CAPÍTULO 2

PROGRAMACIÓN LINEAL

2.1. El modelo de Programación Lineal

En los siglos XVII y XVIII, grandes matemáticos, como Newton, Leibnitz, Bernoulli y, sobre todo, Lagrange, que tanto habían contribuido al desarrollo del cálculo infinitesimal, se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones.

Posteriormente, el matemático francés Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) fue el primero en intuir, aunque de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

En 1939, el matemático ruso Leonid Vitalevich Kantorovitch publica una extensa monografía titulada Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida, llamada hoy en día programación lineal.

En 1941-1942 se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por Koopmans y por Kantorovitch, razón por la cual se suele conocer con el nombre de problema de Koopmans-Kantorovitch.

En los años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, en Estados Unidos se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad, que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la programación lineal.

Paralelamente a los hechos descritos se desarrollan las técnicas de computación y los ordenadores, instrumentos que harían posible la resolución y simplificación de los problemas que se estaban gestando.

En 1947, G. B. Dantzig formula, en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar al que cabe reducir todo problema de programación lineal. Respecto al método simplex, que estudiaremos después, señalaremos que su estudio comenzó en 1951 y fue desarrollado por Dantzig. Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro John Von Neumann (1903-1957), quien en 1928 publicó su famoso trabajo sobre Teoría de juegos.

La Programación Lineal es un conjunto de técnicas racionales de análisis y de resolución de problemas que tiene por objeto ayudar a los responsables en las decisiones sobre asuntos en los que interviene un gran número de variables.

El nombre Programación Lineal no procede de la creación de programas de ordenador, sino de un término militar, programar, que significa *realizar planes o propuestas de tiempo para el entrenamiento, la logística o el despliegue de las unidades de combate*.

La Investigación Operativa en general y la programación lineal en particular recibieron un gran impulso gracias a los ordenadores. Uno de los momentos más importantes fue la aparición del Método del Simplex. Este método, desarrollado por G. B. Dantzig en 1947, consiste en la utilización de un algoritmo para optimizar el valor de la función objetivo teniendo en cuenta las restricciones planteadas. Partiendo de uno de los vértices de la región factible, por ejemplo el vértice P, y aplicando la propiedad: si la función objetivo no toma su valor mínimo en el vértice P, entonces existe una arista que parte del vértice P y a lo largo de la cual la función objetivo no aumenta, es decir, se pasa a otro vértice donde el valor de función objetivo sea menor o igual que el alcanzado en P.

Iniciarse en la técnica de programación lineal teniendo como referencia al método científico: la representación o modelo en formulación matemática lineal de algunos problemas elegidos, será nuestro objetivo en este capítulo.

La Programación Lineal es una de las técnicas agrupadas como programación matemática, aplicable a problemas de asignación de recursos limitados, con actividades competitivas hacia un objetivo común, que puede ser de maximizar beneficios o minimizar pérdidas. Se utiliza un modelo matemático con representación válida de la problemática en estudio; sus relaciones deben ser lineales, que significa utilizar, sólo variables de primer grado en cada término.

El objetivo de la Programación Lineal es encontrar el valor de la función que

$$\text{Max (Min) } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

denominada **función objetivo**.

La función objetivo se encuentra sujeta a una serie de **restricciones**

st
$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$
$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2$
….
$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m$

donde $x_i \geq 0$ (i=1, 2, …, n) son las condiciones de no negatividad de las variables.

Cada columna de coeficientes:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n, b) = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}\ b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n}\ b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots\ a_{mn}\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n \leq b;$$

$$x_i \geq 0,\ \forall i$$

Matricialmente lo anterior se escribe como:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = c^T X \\ &\quad \text{st} \\ &\qquad AX \leq b \\ &\qquad X \geq 0 \end{aligned}$$

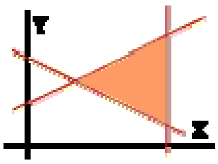
siendo
z: la función objetivo
$c = (c_1,...,c_n)^T$: vector de coeficientes de la función objetivo.
$X = (x_1,...,x_n)^T$: vector de variables de decisión.
$A = (...,a_{ij},...)$: matriz de coeficientes técnicos (i =1, 2, ..., m; j =1, 2, ..., n).
$b = (b_1,...,b_m)^T$: vector de demandas (recursos).

El *conjunto de soluciones factibles* de un problema de Programación Lineal viene dado por:

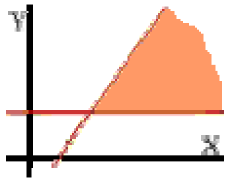
$$X = \{x \in R^n \,/\, A\,x \leq b\,,\, x \geq 0\}$$

Como se verá posteriormente, todos los óptimos (si existen) deberán estar en la frontera del conjunto de soluciones factibles.

La solución de un problema de programación lineal, en el supuesto de que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de *región factible*, y puede estar o no acotada.



Región factible acotada



Región factible no acotada

La región factible incluye o no los lados y los vértices, según que las desigualdades sean en sentido amplio (≤ o ≥) o en sentido estricto (< o >).

Si la región factible está acotada, su representación gráfica es un polígono convexo con un número de lados menor o igual que el número de restricciones siempre que no haya restricciones redundantes.

2.2. Formulación de un problema de Programación Lineal

Para que un modelo de Programación Lineal sea válido, debe cumplir las propiedades siguientes:

Proporcionalidad. Significa que la contribución al valor de la función objetivo y el consumo o requerimiento de los recursos utilizados, son proporcionales al valor de cada variable de decisión. Así el término $2x_1$ es proporcional, porque contribuye al valor de la función *z* con 2, 4, 8, etc. para los valores 1, 2, 3, etc., respectivamente, de x_1. Se puede observar el aumento constante y proporcional de 2 conforme crece el valor de x_1.

Aditividad. Significa que se puede valorar la función objetivo *z*, así como también los recursos utilizados, sumando las contribuciones de cada uno de los términos que intervienen en la función *z* y en las restricciones.

Divisibilidad. Significa que las variables de decisión son continuas y por lo tanto son aceptados valores no enteros para ellas. La hipótesis de divisibilidad más la restricción de no negatividad, significa que las variables de decisión pueden tener cualquier valor que sea positivo o por lo menos igual a cero.

Certidumbre. Significa que los parámetros o constantes son estimados con certeza, o sea, no interviene una función de probabilidad para obtenerlos

El modelo de programación lineal es un caso especial de la programación matemática, pues debe cumplir que, tanto la función objetivo como todas las funciones de restricción, sean lineales.

Dependiendo del tipo de restricción que presente el problema de programación lineal, tendremos:

Restricciones (=): Formulación estándar.
Restricciones (≤) o (≥): Formulación canónica.
Restricciones (≤ o (≥) o (=): Formulación mixta.
Sin restricciones de signo: $x_k = (x+) - (x-)$, donde $(x+) \geq 0$; $(x-) \geq 0$

Por ejemplo, vamos a pasar un problema formulado en forma canónica a otro en forma estándar.

Problema formulado en *forma canónica*:

$$\text{Max (Min)} z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

st (s. t.)

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &\leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &\leq b_m \\ x_i \geq 0, \ \forall i \end{aligned}$$

Escrito lo anterior en forma compacta, tenemos

$$\text{Max } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = \text{Max} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

st

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ (i=1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \geq 0, \ (j=1, 2, \ldots, n)$$

Escrito en forma matricial sería:

$$\text{Max } z = c^T X$$

st

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Cada columna de coeficientes técnicos A_j representa un vector:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Las restricciones las escribiremos:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n \leq b$$
$$x_i \geq 0, \forall i$$

Problema formulado en *forma estándar*:

$$\begin{aligned}
&\text{Max (Min)} z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
&\text{st (s. t.)} \\
&\quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1 \\
&\quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m \\
&\quad x_i \geq 0, \forall i
\end{aligned}$$

A las variables x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m} se las denomina *variables de holgura* y se introducen para convertir desigualdades en igualdades.

Cuando las variables de holgura son iguales a cero, implica que el recurso de esa actividad se ha consumido en su totalidad (restricción saturada).

2.3. Fases en la resolución de problemas de Programación Lineal

Las fases en la resolución de un problema de Programación Lineal las podemos resumir en:

1ª Definir el significado cuantitativo de las variables de decisión (x_1, x_2,…, x_n).

2ª Establecimiento de la función objetivo cuyo valor se desea **maximizar**(utilidad, rendimiento, ingreso, producción) o bien **minimizar** (costo, tiempo, mano de obra, inventario).

3ª Establecimiento de las restricciones que limitan el valor óptimo que puede tomar la función objetivo. Las restricciones que pueden presentarse son del tipo: i) Si no se debe exceder del recurso disponible (≤); ii) Para no menos de lo requerido (≥); iii) Para igualar el recurso especificado (=).

4ª Resolución del problema y análisis de la solución o soluciones.

Ejercicio. Un empresa tiene tres tipos de máquinas, A, B y C, que pueden fabricar dos productos, P1 y P2. Todos los productos tienen que pasar por todas las máquinas. La tabla siguiente muestra los recursos:

Tipo de Máquina	Producto 1 Horas por u.	Producto 2 Horas por u.	Horas disponibles semanalmente
A	2	2	16
B	1	2	12
C	4	2	28
Ganancia por u.	1	1,50	

¿Qué cantidad de cada producto P1 y P2 se debe manufacturar cada semana, para obtener la máxima ganancia ?

Desarrollado el problema en fases, resulta:

1ª fase:

x_1 = " número de unidades de P1 "
x_2 = " número de unidades de P2 "

2ª fase:

$$\text{Max } z = 1\,x_1 + 1.5\,x_2$$

3ª fase :

$$2\,x_1 + 2\,x_2 \leq 16$$
$$x_1 + 2\,x_2 \leq 12$$
$$4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 28$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

4ª fase :

La resolución del problema y análisis de la solución o soluciones se verá posteriormente.

2.4. Tipo de soluciones en un problema de programación lineal

El problema de programación lineal formulado matricialmente (estándar):

$$\text{Min } z = c^T X \tag{2.1}$$

st

$$AX = b \tag{2.2}$$
$$X \geq 0 \tag{2.3}$$

Donde **A** es una matriz de m filas (restricciones) y n columnas (variables), siendo $n \geq m$. Generalmente las restricciones aparecen en forma de desigualdad y son convertidas en igualdades al introducir las variables de holgura, esto hace que la suposición de que $n \geq m$ esté justificada. Además se supondrá que la matriz **A** tiene rango m; lo que quiere decir que pueden seleccionarse m columnas de **A** de manera que la matriz que forman tenga determinante no nulo. El hecho de exigir que el rango de la matriz **A** sea m implica evitar que en el problema aparezcan restricciones redundantes o contradictorias. Las restricciones redundantes pueden eliminarse de la formulación del problema y las contradictorias provocan que el espacio de soluciones factibles sea vacío y el problema no tenga solución.

