018.



**D. FRANCISCO FERNÁNDEZ GONZÁLEZ**, Catedrático del Área de Física Atómica, Molecular y Nuclear del Departamento de Física Fundamental

AUTORIZA la presentación de la tesis doctoral titulada *Bases para la realización de un dispositivo de irradiación de células mediante haces de rayos X generados por aceleración láser*, realizada bajo su dirección por D. Guillermo Hernández González.

Salamanca, julio de 2018

F. Fernández



How have I labored?  
How have I not labored  
To bring her soul to birth,  
To give these elements a name and a centre!

She is beautiful as the sunlight, and as fluid.  
She has no name, and no place.  
How have I labored to bring her soul into separation;  
To give her a name and her being!

Surely you are bound and entwined,  
You are mingled with the elements unborn;  
I have loved a stream and a shadow.

I beseech you enter your life.  
I beseech you learn to say "I"  
When I question you:  
For you are no part, but a whole;  
No portion, but a being.

Ezra Pound – «Ortus»



# Agradecimientos

A mi director de tesis, el Dr. Francisco Fernández, le tengo que agradecer muchas cosas. Esta investigación difícilmente podría haberse realizado sin su dedicación, su conocimiento y su paciencia. Mi gratitud se extiende más allá del ámbito puramente científico: si hay una persona con la que puede se puede contar para todo es él, desde enrackar servidores hasta discutir sobre funciones especiales y sobre gramática; siempre se ha puesto en marcha antes de que se lo pidiera y me ha sorprendido frecuentemente con una aguda mirada que llega hasta lo más hondo de las cosas y revela su esencia. Al hacer balance de lo que han supuesto los estudios de doctorado en mi vida me siento satisfecho de haber seguido esta vía, y estoy convencido de que haber hecho este recorrido a su lado ha sido fundamental para ello. Muchas gracias por estos años.

Me gustaría hacer constar también mi especial agradecimiento a la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León y al Fondo Social Europeo, por medio de cuyas *Ayudas para financiar la contratación predoctoral de personal investigador* me ha sido posible realizar esta investigación.

La parte experimental de este trabajo no hubiera sido posible sin la colaboración del L2A2 de la Universidad de Santiago de Compostela, especialmente a través de las figuras de J. Benlliure, C. Ruiz y L. Martín. O meu máis sincero agradecemento a todos eles polo seu traballo.

Al Grupo de Física Nuclear de la Universidad de Salamanca tengo que agradecerle el acceso a los recursos de computación del clúster Puccini, que han sido fundamentales para realizar muchos de los cálculos que aquí aparecen.

El apoyo en los trabajos precursores de C. Fonseca ha sido también determinante, le agradezco además a ella la ayuda que en alguna ocasión me ha prestado. También he tenido presente en la realización de este trabajo mi experiencia en los primeros años en el CLPU, a cuyo personal de entonces agradezco la ayuda recibida, especialmente a J. M. Álvarez, con quien compartí numerosas fatigas. Me gustaría agradecer también nuestras discusiones a mis compañeros de batalla científica, M. Sáez Beltrán y J. Hernández Bernal, que han tenido algún efecto positivo en la investigación.

He encontrado también un gran apoyo estos años en el PAS de la Universidad, que siempre me ha brindado ayuda cuando la he necesitado. Mi agradecimiento especial a conserjes de la facultad de Ciencias, de quienes siempre he recibido el mejor trato, y a los administrativos de la Escuela de Doctorado y de la Agencia de Investigación.

Quiero agradecer a las comunidades de desarrollo de FLUKA y OSIRIS las licencias de uso para ambos programas. A la Universidad de Salamanca tengo que agradecerle las licencias de Mathematica y Adobe Acrobat Pro, que han sido útiles para el trabajo. También han sido importantes los programas para estudiantes ofrecidos por GitHub, Travis CI, Dropbox y Overleaf, todos ellos han sido de gran ayuda para mí. Existen también numerosas herramientas ofrecidas por varios organismos o comunidades de forma gratuita, les estoy agradecido a las personas detrás de PyCharm, JabRef, Meld, Rocks, LaTeX, StackExchange, Google Scholar, WordReference y la Fundéu BBVA, por haber hecho esta tesis un poquito mejor.

Finalmente, la realización de un trabajo académico exhaustivo como una tesis doctoral es un devorador de tiempo, tiempo que he tenido que quitar de la vida más allá de la académica. Mis disculpas y agradecimiento a quienes lo han tenido que soportar las veces que ha llegado a ser alienación. *Mañana no será lo que Dios quiera.*



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>XVII</b>	
<b>Publicaciones</b>	<b>XIX</b>	
<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Marco teórico de la interacción láser-plasma</b>	<b>9</b>
2.1	Fotoionización por láser	9
2.2	Interacción láser-plasma	11
2.2.1	Absorción colisional	14
2.2.2	Absorción resonante	15
2.2.3	Calentamiento en vacío	18
2.2.4	Calentamiento $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$	19
2.2.5	Resumen: leyes de escala	20
<b>3</b>	<b>Estudio formal del sistema</b>	<b>23</b>
3.1	Aceleración láser de electrones en medios sobredensos	23
3.1.1	Simulación numérica de plasmas con códigos PiC	23
3.1.2	Simulación PiC	25
3.1.2.1	Visualización del mecanismo	28
3.1.2.2	Descripción de las distribuciones	31
3.1.2.3	Análisis de parámetros	34
3.1.2.3.1	Número de partículas	35
3.1.2.3.2	Intensidad del láser	36
3.1.2.3.3	Anchura de la envolvente del láser	37
3.1.2.3.4	Longitud de escala del plasma	37
3.1.2.3.5	Temperatura inicial	38
3.1.2.3.6	Electrones ionizados por átomo	38
3.1.2.3.7	Simulación bidimensional	39

3.2	Emisión de rayos X por electrones procedentes de medios sobredensos .....	41
3.2.1	Componentes para la elaboración de modelos .....	47
3.2.1.1	Fluencia de electrones en un conversor .....	47
3.2.1.1.1	Descripción de componentes de la fluencia.....	49
3.2.1.1.1.1	Fracción de cruce.....	49
3.2.1.1.1.2	Distribución en energías .....	50
3.2.1.1.1.3	Distribución angular y régimen de difusión .....	50
3.2.1.1.2	Verificación de componentes de la fluencia.....	51
3.2.1.1.2.1	Fracción de cruce.....	52
3.2.1.1.2.2	Distribución en energías .....	53
3.2.1.1.2.3	Distribución angular y régimen de difusión .....	55
3.2.1.2	Secciones eficaces de producción .....	57
3.2.1.3	Propagación de las emisiones.....	59
3.2.1.4	Rayos característicos.....	63
3.2.2	Modelos.....	65
3.2.2.1	Modelo analítico de un blanco fino .....	65
3.2.2.2	Modelo numérico de un blanco fino .....	65
3.2.2.3	Modelo analítico de un blanco grueso en reflexión .....	66
3.2.2.4	Modelo numérico de un blanco grueso en reflexión.....	66
3.2.2.5	Modelización de un blanco de espesor finito en transmisión.....	67
3.2.3	Comparación de los modelos.....	67
3.2.4	Evaluación de la validez del modelo numérico de blanco grueso en reflexión .....	68
3.2.4.1	Simplificaciones del modelo .....	73
3.2.5	Análisis crítico de otros modelos en la literatura .....	74
3.2.5.1	Influencia de la ley de Thomson-Whiddington en los modelos.....	74
3.2.5.2	El régimen de difusión en la descomposición de primer y múltiple cruce .....	77
3.3	Deposición de energía en un tejido .....	79
3.3.1	Modelo de atenuación exponencial.....	79
3.3.2	Modelo numérico de acumulación.....	82
3.3.2.1	Teoría de acumulación .....	82
3.3.2.2	Cálculo del factor de acumulación diferencial.....	86
3.3.2.3	Dosis en profundidad de tejido revisada .....	90
<b>4</b>	<b>Herramientas de diagnóstico</b> .....	<b>93</b>
4.1	Caracterización directa de la distribución de electrones.....	93
4.1.1	Formalismo teórico .....	95
4.1.2	Diseño de un detector .....	98
4.1.3	Aplicación experimental .....	99



4.2	Caracterización del espectro de fotones: efectos de apilamiento .....	100
4.2.1	Formalismo teórico .....	101
4.2.1.1	Relación de los momentos de la distribución apilada.....	104
4.2.2	Comprobación Montecarlo del modelo .....	107
4.2.3	Análisis de la influencia de un ruido superpuesto .....	108
4.2.4	Pérdida de resolución debida al apilamiento .....	110
4.2.5	Aplicación experimental.....	112
4.3	Caracterización de los electrones a partir de las emisiones de rayos X.....	114
4.3.1	Formalismo teórico del funcional temperatura efectiva .....	115
4.3.2	Aplicación a los modelos de rayos X.....	117
4.3.3	Caracterización de mezclas de temperaturas .....	121
4.3.4	Efecto del ruido sobre el funcional temperatura efectiva.....	122
4.3.5	Aplicación experimental.....	123
<b>5</b>	<b>Optimización del sistema</b> .....	<b>127</b>
5.1	Sistemas láser adecuados .....	127
5.2	Optimización del conversor .....	131
5.2.1	Longitud característica para una distribución de electrones .....	131
5.2.2	Descripción formal de un blanco óptimo.....	132
5.2.3	Descripción de las simulaciones Montecarlo .....	134
5.2.4	Resultados de optimización del conversor.....	134
5.2.5	Efecto del material de soporte.....	138
5.2.6	Resultados de la componente remanente de electrones .....	139
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b> .....	<b>141</b>
	<b>Apéndices</b> .....	<b>143</b>
A	Conceptos de teoría de probabilidad empleados en la memoria .....	143
B	Convenciones de la transformada de Fourier .....	146
C	Fichero OSIRIS de la simulación estándar.....	148
D	Software de código abierto producido .....	152
D.1	xpecgen.....	152
D.2	duat .....	152
D.3	VFD.....	153
D.4	Interfaces a datos de partículas.....	153
D.5	Cálculo de la temperatura efectiva.....	154
D.6	Cálculo de efectos de apilamiento.....	154
D.7	Lectura de espectrómetros Amptek <sup>®</sup> .....	154

Bibliografía	157
Notación matemática	169
Abreviaturas empleadas	171
Índice alfabético	173

# Índice de figuras

2.1. Esquema de un pulso láser realista .....	11
2.2. Descripción cualitativa de la absorción resonante .....	16
2.3. Leyes de escala .....	21
3.1. Esquema del método PiC .....	24
3.2. Modelo del plasma utilizado .....	27
3.3. Relación del prepulso con la temperatura inicial .....	27
3.4. Relación del potencial vector normalizado con la intensidad del sistema láser .....	28
3.5. Interacción de un pulso láser con un plasma abrupto sobredenso .....	29
3.6. Campo eléctrico transversal en la simulación PiC .....	30
3.7. Campo eléctrico longitudinal en la simulación PiC .....	30
3.8. Espacio de energía-tiempo del plasma .....	31
3.9. Distribuciones de energía del plasma .....	31
3.10. Evolución de las temperaturas en la simulación estándar .....	32
3.11. Ajuste a una bimaxwelliana de resultados de simulación PiC .....	34
3.12. Parámetros del ajuste en función del número de partículas por celda .....	35
3.13. Tiempo de computación en función del número de partículas por celda .....	35
3.14. Simulación con pocas macropartículas .....	36
3.15. Parámetros del ajuste en función de la intensidad del láser .....	36
3.16. Parámetros del ajuste en función de la anchura del pulso láser .....	37
3.17. Parámetros del ajuste en función de la longitud de escala del preplasma .....	38
3.18. Parámetros del ajuste en función de la temperatura inicial .....	38
3.19. Parámetros del ajuste en función de la cantidad de electrones ionizados por átomo .....	39
3.20. Evolución de las temperaturas en la simulación bidimensional .....	40
3.21. Geometría del modelo de rayos X con emisiones en «reflexión» .....	44
3.22. Modelo de la fracción de cruce y datos simulados .....	52
3.23. Distribuciones marginales de energía .....	54
3.24. Función de distribución conjunta de ángulos de cruce y energías .....	55
3.25. Distribuciones marginales del ángulo de cruce .....	55
3.26. Desviación media en las simulaciones .....	56
3.27. Promedio de la desviación media en las simulaciones .....	57
3.28. Sección eficaz escalada .....	58
3.29. Secciones eficaces en la propagación de fotones .....	61
3.30. Variante de geometría en transmisión del modelo de rayos X .....	62
3.31. Modelo de picos característicos del tungsteno .....	65
3.32. Representación comparativa de los modelos de rayos X .....	68
3.33. Espectros calculados en las condiciones de Bhat <i>et al.</i> .....	70
3.34. Comparación con los espectros de TASMICS .....	72

3.35. Espectros en función de la profundidad máxima considerada .....	73
3.36. Rango de validez de la ley de Thomson-Whiddington .....	75
3.37. Coeficiente de determinación en el ajuste a TW en función de la profundidad máxima .....	75
3.38. Relación entre los alcances de CSDA y TW .....	76
3.39. Efecto del ajuste de TW sobre un modelo de la fracción de primer cruce .....	77
3.40. Descomposición en primer y múltiple cruce de la desviación media promedio .....	78
3.41. Coeficientes característicos de un modelo de tejido .....	80
3.42. Caída de la dosis en profundidad en un tejido en el modelo exponencial .....	81
3.43. Curvas de dosis del <i>bremsstrahlung</i> de una maxwelliana en el modelo exponencial .....	81
3.44. Geometría puntal del factor de acumulación .....	87
3.45. Geometría extendida del factor de acumulación .....	88
3.46. Fluencia diferencial planar de fotones en tejido .....	89
3.47. Factores de acumulación en tejido .....	89
3.48. Curvas de dosis corregidas .....	90
3.49. Caída de la dosis en profundidad en un tejido en el modelo numérico .....	90
3.50. Curvas de dosis del <i>bremsstrahlung</i> de una maxwelliana en el modelo numérico .....	91
4.1. Deflexión de un haz monoenergético de electrones en un campo magnético en aire .....	94
4.2. Curvas de dosis en aire por distribuciones de electrones .....	97
4.3. Esquema de un detector basado en cristales termoluminiscentes .....	98
4.4. Prototipo de un detector basado en cristales termoluminiscentes .....	99
4.5. Curvas experimentales de distancia-dosis en aire .....	100
4.6. Esquema del apilamiento de una distribución con parte continua y discreta .....	103
4.7. Apilamiento de una distribución uniforme .....	107
4.8. Apilamiento de una distribución maxwelliana .....	108
4.9. Efecto del ruido en el apilamiento de distribuciones .....	109
4.10. Apilado de una distribución uniforme .....	111
4.11. Estimación de la pérdida de resolución debida al apilamiento .....	111
4.12. Espectros experimentales con apilamiento y su desapilado .....	113
4.13. Valores del parámetro de Poisson en la aplicación experimental .....	113
4.14. Reconstrucción de un espectro experimental con picos de repetición .....	114
4.15. Temperatura efectiva en distribuciones Gamma .....	116
4.16. Temperatura efectiva en espectros procedentes de un blanco fino y electrones maxwellianos .....	118
4.17. Espectros simulados en un material de espesor intermedio .....	119
4.18. Temperatura efectiva en espectros simulados en un material de espesor intermedio .....	120
4.19. Temperatura efectiva en una distribución de fotones con origen bimaxwelliano .....	122
4.20. Efecto del ruido sobre la temperatura efectiva .....	123
4.21. Temperatura efectiva de un espectro experimental .....	124
5.1. Curvas de dosis según la intensidad del sistema láser .....	128
5.2. Dosis por intensidad de fotones .....	129
5.3. Tiempos de exposición necesarios .....	130
5.4. Valor de los funcionales obtenidos por simulación en función del espesor .....	135
5.5. Valor óptimo de los funcionales en función de la energía .....	136
5.6. Distribuciones de energía de electrones y fotones en un conversor .....	137
5.7. Variación de los funcionales de un conversor con la cantidad de sustrato .....	138
5.8. Remanente de electrones en función del espesor del conversor .....	139
D.1. Interfaz gráfica de <i>xpecgen</i> .....	152
D.2. Demostración del formato VFD .....	153

# Índice de tablas

2.1. Fenomenología de la fotoionización.....	11
3.1. Condiciones de simulación.....	25
3.2. Condiciones de simulación para OSIRIS.....	26
3.3. Parámetros en la simulación unidimensional «estándar».....	34
3.4. Ajustes del modelo de picos característicos.....	64
3.5. Diferencias en las condiciones de Bhat <i>et al.</i> en el sentido de $\angle_1$ .....	70
3.6. Espesores de semiatenuación de los espectros de <i>bremsstrahlung</i> .....	71
3.7. Diferencia con los espectros de TASMICS en el sentido de $\angle_1$ .....	73
3.8. Efectos de las aproximaciones propuestas al modelo de <i>bremsstrahlung</i> .....	74
3.9. Ajustes a la ley de Thomson-Whiddington.....	76
3.10. Diferencias con Bhat <i>et al.</i> para varios tratamientos de las componentes de cruce.....	78
3.11. Magnitudes dosimétricas comunes de un haz de fotones.....	83
4.1. Parámetros del detector basado en cristales termoluminiscentes.....	99
4.2. Momentos de una distribución apilada.....	106
4.3. Momentos de una distribución desapilada.....	106
4.4. Características del láser en el experimento de apilamiento.....	112
5.1. Intensidades adecuadas para aplicación RIO.....	128
5.2. Posibles funcionales a considerar en la noción de blanco óptimo.....	133
5.3. Pendiente del ajuste entre la longitud característica y la profundidad óptima.....	136
5.4. Variaciones en el ajuste del espesor óptimo para diferentes hipótesis sobre la fuente.....	137
B.1. Algunas convenciones para la transformada de Fourier.....	146
B.2. Algunas propiedades de la transformada de Fourier.....	147



# Resumen

El presente trabajo tiene por objeto sentar las bases teóricas para el diseño de dispositivos de irradiación de células mediante haces de rayos X generados por láser con energías características aproximadamente en el rango 20–50 keV, así como el desarrollo de métodos de medición y caracterización de las radiaciones implicadas, en atención a sus singulares características temporales.

Entre los hallazgos en la descripción del sistema destacan un análisis del efecto de los parámetros del conjunto láser-blanco sobre la temperatura de los electrones acelerados, un modelo de producción de rayos X por distribuciones de electrones que mejora varios aspectos de los preexistentes en el campo y un estudio espacial de la deposición de dosis en tejido que estas fuentes pueden generar, mostrando que este aspecto es similar al de las fuentes convencionales.

Los métodos de detección especializados aportados son un refinamiento de un detector basado en la curva de distancia-dosis de los electrones en el aire, un modelo del apilamiento en detectores de estado sólido que ha permitido demostrar la presencia de éste en resultados experimentales sin picos de repetición y un estudio formal de los mal llamados parámetros de temperatura en las distribuciones de rayos X, revelando que las supuestas evidencias de una mezcla de temperaturas de electrones en el espectro de emisión resultante son potencialmente engañosas.





# Publicaciones

Se recogen a continuación las publicaciones relacionadas con la tesis, indicando la correspondencia con los apartados de la presente memoria.

- G. Hernández y F. Fernández. «A model of tungsten anode x-ray spectra». *Medical Physics* **43**, 8 (2016), págs. 4655-4664. DOI: [10.1118/1.4955120](https://doi.org/10.1118/1.4955120). Modelo de blanco grueso en «reflexión» de electrones, sus contenidos aparecen a lo largo de §3.2.
- G. Hernández y F. Fernández. «xpecgen: A program to calculate x-ray spectra generated in tungsten anodes». *The Journal of Open Source Software* **2016** (2016). DOI: [10.21105/joss.00062](https://doi.org/10.21105/joss.00062). Implementación *software* del modelo anterior, cf. §D.1.
- G. Hernández y F. Fernández. «Diagnostic of electron temperature from bremsstrahlung in overdense targets». *Applied Physics B* **124**, 7 (15 de jun. de 2018), pág. 135. DOI: [10.1007/s00340-018-6999-5](https://doi.org/10.1007/s00340-018-6999-5). Relación de los parámetros de «temperatura» de fotones y electrones, se corresponde con §4.3.
- G. Hernández y F. Fernández. «Pile-up corrections in laser-driven pulsed X-ray sources». *Applied Physics B* **124**, 6 (29 de mayo de 2018), pág. 119. DOI: [10.1007/s00340-018-6982-1](https://doi.org/10.1007/s00340-018-6982-1). Modelo de apilamiento en un detector, se corresponde con §4.2.

Adicionalmente se han producido las siguientes comunicaciones en congresos relacionadas con la tesis:

- G. Hernández y F. Fernández. *A model of x-ray tungsten sources*. Comunicación oral en la XXXV Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física. 2016. URL: <https://indico.ific.uv.es/event/2687/contributions/3436/>.
- G. Hernández y F. Fernández. *Characterization of electron fluence in tungsten x-ray converters*. Comunicación oral en la XXXV Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física. 2015.
- G. Hernández y F. Fernández. *Simulation of bremsstrahlung spectra in general targets and its application to a model of a laser-driven irradiation source*. Comunicación oral en el 3rd Fluka Advanced Course and Workshop, LNF, Italia. 2014. URL: <https://indico.cern.ch/event/334606/contributions/779778/>.



# Capítulo 1

## Introducción

*Trying to plan for the future without a sense of history is like trying to plant cut flowers*  
Daniel J. Boorstin

En este capítulo presentaremos el contexto científico en que se desarrolla esta investigación, los objetivos que en ella se han perseguido y la estructura de la presente memoria.

En los últimos años la generación de haces de partículas cargadas o de rayos X mediante la interacción de láseres ultraintensos y de pulsos ultracortos con la materia ha experimentado un rápido progreso que hace pensar que ciertas aplicaciones médicas pueden ser factibles en un tiempo razonable. Aunque los principios físicos son los mismos que los de las fuentes convencionales —irradiación con electrones o con rayos X—, la diferente estructura temporal y energética de los pulsos de radiación generados por estos láseres puede dar lugar a propiedades radiobiológicas diferentes, que deben ser estudiadas. Por otra parte, el pequeño tamaño de la zona donde se produce la radiación hace que las características de estos futuros dispositivos sean más favorables desde el punto de vista de la protección radiológica.

La utilización médica de los haces generados por aceleración láser exige una serie de características de estabilidad y repetibilidad, para lo que es preciso un cuidadoso estudio de todas las integrantes del dispositivo.

El objetivo del presente trabajo es establecer las bases necesarias para futuros experimentos de irradiación de células con haces generados por láseres pulsados ultracortos, como paso previo a su aplicación radioterapéutica. En concreto estudiaremos las características de los haces de rayos X en el rango de energías adecuados para su aplicación en radioterapia intraoperatoria, que presentaremos posteriormente.

La historia de los rayos X comienza con las experiencias realizadas por W. Röntgen el 8 de noviembre de 1895<sup>1</sup>, que descubre que de los tubos de vacío emerge una radiación, diferente de las entonces conocidas, capaz de atravesar una cartulina opaca y excitar la fluorescencia de una pantalla con platino-cianuro de bario<sup>2</sup>. La capacidad de esta radiación

<sup>1</sup> Cf. Ref. [57]: R. I. Frankel. «Centennial of Röntgen's discovery of x-rays.» *Western journal of medicine* **164**, 6 (1996), pág. 497. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1303625/>.

<sup>2</sup> Cf. Ref. [133]: W. C. Röntgen. «On a New Kind of Rays». *Nature* **53** (1896), págs. 274-276. DOI: [10.1038/053274b0](https://doi.org/10.1038/053274b0).

de atravesar algunos materiales, entre ellos los tejidos blandos del cuerpo —pero no los duros—, hizo que inmediatamente se percibiera la posibilidad de obtener imágenes de uso médico que ofrecía. Pocos meses tras su anuncio público, realizado el 6 de enero de 1896, aparecieron las primeras aplicaciones médicas que los utilizaban para obtener imágenes de los huesos, permitiendo su exploración sin causar dolencias a los pacientes: había nacido la radiografía<sup>3</sup>.

Otras aplicaciones no tardaron en sucederse. Aunque no hay acuerdo unánime sobre la paternidad de las aplicaciones terapéuticas con rayos X<sup>4</sup>, uno de los trabajos pioneros es el iniciado por E. Grubbe<sup>5</sup>, fabricante de tubos de Crooke, que, tras sufrir radiodermatitis en las manos por manipular éstos, tuvo la idea que podían aplicarse para tratar enfermedades atacando tejidos como los que aparecen en casos de cáncer, úlceras o lupus. La primera aplicación clínica la realizaría, según algunas fuentes, el 29 de enero de 1896, en un caso de cáncer de mama<sup>6</sup>. Este sería el comienzo de la radioterapia.

Gracias a que Röntgen, partidario de que su descubrimiento debía redundar en beneficio directo de la sociedad, se negó a patentar o vender de cualquier forma su descubrimiento —pese a las millonarias propuestas que recibió<sup>7</sup>— los equipos resultaban asequibles y las técnicas médicas con rayos X se extendieron rápidamente. El alcance de la medicina del siglo XX sería probablemente muy diferente si la postura de Röntgen hubiera sido otra.

Existen, además, numerosas aplicaciones de los rayos X fuera del ámbito médico. En el ámbito industrial podemos mencionar la inspección de equipajes, la irradiación de alimentos, la esterilización de equipamiento médico y la inspección de estructuras (*e.g.* en construcción o automóviles). En el ámbito científico cabe también destacar la cristalografía de rayos X, la espectroscopía de rayos X y la astronomía de rayos X<sup>8</sup>.

Las fuentes convencionales de rayos X se basan en un tubo de vacío en el que se aceleran electrones desde una fuente (cátodo) hasta un blanco (ánodo) donde éstos se frenan, transformando parte de su energía cinética en rayos X. Para maximizar la producción de radiación es conveniente utilizar materiales de número atómico elevado, donde la probabilidad de emisión de radiación es mayor. Por otro lado, dado que la mayor parte de las pérdidas energéticas son colisionales (en torno al 99 %) y acaban disipándose en forma de calor, es importante que el material tenga un punto de fusión elevado. Habitualmente se emplea para esto aleaciones de molibdeno y tungsteno, tanto el campo médico como en el industrial<sup>9</sup>.

El principio actualmente empleado en su diseño es el del llamado tubo de Coolidge<sup>10</sup>, que data de 1913 y se basa en la emisión termiónica del cátodo, para lo que resulta también fundamental que éste pueda calentarse sin fundirse. Típicamente se emplea para ello un filamento delgado, para lo que es también importante que se produzca un vacío de calidad en el tubo ( $\sim 0.1$  mPa) para que no se oxide y para evitar la colisión de los electrones acelerados con las moléculas de aire en el tubo<sup>11</sup>.

<sup>3</sup> Cf. Ref. [57].

<sup>4</sup> Cf. Ref. [119]: C. G. Orton. «Uses of therapeutic x rays in medicine». *Health physics* **69**, 5 (1995), págs. 662-676. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/7558860>.

<sup>5</sup> Cf. Ref. [71]: E. H. Grubbe. «Priority in the therapeutic use of X-rays». *Radiology* **21**, 2 (1933), págs. 156-162. DOI: [doi.org/10.1148/21.2.156](https://doi.org/10.1148/21.2.156).

<sup>6</sup> Cf. Ref. [119].

<sup>7</sup> Cf. Ref. [22]: J. F. Brailsford. «Roentgen's Discovery of X rays». *The British Journal of Radiology* **19**, 227 (1946), págs. 453-461. DOI: [10.1259/0007-1285-19-227-453](https://doi.org/10.1259/0007-1285-19-227-453).

<sup>8</sup> Cf. pág. 612 *et seq.* en Ref. [126]: E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

<sup>9</sup> Cf. pág. 616 en Ref. [126].

<sup>10</sup> Cf. Ref. [32]: W. D. Coolidge. «Vacuum-tube». US1203495A. 9 de mayo de 1913. URL: <https://patents.google.com/patent/US1203495A/en>.

<sup>11</sup> El diseño precursor a éste es el de Crookes, que ya mencionamos antes. En este caso se utilizaba un vacío parcial (entre 5 y 100 mPa) y se aprovechaba la ionización del aire residual para obtener los electrones a acelerar. No tardaron en ser reemplazados por el diseño de Coolidge, mucho más estable.

La aceleración de electrones con láseres ha sido posible gracias a los desarrollos en el campo de los láseres de pulsos ultracortos, que surgieron de forma rápida y continuada a partir del final de la década de los 80, fundamentalmente gracias a la técnica de *Chirped Pulse Amplification* (CPA), originalmente desarrollada para la tecnología de radares<sup>12</sup> y aplicada por primera vez al campo de la óptica por Strickland y Mourou<sup>13</sup>. Esta técnica consiste en estirar temporalmente el pulso antes de amplificarlo, permitiendo distribuir la intensidad en el tiempo, de forma que en cada instante no se superen los umbrales que puedan dañar los dispositivos ópticos donde se produce la amplificación. Posteriormente el pulso se comprime nuevamente en vacío, logrando como resultado pulsos ultracortos muy energéticos. La clave técnica para la manipulación temporal del pulso está en la manipulación de las frecuencias componentes de éste mediante medios dispersivos, o sistemas que hagan variar el recorrido de éstas como redes de difracción o espejos dieléctricos de espesor variable (denominados *chirped mirrors*).

El disponer de una gran intensidad en un periodo muy corto de tiempo permite, entre otras cosas, crear un plasma localizado cuando se hace incidir el láser sobre un sólido o un gas, y acelerar los electrones de plasma<sup>14</sup>, obteniéndose fuentes compactas de electrones, rayos X procedentes de la emisión de *bremstrahlung* y rayos característicos o, en determinadas configuraciones, iones cargados. Durante la interacción del pulso láser con el plasma pueden obtenerse campos eléctricos del orden de<sup>15</sup> 100 GV/m que, por lo tanto, superan a los campos existentes en los aceleradores convencionales en varios órdenes de magnitud. A este hecho hay que añadir que la tecnología CPA permite construir sistemas de pequeño formato (*table-top lasers*), lo que facilita su instalación.

Desde los primeros días del desarrollo de esta tecnología se pensó en sus aplicaciones médicas, bien para imagen<sup>16</sup> o radioterapia. Aunque existen estudios sobre este campo, todavía queda mucho camino por hacer hasta que sistemas basados en estos procesos estén operativos en las clínicas.

Una de las técnicas en la que los sistemas basados en aceleración láser pueden ser competitivos es la llamada radioterapia intraoperatoria<sup>17</sup> (RIO). Esta técnica se puso en marcha por primera vez en 1964 por el equipo de Abe *et al.*<sup>18</sup>, y consiste en irradiar la zona tumoral tras la realización de una extirpación quirúrgica, reduciendo así el riesgo de reaparición del cáncer (recidiva). La exposición directa de la región tumoral permite depositar en ella una elevada dosis de radiación, minimizando así la exposición del tejido sano circundante.

Actualmente este método se emplea en el tratamiento de gran variedad de tipos de cáncer, estando entre los casos más tratados el de cabeza y cuello, el de mama, el colorrectal, los sarcomas de tejido blando (músculos, tendones, grasa, vasos linfáticos y sanguíneos, y nervios), el de útero, el de próstata, el de estómago, y el de páncreas<sup>19</sup>. La técnica de RIO no se emplea normalmente de forma única, sino que se combina con otros tratamientos como pueden ser la radioterapia con haces externos o la quimioterapia y, por supuesto, la extirpación quirúrgica precedente al tratamiento.

<sup>12</sup> Cf. Ref. [31]: C. E. Cook. «Pulse compression-key to more efficient radar transmission». *Proceedings of the IRE* **48**, 3 (1960), págs. 310-316. DOI: [10.1109/JRPROC.1960.287599](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1960.287599).

<sup>13</sup> Cf. Ref. [147]: D. Strickland y G. Mourou. «Compression of amplified chirped optical pulses». *Optics communications* **56**, 3 (1985), págs. 219-221. DOI: [10.1016/0030-4018\(85\)90120-8](https://doi.org/10.1016/0030-4018(85)90120-8).

<sup>14</sup> Cf. Ref. [148]: T. Tajima y J. Dawson. «Laser electron accelerator». *Physical Review Letters* **43**, 4 (1979), pág. 267. DOI: [10.1103/PhysRevLett.43.267](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.267).

<sup>15</sup> Cf. Ref. [45]: J. Faure *et al.* «A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams». *Nature* **431**, 7008 (2004), pág. 541. DOI: [10.1038/nature02963](https://doi.org/10.1038/nature02963).

<sup>16</sup> Cf. Ref. [93]: J. Keyriläinen *et al.* «Phase-contrast X-ray imaging of breast». en. *Acta Radiologica* **51**, 8 (2010), págs. 866-884. DOI: [10.3109/02841851.2010.504742](https://doi.org/10.3109/02841851.2010.504742).

<sup>17</sup> Cf. Ref. [34]: B. J. Debenham, K. S. Hu y L. B. Harrison. «Present status and future directions of intraoperative radiotherapy». *The Lancet Oncology* **14**, 11 (2013), e457-e464. DOI: [10.1016/S1470-2045\(13\)70270-5](https://doi.org/10.1016/S1470-2045(13)70270-5).

<sup>18</sup> Cf. Ref. [1]: M. Abe y M. Takahashi. «Intraoperative radiotherapy: the Japanese experience». *International Journal of Radiation Oncology • Biology • Physics* **7**, 7 (1981), págs. 863-868. DOI: [10.1016/0360-3016\(81\)90001-8](https://doi.org/10.1016/0360-3016(81)90001-8).

<sup>19</sup> Cf. Ref. [125]: A. Pilar *et al.* «Intraoperative radiotherapy: review of techniques and results». *ecancermedicalscience* **11** (2017). DOI: [10.3332/ecancer.2017.750](https://doi.org/10.3332/ecancer.2017.750).

Según las características de la radiación utilizada se pueden distinguir varios tipos de RIO, siendo los más comunes los siguientes:

- RIO con electrones, habitualmente con energía en la rango de los pocos MeV. Ésta es la forma inicial en que se desarrolló la RIO<sup>20</sup>, originalmente con instalaciones dedicadas a ello, con importantes problemas en lo que a esterilización y el transporte del paciente se refiere. En los años 90 volvió a experimentar un auge, debido al desarrollo de aceleradores lineales compactos y transportables<sup>21</sup>.
- Braquiterapia de alta intensidad, en que se emplean fuentes radiactivas que se coloca en varias posiciones prefijadas por un tiempo definido según el tratamiento clínico<sup>22</sup>. Tiene la ventaja de permitir depositar la dosis en una región espacialmente muy reducida (0.5–1 cm), aunque el tiempo de tratamiento es algo mayor (15–60 min)
- RIO con rayos X. Inicialmente se consideró el uso de radiaciones de ortovoltaje (200–500 kV), aunque con poco éxito debido a problemas como la elevada dosis en huesos o la falta de uniformidad del haz. En la actualidad el empleo de fuentes con menor energía (20–50 keV) han ganado en interés<sup>23</sup>, especialmente en el caso de tratamiento de regiones con geometría esférica, como es el caso del cáncer de mama.

El posible interés del desarrollo de dispositivos de RIO basados en haces generados por láseres no sólo radica en el tamaño de éstos, sino en la posible respuesta biológica a las características temporales de los pulsos generados, que se puede caracterizar mediante la relación de dosis que produzca un efecto biológico equivalente por parte de fuentes convencionales<sup>24</sup>.

La base biológica de los daños sobre el tejido por parte de las radiaciones ionizantes proviene de los cambios químicos inducidos en el ADN de las células, bien a través de mecanismos directos o indirectos (creación de iones que interactúen después con el ADN). Los principales tipos de daño incluyen la alteración de las bases nitrogenadas<sup>25</sup> que constituyen el ADN y las roturas de cadena —simples o dobles—<sup>26</sup>. Si el daño provocado a una célula no es letal, ésta iniciará un proceso de reparación, que podrá desembocar en una recuperación parcial o total de ésta. Dado que la radiación se concentra en paquetes de duración temporal muy reducida, inferiores a los de estos mecanismos de reparación, es posible que esto resulte en una eficacia biológica diferente, lo que motiva la importancia del estudio de estos efectos.

La forma habitual de medir el efecto biológico es mediante el estudio de las llamadas «curvas de supervivencia», que relacionan la fracción de células supervivientes  $S$  en un tejido irradiado con la cantidad de radiación recibida, medida mediante una magnitud extensiva denominada «dosis»  $D$ . El modelo usual para este tipo de curvas es el modelo exponencial<sup>27</sup>, que puede justificarse por la hipótesis de que la muerte celular obedece a un proceso de Poisson. La fracción superviviente vendría dada, por lo tanto, por

$$S(D) := e^{-\alpha D}, \quad (1.1)$$

<sup>20</sup> Cf. Ref. [1].

<sup>21</sup> Cf. Ref. [159]: U. Veronesi *et al.* «A preliminary report of intraoperative radiotherapy (IORT) in limited-stage breast cancers that are conservatively treated». *European journal of cancer* **37**, 17 (2001), págs. 2178–2183. DOI: [10.1016/S0959-8049\(01\)00285-4](https://doi.org/10.1016/S0959-8049(01)00285-4).

<sup>22</sup> Cf. Ref. [60]: E. E. Furhang *et al.* «HDR-IORT: physics and techniques». *Intraoperative Irradiation*. Springer, 2011, págs. 73–84. DOI: [10.1007/978-1-61779-015-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-61779-015-7_4).

<sup>23</sup> Cf. Refs. [35; 6]: M. Dinsmore *et al.* «A new miniature x-ray source for interstitial radiosurgery: Device description». *Medical physics* **23**, 1 (1996), págs. 45–52. DOI: [10.1118/1.597790](https://doi.org/10.1118/1.597790); J. Beatty *et al.* «A new miniature x-ray device for interstitial radiosurgery: Dosimetry». *Medical physics* **23**, 1 (1996), págs. 53–62. DOI: [10.1118/1.597791](https://doi.org/10.1118/1.597791).

<sup>24</sup> Esta cuestión se definirá formalmente más adelante. Cf. nota 165 en la pág. 79.

<sup>25</sup> Compuestos orgánicos cíclicos con varios átomos de nitrógeno, entre los que se incluyen adenina, guanina, timina y citosina.

<sup>26</sup> Cf. pág. 147 en Ref. [89]: ICRP. «Recommendations of the International Commission on Radiological Protection. ICRP Publication 103». *Annals of the ICRP* **37**, 2–4 (2007).

<sup>27</sup> Cf. pág. 69 *et seq.* en Ref. [112]: A. W. Maurice Tubiana Jean Dutreix. *Introduction to Radiobiology*. Taylor & Francis, 1990.

donde  $\alpha$  es el parámetro característico del proceso, que podemos asociar a la eficacia biológica. Esta magnitud se puede medir por múltiples métodos, como puede ser la evaluación de la formación de colonias en el caso de estudios *in vitro*<sup>28</sup>.

A pesar de que el modelo (1.1) sea un poco simplista, el hecho de que dependa de un único parámetro hace que habitualmente se considere en los estudios un único valor que caracteriza la curva  $S(D)$ , como puede ser la fracción superviviente a una dosis fija o, recíprocamente, la dosis a la que se encuentre una fracción superviviente fija. A la hora de comparar con los diferentes estudios es importante tener esto en cuenta, sobre cuando las curvas no se ajustan ya al modelo anterior, que es algo habitual para dosis elevadas.

Lo ideal a la hora de diseñar un procedimiento experimental es dar una descripción más completa de la curva. En la bibliografía es habitual<sup>29</sup> emplear un modelo lineal-cuadrático<sup>30</sup>

$$S(D) := e^{-\alpha D - \beta D^2}, \quad (1.2)$$

donde  $\alpha, \beta$  son los parámetros de ajuste; no obstante, existen algunos modelos alternativos que merecería la pena considerar<sup>31</sup>.

En la literatura pueden encontrarse unos pocos estudios sobre la eficacia biológica de los rayos X generados por aceleración láser, con conclusiones contradictorias. Tillman *et al.*<sup>32</sup> encuentran poca diferencia respecto a las fuentes convencionales al emplear una fuente previamente filtrada (atenuada por 0.15 mm de cobre), pero sí un factor de diferencia del 0.67 para las dosis que conducen a supervivencia relativa del 37 %, indicando esto una menor dosis para lograr el mismo efecto en el caso de la radiación procedente del láser. Estos autores conjeturan que esto se deba a la componente de menores energías del espectro. Por otro lado, Shinohara *et al.*<sup>33</sup> encuentran, según el tipo de célula considerado, o bien un aumento de la dosis necesaria para una supervivencia relativa del 10 %, del orden de 1.25–1.48, o bien diferencias dentro del error experimental que no permiten concluir que haya diferencia. Un último estudio es el de Sato *et al.*<sup>34</sup>, que encuentran sólo variaciones en las tasas de supervivencia dentro de su error estadístico, y reconocen que las bajas tasas de dosis y sus fluctuaciones experimentales relacionadas con la falta de estabilidad de su dispositivo pueden influir en los resultados experimentales.

Con otras fuentes de partículas procedentes de aceleración láser la situación es similar. En el caso de los electrones, el trabajo de Andreassi *et al.*<sup>35</sup> apunta a que existe un factor relativo en el rango 1.2–1.3 respecto a las fuentes convencionales, mientras que otros trabajos<sup>36</sup> apuntan a que no hay diferencias significativas.

<sup>28</sup> Cf. Ref. [58]: N. A. Franken *et al.* «Clonogenic assay of cells in vitro». *Nature protocols* **1**, 5 (2006), pág. 2315. DOI: [10.1038/nprot.2006.339](https://doi.org/10.1038/nprot.2006.339).

<sup>29</sup> Será el caso en todos los estudios que citaremos sobre el campo en lo sucesivo.

<sup>30</sup> Cf. págs. 73–74 en Ref. [112]: A. W. Maurice Tubiana Jean Dutreix. *Introduction to Radiobiology*. Taylor & Francis, 1990.

<sup>31</sup> Cf. Ref. [146]: O. Sotolongo-Grau *et al.* «Tissue radiation response with maximum Tsallis entropy». *Physical review letters* **105**, 15 (2010), pág. 158105. DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.158105](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.158105).

<sup>32</sup> Cf. Ref. [151]: C. Tillman *et al.* «Survival of mammalian cells exposed to ultrahigh dose rates from a laser-produced plasma X-ray source». *Radiology* **213**, 3 (1999), págs. 860–865. DOI: [10.1148/radiology.213.3.r99dc13860](https://doi.org/10.1148/radiology.213.3.r99dc13860).

<sup>33</sup> Cf. Ref. [144]: K. Shinohara *et al.* «Effects of Single-pulse ( $\leq 1$  ps) X-rays from Laser-produced Plasmas on Mammalian Cells». *Journal of Radiation Research* **45**, 4 (2004), págs. 509–514. DOI: [10.1269/jrr.45.509](https://doi.org/10.1269/jrr.45.509).

<sup>34</sup> Cf. Ref. [137]: K. Sato *et al.* « $\gamma$ -H2AX and phosphorylated ATM focus formation in cancer cells after laser plasma X irradiation». *Radiation research* **174**, 4 (2010), págs. 436–445. DOI: [10.1667/RR2178.1](https://doi.org/10.1667/RR2178.1).

<sup>35</sup> Cf. Ref. [2]: M. G. Andreassi *et al.* «Radiobiological Effectiveness of Ultrashort Laser-Driven Electron Bunches: Micronucleus Frequency, Telomere Shortening and Cell Viability». *Radiation research* **186**, 3 (2016), págs. 245–253. DOI: [10.1667/RR14266.1](https://doi.org/10.1667/RR14266.1).

<sup>36</sup> Cf. Refs. [102; 117]: L. Laschinsky *et al.* «Radiobiological influence of megavoltage electron pulses of ultra-high pulse dose rate on normal tissue cells». *Radiation and environmental biophysics* **55**, 3 (2016), págs. 381–391. DOI: [10.1007/s00411-016-0652-7](https://doi.org/10.1007/s00411-016-0652-7); M. Oepelt *et al.* «Comparison study of in vivo dose response to laser-driven versus conventional electron beam». *Radiation and Environmental Biophysics* **54**, 2 (1 de mayo de 2015), págs. 155–166. DOI: [10.1007/s00411-014-0582-1](https://doi.org/10.1007/s00411-014-0582-1).



En vista de los resultados experimentales descritos anteriormente, está claro que el estudio de la aplicación de haces generados por láseres a la irradiación de tejidos biológicos es todavía una cuestión de gran interés científico, y es el propósito fundamental de este estudio sentar las bases teóricas del diseño de dispositivos de irradiación de células mediante haces de rayos X generados por láser con energías características en torno a los 20–50 keV, aunque la parte relevante de las colas de las distribuciones se extiende hasta los pocos cientos de keV. Nos restringiremos a blancos sobredensos —concepto que definiremos más adelante— y estudiaremos con detalle los procesos implicados en la irradiación de un tejido biológico, proporcionando en cada caso la mejor descripción posible de los mismos.

En líneas generales, los procesos físicos que aparecen hasta llegar al proceso de irradiación de un tejido por parte de una fuente de rayos X generada por aceleración láser son los siguientes:

1. El pulso láser ioniza el blanco formando un plasma que posteriormente se calienta por varios mecanismos, emitiendo así electrones acelerados.
2. Los electrones se frenan en el material circundante (o en un posible material conversor situado tras éste), emitiendo radiación en el proceso.
3. Los rayos X alcanzan el tejido que se quiere irradiar, depositando así la energía que conduciría finalmente a la muerte de parte del tejido.

Los objetivos que buscaremos conseguir sobre estos procesos serán:

- Describir mediante métodos numéricos las características energéticas de la emisión de electrones de un plasma sobredenso, identificando el efecto de los parámetros del láser en éstas.
- Elaborar un modelo que describa las emisiones de rayos X producidas por las distribuciones de electrones que puedan emerger de un plasma de las características antes descritas.
- Identificar las propiedades de deposición de energía que tendrán las distribuciones de rayos X obtenidas, identificando las posibles diferencias en la distribución espacial respecto a las fuentes convencionales.
- Diseñar sistemas para la caracterización experimental de las radiaciones emitidas en atención a las singulares características temporales de éstas, que dificultan o incluso imposibilitan el uso de algunos de los métodos convencionales.
- Proponer un rango de variación para los parámetros de los sistemas láser y los blancos que convenga emplear para una aplicación para la irradiación de tejido biológico.

A la hora de perseguir estos objetivos intentaremos seguir de forma general los siguientes principios:



- Los modelos deben ser tan independientes como sea posible. Por ejemplo, el estudio de cómo la distribución de electrones acelerados genera rayos X debe evitar hasta que sea necesario particularizar la distribución de los primeros. Con esto pretendemos conseguir que puedan ser probados independientemente y que se permita valorar el impacto que cada uno de ellos pueda tener sobre los enfoques alternativos existentes en la literatura.
- Los productos deben estar preparados para su transferencia a la comunidad científica. Si se construye un modelo, lo deseable es que haya un artefacto *software* asociado para facilitar su uso, como mínimo para uso interno. Si su difusión tiene potencial interés científico, será además conveniente facilitar su acceso en un repositorio público, bajo una licencia libre.

## Estructura de la tesis

Para poder entender físicamente el sistema de irradiación que pretendemos estudiar es necesario considerar individualmente cada etapa, sin perder de vista su ulterior encadenamiento. A este fin dedicaremos los capítulos sucesivos a:

- §2: Proporcionar una introducción a los conceptos de interacción láser plasma. Este capítulo es de carácter bibliográfico, en contraposición a los sucesivos, que recogen el trabajo desarrollado en la presente investigación.
- §3: Elaborar una descripción formal de los procesos anteriormente enumerados, con objeto de elaborar modelos que den conocimiento de la influencia de los parámetros físicos en los resultados y evite el cajanegrismo típico de los trabajos de simulación pura.
- §4: Diseñar métodos de caracterización experimental que sirvan para comprobar la adecuación de los modelos o para obtener otras descripciones de carácter experimental como alternativa a éstos.
- §5: Identificar los valores adecuados de los parámetros manipulables del sistema, hilándose finalmente así los resultados anteriores para describir las configuraciones potencialmente aplicables a la RIO.
- §6: Resumen de las conclusiones de la tesis y de las perspectivas de trabajo que surgen a partir de los desarrollos realizados.

El trabajo que así resulta es piramidal en cuanto a su extensión: hemos intentando construir una base lo más fuerte posible (capítulo 3), unas herramientas relativamente potentes que cuiden que la base se aplique correctamente (capítulo 4) y la cúspide encontramos un conjunto de directrices de diseño que emergen como corolario de lo anterior (capítulo 5).

Entre los apéndices incluidos merece la pena destacar §A, que ofrece un resumen sucinto de los conceptos de teoría de probabilidad que aparecen frecuentemente en el trabajo. Por otro lado, §B y §C están pensados para aclarar posibles dificultades prácticas que puedan surgir en un trabajo continuador de éste. Finalmente, §D recogen los productos *software* más relevantes derivados del trabajo.

La memoria concluye con unas tablas de notación matemática y abreviaturas, así como un índice de términos.

Este documento se ha redactado en un formato con abundantes notas al margen para buscar un compromiso entre proporcionar un estudio detallado y riguroso y minimizar las digresiones. De este modo el lector puede juzgar rápidamente si una aclaración o una explicación extendida es prescindible o relevante.

La versión digital del documento incluye enlaces externos a las publicaciones citadas siempre que esto sea posible, así como enlaces internos para facilitar la navegación por el documento. Los datos con los que se han realizado las gráficas están incrustados en el documento PDF, con la mayoría de visores modernos (*e.g.* Adobe Reader posteriores a 1999) se pueden descargar mediante un icono mostrado junto a las gráficas —el cual desaparecerá al imprimir el documento—. Estos archivos están en un formato propio que permite exportarlo a otros más usuales, *e.g.*, xlsx (Excel), utilizando la aplicación proporcionada para ello. *Cf.* §D.3.

## Convenciones generales

En los diferentes apartados de la memoria trataremos alguna parte de la cadena antes descrita: la interacción láser-plasma produce electrones, que a su vez producen rayos X, los cuales generan un efecto biológico en el tejido. Para facilitar su contextualización emplearemos la notación  $\ast \rightarrow e^- \rightarrow \gamma \rightarrow T$  al comienzo de los apartados en que sea pertinente, indicando con un recuadro en qué parte del proceso encaja el contenido.

Las leyes del electromagnetismo se describirán en Sistema Internacional (SI), aunque, en general, los resultados se darán escalados con las magnitudes características del sistema láser, como se detallará más adelante en §3.1.2.

Las magnitudes que se ajusten a alguna de noción de temperatura, bien sea en sentido termodinámico o como un parámetro de forma análogo a éstas, siempre se introducirán en unidades de energía, como es habitual en el campo. *I.e.*, si  $T$  es una temperatura absoluta y  $k_B$  la constante de Boltzmann, siempre se trabajará con una magnitud  $\theta := k_B T$  en lugar de la primera.

Las integrales en  $\mathbb{R}^n$  siguen la relación de orden usual, y las integrales en  $\mathbb{S}^n$  la orientación positiva (hacia el exterior en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).

## Capítulo 2

# Marco teórico de la interacción láser-plasma

*Witness this army of such mass and charge  
Led by a delicate and tender prince,  
Whose spirit with divine ambition puffed  
Makes mouths at the invisible event,  
Exposing what is mortal and unsure  
To all that fortune, death, and danger dare*  
William Shakespeare – *Hamlet* (IV, iv)

Antes de abordar el estudio de la interacción-plasma, necesitaremos introducir una serie de conceptos del campo para su posterior uso. El presente capítulo se destinará a este fin, con un carácter esencialmente bibliográfico. En primer lugar dedicaremos §2.1 a justificar la formación de plasmas en la interacción con láseres intensos. Posteriormente en §2.2 veremos qué tipo de plasmas esperamos que se formen en una realización material del sistema y cómo adquieren éstos energía.

En este proceso se definirán una serie de magnitudes que se utilizarán posteriormente en §3.1 para estudiar numéricamente el sistema.

### 2.1 Fotoionización por láser

El proceso de fotoionización consiste, de forma somera, en la liberación de un electrón de un orbital atómico por absorción de la energía procedente de un fotón; aunque, como veremos, en realidad pueden tomar parte varios fotones<sup>1</sup>. La primera explicación de este fenómeno procede de la descripción de Einstein del efecto fotoeléctrico<sup>2</sup>, donde introduce el concepto de «cuanto de luz», que puede asociarse a la noción actual de fotón. Una consecuencia inmediata es que existe una frecuencia umbral para cada material<sup>3</sup> por debajo de la cual no se produce ionización bajo esta descripción.

En láseres de alta intensidad debemos empezar a considerar procesos más allá de los monofotónicos. Los procesos multifotónicos fueron sugeridos por primera vez por Göppert-Mayer<sup>4</sup>, bajo la consideración de que por debajo de la frecuencia umbral pueden absorberse  $N$  fotones para ionizar un electrón, siendo  $N$  el mínimo número tal que la suma de sus energías supera la de ionización. La explicación intuitiva reside en que, tras producirse la absorción de un fotón, el electrón queda en un estado virtual de corta vida, en el cual puede absorber otro, y así hasta los  $N$  necesarios para que el estado final sea real. La dificultad de este proceso es la probabilidad de que se produzca la absorción

<sup>1</sup> Aún más, varios electrones podrían tomar parte. Por ejemplo, podría considerarse el acoplamiento entre un fotón y el estado ligado de dos electrones.

<sup>2</sup> Cf. Ref. [39]: A. Einstein. «Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt». *Annalen der physik* **322**, 6 (1905), págs. 132-148. DOI: [10.1002/andp.19053220607](https://doi.org/10.1002/andp.19053220607).

<sup>3</sup> Orientativamente suele considerarse la longitud de onda de 10 nm (unos 12.4 eV de energía) para decidir si una radiación es ionizante o no. Realmente esta energía depende del material expuesto y, como veremos, no es muy acertada cuando tratamos con sistemas de láseres intensos.

<sup>4</sup> Cf. Ref. [67]: M. Göppert-Mayer. «Über elementarakte mit zwei quantensprüngen». *Annalen der Physik* **401**, 3 (1931), págs. 273-294. DOI: [10.1002/andp.19314010303](https://doi.org/10.1002/andp.19314010303).

de los sucesivos fotones durante la vida de los estados virtuales: si no llegan suficientes fotones por unidad de tiempo (*i. e.*, si el láser no es muy intenso) el electrón vuelve al estado fundamental y no se produce ionización alguna. Dentro de la aproximación de teoría de perturbaciones la probabilidad cambiará en proporción a  $I^N$ , siendo  $I$  la intensidad del láser. Para dar magnitudes de forma más práctica consideraremos la magnitud escalada

$$I_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} I(\lambda/\mu\text{m})^2, \quad (2.1)$$

que considera cómo los efectos cambian con la longitud del láser  $\lambda$ . Orientativamente, la ionización multifotónica se puede observar a intensidades<sup>5</sup>  $I_\lambda \gtrsim 10^{10} \text{ Wcm}^{-2}$ .

A intensidades superiores,  $I_\lambda \gtrsim 10^{12} \text{ Wcm}^{-2}$ , aparece otro efecto más: la llamada ionización sobre umbral<sup>6</sup>. Este efecto se corresponde con la absorción de un número de fotones superior al mínimo necesario  $N$ . La distribución de la energía de los electrones así emitidos presenta varios picos, el primero correspondiente a la absorción de los  $N$  fotones requeridos y otros sucesivos de amplitud decreciente asociados a la absorción de un mayor número de éstos.

Al aumentar nuevamente la intensidad,  $I_\lambda \gtrsim 10^{13} \text{ Wcm}^{-2}$ , la fenomenología experimenta un nuevo cambio y los procesos de absorción con más fotones que los del mínimo  $N$  pasan a ser más probables<sup>7</sup>. Podemos entender esto como que la energía que debe recibir el electrón ha de vencer no sólo a la energía de ligadura, sino también a la adquirida por efecto de la fuerza ponderomotriz del láser —la que procede de las variaciones espaciales del campo electromagnético<sup>8</sup>—, que tiende a expulsar a los electrones de las zonas de campo intenso, en proporción a la intensidad del láser. En la distribución en energías seguiríamos encontrando varios picos, pero los de menor número de fotones no serían los máximos. Esto es lo que se conoce como «cierre de canales».

Cuando las intensidades son más altas, orientativamente al ocurrir  $I_\lambda \gtrsim 10^{14} \text{ Wcm}^{-2}$ , aparece un nuevo tipo de ionización cuya descripción abandona el concepto de fotones absorbidos y retoma el campo eléctrico oscilante clásico. La barrera coulombiana que encuentra un electrón ligado cambia con la presencia del campo del láser (el cual oscila lentamente con el tiempo) y puede escapar por efecto túnel. De hecho, cuando  $I_\lambda \gtrsim 10^{15} \text{ Wcm}^{-2}$  la barrera desaparece, con lo que se puede hablar de «fotoionización por supresión de barrera». En términos energéticos, la distribución de los electrones será más ancha, no asociable fácilmente a absorciones discretas de fotones.

La Tabla 2.1 resume el comportamiento del proceso de ionización con láseres intensos. El estudio riguroso de la ionización en plasmas tiene tal complejidad que constituye por sí una rama de estudio aparte de la física de plasmas<sup>9</sup>. En este trabajo supondremos simplemente que trabajamos con láseres suficientemente intensos como para que a la llegada del pulso principal, el material ya se encuentre ionizado.

<sup>5</sup> Cf. Ref. [106]: G. Mainfray y G. Manus. «Multiphoton ionization of atoms». *Reports on progress in physics* **54**, 10 (1991), pág. 1333. DOI: [10.1088/0034-4885/54/10/002](https://doi.org/10.1088/0034-4885/54/10/002).

<sup>6</sup> Cf. Ref. [38]: J. Eberly y J. Javanainen. «Above-threshold ionisation». *European Journal of Physics* **9**, 4 (1988), pág. 265. DOI: [10.1088/0143-0807/9/4/004](https://doi.org/10.1088/0143-0807/9/4/004).

<sup>7</sup> Estamos fuera del régimen de la teoría de perturbaciones y el comportamiento ya no es proporcional a  $I^N$ .

<sup>8</sup> Cf. págs. 47–50 en Ref. [138]: G. Schmidt. *Physics of high temperature plasmas*. 2.<sup>a</sup> ed. Academic Press, 1979.

<sup>9</sup> Cf. Ref. [136]: D. Salzmann. *Atomic physics in hot plasmas*. International series of monographs on physics 97. Oxford University Press, 1998.

$I_\lambda$	Fenómeno que aparece (con intensidad creciente)
$10^{10} \text{ Wcm}^{-2}$	Aparición de procesos multifotónicos
$10^{12} \text{ Wcm}^{-2}$	Ionización sobre umbral
$10^{13} \text{ Wcm}^{-2}$	Cierre de canales
$10^{14} \text{ Wcm}^{-2}$	Ionización por efecto túnel
$10^{15} \text{ Wcm}^{-2}$	Ionización por supresión de barrera

Tabla 2.1: Fenomenología de la fotoionización.

La Fig. 2.1 muestra un esquema de la naturaleza de un pulso láser realista. Todo el pulso se asienta sobre un pedestal que se produce por la amplificación de la emisión espontánea, existiendo además réplicas del pulso principal que preceden a éste (prepulso) y que lo suceden (postpulso). La diferencia en intensidad del prepulso y el pulso principal es el denominado contraste, de varios órdenes de magnitud. En §3.1 estudiaremos la influencia de dicho parámetro, y analizaremos la repercusión que puedan tener los distintos grados de ionización del material considerado.

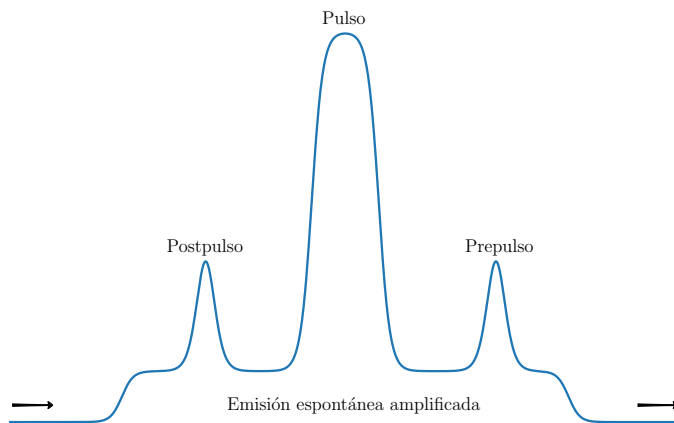


Figura 2.1: Esquema de un pulso láser realista que viaja hacia la derecha. El pulso se asienta sobre un pedestal debido a la amplificación de la emisión espontánea. El pulso se ve precedido de un prepulso (en la escala de decenas de fs) y sucedido de un postpulso. La diferencia de magnitud entre el pulso principal y estas repeticiones es el denominado contraste, de varios órdenes de magnitud.

## 2.2 Interacción láser-plasma

Como hemos visto en el apartado anterior, la interacción de un prepulso intenso producirá en el blanco un plasma con una cierta densidad de electrones  $n_e(\mathbf{r})$  (partículas por unidad de volumen) que variará en general con la coordenada espacial, además de evolucionar posteriormente con el tiempo. Esta densidad debe decaer de forma continuada, más o menos abrupta, hasta la superficie del plasma, tras la que no habrá ionización. Modelos típicos para ésta son curvas exponenciales o lineales. Daremos un ejemplo analítico completo más adelante en §3.1.2.

La densidad determina cómo interactuará el plasma con un láser que intente penetrar en él. Para una densidad de electrones  $n_e$  podemos definir la frecuencia de plasma, siguiendo el clásico modelo de Drude

para los metales<sup>10</sup>, como<sup>11</sup>

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}}, \quad (2.2)$$

donde  $e$  es la carga del electrón en valor absoluto,  $m_e$  es la masa del electrón y  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío<sup>12</sup>. Esta frecuencia se puede interpretar como aquella que es propia de las oscilaciones debidas a la componente de electrones del plasma<sup>13</sup>.

Según dicho modelo, el índice de refracción del medio vendría dado por

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad (2.3)$$

donde  $\omega$  sería la frecuencia angular de la radiación incidente.

Así pues, cuando  $\omega < \omega_p$  el índice sería imaginario, con lo que el medio sería opaco a la radiación; mientras que si  $\omega > \omega_p$  sería transparente<sup>14</sup>.

A la hora de estudiar cómo se comporta un pulso láser la magnitud que está fija es la frecuencia angular  $\omega$ , luego conviene invertir la relación (2.2) y considerar la densidad crítica

$$n_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon_0 m_e}{e^2} \omega^2, \quad (2.4)$$

de modo que un láser es capaz de penetrar en un plasma hasta que encuentra la densidad crítica. Orientativamente, un láser de  $\lambda = 800$  nm tiene una  $n_c \approx 1.74 \cdot 10^{21}$  cm<sup>-3</sup>.

Un medio en el que el plasma formado no llega a alcanzar la densidad crítica y en el que, por tanto, puede penetrar totalmente el pulso láser, se denomina subdenso (*underdense*); mientras que el caso contrario se denomina sobredenso (*overdense*).

Una magnitud con la que interesa contrastar ésta es la densidad obtenida por ionización completa de un cierto número de electrones por átomo  $z$ . En este caso, por consideraciones elementales,

$$n_0 = z \frac{N_A}{M} \rho, \quad (2.5)$$

donde  $N_A$  es el número de Avogadro,  $M$  la masa molar y  $\rho$  la densidad del material. Por ejemplo, en el caso de aluminio con tres electrones ionizados por átomo  $n_0 \approx 1.81 \cdot 10^{23}$  cm<sup>-3</sup>, lo que supone, en un sistema con  $\lambda = 800$  nm, que  $n_0 \approx 104 n_c$ .

En este trabajo consideraremos exclusivamente plasmas sobredensos, en los que, aunque el láser no pueda penetrar completamente, si podrá transmitir energía por varios mecanismos que justificaremos posteriormente.

Una manera útil de caracterizar la dependencia espacial de  $n_e(\mathbf{r})$  es mediante su variación (preferentemente en escala logarítmica, debido al tipo de perfiles resultantes) en la dirección de penetración del láser, que se denominará longitudinal. Sea  $x$  la coordenada espacial en dicha dirección. Ignorando la dependencia en las coordenadas transversales resulta natural definir la longitud de escala

$$L_x(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{d \log n(x)}{dx} \right)^{-1} = \frac{n(x)}{n'(x)}. \quad (2.6)$$

<sup>10</sup> Cf., e. g., capítulo 1 en Ref. [3]: N. W. Ashcroft y N. D. Mermin. *Solid state physics*. Harcourt College Publishing, 1976. DOI: 10.1119/1.11117.

<sup>11</sup> Recordemos que emplearemos el sistema internacional en esta descripción.

<sup>12</sup> Recordemos que estamos trabajando en SI.

<sup>13</sup> Podrían definirse frecuencias análogas a (2.2) para los iones, aunque son menos relevantes en general debido a la gran diferencia de masa, que los hace mucho menos móviles.

<sup>14</sup> En realidad el comportamiento en la transición es más complicado cuando tratamos con un plasma relativista. Si tenemos en cuenta el factor de Lorentz  $\gamma$  de un electrón del plasma, la frecuencia de plasma «efectiva» que aparecería en la relación de dispersión (2.3) sería  $\omega_p/\gamma$ . Por lo tanto, cuando  $\omega \in [\omega_p/\gamma, \omega_p]$  hablaríamos de un régimen de transparencia relativista. Cf. Ref. [72]: S. Guerin *et al.* «Propagation of ultraintense laser pulses through overdense plasma layers». *Physics of Plasmas* **3**, 7 (1996), págs. 2693-2701. DOI: 10.1063/1.871526.

En general esta magnitud podría ser una función de la coordenada  $x$ , pero en el caso de que el perfil sea exponencial será constante, que es el tratamiento habitual en la literatura.

Suponiendo que el prepulso haya producido un plasma de temperatura  $\theta$ , medida en unidades de energía<sup>15</sup>, que se expanda isotérmica durante un tiempo  $\tau$  hasta la llegada del pulso principal, la longitud característica vendrá dada por el producto de dicho tiempo con la velocidad del sonido de los iones<sup>16</sup>, *i. e.*,

$$L_\chi = \sqrt{\frac{z\theta}{m_i}} \tau, \quad (2.7)$$

donde  $m_i$  es la masa de los iones.

Otra longitud característica que debemos introducir es la profundidad superficial (*skin depth*). Definimos ésta como la longitud característica asociada a la frecuencia de plasma  $\omega_p$ , *i. e.*,

$$l_s(n_e) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{\omega_p(n_e)}. \quad (2.8)$$

Recordemos que, como  $\omega_p$  es función de la densidad del plasma, la profundidad superficial también lo será. En el caso de penetración de un láser en un medio sobredenso abrupto puede demostrarse que se produce una onda evanescente cuya penetración viene dada precisamente por (2.8)<sup>17</sup>.

Finalmente, existe otra medida de longitud importante, la llamada longitud de Debye, que se define como

$$\lambda_{\text{Debye}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\theta \epsilon_0}{e^2 n_e}}. \quad (2.9)$$

Esta magnitud se puede interpretar como la distancia a partir de la cual los efectos colectivos del plasma de electrones apantallan el campo de una carga discreta de éste, *i. e.*, es la distancia máxima en la que ocurren interacciones directas.

Para terminar esta sección, plantearemos una descripción formal general del sistema láser-plasma. Un modelo matemático completo vendría dado por el conjunto de las ecuaciones de Maxwell, que determinan el comportamiento de los campos en función de las cargas y corrientes, y por la fuerza de Lorentz, que determina cómo se alteran las cargas y corrientes por efecto de los campos.

Las primeras tomarían la forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde los símbolos tienen el significado usual.

Para las partículas, podemos considerar la densidad de la especie  $i$  en el espacio de fases,  $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , que indica la cantidad de partículas

<sup>15</sup> Por medio de la constante de Boltzmann, *i. e.*,  $\theta = k_B T$ , donde  $T$  es la temperatura absoluta.

<sup>16</sup> Cf. págs. 128, 129 en Ref. [65]: P. Gibbon. *Short Pulse Laser Interactions with Matter*. Imperial College Press, 2005. DOI: [10.1142/p116](https://doi.org/10.1142/p116).

<sup>17</sup> Cf. pág. 129 en Ref. [65]: P. Gibbon. *Short Pulse Laser Interactions with Matter*. Imperial College Press, 2005. DOI: [10.1142/p116](https://doi.org/10.1142/p116).

<sup>18</sup> Frecuentemente denominada también «ecuación de Vlasov», aunque la adecuación de esta designación es discutible. Cf. Ref. [76]: M. Hénon. «Vlasov equation?» *Astronomy and Astrophysics* **114** (1982), págs. 211-212. URL: <http://adsabs.harvard.edu/full/1982A%26A...114..211H>.

en un entorno diferencial de  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  a tiempo  $t$ . La evolución de esta densidad vendría dada por la ecuación de Boltzmann sin colisiones<sup>18</sup>

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i(\mathbf{p})\nabla f_i + q_i (\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_i(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \nabla_{\mathbf{p}} f_i = 0, \quad (2.11)$$

donde  $\nabla_{\mathbf{p}}$  es el gradiente en las coordenadas del momento y  $\mathbf{v}_i$  es la función que determina la velocidad en función del momento, *i. e.*,

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}/m_i}{\sqrt{1 + (p/m_i c)^2}} \xrightarrow{\text{n.r.}} \mathbf{p}/m_i. \quad (2.12)$$

De las densidades en el espacio de fases obtendríamos las cargas y corrientes como campos en el espacio mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_i q_i \iiint_{\mathbb{R}^3} f_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p} \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \sum_i q_i \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}_i f_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Al conjunto de (2.10), (2.11) y (2.13) se le denomina ecuaciones de Vlasov<sup>19</sup>, que describen completamente la evolución del sistema, a falta de las condiciones iniciales<sup>20</sup>, del tipo

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}; 0) &= f_i^0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{B}^0(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

El problema matemático así planteado es, en general, difícilmente tratable debido al acoplamiento de las expresiones, aunque posteriormente en §3.1.1 veremos un conjunto de estrategias que permiten el cálculo numérico en un sistema general láser-plasma, no necesariamente sobredenso.

No obstante, es posible justificar utilizando las ecuaciones de Vlasov la existencia de algunos mecanismos de transferencia de energía del láser a los plasmas sobredensos, aunque para ello habremos de recurrir indefectiblemente a simplificaciones notables. Veremos varios de estos mecanismos en los siguientes subapartados.

### 2.2.1 Absorción colisional

Habíamos evocado anteriormente el modelo de Drude para explicar que un láser no llega a penetrar en un medio sobredenso; sin embargo, en caso de que existiera una fuerza de fricción adicional —cuyas causas se analizarán en breve—, sí resultaría un índice de refracción [(2.3)] con una componente imaginaria no nula, que daría lugar a esta transferencia.

La causa física para dicha fuerza es la absorción colisional, también conocida como *bremstrahlung* inverso, que consiste en la absorción de un fotón de la radiación por parte de un electrón al colisionar éste con otra partícula, siendo esto último necesario por conservación del momento lineal. Es uno de los mecanismos más extensamente estudiados de absorción de energía que sirvió para explicar resultados experimentales de los primeros experimentos de aceleración láser<sup>21</sup>,

<sup>19</sup> Cf. Ref. [160]: A. A. Vlasov. «The vibrational properties of an electron gas». *Physics-Uspokhi* **10**, 6 (1968), págs. 721-733. DOI: [10.1070/PU1968v010n06ABEH003709](https://doi.org/10.1070/PU1968v010n06ABEH003709).

<sup>20</sup> En la práctica podría haber también condiciones de contorno, pero, en principio, el espacio de fases no está acotado.

<sup>21</sup> Cf., *e.g.*, Ref. [46]: R. Fedosejevs *et al.* «Absorption of femtosecond laser pulses in high-density plasma». *Phys. Rev. Lett.* **64** (11 mar. de 1990), págs. 1250-1253. DOI: [10.1103/PhysRevLett.64.1250](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1250).



con intensidades más moderadas, hasta en torno a  $10^{15}$  W/cm<sup>2</sup>. A intensidades mayores se dejó de encontrar el acuerdo entre los modelos teóricos basados en absorción colisional y los resultados experimentales.

Una de las causas principales para esto es que la frecuencia con que se producen las colisiones disminuye con la temperatura<sup>22</sup>, con lo que el mecanismo pierde eficiencia. Otro efecto adicional es que la velocidad de oscilación en el campo del láser se hace comparable a la velocidad térmica, lo que reduce aún más la transferencia de energía colisional<sup>23</sup>.

El hecho de que el comportamiento de los plasmas no se pueda explicar, en muchas circunstancias, mediante un modelo colisional, como ocurre con los gases, es una consecuencia de que éstos constituyan un estado de la materia diferente de aquellos. En palabras de Vlasov, «[...] for a system of charged particles the kinetic equation method which considers only binary interactions — interactions through collisions — is an approximation which is strictly speaking inadequate, so that in the theory of such systems an essential role must be played by the interaction forces, particularly at large distances and, hence, a system of charged particles is, in essence, not a gas but a distinctive system coupled by long-range forces»<sup>24,25</sup>.

### 2.2.2 Absorción resonante

Cuando una onda electromagnética incide con un cierto ángulo en el plasma, encontrando una densidad creciente  $n(\mathbf{x})$  se propagará en su dirección de incidencia hasta encontrar en un punto la densidad crítica. Llegado este punto no se propaga más y se refleja. No obstante, ésta es una visión algo simplista, pues la resolución de las ecuaciones de ondas procedentes de (2.10) conduce a la conocida fenomenología de la evanescencia, *i. e.*, a una caída exponencial del campo que penetra realmente en el medio<sup>26</sup>.

Si se estudia el comportamiento de una onda plana incidente distinguiendo entre polarización s<sup>27</sup> y polarización p<sup>28</sup> se encuentra<sup>29</sup> que para la última se produce una resonancia cuando  $n_e = n_c \cos^2 \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo de incidencia respecto la normal. En este caso se producen variaciones en la densidad de plasma que provocarán la aparición de ondas de plasma cuya energía será transmitida a una pequeña parte de los electrones, que constituirán una componente más energética.

La Fig. 2.2 esquematiza de forma cualitativa el comportamiento. En ella se muestran, de arriba abajo, el perfil de plasma preformado, la penetración espacial de la onda electromagnética en el medio y la variación de la densidad de plasma a consecuencia de ésta. La resonancia allí mostrada no aparecería en el caso de polarización s.

Para ilustrar analíticamente la aparición de este fenómeno emplearemos un modelo sencillo<sup>30</sup>. Consideremos un campo externo  $\mathbf{E}_d$  oscilando armónicamente a una frecuencia angular  $\omega$ , siendo las variaciones por el resto de su dependencia temporal, a la que denotaremos  $\tilde{\mathbf{E}}_d$ , despreciables en periodos de tiempo pequeños, *i. e.*,

$$\mathbf{E}_d = \Re \left( \tilde{\mathbf{E}}_d(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} \right). \quad (2.15)$$

Este campo se propaga en una dirección en la que encuentra una

<sup>22</sup> En líneas generales, se estudia como un proceso de dispersión Rutherford con el parámetro de impacto acotado entre el mínimo acercamiento y la longitud de Debye (por el apantallamiento del plasma). *Cf.* págs. 132–133 en Ref. [65]: P. Gibbon. *Short Pulse Laser Interactions with Matter*. Imperial College Press, 2005. DOI: [10.1142/p116](https://doi.org/10.1142/p116).

<sup>23</sup> *Cf.* pág. 154 en Ref. [65].

<sup>24</sup> [...] en el caso de los sistemas de partículas cargadas, el método cinético, que considera únicamente interacciones binarias —mediante de colisiones— es una aproximación que, estrictamente hablando, es inadecuada, pues en la teoría de dichos sistemas es fundamental el papel de las fuerzas de interacción, especialmente a largas distancias y, por tanto, un sistema de partículas cargadas es esencialmente distinto de un gas, siendo un sistema acoplado por fuerzas de largo alcance.

<sup>25</sup> En Ref. [160]: A. A. Vlasov. «The vibrational properties of an electron gas». *Physics-Uspexhi* **10**, 6 (1968), págs. 721–733. DOI: [10.1070/PU1968v010n06ABEH003709](https://doi.org/10.1070/PU1968v010n06ABEH003709).

<sup>26</sup> *Cf.* §1.5.4 en Ref. [21]: M. Born y E. Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 6.<sup>a</sup> ed. Pergamon Press, 1980.

<sup>27</sup> Campo eléctrico perpendicular (*senkrecht*) al plano formado por la dirección de incidencia y la normal de la interfaz (en este caso la superficie crítica).

<sup>28</sup> Campo eléctrico paralelo (*parallel*) al plano anterior.

<sup>29</sup> *Cf.* págs. 88–95 en Ref. [40]: S. Eliezer. *The interaction of high-power lasers with plasmas*. IOP Publishing, 2002.

<sup>30</sup> Adaptado del de pág. 65 *et seq.* en Ref. [105]: A. Macchi. *A Superintense Laser-Plasma Interaction Theory Primer*. Springer Science & Business Media, 2013. DOI: [10.1007/978-94-007-6125-4](https://doi.org/10.1007/978-94-007-6125-4).

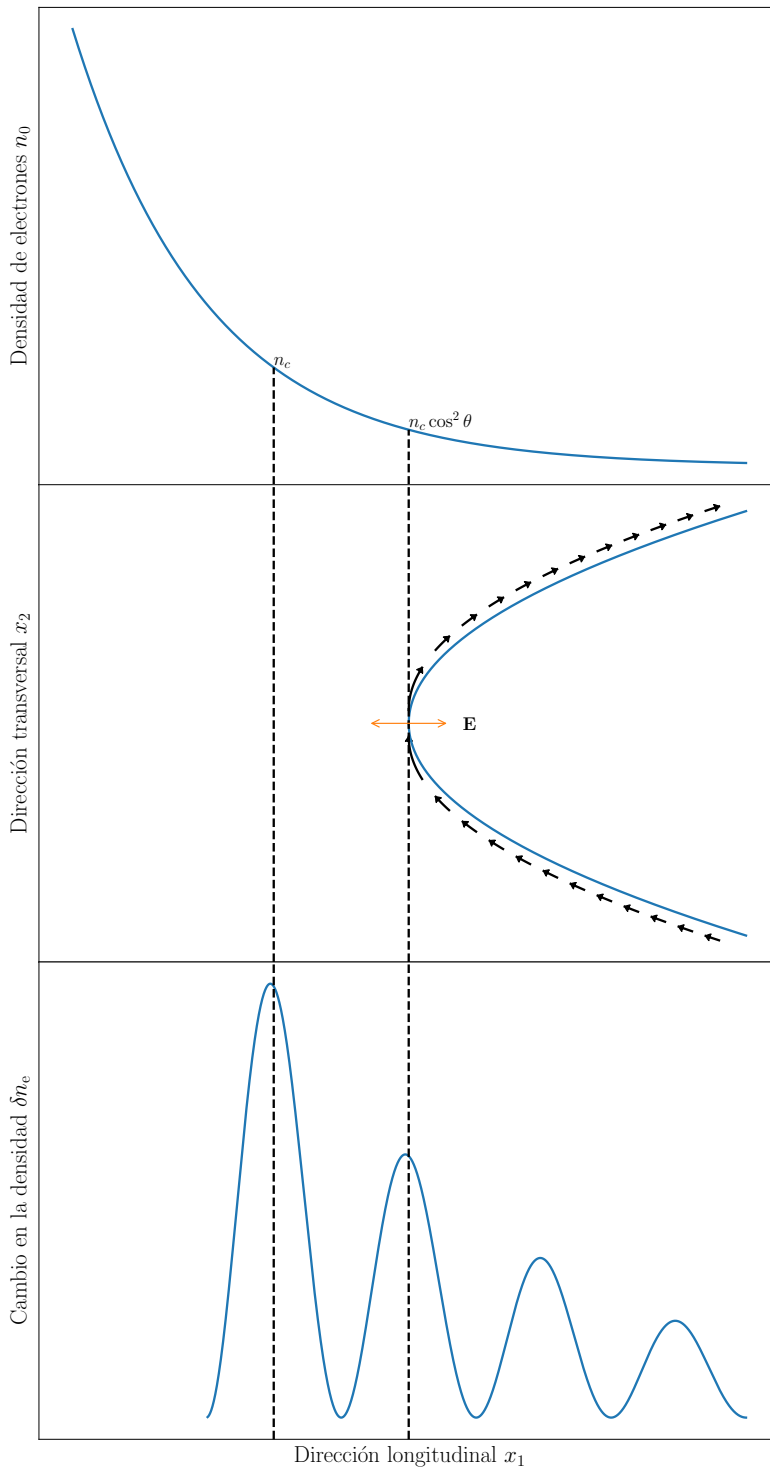


Figura 2.2: Descripción cualitativa de la absorción resonante. En la parte superior se muestra un perfil exponencial de plasma que alcanza la densidad crítica, en función de su coordenada longitudinal. En la parte intermedia se muestra la visión el plano de incidencia de un pulso que avanza hacia el perfil con un determinado ángulo  $\theta$ . El pulso consigue penetrar hasta una profundidad inferior a la crítica, con densidad en un factor  $\cos^2 \theta$  respecto a ésta, donde se refleja. En la parte inferior se muestra, de nuevo en función de la coordenada longitudinal, el cambio producido en la densidad, encontrándose un máximo resonante en la densidad crítica. Esta representación sólo se adecúa a los casos con polarización p como el representado, no encontrándose dicha resonancia en el caso de polarización s.

densidad de plasma  $n_0(\mathbf{r})$  en la que provocará un incremento  $\delta n_{e^-}$ , originando la variación a su vez un campo electrostático  $\mathbf{E}_e$ . El sistema está descrito por las ecuaciones de Poisson, continuidad y la segunda ley de Newton; respectivamente

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_e = \frac{-e\delta n_{e^-}}{\epsilon_0} \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial \delta n_{e^-}}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_{e^-} \mathbf{v}) \quad (2.16b)$$

$$m_{e^-} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e(\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_d). \quad (2.16c)$$

Suponiendo que la densidad  $n_{e^-} = n_0 + \delta n_{e^-}$  varía mucho más lentamente que la oscilación del electrón, con la frecuencia del láser  $\omega$ , podemos linealizar las dos últimas ecuaciones. Considerando las variaciones espaciales de  $\delta n_{e^-}$  y  $\mathbf{v}$  como nulas y empleando la regla de cambio de las derivadas,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (2.17)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n_{e^-}}{\partial t} &\approx -n_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla n_0 \\ m_{e^-} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &\approx -e(\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_d). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Si las magnitudes  $\delta n_{e^-}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{E}_e$  varían armónicamente con frecuencia  $\omega$ , de forma análoga a  $\mathbf{E}_d$  en (2.15), podemos calcular estas derivadas

$$i\omega \delta n_{e^-} \approx -n_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla n_0 \quad (2.19a)$$

$$i\omega m_{e^-} \mathbf{v} \approx -e(\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_d). \quad (2.19b)$$

Podemos ahora despejar  $\mathbf{v}$  de (2.19b) y sustituirla en (2.19a). Hecho esto, se sustituye el valor de  $\nabla \cdot \mathbf{E}_e$  dado por (2.16a) con lo que sólo resta operar y despejar para obtener

$$\delta n_{e^-} = \frac{e}{m_{e^-} \omega} \frac{\nabla n_0}{1 - \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_{e^-} \omega^2}}. \quad (2.20)$$

En (2.20) podemos identificar una resonancia cuando el denominador se anula, condición que es idéntica a  $\omega = \omega_p$  (cf. (2.2)), que se alcanza por definición en la región crítica; siempre que  $\nabla n_0 \cdot \mathbf{E}_d \neq 0$ , *i. e.*, que la componente en la dirección del gradiente de densidad no sea nula, lo que se traduce en que la incidencia sea oblicua y en polarización p.

