CAPÍTULO 1

CONCEPTOS PREVIOS

1.1.- Introducción a la Investigación Operativa

La Investigación Operativa (I. O.) es la aplicación del método científico para asignar los recursos o actividades de forma eficaz, en la gestión y organización de sistemas complejos.

El Método Científico es un proceso de investigación que consta de varias etapas:

i) La observación del fenómeno.
ii) Formulación de hipótesis
iii) Diseño experimental
iv) Análisis de los resultados y conclusiones.

i) *La observación del fenómeno*.

Se observa y se describe el proceso objeto de estudio.

ii) *Formulación de hipótesis*.

Formular una hipótesis no es más que adelantar la solución a un problema planteado. Para ello, se establecen posibles causas que expliquen el fenómeno estudiado, que después habrá que confirmar experimentalmente.

iii) *Diseño experimental*.

Se monta un dispositivo experimental que pueda probar nuestras hipótesis.

Si hay varias variables, se controlan todas salvo la que queremos estudiar.

iv) *Análisis de resultados y conclusiones*.

Los resultados obtenidos se suelen reflejar en tablas de datos y gráficas. La variable independiente se representa en abscisas y la dependiente en el eje de ordenadas.

1.1.1.- Breve historia de la Investigación Operativa

La primera actividad de Investigación Operativa se dio durante la Segunda Guerra Mundial en Gran Bretaña, donde la Administración Militar llamó a un grupo de científicos de distintas áreas del saber para que estudiaran los problemas tácticos y estratégicos asociados a la defensa del país.

El nombre de Investigación Operativa fue dado aparentemente porque el equipo estaba llevando a cabo la actividad de investigar operaciones (militares).

Motivados por los resultados alentadores obtenidos por los equipos británicos, los administradores militares de Estados Unidos comenzaron a realizar investigaciones similares. Para eso reunieron a un grupo selecto de especialistas, los cuales empezaron a tener buenos resultados y en sus estudios incluyeron problemas logísticos complejos, la planificación de minas en el mar y la utilización efectiva del equipo electrónico.

Al término de la guerra y atraídos por los buenos resultados obtenidos por los estrategas militares, los administradores industriales empezaron a aplicar las herramientas de la Investigación Operativa a la resolución de sus problemas que empezaron a originarse debido al crecimiento del tamaño y la complejidad de las industrias.

Aunque se ha acreditado a Gran Bretaña la iniciación de la Investigación Operativa como una nueva disciplina, los Estados Unidos tomaron pronto el liderazgo en este campo rápidamente creciente. La primera técnica matemática ampliamente aceptada en el medio de Investigación Operativa fue el Método Símplex de Programación Lineal, desarrollado en 1947 por el matemático norteamericano George B. Dantzig. Desde entonces las nuevas técnicas se han desarrollado gracias al esfuerzo y cooperación de las personas interesadas tanto en el área académica como en el área industrial.

Un segundo factor en el progreso impresionante de la Investigación Operativa fue el desarrollo de la computadora digital que, con sus tremendas capacidades de velocidad de cómputo y de almacenamiento y recuperación de información, permitió al individuo que tenía que tomar decisiones hacerlo con rapidez y precisión.

Si no hubiera sido por la computadora digital, la Investigación Operativa con sus grandes problemas de computación no hubiera crecido al nivel de hoy en día.

Actualmente la Investigación Operativa se está aplicando en muchas actividades. Estas actividades han ido más allá de las aplicaciones militares e industriales, para incluir hospitales, instituciones financieras, bibliotecas, planificación urbana, sistemas de transporte y sistemas de comercialización.

