

Probabilidad

Estadística II

Universidad de Salamanca

Curso 2011/2012

Outline

- 1 Introducción
- 2 Experimentos y sucesos aleatorios
- 3 Operaciones con sucesos aleatorios
- 4 Noción de probabilidad
- 5 Probabilidad condicionada
- 6 Teoremas fundamentales del cálculo de probabilidades

Introducción

¿Cuándo se utiliza?

Utilizamos el cálculo de probabilidades cuando necesitamos obtener conclusiones generales de los resultados obtenidos en casos particulares

¿Qué nos suministra el cálculo de probabilidades?

Nos suministra la reglas para el estudio de experimentos aleatorios o de azar, constituyendo la base para la estadística inductiva o inferencial

Experimentos y sucesos aleatorios

Experimentos deterministas

Son aquellos que realizados de una misma forma y con las mismas condiciones iniciales, ofrecen siempre el mismo resultado

Example

Lanzar un objeto de cualquier masa (partiendo del reposo)
La velocidad de un objeto al llegar al suelo siempre es

$$v = \sqrt{2gh}$$

Experimentos y sucesos aleatorios

Experimentos aleatorios

Son aquellos que realizados de una misma forma y con las mismas condiciones iniciales, no ofrecen siempre el mismo resultado

Condiciones experimentos aleatorios

- Se puede repetir indefinidamente, siempre bajo las mismas condiciones
- No se puede predecir el resultado del experimento
- El resultado obtenido pertenece a un conjunto de resultados posibles que es conocido previamente

Experimentos y sucesos aleatorios

Espacio muestral

Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

Suceso aleatorio

Cualquier subconjunto del espacio muestral

$$A, B \subset E$$

Experimentos y sucesos aleatorios

Tipos de sucesos aleatorios

- **Suceso seguro:** Aquel que se verifica después del experimento, es decir, el mismo E

$$E \subset E \longrightarrow E$$

- **Suceso imposible:** Aquel que nunca se verifica después del experimento, es decir, el conjunto vacío \emptyset

$$\emptyset \subset E \longrightarrow \emptyset$$

Experimentos y sucesos aleatorios

Tipos de sucesos aleatorios

- **Suceso contrario o complementario:** Es el suceso que se verifica sí, como resultado del experimento aleatorio, no se verifica A

$$A \subset E \longrightarrow \bar{A} = \{e \in E : e \notin A\}$$

Experimentos y sucesos aleatorios

Example

Experimento aleatorio: lanzar un dado al aire y observar el resultado

Sucesos:

- Sucesos elementales: 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Espacio muestral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Sucesos aleatorios:
 - Suceso imposible: \emptyset
 - Suceso seguro: E
 - Suceso complementario: $A = \{2, 4, 6\}$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

Operaciones con sucesos aleatorios

Unión

Dados dos sucesos aleatorios $A, B \subset E$

$$A \cup B = \{e \in E; e \in A \text{ ó } e \in B\}$$

Example

Tiramos un dado

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ y } B = \{3, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

Operaciones con sucesos aleatorios

Intersección

Dados dos sucesos aleatorios $A, B \subset E$

$$A \cap B = \{e \in E; e \in A \text{ y } e \in B\}$$

Example

Tiramos un dado

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ y } B = \{3, 4\}$$

$$A \cap B = \{3\}$$

Operaciones con sucesos aleatorios

Diferencia

Dados dos sucesos aleatorios $A, B \subset E$

$$A - B = \{e \in E; e \in A \text{ y } e \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

Example

Tiramos un dado

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ y } B = \{3, 4\}$$

$$A - B = \{1, 2\}$$

$$B - A = \{4\}$$

Operaciones con sucesos aleatorios

Leyes de Morgan

Dados dos sucesos aleatorios $A, B \subset E$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Nota básica

$$B = B \cap E = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

Noción de Probabilidad

Probabilidad de Laplace

Dado un suceso aleatorio $A \subset E$

$$P(A) = \text{n}^\circ \text{ de casos favorables} / \text{n}^\circ \text{ de casos posibles}$$

Example

Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $A = \{1, 3, 5\} = \text{ser impar}$

$$p(A) = \frac{3}{6}$$

Noción de Probabilidad

Probabilidad frecuencial

En este caso se asigna como probabilidad el límite de la frecuencia relativa.

Frecuencia relativa de una suceso e :

$$f_e = \frac{n_e}{N}$$

$$P(e) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_e$$

Probabilidad subjetiva

Es la cuantificación subjetiva que una persona hace de un evento utilizando la información que posee

Noción de Probabilidad

Probabilidad axiomática

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(E) = 1$
- La prob. de dos sucesos incompatibles (intersección vacía)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- $P(A \cap B) \leq P(A)$ y $P(A \cap B) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) \geq P(A)$ y $P(A \cup B) \geq P(B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- La prob. de dos sucesos no disjuntos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad condicionada

Definición

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propiedades

$$P(A \cap B) = P(A) P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) P(A/B)$$

Teoremas fundamentales del cálculo de probabilidades

Teorema de la probabilidad total

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i)P(A_i)$$

Teorema de Bayes

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i)}$$

Teoremas fundamentales del cálculo de probabilidades

Example

Tenemos dos urnas: U_1 y U_2

$$U_1 = \{3B, 3R\}$$

$$U_2 = \{4B, 2R\}$$

Tiramos una moneda al aire, si sale cara se elige una bola de la 1ª urna y si sale cruz de la segunda, ¿qué probabilidad hay de que la bola que salga sea blanca?

Teoremas fundamentales del cálculo de probabilidades

Example

$$P(U_1) = 1/2 \quad P(U_2) = 1/2$$

$$P(B/U_1) = 3/5 \quad P(B/U_2) = 4/6$$

$$P(B) = P(U_1)P(B/U_1) + P(U_2)P(B/U_2) = 19/30$$