Inducción en los números racionales: hacia una potencial construcción de los números reales

Trabajo de Fin de Máster

Presentado por:
Cecilia Neve Jiménez

Dirigido por:
Dr. Juan Luis Barba Escribá

Máster en Lógica y
Fiolosofía de la Ciencia

Universidad de Salamanca

Julio de 2020

Resumen

En este trabajo se desarrolla una teoría axiomática para describir la estructura de los números racionales manifiesta en los árboles de Stern-Brocot y Calkin-Wilf, sentando las bases para una posible construcción alternativa de los números reales. Se construye una teoría de primer orden y una de segundo orden, de las cuales dichos árboles son el modelo estándar. Se añade un esquema de axioma de inducción en primer orden y un axioma de inducción en segundo orden, mismos que permiten hacer inducción en el conjunto de los números racionales positivos. Los axiomas de las teorías son una generalización de los axiomas de Peano con dos funciones sucesor en lugar de una. Se esboza un camino para dar una construcción formal de los números reales a través de conjuntos de números racionales fácilmente identificables en el árbol de Stern-Brocot, señalando sus ventajas sobre las cortaduras de Dedekind.

Palabras clave: fundamentos, aritmética, Stern-Brocot, Calkin-Wilf, Peano, inducción, Euclides, Dedekind, cortaduras, aproximaciones racionales, equivalencia racional, fracciones continuas

Abstract

This research develops an axiomatic theory suitable to describe the structure of the rational numbers manifest in the Stern-Brocot and Calkin-Wilf trees, setting the path for a possible alternative construction of the real numbers. A first-order theory and a second-order theory are constructed, of which said trees are the standard model. A first-order induction axiom scheme and a second-order induction axiom are added, providing a way to make induction on the set of positive rational numbers. The axioms of the theories are a generalization of the Peano axioms, taking two successor functions instead of one. A path is outlined to give a formal construction of the real numbers through easily identifiable sets of rational numbers in the Stern-Brocot tree, pointing out its advantages over Dedekind cuts.

Keywords: fundaments, arithmetic, Stern-Brocot, Calkin-Wilf, Peano, induction, Euclides, Dedekind, cuts, rational approximations, rational equivalence, continued fractions

Índice

0. Introducción

Uno de los motores de la lógica moderna fue la fundamentación del análisis. Aunque los números irracionales y los conceptos de límite, convergencia y continuidad eran manejados con soltura a mediados del siglo XIX, no habían sido formalmente fundamentados, lo que era motivo de inquietud para Dedekind y muchos de sus contemporáneos [16]. Con el desarrollo de la lógica, la teoría de conjuntos y los fundamentos de la aritmética, paulatinamente se consolidó la construcción que ahora es tradicional de los números reales: una teoría axiomática para los números naturales construida a partir de los axiomas de Peano (ya planteados por Dedekind), la extensión a los enteros y racionales por medio de clases de equivalencia, motivados por las operaciones inversas de suma y producto; la construcción de irracionales a través de cortaduras de Dedekind a las que se extiende la estructura de *campo ordenado* conseguida para los racionales y por último la adición de un axioma de completud.

Las construcciones de los racionales positivos dadas por los árboles de Stern-Brocot y Calkin-Wilf sugieren que hay otra manera de hacer la construcción de los sistemas numéricos. Estos árboles pueden ser usados para estudiar el algoritmo de Euclides, las aproximaciones racionales y la equivalencia racional, por lo que esperamos que un lenguaje formal para ellos resulte adecuado para expresar nociones afines. Nuestro propósito es dar una construcción alternativa de los números racionales positivos a través de un lenguaje y una teoría axiomática que describan dichos árboles, preparando un terreno para una construcción alternativa de los números reales. Ganaremos, además, una forma de hacer inducción en los racionales positivos.

En la primera sección del trabajo nos familiarizamos con las estructuras que queremos describir por medio de una teoría axiomática –los árboles de Stern-Brocot y de Calkin-Wilf– y planteamos los resultados necesarios para que cobren sentido las motivaciones, propósitos y alcances de este trabajo: su relación con las fracciones continuas, el algoritmo de Euclides y la conmensurabilidad. Explicamos su relevancia para la clasificación de números reales según su grado de aproximabilidad por números racionales, medida de irracionalidad y equivalencia racional. Daremos un resumen lo más sucinto posible de los temas; los resultados principales pueden consultarse en [26, 11, 31].[1]

En la segunda sección desarrollamos un lenguaje y una teoría axiomática de primer orden adecuados para los árboles de Stern-Brocot y Calkin-Wilf. Construimos una teoría básica que describe un árbol binario infinito a través de una generalización de los axiomas de Peano que usa dos funciones sucesor en lugar de una. Después extendemos el lenguaje y la teoría con operaciones propias de la estructura arbórea, incorporamos una relación de orden y finalmente añadimos las operaciones aritméticas usuales para $\mathbb{Q}^+$. Una vez construida la teoría, vemos que la estructura que buscamos describir es en efecto el modelo estándar de dicha teoría.

