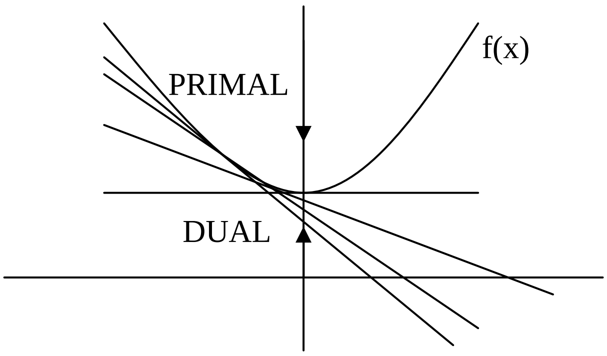
C A P Í T U L O 3

D U A L I D A D

3.1.- Introducción

Supongamos que tenemos que encontrar el valor mínimo de la función f(x). Encontrar este mínimo (problema PRIMAL) equivale a encontrar el máximo (problema DUAL) del valor de los cortes de sus tangentes con el eje de ordenadas.



A todo problema de Programación lineal se le puede asociar otro problema lineal al que denominaremos DUAL del primero. Al problema original se le llama PRIMAL.

La solución de cualquiera de los dos problemas anteriores por el procedimiento del simplex proporciona determinada información relativa al otro. Así, a la luz de la formulación que hagamos del problema de programación lineal, se resolverá éste y podremos utilizar la información contenida en la última tabla del simplex para deducir la solución del otro.

Conocer la relación entre un *problema de programación lineal* y su *dual* es vital para entender temas avanzados en programación lineal y no-lineal.

Si el PRIMAL es un problema de minimización su DUAL será un problema de maximización y viceversa. Por conveniencia las variables del PRIMAL serán z (función objetivo) y sus variables x_i y las variables para el problema de minimización serán z (función objetivo) y sus variables λ_j. Veremos como encontrar el DUAL de un problema PRIMAL de maximización, con todas sus variables no-negativas y cuyas restricciones son todas del tipo *mayor o igual (Problema estándar de maximización)*

En este capítulo se desarrollarán algunos teoremas y propiedades relativas a los problemas duales, así como las relaciones existentes entre los problemas PRIMAL-DUAL.

En el capítulo anterior vimos que, para resolver un problema de Programación Lineal, transformábamos éste a su formulación estándar, es decir, transformábamos las desigualdades en igualdades. Ahora trabajaremos con los problemas con las desigualdades puestas todas en el mismo sentido.

Vamos a ver un ejemplo que nos ayude a situarnos frete al problema PRIMA-DUAL. Una granja compra, para el engorde de animales, dos tipos de alimento los cuales deben cumplir una serie de requisitos para cubrir sus objetivos según se recoge en la tabla siguiente:

		Alimento tipo		Requerimiento mínimo (kg/animal/día)
		I/kg	II/kg	
Componente nutritivo (kg)	CN1	0.1	0	0.4
	CN2	0	0.1	0.6
	CN3	0.1	0.2	2.0
	CN4	0.2	0.1	1.7
Precio (€/kg)		10	4	

a) ¿Cuántos kg conviene comprar de cada uno de los alimentos?
b) Consideremos ahora el caso de un comerciante, el cual dispone para la venta los componentes nutritivos que se necesitan para alimentar al ganado. Es de su interés determinar el precio a que debe vender dichos componentes sin superar en conjunto el precio de los alimentos que vende su competidor.

a) PRIMAL	b) DUAL

Min $z=10\, x_1 + 4\, x_2$ st $0.1\, x_1 \geq 0.4$; $0.1\, x_2 \geq 0.6$; $0.1\, x_1 + 0.2\, x_2 \geq 2$; $0.2\, x_1 + 0.1\, x_2 \geq 1.7$; $x_1, x_2 \geq 0$	Max $z=0.4\, y_1 + 0.6\, y_2 + 2\, y_3 + 1.7\, y_4$ st $0.1\, y_1 + 0\, y_2 + 0.1\, y_3 + 0.2\, y_4 \leq 10$; $0\, y_1 + 0.1\, y_2 + 0.2\, y_3 + 0.1\, y_4 \leq 4$; $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Si se compara los dos planteamientos se puede observar lo siguiente:

- Los primeros miembros del primer problema son coeficientes de la función objetivo del segundo y viceversa.
- La matriz de coeficientes de un problema es la transpuesta de la matriz de coeficientes del otro problema.
- Un problema minimiza y el otro maximiza.
- Si todas las desigualdades tienen el mismo sentido, el otro problema tiene desigualdades de sentido contrario, problema simétrico.
- Si uno de los dos problemas tiene una igualdad el otro tiene una variable libre y viceversa.
- Uno de los problemas se llama PRIMAL y el otro DUAL.
- Los problemas duales existen siempre, aunque no se le encuentre sentido.

3.2. Teoremas de la Dualidad

Teorema 3.1. (Homogéneo de Minkowski - Farkas)
$c^TX \geq 0$ es consecuencia de $AX \geq 0$ si y sólo si existe un $\lambda \geq 0$ tal que $c^T=\lambda^TA$.

Demostración:
Condición necesaria. Razonando por reducción al absurdo, suponemos que no podemos encontrar un $\lambda \geq 0$ tal que $c^T \cdot= \lambda^TA$, esto implica que c^T no pertenece al cono convexo engendrado por $A_1, A_2,\ldots, A_p$, luego está fuera. Existirá, por tanto, un hiperplano de separación H tal que uno de los semiespacios contendrá a c^T y el otro al cono convexo.

Consideremos un vector X perpendicular al hiperplano H y en el mismo semiespacio en el que se encuentra el cono convexo. Tenemos:

$$A_1X \geq 0$$
$$A_2X \geq 0$$

....

$A_pX \geq 0$

Es decir, $A_1X \geq 0$, pero $c^TX < 0$ en contra de que por hipótesis $c^TX \geq 0$. Por tanto, ha de existir un $\lambda \geq 0$ tal que $c^T = \lambda^TA$.

Condición suficiente. Si existe un $\lambda \geq 0$ tal que $c^T = \lambda^TA$, tendremos, multiplicando $A X \geq 0$ por λ^T que $\lambda^TA X \geq 0$ es consecuencia de $A X \geq 0$.

Teorema 3.2. (No homogéneo de Minkowski - Farkas)

$c^TX \geq z_0$ es consecuencia de $AX \geq b$ si y sólo si existe un $\lambda \geq 0$ tal que $c^T=\lambda^TA$ y $\lambda^T b \geq z_0$.

Demostración:

Tenemos $AX \geq b$ y, pasando b al primer miembro $AX - b \geq 0$, multiplicando esta expresión por $\alpha \geq 0$, resulta: $\alpha AX - \alpha b \geq 0$ (3.1)

Operando de igual forma con $c^TX \geq z_0$, tenemos $c^TX - z_0 \geq 0$, multiplicando esta expresión por $\alpha \geq 0$, $\alpha \in R$, resulta: $\alpha c^T \cdot X - \alpha z_0 \geq 0$ (3.2)

Llamando $\alpha X = X_1$ y reuniendo (3.1) y (3.2) tenemos:

$$A X_1 - \alpha b \geq 0$$
$$c^T X_1 - \alpha z_0 \geq 0$$

Si $c^TX \geq z_0$ era consecuencia de $AX \geq b$, tendremos que $c^TX_1 - \alpha z_0 \geq 0$ es consecuencia de $A X_1 - \alpha b \geq 0$, es decir,

$$(c^T, - z_0) \begin{pmatrix} X_1 \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0$$

es consecuencia de

$$\begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0$$

estaríamos en el caso homogéneo ya estudiado en el *teorema 3.1*. Para que esto sea cierto es condición necesaria y suficiente que exista $\begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \end{pmatrix} \geq 0$ tal que

$$(c^T, -z_0) = (\lambda^T, \beta)\begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y operando llegamos a:

$$c^T = \lambda^T A$$

$$-z_0 = -\lambda^T b + \beta, \quad z_0 = \lambda^T b - \beta$$

y como $\beta \geq 0$, $\beta \in R$, implica que, $z_0 \leq \lambda^T b$, por lo tanto existe un $\lambda \geq 0$ tal que

$$c^T = \lambda^T A \text{ y } \lambda^T b \geq z_0$$

3.3. El problema DUAL de un problema lineal

Consideremos un problema de Programación Lineal escrito en la forma:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\text{st} \\ &AX = b \\ &X \geq 0 \end{aligned}$$