*Cada una de las submatrices de **A** con determinante distinto de cero (es decir, inversibles) formadas seleccionando m columnas de **A**, se llama **matriz básica** o matriz de base. Si **B** es una de esas matrices, se dice que es una matriz básica factible si el vector resultante de multiplicar su inversa por el vector b tiene todas sus componentes mayores o iguales que cero*

Cada matriz básica **B** del programa lleva asociado un vector que se conoce como **solución básica**; el proceso de construcción es el siguiente:

1. Se dividen las variables de decisión en dos bloques:

Variables básicas: aquella que resulta de (2.2) al hacer (n-m) variables iguales a 0.

Variables no básicas: las restantes.

2. A las variables no básicas se las da el valor cero.
3. Se resuelve el sistema **BX = b**, donde **X** es el vector formado con las variables básicas y se asignan a estas variables la solución obtenida.

Las soluciones de un problema de programación lineal se clasifican en:

- **Solución factible**: Es un conjunto de n + m variables x_j, definidas ordenadamente como un vector $X = (x_1, x_2, ... x_j, ... x_n , x_{n+1}, ..., x_{n+m})$ que satisface el conjunto de ecuaciones que constituyen el sistema (2.2) y (2.3) sus componentes son todas positivas o nulas.
- **Solución básica**: **Solución básica**: aquella que resulta de (2.2) al hacer (n-m) variables iguales a 0. Cada una de las submatrices de **A** con determinante distinto de cero (es decir, invertibles) formadas seleccionando m columnas de **A** se llama **matriz básica** o matriz de base. Si **B** es una de esas matrices, se dice que es una matriz básica factible si el

vector resultante de multiplicar su inversa por el vector **b** tiene todas sus componentes mayores o iguales que cero.

- **Solución factible básica**: aquella que es solución básica y cumple (2.3), esto es, todas las variables son no negativas.
- **Solución factible básica no degenerada**: aquella que es solución factible básica que tiene exactamente m variables x_i positivas, es decir, todas las variables básicas son positivas.
- **Solución factible mínima**: aquella que es factible y hace mínimo z.
- **No factibles**: alguna componente tiene un valor negativo.

Y, a su vez, en:

- **Degeneradas**: cuando alguna de las variables básicas tiene un valor nulo.
- **No degeneradas**: cuando todas las variables básicas son estrictamente positivas.

El número de soluciones básicas de un problema lineal es siempre finito y como máximo: $\left(\dfrac{(n+m)!}{m!n!}\right)$
donde m es el número de restricciones de igualdad y n el número de variables en su forma estándar. Éste es el número de posibles combinaciones para elegir m columnas entre las n columnas existentes. Por supuesto, no siempre todas esas combinaciones dan lugar a matrices con determinante no nulo.

A continuación se presenta un ejemplo de localización de soluciones básicas de un programa lineal. Se trata de encontrar las soluciones básicas del problema

Min $z=2x_1+4x_2+x_3$
$2x_1+2x_2 \leq 6$
$x_1+4x_2-x_3 \leq 12$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

y clasificarlas en factibles o no factibles, degeneradas o no degeneradas. En primer lugar, debe formularse el programa en su forma estándar y obtener las correspondientes matrices:

A					**b**
2	2	0	1	0	6
1	4	-1	0	1	12

Las matrices básicas serán en este caso todas las submatrices inversibles formadas al seleccionar 2 columnas de **A**.

Por ejemplo, la primera matriz básica que puede construirse es la formada por las dos primeras columnas de **A**:

B	$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{matrix}$

En este caso, las variables básicas son x_1 y x_2 y los valores que toman en la correspondiente solución básica se obtienen resolviendo el sistema:

$2x_1+2x_2 = 6$
$x_1+4x_2 = 12$

La solución de dicho sistema es x_1 =0 y x_2=3. A las restantes variables, las no básicas, se las da el valor cero y la solución básica que se obtiene es **X**=(0,3,0,0,0). Las variables básicas son no negativas por tanto la solución básica es factible y es degenerada porque la primera variable básica es nula.

De igual manera se construyen el resto de soluciones básicas, en este caso todas las submatrices 2x2 son básicas excepto la que forman las columnas tercera y quinta. En la siguiente tabla se presentan todas las soluciones básicas obtenidas.

Variables básicas	**Variables no básicas**	**Matriz básica**	**Solución básica**	**Tipo**
x_1 y x_2	x_3, x_4 y x_5	$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{matrix}$	(0,3,0,0,0)	*Factible degenerada*
x_1 y x_3	x_2, x_4 y x_5	$\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix}$	(3,0,-9,0,0)	*No factible*
x_1 y x_4	x_2, x_3 y x_5	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	(12,0,0,-18,0)	*No factible*
x_1 y x_5	x_2, x_3 y x_4	$\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$	(3,0,0,0,9)	*Factible no degenerada*
x_2 y x_3	x_1, x_4 y x_5	$\begin{matrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{matrix}$	(0,3,0,0,0)	*Factible degenerada*
x_2 y x_4	x_1, x_3 y x_5	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{matrix}$	(0,3,0,0,0)	*Factible degenerada*
x_2 y x_5	x_1, x_3 y x_4	$\begin{matrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{matrix}$	(0,3,0,0,0)	*Factible degenerada*
x_3 y x_4	x_1, x_2 y x_5	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$	(0,0,-12,6,0)	*No factible*
x_4 y x_5	x_1, x_2 y x_3	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	(0,0,0,6,12)	*Factible no degenerada*

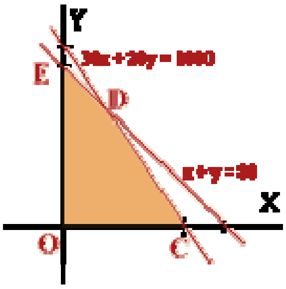
Veamos, mediante un ejemplo el concepto de punto básico degenerado (menos de *m* componentes positivas) y no degenerado:

Max $\mathbf{z} = x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4$
st
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$
$x_i \geq 0$ (i=1, 2, 3, 4)

El punto (1,0,0,0) es **básico degenerado**
El punto (0,0,1,1) es **básico no degenerado**
El punto (1/2, 1/4 ,1/4 ,1/2) es **no básico**

Veamos una serie de ejemplos de problemas de programación lineal con dos variables atendiendo al tipo de solución que presentan:

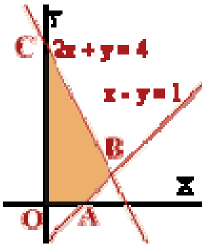
i) Con solución única



Maximizar la función $z = f(x,y) = 4x + 3y$
st
$30x + 20y \leq 1800$
$x + y \leq 80$
$x \geq 0\ ,\ y \geq 0$

Tiene por región factible la región sombreada. Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:
f(O) = f(0,0) = 0; f(C)=f(60,0) = 240; f(D) = f(20,60) = 260; f(E) = f(0,80) = 240
La solución es única, y corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice D(20,60).

ii) Solución múltiple



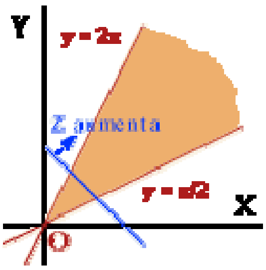
Maximizar la función z = f(x,y)= 4x + 2y
st $2x + y \leq 4$, $x - y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:
f(O)=f(0,0) = 0, f(A) = f(1,0) = 4
f(B)=f(5/3,2/3) = 8, f(C) = f(0,4) = 8

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices B y C, por tanto, en todos los puntos del segmento BC.

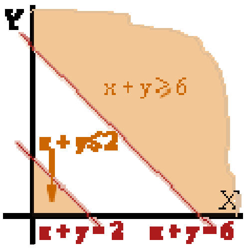
Hay infinitas soluciones, solución múltiple, que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible. En estos casos, como ya vimos en el capítulo anterior, la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

iii) Solución no acotada (No existe límite para la función objetivo)



Maximizar la función z = f(x,y) = x + y
st $y \leq 2x$, $y \geq x/2$
Tiene por región factible la zona coloreada que aparece en la figura, que es una región no acotada. La función crece indefinidamente para valores crecientes de *x* e *y*. En este caso no existe un valor extremo para la función objetivo, por lo que puede decirse que el problema carece de solución.
Para que suceda esta situación, la región factible debe estar no acotada.

iv) Cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones



Maximizar la función z = f(x,y) = 3x + 8y
st $x + y \geq 6$, $x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
No existe la región factible, ya que las zonas coloreadas que aparecen en la figura son únicamente soluciones de alguna de las inecuaciones .Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades no determina ninguna región factible. Este tipo de problemas carece de solución.

2.5. Resolución de un problema de programación lineal mediante el método gráfico

Lo que se pretende con el método gráfico es dar una visión geométrica del problema que queremos resolver. Es evidente que su precisión no es la deseada, pero nos puede dar una aproximación a lo que queremos resolver.

El procedimiento a seguir es:

1. Dibuje la gráfica de cada restricción sobre el mismo cuadrante no negativo.
2. Convierta las desigualdades en igualdades y represente la rectas que representan estas ecuaciones.
3. Escoja cualquier punto de ensayo que no pertenezca a la recta.
4. Evalúe el primer miembro de la expresión. Sustituya el punto de ensayo en el primer miembro de la desigualdad y obtenga el valor numérico.
5. Determine si el punto de ensayo satisface la desigualdad.
6. Si el punto de ensayo satisface la desigualdad original, entonces todos los puntos que estén del mismo lado que el punto de ensayo satisfacen la desigualdad, en caso contrario será un punto no factible.
7. Localice la región de soluciones factibles (Región Factible).
8. Dibuje una recta arbitraria de la función objetivo, por ejemplo pasando por el origen, para obtener la pendiente de la función objetivo.
9. Determine la dirección ascendente o descendente de esta recta.
10. Dada la pendiente de la función objetivo y teniendo en cuenta si es un problema de maximizar o minimizar, determine el vértice del conjunto factible que esté sobre la recta que representa la función objetivo.
11. Los valores de las variables de decisión, en este vértice, dan la solución al problema.

El valor óptimo de la función objetivo se obtiene sustituyendo los valores óptimos de las variables de decisión en la función objetivo.

Ejercicio 3. Resolver gráficamente el problema siguiente:
Un fabricante está tratando de decidir las cantidades de producción para dos artículos: mesas y sillas. Se cuenta con 96 unidades de material y con 72 horas de mano de obra. Cada mesa requiere 12 unidades de material y 6 horas de mano de obra. Por otra parte, las sillas utilizan 8 unidades de material cada una y requieren 12 horas de mano de obra por silla. El margen de beneficio es el mismo para las mesas que para las sillas: 5 euros por unidad. El fabricante prometió construir por lo menos dos mesas.

Solución: El primer paso para resolver el problema es expresarlo en términos matemáticos en el formato general de PL.