En la tercera sección añadimos a la teoría un esquema de axioma de inducción binaria (con dos sucesores) en primer orden, y llevamos la teoría a un lenguaje de segundo orden para introducir un axioma de inducción binaria: obtenemos la *aritmética de Euclides* (en sus respectivos órdenes), que es nuestra mejor aproximación axiomática a la teoría que describe al modelo

[1] Para lo relativo a fracciones continuas véase [26, 9, 22]; [3, 25, 18] para una aproximación geométrica. Para los temas relativos a aproximaciones racionales y el grado de irracionalidad, véase [11, 28]. Para un estudio de las propiedades de $\mathcal{SB}$ véase [20]. Para las construcciones de los árboles y la relación entre ellos y las fracciones continuas, la equivalencia racional y las aproximaciones racionales, véase [31]. La bibliografía recomendada sobre ecuaciones diferenciales y el teorema cuya demostración se hace por inducción en $\mathbb{Q}^+$ en la sección 3.5 es [2, 1, 24].

estándar $\overline{\mathcal{SB}}$. Exploramos sus propiedades metateóricas, estudiamos sistemas de Euclides en analogía los sistemas de Peano y planteamos un teorema de recursión. A modo de ejemplo, hacemos la prueba por inducción en $\mathbb{Q}^+$ de un teorema sobre explosión de singularidades de ecuaciones diferenciales.

En la cuarta sección delineamos (a modo de reflexión) cómo podría continuarse hacia una construcción alternativa de los números reales a través de *sucesiones de Stern-Brocot*, así como las ventajas de esta aproximación. Planteamos algunas reflexiones sobre las implicaciones matemáticas y filosóficas de la aritmética de Euclides e indicamos otras direcciones en que puede continuarse este trabajo.

Tomaremos como cálculo deductivo la deducción natural, utilizando las reglas de introducción y eliminación dadas en [5]. Adoptaremos la convención usual de supresión de paréntesis según la fuerza de los operadores proposicionales: negación, conjunción/disyunción e implicación (de mayor a menor). Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, un modelo M para $\mathcal{L}$ y un conjunto Δ de fórmulas de $\mathcal{L}$, utilizaremos la notación convencional:

$$\begin{aligned}
FORM(\mathcal{L}) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ es fórmula de } \mathcal{L}\} \\
SENT(\mathcal{L}) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ es sentencia de } \mathcal{L}\} \\
TERM(\mathcal{L}) &:= \{t \mid t \text{ es término de } \mathcal{L}\} \\
CON(\Delta) &:= \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}) \mid \Delta \models \varphi\} \\
TEO(\Delta) &:= \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}) \mid \Delta \vdash \varphi\} \\
TEO(\mathcal{M}) &:= \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}) \mid \mathcal{M} \models \varphi\}
\end{aligned}$$

1. Preliminares

1.1. Los árboles de Stern-Brocot y Calkin-Wilf

Hay dos formas de estructurar a $\mathbb{Q}^+$ particularmente relevantes para las matemáticas y la física: el árbol de Stern-Brocot y el árbol de Calkin-Wilf,[2] que denotamos por $\mathcal{SB}$ y $\mathcal{CW}$. En cada árbol aparecen todos los números racionales positivos una única vez, expresados como fracción irreducible [20, 13]. Como veremos, pueden obtenerse uno del otro a través de una *conjugación*, por lo que decimos que uno es *conjugado* del otro y escribimos $\mathcal{CW}=\overline{\mathcal{SB}}$.[3]

El árbol de Calkin-Wilf se contruye a través de las funciones i y d definidas como

$$i\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{a+b} \qquad \text{y} \qquad d\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a+b}{b}. \tag{1}$$

Notamos que i y d pueden expresarse como: $i(x) = x/(x+1)$; $d(x) = x+1$. Ahora, si tomamos $1/1$ como raíz y construimos el descendiente izquierdo de cada vértice aplicando i y el derecho aplicando d, obtenemos el árbol de Calkin-Wilf ($\mathcal{CW}$), del cual mostramos los primeros niveles en la figura 1. Notamos que cada nuevo número se obtiene manteniendo numerador o denominador y poniendo en el otro la suma de numerador y denominador.

