

REPRESENTACIÓN DE CANTIDADES INDETERMINADAS POR ESTUDIANTES DE TERCERO DE PRIMARIA: EL CASO DE LA VARIABLE DEPENDIENTE

Representation of indeterminate quantities by third grade students: The case of the dependent variable

Ayala-Altamirano, C.^a y Molina, M.^b

^aUniversidad de Granada, ^bUniversidad de Salamanca

Resumen

En el marco de la propuesta early algebra, en este trabajo analizamos las respuestas de un grupo de estudiantes de tercero de primaria a una tarea que involucra una relación funcional lineal. Describimos cómo representan la variable dependiente de una función, cuando la variable independiente, como cantidad indeterminada, está representada por una letra. Extendemos los hallazgos descritos en estudios previos al mostrar que los estudiantes lograron asociar las letras con la idea de variabilidad. Al expresar esto con símbolos, recurren a ideas o sistemas de representación familiares para ellos dejando implícita la idea de variabilidad que verbalizan en las explicaciones de sus respuestas.

Palabras clave: educación primaria, early algebra, pensamiento funcional, simbolismo algebraico, variables.

Abstract

In the context of the proposal early algebra, in this paper we analyze the responses of a group of third grade students in a task involving a linear functional relationship. We describe how they represent the dependent variable of a function, when the independent variable, as an indeterminate quantity, is represented by a letter. We extend the findings described in previous studies by showing that the students managed to associate letters with the idea of variability. By expressing this with symbols, they turn to ideas or systems of representation, which are familiar to them. They leave implicit the idea of variability that they verbalize in the explanations of their responses.

Keywords: elementary education, early algebra, functional thinking, algebraic symbolism, variables.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación cuyo objetivo es indagar en las capacidades algebraicas que manifiestan estudiantes de educación primaria en contextos funcionales. Se fundamenta en la propuesta curricular *early algebra* que busca promover, en los estudiantes de Educación Primaria, modos de pensamiento algebraico, mayor grado de generalización en su pensamiento y aumentar su capacidad para expresar esa generalidad (Brizuela y Blanton, 2014). Esta propuesta curricular ha impactado en las directrices curriculares de numerosos países, tales como España, EEUU, Chile, Australia, lo que incrementa la relevancia de investigaciones que indaguen en su puesta en práctica en las aulas.

En esta comunicación analizamos cómo los estudiantes de primaria representan cantidades indeterminadas en tareas contextualizadas que involucran una relación funcional. Este trabajo proporciona información útil para los docentes relativa a las primeras reacciones de los estudiantes

al interactuar con la letra como símbolo algebraico y su empleo para representar la variable dependiente de una función. Coincidimos con otros autores (ej. Radford, 2011) en reconocer que el simbolismo alfanumérico no es la única forma de manifestar pensamiento algebraico. No obstante, describir las tensiones que se producen al trabajar con un nuevo sistema de símbolos, puede ayudar en la preparación de la enseñanza. Los docentes deben ser conscientes de las creencias acerca de los significados de las letras y la notación matemática que traen consigo los estudiantes, y basar su planificación sobre estas (MacGregor y Stacey, 1997).

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Dentro del pensamiento algebraico se considera el pensamiento funcional cuyo foco es estudiar las funciones y las familias de funciones en situaciones de la vida real (Cañadas y Molina, 2016). Los elementos que lo conforma son, entre otros, la generalización de las relaciones entre cantidades que varían en forma conjunta, la expresión de esta generalización y el uso de dichas expresiones para analizar el comportamiento de la función (Blanton, 2008).