Función objetivo:

Maximizar $z = 5x_1 + 5x_2$

en donde:

x_1 = número de mesas producidas

x_2 = número de sillas producidas

Restricciones del problema (st):

$12x_1 + 8x_2 \leq 96$ (restricción de material)

$6x_1 + 12x_2 \leq 72$ (restricción de mano de obra)

$x_1 \geq 2$ (restricción de promesa del fabricante)

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ (restricciones de no negatividad)

Poniendo todo junto el modelo, se tiene:

Maximizar $z = 5x_1 + 5x_2$

st

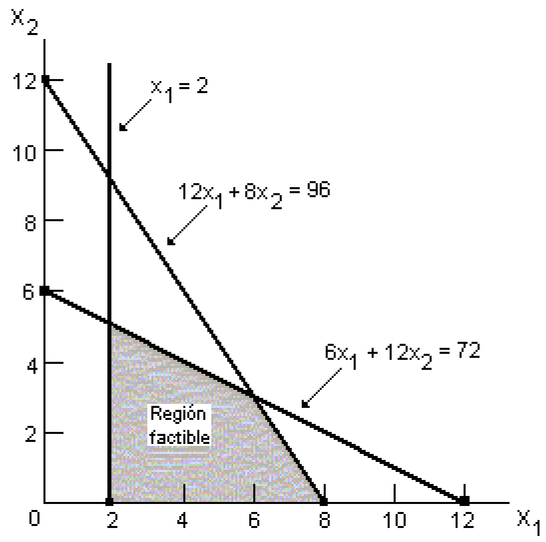
$12x_1 + 8x_2 \leq 96$

$6x_1 + 12x_2 \leq 72$

$x_1 \geq 2$

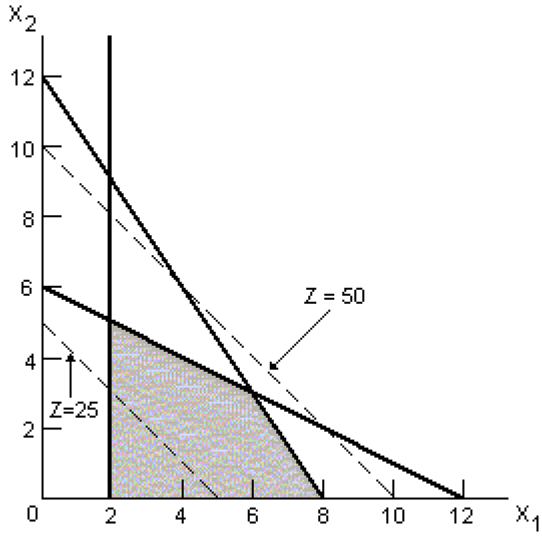
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

La gráfica asociada al problema es:

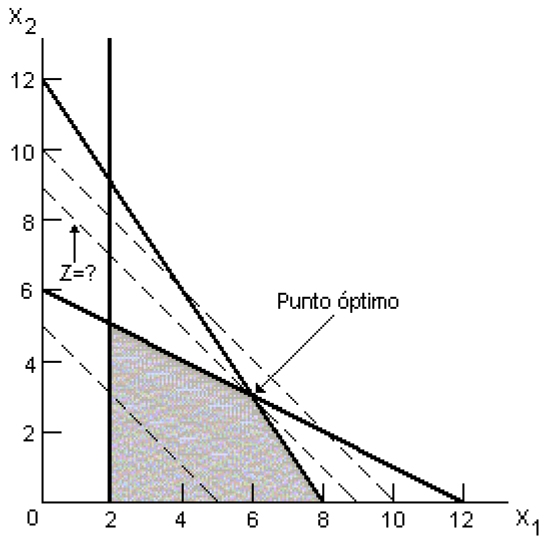


Cualquier solución que esté en la frontera o dentro del área sombreada cumplirá con todas las restricciones. Ahora se utilizará la función objetivo para seleccionar la solución óptima.

Representando por líneas discontinuas la función objetivo moviéndose hacia el valor óptimo (máximo) del problema, tenemos:



El valor óptimo estará sobre la línea recta que representa a la función objetivo, más lejana al origen, pero que todavía toque la región factible. Esto se muestra en la siguiente figura:



Con el punto óptimo localizado gráficamente, la única tarea que queda es encontrar las coordenadas del punto. Nótese que el punto óptimo está en la intersección de las líneas de restricción para materiales y horas de mano de obra. Las coordenadas de este punto se pueden encontrar resolviendo el sistema de ecuaciones que forman estas dos restricciones. Las coordenadas de este punto resultan ser (6, 3). La sustitución de este punto en la función objetivo da la ganancia máxima: $z = 5(6) + 5(3) = 45$ euros.

En un problema de Programación Lineal con dos variables, si la región factible existe y es acotada, el valor óptimo de la función objetivo se alcanza en uno de los vértices del polígono que limita la región, o a lo largo de uno de los lados. Si la región factible no es acotada, la función objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero si lo hace, éste se encuentra en uno de los vértices de la región.

Si la región es acotada lo único que hay que hacer es calcular el valor de la función objetivo en todos y cada uno de los vértices del polígono, y en aquel en el que el valor de la función sea mayor (o menor) habremos alcanzado el punto óptimo buscado**.** Si se da el caso de que los valores correspondientes a dos vértices coinciden, éstos serán adyacentes, de modo que a lo largo de ese lado del polígono se alcanza el mismo valor de la función objetivo, que es precisamente el valor óptimo. En este caso, las líneas de nivel tienen la misma pendiente que la recta que contiene a ese lado del polígono, es decir, son paralelas.

2.6. Propiedades de las soluciones

Las soluciones de un problema de programación lineal tienen diversas propiedades, alguna de las cuales vamos ver.

Designemos por K el conjunto de las soluciones factibles de un problema de programación lineal; K es una región de R^n determinada por la intersección del conjunto finito de restricciones lineales (2.2) y (2.3), por lo que K es:

i) $K = \emptyset$, no tiene solución el problema de programación lineal.
ii) $K \neq \emptyset$, cuando K tenga un número finito de vértices que se puedan alcanzar todos (poliedro convexo). Existe solución de valor finito de la función objetivo.
iii) $K \neq \emptyset$, cuando K tenga un número finito de vértices que no se puedan alcanzar todos (región convexa ilimitada). El problema tiene solución, pero el máximo podría ser ilimitado.

Si *K* es un poliedro convexo, entonces *K* es la envolvente convexa de los puntos extremos de *K*. Toda solución factible podrá representarse como una combinación convexa de las soluciones factibles extremas de *K* (salvo el caso en que el poliedro sea ilimitado).

Proposición 2.1. El conjunto de soluciones factibles de un problema de programación lineal es un conjunto convexo.

Demostración

Sean X_1 y X_2 soluciones factibles, entonces A X_1= b, A X_2 = b, $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$. Si formamos un vector X que sea combinación lineal de éstos dos:

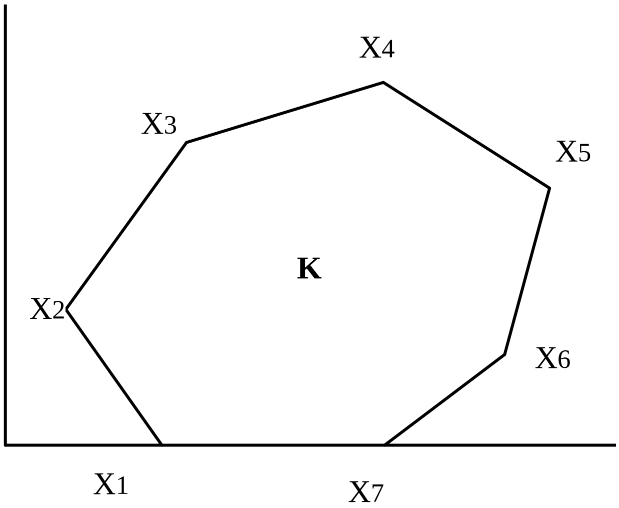
$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2, \quad AX = \alpha AX_1 + (1-\alpha) A X_2 = \alpha b + (1-\alpha) b = b$$

por lo que X es también una solución factible.

Proposición 2.2. Si K es un poliedro convexo, entonces la función objetivo z dada por (2.1) alcanza su mínimo en un vértice de K; además, si este mínimo se alcanza en varios puntos, también se alcanza en cualquier combinación lineal convexa de los mismos.

Demostración

Sean X_1, X_2,…, X_p los vértices de K y sea X_0 una solución factible mínima, esto significa que $c^T X_0 \leq c^T X$ para cada $X \in K$.



Se pueden dar los casos siguientes:

i) Si X_0 es un vértice de K, ya estaría demostrado.
ii) Si X_0 no es un vértice de K, entonces X_0 se podrá poner como una combinación lineal convexa de ellos:

$$X_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i \; ; \; \alpha_i \geq 0 \; ; \qquad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$

Sustituyendo:

$$\text{Min } z = m = c^T X_0 = c^T (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_p X_p)$$

Supongamos que $c^T X_1 = \min_i c^T X_i$

$$m \geq c^T (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_1 + \ldots + \alpha_p X_1) = c^T X_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p) = c^T X_1 \geq m$$

por consiguiente $c^T X_1 = m$, es decir, que existe un vértice de K en el que la función objetivo $z= c^T X$ alcanza su valor mínimo.

Para probar la segunda parte de la propiedad supongamos que z alcanza su valor mínimo en $X_1, X_2, \ldots, X_q$ y que X es una combinación lineal convexa de ellos:

$$X = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_i \; ; \alpha_i \geq 0 , \qquad \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1$$

$$c^T X = c^T (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_q X_q) = \alpha_1 c^T X_1 + \alpha_2 c^T X_2 + \ldots + \alpha_q c^T X_q =$$
$$= (m\alpha_1 + m\alpha_2 + \ldots + m\alpha_q) = m (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q) = m$$

con lo cual la proposición queda demostrada.

Proposición 2.3. Si tenemos un conjunto de k vectores $A_1, A_2, \ldots, A_k$, que sean linealmente independientes y de forma que:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_k A_k = b$$

con las $x_i \geq 0$, entonces, el punto $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T$ es un vértice del conjunto convexo K de soluciones factibles.

Demostración

Supongamos que X no fuera vértice, entonces podría expresarse como combinación lineal convexa de dos puntos distintos de K:

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2, \; \alpha\in[0, 1], \; X_1, X_2 \in K$$

Puesto que las coordenadas de las soluciones factibles son no negativas y $\alpha \geq 0$ deberá ocurrir que las n-k coordenadas últimas de X_1 y X_2 fueran iguales a cero:

$$X_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k}, 0, \ldots, 0)^T$$
$$X_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2k}, 0, \ldots, 0)^T$$

con $X_1 \neq X_2$. Además, por ser soluciones factibles, se cumple que $AX_1=b$ y $AX_2=b$, por lo que podemos escribir:

$$x_{11} A_1 + x_{12} A_2 + \ldots + x_{1k} A_k = b$$
$$x_{21} A_1 + x_{22} A_2 + \ldots + x_{2k} A_k = b$$

Restando las expresiones anteriores obtenemos:

$$(x_{11} - x_{21}) A_1 + (x_{12} - x_{22}) A_2 + \ldots + (x_{1k} - x_{2k}) A_k = 0$$

y por ser los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_k$ linealmente independiente llegamos a la conclusión de que:

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_{21} \\ x_{12} &= x_{22} \\ &\ldots \\ x_{1k} &= x_{2k} \end{aligned}$$

es decir, que $X_1 = X_2$, lo que contradice el hecho de haber supuesto $X_1 \neq X_2$, por lo que necesariamente X debe ser un vértice de K.