[2] El árbol de Stern-Brocot fue descubierto en el siglo XIX paralelamente por el matemático alemán Moritz Stern [33] y el relojero francés Achille Brocot [10]. El árbol de Calkin-Wilf fue presentado en el 2000 por Calkin y Wilf [13].

[3] El árbol $\overline{\mathcal{SB}}$ aparece en [31] como *árbol dual de Stern-Brocot* ($\mathcal{SBD}$).

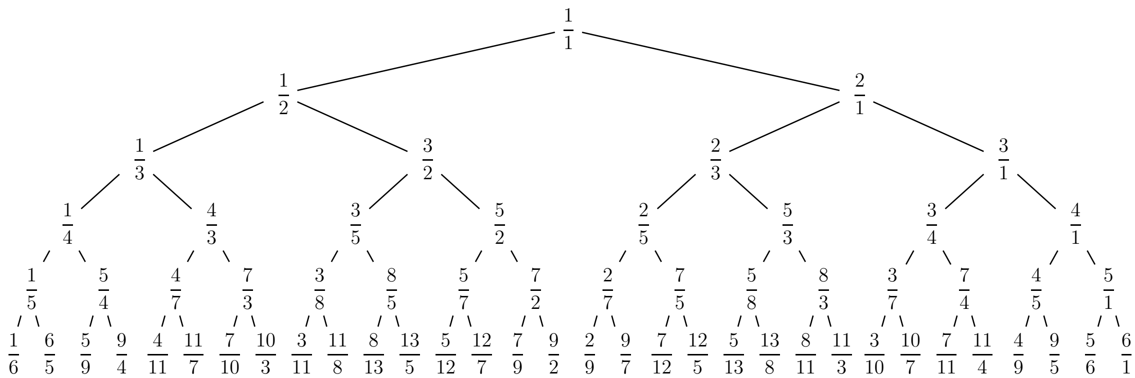

Figura 1: Primeros niveles del árbol $\mathcal{CW}$ o $\overline{\mathcal{SB}}$.

Frecuentemente resultará útil en este trabajo interpretar los números racionales como pendientes de vectores. En este contexto, i y d actúan como se muestra en la figura 2.

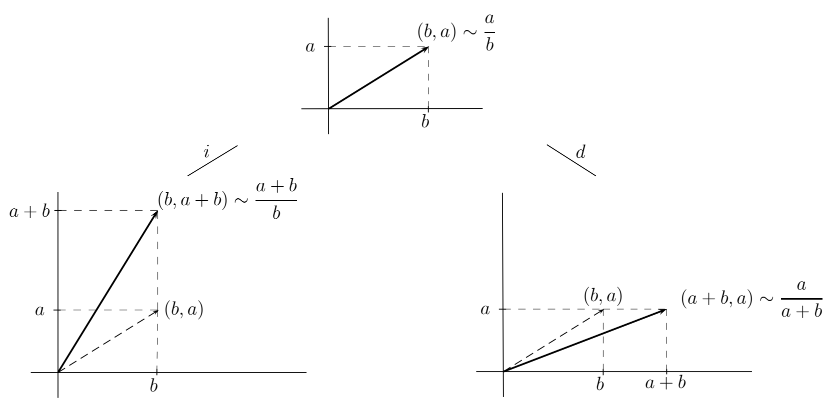

Figura 2: Interpretación geométrica de las funciones i y d.

Así, en $\mathcal{CW}$ tenemos entonces la construcción de todos los rectángulos de lados enteros primos relativos que se obtienen yuxtaponiendo cuadrados, partiendo de un cuadrado de 1×1 (fig. 3).