Pese a que este modelo sencillo permite ver la existencia de la resonancia y la formación de la onda de plasma, es insuficiente para describir el calentamiento de los electrones. La causa de esta deficiencia es la hipótesis sobre la relativa constancia de la densidad respecto a la oscilación del electrón, que los láseres intensos superan.

### 2.2.3 Calentamiento en vacío

También conocido como *efecto Brunel* o como *absorción no tan resonante*<sup>31</sup>, este mecanismo aparece cuando el gradiente de densidad de electrones es demasiado abrupto como para que se produzca el anterior.

En caso de que los electrones recorran la distancia suficiente como para escapar de la zona crítica del plasma se ven expuestos al campo electromagnético que los acelera hasta que vuelven a penetrar en la región en que éste no puede hacerlo, de forma que si el proceso es más rápido que un ciclo del láser hay una cesión neta de energía a la partícula.

Podemos realizar un modelo unidimensional sencillo no relativista<sup>32</sup> mediante un perfil totalmente abrupto de electrones e iones

$$n_{e^-} \propto n_{\text{ion}} \propto \left\{ \begin{array}{ll} n_0 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}, \quad (2.21)$$

así como descomponiendo los campos en una parte electrostática, surgida de los cambios en el plasma, y la parte de la onda que avanza hacia el medio.

De dos de las ecuaciones de Maxwell para el caso electrostático unidimensional, despreciando la corriente debida al movimiento de los iones tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{e}{\epsilon_0} (zn_{\text{ion}} - n_{e^-}) \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{en_{e^-}v}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

además de la ley segunda ley de Newton

$$m_{e^-} \frac{dv}{dt} = -e(E_e + E_d), \quad (2.23)$$

donde los campos electrostático y externo son análogos a los del apartado anterior, omitiendo el carácter vectorial.

En lugar de estudiar lo que ocurre en cada punto del espacio —punto de vista euleriano, variables  $(x, t)$ — nos fijaremos en qué le ocurre a cada partícula —punto de vista lagrangiano, variables  $(\xi, \tau)$ —, de tal modo que un electrón originariamente en posición  $x_0$  se encuentra en un desplazamiento  $\xi(x_0, \tau)$  a un tiempo  $t = \tau$ . El cambio entre ambos sistemas viene dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \xi(x_0, \tau) \\ t = \tau \end{array} \right\}. \quad (2.24)$$

Aplicando la regla de la cadena y notando  $d_t \xi = v$  expresamos los operadores diferenciales como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_0} = \left(1 + \frac{\partial}{\partial x_0} \xi\right) \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{d}{dt} \end{array} \right\}. \quad (2.25)$$

<sup>31</sup> Cf. Refs. [24; 165]: F. Brunel. «Not-so-resonant, resonant absorption». *Phys. Rev. Lett.* **59** (1 jul. de 1987), págs. 52-55. DOI: [10.1103/PhysRevLett.59.52](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.52); S. Wilks y W. Kruer. «Absorption of ultrashort laser pulses by solid targets and overdense plasmas». *IEEE J. Quantum Electron.* **33** (1997), págs. 1954-1968. DOI: [10.1109/3.641310](https://doi.org/10.1109/3.641310).

<sup>32</sup> Adaptado del de pág. 68 *et seq.* de Ref. [105]: A. Macchi. *A Superintense Laser-Plasma Interaction Theory Primer*. Springer Science & Business Media, 2013. DOI: [10.1007/978-94-007-6125-4](https://doi.org/10.1007/978-94-007-6125-4).

Con vistas a obtener este último operador multiplicamos la ecuación de Poisson por  $v$  y le sumamos la segunda, utilizando el cambio de derivadas (2.17) y, nuevamente,  $d_t\xi = v$ . Tras este proceso hallamos

$$\frac{\partial E_e}{\partial \tau} = ez\epsilon_0^{-1}n_0 \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x_0 + \xi \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\} \frac{\partial E_e}{\partial \tau}. \quad (2.26)$$

Imponiendo continuidad, la solución de (2.26) viene dada por

$$E_e = \left\{ \begin{array}{ll} ez\epsilon_0^{-1}n_0\xi & \text{si } \xi + x_0 > 0 \\ -ez\epsilon_0^{-1}n_0x_0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}. \quad (2.27)$$

Conocido el valor del campo electrostático podemos calcular el movimiento de los electrones. De la segunda ley de Newton [(2.23)], usando otra vez más  $\frac{d\xi}{dt} = v$  tenemos inmediatamente la expresión

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = -\frac{e}{m_e} \left( \left\{ \begin{array}{ll} ez\epsilon_0^{-1}n_0\xi & \text{si } \xi + x_0 > 0 \\ -ez\epsilon_0^{-1}n_0x_0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\} + E_d \right). \quad (2.28)$$

Identificando la frecuencia de plasma  $\omega_p$  [(2.2)], podemos reescribir (2.28) para hacer más claro su significado, de lo que resulta

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = \left\{ \begin{array}{ll} -z\omega_p^2\xi - eE_d/m_e l & \text{si } \xi + x_0 > 0 \\ z\omega_p^2x_0 - eE_d/m_e l & \text{en otro caso} \end{array} \right\}. \quad (2.29)$$

Lo que muestra (2.29) es que, para el caso de un electrón que nunca atraviesa el cambio abrupto del perfil se cumple  $\xi + x_0 > 0$  y describe un movimiento armónico forzado de frecuencia  $\omega_p\sqrt{z}$ , que será resonante como en el caso anterior cuando la frecuencia de  $E_d$  sea aquella, en el caso  $z = 1$ ; por otro lado, si éste sí cruza la frontera de la discontinuidad aparece en su lugar una fuerza independiente de la posición  $z\omega_p^2x_0$  que produce la aceleración neta buscada, hasta que vuelva a penetrar en la región del plasma.

#### 2.2.4 Calentamiento $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$

El calentamiento  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ , también conocido como «absorción por fuerza magnética» o como «absorción por fuerza ponderomotriz»<sup>33</sup>, es un mecanismo que aparece a intensidades suficientemente grandes como para que la fuerza resultante de la componente magnética de la fuerza de Lorentz no sea despreciable, de forma los electrones son conducidos al interior del plasma por la componente magnética de la fuerza de Lorentz, produciéndose así la aceleración.

Este mecanismo empieza a ser importante a intensidades en torno a los

$$I_\lambda \gtrsim 10^{18} \text{ Wcm}^{-2}, \quad (2.30)$$

es más eficaz en incidencia normal y su eficacia depende de la polarización del sistema láser, estando su efecto reducido en el caso de polarización circular.

Podemos considerar nuevamente un modelo sencillo para justificar este efecto. Consideremos la descripción general de una onda plana incidente en la dirección  $x$ , dada en componentes por

$$\mathbf{E} = (0, E_y \cos(kx - \omega t), E_z \cos(kx - \omega t + \phi)), \quad (2.31)$$

<sup>33</sup> Algunos autores (*e.g.*, Refs. [75; 48]) emplean el término de «fuerza ponderomotriz» para la fuerza no lineal que aparece al considerar ondas realistas con una envolvente lenta, incluyendo las variaciones rápidas de ésta, justificando esta denominación; no obstante otros (*e.g.*, Ref. [40]) reservan este término para el promedio temporal de la definición anterior, que es lento y no oscilante. Por este motivo, el término puede generar ambigüedad.

de modo que el desfase  $\phi$  y la amplitud relativa  $E_y/E_z$  determinan el estado de polarización.

El campo magnético de la onda plana viene así dado por

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} = (0, -E_z \cos(kx - \omega t + \phi), E_y \cos(kx - \omega t + \phi)) . \quad (2.32)$$

Así pues, la componente de la fuerza que empuja al electrón en la dirección longitudinal cumplirá

$$F_x \propto \mathbf{E} \times \mathbf{B} , \quad (2.33)$$

de donde, operando un poco y empleando la relación trigonométrica para el cuadrado del coseno se obtiene

$$F_x \propto E_y^2 + E_z^2 + E_y^2 \cos(2kx - 2\omega t) + E_z^2 \cos(2kx - 2\omega t) . \quad (2.34)$$

Inspeccionando (2.34), en caso de que al haz tenga polarización circular, *i. e.*,  $\phi = \pi/2$  y  $E_y/E_z = 1$ , se anularán los términos en  $2\omega$ , de modo que el mecanismo será menos eficiente, como introdujimos antes.

### 2.2.5 Resumen: leyes de escala

Como hemos visto en los apartados anteriores, existen varios mecanismos por los que un láser puede transmitir energía a un plasma sobredenso, calentando éste. La dinámica completa es complicada debida al acoplamiento de las ecuaciones de Maxwell con las del movimiento de las partículas del plasma, como introducíamos anteriormente, por lo que hasta ahora ha sido necesario recurrir a fuertes simplificaciones para explicar éstos. En la práctica, la forma de proceder habitual consiste en caracterizar las distribuciones de electrones resultantes mediante un parámetro de temperatura, tratando de relacionar éste con la intensidad del sistema láser, de lo que resultan las denominadas leyes de escala. A continuación presentaremos algunas de éstas, para los diversos mecanismos presentados antes.

Para caracterizar la absorción resonante podemos considerar<sup>34</sup>

$$\theta_{\text{res}} \approx 6 \cdot 10^{-5} \left( \frac{I_\lambda}{\text{Wcm}^{-2}} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ keV} \quad (2.35)$$

En el caso del calentamiento en vacío existe una ley similar, dada por<sup>35</sup>

$$\theta_{\text{vac}} \approx 3.2 \cdot 10^{-5} \left( \frac{I_\lambda}{\text{Wcm}^{-2}} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ keV} , \quad (2.36)$$

que ajusta bien los datos experimentales<sup>36</sup> hasta  $I_\lambda \lesssim 2 \cdot 10^{18}$ .

Finalmente, en el caso del mecanismo  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  podemos emplear la ley de escala

$$\theta_{\mathbf{J} \times \mathbf{B}} \approx m_e c^2 \left( \sqrt{1 + \frac{I_\lambda/k_{\text{pol}}}{\text{Wcm}^{-2}}} - 1 \right) , \quad (2.37)$$

donde  $k_{\text{pol}}$  es una constante que depende del tipo de polarización, que toma el valor  $1.37 \cdot 10^{18}$  en el caso de polarización lineal y  $2.8 \cdot 10^{18}$  en el caso de polarización circular.

<sup>34</sup> Cf. Ref. [44]; K. Estabrook y W. L. Kruer. «Properties of resonantly heated electron distributions». *Physical Review Letters* **40**, 1 (1978), pág. 42. DOI: [10.1103/PhysRevLett.40.42](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.42).

<sup>35</sup> Cf. Refs. [65; 66]; P. Gibbon. *Short Pulse Laser Interactions with Matter*. Imperial College Press, 2005. DOI: [10.1142/p116](https://doi.org/10.1142/p116); P. Gibbon y A. R. Bell. «Collisionless absorption in sharp-edged plasmas». *Phys. Rev. Lett.* **68** (10 mar. de 1992), págs. 1535-1538. DOI: [10.1103/PhysRevLett.68.1535](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.1535).

Las leyes de escala recogidas en este apartado se muestran gráficamente en la Fig. 2.3, junto con un conjunto de datos de origen experimental<sup>37</sup> para juzgar su validez.

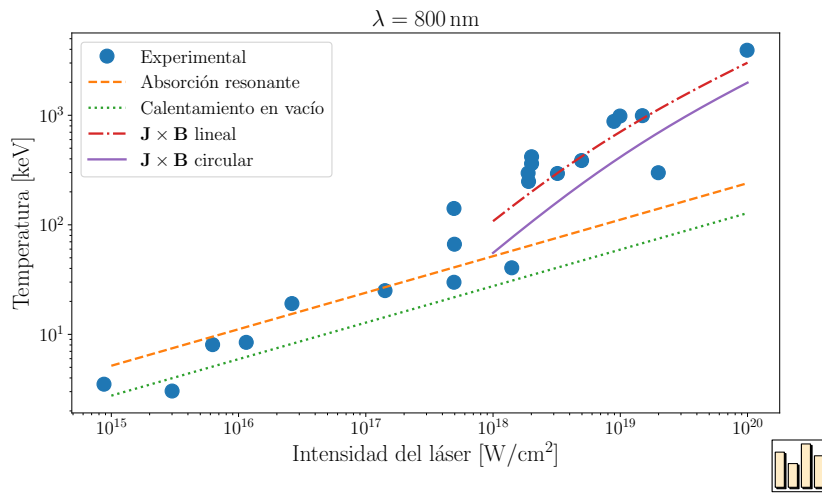


Figura 2.3: Leyes de escala que relacionan la intensidad de un sistema láser con la temperatura de la componente caliente para los principales mecanismos de calentamiento que se encuentran en los medios sobredensos. Los datos experimentales proceden de Ref. [65].

<sup>36</sup> Existen varios ajustes para el comportamiento en el límite relativista, cuyas discrepancias son aún objeto de discusión en la literatura. Cf., e.g., Refs. [74; 7]: M. G. Haines *et al.* «Hot-Electron Temperature and Laser-Light Absorption in Fast Ignition». *Phys. Rev. Lett.* **102** (4 ene. de 2009), pág. 045008. DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.045008](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.045008); F. N. Beg *et al.* «A study of picosecond laser–solid interactions up to 10<sup>19</sup> Wcm<sup>-2</sup>». *Physics of Plasmas* **4**, 2 (1997), págs. 447-457. DOI: [10.1063/1.872103](https://doi.org/10.1063/1.872103).

<sup>37</sup> Cf. pág. 179 en Ref. [65]: P. Gibbon. *Short Pulse Laser Interactions with Matter*. Imperial College Press, 2005. DOI: [10.1142/p116](https://doi.org/10.1142/p116).





# Capítulo 3

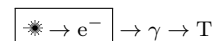
## Estudio formal del sistema

*Fēlix quī potuit rērum cōgnōscēre causās.*  
Pūblius Vergilius Marō – *Geōrgica*

El objetivo de este capítulo es dar una descripción realista de las bases físicas de cada una de las etapas de un sistema de irradiación con rayos X generados a partir de un sistema láser, de tal modo que permita trazar en última instancia cómo un parámetro físico controlable, como puede ser el tiempo entre prepulso y pulso láser, puede afectar a la irradiación resultante del tejido biológico. Para que el problema resulte conceptualmente tratable es necesario un mecanismo de abstracción que separe las etapas, produciendo modelos individuales en cada una que puedan encadenarse para obtener el resultado final. La modularidad será, por tanto, el principio de diseño imperante.

Cada una de las secciones del capítulo está dedicada a una de las etapas del proceso. En primer lugar, §3.1 presentará un estudio de simulación numérica mediante la técnica PiC de la aceleración láser de electrones en medios sobredensos, con atención al tipo de distribuciones en energías que de éstos emerjan, que será lo condicionante para la producción subsecuente de rayos X. A continuación, §3.2 analizará la emisión de rayos X —principalmente a través de *bremstrahlung*, aunque también se realizará un pequeño análisis sobre la producción de rayos característicos— por distribuciones de electrones. Finalmente, §3.3 está dedicada a las propiedades de deposición de energía de distribuciones de fotones (y en particular las del apartado precedente) sobre un tejido, con vistas a las posibles diferencias respecto del efecto de las distribuciones procedentes de fuentes convencionales.

### 3.1 Aceleración láser de electrones en medios sobredensos



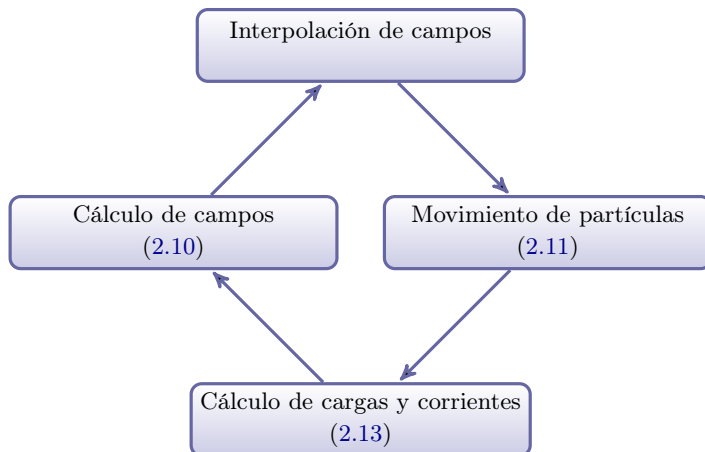
En esta sección estudiaremos los mecanismos de aceleración de electrones en un sistema láser para el tipo de medios con que trataremos en este trabajo. En el apartado §3.1.1 presentaremos los métodos numéricos que emplearemos en las simulaciones y algunas de las condiciones que éstas deben satisfacer. A continuación, §3.1.2 presentará un análisis a partir de simulaciones orientado a las distribuciones energéticas de los electrones, como anticipábamos anteriormente.

#### 3.1.1 Simulación numérica de plasmas con códigos PiC

Un primer paso para enfocar numéricamente el problema sería discretizar los campos, reduciendo así el sistema de ecuaciones de Maxwell [(2.10)] a un esquema de diferencias finitas para encontrar una solución en la malla<sup>1</sup>. Los valores así calculados del campo podrían extender-

<sup>1</sup> Es importante escoger adecuadamente cómo formar ésta. El trabajo seminal en torno a esto es la Ref. [168]: K. Yee. «Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media». *IEEE Transactions on antennas and propagation* **14**, 3 (1966), págs. 302-307. DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.

se por interpolación a los puntos del espacio en que fuera necesario conocerlos. Por otro lado, la descripción continuista de la función de densidad  $f_i$  podría reemplazarse con un conjunto de macropartículas, que agrupasen el comportamiento colectivo de un grupo grande de partículas, reduciendo así (2.11) a la forma tradicional de la fuerza de Lorentz<sup>2</sup>. De esta forma tenemos un conjunto de (macro)partículas moviéndose en las celdas de un mallado, lo que da al método el nombre de *Particle in Cell* (PiC).



En este estudio utilizaremos el código OSIRIS<sup>3</sup> para simular el plasma mediante este algoritmo.

OSIRIS es un código tridimensional, aunque permite trabajar con simetría traslacional en las dimensiones espaciales para reducir la complejidad computacional<sup>4</sup>; relativista y de ejecución completamente paralela. Otras características que merece la pena destacar, aunque no las usaremos en este trabajo, son que dispone de modelos de ionización de algunos gases y que permite simular colisiones binarias de Coulomb.

Existen algunas condiciones que podemos identificar *a priori* para que las simulaciones representen adecuadamente el problema de interacción láser-plasma. Algunas de ellas son:

- La longitud de onda del láser debe estar representada en la malla espacial.
- La región donde se encuentra el plasma debe estar representada en la malla espacial.
- Las distancias en que el láser penetre en el medio sobredenso deben estar representadas, *i. e.*, la profundidad superficial [(2.8)] debe estar resuelta en la malla.
- El plasma debe tener una extensión suficiente como para observar en él los efectos colectivos, *i. e.*, el tamaño de la simulación debe ser significativamente mayor que la longitud de Debye [(2.9)]<sup>5</sup>.
- La evolución temporal debe ser suficientemente lenta como para no introducir ruido numérico. Intuitivamente, la luz no debe atravesar más de una celda en un solo paso temporal. Esto es lo que habitualmente se denomina «condición de Courant»<sup>6</sup>.

<sup>2</sup> Otro enfoque más refinado sería tratar la macropartícula como si tuviera una cierta densidad espacial (rectangular, triangular...). En ocasiones esto recibe la denominación de *Cloud in Cell*. Hoy en día no suele hacerse esta distinción, son partículas con factores de forma. Cf. pág. 19 *et seq.* en Ref. [17]: C. K. Birdsall y A. B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Institute of Physics Publishing, Bristol, United Kingdom, 1991. DOI: [10.1887/0750301171](https://doi.org/10.1887/0750301171).

Figura 3.1: Esquema del método PiC.

<sup>3</sup> Cf. Ref. [56]: R. A. Fonseca *et al.* «OSIRIS: A three-dimensional, fully relativistic particle in cell code for modeling plasma based accelerators». *International Conference on Computational Science*. Springer. 2002, págs. 342-351. DOI: [10.1007/3-540-47789-6\\_36](https://doi.org/10.1007/3-540-47789-6_36).

<sup>4</sup> Lo que a veces se denomina 1D3V o 2D3V.

<sup>5</sup> Cf. pág. 4 en Ref. [17]: C. K. Birdsall y A. B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Institute of Physics Publishing, Bristol, United Kingdom, 1991. DOI: [10.1887/0750301171](https://doi.org/10.1887/0750301171).

Para recoger formalmente estas condiciones, definamos  $\Delta x$  como el paso de la malla espacial (en una dirección arbitraria),  $L_x$  como la longitud total (también en una dirección cualquiera) y  $\Delta t$  el paso temporal. Las condiciones anteriores se resumen en la Tabla 3.1.

Condición	Sentido
$\Delta x \ll \lambda$	Láser resuelto
$\Delta x \ll L_x$	Blanco resuelto
$\Delta x \ll l_s(n_c)$	Profundidad superficial resuelta
$\lambda_{\text{Debye}} \ll L_x$	Efectos colectivos de plasma
$c\Delta t \leq \Delta x$	Condición de Courant <sup>7</sup>

Otra cuestión que queda considerar es que el número de macropartículas empleadas sea «suficientemente grande». Analizaremos esta condición posteriormente en §3.1.2.3.1.

### 3.1.2 Simulación PiC

En las simulaciones emplearemos el sistema de unidades natural definido por

$$\omega := c := m_e := e := 1, \quad (3.2)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia del láser (y, por tanto, la frecuencia de plasma en torno a la densidad crítica). Esta es la opción escogida por OSIRIS<sup>8</sup> para la salida de datos<sup>9</sup>. Orientativamente, en un sistema con  $\lambda = 800 \text{ nm}$  tendríamos por unidades de longitud y tiempo  $0.12 \mu\text{m}$  y  $0.42 \text{ fs}$  respectivamente.

La densidad crítica  $n_c$  [(2.4)] toma un cierto valor que coincidirá con el de la permitividad del vacío  $\epsilon_0$  en este sistema de unidades. Esta magnitud mantendrá, por supuesto, su papel relevante en lo que se refiere a las propiedades ópticas del sistema, por lo que las densidades se presentarán en relación a ésta. En particular, las funciones de densidad del material en cualquier modelo aceptable para un material sobredenso deberían tomar al menos en una región valores superiores a  $n_c$  y, en todo caso, valores inferiores a  $n_0$  [(2.5)].

Las condiciones numéricas sobre la simulación de la Tabla 3.1 se escriben en este sistema de unidades como se recoge en la Tabla 3.2. En general las expresiones son más sencillas e intuitivas: basta que el paso de la malla  $\Delta x$  sea bastante menor que la unidad y que el sistema total  $L_x$  sea bastante mayor que ésta. Para temperaturas en el rango de los keV y densidades en torno a la crítica, la condición de efectos colectivos se satisfará también por añadidura. La condición de Courant es, además, verificada por el propio código, no permitiendo la ejecución en otro caso.

El modelo que emplearemos para el plasma está basado en el trabajo de Esirkepov *et al.*<sup>10</sup>, que estudiaron mediante una simulación hidrodinámica el efecto de un prepulso en un material sólido, obteniéndose una descripción como se puede observar en la serie de puntos de la Fig. 3.2.

<sup>6</sup> Cf. pág. 38 *et seq.* en Ref. [139]: J. B. Schneider. «Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method». URL: [www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd](http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd).

Tabla 3.1: Condiciones numéricas *a priori* para las simulaciones PiC.

<sup>7</sup> En el caso de una malla multidimensional, el lado derecho de la condición sería

$$\left(\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2} + \dots\right)^{-2}. \quad (3.1)$$

Cf. pág. 355 en Ref. [17]: C. K. Birdsall y A. B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Institute of Physics Publishing, Bristol, United Kingdom, 1991. DOI: [10.1887/0750301171](https://doi.org/10.1887/0750301171).

<sup>8</sup> Internamente, la elección también proporciona ventajas de eficiencia computacional, al evitar operaciones de multiplicación.

<sup>9</sup> Una alternativa también «natural», frecuente en la bibliografía, es tomar como unidad de longitud la longitud de onda  $\lambda$ . En nuestro caso esta unidad es, en su lugar,  $c/\omega = \lambda = \lambda/2\pi$ , por lo que puede haber un factor  $2\pi$  en la comparación directa con otros resultados.

<sup>10</sup> Cf. Ref. [43]: T. Z. Esirkepov *et al.* «Prepulse and amplified spontaneous emission effects on the interaction of a petawatt class laser with thin solid targets». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **745** (2014), págs. 150-163. DOI: [10.1016/j.nima.2014.01.056](https://doi.org/10.1016/j.nima.2014.01.056).

Condición	Sentido
$\Delta x \ll 2\pi$	Láser resuelto
$\Delta x \ll L_x$	Blanco resuelto
$\Delta x \ll 1$	Profundidad superficial resuelta
$22.60 \sqrt{\frac{\theta}{\text{keV}} \frac{n_e}{n_c}} \ll L_x$	Efectos colectivos de plasma
$\Delta t \leq \Delta x$	Condición de Courant

Existen varias regiones cualitativamente distinguibles en el plasma originado por el prepulso:

1. Un preplasma con un perfil aproximadamente exponencial. Su longitud de escala depende fundamentalmente del tiempo de expansión entre prepulso y pulso del láser.
2. Una meseta (*plateau*) en la que el perfil es aproximadamente constante.
3. Un faldón (*skirt*) de caída, similar al preplasma pero penetrando hacia el material.

La forma funcional que escogeremos para modelar sus resultados será proporcional a

$$\eta_{L_1, L_2, t, h_1, h_2}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h_1 e^{xL_1^{-1}} & \text{si } x < 0 \\ h_2 e^{tL_2^{-1}} e^{-xL_2^{-1}} & \text{si } x > t \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (3.3)$$

donde  $L_1, L_2$  son las longitudes de escala del preplasma y el faldón respectivamente, de acuerdo con (2.6);  $t$  es el tamaño de la meseta y  $h_1, h_2$  representan las fracciones de densidad máxima que alcanzan preplasma y meseta (*cf.* Fig. 3.2). El origen de coordenadas se ha situado en el límite entre preplasma y meseta. En el sistema empleado por Esirkepov *et al.*, estas longitudes de escala son del orden de  $L_\chi \sim 5.95\lambda$ , que aquí también emplearemos.

Una descripción alternativa empleada a veces es la de un perfil exponencial que satura en  $n_0$ <sup>11</sup>. En la región del preplasma ambos modelos toman la misma forma funcional, con lo que el adoptado en este trabajo puede tomarse como un refinamiento para tener en cuenta las otras partes del plasma.

Siguiendo también a Esirkepov *et al.*<sup>12</sup>, el plasma formado tendrá una distribución energética maxwelliana, cuya temperatura inicial<sup>13</sup> puede estimarse mediante la expresión

$$\left( 5.1 \sqrt{a_0^2/C} + 1.3 \left( \frac{n_e}{10^{21} \text{ cm}^{-3}} \frac{\Delta t_{\text{pre}} a_0^2}{1 \text{ ns } C} \right)^{2/5} \right) 10^5 \text{ eV}, \quad (3.5)$$

donde<sup>14</sup>  $C$  es el contraste del prepulso,  $n_e$  la densidad de electrones,  $\Delta t_{\text{pre}}$  la duración del prepulso y  $a_0$  es el valor del potencial vector normalizado, dado por

$$a_0 = \frac{eE_0}{\omega c m_e}. \quad (3.6)$$

Tabla 3.2: Condiciones para una simulación PiC en el sistema de unidades de OSIRIS.

<sup>11</sup> *Cf.* Refs. [118; 114]: C. Orban *et al.* «Backward-propagating MeV electrons in ultra-intense laser interactions: Standing wave acceleration and coupling to the reflected laser pulse». *Physics of Plasmas* **22**, 2 (2015), pág. 023110. DOI: [10.1063/1.4913225](https://doi.org/10.1063/1.4913225); A. G. Moldovanakis *et al.* «Temperature scaling of hot electrons produced by a tightly focused relativistic-intensity laser at 0.5 kHz repetition rate». *Applied Physics Letters* **96**, 7 (2010), pág. 071109. DOI: [10.1063/1.3306730](https://doi.org/10.1063/1.3306730).

<sup>12</sup> *Cf.* Ref. [43]: T. Z. Esirkepov *et al.* «Prepulse and amplified spontaneous emission effects on the interaction of a petawatt class laser with thin solid targets». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **745** (2014), págs. 150-163. DOI: [10.1016/j.nima.2014.01.056](https://doi.org/10.1016/j.nima.2014.01.056).

<sup>13</sup> Una distribución de maxwelliana se puede definir con múltiples parámetros. OSIRIS utiliza la media cuadrática de la velocidad en una coordenada espacial. Estudiando la distribución transformada [*cf.* (A.5)], puede comprobarse que ésta es

$$\sqrt{\theta} m, \quad (3.4)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula. *Cf.* también pág. 149 *et seq.* en Ref. [122]: R. Pathria. *Statistical Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, UK, 1977.

<sup>14</sup> Esta fórmula proviene de la dinámica de calentamiento de un plasma colisional, tomando como temperatura mínima la debida a la energía de oscilación (*quiver*) del electrón y considerando la duración del prepulso. Para más información *cf.* Ref. [43].

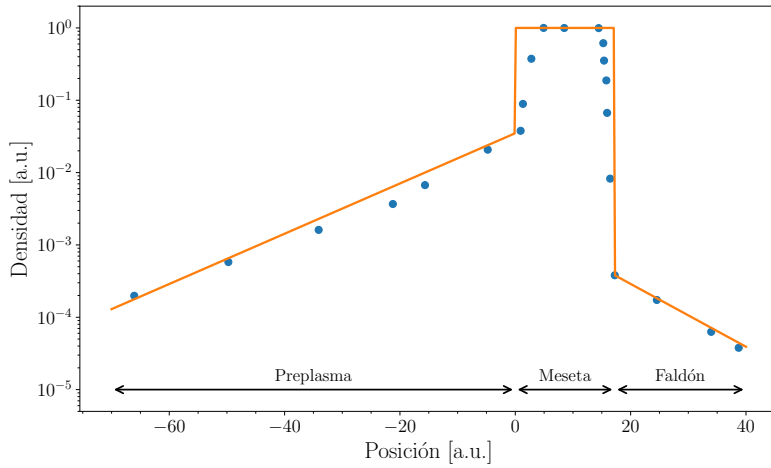


Figura 3.2: En línea continua, modelo analítico del plasma [(3.3)] en escala semilogarítmica, reproduciendo uno de los resultados de la Ref. [43], representados éstos como puntos. En la región  $x < 0$  encontramos el preplasma, en  $x \in (0, 17.2)$  la meseta y en  $x > 17.2$  el faldón. En los datos originales se puede observar segundo transitorio entre meseta y, respectivamente, preplasma y faldón. Aunque el modelo no lo reproduce, las fluctuaciones en los primeros instantes de tiempo en la simulación suavizarán este comportamiento antes de la llegada del pulso.

Las curvas de contorno de (3.5) aparecen representadas en la Fig. 3.3. Como puede observarse, las temperaturas iniciales que se pueden esperar son del orden de las decenas de eV.

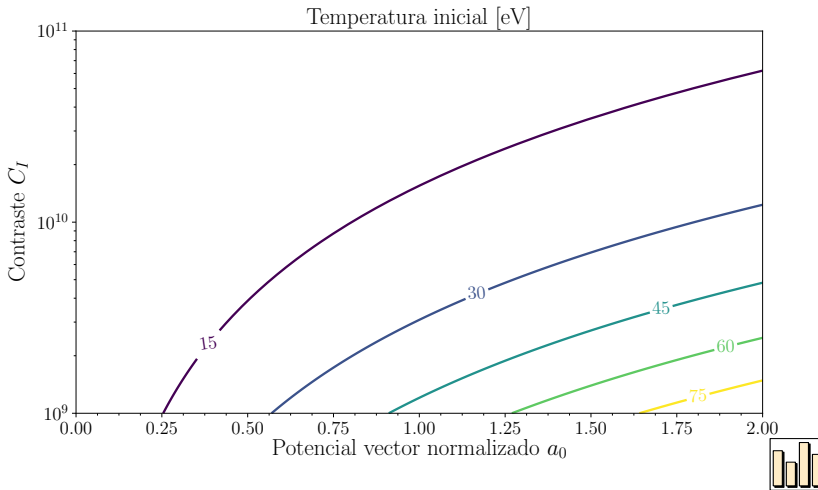


Figura 3.3: Curvas de contorno de (3.5), modelando la temperatura inicial del plasma en función del valor del potencial vector normalizado y el contraste del láser.

El pulso láser se modelará empleando una envolvente longitudinal gaussiana definida por su FWHM, que será de  $30\omega/c$  en el caso estándar. El pulso se inicializará en una longitud total de cuatro veces ésta (la mitad hacia cada lado del máximo). Respecto al potencial vector normalizado  $a_0$  del pulso, éste está relacionado, en el caso de polarización lineal, con la intensidad según la expresión<sup>15</sup>

$$a_0 \approx 0.85 \frac{\lambda}{\mu\text{m}} \sqrt{\frac{I}{10^{18} \text{ Wcm}^{-2}}}, \quad (3.7)$$

la cual aparece representada en la Fig. 3.4.

En el otro caso de especial interés, que es el de polarización circular, el potencial normalizado se define con la misma expresión, pero el máximo de intensidad de campo adimensionalizado viene dado por<sup>16</sup>  $a_0/\sqrt{2}$ .

<sup>15</sup> Ésta se despeja de  $I = \left\langle \frac{E \times B}{\mu_0} \right\rangle$ , para el caso de onda plana linealmente polarizada, utilizando (3.6).

<sup>16</sup> Cf. p. 8 en Ref. [105]: A. Macchi. *A Superintense Laser-Plasma Interaction Theory Primer*. Springer Science & Business Media, 2013. DOI: 10.1007/978-94-007-6125-4.

Con independencia de esto, el parámetro expresado en (3.7) se utiliza sin modificación también en estos casos como magnitud característica del sistema láser, aunque deba tenerse cuidado con su interpretación.

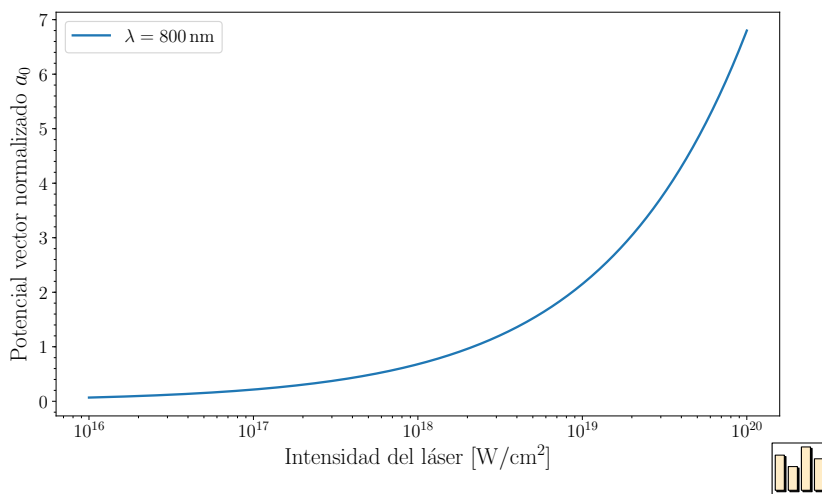


Figura 3.4: Relación del potencial vector normalizado con la intensidad del sistema láser [(3.7)].

Para la solución de las ecuaciones de campos se empleará el método de Yee<sup>17</sup> con condiciones de contorno de capas perfectamente acopladas (PML)<sup>18</sup> y sin emplear suavizado para los campos obtenidos.

La descripción completa de la simulación en el formato empleado por OSIRIS se puede consultar en §C (pág. 148).

### 3.1.2.1 Visualización del mecanismo

El avance del frente del láser se puede observar en la Fig. 3.5, a cuyo pie remitimos al lector para facilitar la explicación del fenómeno.

Las mismas magnitudes que recogía la Fig. 3.5 se pueden ver de forma continuada en la Fig. 3.6 y en la Fig. 3.7, donde el tiempo se sitúa en el eje vertical. Esta visualización es conveniente para el análisis de la distribución en energías que veremos en este formato en el siguiente apartado.

<sup>17</sup> Cf. Ref. [168]: K. Yee. «Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media». *IEEE Transactions on antennas and propagation* **14**, 3 (1966), págs. 302-307. DOI: [10.1109/TAP.1966.1138693](https://doi.org/10.1109/TAP.1966.1138693).

<sup>18</sup> El contorno se comporta como un absorbente para simular la condición de un medio abierto. Cf. Ref. [8]: J.-P. Berenger. «A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves». *Journal of computational physics* **114**, 2 (1994), págs. 185-200. DOI: [10.1006/jcph.1994.1159](https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1159).

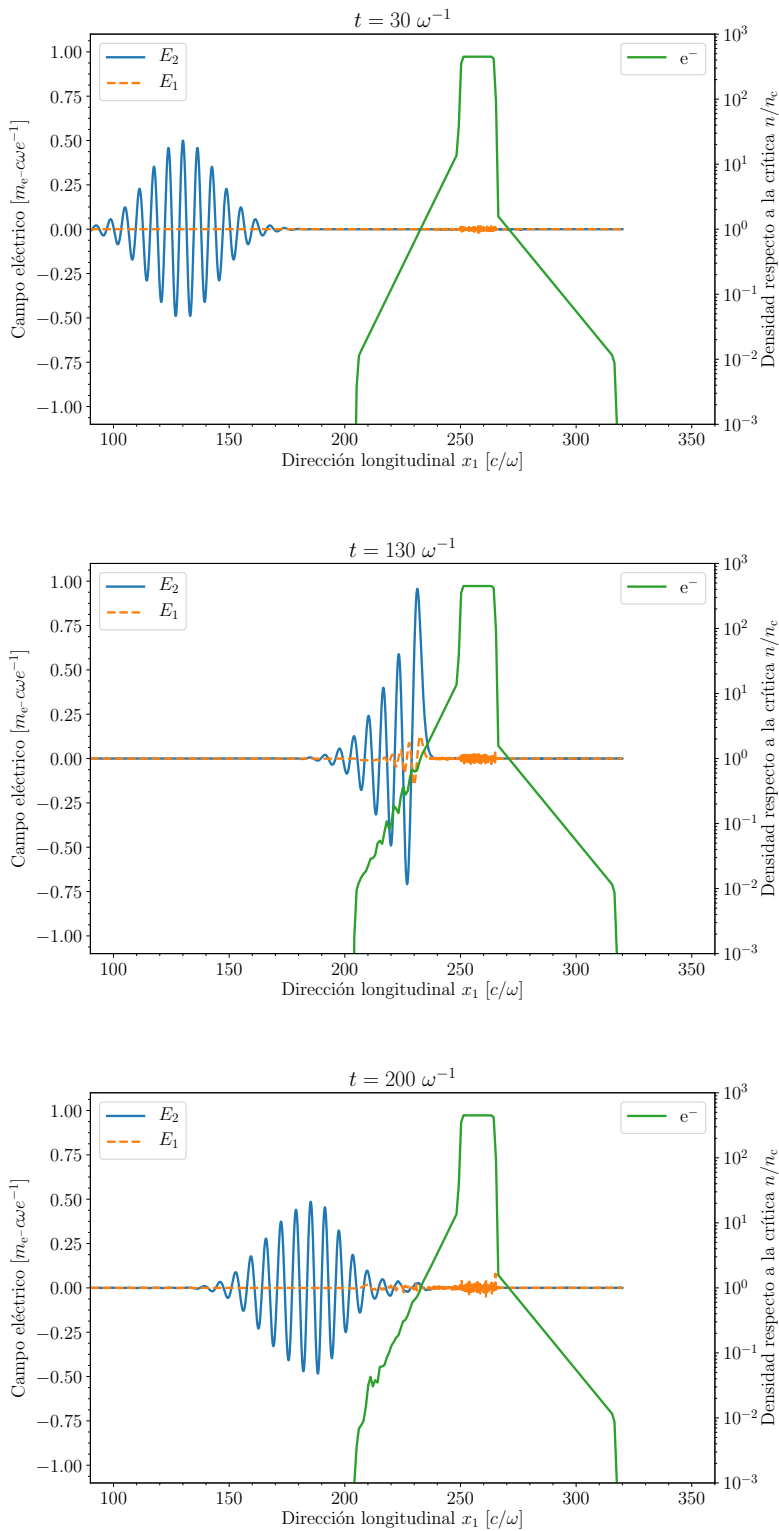


Figura 3.5: Interacción de un pulso electromagnético con un plasma sobredensado abrupto (en comparación con su longitud de onda). En la parte superior se muestra el pulso que viaja hacia la derecha, acercándose a un perfil de plasma, representado en escala semilogarítmica, que crece desde  $0.01n_c$  hasta  $n_0 \approx 450n_c$ , según el modelo (3.3). En la figura intermedia se observa que el láser se refleja en torno a la densidad crítica. Se observan en la figura el fenómeno de evanescencia y la interferencia constructiva que dobla la intensidad del pulso en algunos puntos (y la anula en otros). Finalmente, en la parte inferior se observa el pulso reflejado, retirándose hacia la izquierda, y el perfil de plasma ligeramente alterado por su paso.

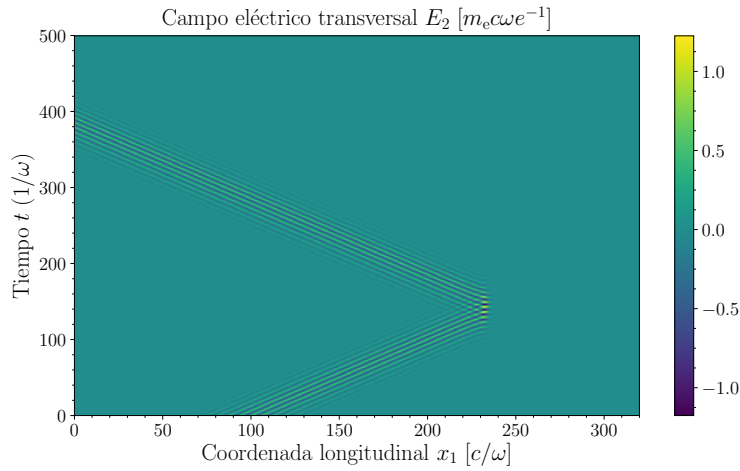


Figura 3.6: Campo eléctrico en una de las direcciones perpendiculares a la de propagación. El láser avanza hasta el perfil de plasma, alcanzándolo en ( $t \sim 100$ ). En ese momento el haz se refleja, observándose las interferencias constructivas en que el campo eléctrico dobla su valor inicial. Finalmente el haz escapa del sistema en dirección contraria a la inicial.

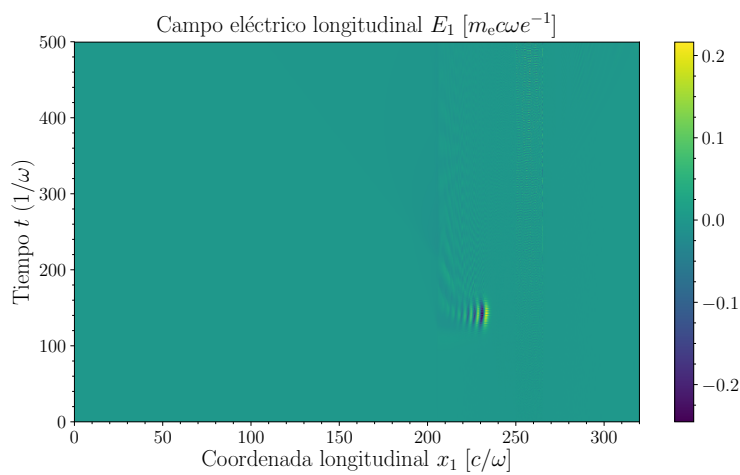


Figura 3.7: Campo eléctrico longitudinal originado en la región del plasma. La meseta (*plateau*) del perfil inicial comienza en  $x_1 = 220$  y se extiende hasta  $x_1 = 235$ . Con la llegada del láser ( $t \sim 100$ ) aparece un campo longitud en la interfaz en el preplasma, aunque no llega a alcanzar la meseta. Cf. Fig. 3.5 para la distribución del plasma.





### 3.1.2.2 Descripción de las distribuciones

Una vista general de la distribución en energías de los electrones del plasma se recoge en la Fig. 3.8. Como allí se puede observar, a tiempos reducidos toda la densidad del plasma tiene un factor de Lorentz<sup>19</sup> muy cercano a la unidad, pero, con la llegada del láser, algunas de las partículas adquieren velocidades muy elevadas. Posteriormente estos electrones se termalizan, dando a lugar a una distribución relativamente estable. Las líneas de color horizontales estarían describiendo las distribuciones de energía a cada tiempo fijo. Algunas de éstas se muestran, para facilitar su comprensión, en la Fig. 3.9.

<sup>19</sup> Recordemos que el factor de Lorentz menos la unidad indica la proporción entre la energía cinética y la masa en reposo.

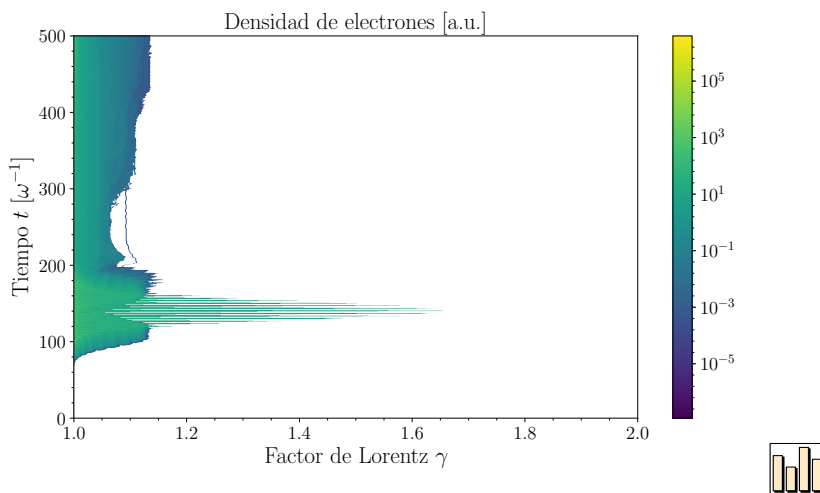


Figura 3.8: Variación de la distribución de energías de los electrones del plasma en función del tiempo.

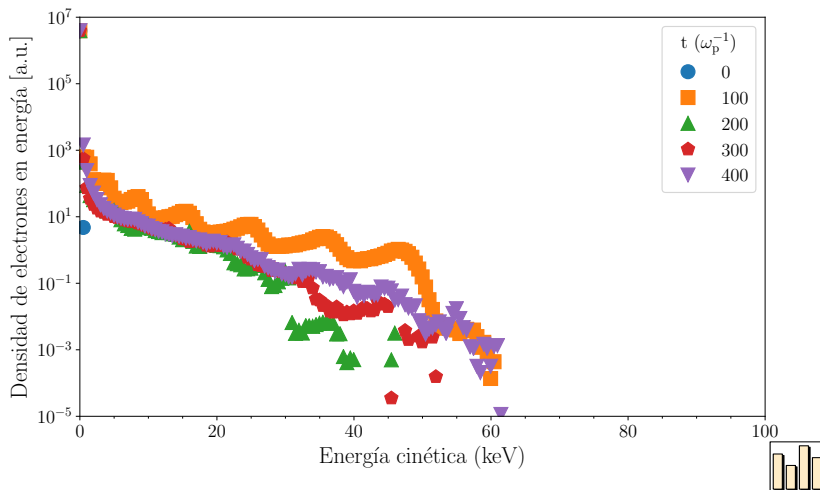


Figura 3.9: Densidad de energía de la distribución de electrones en función de ésta, para los instantes de tiempo indicados en la leyenda.

Como se observa en la Fig. 3.9, tras la interacción con el láser hay en las distribuciones de energía de los electrones dos regiones diferenciadas, una a altas y otra a bajas energía, cada una con una forma cualitativamente exponencial (*i. e.*, un recta en escala semilogarítmica). Esto permite ajustar dos «temperaturas» —a partir del inverso del opuesto de la pendiente— en función del tiempo, como muestra la Fig. 3.10. La estabilidad de estos parámetros tras la interacción permite considerar éste como relevante. Si bien las regiones escogidas para los ajustes ( $[0, 3]$  keV y  $(15, \infty]$  keV, como muestra la leyenda), son un poco arbitrarias, la pendiente no es muy sensible a esta elección.

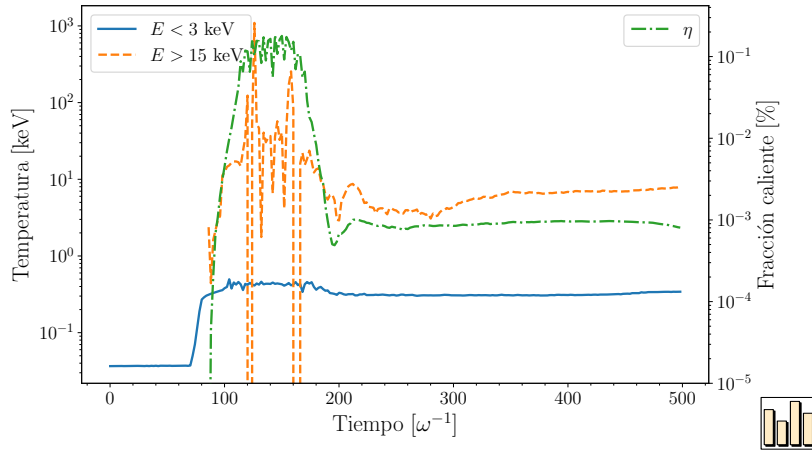


Figura 3.10: Temperatura en función del tiempo para las dos componentes de la distribución de energías. Los ajustes, lineales en la escala semilogarítmica, siguen las condiciones indicadas en la leyenda.

Por otro lado, existe una relación entre la cantidad de electrones de mayor temperatura y la de menor temperatura. Para poder caracterizar esto introduciremos el concepto de «fracción caliente», que representará la proporción de electrones con una fracción de energía superior a un corte  $\kappa$  fijado convencionalmente al igual que antes. Formalmente,

$$\eta_{\kappa}(t) = \frac{\iiint_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \iiint_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 | E(p) > \kappa} f_{e^{-}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{p}}{\iiint_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \iiint_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} f_{e^{-}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{p}}, \quad (3.8)$$

donde  $E(p)$  refleja la energía cinética en función del momento. Habitualmente expresaremos esta magnitud en tanto por ciento y, salvo que se indique lo contrario, con el corte a 15 keV en consonancia con los ajustes anteriores, no explicitando en lo sucesivo la notación dicho corte. Debe advertirse que esta magnitud es dependiente del perfil de plasma empleado, pues la densidad total de electrones varía fuertemente con ésta. En este sentido, cabe considerar únicamente como representativas las variaciones de la fracción cuando se altera un parámetro, manteniendo el perfil del plasma en la medida en que sea posible.

La evolución con el tiempo de la fracción caliente se muestra también en la Fig. 3.10, en la escala situada en el eje derecho. Como puede observarse, la magnitud también es aproximadamente estable tras la interacción del láser.

El tipo de distribuciones de energía encontradas, que se corresponden con las habituales que recoge la literatura<sup>20</sup>, sugiere la posibilidad de realizar un ajuste a una mezcla de distribuciones con dos «temperaturas»<sup>21</sup>. Una forma funcional que recoge la casuística que se encuentra es

$$f(E) = (1 - b) f_{\Gamma(\alpha, \theta_{\text{cold}}^{-1})}(E) + b f_{\Gamma(\alpha, \theta_{\text{hot}}^{-1})}(E), \quad (3.9)$$

donde los parámetros del ajuste son  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $b \in [0, 1]$ ,  $\theta_{\text{cold}} \in [0, \infty]$  y  $\theta_{\text{hot}} \in [\theta_{\text{cold}}, \infty]$ ; mientras que  $f_{\Gamma_{\alpha, \beta}}$  es la PDF de una distribución Gamma<sup>22</sup>,

$$f_{\Gamma_{\alpha, \beta}}(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (3.10)$$

En esta última expresión  $\Gamma$  representa la función Gamma de Euler<sup>23</sup>.

Ejemplos típicos contenidos en esta familia de distribuciones que encuentran uso en la literatura son la distribución exponencial ( $\alpha = 1$ ), la de Maxwell-Boltzmann ( $\alpha = 3/2$ ) o la distribución ultrarrelativista de Maxwell-Jüttner ( $\alpha = 3$ )<sup>24</sup>. La pluralidad de opciones empleadas dentro de éstas es, en cierta medida, causa de discrepancias entre diversos estudios<sup>25</sup>.

Si bien sería posible emplear la forma funcional (3.9) —o alguna particularización más sencilla— para realizar ajustes directamente sobre ésta con los resultados de la simulación, esto presenta el inconveniente de que la naturaleza no lineal del ajuste y el ruido numérico inherente a las colas haría que la convergencia fuera bastante pobre, además de la variabilidad en la interpretación de los parámetros según el valor de  $\alpha$ . Por este motivo preferiremos para el análisis los parámetros antes descritos, que se pueden relacionar con la distribución para que esta proporcione una descripción aceptable.

A modo de ejemplo, la Fig. 3.11 muestra un ajuste de una distribución típica a la forma bimaxwelliana [(3.9)]. El parámetro de forma del mejor ajuste es  $\alpha = 1$ , aunque esto podría estar relacionado con la dimensionalidad de la simulación y debe considerarse con escepticismo. Cabe destacar que la región de transición entre las dos pendientes no se puede reproducir adecuadamente con este modelo. Este efecto, que se ajusta a lo recogido en ocasiones en la bibliografía<sup>26</sup>, apunta a la noción de dos componentes a temperaturas diferentes es relativamente simplista y no explica en la totalidad las distribuciones de electrones.

<sup>20</sup> Cf. Ref. [5]: D. Batani, R. R. Freeman y S. Baton. «The Transport of Relativistic, Laser-Produced Electrons in Matter – Part 1». *Progress in Ultrafast Intense Laser Science III*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010, págs. 265-294. DOI: 10.1007/978-3-540-73794-0\_13.

<sup>21</sup> Se denominan así aunque no haya siempre una interpretación termodinámica para ellas.

<sup>22</sup> Cf. págs. 46,48 en Vol. 2 de Ref. [47]: W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, 2008. DOI: 10.1063/1.3034322.

<sup>23</sup> Cf. Ref. [36]: National Institute of Standards and Technology. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. versión 1.0.17. Complemento en línea a Ref. [116]. 22 de dic. de 2017. URL: <http://dlmf.nist.gov/>.

<sup>24</sup> Si bien los casos citados en el texto son los más usuales y presentan cierta justificación física, también hay otros casos en la literatura en que se emplea otro ajuste con objeto de obtener formas analíticas más sencillas. Por ejemplo, el caso  $\alpha = 2$  se emplea en la Ref. [62]: J. Galy *et al.* «Bremsstrahlung production with high-intensity laser matter interactions and applications». *New Journal of Physics* **9**, 2 (2007), pág. 23. DOI: 10.1088/1367-2630/9/2/023.

<sup>25</sup> Cf. Ref. [5]: D. Batani, R. R. Freeman y S. Baton. «The Transport of Relativistic, Laser-Produced Electrons in Matter – Part 1». *Progress in Ultrafast Intense Laser Science III*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010, págs. 265-294. DOI: 10.1007/978-3-540-73794-0\_13.

<sup>26</sup> Cf. Ref. [5].

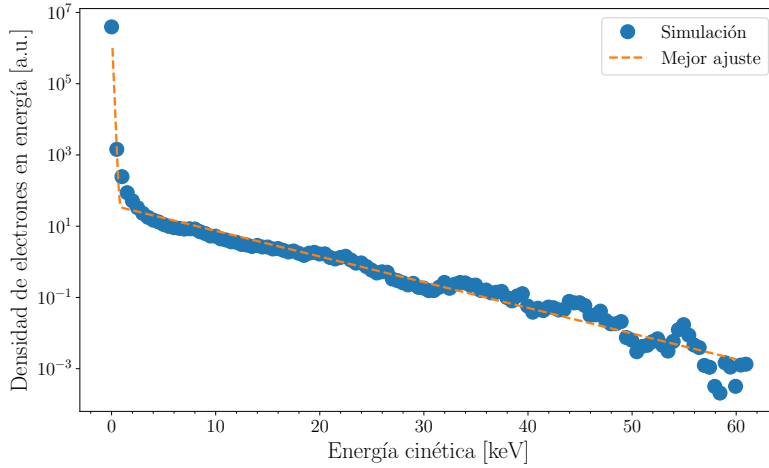


Figura 3.11: Mejor ajuste por mínimos cuadrados a una bimaxwelliana [(3.9)] con parámetro de forma  $\alpha = 1$  (exponenciales) de una distribución típica de las obtenidas en la simulación PiC.

### 3.1.2.3 Análisis de parámetros

En los sucesivos apartados analizaremos variaciones de los parámetros sobre una simulación «estándar» definida en la Tabla 3.3. La primera de las variaciones está destinada a estudiar la variabilidad de la simulación con el número de macropartículas, parámetro propio de la simulación sin correspondencia directa con la realidad física. El objetivo es encontrar un valor para el parámetro en que los resultados sean relativamente confiables, sin elevar excesivamente los gastos computacionales asociados.

En contraposición, el resto de parámetros estudiados, con legítimo sentido físico, se estudian con el propósito de poner de manifiesto su influencia en las características energéticas de las partículas aceleradas; siendo así mismo la falta de influencia un posible resultado de interés.

Parámetro	Valor
Macropartículas por celda	3000
Potencial vector normalizado	0.5
Anchura de la envolvente del láser	$30 c/\omega$
Longitud de escala del preplasma	$5.95 c/\omega$
Temperatura inicial	20 eV
Electrones ionizados por átomo	13 (ionización completa)

Tabla 3.3: Parámetros en la simulación unidimensional «estándar».

Otros parámetros relevantes establecidos en la simulación pero que no variaremos son:

- El número de celdas espaciales, fijado en 4000.
- El incremento temporal, fijado en  $0.01 \omega^{-1}$

Puede observarse que los parámetros cumplen las condiciones que recogíamos en la Tabla 3.2.

## 3.1.2.3.1 Número de partículas

La variación de los parámetros del ajuste con el número de macropartículas en la simulación se muestra en la Fig. 3.12. Para un número de partículas por celda reducido ( $\lesssim 500$  partículas / celda) las variaciones son muy bruscas, apuntando a que los resultados son poco confiables. Para unos pocos miles de partículas las fluctuaciones son bastante menores, aunque aún así son existentes. Para el caso «estándar» de 3000 macropartículas/celda las variaciones de la temperatura se pueden estimar, a partir de los datos anteriores, como  $\pm 2$  keV.

Para una referencia sobre el incremento del coste computacional, prácticamente lineal, *cf.* la Fig. 3.13.

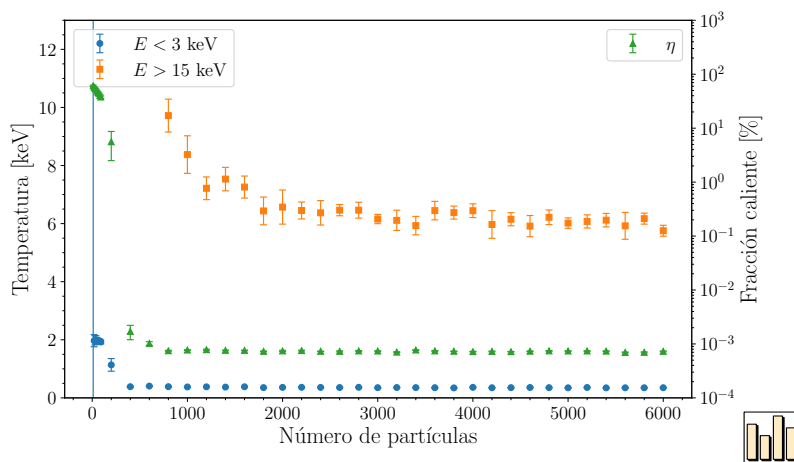


Figura 3.12: Variación de los parámetros del ajuste con el número de partículas por celda en la simulación.

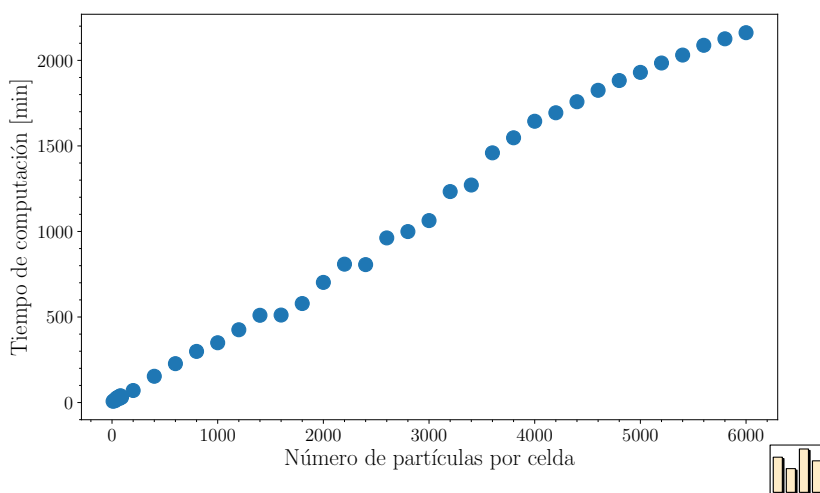


Figura 3.13: Tiempo de computación en función del número de macropartículas por celda. Las ligeras fluctuaciones respecto a la linealidad se deben a que simulación se realizaron en un clúster con un sistema de colas en orden creciente de dicho parámetro, con lo que la disponibilidad de recursos era variable. El hecho de que la relación sea prácticamente lineal muestra que el tiempo empleado en operaciones relacionadas con el número de partículas (movimiento de éstas e interpolación de campos) es considerablemente mayor que otras independientes de éste (cálculo de campos, cargas y corrientes en la malla).

En los casos con pocas macropartículas por celda se puede observar un efecto no físico que deriva en la aparición de una aparente componente de alta temperatura, representada en la Fig. 3.14. Esta componente no puede tener sentido físico, en tanto que desaparece cuando el número de partículas por celda es suficientemente elevado, como recogía la Fig. 3.8.

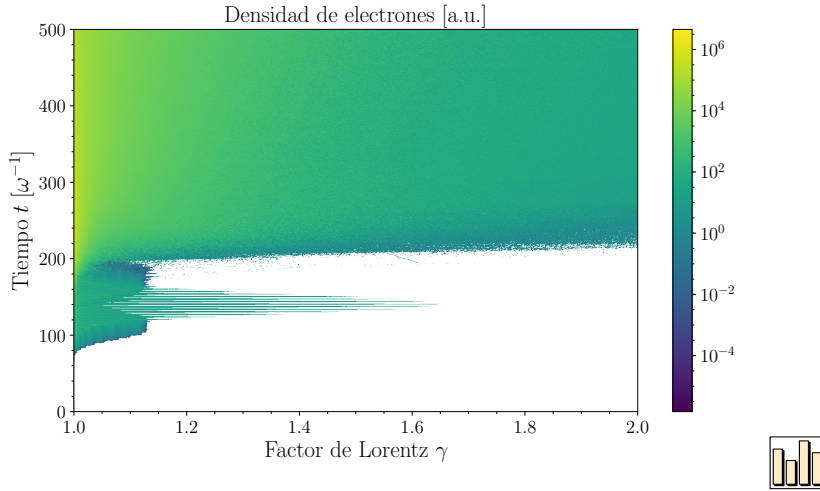


Figura 3.14: Distribución de energías de los electrones del plasma en función del tiempo para una simulación con pocas macropartículas por celda. Puede observarse que aparecen colas de energías elevadas sin sentido físico. Cf. Fig. 3.8.

El origen de esta diferencia está en el mecanismo de asignación de cargas a la malla en que se resuelven los campos, que provoca un calentamiento numérico de las partículas<sup>27</sup>. Según algunos autores, la tasa de incremento en la energía cinética debida a este calentamiento numérico es proporcional a la inversa del número medio de partículas por celda<sup>28</sup>.

### 3.1.2.3.2 Intensidad del láser

La intensidad del sistema láser es el parámetro más relevante, siendo habitualmente el único considerado en las leyes de escala. La variación de los parámetros del ajuste con ésta se muestra en la Fig. 3.15. Dentro de las aproximaciones que la simulación supone, la aparición de una componente caliente del orden de los keV aparece entre los valores de 0.3 y 0.4, que se relaciona con la aparición del mecanismo de calentamiento en vacío.

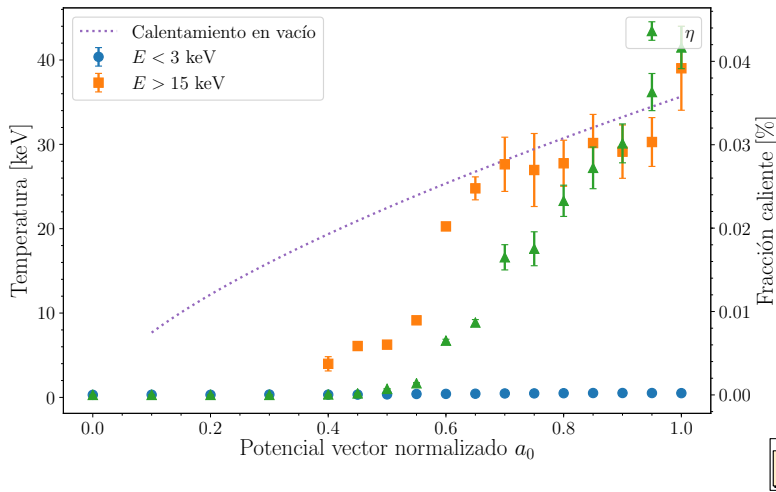


Figura 3.15: Variación de los parámetros del ajuste con la intensidad de láser en la simulación. La ley de escala del calentamiento en vacío se corresponde con (2.36).

<sup>27</sup> Cf. pág. 293 en Ref. [17]: C. K. Birdsall y A. B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Institute of Physics Publishing, Bristol, United Kingdom, 1991. DOI: [10.1887/0750301171](https://doi.org/10.1887/0750301171).

<sup>28</sup> Cf. Ref. [153]: H. Ueda *et al.* «A study of the numerical heating in electrostatic particle simulations». *Computer Physics Communications* **79**, 2 (1994), págs. 249-259. DOI: [10.1016/0010-4655\(94\)90071-X](https://doi.org/10.1016/0010-4655(94)90071-X).

La ley de escala para el calentamiento en vacío [(2.36)] se muestra también en la Fig. 3.15, donde se puede observar que, pasado el umbral de aparición del mecanismo, ofrece resultados consistentes con las simulación, tanto en magnitud como en tendencia. Recordando que dicha ley era consistente con datos experimentales (*cf.* Fig. 2.3), encontramos que los valores encontrados con las temperaturas son razonables.

### 3.1.2.3.3 Anchura de la envolvente del láser

El tamaño de la envolvente de láser no tiene un papel demasiado relevante, salvo que consideremos pulsos muy estrechos, en que la transferencia de energía a la componente caliente es más eficaz, como muestra la Fig. 3.16. Esta región supone que, en términos temporales, el pico del pulso tenga una duración menor de los 5 fs (para  $\lambda = 800$  nm), por lo que en configuraciones usuales el efecto del parámetro será reducido.

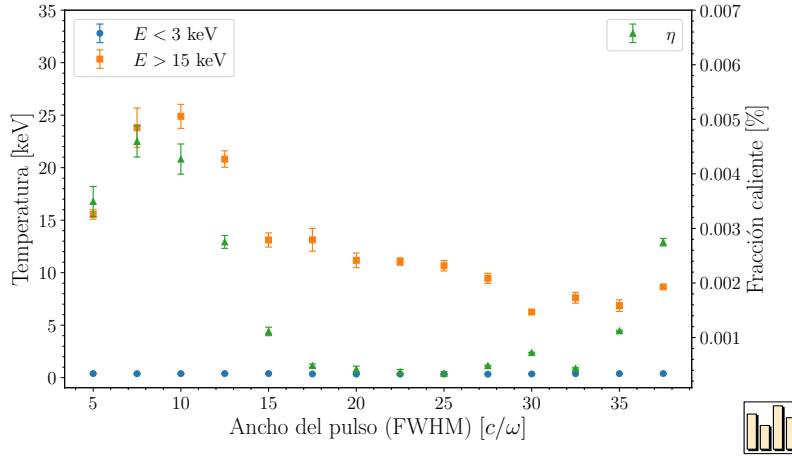


Figura 3.16: Variación de los parámetros del ajuste con la anchura del pulso láser en la simulación.

### 3.1.2.3.4 Longitud de escala del plasma

La variación de la longitud de escala del plasma provendrá fundamentalmente del proceso de expansión isoterma entre prepulso y pulso, y por lo tanto del tiempo entre ambos, como recogíamos en el modelo (2.7). La variación de los parámetros del ajuste con ésta se muestra en la Fig. 3.17, donde podemos observar que al reducir la longitud de escala se reduce la cantidad de electrones en la componente caliente, aunque la temperatura de estos aumenta ligeramente. A menores longitudes de escala el comportamiento parece cambiar, con lo que en caso de tratar con un rango de plasmas diferentes a los considerados aquí sería conveniente la realización de un estudio especializado.

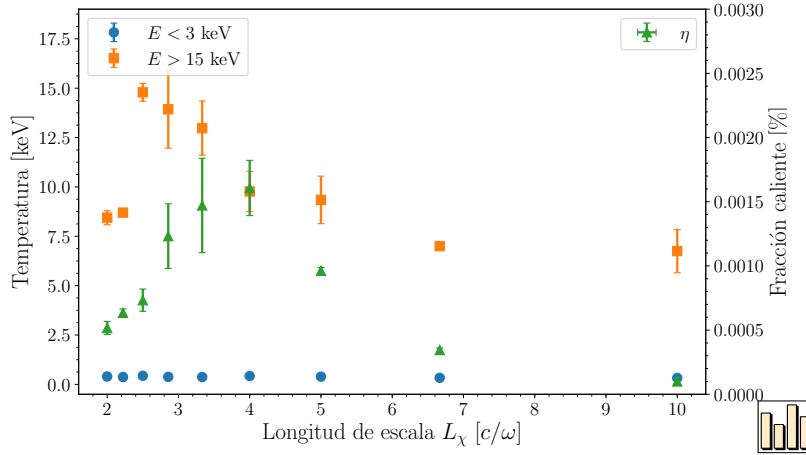


Figura 3.17: Variación de los parámetros del ajuste con la longitud de escala del preplasma en la simulación.

### 3.1.2.3.5 Temperatura inicial

Recordemos que la variación en la temperatura inicial está relacionada con el contraste del prepulso y su duración. Un posible modelo era el dado por (3.5).

La variación de los parámetros del ajuste se muestra en la Fig. 3.18.

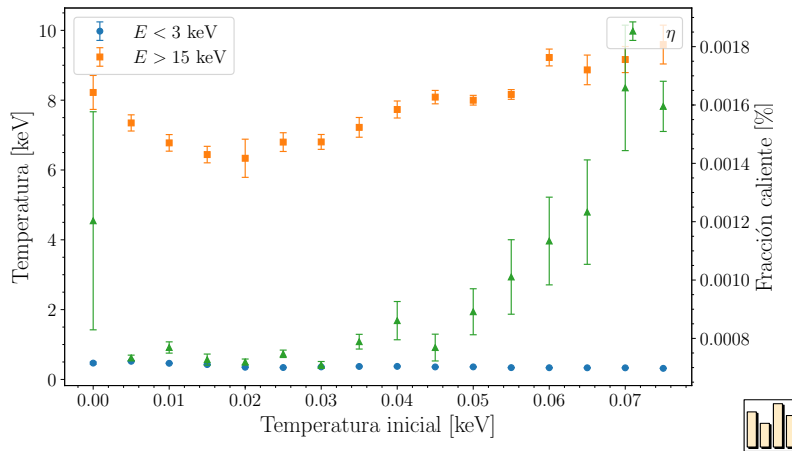


Figura 3.18: Variación de los parámetros del ajuste con la temperatura inicial del plasma en la simulación.

### 3.1.2.3.6 Electrones ionizados por átomo

La cantidad de electrones ionizados por átomo depende de la dinámica producida en la interacción del prepulso, que, como introducíamos en §2.1, es un proceso complejo que constituye una rama independiente. Para evaluar cómo puede cambiar el proceso si varía la hipótesis de ionización total acudiremos a la Fig. 3.19, donde se muestra como en los casos anteriores la variación de los parámetros del ajuste con la cantidad de electrones ionizados por átomo.



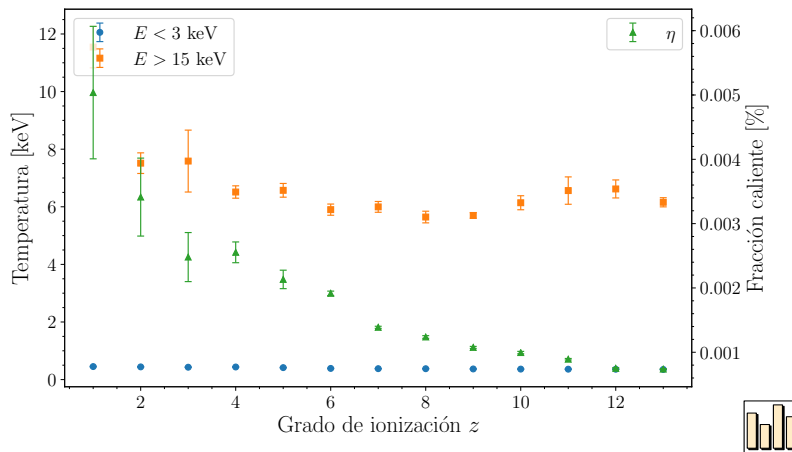


Figura 3.19: Variación de los parámetros del ajuste con la cantidad de electrones ionizados por átomo.

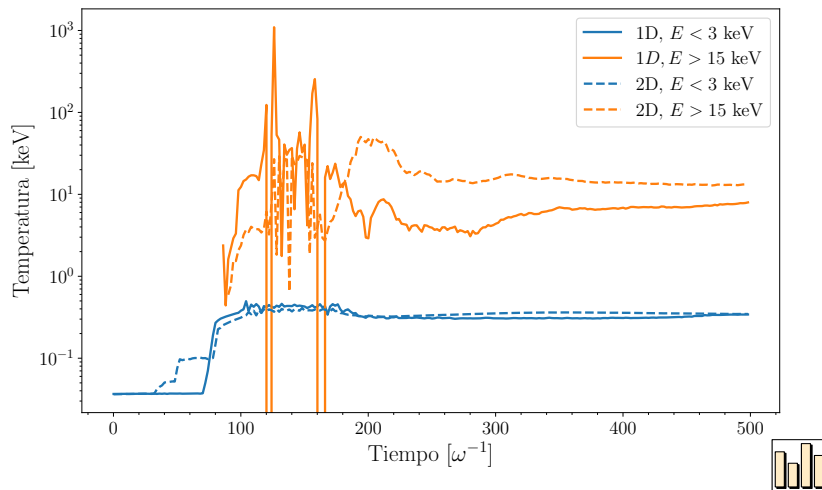
En este caso la fracción relativa  $\eta$  no puede compararse directamente, pues la densidad total del plasma cambia con el parámetro en variación. Que la fracción caliente aumente cuando ésta se reduzca es simplemente consecuencia natural de su definición. En cuanto a las variaciones en la temperatura de la componente caliente, estas son despreciables siempre que la cantidad de electrones ionizados no sea demasiado reducida. Esto se debe a que el láser avanza en el plasma hasta encontrar la densidad crítica, donde se produce igualmente el mecanismo. En caso de que la cantidad de electrones ionizados sea muy pequeña, puede no llegarse a alcanzar esta densidad crítica, con lo que el plasma deja de ser sobredenso y la temperatura (no mostrada en la gráfica por motivos de escala) se dispara. Para que esto ocurriera en la práctica debería disponerse de un sistema con un contraste muy elevado, con lo que simplemente el parámetro de ionización será irrelevante en la práctica.

Un aspecto adicional de la variación de esta hipótesis, que no se ha considerado en la simulación, es que si varía la carga de los iones pero no el desfase entre prepulso y pulso, variará también la longitud de escala según (2.7), por lo que habría una variación adicional según lo dado en §3.1.2.3.4.

### 3.1.2.3.7 Simulación bidimensional

Con el fin de evaluar las diferencias introducidas por el modelo unidimensional empleado, se ha considerado una simulación análoga al caso estándar, empleando dos dimensiones espaciales (más simetría traslacional en la tercera), con la salvedad de que el número de partículas por celda ha tenido que ser reducido a 512 para permitir que las simulaciones se ejecutaran con la cantidad de RAM disponible.

Los ajustes de las distribuciones en función del tiempo se muestran, junto con las bidimensionales, en la Fig. 3.20. Aunque puede parecer que hay un ligero incremento de temperatura debido a la dimensionalidad, debemos considerar que esta variación es similar a las que cabía esperar por la variación del número de macropartículas (*cf.* Fig. 3.12). En consecuencia, la conclusión es que la simulación original con representa adecuadamente el caso de incidencia normal<sup>29</sup>.



<sup>29</sup> La influencia de los parámetros intrínsecamente bidimensionales, como el ángulo de incidencia o la polarización, queda pendiente de ser estudiada.

Figura 3.20: Evolución de las temperaturas en la simulación bidimensional.

### 3.2 Emisión de rayos X por electrones procedentes de medios sobredensos

En el apartado anterior hemos visto que las emisiones de electrones procedentes de plasmas sobredensos siguen una forma que se puede describir, al menos aproximadamente, como una maxwelliana —o, de forma más general, como una distribución Gamma [(3.10)]— o bien como una combinación convexa de dos de éstas. El siguiente paso es estudiar cómo estas distribuciones producen emisiones de rayos X y qué características espectrales presentan.

Los primeros antecedentes en la literatura especializada de este problema se pueden encontrar en el campo de la astrofísica, por el interés del estudio de las emisiones procedentes de plasmas maxwellianos<sup>30</sup>. En estas publicaciones principalmente se tratan la diversidad de modelos para la sección eficaz de producción de *bremssstrahlung* y los aspectos de cálculo numérico subyacentes. Dado que lo que se estudia en dicho campo son las emisiones de un plasma maxwelliano que se mantiene en esta condición, no son directamente aplicables en nuestro caso, en que los electrones acelerados se detienen completamente, emitiendo así la radiación, posteriormente formándose otro plasma y repitiéndose el proceso.

Dentro de las aplicaciones a la aceleración láser, lo más habitual es emplear la integración directa de la función de distribución de los electrones con algún modelo sencillo de la sección eficaz de producción de *bremssstrahlung*, lo que supone tácitamente la aceptación de la hipótesis de blanco fino<sup>31,32</sup>. Sin embargo, existe también algún modelo de producción de blanco grueso<sup>33</sup>, relativamente sencillo en tanto que utilizan la descripción de Kramers, que más adelante se presentará en este trabajo<sup>34</sup>.