Proposición 2.4. Si tenemos un vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ es un vértice de K, entonces los vectores A_i asociados con las coordenadas x_i positivas forman un sistema linealmente independiente, de lo que se sigue que, a lo sumo, *m* de estas coordenadas x_i son positivas.

Demostración:

Supongamos, para simplificar, que las k primeras coordenadas son las no nulas, entonces :

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_k A_k = b$$

Si los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son linealmente dependientes, podremos encontrar una combinación lineal de los mismos igual a cero con algún coeficiente no nulo:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k = 0$$

Así tenemos:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i A_i = b$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i = 0$$

donde $\varepsilon > 0$. Si los sumamos y restamos:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i A_i + \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i = b$$
$$\sum_{i=1}^{k} x_i A_i - \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i = b$$

Es decir, desarrollando las expresiones anteriores:

$$(x_1 + \varepsilon \lambda_1) A_1 + (x_2 + \varepsilon \lambda_2) A_2 + \ldots + (x_k + \varepsilon \lambda_k) A_k = b$$
$$(x_1 - \varepsilon \lambda_1) A_1 + (x_2 - \varepsilon \lambda_2) A_2 + \ldots + (x_k - \varepsilon \lambda_k) A_k = b$$

De manera que tenemos dos soluciones distintas del sistema de ecuaciones:

$$X_1 = (x_1 + \varepsilon \lambda_1, x_2 + \varepsilon \lambda_2, \ldots, x_k + \varepsilon \lambda_k, 0, \ldots 0)^T$$
$$X_2 = (x_1 - \varepsilon \lambda_1, x_2 - \varepsilon \lambda_2, \ldots, x_k - \varepsilon \lambda_k, 0, \ldots 0)^T$$

Sumando X_1 y X_2, resulta:

$$X_1 + X_2 = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_k, 0, \ldots 0)^T = 2X$$

Despejando $X = ½ (X_1 + X_2)$, lo cual contradice el hecho de que X sea vértice. De ahí que, no puede hacerse la hipótesis de que los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sean linealmente dependientes, por tanto son linealmente independientes y, como estos vectores son m-dimensionales no podremos tener más de m linealmente independientes, de ahí que, como máximo, m de las x_i serán positivas.

Proposición 2.5. A cada punto extremo del poliedro convexo se encuentra asociado un conjunto de *m* vectores linealmente independientes del conjunto dado $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Demostración

La *Proposición 2.4*. prueba que existen $k \leq m$ vectores linealmente independientes. Para $k = m$ la propiedad *2.5* queda comprobada.

Supongamos que $k < m$ y que podemos encontrar solamente $A_{k+1}, \ldots, A_r$ vectores adicionales tales que el conjunto $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_r$, para $r < m$ es linealmente independiente. Los *n-r* vectores restantes dependen de $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Esto contradice la suposición de que tenemos siempre un conjunto de *m* vectores linealmente independientes $A_1, \ldots, A_m$ asociados con cada punto extremo.

Teorema 2.1. (Caracterización de los vértices de K)

El vector $X = (x_1, x_2,\dots, x_n)^T$, de coordenadas no negativas, es un vértice de K (conjunto convexo de soluciones factibles), si $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = b$ y las $x_i > 0$ son coeficientes de los vectores A_i linealmente independientes.

Demostración

La demostración es inmediata aplicando las proposiciones 3 y 4.

Resumiendo lo anteriormente expuesto mediante propiedades y teoremas tenemos:

- Si existe solución al problema de programación lineal, entonces hay un vértice de K (conjunto de soluciones factibles) en el que la función objetivo alcanza su mínimo (o su máximo). Max z = Min (-z)
- Cada solución factible básica corresponde a un vértice de K.
- A cada vértice de K se puede asociar una base de dimensión *m* del conjunto de vectores $A_1, A_2,\dots, A_n$.
- El máximo número de vértices que puede tener el convexo K es $C_{n,m} = \binom{n}{m}$.
- Aplicando un algoritmo llamado método del Simplex en un número finito de pasos (en general entre *m* y *2m*) se llega a la solución factible óptima.

2.7. Algoritmo del Simplex

El alumno debe aprender la utilización del método del simplex que proporciona la solución de un problema de programación lineal, las diversas circunstancias de su preparación antes de aplicar el algoritmo y los casos especiales identificables en la tabla solución (última tabla).

Sea el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\quad \text{st} \\ &\qquad AX = b \\ &\qquad X \geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que tenemos una solución factible básica, es decir, se conoce una solución de punto extremo en términos de *m* vectores A_j del conjunto original de *n* vectores. Podemos hacer que este conjunto de *m* vectores linealmente independientes sean los primeros *m*, es decir, que las variables no nulas sean las n-m finales $X = (x_1, x_2,\dots, x_m, 0, ..., 0)^T$ que verifica:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m = b,\ \ x_j \geq 0, \forall_j \qquad (2.1)$$

Como los vectores A_m forman una base en el espacio m-dimensional, R^m, podemos expresar cada uno de los *n* vectores dados como combinación lineal de los vectores de esa base: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} A_i = A_j,\ \ j = 1,2,\ldots,n$

y si escribimos todas las ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_{11} A_1 + \alpha_{21} A_2 + \ldots + \alpha_{m1} A_m = A_1 \\ \alpha_{12} A_1 + \alpha_{22} A_2 + \ldots + \alpha_{m2} A_m = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n} A_1 + \alpha_{2n} A_2 + \ldots + \alpha_{mn} A_m = A_n \end{cases} \qquad (2.2)$$

y la función objetivo z tomará en el vértice X el valor:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m \qquad (2.3)$$

Observando en (2.1) que, si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ es la base canónica de los vectores unitarios entonces $x_1=b_1$, $x_2=b_2$, ..., $x_m=b_m$.

Tomemos un j de modo que A_j no esté en la base dada, pues bien si a (2.1) le restamos (2.2) multiplicada por un escalar θ_j, resulta:

$$(x_1 - \theta_j \alpha_{1j})A_1 + (x_2 - \theta_j \alpha_{2j})A_2 + \ldots + (x_m - \theta_j \alpha_{mj})A_m + \theta_j A_j = b \qquad (2.4)$$

con lo cual, si elegimos $\theta_j \geq 0$, de modo que $x_i - \theta_j \alpha_{ij} \geq 0$ para i=1, 2, ..., m tendremos que el vector $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$ es una solución factible, donde:

$$\begin{aligned} &x'_i = x_i - \theta_j \alpha_{ij} \geq 0,\ \ i=1, 2, \ldots, m \qquad (2.5)\\ &x'_i = \theta_j \geq 0,\ \ \ i=j \\ &x'_i = 0,\ \ \ \text{en los demás casos} \end{aligned}$$

La función objetivo en $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$, solución factible, toma el valor

$$\begin{aligned} z' &= c_1 x_1' + c_2 x_2' + \ldots + c_m x'_m + \theta_j c_j = \\ &= c_1 (x_1 - \theta_j \alpha_{1j}) + c_2 (x_2 - \theta_j \alpha_{2j}) + \ldots + c_m (x_m - \theta_j \alpha_{mj}) + \theta_j c_j = \\ &= z - \theta_j (z_j - c_j) \qquad (2.6) \end{aligned}$$

donde z es el valor de la función objetivo en X, y z_j viene dada por la expresión:

$$z_j = c_1\,\alpha_{1j} + c_2\,\alpha_{2j} + \ldots + c_m\,\alpha_{mj} \qquad (2.7)$$

así pues, en (2.6) vemos que debemos seleccionar θ_j y j de forma que verificándose (2.5) se tenga que $\theta_j(z_j-c_j)$ sea positivo y máximo, con lo cual z'<z, $z' = z- \theta_j\,(z_j - c_j)$. El procedimiento consiste, por tanto, en calcular las cantidades $(z_j - c_j) > 0$ observando las relaciones (2.5), éstas corresponden a las variables cuyos vectores asociados, si los incluimos en la base, mejoran el valor de la función objetivo. Estudiaremos dos casos:

i) $\alpha_{ij} > 0$
ii) $\alpha_{ij} \leq 0$

Caso i): $\theta_j \geq 0$, $\alpha_{ij} > 0$

$$x'_i = x_i - \theta_j\,\alpha_{ij} \geq 0, \quad \theta_j \leq \frac{x_i}{\alpha_{ij}}, \quad \theta_j = \min_i \left\{ \frac{x_i}{\alpha_{ij}} / \alpha_{ij} > 0 \right\} \qquad (2.8)$$

y esto para cada j para el que se cumpla $(z_j - c_j) > 0$, a continuación calcularemos los productos $\theta_j\,(z_j - c_j)$ y nos quedaremos con el índice j que da el producto mayor, supongamos que éste es j=m+1, ello significará que seleccionamos el vector A_{m+1}, por otra parte, si el mínimo en (2.8) se alcanza, por ejemplo, para i=1, es decir:

$$\theta_{m+1} = \min_i \left\{ \frac{x_i}{\alpha_{ij}} / \alpha_{ij} > 0 \right\} = \frac{x_1}{\alpha_{1,m+1}} \qquad (2.9)$$

ello significará que $x_1' = x_1 - \theta_{m+1}\,\alpha_{1,\,m+1} = x_1 - \frac{x_1}{\alpha_{1,m+1}}\,\alpha_{1,\,m+1} = 0$, por lo que la nueva solución factible $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T = (0, x_2', \ldots, x_m', \theta_{m+1}, 0, \ldots, 0)^T$ será un vértice de K (conjunto de soluciones factibles) si los vectores $A_2, A_3, \ldots, A_{m+1}$ son linealmente independientes (Vea el teorema de caracterización de los vértices de K).

