CAPÍTULO 5

ANÁLISIS POST-ÓPTIMO Y ANÁLISIS DE LA SENSIBILIDAD

5.1.- Introducción al Análisis Post-Óptimo

En los modelos de programación lineal los coeficientes de la función objetivo, de las variables y de las restricciones se dan como datos de entrada o como parámetros fijos del modelo. En los problemas reales los datos de entrada no son exactos sino aproximados.

Puesto que los datos reales suelen ser aproximados podemos preguntarnos ¿cómo variará la solución óptima de un problema de programación lineal al modificar los coeficientes del modelo?. La respuesta a esto nos la proporciona el *Análisis Post-Óptimo*.

En el procedimiento de resolución siempre se partirá de una solución óptima al problema original. Supongamos resuelto el problema siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\text{st} \\ &\quad AX = b \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Queremos investigar los cambios que experimenta la solución óptima cuando alguno de los datos del problema es modificado, a partir de la última tabla del simplex.

En todo el desarrollo del análisis post-óptimo los cálculos se han de realizar en la última tabla del simplex.

Supongamos que el método del simplex nos proporciona una base óptima B, que está formada por los *m* primeros vectores y, por tanto, podemos conocer B^{-1}. Recopilando una serie de relaciones ya vistas en temas anteriores:

$X_B = B^{-1} b,$

$X_j = B^{-1} A_j$

$z_j = c_B^T X_j = c_B^T B^{-1} A_j$

$(z_j - c_j) = c_B^T B^{-1} A_j - c_j \quad (j=1, 2, \ldots, n)$

Las modificaciones que estudiaremos en el análisis post-óptimo son:

i) Modificación de los coeficientes de la función objetivo.
ii) Modificación de las constantes de restricción.
iii) Modificación de los coeficientes técnicos.

Pasemos a analizar cada una de estas modificaciones.

5.2. Modificación de los coeficientes de la función objetivo

Supongamos que el coeficiente de la función objetivo modificado sea c_k pasando a valer c'_k. Veamos cómo afecta este cambio a la solución óptima del problema 5.1.

La base óptima B se forma con los *m* primeros vectores, B = { $A_1, A_2, \ldots, A_m$}, es decir, la base final será B = { $X_1, X_2, \ldots, X_m$}.
Pueden ocurrir dos casos:

5.2.1. Modificación de un coeficiente básico de la función objetivo

Sea $c_k \in c_B$, tenemos $z_j = c_B^T X_j = c_B^T B^{-1} A_j$ (j=1, 2, ..., n), luego la variación de un coeficiente afecta a todos los z_j, pasando a valer z'_j:

$z'_j = c'^T_B B^{-1} A_j \quad (j=1, 2, ..., n)$

con $c'_B = c_B$ excepto la componente k-ésima.

Operando

$$z'_j - c_j = c'^T_B B^{-1} A_j - c_j = c'^T_B X_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c'_i \alpha_{ij} - c_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} - c_j + (c'_k \alpha_{kj} - c_k \alpha_{kj}) = (z_j - c_j) + (c'_k - c_k)\alpha_{kj}$$

Veamos qué ocurre para los casos en los que j pertenezca a la base y no pertenezca a la base B.

Caso 1: $j \in B$, es decir, (j=1, 2, …, m). En este caso tenemos

$$(z_j - c_j) = 0 \text{ y } \alpha_{kk}=1,\ \alpha_{kj}= 0$$

luego

$$z'_k - c_k = (z_k - c_k) + (c'_k - c_k)$$

$$z'_k - c'_k = (z_k - c_k) = 0$$

y, por tanto, no se modifica la solución óptima inicial.

Caso 2: $j \notin B$, es decir, (j = m+1, m+2, …, n). En este caso tenemos

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) + (c'_k - c_k)\alpha_{kj}$$

Puede ocurrir que $z'_j - c_j \ sea \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$

Para el último caso (> 0) se continúa con el método simplex modificando solamente la última tabla del simplex al cambiar c_k por c'_k. En este caso habrá una modificación de la solución óptima del problema planteado inicialmente.

Ejercicio 5.1. Dado el problema siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = -x_1 + 2x_2 \\ &\text{st} \\ &\quad 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ &\quad 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Obtener la última tabla del simplex.
b) Suponiendo que la última tabla del simplex es

		c_j	1	-2	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$
$\mathbf{A_2}$	-2	3	3/4	1	1/4	0
$\mathbf{A_4}$	0	5	11/4	0	1/4	1
	z, z_j, θ_j	-6	-6/4	-2	-2/4	0
		z_j-c_j	-5/2	0	-1/2	0
		$\theta_j(z_j-c_j)$		-	-	-

c) Compruebe que si hacemos el cambio c_2 =-2 por c'_2 =-3, se mantiene z =-9.

d) Compruebe que, si hacemos el cambio c_2 = -2 por c'_2 = 1, el valor de la función objetivo cambia (aumenta) a z = 0.

e) Compruebe que, si hacemos el cambio c_1 = 1 por c'_1 = -3, el valor de la función objetivo cambia (disminuye) a z = -96/11.

5.2.2. Modificación de un coeficiente *no* básico de la función objetivo

En este caso c_B no se modifica por lo que

$$z_j = c_B^T B^{-1} A_j \quad (j=1, 2, ..., n)$$

la única variación se produce sobre c'_k, es decir, que

$$z_k - c'_k = (z_k - c_k) + (c_k - c'_k)$$

sea positiva en cuyo caso se introducirá dicho vector en la base de la última tabla del simplex, produciéndose una variación en la solución óptima del problema.

5.3. Modificación de las constantes de restricción

Supongamos que la constante de restricción b_k cambia a b'_k ($b \rightarrow b'$), pasando a valer el vector b

$$b' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b'_k \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y la nueva solución óptima es $X'_B = B^{-1}\, b'$

Operando en la expresión anterior

$$X'_B = B^{-1}\, b + B^{-1}\,(b' - b) = X_B + B^{-1}\,(b' - b)$$

Pudiendo ocurrir que ésta no sea posible por tener alguna componente negativa, en cuyo caso, para obtener la solución factible, aplicaremos el método Dual del simplex, sustituyendo en la última tabla del simplex el valor de X_B por X'_B.

Siguiendo con el *ejercicio 5.1.* modificamos el valor $b_k = 2$ por $b'_k = -4$. Compruebe que el problema dual posee solución no acotada y, por tanto, el problema modificado no tiene solución.

5.4. Modificación de los coeficientes técnicos

Supongamos que se modifica alguno de los coeficientes técnicos (coeficientes de las variables en las restricciones) y queremos saber cuál es el efecto que se produce sobre el valor óptimo de la función objetivo.

Pueden ocurrir dos casos:

5.4.1. Modificación de un coeficiente técnico asociado a una variable básica

Sea a_{ik} el coeficiente básico modificado ($a_{ik} \to a'_{ik}$), es decir, $A_k \to A'_k$ el vector modificado asociado es

$$A'_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \cdots \\ a'_{ik} \\ \cdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

Al ser A'_k un vector modificado básico, hace que la base cambie de B a B'. Este cambio se produce al sustituir en la última tabla del simplex A_k por A'_k.