En este trabajo habremos de considerar el nivel de sofisticación de los modelos habitualmente empleados en el campo de la física médica y emplear algo de complejidad semejante para el caso de las distribuciones maxwellianas. El contexto imperante en dicho campo es la emisión de radiación electromagnética en un conversor grueso, que suele identificarse con el ánodo de un tubo de rayos X, en el que los electrones —con una energía única y definida—, se frenan completamente produciendo *bremssstrahlung* y rayos característicos. El rango de energías en que habitualmente trabajan se sitúa por debajo de los 100 keV, aunque en algunos casos pueden hasta aproximadamente los 300 keV<sup>35</sup>. Aparte de las aplicaciones médicas, este rango de energías ligeramente extendido puede interesar a otros campos como son los controles de seguridad o el tratamiento de alimentos mediante irradiación, por lo que frecuentemente suele considerarse también la extensión hasta algunos cientos de keV. Para nosotros es también necesario realizar esta extensión para permitir la consideración de las colas de las maxwellianas con que tratamos.

Debido a las desviaciones encontradas habitualmente en los modelos *ab initio* como consecuencia de las aproximaciones necesarias para la obtención de una formulación simple<sup>36</sup>, los modelos empleados en

$$\ast \rightarrow \boxed{e^- \rightarrow \gamma} \rightarrow T$$

<sup>30</sup> Cf. Refs. [69; 25]: J. Greene. «Bremsstrahlung from a Maxwellian Gas». *The Astrophysical Journal* **130** (1959), pág. 693. DOI: [10.1086/146759](https://doi.org/10.1086/146759); P. J. Brussaard y H. C. Van de Hulst. «Approximation formulas for nonrelativistic bremsstrahlung and average Gaunt factors for a Maxwellian electron gas». *Reviews of Modern Physics* **34**, 3 (1962), pág. 507. DOI: [10.1103/RevModPhys.34.507](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.34.507).

<sup>31</sup> Cf. Refs. [75; 145]: Y. Hayashi *et al.* «Estimation of photon dose generated by a short pulse high power laser». *Radiation protection dosimetry* **121**, 2 (2006), págs. 99-107. DOI: [10.1093/rpd/nci383](https://doi.org/10.1093/rpd/nci383); A. Sjögren *et al.* «High-repetition-rate, hard x-ray radiation from a laser-produced plasma: Photon yield and application considerations». *Review of scientific instruments* **74**, 4 (2003), págs. 2300-2311. DOI: [10.1063/1.1544054](https://doi.org/10.1063/1.1544054).

<sup>32</sup> Lo definiremos rigurosamente en §3.2.2.1 (pág. 65)

<sup>33</sup> Cf. Refs. [113; 99]: G. H. McCall. «Calculation of X-ray bremsstrahlung and characteristic line emission produced by a Maxwellian electron distribution». *Journal of Physics D: Applied Physics* **15**, 5 (1982), pág. 823. DOI: [10.1088/0022-3727/15/5/012](https://doi.org/10.1088/0022-3727/15/5/012); M. Lamoureux *et al.* «Bremsstrahlung from thick targets and a diagnostic for electron energy distributions». *Physical Review E* **62**, 3 (2000), pág. 4091. DOI: [10.1103/PhysRevE.62.4091](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.4091).

<sup>34</sup> Cf. §3.2.2.3 (pág. 66).

<sup>35</sup> Cf. Ref. [86]: R. Hill *et al.* «Advances in kilovoltage x-ray beam dosimetry». *Physics in Medicine & Biology* **59**, 6 (2014), R183. DOI: [10.1088/0031-9155/59/6/R183](https://doi.org/10.1088/0031-9155/59/6/R183).

<sup>36</sup> Cf. Refs. [96; 154]: H. A. Kramers. «On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum». *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **46**, 275 (1923), págs. 836-871. DOI: [10.1080/14786442308565244](https://doi.org/10.1080/14786442308565244); M. H. Unsworth y J. R. Greening. «Theoretical continuous and L-characteristic X-ray spectra for tungsten target tubes operated at 10 to 50kV». *Physics in Medicine and Biology* **15**, 4 (1970), págs. 621-630. DOI: [10.1088/0031-9155/15/4/001](https://doi.org/10.1088/0031-9155/15/4/001).

el campo de la física médica pueden clasificarse habitualmente como semiempíricos o como empíricos. Además de estos dos tipos de modelos, existe la posibilidad de recurrir a técnicas generales de simulación de transporte de partículas para estudiar una posible configuración experimental.

En la categoría de «semiempíricos» encontramos modelos que hacen uso de datos de origen experimental o computacional —habitualmente de simulación Montecarlo— para completar una base física, permitiendo así realizar los cálculos sobre ésta. Un ejemplo clásico de esto lo podemos encontrar en el trabajo de Birch y Marshall<sup>37</sup>, donde se construye un modelo aproximando la sección eficaz de producción de *bremstrahlung* con un ajuste polinómico con objeto de superar los errores inherentes a la teoría de Sommerfeld, la cual integran empleando la descripción del poder de frenado que proporciona la fórmula de Bethe<sup>38</sup>. La atenuación intrínseca se modela empleando la ley de Thomson-Whiddington<sup>39</sup> y la radiación característica se describe con una ley de escala puramente empírica. Una revisión más moderna basada en los mismos principios es la realizada por Cranley *et al*<sup>40</sup>.

Un análisis más completo es el que realizan Poludniowski y Evans<sup>41</sup>, que dan una descripción de la penetración de los electrones en el material mediante una descomposición en contribuciones debidas al primer cruce de un electrón por una profundidad arbitraria del blanco y a los múltiples cruces restantes. Estas contribuciones se ajustaron a una serie de modelos basados en la ley de Thomson-Whiddington, empleando resultados provenientes de simulaciones Montecarlo. Una implementación de este modelo se puede encontrar en el software comercial SpekCalc<sup>42</sup>. En este programa la sección eficaz de producción de *bremstrahlung* sigue uno de los modelos analíticos presentados en la Ref. [129], aunque el artículo original incluía también cálculos con la sección eficaz del NIST<sup>43</sup>, así como varias fórmulas de aproximación analíticas.

Por otro lado podemos encontrar los llamados métodos «empíricos», que renuncian plenamente a las descripciones *ab initio* centrándose en extender resultados empíricos o computacionales mediante técnicas numéricas. Un referente históricamente relevante es el denominado TASMIP<sup>44</sup> (*Tungsten Anode Spectral Model using Interpolating Polynomials*), desarrollado por Boone y Seibert, que extendía unos resultados experimentales obtenidos por Fewell *et al.*<sup>45</sup> —con alguna modificación— mediante polinomios de interpolación. Este método ha disfrutado de cierta popularidad en el campo de la física médica, y cuenta con una revisión más moderna, realizada por el mismo grupo, bajo la denominación TASMICS<sup>46</sup> (*Tungsten Anode Spectral Model using Interpolating Cubic Splines*), en este caso utilizando datos procedentes de simulaciones con el código MCNPX y mediante esplines cúbicos<sup>47</sup>.

<sup>37</sup> Cf. Ref. [16]: R. Birch y M. Marshall. «Computation of bremsstrahlung x-ray spectra and comparison with spectra measured with a Ge (Li) detector». *Physics in Medicine and Biology* **24**, 3 (1979), págs. 505-517. DOI: [10.1088/0031-9155/24/3/002](https://doi.org/10.1088/0031-9155/24/3/002).

<sup>38</sup> Cf. §34.2.3 y §34.4.1 en Ref. [123]: C. Patrignani *et al.* (Particle Data Group). «Review of particle physics». *Chinese physics C* **40**, 10 (2016), pág. 100001. DOI: [10.1088/1674-1137/40/10/100001](https://doi.org/10.1088/1674-1137/40/10/100001).

<sup>39</sup> Esta ley establece una relación cuadrática entre la energía cinética de los electrones y la profundidad de medio que atraviesan. Se darán más detalles en §3.2.5.1 (pág. 74), aunque no son necesarios para la comprensión del trabajo fuera de dicho apartado.

<sup>40</sup> Cf. Ref. [33]: K. Cranley *et al.* *Catalogue of diagnostic x-ray spectra and other data*. Inf. téc. 1997.

<sup>41</sup> Cf. Refs. [130; 129]: G. G. Poludniowski y P. M. Evans. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part I. Electron penetration characteristics in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2164-2174. DOI: [10.1118/1.2734725](https://doi.org/10.1118/1.2734725); G. G. Poludniowski. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part II. X-ray production and filtration in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2175-2186. DOI: [10.1118/1.2734726](https://doi.org/10.1118/1.2734726).

<sup>42</sup> Cf. Ref. [128]: G. Poludniowski *et al.* «SpekCalc: a program to calculate photon spectra from tungsten anode x-ray tubes». *Physics in medicine and biology* **54**, 19 (2009), N433-N438. DOI: [10.1088/0031-9155/54/19/N01](https://doi.org/10.1088/0031-9155/54/19/N01).

<sup>43</sup> La describiremos y emplearemos en §3.2.1.2.

<sup>44</sup> Cf. Ref. [20]: J. M. Boone y J. A. Seibert. «An accurate method for computer-generating tungsten anode x-ray spectra from 30 to 140 kV». *Medical physics* **24**, 11 (1997), págs. 1661-1670. DOI: [10.1118/1.597953](https://doi.org/10.1118/1.597953).

<sup>45</sup> Cf. Ref. [51]: T. R. Fewell, R. E. Shuping y K. R. Hawkins. *Handbook of computed tomography x-ray spectra*. US Department of Health, Human Services, Public Health Service, Food y Drug Administration, Bureau of Radiological Health, Rockville, MD, 1981.

<sup>46</sup> Cf. Ref. [77]: A. M. Hernandez y J. M. Boone. «Tungsten anode spectral model using interpolating cubic splines: Unfiltered x-ray spectra from 20 kV to 640 kV». *Medical physics* **41**, 4 (2014), pág. 042101. DOI: [10.1118/1.4866216](https://doi.org/10.1118/1.4866216).

<sup>47</sup> Una función que es polinómica de grado 3 o menor a trozos y de clase  $C^2$  en su dominio de definición.

En relación a esta dicotomía de enfoques, podemos argumentar a favor de los modelos semiempíricos que pueden arrojar predicciones teniendo en cuenta un mayor número de parámetros que los métodos empíricos, donde éstos están prefijados; que al tener sus componentes pleno sentido físico pueden aislarse para estudiar su influencia y permitir su simplificación o refinamiento, según lo que sea deseable; y que el tiempo de computación necesario es mucho menor que el de las simulaciones, aunque ligeramente mayor que los empíricos. Respecto a los métodos empíricos, su principal virtud es la mejora en la descripción del sistema que se consideró para modelizarlos —al fin y al cabo muchas veces se pueden identificar con simulaciones precomputadas o con resultados experimentales en sí—, lo que también supone que su mayor debilidad es la falta de flexibilidad para considerar la variación de los parámetros implicados.

Dado que uno de los objetivos de nuestro trabajo es ahondar en la física subyacente para conseguir una mejor comprensión del sistema, realizaremos un estudio continuista de los modelos semiempíricos, tomando como referentes principales los trabajos de las Refs. [16; 130; 129].

La magnitud que emplearemos en nuestro modelo para describir el comportamiento de los electrones en un medio material es la fluencia  $\phi(\mathbf{r})$ , *i. e.*, el número de partículas por unidad de área eficaz que han recorrido un punto  $\mathbf{r}$  del material. Esto es así porque vamos a estudiar la producción de *bremsstrahlung* empleando una sección eficaz  $y$ , de la definición de ésta se seguiría que el número de partículas emitidas por unidad de volumen en un entorno diferencial de  $\mathbf{r}$  vendría dado por

$$n_{\text{med}} \sigma_{\text{br}} \phi(\mathbf{r}),$$

donde  $n_{\text{med}}$  sería la densidad de átomos del medio material y  $\sigma_{\text{br}}$  la sección eficaz de producción. El número de partículas emitidas estaría dado por tanto por

$$N_{\text{emit}} = \iiint_{\mathbb{R}^3} n_{\text{med}} \sigma_{\text{br}} \phi(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (3.11)$$

Si consideramos un blanco cuyas dimensiones transversales sean suficientemente grandes, *i. e.*, que se pueda describir como el producto cartesiano  $[0, x_{\text{max}}] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  podemos reducir expresión anterior a una integral unidimensional sobre la profundidad de penetración  $x$  —*cf.* Fig. 3.21— empleando la integral de la fluencia en un plano, que denominaremos «fluencia planar»:

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(\mathbf{r}(x, \mathbf{x}^\perp)) d^2 \mathbf{x}^\perp,$$

donde  $\mathbf{x}^\perp$  es la componente vectorial en cada plano con  $x$  constante. No habría problema en permitir  $x_{\text{max}} = \infty$  para considerar un blanco semiinfinito, aunque, como el integrando está acotado superiormente por el alcance finito de los electrones<sup>48</sup>, en la práctica se podrá imponer un límite a la integral.

Con esta nueva magnitud describiríamos la producción con la integral

<sup>48</sup> Lo analizaremos con más detalle en §3.2.1.1 (pág. 47).

unidimensional

$$N_{\text{emit}} = \int_0^{x_{\text{max}}} n_{\text{med}} \sigma_{\text{br}} \Phi(x). \quad (3.12)$$

Observemos que en este modelo unidimensional estamos tratando todas las emisiones provenientes de los planos con  $x$  constante como provenientes de un único punto. Esto tiene dos consecuencias remarcables:

1. Los efectos del borde de material son despreciados. En la Fig. 3.21, los planos con  $x \gtrsim 0$  carecen de contribuciones que el modelo sí contaría (esto es, parte del plano donde ocurra producción quedaría fuera del material, con lo que realmente no la habría). Por otro lado, habría planos con  $x \lesssim 0$  en que sí habría una contribución, pero ésta no se recoge en el modelo. Cabe esperar que estos efectos se compensen, pero, en cualquier caso, cerca de la incidencia normal los efectos tienden a ser despreciables. Cerca de la incidencia tangencial no sería, al menos *a priori*, tan admisible esta aproximación. Entendemos que este caso queda fuera de nuestro estudio, pero, de plantearse, sería conveniente un análisis previo más detallado.
2. A la hora de considerar la atenuación intrínseca del material tomamos la magnitud  $x'$  como única. En realidad ésta sería una distribución sobre una variable aleatoria radial en dicho plano, luego estaremos dándole a la distribución real una atenuación intermedia. No es posible mejorar esto dentro del modelo unidimensional, pero sería un posible punto de extensión para otros modelos.

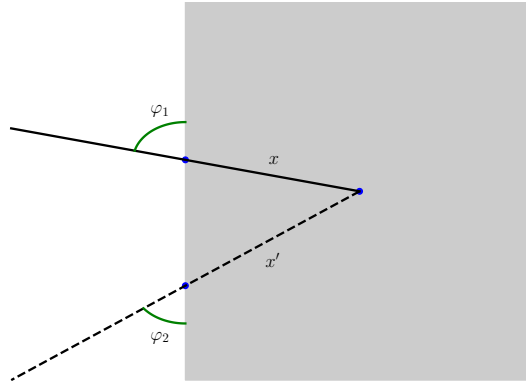


Figura 3.21: Configuración geométrica de un modelo de producción en profundidad, con emisiones de rayos X en la superficie de entrada («reflexión»). La línea continua muestra la trayectoria idealizada de un electrón que penetra con ángulo  $\varphi_1$  respecto a la superficie. La profundidad de penetración se indica con la variable  $x$ . Para cada una de estas profundidades se emitirían fotones potencialmente en todas las direcciones, que aquí podemos caracterizar por su ángulo de salida respecto de la superficie de incidencia  $\varphi_2$ . En estas circunstancias, el camino recorrido por el fotón sería  $x'$ . La vista es en el plano ecuatorial, pudiendo haber un desplazamiento perpendicular a este que caracterizaríamos por un ángulo polar añadido (cf. §3.2.1.3 (pág. 59)).

Normalmente estamos interesados no tanto en qué partículas que se emiten, sino en cuáles de éstas llegan a un determinado punto del espacio. Formalmente esto se puede describir de forma general mediante la inclusión de un operador  $\mathcal{K}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}')$  que indique qué fracción de partículas emitidas en  $\mathbf{r}$  alcanza  $\mathbf{r}'$  en el integrando de (3.11) o el de (3.12). En caso de que las trayectorias de los electrones en el material sean mucho menores que las distancias en las que las emisiones procedentes de la fuente se utilizarán<sup>49</sup>, podemos considerar la fuente como

<sup>49</sup> A título orientativo, un electrón de 100 keV recorre unos 15  $\mu\text{m}$  en tungsteno hasta detenerse. Una magnitud representativa es el denominado alcance CSDA (cf. Ref. [9]), que presentaremos posteriormente en la pág. 52, que tendrá relevancia en varios de los modelos que emplearemos (§3.2.1.1 y §4.1).



aproximadamente puntual y por lo tanto definir un único ángulo de emisión para cada punto del espacio. En la Fig. 3.21 esto equivaldría a que el esquema presentado se microscópico, condensándose bajo el punto de vista macroscópico en un «punto» sobre el que se medirían  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ .

Con esta consideración, describiremos la cantidad de partículas emitidas en dirección  $\hat{\Omega}$  será

$$N_\gamma(\hat{\Omega}) = \int_{\mathbb{R}^+} n_{\text{med}} \sigma_{\text{br}} \Phi(x) \mathcal{K}(x \rightarrow \hat{\Omega}) . \quad (3.13)$$

Identificaríamos el punto  $\mathbf{r}'$  de la descripción precedente como el que se obtiene al sumar al punto  $\mathbf{0}$  que representa a la fuente desde el punto de vista macroscópico un vector de radio la distancia a éste y dirección  $\hat{\Omega}$ . La información sobre la geometría de la fuente (por ejemplo, para la geometría de la Fig. 3.21, los ángulos  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y un posible ángulo polar sobre el plano representado) están contenidos  $\mathcal{K}$ , que denominaremos propagador, aunque no se ha explicitado para agilizar la notación.

Sin embargo, los efectos físicos de la radiación emitida dependen de la energía que tengan las partículas, por lo que es preciso extender el formalismo para considerar esta dependencia, la cual será doble: por un lado influirá la energía que tengan los electrones al producir *bremsstrahlung* y por otro la que obtengan los fotones así emitidos. En lugar de la fluencia (o de su integral a un plano) emplearemos una magnitud derivada (en sentido matemático) de ésta: la fluencia diferencial en energías<sup>50,51</sup>. Si denotásemos la energía (cinética)<sup>52</sup> del electrón como  $E_e$ , podríamos escribir dicha magnitud como  $\phi_{\text{en}}(E_e; \mathbf{r})$  y su interpretación debería hacerse como una distribución de probabilidad:  $\phi_{\text{en}}(E_e; \mathbf{r}) dE_e$  sería la fluencia de electrones en el punto  $\mathbf{r}$  debida a un entorno diferencial de la energía  $E_e$ . La integral en el plano  $\Phi_{\text{en}}(E_e; \mathbf{r})$ , que denominaremos fluencia diferencial planar sería análoga.

La expresión de la sección eficaz correspondiente tendría que modificarse para tener en cuenta que un electrón emite una distribución en energías de fotones. Emplearíamos entonces la sección eficaz diferencial en energía  $\frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma}(E_e, E_\gamma)$ , donde  $E_\gamma$  sería la energía del fotón emitido y hemos hecho explícita la dependencia en la energía del electrón<sup>53</sup>. Lo mismo ocurriría con el propagador  $\mathcal{K}$ , cuya dependencia explicitaremos también como  $\mathcal{K}(E_\gamma, x \rightarrow \hat{\Omega})$ <sup>54</sup>.

Con todo esto en consideración, la distribución de fotones en energía y ángulo sólido es la obtenida modificando (3.13) para obtener

$$f_\gamma(E_\gamma, \hat{\Omega}) = \int_0^{x_{\text{max}}} \int_0^\infty n_{\text{med}} \frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma}(E_e, E_\gamma) \Phi_{\text{en}}(E_e, x) \mathcal{K}(E_\gamma, x \rightarrow \hat{\Omega}) dE_e dx . \quad (3.14)$$

Esta expresión es la base sobre la que construiremos los modelos. Hasta el momento sólo hemos empleado la hipótesis de unidimensionalidad de la pág. 44 y de fuente microscópica. Diremos que (3.14) es la expresión general de un modelo de fuente microscópica por planos.

En la práctica, frecuentemente estamos interesados no en la distribución en ángulos  $f_\gamma(E_\gamma, \hat{\Omega})$  sino en lo que se recibe de ella en una región

<sup>50</sup> También llamada simplemente fluencia diferencial. En este trabajo mantendremos la denominación más explícita por claridad, ya que también podría estar distribuida en ángulos. Esto se verá más adelante en §3.2.1.2 (pág. 57).

<sup>51</sup> Aunque la magnitud es «diferencial», puede tener una componente discreta que podríamos entender como una delta de Dirac. En esencia es una distribución de probabilidad más una norma. Cf. §A.

<sup>52</sup> Obviaremos en lo sucesivo frecuentemente el término «cinética». Aun cuando nos acerquemos al dominio relativista, una «energía» no incluirá la debida a la masa.

<sup>53</sup> La notación nos recuerda que  $E_\gamma$  es una variable aleatoria mientras que  $E_e$  es un parámetro: un electrón produce un efecto físico (la emisión de la distribución), mientras que el número de fotones con energía  $E_\gamma$  es cero (es un conjunto de medida nula en  $\mathbb{R}$  con la medida usual). Podría ocurrir que el número de electrones también estuviera distribuido (y en realidad será así, incluso con una fuente monoenergética de electrones, como veremos en §3.2.1.1 (pág. 47)), pero esto es externo a la sección eficaz.

<sup>54</sup> En realidad un fotón podría sufrir dispersión inelástica, cambiando su energía y dejando el material en una dirección diferente a la de emisión. Aunque no hemos hecho esto explícito en la notación, podemos permitir que  $\mathcal{K}$  sea un objeto todavía un poco más complicado que lo recoja. En §3.2.1.3 (pág. 59) veremos que esto no es relevante en nuestro rango de energías.

de interés (ROI<sup>55</sup>) que podemos identificar con detector, un material a exponer, un tejido a irradiar... Sea  $S$  la región de la semi-2-esfera  $\mathbb{S}_+^2$  de ángulos de emisión subtendida por la ROI. La distribución de fotones que la alcanza vendrá dada por

$$f_\gamma^{\text{ROI}}(E_\gamma) = \int_{\hat{\Omega} \in S} H_{\text{ROI}}(E_\gamma, \hat{\Omega}) f_\gamma(E_\gamma, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega}, \quad (3.15)$$

donde  $H_{\text{ROI}}$  indica la fracción de fotones de una energía dada y un ángulo de emisión dado que alcanzan la ROI, siendo análogo a componente de propagación en el material del modelo, pero referida al medio circundante.

En caso de que las variaciones en el ángulo sólido subtendido  $\hat{\Omega}$  sean despreciables, podemos emplear la aproximación sugerida por el teorema del valor medio integral,

$$f_\gamma^{\text{ROI}}(E_\gamma) \approx f_\gamma(E_\gamma, \hat{\Omega}) \Omega_{\text{ROI}} H_{\text{ROI}}(E_\gamma, \hat{\Omega}), \quad (3.16)$$

donde  $\Omega_{\text{ROI}}$  es la medida del ángulo sólido subtendido por la ROI<sup>56</sup>.

A lo largo del apartado §3.2.1 revisaremos los ingredientes necesarios para la construcción de modelos:

1. Descripción de la penetración de los electrones en el medio, a partir de la fluencia diferencial planar  $\Phi_{\text{en}}$ .
2. Sección eficaz de producción de *bremsstrahlung*  $\frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma}$ .
3. Propagación de las emisiones, a través del operador  $\mathcal{K}(E_\gamma, x \rightarrow \hat{\Omega})$ .
4. Emisión de rayos característicos. No lo hemos incluido directamente en (3.14) por ser un proceso en el que la radiación secundaria juega un papel relevante, como veremos en la sección dedicada a ello.

Una vez estudiados estos aspectos, los enlazaremos posteriormente en §3.2.2 bajo diferentes hipótesis sobre el sistema, lo que dará lugar a diferentes modelos. El empleo de unos u otros dependerá de las condiciones que se den en una determinada situación experimental o aplicación, así como de si se desee emplear una simplificación analítica o un modelo numérico más preciso. En §3.2.3 se dará una representación general de los modelos obtenidos, aunque más adelante en §4.3 se retomarán para estudiar las diferentes predicciones para una aplicación de interés en el campo del trabajo.

El más completo de los modelos será analizado exhaustivamente en §3.2.4. Finalmente, en §3.2.5 veremos algunos defectos encontrados en los modelos de la bibliografía, que justifican la necesidad del desarrollo realizado.

<sup>55</sup> Por *Region Of Interest*.

<sup>56</sup> Con esta expresión se dispone de un modelo completo para la norma, habitualmente ignorada en la literatura específica. Cf. Ref. [130]: G. G. Poludniowski y P. M. Evans. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part I. Electron penetration characteristics in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2164-2174. DOI: [10.1118/1.2734725](https://doi.org/10.1118/1.2734725).



### 3.2.1 Componentes para la elaboración de modelos

#### 3.2.1.1 Fluencia de electrones en un conversor

En primer lugar debemos notar que en caso de trabajar con la hipótesis de blanco fino —*i. e.*, suponer que las variaciones en los electrones dentro del blanco son despreciables<sup>57</sup>— la fluencia en el conversor se identificará con la de entrada<sup>58</sup>, con lo que el cálculo de ésta sería trivial. Nos ocuparemos, por tanto, de la fluencia en conversores gruesos.

Para tratar con distribuciones en energía de electrones generando radiación en el material tenemos dos enfoques posibles:

1. Obtener la fluencia diferencial en energías usando directamente la distribución de electrones.
2. Emplear la fluencia que proceda de una fuente monoenergética para completar un modelo y posteriormente superponer los resultados de éste.

Ambos deben ser equivalentes si se cumple el principio de superposición lineal<sup>59</sup>, aunque el segundo tiene la ventaja de que facilita la aplicación directa a las fuentes convencionales de la física médica. Optaremos, por tanto, por esta última opción.

Construiremos un modelo general para la fluencia descomponiéndola en componentes más sencillas. Como paso previo es conveniente tener presente una definición equivalente, pero más práctica, que la vista anteriormente, que consiste en entender la fluencia como el valor esperado de la suma de longitudes de camino recorrido por las partículas en un volumen infinitesimal a escala macroscópica<sup>60</sup>.

Supongamos que un haz de electrones monoenergético incide en un blanco infinitamente grueso<sup>61</sup>. De acuerdo con la ley de los grandes números<sup>62</sup>, la cantidad de veces que los electrones crucen un plano perpendicular<sup>63</sup> al de incidencia a una profundidad  $x$  estará bien definida. Denominaremos *fracción de cruce*  $\eta(x)$  al cociente de dicho número con la cantidad de electrones inicial. Debe advertirse que es posible que  $\eta(x) > 1$ , en tanto que los electrones pueden desviarse hacia la dirección opuesta a la de incidencia (retrodispersión).

Estos cruces los producirán electrones con diferentes energías (debido a sus diferentes trayectorias y a las pérdidas estocásticas) y moviéndose en diferentes direcciones. El cociente de la energía cinética con la inicial,  $U$ , y el ángulo respecto a la dirección de incidencia,  $\Theta$ , son variables aleatorias cuya PDF (función de densidad de probabilidad<sup>64</sup>) conjunta en un plano a profundidad  $x$  dada<sup>65</sup> se denotará

$$u, \theta \mapsto f_{U, \Theta}(x; u, \theta) . \quad (3.17)$$

En principio esta expresión podría tener una dependencia adicional en la energía inicial no explícita en la notación<sup>66</sup>.

Por consideraciones geométricas elementales, el diferencial de camino recorrido  $ds$  estará relacionado con el ángulo de cruce  $\theta$  por

$$|\cos \theta| = \frac{dx}{ds} . \quad (3.18)$$

<sup>57</sup> Cf. pág. 271 en Ref. [126]; E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

<sup>58</sup> Lo veremos más adelante en §3.2.2.1 (pág. 65).

<sup>59</sup> A nivel formal esto es equivalente a que la aplicación de los operadores integrales sobre la producción de fotones (energía en un punto del espacio y tres coordenadas espaciales) y sobre la fuente (distribución sobre la energía inicial) sean intercambiables. Sin necesidad de recurrir al citado principio, esto vendría garantizado por el teorema de Fubini siempre que las funciones sean integrables. En el caso de la producción de fotones, esto no es directamente aplicable dado que la sección eficaz diverge a bajas energías para el fotón emitido, fenómeno que en alguna ocasión se ha denominado «catástrofe infrarroja». El problema es, sin embargo, remediable; pues aunque el número de fotones de energía tendiendo a cero diverge, la energía total es finita. Para más información cf. §100 (pág. 314) en Ref. [101]; L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Curso abreviado de física teórica*. 3.ª ed. Mir, Moscú, 1982.

<sup>60</sup> Aunque la equivalencia es fácil de justificar intuitivamente, una demostración matemáticamente rigurosa se puede encontrar en Ref. [120]; L. Papiiez y J. J. Battista. «Radiance and particle fluence». *Physics in Medicine & Biology* **39**, 6 (1994), pág. 1053. DOI: [10.1088/0031-9155/39/6/011](https://doi.org/10.1088/0031-9155/39/6/011).

<sup>61</sup> La desviación de esta hipótesis se analizará en §3.2.2.5 (pág. 67).

<sup>62</sup> Para una serie de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas la media muestral tiende a la poblacional con probabilidad 1 (formulación de Khintchine). *E. g.*, cf. pág. 314 en Ref. [157]; R. Vélez Ibarrola. *Cálculo de probabilidades 2*. 1.ª ed. Ediciones Académicas, S.A., 2004

<sup>63</sup> Nótese que al considerar el total en el plano estamos realizando tácitamente la integración en  $\mathbf{x}^\perp$  antes indicada.

<sup>64</sup> Para un resumen de las nociones de probabilidad cf. §A. Admitimos, como allí se detalla, que la función puede representar una componente discreta mediante la función generalizada delta de Dirac.

<sup>65</sup> Para ser más exactos son familias de variables aleatorias indexadas por el parámetro  $x$ . El punto y coma en las funciones de distribución recuerda esta diferencia.

Así pues, el total de fluencia diferencial en la fracción de energía en la región infinitesimal en torno a  $x$  viene dado por

$$\Phi_U(x, u) dx = \eta(x) \left( \int_0^\pi \frac{f_{U,\Theta}(x; u, \theta)}{|\cos \theta|} d\theta \right) dx. \quad (3.19)$$

Para simplificar (3.19) es habitual suponer que  $U$  y  $\Theta$  son independientes<sup>67</sup>, pese a que es natural esperar que los electrones con mayor energía cinética ( $u \lesssim 1$ ) apenas hayan experimentado deflexión ( $\theta \approx 0$ ). De ser así, el efecto de la distribución angular sería simplemente función de la profundidad  $x$ . En este trabajo introduciremos una formulación más completa para analizar la validez de la hipótesis de independencia, permitiendo trabajar sin pérdida de generalidad.

Empleando la función de probabilidad condicionada<sup>68</sup>

$$f_\Theta(x; \theta | u) = \frac{f_{U,\Theta}(x; u, \theta)}{\int f_{U,\Theta}(x; u, \theta') d\theta'}, \quad (3.20)$$

podemos reescribir (3.19) como

$$\Phi_U(x, u) dx du = \eta(x) f_U(x; u) d(x, u) dx du, \quad (3.21)$$

donde

$$f_U(x; u) = \int_0^\pi f_{U,\Theta}(x; u, \theta) d\theta, \quad (3.22)$$

$$d(x, u) = \int_0^\pi \frac{f_\Theta(x; \theta | u)}{|\cos \theta|} d\theta. \quad (3.23)$$

En estas expresiones,  $f_U$  es la distribución marginal<sup>69</sup> usual y  $d(x, u)$  es el cociente entre la distancia total recorrida por las partículas y la distancia total proyectada en la dirección incidencia, por lo que es responsable de conferir a (3.21) el sentido de fluencia en lugar de corriente de partículas<sup>70</sup>. Llamaremos por tanto a  $d(x, u)$  *desviación media*.

Si  $U$  y  $\Theta$  fuesen independientes,  $f_\Theta(x; \theta | u)$  sería una distribución marginal en  $\Theta$ , independiente del valor  $u$ , por lo que la desviación media no dependería tampoco de esta magnitud. De no ser así, la dependencia en  $u$ , entendida dicha variable como parámetro, permitirá evaluar los efectos de esta relación. La principal ventaja del formalismo introducido es que  $d(x, u)$  es un buen indicador de cómo la desviación de la hipótesis de independencia afecta al modelo, como veremos más adelante en §3.2.1.1.2.3 (pág. 55) y §3.2.4.1 (pág. 73).

Una aproximación útil para  $d(x, u)$  es su valor esperado en  $U$ , dado por

$$d(x) = \int_0^1 f_U(x; u) d(x, u) du = \int_0^\pi f_\Theta(x; \theta) |\sec \theta| d\theta, \quad (3.24)$$

donde  $f_\Theta$  es la distribución marginal en ángulos, análoga a (3.22). Llamaremos a  $d(x)$  *desviación media promedio*<sup>71</sup>.

<sup>66</sup> Estamos empleando aquí una notación usual de la teoría de la probabilidad:  $A$  designa a la variable aleatoria con función de densidad de probabilidad  $a \mapsto f_A(a)$ . La variable es muda, aunque suele emplearse la minúscula correspondiente a la representación empleada para la variable aleatoria.

<sup>67</sup> Así hacen Poludniowski y Evans en Ref. [130], al igual que en los modelos precursores.

<sup>68</sup> La que describe la probabilidad de un evento aleatorio dado el valor de otro, posiblemente no independiente, como parámetro. Para más detalles cf. e.g. págs. 70–72 en Vol. 2 de la Ref. [47]: W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, 2008. DOI: [10.1063/1.3034322](https://doi.org/10.1063/1.3034322).

<sup>69</sup> Dado un conjunto de variables aleatorias, la que describe un subconjunto de éstas (aquí unitario) con independencia de las demás. Cf. §A.

<sup>70</sup> Número de cruces por unidad de superficie.

<sup>71</sup> La notación, aunque un poco desafortunada, nos recuerda los dos promedios realizados: en ángulos y energías.

En (3.21) están recogidas las tres componentes del modelo de fluencia: la fracción de cruce  $\eta(x)$ , la distribución marginal en energías en función de la profundidad  $f_U(x; u)$  y la desviación media  $d(x, u)$ . Para la caracterización de éstas emplearemos en general dos enfoques: bien utilizar simulación Montecarlo para obtener una descripción extensible por métodos numéricos, o bien elaborar modelos analíticos que capturen las consideraciones físicas presentes.

Según las ideas del modelo de Poludniowski y Evans<sup>72</sup>, podrían separarse las contribuciones debidas al *primer cruce* por un plano,  $\eta^F(x)$ , del resto de cruces,  $\eta^M(x)$ , los *múltiples cruces* restantes. Evidentemente  $\eta(x) = \eta^F(x) + \eta^M(x)$ ; sin embargo, las distribuciones en energías y en ángulos podrían variar para cada componente. El mismo tratamiento empleado en (3.21) podría utilizarse a cada componente para obtener

$$\Phi_U(x, u) = \eta^F(x) f_U^F(x; u) d^F(x, u) + \eta^M(x) f_U^M(x; u) d^M(x, u). \quad (3.25)$$

En §3.2.5 (pág. 74) analizaremos la descomposición y veremos que no resulta demasiado útil para mejorar el modelo. Sin embargo, sí servirá para ilustrar algunos aspectos de la física subyacente, como es la falta de adecuación de los modelos clásicos del problema de primer cruce—que es equivalente a un experimento de transmisión— al problema completo.

### 3.2.1.1.1 Descripción de componentes de la fluencia

#### 3.2.1.1.1.1 Fracción de cruce

Algunas características que cabe esperar *a priori* sobre  $\eta(x)$  son las siguientes:

1.  $\eta(0) = \eta_0$ , un cierto valor mayor que uno, pues  $\eta^F(0) = 1$ .
2.  $\eta(\infty) = 0$ , pues en todo medio existen pérdidas de energía, con lo que la distancia recorrida debe ser siempre finita.
3.  $\eta'(0) > 0$ , esto es, que debe existir un incremento inicial en la fracción de cruce con la profundidad, debido a que los electrones que se dispersen escapando del material ( $x = 0$ ) no vuelven a atravesarlo. Este efecto competirá con el decremento natural en  $\eta^F$ , debido a la detención completa de algunos de los electrones. Sin embargo, dado que los modelos de blanco fino explican esta primera región como prácticamente no interactuante esto sugiere que el cambio en  $\eta^F$  sea despreciable, justificando nuestra hipótesis.

Estas afirmaciones se podrán comprobar posteriormente con los datos simulados (*cf.* Fig. 3.22 en la pág. 52).

Probablemente, el modo más sencillo de recoger la propiedad asintótica (2) es mediante el uso de una exponencial multiplicada por un factor polinómico para reproducir (3). Adicionalmente, para considerar (1) podemos combinar linealmente dicha función con otra exponencial. El modelo paramétrico así propuesto es:

$$\eta(x) \approx \left( A + B \left( \frac{x}{l} \right)^m \right) e^{-x/l}, \quad (3.26)$$

<sup>72</sup> Cf. Ref. [130]: G. G. Poludniowski y P. M. Evans. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part I. Electron penetration characteristics in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2164-2174. DOI: [10.1118/1.2734725](https://doi.org/10.1118/1.2734725).

donde  $l$  es un parámetro de escala,  $m$  un parámetro de forma y  $A$  y  $B$  determinan conjuntamente la norma y el peso de la combinación lineal. Este modelo podrá simplificarse aún más analizando los resultados de simulación, como veremos más adelante en §3.2.1.1.2.1 (pág. 52).

### 3.2.1.1.1.2 Distribución en energías

La descripción a nivel teórico de la distribución en energías en un blanco grueso es, hasta donde sabemos, un problema sin una solución analítica satisfactoria<sup>73</sup>; pese a que existe una solución para el caso de blancos finos<sup>74</sup> con las condiciones de que las pérdidas sean principalmente colisionales (lo que puede ser válido hasta las pocas decenas de keV) y que las pérdidas usuales en una colisión sean mucho menores que las energías atómicas (lo que invalidaría la descripción en gases)<sup>75</sup>.

Realizar una descripción analítica, si esto es acaso posible, es un problema ambicioso que hemos dejado fuera de los objetivos del presente trabajo. En su lugar, nos centraremos en dar una descripción numérica a partir de los datos obtenidos en la simulación. En tanto que los datos obtenidos en la simulación son cuentas por intervalo de energía, estos se corresponden con una función de densidad acumulativa (CDF) en términos probabilísticos. El método que proponemos para obtener una representación de la PDF (su derivada), es realizar una interpolación cúbica que preserve la monotonicidad mediante el algoritmo de Fritsch y Carlson<sup>76</sup>, de modo que esté garantizado que la probabilidad obtenida no sea negativa.

### 3.2.1.1.1.3 Distribución angular y régimen de difusión

Supongamos que se ha alcanzado la condición de difusión en una región del material, *i. e.*, que existe una región en que los electrones no tengan «memoria» de su trayectoria original debido a las dispersiones sufridas, de modo que todas las direcciones espaciales sean equiprobables. En ese caso, la dirección es una variable aleatoria en la 2-esfera  $\mathbb{S}^2$ , cuya densidad de probabilidad es la distribución uniforme en ella, dada por<sup>77</sup>

$$f_{\mathcal{U}(\mathbb{S}^2)}(\vartheta, \phi) = \frac{\sin \vartheta}{4\pi}, \quad (3.27)$$

donde el ángulo sólido  $(\vartheta, \phi)$  se refiere a un sistema de coordenadas que puede ser libremente escogido debido a la simetría. Tomando la normal a la dirección de penetración como eje polar identificaremos  $\vartheta := \theta$ .

Notemos que (3.27) tiene sentido para *puntos* en  $\mathbb{R}^3$ , pero necesitamos un modelo de *cruce* de planos para calcular la desviación media [(3.23)]. Considerando que la probabilidad de una partícula infinitesimalmente cercana a una superficie no se disperse debe ser proporcional a la inversa del camino a recorrer, medido esto en unidades de la distancia al plano —que es precisamente (3.18)—, y que la distribución tras cualquier cantidad de fenómenos de dispersión experimentados debe seguir siendo la de difusión encontramos

$$f_{\Theta}^{\text{diff}}(x; \theta | u) = \mathcal{N} \sin \theta |\cos \theta|, \quad (3.28)$$

<sup>73</sup> Cf. Ref. [130]: G. G. Poludniowski y P. M. Evans. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part I. Electron penetration characteristics in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2164-2174. DOI: [10.1118/1.2734725](https://doi.org/10.1118/1.2734725).

<sup>74</sup> Cf. Ref. [100]: L. D. Landau. «On the Energy Loss of Fast Particles by Ionisation, Collected Papers of LD Landau». *J. Phys. (USSR)* **8** (1944), págs. 201-205.

<sup>75</sup> De todos modos esta solución es habitualmente poco práctica. En términos formales, existe una variable aleatoria que es una cierta transformación de escala y traslación de la pérdida de energía (con los parámetros de la caracterización conocidos) que se distribuye con la función de densidad de probabilidad

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t \log t - \lambda t} \sin(\pi t) dt,$$

que es la llamada distribución de Landau. La energía que le queda a la partícula sigue, por cambio de variable aleatoria, una transformación de la misma familia. La evaluación de la expresión anterior suele ser computacionalmente costosa, se suele recurrir a otras aproximaciones en su lugar.

<sup>76</sup> Cf. Ref. [59]: F. N. Fritsch y R. E. Carlson. «Monotone piecewise cubic interpolation». *SIAM Journal on Numerical Analysis* **17**, 2 (1980), págs. 238-246. DOI: [10.1137/0717021](https://doi.org/10.1137/0717021).

<sup>77</sup> Cf. Ref. [53]: N. I. Fisher, T. Lewis y B. J. J. Embleton. *Statistical analysis of spherical data*. Cambridge University Press, 1993. DOI: [10.2307/2533420](https://doi.org/10.2307/2533420).

donde  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización, que debe tomar el valor  $\mathcal{N} = 1$  para cumplir con ésta.

Sustituyendo (3.28) en (3.23) y operando encontramos

$$d_{\text{diff}}(x, u) = \int_0^\pi |\sec \theta| f_{\Theta}^{\text{diff}}(x; \theta | u) d\theta = 2. \quad (3.29)$$

Por lo tanto, una cierta distribución angular será aproximadamente equivalente al comportamiento de difusión en el sentido de su efecto sobre la fluencia [(3.21)] si el valor esperado de  $|\sec \Theta|$  es aproximadamente 2. Por lo tanto, propondremos  $d(x, u) \approx 2$  como la definición de *régimen de difusión*<sup>78</sup>. La existencia de este régimen será analizada posteriormente en §3.2.1.1.2.3 (pág. 55).

Para el tratamiento numérico propondremos, igual que con la distribución en energías, el empleo del algoritmo de Fristch y Carlson<sup>80</sup>, aunque modificado para garantizar

$$\left. \frac{df_{\Theta}(x; \theta | u)}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (3.30)$$

que, además de tener pleno sentido físico<sup>81</sup>, es necesario para que (3.23) converja.

### 3.2.1.1.2 Verificación de componentes de la fluencia

Para comprobar las componentes anteriores realizamos una serie de simulaciones con el código Montecarlo FLUKA 2011.2c<sup>82</sup>. Como término fuente se emplearon electrones con energía cinética inicial  $E_0$  en el conjunto

$$\{20, 50, 80, 100, 125, 150, 200, 250, 300, 350, 400\} \text{ keV},$$

los cuales incidían perpendicularmente en un blanco semiinfinito de tungsteno<sup>83</sup>. Cada una de las simulaciones constaba de  $120 \cdot 10^6$  electrones primarios. La simulación se configuró para emplear un modelo de dispersión coulombiana<sup>84</sup> en lugar de la teoría de Molière<sup>85</sup>, para aumentar la precisión en los casos de menor energía. Los umbrales de producción y transporte se fijaron a 10 keV para electrones y a 1 keV para el caso de los fotones.

Las distribuciones de cruce de planos se obtuvieron mediante los detectores de cruce USRBDX integrados en el código, separando las componentes de primer cruce de las restantes mediante una rutina FLUSCW previamente validada<sup>86</sup>. Como ya indicamos anteriormente, los resultados son cuentas en una malla en que se distribuyen las magnitudes, *i. e.*, cuentas en

$$[U_i, U_{i+1}] \times [\Theta_i, \Theta_{i+1}];$$

por lo que los resultados directos se corresponden a funciones de densidad acumulada (CDF<sup>87</sup>). Los modelos, como antes indicamos, se ajustarán para reproducir estos valores integrales, aunque las propiedades de suavidad procederán de la función de probabilidad aproximada numéricamente.

<sup>78</sup> Conviene aclarar que en teoría de transporte el término difusión se emplea en ocasiones para referirse al régimen más allá de la región de dispersión múltiple en que la distribución angular deja de ser gaussiana<sup>79</sup>. Nuestra definición queda dentro de ésta (suponiendo que se alcanza), pero si existe algún régimen intermedio diferenciado es una cuestión que no hemos analizado.

<sup>79</sup> Este régimen es de especial importancia por su empleo en la teoría de dispersión de Molière, muy empleada en la simulación por el ahorro computacional que supone respecto del tratamiento coulombiano de la dispersión. Cf. Ref. [12]: H. A. Bethe. «Molière's theory of multiple scattering». *Physical Review* **89**, 6 (1953), pág. 1256. DOI: [10.1103/PhysRev.89.1256](https://doi.org/10.1103/PhysRev.89.1256).

<sup>80</sup> Cf. Ref. [59]: F. N. Fritsch y R. E. Carlson. «Monotone piecewise cubic interpolation». *SIAM Journal on Numerical Analysis* **17**, 2 (1980), págs. 238-246. DOI: [10.1137/0717021](https://doi.org/10.1137/0717021).

<sup>81</sup> Un plano no puede cruzarse en una dirección tangente a éste.

<sup>82</sup> Cf. Refs. [18; 49]: T. Böhlen *et al.* «The FLUKA Code: Developments and Challenges for High Energy and Medical Applications». *Nuclear Data Sheets* **120** (2014), págs. 211-214. DOI: [10.1016/j.nds.2014.07.049](https://doi.org/10.1016/j.nds.2014.07.049); A. Ferrari *et al.* *FLUKA: A multi-particle transport code*. CERN, Geneva, 2005. DOI: [10.5170/CERN-2005-010](https://doi.org/10.5170/CERN-2005-010).

<sup>83</sup> Trabajamos con este material por ser con diferencia el más empleado en el campo de la física médica. Otros materiales de  $Z$  alto deberían tener un comportamiento similar.

<sup>84</sup> Frecuentemente denominado *single scattering*.

<sup>85</sup> Consistente en agrupar varias dispersiones siguiendo un modelo gaussiano. Cf. nota 79 en la pág. 51

<sup>86</sup> Cf. Ref. [83]: G. Hernández y F. Fernández. *Simulation of bremsstrahlung spectra in general targets and its application to a model of a laser-driven irradiation source*. Comunicación oral en el 3rd Fluka Advanced Course and Workshop, LNF, Italia. 2014. URL: <https://indico.cern.ch/event/334606/contributions/779778/>.

<sup>87</sup> Cf. §A.

El mallado escogido ha sido lineal en energías, con un total de 100 divisiones, y lineal en la magnitud  $\Theta_{\text{sr}}$ , la medida de la superficie de  $\mathbb{S}^2$  con ángulo polar menor o igual que  $\Theta$ , con 50 divisiones en este caso. El mallado en  $\Theta_{\text{sr}}$ , que es el que proporciona por defecto la implementación de USRBDX, tiene la ventaja de que da lugar a un muestreo más uniforme<sup>88</sup>. En lo sucesivo emplearemos  $\Theta_{\text{sr}}$  en lugar de  $\Theta$ . Ambas están relacionadas por el cambio de variable aleatoria<sup>89</sup>

$$\cos \Theta = 1 - \frac{\Theta_{\text{sr}}}{2\pi}. \quad (3.31)$$

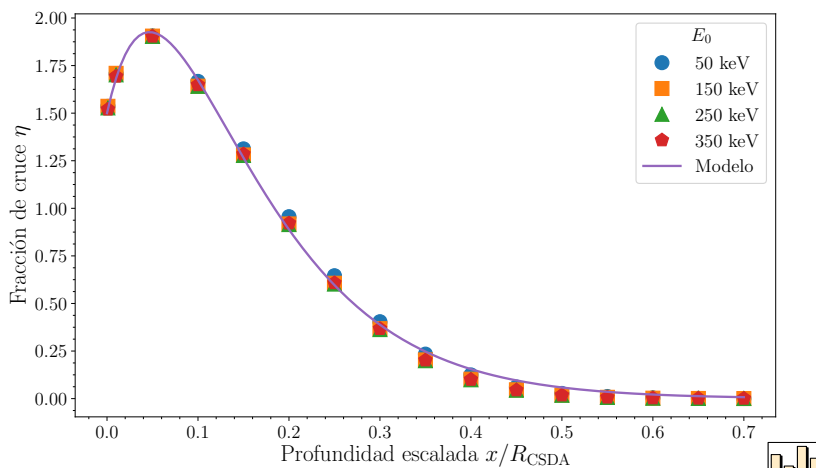
Por último, para encontrar una malla representativa para la profundidad en blanco, empleamos las divisiones del conjunto

$$\{0.01, 0.05, 0.10, 0.15, \dots, 1.15\} \cdot R_{\text{CSDA}}(E_0), \quad (3.32)$$

donde  $R_{\text{CSDA}}(E_0)$  es el alcance bajo la aproximación de frenado continuado<sup>90</sup> que puede obtenerse de las tabulaciones de Berger *et al*<sup>91,92</sup>. Es conveniente recordar que la máxima profundidad de penetración se sitúa aproximadamente en  $0.5R_{\text{CSDA}}$  en el caso de materiales de  $Z$  alto<sup>93</sup>, como es el caso del tungsteno aquí empleado.

#### 3.2.1.1.2.1 Fracción de cruce

Los resultados encontrados para la fracción de cruce  $\eta(x)$  se muestran en la Fig. 3.22, así como algunos ajustes que presentaremos posteriormente. Como puede observarse en la gráfica, hay muy poca variación entre los resultados como consecuencia de haber escalado  $x$  con  $R_{\text{CSDA}}$ . La dependencia en  $E_0$ , aunque pequeña —en el peor de los casos las diferencias tienen una magnitud absoluta de aproximadamente 0.03—, parece tener una relación de carácter funcional, que puede entenderse como una ligera dependencia en  $E_0$  de los parámetros del mejor ajuste.



<sup>88</sup> *E. g.*, la distribución uniforme en  $\mathbb{S}^2$  se muestrea igual en cada subintervalo, lo que no ocurriría tomando, por ejemplo, el ángulo polar.

<sup>89</sup> Que en términos de PDF viene dado por (A.5).

<sup>90</sup> La que surge de considerar las pérdidas promedio de forma continuada a lo largo de la trayectoria. Supone por lo tanto despreciar la naturaleza discreta de las pérdidas y, lo que es más importante, las fluctuaciones en la magnitud de éstas, el a veces denominado *straggling*.

<sup>91</sup> Cf. Ref. [9]: M. Berger *et al.* *Stopping-Power and Range Tables*. 2009. URL: <http://www.nist.gov/pml/data/star/>.

<sup>92</sup> Para una interfaz a estos datos cf. §D.4 (pág. 153).

<sup>93</sup> Cf. pág. 261 en Ref. [126]: E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

Figura 3.22: Fracción de cruce encontrada en las simulaciones como función de  $x/R_{\text{CSDA}}$  para diferentes valores de  $E_0$  y mejor ajuste a (3.34).

Como resultado de las simulaciones encontramos que se cumple<sup>94</sup>  $\eta(0) \approx 1.5$ , así que impondremos la condición  $\eta(0) = A := 1.5$  para simplificar (3.26). Como se puede observar también en la Fig. 3.22,

<sup>94</sup> Ya existía una observación similar, con la que esta cuadra, en Ref. [130]: G. G. Poludniowski y P. M. Evans. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part I. Electron penetration characteristics in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2164-2174. DOI: 10.1118/1.2734725.



los resultados son prácticamente independientes de la energía con el escalado con  $R_{\text{CSDA}}$ , así que definiremos un parámetro  $l'$  dado por

$$l \stackrel{\text{def}}{=} l' R_{\text{CSDA}}. \quad (3.33)$$

Ajustando así el modelo, los parámetros óptimos llevan al resultado  $m \approx 1$ . Restringiremos nuevamente el modelo con la condición  $m := 1$  para que éste venga dado por una función elemental. Con estas consideraciones

$$\eta(x) \approx \left(1.5 + B \frac{x}{l' R_{\text{CSDA}}}\right) \exp\left(-\frac{x}{l' R_{\text{CSDA}}}\right). \quad (3.34)$$

El mejor ajuste al promedio de las series de la Fig. 3.22 viene dado por

$$B \approx 3.3419 \quad (3.35a)$$

$$l' \approx 0.084868. \quad (3.35b)$$

La curva resultante es la que aparece representada en dicha figura.

#### 3.2.1.1.2.2 Distribución en energías

La Fig. 3.23 muestra algunas distribuciones en energía para los casos cualitativamente distintos de poca y gran profundidad en el material. La consideración de diferentes valores de  $E_0$  no cambia la interpretación que sigue. La distribución para el caso de primeros cruces —que es formalmente equivalente a un experimento de transmisión en blanco fino— se ajusta adecuadamente a una distribución de Landau<sup>95</sup> hasta  $x \gtrsim 0.3R_{\text{CSDA}}$ , pero a partir de ese punto no es ni de Landau ni gaussiana.

Las distribuciones totales son, en cambio, más complicadas, con una prolongada cola de bajas energías incluso a espesores reducidos debido a la retrodispersión. Pese a que ensayamos bastantes intentos de ajuste heurístico con algunas de las distribuciones usuales (gaussiana, de Weibull, de Moyal<sup>96</sup>, Beta no central y log-normal renormalizada entre otras<sup>97</sup>), ninguno de ellos fue capaz de describir aceptablemente la distribución. En consecuencia mantendremos la preferencia por las técnicas numéricas presentadas anteriormente.

<sup>95</sup> Cf. Ref. [100]: L. D. Landau. «On the Energy Loss of Fast Particles by Ionisation, Collected Papers of LD Landau». *J. Phys. (USSR)* **8** (1944), págs. 201-205.

<sup>96</sup> Habitualmente empleada para aproximar la distribución de Landau. Cf. pág. 50.

<sup>97</sup> Cf. Ref. [161]: C. Walck. *Handbook on statistical distributions for experimentalists*. Internal Report SUF-PFY/96-01. University of Stockholm, 2007.

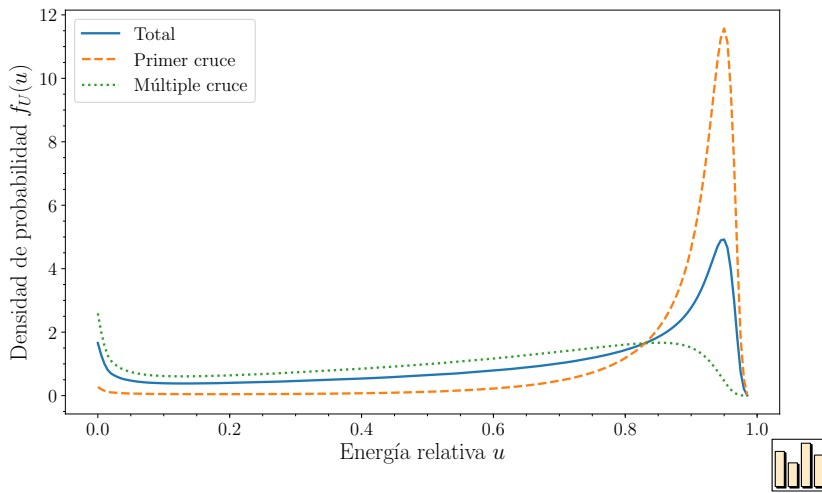
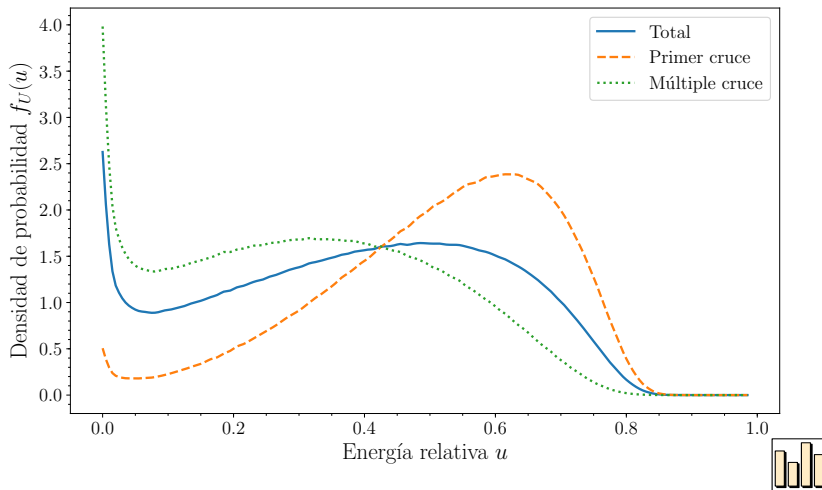
(a) Poca profundidad ( $x = 0.1R_{\text{CSDA}}$ )(b) Gran profundidad ( $x = 0.4R_{\text{CSDA}}$ )

Figura 3.23: Distribuciones marginales de energía obtenidas en el proceso de simulación.



3.2.1.1.2.3 Distribución angular y régimen de difusión

A modo de ejemplo, la Fig. 3.24 recoge las curvas de contorno de la CDF conjunta de energía y ángulo para una profundidad de  $x = 0.4R_{\text{CSDA}}$ , pudiendo observarse en ella que las magnitudes no son independientes. Volveremos a esta cuestión posteriormente al analizar su efecto sobre la desviación media.

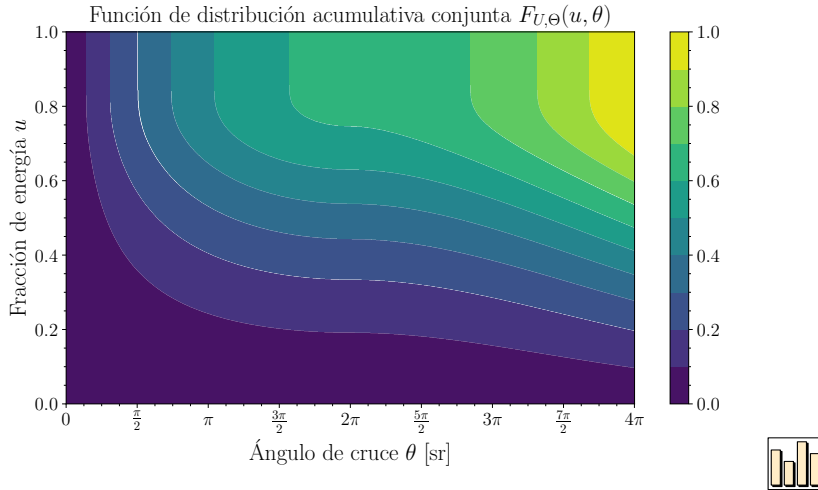


Figura 3.24: Función de distribución acumulativa conjunta para el caso  $E_0 = 100 \text{ keV}$ ,  $x = 0.40R_{\text{CSDA}}$ .

Para obtener una primera impresión cualitativa del efecto de la profundidad  $x$  en la distribución de los ángulos respecto a la normal a los planos puede observarse la Fig. 3.25, donde se puede apreciar el rápido cambio en la forma de la distribución de probabilidad: en torno a  $x = 0.1R_{\text{CSDA}}$  la distribución alcanza una forma que se mantiene hasta aproximadamente  $x = 0.6R_{\text{CSDA}}$ . A partir de este punto la distribución tiende a simetrizarse, asemejándose a la distribución de difusión [(3.28)], como se puede observar en la serie correspondiente a  $x = 0.9R_{\text{CSDA}}$ .

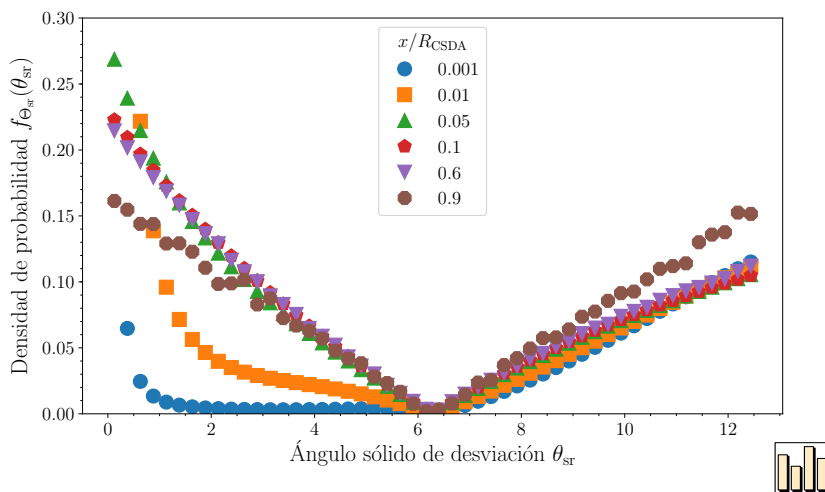


Figura 3.25: Series en  $x$  de las funciones de densidad de probabilidad marginales para la componente angular.

Recordando que los datos de simulación se corresponden a intervalos de la forma  $[u_i, u_{i+1}]$ , emplearemos para el cálculo de  $d(x, u)$  la

aproximación

$$f_{\Theta}(x; \theta) \frac{u_{i+1} - u_i}{2} d\theta = P \left\{ \Theta \in [\theta, \theta + d\theta] \mid U = \frac{u_{i+1} - u_i}{2} \right\} \quad (3.36)$$

$$\approx P \left\{ \Theta \in [\theta, \theta + d\theta] \mid U \in [u_{i+1}, u_i] \right\},$$

así como el algoritmo de Frisch y Carlson modificado, presentado en la pág. 51.

En la Fig. 3.26 podemos ver la desviación media calculada empleando la técnica antes expuesta. En ella queda claro que las colas de altas energía de la distribución muestran menos desviación, como adelantábamos en la pág. 48, y que este comportamiento está más claro cuando más en profundidad estudiamos el transporte en el material. Sin embargo, en una expresión que contenga la fluencia en el integrando, como (3.21), esta contribución es menos importante debido al factor  $f_U$  (cf. Fig. 3.23), y todavía menos en una integral de producción de *bremsstrahlung*, donde la sección eficaz decae con la energía del electrón —cf. §3.2.1.2 (pág. 57)—.

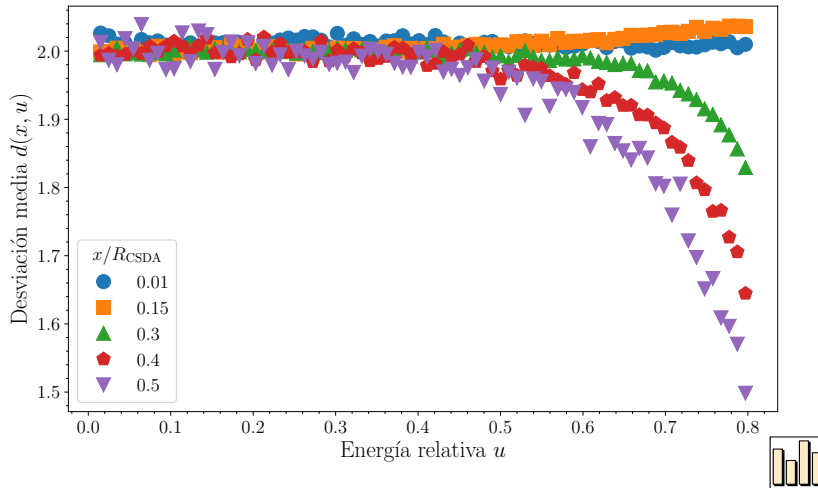


Figura 3.26: Desviación media obtenida a partir de las simulaciones para el caso de  $E_0 = 100$  keV.

Por lo tanto, suponiendo que la dependencia en  $u$  sea poco relevante, podemos integrar en ella y representar  $d(x)$  para tener una mejor idea de la dependencia en la profundidad. Esto se muestra en la Fig. 3.27, donde queda patente que nuestra noción de difusión se alcanza rápidamente. En  $x = 0.05R_{\text{CSDA}}$  encontramos  $d(x) \approx 1.9$ , así que podemos suponer que estamos en régimen de difusión en el sentido dado en §3.2.1.1.3 (pág. 50). Para  $x \gtrsim 0.6R_{\text{CSDA}}$ , las series son más ruidosas, como muestran las barras de error de la figura. En cualquier caso, como decíamos antes, el comportamiento exacto no es ya muy relevante (cf. Fig. 3.22).

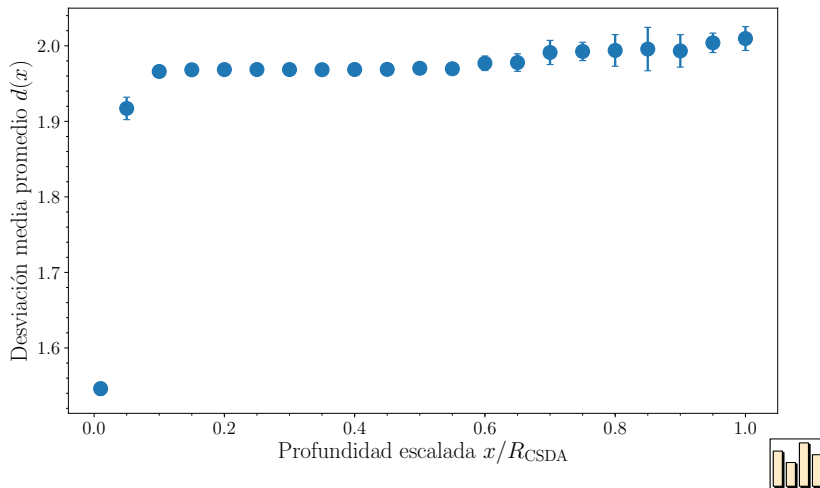


Figura 3.27: Valor medio en la energía inicial  $E_0$  de la desviación media promedio  $d(x)$ , mostrando mediante las barras de error la máxima diferencia en  $E_0$ .

### 3.2.1.2 Secciones eficaces de producción

La descripción completa del proceso elemental de emisión de *bremstrahlung* vendría dada por una sección eficaz tres veces diferencial<sup>98</sup>: en la energía del fotón emitido, en la dirección de emisión de éste respecto a la de incidencia del electrón y en el cambio en la dirección del electrón; además de la dependencia en la energía cinética del electrón en el momento de emisión<sup>99</sup>. La dependencia direccional puede ignorarse integrando en las dos variables angulares, con lo que se obtendría la sección eficaz (una vez) diferencial  $\frac{d\sigma_{br}}{dE_\gamma}$ , que es la que hemos incluido en (3.14). Esta aproximación se sustenta en el comportamiento errático de las trayectorias de los electrones, similares al régimen de difusión —cf. §3.2.1.1.2.3 (pág. 55)— y a que la sección eficaz completa no es tan direccional como en el régimen relativista<sup>100</sup>.

Seltzer y Berger prepararon unas tablas exhaustivas de valores de la sección eficaz<sup>101</sup> que se consideran habitualmente «la representación teórica más confiable de los espectros de energía de *bremstrahlung* disponibles actualmente»<sup>102</sup>. En la bibliografía también se refieren a ella mediante la denominación NIST<sup>103</sup>. En los casos en que vayamos a trabajar con integración numérica sobre un integrando que incluya por lo menos una expresión numérica (particularmente la función de distribución de la energía  $f_U(x; u)$  es una candidata a ello en un modelo más completo), encontramos también en interpolar estas tablas la opción más atractiva. Un estudio detallado del efecto de algunas aproximaciones de la sección eficaz se puede encontrar en la Ref. [129]<sup>104</sup>, a la que referimos al lector interesado en ello. La conclusión de dicho estudio coincide con la preferencia por la representación de Seltzer y Berger.

Para manejar estos datos partiremos de las tabulaciones incluidas en PENELOPE<sup>105</sup>. Estas tablas se prepararon con objeto de que la energía del electrón fuera interpolada en escala logarítmica con un espline cúbico natural, mientras que la malla empleada en la energía relativa ( $E_\gamma/E_e$ ) ya está escogida para permitir reproducir el comportamiento de la

<sup>98</sup> Sin embargo, dos de las variables son ángulos en el espacio, por lo que la dimensión del espacio sobre el que se distribuye es cinco.

<sup>99</sup> Una revisión general puede encontrarse en las Refs. [95; 103]: H. Koch y J. Motz. «Bremstrahlung cross-section formulas and related data». *Reviews of modern physics* **31**, 4 (1959), págs. 920-956. DOI: [10.1103/RevModPhys.31.920](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.31.920); A.-S. T. Leclère. *An evaluation of bremsstrahlung cross-sections for keV to GeV Electrons*. Tesis de mtría. University of Florida, 2001.

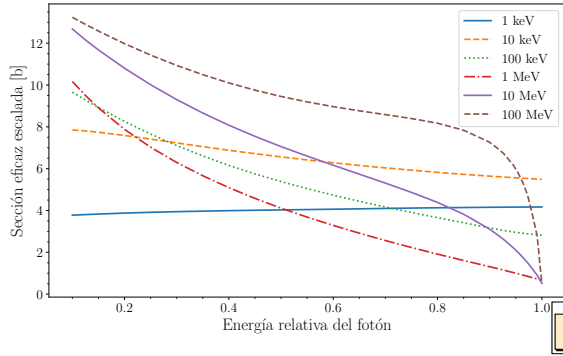
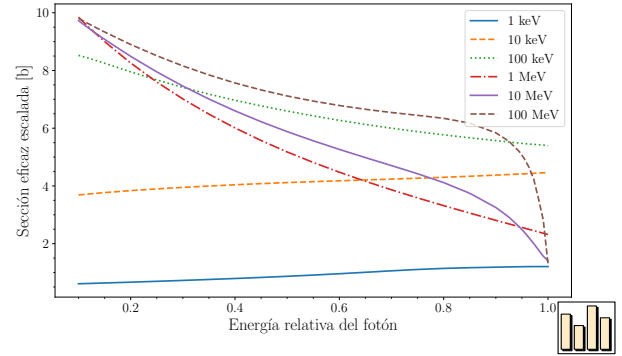
<sup>100</sup> La diferencia para un electrón de 50 keV es de un factor 3 según el ángulo, pero en el régimen relativista es de varios órdenes de magnitud. Cf. pág. 27 en Ref. [103]: A.-S. T. Leclère. *An evaluation of bremsstrahlung cross-sections for keV to GeV Electrons*. Tesis de mtría. University of Florida, 2001.

<sup>101</sup> Cf. Refs. [143; 142]: S. M. Seltzer y M. J. Berger. «Bremstrahlung spectra from electron interactions with screened atomic nuclei and orbital electrons». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms* **12**, 1 (1985), págs. 95-134. DOI: [10.1016/0168-583X\(85\)90707-4](https://doi.org/10.1016/0168-583X(85)90707-4); S. M. Seltzer y M. J. Berger. «Bremstrahlung energy spectra from electrons with kinetic energy 1 keV–10 GeV incident on screened nuclei and orbital electrons of neutral atoms with Z=1–100». *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **35**, 3 (1986), págs. 345-418. DOI: [10.1016/0092-640X\(86\)90014-8](https://doi.org/10.1016/0092-640X(86)90014-8).

sección eficaz mediante una interpolación lineal directa. La magnitud tabulada allí es la denominada sección eficaz escalada

$$\frac{\beta^2}{Z^2} E_\gamma \frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma}, \quad (3.37)$$

donde  $\beta$  es el cociente de la velocidad del electrón por la de la luz; que tiene una dependencia más suave, como se muestra en la Fig. 3.28.

(a) Aluminio ( $Z = 13$ )(b) Oro ( $Z = 79$ )

Alternativamente, en caso de que estemos interesados en producir modelos analíticos sencillos, podemos considerar que existe una relación aproximadamente lineal entre la sección angular diferencial escalada  $E_\gamma \frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma}$  y la energía escalada  $E_\gamma/E_{e^-}$ , con lo que se puede ensayar una aproximación de la forma

$$\frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma}(E_{e^-}, E_\gamma) \propto \begin{cases} E_\gamma^{-1} - bE_{e^-}^{-1} & \text{si } E_{e^-} > E_\gamma \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (3.38)$$

donde  $b \leq 1$  es un parámetro de escala adimensional que se ajustaría a la sección. La condición que aparece en la definición a trozos de (3.38) obedece a garantizar que sólo se proporcione una predicción no negativa, pues no tendría de otro modo sentido físico. Esta aproximación fue estudiada por Findlay<sup>106</sup>, que indicó que el valor  $b = 0.83$  reproducía adecuadamente los resultados de Seltzer y Berger<sup>107</sup> en el rango 5–20 MeV para la energía cinética del electrón.

En nuestro rango de energías, cabe revisar el ajuste del modelo de sección eficaz para proporcionar una mejor descripción. Integrando numéricamente (3.14) variando el límite superior de integración, se puede comprobar que, para un valor  $E_\gamma$ , la mayor parte de su producción procede de electrones con una energía entre dos y tres veces su valor. En consecuencia, al considerar un electrón de energía  $E_{e^-}$  es más importante reproducir el comportamiento a bajas energías de la sección eficaz escalada  $\frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma}(E_{e^-}, E_\gamma)$  que su extremo en  $E_\gamma \lesssim E_{e^-}$ . El valor  $b = 1$ , que corresponde a la nulidad de la probabilidad de emitir un fotón con toda la energía del electrón, es el que mejor reproduce con esa consideración la sección<sup>108</sup>.

<sup>102</sup> En Ref. [134]: F. Salvat y J. M. Fernández-Varea. «Overview of physical interaction models for photon and electron transport used in Monte Carlo codes». *Metrologia* **46**, 2 (2009), S112-S138. DOI: 10.1088/0026-1394/46/2/S08.

Figura 3.28: Valores de la sección eficaz escalada [(3.37)]. Esta figura es análoga a la 3.13 en Ref. [135]: F. Salvat, J. M. Fernández-Varea y J. Sempau. «PENELOPE-2006: A code system for Monte Carlo simulation of electron and photon transport». *Workshop Proceedings*. OECD Publishing, 2006, págs. 1-281, sirviendo así como comprobación de los datos utilizados.

<sup>103</sup> Los autores pertenecían al National Bureau of Standards, que posteriormente cambió su nombre a National Institute of Standards and Technology (NIST).

<sup>104</sup> G. G. Poludniowski. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part II. X-ray production and filtration in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2175-2186. DOI: 10.1118/1.2734726.

<sup>105</sup> Cf. Ref. [135]: F. Salvat, J. M. Fernández-Varea y J. Sempau. «PENELOPE-2006: A code system for Monte Carlo simulation of electron and photon transport». *Workshop Proceedings*. OECD Publishing, 2006, págs. 1-281.

<sup>106</sup> Cf. Ref. [52]: D. Findlay. «Analytic representation of bremsstrahlung spectra from thick radiators as a function of photon energy and angle». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **276**, 3 (1989), págs. 598-601. DOI: 10.1016/0168-9002(89)90591-3.

Una justificación completa de este ajuste tendrá que esperar a §3.2.2.1 (pág. 117), donde se planteará un modelo completo a partir de esta sección eficaz. Con los resultados que allí se indican, encontraremos un motivo de peso para la elección  $b = 1$ . Además, en la §4.3.2 (pág. 117) estudiando el comportamiento de otros parámetros derivados del modelo encontraremos un argumento adicional en favor de este criterio.

### 3.2.1.3 Propagación de las emisiones

Como es de sobra conocido, un haz de fotones propagándose en un medio experimentará diferentes procesos, siendo los más importantes:

- Efecto fotoeléctrico, por el que el fotón se absorbe completamente, transfiriendo toda su energía a un electrón.
- Dispersión Compton, en el que experimenta una colisión inelástica con un electrón, transfiriendo parte de su energía.
- Producción de pares, en que se producen una partícula y su correspondiente antipartícula. Este efecto puede darse o bien en el campo de un núcleo o bien en el de un electrón<sup>109</sup>.
- Dispersión Rayleigh, en que el fotón cambia de dirección de forma elástica.
- Reacciones fotonucleares, en que éste es absorbido por un núcleo que después se desintegrará.

Cada uno de estos procesos tendrá asociada una sección eficaz, constituyendo la suma de todas ellas una sección eficaz total.

Las magnitudes de estas componentes se muestran en la Fig. 3.29. Como es bien conocido, a energías bajas el fotoeléctrico es el dominante, a energías altas lo es la producción de pares y en el rango intermedio la dispersión Compton predomina. El límite entre los tres regímenes depende del material, fundamentalmente a través de su número atómico  $Z$ , como bien ilustra la Fig. 3.29, que recoge un material de número atómico reducido (carbono) y uno en el que éste es elevado (plomo).

Con lo visto hasta ahora, de la definición de sección eficaz se sigue la definición de *sección eficaz macroscópica* o *coeficiente de atenuación*

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sigma n, \quad (3.39)$$

donde  $n$  es el número de partículas por unidad de volumen del medio. Este coeficiente dependerá de la energía del fotón (a través de la sección eficaz) y del material del medio (a través de ambos factores).

La magnitud  $\mu$  tiene unidades de inverso de longitud y su interpretación es sencilla. Supongamos que una cantidad de partículas  $N(\mathbf{r})$  atraviesan una cantidad infinitesimal de medio  $ds$  en dirección a un punto  $\mathbf{r}'$ , en el que queremos conocer la cantidad de fotones que llegan tras su transporte. En ese caso, la variación en el número de partículas que no experimenta ningún proceso viene dada por

$$dN(\mathbf{r}) = -\mu N(\mathbf{r}) dx. \quad (3.40)$$

<sup>107</sup> Cf. Ref. [142]: S. M. Seltzer y M. J. Berger. «Bremsstrahlung energy spectra from electrons with kinetic energy 1 keV–10 GeV incident on screened nuclei and orbital electrons of neutral atoms with  $Z=1-100$ ». *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **35**, 3 (1986), págs. 345-418. DOI: 10.1016/0092-640X(86)90014-8.

<sup>108</sup> No especificaremos en este caso el parámetro de proporcionalidad que hay en (3.38). A la hora de la aplicación del modelo la norma total se fijará por las medidas, por lo que será irrelevante.

<sup>109</sup> A veces se tratan como independientes, recibiendo este último caso la denominación de «producción de triples», por la emisión adicional del electrón atómico.

Resolviendo la ecuación diferencial asociada

$$N(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}') = N(\mathbf{r}') e^{\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mu(E_\gamma; s) ds}, \quad (3.41)$$

donde aparece la integral de línea en el segmento orientado de  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{r}'$  y donde se ha explicitado la dependencia en la energía del fotón  $E$  y en el medio (a través del punto del espacio parametrizado por  $s$ ).

No debemos caer en el error de pensar que, con toda generalidad, el segundo factor que aparece en el lado derecho de (3.41) el propagador  $\mathcal{K}(E_\gamma, \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}')$  que buscábamos, pues cabe la posibilidad de que radiación inicialmente dispersada alcance de nuevo, mediante procesos subsiguientes, un entorno del punto  $\mathbf{r}'$ .

Veremos que en algunos casos la atribución anterior sí es lícita. La probabilidad de que se produzca un tipo de evento u otro depende sensiblemente de la energía del fotón, como habíamos visto ya en la Fig. 3.29. En el caso de los materiales con número atómico elevado y para el rango por debajo de los MeV, el efecto predominante es el fotoeléctrico. Esto simplifica notablemente el tratamiento, pues, en caso de que el fotón sufra una interacción éste desaparecerá completamente. Podemos reducir, por tanto, el comportamiento de la propagación a la forma

$$\mathcal{K}(E_\gamma, \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}') = \exp\left(\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mu(E; \mathbf{r}''(s)) ds\right). \quad (3.42)$$

En un medio homogéneo la expresión (3.42) toma la forma

$$\mathcal{K}(E_\gamma, \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}') = e^{\mu(E_\gamma)t}, \quad (3.43)$$

donde  $t$  es la cantidad de material atravesado.

El caso general es más complicado, pues un fotón dispersado podría cambiar de energía, lo que requeriría construir un operador un poco más sofisticado para recoger la información, de la forma

$$\mathcal{K}(E_\gamma \rightarrow E'_\gamma, \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'). \quad (3.44)$$

Aunque trataremos esto más adelante en §3.3.2 (pág. 82), al no ser necesario para lo que constituye estrictamente la producción de rayos X pospondremos a dicha sección su análisis, evitando complicar más el modelo.