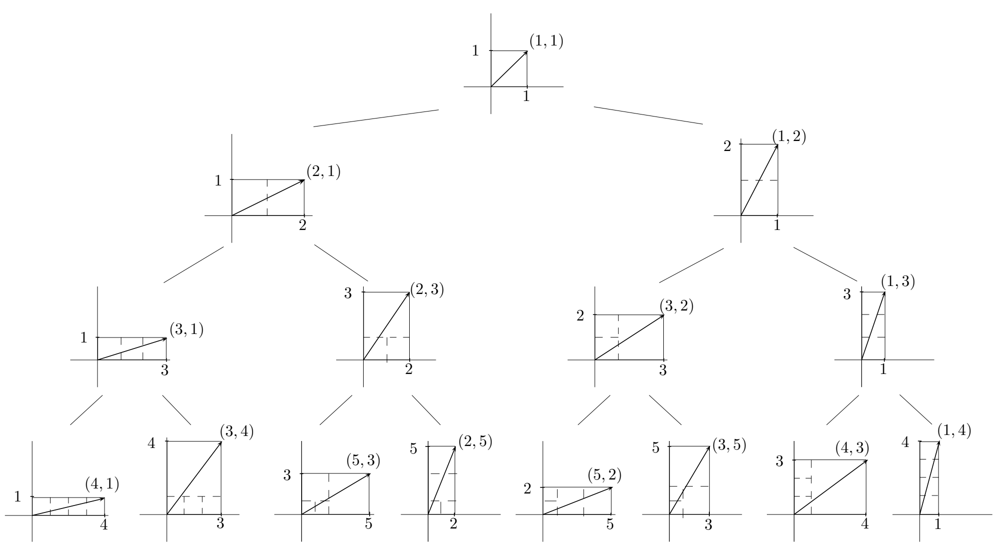

Figura 3: Construcción de rectángulos con lados enteros primos relativos en $\mathcal{CW}$.

Por otro lado, la construcción de $\mathcal{SB}$ se hace a partir de la operación *mediante* ($\bigoplus$), aplicada a números racionales:

$$\frac{a}{b}\bigoplus\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}. \tag{2}$$

Partimos de dos fracciones generadoras, digamos a/c y b/d, a partir de las cuales construimos el resto tomando mediantes como se indica en la figura 4. Continuamos el proceso indefinidamente, generando un árbol infinito.

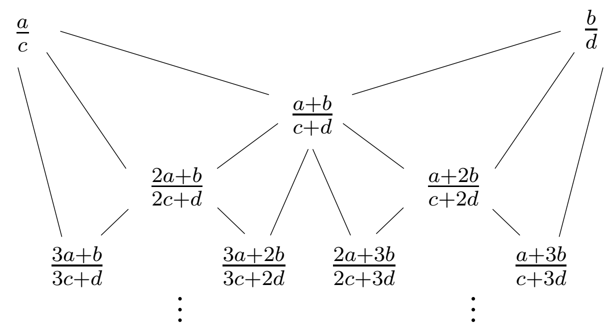

Figura 4

Si nos permitimos escribir 1/0 (pensándolo como infinito) y comenzamos con las fracciones generadoras 0/1 y 1/0 obtenemos un árbol infinito cuyo principio se muestra en la figura 5.

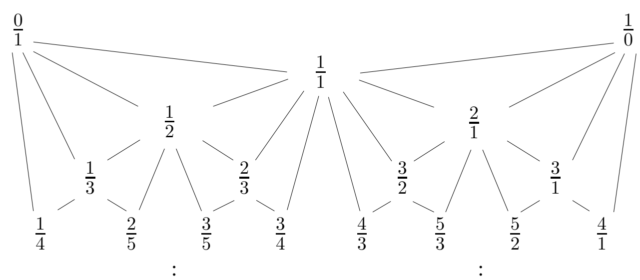

Figura 5: Construcción de $\mathcal{SB}$ a partir de 0/1 y 1/0.

Quitando las fracciones iniciales y algunas aristas obtenemos el árbol de Stern-Brocot ($\mathcal{SB}=\overline{\mathcal{CW}}$). Mostramos los primeros niveles del árbol en la figura 6.

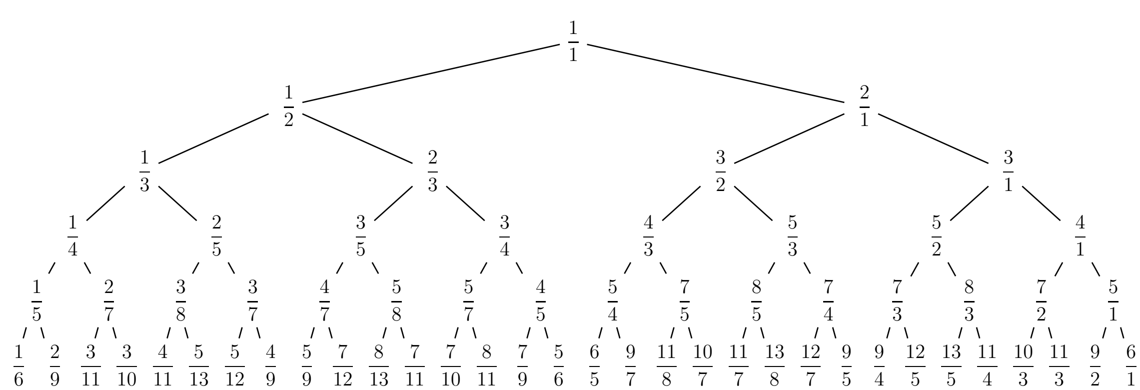

Figura 6: Primeros niveles del árbol $\mathcal{SB}$.

