Práctica 3: Sucesiones y Series de Números Reales con *Mathematica*

Grado en Administración y Dirección de Empresas

José Manuel Cascón Barbero (casbar@usal.es)
María Dolores García Sanz (dgarcia@usal.es)
Bernardo Ramón García-Bernalt Alonso (bgarcia@usal.es)
María Aurora Manrique García (amg@usal.es)
Gustavo Santos García (santos@usal.es)

1. Introducción

En la Introducción a estas notas mencionamos las características que debe cumplir una variable (estática y dinámica) en *Mathematica* y también aprendimos cómo se escriben funciones. Remitimos a dicho apartado para aprender estos aspectos, aunque incluimos aquí algún ejemplo a modo de recordatorio breve que permite continuar con el capítulo a aquellos que ya los estudiaron.

In[1]:=
```
a = 2;
b = a + 2;
c := a + 2;
```

In[4]:=
```
? a
```

Out[4]=
```
Symbol
Global`a

Assignment  a = 2
 Full Name  Global`a
```

Los valores de **a**,**b** y **c** son:

In[5]:=
```
a
```

Out[5]=
```
2
```

In[6]:=
```
b
```
Out[6]=
```
4
```

In[7]:=
```
c
```
Out[7]=
```
4
```

Observad que **b** no se ha visto afectado por el cambio de valor de **a**, en cambio **c** sí. La asignación dinámica se suele usar de forma habitual con funciones o sucesiones.
Se puede redefinir la variable con un nuevo valor:

In[8]:=
```
a = Sqrt[2]
    raíz cuadra
```
Out[8]= $\sqrt{2}$

In[9]:=
```
a
```
Out[9]= $\sqrt{2}$

En este caso, si necesitáramos una aproximación numérica podemos usar la función **N[x,n],** donde **x** es el nombre de la variable correspondiente y **n** denota el número de decimales que se mostrarán. También podemos escribir la expresión seguida de **//N**:

In[10]:=
```
N[a, 20]
valor numérico
a // N
     valor nur
```
Out[10]=
```
1.4142135623730950488
```
Out[11]=
```
1.41421
```

Para borrar el contenido de una variable se utiliza el comando **Clear[ ]**:

In[12]:=
```
Clear[a]
borra
```

In[13]:=
```
a
```
Out[13]=
```
a
```

Como hemos avanzado, las funciones se suelen definir utilizando asignación dinámica. La forma (prototipo) de hacerlo es:

Nombre[Argumento1_,Argumento2_,Argumento3_,...] := Definición

Por ejemplo, definamos la función f(x) = x^2 - 3:

In[14]:=
```
f[x_] := x^2 - 3
```

In[15]:=
```
f[3]
```

Out[15]= 6

De igual modo se definen las funciones de varias variables:

In[16]:=
```
g[x_, y_] := (x^2 - y^2) / (x^2 + y^2 + 1)
```

In[17]:=
```
g[x, y]
```

Out[17]= $\frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$

En la sección 2, dedicada a sucesiones, emplearemos la misma sintaxis para definirlas. Terminamos con el estudio de las series en la sección 3.

2. Sucesiones

Antes de comenzar borramos las variables que hemos empleado anteriormente:

In[18]:=
```
Clear[a, b, f, g]
```
borra

En esta sección veremos cómo se puede definir, dibujar y calcular el límite de sucesiones.

2.1 Definición

Mathematica permite definir sucesiones por medio de una fórmula explicita o por una ley de recurrencia. El primer caso será el más habitual en nuestra asignatura.

- **Fórmula explícita**: se procede del mismo modo que se hizo con las funciones en la sección anterior. Por ejemplo, la sucesión $a_n = \frac{1}{n^2}$ se define:

In[19]:=
```
a[n_] := 1/n^2
```

Podemos utilizar esta expresión para calcular un término concreto:

In[20]:=
```
a[3]
```

Out[20]= $\frac{1}{9}$

In[21]:=
```
a[8]
```

Out[21]= $\frac{1}{64}$

Si lo que interesa es mostrar una serie de términos se puede utilizar el comando **Table**. Veamos qué nos dice la ayuda sobre este comando:

In[22]:=
```
?Table
```

Out[22]=

Symbol

Table[*expr*, *n*] generates a list of *n* copies of *expr*.

Table[*expr*, {*i*, i_{max}}] generates a list of the values of *expr* when *i* runs from 1 to i_{max}.