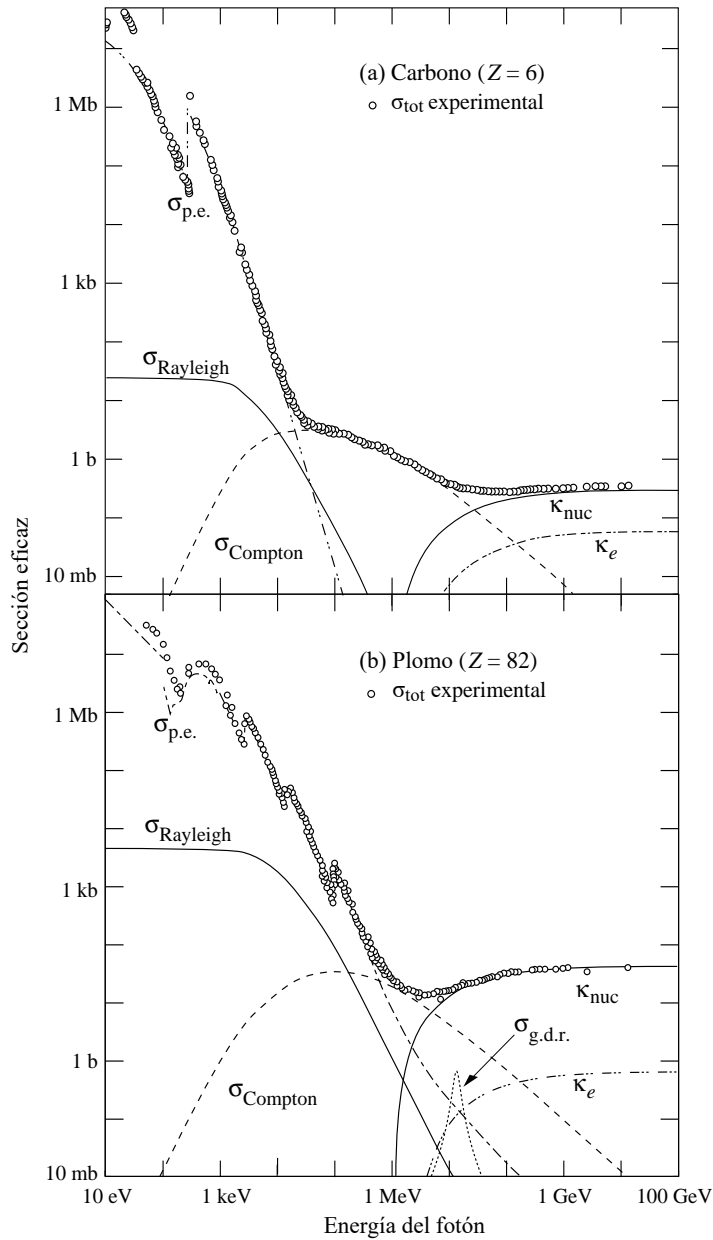


Figura 3.29: Secciones eficaces para los diferentes procesos que experimenta un fotón en su recorrido por un medio. La parte superior de la figura muestra un caso con número atómico reducido (carbono) y la inferior uno elevado (plomo). La imagen está adaptada (con permiso de los autores) de Ref. [123]. La notación empleada es la siguiente:

- $\sigma_{\text{p.e.}}$ : Efecto fotoeléctrico.
- $\sigma_{\text{Compton}}$ : Dispersión Compton.
- $\kappa_{\text{nuc}}$ : Producción de pares en el campo del núcleo.
- $\kappa_e$ : Producción de pares en el campo de un electrón.
- $\sigma_{\text{Rayleigh}}$ : Dispersión Rayleigh.
- $\sigma_{\text{g.d.r.}}$ : Reacciones fotonucleares (asociadas a la resonancia dipolar gigante, *cf.* Ref. [11]).

Los coeficientes de atenuación lineal empleados en este trabajo se tomarán directamente de la Ref. [87]<sup>110,111</sup>, extendiéndolos mediante el uso de interpolación lineal sobre la representación en escala logarítmica. Emplear esta escala en la aplicación del método es fundamental para encontrar resultados suaves, físicamente aceptables<sup>112</sup>.

En el modelo representado en la Fig. 3.21 (pág. 44) resulta de aplicar el teorema del seno al triángulo que allí aparece que la distancia recorrida por el fotón es

$$x' = x \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}. \quad (3.45)$$

En caso de que además hubiera un desplazamiento perpendicular al plano representado, podríamos indicar éste con un ángulo polar  $\vartheta \in [0, \pi]$  y expresar

$$x' = x \sin \varphi_1 \csc \varphi_2 \csc \vartheta, \quad (3.46)$$

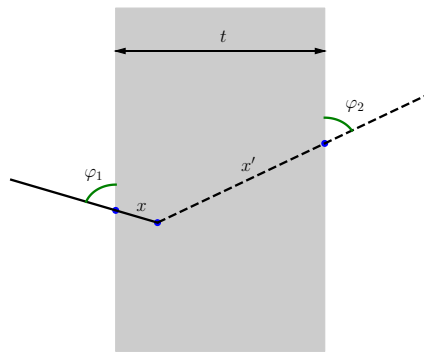
que es la expresión más completa para la descripción geométrica dentro del modelo con el que estamos trabajando.

Una simplificación usual en relación a la bibliografía<sup>113</sup> es considerar que el ángulo de entrada es prácticamente normal y aproximar  $\sin \varphi_1 \approx 1$ , con lo que

$$x' \approx x \csc \varphi_2 \csc \vartheta. \quad (3.47)$$

Una descripción geométrica alternativa para el caso de producción transmisión se recoge en la Fig. 3.30. En este caso el blanco tiene un espesor finito  $t$ . Puede demostrarse fácilmente que la distancia recorrida por el fotón viene dada por<sup>114</sup>

$$x' = \frac{t - x \sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}. \quad (3.48)$$



<sup>110</sup> J. H. Hubbell y S. M. Seltzer. *Tables of X-ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients from 1 keV to 20 MeV for Elements Z = 1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest*. 1996. URL: <http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/cover.html>.

<sup>111</sup> Para una interfaz a estos datos cf. §D.4 (pág. 153).

<sup>112</sup> Esto ocurre porque el rango de variación de los coeficientes es muy elevado. Habitualmente se representan en escala logarítmica, con lo que la elección es razonable también *a priori*.

<sup>113</sup> Nosotros mismos empleamos tácitamente dicha aproximación en la descripción del modelo al publicarlo originalmente en Ref. [78]: G. Hernández y F. Fernández. «A model of tungsten anode x-ray spectra». *Medical Physics* **43**, 8 (2016), págs. 4655-4664. DOI: [10.1118/1.4955120](https://doi.org/10.1118/1.4955120).

<sup>114</sup> El vector del punto de entrada al de emisión es  $x(\sin \varphi_1, -\cos \varphi_1)$  y el de este punto al de salida es  $x'(\sin \varphi_2, \cos \varphi_2)$ . Imponiendo que la primera componente sea igual a  $t$  se sigue la solución.

Figura 3.30: Configuración geométrica de un modelo de producción en profundidad en un blanco de espesor  $t$ . La línea continua muestra la trayectoria idealizada de un electrón que penetra con ángulo  $\varphi_1$  respecto a la superficie. La profundidad de penetración se indica con la variable  $x$ . Para cada una de estas profundidades se emitirían fotones en todas las direcciones, que aquí podemos caracterizar por su ángulo de salida respecto de la superficie opuesta a la de entrada  $\varphi_2$ . En estas circunstancias, el camino recorrido por el fotón sería  $x'$ . La vista es en el plano ecuatorial, pudiendo haber un desplazamiento perpendicular a este que caracterizaríamos por un ángulo polar añadido.



## 3.2.1.4 Rayos característicos

La radiación característica se produce como consecuencia de las emisiones en transiciones atómicas, producidas a su vez por la aparición de una vacante en una capa interna. En el rango de energías del presente trabajo los procesos por los que estas vacantes se crean son bien la interacción de los electrones con los átomos del medio («ionización por impacto») o bien porque los fotones previamente emitidos experimenten un efecto fotoeléctrico o dispersión Compton<sup>115</sup>.

Las creación de una vacante suele verse sucedida o por la emisión de radiación característica o de electrones Auger. La relación entre ambos procesos se puede describir mediante la magnitud denominada «emisión de fluorescencia»<sup>116</sup>,  $\omega_i$ , que representa la cantidad de fotones de energía  $E_{\chi_i}$  emitidos por cada vacante en la capa K. En la Ref. [28]<sup>117</sup> se pueden encontrar tabulaciones de esta magnitud.

A pesar de ser un proceso originado por radiación secundaria, la contribución de la reabsorción de *bremstrahlung* a los rayos característicos es importante en los materiales de número atómico elevado<sup>118</sup>, lo que complicada la elaboración de modelos. Por este motivo, propondremos una suposición fundamentada para aproximar la cantidad de fotones en los picos característicos, basándonos en el modelo de la Ref. [129]<sup>119</sup>.

Un pico característico toma idealmente una forma del tipo

$$f_{\gamma}^{X_i}(E_{\gamma}) = N_i \delta(E_{\gamma} - E_{\chi_i}), \quad (3.49)$$

donde  $N_i$  es la cantidad de fotones del pico y  $\delta$  es la distribución delta de Dirac. En tanto que los fotones emitidos producen vacantes por los mecanismos antes presentados, es natural esperar algún tipo de dependencia sobre el número de fotones con energías mayores que las del borde K. Analíticamente, esta cantidad vendrá dada por

$$N_{\text{K}}^{\geq} = \int_{E_{\text{K}}}^{\infty} f_{\gamma}(E_{\gamma}) \, dE_{\gamma}, \quad (3.50)$$

donde  $E_{\text{K}} \approx 69.51$  keV es el borde K del tungsteno.

Es interesante observar que podría ser más natural no considerar la atenuación intrínseca del material, como hacen en Ref. [129], en la definición de  $N_{\text{K}}^{\geq}$  —por ejemplo, ignorando la contribución de ésta en (3.14) tendríamos una magnitud análoga utilizable para ello—, en tanto que el proceso de atenuación ya está considerando estos efectos, con los que los estamos contando dos veces. Sin embargo, esta magnitud no es medible experimentalmente, por lo que preferimos tomar (3.50) como definición, quedando pendiente analizar la validez de esta dependencia, como ahora estudiaremos.

Experimentalmente se encuentra que el cociente entre ionizaciones de la capa K producidas por impacto electrónico y por absorción fotónica es aproximadamente constante<sup>120</sup> en un cierto rango de potenciales de tubos de rayos X, podemos proponer la aproximación

$$N_i \approx k \omega_i N_{\text{K}}^{\geq}. \quad (3.51)$$

La validez del modelo (3.51) se analiza empleando la fuente de fotones dentro del material en la Ref. [37]<sup>121</sup> (y las referencias en ella),

<sup>115</sup> Cf. pág. 395 en Ref. [126]; E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

<sup>116</sup> *Fluorescence yield*.

<sup>117</sup> S. Y. F. Chu, L. P. Ekström y R. B. Firestone. *The Lund/LBNL Nuclear Data Search*. 1999. URL: <http://nucldata.nuclear.lu.se/toi/>.

<sup>118</sup> Cf. Ref. [37]; N. A. Dyson. *X-rays in Atomic and Nuclear Physics*. 2.ª ed. Cambridge University Press, 2005.

<sup>119</sup> G. G. Poludniowski. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part II. X-ray production and filtration in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2175-2186. DOI: [10.1118/1.2734726](https://doi.org/10.1118/1.2734726).

<sup>120</sup> Cf. pág. 96 en Ref. [37]; N. A. Dyson. *X-rays in Atomic and Nuclear Physics*. 2.ª ed. Cambridge University Press, 2005 y referencias en ésta; así como Ref. [158]; F. Verhaegen *et al.* «Monte Carlo modelling of radiotherapy kV x-ray units». *Physics in medicine and biology* **44**, 7 (1999), págs. 1767-1789. DOI: [10.1088/0031-9155/44/7/315](https://doi.org/10.1088/0031-9155/44/7/315)

<sup>121</sup> N. A. Dyson. *X-rays in Atomic and Nuclear Physics*. 2.ª ed. Cambridge University Press, 2005.

pero no es así en el caso del tungsteno, que nosotros estudiaremos posteriormente.

Antes de esto, consideraremos una posible mejora paramétrica del modelo mediante la utilización de una dependencia de tipo polinómica, empleando siempre la norma del espectro para escalar adecuadamente las magnitudes, *i. e.*,

$$\frac{N_i}{\|f_\gamma\|_1} \approx P_i \left( \frac{N_K^\gamma}{\|f_\gamma\|_1} \right), \quad (3.52)$$

donde  $P_i$  serán polinomios sin término independiente y  $\|\cdot\|_1$  es la 1-norma, dada por

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(x)| dx. \quad (3.53)$$

Los datos que emplearemos para la comprobación son las simulaciones producidas con MCNPX 2.6.0<sup>122</sup> por Hernandez y Boone en la Ref. [77]<sup>123</sup>. Estos espectros están disponibles en un formato de hoja de cálculo que facilitan los autores bajo petición. A pesar de que estos datos no son directamente experimentales, están contrastados con otros modelos de la literatura, con los que encuentran gran concordancia, de modo que pueden considerarse válidos para nuestro propósito.

Para nuestro análisis procedimos a eliminar las cuentas en los intervalos con picos característicos, reemplazándolas por interpolaciones lineales a partir de las adyacentes. Este procedimiento permite medir también  $N_i$ , tal como se define en (3.49).

Con este procedimiento y mediante (3.50) se obtuvieron los datos representados en la Fig. 3.31, donde los espectros de *bremssstrahlung* se normalizaron por la condición  $\|f_\gamma\|_1 := 1$ . Cada valor del eje de abscisas se corresponde a una de las energías simuladas,  $E_0$ , con la cual  $N_K^\gamma$  es función monótona creciente. El comportamiento es casi lineal hasta aproximadamente 400 keV, límite indicado con la línea vertical de puntos y rayas en la Fig. 3.31. El mejor ajuste a (3.51) en el rango de 100 a 400 keV se representa para cada pico en línea continua. El error medio se sitúa en torno al 6% y el error máximo en torno al 20%.

Los ajustes polinómicos a (3.52) se reproducen también en la Fig. 3.31 en línea discontinua, permitiendo reproducir los resultados con un error inferior al 10% en el rango de 90 a 640 keV, con un error medio en torno al 10%. Los parámetros de los ajustes se recogen en la Tabla 3.4.

Línea	$k\omega_i$	$P_i(r)$
$K_\alpha$	0.1639	$0.1912r - 0.006150r^2 - 0.1279r^3$
$K_{\beta_1}$	0.03628	$0.04239r + 0.002003r^2 - 0.02356r^3$
$K_{\beta_2}$	0.01410	$0.01437r + 0.002346r^2 - 0.009332r^3$

<sup>122</sup> Cf. Ref. [124]: D. B. Pelowitz. *MCNPX User's Manual. Version 2.6.0*. Los Alamos Controlled Publication LA-CP-07-1473. Los Alamos National Laboratory, 2008.

<sup>123</sup> A. M. Hernandez y J. M. Boone. «Tungsten anode spectral model using interpolating cubic splines: Unfiltered x-ray spectra from 20 kV to 640 kV». *Medical physics* **41**, 4 (2014), pág. 042101. DOI: [10.1118/1.4866216](https://doi.org/10.1118/1.4866216).

Tabla 3.4: Mejores ajuste para el modelo lineal de picos característicos [(3.51)] y para el polinomial [(3.52)] en términos de  $r \stackrel{\text{def}}{=} N_K^\gamma / \|f_\gamma\|_1$ .

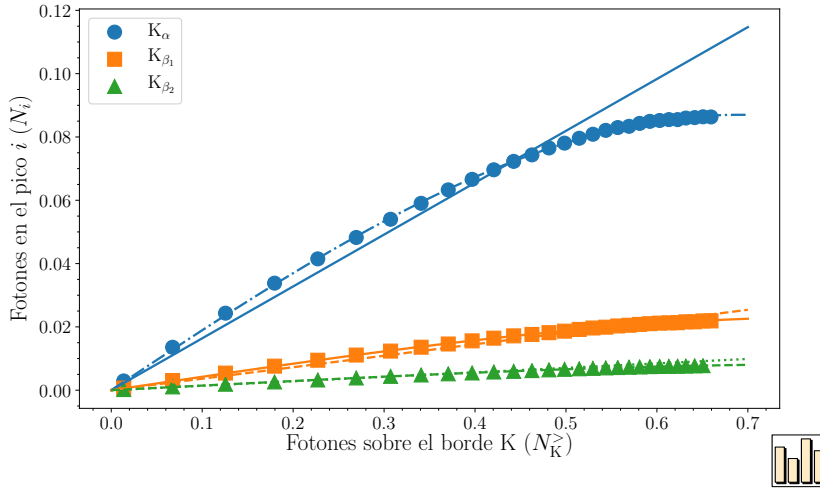


Figura 3.31: Intensidad de los picos característicos obtenida de los datos de TASMICS (Ref. [77]), obtenidos mediante (3.49) y (3.50). Las líneas continuas muestran el mejor ajuste a (3.51) y las discontinuas aquél a (3.52).

### 3.2.2 Modelos

#### 3.2.2.1 Modelo analítico de un blanco fino

La llamada aproximación de blanco fino supone, como ya introdujimos antes, considerar que las variaciones en los electrones dentro del blanco son despreciables<sup>124</sup>. Aplicando el teorema integral del valor medio<sup>125</sup> a (3.14) e integrando en ángulos encontramos la aproximación

$$f_{\gamma}^{\text{thin}}(E_{\gamma}) \approx Ln_{\text{med}} \int_0^{\infty} \frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_{\gamma}}(E_{e^{-}}, E_{\gamma}) f_{e^{-}}(E_{e^{-}}) dE_{e^{-}}, \quad (3.54)$$

donde  $L$  es el recorrido de los electrones, que puede identificarse bajo nuestra hipótesis con el espesor del blanco; y  $f_{e^{-}}$  es la función densidad de probabilidad de la energía de los electrones incidentes.

Combinando (3.54) y el modelo analítico de sección eficaz [(3.38)], podemos hacer una predicción analítica del espectro de *bremstrahlung*. En el caso de las distribuciones Gamma [(3.10)] el modelo toma la forma

$$\begin{aligned} f_{\gamma; \alpha, \theta}^{\text{Fin}; b}(E_{\gamma}) &\propto \int_{E_{\gamma}}^{\infty} f_{\alpha, \theta}(E)(E_{\gamma}^{-1} - bE^{-1}) dE \\ &= \frac{\theta \Gamma\left(\alpha, \frac{E_{\gamma}}{\theta}\right) - bE_{\gamma} \Gamma\left(\alpha - 1, \frac{E_{\gamma}}{\theta}\right)}{E_{\gamma} \theta \Gamma(\alpha)}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde  $\Gamma(a, z)$  es la función Gamma incompleta<sup>126</sup>.

#### 3.2.2.2 Modelo numérico de un blanco fino

Alternativamente, podemos combinar la integral de blanco fino [(3.54)] directamente con el modelo de sección eficaz numérico procedente de las tabulaciones de Seltzer y Berger<sup>127</sup> presentado en §3.2.1.2 (pág. 57). Este debería ser el modelo más completo posible bajo la hipótesis de blanco fino.

<sup>124</sup> Cf. pág. 271 en Ref. [126]; E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

<sup>125</sup> Dada una función  $f(x)$  continua en el intervalo  $[a, b]$ , existe un valor  $\xi \in [a, b]$  tal que  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$ .

<sup>126</sup> Cf. §8.2 en Ref. [36]; National Institute of Standards and Technology. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. versión 1.0.17. Complemento en línea a Ref. [116]. 22 de dic. de 2017. URL: <http://dlmf.nist.gov/>.

<sup>127</sup> Cf. Refs. [143; 142]; S. M. Seltzer y M. J. Berger. «Bremsstrahlung spectra from electron interactions with screened atomic nuclei and orbital electrons». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms* **12**, 1 (1985), págs. 95-134. DOI: 10.1016/0168-583X(85)90707-4; S. M. Seltzer y M. J. Berger. «Bremsstrahlung energy spectra from electrons with kinetic energy 1 keV–10 GeV incident on screened nuclei and orbital electrons of neutral atoms with Z=1–100». *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **35**, 3 (1986), págs. 345-418. DOI: 10.1016/0092-640X(86)90014-8.

### 3.2.2.3 Modelo analítico de un blanco grueso en reflexión

La hipótesis completamente opuesta a la de blanco fino presentada en §3.2.2.1 (pág. 65) es que el blanco sea suficientemente grueso como para que la mayoría de los electrones se detengan en él.

Como comentamos anteriormente, la máxima profundidad de penetración se sitúa aproximadamente en  $0.5R_{\text{CSDA}}$  en el caso de materiales de  $Z$  alto y en torno a  $R_{\text{CSDA}}$  para los de  $Z$  bajo<sup>128</sup>. Así pues, una definición formal tentativa para este tipo de blanco sería aquél cuyas dimensiones en la dirección de penetración sean al menos un poco mayores de  $0.5R_{\text{CSDA}}$ . No obstante, recordemos que  $R_{\text{CSDA}}$  es monótono creciente con la energía, con lo que no es posible trasladar directamente la definición a nuestras distribuciones con soporte en  $\mathbb{R}^+$ . En la práctica, si estamos trabajando en reflexión como en este apartado, estaremos frecuentemente interesados en el problema de ver si un blanco puede ser tratado como grueso más de en diseñar uno que lo sea. Para eso la energía máxima de detención en el material, bajo la aproximación antes planteada, sí puede ser un buen indicador. En caso de que trabajásemos en transmisión la noción se complicaría bastante más, como veremos en §3.2.2.5 (pág. 67).

El modelo sencillo que plantearemos se basa en la observación empírica de que la intensidad de *bremsstrahlung* emitida por un blanco grueso para una fuente monoenergética tiene un comportamiento lineal con la energía de los fotones emitidos, anulándose en el límite dado por la ley de Duane-Hunt<sup>129</sup>). Éste es el llamado modelo de Kramers<sup>130</sup>. En consecuencia, la distribución de fotones emitida por un electrón con energía inicial  $E_{e^-}$  se puede describir aproximadamente por<sup>131</sup>

$$\sigma_{\text{Kra}}(E_{e^-}, E_\gamma) \propto \left\{ \begin{array}{ll} \frac{E_{e^-}}{E_\gamma} - 1 & \text{si } E_\gamma \leq E_{e^-} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}. \quad (3.56)$$

Integrando a una distribución Gamma de electrones incidentes encontramos

$$f_{\gamma; \alpha, \theta}^{\text{Kra}} \propto \frac{\theta \Gamma\left(\alpha + 1, \frac{E_\gamma}{\theta}\right) - E_\gamma \Gamma\left(\alpha, \frac{E_\gamma}{\theta}\right)}{E_\gamma \Gamma(\alpha)} \quad (3.57)$$

### 3.2.2.4 Modelo numérico de un blanco grueso en reflexión

El modelo semiempírico más completo que podemos construir con los componentes analizados surge por optar por la descripción numérica de éstas. A partir de (3.14) podemos plantear esto mediante

$$\begin{aligned} f_\gamma(E_\gamma, \hat{\Omega}(\varphi_2, \vartheta)) = & n_{\text{med}} \int_0^\infty f_{\Gamma_{\alpha, \beta}}(E_0) \int_0^{x_{\text{max}}} \int_0^\infty \frac{d\sigma_{\text{br}}}{dE_\gamma}(E_{e^-}, E_\gamma) \Phi_{\text{en}}(E_0; E_{e^-}, x) \\ & \cdot e^{-\mu(E_\gamma)x \sin \varphi_1 \csc \varphi_2 \csc \vartheta} \\ & dE_{e^-} dx dE_0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

<sup>128</sup> Cf. pág. 261 en Ref. [126]; E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

<sup>129</sup> La energía máxima de un fotón emitido es la cinética del electrón emisor. Cf. pág. 272 en Ref. [126]; E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

<sup>130</sup> Cf. Ref. [96]; H. A. Kramers. «On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum». *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **46**, 275 (1923), págs. 836-871. DOI: [10.1080/14786442308565244](https://doi.org/10.1080/14786442308565244).

<sup>131</sup> Aunque  $\sigma_{\text{Kra}}$  no es exactamente una sección eficaz, en tanto que ignoramos la constante escondida en la proporcionalidad de la expresión se comporta como una sección eficaz diferencial en energías integrada en el recorrido en el material, de ahí la notación empleada.

donde  $f_{\Gamma_{\alpha,\beta}}$  es la función de densidad de probabilidad de la distribución Gamma [(3.10)],  $E_0$  es la variable que distribuye los electrones incidentes, los cuales pasarán a tener una distribución en  $E_e$  en cada plano  $x$  y las variables angulares siguen la descripción de la Fig. 3.21.

### 3.2.2.5 Modelización de un blanco de espesor finito en transmisión

Al trabajar en transmisión conviene observar que la noción de blanco grueso introducida en §3.2.2.3 (pág. 66) se desdibuja. Si un blanco *suficientemente grueso* es *demasiado grueso* los fotones emitidos se atenuarán en exceso, con lo que la geometría resulta menos atractiva para su uso. En el caso monoenergético esto se suele solucionar imponiendo que el espesor sea ligeramente superior a la penetración máxima —un 10% según Podgoršak<sup>132</sup>—. En el caso general con distribuciones de energía en los electrones incidentes esta abstracción carece de sentido.

Un posible análogo a la noción de grueso sería aquél que maximice la producción de radiación (en algún sentido por definir). Sería más adecuado nombrar a este tipo de blanco «óptimo». Las características de este condición serán objeto de estudio en §5.2 (pág. 131).

Desafortunadamente, aun con una profundidad de blanco óptimo definida esto no resultaría simplificador para el problema. Si bien el cambio en la atenuación de los fotones emitidos no sería complicado, y ya ha sido analizado en la pág. 62; por otro lado encontramos que la modificación de la fluencia de electrones sí se complicaría mucho más. En los casos de alcance mucho menor que el espesor sí se podría emplear modelo anteriormente descrito, pero no en los restantes, ya que estaríamos incluyendo contribuciones procedentes de una retrodispersión que no llegaría a producirse por la finitud del blanco. Un posible enfoque sería aproximar qué mezcla de las componentes de primer y múltiple cruce, ajustadas independientemente, reproduce mejor el problema. Duplicaríamos la cantidad de modelos necesarios más este peso adicional, lo que seguramente deterioraría la descripción.

En definitiva, la modelización según la vía «semiempírica» que seguimos obligaría a introducir múltiples parámetros que complicarían severamente la descripción. Aunque sería posible extender el modelo con estas pautas, consideraremos que la opción más razonable es trabajar con métodos de simulación Montecarlo cuando el espesor del material sea relevante. Este enfoque es el que se seguirá en §5.2 (pág. 131) para la definición del blanco (o conversor) óptimo.

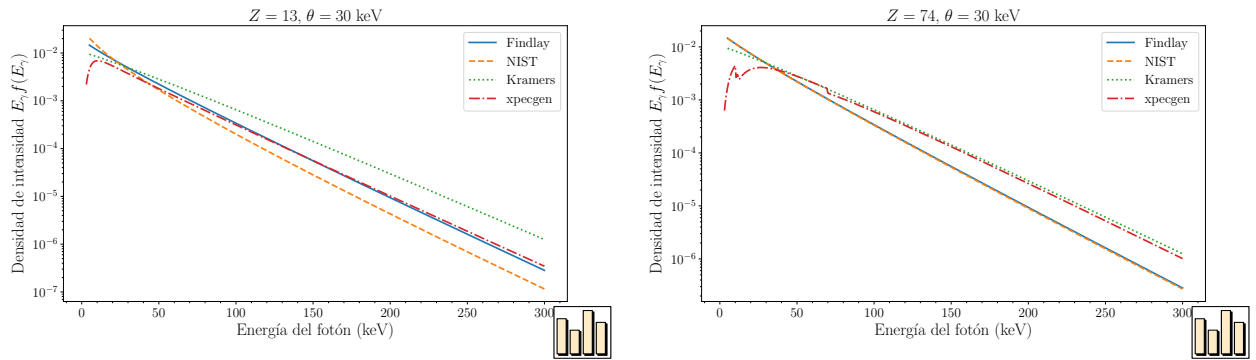
### 3.2.3 Comparación de los modelos

La Fig. 3.32 recoge una representación de  $E_\gamma f(E_\gamma)$ , la energía total<sup>133</sup>

<sup>132</sup> Cf. pág. 272 en Ref. [126]; E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

<sup>133</sup> Recordemos que la normalización respecto al número es inconveniente. Cf. nota 59 en la pág. 47.

debida a los fotones de *bremstrahlung* de una energía dada, según los diferentes modelos. A bajas energías hay una cierta diferencia entre ellos, especialmente en el caso del modelo más completo, el numérico de blanco grueso. Esto es así porque es el único que incorpora la atenuación intrínseca del medio de producción. En el caso del tungsteno se puede además apreciar el efecto del borde K. A altas energías los modelos presentan un comportamiento aproximadamente exponencial, que puede invitar a ajustar sobre ellos un parámetro de temperatura asociado. Existen, sin embargo, sutilezas en la forma de los espectros que deben tenerse en cuenta para realizar un análisis correcto de la física subyacente. Esto será objeto de estudio de §4.3 (pág. 114).



Es interesante observar, comparando (3.55) y (3.57), que ocurre

$$f_{\gamma;\alpha,\theta}^{\text{Kra}} \propto f_{\gamma;\alpha+1,\theta}^{\text{Fin;l}}. \quad (3.59)$$

Esto supone que la diferencia en la forma de un espectro de *bremstrahlung* debida a que el medio de producción sea fino o grueso es equivalente a un incremento en el parámetro de forma (o los «grados de libertad» que se le asocian a éste) de la distribución de electrones. En consecuencia, estos efectos son imposibles de discernir en la distribución de fotones, al menos bajo los modelos propuestos.

En lo sucesivo en el presente capítulo, nos centraremos en analizar con detalle el más completo de los modelos, el numérico de blanco grueso en reflexión, para ver sobre él otros aspectos de interés.

### 3.2.4 Evaluación de la validez del modelo numérico de blanco grueso en reflexión

Como planteábamos anteriormente, el objetivo del desarrollo de los modelos de las diversas componentes es obtener un modelo general de complejidad semejante a los imperantes en el campo que podamos aplicar a distribuciones de electrones. El principal referente, como indicábamos, es el trabajo de Poludniowski y Evans<sup>134</sup>, con el que estableceremos en este apartado una comparación. Emplearemos para ello las fuentes monoenergéticas de electrones imperantes en el campo de la física médica.

Una característica que aparece en su modelo es que no se da una predicción para la norma del espectro, sino que queda como un pará-

Figura 3.32: Representación de los modelos de rayos X de §3.2.2. Se muestran los espectros en intensidad para una normalización común en energía. La leyenda indica el modelo analítico de blanco fino («Findlay»), el numérico de blanco fino («NIST»), el analítico de blanco grueso («Kramers»), y el numérico de blanco grueso («xpecgen», cf. §D.1).

<sup>134</sup> Cf. Refs. [130; 129]: G. G. Poludniowski y P. M. Evans. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part I. Electron penetration characteristics in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2164-2174. DOI: [10.1118/1.2734725](https://doi.org/10.1118/1.2734725); G. G. Poludniowski. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part II. X-ray production and filtration in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2175-2186. DOI: [10.1118/1.2734726](https://doi.org/10.1118/1.2734726).



metro libre a ajustar en la aplicación. Necesitaremos por lo tanto una herramienta que compare espectros normalizados, para lo que podemos emplear una seminorma  $\|\cdot\|$  para construir el funcional

$$\angle(f, g) = \left\| \frac{f}{\|f\|} - \frac{g}{\|g\|} \right\|, \quad (3.60)$$

que toma valores en  $[0, 2]$  por propiedades elementales de la seminorma.

La elección natural de la uno-norma<sup>135</sup>

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(x)| dx, \quad (3.61)$$

confiere al funcional obtenido,  $\angle_1$ , el sentido de área entre las curvas normalizadas: cuanto menor sea éste, más similares serán en cuanto a su forma<sup>136</sup>.

Como referencia para la evaluación de los espectros emplearemos los espectros experimentales obtenidos por Bhat *et al*<sup>137</sup>. Éstos se obtuvieron midiendo las emisiones de un generador de rayos X modelo Toshiba T700, para el que se asumía una atenuación intrínseca equivalente a 1.2 mm de aluminio. El dispositivo se empleó con diferencias de potencial de 50, 80 y 100 kV, tomándose medidas con un detector situado en la dirección  $\varphi = 12^\circ$ , con un colimador de plomo.

Para comprobar el refinamiento del modelo emplearemos también los resultados que proporciona la aplicación SpekCalc<sup>138</sup>, que, de hecho, escogió este mismo conjunto de datos para su validación.

La implementación original que empleamos para ello<sup>139</sup> se realizó tanto mediante la aproximación puntual de la ROI [(3.16)] como con la expresión extendida [(3.15)] en Wolfram Mathematica 10.3<sup>140</sup>. La integración numérica se realizó mediante una estrategia global adaptativa<sup>141</sup>. La fluencia diferencial planar  $\Phi_U$  se calculó tanto directamente mediante interpolaciones sobre los datos obtenidos en las simulaciones (*cf.* §3.2.1.1.2 (pág. 51)) como mediante las diferentes simplificaciones ofrecidas allí.

Puede verse una comparación gráfica con los resultados de Bhat *et al.*<sup>142</sup> en la Fig. 3.33, así como con la predicción de SpekCalc. Las medidas cuantitativas de la diferencia en el sentido de  $\angle_1$  se recogen en la Tabla 3.5. Con el objeto de identificar si éstas proceden de la descripción de la penetración de los electrones en el medio o del modelo de sección eficaz, se ha añadido en dicha tabla una columna «MEBH<sup>143</sup>», que designa los resultados que se obtendrían con nuestro modelo en caso de reemplazar la sección eficaz por el modelo empleado por SpekCalc<sup>144, 145</sup>.

En el caso de 100 keV, ambas componentes son necesarias para explicar la diferencia, aunque, a energías menores la diferencia producida por la descripción de la penetración de los electrones en el material pierde importancia respecto al modelo de sección eficaz.

Una magnitud derivada que resulta de interés en el campo de la física médica son los espesores de semiatenuación (HVL), que se definen como el espesor de un cierto material que debe emplearse para que el valor de una determinada magnitud radiológica decaiga a la mitad de su valor<sup>146</sup>.

<sup>135</sup> Es una norma en algunos espacios de funciones, como por ejemplo  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , donde se identifican las funciones que difieren en un conjunto de medida nula. En otros casos es simplemente una seminorma. Este ejemplo muestra por qué estamos exigiendo simplemente trabajar con una seminorma.

<sup>136</sup> La notación escogida refleja una interpretación geométrica: en el espacio  $\mathbb{R}^n$  la magnitud  $\angle(P, Q)$  se corresponde a la longitud de la cuerda entre dos puntos del primer ortante obtenidos al simetrizar sobre él  $P$  y  $Q$  y proyectar sobre la esfera unitaria que corresponda a la norma empleada (si las componentes son definidas positivas la simetrización está trivialmente satisfecha). Esta longitud está relacionada con el ángulo subtendido en el origen mediante una función que dependerá de la norma con que trabajemos. En nuestro familiar espacio euclídeo, esta relación viene dada por la llamada función cuerda  $\angle_2 = \text{crd } \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2}$ , como se puede comprobar por trigonometría elemental. En el caso de la 1-norma, la longitud de arco en la «esfera» unitaria (un  $n$ -simplex en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , *i. e.*, un segmento, un triángulo, un tetraedro. . .) se puede identificar directamente con el ángulo, con lo que la relación es la identidad y la correspondencia plena. *Cf.* Ref. [150]: K. Thompson y T. Dray. «Taxicab angles and trigonometry». *Pi Mu Epsilon Journal* **11**, 2 (2000), págs. 87-96. URL: <http://www.jstor.org/stable/24340535>.

<sup>137</sup> *Cf.* Ref. [14]: M. Bhat *et al.* «Diagnostic x-ray spectra: A comparison of spectra generated by different computational methods with a measured spectrum». *Medical physics* **25**, 1 (1998), págs. 114-120. DOI: 10.1118/1.598170.

<sup>138</sup> *Cf.* Refs. [128; 130; 129].

<sup>139</sup> Para una más actual y práctica *cf.* §D.1.

<sup>140</sup> *Cf.* Ref. [167]: Wolfram Research, Inc. *Mathematica 10.3*. Ver. 10.3. Champaign, Illinois, 2015. URL: <https://www.wolfram.com>.

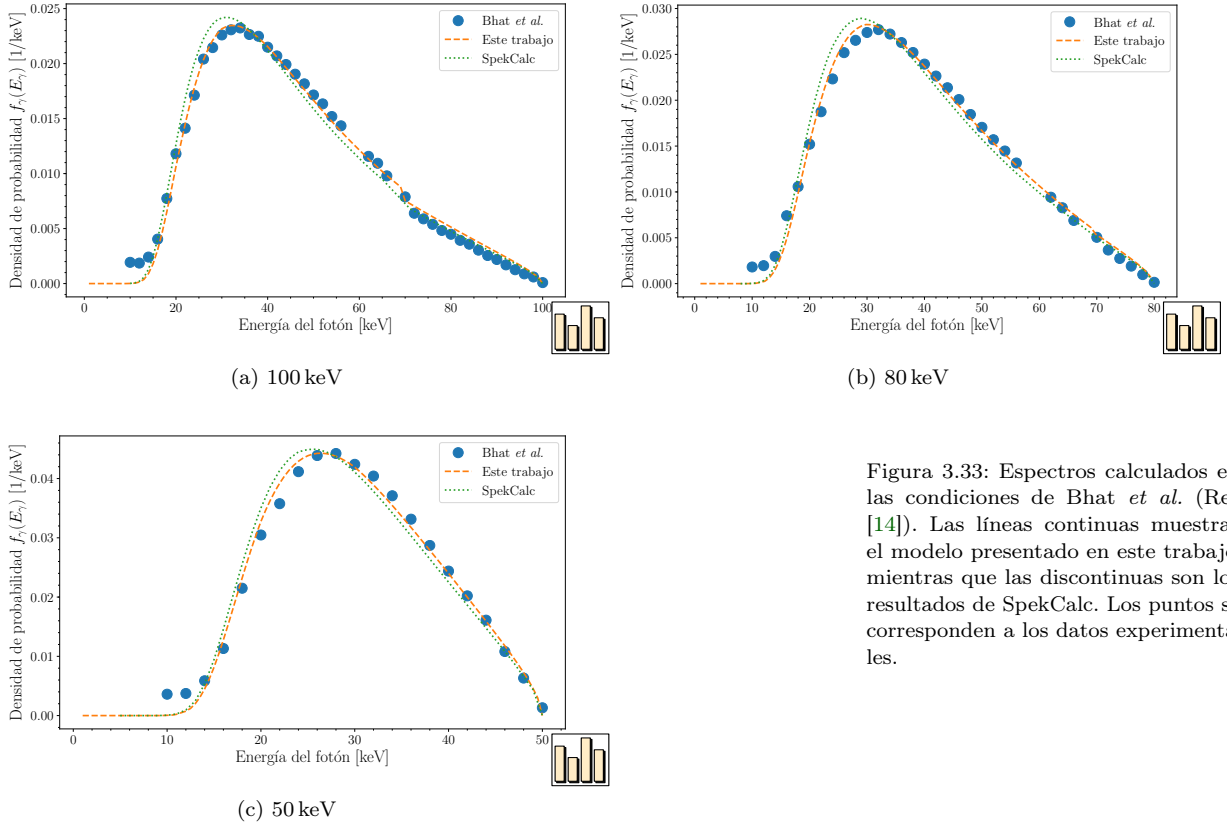


Figura 3.33: Espectros calculados en las condiciones de Bhat *et al.* (Ref. [14]). Las líneas continuas muestran el modelo presentado en este trabajo, mientras que las discontinuas son los resultados de SpekCalc. Los puntos se corresponden a los datos experimentales.

$E_0$	Este trabajo	MEBH	SpekCalc
100 keV	0.0504	0.0662	0.0795
80 keV	0.0471	0.0745	0.0798
50 keV	0.0531	0.0912	0.0898

Tabla 3.5: Diferencias con los espectros de Bhat *et al.* (Ref. [14]) en el sentido de  $\angle_1$ . La columna «MEBH» se refiere a los cálculos con nuestro modelo, reemplazando la sección eficaz por la empleada en SpekCalc.

Otra magnitud empleada es el «segundo espesor de semiatenuación» (2HVL), que se correspondería con el espesor de atenuador a añadir tras un primer HVL para que la magnitud en cuestión vuelva a decaer en un factor  $2^{147}$ .

Para definir formalmente el problema construiremos una magnitud más general, el «espesor de  $n$ -atenuación» ( $n$ VL) mediante

$$nVL_{\text{mat}}(n, c; f) \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ x : \frac{\int_{\mathbb{R}^+} f(E)c(E)\mathcal{K}_{\text{mat}}(E, x) dE}{\int_{\mathbb{R}^+} f(E)c(E) dE} \leq n \right\}, \quad (3.62)$$

donde  $n \leq 1$  es la fracción de la magnitud que se exige,  $c(\cdot)$  el factor de conversión en función de la energía y  $\mathcal{K}_{\text{mat}}(E, x)$  el operador de propagación de un fotón de energía  $E$  a una distancia  $x$ . Que la solución esté bien definida es consecuencia de las propiedades de  $\mathcal{K}_{\text{mat}}$ <sup>148,149</sup>.

En el caso de una haz monocromático y atenuación exponencial, (3.62) se reduce a

$$nVL_{\text{mat}}(n) = -\frac{\ln n}{\mu}. \quad (3.63)$$

Por ejemplo,  $HVL = \ln 2/\mu$ , que es la expresión clásica de los libros de texto.

<sup>141</sup> En líneas generales consiste en descomponer el dominio de integración en subregiones, estimar la integral y su error en cada de ellas, y proceder recursivamente a subdividir aquellas con mayor error. Para más detalles *cf.* Ref. [166]: Wolfram Inc. *NIntegrate Integration Strategies*. *Wolfram Language Documentation*. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NIntegrateIntegrationStrategies.html>.

<sup>142</sup> *Cf.* Ref. [14]: M. Bhat *et al.* «Diagnostic x-ray spectra: A comparison of spectra generated by different computational methods with a measured spectrum». *Medical physics* **25**, 1 (1998), págs. 114-120. DOI: [10.1118/1.598170](https://doi.org/10.1118/1.598170).

<sup>143</sup> De *Modified Elwert-Corrected Bethe-Heitler*.

<sup>144</sup> *Cf.* Ref. [127]: G. Poludniowski. Comunicación personal. 1 de abr. de 2016.



De vuelta al caso general, las dos magnitudes buscadas se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \text{HVL}_{\text{mat}} &= \text{nVL}_{\text{mat}}(1/2, c) \\ 2\text{HVL}_{\text{mat}} &= \text{nVL}_{\text{mat}}(1/4, c) - \text{nVL}_{\text{mat}}(1/2, c). \end{aligned}$$

Obsérvese que el coeficiente de conversión  $c$  queda sin definir en las expresiones anteriores, lo que evidencia que la noción de HVL debería precisarse en cada aplicación.

Seguiremos para ello la noción dada en Ref. [77]<sup>150</sup>, donde se emplean unos coeficientes de conversión de fluencia a kerma<sup>151</sup> en aire, previa corrección para considerar la atenuación producida por 1 m de aire. Consideraremos las componentes de energía mayor que 16 keV para evitar los efectos no físicos de la restante —por la divergencia a bajas energías del factor de conversión—. Los resultados se muestran en la Tabla 3.6.

$E_0$	Magnitud	Bhat <i>et al.</i>	Este trabajo	SpekCalc
100 keV	HVL <sub>Al</sub>	2.36	2.45(−3.8 %)	2.17(5.6 %)
	2HVL <sub>Al</sub>	4.09	4.19(−2.6 %)	3.84(6.4 %)
	HVL <sub>Cu</sub>	0.0802	0.0838(−4.3 %)	0.0751(6.71 %)
	2HVL <sub>Cu</sub>	0.168	0.175(−4.2 %)	0.155(8.6 %)
80 keV	HVL <sub>Al</sub>	1.94	1.97(−1.5 %)	1.83(5.8 %)
	2HVL <sub>Al</sub>	3.16	3.16(0.1 %)	2.94(7.73 %)
	HVL <sub>Cu</sub>	0.0636	0.0646(−1.5 %)	0.0596(6.6 %)
	2HVL <sub>Cu</sub>	0.116	0.116(0.0 %)	0.105(9.7 %)
50 keV	HVL <sub>Al</sub>	1.37	1.33(3.1 %)	1.28(7.1 %)
	2HVL <sub>Al</sub>	1.87	1.81(3.3 %)	1.73(7.7 %)
	HVL <sub>Cu</sub>	0.0430	0.0416(3.2 %)	0.0400(7.4 %)
	2HVL <sub>Cu</sub>	0.0602	0.0582(3.5 %)	0.0556(8.4 %)

Por otro lado, con el propósito de añadir una verificación adicional que además permita extender el rango de energías validadas<sup>152</sup>, emplearemos los resultados de simulación obtenidos mediante MCNPX que se utilizaron para generar la herramienta TASMICS<sup>153</sup>, que ya habíamos introducido en §3.2.1.4 (pág. 64). Estos espectros también se dan respecto a una normalización arbitraria —en este caso a la unidad de kerma en aire—. Dichas simulaciones se realizaron con un filtro de 0.8 mm de berilio que tendremos que tener en cuenta. La región angular de aceptación se define en dicho trabajo como la proyección de un cierto cuadrado de  $\mathbb{R}^3$  sobre  $\mathbb{S}^2$ , la cual puede describirse aproximadamente<sup>154</sup> como

$$(\varphi, \vartheta) \in [6.86^\circ, 17.14^\circ] \times [84.88^\circ, 95.12^\circ].$$

Según Ref. [77] esta región es, aproximadamente, «un cono de semiángulo  $5.7^\circ$ »<sup>155</sup>.

<sup>145</sup> Para su definición *cf.* Ref. [129]: G. G. Poludniowski. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part II. X-ray production and filtration in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2175–2186. DOI: [10.1118/1.2734726](https://doi.org/10.1118/1.2734726).

<sup>146</sup> *Cf.* pág. 282 en Ref. [126]: E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

<sup>147</sup> Que ambas magnitudes sean diferentes se debe a que la radiación tenga composición espectral no monocromática. La magnitud  $\chi \stackrel{\text{def}}{=} \text{HVL}/2\text{HVL}$  se toma a veces como indicador de que haya tal distribución, recibiendo el nombre de «factor de homogeneidad»

Tabla 3.6: Espesores de semiatenuación (HVL) y segundos espesores de semiatenuación (2HVL) calculados a partir de los espectros de *bremsstrahlung*. Todos los valores se dan en mm. Los números entre paréntesis indican la diferencia relativa con el valor calculado con los espectros experimentales de Bhat *et al.* (Ref. [14]).

<sup>148</sup> Suponiendo que  $\mathcal{K}_{\text{mat}}(E, \cdot)$  sea una función continua para todo valor del parámetro  $E$ , su integral lo será por el teorema de continuidad de funciones definidas mediante integrales (*cf.*, *e.g.*, pág. 140 en Ref. [64]). Si además suponemos  $\mathcal{K}_{\text{mat}}(E, 0) = 1$  y  $\mathcal{K}_{\text{mat}}(E, \infty) = 0$ , se sigue la conclusión del teorema del valor intermedio.

<sup>149</sup> La notación algo farragosa con la desigualdad es necesaria para considerar la posibilidad de que  $\mathcal{K}_{\text{mat}}(E, \cdot)$  no sea decreciente (para algún valor de  $E$ ). De suponer que no fuera así (por ejemplo, en un modelo exponencial), el lado izquierdo de la desigualdad sería decreciente y el mínimo sería el único valor que saturase la desigualdad.

<sup>150</sup> A. M. Hernandez y J. M. Boone. «Tungsten anode spectral model using interpolating cubic splines: Unfiltered x-ray spectra from 20 kV to 640 kV». *Medical physics* **41**, 4 (2014), pág. 042101. DOI: [10.1118/1.4866216](https://doi.org/10.1118/1.4866216).

La Fig. 3.34 recoge una comparación gráfica de los resultados del modelo con estos datos. Las diferencias en el sentido de  $\angle_1$  aparecen recogidas en la Tabla 3.7, tanto para el tratamiento completo del ángulo sólido subtendido por el detector [(3.15)] como para la aproximación puntual [(3.16)]

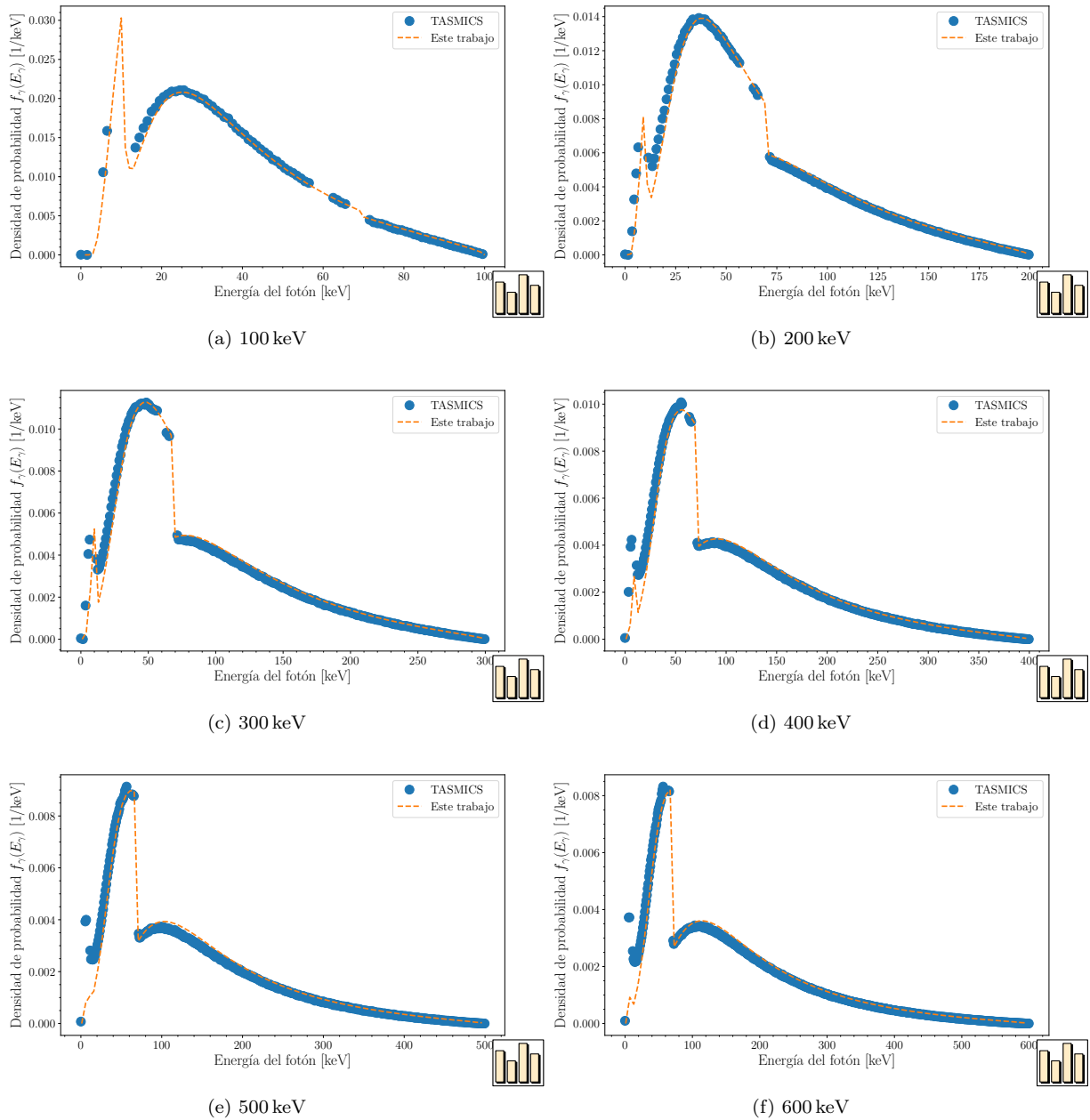


Figura 3.34: Comparación del modelo de *bremsstrahlung* (línea continua) con los espectros de simulación incluidos en TASMICS (Ref. [77]).

$E_0$	Región puntual (3.16)	Región extendida (3.15)
100 keV	0.0780	0.0797
200 keV	0.0679	0.0682
300 keV	0.0831	0.0831
400 keV	0.1077	0.1082
500 keV	0.1178	0.1179
600 keV	0.1228	0.1228

### 3.2.4.1 Simplificaciones del modelo

Una primera valoración de interés es la consideración del límite superior de la integral en la profundidad que aparece en (3.14). Los efectos de tomar esta magnitud como parámetro aparecen en la Fig. 3.35 para el caso  $E_0 = 100$  keV, siendo los otros similares. Como se aprecia claramente en la figura, prácticamente la totalidad del *bremsstrahlung* emitido se produce hasta la mitad del alcance CSDA.

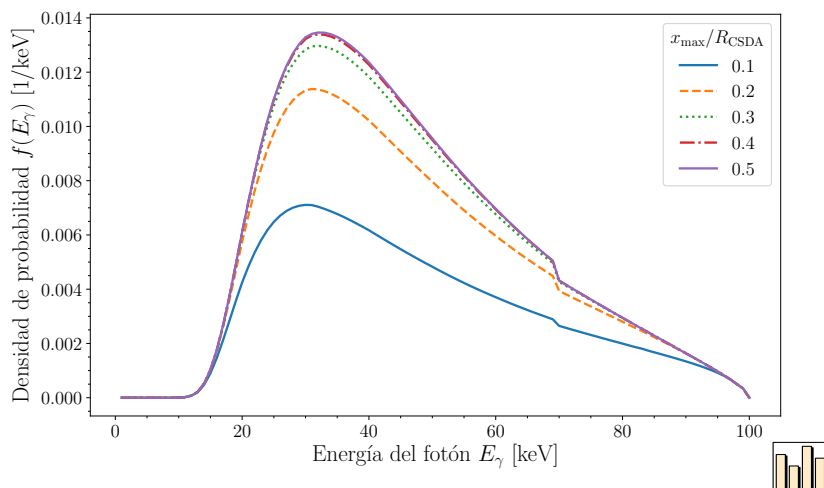


Tabla 3.7: Diferencia de los espectros de *bremsstrahlung* del modelo con las simulaciones de TASMICS (Ref. [77]) en el sentido de  $\angle_1$ .

Figura 3.35: Espectros de *bremsstrahlung* obtenidos para diferentes valores de la profundidad máxima considerada  $x_{\max}$  (cf. (3.14)).

En §3.2.1.1 (pág. 47) propusimos algunas simplificaciones cuyo efecto sobre el cálculo final de espectros estamos ya en situación de valorar. Por un lado, consideraremos el modelo para la fracción de cruce  $\eta$ , que quedó finalmente reducido a (3.34); por otro tenemos la aproximación de difusión, expresada formalmente como (3.29). Los resultados obtenidos con las posibles combinaciones de aceptación de los modelos se resumen en la Tabla 3.8. Las diferencias son tan reducidas que serían difíciles de apreciar en una gráfica como las anteriores, por lo que la validez de su empleo para los presentes cálculos queda corroborada.

<sup>151</sup> Cantidad de energía cinética liberada por unidad de masa por efecto de la radiación. Suponiendo que las partículas emitidas no sean muy energéticas y por tanto se absorban localmente, se puede identificar con la dosis absorbida. Para más información cf. Ref. [88]; ICRP. «Conversion Coefficients for use in Radiological Protection against External Radiation. ICRP Publication 74». *Annals of the ICRP* **26**, 3–4 (1996).

<sup>152</sup> Recordemos que es necesario para tratar con maxwellianas, como decíamos en la pág. 41.

<sup>153</sup> Cf. Ref. [77]: A. M. Hernandez y J. M. Boone. «Tungsten anode spectral model using interpolating cubic splines: Unfiltered x-ray spectra from 20 kV to 640 kV». *Medical physics* **41**, 4 (2014), pág. 042101. DOI: [10.1118/1.4866216](https://doi.org/10.1118/1.4866216).

$E_0$	Aproximación			
	Ninguna	Modelo $\eta(x)$ [(3.34)]	Difusión [(3.29)]	Ambas
100 keV	0.0504	0.0540	0.0539	0.0539
80 keV	0.0471	0.0482	0.0501	0.0510
50 keV	0.0531	0.0536	0.0539	0.0554

### 3.2.5 Análisis crítico de otros modelos en la literatura

Durante el estudio realizado, se detectaron algunos problemas en los modelos precedentes que afectaban a sus predicciones, justificando así la necesidad de una revisión. En particular veremos en §3.2.5.1 que la ley de TW no es un punto de partida satisfactorio para la construcción de modelos de rayos X y en §3.2.5.2 que la descomposición en primer y múltiple cruce de Poludniowski y Evans<sup>156</sup> no es compatible con la aproximación de difusión ahí empleada.

#### 3.2.5.1 Influencia de la ley de Thomson-Whiddington en los modelos

En una formulación moderna, la ley de Thomson-Whiddington indica que

$$\langle E(x) \rangle^2 \simeq E_0^2 - C_{\text{TW}}\rho x, \quad (3.64)$$

donde  $x$  es el espesor del blanco,  $\langle E(x) \rangle$  es la energía cinética promedio<sup>157</sup> tras atravesar dicho espesor,  $E_0$  es la energía cinética inicial,  $\rho$  es la densidad del material y  $C_{\text{TW}}$  es una constante aproximadamente independiente del material, pero dependiente de la energía.

El comportamiento de la variable de energía escalada por la energía cinética inicial,  $U$ , se estudiará mediante el cuadrado de su promedio

$$\langle U^{\text{F}}(x) \rangle^2 = \left( \int_0^\infty u f_U^{\text{F}}(x; u) du \right)^2$$

a partir de las distribuciones obtenidas en las simulaciones<sup>158</sup>. Esta magnitud aparece representada en la Fig. 3.36 en función de la profundidad escalada,  $\rho x$ . Como se puede observar, la relación es lineal únicamente hasta cierta profundidad de penetración. Qué criterio se siga para realizar el ajuste proporcionará diferentes valores para la constante  $C_{\text{TW}}$ , afectando así a los modelos que deriven de ello.

Un posible criterio es considerar la dependencia del coeficiente de determinación  $R^2$  con el número de puntos tomados, tomando el máximo de éste. En todos los casos simulados (cf. §3.2.1.1.2 (pág. 51)) esto encontraba correspondencia con el criterio  $x \leq 0.15R_{\text{CSDA}}$ .

La Tabla 3.9 recoge las diferencias entre este criterio y los empleados por Poludniowski y Evans<sup>159</sup> y por Birch y Marshall<sup>160</sup>, donde hemos in-

Tabla 3.8: Diferencias con los espectros de Bhat *et al.* (Ref. [14]) en el sentido de  $\angle_1$  para las aproximaciones propuestas.

<sup>154</sup> Rigurosamente no es el cuadrado (en coordenadas esféricas) descrito, sino que existe una ligera curvatura en los segmentos de  $\vartheta$  constante, tan ligera que resultaría difícil de apreciar en una representación gráfica.

<sup>155</sup> El corte de un cono con una 2-esfera tal que vértice y centros coinciden es un círculo, con lo que, a nivel geométrico, la asimilación es bastante cuestionable.

<sup>156</sup> Cf. Ref. [130]: G. G. Poludniowski y P. M. Evans. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part I. Electron penetration characteristics in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2164-2174. DOI: [10.1118/1.2734725](https://doi.org/10.1118/1.2734725).

<sup>157</sup> En el estudio original se trataba la energía como única, pero no es así en realidad. Aquí hemos introducido el valor medio para representar este hecho.

<sup>158</sup> cf. §3.2.1.1.2 (pág. 53).

<sup>159</sup> Cf. Ref. [130]: G. G. Poludniowski y P. M. Evans. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part I. Electron penetration characteristics in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2164-2174. DOI: [10.1118/1.2734725](https://doi.org/10.1118/1.2734725).

<sup>160</sup> Cf. Ref. [16]: R. Birch y M. Marshall. «Computation of bremsstrahlung x-ray spectra and comparison with spectra measured with a Ge (Li) detector». *Physics in Medicine and Biology* **24**, 3 (1979), págs. 505-517. DOI: [10.1088/0031-9155/24/3/002](https://doi.org/10.1088/0031-9155/24/3/002).

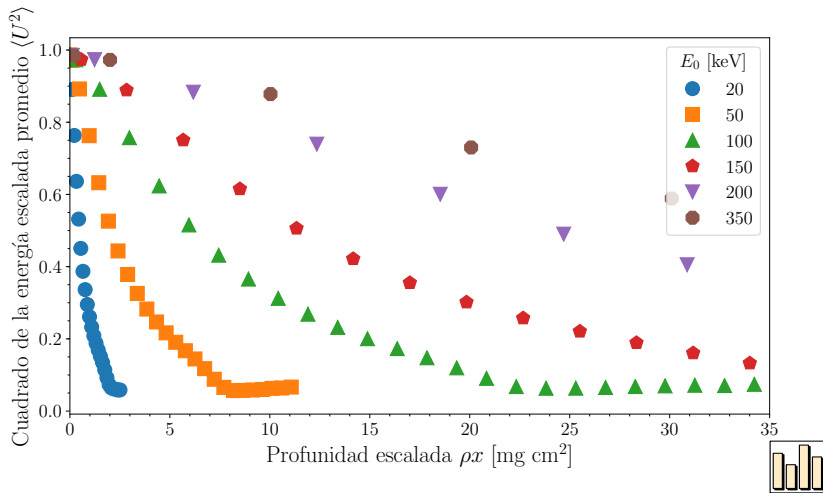


Figura 3.36: Cuadrado de la energía cinética promedio escalada por la inicial en función de la profundidad, asimilable al espesor de un blanco en transmisión. La parte lineal inicial se corresponde con la ley de Thomson-Whiddington [(3.64)].

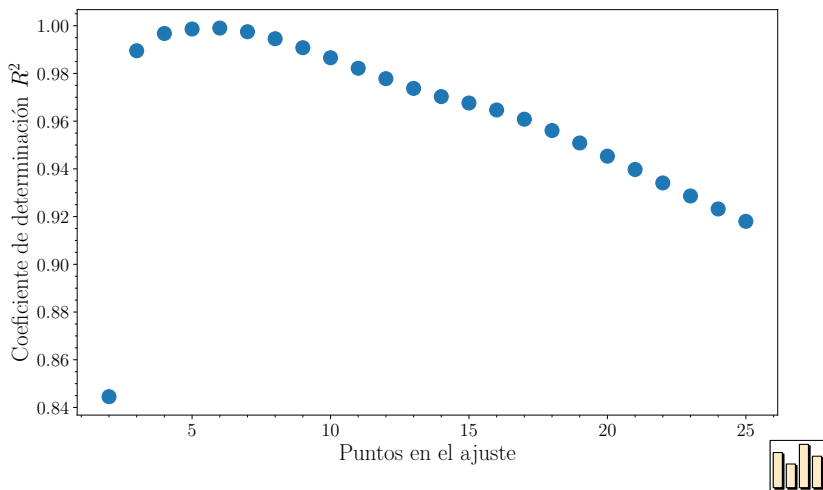


Figura 3.37: Coeficiente de determinación  $R^2$  del ajuste de la ley de Thomson Whiddington a los datos de simulación en función del número de puntos considerados en el ajuste.

terpolado linealmente los valores intermedios necesarios. Las diferencias en los valores de  $C_{TW}$  están producidas por los diferentes criterios tomados para la interpolación: Poludniowski y Evans emplearon  $\langle U \rangle^2 > 0.4$  —aunque sin dar justificación dicho criterio—, cuyos resultados pueden reproducirse a partir de nuestros datos con una diferencia menor del 1% en la mayoría de los casos; por otro lado, el ajuste de Birch y Marshall estaba basado en relaciones empíricas, a su vez basadas en datos experimentales, pudiendo reproducirse con un error inferior al 5% con nuestros datos mediante la elección  $\langle U \rangle^2 > 0.25$ .

$E_0$ (keV)	$C_{TW}$ (keV <sup>2</sup> mg <sup>-1</sup> cm <sup>2</sup> )		
	Este trabajo	P. y E. (Ref. [130])	B. y M. (Ref. [16])
20.0	439.252	420.0	360.0
50.0	625.534	565.0	540.0
80.0	752.693	710.0	640.0
100.0	827.525	792.0	700.0
125.0	915.618	881.5	770.0
150.0	1001.06	964.0	840.0

Tabla 3.9: Ajustes a la ley de Thomson-Whiddington según diferentes criterios de la bibliografía.

El alcance de los electrones según la ley de TW, que se emplea como unidad de escala de longitud en los modelos basados en ella, se relacionaría con los ajustes a partir de (3.64). Para obtener una idea de la validez de esta magnitud podemos compararla con el alcance en la aproximación CSDA,  $R_{CSDA}$ . Esta comparación se muestra en la Fig. 3.38 a través del cociente  $R_{CSDA}/R_{TW}$ , junto con los ajustes lineales en cada caso. Cabe observar que la relación lineal aparece sólo con la elección aquí presentada.

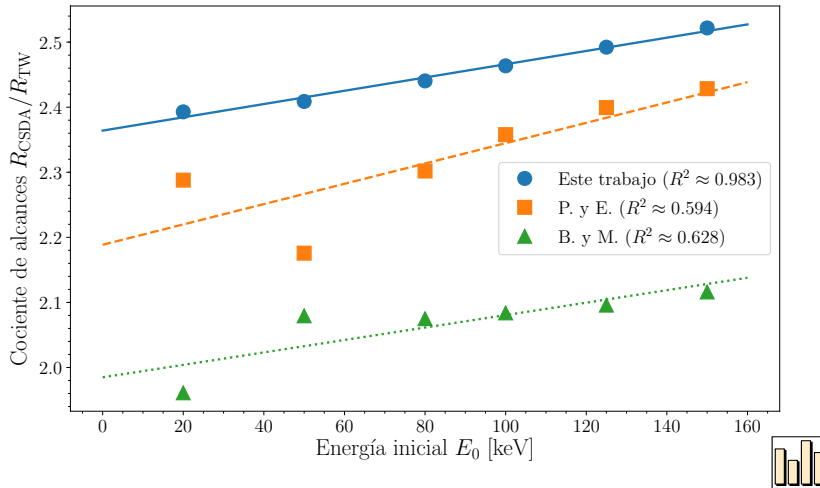


Figura 3.38: Relación entre los alcances obtenidos por la aproximación de frenado continuado (CSDA) y por la ley de Thomson Whiddington, según el criterio empleado para el ajuste de la última. La relación lineal se encuentra sólo para el ajuste aquí tomado.

Es interesante analizar qué efecto tendrá uno u otro ajuste sobre un modelo que dependa de él. En particular, Poludniowski y Evans emplean para la fracción de cruce el ajuste a la forma funcional

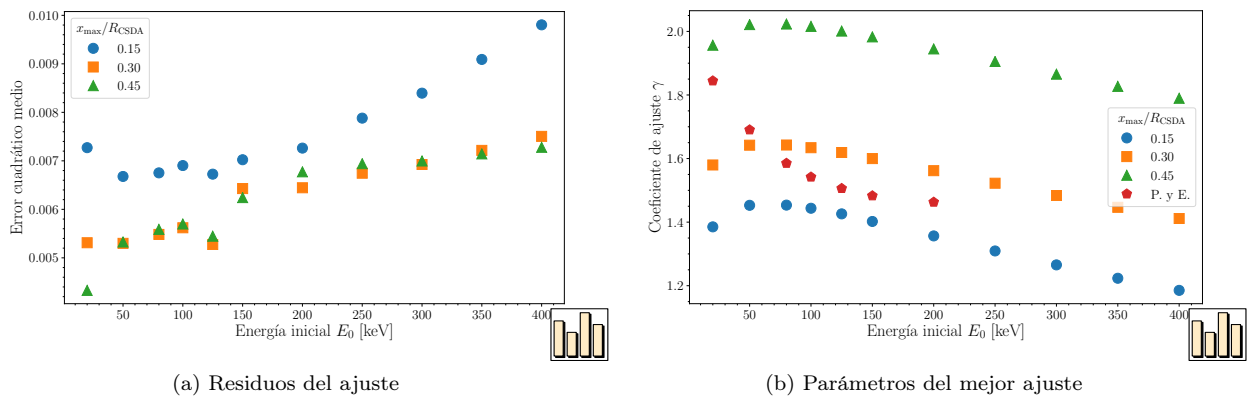
$$\eta^F := \left\{ \begin{array}{ll} \left(1 - \frac{x}{R_{TW}}\right)^\gamma & \text{si } x \leq R_{TW} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}, \quad (3.65)$$

donde  $\gamma$  es un parámetro adimensional de ajuste, posiblemente dependiente de la energía inicial  $E_0$ , y  $R_{TW}$  es el alcance según la predicción de la ley,

$$R_{TW} = \frac{E_0^2}{C_{TW}\rho}. \quad (3.66)$$

La raíz del error cuadrático medio de los ajustes realizados con los diferentes criterios para el alcance máximo considerado aplicados a (3.65) se muestran en la Fig. 3.39(a). La serie etiquetada como 0.15 se corresponde con el método aquí propuesto para dar la mejor descripción de la ley de TW. Comparándolo con los otros métodos se puede observar que, sin embargo, esta mejor representación no repercutiría en una mejora de los resultados generales proporcionados por el modelo. Dicho de otra forma, la mejor descripción de la ley se ve «difuminada» por el mejor ajuste en el parámetro  $\gamma$ . Los mejores ajustes de dicho parámetro se muestran en la Fig. 3.39(b), lo que muestra que en éste está fuertemente influenciado por la descripción que se emplee para la ley de TW. Los resultados que se obtendrían de los valores presentados por Poludniowski y Evans para  $C_{TW}$  se recogen también en la figura. Dichos resultados son acordes con el ajuste de  $\gamma$  presentado en ese trabajo, que era de 1.7, independientemente de  $E_0$ . Los resultados también son compatibles con la condición de ajustar para  $x \leq 0.3R_{CSDA}$ , aunque el tipo de dependencia y el rango de variación del parámetro con  $E_0$  cambia. Esto muestra de nuevo que representar mejor la ley no mejora el modelo, y que la física aparentemente subyacente está enmascarada por la expresión meramente paramétrica resultante.

Figura 3.39: Efecto de  $R_{TW}$  sobre el ajuste de  $\eta^F$ . (a) muestra la raíz del error cuadrático medio, mientras que (b) muestra la variación del parámetro de mejor ajuste con la energía inicial del electrón para las diferentes series de criterios indicados en el texto para realizar el ajuste, así como los resultados obtenidos al realizar el ajuste con la descripción de la ley de Thomson Whiddington dada en Ref. [130].

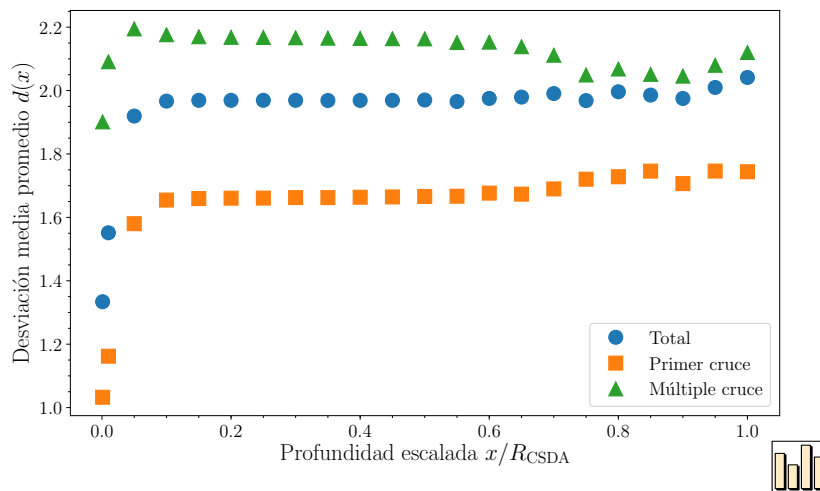


### 3.2.5.2 El régimen de difusión en la descomposición de primer y múltiple cruce

Las magnitudes introducidas en §3.2.1.1 (pág. 47) para describir el comportamiento de la parte angular de la fluencia pueden aplicarse también para la descomposición de primer y múltiple cruce introducida por Poludniowski y Evans<sup>161</sup>. En su trabajo se introduce inicialmente la condición de difusión y se asume ésta tras cierta justificación, pero antes de plantear la descomposición que tratamos en este apartado y que es la base fundamental de su trabajo.

<sup>161</sup> Cf. Ref. [130]: G. G. Poludniowski y P. M. Evans. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part I. Electron penetration characteristics in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2164-2174. DOI: 10.1118/1.2734725.

La Fig. 3.40 recoge los resultados de la desviación media promedio [(3.24)] para el caso de  $E_0 = 100$  keV, siendo la dependencia con ésta muy reducida, análoga a la presentada en la Fig. 3.27. En esta figura se puede observar que ni  $d^F$  ni  $d^M$  se comportan como  $d(x)$ , asintóticamente alcanzando valores de aproximadamente 1.65 y 2.17, respectivamente. La aproximación  $d^F := d^M := 2.0$  equivalente al tratamiento de Poludniowski y Evans es, desde luego, mejorable, en tanto que implica que se está dando artificialmente más peso a la componente de primer cruce que a la otra<sup>162</sup>.



<sup>162</sup> Formalmente, que una contribución a la fluencia sea de primer cruce o de múltiple es una variable aleatoria que no es independiente de la distribución angular. El fallo subyace en tratarlas como independientes sin un análisis previo.

Figura 3.40: Descomposición en primer y múltiple cruce del promedio de la desviación media promedio  $d(x)$ .

La Tabla 3.10 recoge las diferencias numéricas en términos de  $\angle_1$  con los espectros de Bhat *et al.*<sup>163</sup> que resultarían de aplicar al modelo un tratamiento (incorrecto) de difusión sobre ambas componentes, así como una aproximación mejorada con los valores asintóticos encontrados. Con ella queda comprobado que éste era un punto de mejora sobre el modelo de Poludniowski y Evans.

$E_0$	Este trabajo	$d^F := 2$	$d^F := 1.67$
		$d^M := 2$	$d^M := 2.17$
100 keV	0.0504	0.0599	0.0543
80 keV	0.0471	0.0524	0.0503
50 keV	0.0531	0.0536	0.0541

<sup>163</sup> Cf. Ref. [14]: M. Bhat *et al.* «Diagnostic x-ray spectra: A comparison of spectra generated by different computational methods with a measured spectrum». *Medical physics* **25**, 1 (1998), págs. 114-120. DOI: 10.1118/1.598170.

Tabla 3.10: Diferencias con los resultados de Bhat *et al.* para varios tratamientos de las componentes de cruce en el sentido de  $\angle_1$ .



### 3.3 Deposición de energía en un tejido

$$\ast \rightarrow e^- \rightarrow \boxed{\gamma \rightarrow T}$$

En esta sección estudiaremos una forma de caracterizar la cantidad de efectos biológicos que causa un haz de fotones en un tejido. La magnitud fundamental para esto es la dosis, que estudiaremos en función de la cantidad de tejido que se irradie para ver si hay diferencias respecto a las dosis producidas por otro tipo de fuentes más allá de la norma de éstas. En el apartado §3.3.1 estudiaremos ésta empleando el modelo más sencillo para ello, el de la atenuación exponencial. Con objeto de mejorar este modelo, introduciremos un formalismo que permita su mejorar sus predicciones en §3.3.2, que se aplicará finalmente para corregir las curvas anteriores.

#### 3.3.1 Modelo de atenuación exponencial

En primera aproximación, la magnitud de los efectos biológicos que se producen depende de la cantidad de energía que se deposite en el tejido. La magnitud intensiva<sup>164</sup> que se emplea para medir esto es la denominada dosis, que se define como el cociente entre la energía depositada y la masa del sistema a escala infinitesimal, *i. e.*,

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dE_{\text{abs}}}{dm} = \frac{dE_{\text{abs}}}{dV} \rho^{-1}, \quad (3.67)$$

donde  $dE_{\text{abs}}$  es la energía absorbida en el punto del espacio en que se mida la dosis y los otros símbolos tienen su significado usual. La unidad de la dosis en el Sistema Internacional es el J/kg que recibe el nombre especial de gray (Gy)<sup>165</sup>.

Para estudiar qué cantidad de energía se deposita en el tejido retomaremos la descripción de §3.2.1.3 (pág. 59). Allí veíamos que diferentes procesos hacían que el haz de fotones se desviara de su trayectoria y, en algunas interacciones, depositara energía del medio. Se define el coeficiente de transferencia como aquél que considera las secciones eficaces con un peso por la fracción de su energía que transfieren, *i. e.*,

$$\mu_{\text{tr}} \stackrel{\text{def}}{=} n \sum_i f_i \sigma, \quad (3.68)$$

donde  $n$  es el número de átomos del medio por unidad de volumen y  $f_i$  son las fracciones antes introducidas. El coeficiente de transferencia es, al igual que el de atenuación, dependiente de la energía y del medio.

Aparentemente se podría pensar, a partir de la definición anterior, que la energía que se deposita en el medio es el producto de  $E\mu_{\text{tr}}(E)$  por la cantidad de partículas que alcance el punto por unidad de área eficaz (*i. e.*, la fluencia); sin embargo, puede ocurrir que parte de la energía que se ceda inicialmente al medio se transfiera nuevamente de forma radiativa —*i. e.*, si se ioniza un electrón, este se desplazará por el medio produciéndose estocásticamente pérdidas colisionales, que se absorben en el medio, y radiativas, que, en general, no lo harán—.

Esto se corrige considerando la fracción de energía de las partículas emitidas que se emite radiativamente,  $g$ , que se emplea para definir el coeficiente de absorción de energía

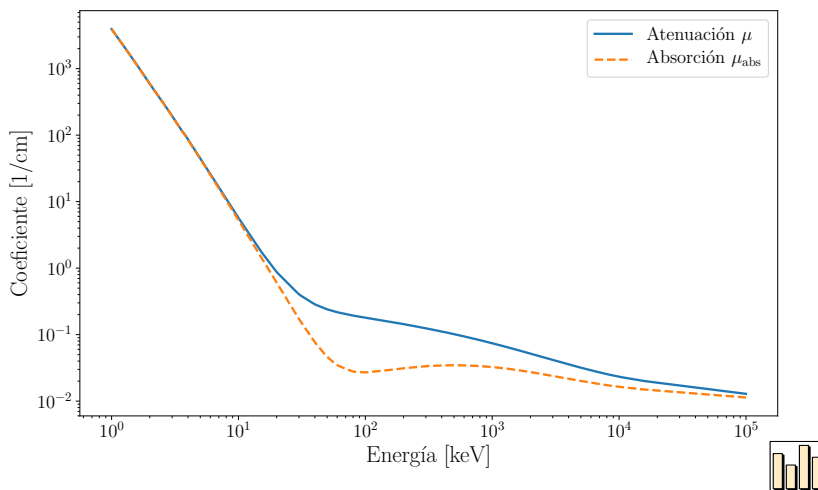
$$\mu_{\text{abs}} \stackrel{\text{def}}{=} (1 - g)\mu_{\text{tr}}. \quad (3.69)$$

<sup>164</sup> *I. e.*, que no depende de la extensión del sistema en que se mida.

<sup>165</sup> Realmente el tipo de efectos biológicos que se produzcan depende también del tipo de partículas, *e. g.*, un neutrón en cierto rango de energías es más proclive a producir efectos que un fotón. Para modelar esto se construye una magnitud llamada dosis equivalente que pondera estas contribuciones según la partícula que las produzca. En el caso de fotones y electrones, este peso es la unidad, por lo que se pueden identificar dosis y dosis equivalente. La unidad de dosis equivalente en el SI recibe la denominación especial de sievert (Sv). En el caso de fuentes «no convencionales», como pueden ser las debidas a pulsos ultracortos, no está claro aún que exista una diferencia respecto a las convencionales. *Cf.* pág. 4 *et seq.*

Ahora sí, el producto de la fluencia por  $E\mu_{\text{abs}}(E)$  cumplirá con las condiciones deseadas. En el caso de que el haz no sea monoenergético, el razonamiento es el mismo reemplazando la fluencia por la fluencia diferencial en energías y la dosis es la integral de la función resultante.

La Fig. 3.41 muestra una representación de los coeficientes de atenuación y absorción tomados de la Ref. [87]<sup>166</sup>, para el caso del modelo de tejido procedente del informe ICRU-44<sup>167</sup>. Se puede observar que a bajas energías son coincidentes debido a la dominancia del efecto fotoeléctrico, que ya habíamos puesto de manifiesto en §3.2.1.3 (pág. 59), y a la reducida pérdida relativa de energía de los electrones ionizados por emisión de radiación<sup>168</sup>. A las pocas decenas de keV la dispersión Compton es dominante, por lo que cabe esperar que haya diferencias entre ambos. Estas diferencias pueden ser importantes debido a que tras una dispersión Compton se reducirá la energía del fotón dispersado, que no supone simplemente una cuenta adicional, sino un incremento con el factor  $E\mu_{\text{abs}}(E)$  calculado con su nueva energía, que aumentará mucho a la luz de la dependencia recogida en la Fig. 3.41.



<sup>166</sup> J. H. Hubbell y S. M. Seltzer. *Tables of X-ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients from 1 keV to 20 MeV for Elements Z = 1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest*. 1996. URL: <http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/cover.html>.

<sup>167</sup> Cf. pág. 22 en Ref. [90]: International Commission on Radiation Units. *Tissue substitutes in radiation dosimetry and measurement*. Vol. 44. Intl Commission on Radiation, 1989; cuyos datos proceden del grupo 5 en la tabla 3 de Ref. [164]: D. White, H. Woodard y S. Hammond. «Average soft-tissue and bone models for use in radiation dosimetry». *The British journal of radiology* **60**, 717 (1987), págs. 907-913. DOI: 10.1259/0007-1285-60-717-907.

