Distribuciones unidimensionales discretas

Estadística II

Universidad de Salamanca

Curso 2011/2012

Outline

Distribución de Bernouilli de parámetro p

Experimento de Bernouilli

Es un experimento con sólo dos posibles resultados que son mutuamente excluyentes y exhaustivos

- Éxito, siendo p la probabilidad de éxito
- Fracaso, siendo $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso

Definición

$$X \rightsquigarrow b(p)$$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre un éxito} \quad P[X = 1] = p, \\ 0 & \text{si ocurre un fracaso} \quad P[X = 0] = 1 - p. \end{cases}$$

Distribución de Bernouilli de parámetro p

Función de probabilidad

x_i	0	1
$P[X = x_i]$	$1-p$	p

$$f_X(x) = P[X = x] = p^x(1-p)^{1-x}, \text{ para } x = 0, 1$$

$$0 \leq p \leq 1$$

Características

- $E(X) = p$
- $Var(X) = pq$

Distribución Binomial de parámetros n y p

Definición

Número de éxitos en ‘n” experimentos independientes de Bernouilli con la misma probabilidad de éxito y de fracaso

- Éxito, siendo p la probabilidad de éxito
- Fracaso, siendo $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso

Definición

$$X \rightsquigarrow B(n, p)$$

Distribución Binomial de parámetros n y p

Función de probabilidad

$$f_X(x) = P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{1-x}, \text{ para } x = 0, 1, \ldots, n$$

$$0 \leq p \leq 1$$

Características

- $E(X) = np$
- $Var(X) = npq$

Distribución Binomial de parámetros n y p

Números combinatorios

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$

Distribución Binomial de parámetros n y p

Propiedades

- Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ v.a.i.id $X_i \rightsquigarrow b(p) = B(1, p) \Rightarrow$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow B(n, p)$$

- Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ v.a.i.id $X_i \rightsquigarrow B(n_i, p) \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \rightsquigarrow B(\sum_{i=1}^{m} n_i, p)$$

Distribución Binomial de parámetros n y p

Propiedades

- Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ v.a.i.id $X_i \rightsquigarrow B(n,p) \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \rightsquigarrow B(m.n, p)$$

- Sean X e Y dos v.a.d tal que $X \rightsquigarrow B(n,p)$ $Y \rightsquigarrow B(n, p-1)\Rightarrow$

$$P[X = k] = P[Y = n - k]$$

Distribución Uniforme discreta de parámetro N

Definición

Una v.a.d X es una uniforme discreta de parámetro N si toma N valores distintos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, cada uno de ellos con la misma probabilidad

Función de probabilidad

$$f_X(x) = P[X = x] = \frac{1}{N} \text{ para } x = 1, 2, \ldots, N \text{ y } N = 1, 2, \ldots$$

Características

- $E(X) = \frac{N+1}{2}$
- $Var(X) = \frac{N^2-1}{12}$

Distribución de Poisson

Definición

Se realizan experimentos independientes de Bernoulli y se contabilizan los éxitos en un intervalo de tiempo determinado o en un espacio concreto

- λ es la media de ocurrencia de los éxitos
- X es el número de éxitos ocurridos en un intervalo de tiempo determinado o en un espacio concreto

Definición

$$X \rightsquigarrow P(\lambda)$$

Distribución de Poisson

Función de probabilidad

$$f_X(x) = P[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \text{ para } x = 0, 1, \ldots,$$

$$\lambda > 0$$

Características

- $E(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$

Distribución de Poisson

Propiedades

- $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots = e^{\lambda}$
- Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ v.a.i.id $X_i \rightsquigarrow P(\lambda_i) \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow P(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

- Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ v.a.i.id $X_i \rightsquigarrow P(\lambda) \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow P(n.\lambda)$$