Table[*expr*, {*i*, i_{min}, i_{max}}] starts with $i = i_{min}$.

Table[*expr*, {*i*, i_{min}, i_{max}, *di*}] uses steps *di*.

Table[*expr*, {*i*, {i_1, i_2, …}}] uses the successive values i_1, i_2, ….

Table[*expr*, {*i*, i_{min}, i_{max}}, {*j*, j_{min}, j_{max}}, …] gives a nested list. The list associated with *i* is outermost.

De modo que si, por ejemplo, queremos mostrar los 20 primeros términos procedemos así:

In[23]:=
```
Table[a[n], {n, 1, 10, 1}]
```
tabla

Out[23]= $\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}, \frac{1}{100}\right\}$

En el comando anterior indicamos que la variable **n** varía desde 1 hasta 10 con paso 1.

- **Ley de recurrencia**: En este caso el término general de la sucesión depende del valor de términos anteriores. Para definir este tipo de sucesiones con *Mathematica* en la **misma celda** deben aparecer la definición del (o los) primer (o primeros) términos de la sucesión (con asignación estática) y la definición del término general (con asignación dinámica). Es muy importante respetar estas reglas para evitar la formación de bucles que colapsen *Mathematica.* Por ejemplo, para definir la sucesión: $b_1 = 1$; $b_n = \sqrt{1 + b_{n-1}}$;

In[24]:=
```
b[1] = 1;
b[n_] := Sqrt[1 + b[n - 1]];
```
raíz cuadrada

El término noveno viene dado por:

In[26]:=
```
b[9]
```

Out[26]= $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}}}}$

Para obtener una aproximación del valor de este término con 7 decimales podemos emplear:

In[27]:=
```
N[b[9], 7]
```
valor numérico

Out[27]= 1.617978

Con el comando **Table**, podemos obtener, por ejemplo, los 20 primeros términos y observar que la sucesión parece ser convergente (de hecho lo es)

In[28]:=
```
N[Table[b[n], {n, 1, 20}], 20]
```
tabla

Out[28]=
```
{1.0000000000000000000, 1.4142135623730950488,
 1.5537739740300373073, 1.5980531824786174204, 1.6118477541252515640,
 1.6161212065081169413, 1.6174427985273905634, 1.6178512906096748432,
 1.6179775309347391686, 1.6180165422314875606, 1.6180285974702324650,
 1.6180323227520000520, 1.6180334739281508610, 1.6180338296612190614,
 1.6180339395887896706, 1.6180339735582778148, 1.6180339840554270060,
 1.6180339872992245048, 1.6180339883016130588, 1.6180339886113681570}
```

2.2 Gráficas

Una de las ventajas de un software como *Mathematica* es su soporte gráfico. En este caso concreto nos interesa el comando **ListPlot**, que permite dibujar colecciones de puntos y hacer así un estudio cualitativo del comportamiento de una sucesión:

In[29]:=
```
? ListPlot
```

Out[29]=

Symbol

ListPlot[{y_1, y_2, …}] plots points {1, y_1}, {2, y_2}, ….
ListPlot[{{x_1, y_1}, {x_2, y_2}, …}] plots a list of points with specified x and y coordinates.
ListPlot[{$data_1$, $data_2$, …}] plots data from all the $data_i$.
ListPlot[{…, w[$data_i$, …], …}] plots $data_i$ with features defined by the symbolic wrapper w.

Para ilustrar el funcionamiento de este comando, definimos dos sucesiones que tienen por límite el número *e* (en *Mathematica* este número se denota **E**).

In[30]:=
```
E
```
número e
```
N[E, 30]
```
número e

Out[30]= e

Out[31]=
```
2.71828182845904523536028747135
```

In[32]:=
```
Se1[n_] := (1 + 1 / n) ^ n
```

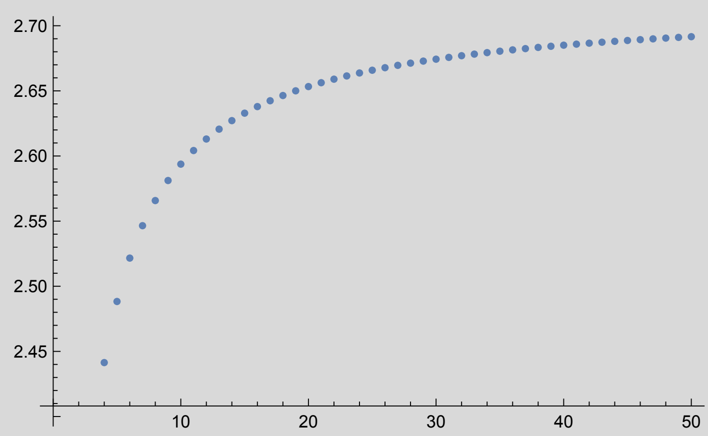
In[33]:=
```
Se2[n_] := (1 + 1 / n) ^ (n + 1)
```