Para probar que los vectores $A_2, A_3, \ldots, A_{m+1}$ son linealmente independientes, supongamos que fueran linealmente dependientes, esto quiere decir que existirá λ_i tal que

$$\lambda_2\,A_2 + \lambda_{3j}\,A_3 + \ldots + \lambda_m\,A_m + \lambda_{m+1}\,A_{m+1} = 0 \qquad (2.10)$$

para algún λ_i distinto de cero y, puesto que los vectores $A_2, A_3, \ldots, A_m$ son linealmente independientes, deberá ser $\lambda_{m+1} \neq 0$. Por tanto, despejando A_{m+1} de (2.10), obtenemos:

$$A_{m+1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_{m+1}} A_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_{m+1}} A_3 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} A_m$$

haciendo $\gamma_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}}$ (i=2, . .., m)

$$A_{m+1} = \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 + \ldots + \gamma_m A_m \qquad (2.11)$$

Restando (2.11) de (2.2), con j=m+1, encontramos que

$$A_{m+1} = \alpha_{1,m+1} A_1 + \alpha_{2,m+1} A_2 + \ldots + \alpha_{m,m+1} A_m$$

$$0 = \alpha_{1,m+1} A_1 + (\alpha_{2,m+1} - \gamma_2) A_2 + \ldots + (\alpha_{m,m+1} - \gamma_m) A_m$$

por lo que, al ser $A_1, A_2, \ldots, A_m$ linealmente independientes obliga a que $\alpha_{1,m+1}=0$ y, sin embargo se supuso positivo (vea (2.9)).

En consecuencia, $A_2, A_2, \ldots, A_{m+1}$ son linealmente independientes, por lo que X' es un vértice de K y además vuelve a ser una solución factible básica puesto que tiene n-m coordenadas nulas y el resto son no negativas.

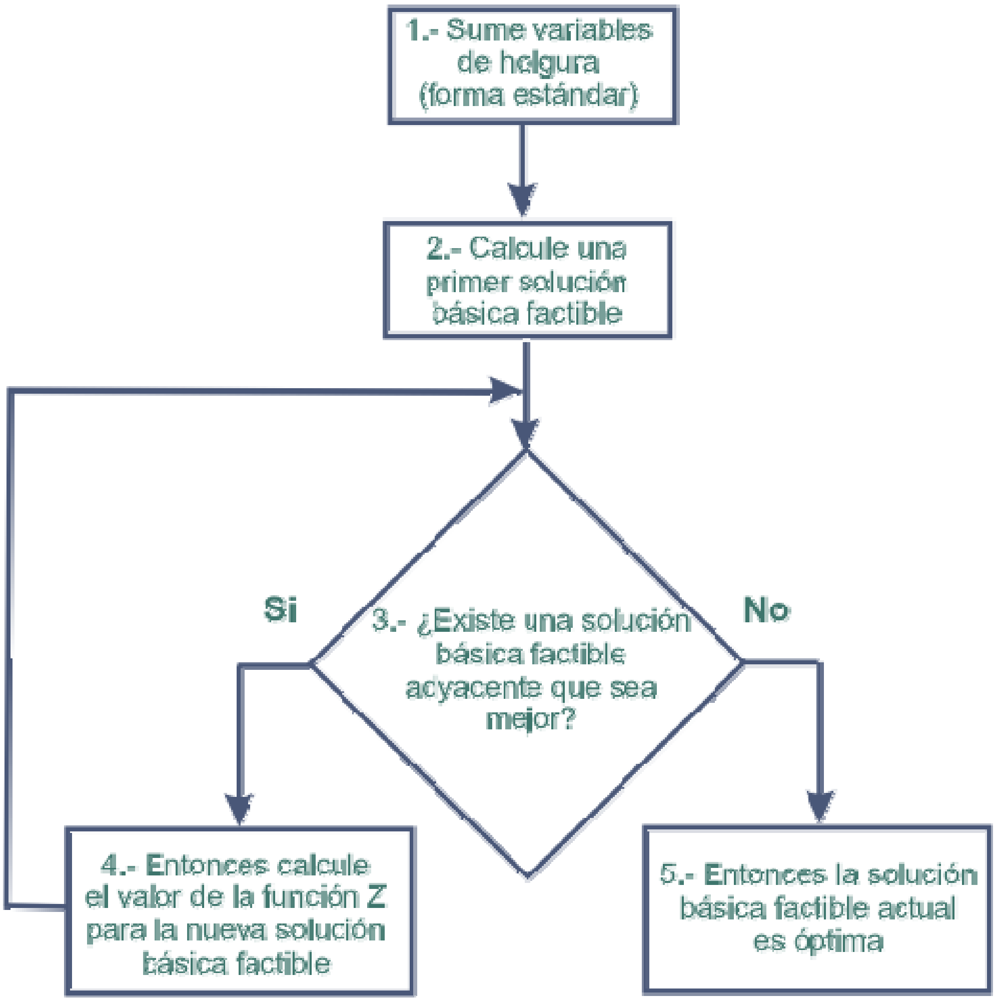
El proceso se volvería a repetir tomando X' como solución factible básica inicial y se iría repitiendo el proceso hasta encontrar $z_j - c_j \leq 0$ para todos los valores de j=1, 2, ..., n, en cuyo caso ya no se podría disminuir la función objetivo y, por tanto, se habría alcanzado el mínimo con el vector X que se tuviera en esa etapa.

Caso ii): $\theta_j \geq 0$, $\alpha_{ij} \leq 0$

$$x'_i = x_i - \theta_j \alpha_{ij}$$
$$z' = z - \theta_j (z_j - c_j), \text{ con } (z_j - c_j) > 0$$

Como se puede elegir un θ_j tan grande como quiera, ocurrirá que z' tiende a menos infinito, es decir, no existe solución.

Cualquier problema de programa lineal puede reducirse a la búsqueda de mínimos en un conjunto finito de puntos (las soluciones básicas factibles). Por supuesto encontrar todas las soluciones básicas de un programa lineal requiere de grandes esfuerzos de cálculo, únicamente resulta sencillo en problemas con pocas variables de decisión. El más famoso de los métodos de resolución de programas lineales (el método Simplex) está basado en la localización de una solución básica inicial y el paso de una a otra hasta encontrar la óptima.



Dentro de los aspectos computacionales, la magnitud de los problemas lineales que aparecen en la mayoría de las situaciones reales hace impensable su tratamiento mediante el método simplex de forma manual. En tales situaciones debe recurrirse al uso de los computadores electrónicos. Sin embargo, el método Simplex no resulta muy económico desde un punto de vista computacional, ya que se almacenan y calculan muchos números que no son estrictamente necesarios. Por ejemplo, en las tablas del simplex aparecen gran número de ceros; para un humano no supone ningún problema reconocer los ceros y darse cuenta que al multiplicar un número por cero resulta cero, o que sumar cero a un número no altera el resultado. Sin embargo, un computador no reconoce esas situaciones y pierde tiempo realizando operaciones que realmente no son necesarias.

Teorema 2.2. Si en algún paso (puede ser el primero) del método simplex se verifica que $(z_j - c_j) \leq 0$, $\forall j$ (j=1, 2, ..., n), entonces, el último vértice obtenido es la solución óptima.

Demostración

Sea $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ un punto extremo en el cual la función objetivo vale z_0 y para el que se verifica que $(z_j - c_j) \leq 0$, $\forall j$ (j=1, 2, ..., n).

Hemos de probar que para cualquier otra solución $(z_j - c_j) \leq 0$, $\forall j$ (j=1, 2, ..., n)

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T, \text{ con } y_i \geq 0$$

y valor de la función objetivo: $z = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ (2.12)

se verifica $z_0 \leq z$.

Como $(z_j - c_j) \leq 0 \Rightarrow z_j \leq c_j$ y sustituyendo en la expresión (2.12) cada c_j por z_j tenemos:

$$z_1 y_1 + z_2 y_2 + \ldots + z_n y_n \leq z \qquad (2.13)$$

Sustituyendo en (2.13) cada z_j (j=1, 2,..., n) por su valor

$$z_j = c_1 \alpha_{1j} + c_2 \alpha_{2j} + \ldots + c_m \alpha_{mj} = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}$$

tenemos:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i1}\right) y_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i2}\right) y_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{in}\right) y_n \leq z$$

Agrupando términos en c_i (i=1, 2, ..., m) se tiene:

$$c_1 \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} y_j\right) + c_2 \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} y_j\right) + \ldots + c_m \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} y_j\right) \leq z \qquad (2.14)$$

Puesto que Y es una solución factible

$$y_1 A_1 + y_2 A_2 + \ldots + y_n A_n = b \qquad (2.15)$$

Sustituyendo A_j (j=1, 2, ..., n) por su valor:

$$A_j = \alpha_{1j} A_1 + \alpha_{2j} A_2 + \ldots + \alpha_{mj} A_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} A_i$$

Sustituyendo este valor en (2.15) para cada uno de los j:

$$y_1 \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} A_i\right) + y_2 \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i2} A_i\right) + \ldots + y_n \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} A_i\right) = b$$

Ahora agrupamos términos en A_i:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} y_j\right) A_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} y_j\right) A_2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} y_j\right) A_m = b$$

Como X es un punto extremo

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m = b$$

y por ser los vectores $A_1, A_2, .., A_m$ linealmente independientes, b se escribe de forma única, por lo cual:

$$x_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} y_j \,;\; x_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} y_j \,;\; \ldots;\; x_m = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} y_j$$

Sustituyendo en (2.14) se tiene:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m \le z$$

es decir $z_0 \le z$.

Ejercicio 1. Resuelva mediante el Método Simplex el problema de programación lineal siguiente:

Min $\mathbf{z} = -5x_1+2x_2-3x_3$

st

$2x_1+2x_2-x_3 \le 4$

$3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5$
$x_i \geq 0$ (i=1, 2, 3)

Pasando el problema a forma estándar añadiendo variables artificiales, de manera que tengamos una base canónica para comenzar el método del simplex:

Min $z = -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$
st
$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$
$3x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 3$
$2x_1 + x_2 + 3x + x_6 = 5$
$x_i \geq 0$ (i=1, 2, 3)

Primera tabla

Se lleva a la tabla los datos del problema y se comienza a operar de acuerdo con el algoritmo del simplex:

		c_j	-5	2	-3	0	0	0		
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$\mathbf{A_6}$	θ_1	θ_3
$\mathbf{A_4}$	0	4	2	2	-1	1	0	0	2	--
$\mathbf{A_5}$	0	3	**3**	-1	1	0	1	0	**1**	3
$\mathbf{A_6}$	0	5	2	1	3	0	0	1	5/2	**5/3**
	z, z_j, θ_j	**0**	0	0	0	0	0	0	1	5/3
		z_j-c_j	5	-2	3	0	0	0		
		$\theta_j(z_j$-$c_j)$	**5**	-	5	-	-	-		

El vértice inicial de partida es $X=(0, 0, 0, 4, 3, 5)^T$. Para ver que vector sale de la base y cuál entra operamos de la forma siguiente:

i) Calculamos $z_j = c_1 \alpha_{1j} + c_2 \alpha_{2j} + \ldots + c_m \alpha_{mj}$.

ii) Calculamos $(z_j - c_j)$.

iii) Para los valores $(z_j - c_j) > 0$ calculamos $\theta_j = \min_i \left\{ \frac{x_i}{\alpha_{ij}} = \frac{b_i}{\alpha_{ij}} / \alpha_{ij} > 0 \right\}$.

iv) Buscando que $\theta_j (z_j - c_j)$ sea positivo y máximo.

v) El valor de i que hace $\min_i \left\{ \frac{x_i}{\alpha_{ij}} / \alpha_{ij} > 0 \right\}$ nos proporciona el vector i-ésimo que sale de la base y, el valor de j que hace $\max_j \theta_j (z_j - c_j)$ nos proporciona el vector j-ésimo que entra en la base.