También será útil interpretar en este árbol a los racionales como vectores. Geométricamente, la mediante de a/b y c/d corresponde a la pendiente de la suma $(b,a)+(d,c)=(b+d,a+c)$ (fig.7). Esto permite ver en $\mathcal{SB}$ la construcción de todas las pendientes racionales a través de sumas sucesivas de vectores, partiendo del $(1,0)$ y $(0,1)$ (fig. 8).

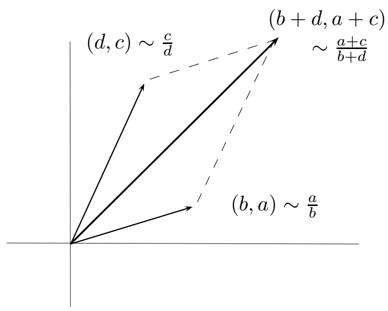

Figura 7

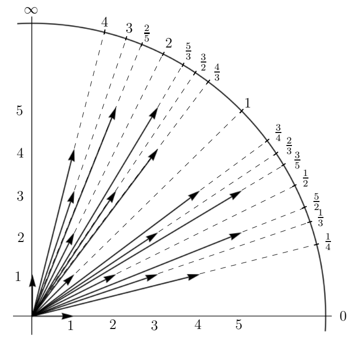

Figura 8

Además de que en ellos aparecen una única vez todas las fracciones irreducibles, los árboles $\mathcal{SB}$ y $\mathcal{CW}$ tienen muchas propiedades interesantes (véanse [20] y [31]); mencionaremos sólo algunas, relevantes para este trabajo. Lo primero que notamos es que en ambos árboles los números naturales quedan dispuestos ordenadamente en el extremo derecho, mientras que en el izquierdo, sus recíprocos. Lo mostramos en la figura 9 para $\mathcal{CW}$.

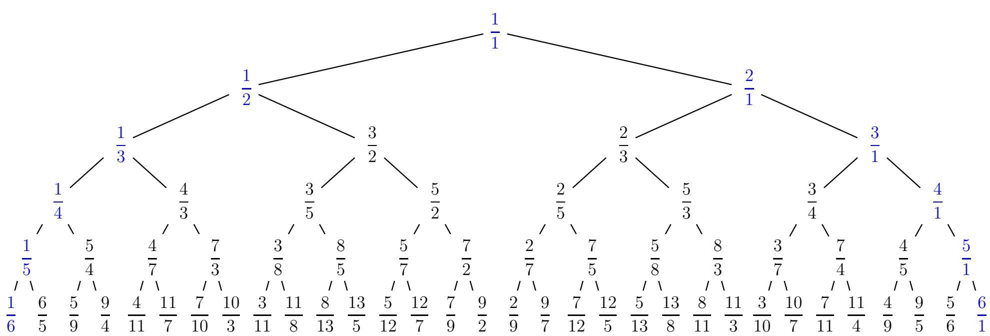

Figura 9: Números naturales y sus recíprocos en $\mathcal{CW}$.

El que un número r/s y su recíproco s/r ocupen lugares simétricos respecto a la vertical por el 1 no se limita a los extremos de los árboles. Esto ocurre para cada vértice de $\mathcal{CW}$ y $\mathcal{SB}$. Lo ilustramos para $\mathcal{SB}$ en la figura 10.

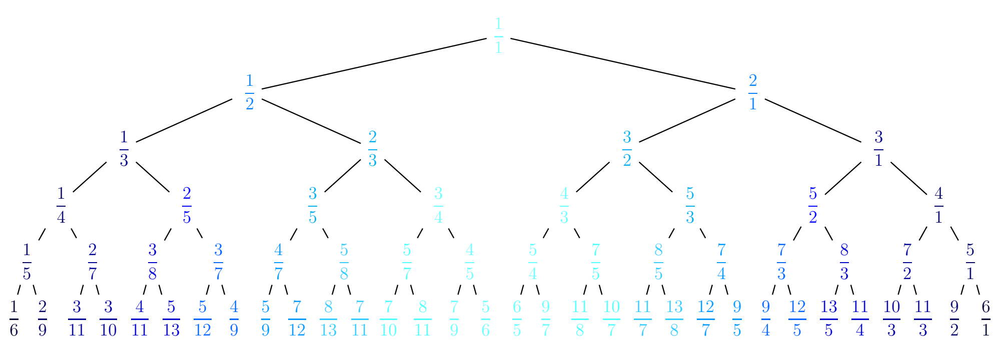

Figura 10: Simetría vertical del árbol $\mathcal{SB}$.