Los nuevos vectores serán

$$X'_j = (B')^{-1} A'_j \quad (j=1, 2, ..., n)$$

$$X' = (B')^{-1} b$$

Si al hacer estos cambios no obtenemos una base de *m* vectores linealmente independientes, puede ocurrir lo siguiente:

i) Si $\alpha'_{kk} = 0$ existirán menos de *m* vectores linealmente independientes.
ii) Si $\alpha'_{kk} \neq 0$, consideramos a este elemento como pivote, transformando la última tabla del simplex de forma que A'_k sea un vector unitario y tengamos así *m* vectores linealmente independientes. Si la solución obtenida en este paso no fuese posible, algún $b_i < 0$, se acudiría al método dual del simplex para resolverlo.

Siguiendo con el *ejercicio 5.1.*, modificamos el valor $a_{22} = -1$ por $a'_{22} = 1$. Verificar que la solución óptima pasa de z = -6 a z = -4 (ha aumentado).

5.4.2. Modificación de un coeficiente técnico asociado a una variable *no* básica

Sea a_{ik} el coeficiente *no* básico modificado ($a_{ik} \rightarrow a'_{ik}$), es decir, $A_k \rightarrow A'_k$ el vector modificado asociado es

$$A'_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \ldots \\ a'_{ik} \\ \ldots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

y la modificación de $z_k \rightarrow z'_k$

$$z'_k - c_k = c_B^T B^{-1} A'_k - c_k$$

En esta situación puede ocurrir que:

i) $z'_k - c_k \leq 0$, no se produce modificación en la solución óptima.
ii) $z'_k - c_k > 0$, el vector A'_k entrará en la base produciendo una modificación en la solución óptima.

Siguiendo con el *ejercicio 5.1.*, modificamos el valor $a_{13} = 1$ por $a'_{13} = 3$. Verificar que la solución óptima no se modifica.

5.5. Introducción al Análisis de la Sensibilidad

Toda solución a un problema de toma de decisiones se basa en determinados parámetros que se presumen como fijos. El *Análisis de la Sensibilidad* es un conjunto de operaciones posteriores a la obtención de la solución óptima que sirven para estudiar y determinar la sensibilidad de la solución a los cambios en las hipótesis.

En los distintos campos de la ciencia se nos presentan situaciones que requieren el uso del Análisis de la Sensibilidad. En el entorno comercial muchas veces es impredecible e incierto debido a factores tales como cambios económicos, reglamentaciones públicas, dependencia de subcontratistas y proveedores, etc. Los gerentes generalmente se ven inmersos en un entorno dinámico e inestable donde aun los planes a corto plazo deben reevaluarse constantemente y ajustarse de manera incremental. Todo esto requiere una mentalidad orientada al cambio para hacer frente a las incertidumbres.

Los investigadores utilizan modelos matemáticos e informáticos para una variedad de entornos y propósitos, con frecuencia para conocer los posibles resultados de uno o más planes de acción. Esto puede relacionarse con inversiones financieras, alternativas de seguros, prácticas industriales e impactos ambientales. El uso de modelos se ve perjudicado por la inevitable presencia de incertidumbres, que surgen en distintas etapas, desde la construcción y corroboración del modelo en sí hasta su uso.

Se puede hacer frente a las incertidumbres de una manera más "determinista". Este abordaje tiene distintos nombres tales como "modelación determinista", "análisis de sensibilidad" y "análisis de estabilidad". La idea es generar, de manera subjetiva, una lista ordenada de incertidumbres importantes que supuestamente podrían tener un mayor impacto sobre el resultado final. Esto se lleva a cabo antes de centrarse en los detalles de cualquier modelo.

Pueden presentarse distintos niveles de aceptación a distintos tipos de incertidumbre. Distintas incertidumbres tienen distintos impactos sobre la fiabilidad, robustez y eficiencia del modelo.

La relevancia del modelo depende en gran medida del impacto de la incertidumbre sobre el resultado del análisis.

Existen numerosos ejemplos de entornos donde esto es aplicable, tales como:

- Construcción de indicadores (económicos / ambientales).
- Análisis y pronóstico de riesgo (ambiental, financiero, de seguros,...).
- Optimización y calibración de modelos .

A continuación, se propone una lista abreviada de las razones por las cuales se debe tener en cuenta el *Análisis de Sensibilidad*:

i) *Toma de decisiones o desarrollo de recomendaciones para decisores*:
- Para probar la solidez de una solución óptima. Las sorpresas no forman parte de las decisiones óptimas sólidas.
- Para identificar los valores críticos, umbrales, o valores de equilibrio donde cambia la estrategia óptima.
- Para identificar sensibilidad o variables importantes.
- Para investigar soluciones subóptimas.
- Para desarrollar recomendaciones flexibles que dependan de las circunstancias.
- Para comparar los valores de las estrategias de decisión simples y complejas.
- Para evaluar el riesgo de una estrategia o escenario.

ii) *Comunicación*:
- Para formular recomendaciones más creíbles, comprensibles, contundentes o persuasivas.
- Para permitir a los decisores seleccionar hipótesis.
- Para comunicar una falta de compromiso a una única estrategia.
- El decisor debe incorporar algunas otras perspectivas del problema tales como perspectivas culturales, políticas, psicológicas, etc. en las recomendaciones del científico de administración.

iii) *Aumento de la comprensión o aptitud del sistema*:
- Para estimar la relación entre las variables de entrada y las de salida.
- Para comprender la relación entre las variables de entrada y las de salida. Para desarrollar pruebas de las hipótesis.

iv) *Desarrollo del modelo:*
- Para probar la validez o precisión del modelo.
- Para buscar errores en el modelo.
- Para simplificar el modelo.
- Para calibrar el modelo.
- Para hacer frente a la falta o insuficiencia de datos.
- Para priorizar la adquisición de información.

En forma resumida, exponemos los casos en los que se debe considerar la realización de un *análisis de sensibilidad*:

1. Con el control de los problemas, el *análisis de sensibilidad* puede facilitar la identificación de regiones cruciales en el espacio de los parámetros de entrada.
2. En ejercicios de selección, el *análisis de sensibilidad* sirve para localizar algunos parámetros influyentes en sistemas con cientos de datos de entrada inciertos.
3. Se utilizan técnicas de *análisis de sensibilidad* basados en varianza para determinar si un subconjunto de parámetros de entrada puede representar (la mayor parte de) la varianza de salida.
4. El punto (3) puede utilizarse para la reducción del mecanismo (descartar o corregir partes no relevantes del modelo) y para la extracción de un modelo (construir un modelo a partir de otro más complejo).
5. El punto (3) también puede utilizarse para la identificación del modelo identificando las condiciones experimentales para las cuales su capacidad para discriminar dentro del modelo se encuentra en su punto máximo.
6. Al igual que en el punto (5), el *análisis de sensibilidad* puede utilizarse para la calibración del modelo, para determinar si los experimentos con sus incertidumbres relacionadas permitirán la estimación de los parámetros.
7. El *análisis de sensibilidad* puede complementarse con algoritmos de búsqueda/optimización; identificando los parámetros más importantes, el análisis de sensibilidad puede permitir que se reduzca la dimensionalidad del espacio donde se realiza la búsqueda.
8. Como una herramienta de asegurar la calidad del producto, el *análisis de sensibilidad* asegura que la dependencia de la salida (resultado) de los parámetros de entrada del modelo tenga una similitud física y una explicación.
9. Para resolver un problema inverso, el *análisis de sensibilidad* sirve como una herramienta para extraer parámetros incorporados en modelos cuyos resultados no se correlacionan fácilmente con la entrada desconocida (por ejemplo en cinética química, para extraer las constantes cinéticas de sistemas complejos a partir del índice de rendimiento de los componentes).
10. Para asignar recursos en el área de I+D de manera óptima, el *análisis de sensibilidad* muestra dónde invertir a fin de reducir el rango de incertidumbre del modelo.
11. El *análisis de sensibilidad* puede determinar cuantitativamente qué parte de la incertidumbre de mi predicción se debe a incertidumbre paramétrica de la estimación y cuánto a incertidumbre estructural.