Radford (2018) plantea que el pensamiento algebraico trata de razonar con cantidades indeterminadas (incógnitas, variables, parámetros, números generalizados, etc.) de manera analítica y es posible hacer esto sin contar con los símbolos alfanuméricos para expresarlo. Para fundamentar el diseño de las sesiones implementadas en este trabajo, adoptamos la perspectiva de que en el aprendizaje del álgebra los signos se elaboran en actividades matemáticas específicas, cuyos usos y elaboración de significados son procesos individuales y sociales que emergen en relación a otros sistemas de signos que surgen en el aula (Radford, 1999). Además, tal como lo describen Kaput, Blanton y Moreno (2008), es un proceso dinámico en el que la generalización y la simbolización están estrechamente relacionadas. En este proceso, el símbolo y el referente pueden ser experimentados de forma separada. En nuestro caso, los estudiantes podrían comprender la idea de variabilidad o referirse a cantidades indeterminadas, sin embargo no contar con los símbolos convencionales para representarla. Para comunicar sus ideas, podrían crear sistemas de símbolos alternativos a partir de los que ya conocen y utilizan.

Una representación matemática es una herramienta que visibiliza los conceptos y procedimientos matemáticos. A través de ellas los estudiantes registran y comunican su conocimiento (Rico, 2009). Los sistemas para representar cantidades indeterminadas y las relaciones funcionales son variados, entre ellos encontramos el lenguaje natural, tablas, gráficos o símbolos algebraicos. Los símbolos algebraicos contemplan el uso de letras, consideradas herramientas lingüísticas para representar ideas matemáticas de forma sucinta. En el álgebra las letras pueden tener asociados distintos significados, tales como número generalizado, representación de cantidades variables, incógnitas o parámetros, según el contexto en el que se utilice. En consecuencia, es importante dar la oportunidad a los estudiantes de participar en experiencias ricas, que los ayuden a generar significados amplios y ricos (Ursini, 1994). Los significados que sean asignados a las letras afectaran a cómo son resueltos los problemas (Küchemann, 1981).

Estudios previos indagan en los significados que los estudiantes otorgan a las letras. Algunos se centran en secundaria (ej. Küchemann, 1981) y otros más recientes en primaria (ej. Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens, 2017). En ambos casos indican que los estudiantes pueden relacionar las letras con objetos concretos o con elementos familiares, como el alfabeto. Además, al organizar los significados según su complejidad, la idea de letra como una cantidad variable es el más complejo de todos. Por otra parte, se ha indagado sobre las dificultades asociadas al uso de letras (ej. Booth, 1988), mencionando que se pueden deber a las diferencias entre la naturaleza de la aritmética y del álgebra, la notación y sus convenciones, o pueden estar relacionadas con la enseñanza. Otras investigaciones informan sobre la transición entre el uso de sistemas de representación no simbólico y simbólicos (ej. Radford, 2018) y sobre los sistemas de representación que utilizan estudiantes que manifiestan pensamiento funcional (ej. Pinto, Cañadas,

Moreno y Castro, 2016). Algunos estudios informan sobre cómo los estudiantes se refieren a lo indeterminado y señalan la necesidad de seguir indagando en esta cuestión (ej., Callejo, García-Reche y Fernández, 2016).

En este estudio indagamos en cómo estudiantes españoles representan la variable dependiente, cuando la variable independiente es expresada a partir de una letra. De este modo, y ante la necesidad provocada de dar significado a las letras sin formación previa al respecto, completamos los resultados de estudios previos en los que en la mayoría de los casos los estudiantes contaban con formación algebraica previa. Indagamos en cómo las ideas asociadas a los símbolos literales influyen en cómo los estudiantes expresan relaciones generales de dependencia y la idea de variabilidad en general. De este modo, desde un contexto español, complementamos los estudios de Blanton y colaboradores (2017) y ampliamos la caracterización del pensamiento algebraico que manifiestan los estudiantes españoles de primaria, una temática de reciente investigación.

OBJETIVOS

El objetivo de esta comunicación es describir y ejemplificar en contextos funcionales cómo estudiantes de tercero de primaria representan la variable dependiente, cuando la variable independiente, como cantidad indeterminada, está representada por una letra.