Si incorporamos las restricciones $X \geq 0$ al sistema, el problema quedaría formulado del siguiente modo:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\text{st} \\ &A_1 X \geq b_1 \end{aligned}$$

donde las matrices A_1 y b_1 tienen $m+n$ filas y vienen dadas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.3. (*Teorema fundamental de la DUALIDAD*)
El mínimo finito del problema PRIMAL

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\text{st} \\ &\quad A_1 X \geq b_1 \end{aligned}$$

coincide con el máximo del DUAL del PRIMAL

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = \lambda^T b_1 \\ &\text{st} \\ &\quad A_1^T \lambda = c \\ &\quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Demostración:
Sea X_0 la solución óptima del problema PRIMAL y sea z_0 el valor que toma la función objetivo en ese punto, esto es $z_0 = c^T X_0$.

Cualquier solución factible X del problema PRIMAL , $A_1X \geq b_1$, verifica que $c^TX \geq z_0$, es decir, $c^TX \geq z_0$ es consecuencia de $A_1X \geq b_1$ y, según el teorema de Minkowski-Farkas, es condición necesaria y suficiente que exista un λ tal que

$$\begin{aligned} &A_1^T \lambda = c \\ &\lambda \geq 0 \\ &\lambda^T b \geq z_0. \end{aligned}$$

Cualquier solución factible X del problema PRIMAL satisface $A_1X \geq b_1$. Si multiplicamos por $\lambda_0{}^T$ la expresión anterior solución de

$$\begin{aligned} &A_1^T \lambda = c \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned}$$

tenemos

$\lambda_0{}^T A_1 X \geq \lambda_0{}^T b_1, \quad c^T X \geq \lambda_0{}^T b_1$

Lo anterior nos indica que el valor de la función objetivo del problema PRIMAL para cualquier solución factible es siempre mayor o igual que el valor de la función objetivo del problema DUAL.

Dado que X_0 es una solución factible, verificará que

$z_0 = c^T X_0 \geq \lambda_0{}^T b_1$

Si λ_0 verifica, además, $\lambda_0{}^T b_1 \geq z_0$, tendremos

$z_0 = c^T X_0 \geq \lambda_0{}^T b_1 \geq z_0$

Podemos concluir que $c^T X_0 = \lambda_0{}^T b_1$, es decir, existe un par de soluciones del problema PRIMAL-DUAL para las cuales las funciones objetivo toman el mismo valor; dichas soluciones son Min $z = c^T X$ y Max $z = \lambda^T b$.

La siguiente tabla proporciona la descripción de cada uno de los elementos del problema PRIMAL-DUAL.

Problema	***Elemento***	***Dimensión***	***Característica***
PRIMAL	**X**	Vector columna con *n* componentes	Vector de variables del PRIMAL
	c	Vector renglón con *n* componentes	Vector de precios unitarios del PRIMAL
	b	Vector columna con *m* componentes	Vector de recursos del PRIMAL
	A	Matriz de *m* x *n*	Matriz de coeficientes técnicos
	z	Escalar	Función objetivo
	0	Vector columna con *n* ceros	
DUAL	λ	Vector columna con *m* componentes	Vector de variables del DUAL
	$\mathbf{c^T}$	Transpuesta del vector c	Vector de recursos del DUAL

	$\mathbf{b}^T$	Transpuesta del vector b	Vector de precios unitarios del DUAL
	$\mathbf{A}^T$	Transpuesta de la matriz A	Matriz de coeficientes técnicos
	z	Escalar	Función objetivo del DUAL
	0	Vector columna con *m* ceros	

Teorema 3.4. Si el problema PRIMAL no tiene solución finita, el problema DUAL no tiene soluciones factibles.

Demostración

En la demostración del teorema anterior vimos que se verifica siempre que

$$c^T \cdot X \geq \lambda^T b_1$$

Luego si el problema PRIMAL no está acotado inferiormente, es decir, no tiene solución finita, entonces se verifica que el min $c^T X = -\infty$, esto implica que no puede darse la relación $-\infty \geq \lambda^T b_1$, por lo que no puede existir un λ solución factible del DUAL que verifique la inecuación anterior, de ahí que, el conjunto de soluciones factibles del DUAL sea vacío.

3.4. Formulación del problema DUAL

Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\text{st} \\ &\quad A_1 X \geq b_1 \end{aligned}$$

Si lo desarrollamos:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\ &\quad \text{st} \\ &\quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ &\quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \geq b_m \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x_2 \geq 0$$
$$\ldots\ldots.$$
$$x_n \geq 0$$

Su problema DUAL, por el teorema fundamental de la dualidad, sabemos que es:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = \lambda^T b \\
&\text{St} \\
&A^T{}_1\lambda = c \\
&\lambda \geq 0
\end{aligned}$$

desarrollado:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_m b_m + 0\,\lambda'_1 + \ldots. + 0\,\lambda'_n \\
&\quad \text{st} \\
&\quad a_{11} \lambda_1 + a_{21} \lambda_2 + \ldots + a_{m1} \lambda_m + \lambda'_1 = c_1 \\
&\quad a_{12} \lambda_1 + a_{22} \lambda_2 + \ldots + a_{m2} \lambda_m + \lambda'_2 = c_2 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad a_{1n} \lambda_1 + a_{2n} \lambda_2 + \ldots + a_{mn} \lambda_m + \lambda'_n = c_n \\
&\qquad \lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m \\
&\qquad \lambda'_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}$$

Si en el desarrollo anterior consideramos a los $\lambda'_i \geq 0$ como variables de holgura, entonces el problema anterior se expresaría de la forma:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_m b_m \\
&\quad \text{st} \\
&\quad a_{11} \lambda_1 + a_{21} \lambda_2 + \ldots + a_{m1} \lambda_m \leq c_1 \\
&\quad a_{12} \lambda_1 + a_{22} \lambda_2 + \ldots + a_{m2} \lambda_m \leq c_2 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad a_{1n} \lambda_1 + a_{2n} \lambda_2 + \ldots + a_{mn} \lambda_m \leq c_n \\
&\qquad \lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}$$

Por todo lo anterior podemos concluir que, dado el problema PRIMAL de un problema de programación lineal

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = c^T X \\
&\text{st} \\
&AX \geq b
\end{aligned}$$

$$X \geq 0$$

su DUAL asociado es

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = \lambda^T b \\
&\text{st} \\
&A^T\lambda \leq c \\
&\lambda \geq 0
\end{aligned}$$

Los problemas así planteados se denominan forma simétrica de la dualidad.

Un par de problemas PRIMAL-DUAL está en forma simétrica si ambos vienen expresados en forma canónica.

Para desterrar la creencia de que existe una relación entre el sentido de las desigualdades del problema PRIMAL-DUAL, queremos resaltar el hecho de que las restricciones de desigualdad, $A^T\lambda \leq c$, del problema DUAL son consecuencia de las restricciones de no negatividad, $X \geq 0$, del problema PRIMAL.

