Distribuciones unidimensionales continuas

Estadística II

Universidad de Salamanca

Curso 2011/2012

Outline

Distribución uniforme continua

Definición

- Es una variable continua cuyos valores se distribuyen uniformemente sobre un intervalo (a, b)
- X representa la elección de un punto al azar en el intervalo (a, b)

$$X \rightsquigarrow U(a, b)$$

Distribución uniforme continua

Función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a < x < b, \qquad (-\infty < a < b < \infty) \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Características

- $E(X) = \frac{a+b}{2} = Me$
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Distribución uniforme continua

Propiedades

- Sea $X \rightsquigarrow U(a,b) \Rightarrow$

$$Y = cX + d \rightsquigarrow U(c.a+d, c.b+d), c > 0$$

$$Y = cX + d \rightsquigarrow U(c.b+d, c.a+d), c < 0$$

- Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución estrictamente creciente $\Rightarrow$

$$Y = F_X(x) \rightsquigarrow U(0,1)$$

Distribución uniforme continua

Example

El volumen de precipitaciones estimado para el próximo año en la ciudad de León va a oscilar entre 400 y 500 litros por metro cuadrado. Calcular:

1. La función de densidad
2. La función de distribución
3. La precipitación media esperada

Distribución uniforme continua

Example

1. $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{500-400} & \text{si} \quad 400 < x < 500, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

2. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 400, \\ \frac{x-400}{100} & 400 < x < 500, \\ 1 & \text{x>500.} \end{cases}$$

3. $E(X) = \frac{400+500}{2} = 450$

Distribución Normal

Definición

Esta distribución es sin duda la más importante tanto en el Cálculo de Probabilidades como en la Estadística

Definición

$$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$$

Distribución Normal

Función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < x < \infty, \sigma > 0$$

Características

- $E(X) = \mu = Me = Mo$
- $Var(X) = \sigma^2$

Distribución Normal

Propiedad de la constante

- Sea $X \rightsquigarrow N(\mu,\sigma) \Rightarrow$

$$Y = k.X \rightsquigarrow N(k.\mu, k.\sigma)$$

$$Y = \frac{X}{k} \rightsquigarrow N(\frac{\mu}{k}, \frac{\sigma}{k})$$

$$Y = aX + b \rightsquigarrow N(a.\mu + b, |a|.\sigma)$$

Distribución Normal

Propiedad reproductiva

- Sean $X \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma_1)$ y $Y \rightsquigarrow N(\mu_2, \sigma_2)$ v.a. continuas independientes $\Rightarrow$

$$X + Y \rightsquigarrow N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$
$$X - Y \rightsquigarrow N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

- Sea $X_i \rightsquigarrow N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, \ldots, n$ v.a. continuas independientes $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2})$$

Distribución Normal

Propiedad reproductiva

- Sea $X_i \rightsquigarrow N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, \ldots, n$ v.a. continuas independientes $\Rightarrow$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i.X_i + b \rightsquigarrow N(\sum_{i=1}^{n} a_i.\mu_i + b, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2})$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i.X_i - b \rightsquigarrow N(\sum_{i=1}^{n} a_i.\mu_i - b, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2})$$

Distribución Normal

Propiedad reproductiva

- Sea $X_i \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$, $i = 1, \ldots, n$ v.a. continuas independientes e igualmente distribuidas $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N(n.\mu, \sqrt{n.\sigma^2})$$

Distribución Normal

Calculo de probabilidades

Para calcular probabilidades,

¡¡No se integra!!

se tipifica la variable pasando a la distribución a la $N(0,1)$ y se busca en sus tablas

$$X \rightsquigarrow N(\mu, \sqrt{\sigma^2}) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

Outline

Distribución Normal Estándar

Definición

$$X \rightsquigarrow N(0,1)$$

Función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$-\infty < x < \infty$$

Características

- $E(X) = 0 = Me = Mo$
- $Var(X) = 1$

Distribución Normal Estándar

Función de densidad simétrica, lo que supone:

- $F_X(x) = F_X(-x)$
- $P[X \leq -x] = P[X \geq x]$
- $P[X \leq -x] = P[X \leq x] = F_X(x)$

Distribución Normal Estándar

Example

- $P(Z \leq 0,45) = 0,6736$
- $P(Z > 1,24) = 1 - p(Z \leq 1,24) = 1 - 0,8925 = 0,1075$
- $P(Z \leq -0,72) = P(Z > 0,72) = 1 - P(Z \leq 0,72) = 1 - 0,7642 = 0,2358$
- $P(-1,76 < Z \leq -0,5) = P(0,5 \leq Z \leq 1,76) = P(Z \leq 1,76) - P(z \leq 0,5) = 0,9608 - 0,6915 = 0,2693$
- $P(|Z| \geq 1{,}21) = P(Z \leq -1{,}21) + P(Z \geq 1{,}21) = 2.P(Z \geq 1{,}21) = 2.(1 - P(Z \leq 1{,}21) = 2.(1 - 0{,}8869) = 0{,}2262$

