Variables aleatorias unidimensionales

Estadística II

Universidad de Salamanca

Curso 2011/2012

Outline

Variable aleatoria

Definición

Las variables aleatorias son funciones cuyos valores dependen del resultado de un experimento aleatorio

$$\begin{aligned} X : E &\longrightarrow R \\ e_i &\longrightarrow X(e_i) \in R \end{aligned}$$

Tipos

- Variables aleatorias discretas
- Variables aleatorias continuas

Variable aleatoria discreta

Definition

Son aquellas variables aleatorias que sólo pueden tomar un número de valores finito o infinito numerable

$$\begin{array}{rcl} X : E & \longrightarrow & N \\ e_i & \longrightarrow & X(e_i) \in N \end{array}$$

Variable aleatoria discreta

Nota

- Estas variables se representan por letras mayúsculas y pueden tomar *n* posibles valores

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

- Las variables aleatorias discretas están caracterizadas por la **función de probabilidad** y la **función de distribución**

Outline

Función de probabilidad

Definición

Sea $(E, P(E), P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria discreta. Se llama función de probabilidad, $f(X)$, a la función que indica la probabilidad de cada posible valor de la variable aleatoria discreta:

$$\begin{array}{rcl} f : N & \longrightarrow & [0,1] \\ x_i & \longrightarrow & f(x_i) = P(X = x_i),\ \ i = 1, \ldots, n \end{array}$$

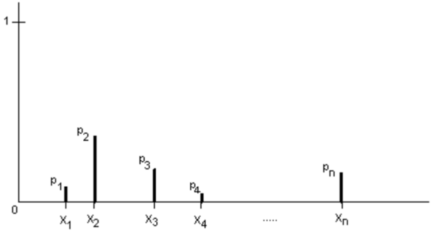
y que verifica:

- $0 \leq f(x_i) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

Función de probabilidad

Gráficamente

La función de probabilidad se representa mediante un diagrama de barras similar al de distribución de frecuencias relativas para variables discretas



Función de probabilidad de una v. a. d. que toma los valores $x_1,\ldots,x_n$

Outline

Función de distribución

Definición

Sea $(E, P(E), P)$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria discreta y $f(X)$ su función de probabilidad. Se llama función de distribución (acumulativa) de la variable aleatoria discreta X, $F(X)$, a la probabilidad de que X sea menor o igual que x:

$$\begin{aligned} F : N &\longrightarrow [0, 1] \\ x_i &\longrightarrow F(x_i) = P(X \leq x_i) \\ F(x_i) &= P(X \leq x_i) = \sum_{x_j \leq x_i} f(x_j) \end{aligned}$$

Función de distribución

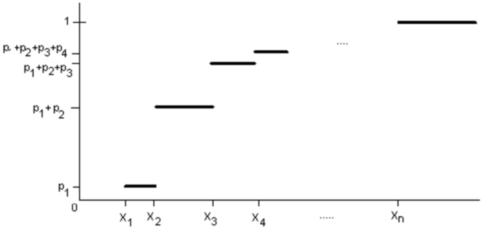
Propiedades

- $F(-\infty) = 0$
- $F(x_{min}) = f(x_1)$
- $F(x_{max}) = 1$
- $F(\infty) = 1$
- F es monótona no decreciente, es decir, si $x_i \leq x_j$ entonces $F(x_i) \leq F(x_j)$
- F es continua por la derecha, tiene límites por la izquierda y es constante en $[x_{i-1}, \ldots, x_i)$, donde toma el valor $\sum_{k \leq i} f(x_k)$
- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$
- $(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i)$

Función de distribución

Gráficamente

La función de distribución se representa mediante una escalera



Función de distribución acumulativa de una v. a. d.

Variable aleatoria continua

Definition

Son aquellas variables aleatorias que se definen sobre espacios muestrales infinitos y no numerables, es decir, toman un número de valores infinito

$$\begin{aligned} X : E &\longrightarrow R \\ e_i &\longrightarrow X(e_i) \in R \end{aligned}$$

Variable aleatoria continua

Nota

- Estas variables se representan por letras mayúsculas y pueden tomar ∞ posibles valores

$$X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$$

- Las variables aleatorias continuas están caracterizadas por la **función de densidad** y la **función de distribución**

Outline

Función de densidad

Definición

Sea $(E, P(E), P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria continua. Se llama función de densidad, $f(X)$, a la función real no negativa, tal que que, $\forall a, b \in R$, con $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

y que verifica:

- $f(x) \leq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Función de probabilidad

Gráficamente

La función de densidad se representa mediante una curva.

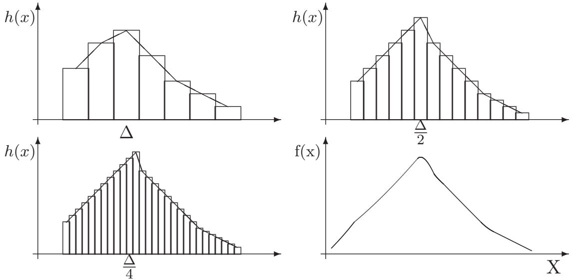


Figura 5.2: Obtención esquemática de la función de densidad.

Outline

Función de distribución

Definición

Sea $(E, P(E), P)$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria continua y $f(X)$ su función de densidad. Se llama función de distribución (acumulativa) de la variable aleatoria discreta X, $F(X)$, a la probabilidad de que X sea menor o igual que x:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Función de distribución

Propiedades

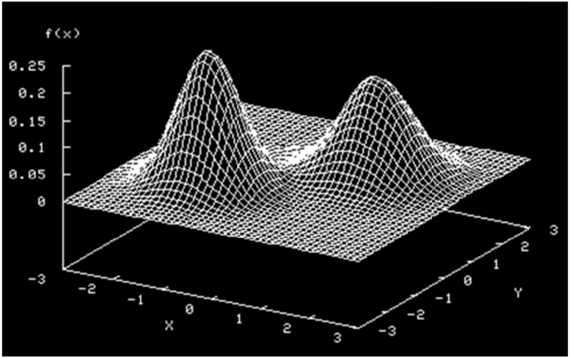
- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- F es monótona no decreciente, es decir, si $x_i \leq x_j$ entonces $F(x_i) \leq F(x_j)$
- F es continua
- Si $f(x)$ es continua, entonces $F(x)$ es derivable:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

- $(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Función de distribución

Gráficamente



Outline

Esperanza

Definición

Valor esperado de la variable (valor medio), es un valor fijo, no una función

- V. A. discretas:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

- V. A. continuas:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Esperanza

Propiedades

- Si C es una constante $\longrightarrow E(C) = C$
- $E(aX + b) = a\,E(X) + b, \;\; \forall a, b \in R$
- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$E\left[g(X)\right] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f(x_i)$$

$$E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Esperanza

Propiedades

- Si $g(X)$ y $h(X)$ son funciones de X, entonces:

$$E\left[g(X)+h(X)\right]=E\left[g(X)\right]+E\left[h(X)\right]$$

- Si $g(X)$ es una función de X, entonces:

$$\left|E\left[g(X)\right]\right|\leq E\left[\left|g(X)\right|\right]$$

Outline

Varianza

Definición

Mide la dispersion de la variable aleatoria con respecto a su media

- V. A. discretas:

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2$$

- V. A. continuas:

$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\, dx$$

Varianza

Definición

$$Var(X) = \sigma^2 = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$$

Varianza

Propiedades

- Si C es una constante $\longrightarrow Var(C) = 0$
- $Var(aX + b) = a^2\, Var(X), \ \ \forall a, b \in R$