Figura 3.41: Coeficientes de atenuación y de absorción en un el modelo de tejido procedente del informe ICRU-44.

En definitiva, al trabajar con una fluencia diferencial en energías  $\phi_{\text{en}}(E)$ , la dosis que encontramos a una profundidad  $x$  vendrá dada, dentro de la aproximación de propagación exponencial, por

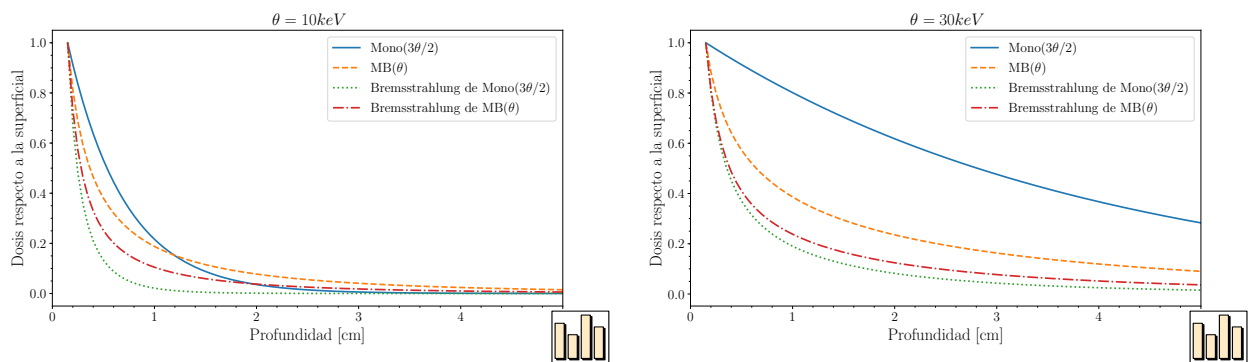
$$D[\phi_{\text{en}}; x] = \rho^{-1} \int_0^{\infty} \phi_{\text{en}}(E) \mu_{\text{abs}}(E) E e^{-\mu(E)x} dE. \quad (3.70)$$

Para nuestra comparación vamos a considerar dos casos idealizados, el de un haz de fotones monoenergético y el de una distribución maxwelliana de fotones con la misma energía promedio<sup>169</sup>. A éstos añadiremos dos espectros de emisión realistas –obtenidos con el modelo más completo del que disponemos, el numérico de blanco grueso en reflexión [§3.2.2.4 (pág. 66)]— uno procedente de una distribución monoenergética de electrones y otro de una maxwelliana de electrones, teniendo las distribuciones generadoras idéntica energía promedio. En todos los cálculos de este apartado consideraremos energías de los fotones en el rango de 5 a 200 keV.

<sup>168</sup> Cf. §32.4 en Ref. [123]: C. Patrignani *et al.* (Particle Data Group). «Review of particle physics». *Chinese physics C* **40**, 10 (2016), pág. 100001. DOI: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.

<sup>169</sup> Recordemos que esto no es exactamente lo que emitiría una maxwelliana de electrones, pero lo emplearemos como modelo conceptual.

Las curvas así obtenidas se recogen en la Fig. 3.42, normalizadas respecto a la dosis superficial, que es lo que se fijaría por prescripción clínica. Como se puede observar, no existe una gran diferencia con las curvas de dosis procedentes de fuentes convencionales; si bien el caso de *bremsstrahlung* de una maxwelliana tiene un decaimiento más lento que su homólogo monoenergético debido a las contribuciones de los fotones de mayor energía. Más relevante es la diferencia con los casos idealizados monoenergético y la maxwelliana de fotones. Que las propiedades de la distribución de *bremsstrahlung* en cuanto a dosis sean diferentes nos previene de la inexactitud de identificar las distribuciones de *bremsstrahlung* procedentes de una maxwelliana con de electrones con una maxwelliana de fotones. Esta idea se retomará, en términos de la caracterización de las distribuciones, en §4.3.



La variación de las curvas de dosis dentro de la familia de distribuciones generadas por maxwellianas, según el modelo numérico de blanco grueso, se muestra en la Fig. 3.43.

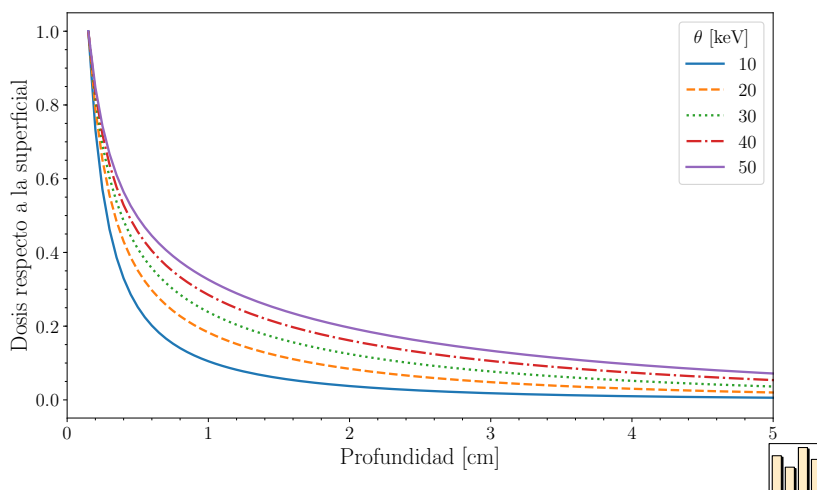


Figura 3.42: Curvas de dosis respecto a la superficial en función de la profundidad de penetración en un tejido según el modelo exponencial. Se representan, de arriba a abajo en la leyenda, el caso de fotones monoenergéticos, el caso idealizado de una distribución maxwelliana de fotones, el *bremsstrahlung* procedente de electrones monoenergéticos y el procedente de una maxwelliana de electrones. Los casos tienen en común la energía promedio de la distribución bien de fotones en los dos primeros casos, bien de los electrones generadores en los dos últimos.

Figura 3.43: Curvas de dosis del *bremsstrahlung* de una maxwelliana en función de la temperatura de ésta, utilizando el modelo exponencial.

### 3.3.2 Modelo numérico de acumulación

En esta sección completaremos el modelo de atenuación exponencial para dar una descripción numérica completa de la dosis en un tejido. Para ello utilizaremos la noción de factor de acumulación, que presentaremos en §3.3.2.1; sin embargo, para dar una descripción reutilizable y más útil introduciremos una generalización de éste en ese mismo apartado. Posteriormente en §3.3.2.2 se definirá un método Montecarlo para su cálculo. Finalmente, en §3.3.2.3 retomaremos el estudio de las curvas de dosis, ya con el modelo completo.

#### 3.3.2.1 Teoría de acumulación

Para introducir de forma general la noción del factor de acumulación vamos a recuperar la formulación de los operadores de propagación introducidos en §3.2. Si  $\mathcal{K}(E \rightarrow E', \mathbf{r})$  es la fluencia diferencial de fotones con energía  $E'$  en  $\mathbf{r}$  debidos a las emisiones con energía  $E$ , podemos escribir la dosis como

$$D[\phi_{\text{en}}; \mathbf{r}] = \rho^{-1} \int_0^\infty \phi_{\text{en}}(E) \int_0^E \mu_{\text{abs}}(E') E' \mathcal{K}(E \rightarrow E', \mathbf{r}) dE' dE, \quad (3.71)$$

que es la expresión general análoga a (3.70).

Para mantener la intuición del modelo exponencial a la par que dar una descripción más exacta podemos definir una magnitud que corrija las contribuciones de cada energía de la fuente multiplicativamente, esto sería,

$$\mathcal{B}_D(E, \mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_0^E \mu_{\text{abs}}(E') E' \mathcal{K}(E \rightarrow E', \mathbf{r}) dE'}{\mu_{\text{abs}}(E) E}. \quad (3.72)$$

de modo que

$$D[\phi_{\text{en}}; \mathbf{r}] = \rho^{-1} \int_0^\infty \phi_{\text{en}}(E) \mathcal{B}_D(E, \mathbf{r}) \mu_{\text{abs}}(E) E e^{-\mu(E)x} dE. \quad (3.73)$$

La función  $\mathcal{B}_D(E, \mathbf{r})$  es un factor que corrige la dosis (de ahí el subíndice) causada por una fuente de energía  $E$  en la posición  $\mathbf{r}$ . Esto es lo que se denomina un factor de acumulación (*build-up*) en la bibliografía, especialmente utilizado en el campo del diseño de blindajes, que se estudia para diferentes configuraciones geométricas y materiales. Habitualmente estas magnitudes se calculan a partir de simulaciones y se presentan o bien directamente tabuladas o bien mediante algún ajuste funcional sobre los resultados<sup>170</sup>; *e.g.*, a la descripción

$$\mathcal{B}_D := A e^{-\alpha_1 \mu x} + (1 - A) e^{-\alpha_2 \mu x}, \quad (3.74)$$

donde  $A, \alpha_1, \alpha_2$  son parámetros dependientes de la energía. Cabe observar que el modelo impone que el factor sea la unidad a espesores reducidos<sup>171</sup> y que escala las longitudes con el recorrido libre medio ( $\mu^{-1}$ ). La ventaja de estas formas es la simplicidad analítica —en tanto que se trabaje con una única energía, que no será el caso en nuestra aplicación—, siendo preferible trabajar con interpolaciones sobre las tabulaciones.

<sup>170</sup> Cf. pág. 421 *et seq.* en Ref. [98]: J. R. Lamarsh y A. J. Baratta. *Introduction to Nuclear Engineering*. 3.<sup>a</sup> ed. Prentice Hall, 2001. DOI: 10.1063/1.3037597; o §8 en Ref. [109]: J. E. Martin. *Physics for radiation protection: a handbook*. John Wiley & Sons, 2006. DOI: 10.1002/9783527618798.

<sup>171</sup> Esto tiene sentido en la geometría de un blindaje, pues si éste es pequeño reproducirá para espesores suficientemente pequeños las hipótesis del modelo exponencial. En otros casos, en que se considere material más allá de la profundidad  $x$ , no tendrá por qué ser así, debido a la posibilidad retrodispersión. Veremos que esto ocurre más adelante en este trabajo (*cf.* Fig. 3.47 y Fig. 3.48).

La noción introducida tiene una importante debilidad, y es que necesita ser recalculado para cada magnitud dosimétrica. Si, por ejemplo, estuviésemos interesados en la energía que queda en total en haz tras recorrer una cantidad de tejido (o quizá un blindaje), necesitaríamos repetir el proceso usando un peso diferente; simbólicamente estaríamos introduciendo el reemplazo

$$\rho^{-1} E \mu_{\text{abs}}(E) \longrightarrow E, \quad (3.75)$$

*i. e.*, estaríamos empleando un peso diferente en (3.72) y (3.73).

Para incluir estos casos, generalizaremos el formalismo para darles cabida. Una magnitud dosimétrica es un funcional

$$d_{w,\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \psi(E') w(E') dE', \quad (3.76)$$

donde  $\psi$  es una magnitud distribuida en energías medible en la ROI (*e. g.*, la fluencia diferencial o la densidad de fotones<sup>172</sup>) y  $w$  es un peso asociado a ésta. La Tabla 3.11 recoge los ejemplos usuales, aunque no es exhaustiva. En particular, siempre se puede considerar el caso de un detector con una curva de eficiencia en energías, por lo que no se puede decir que haya un número limitado de casos de interés.

Funcional	$w(E)$	
Número de fotones	$f_\gamma$	1
Energía de los fotones	$f_\gamma$	E
Dosis por fotones	$\phi_{\text{en}}$	$E \cdot \mu_{\text{abs}}(E)$

El modelo de corrección de acumulación para una magnitud dosimétrica cualquiera se describe por lo tanto mediante un factor de acumulación general

$$\mathcal{B}_{w,\psi}(E, \mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_0^E w(E') \mathcal{K}_\psi(E \rightarrow E', \mathbf{r}) dE'}{w(E) e^{-\mu(E)x}}, \quad (3.77)$$

de modo que la magnitud dosimétrica a profundidad  $x$  producida por una distribución  $\psi$  será

$$d_{w,\psi}[\psi; x] = \int_0^\infty (E) \mathcal{B}_{w,\psi}(E, \mathbf{r}) w(E) e^{-\mu(E)x} dE. \quad (3.78)$$

Hemos añadido un subíndice al operador de propagación para indicar qué magnitud se considera en éste.

Hasta este momento no hemos introducido nada significativamente nuevo sobre las descripciones usuales. Ahora bien, consideremos que una forma de evitar los problemas de la multiplicidad de formas reunidas en (3.77) es conservar la información sobre la distribución en energías que estamos integrando en ella. Definimos así el factor<sup>173</sup> de acumulación diferencial

$$\mathcal{B}_\psi(E \rightarrow E', \mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{K}_\psi(E \rightarrow E', \mathbf{r})}{e^{-\mu(E)x}}. \quad (3.79)$$

Esta magnitud permite recuperar cualquiera de los otros a partir de

$$\mathcal{B}_{w,\psi}(E, \mathbf{r}) = \frac{\int_0^E w(E') \mathcal{B}_\psi(E \rightarrow E', \mathbf{r}) dE'}{w(E)}, \quad (3.80)$$

<sup>172</sup> La fluencia diferencial se usará para calcular magnitudes intensivas por su relación con el camino recorrido, mientras que la densidad se usará para magnitudes totales.

Tabla 3.11: Magnitudes dosimétricas comunes de un haz de fotones (*Cf.* (3.76)).  $f_\gamma$  representa la densidad de fotones y  $\phi_{\text{en}}$  la fluencia diferencial.

<sup>173</sup> Aunque mantenemos el término «factor» para conservar la analogía, la naturaleza de este objeto es la de describir la distribución de probabilidad de la energía de los fotones dispersados que alcanzan al detector junto con la norma asociada. Como tal, será análogo a una PDF más dicha norma, con parte continua y discreta que podemos representar como una combinación lineal de una función «normal» y de unas deltas de Dirac de esta energía (*cf.* §A (pág. 143)).

<sup>174</sup> Una construcción alternativa más rigurosa sería definir el factor de acumulación diferencial como el operador que transforma un peso asociado a una magnitud dosimétrica en la corrección de (3.80).

esto es, mediante una media ponderada con su correspondiente peso<sup>174</sup>. Las magnitudes dosimétricas finales se seguirían de (3.78).

El cálculo del factor de acumulación diferencial es equivalente al problema de transporte del cálculo de  $\mathcal{K}$ , con la ventaja de que es una corrección sobre un comportamiento sencillo, por lo que es más intuitivo y práctico.

Aunque hasta ahora hemos considerado el factor de acumulación (diferencial o no) como una corrección multiplicativa a la solución exponencial del problema de transporte, no se debe pensar que ésta sea una magnitud puramente operacional, sino que tiene un sentido físico pleno relacionado con un operador integro-diferencial de la teoría de transporte. Terminaremos este apartado justificando esta idea.

Para considerar el problema de transporte completo necesitamos una magnitud similar a las fluencias con que hemos trabajado antes, pero aún más general para incluir la distribución en ángulo sólido y la dependencia temporal. Dicha magnitud es el denominado flujo angular<sup>175</sup>  $L(t; \mathbf{r}, E, \hat{\Omega})$ . Las fluencias anteriores son formas integrales de ésta, *e. g.*,

$$\phi(t; \mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \iint_{\mathbb{S}^2} L(t; \mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) d^2 \hat{\Omega} dE dt. \quad (3.81)$$

La descripción completa del problema de transporte viene dada por la ecuación de transporte de Boltzmann, que describe cómo cambia el flujo angular. Dicha ecuación viene dada por la expresión integro-diferencial

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \frac{\partial L(t; \mathbf{r}, E, \hat{\Omega})}{\partial t} + \hat{\Omega} \cdot \nabla L(t; \mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) = S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) - \mu(\mathbf{r}; E)L(t; \mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) + \\ \int_{\mathbb{R}^+} \iint_{\mathbb{S}^2} \mu_{\text{scatt}}(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) L(\mathbf{r}; E', \hat{\Omega}') d^2 \hat{\Omega}' dE', \end{aligned} \quad (3.82)$$

donde  $v(E)$  es la velocidad en función de la energía,  $S$  representa las fuentes de radiación,  $\mu$  es la sección eficaz macroscópica (o coeficiente de atenuación) y  $\mu_{\text{scatt}}$  la suma de las secciones eficaces de los diferentes procesos (fotoeléctrico, Compton, etc.).

Los términos del lado izquierdo de (3.82) indican cómo se mueve la radiación en ausencia de interacciones, mientras que en el lado derecho identificamos las fuentes de radiación en el volumen en que se define la ecuación<sup>176</sup>, las pérdidas de flujo angular debidas a la atenuación del medio y la parte de éstas que se recupera (posiblemente tras un cambio de energía y dirección) según los diferentes procesos, respectivamente<sup>177</sup>. En caso de que considerásemos más de un tipo de partículas tendríamos realmente un sistema de ecuaciones como (3.82), con posibles términos cruzados en las secciones eficaces<sup>178</sup>.

Consideramos, como es habitual, la forma estacionaria<sup>179</sup> de (3.82) y la integramos en el segmento entre un punto inicial que asociamos a la fuente y uno final que asociamos al punto en que queremos conocer la magnitud<sup>180</sup>, de lo que resulta

<sup>175</sup> Otra magnitud equivalente que se emplea, sobre todo al restringirse al transporte radiativo, es la llamada «radiancia espectral» (o «intensidad espectral» en textos antiguos, ya en desuso), magnitud totalmente análoga aunque midiendo energía en lugar de número de partículas. La relación entre ambas es la cantidad de energía por partícula, el producto de la frecuencia por la constante de Planck.

<sup>176</sup> Podrían además existir fuentes externas dadas por las condiciones de contorno en dicho volumen.

<sup>177</sup> Para una explicación detallada de los términos y una derivación de (3.82), *cf.* págs. 85–88 en Ref. [162]: L. V. Wang y H.-i. Wu. *Biomedical optics: principles and imaging*. John Wiley & Sons, 2007.

<sup>178</sup> *Cf.* Ref. [19]: E. Boman, J. Tervo y M. Vauhkonen. «Modelling the transport of ionizing radiation using the finite element method». *Physics in Medicine and Biology* **50**, 2 (2005), pág. 265. DOI: 10.1088/0031-9155/50/2/006.

$$\frac{dL(\mathbf{r})}{ds} = S(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}; E)L(\mathbf{r}) + \int_{\mathbb{R}^+} \iint_{\mathbb{S}^2} \mu_{\text{scatt}}(\mathbf{r}; E', \hat{\Omega}') L'(\mathbf{r}) d^2 \hat{\Omega}' dE', \quad (3.83)$$

donde hemos obviado las variables  $E$  y  $\hat{\Omega}$ , indicando la prima en  $L'$  que dichas variables son en su caso «primadas», *i. e.*, evaluadas en las variables de integración en lugar de en las implícitas.

Queremos encontrar la forma integral de (3.83). Para esto definamos en primer lugar el espesor óptico

$$\tau(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} \mu(s) ds, \quad (3.84)$$

con el que podemos observar que la expresión

$$e^{-\tau(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})} \quad (3.85)$$

es un factor integrante de (3.83).

La forma integral que se obtiene con esto es

$$L(\mathbf{r}) = L(\mathbf{r}') e^{-\tau(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})} + \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} e^{-\tau(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})} \int_{\mathbb{R}^+} \iint_{\mathbb{S}^2} \mu_{\text{scatt}}(\mathbf{r}''(s); E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) L'(\mathbf{r}''(s)) d^2 \hat{\Omega}' dE' ds, \quad (3.86)$$

donde hemos considerado al integrar que sólo existen fuentes en  $r'$ .

Si consideremos inicialmente sólo el primer sumando del lado derecho de (3.83), lo que nos indica la expresión es que, dada una fuente en  $\mathbf{r}$ , el flujo angular que ocasiona en un punto  $\mathbf{r}'$  es el que emerge de la fuente atenuado por el espesor óptico. Aún más, cuando el medio es homogéneo es inmediato ver que

$$\tau(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) = \mu |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \quad (3.87)$$

Este resultado es precisamente el modelo exponencial, que se releva así como la aproximación a orden cero (analizaremos en breve el significado de este orden) del problema integro-diferencial de transporte.

Consideremos ahora el sumando restante, que es un operador que actúa sobre el flujo que llega a un punto cualquiera  $\mathbf{r}''$  y que allí se dispersa para viajar en dirección a  $\mathbf{r}$ . Llamando a este operador  $\mathcal{P}$ , la ecuación toma la forma

$$L = L_0 + \mathcal{P}L, \quad (3.88)$$

donde  $L_0$  es flujo angular acolisional: el que llega sin sufrir interacción alguna, el primer sumando en el lado derecho de (3.86).

Aplicando recurrentemente a sí misma (3.88) encontramos

$$L = L_0 + \mathcal{P}L = L_0 + \mathcal{P}(L_0 + \mathcal{P}L) = \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i L_0. \quad (3.89)$$

En esta expresión podemos reconocer  $\mathcal{P}^i L_0$  como la contribución de la radiación que alcanza el punto  $\mathbf{r}$  sufriendo exactamente  $i$  colisiones. El sumatorio que resulta es una serie de Neumann que define un nuevo operador integro-diferencial que podemos denominar «operador de acumulación»

$$\mathfrak{B} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i. \quad (3.90)$$

<sup>179</sup> Los tiempos de propagación suelen ser mucho menores que el tiempo en que está activa una fuente. En nuestro caso hacer esto literalmente sería cuestionable, en tanto que la fuente sí está activa un tiempo semejante a aquellos; no obstante, el caso estacionario es equivalente a trabajar con las magnitudes integradas en el tiempo. Haremos esto sin cambiar la notación, para evitar aumentar el ya dilatado elenco de magnitudes. *Cf.* Ref. [19].

<sup>180</sup> *Cf.* págs. 9–10 en Ref. [26]: S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Dover, New York, 1960.



Este operador transforma el campo de flujo angular acolisional en el flujo angular en el punto de interés, *i. e.*

$$L(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) = \mathfrak{B} \left[ L^0(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) \right], \quad (3.91)$$

Hemos visto que la idea de acumulación está presente como un operador sobre el flujo angular, que es la magnitud más general posible. La existencia de este operador supone que se puedan definir otros operadores sobre las integrales de ésta, con lo que probaremos por fin lo que queríamos. El factor de acumulación usual está dado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} L^0(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) & \xrightarrow{\mathfrak{B}} & L(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) \\ \downarrow \int \int w(E) & & \downarrow \int \int w(E) \\ d_w^0(\mathbf{r}) & \xrightarrow{\mathcal{B}_w} & d_w(\mathbf{r}) \end{array}, \quad (3.92)$$

*i. e.*, renunciamos a parte de la información contenida en  $\mathfrak{B}$  por medio de las integraciones indicadas. En tanto que consideremos la magnitud dosimétrica en puntos donde la propagación directa no sea nula, podemos identificar el operador resultante  $B_i$  con un escalar cuyo producto corrige aquella.

La extensión al factor de acumulación diferencial es análoga, aunque perdiendo al integrar menos información, ahora mediante

$$\begin{array}{ccc} L^0(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) & \xrightarrow{\mathfrak{B}} & L(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) \\ \downarrow \int & & \downarrow \int \\ \phi_{\text{en}}^0(\mathbf{r}; E) & \xrightarrow{\mathcal{B}} & \phi_{\text{en}}(\mathbf{r}; E) \end{array}. \quad (3.93)$$

En este caso el operador  $\mathcal{B}$  tiene que ser un poco más complicado. Como debe ser lineal en la distribución en energías que resulta del transporte acolisional, debe ser una familia de PDF<sup>181</sup> que al aplicarse se pueda superponer ponderada con aquella: precisamente lo que hacíamos en (3.78).

En definitiva, hemos probado que el factor de acumulación y el factor de acumulación diferencial provienen realmente de operadores integro-diferenciales que en la práctica se aproximan mediante métodos Montecarlo, y se representan como un factor y una distribución con una norma respectivamente.

### 3.3.2.2 Cálculo del factor de acumulación diferencial

En este apartado realizaremos una descripción geométrica que permita calcular el factor de acumulación diferencial para la situación física que queremos describir. Para ello consideraremos una fuente puntual emitiendo partículas en dirección a un medio material que identificaremos con el tejido, idealmente semiinfinito. El problema sería similar al de la geometría gruesa del modelo de rayos X<sup>182</sup>, reemplazando el blanco por tejido. Estudiando las fluencias en éste obtendríamos la descripción buscada.

<sup>181</sup> Recordamos nuevamente que admitimos una componente discreta representada en ésta.

<sup>182</sup> Cf. pág. 43 *et seq.*



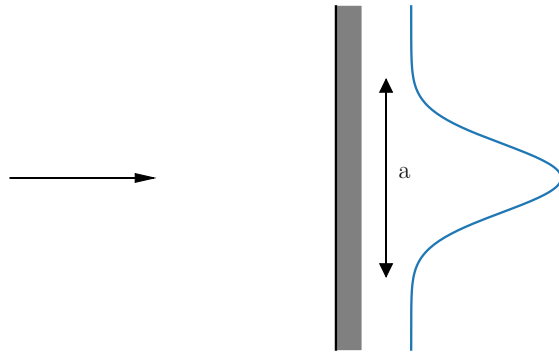


Figura 3.44: Geometría puntual para el factor de acumulación. Una fuente puntual emite monodireccionalmente hacia una ROI «suficientemente grande» como para recoger todos sus efectos en la dimensión transversal, cuya longitud característica se indica como  $a$ .

Considerando lo desarrollado en el modelo de rayos X, resulta tentador utilizar la fluencia planar en (3.71), con lo que, en principio, tendríamos una magnitud similar a la dosis que daría cuenta de la energía depositada en las capas de tejido por unidad de longitud en profundidad escalada con la densidad. Podría, quizá, argumentarse, que esta magnitud representa aquello que es objeto de nuestro estudio y trabajar directamente con ella.

Sin embargo, podemos justificar más en detalle que el resultado de dicha sustitución sí representa una dosis bajo ciertas condiciones. Llamemos  $\psi(\mathbf{x}^\perp)$  al valor de una magnitud  $\psi$  obtenida mediante un estimador puntual en la coordenada transversal  $\mathbf{x}^\perp$ . En general la magnitud será dependiente de la profundidad  $x$ , lo cual supondremos implícitamente. Supongamos que ésta magnitud como función de  $\mathbf{x}^\perp$  está concentrada en una región del plano transversal de longitud característica  $a$ , que denotaremos  $R(a)$ , centrada en el origen, de modo que

$$\|\mathbf{x}^\perp\| \gtrsim a \Rightarrow \psi(\mathbf{x}^\perp) \approx 0. \quad (3.94)$$

Esto nos permitirá considerar la magnitud planar

$$\Psi := \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(\mathbf{x}^\perp) \approx \iint_{R(a)} \psi(\mathbf{x}^\perp), \quad (3.95)$$

que deseamos utilizar para reemplazar a la anterior<sup>183</sup>.

Consideremos ahora el problema de una fuente extendida con densidad uniforme  $\sigma$  en una región de longitud característica  $b$ , que denotaremos  $R'(b)$ ; así como de un detector puntual, como se muestra en la Fig. 3.45.

La cantidad diferencial de magnitud  $\psi$  debida a la componente de fuente en el punto con componente transversal  $\mathbf{t}$  será precisamente  $\sigma\psi(\mathbf{t} - \mathbf{x}^\perp)$ , con lo que la total vendrá dada por

$$\Psi_{\text{ext}} = \sigma \iint_{R'(b)} \psi(\mathbf{t} - \mathbf{x}^\perp) d^2 \mathbf{t}. \quad (3.96)$$

En caso de que  $b - \|\mathbf{x}^\perp\| \gtrsim a$ , o, intuitivamente, que la fuente sea mucho mayor que la zona en que produce sus efectos teniendo en cuenta el

<sup>183</sup> En la práctica sería imposible usar un estimador puntual para la fluencia, siempre sería una superficie «suficientemente pequeña» (o un volumen, de emplear otro tipo de estimador). La cuantía de esta afirmación tendría que ser definida, requiriendo un compromiso con la eficiencia computacional, pues cuanto más reduce la superficie más difícil de estimar es un cruce por ella.

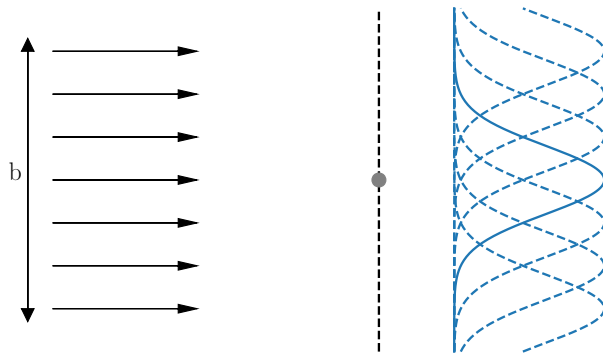


Figura 3.45: Geometría extendida para el factor de acumulación. Una fuente extendida de longitud característica  $b$ , representada como un conjunto de fuentes puntuales uniformes, emite monodireccionalmente hacia un detector puntual (o «suficientemente pequeño»), que encuentra el efecto desplazado de la fuente puntual de Fig. 3.44. La condición para que el detector recoja todas las contribuciones, supuestas en una región de longitud característica  $a$  es  $b \gtrsim a$ .

«descentrado» debido a  $\mathbf{x}^\perp$ , resulta por un cambio de variable elemental que

$$\Psi_{\text{ext}} = \sigma \Psi, \quad (3.97)$$

*i. e.*, que la magnitud planar procedente de una fuente puntual es equivalente al efecto en un punto de una fuente uniforme planar, vía la densidad de la fuente. Fuente planar y detector planar son, en este sentido, duales, siempre que las dimensiones de la fuente sean mucho mayores que las de los efectos.

Utilizaremos así la descripción de la fuente puntual para construir una simulación análoga a las del modelo de rayos X (*cf.* §3.2.1.1.2 (pág. 51)). La versión<sup>184</sup> de FLUKA empleada aquí es la 2011.2x.1, el tejido simulado sigue la composición del informe ICRU-44 antes indicado<sup>185</sup> y los umbrales de producción y transporte se situaron a 1 keV. Las dimensiones de tejido simuladas fueron de 20 cm.

Midiendo las fluencias diferenciales planares se encuentran resultados como los representados en la Fig. 3.46, donde podemos distinguir una componente discreta en el extremo superior de energía, asociado a los fotones no dispersados y a los que sólo hayan experimentado colisiones elásticas; así como una componente continua procedente de los dispersados inelásticamente. Esta primera componente discreta es similar a la predicha por el modelo exponencial, aunque ligeramente incrementada por los (infrecuentes) procesos de dispersión elástica, que alteran el ángulo de cruce con los planos del tejido, depositando así una cantidad mayor de energía por unidad de recorrido longitudinal.

Los factores de acumulación de cuentas y de dosis, obtenidos a partir del diferencial, se muestran en la Fig. 3.47. Debe destacarse que se comprueba que toman valores superiores a la unidad, como cabía esperar por el sentido físico de la magnitud.

<sup>184</sup> Hemos utilizado siempre la versión más moderna del código en el momento de la realización de cada estudio, por lo que difieren según la sección de la presente memoria. Según las notas de versión no debería haber ninguna alteración relevante en los casos aquí estudiados.

<sup>185</sup> Esta composición no está entre las incluidas en FLUKA y debe definirse para ello. *Cf.* nota 167 en la pág. 80.

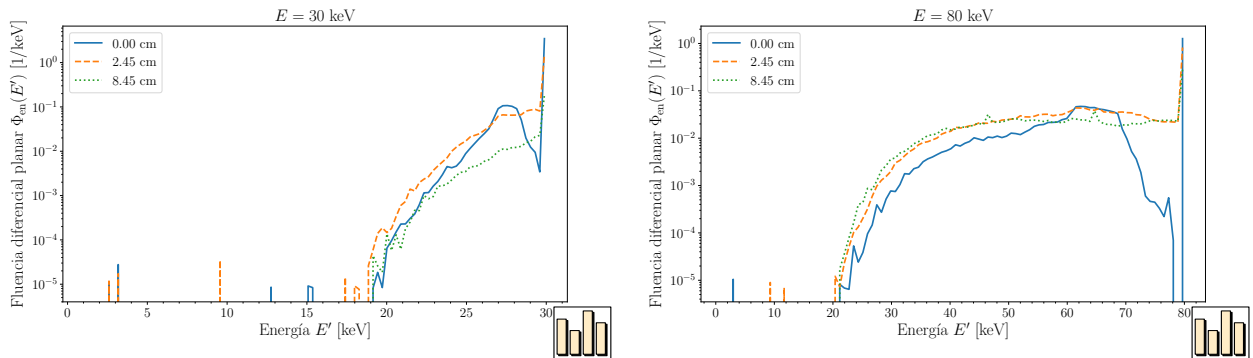
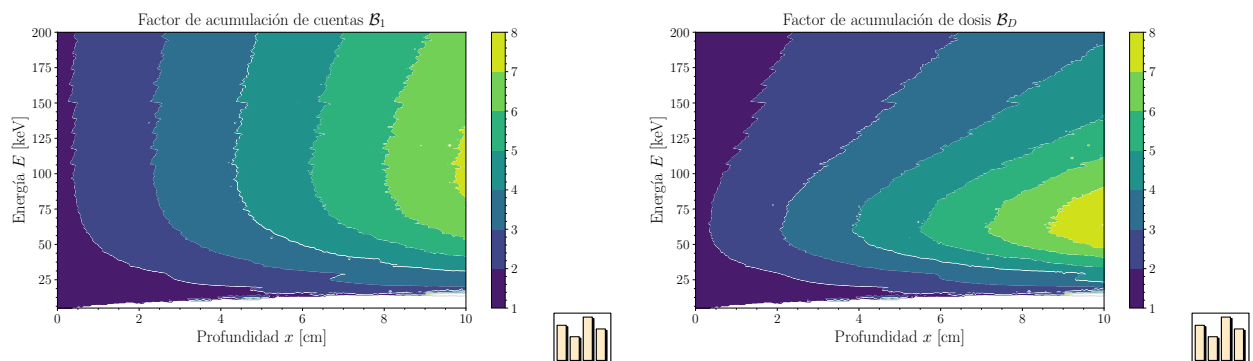


Figura 3.46: Fluencia diferencial planar de fotones en un modelo de tejido ICRU-44. Cada serie muestra la distribución a la profundidad indicada. Esta distribución es análoga a una PDF con una norma añadida, siendo el valor del área subtendida la magnitud con sentido físico. En particular, los extremos de la distribución representan una componente discreta con un ancho asociado a la discretización empleada. La naturaleza real de ésta es la de una delta de Dirac, irrepresentable rigurosamente.

Una última cuestión que cabe plantear es si algún ajuste como los empleados ocasionalmente en diseño de blindajes [(3.74)] puede aplicarse a los resultados. Como puede apreciarse en la Fig. 3.47, los factores no son funciones decrecientes de la profundidad, con lo que las formas funcionales tendrían que ser diferentes de las citadas. Si bien podría tener cabida un ajuste diferente —una función lineal de  $\sqrt{x}$  proporciona una buena descripción para  $E \lesssim 20$  keV, rango por encima del cual es preferible una lineal en  $x$ — la dependencia en la energía de los coeficientes no es sencilla y habrían de ser tabulados —igual que ocurre usualmente con (3.74)—. Como consecuencia, el beneficio operacional de la forma funcional es bastante reducido, pese al inconveniente que supone deteriorar la descripción de la tabulación directa por el ajuste. Esto último es especialmente importante en la aplicación que estamos persiguiendo, donde el valor de la magnitud exacta es importante, a diferencia del contexto del diseño de blindajes, donde la acotación es suficiente. En conclusión consideraremos poco deseable el uso de ajustes sobre los factores de acumulación, siendo preferible el uso directo de tabulaciones.

Figura 3.47: Curvas de nivel de los factores de acumulación de cuentas y de dosis obtenidos a partir de las simulaciones realizadas con FLUKA. La región de gran profundidad y bajas energías es más ruidosa debido al enorme decremento de fotones que los alcanzan.



### 3.3.2.3 Dosis en profundidad de tejido revisada

Utilizando los factores de acumulación anteriores se obtienen las curvas de dosis en profundidad corregidas que se muestran en la Fig. 3.48. En esta representación hemos incluido para mayor claridad el resultado de emplear un factor de acumulación que sólo tenga en cuenta la componente discreta del factor de acumulación diferencial, lo que supone considerar únicamente las dispersiones elásticas. El pequeño incremento que suponen éstas se debe asociar a la reducida probabilidad de dispersión elástica (*cf.* Fig. 3.29 en la pág. 61), aunque su contribución aumenta por la relación de la fluencia planar con el ángulo de cruce [(3.18)].

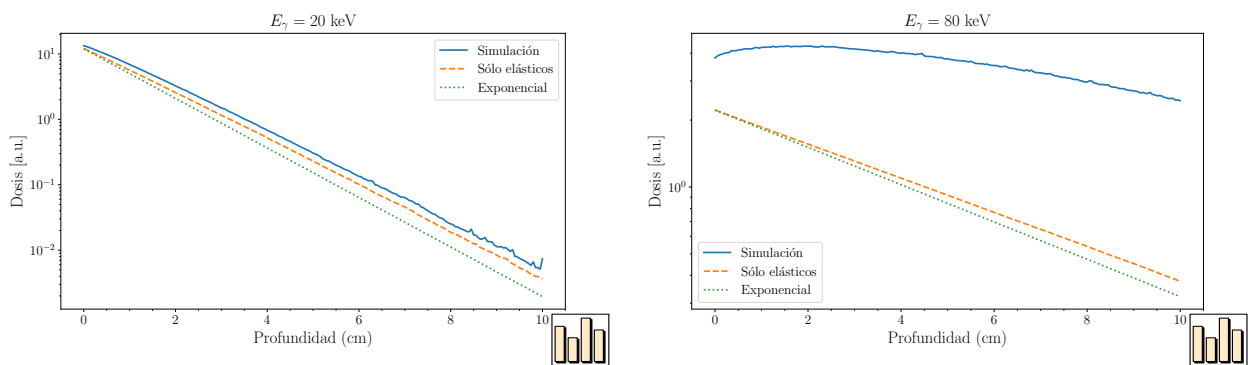


Figura 3.48: Curvas de dosis obtenidas a partir del factor de acumulación de dosis. Se incluye también un cálculo la componente discreta del factor de acumulación diferencial debido únicamente a procesos elásticos.

Respecto a la contribución de la componente inelástica, se observa que es menor para energías reducidas, donde el efecto fotoeléctrico es dominante, mientras que no es así a energías mayores, donde lo es la dispersión Compton (*cf.* Fig. 3.29).

Las diferentes familias de distribuciones que contemplamos en §3.3.1 puede revisarse con el modelo numérico. Esta comparativa se recoge en la Fig. 3.49.

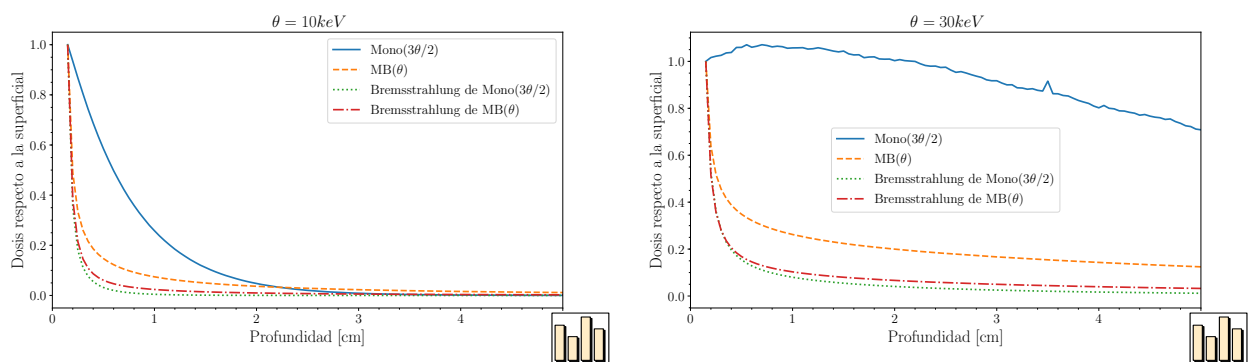


Figura 3.49: Curvas de dosis respecto a la superficial en función de la profundidad de penetración en un tejido según el modelo numérico. Se representan, de arriba a abajo en la leyenda, el caso de fotones monoenergéticos, el caso idealizado de una distribución maxwelliana de fotones, el *bremsstrahlung* procedente de electrones monoenergéticos y el procedente de una maxwelliana de electrones. Los casos tienen en común la energía promedio de la distribución bien de fotones en los dos primeros casos, bien de los electrones generadores en los dos últimos.

También igual que en §3.3.1, terminaremos presentado las curvas de dosis para el modelo numérico de blanco grueso en reflexión, ahora con la corrección de acumulación. Éstas pueden verse en la Fig. 3.50.

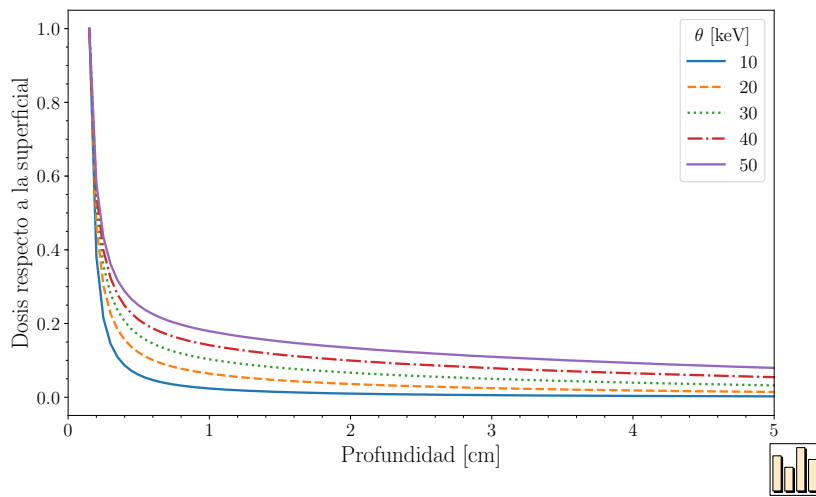


Figura 3.50: Curvas de dosis del *bremsstrahlung* de una maxwelliana en función de la temperatura de ésta, utilizando la corrección de acumulación obtenida numéricamente.



# Capítulo 4

## Herramientas de diagnóstico

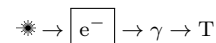
*If you find that you're spending almost all your time on theory,  
start turning some attention to practical things;  
it will improve your theories.*

Donald Knuth

En el capítulo anterior hemos proporcionado una serie de modelos para la sucesión de etapas que define la producción de rayos X mediante un sistema de aceleración láser. Para alcanzar el objetivo final que constituiría la aplicación clínica resulta imperativo que las radiaciones producidas puedan ser medidas y caracterizadas para evaluar si la cantidad de efectos biológicos que la radiación producirá se ajusta a la prescripción médica. En esta etapa precursora en que tratamos de estudiar la viabilidad de este tipo de diseño esta condición se traduce en que es fundamental disponer de una serie de herramientas para analizar las radiaciones emitidas, teniendo en cuenta sus características singulares en lo que su perfil temporal requiere.

En primer lugar, en §4.1 plantaremos una revisión extendida de un método para caracterizar la componente de electrones. Aunque éstos no constituyan en última instancia el término fuente para la irradiación, según hemos contemplado en este estudio, evaluar sus características sí sería útil en tanto que esta información podría usarse, a través de los modelos de producción que hemos visto anteriormente, para describir la fuente de rayos X. A continuación, en §4.2 presentaremos el principal fenómeno que dificulta el uso de detectores como los de estado sólido para caracterizar el espectro de la fuente, que es el denominado apilamiento. Presentaremos aquí un formalismo nuevo que permite su corrección de forma más eficaz que lo existente en la literatura y lo aplicaremos a resultados experimentales para mostrar su validez. Finalmente, en §4.3 profundizaremos en la magnitud habitualmente usada en el campo para describir las emisiones producidas, comúnmente denominada «temperatura»; si bien esto, como veremos, constituye un abuso del término. Veremos en dicho apartado cómo una aplicación incorrecta de esta noción lleva a una posiblemente incorrecta interpretación de resultados experimentales.

### 4.1 Caracterización directa de la distribución de electrones



Como planteábamos en la introducción al capítulo, la naturaleza de pulsos ultracortos de la radiación emitida en sistemas como el que consideramos en este trabajo hace que la detección de dichas emisiones sea compleja, debido al tiempo muerto del detector y a los problemas de apilamiento<sup>1</sup>. Otro problema adicional es que la cantidad de ruido electrónico generado por el láser puede alterar sensiblemente las medidas. El enfoque usual para la medir la componente de electrones pasa por el uso de espectrómetros magnéticos construidos con imanes permanentes.

<sup>1</sup> Cf. Ref. [169]: C. Zúlick *et al.* «High resolution bremsstrahlung and fast electron characterization in ultrafast intense laser–solid interactions». *New Journal of Physics* **15**, 12 (2013), pág. 123038. DOI: 10 . 1088 / 1367 - 2630/15/12/123038.

Sin embargo, una singularidad del tipo de dispositivo que estamos estudiando respecto a las configuraciones experimentales usuales es que el entorno circundante al blanco no es el vacío, sino un espacio con aire, lo que complica severamente el uso de este tipo de dispositivos. La Fig. 4.1 muestra el comportamiento de un haz de electrones monoenergético en un magnético en aire, ilustrando así la dificultad inherente a este tipo de diseños.

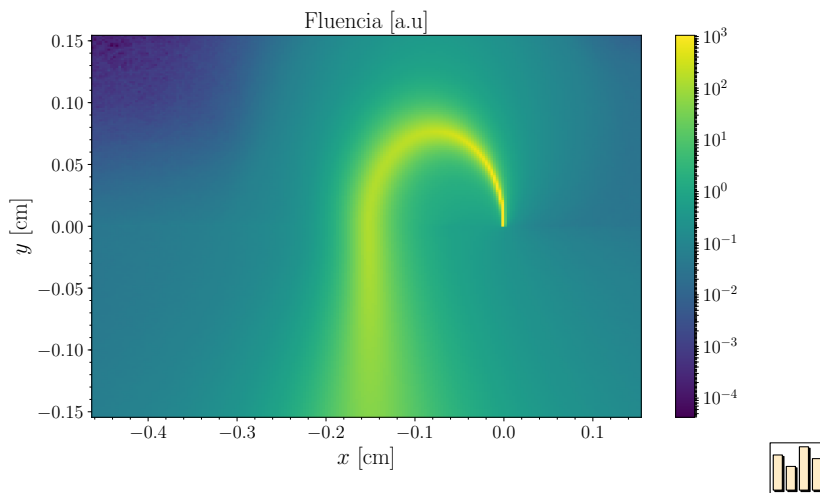


Figura 4.1: Deflexión de un haz de electrones monoenergético con energía 50 keV en un campo electromagnético de 1 T en aire, en la región  $y > 0$ . En este caso el campo es lo suficientemente fuerte como para forzar la deflexión de electrones, que originan la fluencia representada en la figura, donde puede adivinarse la trayectoria «ideal» que seguirían en vacío. Según los valores del campo magnético y de la energía, las partículas podrían no llegar a escapar de la región magnética. Es importante darse cuenta de que una pantalla interpuesta para capturar electrones (la restricción a un segmento del campo representado) no registraría una posición unívocamente relacionada con la energía del electrón, sino que una energía da lugar a una distribución de impactos sobre ella.

Otra forma de superar las dificultades que antes mencionábamos consistiría en estudiar cómo se deposita la energía en algún material que permita posteriormente su medida, *e. g.*, en películas radiocrómicas. La sensibilidad a diferentes energías se podría conseguir añadiendo materiales que actuaran como filtro<sup>2</sup>. La construcción usual se basa en una pila que intercale películas sensibles y materiales atenuantes, de modo que se mediría en cada película la radiación atenuada por las componentes precedentes. Estudiando la cantidad de energía depositada en función de la total que porta la partícula se podría reconstruir la distribución de la radiación incidente exigiendo que reproduzca la observación experimental. El inconveniente de este método es que las radiaciones de baja energía son difíciles de medir, debido a su rápida detención, y la reducida resolución del sistema.

En nuestro caso es, en cambio, posible considerar el propio aire como el medio de frenado de las radiaciones. Midiendo las dosis depositadas en el material sensible —consideraremos la posibilidad de películas radiocrómicas y de detectores termoluminiscentes (TLD)— podremos caracterizar la distribución en energías de los electrones. A diferencia de los detectores donde se considera el cruce a través de las radiocrómicas, que, debido a su carácter heterogéneo, deben ser analizados con técnicas de simulación Montecarlo, en el caso del aire puede adoptarse un modelo de frenado continuado para el estudio.

En esta sección se presentará un estudio teórico revisado de un detector construido bajo estos principios en un trabajo anterior<sup>3</sup>. Pre-

<sup>2</sup> Cf. Ref. [61]: M. Galimberti *et al.* «SHEEBA: A spatial high energy electron beam analyzer». *Review of scientific instruments* **76**, 5 (2005), pág. 053303. DOI: [10.1063/1.1899309](https://doi.org/10.1063/1.1899309).

<sup>3</sup> Cf. Refs. [54; 55]: C. Fonseca *et al.* «Measurement of radiation produced by ultra short laser pulses interacting with solid targets». *AIP Conference Proceedings* **1231**, 1 (2010), págs. 223-224. DOI: [10.1063/1.3428935](https://doi.org/10.1063/1.3428935); C. Fonseca. *Generación de electrones y rayos X a partir de pulsos láser de GW y alta tasa de repetición, y su protección radiológica*. Tesis doct. Universidad de Salamanca, oct. de 2011.



sentaremos este nuevo formalismo teórico en §4.1.1, mostraremos el diseño del detector original en §4.1.2 y, finalmente, aplicaremos estas nuevas técnicas para el análisis de los resultados originales en §4.1.3.

#### 4.1.1 Formalismo teórico

El comportamiento de los electrones en un medio homogéneo, en particular el aire, se puede describir dentro de la aproximación de frenado continuado, que de la que ya introdujimos algunos aspectos en §3.2.1.1.2 (pág. 52). La información completa del comportamiento se describe, en esta aproximación, con el denominado poder de frenado, definido como

$$S(E) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{dE}{dx} > 0, \quad (4.1)$$

donde  $x$  es la distancia recorrida por el electrón. Esta magnitud tiene en cuenta tanto las pérdidas de naturaleza colisional como radiativas. Identificando  $x$  con la distancia a la fuente (lo que es razonable en tanto que es un medio de número atómico reducido, en el que las trayectorias son menos tortuosas<sup>4</sup>), dispondremos de un modelo completo para el comportamiento de los electrones. Existen tabulaciones, ampliamente utilizadas, de esta magnitud realizadas por Berger *et al.*<sup>5,6</sup> para los materiales usuales, entre ellos el aire.

La distancia en que un electrón con energía cinética inicial  $E_0$  se frena hasta alcanzar un nuevo valor  $E$  para aquella vendrá dada por

$$x(E_0 \rightarrow E) = \int_{E_0}^E \frac{1}{-S(E')} dE'. \quad (4.2)$$

Por consideraciones sobre la monotonicidad<sup>7</sup>, (4.2) puede invertirse para obtener dos funciones,  $E(x, E_0)$  y  $E_0(x, E)$ , que pueden emplearse para realizar los cálculos necesarios.

Consideremos en primer lugar el caso de una fuente monoenergética. En esta situación la dosis (cantidad de energía depositada en el medio por unidad de masa) en un detector colocado a distancia  $x$  de la fuente en el que se absorba la totalidad de electrones incidentes vendrá dada por

$$D_{E_0}(x) = \frac{N}{x^2} E(x, E_0), \quad (4.3)$$

donde  $N$  es una constante de normalización relacionada con la cantidad de electrones emitidos en el ángulo sólido subtendido por el detector y la densidad de éste. La realización de la condición de absorción plena que hemos incluido está vinculada a la dimensiones del detector,  $L$ , y la energía con que los electrones lo alcancen. Esta condición se puede expresar formalmente como  $L \gtrsim x_{\text{det}}(E \rightarrow 0)$ , donde  $x_{\text{det}}$  es una función análoga a (4.2) empleando el poder de frenado del detector. En un TLD de LiF con  $L \approx 1$  mm esto es válido para  $E \lesssim 120$  keV.

En el caso general de una fuente con una distribución en energías no necesariamente monoenergética, como la emitida por nuestro plasma, tendremos una función de densidad de probabilidad de energía  $f^0(E_0)$ , como las maxwellianas que introducíamos en §3.1.2.2 (pág. 31)<sup>8</sup>. De

<sup>4</sup> Cf. págs. 257–261 en Ref. [126]; E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

<sup>5</sup> Cf. Ref. [9]; M. Berger *et al.* *Stopping-Power and Range Tables*. 2009. URL: <http://www.nist.gov/pml/data/star/>.

<sup>6</sup> Para una interfaz a estos datos cf. §D.4.

<sup>7</sup> Una función estrictamente monótona tiene inversa, y además ésta es igualmente monótona (creciente o decreciente). Cf. pág. 110,111 en Ref. [15]; K. G. Binmore. *Mathematical Analysis: a straightforward approach*. Cambridge University Press, 1977. DOI: 10.1017/CB09781139171656.

<sup>8</sup> También pueden consultarse, *e.g.*, Refs. [13; 114]; B. Bezzerides, R. Jones y D. Forslund. «Plasma Mechanism for Ultraviolet Harmonic Radiation Due to Intense CO<sub>2</sub> Light». *Physical Review Letters* **49**, 3 (1982), págs. 202-205. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.202; A. G. Mordovanakis *et al.* «Temperature scaling of hot electrons produced by a tightly focused relativistic-intensity laser at 0.5 kHz repetition rate». *Applied Physics Letters* **96**, 7 (2010), pág. 071109. DOI: 10.1063/1.3306730.

forma general, supondremos que tenemos una familia de distribuciones dependiente de uno o más parámetros que queremos ajustar. Así pues, la distribución en energías  $f^0(E_0)$  puede estimarse maximizando la verosimilitud de la curva distancia-dosis,  $D(x)$ , dentro de un familia de funciones candidatas  $(f_i)_{i \in I}$ , empleando un modelo  $f^0(E_0) \rightarrow D(x)$ .

Supongamos, por el momento, que conocemos la familia

$$\left\{ f^{x'} \right\}_{x' \in [0, \infty)} \quad (4.4)$$

de distribuciones en energía a las distancias  $x'$ . La dosis a una determinada distancia vendrá dada por superposición lineal de (4.3), *i. e.*,

$$D_{\{f^{x'}\}_{x'}}(x) = \frac{N}{x^2} \int_0^\infty E f^x(E) dE. \quad (4.5)$$

Necesitamos, por tanto, estudiar cómo cambia la distribución de energías original con el camino recorrido.

A la distancia  $x$ , una distribución inicial  $f^0$  se habrá transformado siguiendo la regla de cambio de variable de funciones de densidad de probabilidad de variables aleatorias absolutamente continuas<sup>9</sup>, *i. e.*,

$$f^x(E) = f^0(E_0^x(E)) \left| E_0^{x'}(E) \right|, \quad (4.6)$$

donde, para mayor claridad, hemos denotado  $E_0^x(E) := E_0(x, E)$ . Es inmediato percatarse de que ésta es una función creciente y podremos eliminar el valor absoluto de la expresión.

Sustituyendo (4.6) en (4.5) obtenemos

$$D_{f^0}(x) = \frac{N}{x^2} \int_0^\infty E f^0(E_0^x(E)) E_0^{x'}(E) dE. \quad (4.7)$$

Esta última expresión define una transformación  $f^0(E) \rightarrow D(x)$  que puede servir para evaluar la hipótesis de que se haya emitido una cierta distribución de electrones, utilizando una curva de distancia-dosis que se haya medido. Debemos notar que la norma de la distribución es irrelevante dado que, en general,  $N$  será desconocida *a priori* o estará fijada por imponer una relación con alguna dosis medida.

Las curvas de distancia-dosis obtenidas por resolución numérica de (4.7) para los casos de distribuciones monoenergéticas<sup>10</sup> y maxwellianas se recogen en la Fig. 4.2 en línea continua. Los electrones monoenergéticos presentan un alcance finito y definido<sup>11</sup>, que será precisamente el denominado alcance CSDA que ya hemos empleado anteriormente; mientras que los maxwellianos tienen un decaimiento de tipo exponencial.

Para estudiar la validez del cálculo en la CSDA, realizamos una serie de simulaciones con el código Montecarlo FLUKA, con la versión 2011.2c.6<sup>12</sup>. Una fuente isótropa y monoenergética de electrones, cuya energía es definida en cada simulación, se dispuso en un medio de aire homogéneo. La distribución energética de electrones a diversas distancias se midió en superficies esféricas concéntricas a la fuente, con una separación en incrementos de 1 mm, mediante un detector de cruce por las superficies (USRBDX en terminología de FLUKA). Empleamos una subrutina FLUSCW previamente probada<sup>13</sup> para descartar las

<sup>9</sup> Cf. (A.5). De nuevo, la monotonía es importante para permitir la aplicación del teorema (cf. nota 7 en la pág. 95).

<sup>10</sup> El cual es equivalente a la forma más práctica (4.3).

<sup>11</sup> Recordemos que esto es sólo consecuencia del modelo negando la distribución en energías de las pérdidas. Cf. nota 90 en la pág. 52.

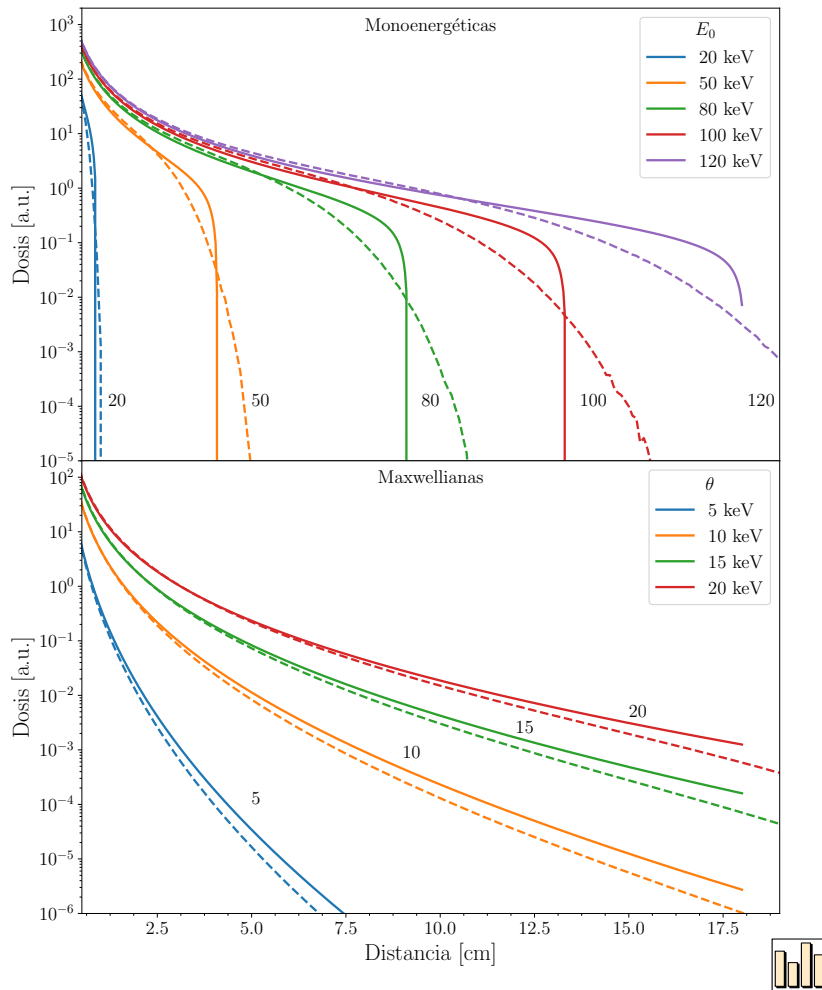


Figura 4.2: Dosis en función de la distancia producidas por fuentes monoenergéticas de electrones (arriba) y por maxwellianas (abajo). La norma relativa es irrelevante. Las líneas continuas se corresponden con el cálculo numérico de (4.7), mientras que las discontinuas recogen resultados procedentes de simulación Montecarlo.

contribuciones de retrodispersión. Cada simulación consistió de 50000 partículas primarias, empleando dispersión coulombiana en lugar de múltiple, con umbrales de transporte y producción situados en 1 keV. Los histogramas de fluencia así obtenidos se integraron para obtener la energía por unidad de área en la distancia a que se colocarían los detectores, que sería la que registrarían los TLD bajo las hipótesis planteadas anteriormente.

Las curvas así obtenidas se muestran en línea discontinua en la Fig. 4.2. Las ligeras diferencias con el modelo numérico se deben a la desaparición de la identificación de la distancia con el camino recorrido y a los efectos de la distribución en energías de las pérdidas. Esto último se puede apreciar en las caídas de las curvas, que se vuelven menos abruptas, lo que obedece a que algunos de los electrones del paquete originalmente monoenergético se detienen antes que el valor intermedio que proporciona la CSDA y otros después. En el caso de las distribuciones maxwellianas, las diferencias entre simulación y modelo pueden asimilarse a una ligera subestimación del parámetro de temperatura, siempre inferior al 7% en el rango representado.

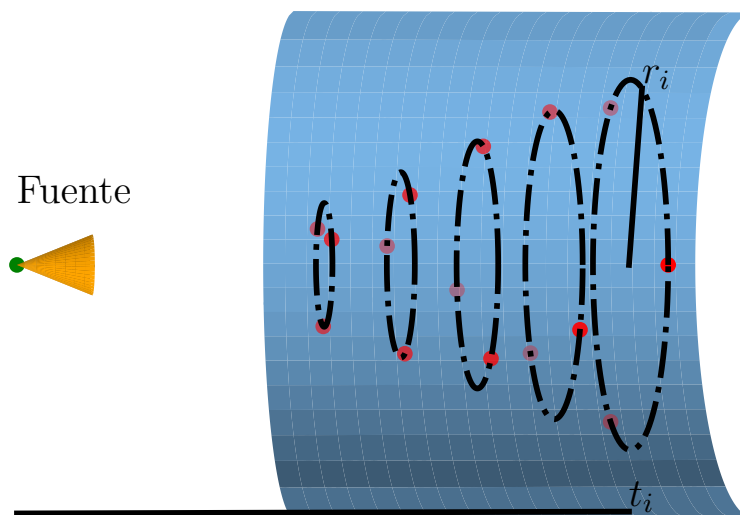
<sup>12</sup> Cf. Refs. [18; 49]: T. Böhlen *et al.* «The FLUKA Code: Developments and Challenges for High Energy and Medical Applications». *Nuclear Data Sheets* **120** (2014), págs. 211-214. DOI: [10.1016/j.nds.2014.07.049](https://doi.org/10.1016/j.nds.2014.07.049); A. Ferrari *et al.* *FLUKA: A multi-particle transport code*. CERN, Geneva, 2005. DOI: [10.5170/CERN-2005-010](https://doi.org/10.5170/CERN-2005-010).

<sup>13</sup> Cf. Ref. [83]: G. Hernández y F. Fernández. *Simulation of bremsstrahlung spectra in general targets and its application to a model of a laser-driven irradiation source*. Comunicación oral en el 3rd Fluka Advanced Course and Workshop, LNF, Italia. 2014. URL: <https://indico.cern.ch/event/334606/contributions/779778/>.

### 4.1.2 Diseño de un detector

El diseño general que consideraremos para los espectrómetros es el realizado por Fonseca<sup>14</sup>, que consiste en un conjunto de tiras finas con forma de estrella de tres puntas, colocadas en planos paralelos en un cilindro de PVC, siendo éstos perpendiculares a su eje principal. Cada una de estas tiras contará con un cristal termoluminiscente adherido a ella a una distancia fija del eje en cada uno de los planos, de modo que la sucesión de detectores se distribuirá en una superficie cónica en cuyo vértice se situaría la fuente de electrones. Este diseño se presenta de forma esquemática en la Fig. 4.3.

Para garantizar que los electrones alcanzando un TLD sólo recorran aire hasta alcanzar éste, las tiras se rotaron un ángulo fijo para evitar que produjera «sombra» sobre los siguientes. Esta disposición permitiría además introducir filtros entre las capas, en caso de que la fuente de electrones fuera más energética y se requiriera de su efecto, al precio de complicar el modelo de las curvas dosis distancia, que requerirían, probablemente, solución Montecarlo en lugar de la numérica aquí planteada<sup>15</sup>.



<sup>14</sup> Cf. Ref. [55]: C. Fonseca. *Generación de electrones y rayos X a partir de pulsos láser de GW y alta tasa de repetición, y su protección radiológica*. Tesis doct. Universidad de Salamanca, oct. de 2011.

<sup>15</sup> Cf. Ref. [61]: M. Galimberti *et al.* «SHEEBA: A spatial high energy electron beam analyzer». *Review of scientific instruments* **76**, 5 (2005), pág. 053303. DOI: [10.1063/1.1899309](https://doi.org/10.1063/1.1899309).

Figura 4.3: Esquema del detector. Los cristales termoluminiscentes (puntos rojos) están situados a distancias  $x_i = \sqrt{t_i^2 + r_i^2}$  de la fuente de electrones (punto verde). Todo el sistema se encuentra contenido en un cilindro de PVC, estando la mitad de superficie representada en color azul.

El prototipo de espectrómetro empleado en el trabajo se realizó con detectores de LiF modelo TLD-700™ (Thermo Scientific™), con un tamaño de  $3 \times 3 \times 0.85 \text{ mm}^3$ . El cilindro tenía un diámetro de 4 cm, y el giro de cada tira respecto de la precedente fue de  $24^\circ$ <sup>16</sup>. Las posiciones de los detectores se recogen en la Tabla 4.1. Con estos parámetros, el ángulo respecto a la fuente está en el intervalo  $14\text{--}16.3^\circ$ , en el que la supondremos homogénea. La Fig. 4.4 muestra una fotografía de la configuración resultante.

Las tiras se realizaron con películas radiocrómicas Gafchromic® EBT2 para facilitar la inspección visual directa y con el propósito de permitir una comprobación cruzada con los termoluminiscentes.

<sup>16</sup> Cf. pág. 30 *et seq.* en Ref. [55].

Distancia al plano $t_i$	Radio $r_i$	Distancia $x_i$
4.5	0.0	4.5
6.0	1.5	6.2
7.5	2.0	7.8
9.0	2.5	9.6
10.5	3.0	10.9
12.0	3.5	12.5

Tabla 4.1: Parámetros del prototipo de detector basado en cristales termoluminiscentes. Todas las magnitudes se indican en cm.



Figura 4.4: Detector construido con un cilindro de radio 4 cm para la medida de dosis en el intervalo de distancias a la fuente 4.5–12.5 cm. Los TLD se situaron en los puntos de color granate indicados.

### 4.1.3 Aplicación experimental

Los datos experimentales se obtuvieron en el trabajo realizado por Fonseca *et al.* en el Servicio Láser de la Universidad de Salamanca<sup>17</sup>. El sistema empleado era un láser Ti:Sa ( $\lambda \approx 793$  nm) de 990 kHz que emitía pulsos de una duración aproximadamente de 120 fs y 0.8 mJ de energía total. Dicho sistema se enfocó con un objetivo de microscopio de distancia focal 10 mm (modelo Edmund<sup>®</sup> EOM APO 20X) en un blanco de aluminio, sobre el que incidía con un ángulo de 45° respecto a su normal. El blanco era un disco pulido que giraba y se traslada de forma continuada para asegurar que se expusiera una parte fresca de la superficie, siguiendo una curva espiral. La intensidad de los pulsos focalizados se midió con un medidor de potencia Spectra-Physics<sup>®</sup> 407A, obteniendo así un valor  $5.4 \cdot 10^{16} \text{ Wcm}^{-2}$

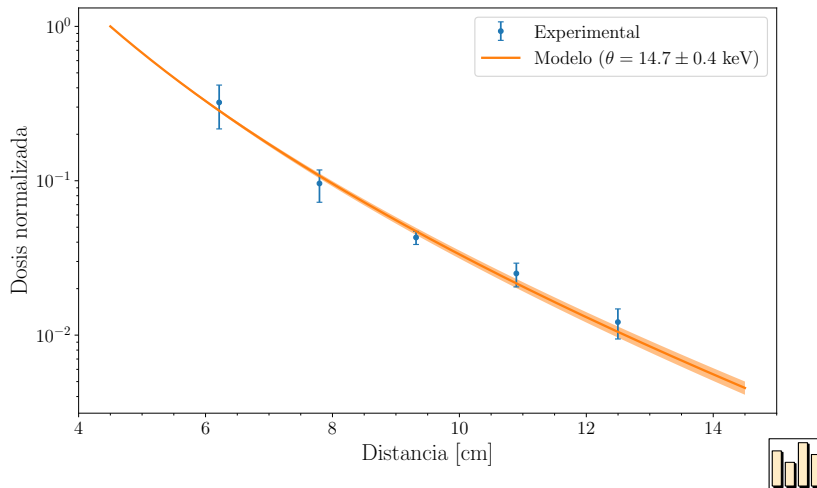
Los datos experimentales se representan en la Fig. 4.5, junto con los mejores ajustes al modelo [(4.7)] empleando la familia de distribuciones maxwellianas «clásicas», *i. e.*,

$$\left\{ f_{\theta}(E) = 2\sqrt{\frac{E}{\pi}}\theta^{-3/2} \exp(-E/\theta) \right\}_{\theta \in \mathbb{R}^+} \quad (4.8)$$

<sup>17</sup> Cf. págs. 20–31 en Ref. [55]: C. Fonseca. *Generación de electrones y rayos X a partir de pulsos láser de GW y alta tasa de repetición, y su protección radiológica*. Tesis doct. Universidad de Salamanca, oct. de 2011.

como candidatas para la distribución inicial  $f^0$ . La constante de normalización  $N$  se fijó de tal forma que la dosis media en el conjunto de TLD colocados a  $x_i = 4.5$  cm se reprodujera en el modelo. El parámetro de temperatura y el error estándar<sup>18</sup> así obtenidos fueron  $14.7 \pm 0.4$  keV.

El resultado es similar al presentado en el trabajo original de Fonseca<sup>19</sup>, en que se empleó integración numérica de la fórmula de Bethe que describe las pérdidas de los electrones<sup>20</sup>, obteniéndose allí un valor de  $\theta \approx 13.8$  keV. La pequeña diferencia puede atribuirse al refinamiento adicional del presente trabajo.



<sup>18</sup> El error estándar de la media estimado mediante la muestra, *i. e.*, la cuasidesviación estándar dividida por la raíz cuadrada del número de datos.

<sup>19</sup> Cf. pág. 65 en Ref. [55]: C. Fonseca. *Generación de electrones y rayos X a partir de pulsos láser de GW y alta tasa de repetición, y su protección radiológica*. Tesis doct. Universidad de Salamanca, oct. de 2011.

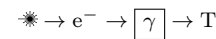
<sup>20</sup> Cf. Ref. [152]: N. Tsoulfanidis. *Measurement and detection of radiation*. CRC press, 2013.

Figura 4.5: Curvas experimentales de distancia-dosis en aire, obtenidas con los datos de Ref. [55], junto con los mejores ajuste al modelo introducido en el presente trabajo [(4.7)] empleando la familia de distribuciones maxwellianas [(4.8)]. La región sombreada indica las variaciones con una desviación estándar del parámetro de ajuste.

## 4.2 Caracterización del espectro de fotones: efectos de apilamiento

Como hemos comentado anteriormente, los rayos X procedentes del tipo de fuentes que consideramos en este trabajo se emiten con propiedades temporales derivadas de la estructura de los pulsos láser que desencadenan los mecanismos de formación de plasma, calentamiento y emisión. En consecuencia, dichas emisiones se producen en pulsos de muy corta duración y, como resultado de esto, las medidas de los rayos X realizadas con detectores de estado sólido están colmadas de artefactos de apilamiento, *i. e.*, se produce la detección de dos o más fotones simultáneamente como un único evento, por lo que el espectro medido conduciría a una interpretación errónea de la física subyacente. Por ejemplo, en caso de utilizar el espectro directamente para estimar la temperatura de los electrones<sup>21</sup>, trabajos previos<sup>22</sup> han indicado que la diferencia debida al apilamiento se puede situar por encima del 30 %.

Para evitar este problema es habitual optar por otros tipos de detectores, como pueden ser los dispositivos de carga acoplada (CCD)<sup>23</sup>—aunque se les exige estar trabajando en un régimen de una única interacción (*single hit*)<sup>24</sup>— espectrómetros basados en la transmisión en un cristal<sup>25</sup>, medidas indirectas del espectro mediante películas radiocrómicas apiladas<sup>26</sup> o mediante el análisis de la dispersión Compton de la radiación en un material<sup>27</sup>.



<sup>21</sup> Esta cuestión la trataremos en detalle en §4.3.

<sup>22</sup> Cf. Ref. [169]: C. Zúlick *et al.* «High resolution bremsstrahlung and fast electron characterization in ultrafast intense laser–solid interactions». *New Journal of Physics* **15**, 12 (2013), pág. 123038. DOI: 10.1088/1367-2630/15/12/123038.

<sup>23</sup> Cf. Ref. [140]: J. Seely *et al.* «Gamma ray spectra from targets irradiated by picosecond lasers». *High Energy Density Physics* **7**, 3 (2011), págs. 150-154. DOI: 10.1016/j.hedp.2011.04.002.

<sup>24</sup> El detector funciona como una matriz segmentada que permite distinguir el punto de interacción, exigiéndose así que sólo exista uno en la detección. Algo similar puede hacerse con los detectores de estado sólido, como veremos más adelante.



Una posible solución para emplear los espectrómetros de estado sólido pasa por garantizar que la tasa de detección sea tan reducida que la probabilidad de registrar simultáneamente dos o más fotones se sitúe por debajo de un límite razonable. En las emisiones de rayos X procedentes de aceleración láser esto es posible bien colimando el haz de rayos X, bien aumentando la distancia del detector a la fuente. El inconveniente que esto presenta es que puede aumentar notablemente el tiempo de medida necesario, así como empeorar la relación señal-ruido del detector.

En los trabajos existentes en la literatura el problema se ha tratado estudiando por simulación Montecarlo el fenómeno de apilamiento de distribuciones con una forma funcional razonable y después escogiendo la más similar a la experimental<sup>28</sup>.

En esta sección presentaremos una descripción completa que permite un cálculo rápido de estos espectros apilados y cómo es posible obtener un espectro «desapilado» por diferentes métodos, según el nivel de ruido experimental que se encuentre. La singularidad del método reside en considerar que la fuente es de naturaleza pulsada —o *single-shot*— y que los pulsos son mucho más cortos que el tiempo de respuesta del detector y su separación temporal mucho mayor.

#### 4.2.1 Formalismo teórico

Supongamos que una fuente emite partículas en pulsos de corta duración producidos con frecuencia  $\nu$ . Suponiendo que la probabilidad de interacción de una partícula dada con el detector sea muy pequeña y que el número de partículas por pulso sea muy elevado, el número de partículas que produce una cuenta en el detector vendrá dado por una distribución de Poisson<sup>29,30</sup>. Su parámetro característico<sup>31</sup>  $\lambda \in (0, \infty)$  puede estimarse mediante la frecuencia  $\nu$  y la tasa de cuentas del detector  $r$ , dado que

$$E \left[ \frac{r}{\nu} \right] = P(N > 0) = 1 - e^{-\lambda}, \quad (4.10)$$

donde  $E[\cdot]$  representa el valor esperado de una variable aleatoria.

Para caracterizar la fuente, el detector estará midiendo la energía que se deposita en él. Ésta seguirá una cierta distribución  $f(E)$  que encontraría correspondencia directa con la experimental en caso de que sólo se produjera un evento en cada cuenta<sup>32</sup>. En el caso general, cuando varias partículas alcancen «simultáneamente» el detector —*i. e.*, en un tiempo mucho menor que su tiempo de respuesta<sup>33</sup>—, éste registrará un evento con energía la suma de las individuales.

Recordemos que la distribución de una suma de dos variables aleatorias independientes igualmente distribuidas viene dado por el producto de convolución<sup>34</sup>

$$(f * f)(E) = \int_{\mathbb{R}} f(x)f(E-x) dx. \quad (4.11)$$

Aplicando repetidas veces (4.11) podemos describir la distribución que sigue la energía total de un conjunto de  $N$  partículas. Esta operación

<sup>25</sup> Cf. Refs. [140; 108]: J. Seely *et al.* «Gamma ray spectra from targets irradiated by picosecond lasers». *High Energy Density Physics* **7**, 3 (2011), págs. 150-154. DOI: [10.1016/j.hedp.2011.04.002](https://doi.org/10.1016/j.hedp.2011.04.002); J. Mao *et al.* «Application of a transmission crystal x-ray spectrometer to moderate-intensity laser driven sources». *Review of Scientific Instruments* **83**, 4 (2012), pág. 043104. DOI: [10.1063/1.3700212](https://doi.org/10.1063/1.3700212).

<sup>26</sup> Cf. pág. 94. También cf. Ref. [27]: C. D. Chen *et al.* «Bremsstrahlung and  $K\alpha$  fluorescence measurements for inferring conversion efficiencies into fast ignition relevant hot electrons». *Physics of Plasmas* **16**, 8 (2009), pág. 082705. DOI: [10.1063/1.3183693](https://doi.org/10.1063/1.3183693).

<sup>27</sup> Cf. Ref. [29]: S. Cipiccia *et al.* «Gamma-rays from harmonically resonant betatron oscillations in a plasma wake». *Nature Physics* **7**, 11 (2011), pág. 867. DOI: [10.1038/nphys2090](https://doi.org/10.1038/nphys2090).

<sup>28</sup> Cf. Ref. [169]: C. Zulick *et al.* «High resolution bremsstrahlung and fast electron characterization in ultrafast intense laser–solid interactions». *New Journal of Physics* **15**, 12 (2013), pág. 123038. DOI: [10.1088/1367-2630/15/12/123038](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/12/123038).

<sup>29</sup> Aquella con PDF

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \delta(x-k). \quad (4.9)$$

Para más información sobre ésta, cf., *e. g.*, pág. 156 *et seq.* en Vol. 1 de la Ref. [47]: W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, 2008. DOI: [10.1063/1.3034322](https://doi.org/10.1063/1.3034322).

<sup>30</sup> La distribución que mide el número de «éxitos» de un suceso de probabilidad dada para un conjunto de repeticiones de éste es la llamada distribución binomial, que se aproxima a la de Poisson por las hipótesis descritas, suponiendo que el producto del número de partículas y la probabilidad de detección sea finito. Cf. págs. 146–156 en Ref. [47].

<sup>31</sup> Excluimos en lo sucesivo el caso  $\lambda = 0$ , en el que las expresiones que encontraremos dejan de estar definidas, aunque recuperan por paso al límite el comportamiento en ausencia de apilamiento.

<sup>32</sup> Corregida la eficiencia en energía del detector, que veremos más adelante.

<sup>33</sup> Habitualmente los detectores tienen un tiempo de respuesta «lento» y otro «rápido» para distinguir casos de apilamiento en los regímenes usuales. En nuestro caso, los pulsos son tan cortos que el apilamiento escapa a ambos.

<sup>34</sup> Cf. Ref. [70]: C. M. Grinstead y J. L. Snell. *Introduction to probability*. American Mathematical Soc., 2012.

recibe el nombre de potencia de convolución, definida por la recursión<sup>35</sup>

$$f^{*n} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} f & \text{si } n = 1 \\ f * f^{*(n-1)} & \text{si } n > 1 \end{array} \right\}, \quad (4.12)$$

para  $n \in \mathbb{N}$ .

La distribución de energía observable en el detector, que denotaremos  $f_\lambda(E)$ , estará relacionada con la distribución de energías de un evento único,  $f(E)$ , por aplicación de la ley de la probabilidad total<sup>36</sup> a la parte del espacio muestral que resulta de condicionar por  $N > 0$  —pues no se registrará cuenta alguna si ninguna partícula interacciona con el detector—, *i. e.*,

$$\mathcal{P}_\lambda[f] \stackrel{\text{def}}{=} f_\lambda = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} f^{*n} = \frac{1}{e^\lambda - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n f^{*n}}{n!}. \quad (4.13)$$

Cabe notar que (4.13) representa una combinación convexa numerable de PDF, por lo que está bien definida.

Algunas de las características habituales del fenómeno de apilamiento ya están patentes en (4.13). En primer lugar podemos observar que las distribuciones apiladas tienden a concentrarse a mayores energías que las originales, como consecuencia de que las potencias de convolución (que representan la suma repetida de variables positivas) hacen esto mismo. En términos de las PDF, como consecuencia de que la norma está fija, lo que se observa es una disminución en las cuentas a bajas energías y aumento de las colas de altas. Veremos este efecto posteriormente en, *e. g.*, Fig. 4.10 y Fig. 4.12.

Otro fenómeno usualmente observado en la presencia de apilamiento es la aparición de los llamados «picos de repetición». Si la distribución considerada tiene una componente discreta de energía  $E_0$ , modelada como una delta  $\delta(E - E_0)$ , aparecerá un tren de deltas modulado con la serie que resulta de (4.13), *i. e.*,

$$\mathcal{P}_\lambda[\delta(E - E_0)] \propto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \delta(E - nE_0). \quad (4.14)$$

Esta característica es habitualmente tomada como indicador de la presencia de apilamiento, aunque, como veremos más adelante, es posible que haya un apilamiento significativo sin que se observen estos picos de repetición.