En los errores de redondeo se debe prestar atención a los límites de los rangos de sensibilidad. El límite superior y el límite inferior deben redondearse hacia abajo y hacia arriba, respectivamente, para que sean válidos.

El análisis de sensibilidad y las formulaciones de programación estocástica son los dos principales enfoques para manejar la incertidumbre. El análisis de sensibilidad es un procedimiento de post-optimalidad que no puede influir en la solución. Sirve para investigar los efectos de la incertidumbre sobre la recomendación del modelo. Por otro lado, la formulación de programación estocástica introduce información probabilística acerca de los datos del problema: distribución de los coeficientes de la función objetivo, de las constantes de restricción y de los coeficientes técnicos.

El *Análisis de la Sensibilidad* estudia los cambios que se producen en la solución óptima cuando se realiza alguna de las modificaciones siguientes:

i) *Modificación de los coeficientes de la función objetivo.*
ii) *Modificación de las constantes de restricción.*
iii) *Modificación de los coeficientes técnicos.*

Al igual que hacíamos en el Análisis Post-Óptimo, en el procedimiento de resolución siempre se partirá de una solución óptima al problema original. Queremos encontrar el intervalo de variación de un elemento del problema, para el cual la base óptima permanece constante.

Supongamos resuelto el problema siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = c^T X \\ &\text{st} \\ &\quad AX = b \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pasemos a analizar cada una de las modificaciones presentadas anteriormente, siguiendo la metodología expuesta en el *Análisis Post-Óptimo*.

5.6. Modificación de los coeficientes de la función objetivo

Supongamos que el coeficiente de la función objetivo modificado sea c_k pasando a valer c'_k. Queremos determinar el intervalo de variación de c'_k en el cual la base óptima permanece invariante.

La base óptima B la forman los *m* primeros vectores, B = { A_1, A_2,…, A_m}, es decir, la base final será B = { X_1, X_2,…, X_m}.

Pueden ocurrir dos casos:

5.6.1. Modificación de un coeficiente básico de la función objetivo

Sea $c_k \in c_B$, tenemos $z_j = c_B^T X_j = c_B^T B^{-1} A_j$ (j=1, 2, ..., n), luego la variación de un coeficiente afecta a todos los z_j, pasando a valer z'_j :

$$z'_j = c'^T_B B^{-1} A_j \qquad (j=1, 2, ..., n)$$

con $c'_B = c_B$ excepto la componente k-ésima.

Según vimos en el apartado correspondiente de Análisis Post-Óptimo

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) + (c'_k - c_k)\alpha_{kj}$$

Para que la base óptima permanezca invariante ha de cumplirse que $z'_j - c_j \leq 0$, (j=1, 2, ..., n).

Como partimos de una base óptima (solución óptima) tenemos que $(z'_j - c_j) \leq 0$, (j=1, 2, ..., n).

Veamos qué ocurre para los casos en los que j pertenezca a la base y no pertenezca a la base B.

Caso 1: $j \in B$, es decir, (j=1, 2, …, m). En este caso tenemos

$$(z'_j - c_j) = 0$$

según se vio en el apartado correspondiente al *Análisis Post-Óptimo.*

Caso 2: $j \notin B$, es decir, (j = m+1, m+2, …, n).

Queremos que $(z'_j - c_j) \leq 0$

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) + (c'_k - c_k)\alpha_{kj} \leq 0$$

lo que nos lleva a estudiar las siguientes situaciones:

i) $c'_k \leq c_k - \dfrac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}}$ si $\alpha_{kj} > 0$

ii) $c'_k \geq c_k - \dfrac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}}$ si $\alpha_{kj} < 0$

El intervalo buscado es el siguiente:

$$\max_{\alpha_{kj}<0}\left\{c_k - \frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}}\right\} \le c'_k \le \min_{\alpha_{kj}>0}\left\{c_k - \frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}}\right\}$$

iii) Si todo $\alpha_{kj} = 0$, entonces $z'_j - c_j = z_j - c_j$

no produciéndose ninguna variación en el óptimo, luego el intervalo de variación sería toda la recta real, $c'_k \in (-\infty, \infty)$.

iv) Si no existe ningún $\alpha_{kj} > 0$, el intervalo de variación es

$$\max_{\alpha_{kj}<0}\left\{c_k - \frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}}\right\} \le c'_k < \infty$$

v) Si no existe ningún $\alpha_{kj} < 0$, el intervalo de variación es

$$-\infty < c'_k \le \min_{\alpha_{kj}>0}\left\{c_k - \frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}}\right\}$$

vi) Si c'_k toma un valor extremo del intervalo

$$\max_{\alpha_{kj}<0}\left\{c_k - \frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}}\right\} \le c'_k \le \min_{\alpha_{kj}>0}\left\{c_k - \frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}}\right\}$$

Por ejemplo

$$c'_k = \min_{\alpha_{kj}>0}\left\{c_k - \frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}}\right\}, \text{ (j=m+1, m+2, ..., n)}$$

y el mínimo se alcanzase para j = r, tenemos

$$c'_k = \min_{\alpha_{kj}>0}\left\{c_k - \frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}}\right\} = \left\{c_k - \frac{z_r - c_r}{\alpha_{kr}}\right\}$$

Calculando el valor de $z'_r - c_r$

$$z'_r - c_r = (z_r - c_r) + (c'_k - c_k)\alpha_{kr} = (z_r - c_r) + (\left\{ c_k - \frac{z_r - c_r}{\alpha_{kr}} \right\} - c_k)\alpha_{kr} = 0$$

El valor de $z'_r - c_r = 0$ nos indica que existe un índice $r \notin B$ para el cual $z'_j - c_j = 0$ y, por tanto, el problema tienen infinitas soluciones.

5.6.2. Modificación de un coeficiente *no* básico de la función objetivo

En este caso c_B no se modifica, por lo que

$$z_j = c_B^T B^{-1} A_j \quad (j=1, 2, ..., n)$$

la única variación se produce sobre c'_k, es decir, que

$$z_k - c'_k = (z_k - c_k) + (c_k - c'_k)$$

sea positiva, en cuyo caso se introducirá dicho vector en la base de la última tabla del simplex, modificándose la base B. El intervalo de variación de c'_k es aquel que hace que $(z_k - c_k) + (c_k - c'_k) \leq 0$.