Generamos dos listas que contienen los 50 primeros términos de ambas sucesiones:

In[34]:=
```
L1 = Table[Se1[n], {n, 1, 50}];
     tabla
L2 = Table[Se2[n], {n, 1, 50}];
     tabla
```

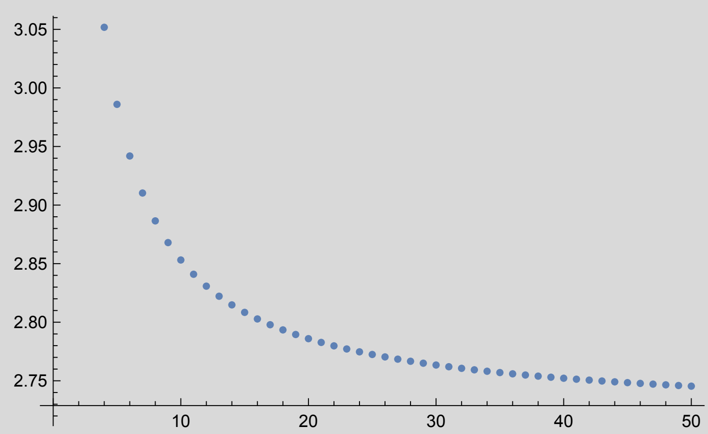
In[36]:=
```
ListPlot[L1]
representación de lista
```

Out[36]=



In[37]:=
```
ListPlot[L2]
representación de lista
```

Out[37]=



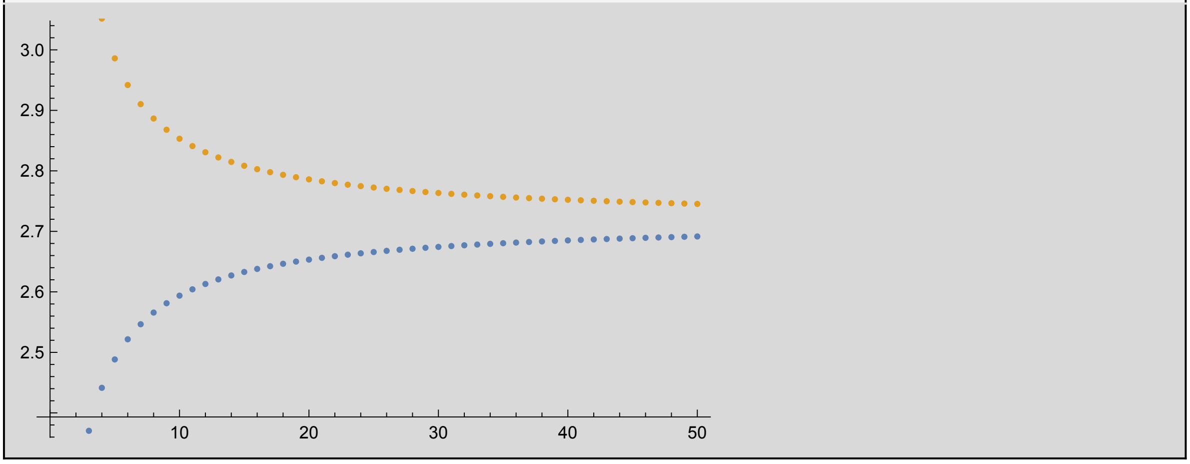
También es posible dibujar ambas al mismo tiempo:

In[38]:=

```
ListPlot[{L1, L2}]
```

representación de lista

Out[38]=



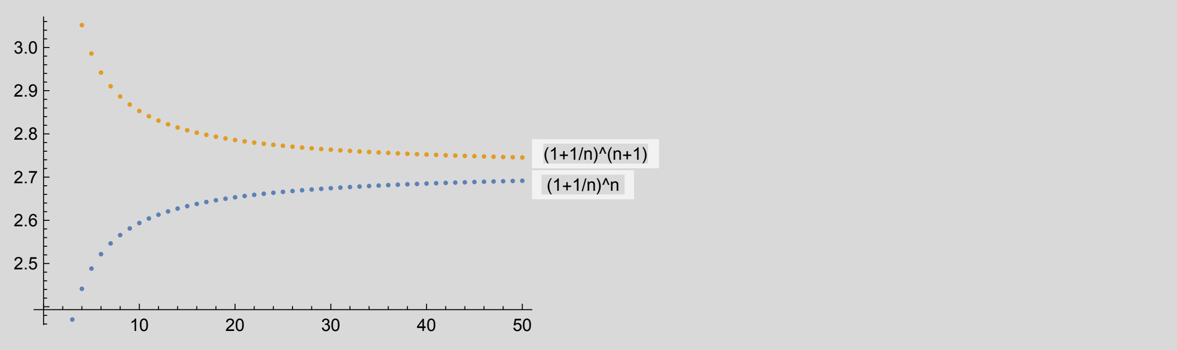
En ocasiones es útil etiquetar las sucesiones, por ejemplo cuando se dibujan varias.

In[39]:=

```
ListPlot[{Labeled[L1, " (1+1/n)^n "], Labeled[L2, "(1+1/n)^(n+1)"]}]
```

representaci··· etiquetado etiquetado

Out[39]=



Si el lector esta interesado en la edición y formateo de los gráficos, la mejor opción es consultar la documentación y modificar los ejemplos que allí aparecen.

2.3 Límites

Para el cálculo de límites de sucesiones *Mathematica* dispone del comando **Limit**:

Limit[Término general, n-> Infinity]

De hecho, si se consulta la ayuda,

In[40]:=

```
? Limit
```

Out[40]=

Symbol

Limit[$f[x]$, $x \to x^*$] gives the limit $\lim_{x \to x^*} f(x)$.

Limit[$f[x_1, \ldots, x_n]$, $\{x_1 \to x_1^*, \ldots, x_n \to x_n^*\}$] gives the nested limit $\lim_{x_1 \to x_1^*} \cdots \lim_{x_n \to x_n^*} f(x_1, \ldots, x_n)$.

Limit[$f[x_1, \ldots, x_n]$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \to \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$] gives the multivariate limit $\lim_{\{x_1, \ldots, x_n\} \to \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}} f(x_1, \ldots, x_n)$.

Esta función es más general y permite el cálculo de límites de funciones. Veremos este enfoque más adelante. *Mathematica* calcula el límite formalmente, a través de desarrollos de Taylor (los infinitésimos que utilizamos en clase son desarrollos de Taylor de orden uno). Por ejemplo :

Nota: Para escribir la "flecha" que figura abajo escribimos - y > (->). Mathematica lo detectará y cambiará este símbolo por una flecha tras la evaluación.

In[41]:=
```
Limit[Cos[n] / n, n → Infinity]
```
límite coseno infinito

Out[41]=
```
0
```

Mathematica resuelve todo tipo de indeterminaciones:

- ∞-∞

In[42]:=
```
Limit[(n + 1) ^2/n - n^3/(n - 1) ^2, n → Infinity]
```
límite infinito

Out[42]=
```
0
```

- $\frac{\infty}{\infty}$

In[43]:=
```
Limit[(n^2 - 3 n) / (n + 3), n → Infinity]
```
límite infinito

Out[43]=
```
∞
```

- $\frac{0}{0}$

In[44]:=
```
Limit[Sin[1 / n] / Log[1 + 2 / n], n → Infinity]
```
límite seno logaritmo infinito

Out[44]=

$\frac{1}{2}$

- 1^{∞}

In[45]:=
```
Limit[((n + 1) / (n - 2)) ^ (4 n + 3), n → Infinity]
```
límite infinito

Out[45]=

e^{12}

- ∞^0

In[46]:=
```
Limit[ (n^3 - 1) ^ (1 / (3 n)), n → Infinity]
```
límite infinito

Out[46]=
```
1
```

- 0^0

In[47]:=
```
Limit[ Sin[1 / n] ^ ( 1 - Cos[1 / n]) , n → Infinity]
límite  seno             coseno         infinito
```

Out[47]=
```
1
```

Sin embargo, este comando no funciona cuando se trata de calcular límites de sucesiones definidas por recurrencia:

In[48]:=
```
Clear[c]
borra
```

In[49]:=
```
c[1] = 1;
c[n_] := Sqrt[ 1 + c[n - 1]]
         raíz cuadrada
```

In[51]:=
```
Limit[c[n], n → Infinity]
límite         infinito
```

\$RecursionLimit: Recursion depth of 1024 exceeded during evaluation of −1021 + n.