Antecedente histórico de Investigación Operativa		
Año	*Autor*	*Técnica desarrollada*
1759	Quesnay	Modelos primarios de programación matemática
1873	Jordan	Modelos lineales
1874	Waelas	Modelos primarios de programación matemática
1896	Minkousky	Modelos lineales
1897	Harkov	Modelos dinámicos probabilísticos
1903	Farkas	Modelos dinámicos probabilísticos
1906	Erlang	Líneas de espera
1920-1930	Koning-Egervary	Asignación
1937	Morgestern	Lógica estadística
1937	Von Neuman	Teoría de juegos
1939	Kantorovich	Planificación en producción y distribución
1941	Hithcock	Transporte
1947	George Dantzing	Método Simplex
1947		Año en que se dio inicio a la programación y con el uso de las computadoras empezó a extenderse la Investigación de Operaciones
1950-1956	Kun-Tucker	Programación no lineal
1953	Kendall	Introduce la notación para identificar los sistemas de colas
1954	Lemke	Desarrollo del Simplex Dual
1957	Markowitz	Simulación y programación discreta
1957	Kelly y Walker	Desarrollan el método CPM
1958	Richard Bellman	Programación dinámica
1958	Gomory	Programación entera
1958	Arrow-Karlin	Inventarios
1959	Dijkstra	Algoritmo de Ruta más corta
1956-1962	Ford-Fulkerson	Redes de flujo
1960	Raiffa	Análisis de decisiones
1960	Land y Doig	Algoritmo de ramificación y acotamiento
1962	Ford y Fulkerson	Método Primal-Dual
1963	Karmarkar Nared	Algoritmos de punto interior
1965	Balas	Algoritmo de enumeración implícita
1968	Handy Taha	Completa la notación de Kendall agregando el tamaño de la población
1984	Hopfield	Red neuronal
1984	Holland	Algoritmos genéticos
1986	Hopfield y Tank	Utilización de la red neuronal en la Investigación Operativa

1.2. Características de la Investigación Operativa

A menudo se utiliza el término de Investigación de Operaciones para referirse a *la Investigación Operativa*. Hablar de "Investigación de Operaciones" es utilizar la *Investigación Operativa* para *"hacer investigación sobre las operaciones"* que tienen lugar en los distintos campos de las organizaciones humanas.

Es muy notable el rápido crecimiento del tamaño y la complejidad de las organizaciones (empresas) humanas que se ha dado en estos últimos tiempos. Tal tamaño y complejidad nos hace pensar que una sola decisión equivocada puede repercutir grandemente en los intereses y objetivos de la organización y en ocasiones pueden pasar años para rectificar tal error. También el ritmo de la empresa de hoy implica que las *decisiones* se tomen más rápidamente que nunca, pues el hecho de posponer la acción puede dar una decisiva ventaja al contrario en este mundo de la competencia.

La palpable dificultad de tomar decisiones ha hecho que el hombre se aboque en la búsqueda de una herramienta o método que le permita tomar las mejores decisiones de acuerdo con los recursos disponibles y los objetivos que persigue. Tal herramienta recibió el nombre de Investigación de Operaciones.

De la definición de Investigación Operativa, como veremos en el siguiente apartado, podemos resaltar los siguientes términos: organización, sistema, grupos interdisciplinarios, objetivo y metodología científica.

Una organización puede entenderse como un sistema, en el cual existen componentes; canales que comunican tales componentes e información que fluye por dichos canales. En todo sistema las componentes interactúan unas con otras y tales interacciones pueden ser controlables e incontrolables. En un sistema grande, las componentes se relacionan de muchas maneras, pero no todas son importantes, o mejor dicho, no todas las interacciones tienen efectos importantes en las componentes del sistema.

Por lo tanto, es necesario que exista un procedimiento sistemático que identifique a quienes toman decisiones y a las interacciones que tengan importancia para los objetivos de la organización o sistema. Uno de esos procedimientos es precisamente la Investigación de Operaciones.

Una estructura por la que no fluye información no es dinámica, es decir, no podemos considerarla como un sistema. Por lo tanto, podemos decir que la información es lo que da "vida" a las estructuras u organizaciones humanas.

Los objetivos de toda organización serán siempre alcanzar el liderazgo en su rama, controlando la eficiencia y efectividad de todas sus componentes por medio de métodos que permitan encontrar las relaciones óptimas que mejor operen el sistema, dado un objetivo específico.

