Variables aleatorias bidimensionales

Estadística II

Universidad de Salamanca

Curso 2011/2012

Outline

Variable aleatoria bidimensional

Definición

Sean X e Y variables aleatorias. Una variable aleatoria bidimensional (X, Y) es una asignación numérica en R^2:

$$\begin{aligned} (X, Y) : E &\longrightarrow R^2 \\ e_i &\longrightarrow (X(e_i), Y(ei)) \in R^2 \end{aligned}$$

Tipos

- Variables aleatorias bidimensionales discretas
- Variables aleatorias bidimensionales continuas

Variable aleatoria discreta

Definition

Son aquellas variables aleatorias que sólo pueden tomar un número de valores finito o infinito numerable

$$\begin{array}{rcl} (X, Y) : E & \longrightarrow & N^2 \\ e_i & \longrightarrow & (X(e_i), Y(ei)) \in N^2 \end{array}$$

Variable aleatoria bidimensional discreta

Nota

- Las variables aleatorias bidimensionales discretas están caracterizadas por la **función de probabilidad conjunta** y la **función de distribución**
- Además en este caso existen distribuciones **marginales** de las variables y distribuciones **condicionadas**

Outline

Función de probabilidad conjunta

Definición

$$\begin{array}{rcl} f: N^2 & \longrightarrow & [0,1] \\ (x_i, y_j) & \longrightarrow & f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \\ & & i = 1, \ldots, n \\ & & j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Función de probabilidad conjunta

Propiedades

- $0 \leq f(X, Y) = P\left[(X, Y)\right] = P\left(X = x_i, Y = y_j\right) \leq 1$
- $f(X, Y) = P\left[(X, Y) \in B\right] = \sum_{(x_i, y_j)} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$
- $\sum_{i=1} n \sum_{j=1}^{m} P[x = x_i, Y = y_j] = 1$

Outline

Función de probabilidad marginal

Definición

- Marginal de X:

$$P[X = x_i] = \sum_{j=1}^{\infty} P[X = x_i, Y = y_j]$$

- Marginal de Y:

$$P[Y = y_j] = \sum_{i=1}^{\infty} P[X = x_i, Y = y_j]$$

Outline

Función de probabilidad condicionada

Definición

- De X condicionada por $Y = y_j$:

$$P[X = x/Y = y_j] = \frac{P[X = x, Y = y_j]}{P[Y = y_j]}$$

- De Y condicionada por $X = x_i$:

$$P[Y = y/X = x_i] = \frac{P[X = x_i, Y = y]}{P[X = x_i]}$$

Outline

Función de distribución

Definición

Sea $(E, P(E), P)$ un espacio de probabilidad, (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta y $f(X, Y)$ su función de probabilidad conjunta. Se llama función de distribución (acumulativa) de la variable aleatoria discreta (X, Y), $F_{(X,Y)}(x, y)$:

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_i, y_j) & \longrightarrow & F(x_i, y_j) = P(X \leq x_i, Y \leq y_j) \end{array}$$

Función de distribución conjunta

Propiedades

- $0 \leq F(x,y) \leq 1$
- F es monótona creciente en cada variable
- $lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$ para todo y
- $lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$ para todo x
- $lim_{x,y\to\infty} F(x,y) = 1$ para todo x, y
- $lim_{x\to\infty} F(x,y) = F_Y(y)$
  Función de distribución marginal de Y
- $lim_{y\to\infty} F(x,y) = F_X(x)$
  Función de distribución marginal de X

Función de distribución conjunta

Propiedades

- F es continua por la derecha en cada variable
- $a < b$, $c < d$:
  $P[a < X \leq b, c < Y \leq d] =$
  $F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$

Variable aleatoria continua

Definition

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con $F_{X,Y}(x, y)$ su función de distribución, decimos que es una v.a.b. continua si sólo si:

- F es continua en cada variable
- Existe $\frac{dF(x,y)}{dx}$, $\frac{dF(x,y)}{dy}$ y $\frac{d^2F(x,y)}{dxdy}$ y son continuas
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2F(x,y)}{dxdy} = 1$

Outline

Función de densidad conjunta

Definición

Sea $(E, P(E), P)$ un espacio de probabilidad y (X, Y) una v.a.b.c. Se llama función de densidad, $f(X, Y)$:

$$\begin{array}{rcl} f : R^2 & \longrightarrow & R \\ (x_i, y_j) & \longrightarrow & f(x_i, y_j) = \dfrac{d^2 F(x,y)}{dxdy} \end{array}$$

Función de densidad conjunta

Propiedades

- $a < b$, $c < d$:

$$P[a < X \leq b, c < Y \leq d] = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y)dydx$$

- $P[(X, Y) \in B] = \int\int_B f_{XY}(x, y)dydx$

- $f_{XY}(x, y)$ es función de densidad de una v.a.b.c. si y sólo si:

  1. $f_{XY}(x, y) \geq 0$
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dydx = 1$

Outline

Funciones de densidad marginales

Definición

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$ siendo X continua
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$ siendo Y continua

Outline

Función de densidad condicionada

Definición

- De X condicionada por $Y = y$:

$$f[X/Y = y](x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

- De Y condicionada por $X = x$:

$$f[Y/X = x](y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}$$

Outline

1. Variable aleatoria bidimensional
2. Variable aleatoria bidimensional discreta
   - Función de probabilidad conjunta
   - Función de probabilidad marginal
   - Función de probabilidad condicionada
   - Función de distribución
3. Variable aleatoria continua
   - Función de densidad conjunta
   - Funciones de densidad marginales
   - Función de densidad condicionada
   - Relación entre función de distribución y función de densidad

Relación entre función de distribución y función de densidad

Relación entre $F_{XY}(x, y)$ y $f_{XY}(x, y)$

- $f_{XY}(x, y) = \frac{d^2 F(x,y)}{dxdy}$
- $F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x, y) dy$