Veamos, a continuación, las distintas formulaciones del problema PRIMAL-DUAL:

Sea el problema PRIMAL formulado en su forma estándar:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = c^T X \\
&\text{st} \\
&AX = b \\
&X \geq 0
\end{aligned}$$

Para expresarlo en su forma DUAL, lo primero que haremos será poner el problema PRIMAL en su forma canónica. Para ello escribiremos todas las restricciones en el mismo sentido

$$\text{Min } z = c^T X$$

st

$AX \geq b$

$AX \leq b$, multiplicando ésta expresión por (-1) tenemos

$-AX \geq - b$

$X \geq 0$

El problema estaría ya escrito en forma canónica y sabemos que su DUAL es:

$$\text{Max } z = (\lambda_1^T \cdot b - \lambda_2^T \cdot b) = (\lambda_1^T - \lambda_2^T)\, b$$

$$\begin{aligned} &st\\ &A^T\lambda_1 - A^T\lambda_2 \le c\\ &\lambda_1, \lambda_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Sacando factor común, tenemos

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = (\lambda_1^T - \lambda_2^T)\, b\\ &st\\ &A^T(\lambda_1 - \lambda_2) \le c\\ &\lambda_1, \lambda_2 \ge 0 \end{aligned}$$

llamando $\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2)$ y, dado que es la diferencia de dos vectores no negativos, tendremos un vector, λ, de signo libre.

El problema DUAL queda:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = \lambda^T b\\ &st\\ &A^T\lambda \le c\\ &\lambda \text{ con signo libre} \end{aligned}$$

El problema PRIMAL - DUAL se puede escribir:

PRIMAL	DUAL
Min $z = c^TX$ st $AX = b$ $X \ge 0$	Max $z = \lambda^T b$ st $A^T\lambda \le c$ λ con signo libre

Resaltar nuevamente el hecho de que el sentido de las desigualdades del problema DUAL ($\le$) viene determinado por las restricciones de no negatividad, $X \ge 0$, del problema PRIMAL.

Razonando de la misma forma para el resto de formulaciones, tenemos:

PRIMAL	DUAL
Min $z = c^TX$ st	Max $z = \lambda^T b$ st

$AX \geq b$ X con signo libre	$A^T\lambda = c$ $\lambda \geq 0$

PRIMAL	DUAL
Min $z = c^T X$ st $AX = b$ X con signo libre	Max $z = \lambda^T b$ st $A^T\lambda = c$ λ con signo libre

Veamos algunos ejemplos:

Ejercicio 3.4.1. Obtener el problema dual del problema:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } & z = x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{st } & x_1 + x_2 - 3x_3 = 6 \\
& -x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\
& x_1 , x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución. El problema DUAL es:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & z = 6 \lambda_1 - 2 \lambda_2 \\
\text{st } & \lambda_1 - \lambda_2 \geq 1 \\
& \lambda_1 - 2 \lambda_2 = 2 \\
& -3 \lambda_1 + \lambda_2 \geq -1
\end{aligned}
$$

en el que las restricciones 1 y 3 son de $\geq$ porque las variables x_1 , x_3 están restringidas a ser no negativas. La segunda restricción es de igualdad porque x_2 puede tomar cualquier signo.

Las variables duales pueden tomar cualquier signo porque las restricciones del PRIMAL son de igualdad.

Ejercicio 3.4.2. Obtener el problema DUAL del problema:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } & z = x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{st } & x_1 + x_2 - 3x_3 = 6 \\
& -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución. El problema DUAL es:

$$\begin{aligned} \text{Min } & z = 6\,\lambda_1 - 2\,\lambda_2 \\ \text{st } & \lambda_1 - \lambda_2 \geq 1 \\ & \lambda_1 - 2\,\lambda_2 = 2 \\ & -3\,\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ & \lambda_2 \geq 0 \end{aligned}$$

en el que la restricción 1 es de $\geq$ porque la variable x_1 está restringida a ser "no negativa". La segunda y tercera restricciones son de igualdad porque x_2, x_3 pueden tomar cualquier signo.

La variable dual λ_1 puede tomar cualquier signo porque la primera restricción es de igualdad. La variable dual λ_2 es "no negativa" porque la segunda restricción del PRIMAL es de "$\leq$".

Ejercicio 3.4.3. Obtener la solución del problema dual del problema:

$$\begin{aligned} \text{Max } & z = x_1 + 2\,x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{st } & x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 5 \\ & 2\,x_1 - x_2 + x_4 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Escribimos el problema en forma estándar del PRIMAL:

$$\begin{aligned} \text{Min } & z = -\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{st } & x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 5 \\ & 2\,x_1 - x_2 + x_4 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos el problema mediante la tabla del simplex:

Primera tabla:

		c_j	-1	-2	1	-1	
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	θ_2
$\mathbf{A_3}$	1	5	1	2	1	0	5/2
$\mathbf{A_4}$	-1	8	2	-1	0	1	---
	z, z_j, θ_j	-3	-1	3	1	-1	5/2
		z_j-c_j	0	**5**	0	0	

Observando los resultados de la tabla vemos que entra el vector $\mathbf{A_2}$ y sale $\mathbf{A_3}$.

Segunda tabla:

		c_j	-1	-2	1	-1	
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	θ
$\mathbf{A_2}$	-2	5/2	1/2	1	1/2	0	
$\mathbf{A_4}$	-1	21/2	5/2	0	1/2	1	---
	z, z_j, θ_j	-31/2	-7/2	-2	-3/2	-1	
		z_j-c_j	-5/2	0	-5/2	0	

Observando la tabla tenemos $(z_j - c_j) \leq 0$, $\forall j$ (j=1, 2, ..., n), por lo que hemos llegado a la etapa final. Para buscar la solución dentro de la tabla miramos la columna **b** y encontramos:

$x_1= 0$, $x_2 = 5/2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 21/2$,

Recordando que el problema original es de maximización, tenemos

$z = - (-31/2)= 31/2$

Aplicando ahora el multiplicador del simplex para calcular la solución del problema DUAL del problema transformado, tenemos:

$$B^{-1}= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^T= c_B{}^T B^{-1}= (-2, -1) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} =(-3/2, -1)$$

luego la solución del dual es: $\lambda_1 = -3/2$, $\lambda_2 = - 1$.

Otra forma de obtener la solución del DUAL es observar la base canónica inicial B ={ $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{A_4}$}, por tanto la solución del dual es: $\lambda_1= -z_3 = 3/2$, $\lambda_2 = -z_4 = 1$.

Ejercicio 3.4.4. Vamos a resolver un ejercicio desde el punto de vista PRIMAL-DUAL simétrico:

Problema PRIMAL:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = x_1+3x_2 \\ &\text{st} \\ &\quad x_1+4x_2 \geq 24 \\ &\quad 5x_1+x_2 \geq 25 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

La primera tabla del simplex es

		c_j	1	3	0	0	M	M
Base	c_B	**b**	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**
A_5	M	24	1	4	-1	0	1	0
A_6	M	25	5	1	0	-1	0	1
	z, z_j, θ_j	49M	6M	5M	-M	-M	M	M
		z_j-c_j	6M-1	5M-3	-M	-M	0	0

La última tabla del simplex es

		c_j	1	3	0	0	M	M
Base	c_B	**b**	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**
A_2	3	5	0	1	-5/19	1/19	-	-
A_1	1	4	1	0	1/19	-4/19	-	-
	z, z_j, θ_j	19			-14/19	-1/19		
		z_j-c_j	0	0	-14/19	-1/19	-	-

Observando la tabla tenemos: z = 19; x_1=4, x_2= 5.