5.7. Modificación de las constantes de restricción

Supongamos que la constante de restricción b_k cambia a b'_k ($b \rightarrow b'$), pasando a valer el vector b

$$b' = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b'_k \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

y la nueva solución óptima es $X'_B = B^{-1} b'$

Operando en la expresión anterior

$$X'_B = B^{-1}\, b + B^{-1}\,(b' - b) = X_B + B^{-1}\,(b' - b)$$

Llamemos (b_{ij}) con (i,j=1, 2, ..., m) a los elementos de B^{-1}, es decir, $B^{-1} = (b_{ij})$

$$X'_B = B^{-1}\, b' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b'_k \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} b_{1j} b_j \\ \sum_{j=1}^{m} b_{2j} b_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{m} b_{mj} b_j \end{pmatrix}$$

La solución óptima para el problema original es

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} b_j \qquad \text{(i=1, 2, ..., m)}$$

cuando realizamos la modificación, b_k cambia a b'_k, la solución es

$$x'^*_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} b_j + b_{ik} b'_k - b_{ik} b_k = x_i^* + b_{ik}(b'_k - b_k)$$

Para que la base óptima no se modifique, b'_k ha de variar en un intervalo de manera que la nueva solución obtenida, $x'^*_i \geq 0$, es decir:

$$x_i^* + b_{ik}(b'_k - b_k) \geq 0 \qquad \text{(i=1, 2, ..., m)}$$

Las situaciones que nos podemos encontrar son:

i) $b'_k \geq b_k - \dfrac{x_i^*}{b_{ik}}$ si $b_{ik} > 0$

ii) $b'_k \leq b_k - \dfrac{x_i^*}{b_{ik}}$ si $b_{ik} < 0$

Lo anterior da lugar al intervalo de variación de b'_k

$$\max_{b_{ik}>0}\left\{b_k - \frac{x_i^*}{b_{ik}}\right\} \leq b'_k \leq \min_{b_{ik}<0}\left\{b_k - \frac{x_i^*}{b_{ik}}\right\}$$

iii) Si todo $b_{ik}= 0$, entonces $x'^*_i = x^*_i$. No se produce ninguna variación en el óptimo, luego el intervalo de variación sería toda la recta real, $b'_k \in (-\infty, \infty)$.

iv) Si no existe ningún $b_{ik} > 0$ el intervalo de variación es

$$-\infty < b'_k \leq \min_{b_{ik}<0}\left\{b_k - \frac{x_i^*}{b_{ik}}\right\}$$

v) Si no existe ningún $b_{ik} < 0$ el intervalo de variación es

$$\max_{b_{ik}>0}\left\{b_k - \frac{x_i^*}{b_{ik}}\right\} \leq b'_k < \infty$$

vi) Si b'_k toma un valor extremo del intervalo

$$\max_{b_{ik}>0}\left\{b_k - \frac{x_i^*}{b_{ik}}\right\} \leq b'_k \leq \min_{b_{ik}<0}\left\{b_k - \frac{x_i^*}{b_{ik}}\right\}$$

Por ejemplo

$$b'_k = \min_{b_{ik}<0}\left\{b_k - \frac{x_i^*}{b_{ik}}\right\}, \quad (i=1, 2, ..., m)$$

y el mínimo se alcanzase para i = s, tenemos

$$b'_k = \min_{b_{ik}<0}\left\{b_k - \frac{x_i^*}{b_{ik}}\right\} = b_k - \frac{x_s^*}{b_{sk}}$$

Calculando el valor de x'^*_i para i = s

$$x'^*_s = x^*_s + b_{sk}(b'_k - b_k) = x^*_s + b_{sk}(b_k - \frac{x_s^*}{b_{sk}} - b_k) = 0$$

El valor de $x'^*_s = 0$ nos indica que existe un solución degenerada.

Veamos un ejercicio numérico de aplicación de lo anteriormente expuesto.

Ejercicio 6.2. Consideremos el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{st } \quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ x_i \geq 0 \ (i=1, 2, 3, 4) & \end{aligned}$$

cuya última tabla del simplex es

		c_j	2	1	-1	-1	M	M	M
Base	$\mathbf{c_B}$	**b**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$\mathbf{A_6}$	$\mathbf{A_7}$
$\mathbf{A_1}$	2	3	1	-4/11	0	0	4/11	3/11	1/11
$\mathbf{A_4}$	-1	3	0	16/11	0	1	-5/11	-1/11	7/11
$\mathbf{A_3}$	-1	1	0	-1/11	1	0	1/11	-2/11	3/11
	z, z_j, θ_j	2	2	-23/11	-1	-1	12/11	9/11	-8/11
		z_j-c_j	0	-34/11	0	0	-M+12/11	-M+9/11	-M-8/11

Aplicando las expresiones de análisis de la sensibilidad obtenidas anteriormente, obtenga los intervalos de variación para los siguientes coeficientes:

i) c_1. Al no existir ningún $\alpha_{1j} > 0$ el intervalo de variación es

$$\max_{\alpha_{kj}<0} \left\{ c_k - \frac{z_j - c_j}{\alpha_{kj}} \right\} \leq c'_k < \infty$$

$$\max_{\alpha_{1j}<0} \left\{ c_1 - \frac{z_j - c_j}{\alpha_{1j}} \right\} = c_1 - \frac{z_2 - c_2}{\alpha_{12}} = 2 - \frac{(-34/11)}{(-4/11)} = \text{-13/2= -6.5}$$

luego el intervalo de variación para c_1 es

$$-6.5 \leq c'_1 < \infty \text{, es decir, } c'_1 \in [-6.5, \infty)$$

ii) c_2. Como es un coeficiente no básico, la única variación es la de z_2-c'_2; por lo que la base B no se ha modificado, el campo de variación de c'_2 será aquel en el que $z_2 - c'_2 \leq 0$.

El valor de z_2-c'_2 se puede obtener de la última tabla del simplex

z_2-c'_2 = -23/11- $c'_2 \leq 0$,   -23/11≤ c'_2, -2.0909 ≤ c'_2

la base óptima B no se modificará siempre que $c'_2 \in$[-2.0909, ∞).

iii) b_3. Al no existir ningún $b_{i3} < 0$ (ver última tabla del simplex) el intervalo de variación es

$$\max_{b_{ik}>0}\left\{b_k - \frac{x_i^*}{b_{ik}}\right\} \leq b'_k < \infty$$

$$\max_{b_{i3}>0}\left\{b_3 - \frac{x_i^*}{b_{i3}}\right\} = \max\{(7-\frac{3}{1/11}), (7-\frac{3}{7/11}), (7-\frac{1}{3/11})\} = 10/3 = 3.3333$$

la base óptima B no se modificará siempre que $b'_3 \in$[3.3333, ∞).