MÉTODO

Esta investigación es de tipo cualitativa, tiene carácter exploratorio y descriptivo. Se enmarca en un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) más amplio, dentro del paradigma de la investigación de diseño, cuyo objetivo es explorar y caracterizar el pensamiento funcional de estudiantes de primaria de diferentes edades.

Participantes

La muestra está conformada por 25 estudiantes de tercero de Educación Primaria (8-9 años). El centro educativo está situado al sur de España y es una institución privada. Antes de participar en esta investigación, los estudiantes no habían trabajado actividades en las que estuvieran involucrada la generalización o las funciones. Tampoco habían recibido instrucción sobre el uso de símbolos, literales o de otro tipo, para representar cantidades indeterminadas.

Diseño e implementación del experimento de enseñanza

Se realizaron cuatro sesiones de trabajo, de aproximadamente 90 minutos cada una. En la recogida de datos participó un grupo de investigadores de la Universidad de Granada, que tenían distintos roles: investigadora-docente, investigadora-observadora y técnico de cámaras. Los estudiantes trabajaron conservando la configuración habitual de la sala de clases. Podían trabajar de manera individual o en grupos de 3 o 4 integrantes. En cada sesión, luego de que los estudiantes registraran sus respuestas por escrito, se efectuó una puesta en común.

Las fuentes de información utilizadas en la recogida de datos fueron tres: (a) cuestionarios escritos (b) grabaciones de video con cámara fija ubicada al final de la sala de clases y (c) grabaciones con una cámara móvil que captó el trabajo realizado por algunos estudiantes.

Las actividades de todas las sesiones se estructuraron en base al modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007). En cada sesión se planteó una situación que implicaba una función lineal con dominio y codominio en los números naturales. En la Tabla 1 se muestran los enunciados generales presentados en las primeras tres sesiones en las que basamos esta investigación. Los datos de la cuarta no se consideran en esta comunicación porque las cuestiones planteadas no implicaban el uso de las letras.

Se plantearon cuestiones relativas a la relación funcional directa (se conoce la variable independiente y se desconoce la dependiente) y a la relación inversa (se conoce la variable

dependiente y se desconoce la independiente). Principalmente se preguntó por la relación de correspondencia, y en menor medida por la relación de covariación (Smith, 2008). Las letras se introdujeron para representar cantidades indeterminadas, sin explicar su significado. Los criterios para seleccionarlas fueron evitar aquellas letras utilizadas en el sistema de numeración romano y las que correspondieran con las iniciales de los objetos y personas nombradas en las tareas. En el contexto de las tareas propuestas se esperaba que los estudiantes construyeran y negociaran los posibles usos y significados de los símbolos literales, aun cuando estos no se ajustaran a los institucionales.

Tabla 1. Situaciones presentadas en cada sesión

Sesión	Función	Nombre	Enunciado general
1	$f(x) = x + 5$	La edad de los hermanos	María y Raúl son dos hermanos que viven en La Zubia. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.
2 y 3	$f(x) = 3x$	Venta de camisetas	Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Gana 3 euros con cada camiseta que vende.

En la primera sesión se presentó una tabla de 3×9 donde en la primera columna los estudiantes debían registrar casos numéricos particulares para la edad de Raúl, en la segunda escribir la operación para calcular la edad de María y en la tercera escribir la edad de María. El primer acercamiento al uso de la letra se produjo cuando se les pidió que completaran la última fila de dicha tabla con una letra que representara la edad de Raúl. A continuación, debían utilizarla para expresar la operación a realizar con dicha cantidad para calcular la edad de María, en la correspondiente celda.