Aplicando ahora el multiplicador del simplex para obtener la solución del DUAL

Tomando la matriz inversa como

$$B'^{-1}= \begin{pmatrix} -5/19 & 1/19 \\ 1/19 & -4/19 \end{pmatrix}$$

auque estrictamente hablando no es la matriz inversa; la matriz inversa es:

$$B^{-1}= \begin{pmatrix} 5/19 & -1/19 \\ -1/19 & 4/19 \end{pmatrix}$$

El cambio de signo se debe al sentido de las desigualdades (≥).

$$\lambda^T= c_B^T B'^{-1}= (3, 1) \begin{pmatrix} -5/19 & 1/19 \\ 1/19 & -4/19 \end{pmatrix} =(-14/19, -1/19)=(-0.736842, -0.052632)$$

valor que coincide con el que nos proporciona el programa LINDO (DUAL PRICES)

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      19.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST: (zj - cj)
      X1         4.000000          0.000000
      X2         5.000000          0.000000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES:(zj - cj)= zj
      2)         0.000000          -0.736842(-λ1)  (Ver tabla del Simplex)
      3)         0.000000          -0.052632(-λ2)

 NO. ITERATIONS=       2

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1        1.000000        14.000000         0.250000
       X2        3.000000         1.000000         2.800000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        2       24.000000        76.000000        19.000000
        3       25.000000        95.000000        19.000000


 THE TABLEAU

  ROW  (BASIS)      X1         X2        SLK 2      SLK 3
   1 ART           0.000      0.000      0.737      0.053   -19.000
   2       X1      1.000      0.000      0.053     -0.211     4.000
   3       X2      0.000      1.000     -0.263      0.053     5.000
```

Tenemos que hacer notar que, en la última columna de la tabla ofrecida por el programa LINDO (THE TABLEAU), tenemos la solución:

$z = -19; \quad x_1=4, \quad x_2= 5$

El signo menos que aparece en z (z = -19) es debido a que el programa LINDO trabaja maximizando y el algoritmo del simplex y, por tanto, las tablas que utilizamos para su desarrollo lo hacen minimizando. Recordando que Min z = Max (-z), tenemos

$z = 19$; $x_1=4$, $x_2= 5$

Desarrollando el problema anterior desde el punto de vista del DUAL:

$$\begin{aligned}&\text{Max } z = 24\lambda_1+25\lambda_2\\&\text{st}\\&\quad \lambda_1+ 5\lambda_2 \le 1\\&\quad 4\lambda_1+ \lambda_2 \le 3\\&\quad \lambda_1, \lambda_2 \ge 0\end{aligned}$$

Escribiendo la última tabla del simplex:

		c_j	-24	-25	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$
$\mathbf{A_2}$	-25	1/19	0	1	4/19	-1/19
$\mathbf{A_1}$	-24	14/19	1	0	-1/19	5/19
	z, z_j, θ_j	-19			-4	-5
		z_j-c_j	0	0	-4	-5

Debido a la simetría de la formulación, su interpretación es también simétrica:

$$z = -19,\quad \lambda_1(L1)= 14/19,\quad \lambda_2\,(L2) = 1/19$$

Recordar que hay que cambiar de signo a la función objetivo, es decir, $z = 19$.

La solución anterior la podemos obtener sólo con mirar la salida que nos proporciona LINDO

```
 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      19.00000
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        L1         0.736842          0.000000
        L2         0.052632          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          4.000000
        3)         0.000000          5.000000