Resolviendo el problema anterior mediante el programa LINDO, resulta

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      2.000000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         3.000000         0.000000
       X2         0.000000         3.090909
       X3         1.000000         0.000000
       X4         3.000000         0.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000        -1.090909
       3)         0.000000        -0.818182
       4)         0.000000         0.727273


RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
```

OBJ COEFFICIENT RANGES				
VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE	INTERVALO
X1	2.000000	INFINITY	8.500000	[- 6.5, ∞)
X2	1.000000	INFINITY	3.090909	[-2.0909, ∞)
X3	-1.000000	INFINITY	34.000000	[-35, ∞)
X4	-1.000000	2.125000	INFINITY	(- ∞, 1.1250]

RIGHTHAND SIDE RANGES				
ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE	INTERVALO
2	2.000000	6.600000	8.250000	[-6.25, 8.6]
3	6.000000	5.500000	11.000000	[-5, 11.5]
4	7.000000	INFINITY	3.666667	[3.3334, ∞)

Los extremos de los intervalos para el *Análisis de la Sensibilidad* en la salida de LINDO se obtienen mediante las expresiones:

$c'_i \in [c_i$ -ALLOWABLE DECREASE, c_i + ALLOWABLE INCREASE]

$b'_i \in [b_i$ -ALLOWABLE DECREASE, b_i + ALLOWABLE INCREASE]

5.8. Modificación de los coeficientes técnicos

Supongamos que se modifica alguno de los coeficientes técnicos (coeficientes de las variables en las restricciones) y queremos saber el intervalo en el cual puede variar a_{ik} de manera que la base óptima permanezca invariante.

Tanto para los casos en los que j pertenezca a la base como en los que no pertenezca, las expresiones matemáticas que se obtienen son muy farragosas, por lo que optamos por realizar el *Análisis de la Sensibilidad* mediante un software de programación lineal.

Ejercicio 5.3. Realizar un análisis de la sensibilidad del siguiente problema de programación lineal

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = 5x_1 + 3x_2 \\
&\text{st} \\
&\quad 2x_1 + x_2 \le 40 \\
&\quad x_1 + 2x_2 \le 50 \\
&\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Cálculo del incremento/disminución permisibles de $c_1 = 5$: Las restricciones obligatorias son la primera y la segunda. Alterando este coeficiente de coste por c_1 se obtiene $5 + c_1$. En el paso 3 se obtiene: $(5 + c_1)/2 = 3/1$ para la primera restricción, y $(5 + c_1)/1 = 3/2$ para la segunda restricción. Resolviendo estas dos ecuaciones se obtiene: $c_1 = 1$ y $c_1 = -3.5$. Por lo tanto, el incremento permisible es 1, mientras que la disminución permisible es 1.5. Por lo tanto, mientras el primer coeficiente de coste c_1 permanezca dentro del intervalo [5 - 3.5, 5 + 1] = [1.5, 6], continúa la solución óptima actual.

De modo similar, para el segundo coeficiente de coste $c_2 = 3$ se obtiene el rango de sensibilidad [2.5, 10].

El problema DUAL asociado al problema anterior es:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = 40\lambda_1 + 50\lambda_2 \\ &\text{st} \\ &2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 5 \\ &\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 3 \\ &\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima es $\lambda_1 = 7/3$ y $\lambda_2 = 1/3$ (que son los precios sombra).

Cálculo del Rango para el primer coeficiente del lado derecho (restricciones) del problema PRIMAL, RHS (RIGHTHAND SIDE RANGES). Las primeras dos restricciones son obligatorias, por lo tanto:

$$(40 + r_1)/2 = 50/1, \qquad (40 + r_1) / 1 = 50/2$$

De la resolución de estas dos ecuaciones se obtiene: $r_1 = 60$ y $r_1 = -15$. Por lo tanto, el rango de sensibilidad para el primer RHS (b_1) en el problema es:

$$[40-15, 40 + 60] = [25, 100].$$

De modo similar, para el segundo RHS (b_2), se obtiene:

$$[50-30, 50+30] = [20, 80].$$

Los resultados anteriores los podemos obtener analizando la salida del programa LINDO.

```
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      110.0000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1        10.000000          0.000000
      X2        20.000000          0.000000


     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)         0.000000          2.333333
      3)         0.000000          0.333333
```

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE         DECREASE
      X1        5.000000         1.000000         3.500000
      X2        3.000000         7.000000         0.500000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE         DECREASE
       2       40.000000        60.000000        15.000000
       3       50.000000        30.000000        30.000000


THE TABLEAU

ROW  (BASIS)       X1         X2       SLK 2      SLK 3
1 ART           0.000      0.000      2.333      0.333   110.000
2       X1      1.000      0.000      0.667     -0.333    10.000
3       X2      0.000      1.000     -0.333      0.667    20.000
```

Para el problema PRIMAL, tenemos

$c'_1 \in [c_1$- ALLOWABLE DECREASE, ALLOWABLE INCREASE+$c_1] =$

$=[5-3.5, 5+1]= [1.5, 6]$, $c'_2 \in [3-0.5, 3+7]= [2.5, 10]$

Cuando los coeficientes de la función objetivo c'_1 o c'_2 toman valores dentro del intervalo calculado, la base óptima permanece invariante.

Para el problema DUAL, analizaremos el lado derecho de las restricciones (recursos, b_i) en el programa LINDO (RIGHTHAND SIDE RANGES, RHS) del problema PRIMAL

$b'_1 \in [b_1$-ALLOWABLE DECREASE, b_1+ ALLOWABLE INCREASE]=

$= [40-15, 40 + 60] = [25, 100]$, $b'_2 \in [50 - 30, 50 + 30] = [20, 80]$

Cuando los coeficientes de las restricciones b'_1 o b'_2 toman valores dentro del intervalo calculado, la base óptima permanece invariante.

Regla del 100% (región de sensibilidad)

El rango de sensibilidad que se presentó en la sección anterior es un análisis del tipo de "un cambio por vez". Consideremos el problema anterior con dos variables, queremos hallar los incrementos que se permiten hacer simultáneamente de RHS (r_1, $r_2 \geq 0$). Existe un método sencillo de aplicar que se conoce como "la regla del 100%", que establece que los precios sombra no cambian si se da la siguiente condición suficiente:

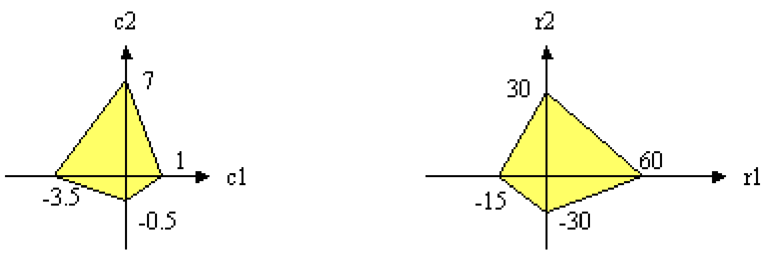
$$r_1/60 + r_2/30 \leq 1, \quad 0 \leq r_1 \leq 60, \quad 0 \leq r_2 \leq 30.$$

Aquí, 60 y 30 son los incrementos permisibles de los RHS, basados en la aplicación del análisis de sensibilidad ordinario. Es decir, siempre que el primer y el segundo RHS aumentan r_1 y r_2, respectivamente, mientras esta desigualdad continúe, los precios sombra para los valores del lado derecho permanecen sin cambios. Obsérvese que ésta es una condición suficiente porque, si se viola esta condición, entonces los precios sombra pueden cambiar o aun así seguir iguales. El nombre "regla del 100%" surge evidente cuando se observa que, en el lado izquierdo de la condición, cada término es un número no negativo menor que uno, que podría representarse como un porcentaje de cambio permisible. La suma total de estos cambios no debería exceder el 100%.