Otra advertencia importante, relacionada con la anterior, es el hecho de que el apilamiento es un fenómeno no lineal. Si consideramos una combinación convexa de distribuciones  $af + bg$ , donde  $a, b$  son escalares con  $a + b = 1$  y  $f, g$  son PDF debe observarse que, en general,

$$\mathcal{P}_\lambda[af + bg] \neq a\mathcal{P}_\lambda[f] + b\mathcal{P}_\lambda[g], \quad (4.15)$$

<sup>35</sup> La definición algebraica podría completarse con  $f^{*0} \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\cdot)$ , la distribución delta de Dirac, que es el elemento neutro de este producto. Esta definición tendría algún interés en la medida que completa la analogía de algún desarrollo con el que trataremos posteriormente. Sin embargo, como la detección de un proceso con energía nula no es posible físicamente, esta componente no aparecerá en el modelo desarrollado.

<sup>36</sup> Cf. expresión 1.8 del §5 del Vol. 1 de Ref. [47]: W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, 2008. DOI: 10.1063/1.3034322.



pues faltarían en el lado derecho los productos cruzados de cada potencia de convolución. Podemos ilustrar esto en mayor detalle para el caso del apilamiento de un pico característico: si tenemos una componente continua y otra discreta, aparecerán mezclas de continuo más continuo (un continuo deformado hacia altas energías), discreto más continuo (el continuo original trasladado a la derecha), discreto más discreto (picos de repetición); más términos de orden superior. Como el producto de convolución es conmutativo, la expansión es análoga a la del teorema binomial (multinomial en el caso de una combinación general). Un esquema del comportamiento de la serie puede verse en la Fig. 4.6.

$$\mathcal{P}_\lambda \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \propto \lambda \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \frac{\lambda^2}{2!} \begin{array}{c} \text{---} \\ / \backslash \\ \text{---} \end{array} + \dots$$

Retomaremos ahora (4.13) para estudiar cómo recuperar la distribución original a partir de la apilada. Una técnica usual cuando tenemos productos de convolución es utilizar la transformada de Fourier<sup>37</sup>. Denotando al operador de la transformada como  $\mathcal{F}$ , aplicando el teorema de convolución<sup>38,39</sup> e identificando la serie de la exponencial encontramos

$$\mathcal{F}\{f_\lambda\} = \frac{1}{e^\lambda - 1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \mathcal{F}\{f\})^n}{n!} - 1 \right) = \frac{e^{\lambda \mathcal{F}\{f\}} - 1}{e^\lambda - 1}. \quad (4.17)$$

Despejando (4.17) encontramos que la distribución original se puede obtener de la apilada mediante<sup>40</sup>

$$f = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\ln(1 + (e^\lambda - 1)\mathcal{F}\{f_\lambda\})}{\lambda} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_\lambda^{-1} \{f_\lambda\}. \quad (4.18)$$

Denominaremos a este proceso *desapilado*.

Aplicando la transformada inversa a (4.17) encontramos también una expresión más conveniente<sup>41</sup> para *apilar* una distribución:

$$\mathcal{P}_\lambda \{f\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{\lambda \mathcal{F}\{f\}} - 1}{e^\lambda - 1} \right\}. \quad (4.19)$$

Es conveniente apreciar que, dependiendo de la convención empleada con la transformada de Fourier<sup>42</sup>, el uso de la propiedad de convolución podría conllevar que apareciera un factor adicional en (4.17), que, finalmente, aparecería en el denominador de (4.18). Una forma de esquivar el problema al trabajar numéricamente es imponer normalización sobre  $f$ , independientemente de la convención empleada.

Otro aspecto importante a precisar es que  $f(E)$  es la distribución en energías de los eventos en el detector, que en general será distinta de la fuente debido a la dependencia de la eficiencia del detector en la energía. Habitualmente este efecto se corrige multiplicando punto a punto esta distribución por una función de eficiencia. Ahora bien, el apilamiento es un proceso que aparece sobre el detector, *i. e.*, depende de la probabilidad de interacción. Sería erróneo corregir tal eficiencia antes de desapilar el espectro; debiendo seguirse, en su lugar, el orden contrario.

Figura 4.6: Esquema del apilamiento de una distribución con parte continua (azul) y discreta (naranja). En los términos de orden dos aparecen las potencias de convolución de orden 2 de cada una de éstas más un término cruzado (verde).

<sup>37</sup> Cf. §B. La convención aquí tomada es que allí se indica como  $(0, -2\pi)$ .

<sup>38</sup> Bajo ciertas condiciones, garantizas para las PDF con que trabajamos, ocurre

$$\mathcal{F}\{f * g\} \propto \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}, \quad (4.16)$$

con el factor de proporcionalidad dependiente de la convención tomada (en este caso la unidad).

<sup>39</sup> La única propiedad que necesitamos emplear de la transformada es la de convolución. Al tratar con distribuciones de variable no negativa, sería más atractivo desde el punto de vista teórico el empleo de la transformada de Laplace modificada para trabajar con la función generatriz de momentos. Optar por la de Fourier tiene las ventajas de que la inversión es más sencilla y de que existen algoritmos rápidos para el cálculo numérico.

<sup>40</sup> Habría una sutileza en esta inversión por la falta de inyectividad de la exponencial en el plano complejo. Sabemos que existen varias ramas del logaritmo que la invierte, que se diferencian en una fase dada por un múltiplo entero de  $2\pi i$ . Debemos escoger una de estas ramas (y debemos hacerlo de forma continua porque  $\mathcal{F}$  transforma  $f_\lambda \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  en una función compleja continua —cf. pág. 149 en Ref. [64]—). Ahora bien, la elección de una rama diferente de la principal daría lugar a sumar un término constante al logaritmo de (4.18), cuya transformada inversa daría lugar a una componente compleja singular en el origen. La única posibilidad por lo tanto es que la rama empleada sea la principal.

<sup>41</sup> Hemos pasado de una serie infinita de productos de convolución a operaciones lineales y dos transformadas  $\mathcal{O}(n \log n)$ , suponiendo que usemos FFT.

<sup>42</sup> Cf. §B (pág. 146).

A la hora de aplicar este modelo a una situación realista, es necesario reemplazar la transformada de Fourier de la función por la Transformada Discreta de Fourier de una secuencia<sup>43</sup>, extendiendo si es preciso la malla del detector al origen de energías (para recoger correctamente la aditividad) y, en caso de que la ventana de detección sea reducida, hasta que la cola de altas energías sea despreciable. Este incremento ha de tenerse en cuenta también, consecuentemente, al estimar  $\lambda$  mediante (4.10). Las cuestiones sobre el problema de discretización pueden encontrarse fácilmente en los libros de texto sobre análisis de Fourier<sup>44</sup>. Debido a que el desapilado (4.18) es una transformación no lineal, la resolución efectiva del detector se reducirá como consecuencia del apilamiento. Este fenómeno se estudiará en §4.2.4 (pág. 110).

Una dificultad añadida que puede aparecer en la aplicación experimental es la presencia de un ruido añadido de carácter no apilado sobre el espectro medido, con lo que la señal resultante no sería exactamente apilada y (4.18) no tendrá su imagen en el espacio de distribuciones deseable, sino que será una función (o secuencia) compleja. Pese a ello, como la transformada de Fourier conserva la norma, puede emplearse el valor absoluto de (4.18) como una aproximación al espectro sin apilamiento. Dicha aproximación se puede mejorar definiendo un modelo paramétrico razonable para las distribuciones —*e. g.*, una serie de gaussianas para los picos característicos y una maxwelliana para el continuo (o varias, o alguno de los modelos más completos tratados a lo largo de §3.2.2)— y emplearla para realizar un ajuste de mínimos cuadrados mediante la fórmula del apilamiento [(4.19)]. Esta cuestión se analizará posteriormente en §4.2.3 (pág. 108).

#### 4.2.1.1 Relación de los momentos de la distribución apilada

Del modelo planteado para el apilamiento se deriva, como demostraremos en breve, que existe una relación algebraica entre los momentos estadísticos de la distribución original y de la distribución que resulta de su apilamiento —siempre que dichos momentos existan—. Esta relación puede ser útil en caso de que se suponga conocida la forma funcional de la original, pudiendo ajustarse en función a estos. Otra utilidad del desarrollo es que podremos extraer algún corolario de existencia de momentos de la distribución apilada y aplicar teoremas, como el del límite central, sobre ella.

Supongamos que nuestra PDF sin apilamiento  $f$  tiene definidos y acotados todos sus momentos absolutos

$$m_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx, \quad (4.20)$$

hasta orden  $n$ .

En este caso existirá una función característica  $\varphi$  que defina la distribución, dada por el desarrollo en serie<sup>45</sup>

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{i^k m_k}{k!} t^k + o(t^n). \quad (4.21)$$

Recordemos que una función característica coincide con la transformada de Fourier de la PDF con cierto convenio<sup>46</sup> y se comportará

<sup>43</sup> Cf. §B.

<sup>44</sup> Cf., *e. g.*, §6 en Ref. [23]: E. O. Brigham. *The fast Fourier transform*. Vol. 7. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974. DOI: [10.1109/TSMC.1978.4309919](https://doi.org/10.1109/TSMC.1978.4309919).

<sup>45</sup> Cf. Ref. [47]: W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, 2008. DOI: [10.1063/1.3034322](https://doi.org/10.1063/1.3034322).

respecto al apilamiento como ésta. La función característica de la distribución apilada, vendrá dada pues por la expresión análoga a (4.17) para dicho convenio,

$$\varphi_\lambda(t) = \frac{e^{\lambda\varphi(t)} - 1}{e^\lambda - 1}. \tag{4.22}$$

Esta función tendrá derivadas al menos hasta orden  $n$  por ser composición de una función de clase  $C^\infty$  con  $\varphi$ , por lo que podremos expresar también un desarrollo en serie de Taylor de la función característica apilada, que escribiremos de la forma

$$\varphi_\lambda(t) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{i^k m_{\lambda;k} t^k}{k!} + o(t^n), \tag{4.23}$$

donde  $m_{\lambda;k}$  son, en principio, coeficientes del desarrollo.

Resulta tentador por analogía identificar directamente los  $m_{\lambda;k}$  con los momentos de la distribución apilada. Mientras tratemos con variables aleatorias positivas como la energía puede probarse que esto es cierto<sup>47</sup>, aunque en el caso general es posible que esto no sea así<sup>48</sup>.

Comparando (4.22) y (4.23) podremos encontrar una relación algebraica entre ambas. Esto requiere desarrollar en serie (4.22). Una primera forma de realizar esto sería mediante un desarrollo de Taylor en el origen, donde encontraríamos la derivada enésima de la composición de dos funciones. El resultado de ésta puede expresarse con la llamada fórmula de Faà di Bruno<sup>49</sup>, que puede representarse en términos de los llamados polinomios de Bell. Esto nos pone sobre la pista de una forma más directa de obtener el desarrollo, pues una de las propiedades usuales de estos polinomios<sup>50</sup> nos indica el desarrollo

$$\exp\left(u \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n t^n}{n!}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{l=1}^n u^l B_{n,l}(x_1, x_2, \dots, x_l)}{n!} t^n, \tag{4.24}$$

donde  $B_{n,l}$  son los llamados polinomios parciales de Bell, que vienen dados por<sup>51,52</sup>

$$B_{n,l}(x_1, x_2, \dots, x_{n-l+1}) = \sum_{\substack{c_i \geq 0 \\ \sum c_i = l \\ \sum ic_i = n}} \frac{n!}{c_1! c_2! \dots} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{c_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{c_2} \dots \tag{4.25}$$

Así pues, podemos dejar de lado ese tentativo desarrollo de Taylor e introducir directamente (4.24) en (4.22), con lo que, tras un poco de álgebra elemental se obtiene

$$m_{\lambda;n} = \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} \sum_{l=1}^n \lambda^l B_{n,l}(m_1, m_2, \dots, m_{n-l+1}). \tag{4.26}$$

Cabe observar que el lado derecho (4.26) es un polinomio de grado  $n$  en los momentos originales con coeficientes positivos. Además, la variable  $m_n$  aparece en un único monomio, que es precisamente

$$\frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} \lambda m_n, \tag{4.27}$$

<sup>46</sup> Cf. §B.

<sup>47</sup> Cf. pág. 412 en Ref. [47]: W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, 2008. DOI: 10.1063/1.3034322. Dicho texto emplea la transformada de Laplace, pero ésta y la de Fourier están relacionadas y el razonamiento es aplicable.

<sup>48</sup> Para un contraejemplo con una distribución que admite tal desarrollo pero que no tiene un momento definido Para un contraejemplo cf. ejercicio 14.4 en Ref. [157]: R. Vélez Ibarrola. *Cálculo de probabilidades 2*. 1.ª ed. Ediciones Académicas, S.A., 2004. Pese a todo, sí es posible garantizar esta identidad para los momentos pares (cf. págs. 262-263 en Ref. [157]) y también para la media (promediando directamente sobre (4.13)), que puede ser de utilidad para aplicar teoremas como el del límite central, siempre que la distribución original lo permitiera.

<sup>49</sup> Cf. Ref. [132]: S. Roman. «The Formula of Faà di Bruno». *The American Mathematical Monthly* **87**, 10 (1980), págs. 805-809. DOI: 10.2307/2320788.

<sup>50</sup> Cf. fórmula 3a en pág. 133 de Ref. [30]: L. Comtet. *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. D. Reidel Publishing Company, 1974. DOI: 10.1007/978-94-010-2196-8.

<sup>51</sup> Cf. pág. 133 *et seq.* en Ref. [30].

<sup>52</sup> No se deben confundir con los llamados «polinomios ordinarios parciales de Bell», que serían sus análogos al emplear coeficientes «ordinarios» de un desarrollo en serie en lugar de los de Taylor, *i. e.*, sin extraer de ellos el factor  $1/n!$ . Cf. pág. 136 en Ref. [30]. Para distinguirlos puede denominarse «exponenciales» a los que manejamos en el texto.

luego (4.26) puede utilizarse de forma recurrente para desapilar los momentos.

En caso de que los momentos originales de la distribución sean positivos (4.26) será una función creciente de  $\lambda$ , *i. e.*, los momentos absolutos aumentan con el apilamiento.

La Tabla 4.2 recoge la expresión que resulta de (4.26) para los primeros momentos de la reproducción apilada hasta el orden usual en las aplicaciones estadísticas.

$n$	$m_{\lambda;n} (1 - e^{-\lambda})$
1	$\lambda m_1$
2	$\lambda^2 m_1^2 + \lambda m_2$
3	$\lambda^3 m_1^3 + 3\lambda^2 m_1 m_2 + \lambda m_3$
4	$\lambda^4 m_1^4 + 6\lambda^3 m_1^2 m_2 + 3\lambda^2 m_2^2 + 4\lambda^2 m_1 m_3 + \lambda m_4$

Tabla 4.2: Momentos de la distribución apilada [(4.26)] hasta orden 4 (los usuales en estadística). La tabla permite calcular inmediatamente  $m_k$  si se conocen los momentos de menor orden y el momento apilado  $m_{\lambda;k}$ , por lo que también puede servir como método para el cálculo recurrente de los momentos desapilados.

En el caso de que exista sólo una módica cantidad de apilamiento ( $\lambda \sim 0$ ) podemos considerar el desarrollo en serie en el origen

$$m_{\lambda;n} = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) m_n + o(\lambda^2) \tag{4.28}$$

para entender este incremento.

Aunque veíamos antes que era posible emplear recurrentemente (4.26) para «desapilar» los momentos  $\{m_{\lambda;n}\}_n$ , obteniendo los  $\{m_n\}_n$ ; también puede probarse la siguiente fórmula de inversión<sup>53</sup>

$$m_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{l=1}^n (l-1)! (e^{-\lambda} - 1)^l B_{n,l}(m_{\lambda;1}, m_{\lambda;2}, \dots, m_{\lambda;n-l+1}). \tag{4.29}$$

<sup>53</sup> Ahora sí, aplicando Faà di Bruno a la expresión análoga a (4.18) para funciones características. Obsérvese que los coeficientes de (4.29) son similares a los coeficientes de la serie de Mercator (con el divisor factorial de Taylor extraído), aunque aparece un término en  $e^\lambda$  para conservar la normalización.

$n$	$\lambda m_n$
1	$(1 - e^{-\lambda}) m_{\lambda;1}$
2	$(1 - e^{-\lambda}) m_{\lambda;2} - (1 - e^{-\lambda})^2 m_{\lambda;1}^2$
3	$(1 - e^{-\lambda}) m_{\lambda;3} - 3(1 - e^{-\lambda})^2 m_{\lambda;2} m_{\lambda;1} + 2(1 - e^{-\lambda})^3 m_{\lambda;1}^3$
4	$(1 - e^{-\lambda}) m_{\lambda;4} - (1 - e^{-\lambda})^2 (3m_{\lambda;2}^2 + 4m_{\lambda;1} m_{\lambda;3}) + 12(1 - e^{-\lambda})^3 m_{\lambda;2} m_{\lambda;1}^2 - 6(1 - e^{-\lambda})^4 m_{\lambda;1}^4$

Tabla 4.3: Momentos de la distribución desapilada [(4.29)] hasta orden 4 (los usuales en estadística).

Los momentos centrales

$$\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} (x - m_1)^k f(x) dx \tag{4.30}$$

podrían también obtenerse mediante la expresión algebraica que resulta de expandir el binomio,

$$\mu_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} m_j m_1^{n-j}, \tag{4.31}$$

donde debe considerarse  $m_0 = 1$ .

Consideraremos a modo de ejemplo el momento central orden 2, que es la varianza. Sustituyendo (4.26) en (4.31) encontramos

$$\mu_{\lambda;2} = m_{\lambda;2} - m_{\lambda;1}^2 = \frac{e^{2\lambda} \lambda m_2 - e^\lambda \lambda^2 m_1^2 - e^\lambda \lambda m_2}{(e^\lambda - 1)^2}. \tag{4.32}$$

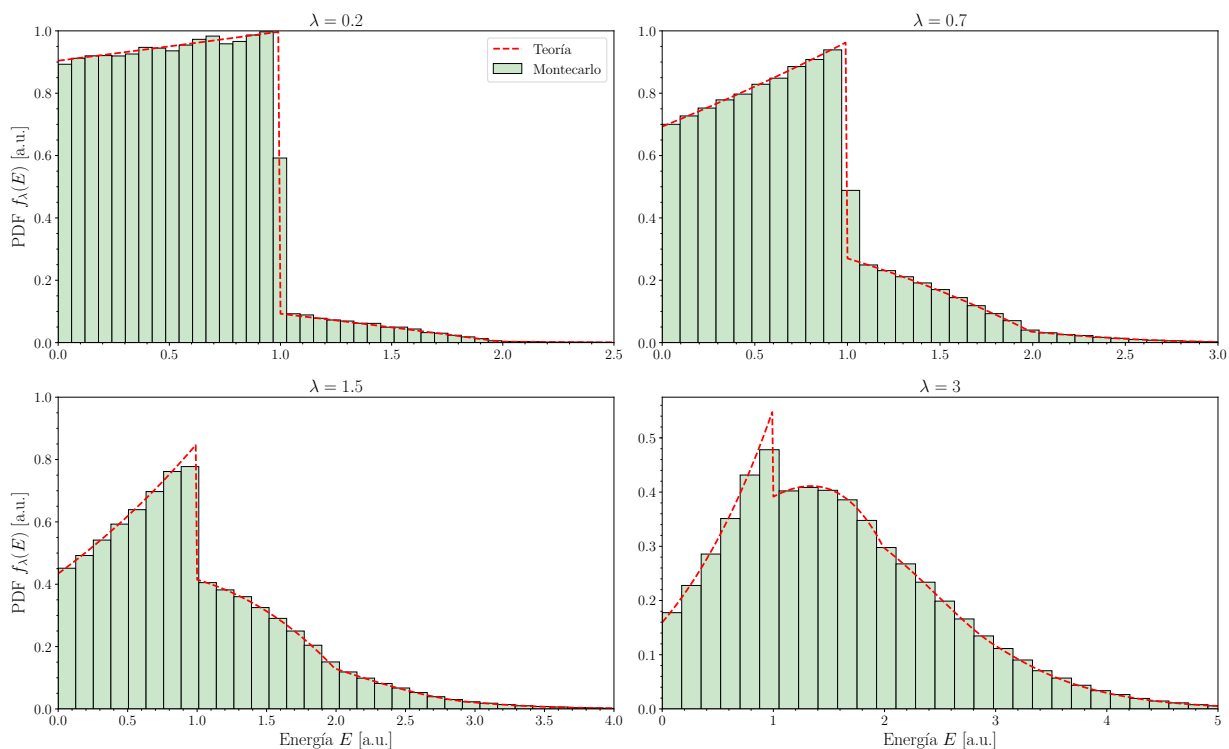
Se puede comprobar que, en tanto que los momentos absolutos sean positivos, (4.32) es función creciente de  $\lambda$ ; con lo que la varianza también aumenta con el apilamiento para variables aleatorias positivas.

Otros parámetros de interés obtenidos de los momentos centrales, como la asimetría o la curtosis, pueden derivarse análogamente, aunque en estos casos el cambio debido al apilamiento no tiene que ser necesariamente un incremento<sup>54</sup>.

#### 4.2.2 Comprobación Montecarlo del modelo

Como paso previo a poner en práctica el método, y habida cuenta de las aplicaciones precedentes en la literatura<sup>55</sup>, comprobaremos que el modelo aquí presentado proporciona resultados acordes a los métodos Montecarlo allí propuestos.

Consideraremos dos modelos continuos sencillos para esto: por un lado, la distribución uniforme en un intervalo unitario  $\mathcal{U}_{[0,1]}$ , y, por otro, una distribución maxwelliana  $\Gamma_{3/2,1}$  de temperatura unidad. Para diferentes valores del parámetro  $\lambda$ , estudiaremos el apilamiento por un muestreo Montecarlo y por la aplicación de (4.19). Los resultados se muestran respectivamente en la Fig. 4.7 y en la Fig. 4.8, donde cada histograma representa un muestreo de  $10^6$  cuentas de la distribución de Poisson (seguidas de la cantidad necesaria en cada caso de muestreos de la distribución en energías), mientras que la línea continua representa los cálculos de (4.19), empleando la transformada discreta de Fourier. Como era de esperar, el método reproduce correctamente los resultados de la simulación.

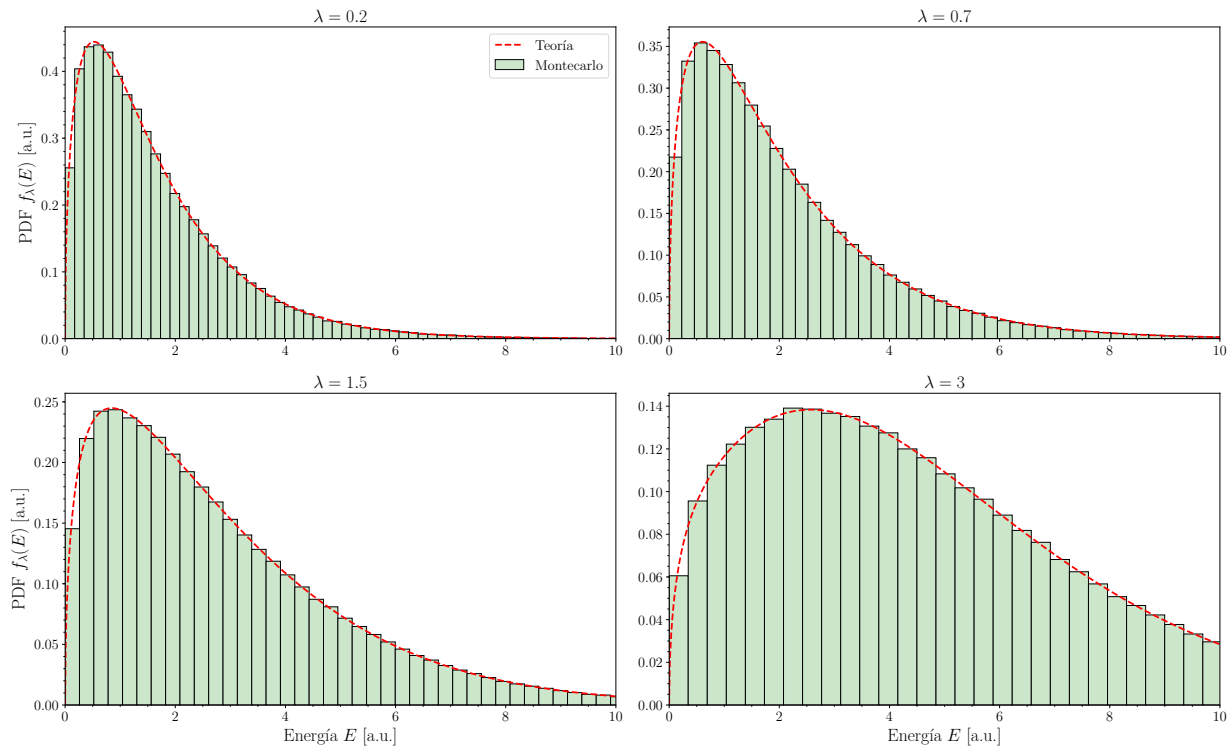


<sup>54</sup> Puede comprobarse que la asimetría de una distribución uniforme aumenta con el apilamiento (aunque no monótonamente con  $\lambda$ ), mientras que en una exponencial disminuye y en una maxwelliana puede aumentar o disminuir según el grado de apilamiento.

<sup>55</sup> Cf. Ref. [169]: C. Zúlic et al. «High resolution bremsstrahlung and fast electron characterization in ultrafast intense laser–solid interactions». *New Journal of Physics* **15**, 12 (2013), pág. 123038. DOI: [10.1088/1367-2630/15/12/123038](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/12/123038).

Figura 4.7: Apilamiento de una distribución uniforme,  $\mathcal{U}_{[0,1]}$ . Los histogramas muestran los resultados de la simulación Montecarlo con  $10^6$  muestras de la distribución de Poisson, mientras que las líneas representan los cálculos con (4.19).

La naturaleza perturbativa de la serie (4.13) se puede observar en la Fig. 4.7: para valores pequeños del parámetro  $\lambda$ , el apilamiento se explica suficientemente bien con la combinación convexa de una densidad rectangular en  $[0, 1]$  y de una triangular en  $[0, 2]$ , que es precisamente el cuadrado de convolución de aquella. Para valores mayores de  $\lambda$  se pueden observar las contribuciones de otras potencias, que son esplines<sup>56,57</sup> en  $[0, n]$ .



<sup>56</sup> Una función que es polinómica de grado  $n$  o menor a trozos y de clase  $C^{n-1}$  en su dominio de definición.

<sup>57</sup> Cf. Ref. [94]: F. Killmann y E. von Collani. «A note on the convolution of the uniform and related distributions and their use in quality control». *Economic Quality Control* **16**, 1 (2001), págs. 17-41. DOI: [10.1515/EQC.2001.17](https://doi.org/10.1515/EQC.2001.17).

### 4.2.3 Análisis de la influencia de un ruido superpuesto

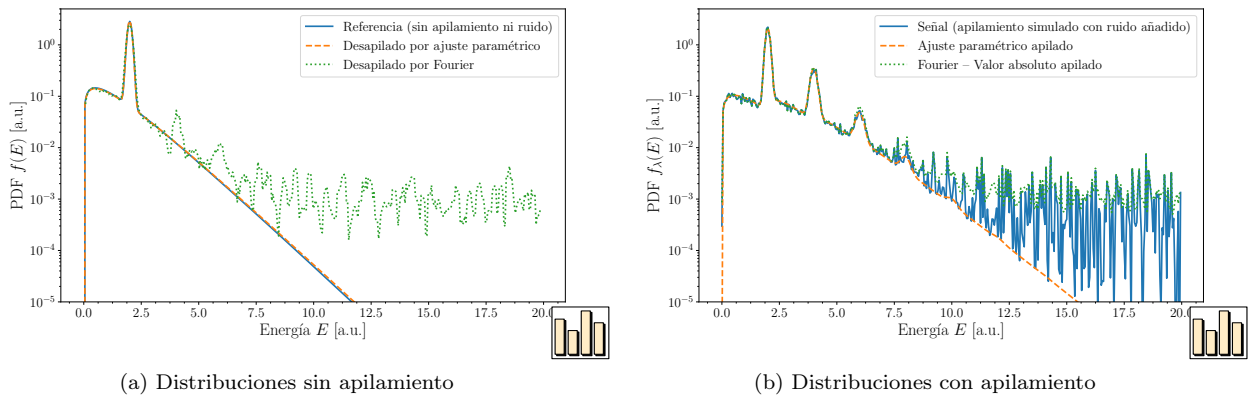
En este apartado analizaremos el comportamiento de la expresión de desajuste (4.18) cuando ésta se aplica a una distribución con apilamiento más un ruido añadido (de características no apiladas), para ver en qué medida es recuperable la distribución original. Para hacer este modelo realista, incorporaremos una componente continua y una componente que aproxime una discreta mediante una combinación convexa de una maxwelliana, cuyo parámetro de temperatura tomaremos como unidad de energía, y una gaussiana<sup>58</sup>  $\mathcal{N}_{2,0.1}$ . El peso de la gaussiana en esta combinación es de 0.7. La distribución resultante, muestreada en intervalos de longitud 0.05 se recoge con línea continua en la Fig. 4.9(a). El resultado de apilar ésta, con un parámetro<sup>59</sup>  $\lambda = 0.6$ , más una componente aditiva de ruido, añadiendo a cada intervalo una cantidad de cuentas distribuidas por una distribución  $\chi_1^2$ <sup>60</sup> con un parámetro de escala 0.01. El resultado final se muestra con línea continua en la Fig. 4.9(b).

Figura 4.8: Apilamiento de una distribución maxwelliana con energía unidad,  $\Gamma_{3/2,1}$ . Los histogramas muestran los resultados de la simulación Montecarlo con  $10^6$  muestras de la distribución de Poisson, mientras que las líneas representan los cálculos con (4.19).

<sup>58</sup> Recordemos que la notación indica, de izquierda a derecha, media y desviación típica (pág. 169).

<sup>59</sup> El valor escogido para el parámetro reproduce cualitativamente las observaciones experimentales.

<sup>60</sup> Es la que sigue al cuadrado de una variable normal. La elección obedece a que la componente sea positiva.



El desapilado directo de esta distribución por (4.18) se muestra en la Fig. 4.9(a) en línea discontinua. Como consecuencia de la naturaleza no apilada del ruido, la reconstrucción no elimina completamente los picos de repetición ni reproduce la pendiente asintótica —si bien esto último se perdería también en ausencia de apilamiento por un ruido de igual magnitud—. El mejor ajuste paramétrico a una combinación de maxwelliana y gaussiana se representa también en la Fig. 4.9(a), proporcionando una estimación más razonable de la función original, aunque el ruido aún afecta ligeramente al resultado. Las reconstrucciones de ambas estimaciones sobre la distribución apilada se muestran también en la Fig. 4.9(b).

Figura 4.9: Efecto del ruido en el apilamiento de distribuciones. La subfigura (a) muestra las distribuciones sin apilamiento o desapiladas, Por otro lado, la subfigura (b) muestras las distribuciones con apilamiento o las mejores reproducciones por mínimos cuadrados apiladas.



#### 4.2.4 Pérdida de resolución debida al apilamiento

Una observación que cabe realizar es que cuando un detector registra una cuenta asignándola a un canal, la energía real de este evento se puede suponer concentrada en un intervalo de tamaño  $\Delta E$  que es la llamada *resolución* del detector. Al ocurrir el fenómeno de apilamiento, esta incertidumbre se debe considerar para cada una de las partículas que producen el evento de energía suma, aumentando pues la incertidumbre total y empeorando la resolución. En este apartado veremos cómo estimar la pérdida de resolución en el detector que aparece como consecuencia del efecto combinado del apilamiento y de la agrupación de datos (*binning*).

La forma funcional exacta del cambio de resolución dependerá de la forma de la distribución de energías dentro de cada agrupación —la cual será, en general, desconocida—. Sin embargo, su magnitud puede estimarse considerando que exista una distribución uniforme<sup>61</sup> en cada intervalo de energías en el detector. Denotando a la distribución uniforme en el intervalo  $[a, b]$  como  $\mathcal{U}_{[a,b]}$ , la variable aleatoria que modela las cuentas en el intervalo del detector  $E_i$  será

$$\mathcal{U}_{[E_i, E_i + \Delta E]} = E_i + \Delta E \cdot \mathcal{U}_{[0,1]}. \quad (4.33)$$

La distribución apilada por  $N$  cuentas en los intervalos  $\{\sigma(j)\}_{j=1}^N$  vendrá dada por

$$\sum_{i \in \{\sigma(j)\}_{j=1}^N} E_i + \Delta E \cdot \mathcal{U}_{[0,1]} = E_{\text{tot}} + \Delta E \sum_{j=1}^N \mathcal{U}_{[0,1]}, \quad (4.34)$$

donde  $E_{\text{tot}}$  es la suma de las energías de la base de los intervalos y el sumatorio del lado derecho se refiere a la suma de  $N$  variables aleatorias igualmente distribuidas, *i. e.*, la potencia de convolución en términos de sus PDF.

Así pues, la diferencia entre la energía del evento apilado y la suma de los extremos inferiores los intervalos de cada evento individual viene dada por el apilamiento de la distribución  $\mathcal{U}_{[0,1]}$ , que ya habíamos tratado antes en la Fig. 4.7. Para mayor claridad, la representación de las formas analíticas se muestra también aquí en la Fig. 4.10.

El apilamiento de la distribución uniforme tiene soporte en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , así que es necesario utilizar una magnitud con una noción similar a la de los intervalos de confianza de la estadística para permitir extender la noción de resolución. Definamos para ello  $\Delta E_{\lambda, \rho}$  como el mínimo intervalo de energía tal que una fracción de cuentas  $\rho \in [0, 1]$  de la distribución uniforme supuesta en  $\Delta E$  esté contenida en él. Así pues,  $\Delta E_{\lambda, \rho} / \Delta E$  es la pérdida de resolución relativa con confianza  $\rho$ .

Esta magnitud se representa en función de  $\lambda$  para diferentes valores de la confianza  $\rho$  en la Fig. 4.11. Las curvas son monótonas crecientes, y los valores inferiores a 1 indican que la «resolución» sobre la distribución apilada está en el rango del detector, en el sentido de  $\rho$ . Esto puede servir como definición cuantitativa del límite en el que la pérdida de resolución deja de ser aceptable. En caso de estar fuera de este rango, el intervalo transformado  $\Delta E_{\lambda, \rho}$  puede emplearse como estimador de la resolución del espectro desapilado.

<sup>61</sup> Cf. pág. 20 *et seq.* en Ref. [47]: W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, 2008. DOI: [10.1063/1.3034322](https://doi.org/10.1063/1.3034322).



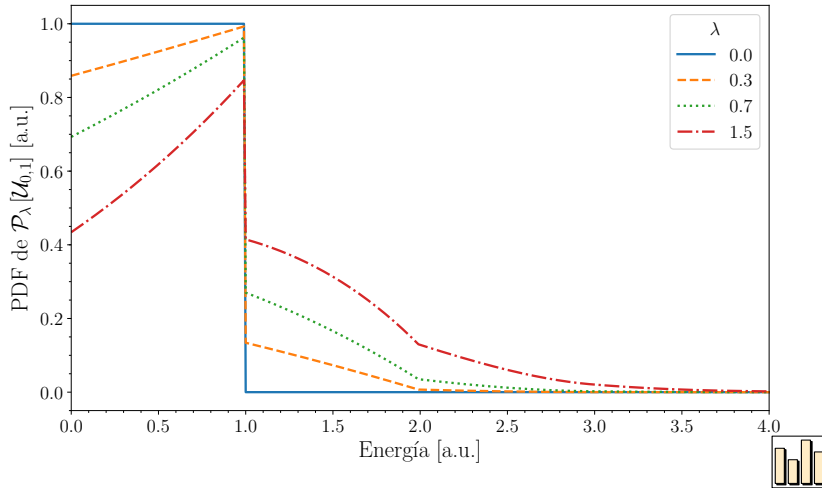


Figura 4.10: Forma apilada de la distribución uniforme  $\mathcal{U}_{[0,1]}$  para varios valores del parámetro de apilamiento de Poisson  $\lambda$ .

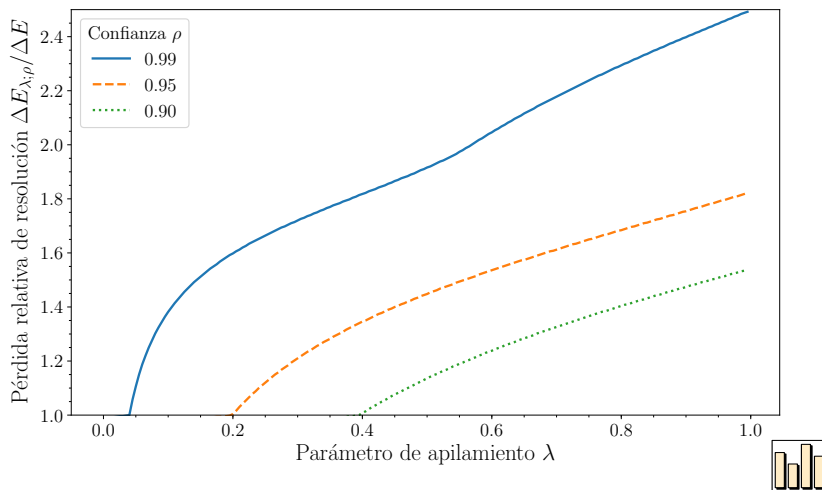


Figura 4.11: Estimación de la pérdida de resolución debida al apilamiento en datos agrupados en canales.

### 4.2.5 Aplicación experimental

En este apartado aplicaremos el método a los datos experimentales obtenidos en el L2A2 de la Universidad de Santiago de Compostela<sup>62</sup>, con la configuración descrita en la Ref. [111]<sup>63</sup>. Estos datos se obtuvieron con láser Ti:Sa, cuyas características se resumen en la Tabla 4.4.

Energía por pulso	1 mJ
Tasa de repetición	1 kHz
Duración de un pulso	25–100 fs
Contraste	$10^{-6}$

El láser estaba focalizado en un blanco de cobre sobre el que incidía con un ángulo de  $45^\circ$ . Los espectros de rayos X emitidos se midieron con un detector Amptek<sup>®</sup> XR-100T-CdTe colocado a 19.7 cm del blanco, en un ángulo de  $16^\circ$  respecto a la normal de éste, alejándose de la dirección de incidencia. Se empleó un atenuador de aluminio de 0.3 mm de espesor para eliminar el ruido electrónico que, de otro modo, saturaría las cuentas en los canales de menor energía del detector; además para reducir el apilamiento en el detector.

Se realizaron medidas para diferentes potencias del haz láser, variando ésta con la acción combinada de un polarizador y una lámina de media onda<sup>64</sup>.

La cantidad de radiación que alcanzaba el detector se modificó en cada uno de estos casos mediante un conjunto de diafragmas elaborados con 2 mm de plomo con una abertura variable.

Los espectros obtenidos se muestran en la mitad izquierda de la Fig. 4.12. El parámetro de apilamiento obtenido de la tasa de cuentas mediante (4.10) estaba en el intervalo 0.01–0.77, dependiendo de la energía de la serie y la abertura de la configuración. A modo de ejemplo, la Fig. 4.13 recoge los valores encontrados para las series con  $P \approx 620$  mW.

Hay dos aspectos de la Fig. 4.12 que conviene analizar. En primer lugar, podemos observar que no habría evidencia directa en los espectros obtenidos de apilamiento salvo que comparemos las series entre ellas. Así pues, la ausencia de picos de repetición no es una señal clara de que el apilamiento sea despreciable, pudiendo estar los resultados experimentales alterados por ello. En segundo lugar, cabe notar que las series donde la abertura es mayor presentan menos fluctuaciones. Esto permite ilustrar que, a pesar de que sea *a priori* deseable reducir la tasa de cuentas para que disminuya el apilamiento, hay compromiso con la tasa de señal-ruido que debe tomarse en consideración.

<sup>62</sup> Ref. [110]: L. Martín. Comunicación personal. 28 de jul. de 2017.

<sup>63</sup> L. Martín *et al.* «Optimization of a fast rotating target to produce kHz X-ray pulses from laser-plasma interaction». *Journal of Physics: Conference Series* (2018), to appear. URL: <https://arxiv.org/abs/1805.01424>.

Tabla 4.4: Características del láser empleado en el experimento de apilamiento.

<sup>64</sup> Dispositivo óptico que retarda las componentes perpendiculares de la polarización en una fase  $\pi$ , típicamente mediante un cristal birrefringente.

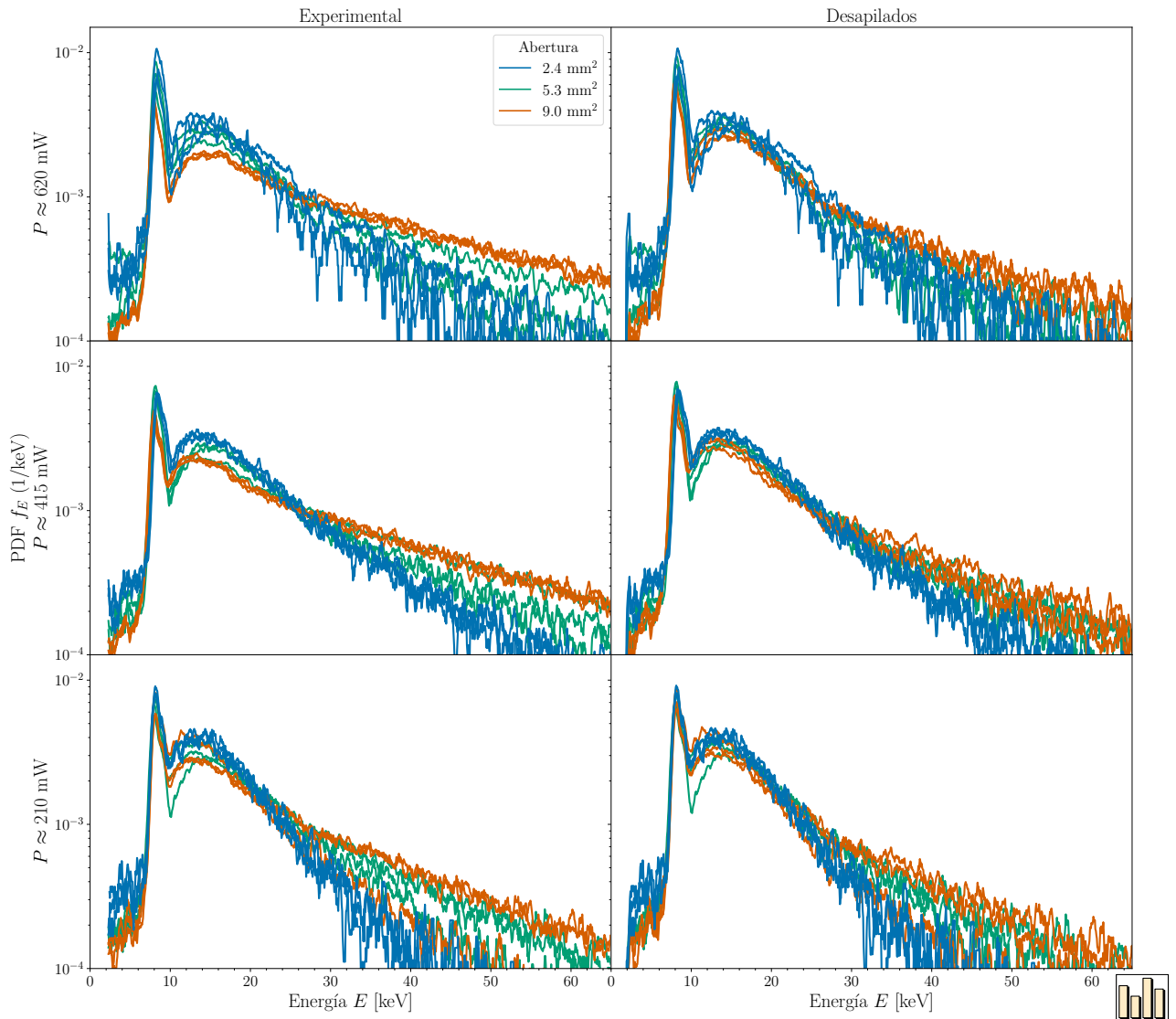


Figura 4.12: El lado izquierdo recoge los espectros encontrados experimentalmente, con una potencia diferente en cada una de las filas. El color de las líneas está relacionado con la abertura como indica la leyenda, observándose claramente una diferencia entre ellas. Por otro lado, a la derecha se pueden observar los espectros resultantes del proceso de desapilado, que muestran un comportamiento más similar.

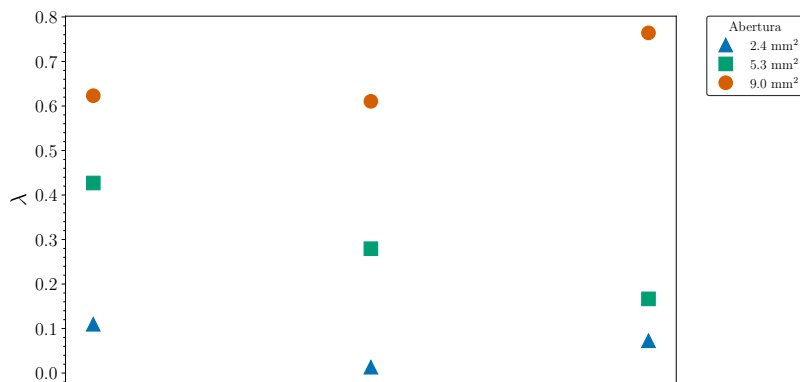
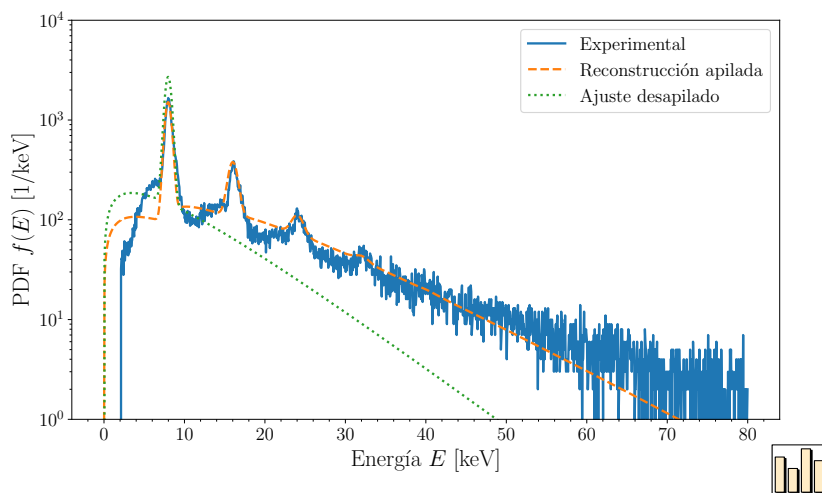


Figura 4.13: Valores del parámetro de apilamiento de Poisson  $\lambda$  obtenidos a partir de la tasa de cuentas mediante (4.10) en las series con  $P \approx 620$  mW . El resto de las series en potencia tienen un comportamiento similar.

Con objeto de analizar un caso real con picos de repetición, se tomó una medida experimental adicional reemplazando el atenuador antes descrito por una lámina, también de aluminio, de  $5\ \mu\text{m}$  de espesor. Los resultados se muestran en la Fig. 4.14. El desapilado directo con (4.18) no elimina satisfactoriamente los picos de repetición, lo que creemos que se debe al ruido experimental, tal como estudiamos en §4.2.3. Con objeto de ver cómo varían los parámetros de un posible ajuste funcional, incluimos en la figura el mejor ajuste a una forma maxwelliana que modele el continuo<sup>65</sup> más una gaussiana que modele el pico  $K_\alpha$  del cobre. Sin pretensiones de dar una descripción completa del espectro, queda claro que el modelo recoge la aparición de los picos de repetición y la alteración de la pendiente en escala semilogarítmica<sup>66</sup>.



<sup>65</sup> Recordamos de lo visto a lo largo de §3.2 que una maxwelliana *per se* no es lo que cabe esperar del *bremstrahlung* de una maxwelliana de electrones, pero sólo queremos incluir en este caso un modelo sencillo de la caída exponencial.

<sup>66</sup> El significado de esta magnitud será objeto de estudio de §4.3.

Figura 4.14: Reconstrucción de un espectro experimental con picos de repetición con un ajuste de mínimos cuadrados con  $\lambda = 1.1$ .

### 4.3 Caracterización de los electrones a partir de las emisiones de rayos X

En la literatura específica es frecuente proporcionar una descripción de las distribuciones de energía resultantes de los mecanismos de aceleración láser-plasma mediante uno o varios parámetros de «temperatura», tanto en el caso de electrones como de fotones. Esto está motivado por la obtención de formas funcionales aproximadamente maxwellianas (o bimaxwellianas) en las simulaciones computacionales sobre el plasma de electrones, como las que aquí hemos planteado en §3.1, así como de datos experimentales<sup>67</sup>. La aplicación directa de la caracterización a fotones parece menos lícita, pues nada indica que la distribución de *bremstrahlung* producida por una maxwelliana de electrones sea también maxwelliana. Vimos de hecho a lo largo de §3.2 —*cf.*, *e.g.*, Fig. 3.32— que no era así. Sin embargo, esto se puede encontrar frecuentemente en la literatura<sup>68</sup>.

$$\ast \rightarrow \boxed{e^- \rightarrow \gamma} \rightarrow T$$

<sup>67</sup> *Cf.* Ref. [5]: D. Batani, R. R. Freeman y S. Baton. «The Transport of Relativistic, Laser-Produced Electrons in Matter – Part 1». *Progress in Ultrafast Intense Laser Science III*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010, págs. 265-294. DOI: 10.1007/978-3-540-73794-0\_13.

En esta sección estudiaremos rigurosamente cómo se relacionan estos parámetros. Inicialmente en §4.3.1 estudiaremos formalmente el problema, construyendo una definición rigurosa del procedimiento que en la práctica se sigue, de lo que surgirá la definición del *funcional de temperatura efectiva*. Seguidamente en §4.3.2 aplicaremos esta herramienta a los modelos de rayos X producidos por maxwellianas presentados anteriormente en §3.2.2, para ver cómo de lícita es la aplicación de la identificación directa encontrada habitualmente en la bibliografía y cómo pueden corregirse sus defectos. Veremos posteriormente en §4.3.3 que identificar una distribución bimaxwelliana a través del espectro de *bremsstrahlung* emitido no es siempre posible, y que este efecto se encuentra frecuentemente malinterpretado. Presentaremos un indicador confiable de esto para ciertas condiciones sobre la mezcla de temperaturas. Otro aspecto interesante a estudiar en §4.3.4 es el efecto de un posible ruido en el detector sobre el funcional temperatura efectiva. Finalmente en §4.3.5 aplicaremos el método a una serie de datos experimentales, comparándolo con las predicciones del modelo de caracterización de los electrones en aire presentado anteriormente en §4.1.

#### 4.3.1 Formalismo teórico del funcional temperatura efectiva

Recordemos, como ya habíamos visto en §3.1, que las distribuciones de electrones procedentes de medios sobredensos con las que tratamos vienen descritas al menos aproximadamente por la forma general de una distribución Gamma,

$$f_{\alpha,\theta}(E) = \frac{E^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} e^{-E/\theta}, \quad (4.35)$$

donde  $E \in [0, \infty)$  es la energía cinética del electrón,  $\theta$  es un parámetro de escala con dimensiones de energía que suele recibir el nombre de «temperatura» —se pueda o no interpretar termodinámicamente— y  $\alpha \in (0, \infty)$ , habitualmente entero o semientero, es un parámetro de forma<sup>69</sup> que en algunos sistemas físicos se asocia a la mitad de los grados de libertad<sup>70</sup>, recibiendo por tanto tal nombre, aunque no haya justificación para tal cosa.

Es bien conocido que la pendiente de este tipo de distribuciones en una escala semilogarítmica se puede usar para estimar el parámetro  $\theta$ . Esta aseveración puede comprobarse estudiando la derivada logarítmica de la función de distribución,

$$\frac{d \ln f_{\alpha,\theta}}{dE} = \frac{f'_{\alpha,\theta}(E)}{f_{\alpha,\theta}(E)} = \frac{\alpha - 1}{E} - \frac{1}{\theta}, \quad (4.36)$$

que claramente tiende a  $-\theta^{-1}$ .

Realizar este proceso para una distribución cualquiera  $f$  utilizando energías en un entorno de  $E$  equivale a calcular un funcional<sup>71</sup>

$$\theta_E[f] \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{f(E)}{f'(E)}. \quad (4.37)$$

Llamaremos a los funcionales  $\theta_E$  descritos en (4.37) *temperatura efectiva*<sup>72</sup>. En el caso de distribuciones gamma encontramos, tras algo

<sup>68</sup> Cf., e. g., Refs. [169; 91; 156]: C. Zulick *et al.* «High resolution bremsstrahlung and fast electron characterization in ultrafast intense laser–solid interactions». *New Journal of Physics* **15**, 12 (2013), pág. 123038. DOI: 10.1088/1367-2630/15/12/123038; K. A. Ivanov *et al.* «Comparative study of amplified spontaneous emission and short pre-pulse impacts onto fast electron generation at sub-relativistic femtosecond laser-plasma interaction». *Physics of Plasmas* **21**, 9 (2014), pág. 093110. DOI: 10.1063/1.4896348; F. Valle Brozas *et al.* «X-ray emission from a liquid curtain jet when irradiated by femtosecond laser pulses». *Applied Physics B* **123**, 6 (13 de jun. de 2017), pág. 190. DOI: 10.1007/s00340-017-6763-2.

<sup>69</sup> Para ejemplos de esto cf. pág. 33.

<sup>70</sup> Cf. pág. 150 en Ref. [122]: R. Pathria. *Statistical Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, UK, 1977.

<sup>71</sup> I. e., una función que transforma funciones en escalares.

de operatividad elemental,

$$\theta_E [f_{\alpha,\theta}] = \frac{E/\theta}{E/\theta + (1-\alpha)} \theta. \quad (4.38)$$

en la Fig. 4.15 se representa el comportamiento de (4.38). Debemos notar que para que la temperatura  $\theta$  se estime adecuadamente el funcional debe medirse en la región asintótica (salvo para el caso exponencial en que es constante), *i. e.*, debe ser  $E \gg \theta$ , ocurriendo sobrestimación en otro caso. Este requisito se denominará «condición de asintoticidad».

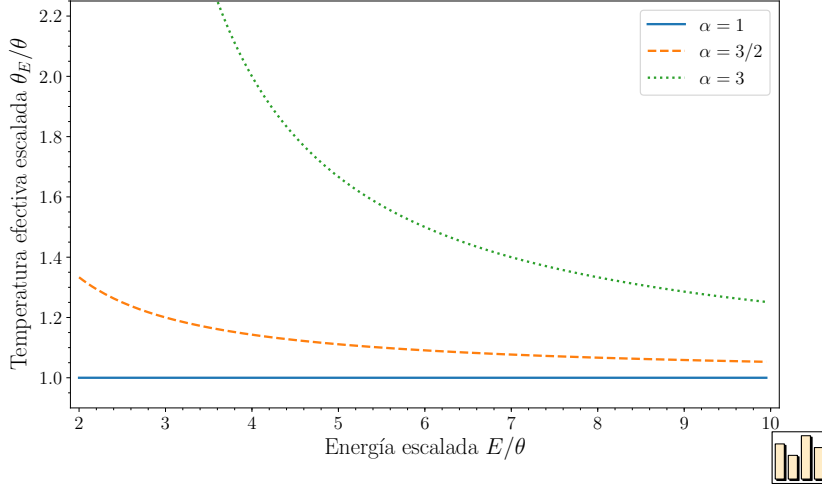


Figura 4.15: Funcional temperatura efectiva en una distribución Gamma en función de la energía, ambos escalados por la temperatura  $\theta$ , para diferentes valores del parámetro de forma  $\alpha$ .

En un caso real una estimación en el entorno de un punto será muchas veces irrealizable, debiendo emplear en su lugar un intervalo genérico  $[E_1, E_2]$ . En este caso, el procedimiento habitualmente seguido consiste en ajustar  $\ln f(E)$  a una recta

$$a_{E_1, E_2} - E/\theta_{E_1, E_2} \quad (4.39)$$

en el sentido de mínimos cuadrados, donde  $a$  y  $\theta$  son parámetros. En el caso límite de infinitos puntos uniformemente distribuidos esta cuestión es equivalente al bien conocido problema de mejor ajuste a un polinomio de grado 1 en  $L^2[E_1, E_2]$ . De la solución de dicho problema<sup>73</sup> es inmediato afirmar

$$\theta_{E_1, E_2} [f] = \frac{(E_2 - E_1)^3}{12 \int_{E_1}^{E_2} E \ln f(E) dE - 6(E_2 + E_1) \int_{E_1}^{E_2} \ln f(E) dE}. \quad (4.40)$$

En el caso de las distribuciones Gamma es posible obtener una forma analítica para el funcional en un intervalo, dada por

$$\theta_{E_1, E_2} [f_{\alpha,\theta}] = \frac{(E_2 - E_1)^3}{\theta^3} \theta. \quad (4.41)$$

$$3(\alpha - 1) \frac{2E_2 E_1 \ln \left( \frac{E_2}{E_1} \right) - (E_2^2 - E_1^2)}{\theta^2} + \frac{(E_2 - E_1)^3}{\theta^3}$$

<sup>72</sup> De forma más completa podríamos describir esto mediante una aplicación  $\theta$  que está transformando la PDF  $f$  en una nueva función  $\theta[f]$  definida sobre los puntos del dominio de la primera en que ésta sea derivable (en el origen de energías tan sólo cabría exigir derivabilidad por la derecha) y no sean simultáneamente nulas la función y su derivada, con imagen en la recta extendida proyectiva  $\mathbb{R} \cup \infty$ , donde asociamos la división por cero al punto  $\infty$ . No hay distinción entre un infinito positivo y otro negativo porque la magnitud con sentido directo, sobre la que cabe imponer exigencias de continuidad, es el inverso de ésta, siendo necesaria una noción en que los «infinitos» estén conectados. Considerar estas funciones  $\theta[f]$  y no sólo algunos de sus puntos  $\theta_E[f]$  permite aprovechar más información de la contenida en la distribución. Explotaremos esto a lo largo de nuestro desarrollo.

<sup>73</sup> Cf. págs. 314–316 en Ref. [85]: F. B. Hildebrand. *Introduction to numerical analysis*. Courier Corporation, 1987.

### 4.3.2 Aplicación a los modelos de rayos X

La temperatura efectiva se puede calcular en los modelos de *bremsstrahlung* de §3.2.2, comenzando por los casos de blanco fino por mayor sencillez. En el caso del modelo analítico, aplicando (4.37) a (3.55) encontramos

$$\theta_{E_\gamma} \left[ f_{\gamma;\alpha,\theta}^{\text{Fin};b} \right] = \frac{\frac{E_\gamma}{\theta} \Gamma\left(\alpha, \frac{E_\gamma}{\theta}\right) - b \frac{E_\gamma^2}{\theta^2} \Gamma\left(\alpha - 1, \frac{E_\gamma}{\theta}\right)}{\left( (1 - b) e^{-E_\gamma/\theta} \left(\frac{E_\gamma}{\theta}\right)^\alpha + \Gamma\left(\alpha, \frac{E_\gamma}{\theta}\right) \right)} \theta. \quad (4.42)$$

El comportamiento asintótico de esta expresión no es tan obvio como el que veíamos para las distribuciones Gamma (4.38), pero, haciendo uso de la expansión asintótica de la función Gamma incompleta<sup>74</sup> encontramos la expansión en serie

$$\theta_{E_\gamma} \left[ f_{\gamma;\alpha,\theta}^{\text{Fin};b} \right] = \theta \left( 1 + \left( \alpha - \begin{cases} 2 & \text{si } b < 1 \\ 3 & \text{si } b = 1 \end{cases} \right) \frac{\theta}{E_\gamma} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta^2}{E_\gamma^2}\right) \right). \quad (4.43)$$

Aunque el valor del temperatura efectiva de este *bremsstrahlung* en el límite asintótico aún puede emplearse para estimar la temperatura de los electrones que lo generan, en la práctica la condición empeora, como puede verse en la Fig. 4.16, donde se ha representado el valor exacto de (4.42) para  $b = 1$ . El cálculo numérico análogo con la sección eficaz de Seltzer y Berger<sup>75</sup> se muestra también en la Fig. 4.16.

Es importante observar, que, en contraste con las observaciones para las distribuciones Gamma recogidas en (4.38) y en la Fig. 4.15, en el caso del *bremsstrahlung* producido éstas cuando  $\alpha \leq 3$  aparece subestimación en lugar de sobrestimación, tanto el modelo analítico con  $b = 1$  como en el numérico<sup>76</sup>.

Si hubiésemos escogido un  $b < 1$  para el modelo analítico de blanco fino, podemos ver inmediatamente en (4.43) que aparecería subestimación en el caso  $\alpha = 3$ , pero esto no se observa en el cálculo numérico. Esta es otra de las razones por las que, como adelantamos en §3.2.1.2, preferimos el ajuste con  $b = 1$ .

Las diferencias con el modelo numérico están por debajo del 2% en el caso de materiales de número atómico elevado, como el oro o el tungsteno, para energías  $E_\gamma \gtrsim \theta$ ; de modo que en estos casos podría aplicarse directamente el modelo analítico en su lugar, al menos en el rango de energías de keV presentado. Por otro lado, para los materiales con número atómico reducido como el cobre o el aluminio esta diferencia se incrementa hasta aproximadamente el 10% de diferencia relativa, con lo que en estos casos resultaría preferible el cálculo numérico.

En caso de querer estudiar la expresión específica para un intervalo, se puede obtener una representación empleando (4.40), aunque no parece tener forma cerrada sencilla.

Respecto a los modelos de blanco grueso, comenzaremos aplicando (4.37) a la distribución obtenida con el modelo analítico de Kramers

<sup>74</sup> Cf. §8.11(i) en Ref. [36]: National Institute of Standards and Technology. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. versión 1.0.17. Complemento en línea a Ref. [116]. 22 de dic. de 2017. URL: <http://dlmf.nist.gov/>.

<sup>75</sup> Cf. Ref. [142]: S. M. Seltzer y M. J. Berger. «Bremsstrahlung energy spectra from electrons with kinetic energy 1 keV–10 GeV incident on screened nuclei and orbital electrons of neutral atoms with  $Z = 1-100$ ». *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **35**, 3 (1986), págs. 345-418. DOI: 10.1016/0092-640X(86)90014-8.

<sup>76</sup> En el caso  $\alpha = 3$  el término lineal en  $\theta/E_\gamma$  se anula, pero el siguiente término del desarrollo sería positivo. Alternativamente, la representación de la Fig. 4.16 puede ser quizá suficiente para aceptar esto.

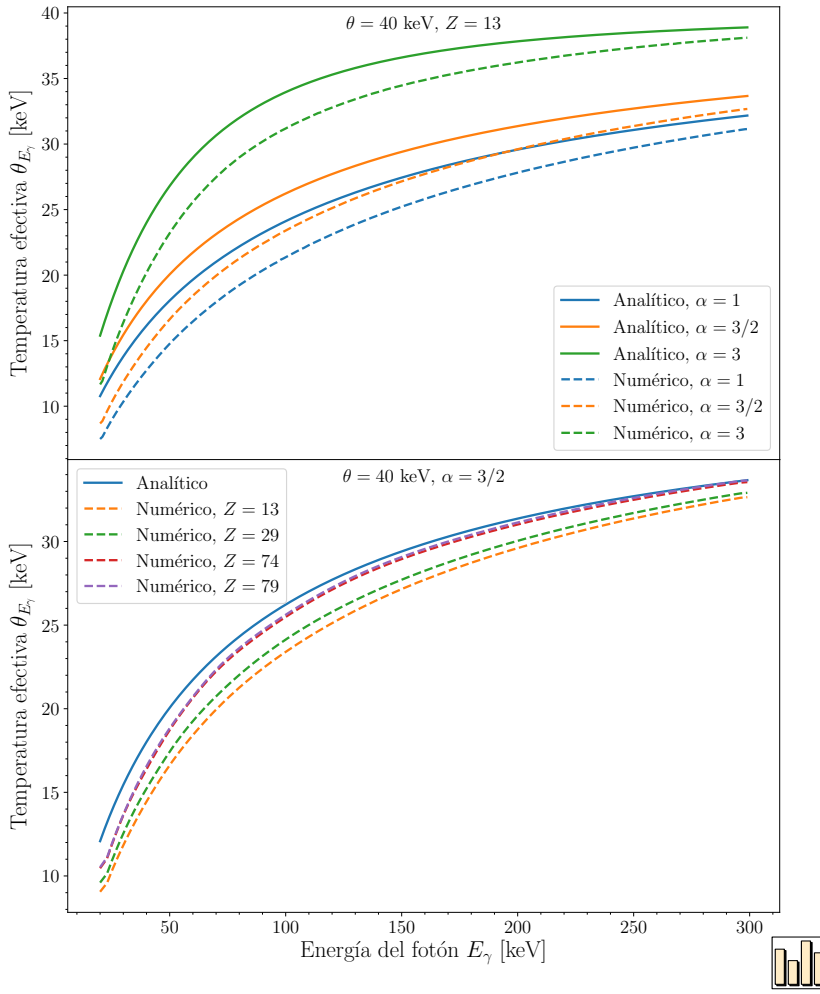


Figura 4.16: Temperatura efectiva en el *bremsstrahlung* producido por una distribución Gamma de electrones en función de la energía del fotón. Las líneas continuas muestran el modelo analítico (4.42), mientras que las discontinuas indican el cálculo numérico con (3.54) mediante las tabulaciones de Seltzer y Berger (Ref. [142]). En la parte superior se muestran los cálculos para un material de número atómico reducido (aluminio), donde aparecen las mayores diferencias respecto al cálculo numérico, para diferentes valores del parámetro de forma  $\alpha$ . En la parte inferior se muestra el cambio del funcional con el número atómico  $Z$  para las maxwellianas usuales ( $\alpha = 3/2$ ). Los resultados son similares para otras temperaturas en el rango de estudio.

[(3.57)], encontrando así una descripción para la temperatura efectiva

$$\theta_{E_\gamma} \left[ f_{\gamma;\alpha,\theta}^{\text{Kra}} \right] = \left( \frac{E_\gamma}{\theta} - \frac{E_\gamma^2}{\theta^2} \frac{\Gamma\left(\alpha, \frac{E_\gamma}{\theta}\right)}{\Gamma\left(\alpha + 1, \frac{E_\gamma}{\theta}\right)} \right) \theta. \quad (4.44)$$

El efecto que ya observábamos sobre la equivalencia de los modelos analíticos de blanco fino y grueso mediante un cambio parámetros también se puede verificar comparando (4.44) y (4.42), observándose

$$\theta_{E_\gamma} \left[ f_{\gamma;\alpha,\theta}^{\text{Kra}} \right] = \theta_{E_\gamma} \left[ f_{\gamma;\alpha+1,\theta}^{\text{Fin;1}} \right]. \quad (4.45)$$

La interpretación sobre la dificultad de discernir entre ambos efectos es la misma que dábamos en §3.2.3 (pág. 67).

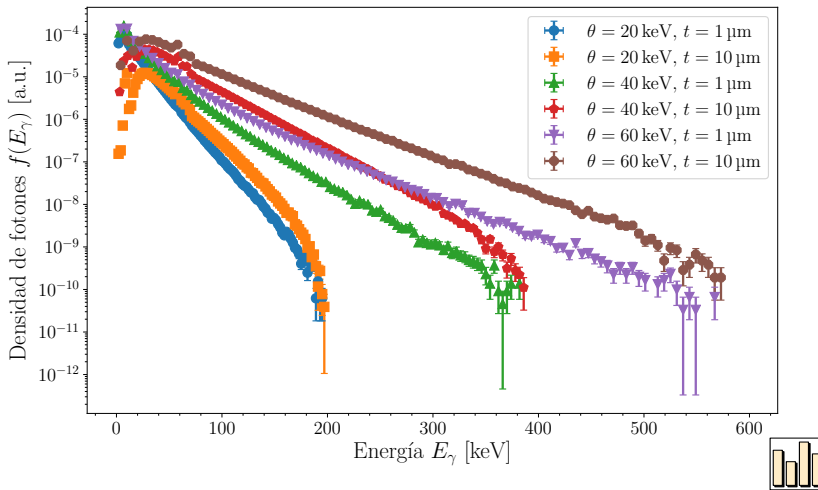
Finalmente, el cálculo numérico con el modelo completo de blanco grueso en «reflexión» es también posible por medio de (4.37). En breve emplearemos sus resultados.

Para comparar los modelos de ambas hipótesis (blancos finos y gruesos), plantearemos la simulación de una representación realista de espesor finito intermedio. Trabajaremos con el código Montecarlo FLUKA<sup>77</sup>, que ya introdujimos en §3.2.1.1.2 (pág. 51). Los resultados

<sup>77</sup> Cf. Refs. [18; 49]: T. Böhlen *et al.* «The FLUKA Code: Developments and Challenges for High Energy and Medical Applications». *Nuclear Data Sheets* **120** (2014), págs. 211-214. DOI: [10.1016/j.nds.2014.07.049](https://doi.org/10.1016/j.nds.2014.07.049); A. Ferrari *et al.* *FLUKA: A multi-particle transport code*. CERN, Geneva, 2005. DOI: [10.5170/CERN-2005-010](https://doi.org/10.5170/CERN-2005-010).



de este apartado se han obtenido con la versión 2011.2c.5. En las simulaciones se consideró un cono de electrones con una divergencia de  $17^\circ$ , con una distribución maxwelliana en energías con diferentes temperaturas características, que cruzarán un convertor de tungsteno de  $1\ \mu\text{m}$  o de  $10\ \mu\text{m}$ , dependiendo de la simulación. Cada simulación constó de un número de partículas primarias variables entre  $1.8 \cdot 10^8$  y  $3.5 \cdot 10^9$ , según el caso simulado, con objeto de reducir la variabilidad en las colas de las distribuciones resultantes. La simulación se configuró para emplear el modelo de dispersión coulombiana (cf. pág. 51). Los umbrales de producción y transporte se fijaron a 1 keV para electrones y fotones. La longitud media de producción de *bremsstrahlung* se redujo en un factor 5 para acelerar la convergencia de los resultados, habida cuenta de esto en el peso estadístico de las partículas<sup>78</sup>. Los espectros así obtenidos se recogen en la Fig. 4.17.



<sup>78</sup> Esta es una técnica de reducción de varianza (*biasing*) usual en los métodos Montecarlo.

Figura 4.17: Espectros de *bremsstrahlung* producidos por una distribución maxwelliana de electrones de temperatura  $\theta$  en un convertor de tungsteno de espesor  $t$ , obtenidos mediante simulaciones con el código FLUKA.

A partir de los espectros obtenidos, se calcularon las temperaturas efectivas con una ventana móvil de hasta 10 puntos. Los resultados de este nuevo cálculo se muestran en la Fig. 4.17, acompañados de unas barras de error que reflejan la variación estándar del parámetro obtenido en el ajuste en función del número de puntos de la ventana móvil. Las predicciones de los diversos modelos aparecen también representadas en dicha figura.

En general, las simulaciones con espesor  $1\ \mu\text{m}$  se ajustan bien a ambos modelos de blanco fino. Por otro lado, en el caso de aquellas correspondientes a  $10\ \mu\text{m}$  de espesor encontramos una buena reproducción a nivel global de los resultados por parte de los modelos de blanco grueso en los casos de  $\theta = 20\ \text{keV}$  y  $\theta = 40\ \text{keV}$ ; mientras que, en el caso de  $\theta = 60\ \text{keV}$ , los resultados de la simulación se sitúan en un punto intermedio entre las curvas de los modelos finos y gruesos. Esto podía ya esperarse *a priori*: recordemos que en los materiales de número atómico alto la profundidad de penetración se extiende hasta aproximadamente  $0.5R_{\text{CSDA}}$  y, como puede comprobarse<sup>79</sup>,  $0.5R_{\text{CSDA}}(120\ \text{keV}) \approx 10\ \mu\text{m}$ ; por lo más del 25 % de los electrones de esta última distribución no se detienen completamente en el material.

<sup>79</sup> Cf. Ref. [9]: M. Berger *et al.* *Stopping-Power and Range Tables*. 2009. URL: <http://www.nist.gov/pml/data/star/>.

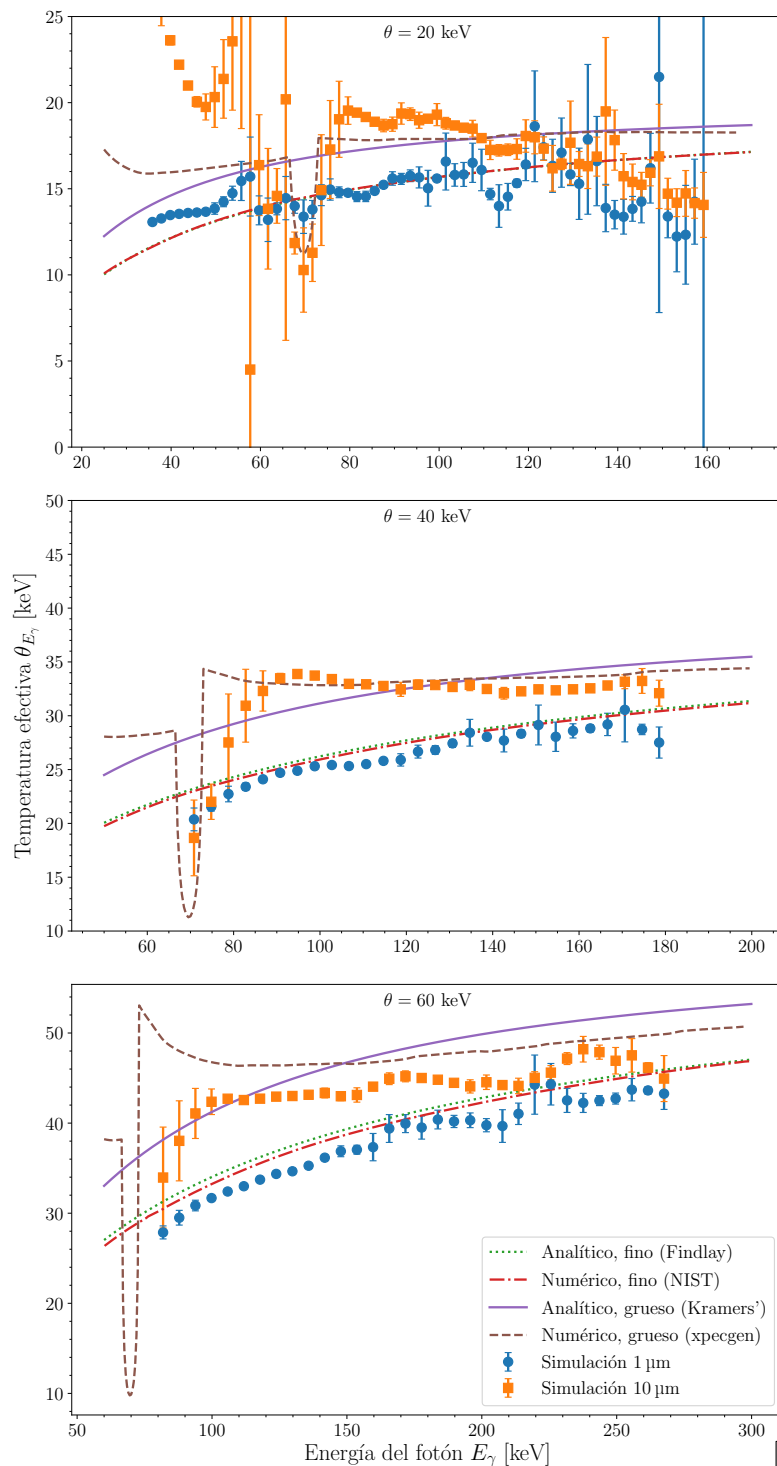


Figura 4.18: Comparación de la temperatura efectiva de varios modelos (líneas) con la obtenida mediante simulaciones de espesor finito realizadas con FLUKA (puntos). Las líneas muestran, según indica la leyenda, el modelo analítico de blanco fino (§3.2.2.1 y (4.42)), el cálculo numérico de blanco fino (§3.2.2.2), el modelo analítico de blanco grueso (§3.2.2.3 y (4.44)) y el modelo numérico de blanco grueso (§3.2.2.4 y Ref. [84]).



Cabe observar que el cambio abrupto que aparece en la región en torno a 70 keV se debe la presencia del borde K del tungsteno. Sólo nuestro modelo numérico de blanco grueso reproduce este efecto, pues es el único en considerar la atenuación intrínseca del material.

También debe destacarse que, de forma general, las simulaciones coinciden en que el efecto producido en la temperatura efectiva es de subestimación de la temperatura de electrones originadora del *bremsstrahlung*.

### 4.3.3 Caracterización de mezclas de temperaturas

Como planteábamos anteriormente, en la literatura específica es común explicar las distribuciones emergentes de rayos X en un medio sobredenso mediante dos componentes con diferente temperatura, justificando así los cambios en la pendiente en la representación semilogarítmica del espectro. Sin embargo, como acabamos de ver, este cambio es también un efecto presente en las distribuciones de fotones producidas por una maxwelliana de electrones con una única temperatura. Es necesario, por lo tanto, el empleo de un procedimiento específico para identificar los efectos de la mezcla de dos temperaturas de electrones.

Partiendo del funcional temperatura efectiva [(4.37)], y aplicando transformaciones algebraicas elementales es fácil comprobar que, para una combinación convexa de distribuciones  $\{f_i\}_i$  con pesos respectivos  $a_i \in [0, 1]$  tal que  $\sum a_i = 1$ ,

$$f(E) = \sum_i a_i f_i(E), \tag{4.46}$$

la temperatura efectiva se puede calcular como

$$\frac{1}{\theta_E[f]} = \sum_i \frac{a_i f_i(E)}{f(E)} \frac{1}{\theta_E[f_i]}, \tag{4.47}$$

que tiene una interpretación clara: el inverso de la temperatura efectiva es una combinación convexa de cada uno de los de la mezcla, con un peso que depende de la cantidad relativa de la densidad de probabilidades de las distribuciones en el entorno de energías considerado<sup>80</sup>.

De (4.47) se concluye que para relacionar una temperatura efectiva en torno a una energía  $E$  con una distribución de electrones generadora en la mezcla debe ocurrir que  $a_i f_i(E) \gg a_j f_j(E)$  para todo  $j \neq i$ . Ésta es la condición de asintoticidad para una mezcla de distribuciones. Si no se diera dicha condición, al menos alguna de las otras componentes sería relevante y habría de ser tenida en cuenta.

<sup>80</sup> Esto puede sugerir que este inverso (o su opuesto, *i. e.*, la pendiente en escala semilogarítmica estudiada en (4.36)) sea realmente una magnitud más natural que la temperatura efectiva. Indicaremos más adelante algún otro indicador a favor de este inverso. Cabe observar que algo parecido ocurre en la física estadística, en que se emplea usualmente una magnitud inversa a la temperatura termodinámica. *Cf., e. g.*, págs. 11–14 en Ref. [122]: R. Pathria. *Statistical Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, UK, 1977.

El comportamiento típico del funcional temperatura efectiva para una distribución de *bremstrahlung* generada por una bimaxwelliana de electrones se muestra en la Fig. 4.19, donde  $\theta_{\text{cold}} = 10$  keV,  $\theta_{\text{hot}} = 40$  keV, y la fracción de electrones «calientes» es del 0.5 %. Los casos con una única temperatura se muestran también en la figura, para ambas componentes. En la región de bajas energías del espectro la componente más fría domina la producción, mientras que altas energías la componente caliente asume este papel. En la región intermedia, ambas componentes son necesarias para explicar la transición, en la que el funcional experimenta un cambio en la convexidad. Este cambio es más sencillo de identificar en la derivada, también representada en la figura.