Ante el tremendo avance que se ha dado en casi todas las ciencias en las últimas décadas, ya no es factible querer saber un poco de todo, sino más bien especializarse en alguna rama de la ciencia. Los problemas que se presentan en las organizaciones no se pueden resolver fácilmente por un solo especialista. Por el contrario, son problemas multidisciplinarios, cuyo análisis y solución requieren de la participación de varios especialistas. Estos grupos interdisciplinarios necesariamente requieren un lenguaje común para poder entenderse y comunicarse, donde la Investigación Operativa viene a ser ese puente de comunicación.

El enfoque de la *Investigación Operativa* sigue las pautas del *método científico*. En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema y sigue con la construcción de un modelo científico (por lo general matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real. En este punto se propone la hipótesis de que el modelo es una representación lo suficientemente precisa de las características esenciales de la situación como para que las conclusiones (soluciones) obtenidas sean válidas también para el problema real. Esta hipótesis se verifica y modifica mediante las pruebas adecuadas. Entonces, en cierto modo, la Investigación Operativa incluye la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. Sin embargo, existe más que esto. En particular, la Investigación Operativa se ocupa además de la administración práctica de la organización. Así, para tener éxito, deberá también proporcionar conclusiones positivas y claras que pueda usar el tomador de decisiones cuando las necesite.

La contribución al enfoque de Investigación Operativa proviene principalmente de:

i) La estructuración de una situación de la vida real como un modelo matemático, logrando una abstracción de los elementos esenciales para que pueda buscarse una solución que concuerde con los objetivos del tomador de decisiones. Esto implica tomar en cuenta el problema dentro del contexto del sistema completo.
ii) El análisis de la estructura de tales soluciones y el desarrollo de procedimientos sistemáticos para obtenerlas.
iii) El desarrollo de una solución, incluyendo la teoría matemática si es necesario, que lleva al valor óptimo de la medida de lo que se espera del sistema (o quizá que compare los cursos de acción opcionales evaluando esta medida para cada uno).

El modelo matemático trata de responder al problema de elegir los valores de las variables de decisión de manera que se optimice la función objetivo, sujeta a las restricciones dadas.

Optimizar es la acción de llevar una cierta magnitud a su óptimo, o sea, a su máximo o a su mínimo, según se trate de algo que se considera beneficioso o perjudicial, en cuyos casos respectivos se utilizan también los nombres de maximizar o minimizar. Se optimiza todo tipo de magnitudes para las que se estima o valora que tienen estados preferibles a otros y se quiere alcanzar el de mayor utilidad o satisfacción.

Una clasificación de modelos especialmente importante es el *modelo de programación lineal*, en el que las funciones matemáticas que aparecen tanto en la función objetivo como en las restricciones, son funciones lineales. Es posible construir modelos específicos de programación lineal que se ajustan a diversos tipos de problemas.

Los modelos matemáticos tienen muchas ventajas sobre una descripción verbal del problema. Una ventaja obvia es que el modelo matemático describe un problema en forma mucho más concisa. Esto tiende a hacer que toda la estructura del problema sea más comprensible y ayuda a revelar las relaciones importantes entre causa y efecto. De esta manera indica con más claridad que datos adicionales son importantes para el análisis. También facilita el manejo del problema en su totalidad y el estudio de todas sus interrelaciones simultáneamente. Por último, un modelo matemático forma un puente para poder emplear técnicas matemáticas poderosas, además de los ordenadores, en el análisis del problema. La herramienta de cálculo que supone el ordenador junto a paquetes de Investigación Operativa facilita la solución de muchos problemas.

1.3. Definición de Investigación Operativa

La **Investigación Operativa** o Investigación Operacional se puede definir como: *"La aplicación del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización".*

1.4. Metodología de la Investigación de Operativa

El proceso de la Investigación Operativa comprende las siguientes fases:

1. Formulación y definición del problema.
2. Construcción del modelo.
3. Solución del modelo.
4. Validación del modelo.
5. Implementación de resultados.