Aplicando la regla del 100% a los otros tres cambios posibles en los RHS se obtiene:

$$r_1/(-15) + r_2/(-30) \leq 1, \quad -15 \leq r_1 \leq 0, \quad -30 \leq r_2 \leq 0.$$
$$r_1/(60) + r_2/(-30) \leq 1, \quad 0 \leq r_1 \leq 60, \quad -30 \leq r_2 \leq 0.$$
$$r_1/(-15) + r_2/(30) \leq 1, \quad -15 \leq r_1 \leq 0, \quad 0 \leq r_2 \leq 30.$$

La siguiente figura ilustra la región de sensibilidad de ambos valores RHS como resultado de la aplicación de la regla del 100% al problema.



La región de sensibilidad para los coeficientes de costos y los valores del lado derecho en base a la regla suficiente del 100%.

Desde un punto de vista geométrico, obsérvese que el poliedro con los vértices (60, 0), (0, 30), (-15, 0) y (0,-30) en la Figura es sólo un subconjunto de una región de sensibilidad más grande para los cambios en ambos RHS. Por lo tanto, permanecer dentro de esta región de sensibilidad es sólo una condición suficiente (no necesaria) para mantener la validez de los precios sombra actuales.

Pueden obtenerse resultados similares para los cambios simultáneos de los coeficientes de costes. Por ejemplo, supongamos que queremos hallar la disminución permisible simultánea en c_1 y los incrementos en c_2, es decir, el cambio en ambos coeficientes de coste de $c_1 \leq 0$ y $c_2 \geq 0$. La regla del 100% establece que la base corriente sigue siendo óptima siempre que:

$$c_1/(-3.5) + c_2/7 \leq 1,\ -3.5 \leq c_1 \leq 0,\ 0 \leq c_2 \leq 7.$$

donde 3.5 y 7 son la disminución y el incremento permisibles de los coeficientes de coste c_1 y c_2, respectivamente, que se hallaron anteriormente mediante la aplicación del análisis de sensibilidad.

La figura anterior ilustra todas las posibilidades de incrementar/disminuir los valores de ambos coeficientes de costes como resultado de la aplicación de la regla del 100%, mientras se mantiene al mismo tiempo la solución óptima.

Claramente, la aplicación de la regla del 100%, en la forma expuesta anteriormente, es general y puede extenderse a cualquier problema de PL de mayor magnitud. Sin embargo, a medida que aumenta la magnitud del problema, este tipo de región de sensibilidad se reduce y, por lo tanto, resulta menos útil para la gestión. Existen técnicas más poderosas y útiles (que proporcionan condiciones necesarias y suficientes a la vez) para manejar cambios simultáneos dependientes (o independientes) de los parámetros.

5.9. Resolución mediante programa de ordenador

Siguiendo con el resumen propuesto en el *apartado 3.8,* tenemos:

1. La solución óptima permanece constante en tanto el incremento (disminución) de un coeficiente, en la función objetivo, de cierta variable no se exceda del intervalo de rangos de los coeficientes para esa variable, mientras los demás datos se conservan constantes.

   Si la modificación se realiza dentro del intervalo de variación del parámetro, la solución óptima permanece como única solución óptima del modelo.

2. El cambio en los coeficientes de la *función objetivo* altera la pendiente de los contornos de ésta, esto puede afectar o no a la solución óptima de la *función objetivo*.
3. En un modelo de *Maximización,* el aumento en la mejora de una actividad, conservando invariables los demás datos, *no* puede aumentar el nivel óptimo de dicha actividad.

4. En un modelo de *Minimización*, el aumento en el coste de una actividad, conservando invariables los demás datos, *no* puede aumentar el nivel óptimo de la *función objetivo*.
5. Si el coeficiente es aumentado hasta la frontera del entorno de variación, habrá una solución óptima alterna con un valor óptimo mejor (mayor en MAX y menor en MIN).
6. Si el Coeficiente es disminuido hasta la otra frontera, habrá una solución alterna en la que la variable afectada tendrá un valor óptimo desmejorado.
7. Si una de las fronteras es cero, se sabe que hay por lo menos una solución óptima alterna para el problema que se está manejando. Por ejemplo, que la función de contorno sea paralela a una de las restricciones activas. El algoritmo que emplea la computadora para resolver el problema encontrará sólo uno de los vértices como solución óptima.
8. Para mejorar el valor óptimo, debemos modificar los RECURSOS o REQUERIMIENTOS (b_i) que intervienen en las restricciones de holgura cero. Para saber cuáles, analizamos la columna de SHADOW PRICES, la cual nos da la *razón de mejora* de la FUNCION OBJETIVO cuando el vector disponibilidad de recursos (requerimientos) es aumentado (disminuido) unitariamente. Para saber cuánto podemos, debemos analizar el Rango del Vector de Disponibilidad de la Restricción escogida, que se consigue en RIGHTHAND SIDE RANGES.
9. Para saber cuánto mejorará la función objetivo, multiplicamos la cantidad que puede cambiar por el precio dual correspondiente (SHADOW PRICES).
10. En caso de querer empeorar la función objetivo, se haría lo contrario al punto anterior.
11. Si cambiamos los COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO, pueden suceder tres cosas:

    a. Si lo hacemos dentro del intervalo permitido, el cual se puede ver en la columna ALLOWED INCREASE y DECREASE, no influirá en la Mezcla Óptima, alterándose el valor óptimo, aumentado su valor original en el producto del *incremento por el valor de la variable básica correspondiente*.
    b. Si lo hacemos hasta el límite de los intervalos, aparecen soluciones óptimas alternativas.
    c. Si lo hacemos más allá del entorno, puede suceder cualquier cosa.

Ejercicio 5.4. La empresa Sales vende cuatro tipos de productos. Los recursos necesarios para producir una unidad de cada producto y el precio de venta para cada producto se dan en la tabla. En la actualidad se dispone de 4600 unidades de materia prima y de 5000 horas de trabajo. Para cumplir con la demanda de los clientes, se deben producir 950 unidades de producto, en cualquier combinación, siempre y cuando las unidades de producto tipo 4 sean como mínimo de 450.

Formule el problema de programa lineal que permita maximizar los ingresos para la empresa Sales y soluciónelo con el programa LINDO.

En la siguiente tabla se recogen los recursos y los precios de venta.

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Materia prima	2	3	4	7
Horas de trabajo	3	4	5	6
Precio venta (euros)	4	6	7	8

Solución:

Sea x_i = Cantidad de producto tipo i producido.

```
Max 4x1+6x2+7x3+8x4
st
    x1+x2+x3+x4=950
    x4>=450
    2x1+3x2+4x3+7x4<=4600
    3x1+4x2+5x3+6x4<=5000
   END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      6500.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1        50.000000          0.000000
        X2       450.000000          0.000000
        X3         0.000000          1.000000
        X4       450.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.000000
        3)         0.000000         -6.000000
        4)         0.000000          2.000000
        5)       350.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       3


 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                              OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
```

	COEF	INCREASE	DECREASE
X1	4.000000	1.000000	INFINITY
X2	6.000000	INFINITY	0.500000
X3	7.000000	1.000000	INFINITY
X4	8.000000	6.000000	INFINITY

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	950.000000	225.000000	16.666666
3	450.000000	90.000000	12.500000
4	4600.000000	50.000000	450.000000
5	5000.000000	INFINITY	350.000000

Análisis de la salida ofrecida por LINDO. Observando la salida del programa, el resultado es:

"*OBJECTIVE FUNCTION VALUE*"

Los valores de la función objetivo y de las variables nos los ofrece el programa en la primera columna:

$z = 6500.00$; $x_1=50.000000$, $x_2= 450.00000$, $x_3=0$, $x_4=450.000000$

"REDUCED COST"

Los valores de *Reduced Cost* que se entregan en el resultado por el software LINDO nos dan información acerca de cómo, cambiando los coeficientes en la función objetivo para las variables no básicas, se puede cambiar la solución óptima del *problema de programación lineal*.