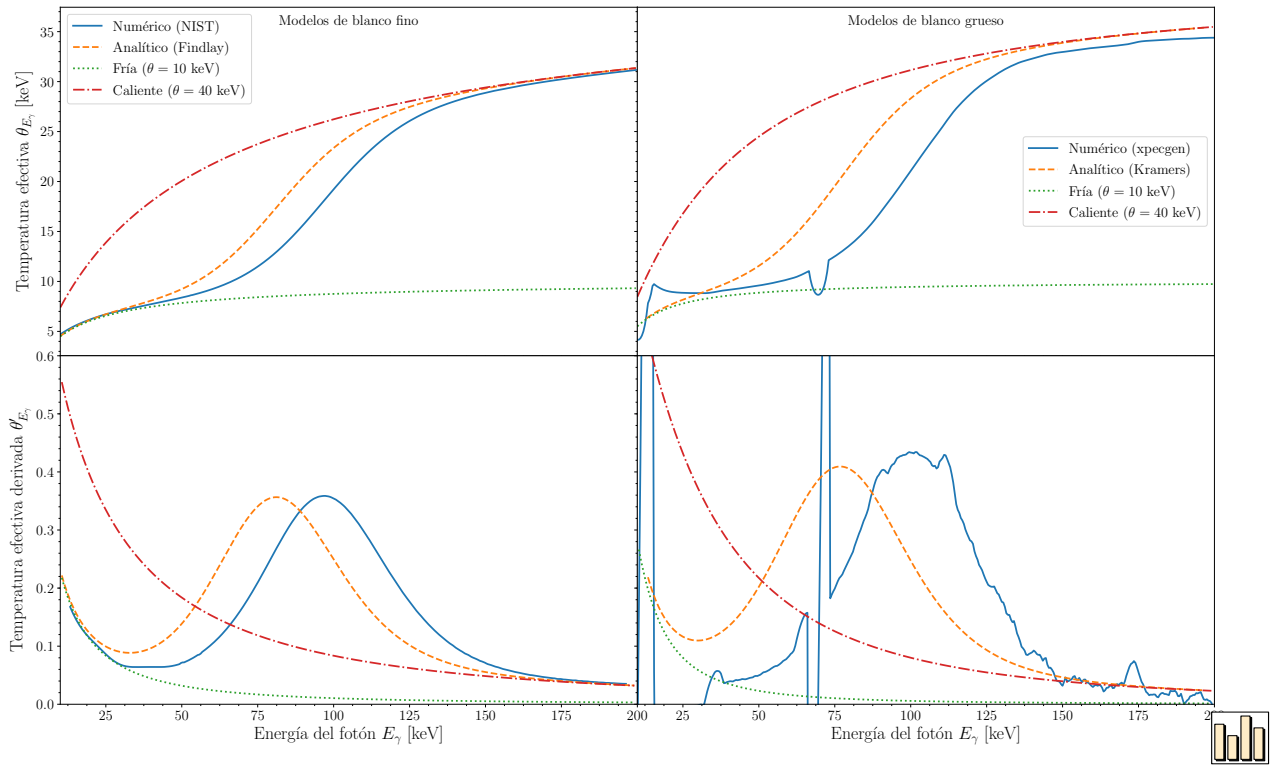


Figura 4.19: Temperatura efectiva (arriba) y su derivada con la energía (abajo) para el *bremstrahlung* producido por una distribución bimaxwelliana de electrones. En el lado izquierdo se recogen los modelos de blanco fino, incluyendo, como indica leyenda, el modelo analítico (§3.2.2.1 y (4.42)) y los cálculos numéricos a partir de las tabulaciones de Seltzer y Berger (§3.2.2.2); así como los modelos correspondientes a los casos de una única temperatura. En el lado derecho figuran los modelos de blanco grueso, como indica la leyenda, el modelo analítico de blanco grueso (§3.2.2.3 y (4.44)) y el modelo numérico de blanco grueso (§3.2.2.4 y Ref. [84]), además de los casos de una única temperatura. La fracción de electrones calientes es del 0.5 %.

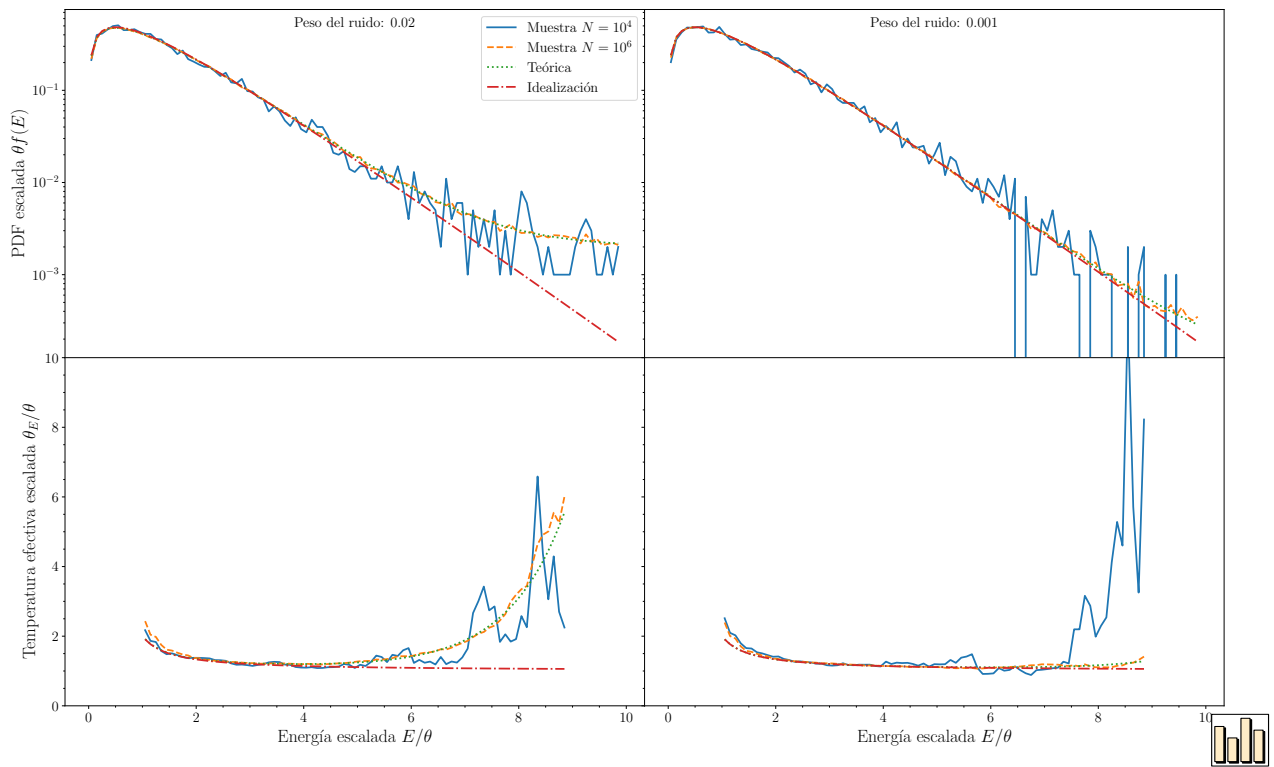
#### 4.3.4 Efecto del ruido sobre el funcional temperatura efectiva

Había quedado patente en §4.3.1 (pág. 115) que la temperatura de una distribución de electrones se manifiesta directamente como tal en el *bremstrahlung* generado únicamente en el límite asintótico. Sin embargo, en una aplicación experimental puede ocurrir que el número de cuentas en la región de altas energías sea reducido, siendo el efecto del ruido aleatorio potencialmente significativo. Tomando como modelo el caso de una distribución de ruido uniforme independiente del canal, y por tanto uniforme en energías, esta componente se comportará como una distribución con un inverso de temperatura efectiva nulo<sup>81</sup>.

Utilizando la expresión general para la mezcla de temperaturas (4.47) se concluye que, cuando el ruido comienza a tener un efecto relevante sobre el sistema, la temperatura efectiva aumenta de una forma aparentemente sin sentido físico, en tanto la temperatura efectiva resultante no se puede atribuir a ninguna componente de electrones.

La Fig. 4.20 muestra un ejemplo de este comportamiento, empleando modelos maxwellianos por simplicidad. En dicha figura se representan distribuciones maxwellianas con diferentes cantidades de ruido (parte superior), así como las temperaturas efectivas calculadas mediante (4.47) y (4.38) (parte inferior). Esta situación entra en contraste con la descrita anteriormente en la Fig. 4.19, donde la componente caliente alcanzaba un límite asintótico. En el caso del ruido, el funcional diverge a medida que aumenta la energía de ajuste. Esto demuestra que la representación de la temperatura efectiva en función de la energía de ajuste puede servir para clarificar una situación dudosa. Como también puede observarse en la parte inferior derecha, incluso aunque la relación señal-ruido sea buena, un muestreo insuficiente de la primera puede provocar un fuerte incremento en las colas de la temperatura efectiva.

Figura 4.20: Efecto de una distribución de ruido independiente del canal sobre la temperatura efectiva (abajo) de una distribución maxwelliana (arriba), para un nivel de ruido reducido (derecha) y para otro más apreciable (izquierda). Como indica la leyenda, se representan dos niveles de muestreo a modo de ejemplo, más la curva teórica a la que estos tienden, así como el caso ideal sin ruido. El cambio en la pendiente del espectro a altas energías podría tratar de atribuirse a una segunda temperatura, pero la dependencia en la energía de la temperatura efectiva revela que esto no puede ser así, en contraste con la Fig. 4.19. Un muestreo insuficiente también puede provocar este efecto aunque la relación señal ruido sea buena (cf. panel inferior derecho).

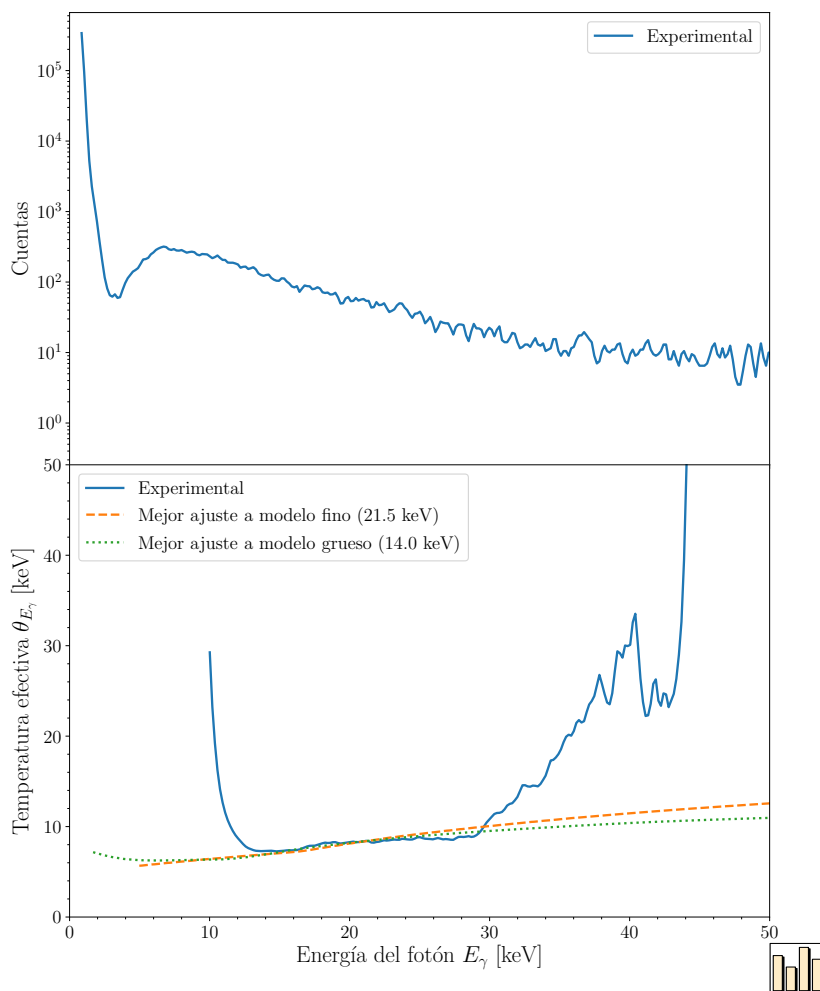


### 4.3.5 Aplicación experimental

En este apartado aplicaremos el método a un conjunto de datos experimentales obtenidos por Fonseca<sup>82</sup>. Este experimento se realizó

con el mismo sistema del Servicio Láser de la Universidad de Salamanca descrito en la pág. 99. El espectro de *bremstrahlung* emitido por un blanco de aluminio en las condiciones anteriores, medido con un detector Amptek<sup>®</sup> XR-100T-CdTe, se muestra en la Fig. 4.21; así como la curva de temperatura efectiva que se obtiene de éste. Se muestran también los mejores ajustes al modelo numérico de blanco fino y al modelo numérico<sup>83</sup> de blanco grueso en la región donde el funcional no cambia de manera abrupta,  $E_\gamma \in [15, 25]$  keV.

La aplicación del modelo de blanco grueso, que es el que guarda mayor relación con la geometría experimental, proporciona una predicción para la temperatura de los electrones de  $\theta \approx 14.0$  keV. Este valor presenta una gran similitud con los resultados de §4.1 (*cf.* pág. 100), donde encontrábamos una estimación de  $\theta \approx 14.7 \pm 0.4$  keV y con los resultados originales de Fonseca, que proponía una componente de electrones de  $\theta \approx 13.8$  keV



<sup>81</sup> Otro punto a favor de la naturalidad del inverso de la temperatura efectiva en lugar de ésta. *Cf.* nota 80 en la pág. 121.

<sup>82</sup> *Cf.* pág. 81 *et seq.* en Ref. [55]: C. Fonseca. *Generación de electrones y rayos X a partir de pulsos láser de GW y alta tasa de repetición, y su protección radiológica*. Tesis doct. Universidad de Salamanca, oct. de 2011.

<sup>83</sup> Sólo consideramos modelos numéricos al realizarse el experimento con un material de número atómico no demasiado alto, con lo que habría que corregir la subestimación.

Figura 4.21: Espectro experimental (arriba) y su temperatura efectiva (abajo, en línea continua), así como los mejores ajustes a los modelos numéricos de blanco fino (línea de puntos y rayas) y de blanco grueso (línea de puntos).

El fuerte incremento en la temperatura efectiva por encima de los 30 keV no se puede explicar con una única temperatura. Aún más, la región de  $E_\gamma > 45$  keV presenta valores demasiado elevados (cientos de keV) como para atribuirse a una componente de electrones, por lo que debe achacarse a la presencia de ruido en el detector.

Debemos indicar que la posibilidad de que haya una componente más energética de electrones influyendo sobre el *bremstrahlung* generado, este efecto no puede observarse por no darse la condición de asintoticidad requerida para ello<sup>84</sup>.

<sup>84</sup> Observamos nuevamente que el parámetro que varía de forma suave es el inverso de la temperatura efectiva y no esta última. La operación de inversión es la que rompe la relación de orden, exactamente como ocurre con la temperatura termodinámica, donde además cambiaríamos el signo para que la relación de orden tuviera el sentido deseado, *i. e.*,  $-1/\theta_E$ . Cf. nota 80 en la pág. 121 y Ref. [131]: N. F. Ramsey. «Thermodynamics and statistical mechanics at negative absolute temperatures». *Physical Review* **103**, 1 (1956), pág. 20. DOI: [10.1103/PhysRev.103.20](https://doi.org/10.1103/PhysRev.103.20).





# Capítulo 5

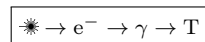
## Optimización del sistema

*Zu fragmentarisch ist Welt und Leben!  
Ich will mich zum deutschen Professor begeben.  
Der weiß das Leben zusammensetzen,  
Und er macht ein verständlich System daraus;  
mit seinen Nachtmützen und Schlafrockfetzen  
Stopft er die Lücken des Weltenbaus.*  
Heinrich Heine – *Die Heimkehr* (LVIII)

*Μέσον τε καὶ ἄριστον  
Ἄριστοτέλης – Ἠθικὰ Νικομάχεια*

En este capítulo presentaremos el estudio de los sistemas adecuados para la realización de dispositivos de irradiación celular. En primer lugar, presentaremos en §5.1 el rango de características de los láseres que pueden emplearse para obtener campos de rayos X con las propiedades requeridas para la aplicación. Esto será fundamentalmente un corolario de los resultados presentados en el capítulo 3, uniendo cada una de sus partes. Finalmente mostraremos en §5.2 un estudio del conversor óptico —en un sentido por precisar— para un dispositivo en geometría de «transmisión». Ya habíamos adelantado en §3.2.2.5 (pág. 67) que la variabilidad en el alcance de los electrones hacía complicada la modelización directa, por lo que recurriremos a métodos Montecarlo para encontrar éste.

### 5.1 Sistemas láser adecuados



En la línea de lo que planteábamos sobre la RIO en pág. 3 *et seq.*, un escenario tipo de aplicación potencial para las fuentes de rayos X generadas por aceleración láser, siguiendo los parámetros de la radioterapia convencional con rayos X, consistiría en una irradiación de unos 20 Gy en la zona tumoral<sup>1</sup>, de tal forma que éste decaiga a unos 5–7 Gy tras una profundidad de 1 cm. Hay, por tanto, tres aspectos importantes a realizar:

1. Conseguir un decaimiento relativo en un factor de aproximadamente el 25 % a 1 cm.
2. Conseguir una dosis superficial similar del orden de los 20 Gy en un tiempo de exposición razonable.
3. Ponderar la dosis con la eficacia biológica de la radiación, en caso de que sea distinta a la convencional.

<sup>1</sup> Cf. Refs. [155; 125]: J. S. Vaidya *et al.* «Risk-adapted targeted intraoperative radiotherapy versus whole-breast radiotherapy for breast cancer: 5-year results for local control and overall survival from the TARGIT-A randomised trial». *The Lancet* **383**, 9917 (2014), págs. 603-613. DOI: [10.1016/S0140-6736\(13\)61950-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(13)61950-9); A. Pilar *et al.* «Intraoperative radiotherapy: review of techniques and results». *ecancermedicalscience* **11** (2017). DOI: [10.3332/ecancer.2017.750](https://doi.org/10.3332/ecancer.2017.750).

El primero de los requisitos anteriores determina qué formas espectrales son adecuadas para el tratamiento. Utilizando las curvas de dosis de §3.3 —*cf.* Fig. 3.49 en la pág. 90— veíamos que la caída con la profundidad de los espectros producidos por electrones monoenergéticos no eran apenas diferente de la de los producidos por una maxwelliana con igual energía promedio. En consecuencia, una componente de electrones con  $\theta \approx 30$  keV es análoga a las fuentes usadas en este sentido. Variando el parámetro de temperatura (a través de los del láser) podría conseguirse una dosis más superficial o más profunda, según se deseara —de forma similar a lo que veíamos en la Fig. 3.50 y que revisaremos a continuación—.

El parámetro fundamental para conseguir esto es la intensidad que resulta de la focalización del sistema láser. Una forma de estimar un rango de dicho parámetro razonable es suponer el mecanismo subyacente es el calentamiento en vacío, de cuya ley de escala [(2.36)] obtendríamos las estimaciones dadas en la Tabla 5.1. La cota superior de la recomendación se ha fijado en los 30 keV de temperatura, no porque sus propiedades empeoren significativamente —la Fig. 3.50 muestra que no es así—, sino porque se encuentra cerca del umbral en que aparecen los efectos del mecanismo  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ , en cuyo caso las distribuciones emergentes aumentarían mucho más su temperatura, empeorando por este incremento adicional sus propiedades.

$I_\lambda$	Temperatura
$3.1 \cdot 10^{16} \text{ Wcm}^{-2}$	10 keV
$8.2 \cdot 10^{17} \text{ Wcm}^{-2}$	30 keV

Tabla 5.1: Intensidades adecuadas para un láser aplicación a radioterapia intraoperatoria, considerando el escalado usual del calentamiento en vacío.

La Fig. 5.1 ilustra las curvas que resultan para estas intensidades, así como algunas cuando dicho rango se sobrepasa con objeto de evaluar el efecto. No obstante, recordemos que, en caso de cambiar el mecanismo de aceleración, estas últimas podrían variar.

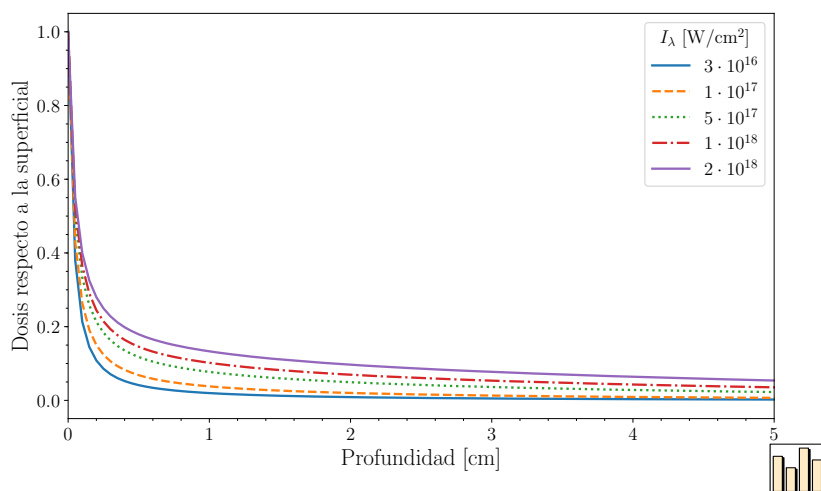


Figura 5.1: Dosis en función de la distancia para varias series en la intensidad del sistema láser, suponiendo que el mecanismo de aceleración subyacente el calentamiento en vacío, para lo que se ha empleado la ley de escala (2.36).

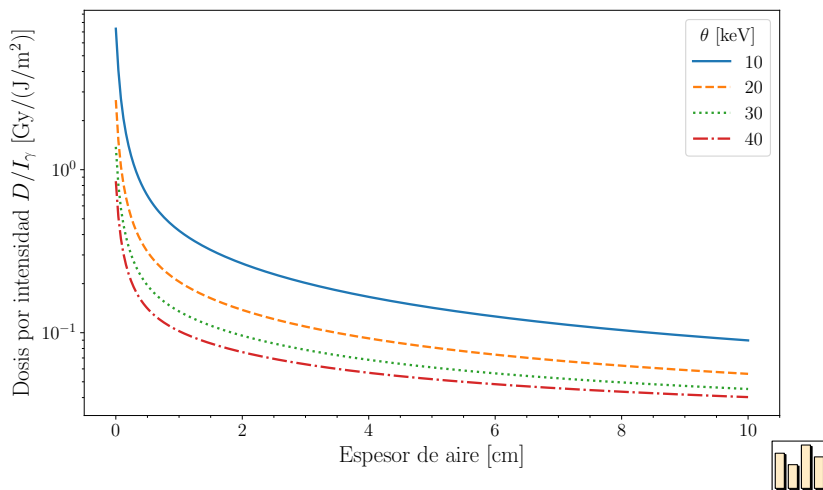
Hasta ahora hemos considerado únicamente las curvas normalizadas

para conseguir el decaimiento en profundidad buscado. La siguiente magnitud a evaluar es la dosis superficial que se puede conseguir también función de la intensidad de la fuente, para lo que también podemos emplear las técnicas de §3.3, de donde<sup>2</sup>

$$c[f] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D(0)}{I_\gamma} = \frac{\int_0^\infty E \mu_{\text{abs}}(E) f(E) dE}{\rho \int_0^\infty E f(E) dE}, \quad (5.1)$$

donde  $I_\gamma$  es la intensidad de fotones de la fuente de rayos (energía por unidad de área) y  $f$  la distribución de éstos. Ha de notarse que  $I_\gamma$  no coincide con la intensidad del láser, mediando entre ambas dos eficiencias de conversión: la del láser en electrones, que se puede estimar del orden del 5 % en el rango de energías considerado<sup>3</sup>, y la de la conversión de electrones en *bremssstrahlung*, del orden del<sup>4</sup> 1 %. Otra cuestión adicional es el aumento del área de la fuente de rayos X respecto del láser, que puede variar, orientativamente<sup>5</sup>, en un factor 6. Aún más, alejando el tejido expuesto de la fuente de rayos X se puede aumentar el área eficaz radiada por unidad de tiempo. Ambas cosas habrán de tomarse en consideración en relación al área a irradiar, como veremos posteriormente.

Para evaluar esta magnitud, consideraremos el modelo numérico de blanco grueso para una fuente de electrones maxwelliana en un blanco<sup>6</sup>. Es importante considerar que, en la práctica, existirá una atenuación adicional a lo emergente del conversor, debida al aire y otros elementos potencialmente interpuestos. Esto alterará principalmente la componente de bajas energías del espectro, lo que hace que no sea totalmente realista considerar el modelo sin ésta. La Fig. 5.2 muestra el valor de la relación dosis-intensidad en función del espesor de aire para varios valores del parámetro de temperatura de la maxwelliana de electrones generadora.



<sup>2</sup> Partiendo de la expresión de la dosis [(3.70)] para la superficie, extrayendo el área eficaz de la fluencia y dividiendo ambos lados por la energía del haz.

<sup>3</sup> Cf. Fig. 13.1 en Ref. [5]: D. Batani, R. R. Freeman y S. Baton. «The Transport of Relativistic, Laser-Produced Electrons in Matter – Part 1». *Progress in Ultrafast Intense Laser Science III*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010, págs. 265-294. DOI: 10.1007/978-3-540-73794-0\_13.

<sup>4</sup> Para medidas de la eficiencias total  $\eta_e \eta_\gamma$ , acorde con éstas, cf. Ref. [50]: T. Feurer *et al.* «Onset of diffuse reflectivity and fast electron flux inhibition in 528-nm-laser–solid interactions at ultrahigh intensity». *Phys. Rev. E* **56** (4 oct. de 1997), págs. 4608-4614. DOI: 10.1103/PhysRevE.56.4608.

<sup>5</sup> Cf. Ref. [121]: H.-S. Park *et al.* «Characteristics of high energy  $K\alpha$  and Bremsstrahlung sources generated by short pulse petawatt lasers». *Review of Scientific Instruments* **75**, 10 (2004), págs. 4048-4050. DOI: 10.1063/1.1789596.

<sup>6</sup> Aunque también podría considerarse un modelo en transmisión —como veremos después en §5.2—, la forma espectral será similar a éste, pudiendo servirnos para el propósito de estimar las condiciones de los sistemas adecuados.

Figura 5.2: Dosis producida por unidad de intensidad (energía por área eficaz) en la fuente de rayos X, en función de espesor de aire atenuante. Cf. (5.1).

Para hacer una evaluación práctica, podemos calcular el tiempo de exposición necesario para alcanzar una dosis total deseada

$$t = \frac{D_{\text{pre}}}{D_{\text{pul}}} \nu = \frac{D_{\text{pre}}}{c[f]} \frac{A_\gamma}{E_{\text{pul}} \nu \eta_e \eta_\gamma}, \quad (5.2)$$

donde  $D_{\text{pre}}$  es la dosis prescrita,  $D_{\text{pul}}$  y  $E_{\text{pul}}$  son dosis y energía por pulso, respectivamente;  $\eta_{e^-}$  y  $\eta_{\gamma}$  las eficiencias de conversión en electrones y en fotones, respectivamente;  $A_{\gamma}$  el área del haz y  $\nu$  es la tasa de repetición del láser.

En última instancia, el requisito clínico será radiar una región con un área determinada  $A$ , lo que equivale a una irradiación moviendo la posición relativa de fuente y tejido unas  $A/A_{\gamma}$  veces. De este modo, podemos hacer uso de (5.2) empleando el área total a irradiar en lugar de la de la fuente. Los resultados del cálculo se muestran en la Fig. 5.3, para un conjunto de hipótesis razonables recogidas en su pie.

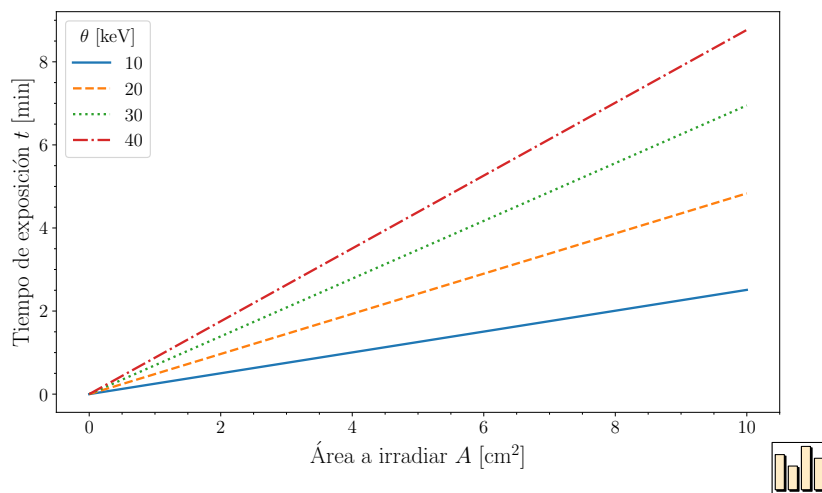


Figura 5.3: Tiempos de exposición necesarios en función de área a irradiar para conseguir una dosis dada [(5.2)], según los parámetros que siguen.

$D_{\text{pres}}$	20 Gy
$E_{\text{pul}}$	1 mJ
$\nu$	1 kHz
$\eta_{e^-}$	0.05
$\eta_{\gamma}$	0.01
$x_{\text{air}}$	2 cm

El tiempo de irradiación normal en este tipo de tratamiento es del orden de<sup>7</sup> 15–60 min, por lo que las medidas para el tipo de sistema considerado son razonables. Recordemos que un sistema láser más potente pero menos enfocado puede permitir reducir estos tiempos de exposición.

En definitiva, un sistema con una energía de 1 mJ por pulso, una intensidad tras la focalización del orden de  $1 \cdot 10^{17} \text{ Wcm}^{-2}$  y una tasa de repetición de 1 kHz es, dentro de las hipótesis razonables planteadas, un candidato adecuado para la realización de un sistema de irradiación de células, pudiendo servir el mismo a múltiples quirófanos en una aplicación clínica.

Finalmente, recordamos la cuestión de la posible diferencia de eficacia biológica, que habíamos introducido en pág. 4 *et seq.* Este aspecto, que supondría un factor adicional sobre el tiempo de exposición anterior, debe ser indefectiblemente estudiado experimentalmente.

<sup>7</sup> Cf. Refs. [41; 97]: R. Elliott *et al.* «Accelerated partial breast irradiation: initial experience with the intrabeam system». *Surgical oncology* **20**, 2 (2011), págs. 73-79. DOI: [10.1016/j.suronc.2009.11.001](https://doi.org/10.1016/j.suronc.2009.11.001); U. Kraus-Tiefenbacher *et al.* «Intraoperative radiotherapy (IORT) for breast cancer using the intrabeam™ system». *Tumori* **91**, 4 (2005), pág. 339.

## 5.2 Optimización del conversor

Como adelantábamos en §3.2.2.5, trabajar en una geometría de «transmisión» hace que sea no trivial diseñar un blanco o un conversor adicional a éste que optimice la producción de radiación. Si dicho medio es demasiado fino, los electrones no convertirán toda su energía en *bremssstrahlung*, mientras que si es demasiado grueso estaremos añadiendo atenuación superflua a los fotones generados.

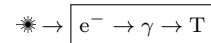
Los primeros estudios sistemáticos sobre optimización de blancos de producción de *bremssstrahlung*, realizados mediante métodos de Montecarlo, datan de 1970, por parte de Berger y Seltzer<sup>8</sup>. Este trabajo es aún influyente en los trabajos actuales<sup>9</sup>. Otras investigaciones contemporáneas emplean también esta misma estrategia para estudiar la optimización de producción de *bremssstrahlung* por fuentes monoenergéticas de electrones<sup>10</sup>; así como otro caso de estudio, de interés en un rango de energías más elevado<sup>11</sup>, que es la emisión de neutrones producidos reacciones fotonucleares<sup>12</sup>.

En esta sección estudiaremos la producción de rayos X por parte de distribuciones de electrones con una «temperatura» (entendida como parámetro de forma, tenga o no sentido termodinámico) en el rango 25–50 keV. Estudiaremos formalmente el concepto de «blanco óptimo», mostrando que existen varias nociones posibles que pueden dar lugar a diferentes caracterizaciones para estos ellos; sin embargo, esta distinción no está apenas patente en el caso de fuente monoenergética. Analizaremos también las componentes de electrones que escapan del conversor, con vistas a considerar sus potenciales efectos. Aunque este estudio está especializado para el caso de distribuciones maxwellianas, la estrategia es aplicable a otro de distribuciones, y daremos unas leyes de escala que permitan al menos una aproximación para el problema general.

### 5.2.1 Longitud característica para una distribución de electrones

Un conversor óptimo de rayos X debe satisfacer un compromiso entre las dos condiciones contrapuestas que presentábamos antes: maximizar la cantidad de electrones que se detengan completamente en él, con fin de aumentar la emisión radiativa; así como minimizar la atenuación de los rayos X producidos en el material. En el caso de las fuentes monoenergéticas esto se consigue en la práctica con estrategias como escoger un espesor de aproximadamente  $1.1R_{\max}$ , siendo  $R_{\max}$  el alcance medio de los electrones en el material<sup>13</sup>. Esta magnitud se puede relacionar con el alcance en la CSDA<sup>14</sup>,  $R_{\text{CSDA}}$ , siendo  $R_{\max} \approx R_{\text{CSDA}}$  para materiales de número atómico reducido y  $R_{\max} \approx 0.5R_{\text{CSDA}}$  en caso contrario<sup>15</sup>. No obstante, según los resultados de Berger y Seltzer<sup>16</sup>, en el rango de energías en el que trabajamos (decenas o cientos de keV) los materiales con número atómico elevado en realidad tienen el óptimo a una distancia menor de la dada por la descripción anterior. Según dicho estudio, sería más razonable esperar el óptimo en torno a  $0.3R_{\text{CSDA}}$ .

Dado que el alcance medio depende notablemente de la energía



<sup>8</sup> Cf. Ref. [10]: M. J. Berger y S. M. Seltzer. «Bremsstrahlung and Photoneutrons from Thick Tungsten and Tantalum Targets». *Phys. Rev. C* **2** (2 ago. de 1970), págs. 621-631. DOI: 10.1103/PhysRevC.2.621.

<sup>9</sup> Cf. Ref. [62]: J. Galy *et al.* «Bremsstrahlung production with high-intensity laser matter interactions and applications». *New Journal of Physics* **9**, 2 (2007), pág. 23. DOI: 10.1088/1367-2630/9/2/023.

<sup>10</sup> Cf. Refs. [115; 63; 68; 73]: M. Nayak *et al.* «Optimum target source term estimation for high energy electron accelerators». *Radiation Physics and Chemistry* **122** (2016), págs. 77-81. DOI: 10.1016/j.radphyschem.2016.01.026; Q. Gao *et al.* «Design and Optimization of the Target in Electron Linear Accelerator». *Proceedings, 4th International Particle Accelerator Conference (IPAC 2013)*. 2013, THPWA016. URL: <http://JACoW.org/IPAC2013/papers/thpwa016.pdf>; E. J. Grant *et al.* «A Monte Carlo simulation study of a flat-panel X-ray source». *Applied Radiation and Isotopes* **70**, 8 (2012), págs. 1658-1666. DOI: 10.1016/j.apradiso.2012.04.011; X. Hai-Bo, P. Xian-Ke y C. Chao-Bin. «Monte Carlo simulation for bremsstrahlung and photon neutron yields in high-energy x-ray radiography». *Chinese Physics B* **19**, 6 (2010), pág. 062901. DOI: 10.1088/1674-1056/19/6/062901.

<sup>11</sup> Del orden de los MeV. Cf. Fig. 3.29 en la pág. 61.

<sup>12</sup> Cf. Refs. [4; 149]: B. Askri. «Optimization of a photoneutron source based on 10 MeV electron beam using Geant4 Monte Carlo code». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms* **360** (2015), págs. 1-8. DOI: 10.1016/j.nimb.2015.07.132; M. Tatari y A. Ranjbar. «Design of a photoneutron source based on 10 MeV electrons of radiotherapy linac». *Annals of Nuclear Energy* **63** (2014), págs. 69-74. DOI: 10.1016/j.anucene.2013.07.025.

<sup>13</sup> Cf. pág. 272 en Ref. [126]: E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010.

<sup>14</sup> Cf. pág. 52.

<sup>15</sup> Cf. pág. 261 en Ref. [126].

<sup>16</sup> Cf. Ref. [10]: M. J. Berger y S. M. Seltzer. «Bremsstrahlung and Photoneutrons from Thick Tungsten and Tantalum Targets». *Phys. Rev. C* **2** (2 ago. de 1970), págs. 621-631. DOI: 10.1103/PhysRevC.2.621.

cinética del electrón, la aplicación directa a distribuciones no monoenergéticas es un poco más cuestionable. Sin embargo, es posible utilizar esta noción para efectuar una primera estimación, calculando el alcance medio en la CSDA,

$$R_{\text{mean}}[f_e^0] = \int_0^\infty f_e^0(E_{e^-}) R_{\text{CSDA}}(E_{e^-}) dE_{e^-}, \quad (5.3)$$

siendo  $f_e^0$  la distribución en la energía cinética al comienzo del conversor.

Siguiendo la descripción anterior, cabría esperar que el espesor óptimo se situase en torno a  $1.1R_{\text{mean}}[f_e^0]$  para materiales de número atómico reducido y en torno a  $0.55R_{\text{mean}}[f_e^0]$  para el caso contrario; o quizá algo por debajo de esto, como planteábamos anteriormente siguiendo a Berger y Seltzer. Analizaremos en qué medida esto se cumple posteriormente.

### 5.2.2 Descripción formal de un blanco óptimo

Para dar una descripción formal de la noción de óptimo, debemos empezar definiendo el problema de producción y transporte de radiación en un blanco. Dado un material, una fuente y su posición y orientación relativa (nos referiremos al conjunto de todo esto como «geometría»), queremos caracterizar varias magnitudes distribuidas en energías, como pueden ser las PDF de electrones  $f_e(E_{e^-})$  y de fotones  $f_\gamma(E_\gamma)$ ; o las fluencias diferenciales planares de fotones  $\Phi_\gamma(E_\gamma)$ . Todas éstas vienen determinadas por las ecuaciones de transporte de Boltzmann<sup>17</sup>, que resolveremos de forma aproximada mediante métodos Montecarlo. Simbólicamente podemos describir la densidad<sup>18</sup> de una magnitud  $\psi$  a energía  $E'$  producida por una fuente monoenergética de electrones con energía  $E_{e^-}$  a profundidad  $x$  como

$$\psi_x(E') = \mathcal{X}_\psi(E_{e^-} \rightarrow E', x). \quad (5.4)$$

El operador  $\mathcal{X}$  incluye transporte y generación de partículas, por lo que es un poco más complicado que los  $\mathcal{K}$  de transporte del capítulo 3, razón del cambio de notación. El operador es, además, implícitamente dependiente de la geometría. Consideraremos en lo sucesivo una fuente puntual isotropa<sup>19</sup> a distancia 0.1 mm de un conversor de espesor  $x$ , aunque incluiremos también alguna variación sobre esta hipótesis más adelante.

En la práctica, un blanco de dimensiones micrométricas, como veremos que resultarán los óptimos, debe construirse sobre algún tipo de sustrato, que conviene no ignorar en los cálculos. El efecto principal sobre las emisiones del conversor será un efecto de atenuación especialmente patente para los fotones de menor energía. Para tomar esto en consideración, añadiremos a los espectros de emisión una atenuación adicional de 0.1 mm de aluminio, aunque ignoraremos la producción adicional que en este material puede ocurrir. Más detalles se darán posteriormente sobre el impacto de esta hipótesis (*cf.* la Fig. 5.7).

Los funcionales que queremos estudiar se obtendrán de las distribuciones anteriores. Esto es similar al concepto de magnitud dosimétrica

<sup>17</sup> Para una descripción formal *cf.* Ref. [19]: E. Boman, J. Tervo y M. Vauhkonen. «Modelling the transport of ionizing radiation using the finite element method». *Physics in Medicine and Biology* **50**, 2 (2005), pág. 265. DOI: 10.1088/0031-9155/50/2/006.

<sup>18</sup> Igual que veíamos en la nota 51 en la pág. 45, esta «densidad» puede incluir una componente discreta en la que se puede pensar como una delta de Dirac.

<sup>19</sup> Es lo sugerido por el estudio del régimen de difusión en el conversor que vimos anteriormente. *Cf.* pág. 55 *et seq.*

que generalizamos en (3.78), aunque aquí hemos extendido el formalismo en términos de  $\mathcal{X}$  para considerar el problema de generación y propagación desde la componente de electrones. De forma general podemos describirlas como

$$d_{w,\psi} [f_{e^-}^0; x] = \int_0^\infty f_{e^-}^0(E_{e^-}) \int_0^{E_{e^-}} w(E') \mathcal{X}_\psi(E_{e^-} \rightarrow E', x) dE' dE_{e^-}, \quad (5.5)$$

Los casos de interés para esta sección del trabajo se recogen en la Tabla 5.2, donde  $\mu_{\text{abs}}$  es el coeficiente de absorción de energía<sup>20</sup>, con el que ya trabajamos en §3.3 (pág. 79).

Funcional		$w(E)$
Número de fotones	$f_\gamma$	1
Energía de los fotones	$f_\gamma$	E
Dosis por fotones	$\Phi_\gamma$	$E \cdot \mu_{\text{abs}}(E)$
Número de electrones	$f_{e^-}$	1
Energía de los electrones	$f_{e^-}$	E

Un blanco óptimo para la producción de fotones según un cierto funcional  $\psi$  se puede describir, por lo tanto, formalmente como

$$x_{\text{opt}}[f_{e^-}^0, \psi, w] = \arg \max_x d_{w,\psi} [f_{e^-}^0; x]. \quad (5.6)$$

Con esta definición, el criterio empleado en los trabajos precedentes<sup>21</sup> se corresponde al empleo del funcional energía total. Este criterio podría ser relevante si quisiéramos tratar la deposición de energía en una zona conceptualmente homogénea (*e.g.*, radiar todo un tejido, sin tomar en consideración cómo se distribuye la dosis en éste). Otra consideración interesante puede ser la «dosis», que se produciría en un punto del espacio a la salida del haz, lo cual debe entenderse por tanto como una «dosis superficial», aunque obviaremos este calificativo por simplicidad<sup>22</sup>. Este criterio puede ser más relevante en el contexto de la radioterapia intraoperatoria, donde la irradiación superficial puede ser el objetivo clínico sobre el que se prescriba.

El propósito principal que perseguiremos en este apartado es caracterizar el espesor de un convertor óptimo [(5.6)] tomando como punto de partida, por simplicidad, la familia de distribuciones maxwellianas de electrones con temperatura  $\theta$  en el rango 25–50 keV. Para esto usaremos una prescripción de la forma

$$x_{\text{opt}}[f_{e^-}^0, \psi, w] \approx k_{\psi,w} R_{\text{mean}}[f_{e^-}^0], \quad (5.7)$$

que ajustaremos a partir de los resultados de los cálculos Montecarlo, esperando encontrar algo similar a las nociones dadas en §5.2.1.

Adicionalmente, estudiaremos cómo describir la componente remanente de electrones que abandona el convertor. Estos electrones pueden constituir una fuente adicional que, en general, puede ser no deseada; pudiendo eliminar ésta mediante el uso de imanes<sup>23</sup>, el aumento del espesor del convertor<sup>24</sup> —yendo esto potencialmente en detrimento del

Tabla 5.2: Posibles funcionales a considerar en relación a la noción de blanco óptimo. Cf. (5.5).

<sup>20</sup> Cf. Refs. [141; 87]: S. M. Seltzer. «Calculation of photon mass energy-transfer and mass energy-absorption coefficients». *Radiation research* **136**, 2 (1993), págs. 147-170. DOI: [10.2307/3578607](https://doi.org/10.2307/3578607); J. H. Hubbell y S. M. Seltzer. *Tables of X-ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients from 1 keV to 20 MeV for Elements Z = 1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest*. 1996. URL: <http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/cover.html>.



funcional de fotones optimizado— o añadiendo un material absorbente. En nuestro caso, el aire circundante puede ser este medio atenuante. Para los electrones con una energía cinética inferior a 100 keV el alcance CSDA es del orden de unos pocos cm.

### 5.2.3 Descripción de las simulaciones Montecarlo

Para describir de forma sencilla las mallas empleadas en simulación utilizaremos la notación

$$[a, b]_n = \left\{ a + m \frac{b-a}{n} \mid m = 0, 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (5.8)$$

que describe una malla desde  $a$  hasta  $b$  inclusive con  $n + 1$  puntos, contando los extremos.

La solución de (5.4) la obtendremos con el código de simulación Montecarlo FLUKA<sup>25</sup>, en la versión 2011.2c.3. Para el transporte de partículas se empleó la simulación de dispersión individual en lugar de múltiple, con una energía umbral de 1 keV tanto para electrones como para fotones. Cada simulación realizada constó de entre 1.4 a 2.2 miles de millones de partículas, dependiendo del material simulado. La fluencia diferencial planar de fotones y electrones se midió con detectores de cruce de planos —USRBDX en terminología de FLUKA— situados en un semiespacio  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ , empleando una rutina FLUSCW previamente verificada<sup>26</sup> para considerar únicamente las partículas que aparecerían en los experimentos de transmisión correspondientes al espesor del plano considerado. Las posiciones de estos detectores planares se situaron en la malla  $[0, 2R_{\text{mean}}[f_e^0]]_{200}$  para los casos de tungsteno y oro, y en la malla  $[0, 4R_{\text{mean}}[f_e^0]]_{200}$  para el caso del aluminio. La malla en energías para la detección fue  $[1 \text{ keV}, 10\theta]_{100}$ , donde  $\theta$  es la temperatura de la distribución de electrones. Esta última se muestreó de la distribución de Maxwell-Boltzmann en energías<sup>27</sup>,

$$f_e^0(E_e) = 2\sqrt{\frac{E_e}{\pi\theta^3}} e^{-E_e/\theta}, \quad (5.9)$$

con el parámetro  $\theta$  en la malla  $[25, 50]_5$  keV.

Realizaremos también algunas simulaciones con fuentes monoenergéticas para facilitar la interpretación de los resultados. En éstas la malla para la medida de energías será  $[1 \text{ keV}, E_0]_{100}$ .

### 5.2.4 Resultados de optimización del conversor

El comportamiento de los funcionales (5.5) en función del espesor, según las simulaciones antes descritas, se representan en la Fig. 5.4, donde  $\theta = 30$  keV. Adicionalmente se han incluido en la Fig. 5.4(b) los resultados correspondientes a una distribución monoenergética con la misma energía promedio, *i. e.*,  $E_0 = \frac{3}{2}\theta = 45$  keV. Los resultados para diferentes valores de los parámetros de energía son cualitativamente similares.

<sup>21</sup> Cf. Refs. [10; 115; 63; 68; 73]: M. J. Berger y S. M. Seltzer. «Bremsstrahlung and Photoneutrons from Thick Tungsten and Tantalum Targets». *Phys. Rev. C* **2** (2 ago. de 1970), págs. 621-631. DOI: 10.1103/PhysRevC.2.621; M. Nayak *et al.* «Optimum target source term estimation for high energy electron accelerators». *Radiation Physics and Chemistry* **122** (2016), págs. 77-81. DOI: 10.1016/j.radphyschem.2016.01.026; Q. Gao *et al.* «Design and Optimization of the Target in Electron Linear Accelerator». *Proceedings, 4th International Particle Accelerator Conference (IPAC 2013)*. 2013, THPWA016. URL: <http://JACoW.org/IPAC2013/papers/thpwa016.pdf>; E. J. Grant *et al.* «A Monte Carlo simulation study of a flat-panel X-ray source». *Applied Radiation and Isotopes* **70**, 8 (2012), págs. 1658-1666. DOI: 10.1016/j.apradiso.2012.04.011; X. Hai-Bo, P. Xian-Ke y C. Chao-Bin. «Monte Carlo simulation for bremsstrahlung and photon neutron yields in high-energy x-ray radiography». *Chinese Physics B* **19**, 6 (2010), pág. 062901. DOI: 10.1088/1674-1056/19/6/062901.

<sup>22</sup> La energía también da lugar a una «dosis» si se absorbe completamente. Esto es lo que empleábamos en el detector con TLD, aunque allí sí había motivos para adoptar esa hipótesis de absorción total (*cf.* pág. 95).

<sup>23</sup> Cf. Ref. [104]: H. Lee *et al.* «A simulation for the optimization of bremsstrahlung radiation for nuclear applications using laser accelerated electron beam». *Free electron laser. Proceedings, 32nd International Conference, FEL 2010, Malmö, Sweden*. 2010, págs. 618-621.

<sup>24</sup> Cf. Ref. [63]: Q. Gao *et al.* «Design and Optimization of the Target in Electron Linear Accelerator». *Proceedings, 4th International Particle Accelerator Conference (IPAC 2013)*. 2013, THPWA016. URL: <http://JACoW.org/IPAC2013/papers/thpwa016.pdf>.



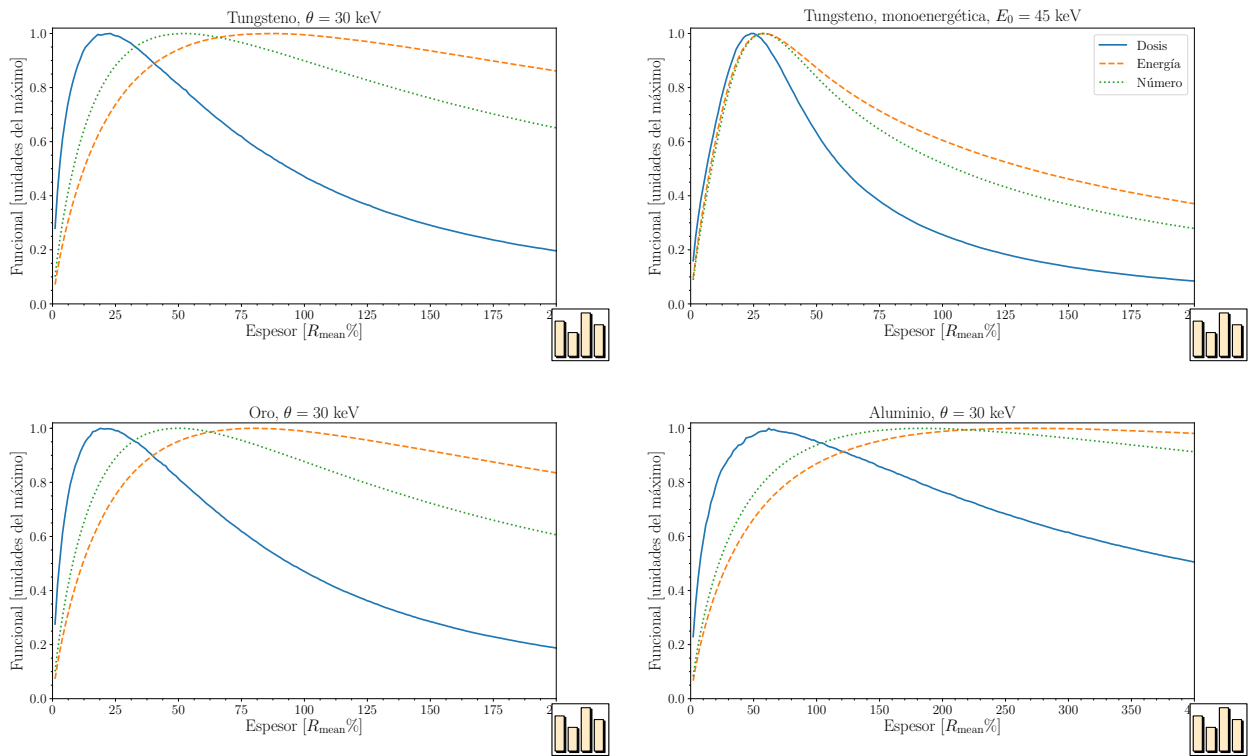


Figura 5.4: (a), (c), y (d) muestran el comportamiento de los funcionales (5.5) para diversos materiales en función del espesor del conversión, estando este dado como porcentaje de  $R_{\text{mean}}$  (5.6). Por otro lado, (b) muestra el comportamiento de un caso monoenergético en tungsteno.

Podemos observar que cada funcional alcanza su máximo a diferente profundidad, pero que esta diferencia no es tan marcada en el caso monoenergético. La anchura del pico también depende del funcional considerado. Por un lado observamos que tungsteno y oro muestran un comportamiento similar, como cabía esperar con su parecido número atómico, mientras que el aluminio alcanza su máximo a una profundidad mayor. Esta diferencia es consistente con las diferencias de comportamiento para números atómicos elevados y reducidos, como se comentó anteriormente en §5.2.1.

La dependencia de la posición del máximo con la energía se muestra en la Fig. 5.5, donde el mejor ajuste a (5.7) se representa también en línea discontinua. Los parámetros de dicho ajuste se recogen en la Tabla 5.3. Las regiones donde el funcional tiene una diferencia menor del 1% respecto al óptimo se muestran sombreadas en la figura, pudiendo observarse que las predicciones del modelo recaen siempre en esta zona. Sería complicado extender la representación sombreada para áreas de confianza mayores, debido al solapamiento que ocurriría entre ellas. Sin embargo, estos niveles pueden estimarse directamente sobre Fig. 5.4 con independencia del valor del parámetro  $\theta$ , pues la representación es prácticamente invariante con éste debido al escalado con  $R_{\text{mean}}$  allí empleado.

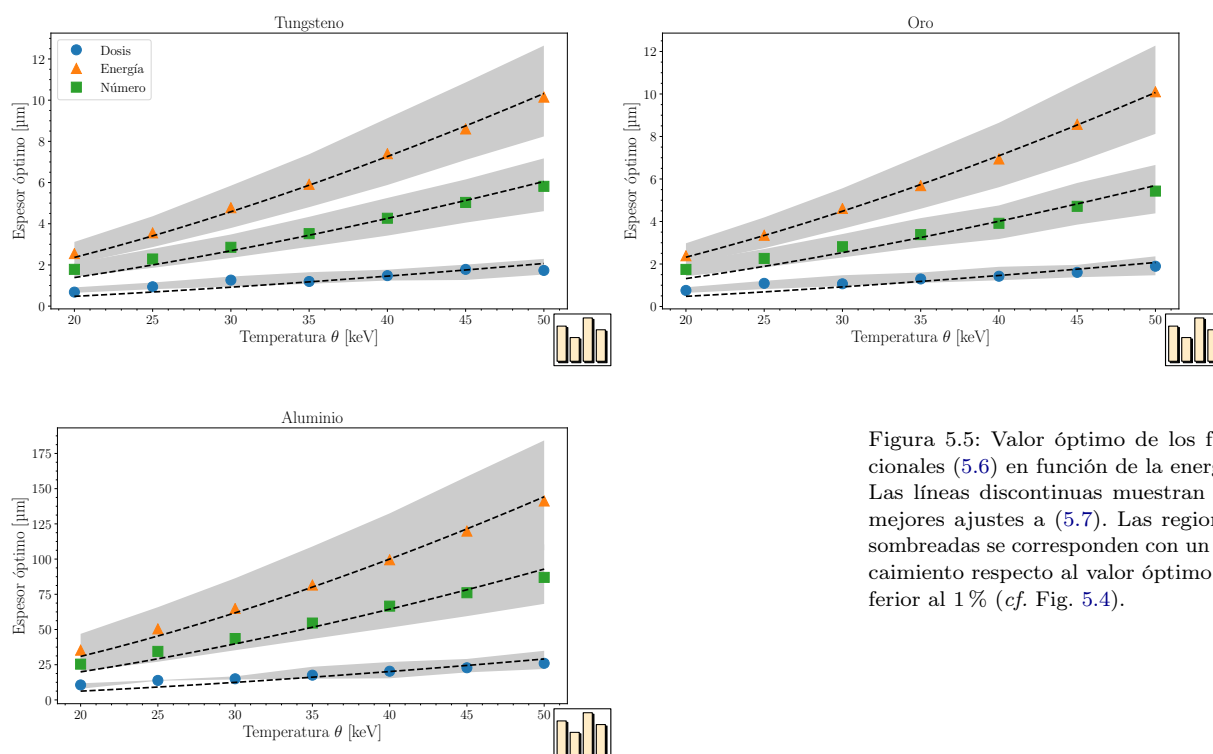


Figura 5.5: Valor óptimo de los funcionales (5.6) en función de la energía. Las líneas discontinuas muestran los mejores ajustes a (5.7). Las regiones sombreadas se corresponden con un decaimiento respecto al valor óptimo inferior al 1% (cf. Fig. 5.4).

Material	Número	Energía	Dosis
W	0.489	0.834	0.167
Au	0.451	0.797	0.164
Al	1.644	2.553	0.515

La razón de que el valor asociado a las diferentes nociones de óptimo consideradas varíe al considerar las distribuciones maxwellianas de electrones, pero no lo haga tanto en el caso monoenergético, radica en el cambio de las distribuciones de energías de los fotones dentro del material, como recoge la Fig. 5.6(a). Esto es, a su vez, consecuencia de la dependencia en energías de la atenuación de los fotones emitidos cerca de la entrada y del cambio en las distribuciones de energía de los electrones a lo largo del material. Estas últimas se representan también en la Fig. 5.6(c).

A medida que el espesor del conversor aumenta, los fotones de menor energía se ven atenuados por la elevada probabilidad de experimentar efecto fotoeléctrico, mientras que su producción respecto a los otros disminuye, al ser los electrones remanentes más energéticos. Como resultado, el espectro de fotones se «endurece» —*i. e.*, aumenta su energía media— con la profundidad, lo que explica que la dosis superficial alcance su máximo después del número de fotones, así como que la energía lo haga tras ambos. En contraste, el caso monoenergético se recoge también en la Fig. 5.6(b) y la Fig. 5.6(d).

Tabla 5.3: Pendiente del ajuste entre la longitud característica y la profundidad óptima [(5.7)] para diferentes materiales y magnitudes dosimétricas sobre los fotones.

<sup>25</sup> Cf. Refs. [18; 49]: T. Böhlen *et al.* «The FLUKA Code: Developments and Challenges for High Energy and Medical Applications». *Nuclear Data Sheets* **120** (2014), págs. 211-214. DOI: [10.1016/j.nds.2014.07.049](https://doi.org/10.1016/j.nds.2014.07.049); A. Ferrari *et al.* *FLUKA: A multi-particle transport code*. CERN, Geneva, 2005. DOI: [10.5170/CERN-2005-010](https://doi.org/10.5170/CERN-2005-010).

<sup>26</sup> Cf. Ref. [83]: G. Hernández y F. Fernández. *Simulation of bremsstrahlung spectra in general targets and its application to a model of a laser-driven irradiation source*. Comunicación oral en el 3rd Fluka Advanced Course and Workshop, LNF, Italia. 2014. URL: <https://indico.cern.ch/event/334606/contributions/779778/>.

<sup>27</sup> Cf. Ref. [107]: F. Mandl. *Statistical physics*. 2.<sup>a</sup> ed. John Wiley & Sons, 1988.

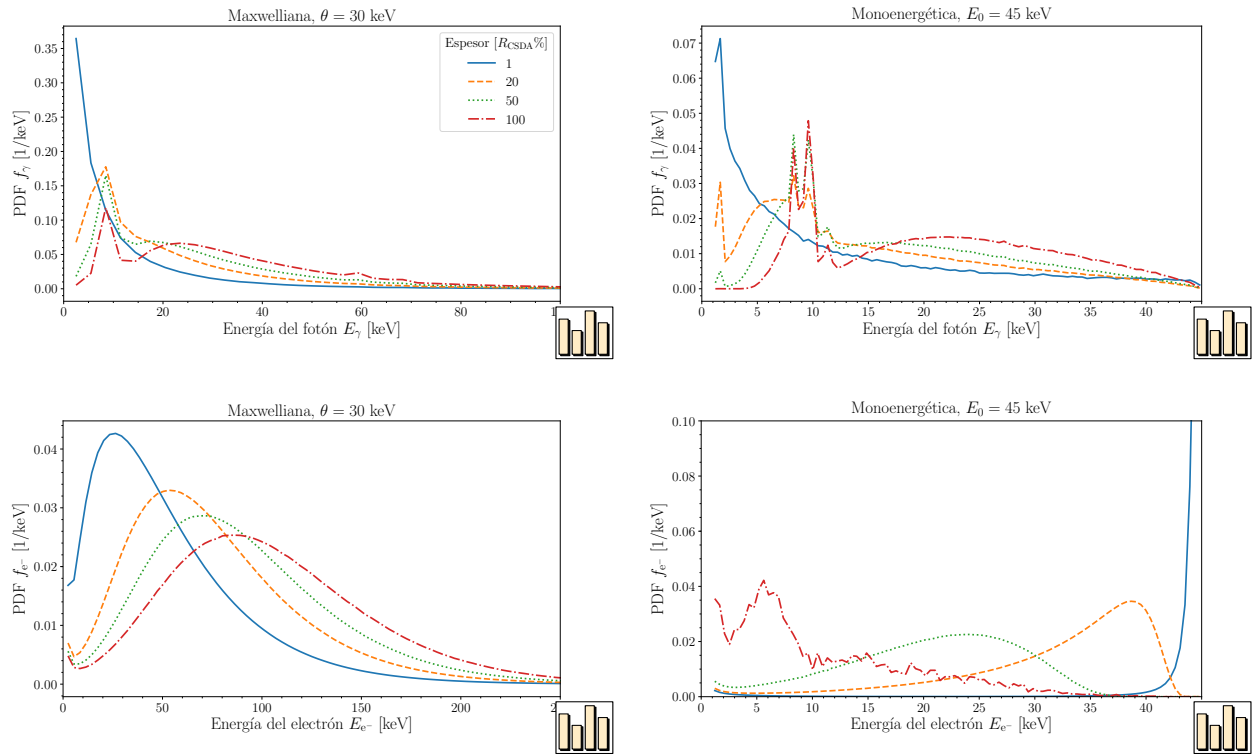


Figura 5.6: Distribuciones de energía de fotones (fila superior) y electrones (fila inferior) para el caso maxwelliano  $\theta = 30$  keV (columna de la izquierda) y su análogo monoenergético  $E_0 = 45$  keV (columna de la derecha).

Las diferencias del caso maxwelliano con el monoenergético pueden estudiarse en mayor detalle mediante el ajuste a (5.7) de los datos simulados procedentes de las distribuciones monoenergéticas. Los parámetros de dichos ajustes se recogen en la Tabla 5.4. Adicionalmente se consideraron varias hipótesis tanto de isotropía como de monodireccionalidad para estas emisiones monoenergéticas, con objeto de comprobar que las diferencias radiquen directamente en la distribución de energías inicial, y no en cómo se dispersan angularmente en el medio las radiaciones de forma diferente según la energía.

Los resultados de estos casos monoenergéticos son consistentes con los presentados por el estudio seminal de Berger y Seltzer<sup>28</sup>, donde se observó una cierta dependencia del alcance óptimo en relación a la aproximación del CSDA en función de la energía. Esto sugiere que en un rango de energías muy diferente (*e.g.*, en el rango de los MeV) el óptimo escalado podría variar. En estos casos sería conveniente realizar un estudio específico en lugar de trasladar directamente los resultados.

Distribución	Número	Energía	Dosis
Maxwelliana	0.489	0.834	0.167
Monoenergética isotropa	0.296	0.301	0.241
Monoenergética direccional	0.304	0.305	0.259

<sup>28</sup> Cf. Ref. [10]: M. J. Berger y S. M. Seltzer. «Bremsstrahlung and Photoneutrons from Thick Tungsten and Tantalum Targets». *Phys. Rev. C* **2** (2 ago. de 1970), págs. 621-631. DOI: [10.1103/PhysRevC.2.621](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.2.621).

Tabla 5.4: Variaciones en la pendiente del ajuste a (5.7) entre longitud característica y profundidad óptima para diferentes hipótesis sobre la naturaleza de la fuente de electrones.

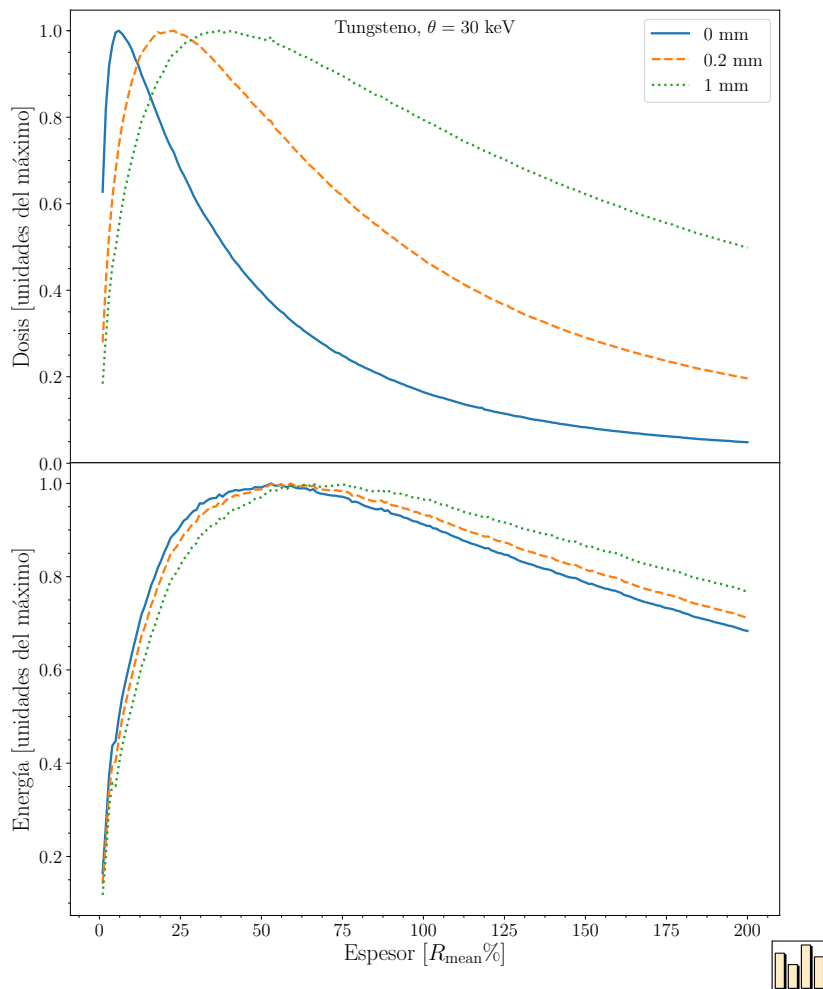


Figura 5.7: Dosis (parte superior), en unidades de su máximo, y energía (parte inferior), también en unidades de su máximo; ambas en función del espesor del convertidor, para diferentes espesores sustrato (aluminio) añadido actuando como atenuante.

Como consecuencia del desdoblamiento de la noción de óptimo con las distribuciones generales, es necesario convenir cuál es tal noción para definir un blanco óptimo. En caso de irradiación superficial, el funcional de dosis es la elección más adecuada, mientras que si consideramos la absorción total, con independencia de dónde se produzca ésta, el funcional energía es más apropiado. Es también razonable buscar un compromiso entre ambas nociones, escogiendo un espesor intermedio entre ambos máximos, pudiendo emplearse la Fig. 5.4 para estimar el impacto sobre los funcionales de una convención dada.

### 5.2.5 Efecto del material de soporte

El efecto del material añadido considerado sobre el funcional dosis se recoge en la parte superior de la Fig. 5.7, mostrando que existe una diferencia significativa entre que se considere o que no. Por el contrario, el resto de funcionales sobre los fotones son menos sensibles a esta distinción, como muestra la parte inferior de dicha figura, que representa el funcional energía. Como ya adelantamos, esto se debe a la fuerte dependencia del peso  $E\mu_{\text{abs}}(E)$  a bajas energías.

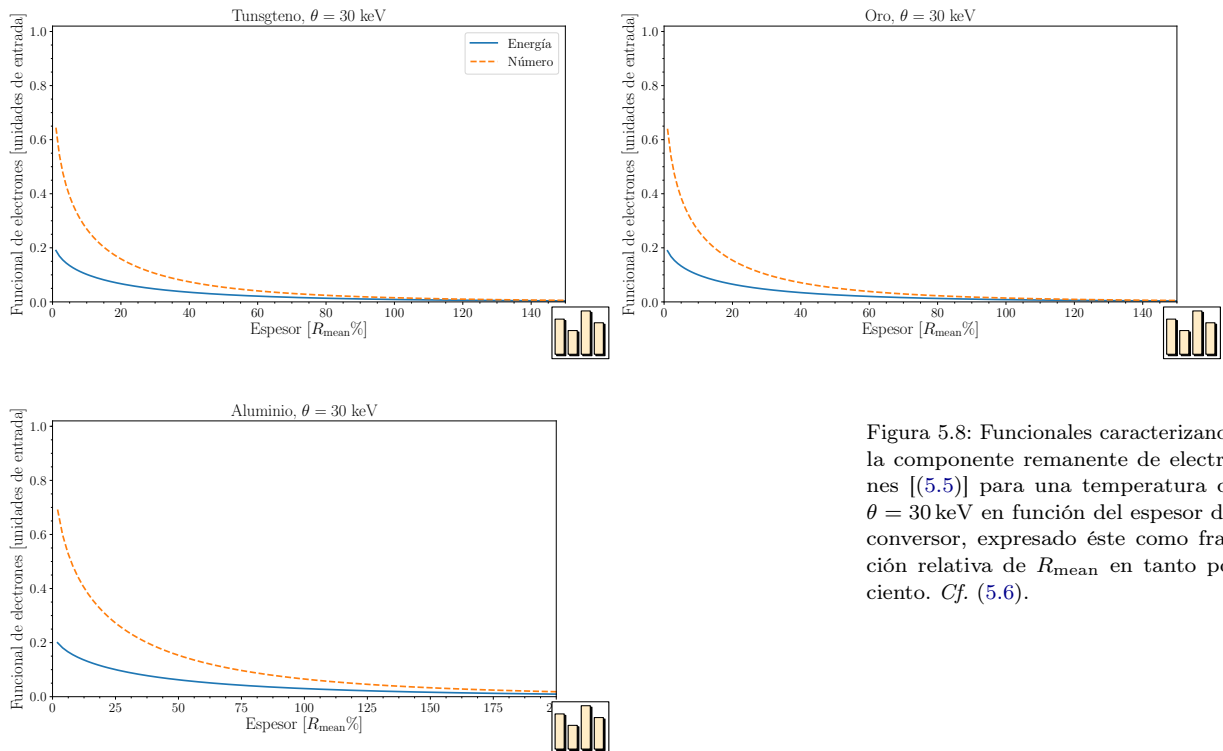


Figura 5.8: Funcionales caracterizando la componente remanente de electrones [(5.5)] para una temperatura de  $\theta = 30$  keV en función del espesor del convertor, expresado éste como fracción relativa de  $R_{\text{mean}}$  en tanto por ciento. Cf. (5.6).

### 5.2.6 Resultados de la componente remanente de electrones

La cantidad de electrones que escapan del convertor, tanto en términos de número como de energía, se muestra en la Fig. 5.8. En el valor óptimo del funcional dosis superficial aproximadamente la mitad de los electrones escapa del material, mientras que para el máximo en energía aproximadamente el 7% permanece.

La componente de electrones que escapa del sistema puede caracterizarse mediante los datos que se recogen en la Fig. 5.8 y en la Fig. 5.6(c), pudiendo servir esto para aplicar las técnicas descritas en la pág. 133 para eliminarla. Cabe notar que el rango de energías dominante en dicha componente depende del grosor del convertor considerado, por lo que éste debe ser tenido en cuenta para diseñar una eliminación adecuada.



# Capítulo 6

## Conclusiones

*Hīc labor extrēmus, longārum haec mēta viārum.*  
Pūblius Vergilius Marō – *Aenēis*

El objetivo general de este trabajo ha sido sentar las bases teóricas de diseño de dispositivos de irradiación de células mediante haces de rayos X generados por láser, en el rango de energías de las decenas de keV y con plasmas sobredensos; así como proporcionar herramientas de caracterización adecuadas para las emisiones producidas y proporcionar una orientación sobre los sistemas y blancos adecuados para ello. Repasaremos a continuación los aportes realizados.

Hemos analizado mediante códigos PiC la interacción producida entre un pulso láser y un plasma sobredenso, verificando que en los plasmas que se pueden formar con materiales sólidos se produce el mecanismo de calentamiento en vacío, por el que se transmite energía a parte de los electrones del plasma. Hemos verificado que las formas funcionales de la distribución en energías se describen adecuadamente como una combinación de maxwellianas, y hemos relacionado sus parámetros con los del láser, encontrando que su influencia puede ser del orden de unos pocos de keV, con lo que la intensidad del láser es el parámetro más relevante.

Hemos elaborado varios modelos de producción de rayos X con diferentes niveles de complejidad, entre los cuales destaca un modelo de blanco grueso similar a los empleados en física médica, que además de mejorar las predicciones de los modelos precedentes permite aplicarse a distribuciones de electrones, lo que no era posible con los otros al tratar estos la norma como parámetro libre.

Hemos determinado las curvas de dosis en profundidad de las fuentes de rayos X generadas por distribuciones maxwellianas de electrones. Además hemos generalizado la teoría de corrección de acumulación para permitir caracterizar numéricamente otras distribuciones y otras magnitudes dosimétricas, lo que también tiene aplicaciones en el campo del diseño de blindajes.

Hemos mejorado el método de caracterización de electrones en aire mediante la curva de distancia-dosis de un trabajo precedente, dando aquí un nuevo modelo numérico más preciso y analizando las discrepancias con el problema sin aproximaciones, estando las diferencias en el parámetro medido en torno al 7 %. El método es directamente aplicable para la medida de distribuciones de electrones con energías hasta los 120 keV, aunque podría extenderse a otras aumentando la distancia al detector.

Hemos construido un modelo para caracterizar y corregir el efecto de apilamiento en la detección de fuentes pulsadas ultracortas. Las condiciones para que el método sea aplicable son que los pulsos tengan una duración temporal mucho menor que el tiempo de respuesta del detector y que las pérdidas de la ventana de energías del detector sean despreciables o, en su defecto, que se pueda hacer un modelo de éstas. Hemos encontrado evidencias experimentales de que medidas espectrales sin picos de repetición pueden estar alteradas por efectos de apilamiento, y que la aplicación de nuestro método contribuye a eliminar dichos efectos. El efecto de pérdida de resolución intrínseco a la combinación de agrupamiento en canales y del apilamiento también se ha caracterizado. El método permite buscar un compromiso entre esta pérdida de resolución y el empeoramiento del ratio señal-ruido que sobrevendría de disminuir artificialmente el número de cuentas para evitar el apilamiento.

Hemos analizado el problema de la identificación directa de la pendiente de los espectros de fotones y de la temperatura de los electrones que los generan, mostrando que esto conlleva en general una subestimación de dicho parámetro, y que la magnitud de ésta dependerá del intervalo en que se haga el ajuste de dicha pendiente. En particular, la mezcla de dos temperaturas de electrones generando *bremsstrahlung* es en muchos casos difícil de discernir del cambio causado por dicha región de ajuste, con lo que, en general, no puede emplearse para proporcionar evidencia de dos componentes de electrones. Aún más, el empeoramiento de la relación señal-ruido en los canales de altas energías del detector puede originar un efecto fácilmente malinterpretable como una componente de altas energías. Hemos identificado algunas características de las distribuciones generadas por mezclas de dos temperaturas de electrones, aunque no hemos encontrado evidencias experimentales para ello. El empleo de los diversos modelos construidos para las distribuciones de rayos X ha revelado que la razón fundamental de las diferencias entre la temperatura de los electrones y la forma del espectro de fotones es la sección eficaz de producción de *bremsstrahlung*, que incluso los modelos analíticos sencillos recogen de forma satisfactoria.

Hemos identificado el rango de parámetros de los láseres adecuados para la realización irradiación celular que se pueden aplicar potencialmente a la RIO, encontrando que pueden satisfacer las demandas usuales en este tipo de tratamientos, a falta de los avances en la investigación en materia de eficacia biológica de los pulsos ultracortos.

Hemos estudiado los conversores óptimos en transmisión que pueden emplearse para un sistema de irradiación, analizando el sentido que puede tener esta noción de «óptimo» y encontrando que en el caso de distribuciones no monoenergéticas de electrones las discrepancias según la noción adoptada son mucho mayores que en el caso monoenergético, en que esta complejidad no está presente. Los espesores óptimos para distribuciones de electrones con temperaturas en el rango 10–50 keV sobre blancos con número atómico elevado se encuentran en el rango de las decenas de  $\mu\text{m}$ , con lo que sería técnicamente posible realizar un diseño de geometría en transmisión óptimo con un proceso de deposición sobre un sustrato. Las leyes de escala proporcionadas pueden servir para aproximar el óptimo de otras distribuciones en un rango de energías similar.

Algunas posibles vías de trabajo que quedan abiertas se recogen a continuación:

- Sería interesante estudiar la eficacia biológica de una fuente de rayos X como la descrita. La consideración detallada de la estabilidad del sistema y los parámetros implicados podría ser importante para esclarecer esta cuestión sobre la que aún hay poco claro.
- Un estudio experimental del conversor óptimo sería de gran interés para contraponer los casos teóricos ideales a las condiciones experimentales realistas y la variabilidad inherente a ellas.
- En la vía instrumental en torno al modelo de apilamiento, podría estudiarse con un detector que proporcionase la información temporal de los eventos en qué medida se ajustan estos a la tasa de repetición del láser. Con esto podría diseñarse un algoritmo para eliminar el ruido que no coincida con las emisiones.



# Apéndices

## A Conceptos de teoría de probabilidad empleados en la memoria

*How can it be that mathematics, being after all a product of human thought which is independent of experience, is so admirably appropriate to the objects of reality?*

Albert Einstein – *Sidelights on Relativity*

En este apéndice daremos una referencia mínima de las nociones de teoría de probabilidad que aparecen con frecuencia en la memoria. El objetivo es dar una idea del significado de los conceptos, sin profundizar en las cuestiones formales que no se emplearán<sup>1</sup>.

Una variable aleatoria es un objeto matemático que toma valores en un conjunto dado (habitualmente  $\mathbb{R}^n$ ) siguiendo un proceso de naturaleza estocástica. Cuando exista un modelo para este comportamiento diremos que dicha variable sigue una *distribución*. Denotaremos el hecho de que la variable aleatoria  $X$  siga la distribución  $\mathcal{D}$  como  $X \stackrel{d}{=} \mathcal{D}$ .

Imponiendo una serie de restricciones axiomáticas para que la noción de probabilidad tenga sentido, se puede demostrar que las variables aleatorias unidimensionales están totalmente descritas por una función de distribución acumulada (CDF) que indicará en cierto sentido matemático la cantidad relativa de observaciones con un valor inferior o igual al argumento, *i. e.*,

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{P}\{X \leq x\}. \quad (\text{A.1})$$

Habitualmente se denotarán las variables aleatorias por letras mayúsculas y sus valores con la minúscula correspondiente.

Existen dos arquetipos de variables aleatorias unidimensionales que aparecen en la práctica. Por un lado, las absolutamente continuas, para las que existe una función de densidad de probabilidad (PDF), que denotaremos  $f_X$ , verificando:

$$\text{P}\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f_X(x) dx \quad (\text{A.2})$$

para todo  $a < b \in \mathbb{R}$ . Ésta es la descripción más intuitiva que se suele preferir en la aplicación práctica.

El otro arquetipo común es el de variable aleatoria discreta, que toma valores exclusivamente en un conjunto discreto. En este caso

<sup>1</sup> Puede consultarse cualquiera de los abundantes libros de texto existentes sobre la materia, *e.g.*, Ref. [47]: W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, 2008. DOI: 10.1063/1.3034322.

existirá una función de masa de probabilidad, que denotaremos  $m_X$ , que verifica:

$$P\{X = x\} = m_X(x). \quad (\text{A.3})$$

En este trabajo se empleará la distribución<sup>2</sup> delta de Dirac para unificar la notación y escribir:

$$f_X(x) = \sum_k m_X(k)\delta(x - k), \quad (\text{A.4})$$

donde el sumatorio se extiende al conjunto de definición de la variable discreta. Con esta notación no precisaremos distinguir entre un arquetipo y otro de variables.

En un caso completo, una distribución puede ser una mezcla de ambos arquetipos<sup>3</sup>. Por ejemplo, un espectro de rayos X contiene habitualmente una parte continua y una parte discreta. Usando la notación delta de Dirac podemos describir ambas componentes con una única PDF, de ahí que muchas veces hallamos identificado en este trabajo una distribución con su PDF<sup>4</sup>.

En ocasiones nos interesará estudiar cómo se distribuye una variable aleatoria con una relación de dependencia funcional con otra. El caso más sencillo es el de una variable absolutamente continua que sea función estrictamente monótona de otra y con derivada continua. Si tenemos  $Y = g(X)$ , su PDF será la dada por

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|(Dg)(g^{-1}(y))|}, \quad (\text{A.5})$$

donde  $D$  es el operador derivada<sup>5</sup>.

Cuando sólo interesa el valor promediado de una función de una variable aleatoria basta recurrir al valor esperado

$$E[g(X)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx. \quad (\text{A.6})$$

Los casos de dimensión dos y superior son más o menos análogos, aumentando el número de parámetros de las diversas funciones de distribución. La casuística se complicaría un poco más<sup>6</sup>, aunque para este trabajo basta suponer que se pueden describir mediante las funciones indicadas, quizá recurriendo a la delta de Dirac.

Cuando tratamos en un espacio de varias dimensiones en que cada una representa una variable aleatoria podemos estar interesados en ver cómo se comporta una de ellas con independencia de las demás. A esto se le denomina distribución marginal, y vendría dada por integrales de la forma.

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (\text{A.7})$$

donde  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  no tienen por qué ser necesariamente de dimensión 1, como nos recuerda la negrita.

El cambio de variable aleatoria también se puede considerar con funciones de dimensión 2 o mayor. En caso de que la función del cambio sea inyectiva, diferenciable y que su jacobiano no se anule, la expresión (A.5) seguirá siendo válida, reemplazado  $D$  por el jacobiano.

<sup>2</sup> Aquí el término «distribución» se refiere a una generalización del concepto de función, no a «distribución de probabilidad».

<sup>3</sup> Existe además un tercer arquetipo que podríamos denominar «singular»: existen subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , como el de Cantor, que son no numerables pero sí de medida nula, con los que se pueden construir distribuciones de este nuevo tipo.

<sup>4</sup> La unificación usual en teoría de la probabilidad sería considerar sólo la CDF y utilizar expresiones integrales en el sentido de Lebesgue–Stieltjes. Cf. §V en Vol. 2 de la Ref. [47]: W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, 2008. DOI: 10.1063/1.3034322. Realmente la definición rigurosa de la delta de Dirac pasa por especificar sus propiedades dentro de una integral, con lo que sólo estamos disfrazando el tratamiento para hacer más intuitivos los casos sencillos. El inconveniente es que pensar en la  $\delta$  como una función invita a hacer operaciones ilícitas, pero aquí no nos colocaremos en esa situación.