Out[51]= Hold$\left[\lim_{n\to\infty} c[n]\right]$

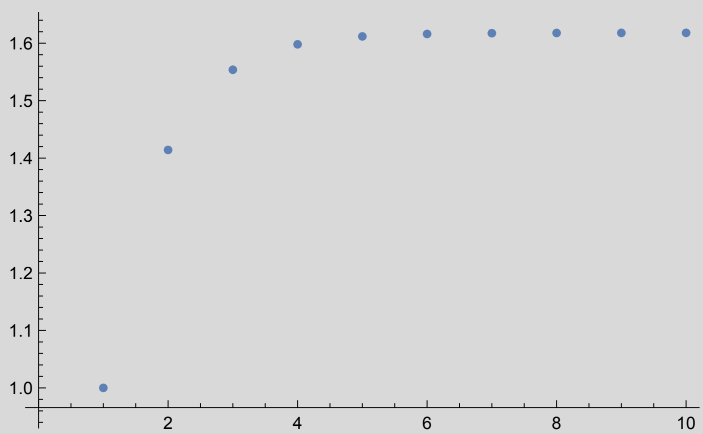
Mathematica avisa de que no es capaz de resolver la recursión. En estos casos, siempre se pueden dibujar los primeros términos, o calcularlos y observar su carácter. Por supuesto no es un método riguroso, pero en general permite obtener buenos resultados:

In[52]:=
```
N[Table[c[n], {n, 1, 10}], 20]
 ⋯ tabla
```

Out[52]=
```
{1.0000000000000000000, 1.4142135623730950488,
 1.5537739740300373073, 1.5980531824786174204,
 1.6118477541252515640, 1.6161212065081169413, 1.6174427985273905634,
 1.6178512906096748432, 1.6179775309347391686, 1.6180165422314875606}
```

In[53]:=
```
ListPlot[Table[c[n], {n, 1, 10}]]
representa⋯ tabla
```

Out[53]=



Sin embargo, *Mathematica* permite el cálculo de límites que requieren el uso del criterio de Stolz o del criterio de la raíz, aunque la escritura puede resultar complicada (los comandos **Sum** y **Product** serán explicados en la siguiente sección). Por ejemplo:

$$lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

In[54]:=
```
Limit[1 / Sqrt[n] Sum[ 1 / Sqrt[k], {k, 1, n}], n → Infinity]
límite    raíz cua⋯ suma  raíz cuadrada              infinito
```

Out[54]= 2

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots \sqrt{n}}{n \sqrt{n}}$$

In[55]:=
```
Limit[ (Sum[Sqrt[k], {k, 1, n}]) / (n Sqrt[n] ), n → Infinity]
límite  s⋯  raíz cuadrada              raíz cuadrada    infinito
```

Out[55]= $\frac{2}{3}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}}{n}$$

In[56]:=
```
Limit[ Product[(n + k), {k, 1, n}] ^ (1 / n) / n, n → Infinity]
límite producto                                    infinito
```

Out[56]= $\frac{4}{e}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

In[57]:=
```
Limit[ (n !) ^ (1 / n) / n, n → Infinity]
límite                      infinito
```

Out[57]= $\frac{1}{e}$

2.4 Ejercicios

1. Dada la sucesión $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$

- Dibuja los primeros 20 términos de la sucesión.
- ¿Cuál parece ser el límite? Calcúlalo.

2. Dada la sucesión $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n+3}$

- Dibuja los primeros 50 términos de la sucesión y deduce que la sucesión es acotada y monótona creciente.
- Calcula el límite.

3. La sucesión de Fibonacci viene definida por:

$$a_1 = a; \qquad a_2 = b; \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2};$$

- Utiliza *Mathematica* para generar los primeros 20 términos de la sucesión, con a=1 y b=1.

- Calcula los primeros 19 términos de la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, y calcula su aproximación numérica (comando **N [ ]**).
- ¿Cuál parece ser el límite de la sucesión anterior? ¿De qué número se trata?
- Modifica el valor de a y b y estudia su influencia en el resultado final.