Para cualquier variable no básica x_k, el *reduced cost* para x_k es la cantidad en la que puede mejorarse el coeficiente de x_k en la función objetivo antes de que el *problema de programación lineal* tenga una nueva solución óptima en la que x_k será variable básica. (Nótese que se usa el término "mejorarse", lo que implica aumento si la *función objetivo* es de maximización y disminución si es de minimización). Si el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica x_k se mejora en su *reduced cost*, entonces el *problema de programación lineal* tendrá soluciones óptimas alternativas y, al menos, en una de ellas, x_k será variable básica y, en otra, x_k será no básica. Si el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica es mejorado más allá de su *reduced cost*, entonces la nueva solución óptima del *problema de programación lineal* tendrá a x_k como variable básica.

El resultado óptimo de nuestro ejemplo muestra que x_3 es variable no básica y tiene un *reduced cost* = 1 euro. Esto implica que, si se mejora el coeficiente de la variable x_3 en la función objetivo (es decir, el precio de venta unitario del producto 3) en exactamente 1 euro (en vez de 7 euros que sea de 8 euros), habrá soluciones óptimas alternativas y, al menos, en una de ellas x_3 será variable básica. Si se aumenta el coeficiente de x_3 en la función objetivo en más de 1 euro, entonces la solución óptima del *problema de programación lineal* tendrá a x_3 como variable básica.

"DUAL PRICES" y Análisis de Sensibilidad

La columna *Dual Prices* indica el valor de los precios sombra de las restricciones del *problema de programación lineal*.

Recordemos la definición de precio sombra que está hecha en base a un precio sombra positivo: *El precio sombra de una restricción de un problema de programación lineal es la cantidad en que mejoraría (aumentaría si la función objetivo es Maximización o disminuiría si la función objetivo es Minimización) el valor óptimo de la función objetivo, cuando el término libre de la restricción es aumentado en una unidad*. (En forma contraria, si se disminuye en una unidad el término libre de la restricción, el valor óptimo de la función objetivo empeorará en una cantidad igual al precio sombra).

Signos de los Dual Prices (Precios Sombra)

El precio sombra de una restricción del tipo ≥ será siempre negativo o cero, el de una restricción ≤ será positivo o cero y el de una restricción que es igualdad podrá tener cualquier valor, negativo, positivo o cero, es decir, irrestricta en signo. Esto se aplica tanto para un *problema de programación lineal* de maximización como de minimización. Para ilustrar esta realidad, observe que, si se agregan puntos a la zona de soluciones factibles de un *problema de programación lineal*, hecho que ocurre cuando se aumenta el término libre de una restricción ≤, su efecto es que el valor óptimo de la función objetivo mejora o queda igual, y, al quitar puntos a la zona, si se aumenta el término libre de una restricción ≥, el óptimo empeora o queda igual.

Rango de validez de los precios sombra

El precio sombra de una restricción es válido dentro de un rango de variación específico de su término libre. Este rango se puede calcular con los antecedentes que se entregan en el análisis de sensibilidad del resultado óptimo, en la parte denominada *"Righthand side ranges"* (Rangos de los lados de la mano derecha, es decir, de los términos libres de las restricciones). Para cada término libre se indica su valor actual, la cantidad en que éste puede ser aumentado (`ALLOWABLE INCREASE`) y la cantidad en que éste puede ser disminuido (`ALLOWABLE DECREASE`). El mejoramiento o empeoramiento del valor óptimo de la función objetivo será directamente proporcional a su precio sombra por la cantidad en que varíe el término libre de la restricción, siempre y cuando esta variación mantenga el valor de este último dentro del rango de validez antes calculado. En nuestro ejercicio, se indica que el precio sombra de la restricción dos es (-6).

Este precio sombra es negativo, ya que la restricción es del tipo ≥ y su interpretación en el contexto del problema es la siguiente: Por cada unidad de producto 4 que se requiera fabricar, por encima de las 450 unidades de producto, el valor óptimo de la función objetivo empeorará en 6 euros. (Nótese que, en este caso, la FUNCIÓN OBJETIVO empeora con un aumento del término libre y ello es porque el precio sombra es negativo). Por el contrario, si el término libre de la restricción dos se disminuye, el valor óptimo de la función objetivo mejorará en 6 euros por cada unidad que se disminuya. El rango de valores del término libre de la restricción en el que este efecto del precio sombra es válido se obtiene del análisis de sensibilidad como sigue:

$$(450 - 12.5) \leq b_2 \leq (450 + 90)$$
$$437.5 \leq b_2 \leq 540$$

En el caso de una restricción no activa, es decir, aquella restricción que tiene holgura y que, por lo tanto, su precio sombra es nulo (0), el rango de variación del término libre de la restricción así calculado indica los valores que puede tomar este término libre sin que el valor óptimo de la función objetivo ni el valor óptimo de las variables cambie. (Rango en el cual la *"base"* no cambia). En nuestro ejemplo, la restricción cuatro tiene una holgura de 350 unidades y, según el análisis de sensibilidad, su término libre puede variar entre 4650 e infinito, sin que el valor óptimo de la función objetivo (6500) cambie, ni tampoco el valor óptimo de las variables de decisión.

Rangos de los coeficientes de la Función Objetivo ("Obj Coefficient Ranges")

Recordemos que, en el análisis de sensibilidad de un *problema de programación lineal* en dos variables, calculamos el rango de valores en que podían variar los coeficientes de la función objetivo, de tal forma que la variación de pendiente que ello provoca no hiciese variar la ubicación del punto óptimo.

Con el software LINDO, ya sea para dos o para más variables, el rango de variación permitido para los coeficientes de la función objetivo, que permite que "la Base no cambie", es decir, que las variables que son actualmente básicas sigan siendo básicas y no varíen su valor óptimo, se obtiene del análisis de sensibilidad en la sección *"Obj Coefficient Ranges*".

En nuestro ejemplo, la solución óptima se da para x_1= 50, x_2= 450, x_4= 450 y SLK 5= 350.

Estas son las variables básicas y su valor óptimo. Esta base no cambiará si, por ejemplo, el coeficiente de la variable x_4 se aumenta en 1, 2, 3, y hasta 6 unidades.