Veamos estas fases:

1. **Formulación y definición del problema.** En esta fase del proceso se necesita: una descripción de los objetivos del sistema, es decir, qué se desea optimizar; identificar las variables implicadas, ya sean controlables o no; determinar las restricciones del sistema. También hay que tener en cuenta las alternativas posibles de decisión y las restricciones para producir una solución adecuada.

2. **Construcción del modelo.** En esta fase, el investigador de operaciones debe decidir el modelo a utilizar para representar el sistema. Debe ser un modelo tal que relacione a las variables de decisión con los parámetros y restricciones del sistema. Los parámetros (o cantidades conocidas) se pueden obtener ya sea a partir de datos pasados o estimados por medio de algún método estadístico. Es recomendable determinar si el modelo es probabilístico o determinístico. El modelo puede ser matemático, de simulación o heurístico, dependiendo de la complejidad de los cálculos matemáticos que se requieran. Como ejemplo de modelos, tenemos

Determinísticos	Probabilísticos	Heurísticos

Programación matemática	Programación estocástica	Annealing (recocido) simulado
Programación lineal	Gestión de inventarios	Búsqueda tabú
Programación entera	Fenómenos de espera (colas)	Algoritmos genéticos
Programación dinámica	Teoría de juegos	Redes neuronales artificiales
Programación no lineal	Simulación	Algoritmos bioinspirados
Programación multiobjetivo		
Modelos de transporte		
Modelos de redes		

3. **Solución del modelo.** Una vez que se tiene el modelo, se procede a derivar una solución matemática empleando las diversas técnicas y métodos matemáticos para resolver problemas y ecuaciones. Debemos tener en cuenta que las soluciones que se obtienen en este punto del proceso son matemáticas y debemos interpretarlas en el mundo real. Además, para la solución del modelo, se deben realizar análisis de sensibilidad, es decir, ver cómo se comporta el modelo ante cambios en las especificaciones y parámetros del sistema. Esto se hace debido a que los parámetros no necesariamente son precisos y las restricciones pueden estar equivocadas.

4. **Validación del modelo.** La validación de un modelo requiere que se determine si dicho modelo puede predecir con certeza el comportamiento del sistema. Un método común para probar la validez del modelo es someterlo a datos pasados disponibles del sistema actual y observar si reproduce las situaciones pasadas del sistema. Pero, como no hay seguridad de que el comportamiento futuro del sistema continúe replicando el comportamiento pasado, entonces siempre debemos estar atentos a cambios posibles del sistema con el tiempo, para poder ajustar adecuadamente el modelo.

5. **Implementación de resultados.** Una vez que hayamos obtenido la solución o soluciones del modelo, el siguiente y último paso del proceso es interpretar esos resultados y dar conclusiones y cursos de acción para la optimización del sistema. Si el modelo utilizado puede servir a otro problema, es necesario revisar, documentar y actualizar el modelo para sus nuevas aplicaciones.

1.5. Estructura de los modelos empleados en la Investigación Operativa

El enfoque de la Investigación Operativa como construcción de modelos constituye una herramienta que nos sirve para lograr una visión bien estructurada de la realidad. Así, el propósito del modelo es proporcionar un medio para analizar el comportamiento de las componentes de un sistema con el fin de optimizar su desempeño. La ventaja que tiene el sacar un modelo que represente una situación real es que nos permite analizar tal situación sin interferir en la operación que se realiza, ya que el modelo es como si fuera "un espejo" de lo que ocurre.

Los modelos más importantes para la Investigación Operativa son los modelos simbólicos o matemáticos, que emplean un conjunto de símbolos y funciones para representar las variables de decisión y sus relaciones para describir el comportamiento del sistema. El uso de las matemáticas para representar el modelo, el cual es una representación aproximada de la realidad, nos permite aprovechar las computadoras de alta velocidad y técnicas de solución con matemáticas avanzadas.

