Estimación puntual

Estadística II

Universidad de Salamanca

Curso 2011/2012

Outline

Introducción

Una estimación puntual de algún parámetro poblacional θ es un valor único del estadístico $\widehat{\theta}$.
Por ejemplo, el valor $\overline{x}$ del estadístico $\overline{X}$, calculado a partir de una muestra de tamaño *n*, es una estimación puntual del parámetro poblacional μ.

El estadístico que se utiliza para obtener una estimación puntual recibe el nombre de **estimador** o **función de decisión.** Generalmente muestras diferentes conducen a acciones o estimaciones diferentes.

Estimación puntual

Definición

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s de X, $X \rightsquigarrow f_X(x, \theta)$.

Un **estimador de** θ es un estadístico $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ tal que:

1. Es una variable aleatoria
2. No depende del parámetro
3. No depende de cantidades desconocidas

Propiedades deseables de los estimadores puntuales

Propiedades deseables de los estimadores puntuales

Básicamente para que un estimador sea bueno:

- Se desea que la varianza del estimador sea lo más pequeña posible
- Mientras que la distribución de muestreo debe concentrarse alrededor del valor del parámetro

Propiedades deseables de los estimadores puntuales

Estimadores insesgados o centrados (EI)

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s de X, $X \rightsquigarrow f_X(x, \theta)$.

Un **estimador** $\widehat{\theta}$ es un estimador insesgado $\Leftrightarrow E(\widehat{\theta}) = \theta$

En caso contrario, si se da que $E(\widehat{\theta}) = \theta + f(\theta)$, entonces $f(\theta)$ es el sesgo

Example

- $\overline{X}$ es un estimador insesgado de μ porque $E(\overline{X}) = \mu$
- S_X^2 no es un estimador insesgado de σ^2 porque $E(S_X^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$
- S_c^2 es un estimador insesgado porque $E(S_c^2) = \sigma^2$

Propiedades deseables de los estimadores puntuales

Estimadores consistentes

Una sucesión de estimadores $\theta_1, \ldots, \theta_n$ es **consistente** para θ
$\Leftrightarrow \widehat{\theta}_n$ converge en probabilidad a θ
$\Leftrightarrow lim_{n\to\infty} P[|\widehat{\theta}_n - \theta| > \epsilon] = 0$, $\epsilon > 0$

Example

- $\overline{X}$ es un estimador consistente de μ porque $\widehat{\overline{X}}$ converge en probabilidad a μ

Propiedades deseables de los estimadores puntuales

Estimadores eficientes

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s de X, $X \leadsto f_X(x, \theta)$.

Un **estimador** $\widehat{\theta}$ es un estimador eficiente $\Rightarrow$

1. Es insesgado
2. Su varianza alcanza la cuota de *Cramer-Rao* (CCR), siendo esta en muestras aleatorias simples y para estimadores insesgados

$$Var(\widehat{\theta}) = CCR = \frac{1}{n.E\left(\frac{d(\ln f(x,\theta))}{d\theta}\right)^2}$$

Propiedades deseables de los estimadores puntuales

Estimadores eficientes

La eficiencia relativa se usa en la jerarquización de estimadores. De tal forma que entre dos estimadores $\widehat{\theta_1}$ y $\widehat{\theta_2}$ de una mismo parámetro θ, es preferible $\widehat{\theta_2}$ si:

$$\frac{Var(\widehat{\theta_1})}{Var(\widehat{\theta_2})} < 1$$

Propiedades deseables de los estimadores puntuales

Example

Demostrar que la media muestral es el estimador eficiente de λ en la distribución de Poisson

$$f(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \Rightarrow ln(f(x,\lambda)) = -\lambda + xln\lambda \; - lnx!$$

$$\frac{d(ln\, f(x,\lambda))}{d\lambda} = -1 + \frac{x}{\lambda} = \frac{x-\lambda}{\lambda}$$

$$E\left(\frac{d(ln\, f(x,\lambda))}{d\lambda}\right)^2 = E\left(\frac{x-\lambda}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} Var(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$CCR = \frac{1}{n.\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{n}$$

$$Var(\widehat{\lambda}) = Var\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = CCR$$

Propiedades deseables de los estimadores puntuales

Estimadores suficientes

Un estimador es suficiente si el estimador incorpora información relevante contenida en la muestra sobre el parámetro a estimar de tal forma que ningún otro estimador proporcione información adicional acerca de dicho parámetro

Definición

Para ver si un estimador es suficiente se recurre al teorema de factorización de *Fisher-Neyman*:

$$f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = g(\widehat{\theta}, \theta).h(x_1, \ldots, x_n)$$

Métodos de construcción de estimadores

Métodos de construcción de estimadores

Hay varios métodos, entre ellos destacamos:

- Método de la máxima verosimilitud
- Método de los momentos
- Método de los mínimos cuadrados. Este lo utilizamos en la estimación de parámetros en regresión

Método de la máxima verosimilitud

Método de la máxima verosimilitud

Se basa en el principio lógico de que normalmente ocurre lo más probable por lo que el estimador de q será aquel que haga máxima la función de verosimilitud

Método de los momentos

Método de los momentos

Consiste en igualar tantos momentos poblacionales a momentos muestrales como parámetros desconocidos haya