Veamos otro ejemplo. Dada la salida de un ejercicio resuelto con LINDO:

MIN 8 X + 9 Y + 7 Z + 9 T (Modelo que minimiza el coste de producir 4 artículos)

st X + Y + Z + T >= 200 (Cota de producción)
X + Y + Z + T <= 235 (Cota de producción)
4 X + 5 Y + 2 Z + 3 T >= 500 (Gasto mínimo de una materia prima)

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 1450.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST	ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
X	50.000000	.000000	2)	.000000	-6.000000
Y	.000000	.500000	3)	35.000000	0.000000
Z	150.000000	.000000	4)	.000000	-0.500000
T	.000000	1.500000			

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X	8.000000	.333333	1.000000
Y	9.000000	INFINITY	.500000
Z	7.000000	1.000000	1.000000
T	9.000000	INFINITY	1.500000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	200.000000	35.000000	75.000000
3	235.000000	INFINITY	35.000000
4	500.000000	300.000000	100.000000

THE TABLEAU

ROW (BASIS)	X	Y	Z	T	SLK 2	SLK 3	SLK 4	
1 ART	0.000	0.500	0.000	1.500	6.000	0.000	0.500	-1450.000
2 X	1.000	1.500	0.000	0.500	1.000	0.000	-0.500	50.000
3 SLK 3	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000	35.000
4 Z	0.000	-0.500	1.000	0.500	-2.000	0.000	0.500	150.000

Conteste a las cuestiones siguiente: a) Interprete los números 7 y 5 del planteamiento del problema. b) Responda al problema planteado mediante la solución que ofrece LINDO. c) Interprete el DUAL PRICES: -0.5. d) Coste al que conviene producir el articulo 2 (Y). e) Coste al que conviene producir el articulo 3. f) Indique la base optima. ¿Es única? ¿Porque? g) Indique la matriz inversa asociada a la solución óptima. h) ¿Cuál es el precio sombra? Interprételo. i) Si el coste por unidad del artículo 4 es 7 €. ¿Cuál es la base optima? j) Si se agrega: $2x+3y+z+t \geq 230$. ¿Cuál es la base optima?.

Solución:

a) Interprete los números 7 y 5 del planteamiento del problema. El número 7 indica que producir un artículo tiene un coste de 7 € y el 5 que producir un artículo requiere 5 unidades de materia prima.

b) Responda al problema planteado mediante la solución que ofrece LINDO. El mínimo coste total es de 1450 €, y se logra produciendo 50 artículos (X=50) y 150 artículos (Z=150).

c) Interprete el DUAL PRICES: -0.5. Si el gasto mínimo de materia prima de 500 unidades se aumenta una unidad, pasando a 501, el valor óptimo empeora en 0.5 €. Es decir, el mínimo sube a 1450.5 €.

d) Coste al que conviene producir el articulo 2 (Y). Conviene hacerlo a (9-0,5) = 8,5 € o menos.

e) Coste al que conviene producir el articulo 3 (Z). Conviene hacerlo a (7 -1) = 6€ o menos.

f) Indique la base optima. Es única, y porque?.La solución está compuesta por las variables: X, SLK 3, Z (B={ X, SLK 3, Z }), y es única porque los coeficientes de las variables no básicas son distintos de cero en la tabla final del Simplex.

g) Indique la matriz inversa de la base óptima, B. La matriz inversa la obtenemos de THE TABLEAU:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0,5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$$

h) ¿Cuál es el precio sombra? Interprételo. El precio sombra de la materia prima es de - 0.5 €. Este precio nos indica que se busca en el mercado sabiendo que por cada unidad adicional el coste sube 0.5 €.

i) Si el coste por unidad el articulo 4 (C_T=9) es 7 €. ¿Cual es la base optima?. La base óptima cambia porque 7 € esta fuera del rango en que puede cambiar 7 $\notin$ [9-1,5=7.5, ∞]. Sale de la base X y entra T. La base resultante es B={T, SLK 3, Z}.

i) Si se agrega la restricción: 2x+3y+z+t > 230. ¿Cuál es la base optima?. La restricción se satisface, por lo que la solución óptima se mantiene. La base resultante es B={ X, SLK 3, Z, SLK 5}.

Veamos otro ejemplo. Un establecimiento de atención las 24 horas del día necesita, dependiendo de la hora del día, el siguiente número de empleados:

Hora de comienzo	0	4	8	12	16	20
Intervalo horario	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
Nº de empleados	3	8	10	8	14	5

Los cambios de turno son posibles cada cuatro horas a partir de las 00:00 horas y cada turno dura 8 horas.

a) Formule el problema.

```
Min  z= x0+ x4+ x8+ x12+ x16+ x20
st
  x20+ x0>=3
  x0+ x4>=8
  x4+ x8>=10
  x8+ x12>=8
  x12+ x16>=14
  x16+ x20>=5
```

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      27.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X0         0.000000          0.000000
        X4         8.000000          0.000000
        X8         2.000000          0.000000
       X12         6.000000          0.000000
       X16         8.000000          0.000000
       X20         3.000000          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         -1.000000
        3)         0.000000          0.000000
        4)         0.000000         -1.000000
        5)         0.000000          0.000000
        6)         0.000000         -1.000000
        7)         6.000000          0.000000

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X0        1.000000         INFINITY         0.000000
       X4        1.000000         0.000000         0.000000
       X8        1.000000         0.000000         0.000000
      X12        1.000000         0.000000         0.000000
      X16        1.000000         0.000000         0.000000
      X20        1.000000         0.000000         1.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        2        3.000000         INFINITY         3.000000
        3        8.000000         2.000000         6.000000
        4       10.000000         6.000000         2.000000
        5        8.000000         6.000000         6.000000
        6       14.000000         INFINITY         6.000000
        7        5.000000         6.000000         INFINITY
```

```
THE TABLEAU
ROW  (BASIS)      X0        X4        X8       X12       X16       X20
1 ART            0.000     0.000     0.000     0.000     0.000     0.000
2       X4       1.000     1.000     0.000     0.000     0.000     0.000
3      X20       1.000     0.000     0.000     0.000     0.000     1.000
4       X8      -1.000     0.000     1.000     0.000     0.000     0.000
5      X12       1.000     0.000     0.000     1.000     0.000     0.000
6      X16      -1.000     0.000     0.000     0.000     1.000     0.000
7 SLK    7       0.000     0.000     0.000     0.000     0.000     0.000

ROW   SLK    2  SLK    3  SLK    4  SLK    5  SLK    6  SLK    7
1     1.000     0.000     1.000     0.000     1.000     0.000   -27.000
2     0.000    -1.000     0.000     0.000     0.000     0.000     8.000
3    -1.000     0.000     0.000     0.000     0.000     0.000     3.000
4     0.000     1.000    -1.000     0.000     0.000     0.000     2.000
5     0.000    -1.000     1.000    -1.000     0.000     0.000     6.000
6     0.000     1.000    -1.000     1.000    -1.000     0.000     8.000
7    -1.000     1.000    -1.000     1.000    -1.000     1.000     6.000
```

b) Complete la tabla siguiente:

Valor de z: **27**
Vértice final: $(0,8,2,6,8,3,0,0,0,0,0,6)^T$

Hora de comienzo	0	4	8	12	16	20
Intervalo horario	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
Nº de empleados	3	8	10	8	14	5
Solución	0	8	2	6	8	3
Holgura	0	0	0	0	0	6

c) ¿Qué recurso presenta mayor intervalo de variación? Dé el intervalo. (Ver tabla del Simplex):

7 5.000000 6.000000 INFINITY [-∞,11]

d) Haga las modificaciones pertinentes en la tabla de datos iniciales para que no tengamos holguras. Plantee de nuevo las restricciones afectadas.

x16+ x20>=11 (5+6) (20-24, nº de empleados 11)