Un modelo matemático comprende principalmente tres conjuntos básicos de elementos. Estos son: 1) variables y parámetros de decisión, 2) restricciones y 3) función objetivo.

1. **Variables y parámetros de decisión.** Las variables de decisión son las incógnitas (o decisiones) que deben determinarse resolviendo el modelo. Los parámetros son los valores conocidos que relacionan las variables de decisión con las restricciones y función objetivo. Los parámetros del modelo pueden ser determinísticos o probabilísticos.
2. **Restricciones.** Para tener en cuenta las limitaciones tecnológicas, económicas y otras del sistema, el modelo debe incluir restricciones (implícitas o explícitas) que restrinjan las variables de decisión a un rango de valores factibles.
3. **Función objetivo.** La función objetivo define la medida de efectividad del sistema como una función matemática de las variables de decisión.

La solución óptima será aquella que produzca el mejor valor de la función objetivo, sujeta a las restricciones.

1.6. Concepto de optimización

Una característica adicional, que se mencionó como de pasada, es que la Investigación Operativa intenta encontrar la mejor solución, o la solución óptima, al problema objeto de estudio. En lugar de contentarse con sólo mejorar el estado de las cosas, la meta es identificar el mejor curso de acción posible. Aun cuando debe interpretarse con todo cuidado, esta "búsqueda del óptimo" es un aspecto muy importante dentro de la Investigación Operativa.

1.7. Áreas de aplicación de la Investigación Operativa

Como su nombre dice, Investigación Operativa significa "*hacer investigación sobre las operaciones*". Esto dice algo del enfoque y del área de aplicación. Entonces, la Investigación Operativa se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización. La naturaleza de la organización es esencialmente inmaterial y, de hecho, la Investigación Operativa se ha aplicado en los negocios, la industria, la milicia, el gobierno, los hospitales, etc. Así, la gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia. Casi todas las organizaciones más grandes del mundo y una buena proporción de las industrias más pequeñas cuentan con grupos de Investigación de Operaciones. Muchas industrias, incluyendo la aérea y de proyectiles, la automotriz, la de comunicaciones, computación, energía eléctrica, electrónica, alimenticia, metalúrgica, minera, del papel, del petróleo y del transporte, han empleado la Investigación de Operaciones. Las instituciones financieras, gubernamentales y sanitarias están incluyendo cada vez más estas técnicas.

Para ser más específicos, se consideran algunos problemas que se han resuelto mediante algunas técnicas de Investigación de Operaciones. La programación lineal se ha usado con éxito en la solución de problemas referentes a la asignación de personal, la mezcla de materiales, la distribución y el transporte y las carteras de inversión. La programación dinámica se ha aplicado con buenos resultados en áreas tales como la planificación de los gastos de comercialización, la estrategia de ventas y la planificación de la producción. La teoría de colas ha tenido aplicaciones en la solución de problemas referentes al congestionamiento del tráfico, al servicio de máquinas sujetas a descomposturas, a la determinación del nivel de mano de obra, a la programación del tráfico aéreo, al diseño de presas, a la programación de la producción y a la administración de hospitales. Otras técnicas de Investigación Operativa, como la teoría de inventarios, la teoría de juegos y la simulación, han tenido aplicaciones en una gran variedad de contextos. El campo de la Investigación Operativa se va extendiendo cada vez más gracias a la herramienta que constituye el ordenador.

1.8. Conceptos sobre conjuntos convexos

El concepto de conjunto convexo es algo sencillo de entender desde un punto de vista geométrico. Son conjuntos convexos aquellos que tienen la propiedad de que, al unir con un segmento dos puntos cualesquiera del conjunto, el segmento queda completamente contenido en el propio conjunto. Este concepto queda expresado en un lenguaje matemático de la siguiente forma:

Definición1.1. Un conjunto S es convexo cuando:

$\forall$ $X_1, X_2 \in S$ y $0 \le \alpha \le 1$ se cumple $\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in S$