Otro aspecto notorio de $\mathcal{SB}$ y $\mathcal{CW}$ es que en cada uno de sus niveles aparecen los mismos números, aunque permutados. Esto es consecuencia de un hecho menos evidente. Decimos que r/s está en el lugar dado por la secuencia $(a_0, a_1, ..., a_n)$ si se llega a él partiendo de la raíz $1/1$ y tomando a_0 veces el descendiente derecho, a_1 veces el izquierdo, a_2 veces el derecho y así sucesivamente hasta tomar a_n veces el descendiente correspondiente (según la paridad de n). Sucede que r/s tiene en $\mathcal{SB}$ el lugar dado por $(a_0, a_1, ..., a_n)$ si y sólo si tiene en $\mathcal{CW}$ el lugar dado por $(a_n, ..., a_1, a_0)$ si n es par y $(0, a_n, ..., a_1, a_0)$ si n es impar. Por ejemplo, $9/4$ tiene lugar dado por $(2, 3)$ en $\mathcal{SB}$ y el dado por $(3, 2)$ en $\mathcal{CW}$; $11/7$ tiene lugar dado por $(1, 1, 1, 2)$ en $\mathcal{SB}$ y $(0, 2, 1, 1, 1)$ en $\mathcal{CW}$. De aquí podemos saber qué números están en el mismo lugar en ambos árboles (como el $7/5$, que tiene en ambos árboles el lugar dado por $(1, 2, 1)$).

Nos preguntamos qué operación es la que transforma un árbol en el otro. Ya que aparecen en ambos árboles todos los racionales positivos una única vez, podemos dar una biyección entre ellos: mandamos a cada número de $\mathcal{SB}$ a aquél que ocupa ese mismo lugar en $\mathcal{CW}$ y llamamos a esta función *conjugación*. Por ello escribimos $\mathcal{CW}=\overline{\mathcal{SB}}$. Antes de buscar una expresión matemática para la conjugación, queremos hacer notar una última propiedad de los árboles, relativa al orden usual en $\mathbb{Q}^+$. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$, con $a/c < b/d$, se tiene:

$$\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}. \tag{3}$$

Se sigue que en $\mathcal{SB}$ cada racional es estrictamente mayor que su descendiente izquierdo y estrictamente menor que el derecho, lo que significa que las fracciones de $\mathcal{SB}$ aparecen ordenadas de izquierda a derecha (ver figura 11).

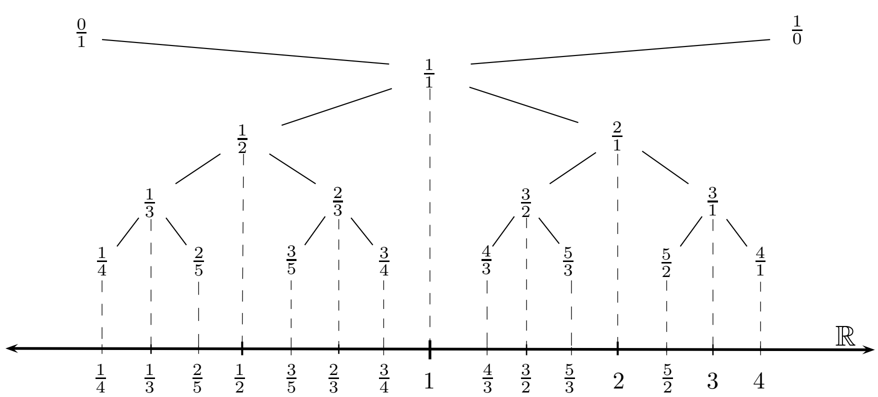

Figura 11: Los vértices de $\mathcal{SB}$ proyectados sobre la recta están ordenados.

Por otro lado, $a < a + b$ y $b < a + b$, así que

$$\frac{a}{a+b} < 1 \qquad \text{y} \qquad 1 < \frac{a+b}{b}, \tag{4}$$

de donde todos los racionales que son descendiente izquierdo de otro en $\overline{\mathcal{SB}}$ son estrictamente menores que 1 y los que son descendiente derecho son estrictamente mayores que 1. Ambas propiedades resultan obvias al mirar las interpretaciones geométricas en las figuras 2, 3, 7 y 8.

Para esclarecer el porqué de estas propiedades y encontrar la expresión adecuada para la conjugación resulta conveniente recurrir a las fracciones continuas, que nos permiten expresar a los números racionales de un modo que facilita localizarlos en $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$.