 NO. ITERATIONS=       2

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
```

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
L1	24.000000	76.000000	19.000000
L2	25.000000	95.000000	19.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	1.000000	14.000000	0.250000
3	3.000000	1.000000	2.800000

THE TABLEAU

ROW	(BASIS)	L1	L2	SLK 2	SLK 3	
1	ART	0.000	0.000	4.000	5.000	19.000
2	L2	0.000	1.000	0.211	-0.053	0.053
3	L1	1.000	0.000	-0.053	0.263	0.737

Proposición 3.1. El DUAL del DUAL es el PRIMAL.

Demostración

La demostración la haremos para el par de problemas PRIMAL-DUAL simétricos; del mismo modo se razonaría si los problemas son asimétricos.

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\text{st} \\ &AX \geq b \\ &X \geq 0 \end{aligned}$$

Su DUAL asociado es

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = \lambda^T b \\ &\text{st} \\ &A^T\lambda \leq c \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Si multiplicamos por (-1) el DUAL:

$$\begin{aligned} &\text{Max } (-z) = \text{Min } z = -\lambda^T b \\ &\text{st} \\ &-A^T\lambda \geq -c \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned}$$

que puede escribirse

$$\begin{aligned}&\text{Min } z = \lambda^T (- b)\\&\text{st}\\&(-A)^T\lambda \geq - c\\&\lambda \geq 0\end{aligned}$$

el problema está escrito ahora en la forma del PRIMAL simétrico, luego su DUAL se escribe:

$$\begin{aligned}&\text{Max } z = - c^T X\\&\text{st}\\&(-A)X \leq - b\\&X \geq 0\end{aligned}$$

Rescribiendo el problema, tenemos:

$$\begin{aligned}&\text{Min } z = c^T X\\&\text{st}\\&AX \geq b\\&X \geq 0\end{aligned}$$

que es el problema PRIMAL.

Resumiendo los resultados anteriormente obtenidos, tenemos:

PRIMAL		DUAL
Óptimo finito	$\Leftrightarrow$	Óptimo finito
Óptimo no finito	$\Rightarrow$	No soluciones factibles
No soluciones factibles	$\Rightarrow$	No soluciones factibles Óptimo no finito
No soluciones factibles	$\Leftarrow$	Óptimo no finito
No soluciones factibles Óptimo no finito	$\Leftarrow$	No soluciones factibles

Completando la tabla anterior resumiremos en sendas tablas la correspondencia PRIMAL-DUAL en lo que se refiere al signo de las desigualdades:

PRIMAL (Max) DUAL (Min)	PRIMAL (Min) DUAL (Max)
Restricciones $\leq$ $\rightarrow$ $\lambda_i \geq 0$	Restricciones $\leq$ $\rightarrow$ $\lambda_i \leq 0$
Restricciones $\geq$ $\rightarrow$ $\lambda_i \leq 0$	Restricciones $\geq$ $\rightarrow$ $\lambda_i \geq 0$
Restricciones = $\rightarrow$ λ_i signo libre	Restricciones = $\rightarrow$ λ_i signo libre
$x_i \geq 0$ $\rightarrow$ Restricciones $\geq$	$x_i \geq 0$ $\rightarrow$ Restricciones $\leq$

$x_i \leq 0 \;\rightarrow\;$ Restricciones $\leq$	$x_i \leq 0 \;\rightarrow\;$ Restricciones $\geq$
x_i signo libre $\rightarrow\;$ Restricciones =	x_i signo libre $\rightarrow\;$ Restricciones =

Ejercicio 3.4.5. Dado el siguiente programa lineal

$$\begin{array}{l} \text{Min } z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + x_4 - 6 \cdot x_5 \\ \text{st} \\ \quad x_1 + \; x_2 + x_3 + x_4 + \; x_5 \leq 12 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 + \; x_5 \geq 4 \\ \qquad\qquad x_1 + \; x_2 - x_3 \leq 0 \\ 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 + x_4 - 2 \cdot x_5 \leq 0 \\ x_1 , x_4 , x_5 \geq 0 ;\; x_2 , x_3 \text{ sin restricciones} \end{array}$$

determinar el programa dual.

Solución. Como el problema planteado es de mínimo, el dual será del tipo Max. Si denominamos por la letra y las variables duales, entonces las variables y_1, y_3 e y_4 serán negativas pues las desigualdades correspondientes en el programa primal son del tipo menor o igual. Por otra parte las restricciones segunda y tercera del dual han de ser del tipo igualdad pues las variables primales correspondientes no están restringidas, mientras que las otras tres restricciones duales serán del tipo menor o igual tal como corresponde a un programa del tipo Max pues las variables primales son positivas o nulas. En definitiva el programa dual será:

$$\begin{array}{l} \text{Max } w = 12\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ \text{st} \\ \lambda_1 + \lambda_3 + 6\lambda_4 \;\leq 3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + 3.\, \lambda_4 = 2 \\ \qquad \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 = 5 \\ \quad \lambda_1 + \lambda_2 \;\; + \lambda_4 \leq 1 \\ \quad \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4 \leq -6 \\ \lambda_1, \lambda_3 , \lambda_4 \leq 0 ;\; \lambda_2 \geq 0 \end{array}$$

3.5. Condiciones de holgura complementaria

Consideremos el problema PRIMAL dado en forma canónica

$$\begin{array}{l} \text{Min } z = c^T X \\ \quad \text{st} \\ \qquad AX \geq b \\ \qquad\; X \geq 0 \end{array}$$

Su DUAL asociado en forma canónica es

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = \lambda^T b \\ \quad \text{st} \\ \qquad A^T\lambda \le c \\ \qquad\quad \lambda \ge 0 \end{array}$$

Sean X_0 y λ_0 las soluciones óptimas de dichos problemas, entonces se verifica que

$$c^T X_0 = \lambda_0^T b$$

$$A X_0 \ge b \text{ y } A^T\lambda_0 \le c, \; c^T \ge \lambda_0^T A$$

Multiplicando a $c^T \ge \lambda_0^T A$ por X_0 a la derecha, resulta

$$c^T X_0 \ge \lambda_0^T A X_0 \ge \lambda_0^T b$$

teniendo en cuenta que se verifica

$$c^T X_0 = \lambda_0^T b \tag{5.1}$$

resulta

$$c^T X_0 = \lambda_0^T A X_0 = \lambda_0^T b$$

Agrupando la igualdad anterior en X_0 y en λ_0^T, tenemos

$$(c^T - \lambda_0^T A)X_0 = 0 \tag{5.2}$$

$$\lambda_0^T (A X_0 - b) = 0$$

Trabajando con la primera de las ecuaciones, igualmente trabajaríamos con la segunda, tenemos

$$(c^T - \lambda_0^T A)X_0 = \sum_{j=1}^{n} (c_j - \lambda_0^T A^j) x_j = 0$$

donde A^j es la columna j-ésima de la matriz A.

Por las condiciones de los problemas PRIMAL –DUAL, tenemos que $x_j \ge 0$ y $(c_j - \lambda_0^T A^j) \ge 0$ (j =1, 2, ... , n), luego, para que la suma sea cero, han de ser cero todos los sumandos, es decir,

$$(c_j - \lambda_0^T A^j)\, x_j = 0, \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Para que se verifique la igualdad anterior, necesariamente al menos uno de los factores ha de anularse. Así pues tenemos:

$$\text{Si } x^*_j > 0 \Rightarrow c_j = \lambda_0^T A^j \qquad (5.3)$$
$$\text{Si } \lambda_0^T A^j < c_j \Rightarrow x^*_j = 0$$

Haciendo lo mismo con la segunda ecuación de (5.2), resulta:

$$\text{Si } \lambda^*_i > 0 \Rightarrow A_i X_0 = b_i \qquad (5.4)$$
$$\text{Si } A_i X_0 > b_i \Rightarrow \lambda^*_i = 0$$

siendo A_i la fila i-ésima de la matriz A.

Las condiciones de *holgura complementarias* se recogen en las expresiones (5.3) y (5.4).

Observando las expresiones anteriores, tenemos:

i) Si una variable en un problema (PRIMAL/DUAL) es positiva, entonces la correspondiente restricción del otro problema (DUAL/ PRIMAL) debe estar saturada(cumplirse con igualdad).
ii) Si una restricción en un problema no está saturada (se cumple con desigualdad estricta), la correspondiente variable del otro problema debe ser nula.

Teorema 3.5. X es la solución óptima del PRIMAL si y sólo si $A^T\lambda \leq c$, donde $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ es la solución óptima DUAL.

Demostración

Sea B la matriz básica óptima, cualquier vector A_j se puede escribir en función de los vectores de la base

$$A_j = BX_j, \qquad X_j = B^{-1} A_j$$

$$z_j = c_B^T X_j = c_B^T B^{-1} A_j = \lambda^T A_j = A_j^T \lambda$$

X es solución óptima si y sólo si $(z_j - c_j) \leq 0$, $\forall j$ (j=1, 2, ..., n), es decir, si y sólo si $A^T\lambda - c \leq 0$, o lo que es lo mismo

$$A^T\lambda \leq c$$

y, como son iguales los valores que toman las funciones objetivo del PRIMAL y DUAL, $c^T X_0 = \lambda_0^T b$, ambas soluciones son óptimas.

Conocida la solución óptima del problema PRIMAL podemos conocer la solución óptima DUAL aplicando $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$.

Una relación que nos puede ser útil a la hora de calcular los valores que son soluciones del DUAL es $z_j = A_j^T \lambda$ (j=1, 2, ... , n). Supongamos que estamos en el óptimo del DUAL y sea A_j un vector unitario de la primera tabla del Simplex del PRIMAL correspondiente o no a una variable de holgura donde el elemento unidad se encuentre en la k-ésima posición, entonces

$$z_j = \lambda_k \text{ si } A_j^T = (0, ..., 1^{(K}, ..., 0)$$

$$z_j = -\lambda_k \text{ si } A_j^T = (0, ..., -1^{(K}, ..., 0)$$

La solución óptima del DUAL son los correspondientes z_j, cambiados o no de signo, de la última tabla del PRIMAL para los vectores unitarios A_j. Para una variable de holgura asociada a A_j tenemos que $z_j - c_j = z_j$.

Siguiendo con el *ejercicio 3.4.4,* tenemos:

Problema PRIMAL:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = x_1+3x_2 \\ &\quad \text{st} \\ &\qquad x_1+4x_2 \geq 24 \\ &\qquad 5x_1+x_2 \geq 25 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La primera tabla del simplex es

		c_j	1	3	0	0	M	M
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$\mathbf{A_6}$
$\mathbf{A_5}$	M	24	1	4	-1	0	1	0
$\mathbf{A_6}$	M	25	5	1	0	-1	0	1
	z, z_j, θ_j	49M	6M	5M	-M	-M	M	M
		z_j-c_j	6M-1	5M-3	-M	-M	0	0

La última tabla del simplex es

		c_j	1	3	0	0	M	M
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$\mathbf{A_6}$
$\mathbf{A_2}$	3	5	0	1	-5/19	1/19	-	-
$\mathbf{A_1}$	1	4	1	0	1/19	-4/19	-	-
	z, z_j, θ_j	19	1	3	-14/19	-1/19		