Definición 1.2. Un punto es una combinación lineal convexa de n puntos ($X_1, X_2, ..., X_n$) cuando puede expresarse en la forma

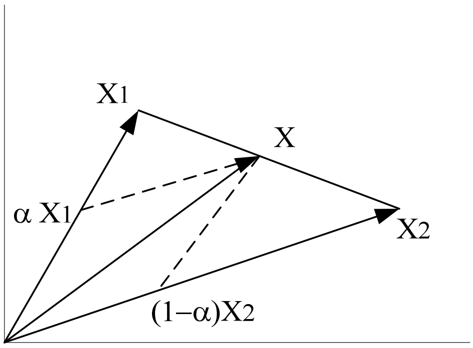
$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$$

donde las α_i son escalares, $\alpha_i \ge 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

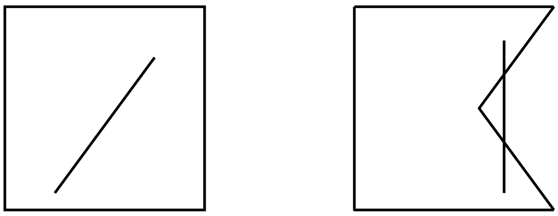
En R^2 la definición de combinación convexa de los vectores de X_1 y X_2 constituye la definición de segmento de recta que une ambos puntos, $X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$

Definición 1.3. Un subconjunto *S* de R^n es *convexo* si, y sólo si, para todo par de puntos X_1, $X_2 \in S$, cualquier combinación convexa de ellos se encuentra en *S*.

$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$ también se encuentra en *S*, $\alpha \in [0, 1]$.



Un conjunto S decimos que es convexo si el segmento que une dos puntos cualquiera del conjunto está totalmente contenido en el conjunto. Un ejemplo de conjunto convexo y no convexo sería:



Conjunto convexo *Conjunto no convexo*

Se puede demostrar que cualquier combinación convexa de cualquier número de puntos de un conjunto convexo, *S*, también se encuentra en *S*.

1.8.1. Propiedades de los conjuntos convexos

i) La intersección de un número finito de conjuntos convexos sigue siendo un conjunto convexo.
ii) Por el contrario, la unión de conjuntos convexos no es necesariamente un conjunto convexo.
iii) La suma de conjuntos convexos es convexa.
iv) El producto cartesiano de conjuntos convexos es convexo.
v) El producto de un escalar por un conjunto convexo es convexo.

vi) Si S es un conjunto convexo y f: $R^n \to R$, entonces f(S) es convexo.
vii) Otra operación que efectuada sobre conjuntos convexos hace que el resultado pueda perder la convexidad es la diferencia entre conjuntos convexos.
viii) Los conjuntos formados por un número finito de puntos no son convexos, salvo el caso de los que únicamente tienen un punto.

Para los casos en que un conjunto no sea convexo, resultaría interesante analizar si de alguna manera se podría completar dicho conjunto para hacerlo convexo. Se plantea entonces la necesidad de intentar encontrar el menor conjunto convexo que contiene a uno dado. Este conjunto siempre existe y recibe un nombre, *envolvente convexa*.

De la definición anterior pueden deducirse dos formas de construir la envolvente convexa [S] de un conjunto dado, S:

a) Intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen.
b) Conjunto formado por todas las combinaciones lineales convexas de puntos del conjunto.

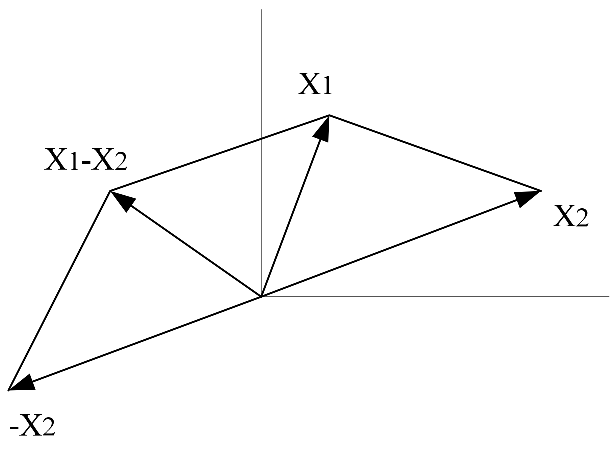
Proposición 1.1. Cualquier punto sobre el segmento que une dos puntos de R^n puede ser expresado como combinación convexa de los dos puntos.