En la segunda sesión primero se introdujo la situación sobre la venta de camisetas descrita en la Tabla 1 y luego se presentaron 15 sentencias. Los estudiantes debían determinar si eran verdaderas o falsas, y corregir las falsas (ej., Cuando Carlos vende 23 camisetas, gana 69 euros). Las sentencias 6, 7, 14 y 15 incluían letras para representar las variables dependiente e independiente (Tabla 2). En todos los casos se representó la variable independiente con la letra Z, mientras que la representación de la variable dependiente fue cambiando. Las sentencias 7 y 14 podían ser verdaderas o falsas según las condiciones que señalaran que debían cumplir las letras N e Y, respectivamente.

Tabla 2. Sentencias que emplean letras en la sesión 2

Sentencias	Objetivos
6. Cuando Carlos vende Z camisetas, gana $3xZ$ euros.	Generalizar la relación de correspondencia directa y expresarlo utilizando letras.
7. Cuando Carlos vende Z camisetas, gana N euros.	
14. Carlos quiere ganar Z euros. Entonces tiene que vender Y camisetas.	Generalizar la relación de correspondencia inversa y expresarlo utilizando letras.
15. Carlos quiere ganar Z euros. Entonces tiene que vender Z camisetas.	

En la tercera sesión se les entregó una tabla incompleta de dos columnas correspondientes a las variables número de camisetas vendidas y euros ganados. Faltaban datos relativos a la relación de correspondencia directa o inversa, que debían completar. Se presentaron casos numéricos particulares y cuatro casos en los que estaban involucradas las letras (Figura 1).

Número de camisetas vendidas	Euros ganados	
N		Relación de correspondencia directa
	3×Y	Relación de correspondencia inversa
Z:3		Relación de correspondencia directa
	D	Relación de correspondencia inversa

Figura 1. Actividades que involucran letras. Sesión 3

Codificación de datos y análisis

Para el análisis de los datos se realizó una codificación cualitativa de las transcripciones de las grabaciones y de las producciones escritas. Primero se identificaron las instancias relacionadas con el uso de las letras. En el caso de las transcripciones se realizó una revisión línea por línea. En las producciones escritas las unidades de análisis fueron registros de los estudiantes, posteriormente contrastados con las grabaciones. Para mantener el anonimato de los estudiantes se les asignó un código específico: E_i , con $i = 1 \dots 25$. En el caso de las investigadoras, el código utilizado fue R.

Las categorías se elaboraron siguiendo un proceso inductivo de análisis de los datos recogidos, apoyándonos para su definición en investigaciones previas (Blanton et al., 2015; Molina, Ambrose y del Rio, 2018). En la Tabla 3 se presentan y definen las categorías elaboradas; distinguimos dos generales (“letra” y “número”) y otras seis específicas, debido que en ocasiones no es posible determinar por qué los estudiantes proponen una letra o un número concreto.

Tabla 3. Categorías relativas a la representación de la variable

Categorías	Descripción
Letra	Utiliza alguna letra para representar la variable dependiente.
Letra relacionada	Utiliza una letra para representar la variable independiente y una expresión que contiene esa misma letra para expresar la variable dependiente en relación con la independiente (ej., en la venta de las camisetas proponen N como el número de camisetas y $3xN$ como la cantidad de euros ganados).
Letra nueva no relacionada	Utiliza letras diferentes, no relacionadas, para representar cada una de las variables (ej., en las edades propone R y M).
Letra nueva relacionada	Utiliza letras diferentes para representar cada una de las variables, relacionadas de alguna forma que explicita (ej., elige las letras A y E por estar distantes 5 lugares en el orden alfabético).
Repite letras	Utiliza la misma letra para representar ambas variables (ej., vende N camisetas y gana N euros).
Número	Representa la variable dependiente con un número.
Número relacionado con el alfabeto	Dada una letra como representación de la variable independiente, representa la variable dependiente con un número que calcula asignando un valor numérico a la variable independiente. Dicho valor corresponde al orden de la letra en el alfabeto. (ej., vende D camisetas y gana 12 euros, ya que D tiene la cuarta posición en el alfabeto y 4 por 3 son 12).
Número aleatorio	Dada una letra como representación de la variable independiente, representa la variable dependiente con un número elegido al azar. (ej., si se plantea que gana S euros, señala que vende 100 camisetas, pues puede ser cualquier número).