Por ejemplo, para j=1, tenemos, $z_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 0$, $z_1 - c_1 = 0 - (-5) = 5$

Realizadas las operaciones correspondientes, tenemos:

- El vector que entra en la base es el **A_1** ($\max_{j=1} \theta_1$ (z_1 –c_1)=1·5=5).

- El vector que sale de la base es el **A_5** ($\theta_1 = \min_{i=2}\left\{\frac{x_2}{\alpha_{21}} = \frac{b_2}{\alpha_{21}} = \frac{3}{3}\right\}$ =1).

El vector entrante en la base formará parte de la base canónica de manera que el elemento pivote, en nuestro caso el **3**, que se genera en el cruce del vector que entra y el vector que sale, deberá valer uno y el resto cero.

Este proceso se repite de forma iterativa hasta que se verifique (z_j - c_j) ≤ 0, ∀j (j=1, 2, ..., n).

El vector A_1 que entra en la base se convierte en un elemento de la base canónica. El elemento pivote (que ha de ser un **1**) se forma en el cruce del vector que entra con el que sale (**A_1/A_5**). Veamos como se obtiene $\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Base	c_B	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_5		3	**3**	-1	1	0	1	0
A_1=A_5/3		1	**1**	-1/3	1/3	0	1/3	0
A_4		4	2	2	-1	1	0	0
2·A_1		2	2	-2/3	2/3	0	2/3	0
A_4-2·A_1		2	**0**	8/3	-5/3	1	-2/3	0
A_6		5	2	1	3	0	0	1
2·A_1		2	2	-2/3	2/3	0	2/3	0
A_6-2·A_1		3	**0**	5/3	**7/3**	0	-2/3	1

Llevando lo anterior a la tabla, tenemos:

		c_j	-5	2	-3	0	0	0	
Base	c_B	**b**	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	
A_4		2	0	8/3	-5/3	1	-2/3	0	
A_1		1	**1**	-1/3	1/3	0	1/3	0	
A_6		3	0	5/3	**7/3**	0	-2/3	1	

Segunda tabla

		c_j	-5	2	-3	0	0	0	
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$\mathbf{A_6}$	θ_3
$\mathbf{A_4}$	0	2	0	8/3	-5/3	1	-2/3	0	-
$\mathbf{A_1}$	-5	1	**1**	-1/3	1/3	0	1/3	0	3
$\mathbf{A_6}$	0	3	0	5/3	**7/3**	0	-2/3	1	**9/7**
	z, z_j, θ_j	**-5**	-5	5/3	-5/3	0	-5/3	0	9/7
		z_j-c_j	0	-1/3	**4/3**	0	-5/3	0	
		$\theta_j(z_j$-$c_j)$		-	12/7	-	-	-	

Entra $\mathbf{A_3}$ y sale $\mathbf{A_6}$**.**

Tercera tabla

		c_j	-5	2	-3	0	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$\mathbf{A_6}$
$\mathbf{A_4}$	0	29/7=4.1448	0	22/7	0	**1**	-8/7	5/7
$\mathbf{A_1}$	-5	**4/7=0.5714**	**1**	-4/7	0	0	3/7	-1/7
$\mathbf{A_3}$	-3	**9/7=1.2857**	0	5/7	**1**	0	-2/7	3/7
	z, z_j, θ_j	**-47/7=-6.7142**	-5	5/7	-3	0	-9/7	-4/7
		z_j-c_j	0	-9/7	0	0	-9/7	-4/7
		$\theta_j(z_j$-$c_j)$		-	-	-	-	-

Observando la tabla tenemos $(z_j - c_j) \leq 0$, $\forall j$ (j=1, 2, ..., n), por lo que hemos llegado a la etapa final. Para buscar la solución dentro de la tabla miramos la columna **b** y encontramos:

x_1=4/7=0.5714, x_2=0 (no aparece), x_3=9/7=1.2857, z = -6.7142

El vértice final obtenido es $X=(4/7, 0, 9/7, 29/7, 0, 0)^T$. La solución mediante la matriz inversa asociada a la tabla del simplex, B^{-1} la podemos encontrar directamente en la última tabla del simplex observando los vectores correspondientes a los de la base inicial, en este caso a los vectores $\mathbf{A_4}$**,** $\mathbf{A_5}$ **y** $\mathbf{A_6}$ de la tabla:

$$B^{-1} = \{A_4, A_5, A_6\} = \begin{pmatrix} 1 & -8/7 & 5/7 \\ 0 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -2/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = X_o = \begin{pmatrix} 1 - 8/7 & 5/7 \\ 0 \ \ 3/7 & -1/7 \\ 0 - 2/7 & 3/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/7 \\ 4/7 \\ 9/7 \end{pmatrix}$$

y la matriz B se obtiene de la primera tabla mirando la base que figura en la última tabla del simplex, **A4, A1 y A3**:

$$B = \{A_4, A_1, A_3\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si resolvemos el ejercicio anterior con el programa LINDO, tenemos:

```
Min -5x1+2x2-3x3
st
 2x1+2x2-x3 <= 4
 3x1- x2+x3 <= 3
 2x1+x2+3x3 <=5

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      -6.714286

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         0.571429          0.000000
        X2         0.000000          1.285714
        X3         1.285714          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         4.142857          0.000000
        3)         0.000000          1.285714
        4)         0.000000          0.571429

 THE TABLEAU

 ROW  (BASIS)     X1(A1)    X2(A2)    X3(A3)    SLK 2(A4) SLK 3(A5)
   1 ART          0.000     1.286     0.000     0.000     1.286
   2 SLK  2(A4)  0.000     3.857     0.000     1.000    -1.143
   3      X1(A1) 1.000    -0.571     0.000     0.000     0.429
   4      X3(A3) 0.000     0.714     1.000     0.000    -0.286


  ROW   SLK 4(A6)
    1     0.571     6.714
    2     0.714     4.143
    3    -0.143     0.571
```

```
4     0.429     1.286
```

Operando de la misma forma para obtener las matrices:

$$B^{-1} = \{A_4, A_5, A_6\} = \begin{pmatrix} 1 - 8/7 \ \ 5/7 \\ 0 \ \ 3/7 - 1/7 \\ 0 - 2/7 \ \ 3/7 \end{pmatrix}$$

$$B = \{A_4, A_1, A_3\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Considere el problema siguiente:

Max **z**= $5x_1+2x_2+3x_3$
st
$x_1+5x_2+2x_3 \leq b_1$
$x_1-5x_2-6x_3 \leq b_2$
$x_i \geq 0$ (i=1, 2, 3)

Para ciertos valores de los recursos, la solución es:

		c_j	-5	-2	c_3	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$
$\mathbf{A_1}$	-5	30	1	b	2	1	0
$\mathbf{A_5}$	0	10	0	c	-8	-1	1
	z_j-c_j	-150	0	a	-7	d	e

Calcule:
a) Los recursos.
b) Los valores de: a, b, c, d, e, c_3.

Solución:

Tabla 1

		c_j	-5	-2	-3	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$
$\mathbf{A_4}$	0	b_1	1	5	2	1	0
$\mathbf{A_5}$	0	b_2	1	-5	-6	0	1
	z, z_j-c_j	0	**5**	2	3	0	0

Tabla 2

Por la información que nos proporciona la tabla del enunciado, sale de la base $\mathbf{A_4}$ y entra $\mathbf{A_1}$

		c_j	-5	-2	-3	0	0
Base	$\mathbf{C_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$
$\mathbf{A_1}$	-5	b_1	1	5	2	1	0
$\mathbf{A_5}$	0	b_2- b_1	0	-10	-8	-1	1
	z, z_j-c_j	-150	0	-23	-7	-5	0

Identificando, tenemos:
a) b_1= 30, b_2- b_1=10, b_2= 40,
b) a= -23, b = 5, c= -10, d= -5, e= 0, c_3= -3

2.8. Determinación de una base inicial

Hemos supuesto en el método del simplex que partíamos de una primera solución extrema a la cual teníamos asociada una base canónica. Veamos como siempre es posible conseguir esto.

Si al introducir las variables de holgura necesarias para escribir el problema en forma estándar ya tenemos la base canónica, podremos aplicar directamente el método del simplex.

En la mayoría de los casos la situación anterior no se producirá, por lo que tendremos que recurrir a métodos que nos conduzcan a él. Para conseguir partir de una base canónica, para iniciar el método simplex, necesitaremos de lo que se conoce como *variables artificiales*. Éstas construyen un *problema artificial* más conveniente desde el punto de vista del método simplex.

Es oportuno resaltar la diferencia entre variables de holgura y variables artificiales. Las primeras se introducen para convertir desigualdades en igualdades, mientras que las variables artificiales se introducen para facilitar el comienzo del método simplex.

La base canónica inicial la configuraremos con las variables de holgura más las variables artificiales necesarias hasta tener esa base canónica.

Veamos, a continuación, un método que nos ayude a resolver los problemas que contengan variables artificiales.

2.8.1. Método de la “M” o de Penalización

En este método la función objetivo se modifica para que imponga una penalización muy grande sobre las variables artificiales en el caso de que adquieran valores mayores que cero. Las iteraciones del método simplex automáticamente fuerzan a las *variables artificiales* a desaparecer (a volverse cero) una a una, hasta que todas quedan fuera de la solución.

Consideremos el siguiente problema de programación lineal planteado en su forma estándar:

$$\text{Min } z = c^T X$$
$$\text{st}$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

Añadimos en las restricciones las variables artificiales necesarias para tener en la primera tabla del simplex una base canónica, con lo cual tenemos el sistema siguiente:

$$AX + I\,X_a = b$$
$$X \geq 0,\ X_a \geq 0$$

Tenemos como solución inicial: $X_a = b$, $X=0$

Debemos buscar la forma de hacer salir las variables artificiales, es decir, las X_a, y que entren las otras variables. Para ello les asociamos un valor muy grande M (no es necesario especificar el valor de M) en la función objetivo.

$$\text{Min } z = c^T X + M\,1^T X_a$$
$$\text{st}$$
$$AX + I\,X_a = b$$
$$X \geq 0,\ X_a \geq 0$$

En la resolución del problema por este método, pueden presentarse los casos siguientes:

a) Tengamos solución finita:

i) Que el problema admita una solución óptima, con todas las variables artificiales iguales a cero, $X_a = 0$, entonces la solución obtenida es única y óptima.

ii) Que el problema admita una solución óptima en la cual encontraremos al menos una variable artificial distinta de cero, $X_a \neq 0$, entonces el problema original es imposible, no tenemos solución.

b) Tengamos solución no finita:

iii) Con todas las variables artificiales iguales a cero, $X_a = 0$, en este caso tenemos una solución no finita.

iv) Exista al menos una variable artificial que sea positiva, entonces el problema original es imposible.