Distribución de Poisson

Propiedades

- Sean X e Y dos v.a.d.ind. tal que $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ $Y \rightsquigarrow P(\lambda) \Rightarrow$

$$X + Y \rightsquigarrow P(2.\lambda)$$

$$\frac{X}{X+Y}.n \rightsquigarrow B(n, \frac{1}{2})$$

$$\frac{Y}{X+Y}.n \rightsquigarrow B(n, \frac{1}{2})$$

Distribución de Poisson

Propiedades

- Sean X e Y dos v.a.d.ind. tal que $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ $Y \rightsquigarrow P(\mu) \Rightarrow$

$$X + Y \rightsquigarrow P(\lambda + \mu)$$

$$\frac{X}{X+Y}.n \rightsquigarrow B(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu})$$

$$\frac{Y}{X+Y}.n \rightsquigarrow B(n, \frac{\mu}{\lambda + \mu})$$

- Sean X e Y dos v.a.d.ind. tal que $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ $\frac{Y}{X} = x \rightsquigarrow B(x, p) \Rightarrow Y \rightsquigarrow P(\lambda.p)$

Distribución Geométrica

Definición

Se realizan experimentos independientes de Bernoulli y se contabilizan los fracasos antes del primer éxito. Nos fija el ensayo en el que ocurre el éxito

- p es la probabilidad de éxito
- q es la probabilidad de fracaso
- X número de fracasos antes del primer éxito

Definición

$$X \rightsquigarrow G(p)$$

Distribución Geométrica

Función de probabilidad

$$f_X(x) = P[X = x] = p\,q^x = p\,(1-p)^x, \text{ para } x = 0, 1, \ldots,$$

$$0 \leq p \leq 1$$

Características

- $E(X) = \frac{q}{p}$
- $Var(X) = \frac{q}{p^2}$

Distribución Geométrica

Propiedades

- Suma infinita de una progresión geométrica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

siendo $r = q$ y $|r| < 1$

- Suma finita de una progresión geométrica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} = \frac{1-q^{n+1}}{p}$$

Distribución Binomial Negativa

Definición

Se realizan experimentos independientes de Bernoulli y se contabilizan los fracasos antes del r-ésimo éxito. Nos fija el ensayo en el que ocurre el r-ésimo éxito

- p es la probabilidad de éxito
- q es la probabilidad de fracaso
- X número de fracasos antes del r-ésimo éxito

Definición

$$X \rightsquigarrow B(r, p) \text{ con } r \geq 2$$

Distribución Binomial Negativa

Función de probabilidad

$$f_X(x) = P[X = x] = \binom{x+r-1}{x} p^r (1-p)^x, \text{ para } x = 0, 1, \ldots, n$$

$$0 < p \leq 1$$

Características

- $E(X) = r\frac{q}{p}$
- $Var(X) = r\frac{q}{q^2}$

Distribución Binomial Negativa

Propiedades

- Sean X e Y dos v.a.d.ind. tal que $X \rightsquigarrow BN(r_1, p)$ $Y \rightsquigarrow BN(r_2, p) \Rightarrow$

$$X + Y \rightsquigarrow B(r_1 + r_2, p)$$

- Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ v.a.i.id $X_i \rightsquigarrow BN(r_i, p) \Rightarrow$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow BN\left(\sum_{i=1}^{n} r_i, p\right)$$

Distribución Binomial Negativa

Propiedades

- Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ v.a.i.id $X_i \rightsquigarrow BN(r, p) \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow BN\left(n.r, p\right)$$

- Sean $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ v.a.i.id $X_i \rightsquigarrow G(p) \Rightarrow$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow BN\left(r, p\right)$$

Distribución Hipergeométrica

Experimento

Se realizan "n" extracciones sin reposición de una urna con N bolas ($N = 1, 2, \ldots$) de las cuales N_1 son blancas y N_2 son negras

- $p = \frac{N_1}{N}$ es la probabilidad de obtener una bola blanca
- X número de bolas blancas obtenidas en las "n" extracciones

Definición

$$X \rightsquigarrow H(N, n, p)$$

Distribución Hipergeométrica

Función de probabilidad

$$f_X(x) = P[X = x] = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$max(0, n - N_2) \leq k \leq min(n, N_1)$$

Características

- $E(X) = np$
- $Var(X) = npq(\frac{N-n}{N-1})$

Distribución Hipergeométrica

Propiedad

- Si $N > 50$ y $\frac{n}{N} \leq 0,1$

$$X \rightsquigarrow H(N, n, p) \approx X \rightsquigarrow B(n, p)$$