z_j-c_j	0	0	-14/19	-1/19	-	-

Observando que A_3 es un vector unitario de la primera tabla del simplex, cuyo elemento unidad está en la primera coordenada, luego λ_1=-z_3= 14/19 (z_3-c_3 = z_3, pues x_3 es una variable de holgura); de forma análoga tendremos, para A_4 que λ_2=-z_4= 1/19.

3.6. El método dual del simplex

Si al problema PRIMAL le asociábamos el algoritmo del simplex, al problema DUAL le asociaremos el algoritmo DUAL del simplex. Esta correspondencia nos permite resolver directamente el problema DUAL trabajando directamente en la tabla del simplex del PRIMAL.

Consideremos el problema PRIMAL dado en forma estándar

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\text{st} \\ &\quad AX = b \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned}$$

Su DUAL asociado es:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = \lambda^T b \\ &\text{st} \\ &\quad A^T\lambda \leq c \\ &\quad \lambda \text{ libre} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que λ es una solución factible del DUAL si y sólo si $A^T\lambda \leq c$ $\Leftrightarrow$ (z_j - c_j) $\leq$ 0, $\forall$j (j=1, 2, ..., n)

A la pregunta de ¿cuándo deberemos aplicar el método DUAL del Simplex? contestaremos siempre que se haya obtenido una solución por el método (algoritmo) del simplex, $X_B = B^{-1} b$, para el cual todos los (z_j - c_j) $\leq$ 0, $\forall$j (j=1, 2, ..., n), sin embargo X_B no es una solución factible por tener al menos una componente negativa.

La solución λ dada por $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ es la solución factible del DUAL y su función objetivo es:

$$z = \lambda^T b = c_B^T B^{-1} b$$

El método DUAL del simplex buscará encontrar soluciones factibles λ’,

$z' = \lambda'^T b$, de forma que $z' > z$ y no se modifique el signo de $(z_j - c_j) \leq 0$.

Supongamos que la base B está formada por los vectores $B=\{A_1, A_2,\ldots, A_m\}$. La solución no factible del PRIMAL asociada a esa base es $X_B = B^{-1}b$, siendo una de sus componentes negativa x_k, $x_k=B_k b$, (k=1, 2, ..., m), donde B_k es la k-ésima fila de B^{-1}.

Tomemos el vector

$$\lambda'^T = \lambda^T - \theta B_k$$

donde $\theta \in R$ y determinaremos el valor que debe tomar para que λ' sea una solución factible del DUAL mejor que λ.

El valor que toma la función objetivo para la solución λ' es

$$z' = \lambda'^T b = \lambda^T b - \theta B_k b = \lambda^T b - \theta x_k$$

y como $x_k < 0$ para que $z' > z$ es necesario que $\theta > 0$, además λ' debe ser una solución factible del DUAL.

Para que λ' sea una solución factible del DUAL, tomemos

$$\lambda'^T B = \lambda^T B - \theta B_k B = c_B^T - \theta B_k B$$

$$\lambda'^T A_j = z'_j = \begin{cases} c_j, & j = 1, 2, .., k-1, k+1, .., m \\ c_k - \theta, & j = k \end{cases}$$

Para los A_j, $j = m+1, m+2, \ldots, n$, tenemos

$$\lambda'^T A_j = \lambda^T A_j - \theta B_k A_j = \lambda^T A_j - \theta \alpha_{kj}$$

$$z'_j = z_j - \theta \alpha_{kj},$$

Operando, resulta

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) - \theta \alpha_{kj}$$

Se nos pueden presentar dos casos:

i) $\alpha_{kj} \geq 0$, para $j = m+1, m+2, \ldots, n$

Como $z'_j - c_j = (z_j - c_j) - \theta \alpha_{kj} \leq 0 \Rightarrow z'_j - c_j \leq 0$

Tomando el valor de θ tan grande como queramos, el valor de la función objetivo del DUAL tiene una solución ilimitada y, por tanto, el PRIMAL no tiene soluciones posibles.

ii) $\alpha_{kj} < 0$, para algún índice j = m+1, m+2, . . ., n

Como $z'_j - c_j = (z_j - c_j) - \theta\, \alpha_{kj} \leq 0 \Rightarrow \theta = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}} / \alpha_{kj} < 0 \right\}$

Supongamos que el mínimo se alcanza para un j = r, $\theta = \frac{z_r - c_r}{\alpha_{kr}} \Rightarrow z'_j - c_j \leq 0$, (j = 1, 2, . . ., n) con $z'_r - c_r = 0$, es decir, λ' es una solución factible del DUAL que mejora la solución anterior, λ. La nueva base B', al salir el vector A_k y entrar A_r, es $B' = \{A_1, A_2, .., A_{k-1}, A_r, A_{k+1}, .., A_m\}$. Si ahora calculamos la solución tomando la base B', $X_{B'} = B'^{-1}\, b$, pueden resultar dos casos:

i) Que sigamos teniendo coordenadas negativas, con lo cual seguiríamos aplicando el método DUAL del simplex.

ii) Que todas las coordenadas sean positivas, llegando, así, a la solución óptima.

Se puede observar que en el método DUAL del Simplex se determina primero el vector que sale de la base y a continuación el que entra en su lugar.

Resumiendo las fases del algoritmo Dual del Simplex son:

Fase 1: Determinar una base B del Primal tal que $z_j - c_j \leq 0\ \forall j=1,2, \ldots,n$.
Calculamos $X_B = B^{-1}b$ pudiéndose dar las dos situaciones siguientes:
i) $X_B \geq 0$, entonces X_B es la solución óptima del Primal.
ii) Que $x_i < 0$, donde las x_i son las coordenadas de X_B. Para este caso se elige el índice "i" para el cual tenemos el $\min_i \{ x_i,\ con\ x_i < 0 \}$, el vector A_i correspondiente será el que salga de la base.

Fase 2: Para ese índice "i" obtenido en la fase anterior, observar como son los α_{kj} .

Si todos los $\alpha_{kj} \geq 0$ el problema PRMAL no tiene solución. En caso contrario, calculamos $\frac{z_j - c_j}{\alpha_{ij}}\ con\ \alpha_{ik} < 0$ y elegimos el mínimo de todos ellos.

Supongamos que este mínimo se alcanza para j=k, es decir, $\frac{z_k - c_k}{\alpha_{ik}}$, en este caso el vector que entra en la base es A_k. Siendo el elemento pivote α_{ik}.

Fase 3: Sustituir en la base A_i por A_k; actualizando la tabla del simplex.

Fase 4: Repetir el proceso (*Fase 1, Fase y Fase 3*).

Veamos un ejemplo:

Min $z=x_1+ x_2 +x_3+x_4$

st

$2x_1+x_4 \geq 250$

$3x_2 \geq 1000$

$3x_2+10x_3 + 6x_4 \geq 750$

$x_1, x_2, x_3,x_4\geq 0$

Primero cambiamos las restricciones a $\leq$, y añadimos las variables de holgura:

Min $x_1+ x_2 +x_3+x_4$

st

$-2x_1 -x_4 +S_1= -250$

$-3x_2 +S_2= -1000$

$-3x_2-10x_3 - 6x_4 +S_3= -750$

Lo pasamos a la tabla del simplex:

		c_j	1	1	1	1	0	0	0
Base	c_B	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	-250	-2	0	0	1	1	0	0
A_6	0	-1000	0	-3	0	0	0	1	0
A_7	0	-750	0	-3	-10	-6	0	0	1
	z|z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
		z_j-c_j	-1	-1	-1	-1	0	0	0

La solución inicial es z=0; S_1=-250, S_2=-1000, S_3=-750. La solución no es óptima , ya que tenemos valores negativos en los términos independientes, por dualidad con el algoritmo del simplex la solución será optima cuando $b_j \geq 0$, $\forall$ j, manteniendo los $z_j-c_j \leq 0$. Para mejorar la solución sale de la base la que tenga el valor mas negativo: S_2=-1000 (A_6), y pasa a ser variable básica la que alcance el :

$$\theta = \underset{j}{Min}\left\{\frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}} \quad con \quad \alpha_{kj} \leq 0\right\} = \underset{2}{Min}\left\{\frac{z_2 - c_2}{\alpha_{62}} = \frac{-1}{-3}\right\} = 3$$

siendo los α_{kj}, los elementos de la fila A_k donde se tiene el valor b_k más negativo.

En la tabla actual, el único que tiene elementos negativos es x_2 que pasa a ser básica en la siguiente tabla del simplex θ_2=3. Operando sobre el pivote, obtenemos:

		c_j	1	1	1	1	0	0	0
Base	c_B	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7

A_5	0	-250	-2	0	0	-1	1	0	0
A_2	1	1000/3	0	1	0	0	0	-1/3	0
A_7	0	250	0	0	-10	6	0	-1	1
	$z\|z_j$	1000/3	0	1	0	0	0	-1/3	0
		z_j-c_j	-1	0	-1	-1	0	-1/3	0

La solución de la tabla es z=1000/3; S_1=-250, x_2=1000/3, S_3=250. La solución no es óptima , ya que seguimos teniendo negativos en los términos independientes. Para mejorar la solución sale de la base la que tenga el valor mas negativo: S_1=-250, y pasa a ser variable básica la que alcance el mínimo valor de θ_1=1/2, θ_4 =1, por lo que es x_1 la siguiente variable básica. Pivoteando de nuevo:

		c_j	1	1	1	1	0	0	0
Base	c_B	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	1	125	1	0	0	1/2	-1/2	0	0
A_2	1	1000/3	0	1	0	0	0	-1/3	0
A_7	0	250	0	0	-10	-6	0	-1	1
	$z\|z_j$	1375/3	1	1	0	1/2	-1/2	-1/3	0
		z_j-c_j	0	0	-1	-1/2	-1/2	-1/3	0

La solución de la tabla es z=1375/3; x_1=125, x_2=1000/3, S_3=250, la cual es solución óptima.
La solución dual se obtiene de los coeficientes de las variables de holgura en el vector z_j-c_j: λ_j=-(z_j-c_j), λ_1=1/2, λ_2=1/3 y λ_3=0.

Resolviendo el problema anterior mediante LINDO:

Min x1+ x2 +x3+x4
st
2x1+x4>=250
3x2>=1000
3x2+10x3+6x4>=750

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      458.3333

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1       125.000000          0.000000
        X2       333.333344          0.000000
        X3         0.000000          1.000000
        X4         0.000000          0.500000
```

```
      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000         -0.500000
       3)         0.000000         -0.333333
       4)       250.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       3

 THE TABLEAU

ROW  (BASIS)       X1        X2         X3         X4        SLK 2      SLK 3
1 ART            0.000     0.000      1.000      0.500      0.500      0.333
2       X1       1.000     0.000      0.000      0.500     -0.500      0.000
3 SLK    4       0.000     0.000    -10.000     -6.000      0.000     -1.000
4       X2       0.000     1.000      0.000      0.000      0.000     -0.333

ROW     SLK 4
1     0.000  -458.333
2     0.000   125.000
3     1.000   250.000
4     0.000   333.333
```