1.2. Fracciones continuas

Dado un número real positivo α, siempre podemos expresarlo como la suma de su parte entera $\lfloor \alpha \rfloor$ y un número α_1 menor que 1 ($\alpha_1 = 0$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$). Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, éste puede ser escrito como

$$\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}},$$

donde $1/\alpha_1 > 1$. Repitiendo el razonamiento, podemos escribir $1/\alpha_1 = \lfloor 1/\alpha_1 \rfloor + \alpha_2$; donde $\alpha_2 \neq 0$ si $\lfloor 1/\alpha_1 \rfloor \notin \mathbb{Z}$, en cuyo caso escribimos:

$$\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \cfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\alpha_1} \right\rfloor + \cfrac{1}{\frac{1}{\alpha_2}}}.$$

Mientras no obtengamos $1/\alpha_i \in \mathbb{Z}$ (cuya parte entera es él mismo), podemos repetir el proceso. Si en algún momento $1/\alpha_i \in \mathbb{Z}$, se obtiene la expresión finita (5):

$$\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \cfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\alpha_1} \right\rfloor + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\frac{1}{\alpha_n}}}} \tag{5}$$

De lo contrario, obtenemos la expresión infinita (6):

$$\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \cfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\alpha_1} \right\rfloor + \cfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\alpha_2} \right\rfloor + \cfrac{1}{\ddots}}} \tag{6}$$

Estas expresiones son lo que conocemos como *fracciones continuas.*

Definición 1.1. *Llamamos fracción continua simple a una expresión (finita o infinita) de la forma*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots}}, \tag{7}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$. *Denotamos la expresión (7) por* $[a_0, a_1, a_2, \dots]$*, llamamos 'cocientes parciales' a los elementos* a_i *y en el caso finito decimos que* $[a_0, a_1, a_2, ..., a_n]$ *es de orden* n.

Por comodidad nos referiremos a expresiones como (7) simplemente por *fracciones continuas.* Si pedimos que los cocientes parciales sean enteros positivos (y un par de detalles más),[4] entonces

[4] El primer cociente parcial, a_0, puede ser 0; en el caso finito, pedimos que el último cociente parcial sea distinto de 1, salvo el caso del número 1, cuya fracción continua es [1].

cada número real positivo se expresa de manera única como una fracción continua, correspondiendo las finitas a números racionales y las infinitas a irracionales [26]. Como dijimos, son estas expresiones las que nos permiten localizar a los racionales en los árboles y explicar la conjugación que hay entre éstos. Con la misma convención usada anteriormente para designar lugares en un árbol a partir de sucesiones de enteros positivos $(a_0, a_1, ..., a_n)$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *[33, 13, 20, 31]*†
Sea $r/s = [a_0, a_1, ..., a_n] \in \mathbb{Q}^+$. Entonces r/s está en $\mathcal{SB}$ en el lugar dado por $(a_0, ..., a_n - 1)$; en $\overline{\mathcal{SB}}$ está en el dado por $(a_n - 1, ..., a_0)$ si n es par y por $(0, a_n - 1, ..., a_0)$ si n es impar.

Nos interesa particularmente estudiar la secuencia de números racionales que forman un camino en $\mathcal{SB}$ o $\overline{\mathcal{SB}}$. Para ello es conveniente definir los dos números que se obtienen al separar una fracción continua $[a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ en dos fracciones continuas: la formada por los primeros n cocientes parciales: $[a_0, a_1, ..., a_n]$, y la formada por el resto, $[a_{n+1}, ...]$.

Definición 1.2. *Dada $[a_0, a_1, ...]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (n menor o igual que el orden de $[a_0, a_1, ...]$ si ésta es finita) definimos su n-ésimo convergente, c_n, y su n-ésimo residuo, s_n, como*

$$c_n = [a_0, ..., a_n] \qquad y \qquad s_n = [a_n, a_{n+1}, ...].$$

Así, podemos considerar la secuencia de convergentes $\{c_i\} = \{c_0, c_1, c_2, ...\}$, que se aproximan a $[a_0, a_1, ...]$, y la de residuos $\{s_i\} = \{s_0, s_1, ...\}$. Como consecuencia del teorema 1.1, los convergentes de $[a_0, a_1, ..., a_m]$ (excepto c_0 si $a_0 = 0$) están en el camino correspondiente a $(a_0, a_1, ...)$ en $\mathcal{SB}$, mientras que sus residuos (o sus recíprocos) están en el camino en $\overline{\mathcal{SB}}$ correspondiente a $(a_n - 1, ...a_0)$ o $(0, a_n - 1, ...a_0)$, según la paridad de n [31].

