# Tema: Convergencia en variables aleatorias

Estadística II

Universidad de Salamanca

Curso 2011/2012

# Outline

# Convergencia en variables aleatorias

## ¿En qué consiste?

- Es el estudio del comportamiento límite de una secuencia de variables aleatorias
- Los dos resultados básicos son la **ley de los grandes números** y el **teorema central del límite**

# Outline

# Convergencia en variables aleatorias

## Ley de los grandes números

Demuestra que la media muestral cuando $n$ es suficientemente grande, tiende hacia la media poblacional

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. i. id siendo $E(x_i) = \mu$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow E(\overline{X}) = \mu$$

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. i. siendo $E(x_i) = \mu_i$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow E(\overline{X}) = \frac{\mu_1 + \ldots + \mu_n}{n}$$

# Convergencia en variables aleatorias

## Caso particular

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. i. id. tal que $X_i \rightsquigarrow b(p)$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow E(\overline{X}) = p$$

# Outline

# Convergencia en variables aleatorias

## Teorema central del límite

Demuestra la convergencia en distribución hacia una distribución normal, de una sucesión de variables aleatorias

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. i. id siendo $E(x_i) = \mu_i$ y $Var(X_i) = \sigma_i^2$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

# Convergencia en variables aleatorias

## Teorema central del límite: Teorema de Levy-Lindeberg

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. i. id siendo $E(x_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma$ y $n > 30$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N(n.\mu, \sqrt{n}.\sigma) \Longleftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n.\mu}{\sqrt{n}.\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \rightsquigarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \Longleftrightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

# Convergencia en variables aleatorias

## Teorema central del límite: Teorema de Moivre-Laplace

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. i. id. tal que $X_i \rightsquigarrow b(p)$, siendo $E(x_i) = p$, $Var(X_i) = p.q$ y $n > 20$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N(n.p, \sqrt{n.p.q}) \Longleftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n.p}{\sqrt{n.p.q}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow B(n,p) \rightsquigarrow N(n.p, \sqrt{n.p.q})$$

$$\overline{X} \rightsquigarrow N(p, \sqrt{\frac{p.q}{n}}) \Longleftrightarrow \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

# Convergencia en variables aleatorias

## Teorema central del límite: Teorema de Moivre-Laplace

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. i. id. tal que $X_i \rightsquigarrow P(\lambda)$, siendo $E(x_i) = \lambda$, $Var(X_i) = \lambda$ y $\lambda > 20$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N(n.\lambda, \sqrt{n.\lambda}) \Longleftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n.\lambda}{\sqrt{n.\lambda}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$\overline{X} \rightsquigarrow N(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{n}}) \Longleftrightarrow \frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

# Resumen

- $B(n,p) \rightsquigarrow N(n.p, \sqrt{n.p.q})$ cuando $n > 20$ y $p > 0,1$
- $B(n,p) \rightsquigarrow P(\lambda)$, cuando $n > 20$ y $p \leq 0,1$
- $P(\lambda) \rightsquigarrow N(\lambda, \sqrt{\lambda})$ cuando $\lambda > 20$
- $\sqrt{2\chi_n^2} - \sqrt{2n-1} \rightsquigarrow N(0,1)$ cuando $n > 100$
- $t_n \rightsquigarrow N(0,1)$ cuando $n > 30$