Contrastes de hipótesis paramétricos

Estadística II

Universidad de Salamanca

Curso 2011/2012

Outline

Conceptos fundamentales

Sea $X \rightsquigarrow f_X(x, \theta)$. Desonocemos θ y queremos saber que valor toma este parámetro, lo podemos hacer mediante:

- Estimación puntual
- Estimación por intervalos de confianza
- Test de hipótesis

Hipótesis estadística

Es una afirmación (verdadera o falsa) sobre alguna característica de la población o sobre la distribución de una muestra

Conceptos fundamentales

Tipos de hipótesis

- Paramétricas: afirmación que se hace sobre algún parámetro desconocido de la muestra
- No paramétricas: afirmación sobre la forma o alguna característica general desconocida de la distribución que genera la muestra

Hipótesis nula H_0

Es la hipótesis sobre la que estamos interesados y que se somete a contrastación experimental. Se mantendrá como cierta salvo que en los datos muestrales haya mucha evidencia en su contra

Conceptos fundamentales

Hipótesis alternativa H_1

Es la hipótesis que va encontra de la nula. Recoge posibles alternativas a H_0, en caso de que la nula no sea cierta

Región crítica o de rechazo

Conjunto de muestras u observaciones que hacen rechazar a H_0. Para definir las condiciones que debe cumplir la muestra para rechazar H_0, se utiliza una función que es el estadístico de contraste $T(X_1, \ldots, X_n)$ y que debe verificar desigualdades respecto a un valor, el valor crítico K_α

$$C = \{(x_1, \ldots, x_n / T(X_1, \ldots, X_n) \lesseqgtr K_\alpha)\}$$

El valor crítico es diferente en función de la magnitud del error que comentamos

Conceptos fundamentales

Región de aceptación

Región complementaria a la región crítica. Conjunto de muestras u observaciones que hacen que no rechacemos H_0

$$A = \overline{C} = \{(x_1, \ldots, x_n / T(X_1, \ldots, X_n) \lesseqgtr K_\alpha)\}$$

Conceptos fundamentales

Tipos de hipótesis paramétricas

- Hipótesis simples. Asigna valores puntuales concretos a todos los parámetros del modelo. Bajo esta hipótesis el modelo está totalmente determinado
- Hipótesis compuestas. Asigna un rango de posibles valores a los parámetros

Tipos de hipótesis paramétricas

- Contrastes unilaterales (o de una cola)
- Contrastes bilaterales (o de dos colas)

Conceptos fundamentales

Tipos de errores

- Errores de primer tipo (E_1). Se producen cuando se rechaza H_0 cuando es cierta
  Probabilidad de rechazar H_0 siendo cierta:

$$\alpha = P[E_1] = P_{H_0}[C]$$

- Errores de segundo tipo (E_2). Se producen cuando se acepta H_0 cuando es falsa
  Probabilidad de aceptar H_0 siendo falsa

$$\beta = P[E_2] = P_{H_0}[A] = 1 - P_{H_0}[C]$$

Lo deseable es que $\alpha = \beta = 0$ pero es imposible. Así que fijado un α elegiremos el test que minimize β

Conceptos fundamentales

Tamaño de un test o nivel de significación

Es la máxima probabilidad del error E_1
$\alpha^* = sup\ \alpha = max\ P[E_1]$

Nivel de significación

Es la máxima probabilidad del error E_1

Cuando la hipótesis es simple, el tamaño coincide con el nivel de significación

Conceptos fundamentales

Potencia de un test o contraste

Capacidad de detectar una hipótesis falsa y rechazarla
Probabilidad de rechazar H_0 siendo H_0 falsa

$$\pi = 1 - \beta$$

Para α fijo y pequeño, la potencia expresa el poder o potencia del contraste para conocer que H_0 es falsa

Queremos fijado un α pequeño, encontrar el test con máxima potencia (Test más potente, TMP)

Conceptos fundamentales

P-Valor

Es la probabilidad de que con los datos obtenidos rechacemos H_0 siendo cierta. Es el riesgo, en términos de probabilidad, de rechazar H_0 siendo cierta

Outline

Contraste de Neyman-Pearson

Sea $X \rightsquigarrow f_X(x,\theta)$, $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s de X
Sea $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$ la función de verosimilitud de la muestra X

Razón de verosimilitud

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \frac{L(x_1, \dots, x_n, \theta_0)}{L(x_1, \dots, x_n, \theta_1)}$$

Test

Es aquel que tiene por región crítica

$$C = \{(x_1, \dots, x_n, \theta) / \Delta(x_1, \dots, x_n) \le K_\alpha\}$$