<sup>5</sup> La monotonicidad garantiza la existencia de la inversa. Cf. nota 7 en la pág. 95.

<sup>6</sup> Por ejemplo, una distribución concentrada en un segmento de  $\mathbb{R}^2$  es «singular» y sí puede esperarse en la práctica, a diferencia de lo que veíamos en  $\mathbb{R}$ .

Otra distribución interesante es la que se encuentra cuando algunas de las variables aleatorias toman un valor prefijado. A esto se le denomina distribución condicionada. En el caso de distribuciones absolutamente continuas se pueden expresar como<sup>7</sup>

$$f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}, \quad (\text{A.8})$$

siempre que ocurra  $f(x) \neq 0$ <sup>8</sup>.

Una última operación de interés con variables aleatorias es la denominada combinación convexa. Si tenemos un conjunto de  $n$  variables aleatorias unidimensionales  $\{X_1, X_2, \dots\}$  y cada una de ellas se da con probabilidad  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ , de esto resulta una nueva variable aleatoria con PDF

$$f(x) = \sum_i \alpha_i f_i(x). \quad (\text{A.10})$$

Esto no debe confundirse con la variable aleatoria

$$\sum_i \alpha_i X_i, \quad (\text{A.11})$$

que es el resultado de sumar los valores de las  $X_i$  con pesos  $\alpha_i$ , cuya densidad viene dada por (A.5), que es similar a un producto de convolución cuando las variables son independientes.

<sup>7</sup> Uno de los problemas subyacentes en emplear la distribución  $\delta$  aparece al tratar de abusar de esta expresión: el cociente por una no está definido. Basta observar  $\delta(x) = (1-x)\delta(x)$ . Esta circunstancia no aparece en el resto de la presente memoria.

<sup>8</sup> No lo necesitaremos en este trabajo, pero sí existe una expresión general en términos de las CDF,

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x} - h\mathbf{1},\mathbf{y})}{F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} - h\mathbf{1})}, \quad (\text{A.9})$$

donde  $\mathbf{1}$  es el vector de unos con la dimensión de  $\mathbf{X}$ .

## B Convenciones de la transformada de Fourier

*It's called a fourier transform when you take a number and convert it to the base system where it will have more fours, thus making it "fourier". If you pick the base with the most fours, the number is said to be "fouriest".*

$$624_{10} \mapsto 440_{12} \mapsto 4444_5 \checkmark$$

Zach Weinersmith – *Saturday Morning Breakfast Cereal*

De forma general se pueden agrupar las convenciones de la transformada de Fourier en la forma paramétrica

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}\{f\}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{|\beta|}{(2\pi)^{1-\alpha}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\beta\xi x} dx, \quad (\text{B.1})$$

donde la definición se aplica cuando la integral tenga sentido, pudiendo ser ésta en el sentido del valor principal de Cauchy<sup>9</sup> en algunos casos.

Notemos que para que tenga sentido dimensional,  $\alpha$  y  $\beta\xi x$  deben ser adimensionales. Normalmente se escogen  $x$  y  $\xi$  de dimensiones recíprocas, aunque no tiene por qué ser así, dotando a  $\beta$  de dimensionalidad.

La definición del operador «inverso»<sup>10</sup> consecuente será

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{(-)}\{f\} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{|\beta|}{(2\pi)^{1+\alpha}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\beta\xi x} dx. \quad (\text{B.2})$$

Esto pone de manifiesto que las propiedades de la transformada y de la transformada «inversa» son análogas, pues se pueden entender como un cambio de convención<sup>11</sup>  $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{(-)} = \mathcal{F}_{-\alpha,-\beta}$ .

Las principales convenciones se recogen en la Tabla B.1, junto con una orientación sobre las áreas donde se prefieren éstas<sup>12</sup>.

$(\alpha, \beta)$	Denominación
(0, 1)	Física moderna
(1, -1)	Matemáticas
(0, -2 $\pi$ )	Procesamiento de señales
(1, 1)	Teoría de probabilidad
(0, $\hbar^{-1}$ )	Física cuántica

Algunas de las propiedades de la transformada se recogen en la Tabla B.2. La primera columna se corresponde con una función de  $x$ , cuya transformada aplicada a la variable  $\xi$  se recoge en las otras. En todo caso se supone que funciones y transformadas están bien definidas, que  $f$  y  $g$  son funciones cuyas transformadas son respectivamente  $F$  y  $G$ , y que  $a, b \in \mathbb{C}$ , salvo en caso de que sean argumentos de una función de variable real, en que se restringen a  $\mathbb{R}$ .

Observando las propiedades del producto de convolución, las únicas convenciones en que esta operación es dual con el producto punto a punto son  $(0, \pm 2\pi)$ . Alternativamente se podría redefinir el producto de convolución con un factor adicional para conseguir una operación dual<sup>13</sup>.

Finalmente, las tablas de transformadas<sup>14</sup>, pueden transformarse en una convención diferente utilizando la transformación

<sup>9</sup> En este caso consistiría en que, de ocurrir

$$\int_0^{\infty} g(t) dt = \pm\infty \quad y$$

$$\int_{-\infty}^0 g(t) dt = \mp\infty$$

se realizase en la asignación

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} g(t) dt.$$

<sup>10</sup> Según el conjunto al que se aplique la definición, este operador será o no realmente un inverso. Por ejemplo, para una función continua a trozos absolutamente integrable  $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{(-)} \circ \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$  es un operador que promedia los límites por la izquierda y por la derecha de la función en cada punto, lo que en algunos conjuntos es la identidad (e.g., en  $\mathcal{L}^1$ ), pero no siempre.

Tabla B.1: Algunas convenciones habituales para la transformada de Fourier. La «denominación» representa una orientación sobre las áreas en que pueden aparecer siguiendo a Ref. [163], no pretendiendo ser, en modo alguno, categórica.

<sup>11</sup> Otra explicación posible es que resulta de componer el operador de inversión  $\mathcal{R} : f(x) \mapsto f(-x)$  con la transformación original más un cambio de escala:

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{(-)} \propto \mathcal{F}_{\alpha,\beta} \circ \mathcal{R}. \quad (\text{B.3})$$

<sup>12</sup> Cf. Ref. [163]: E. W. Weisstein. *Fourier Transform. From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. URL: <http://mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html>.

<sup>13</sup> La operación  $\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-1/2} f * g$  es dual del producto punto a punto en las convenciones  $(0, \pm 1)$ .

<sup>14</sup> E.g., Ref. [42]: A. Erdelyi et al. *Tables of Integral Transforms*. McGraw-Hill Book Company, Incorporated, 1954.

Expresión	$(\alpha, \beta)$	$(1, -1)$	$(0, -1)$	$(0, -2\pi)$
$af(x) + bg(x)$	$aF(\xi) + bG(\xi)$	$aF(\xi) + bG(\xi)$	$aF(\xi) + bG(\xi)$	$aF(\xi) + bG(\xi)$
$f(x - a)$	$e^{i\beta a\xi} F(\xi)$	$e^{-ia\xi} F(\xi)$	$e^{-ia\xi} F(\xi)$	$e^{-i2\pi a\xi} F(\xi)$
$f(a)e^{iax}$	$F(\xi + \frac{a}{\beta})$	$F(\xi - a)$	$F(\xi - a)$	$F(\xi - \frac{a}{2\pi})$
$f(ax)$	$ a ^{-1} F(\frac{\xi}{\beta})$	$ a ^{-1} F(-\xi)$	$ a ^{-1} F(-\xi)$	$ a ^{-1} F(-\frac{\xi}{2\pi})$
$F(x)$	$(2\pi)^\alpha f(-\xi)$	$2\pi f(-\xi)$	$f(-\xi)$	$f(-\xi)$
$\frac{d^n f}{dx^n}$	$(-i\beta\xi)^n F(\xi)$	$(i\xi)^n F(\xi)$	$(i\xi)^n F(\xi)$	$(i2\pi\xi)^n F(\xi)$
$x^n f(x)$	$(-i/\beta)^n \frac{d^n F}{d\xi^n}$	$i^n \frac{d^n F}{d\xi^n}$	$i^n \frac{d^n F}{d\xi^n}$	$(i/2\pi)^n \frac{d^n F}{d\xi^n}$
$(f * g)(x)$	$\sqrt{ \beta ^{-1} (2\pi)^{1-\alpha}} (F \cdot G)(\xi)$	$(F \cdot G)(\xi)$	$\sqrt{2\pi} (F \cdot G)(\xi)$	$(F \cdot G)(\xi)$
$(f \cdot g)(x)$	$\sqrt{ \beta  (2\pi)^{-\alpha-1}} (F * G)(\xi)$	$(2\pi)^{-1} (F * G)(\xi)$	$\sqrt{2\pi}^{-1} (F * G)(\xi)$	$(F * G)(\xi)$

Tabla B.2: Algunas propiedades de la transformada de Fourier. El operador \* designa el producto de convolución, definido por (4.11).

$$\mathcal{F}_{\alpha, \beta} \{f\}(\xi) = \sqrt{\frac{|\beta/\beta'|}{(2\pi)^{\alpha'-\alpha}}} \mathcal{F}_{\alpha', \beta'} \{f\} \left( \xi \frac{\beta}{\beta'} \right), \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^{(-)} \{f\}(\xi) = \sqrt{\frac{|\beta/\beta'|}{(2\pi)^{\alpha-\alpha'}}} \mathcal{F}_{\alpha', \beta'}^{(-)} \{f\} \left( \xi \frac{\beta}{\beta'} \right). \quad (\text{B.5})$$

En caso de que queramos trabajar numéricamente, debemos reemplazar las funciones original y transformada por secuencias, lo que requiere muestrear (discretizar la señal original) y tratar como periódica la señal (discretizar la transformada)<sup>15</sup>, de donde surgen las definiciones de la transformada discreta de Fourier

$$\mathcal{F}_{\alpha, \beta} \left\{ \{a_n\}_{n=1}^N \right\}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{N^{1-\alpha}}} \sum_{k=1}^N a_k e^{i\beta\xi(k-1)(\nu-1)/N} dx, \quad (\text{B.6})$$

lo que da lugar a una secuencia de igual longitud que la primera.

En esta ocasión suele exigirse  $\beta = \pm 2\pi$  para que la inversión tome la forma análoga<sup>16</sup>

$$\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^{(-)} \left\{ \{a_n\}_{n=1}^N \right\}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{N^{1+\alpha}}} \sum_{k=1}^N a_k e^{-i\beta\xi(k-1)(\nu-1)/N} dx, \quad (\text{B.7})$$

consecuente con la relación de inversión de la transformada antes dada para funciones,  $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^{(-)} = \mathcal{F}_{-\alpha, -\beta}$ .

La transformada discreta de Fourier es una transformación lineal biyectiva entre secuencias de  $\mathbb{C}^N$ . Existe una familia de algoritmos especialmente popular denominada «transformada rápida de Fourier» (FFT por sus siglas en inglés) que permite el cálculo de la transformada discreta de una forma computacionalmente ventajosa. Por esta causa y, con abuso del lenguaje, se emplea dicha denominación para la transformada discreta.

<sup>15</sup> Cf. págs. 31–37 en Ref. [92]: D. W. Kammler. *A first course in Fourier analysis*. Cambridge University Press, 2007. DOI: 10 . 1017 / CB09780511619700.

<sup>16</sup> Realmente basta que  $\beta = k2\pi$ , con  $k$  un entero coprimo con  $N$ . A esto se le llama en ocasiones «transformada fraccionaria de Fourier».

## C Fichero OSIRIS de la simulación estándar

*Talk is cheap. Show me the code.*

Linus Torvalds

A continuación se reproduce el fichero de configuración «estándar» empleado en las simulaciones PiC de §3.1.2. Para su interpretación hay que referirse a la documentación interna de OSIRIS.

```
simulation
{
  omega_p0 = 2.3562d+15,
}

node_conf
{
  node_number(1:1) = 1,
  if_periodic = .false.,
}

grid
{
  coordinates = "cartesian",
  nx_p(1:1) = 4000,
}

time_step
{
  dt = 0.01,
  ndump = 10,
}

restart
{
  ndump_fac = 100,
  if_restart = .false.,
  if_remold = .true.,
}

space
{
  xmin(1:1) = 0,
  xmax(1:1) = 320,
  if_move(1:1) = .false.,
}

time
{
  tmin = 0,
```

```
tmax = 500,  
}  
  
emf_bound  
{  
  type(1:2, 1) = 60, 60,  
  
}  
  
diag_emf  
{  
  ndump_fac = 15,  
  ndump_fac_ene_int = 1,  
  ndump_fac_ave = 1,  
  n_ave(1:1) = 4,  
  reports(1:2) = "e1", "e2",  
}  
  
particles  
{  
  num_species = 2,  
  num_cathode = 0,  
  num_neutral = 0,  
  num_neutral_mov_ions = 0,  
}  
  
species  
{  
  num_par_max = 110000,  
  rqm = -1,  
  num_par_x(1:1) = 3000,  
  vth(1:3) = 0.00625611, 0.00625611, 0.00625611,  
  vfl(1:3) = 0, 0, 0,  
  name = "electrons",  
  vdist_type = "thermal",  
}  
  
profile  
{  
  density = 449.548,  
  profile_type = "math func",  
  math_func_expr = "if(if(x1 < 250,  
  ↪ 0.04*exp((x1-250)/5.952380952380952), if(x1 > 265,  
  ↪ 0.004*exp(-(x1-265)/10.0), 1.0)) <  
  ↪ 2.224456033143945e-05, 0.0, if(x1 < 250,  
  ↪ 0.04*exp((x1-250)/5.952380952380952), if(x1 > 265,  
  ↪ 0.004*exp(-(x1-265)/10.0), 1.0)))",  
}  

```

spe\_bound

```
{  
  type(1:2, 1) = 5, 5,
```

```
}
```

diag\_species

```
{  
  ndump_fac = 15,  
  ndump_fac_ave = 1,  
  n_ave(1:1) = 4,  
  prec = 8,  
  ps_gammamin = 1,  
  ps_gammamax = 2,  
  ps_ngamma = 1024,  
  ps_xmin = 11.2591,  
  ps_xmax = 524.481,  
  ps_nx(1:1) = 512,  
  ps_pmin = -2,  
  ps_pmax = 2,  
  ps_np(1:1) = 256,  
  phasespaces(1:4) = "x1g_|charge|", "g_|charge|",  
    ↪ "x1_|charge|", "x1p1_|charge|",  
  ndump_fac_pha = 1,
```

```
}
```

species

```
{  
  num_par_max = 110000,  
  rqm = 3810.94,  
  num_par_x(1:1) = 3000,  
  vth(1:3) = 2.81071d-05, 2.81071d-05, 2.81071d-05,  
  vfl(1:3) = 0, 0, 0,  
  name = "al",  
  vdist_type = "thermal",
```

```
}
```

profile

```
{  
  density = 449.548,  
  profile_type = "math func",
```



```
math_func_expr = "if(if(x1 < 250,  
  ↪ 0.04*exp((x1-250)/5.952380952380952), if(x1 > 265,  
  ↪ 0.004*exp(-(x1-265)/10.0), 1.0)) <  
  ↪ 2.224456033143945e-05, 0.0, if(x1 < 250,  
  ↪ 0.04*exp((x1-250)/5.952380952380952), if(x1 > 265,  
  ↪ 0.004*exp(-(x1-265)/10.0), 1.0)))",  
}
```

```
spe_bound  
{  
  type(1:2, 1) = 5, 5,
```

```
}
```

```
diag_species  
{  
  ndump_fac = 15,  
  ndump_fac_ave = 1,  
  n_ave(1:1) = 4,  
  prec = 8,  
  ps_xmin = 11.2591,  
  ps_xmax = 524.481,  
  ps_nx(1:1) = 512,  
  phasespaces(1:1) = "x1_|charge|",  
  ndump_fac_pha = 1,  
}
```

```
!---zpulse_list
```

```
zpulse  
{  
  a0 = 0.5,  
  ztype = "box",  
  omega0 = 1,  
  phase = 0,  
  pol_type = 0,  
  pol = 0,  
  propagation = "forward",  
  lon_type = "gaussian",  
  lon_x0 = 100,  
  lon_range = 60,  
  lon_duration = 30,  
  per_type = "plane",  
}
```

## D Software de código abierto producido

*Science is knowledge which we understand so well that we can teach it to a computer.*

Donald Knuth – «Computer Programming as an Art»

En este apartado se recoge una lista no exhaustiva de los artefactos *software* producidos relacionados con lo expuesto en la presente memoria.

### D.1 xpecgen

`xpecgen`<sup>17,18</sup> es un paquete de Python con la implementación del modelo de rayos X presentado en §3.2.2.4 (pág. 66) y en la publicación asociada<sup>19</sup>. Incluye una interfaz gráfica que permite utilizarlo para fuentes monoenergéticas de electrones sin conocimientos de programación. Se incluyen también un ejemplo de órdenes para obtener los resultados de una distribución maxwelliana o similar mediante la API que también proporciona.

El programa permite representar los espectros, atenuarlos, normalizarlos, calcular espesores de semiatenuación, exportarlos a formato `xlsx` o `csv`. La Fig. D.1 muestra una captura de su interfaz.

<sup>17</sup> <https://github.com/Dih5/xpecgen>.

<sup>18</sup> Cf. Ref. [84]: G. Hernández y F. Fernández. «xpecgen: A program to calculate x-ray spectra generated in tungsten anodes». *The Journal of Open Source Software* **2016** (2016). DOI: 10.21105/joss.00062.

<sup>19</sup> Cf. Ref. [78]: G. Hernández y F. Fernández. «A model of tungsten anode x-ray spectra». *Medical Physics* **43**, 8 (2016), págs. 4655-4664. DOI: 10.1118/1.4955120.

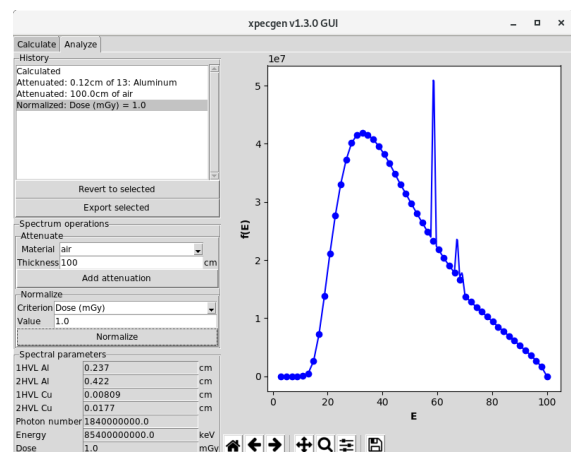
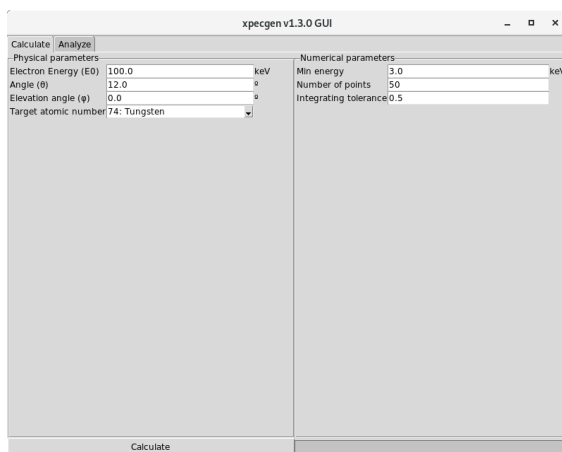


Figura D.1: Interfaz gráfica de `xpecgen`.

### D.2 duat

El estudio con el código PiC OSIRIS que realizamos en §3.1 requería la repetición de un gran número de simulaciones con pequeñas variaciones de los parámetros, así como realizar cálculos sobre los ficheros de salida de la simulación. Esto motivo la realización de una API para recubrir el acceso al código, permitiendo automatizar estos procesos.

El paquete de Python que creamos para ello, `duat`<sup>20</sup>, está disponible bajo licencia MIT y permite construir simulaciones desde el intérprete de Python (con la flexibilidad de formato y tipado respecto al formato original, al estilo de FORTRAN), la ejecución de simulaciones a través de sistemas de colas compatibles con Grid Engine o con un sistema propio, y el posprocesado de los datos.

<sup>20</sup> <https://github.com/Dih5/duat>.

### D.3 VFD

VFD (Vernacular Figure Description) es un formato abierto para la representación de gráficos científicos, desarrollado para conseguir:

- Unificar el aspecto general de las gráficas, dotando de un estilo coherente a las incluidas en un documento.
- Recoger datos producidos en distintas aplicaciones o lenguajes y darles una descripción común.
- Facilitar realizar pequeñas modificaciones, como puede ser cambiar una etiqueta o el rango de representación, de forma sencilla.
- Permitir incrustar la información que generó un gráfico en éste.

El programa para utilizar este formato está disponible<sup>21</sup> bajo licencia LGPL-3.0. Puede verse un ejemplo de éste en la Fig. D.2.

<sup>21</sup> <https://github.com/Dih5/vfd>.

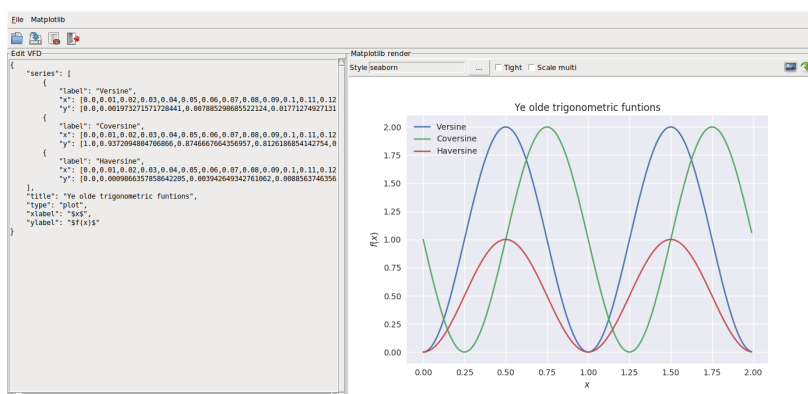


Figura D.2: Demostración del formato VFD en una interfaz gráfica. A la izquierda se muestra el contenido del fichero crudo, que es un caso particular de JSON, y a la derecha se muestra una representación obtenida mediante la biblioteca Matplotlib.

### D.4 Interfaces a datos de partículas

A lo largo de esta memoria hemos realizado referencias a varios conjuntos de datos que describen el comportamiento de las partículas en la materia. En particular hemos empleado en nuestros cálculos:

- La descripción de la atenuación de los fotones en la materia de Hubbell y Seltzer<sup>22</sup>.
- La descripción mediante la aproximación de frenado continuado de los electrones de Berger *et al.*<sup>23</sup>, que además incluye datos de positrones y partículas alfa.
- Las secciones eficaces de producción de *bremstrahlung* de Seltzer y Berger<sup>24</sup>.

Para tratar con las dos primeras fuentes de datos se crearon sendas bibliotecas para Mathematica<sup>25</sup> y Python<sup>26</sup>. Respecto a la tercera, está disponible a partir del API de xpecgen (*cf.* §D.1).

<sup>22</sup> *Cf.* Ref. [87]: J. H. Hubbell y S. M. Seltzer. *Tables of X-ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients from 1 keV to 20 MeV for Elements Z = 1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest*. 1996. URL: <http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/cover.html>.

<sup>23</sup> *Cf.* Ref. [9]: M. Berger *et al.* *Stopping-Power and Range Tables*. 2009. URL: <http://www.nist.gov/pml/data/star/>.

<sup>24</sup> *Cf.* Ref. [143]: S. M. Seltzer y M. J. Berger. «Bremstrahlung spectra from electron interactions with screened atomic nuclei and orbital electrons». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms* **12**, 1 (1985), págs. 95-134. DOI: [10.1016/0168-583X\(85\)90707-4](https://doi.org/10.1016/0168-583X(85)90707-4).

<sup>25</sup> <https://github.com/Dih5/PhysDataFetch>.

<sup>26</sup> <https://github.com/Dih5/physdata>.

<sup>27</sup> <https://github.com/Dih5/temperature>.

### D.5 Cálculo de la temperatura efectiva

Se ha desarrollado un modulo de Python, disponible<sup>27</sup> bajo licencia LGPL-3.0, que recoge utilidades relacionadas con el formalismo de la temperatura efectiva (§4.3). También se incluyen aquí los modelos «menores» de rayos X de §3.2.2.

### D.6 Cálculo de efectos de apilamiento

Se ha desarrollado un modulo de Python, disponible<sup>28</sup> bajo licencia LGPL-3.0, que recoge herramientas computacionales para los cálculos con el modelo de apilamiento (§4.2).

<sup>28</sup> <https://github.com/Dih5/pileup>.

### D.7 Lectura de espectrómetros Amptek<sup>®</sup>

Los datos experimentales obtenidos con espectrómetros de la casa Amptek<sup>®</sup> siguen un formato propio en el que proporcionan el histograma de cuentas, junto con información adicional de interés como puede ser la tasa de cuentas (que hemos empleado en el modelo de apilamiento). Para facilitar el acceso a esta formación se implementó una biblioteca en lenguaje Python, disponible<sup>29</sup> bajo licencia LGPL-3.0.

<sup>29</sup> <https://github.com/Dih5/mcreader>.





# Bibliografía

- [1] M. Abe y M. Takahashi. «Intraoperative radiotherapy: the Japanese experience». *International Journal of Radiation Oncology • Biology • Physics* **7**, 7 (1981), págs. 863-868. DOI: [10.1016/0360-3016\(81\)90001-8](https://doi.org/10.1016/0360-3016(81)90001-8).
- [2] M. G. Andreassi, A. Borghini, S. Pulignani, F. Baffigi, L. Fulgentini, P. Koester, M. Cresci, C. Vecoli, D. Lamia, G. Russo *et al.* «Radiobiological Effectiveness of Ultrashort Laser-Driven Electron Bunches: Micronucleus Frequency, Telomere Shortening and Cell Viability». *Radiation research* **186**, 3 (2016), págs. 245-253. DOI: [10.1667/RR14266.1](https://doi.org/10.1667/RR14266.1).
- [3] N. W. Ashcroft y N. D. Mermin. *Solid state physics*. Harcourt College Publishing, 1976. ISBN: 0-03-083993-9. DOI: [10.1119/1.11117](https://doi.org/10.1119/1.11117).
- [4] B. Askri. «Optimization of a photoneutron source based on 10 MeV electron beam using Geant4 Monte Carlo code». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms* **360** (2015), págs. 1-8. DOI: [10.1016/j.nimb.2015.07.132](https://doi.org/10.1016/j.nimb.2015.07.132).
- [5] D. Batani, R. R. Freeman y S. Baton. «The Transport of Relativistic, Laser-Produced Electrons in Matter – Part 1». *Progress in Ultrafast Intense Laser Science III*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010, págs. 265-294. ISBN: 978-3-540-73794-0. DOI: [10.1007/978-3-540-73794-0\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-540-73794-0_13).
- [6] J. Beatty, P. Biggs, K. Gall, P. Okunieff, F. Pardo, K. Harte, M. Dalterio y A. Sliski. «A new miniature x-ray device for interstitial radiosurgery: Dosimetry». *Medical physics* **23**, 1 (1996), págs. 53-62. DOI: [10.1118/1.597791](https://doi.org/10.1118/1.597791).
- [7] F. N. Beg, A. R. Bell, A. E. Dangor, C. N. Danson, A. P. Fews, M. E. Glinsky, B. A. Hammel, P. Lee, P. A. Norreys y M. Tatarakis. «A study of picosecond laser–solid interactions up to  $10^{19}$  Wcm<sup>-2</sup>». *Physics of Plasmas* **4**, 2 (1997), págs. 447-457. DOI: [10.1063/1.872103](https://doi.org/10.1063/1.872103).
- [8] J.-P. Berenger. «A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves». *Journal of computational physics* **114**, 2 (1994), págs. 185-200. DOI: [10.1006/jcph.1994.1159](https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1159).
- [9] M. Berger, J. Coursey, M. Zucker y J. Chang. *Stopping-Power and Range Tables*. 2009. URL: <http://www.nist.gov/pml/data/star/> (visitado 28-02-2018).
- [10] M. J. Berger y S. M. Seltzer. «Bremsstrahlung and Photoneutrons from Thick Tungsten and Tantalum Targets». *Phys. Rev. C* **2** (2 ago. de 1970), págs. 621-631. DOI: [10.1103/PhysRevC.2.621](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.2.621).
- [11] B. L. Berman y S. C. Fultz. «Measurements of the giant dipole resonance with monoenergetic photons». *Reviews of Modern Physics* **47**, 3 (1975), págs. 713-761. DOI: [10.1103/RevModPhys.47.713](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.47.713).
- [12] H. A. Bethe. «Moliere’s theory of multiple scattering». *Physical Review* **89**, 6 (1953), pág. 1256. DOI: [10.1103/PhysRev.89.1256](https://doi.org/10.1103/PhysRev.89.1256).
- [13] B. Bezzerides, R. Jones y D. Forslund. «Plasma Mechanism for Ultraviolet Harmonic Radiation Due to Intense CO<sub>2</sub> Light». *Physical Review Letters* **49**, 3 (1982), págs. 202-205. DOI: [10.1103/PhysRevLett.49.202](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.202).

- [14] M. Bhat, J. Pattison, G. Bibbo y M. Caon. «Diagnostic x-ray spectra: A comparison of spectra generated by different computational methods with a measured spectrum». *Medical physics* **25**, 1 (1998), págs. 114-120. DOI: [10.1118/1.598170](https://doi.org/10.1118/1.598170).
- [15] K. G. Binmore. *Mathematical Analysis: a straightforward approach*. Cambridge University Press, 1977. DOI: [10.1017/CB09781139171656](https://doi.org/10.1017/CB09781139171656).
- [16] R. Birch y M. Marshall. «Computation of bremsstrahlung x-ray spectra and comparison with spectra measured with a Ge (Li) detector». *Physics in Medicine and Biology* **24**, 3 (1979), págs. 505-517. DOI: [10.1088/0031-9155/24/3/002](https://doi.org/10.1088/0031-9155/24/3/002).
- [17] C. K. Birdsall y A. B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Institute of Physics Publishing, Bristol, United Kingdom, 1991. DOI: [10.1887/0750301171](https://doi.org/10.1887/0750301171).
- [18] T. Böhlen, F. Cerutti, M. Chin, A. Fassò, A. Ferrari, P. Ortega, A. Mairani, P. Sala, G. Smirnov y V. Vlachoudis. «The FLUKA Code: Developments and Challenges for High Energy and Medical Applications». *Nuclear Data Sheets* **120** (2014), págs. 211-214. DOI: [10.1016/j.nds.2014.07.049](https://doi.org/10.1016/j.nds.2014.07.049).
- [19] E. Boman, J. Tervo y M. Vauhkonen. «Modelling the transport of ionizing radiation using the finite element method». *Physics in Medicine and Biology* **50**, 2 (2005), pág. 265. DOI: [10.1088/0031-9155/50/2/006](https://doi.org/10.1088/0031-9155/50/2/006). URL: <http://stacks.iop.org/0031-9155/50/i=2/a=006>.
- [20] J. M. Boone y J. A. Seibert. «An accurate method for computer-generating tungsten anode x-ray spectra from 30 to 140 kV». *Medical physics* **24**, 11 (1997), págs. 1661-1670. DOI: [10.1118/1.597953](https://doi.org/10.1118/1.597953).
- [21] M. Born y E. Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 6.<sup>a</sup> ed. Pergamon Press, 1980. ISBN: 0-08-026481-6.
- [22] J. F. Brailsford. «Roentgen's Discovery of X rays». *The British Journal of Radiology* **19**, 227 (1946), págs. 453-461. DOI: [10.1259/0007-1285-19-227-453](https://doi.org/10.1259/0007-1285-19-227-453).
- [23] E. O. Brigham. *The fast Fourier transform*. Vol. 7. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974. DOI: [10.1109/TSMC.1978.4309919](https://doi.org/10.1109/TSMC.1978.4309919).
- [24] F. Brunel. «Not-so-resonant, resonant absorption». *Phys. Rev. Lett.* **59** (1 jul. de 1987), págs. 52-55. DOI: [10.1103/PhysRevLett.59.52](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.52).
- [25] P. J. Brussaard y H. C. Van de Hulst. «Approximation formulas for nonrelativistic bremsstrahlung and average Gaunt factors for a Maxwellian electron gas». *Reviews of Modern Physics* **34**, 3 (1962), pág. 507. DOI: [10.1103/RevModPhys.34.507](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.34.507).
- [26] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Dover, New York, 1960. ISBN: 0-486-60590-6.
- [27] C. D. Chen, P. K. Patel, D. S. Hey, A. J. Mackinnon, M. H. Key, K. U. Akli, T. Bartal, F. N. Beg, S. Chawla, H. Chen, R. R. Freeman, D. P. Higginson, A. Link, T. Y. Ma, A. G. MacPhee, R. B. Stephens, L. D. V. Woerkom, B. Westover y M. Porkolab. «Bremsstrahlung and  $K\alpha$  fluorescence measurements for inferring conversion efficiencies into fast ignition relevant hot electrons». *Physics of Plasmas* **16**, 8 (2009), pág. 082705. DOI: [10.1063/1.3183693](https://doi.org/10.1063/1.3183693).
- [28] S. Y. F. Chu, L. P. Ekström y R. B. Firestone. *The Lund/LBNL Nuclear Data Search*. 1999. URL: <http://nucleardata.nuclear.lu.se/toi/> (visitado 07-03-2018).
- [29] S. Cipiccia, M. R. Islam, B. Ersfeld, R. P. Shanks, E. Brunetti, G. Vieux, X. Yang, R. C. Issac, S. M. Wiggins, G. H. Welsh, M.-P. Anania, D. Maneuski, R. Montgomery, G. Smith, M. Hoek, D. J. Hamilton, N. R. C. Lemos, D. Symes, P. P. Rajeev, V. O. Shea, J. M. Dias y D. A. Jaroszynski. «Gamma-rays from harmonically resonant betatron oscillations in a plasma wake». *Nature Physics* **7**, 11 (2011), pág. 867. DOI: [10.1038/nphys2090](https://doi.org/10.1038/nphys2090).
- [30] L. Comtet. *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. D. Reidel Publishing Company, 1974. DOI: [10.1007/978-94-010-2196-8](https://doi.org/10.1007/978-94-010-2196-8).



- [31] C. E. Cook. «Pulse compression-key to more efficient radar transmission». *Proceedings of the IRE* **48**, 3 (1960), págs. 310-316. DOI: [10.1109/JRPROC.1960.287599](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1960.287599).
- [32] W. D. Coolidge. «Vacuum-tube». US1203495A. 9 de mayo de 1913. URL: <https://patents.google.com/patent/US1203495A/en>.
- [33] K. Cranley, B. J. Gilmore, G. W. A. Fogarty y L. Desponds. *Catalogue of diagnostic x-ray spectra and other data*. Inf. téc. 1997.
- [34] B. J. Debenham, K. S. Hu y L. B. Harrison. «Present status and future directions of intraoperative radiotherapy». *The Lancet Oncology* **14**, 11 (2013), e457-e464. DOI: [10.1016/S1470-2045\(13\)70270-5](https://doi.org/10.1016/S1470-2045(13)70270-5).
- [35] M. Dinsmore, K. Harte, A. Sliski, D. Smith, P. Nomikos, M. Dalterio, A. Boom, W. Leonard, P. Oettinger y J. Yanch. «A new miniature x-ray source for interstitial radiosurgery: Device description». *Medical physics* **23**, 1 (1996), págs. 45-52. DOI: [10.1118/1.597790](https://doi.org/10.1118/1.597790).
- [36] National Institute of Standards and Technology. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. versión 1.0.17. Complemento en línea a Ref. [116]. 22 de dic. de 2017. URL: <http://dlmf.nist.gov/>.
- [37] N. A. Dyson. *X-rays in Atomic and Nuclear Physics*. 2.<sup>a</sup> ed. Cambridge University Press, 2005.
- [38] J. Eberly y J. Javanainen. «Above-threshold ionisation». *European Journal of Physics* **9**, 4 (1988), pág. 265. DOI: [10.1088/0143-0807/9/4/004](https://doi.org/10.1088/0143-0807/9/4/004).
- [39] A. Einstein. «Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt». *Annalen der physik* **322**, 6 (1905), págs. 132-148. DOI: [10.1002/andp.19053220607](https://doi.org/10.1002/andp.19053220607).
- [40] S. Eliezer. *The interaction of high-power lasers with plasmas*. IOP Publishing, 2002.
- [41] R. Elliott, M. DeLand, J. Head y M. Elliott. «Accelerated partial breast irradiation: initial experience with the intrabeam system». *Surgical oncology* **20**, 2 (2011), págs. 73-79. DOI: [10.1016/j.suronc.2009.11.001](https://doi.org/10.1016/j.suronc.2009.11.001).
- [42] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger y F. G. Tricomi. *Tables of Integral Transforms*. McGraw-Hill Book Company, Incorporated, 1954.
- [43] T. Z. Esirkepov, J. K. Koga, A. Sunahara, T. Morita, M. Nishikino, K. Kageyama, H. Nagatomo, K. Nishihara, A. Sagisaka, H. Kotaki, T. Nakamura, Y. Fukuda, H. Okada, A. S. Pirozhkov, A. Yogo, M. Nishiuchi, H. Kiriya, K. Kondo, M. Kando y S. V. Bulanov. «Prepulse and amplified spontaneous emission effects on the interaction of a petawatt class laser with thin solid targets». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **745** (2014), págs. 150-163. DOI: [10.1016/j.nima.2014.01.056](https://doi.org/10.1016/j.nima.2014.01.056).
- [44] K. Estabrook y W. L. Kruer. «Properties of resonantly heated electron distributions». *Physical Review Letters* **40**, 1 (1978), pág. 42. DOI: [10.1103/PhysRevLett.40.42](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.42).
- [45] J. Faure, Y. Glinec, A. Pukhov, S. Kiselev, S. Gordienko, E. Lefebvre, J.-P. Rousseau, F. Burgy y V. Malka. «A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams». *Nature* **431**, 7008 (2004), pág. 541. DOI: [10.1038/nature02963](https://doi.org/10.1038/nature02963).
- [46] R. Fedosejevs, R. Ottmann, R. Sigel, G. Kühnle, S. Szatmari y F. P. Schäfer. «Absorption of femtosecond laser pulses in high-density plasma». *Phys. Rev. Lett.* **64** (11 mar. de 1990), págs. 1250-1253. DOI: [10.1103/PhysRevLett.64.1250](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1250).
- [47] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley & Sons, 2008. DOI: [10.1063/1.3034322](https://doi.org/10.1063/1.3034322).
- [48] F. Fernández, E. Conejero y L. Roso. *Protección radiológica en instalaciones de láseres infrarrojos intensos*. 2013.

- [49] A. Ferrari, P. R. Sala, A. Fassò y J. Ranft. *FLUKA : A multi-particle transport code*. CERN, Geneva, 2005. DOI: [10.5170/CERN-2005-010](https://doi.org/10.5170/CERN-2005-010). URL: <http://cds.cern.ch/record/898301>.
- [50] T. Feurer, W. Theobald, R. Sauerbrey, I. Uschmann, D. Altenbernd, U. Teubner, P. Gibbon, E. Förster, G. Malka y J. L. Miquel. «Onset of diffuse reflectivity and fast electron flux inhibition in 528-nm-laser–solid interactions at ultrahigh intensity». *Phys. Rev. E* **56** (4 oct. de 1997), págs. 4608-4614. DOI: [10.1103/PhysRevE.56.4608](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.56.4608).
- [51] T. R. Fewell, R. E. Shuping y K. R. Hawkins. *Handbook of computed tomography x-ray spectra*. US Department of Health, Human Services, Public Health Service, Food y Drug Administration, Bureau of Radiological Health, Rockville, MD, 1981.
- [52] D. Findlay. «Analytic representation of bremsstrahlung spectra from thick radiators as a function of photon energy and angle». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **276**, 3 (1989), págs. 598-601. ISSN: 0168-9002. DOI: [10.1016/0168-9002\(89\)90591-3](https://doi.org/10.1016/0168-9002(89)90591-3). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0168900289905913>.
- [53] N. I. Fisher, T. Lewis y B. J. J. Embleton. *Statistical analysis of spherical data*. Cambridge University Press, 1993. DOI: [10.2307/2533420](https://doi.org/10.2307/2533420).
- [54] C. Fonseca, C. Mendez, C. Ruiz, F. Fernandez y L. Roso. «Measurement of radiation produced by ultra short laser pulses interacting with solid targets». *AIP Conference Proceedings* **1231**, 1 (2010), págs. 223-224. DOI: [10.1063/1.3428935](https://doi.org/10.1063/1.3428935).
- [55] C. Fonseca. *Generación de electrones y rayos X a partir de pulsos láser de GW y alta tasa de repetición, y su protección radiológica*. Tesis doct. Universidad de Salamanca, oct. de 2011.
- [56] R. A. Fonseca, L. O. Silva, F. S. Tsung, V. K. Decyk, W. Lu, C. Ren, W. B. Mori, S. Deng, S. Lee, T. Katsouleas *et al.* «OSIRIS: A three-dimensional, fully relativistic particle in cell code for modeling plasma based accelerators». *International Conference on Computational Science*. Springer. 2002, págs. 342-351. DOI: [10.1007/3-540-47789-6\\_36](https://doi.org/10.1007/3-540-47789-6_36).
- [57] R. I. Frankel. «Centennial of Röntgen’s discovery of x-rays.» *Western journal of medicine* **164**, 6 (1996), pág. 497. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1303625/>.
- [58] N. A. Franken, H. M. Rodermond, J. Stap, J. Haveman y C. Van Bree. «Clonogenic assay of cells in vitro». *Nature protocols* **1**, 5 (2006), pág. 2315. DOI: [10.1038/nprot.2006.339](https://doi.org/10.1038/nprot.2006.339).
- [59] F. N. Fritsch y R. E. Carlson. «Monotone piecewise cubic interpolation». *SIAM Journal on Numerical Analysis* **17**, 2 (1980), págs. 238-246. DOI: [10.1137/0717021](https://doi.org/10.1137/0717021).
- [60] E. E. Furhang, J. K. Sillanpaa, K. S. Hu y L. B. Harrison. «HDR-IORT: physics and techniques». *Intraoperative Irradiation*. Springer, 2011, págs. 73-84. DOI: [10.1007/978-1-61779-015-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-61779-015-7_4).
- [61] M. Galimberti, A. Giulietti, D. Giulietti y L. A. Gizzi. «SHEEBA: A spatial high energy electron beam analyzer». *Review of scientific instruments* **76**, 5 (2005), pág. 053303. DOI: [10.1063/1.1899309](https://doi.org/10.1063/1.1899309).
- [62] J. Galy, M. Maučec, D. J. Hamilton, R. Edwards y J. Magill. «Bremsstrahlung production with high-intensity laser matter interactions and applications». *New Journal of Physics* **9**, 2 (2007), pág. 23. DOI: [10.1088/1367-2630/9/2/023](https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/2/023). URL: <http://stacks.iop.org/1367-2630/9/i=2/a=023>.
- [63] Q. Gao, H. Chen, J. Shi y H. Zha. «Design and Optimization of the Target in Electron Linear Accelerator». *Proceedings, 4th International Particle Accelerator Conference (IPAC 2013)*. 2013, THPWA016. URL: <http://JACoW.org/IPAC2013/papers/thpwa016.pdf>.
- [64] A. García García y M. J. Muñoz Bouzo. *Espacios de Hilbert y Análisis de Fourier: los primeros pasos*. 2.ª ed. Sanz y Torres, 2014. ISBN: 9788415550624.
- [65] P. Gibbon. *Short Pulse Laser Interactions with Matter*. Imperial College Press, 2005. ISBN: 978-1-86094-135-1. DOI: [10.1142/p116](https://doi.org/10.1142/p116).

- [66] P. Gibbon y A. R. Bell. «Collisionless absorption in sharp-edged plasmas». *Phys. Rev. Lett.* **68** (10 mar. de 1992), págs. 1535-1538. DOI: [10.1103/PhysRevLett.68.1535](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.1535).
- [67] M. Göppert-Mayer. «Über elementarakte mit zwei quantensprüngen». *Annalen der Physik* **401**, 3 (1931), págs. 273-294. DOI: [10.1002/andp.19314010303](https://doi.org/10.1002/andp.19314010303).
- [68] E. J. Grant, C. M. Posada, C. H. Castano y H. K. Lee. «A Monte Carlo simulation study of a flat-panel X-ray source». *Applied Radiation and Isotopes* **70**, 8 (2012), págs. 1658-1666. DOI: [10.1016/j.apradiso.2012.04.011](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2012.04.011).
- [69] J. Greene. «Bremsstrahlung from a Maxwellian Gas». *The Astrophysical Journal* **130** (1959), pág. 693. DOI: [10.1086/146759](https://doi.org/10.1086/146759).
- [70] C. M. Grinstead y J. L. Snell. *Introduction to probability*. American Mathematical Soc., 2012.
- [71] E. H. Grubbe. «Priority in the therapeutic use of X-rays». *Radiology* **21**, 2 (1933), págs. 156-162. DOI: [doi.org/10.1148/21.2.156](https://doi.org/10.1148/21.2.156).
- [72] S. Guerin, P. Mora, J. Adam, A. Héron y G. Laval. «Propagation of ultraintense laser pulses through overdense plasma layers». *Physics of Plasmas* **3**, 7 (1996), págs. 2693-2701. DOI: [10.1063/1.871526](https://doi.org/10.1063/1.871526).
- [73] X. Hai-Bo, P. Xian-Ke y C. Chao-Bin. «Monte Carlo simulation for bremsstrahlung and photon neutron yields in high-energy x-ray radiography». *Chinese Physics B* **19**, 6 (2010), pág. 062901. DOI: [10.1088/1674-1056/19/6/062901](https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/6/062901).
- [74] M. G. Haines, M. S. Wei, F. N. Beg y R. B. Stephens. «Hot-Electron Temperature and Laser-Light Absorption in Fast Ignition». *Phys. Rev. Lett.* **102** (4 ene. de 2009), pág. 045008. DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.045008](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.045008).
- [75] Y. Hayashi, A. Fukumi, K. Matsukado, M. Mori, H. Kotaki, M. Kando, L. M. Chen, I. Daito, S. Kondo, S. Kanazawa, A. Yamazaki, K. Ogura, M. Nishiuchi, M. Kado, A. Sagisaka, S. Nakamura, Z. Li, S. Orimo, T. Homma y H. Daido. «Estimation of photon dose generated by a short pulse high power laser». *Radiation protection dosimetry* **121**, 2 (2006), págs. 99-107. DOI: [10.1093/rpd/nci383](https://doi.org/10.1093/rpd/nci383).
- [76] M. Hénon. «Vlasov equation?» *Astronomy and Astrophysics* **114** (1982), págs. 211-212. URL: <http://adsabs.harvard.edu/full/1982A%26A...114..211H>.
- [77] A. M. Hernandez y J. M. Boone. «Tungsten anode spectral model using interpolating cubic splines: Unfiltered x-ray spectra from 20 kV to 640 kV». *Medical physics* **41**, 4 (2014), pág. 042101. DOI: [10.1118/1.4866216](https://doi.org/10.1118/1.4866216).
- [78] G. Hernández y F. Fernández. «A model of tungsten anode x-ray spectra». *Medical Physics* **43**, 8 (2016), págs. 4655-4664. DOI: [10.1118/1.4955120](https://doi.org/10.1118/1.4955120).
- [79] G. Hernández y F. Fernández. «Diagnostic of electron temperature from bremsstrahlung in overdense targets». *Applied Physics B* **124**, 7 (15 de jun. de 2018), pág. 135. ISSN: 1432-0649. DOI: [10.1007/s00340-018-6999-5](https://doi.org/10.1007/s00340-018-6999-5).
- [80] G. Hernández y F. Fernández. «Pile-up corrections in laser-driven pulsed X-ray sources». *Applied Physics B* **124**, 6 (29 de mayo de 2018), pág. 119. ISSN: 1432-0649. DOI: [10.1007/s00340-018-6982-1](https://doi.org/10.1007/s00340-018-6982-1).
- [81] G. Hernández y F. Fernández. *A model of x-ray tungsten sources*. Comunicación oral en la XXXV Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física. 2016. URL: <https://indico.ific.uv.es/event/2687/contributions/3436/> (visitado 05-03-2018).
- [82] G. Hernández y F. Fernández. *Characterization of electron fluence in tungsten x-ray converters*. Comunicación oral en la XXXV Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física. 2015.

- [83] G. Hernández y F. Fernández. *Simulation of bremsstrahlung spectra in general targets and its application to a model of a laser-driven irradiation source*. Comunicación oral en el 3rd Fluka Advanced Course and Workshop, LNF, Italia. 2014. URL: <https://indico.cern.ch/event/334606/contributions/779778/> (visitado 05-03-2018).
- [84] G. Hernández y F. Fernández. «xpecgen: A program to calculate x-ray spectra generated in tungsten anodes». *The Journal of Open Source Software* **2016** (2016). DOI: [10.21105/joss.00062](https://doi.org/10.21105/joss.00062).
- [85] F. B. Hildebrand. *Introduction to numerical analysis*. Courier Corporation, 1987.
- [86] R. Hill, B. Healy, L. Holloway, Z. Kuncic, D. Thwaites y C. Baldock. «Advances in kilovoltage x-ray beam dosimetry». *Physics in Medicine & Biology* **59**, 6 (2014), R183. DOI: [10.1088/0031-9155/59/6/R183](https://doi.org/10.1088/0031-9155/59/6/R183).
- [87] J. H. Hubbell y S. M. Seltzer. *Tables of X-ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients from 1 keV to 20 MeV for Elements Z = 1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest*. 1996. URL: <http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/cover.html> (visitado 13-03-2018).
- [88] ICRP. «Conversion Coefficients for use in Radiological Protection against External Radiation. ICRP Publication 74». *Annals of the ICRP* **26**, 3–4 (1996).
- [89] ICRP. «Recommendations of the International Commission on Radiological Protection. ICRP Publication 103». *Annals of the ICRP* **37**, 2–4 (2007).
- [90] International Commission on Radiation Units. *Tissue substitutes in radiation dosimetry and measurement*. Vol. 44. Intl Commission on Radiation, 1989. ISBN: 0-913394-38-6.
- [91] K. A. Ivanov, S. A. Shulyapov, P. A. Ksenofontov, I. N. Tsymbalov, R. V. Volkov, A. B. Savel'ev, A. V. Brantov, V. Y. Bychenkov, A. A. Turinge, A. M. Lapik, A. V. Rusakov, R. M. Djilkibaev y V. G. Nedorezov. «Comparative study of amplified spontaneous emission and short pre-pulse impacts onto fast electron generation at sub-relativistic femtosecond laser-plasma interaction». *Physics of Plasmas* **21**, 9 (2014), pág. 093110. DOI: [10.1063/1.4896348](https://doi.org/10.1063/1.4896348).
- [92] D. W. Kammler. *A first course in Fourier analysis*. Cambridge University Press, 2007. DOI: [10.1017/CB09780511619700](https://doi.org/10.1017/CB09780511619700).
- [93] J. Keyriläinen, A. Bravin, M. Fernández, M. Tenhunen, P. Virkkunen y P. Suortti. «Phase-contrast X-ray imaging of breast». en. *Acta Radiologica* **51**, 8 (2010), págs. 866-884. DOI: [10.3109/02841851.2010.504742](https://doi.org/10.3109/02841851.2010.504742). URL: <http://acr.sagepub.com/content/51/8/866>.
- [94] F. Killmann y E. von Collani. «A note on the convolution of the uniform and related distributions and their use in quality control». *Economic Quality Control* **16**, 1 (2001), págs. 17-41. DOI: [10.1515/EQC.2001.17](https://doi.org/10.1515/EQC.2001.17).
- [95] H. Koch y J. Motz. «Bremsstrahlung cross-section formulas and related data». *Reviews of modern physics* **31**, 4 (1959), págs. 920-956. DOI: [10.1103/RevModPhys.31.920](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.31.920).
- [96] H. A. Kramers. «On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum». *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **46**, 275 (1923), págs. 836-871. DOI: [10.1080/14786442308565244](https://doi.org/10.1080/14786442308565244).
- [97] U. Kraus-Tiefenbacher, A. Scheda, V. Steil, B. Hermann, T. Kehrer, L. Bauer, F. Melchert y F. Wenz. «Intraoperative radiotherapy (IORT) for breast cancer using the intrabeam™ system». *Tumori* **91**, 4 (2005), pág. 339.
- [98] J. R. Lamarsh y A. J. Baratta. *Introduction to Nuclear Engineering*. 3.<sup>a</sup> ed. Prentice Hall, 2001. DOI: [10.1063/1.3037597](https://doi.org/10.1063/1.3037597).

- [99] M. Lamoureux, P. Waller, P. Charles y N. Avdonina. «Bremsstrahlung from thick targets and a diagnostic for electron energy distributions». *Physical Review E* **62**, 3 (2000), pág. 4091. DOI: [10.1103/PhysRevE.62.4091](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.4091).
- [100] L. D. Landau. «On the Energy Loss of Fast Particles by Ionisation, Collected Papers of LD Landau». *J. Phys. (USSR)* **8** (1944), págs. 201-205.
- [101] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Curso abreviado de física teórica*. 3.<sup>a</sup> ed. Mir, Moscú, 1982.
- [102] L. Laschinsky, L. Karsch, E. Leßmann, M. Oppelt, J. Pawelke, C. Richter, M. Schürer y E. Beyreuther. «Radiobiological influence of megavoltage electron pulses of ultra-high pulse dose rate on normal tissue cells». *Radiation and environmental biophysics* **55**, 3 (2016), págs. 381-391. DOI: [10.1007/s00411-016-0652-7](https://doi.org/10.1007/s00411-016-0652-7).
- [103] A.-S. T. Leclère. *An evaluation of bremsstrahlung cross-sections for keV to GeV Electrons*. Tesis de maestría. University of Florida, 2001.
- [104] H. Lee, S. H. Park, Y. U. Jeong, K. Lee, H. Seo, H. Shim y H. W. Min. «A simulation for the optimization of bremsstrahlung radiation for nuclear applications using laser accelerated electron beam». *Free electron laser. Proceedings, 32nd International Conference, FEL 2010, Malmö, Sweden*. 2010, págs. 618-621.
- [105] A. Macchi. *A Superintense Laser-Plasma Interaction Theory Primer*. Springer Science & Business Media, 2013. DOI: [10.1007/978-94-007-6125-4](https://doi.org/10.1007/978-94-007-6125-4).
- [106] G. Mainfray y G. Manus. «Multiphoton ionization of atoms». *Reports on progress in physics* **54**, 10 (1991), pág. 1333. DOI: [10.1088/0034-4885/54/10/002](https://doi.org/10.1088/0034-4885/54/10/002).
- [107] F. Mandl. *Statistical physics*. 2.<sup>a</sup> ed. John Wiley & Sons, 1988.
- [108] J. Mao, L. Chen, L. Hudson, J. Seely, L. Zhang, Y. Sun, X. Lin y J. Zhang. «Application of a transmission crystal x-ray spectrometer to moderate-intensity laser driven sources». *Review of Scientific Instruments* **83**, 4 (2012), pág. 043104. DOI: [10.1063/1.3700212](https://doi.org/10.1063/1.3700212).
- [109] J. E. Martin. *Physics for radiation protection: a handbook*. John Wiley & Sons, 2006. DOI: [10.1002/9783527618798](https://doi.org/10.1002/9783527618798).
- [110] L. Martín. Comunicación personal. 28 de jul. de 2017.
- [111] L. Martín, J. Benlliure, D. Cortina, J. J. Llerena, D. González y C. Ruiz. «Optimization of a fast rotating target to produce kHz X-ray pulses from laser-plasma interaction». *Journal of Physics: Conference Series* (2018), to appear. URL: <https://arxiv.org/abs/1805.01424>.
- [112] A. W. Maurice Tubiana Jean Dutreix. *Introduction to Radiobiology*. Taylor & Francis, 1990. ISBN: 0203983661.
- [113] G. H. McCall. «Calculation of X-ray bremsstrahlung and characteristic line emission produced by a Maxwellian electron distribution». *Journal of Physics D: Applied Physics* **15**, 5 (1982), pág. 823. DOI: [10.1088/0022-3727/15/5/012](https://doi.org/10.1088/0022-3727/15/5/012).
- [114] A. G. Mordovanakis, P.-E. Masson-Laborde, J. Easter, K. Popov, B. Hou, G. Mourou, W. Rozmus, M. G. Haines, J. Nees y K. Krushelnick. «Temperature scaling of hot electrons produced by a tightly focused relativistic-intensity laser at 0.5 kHz repetition rate». *Applied Physics Letters* **96**, 7 (2010), pág. 071109. DOI: [10.1063/1.3306730](https://doi.org/10.1063/1.3306730).
- [115] M. Nayak, T. Sahu, H. G. Nair, R. Nandedkar, T. Bandyopadhyay, R. Tripathi y P. Hannurkar. «Optimum target source term estimation for high energy electron accelerators». *Radiation Physics and Chemistry* **122** (2016), págs. 77-81. ISSN: 0969-806X. DOI: [10.1016/j.radphyschem.2016.01.026](https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2016.01.026). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0969806X16300226>.
- [116] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert y C. W. Clark, eds. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Complemento impreso a Ref. [36]. Cambridge University Press, New York, NY, 2010.



- [117] M. Oppelt, M. Baumann, R. Bergmann, E. Beyreuther, K. Brüchner, J. Hartmann, L. Karsch, M. Krause, L. Laschinsky, E. Leßmann, M. Nicolai, M. Reuter, C. Richter, A. Sävert, M. Schnell, M. Schürer, J. Woithe, M. Kaluza y J. Pawelke. «Comparison study of in vivo dose response to laser-driven versus conventional electron beam». *Radiation and Environmental Biophysics* **54**, 2 (1 de mayo de 2015), págs. 155-166. ISSN: 1432-2099. DOI: [10.1007/s00411-014-0582-1](https://doi.org/10.1007/s00411-014-0582-1).
- [118] C. Orban, J. T. Morrison, E. A. Chowdhury, J. A. Nees, K. Frische, S. Feister y W. M. Roquemore. «Backward-propagating MeV electrons in ultra-intense laser interactions: Standing wave acceleration and coupling to the reflected laser pulse». *Physics of Plasmas* **22**, 2 (2015), pág. 023110. DOI: [10.1063/1.4913225](https://doi.org/10.1063/1.4913225).
- [119] C. G. Orton. «Uses of therapeutic x rays in medicine». *Health physics* **69**, 5 (1995), págs. 662-676. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/7558860>.
- [120] L. Papiez y J. J. Battista. «Radiance and particle fluence». *Physics in Medicine & Biology* **39**, 6 (1994), pág. 1053. DOI: [10.1088/0031-9155/39/6/011](https://doi.org/10.1088/0031-9155/39/6/011).
- [121] H.-S. Park, N. Izumi, M. H. Key, J. A. Koch, O. L. Landen, P. K. Patel, T. W. Phillips y B. B. Zhang. «Characteristics of high energy  $K\alpha$  and Bremsstrahlung sources generated by short pulse petawatt lasers». *Review of Scientific Instruments* **75**, 10 (2004), págs. 4048-4050. DOI: [10.1063/1.1789596](https://doi.org/10.1063/1.1789596).
- [122] R. Pathria. *Statistical Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, UK, 1977.
- [123] C. Patrignani *et al.* (Particle Data Group). «Review of particle physics». *Chinese physics C* **40**, 10 (2016), pág. 100001. DOI: [10.1088/1674-1137/40/10/100001](https://doi.org/10.1088/1674-1137/40/10/100001).
- [124] D. B. Pelowitz. *MCNPX User's Manual. Version 2.6.0*. Los Alamos Controlled Publication LA-CP-07-1473. Los Alamos National Laboratory, 2008.
- [125] A. Pilar, M. Gupta, S. G. Laskar y S. Laskar. «Intraoperative radiotherapy: review of techniques and results». *ecancermedicalscience* **11** (2017). DOI: [10.3332/ecancer.2017.750](https://doi.org/10.3332/ecancer.2017.750).
- [126] E. B. Podgoršak. *Radiation physics for medical physicists*. Springer, 2010. ISBN: 978-3-642-00875-7.
- [127] G. Poludniowski. Comunicación personal. 1 de abr. de 2016.
- [128] G. Poludniowski, G. Landry, F. DeBlois, P. Evans y F. Verhaegen. «SpekCalc: a program to calculate photon spectra from tungsten anode x-ray tubes». *Physics in medicine and biology* **54**, 19 (2009), N433-N438. DOI: [10.1088/0031-9155/54/19/N01](https://doi.org/10.1088/0031-9155/54/19/N01).
- [129] G. G. Poludniowski. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part II. X-ray production and filtration in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2175-2186. DOI: [10.1118/1.2734726](https://doi.org/10.1118/1.2734726).
- [130] G. G. Poludniowski y P. M. Evans. «Calculation of x-ray spectra emerging from an x-ray tube. Part I. Electron penetration characteristics in x-ray targets». *Medical physics* **34**, 6 (2007), págs. 2164-2174. DOI: [10.1118/1.2734725](https://doi.org/10.1118/1.2734725).
- [131] N. F. Ramsey. «Thermodynamics and statistical mechanics at negative absolute temperatures». *Physical Review* **103**, 1 (1956), pág. 20. DOI: [10.1103/PhysRev.103.20](https://doi.org/10.1103/PhysRev.103.20).
- [132] S. Roman. «The Formula of Faà di Bruno». *The American Mathematical Monthly* **87**, 10 (1980), págs. 805-809. ISSN: 00029890, 19300972. DOI: [10.2307/2320788](https://doi.org/10.2307/2320788). URL: <http://www.jstor.org/stable/2320788>.
- [133] W. C. Röntgen. «On a New Kind of Rays». *Nature* **53** (1896), págs. 274-276. DOI: [10.1038/053274b0](https://doi.org/10.1038/053274b0).
- [134] F. Salvat y J. M. Fernández-Varea. «Overview of physical interaction models for photon and electron transport used in Monte Carlo codes». *Metrologia* **46**, 2 (2009), S112-S138. DOI: [10.1088/0026-1394/46/2/S08](https://doi.org/10.1088/0026-1394/46/2/S08).

- [135] F. Salvat, J. M. Fernández-Varea y J. Sempau. «PENELOPE-2006: A code system for Monte Carlo simulation of electron and photon transport». *Workshop Proceedings*. OECD Publishing, 2006, págs. 1-281.
- [136] D. Salzmann. *Atomic physics in hot plasmas*. International series of monographs on physics 97. Oxford University Press, 1998. ISBN: 0-19-510930-9.
- [137] K. Sato, M. Nishikino, Y. Okano, S. Ohshima, N. Hasegawa, M. Ishino, T. Kawachi, H. Numasaki, T. Teshima y H. Nishimura. « $\gamma$ -H2AX and phosphorylated ATM focus formation in cancer cells after laser plasma X irradiation». *Radiation research* **174**, 4 (2010), págs. 436-445. DOI: [10.1667/RR2178.1](https://doi.org/10.1667/RR2178.1).
- [138] G. Schmidt. *Physics of high temperature plasmas*. 2.<sup>a</sup> ed. Academic Press, 1979. ISBN: 0-12-626660-3.
- [139] J. B. Schneider. «Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method». URL: [www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd](http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd).
- [140] J. Seely, C. Szabo, U. Feldman, H. Chen, L. Hudson y A. Henins. «Gamma ray spectra from targets irradiated by picosecond lasers». *High Energy Density Physics* **7**, 3 (2011), págs. 150-154. DOI: [10.1016/j.hedp.2011.04.002](https://doi.org/10.1016/j.hedp.2011.04.002).
- [141] S. M. Seltzer. «Calculation of photon mass energy-transfer and mass energy-absorption coefficients». *Radiation research* **136**, 2 (1993), págs. 147-170. DOI: [10.2307/3578607](https://doi.org/10.2307/3578607).
- [142] S. M. Seltzer y M. J. Berger. «Bremsstrahlung energy spectra from electrons with kinetic energy 1 keV–10 GeV incident on screened nuclei and orbital electrons of neutral atoms with Z= 1–100». *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **35**, 3 (1986), págs. 345-418. DOI: [10.1016/0092-640X\(86\)90014-8](https://doi.org/10.1016/0092-640X(86)90014-8).
- [143] S. M. Seltzer y M. J. Berger. «Bremsstrahlung spectra from electron interactions with screened atomic nuclei and orbital electrons». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms* **12**, 1 (1985), págs. 95-134. DOI: [10.1016/0168-583X\(85\)90707-4](https://doi.org/10.1016/0168-583X(85)90707-4).
- [144] K. Shinohara, H. Nakano, N. Miyazaki, M. Tago y R. Kodama. «Effects of Single-pulse ( $\leq 1$  ps) X-rays from Laser-produced Plasmas on Mammalian Cells». *Journal of Radiation Research* **45**, 4 (2004), págs. 509-514. DOI: [10.1269/jrr.45.509](https://doi.org/10.1269/jrr.45.509).
- [145] A. Sjögren, M. Harbst, C.-G. Wahlström, S. Svanberg y C. Olsson. «High-repetition-rate, hard x-ray radiation from a laser-produced plasma: Photon yield and application considerations». *Review of scientific instruments* **74**, 4 (2003), págs. 2300-2311. DOI: [10.1063/1.1544054](https://doi.org/10.1063/1.1544054).
- [146] O. Sotolongo-Grau, D. Rodriguez-Perez, J. C. Antoranz y O. Sotolongo-Costa. «Tissue radiation response with maximum Tsallis entropy». *Physical review letters* **105**, 15 (2010), pág. 158105. DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.158105](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.158105).
- [147] D. Strickland y G. Mourou. «Compression of amplified chirped optical pulses». *Optics communications* **56**, 3 (1985), págs. 219-221. DOI: [10.1016/0030-4018\(85\)90120-8](https://doi.org/10.1016/0030-4018(85)90120-8).
- [148] T. Tajima y J. Dawson. «Laser electron accelerator». *Physical Review Letters* **43**, 4 (1979), pág. 267. DOI: [10.1103/PhysRevLett.43.267](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.267).
- [149] M. Tatari y A. Ranjbar. «Design of a photoneutron source based on 10 MeV electrons of radiotherapy linac». *Annals of Nuclear Energy* **63** (2014), págs. 69-74. DOI: [10.1016/j.anucene.2013.07.025](https://doi.org/10.1016/j.anucene.2013.07.025).
- [150] K. Thompson y T. Dray. «Taxicab angles and trigonometry». *Pi Mu Epsilon Journal* **11**, 2 (2000), págs. 87-96. URL: <http://www.jstor.org/stable/24340535>.
- [151] C. Tillman, G. Grafström, A.-C. Jonsson, B.-A. Jönsson, I. Mercer, S. Mattsson, S.-E. Strand y S. Svanberg. «Survival of mammalian cells exposed to ultrahigh dose rates from a laser-produced plasma X-ray source». *Radiology* **213**, 3 (1999), págs. 860-865. DOI: [10.1148/radiology.213.3.r99dc13860](https://doi.org/10.1148/radiology.213.3.r99dc13860).
- [152] N. Tsoulfanidis. *Measurement and detection of radiation*. CRC press, 2013.

- [153] H. Ueda, Y. Omura, H. Matsumoto y T. Okuzawa. «A study of the numerical heating in electrostatic particle simulations». *Computer Physics Communications* **79**, 2 (1994), págs. 249-259. DOI: [10.1016/0010-4655\(94\)90071-X](https://doi.org/10.1016/0010-4655(94)90071-X).
- [154] M. H. Unsworth y J. R. Greening. «Theoretical continuous and L-characteristic X-ray spectra for tungsten target tubes operated at 10 to 50kV». *Physics in Medicine and Biology* **15**, 4 (1970), págs. 621-630. DOI: [10.1088/0031-9155/15/4/001](https://doi.org/10.1088/0031-9155/15/4/001).
- [155] J. S. Vaidya, F. Wenz, M. Bulsara, J. S. Tobias, D. J. Joseph, M. Keshtgar, H. L. Flyger, S. Massarut, M. Alvarado, C. Saunders *et al.* «Risk-adapted targeted intraoperative radiotherapy versus whole-breast radiotherapy for breast cancer: 5-year results for local control and overall survival from the TARGIT-A randomised trial». *The Lancet* **383**, 9917 (2014), págs. 603-613. DOI: [10.1016/S0140-6736\(13\)61950-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(13)61950-9).
- [156] F. Valle Brozas, D. Papp, L. M. Escudero, L. Roso y A. Peralta Conde. «X-ray emission from a liquid curtain jet when irradiated by femtosecond laser pulses». *Applied Physics B* **123**, 6 (13 de jun. de 2017), pág. 190. ISSN: 1432-0649. DOI: [10.1007/s00340-017-6763-2](https://doi.org/10.1007/s00340-017-6763-2).
- [157] R. Vélez Ibarrola. *Cálculo de probabilidades 2*. 1.<sup>a</sup> ed. Ediciones Académicas, S.A., 2004. ISBN: 84-96062-41-4.
- [158] F. Verhaegen, A. Nahum, S. Van De Putte e Y. Namito. «Monte Carlo modelling of radiotherapy kV x-ray units». *Physics in medicine and biology* **44**, 7 (1999), págs. 1767-1789. DOI: [10.1088/0031-9155/44/7/315](https://doi.org/10.1088/0031-9155/44/7/315).
- [159] U. Veronesi, R. Orecchia, A. Luini, G. Gatti, M. Intra, S. Zurrida, G. Ivaldi, G. Tosi, M. Ciocca, A. Tosoni *et al.* «A preliminary report of intraoperative radiotherapy (IORT) in limited-stage breast cancers that are conservatively treated». *European journal of cancer* **37**, 17 (2001), págs. 2178-2183. DOI: [10.1016/S0959-8049\(01\)00285-4](https://doi.org/10.1016/S0959-8049(01)00285-4).
- [160] A. A. Vlasov. «The vibrational properties of an electron gas». *Physics-Uspokhi* **10**, 6 (1968), págs. 721-733. DOI: [10.1070/PU1968v010n06ABEH003709](https://doi.org/10.1070/PU1968v010n06ABEH003709). URL: <http://stacks.iop.org/0038-5670/10/i=6/a=R01>.
- [161] C. Walck. *Handbook on statistical distributions for experimentalists*. Internal Report SUF-PFY/96-01. University of Stockholm, 2007.
- [162] L. V. Wang y H.-i. Wu. *Biomedical optics: principles and imaging*. John Wiley & Sons, 2007. ISBN: 978-0-471-74304-0.
- [163] E. W. Weisstein. *Fourier Transform*. From *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. URL: <http://mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html> (visitado 20-02-2018).
- [164] D. White, H. Woodard y S. Hammond. «Average soft-tissue and bone models for use in radiation dosimetry». *The British journal of radiology* **60**, 717 (1987), págs. 907-913. DOI: [10.1259/0007-1285-60-717-907](https://doi.org/10.1259/0007-1285-60-717-907).
- [165] S. Wilks y W. Kruer. «Absorption of ultrashort laser pulses by solid targets and overdense plasmas». *IEEE J. Quantum Electron* **33** (1997), págs. 1954-1968. DOI: [10.1109/3.641310](https://doi.org/10.1109/3.641310).
- [166] Wolfram Inc. *NIntegrate Integration Strategies*. *Wolfram Language Documentation*. URL: <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NIntegrateIntegrationStrategies.html> (visitado 05-03-2018).
- [167] Wolfram Research, Inc. *Mathematica 10.3*. Ver. 10.3. Champaign, Illinois, 2015. URL: <https://www.wolfram.com>.
- [168] K. Yee. «Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media». *IEEE Transactions on antennas and propagation* **14**, 3 (1966), págs. 302-307. DOI: [10.1109/TAP.1966.1138693](https://doi.org/10.1109/TAP.1966.1138693).



- [169] C. Zulick, B. Hou, F. Dollar, A. Maksimchuk, J. Nees, A. G. R. Thomas, Z. Zhao y K. Krushelnick. «High resolution bremsstrahlung and fast electron characterization in ultrafast intense laser–solid interactions». *New Journal of Physics* **15**, 12 (2013), pág. 123038. DOI: [10.1088/1367-2630/15/12/123038](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/12/123038). URL: <http://stacks.iop.org/1367-2630/15/i=12/a=123038>.



# Notación matemática

$a := b$	Igual por asignación. Se le impone a $a$ el valor $b$ .
$a \stackrel{\text{def}}{=} b$	Igual por definición. Se impone la igualdad descrita, implicando una definición entre ambos lados.
$X \stackrel{\text{d}}{=} Y$	Igualmente distribuidas. Las variables aleatorias $X$ e $Y$ tienen la misma distribución de probabilidad.
$a \propto b$	Proporcionalidad a. Existe una constante $k$ tal que $a = kb$ .
$a \gtrsim b$	Mayor y similar. Se cumplen $a > b$ y $a \sim b$ .
$a \gtrapprox b$	Mayor que aproximadamente. Se cumple $a > b$ o bien $a \approx b$ .
$\{f(x)\}_{x \in X}$	Familia de objetos $f(x)$ indexada por el parámetro $x$ . El dominio del índice ( $X$ ) será frecuentemente implícito.
$[a, b]_{\mathbb{Z}}$	Números enteros entre $a$ y $b$ inclusive.
$[a, b]_n$	Malla uniforme con $n + 1$ puntos entre $a$ y $b$ , ambos inclusive ( <i>cf.</i> pág. 134).
$\mathcal{U}_{[a, b]}$	Distribución uniforme en $[a, b]$ .
$\Gamma_{a, b}$	Distribución Gamma con parámetro de forma $a$ y parámetro de escala $b$ .
$\mathcal{N}_{\mu, \sigma}$	Distribución gaussiana (normal) con media $\mu$ y desviación estándar $\sigma$ .
$\Gamma(\cdot)$	Función Gamma de Euler.
$\Gamma(\cdot, \cdot)$	Función Gamma incompleta de Euler.
$P\{A\}$	Probabilidad de que ocurra el suceso $A$ .
$P\{A   B\}$	Probabilidad de que ocurra el suceso $A$ sabiendo que ha ocurrido el suceso $B$ .
$E[X]$	Valor esperado de la variable aleatoria $X$ .
$\mathbb{S}^n$	$n$ -esfera unitaria, <i>i. e.</i> , conjunto de vectores unitarios de $\mathbb{R}^{n+1}$ .
$\ f\ _p$	$p$ -norma de una función, <i>i. e.</i> , $\left(\int  f(x) ^p dx\right)^{1/p}$ .
$\mathcal{L}^p$	Espacio L- $p$ , conjunto de funciones con $p$ -norma finita en que se identifican elementos que coincidan punto a punto salvo en un conjunto de medida nula.
$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$	$f$ es «o grande» de $g$ (cuando el argumento tiende a infinito), <i>i. e.</i> , existen $M, x_0 \in [0, \infty)$ tal que $ f(x)  \leq M g(x) $ para todo $x \geq x_0$ . Intuitivamente, $f$ crece mucho más despacio que $h$ para valores suficientemente grandes. Una igualdad con esta notación no es simétrica, sino que denota una inclusión en una clase de funciones.
$f(x) = o(g(x))$	$f$ es «o pequeña» de $g$ (cuando el argumento tiende a cero), <i>i. e.</i> , ocurre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = 0$ . Intuitivamente, $f$ tiende a anularse mucho más rápido que $h$ (para valores en torno a 0). Una igualdad con esta notación no es simétrica, sino que denota una inclusión en una clase de funciones.
$f \xrightarrow{\text{n.r.}} g$	$g$ es el límite no relativista de $f$ ( $c \rightarrow \infty$ ).



# Abreviaturas empleadas

<i>e. g.</i>	Por ejemplo ( <i>exempli grātia</i> ).
<i>cf.</i>	Ver ( <i>cōnfer</i> ).
<i>i. e.</i>	Esto es ( <i>id est</i> ).
pág.	Página.
págs.	Páginas.
<i>et seq.</i>	Y siguientes ( <i>et sequēns</i> ) [hasta el interés del lector].
<i>et al.</i>	Y otros ( <i>et aliū</i> ).
CPA	<i>Chirped Pulse Amplification</i> .
RIO	Radioterapia IntraOperatoria.
ROI	Región de interés ( <i>Region Of Interest</i> ).
PDF	Función de densidad de probabilidad ( <i>Probability Density Function</i> ).
CDF	Función de distribución acumulada ( <i>Cumulative Distribution Function</i> ).
CSDA	Aproximación de frenado continuado ( <i>Continuous-Slowing-Down Approximation</i> ).
FFT	Transformada rápida de Fourier ( <i>Fast Fourier Transform</i> ).
TW	Thomson-Whiddington.
HVL	Espesor de semiatenuación ( <i>Half-Value-Layer</i> ).
nVL	Espesor de <i>n</i> -atenuación ( <i>nth-Value-Layer</i> ).
Ti:Sa	Láser de Titanio-Zafiro ( <i>Titanium-Sapphire</i> ).
PiC	Método <i>Particle in Cell</i> .



# Índice alfabético

- acumulación
  - factor de  $\sim$ 
    - de dosis, 82
    - diferencial, 83
    - general, 83
  - operador de  $\sim$ , 85
- apilar (una distribución), 103
- aproximación de frenado continuado,
  - 52, 95
  - alcance en la  $\sim$ , 52, 96
  - alcance medio en la  $\sim$ , 132
- Bell (polinomios parciales de), 105
- blanco
  - óptimo, 67, 133
  - fino, 65
  - grueso, 66
- Boltzmann
  - ecuación de  $\sim$  sin colisiones, 14
  - ecuación de transporte de  $\sim$ , 84
- borde K, 63, 121
- característica (radiación), 63
- catástrofe infrarroja, 47
- Chirped Pulse Amplification*, 3
- Cloud in Cell*, 24
- coeficiente
  - de absorción, 79
  - de atenuación, 59, 84
  - de transferencia, 79
- condición de asintoticidad
  - para el *bremsstrahlung*, 117
  - para una maxwelliana, 116
  - para una mezcla de distribuciones, 121
- contraste, 11
- convolución
  - potencia de  $\sim$ , 102
  - producto de  $\sim$ , 101
- Courant (condición de), 24
- Debye (longitud de), 13
- densidad crítica, 12
- desapilar (una distribución), 103
- desviación media, 48
- promedio, 48
- difusión
  - condición de  $\sim$ , 50
  - régimen de  $\sim$ , 51
- distribución, 143
  - condicionada, 145
  - marginal, 144
- dosis, 4, 79, 95
  - equivalente, 79
  - superficial, 133
- Drude (modelo de), 11
- Duane-Hunt (ley de), 66
- energía de oscilación, 26
- escala (leyes de), 20
- espesor
  - de  $n$ -atenuación, 70
  - de semiatenuación, 69
- espesor óptico, 85
- esplín, 108
  - cúbico, 42
- Faà di Bruno (fórmula de), 105
- faldón (de un plasma), 26
- fluencia, 43, 47
  - diferencial, 45
  - planar, 45, 69
  - planar, 43
- flujo angular, 84
- FLUKA (código Montecarlo), 51, 96, 118
- Fourier
  - transformada de  $\sim$ , 146
  - transformada discreta de  $\sim$ , 147
  - transformada fraccionaria de  $\sim$ , 147
  - transformada rápida de Fourier, 147
- fracción caliente, 32
- fracción de cruce, 47
- frecuencia de plasma, 11
- Fristch y Carlson (algoritmo de), 50
  - modificado, 51
- fuerza microscópica por planos (modelo de), 45
- función
  - de densidad de probabilidad (PDF), 143
  - de distribución acumulada (CDF), 143
- Gamma
  - de Euler (función), 33
  - distribución  $\sim$ , 33, 115
  - incompleta (función), 65
    - expansión asintótica, 117
  - geometría, 132
    - en reflexión, 44
    - en transmisión, 62
  - gray, 79
- intensidad específica, 84
- kerma, 71
- lámina de media onda, 112
- Landau (distribución de), 50, 53
- longitud de escala, 12
- Lorentz (factor de), 31
- macropartícula, 24
- magnitud dosimétrica, 83
- maxwelliana
  - familias de distribuciones  $\sim$ s, 33
- meseta (de un plasma), 26
- momento (de una distribución), 104
- Particle in Cell* (método), 24
- poder de frenado, 95
- polarización
  - p, 15
  - s, 15
- ponderomotriz (fuerza), 10
- postpulso, 11
- preplasma, 26
- prepulso, 11
- profundidad superficial, 13
- propagador (operador), 45, 70
- radiancia espectral, 84
- radioterapia intraoperatoria, 3

- recidiva, 3
- región de interés, 46
- repetición (picos de), 102
- resolución
  - de un detector, 110
  - pérdida relativa de  $\sim$ , 110
- Resonancia dipolar gigante, 61
- retrodispersión, 47
  
- sección eficaz
  - macroscópica, 59, 84
  - total, 59
  
- sección eficaz de *bremsstrahlung*
  - de Findlay (aproximación), 58, 117
  - de Seltzer y Berger (tabulación), 57
- sievert, 79
- sobredenso (medio/plasma), 12
- straggling*, 52
- subdenso (medio/plasma), 12
- supervivencia (curva de), 4
  - lineal-cuadrático, 5
  - modelo exponencial, 4
  
- temperatura, 8
  
- efectiva, 115
- en unidades de energía, 13
- Thomson-Whiddington
  - alcance de  $\sim$ , 77
  - ley de  $\sim$ , 74
  
- variable aleatoria
  - absolutamente continua, 143
  - discreta, 143
- Vlasov
  - ecuaciones de  $\sim$ , 14