Demostración

Designemos con X_1 y X_2 a esos dos puntos y hagamos que X esté sobre el segmento que los une. Este segmento es paralelo a la línea definida por el vector X_1-X_2.

$$X=X_2+\alpha(X_1-X_2) = \alpha X_1+(1-\alpha)X_2$$

es la expresión de X como combinación convexa de X_1 y X_2, donde $0 \le \alpha \le 1$.



Definición 1.4. Llamaremos *vértice* o *punto extremo* de un conjunto convexo a todo elemento del conjunto que no puede expresarse como combinación convexa de otros dos puntos distintos del conjunto. Es decir, un vértice nunca puede ser un punto intermedio de un segmento contenido completamente en el conjunto.

No todo conjunto convexo tiene vértices y, en el caso de tenerlos, puede tener tanto un número finito como un número infinito de ellos.

Proposición 1.2. Todo conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado tiene al menos un vértice.

Definición 1.5. Al conjunto de puntos $H=\{X\in R^n \mid U^TX = c,\ U\neq 0,\ U\in R^n,\ c\in R\}$ se le denomina *hiperplano*.

Otra forma de caracterizar al hiperplano, H, es: dado un $X'\in H$, $U^TX' = c$, tomamos un vector X, tal que, $U^TX' - U^TX = 0 \Rightarrow U^T(X' - X)= 0$

$$H=\{X\in R^n ;\ U^T(X' - X)= 0,\ U \neq 0,\ U\in R^n\}$$

Cualquier punto que pueda ser expresado como una combinación convexa de dos puntos de R^n estará sobre el segmento que une a los dos puntos.
A partir de la definición anterior, podemos definir los conjuntos siguientes:

Semiespacio cerrado: $S_c=\{X\in R^n \mid U^TX \leq c;\ U\neq 0,\ U\in R^n,\ c\in R\}$
Semiespacio abierto: $S_a=\{X\in R^n \mid U^TX < c;\ U\neq 0,\ U\in R^n,\ c\in R\}$

Proposición 1.3. Un semiespacio es un conjunto convexo.

Demostración
Veámoslo para semiespacios cerrados, para semiespacios abiertos la demostración sería equivalente.

Sea $S_c =\{X\in R^n \mid U^TX \leq c;\ U\neq 0,\ U\in R^n,\ c\in R\}$ y sean $X_1, X_2 \in S_c$
entonces $U^TX =U^T[\alpha X_1+(1-\alpha)X_2]= \alpha U^T X_1+ (1-\alpha) U^T X_2\leq c$
por tanto S_c es convexo.

Proposición 1.4. Un hiperplano es un conjunto convexo.
Demostración
Basta considerar que un hiperplano es la intersección de dos semiespacios cerrados, que un semiespacio es un conjunto convexo (proposición anterior) y que la intersección de conjuntos convexos es convexa.

Proposición 1.5. El conjunto de todas las combinaciones convexas de un numero finito de puntos $X_1, X_2, ..., X_n$ de R^n es un conjunto convexo al que se denomina poliedro convexo.

Definición.1.6. El conjunto de vectores $X = (x_1,...,x_n)^T \in R^n$ cuyas componentes satisfacen las *m* desigualdades lineales:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & a_{1n}x_n \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & a_{2n}x_n \leq & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & a_{mn}x_n \leq & b_m \end{array}$$

se denomina **conjunto solución** del sistema de desigualdades lineales.

Definición1.7. Se denomina **politopo convexo** a todo conjunto que puede expresarse como intersección de un número finito de semiespacios cerrados. Si un politopo tiene vértices, siempre tiene un número finito de ellos.