RESULTADOS

En esta sección en primera instancia mostramos las representaciones que los estudiantes emplearon en las producciones escritas. Luego ahondamos en las categorías específicas, ejemplificándolas y exponiendo los argumentos dados por los estudiantes para justificar su uso de las letras o los números para representar la variable dependiente.

Representación de la variable dependiente

La variable dependiente fue representada por los estudiantes en las sesiones 1 y 3, es por esto que en la Tabla 4 solo se muestran estas respuestas. En la segunda sesión las representaciones fueron dadas por las investigadoras, no obstante analizamos los casos en los que los estudiantes explicaron cómo interpretan y utilizaban las letras. Esta información se presenta en los siguientes apartados.

La categoría “repite letra” no se muestra en la tabla pues no se observó en las producciones escritas de las sesiones 1 y 3. En el caso de la categoría “letra relacionada”, se muestran tanto respuestas correctas como incorrectas. Se consideraron estas últimas pues dan cuenta de un intento por expresar la variable dependiente explicitando la relación funcional asociada a la situación. Es de esperar que los estudiantes no apliquen las convenciones algebraicas pues este experimento de enseñanza es el primer acercamiento al uso de letras y no han recibido instrucción al respecto.

Tabla 4. Representaciones de la variable dependiente

Categorías de representación	Sesión 1	Sesión 3			
		Vende N	Vende Z:3	Gana 3xY	Gana D
Letra		$N \rightarrow Z^{(3)}$	$Z:3 \rightarrow N^{(3)}$	$3xY \rightarrow N^{(2)}$	$D \rightarrow Z$
		$N \rightarrow Y$		$3xY \rightarrow O$	$D \rightarrow N$
					$D \rightarrow A$
Relacionada		$N \rightarrow NNN$	$Z:3 \rightarrow ZZZ$	$3xY \rightarrow Y^{(2)}$	$D \rightarrow Dx3$
		$N \rightarrow 3xN$	$Z:3 \rightarrow Z$		
Nueva relacionada	$A \rightarrow F^{(2)}$				
	$C \rightarrow H$				
Nueva no relacionada	$R \rightarrow M^{(2)}$				
Número	$A \rightarrow 65$	$N \rightarrow 27^{(2)}$	$Z:3 \rightarrow 100$	$3xY \rightarrow 81$	$D \rightarrow 4^{(2)}$
	$A \rightarrow 22$	$N \rightarrow 24$	$Z:3 \rightarrow 50$	$3xY \rightarrow 27$	$D \rightarrow 12^{(2)}$
	$A \rightarrow 140$	$N \rightarrow 12^{(2)}$	$Z:3 \rightarrow 1^{(2)}$	$3xY \rightarrow 20$	$D \rightarrow 4x3$
			$Z:3 \rightarrow 3^{(2)}$	$3xY \rightarrow 4$	$D \rightarrow 500x3$
				$3xY \rightarrow 3x3$	$D \rightarrow 3+1$
Relacionado con el alfabeto	$R \rightarrow 24$	$N \rightarrow 42$			
	$R \rightarrow 33$				
Número aleatorio				$3xY \rightarrow 100$	

Nota. El número entre paréntesis indica la frecuencia de dichas respuestas cuando es mayor que uno.

Uso de una letra para representa la variable dependiente

Ejemplificamos la categoría “letra relacionada” con la respuesta dada por el estudiante E4 en la tercera sesión. Al completar la tabla con la cantidad de euros ganados, cuando vende N camiseta, trata de expresar la relación funcional repitiendo tres veces la letra que representa la variable independiente. Él en su intervención nunca se refiere a un valor particular de la letra, manifestando que interpreta la letra como variable con valor indeterminado. Su argumento es el siguiente.