Consideremos el siguiente problema:

$$\text{Max } \mathbf{z} = x_1+6x_2-4x_3$$

st

$$x_1+2x_2-x_3 = 20$$
$$2x_1+x_2+x_3 \leq 40$$
$$2x_1+x_2+4x_3 \geq 55$$
$$x_i \geq 0 \ (i=1, 2, 3)$$

Como explicamos anteriormente, para resolver este problema, debemos construir un problema "artificial" que tiene, en caso de que exista, la misma solución óptima que el problema real.

$$\text{Min } \mathbf{z} = -x_1-6x_2+4x_3+0\,x_4+0\,x_5+M\,x_6+M\,x_7$$

st

$$x_1+2x_2-x_3+x_6 = 20$$
$$2x_1+x_2+x_3+x_4 = 40$$
$$2x_1+x_2+4x_3-x_5+x_7 = 55$$
$$x_i \geq 0 \ (i=1, 2, ..., 7)$$

Primera tabla

Se llevan a la tabla los datos del problema "artificial" y se comienza a operar de acuerdo con el algoritmo del simplex:

		c_j	-1	-6	4	0	0	M	M	
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$\mathbf{A_6}$	$\mathbf{A_7}$	θ
$\mathbf{A_6}$	M	20	1	**2**	-1	0	0	1	0	10
$\mathbf{A_4}$	0	40	2	1	1	1	0	0	0	40
$\mathbf{A_7}$	M	55	2	1	4	0	-1	0	1	55
	z, z_j, θ_j	75M	3M	3M	3M	0	-M	M	M	
		z_j-c_j	3M+1	3M+6	3M-4	0	-M	0	0	
		$\theta_j(z_j$-$c_j)$		30M+60						

A los valores que hayan resultado ser $(z_j - c_j) > 0$, en nuestro caso se da para varios j, elegimos la de mayor diferencia y aplicamos el criterio

$$\theta_j = \min_i \left\{ \frac{x_i}{\alpha_{ij}} / \alpha_{ij} > 0 \right\}$$

y buscando que $\theta_j\,(z_j - c_j)$ sea positivo y máximo, tenemos que entra $\mathbf{A_2}$ y sale $\mathbf{A_6}$, que, por corresponder a una variable artificial, ya nunca más volverá a entrar.

El vector entrante en la base formará parte de la base canónica de manera que el elemento pivote, en nuestro caso el **2**, que se genera en el cruce del vector que entra y el vector que sale, deberá valer uno y el resto cero.

Este proceso se repite de forma iterativa hasta que se verifique $(z_j - c_j) \leq 0$, $\forall j$ (j=1, 2, ..., n).

Segunda tabla

		c_j	-1	-6	4	0	0	M	M	
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$\mathbf{A_6}$	$\mathbf{A_7}$	θ
$\mathbf{A_2}$	-6	10	1/2	1	-1/2	0	0	-	0	-
$\mathbf{A_4}$	0	30	3/2	0	3/2	1	0	-	0	20
$\mathbf{A_7}$	M	45	3/2	0	9/2	0	-1	-	1	10
	z, z_j, θ_j	45M-60	3M/2-3	-6	3M	0	-M	-	M	
		z_j-c_j	3M/2-2	0	9M/2-1	0	-M	-	0	
		$\theta_j(z_j$-$c_j)$			45M+10					

Entra $\mathbf{A_3}$ y sale $\mathbf{A_7}$, que, por corresponder a una variable artificial, ya nunca más volverá a entrar.

Tercera tabla

		c_j	-1	-6	4	0	0	M	M
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$\mathbf{A_6}$	$\mathbf{A_7}$
$\mathbf{A_2}$	-6	15	2/3	1	0	0	-1/9	-	-
$\mathbf{A_4}$	0	15	1	0	0	1	1/3	-	-
$\mathbf{A_3}$	4	10	1/3	0	1	0	-2/9	-	-
	z, z_j, θ_j	-50	-8/3	-6	0	0	-2/9	-	-
		z_j-c_j	-5/3	0	0	0	-2/9	-	-

Observando la tabla tenemos $(z_j - c_j) \leq 0$, $\forall j$ (j=1, 2, ..., n), por lo que hemos llegado a la etapa final. Para buscar la solución dentro de la tabla miramos la columna **b** y encontramos:

$x_1 = 0,\ x_2 = 15,\ x_3 = 10,\ x_4 = 15,\ x_5 = 0,\ \ z = -50$

Luego, la solución del problema original planteado (maximización) es:

$x_1 = 0,\ x_2 = 15,\ x_3 = 10,\ \ z = 50$

2.8.2 Método de las dos fases

Supongamos un problema planteado en su forma estándar

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\text{st} \\ &\quad AX = b \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned}$$

Añadimos en las restricciones las variables artificiales, X_a, necesarias para tener en la primera tabla del simplex una base canónica, con lo cual tenemos el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} &AX + I\,X_a = b \\ &X \geq 0,\ X_a \geq 0 \end{aligned}$$

Su resolución se abordará en dos fases:

Fase I:
Esta primera fase consiste en resolver previamente el problema siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = 1^T X_a \\ &\text{st} \\ &\quad AX + I\,X_a = b \\ &\quad X \geq 0,\ X_a \geq 0 \end{aligned}$$

Si el problema original tienen solución factible, el mínimo del problema anterior se alcanzará cuando las variables artificiales $X_a = 0$ y z=0.

Fase II:
En esta segunda fase, resolveremos el problema original planteado utilizando la última matriz obtenida en la *Fase I* y por tanto dicha base.

Consideremos el siguiente problema:

Min $z = x_1 - 2x_2$

st

$x_1 + x_2 \geq 2$

$-x_1 + x_2 \geq 1$

$x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Vamos a resolverlo por el método de las dos fases. El problema con las variables de exceso , holgura y artificiales y la función objetivo de la primera fase (la función objetivo del enunciado se optimiza en la segunda fase) es :

Min $z = a_1 + a_2$

st

$x_1 + x_2 - h_1 + a_1 = 2$

$-x_1 + x_2 - h_2 + a_2 = 1$

$x_2 + h_3 = 3$

pasamos a la tabla los datos y operamos según el algoritmo del simplex, tenemos:

Primera tabla

			c_j	0	0	0	1	0	1	0	
Base	**c_B**		**b**	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	θ_1
A_4	1		2	1	1	-1	1	0	0	0	2
A_6	1		1	-1	1	0	0	-1	1	0	1
A_7	0		3	0	1	0	0	0	0	1	3
	z	**z_j**	**θ_j** 3	0	2	-1	1	-1	1	0	1
			z_j-c_j	0	2	-1	0	-1	0	0	

Segunda tabla

			c_j	0	0	0	1	0	1	0		
Base	**c_B**		**b**	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	θ_{A1}	θ_{A5}
A_4	1		1	2	0	-1	1	1	-	0	1 /2	1
A_2	0		1	-1	1	0	0	-1	-	0	-	-
A_7	0		2	1	0	0	0	1	-	1	2	2
	z	**z_j**	**θ_j** 1	2	0	-1	1	1	-	0	1/2	1
			z_j-c_j	2	0	-1	0	1	-2	0		
			$\theta_j(z_j$-$c_j)$	1	-	-	-	1				

Solución de la tabla, $h_3=2$, $a_1=1$, $x_2=1$, $z=1$, al ser la función objetivo de minimizar y tener z_j-c_j positivos la solución no es óptima. Para los z_j-c_j >0 calculamos θ_j, y el valor máximo de $\theta_j(z_j\text{-}c_j)$ se alcanza en x_1 y en h_2, tomamos x_1 por tener mayor $z_j\text{-}c_j$, será la nueva variable básica, siendo a_1 la fila donde se alcanza el valor mínimo de θ_j y por lo tanto la variable que deja de ser variable básica, la cual no volverá a entrar en la base y por lo tanto se puede eliminar de la tabla, con lo cual terminamos la primera fase al obtener en la próxima tabla z=0 con a_1=0, a_2=0.

Introducimos entonces la función objetivo original min $z=x_1\text{-}2x_2$ y continuamos con el algoritmo del simplex:

Tercera tabla

		c_j	1	-2	0	0	0		
Base	c_B	**b**	A_1	A_2	A_3	A_5	A_7	θ_{A3}	θ_{A5}
A_1	1	1 /2	1	0	-1/2	1 /2	0	-	1
A_2	-2	3/2	0	1	-1/2	-1/2	0	-	-
A_7	0	3/2	0	0	1/2	1/2	1	3	3
	z z_j θ_j	-5/2	1	-2	1/2	3/2	0	3	1
		z_j-c_j	0	0	1/2	3/2	0		
		$\theta_j(z_j$-$c_j)$	-	-	3/2	3/2	-		

Cuarta tabla

		c_j	1	-2	0	0	0	
Base	c_B	**b**	A_1	A_2	A_3	A_5	A_7	θ_{A3}
A_5	0	1	2	0	-1	1	0	-
A_2	-2	2	1	1	-1	0	0	-
A_7	0	1	-1	0	1	0	1	1
	z z_j θ_j	-4	-2	-2	2	0	0	
		z_j-c_j	-1	0	2	0	0	

Solución de la tabla, h_2=1, x_2=2 h_3=1, z=-4, la solución no es óptima. Para los $z_j\text{-}c_j$ >0 calculamos θ_j, h_1 será la nueva variable básica, siendo h_3 la fila donde se alcanza el valor mínimo de θ_j y por lo tanto la variable que deja de ser variable básica.

		c_j	1	-2	0	0	0
Base	c_B	**b**	A_1	A_2	A_3	A_5	A_7
A_5	0	2	1	0	0	1	1
A_2	-2	3	0	1	0	0	1
A_3	0	1	-1	0	1	0	1
	z z_j θ_j	-6	0	-2	0	0	-2
		z_j-c_j	-1	0	0	0	-2

El punto extremo es $X_1=(0, 3, 0, 0, 0, 0)^T$, z=-6.

2.9. Soluciones múltiples

Cualquier problema de Programación Lineal con soluciones óptimas múltiples (y una región factible acotada) tiene al menos dos soluciones factibles en los vértices que son óptimas. Toda solución óptima es una combinación lineal convexa de las soluciones factibles básicas óptimas.

El método simplex se detiene automáticamente al encontrar *una* solución factible básica óptima. Una vez que el método simplex encuentra una solución factible básica óptima, se puede detectar si existen otras y, si es así, se encuentra observando si tengo algún vector j, tal que no pertenece a la base, pero que cumple $(z_j - c_j)= 0$, esto nos indicará que existe multiplicidad de óptimos.

Supongamos que ya hemos encontrado una solución óptima (mínima) de un problema y que se verifica $(z_j - c_j) \leq 0, \forall j$.