Definición1.8. A un politopo acotado se denomina *poliedro*.

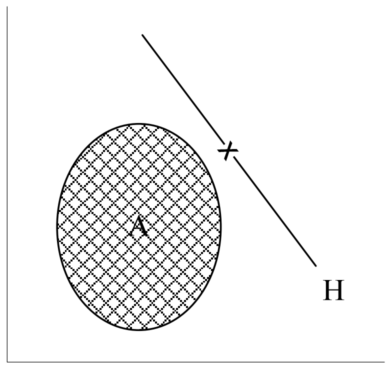
Proposición 1.6. Se denomina *simplex* a un poliedro convexo en un espacio de "n" dimensiones que tiene exactamente "n+1" puntos extremos.
Ejemplos: Un simplex en:

i) R sería un segmento.
ii) R^2 sería un triángulo.
iii) R^3 sería un tetraedro, etc.

Proposición 1.7. Denominaremos envolvente convexa de un conjunto S al menor conjunto convexo que lo contiene.
Si el conjunto S es convexo, éste coincide con su envolvente convexa.
Dado un número finito de puntos de R^n, su envolvente convexa es el poliedro convexo engendrado por dichos puntos.

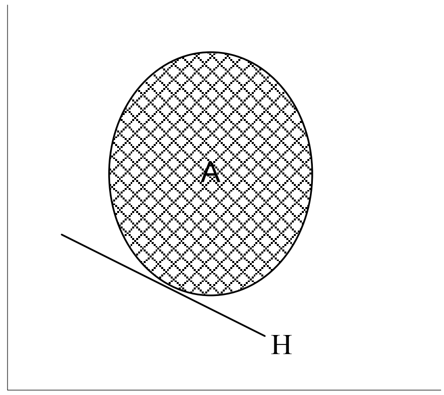
Definición 1.9. Un subconjunto $C \subset R^n$ es un *cono*, si cualquiera que sea $X \in C \Rightarrow \alpha X \in C$ con $\alpha \geq 0$. Esto quiere decir que, para que un conjunto sea un cono, todas las semirrectas que partiendo del origen pasan por cualquiera de sus puntos deben estar completamente contenidas en el propio conjunto.
El **cono convexo** generado por n puntos es el conjunto de todas las combinaciones lineales con coeficientes positivos de esos puntos. En este caso los n puntos se llaman generadores del cono.

Teorema 1.1. Sea A un conjunto convexo de R^n y sea $X \notin A$; existe entonces un hiperplano H que contiene a X y respecto del cual todos los puntos de A están en uno de los semiespacios cerrados determinados por H (*hiperplano límite*).
Gráficamente en R^2:



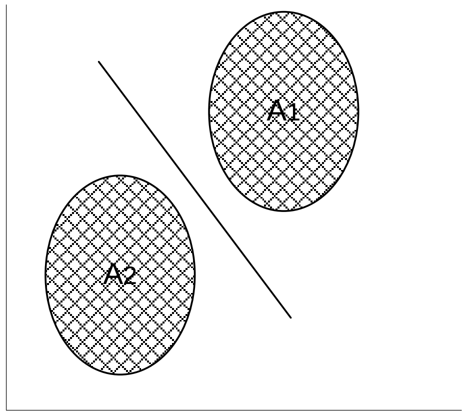
Teorema 1.2. Dado un conjunto convexo A y x un punto de su frontera, existe un hiperplano H que contiene a x y tal que todos los puntos de A están en uno de los semiespacios cerrados determinados por H (*hiperplano soporte*).

Gráficamente en R^2:



Teorema 1.3. Dados dos conjuntos convexos no vacíos A_1 y A_2 disjuntos o teniendo en común solamente puntos frontera, existe un hiperplano que los separa, H (*hiperplano de separación*).

Gráficamente en R^2:



Los dos teoremas anteriores no ofrecen ninguna dificultad en su demostración.