Que proporciona la misma solución.

3.7. Interpretación económica de los problemas PRIMAL -DUAL

Consideremos el problema PRIMAL - DUAL en forma simétrica:

Min $z = c^T \cdot X$ st $AX \geq b$ $X \geq 0$	Max $z = \lambda^T \cdot b$ st $A^T\lambda \leq c$ $\lambda \geq 0$

Sea z_0 el valor que toma la función objetivo en el óptimo

$$z_0 = c^T X_0 = \lambda_0^T b$$

La variación que experimenta el valor óptimo de la función objetivo cuando variamos ligeramente las constantes de restricción (recursos) del problema PRIMAL, es decir,

$$\frac{\partial z_0}{\partial b} = \frac{\partial \lambda_0^T b}{\partial b} = \lambda_0^T$$

las variables duales miden el grado de sensibilidad de la función objetivo en el óptimo.

Podemos interpretar las variables duales como un sistema de *precios marginales* (precios sombra o precios ficticios) de los recursos cuya disponibilidad está limitada por las restricciones. Estudiando un problema de producción de bienes, teniendo por objetivo la maximización de beneficios y donde las constantes de restricción son los recursos (materias primas) para llevarse a cabo dicha producción; la variable dual óptima asociada a una restricción puede interpretarse como el precio máximo que estaríamos dispuestos a pagar, en el óptimo, por un incremento de recurso disponible si no queremos tener pérdidas.

3.8. Resumen

A continuación, se recogen las características más importantes del problema PRIMAL-DUAL:

1.- El problema PRIMAL tiene n variables y m restricciones, y el DUAL, m variables y n restricciones.

2.-Los coeficientes de la función objetivo del Dual son los términos independientes de las restricciones del Primal y viceversa.

3.-Si el problema PRIMAL es de minimizar, el DUAL será de maximizar y viceversa.

4.-La fila *i-ésima* de la matriz del PRIMAL es la columna *i-ésima* del DUAL y viceversa.

5.-El DUAL del DUAL es el PRIMAL.

6.-Si una de las restricciones del PRIMAL está dada en forma de igualdad, la variable correspondiente del DUAL será de signo libre y viceversa.

7.- El teorema fundamental de la Dualidad establece que, si uno de dos problemas, PRIMAL o DUAL, tiene una solución óptima, entonces el otro también tiene una solución óptima y los valores de esos óptimos son iguales.

8.- En cada par formado por una variable PRIMAL y su correspondiente variable DUAL, al menos una de ellas debe ser igual a cero(0).

9. - Los valores que toman en el óptimo las *n* variables de holgura del DUAL son $c_i - \lambda_0^T A^i$ (i=1, 2, ... , n).

10.- Los valores que toman en el óptimo las *m* variables de holgura del PRIMAL son $A_j X_0 - b_j$ (j=1, 2, ... , m).

11.- Otro aspecto importante a resaltar es que, cuando el problema PRIMAL no es óptimo, el DUAL no es factible y viceversa. En general, el problema PRIMAL comienza siendo factible pero no óptimo y continua así hasta que se llegue a la solución óptima, es decir, en el problema PRIMAL se persigue llegar al óptimo mientras que en el DUAL se busca la factibilidad.

12.- En cada iteración del simplex hallaremos una solución factible básica para el problema PRIMAL, que corresponderá a una solución básica para el DUAL; si la solución para el PRIMAL no es óptima, al menos uno de los coeficientes en la función objetivo será negativo, por lo que la solución correspondiente al DUAL no será factible, ya que al menos una de las variables básicas será negativa.

13.- A medida que apliquemos el simplex al PRIMAL, moviéndonos a través de soluciones factibles básicas hasta llegar a la solución óptima, el DUAL se movería a través de soluciones no factibles hasta llegar a una solución factible, que, por ende, será lógica.

14.- Una relación que encontramos en nuestro estudio es:

En un problema de Maximización	Precio Dual en los Resultados= Variable Dual
En un problema de Minimización	Precio Dual en los Resultados=-Variable Dual

15.- En efecto, una interpretación económica de las variables duales se obtiene de la función objetivo DUAL. Como en la solución óptima el mínimo valor de z_0 (PRIMAL) es igual al máximo de z_0 (DUAL), las variables duales λ_i pueden ser interpretadas como la contribución unitaria del recurso i-ésimo al valor de la función objetivo cuando las disponibilidades de recursos aumentan (o disminuyen en una minimización) en una unidad. Es decir, cada una de las variables duales equivale a la utilidad adicional que puede obtenerse de una unidad adicional del recurso correspondiente. Desde el punto de vista de la toma de decisiones, las variables duales indican la cantidad extra que se estaría en disposición de pagar por unidad adicional de recurso específico (independientemente de su valor real). En otras palabras, estaríamos dispuestos a pagar un precio más elevado por un recurso escaso, hasta llegar al valor de la variable dual (λ). Históricamente, el precio sombra se definió como la mejora en el valor de la función objetivo por aumento unitario en el lado derecho, porque el problema generalmente adoptaba la forma de una mejora de maximización de utilidades (es decir, un aumento). El precio sombra puede no ser el precio de mercado. El precio sombra es por ejemplo el valor del recurso bajo la "*sombra*" de la actividad comercial. Se puede realizar un análisis de sensibilidad, es decir un análisis del efecto de pequeñas variaciones en los parámetros del sistema sobre las medidas de producción, calculando las derivadas de las medidas de producción con respecto al parámetro.

16.- Otro importante aspecto de una interpretación económica del problema, lo encontramos en la columna de Coste Reducido (`REDUCED COST`), la cual, sólo es significativa para las variables de decisión cuyo valor óptimo sea cero (x_i =0), las cuales nos indican la cantidad que disminuye (aumenta) el valor óptimo de la función objetivo, para un problema de maximización (minimización), si el valor de x_i se incrementa en una unidad dejando constante el valor de las otras variables no básicas.

3.9. Resolución mediante programa de ordenador

1. Si el problema de programación lineal requiere que todas las variables *sean no negativas,* se pondrán de manera que cumplan esta condición. Las modificaciones deben ser hechas antes de introducir los datos en el programa de ordenador.
2. Todas las variables de las restricciones deben aparecer en el primer miembro (lado izquierdo de las igualdades o desigualdades), en tanto que todos los términos constantes (recursos) aparecerán a la derecha.
3. En la columna de variables de holgura (SLACK OR SURPLUS) vienen los resultados de esas variables (por restricción), las de valor cero indicarán que el recurso se ha consumido en su totalidad.
4. El número de variables positivas (decisión + holgura) al finalizar el Simplex debe ser igual al número de restricciones, de lo contrario el problema es *degenerado*.
5. El Precio Dual para la restricción *n* muestra la mejoría del valor óptimo de z cuando el segundo miembro de la restricción aumenta una unidad, con los demás datos fijos. Si se observa el vector de disponibilidad de recursos, se tendrá un rango admisible para la restricción que nos indica que, por cada unidad que se aumente, la mejoría en la función objetivo será igual al *precio dual*.
6. Pequeños cambios en una restricción inactiva no afectan a z, por lo que su Precio Dual será siempre *cero*.
7. La información de sensibilidad del vector de *disponibilidad de recursos* (b) no nos dice cuanto valdrán las variables de decisión, sólo nos dice cómo cambia la *función objetivo*.