4. Considérese la sucesión definida por:

$$x_1 = 3; \qquad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}};$$

- Define la sucesión $y_n = x_{n+1} - x_n$. Utiliza *Mathematica* para comprobar que todos sus términos son negativos. Esto implica que $x_n \leq x_{n+1}$, es decir, la sucesión $\{x_n\}_n$ es decreciente.
- Dibuja algunos términos de la sucesión x_n y deduce que es acotada.
- Concluye de los apartados anteriores que x_n es convergente. ¿Cuál parece ser el límite?
- El límite, si existe, debe ser la solución de la ecuación: $L = \sqrt{2 + L}$.
  Comprueba que el valor de L coincide con el del apartado anterior.
- Repite el ejercicio para otros valores de x_1. Por ejemplo x_1= 0,1, 2, 8. ¿Cuál es el valor del límite en estos casos? ¿Es monótona la sucesión $\{y_n\}_n$ en estos casos?

5. Calcula los siguientes límites:

- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\,(n^3 + a\,n^2)^{\frac{1}{3}} - (n^3 - a\,n^2)^{\frac{1}{3}}$
- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\,(1+(-1)^n)\cos(n\,\pi) + \frac{n^2+n+1}{n^2+4}\sin(\frac{n\,\pi}{2})$
- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\,\frac{\sin(n)}{n^3 \sin^2(1/n)}$
- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\,\frac{\sin(\tan(1/n))}{\sin(1/n)}$

6. Calcula los siguientes límites:

- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\,\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left(\frac{3\,n+5}{3\,n-4}\right)^{\frac{3\,n-2}{4}}$
- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left(\frac{2\,n^2}{3\,n^3+1}\right)^{\frac{3\,n^2+2}{5\,n-3}}$

7. Utiliza el criterio de la raíz para calcular los siguientes límites:

- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left(\frac{(2\,n)!}{(n!)^2}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\,\frac{[(n+1)\,(n+2)\ldots(2\,n)]^{\frac{1}{n}}}{n}$
- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\,(n^2 + 1)^{\frac{1}{2\,n}}$

8. Utiliza el criterio de Stolz para calcular los siguientes límites:

- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$
- $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\,\frac{\log(n^n)}{\log(n!)}$

- $\text{Limit}_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+2\sqrt{2}+\ldots+n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$

3. Series

El objetivo de esta sección es presentar las herramientas de las que dispone *Mathematica* para trabajar con series. Antes de nada, conviene recordar que el carácter de una serie viene determinado por el carácter de su sucesión de sumas parciales. Así diremos que la serie es convergente si el límite de la sucesión de sumas parciales es un número real, es divergente si el límite es ∞, o es oscilante si el límite no existe (para el caso de series de términos positivos, este último caso no debe ser considerado).

El hecho de que una serie sea convergente no implica que se pueda calcular el valor del límite, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sino tan solo que el límite es finito. Se denomina series sumables a aquellas series para las cuales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser determinado.

3.1 Sumas parciales y formales

El comando **Sum** permite realizar sumas parciales n-ésimas o sumas formales. Veamos su sintaxis recurriendo a la ayuda:

In[58]:=
```
? Sum
```

Out[58]=

Symbol

Sum[f, {i, i_{max}}] evaluates the sum $\sum_{i=1}^{i_{max}} f$.
Sum[f, {i, i_{min}, i_{max}}] starts with $i = i_{min}$.
Sum[f, {i, i_{min}, i_{max}, di}] uses steps di.
Sum[f, {i, {i_1, i_2, …}}] uses successive values i_1, i_2, ….
Sum[f, {i, i_{min}, i_{max}}, {j, j_{min}, j_{max}}, …] evaluates the multiple sum $\sum_{i=i_{min}}^{i_{max}} \sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} \ldots f$.
Sum[f, i] gives the indefinite sum $\sum_i f$.

Por ejemplo, la suma de los 100 primeros números naturales se puede calcular como sigue:

In[59]:=
```
Sum[ n, {n, 1, 100}]
```
suma

Out[59]=
```
5050
```

La suma de los 500 primeros términos de $a_n = \frac{n+2}{3^n}$:

In[60]:=
```
a[n_] := (n + 2) / 3^n;
```

In[61]:=
```
Sum[a[n], {n, 1, 500}]
```
suma

Out[61]=
```
63 630 510 642 772 389 474 174 217 389 200 808 456 540 923 795 502 840 320 605 562 707 016 ⋱
   050 335 271 817 097 347 389 460 213 930 370 789 314 479 435 206 747 567 497 880 154 772 ⋱
   865 750 236 754 103 983 545 115 038 099 683 733 376 037 719 349 963 990 173 117 452 033 ⋱
   150 282 767 012 774 014 675 482 744 641 910 817 250 /
  36 360 291 795 869 936 842 385 267 079 543 319 118 023 385 026 001 623 040 346 035 832 ⋱
   580 600 191 583 895 484 198 508 262 979 388 783 308 179 702 534 403 855 752 855 931 517 ⋱
   013 066 142 992 430 916 562 025 780 021 771 247 847 643 450 125 342 836 565 813 209 972 ⋱
   590 371 590 152 578 728 008 385 990 139 795 377 610 001
```

Si queremos su aproximación numérica:

In[62]:=
```
Sum[a[n], {n, 1, 500}] // N
```
suma valor numérico

Out[62]=
```
1.75
```

También es posible calcular sumas genéricas del tipo $1+\ 2^2+\ 3^2+\ \ ...\ +\ n^2$:

In[63]:=
```
Sum[k^2, {k, 1, n}]
```
suma

Out[63]=

$$\frac{1}{6}\,n\,(1+n)\,(1+2\,n)$$

Observad que, en el caso anterior, hemos seleccionado **k** como variable y **n** como el índice hasta el que tiene lugar la suma (iterador).

3.2 Sumas infinitas

El comando anterior, **Sum[ ]**, también puede emplearse para sumar series. Para ello, basta con sustituir el índice final por **Infinity.** Por ejemplo: para calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ escribiremos:

In[64]:=
```
Sum[n/3^n, {n, 1, Infinity}]
```
suma infinito

Out[64]=

$$\frac{3}{4}$$

En general, *Mathematica* es capaz de sumar la mayoría de las series sumables:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$$