E4: Si era multiplicado por tres, tres veces le sumas N.

R: Entonces tres veces una N. [Escribe en la pizarra lo que le indica el estudiante]

E4: N más N más n, tres N.

R: ¿Qué significa esto? ¿E4 lo puedes explicar?

E4: Es como si estuviera multiplicado. Tres N porque multiplicado por tres.

Otro ejemplo es la respuesta del estudiante E14 (Figura 2). Ésta es errónea, pues lo esperado es aplicar la relación inversa y expresar la cantidad de camisetas vendidas, por ejemplo, escribiendo “D:3”. El estudiante señala que como la letra puede ser “el número que tú quieras”, la letra que utilizó puede ser “por ejemplo” 5 y al multiplicar ese número por 3 se obtiene el valor que

representa la otra D, que sería 15. Observamos en esta explicación que no aplica las convenciones que regulan el uso del simbolismo algebraico ya que no considera que la letra D no puede tener valores distintos en la misma situación.

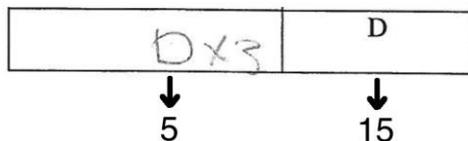


Figura 2. Respuesta estudiante E14 y valor asignado a la letra en su explicación. Sesión 3

En las producciones escritas, en los tres casos categorizados como “letra nueva relacionada” los estudiantes utilizaron el alfabeto como referencia para escoger las letras para representar las dos cantidades. En la puesta en común de la primera sesión el estudiante E4 propone que la edad de Raúl es A, cuenta cinco letras siguiendo el orden del alfabeto y determina que la edad de María es E. Nunca se refiere a una edad en particular, el valor de las letras utilizadas es indeterminado.

Otros casos asociados a la categoría “letra nueva relacionada” los encontramos en la segunda sesión. Los estudiantes utilizan una letra diferente a la dada para representar la variable dependiente, argumentando que letras distintas representan cantidades distintas y que la letra puede representar “el número que tú quieras”. Cuatro estudiantes utilizan este argumento de forma amplia y otros dos de forma restrictiva ya que señalan que es cualquier número pero que debe cumplir la relación funcional entre las variables. Las siguientes intervenciones ejemplifican ambos tipos de respuestas. Corresponden a argumentos dados por los estudiantes al determinar si la sentencia 7, propuesta en la segunda sesión, era verdadera o falsa.

- E7: Yo digo que es verdadero, pues si Carlos vende Z camisetas, Z es un número y gana N euros, N es otro número. Entonces si vende Z camisetas, entonces gana N euros. Entonces yo entiendo que si Carlos vende el número que sea, gana un número diferente de euros.
- E1: Es verdadera, Pues si la Z es muchos, la N tiene que ser un número grande. Si la Z es poco, entonces la otra tiene que ser un número bajito. Por ejemplo, la Z es 20. 20 por 3 sería... mmm... 60. Y ahí pones 60, en la N. Y sería 60, y por eso digo que es verdadero.

En la primera sesión encontramos ejemplos de respuestas categorizadas como “letra nueva no relacionada”. Aquí dos estudiantes (E21 y E25) utilizan las letras como etiquetas. No las relacionan entre sí ni las asocian con ninguna cantidad concreta o indeterminada. Emplean la letra R (de Raúl) y “M” (de María) para representar la variable independiente y dependiente respectivamente.

Respecto a la categoría “repite letras”, al analizar la sentencia 15 en la segunda sesión, cuatro estudiantes afirman que es verdadera. Se basan en la idea de que la letra puede ser “el número que tú quieras”. Interpretan la letra como una cantidad indeterminada y no aprecian que una misma letra no puede representar distintas cantidades en una misma situación. Un ejemplo de esto es la respuesta del estudiante E14, que dice “Porque la Z puede ser 13 o el número que tú quieras”.