La función objetivo es: $z' = z - \theta_j (z_j - c_j) = z$

no hemos mejorado la solución anterior.

Repitiendo este proceso para cada una de las "j" que no pertenecen a la base y verifican $(z_j - c_j)= 0$, obtendríamos todos los vértices que son soluciones óptimas. Tomando una combinación lineal convexa de ellas, también sería solución óptima, por lo cual el problema tiene infinitas soluciones.

Compruebe, mediante el método simplex, que el problema siguiente presenta dos puntos extremos.

$$
\begin{aligned}
\text{Min } \mathbf{z} &= x_1-2x_2+3x_3 \\
\text{st} & \\
x_1- x_2+x_3 + 2x_4 &=10 \\
x_2- x_3 &\leq 1 \\
x_2+ 2x_4 &\leq 8 \\
x_i &\geq 0 \ (i=1, 2, ..., 6)
\end{aligned}
$$

Los puntos extremos son: $X_1=(2, 0, 0, 4, 1, 0)^T$, $X_2=(4, 1, 0, 7/2, 0, 0)^T$ así como toda combinación convexa de dichos puntos.

2.10. Soluciones degeneradas

Al desarrollar el algoritmo del simplex supusimos que las soluciones eran siempre no degeneradas, de manera que, en un número finito de iteraciones llegábamos a la solución óptima.

Ahora bien, si al calcular el valor de $\theta_j = \min_i \left\{ \frac{x_i}{\alpha_{ij}} / \alpha_{ij} > 0 \right\}$ existen varios i tal que minimizan $\frac{x_i}{\alpha_{ij}}$, no se podría hacer salir a la vez a todos ellos. Se podría elegir uno cualquiera y, entonces, en el nuevo punto extremo al que se pasan todas las coordenadas de X para las cuales se alcanza ese mínimo serían nulas, es decir, estaríamos en un punto extremo que tiene menos de "*m*" coordenadas positivas, esto es, un punto extremo degenerado.

Se identifica en la tabla simplex porque al menos una variable básica tiene valor cero en la columna de solución. Este caso se presenta cuando se valora una solución básica no única, la cual se tiene con al menos una variable básica de valor cero en el sistema de m restricciones, alguna de ellas debe ser restricción redundante que contiene sólo un punto vértice del conjunto factible.

2.11. El método del simplex revisado

Un procedimiento más eficiente que el simplex en su versión matricial es el llamado simplex revisado.

Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\text{st} \\ &\quad AX = b \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned}$$

donde A es una matriz de orden *mxn* y sea rang (A, b) = rang (A) = *m*.

Denotemos por A_i la columna i-ésima de la matriz A y supongamos que los *m* vectores linealmente independientes son los *m* primeros $A_1, A_2, \ldots, A_m$, la matriz $B = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ es la matriz básica.

Descomponiendo la matriz A de forma que $A=(B, N)$

donde B_{mxm} es la matriz básica y $N_{(mx(n-m))}$, la matriz no básica (los A_i que no son de la base).

Cualquier solución básica es de la forma $X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$

donde $X_N = 0$ y $BX_B = b$

Si X_B es una solución factible básica, $X_B = (x_1, x_2,, x_m, 0, ..., 0)^T$, tenemos

$$BX_B = b, \quad X_B = B^{-1} b$$

y puesto que

$$A_j = \alpha_{1j} A_1 + \alpha_{2j} A_2 + \ldots + \alpha_{mj} A_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} A_i$$

esto es

$$A_j = BX_j, \quad X_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj})^T, \quad X_j = B^{-1} A_j$$

El valor de la función objetivo en ese punto es

$$z = c_B^T X_B = c_B^T B^{-1} b$$

y los valores de

$$z_j = c_1 \alpha_{1j} + c_2 \alpha_{2j} + \ldots + c_m \alpha_{mj} = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}$$

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} = c_B^T X_j = c_B^T B^{-1} A_j = \lambda^T A_j$$

Donde $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$, al vector columna λ_{mx1} se le denomina vector de multiplicadores del simplex asociado a la base B.

Veamos el ejercicio siguiente. Dada la tabla óptima del Simplex:

			c_j						
Base	c_B		**b**	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1			0.75	1	0	0	0.5	-0.5	-
A_3			1.75	0	0	1	0.5	0.5	-
A_2			3.25	0	1	0	-0.5	1.5	-
	z	z_j	-4.75	-2	-1	0	-0.5	-0.5	-
			$z_j - c_j$	0	0	0	-0.5	-0.5	

a) Haciendo uso de la matriz básica y/o de su inversa formule el problema de programación lineal que corresponde a la tabla anterior, si se sabe que la primera restricción es (≥) y el resto (≤). Escriba la solución en el recuadro adjunto.

Ayuda:	Max z=
$B = \begin{pmatrix} b_{11} & -1 & 1 \\ b_{21} & 0 & 1 \\ b_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$	st

b) Formule el problema Dual y de la solución sin hacer operaciones.

Solución:

a) La matriz inversa se obtiene directamente de la tabla:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}, \qquad (B^{-1})^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se calculan los vectores A_j (j=1, 2, 3):

$$A_j = B\,X_j = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{para } j=1$$

$$A_2 = B\,X_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B\,X = b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.75 \\ 3.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5.5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La formulación del problema sería:

Max z= $2x_1 + x_2$
st $2x_1 + x_2 \geq 3$ $3x_1 + x_2 \leq 5.5$ $x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$

b) Operando con el vector de multiplicadores del simplex asociado a la base B, tenemos: $c^T = \lambda^T B = (0\ 0.5\ 0.5)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2\ 0\ 1)$

2.11.1. Determinación de la inversa. Forma producto de la inversa

Sea B una base y B^{-1} su inversa, si realizamos un cambio de base a la base B_1, podemos conocer B_1^{-1} en términos de B^{-1}.

En efecto, sea $B = (A_1, A_2, A_{r-1}, A_r, A_{r+1},\ldots, A_m)$ y supongamos que al realizar el cambio de base introducimos el vector A_j y sale A_r

$$B_1 = (A_1, A_2, A_{r-1}, A_j, A_{r+1},\ldots, A_m), \quad X_j = B^{-1} A_j, \quad B^{-1} B_1 = R$$

donde R es la matriz identidad reemplazando la r-ésima columna por el vector columna X_j; esto es:

$$R = \begin{pmatrix} 1 \;\; 0 \ldots \alpha_{1j} \ldots 0 \\ 0 \;\; 1 \ldots \alpha_{2j} \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \;\; 0 \ldots \alpha_{mj} \ldots 1 \end{pmatrix}$$

La inversa de R la denotamos por E y viene dada por

$$E = R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \;\; 0 \ldots -\alpha_{1j}/\alpha_{rj} \ldots 0 \\ 0 \;\; 1 \ldots -\alpha_{2j}/\alpha_{rj} \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \;\; 0 \ldots \quad 1/\alpha_{rj} \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \;\; 0 \ldots -\alpha_{mj}/\alpha_{rj} \ldots 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $B_1^{-1} = R^{-1} B^{-1} = E B^{-1}$, a la matriz E se la denomina matriz elemental.

Cuando comenzábamos el método del simplex, tomábamos la base canónica, es decir, $B_1 = I$, $B_1^{-1} = I$ y $X_B = b$.

Siguiendo un proceso iterativo, tenemos:

$$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1} = E_1 I = E_1$$

$$B_3^{-1} = E_2 B_2^{-1} = E_2 E_1$$

y, en general la inversa de la base de la k-ésima iteración se obtiene

$$B_k^{-1} = E_{k-1} E_{k-2} \ldots E_2 E_1$$

que expresa la inversa como producto de matrices elementales. A dicha expresión se la conoce como *forma producto de la inversa*.

2.11.2. Etapas del método del simplex revisado

Toda la información necesaria para aplicar el método del simplex se puede escribir en una tabla:

$\lambda^T = c_B^T B^{-1}$	$z = c_B^T B^{-1} b$	$z_j - c_j = \lambda^T A_j - c_j$	….	$z_j - c_j = c_B^T E_{k-1} E_{k-2} \ldots E_2 E_1 A_j - c_j$
B^{-1}	$X_B = B^{-1} b$	$X_j = B^{-1} A_j$	….	$X_j = E_{k-1} E_{k-2} \ldots E_2 E_1 A_j$

La última columna representa la situación en la k-ésima iteración. En cada iteración hay que controlar si todos los $(z_j - c_j) \leq 0 \ \forall j$, en cuyo caso ya tendríamos la solución óptima. Si para algún $(z_j - c_j) > 0$ y $X_j \leq 0$, la función objetivo no tendría solución finita.

2.12. Resolución mediante programa de ordenador

1. Si el programa requiere que todas las variables *sean no negativas*, se pondrán de manera que cumplan esta condición. Las modificaciones deben ser hechas antes de introducir los datos en el programa.
2. Todas las variables de las restricciones deben aparecer en el primer miembro, en tanto que todos los términos constantes (recursos) aparecerán a la derecha.
3. En la columna de variables de holgura (`SLACK OR SURPLUS`) vienen los resultados de esas variables (por restricción), las de valor cero indicarán que el recurso se ha consumido en su totalidad.

El número de variables positivas (*decisión* + *holgura*) al finalizar el Simplex debe ser igual al número de restricciones, de lo contrario el problema es degenerado.

Hay que hacer notar que la presentación de la salida depende del programa utilizado. Nosotros, mientras no se diga lo contrario, utilizaremos el programa **LINDO** (**L** = Linear **IN** = Interactive **D** = Discrete **O** = Optimizer).

Utilizando el programa LINDO para resolver el *ejercicio 1*, tenemos:

Min $\mathbf{z} = -5x_1+2x_2-3x_3$

st

$2x_1+2x_2-x_3 \leq 4$

$3x_1- x_2+x_3 \leq 3$

$2x_1+x_2+3x_3 \leq 5$

$x_i \geq 0$ (i=1, 2, 3)

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)     -6.714286

  VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
        X1          0.571429          0.000000
        X2          0.000000          1.285714
        X3          1.285714          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)          4.142857          0.000000
        3)          0.000000          1.285714
        4)          0.000000          0.571429

 NO. ITERATIONS=       2


 THE TABLEAU

   ROW  (BASIS)        X1        X2        X3      SLK 2     SLK 3
     1 ART          0.000     1.286     0.000     0.000     1.286
     2 SLK    2     0.000     3.857     0.000     1.000    -1.143
     3       X1     1.000    -0.571     0.000     0.000     0.429
     4       X3     0.000     0.714     1.000     0.000    -0.286


   ROW     SLK 4
     1     0.571     6.714
     2     0.714     4.143
     3    -0.143     0.571
     4     0.429     1.286
```

Observando la salida del programa, el resultado es:

$z = -6.714286$; $x_1 = 4/7 = 0.5714$, $x_2 = 0$ (no aparece), $x_3 = 9/7 = 1.2857$

Que coincide con el obtenido mediante el algoritmo del simplex.