8. Entenderemos por *coste reducido* (REDUCED COST) de cualquier variable de decisión a:

   a. Cantidad en que debe cambiar el coeficiente de esa variable en la función objetivo para tener un valor óptimo positivo para esa variable (si una variable es ya positiva en el punto óptimo, su coste reducido será cero).
   b. Tasa de decrecimiento de la función objetivo en cuanto una variable que es cero en el punto óptimo, es forzada inicialmente a ser positiva.

9. La solución del problema vendrá dada por los valores óptimos de las variables que aparecen en la columna VARIABLE VALUE con un Valor óptimo de z en VALUE OBJECTIVE FUNCTION.
10. Las *variables de holgura* diferentes de cero representan normalmente la cantidad sin utilizar los recursos (caso ≤) o el exceso de suministros (caso ≥). En caso de ser cero, indican que el recurso se utiliza todo (caso ≤) o que la mezcla óptima tendrá exactamente esa cantidad para satisfacer determinado requerimiento. Aparecen en la columna de SLACK OR SURPLUS y las que sean *cero* las indicarán las RESTRICCIONES.
11. Si queremos que una variable entre como BASICA, es decir, que resulte una decisión óptima para ella, debemos analizar la columna del Coste Reducido, REDUCED COST, que es sólo significativa para las variables de decisión (variables básicas) cuyos valores óptimos sean cero. Dicho valor nos dirá cuánto puede ser modificado (aumentado o disminuido, según el caso) sin que el valor óptimo de la variable se vuelva positivo. Si excede esa cantidad, habrá una solución óptima con dicha variable mayor que cero.

Ejercicio 3.9.1. La empresa Sales vende cuatro tipos de productos. Los recursos necesarios para producir una unidad de cada producto y el precio de venta para cada producto se dan en la tabla. En la actualidad se dispone de 4600 unidades de materia prima y de 5000 horas de trabajo. Para cumplir con la demanda de los clientes se deben producir 950 unidades de producto, en cualquier combinación, siempre y cuando las unidades de producto tipo 4 sean como mínimo de 450.

Formule un programa lineal que permita maximizar los ingresos para la empresa Sales y soluciónelo con el programa LINDO.

En la siguiente tabla se recogen los recursos y los precios de venta.

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Materia prima	2	3	4	7
Horas de trabajo	3	4	5	6
Precio venta (euros)	4	6	7	8

Solución:

Sea x_i = Cantidad de producto tipo i producido.

```
Max 4x1+6x2+7x3+8x4
st
    x1+x2+x3+x4=950
    x4>=450
    2x1+3x2+4x3+7x4<=4600
    3x1+4x2+5x3+6x4<=5000
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      6500.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1        50.000000          0.000000
        X2       450.000000          0.000000
        X3         0.000000          1.000000
        X4       450.000000          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.000000
        3)         0.000000         -6.000000
        4)         0.000000          2.000000
        5)       350.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       3

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1        4.000000         1.000000         INFINITY
       X2        6.000000         INFINITY         0.500000
       X3        7.000000         1.000000         INFINITY
       X4        8.000000         6.000000         INFINITY

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        2      950.000000       225.000000        16.666666
        3      450.000000        90.000000        12.500000
        4     4600.000000        50.000000       450.000000
        5     5000.000000         INFINITY       350.000000
```

```
THE TABLEAU

     ROW  (BASIS)        X1        X2        X3        X4       SLK 3     SLK 4
       1 ART           0.000     0.000     1.000     0.000     6.000     2.000
       2       X1      1.000     0.000    -1.000     0.000    -4.000    -1.000
       3       X2      0.000     1.000     2.000     0.000     5.000     1.000
       4       X4      0.000     0.000     0.000     1.000    -1.000     0.000
       5 SLK    5      0.000     0.000     0.000     0.000    -2.000    -1.000

     ROW     SLK 5
       1     0.000  6500.000
       2     0.000    50.000
       3     0.000   450.000
       4     0.000   450.000
       5     1.000   350.000
```

Análisis de la salida ofrecida por LINDO:

Observando la salida del programa, el resultado es:

"OBJECTIVE FUNCTION VALUE"

Los valores de la función objetivo y de las variables nos los ofrece el programa en la primera columna:

$z = 6500.00$; x_1=50.000000, x_2= 450.00000, x_3=0, x_4=450.000000

"REDUCED COST"

Los valores de *Reduced Cost* que se entregan en el resultado por el software LINDO nos dan información acerca de cómo, cambiando los coeficientes en la función objetivo para las variables no básicas, se puede cambiar la solución óptima del *problema de programación lineal*.

Para cualquier variable no básica x_k, el *reduced cost* para x_k es la cantidad en la que puede mejorarse el coeficiente de x_k en la función objetivo antes de que el *problema de programación lineal* tenga una nueva solución óptima en la que x_k será variable básica. (Nótese que se usa el término "mejorarse", lo que implica aumento si la *función objetivo* es de maximización y disminución si es de minimización). Si el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica x_k se mejora en su *reduced cost*, entonces el *problema de programación lineal* tendrá soluciones óptimas alternativas y al menos en una de ellas x_k será variable básica y en otra x_k será no básica. Si el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica es mejorado mas allá de su *reduced cost*, entonces la nueva solución óptima del *problema de programación lineal* tendrá a x_k como variable básica.

El resultado óptimo de nuestro ejemplo muestra que x_3 es variable no básica y tiene un *reduced cost* = 1 euro. Esto implica que, si se mejora el coeficiente de la variable x_3 en la función objetivo (es decir, el precio de venta unitario del producto 3) en exactamente 1 euro (en vez de 7 euros que sea de 8 euros), habrá soluciones óptimas alternativas y al menos en una de ellas x_3 será variable básica. Si se aumenta el coeficiente de x_3 en la función objetivo en más de 1 euro, entonces la solución óptima del *problema de programación lineal* tendrá a x_3 como variable básica.

Estudiemos que ocurre cuando:

a) c_3=8, la solución que nos proporciona LINDO es:

```
Max 4x1+6x2+8x3+8x4
 st
 x1+x2+x3+x4=950
 x4>=450
 2x1+3x2+4x3+7x4<=4600
 3x1+4x2+5x3+6x4<=5000
```

```
 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      6500.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1       275.000000          0.000000
        X2         0.000000          0.000000
        X3       225.000000          0.000000
        X4       450.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.000000
        3)         0.000000         -6.000000
        4)         0.000000          2.000000
        5)       350.000000          0.000000


 THE TABLEAU

     ROW  (BASIS)         X1        X2        X3        X4  SLK    3  SLK    4
       1 ART           0.000     0.000     0.000     0.000     6.000     2.000
       2       X1      1.000     0.500     0.000     0.000    -1.500    -0.500
       3       X3      0.000     0.500     1.000     0.000     2.500     0.500
       4       X4      0.000     0.000     0.000     1.000    -1.000     0.000
       5 SLK    5      0.000     0.000     0.000     0.000    -2.000    -1.000


     ROW   SLK    5
       1     0.000  6500.000
       2     0.000   275.000
       3     0.000   225.000
       4     0.000   450.000
       5     1.000   350.000
```

Observando la tabla vemos que el valor de la función objetivo no ha variado y que la variable no básica x_3 ha pasado a ser básica (hemos aumentado el valor de c_3 en una unidad, su coste reducido, siendo c_3=8).

b) c_3=9, la solución que nos proporciona LINDO es:

```
Max 4x1+6x2+9x3+8x4
 st
 x1+x2+x3+x4=950
 x4>=450
 2x1+3x2+4x3+7x4<=4600
 3x1+4x2+5x3+6x4<=5000


 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      6725.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1       275.000000          0.000000
        X2         0.000000          0.500000
        X3       225.000000          0.000000
        X4       450.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         -1.000000
        3)         0.000000         -8.500000
        4)         0.000000          2.500000
        5)       350.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       0
```

Observando la tabla vemos que el valor de la función objetivo ha variado, ha aumentado en 225, y que la variable no básica x_3 ha pasado a ser básica (hemos aumentado el valor de c_3 en más de una unidad, su coste reducido, siendo c_3=9).