Distribución Normal Estándar

Example

- $P(|Z| \leq 1{,}21) = P(-1{,}21 < Z \leq 1{,}21) =$
  $P(Z \leq 1{,}21) - P(Z \leq -1{,}21) =$
  $P(Z \leq 1{,}21) - P(Z \geq 1{,}21) =$
  $P(Z \leq 1{,}21) - (1 - P(Z \leq 1{,}21) =$
  $2.P(Z \leq 1{,}21) - 1 = 0{,}7738$

Example

- $P[Z \leq z_\alpha] = 0{,}90 \Rightarrow z_\alpha = z_{90} = 1,28$
- $P[Z \geq z_\alpha] = 0{,}15 \Rightarrow z_\alpha = z_{0{,}85} = 1,04$
- $P[|Z| \leq z_\alpha] = 0{,}80 \Rightarrow z_\alpha = z_{0{,}90} = 1,28$
- $P[|Z| \geq z_\alpha] = 0{,}16 \Rightarrow z_\alpha = z_{0{,}92} = 1,41$

Outline

Distribución χ^2 de Pearson

Definición

Es la suma del cuadrado de n (siendo n el grado de libertad) variables aleatorias independientes normales con distribución $N(0,1)$.

Definición

$$X \rightsquigarrow \chi^2_n$$

Distribución χ^2 de Pearson

Función de densidad

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}$$

Características

- $E(X) = n$
- $Var(X) = 2.n$

Distribución χ^2 de Pearson

Propiedad reproductiva

- Sean $X_1 \rightsquigarrow \chi^2_{n_1}$ y $X_2 \rightsquigarrow \chi^2_{n_2}$ v.a. continuas independientes $\Rightarrow$

$$X_1 + X_2 \rightsquigarrow \chi^2_{n_1+n_2}$$

- Sea $X_i \rightsquigarrow \chi^2_{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$ v.a. continuas independientes $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \rightsquigarrow \chi^2_{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

- Sea $X_i \rightsquigarrow \chi^2_{n}$, $i = 1, \ldots, k$ v.a. continuas independientes$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \rightsquigarrow \chi^2_{k.n}$$

Distribución χ^2 de Pearson

Propiedad

- Sean $X_1 \rightsquigarrow \chi^2_{n_1}$ e $Y = X_1 + X_2 \rightsquigarrow \chi^2_n$ v.a. continuas, siendo X_1 y X_2 independientes $\Rightarrow$

$$X_2 \rightsquigarrow \chi^2_{n-n_1}$$

Distribución χ^2 de Pearson

Aproximaciones

- Cuando $n > 100$, χ^2_n se aproxima a una $N(0,1)$

$$X_2 \rightsquigarrow \chi^2_{n-n_1}$$

Outline

Distribución t de Student

Definición

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a.i.id. con distribución $N(0,1)$.
Entonces:

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{X_1^2, + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{n}}}$$

Definición

$$T \rightsquigarrow t_n$$

Distribución t de Student

Función de densidad

$$f_X(x) = \frac{\gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Características

- $E(T) = 0$
- $Var(T) = \frac{n}{n-2}$ para $n > 2$

Distribución t de Student

Propiedades

- Tiene un perfil similar a la $N(0,1)$
- Cuando $n > 30$ se aproxima a una $N(0,1)$

Outline

Distribución F de Snedecor

Definición

Si $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ son v.a.i.id. con distribución $N(0,1)$.
Entonces:

$$U = \frac{\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{n_1}^2}{n_1}}{\frac{Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_{n_2}^2}{n_2}}$$

Definición

$$U \rightsquigarrow F_{n_1, n_2}$$

Distribución F de Snedecor

Función de densidad

$$f_X(x) = \frac{\gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}.n_1^{\frac{n_1}{2}}.n_2^{\frac{n_2}{2}}$$

Características

- $E(U) = \frac{n_2}{n_2-2}$ para $n_2 > 2$
- $Var(T) = \frac{2.n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-4)(n_2-2)^2}$ para $n_2 > 4$

Distribución F de Snedecor

Propiedades

- $t_n^2 = F_{1,n}$
- Si $X \rightsquigarrow F_{n_1,n_2}$ entonces $Y = \frac{1}{X} \rightsquigarrow F_{n_2,n_1}$

Distribución exponencial negativa

Definición

Es una distribución utilizada por variables relacionadas con tiempos de duración (periodo de desempleo, vida de personas, vida de piezas, etc.) o tiempos de espera

Notación

$$X \rightsquigarrow E(a)$$

Distribución exponencial negativa

Función de densidad

$$f_X(x) = a.e^{-ax} \quad x > 0, a > 0$$

Características

- $E(X) = \frac{1}{a}$
- $Var(X) = \frac{1}{a^2}$