Uso de un número para representa la variable dependiente

Al emplear números, por lo general los estudiantes fijan un valor para la variable independiente y luego aplican la relación funcional; el resultado que obtienen lo escriben como representación de la variable dependiente. Los criterios para asignar el valor de la variable independiente pueden ser diversos, entre ellos encontramos elecciones aleatorias y otras que se basan en la posición de las letras en el alfabeto.

Por ejemplo, en la primera sesión dos estudiantes proponen representar la edad de Raúl con una R y la edad de María con una M. El valor de R lo determinan fijándose en el orden en el alfabeto. El valor de la letra M lo determinan aplicando la relación funcional, es decir, suman cinco al valor dado a la letra R. En la Figura 3 se muestra la respuesta del estudiante E15. Es interesante observar

que para expresar la suma de R más cinco no combina números y letras sino que utiliza la letra E como representación del cinco.

Edad de Raúl	Operaciones para calcular la edad de María	Edad de María
R	$R + E =$	24

Figura 3. Respuesta estudiante E15. Sesión 1

En este ejemplo a la letra se le asigna un valor fijo, lo que podría interpretarse como que el estudiante no asocia la idea de variabilidad a la letra. No obstante, en el siguiente diálogo se constata que acepta que el problema puede tener variadas respuestas. Señala que la edad de María (variable dependiente) puede ser cualquier número, el cual dependerá de la letra que cada estudiante escoja para representar la edad de Raúl.

R: Entonces, ¿cómo podrías averiguar la edad de María, si R es la edad de Raúl?

E15: Yo diría que tiene 24 años.

R: ¿Por qué?

E15: María, y 19 Raúl.

R: Pero no lo sabemos, a lo mejor tiene más.

E15: El que haya elegido la A por ejemplo, tendrá un número más bajito.

En cuanto a escoger un número de manera aleatoria, en la primera sesión el estudiante E6 señala que la letra puede representar una cantidad variable. En su argumento dice que el número que propone para la edad de María, es solo un “ejemplo”. Sus palabras fueron: “A más 5, y pongo por ejemplo 45”. En la tercera sesión el estudiante E3 completa la tabla representando la variable dependiente con el número 81. Esto cuando se le indica que gana $3 \times Y$ euros. En un costado del cuestionario escribe un cálculo en el que evalúa la letra Y como 27 y aplica la relación funcional al multiplicar 27 por 3. Se desconoce cómo escoge el número 27, pudiendo atender a alguna lógica o incluso ser solo un ejemplo si ha interpretado la letra como una variable.

Otro ejemplo se encuentra en las grabaciones de la cámara móvil. El estudiante E10 explica por qué emplea el número 100 para representar la variable dependiente. Asocia a la letra el significado de variable y aclara que 100 es solo un ejemplo, pues las letras pueden representar “cualquier número”.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestra investigación aporta nueva información sobre el significado que estudiantes de primaria le otorgan a las letras y cómo expresan la variabilidad al representar la variable dependiente de la función, cuando la variable independiente es dada y se expresa a partir de una letra. Estudios previos señalan que los estudiantes utilizan la posición del alfabeto para evaluar las letras y relacionan el orden lineal de la secuencia numérica con el orden del alfabeto (ej. Blanton et al., 2017; Küchemann, 1981; Molina, Ambrose y del Rio, 2018). Nosotros profundizamos en esto, y si bien en algunos casos los estudiantes utilizan este orden para reemplazar la letra por un valor numérico, en otras solo lo utilizan para escoger la letra con la que representan la variable dependiente y expresar la relación funcional dejando indeterminado el valor de dichas variables. En otros casos, aunque asignen a las letras un valor único que corresponde con su posición, reconocen que las variables dependiente e independiente son cantidades indeterminadas. Esto último lo manifiestan al aceptar que el valor puede cambiar según la letra que escoja cada estudiante. Por lo tanto, aunque usen el alfabeto, los estudiantes no tienen una visión estática de la situación. Solo que aun no cuentan con un sistema de símbolos que les permita expresar esta variabilidad.