In[65]:=
```
Sum[ n^2/n!, {n, 1, Infinity}]
```
suma infinito

Out[65]=
```
2 ⅇ
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

In[66]:=
```
Sum[1/n^3, {n, 1, Infinity}]
suma                infinito
```
Out[66]=
```
Zeta[3]
```

La función zeta de Riemman (ζ) es de gran importancia en matemáticas (teoría de números). Podemos obtener una aproximación numérica:

In[67]:=
```
Zeta[3] // N
función zeta  valor numérico
```
Out[67]=
```
1.20206
```

Sin embargo, a menudo, cuando la serie no es sumable, *Mathematica* no ofrece ningún tipo de información relevante:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\text{Log}(n))^n}$$

In[68]:=
```
Sum[1/Log[n]^n, {n, 2, Infinity}]
suma  logaritmo         infinito
```
Out[68]=

$$\sum_{n=2}^{\infty} \text{Log}[n]^{-n}$$

Como alternativa, se puede emplear la función **NSum**, cuya sintaxis es la misma. En este caso, *Mathematica* obtiene (si es que puede) una aproximación numérica utilizando procedimientos más o menos complejos (integrales impropias, integración adaptativa, procedimientos de extrapolación). El valor de **NSum** debe ser tomado siempre con cautela, de hecho, convergencias lentas o mensajes de aviso, pueden ser indicios de no convergencia.

Utilizamos este comando con la serie anterior:

In[69]:=
```
NSum[1/Log[n]^n, {n, 2, Infinity}]
aproxima·· logaritmo         infinito
```
Out[69]=
```
3.24261
```

Sin embargo, este comando muestra la siguiente información con la serie de término general 1/n (serie armónica, divergente):

In[70]:=
```
NSum[1/n, {n, 1, Infinity}]
aproximación numéric···  infinito
```

··· NIntegrate: Numerical integration converging too slowly; suspect one of the following: singularity, value of the integration is 0, highly oscillatory integrand, or WorkingPrecision too small.

··· NIntegrate: NIntegrate failed to converge to prescribed accuracy after 9 recursive bisections in n near {n} = $\{8.16907 \times 10^{224}\}$. NIntegrate obtained 191609.51762979227` and 160378.5178102709` for the integral and error estimates.

Out[70]=
```
191613.
```

Para finalizar con este apartado, nota que en este mismo caso el comando **Sum[ ]** informa de que esta serie es divergente

In[71]:=
```
Sum[1 / n, {n, 1, Infinity}]
suma                infinito
```

Sum: Sum does not converge.

Out[71]=
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Como norma general, para analizar una serie es bueno combinar ambos comandos, Sum[ ] y NSum[ ], recordando las características de cada uno de ellos.

3.3 Convergencia

Los criterios de convergencia permiten determinar el carácter de una serie a partir del de series ya conocidas, o mediante el cálculo de determinados límites que dependen del término general de la serie. Algunos de los criterios más importantes son:

- Comparación directa
- Comparación por paso al límite
- Criterio del cociente
- Criterio de Raabe
- Criterio de la raíz

Información detallada de cada uno de ellos se puede encontrar en el material teórico. Manejar estos criterios con *Mathematica* se reduce (en la mayoría de los casos) a calcular un límite. Ilustraremos esto con el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Estudiar el carácter de las siguientes series:

$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)\, n\,!}$

$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\, n!}{(n+1)\,(n-2)\ldots(2\,n+1)}$

$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

Solución:

a) Aplicamos el criterio de comparación por paso al límite con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que sabemos que es divergente:

In[72]:=
```
Limit[Sin[1 / n] / (1 / n), n → Infinity]
límite seno                 infinito
```

Out[72]=
```
1
```

Como el límite es distinto de cero e infinito, deducimos que ambas series tienen el mismo carácter, es decir, que $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ es divergente

b) Utilizaremos el criterio del cociente para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)\, n!}$:

In[73]:=
```
b[n_] := (n + 1)/((n + 2) n !);
```

In[74]:=
```
Limit[b[n + 1] / b[n], n → Infinity]
límite                 infinito
```

Out[74]=
```
0
```

Como el límite es menor que 1, deducimos que la serie es convergente.

c) En este caso para escribir el término general de la sucesión emplearemos el comando **Product** cuya sintaxis es la misma que la del comando **Sum**:

In[75]:=
```
c[n_] := (4^n n!) / Product[k + 1, {k, n, 2 n}]
                    producto
```

In[76]:=
```
Limit[c[n + 1] / c[n], n → Infinity]
límite                 infinito
```

Out[76]=
```
2
```

Dado que el límite es 1, el criterio no decide. Utilizamos el criterio de Raabe:

In[77]:=
```
Limit[ n (1 - c[n + 1] / c[n]), n → Infinity]
límite                          infinito
```

Out[77]=
```
-∞
```

De donde deducimos que la serie es divergente.

d) En este último caso utilizamos el criterio de la raíz:

In[78]:=
```
d[n_] := 1/(Log[n])^n
            logaritmo
```

In[79]:=
```
Limit[d[n]^(1/n), n → Infinity]
límite               infinito
```

Out[79]=
```
0
```

Por tanto, la serie es convergente.

Podemos tratar de calcular la suma (o una aproximación) con los comandos **Sum** y **NSum**. Veámoslo:

In[80]:=
```
Sum[b[n], {n, 1, Infinity}]
suma          infinito
```

Out[80]=

$$\frac{1}{2}\left(-3 + 2\, e\right)$$

In[81]:=
```
Sum[d[n], {n, 2, Infinity}]
```
Out[81]= $\sum_{n=2}^{\infty} \text{Log}[n]^{-n}$

In[82]:=
```
NSum[d[n], {n, 2, Infinity}]
```
Out[82]= 3.24261

Observad que en el primer caso no es necesario usar **NSum**, pues **Sum** ha calculado la suma formalmente y disponemos del valor exacto. En el segundo caso, la serie resulta ser no sumable (o al menos *Mathematica* no la ha sumado), y necesitamos recurrir a **NSum**. Dado que anteriormente hemos determinado que la serie d) era convergente, podemos tomar la aproximación de la suma con toda garantía.

3.4 Ejercicios

1. Comprueba la siguiente identidad: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

2. Determina el carácter de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2^n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \times 5 \times 7 \ldots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \ldots \times 2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

3. Estudia la convergencia y suma, cuando sea posible, las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 5n + 6}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

4. En 1735, Euler escribió con gran alegría: Contra todo pronóstico, he encontrado una expresión elegante para la suma de la serie:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Efectivamente, el resultado era fascinante: una suma de números racionales, en cuyo cálculo habían fracasado los mejores matemáticos del siglo XVII, dependía de la cuadratura del círculo. En concreto, el resultado era $\frac{\pi^2}{6}$.

- Utiliza *Mathematica* para calcular la suma de los 1000 primeros términos
- Utiliza el resultado anterior para calcular una aproximación de π utilizando el resultado de Euler.

5. Determina el carácter de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \frac{2n}{n+1}\right]^{-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left[\sqrt{3}+(-1)^n\right]^n}{5^n}$

6. Suma la siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+5n+6}$

d) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$