Por otro lado, algunos estudiantes al interpretar la letra como una cantidad indeterminada y variable, señalan que puede ser “el número que tú quieras”. Esta idea afecta a cómo representan la variable dependiente, pues utilizaban letras iguales o distintas sin considerar algunas convenciones sobre su uso. Por ejemplo, que letras iguales no pueden representar distintas cantidades en una misma situación o que letras distintas pueden tener el mismo valor. De todas formas, algunos estudiantes considerando esta misma idea, fueron más rigurosos al interpretar la letra y procuraron explicitar que la letra que representa la variable dependiente no puede ser cualquier número, sino uno que resulte de aplicar la relación funcional involucrada en la tarea.

Otro efecto asociado a la idea que la letra puede ser “el número que tú quieras”, tiene relación con el uso de los números para representar la variable dependiente. Algunos estudiantes escribían un número cualquiera para expresar la variable dependiente, lo que podría interpretarse como que asignan un valor fijo a la letra, evidenciando una visión estática de esta, dificultad descrita por Kücheman (1981). Sin embargo, al escuchar algunos de sus argumentos se identifica que dichos números son solo un ejemplo genérico.

A lo largo de la intervención en el aula, hubo estudiantes que rechazaron el uso de la letra. Sin embargo, en general se puede apreciar que relacionaron la idea de variabilidad con la letra y la interpretaban como una cantidad indeterminada. Al representar la variable dependiente utilizaron un sistema de simbolización distinto al algebraico: empleaban letras, números o una combinación de ambos, según les parecía más razonable. Estos resultados evidencian que la idea de variabilidad y su simbolización se experimentan de forma separada.

En esta investigación también se puede observar que los estudiantes recurren a elementos familiares para enfrentar la situación. Recurren al uso del alfabeto, tanto para escoger la letra para representar la variable dependiente, o para asignarle un valor numérico. Esto concuerda con lo que señala Radford (2001) quien dice que los estudiantes le dan sentido a la notación con significados para los símbolos extraídos desde otros dominios. En este caso el alfabeto y el uso de las iniciales de las palabras claves. El uso de números también podría estar relacionado con esto y los estudiantes podrían estar basándose en conocimientos aritméticos. Podrían considerar que las respuestas deben ser numéricas sin aceptar el uso de expresiones generales algebraicas (Booth, 1988).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. La primera autora es beneficiaria de una Beca de Doctorado otorgada por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), folio 72180046.

Referencias

- Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 181-202. doi: 10.1007/s10649-016-9745-0
- Blanton, M., Stephens, A. C., Knuth, E. J., Gardiner, A. M., Isler, I. y Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for research in Mathematics Education*, 46(1), 39-87.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A. Coxford y A. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: NCTM.

- Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología - Segunda época (UNLP)*, 14, 37-57.
- Callejo, M. L., García-Reche, Á. y Fernández, C. (2016). Evolución del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) en problemas de generalización lineal. *Avances de investigación en educación matemática*, 10, 5-25.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 69-81.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.
- Kaput, J. J., Blanton, M. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). Nueva York; NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). Londres, Reino Unido: Murray.
- MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1-19.
- Molina, M., Ambrose, R. y del Rio, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 Monographs* (pp. 261-280). Hamburgo, Alemania: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-68351-5_11
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 414-426). Málaga, España: SEIEM.
- Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra: Una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática*, 11(3), 25-53.
- Radford, L. (2001). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.) *Proceeding of the 35rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs* (pp. 3-25). Hamburgo, Alemania: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-68351-5_1
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133-163). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación matemática*, 6(3), 90-108.