Ejemplo 1.1. *Tomemos $8/11 = [0, 1, 2, 1, 2]$ y $12/7 = [1, 1, 2, 2]$. Según el teorema 1.1, sus respectivos caminos en $\mathcal{SB}$ están dados por $(0, 1, 2, 1, 1)$ y $(1, 1, 2, 1)$ y en ellos encontramos a sus respectivos convergentes:*

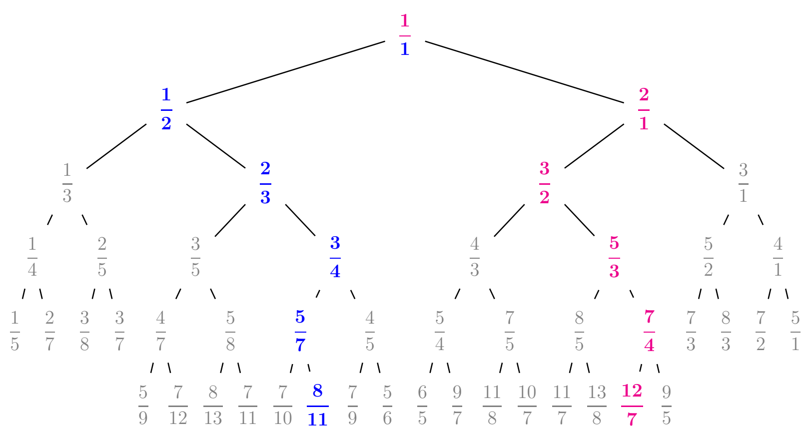

Figura 12: Convergentes en $\mathcal{SB}$.

†La relación entre el lugar que ocupan los números en el árbol de Stern-Brocot y sus fracciones continuas fue establecida desde el artículo original de Stern [33] de 1858. Desconozco en dónde fue expuesta explícitamente por vez primera dicha relación en el caso del árbol de Calkin-Wilf, aunque el vínculo de éste con el árbol de Stern-Brocot fue señalado desde el artículo original de Calkin y Wilf [13] (2000). Una relación explícita entre los vértices de ambos árboles aparece en [7] (2010) y otra en [31] (2015); de esta última tomamos el resultado expuesto aquí.

Convergentes de $\dfrac{8}{11}$

$c_0 = [0] = \dfrac{0}{1}$

$c_1 = [0,1] = \dfrac{1}{1}$

$c_2 = [0,1,2] = \dfrac{2}{3}$

$c_3 = [0,1,2,1] = \dfrac{3}{4}$

$c_4 = [0,1,2,1,2] = \dfrac{8}{11}$

Convergentes de $\dfrac{12}{7}$

$c_0 = [1] = \dfrac{1}{1}$

$c_1 = [1,1] = \dfrac{2}{1}$

$c_2 = [1,1,2] = \dfrac{5}{3}$

$c_3 = [1,1,2,2] = \dfrac{12}{7}$

Por otro lado, según el teorema 1.1, los respectivos caminos en $\overline{\mathcal{SB}}$ *de* $8/11$ *y* $12/7$ *son* $(1,1,2,1)$ *y* $(0,1,2,1,1)$*, y en ellos encontramos a los respectivos residuos* s_i *(o sus recíprocos, según la paridad de* i*).*

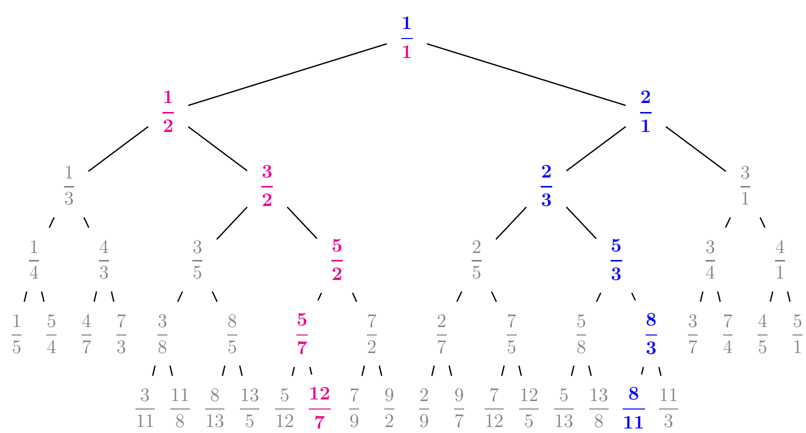

Figura 13: Residuos en $\overline{\mathcal{SB}}$.

Residuos de $\dfrac{8}{11}$

$s_0 = [0,1,2,1,2] = \dfrac{8}{11}$

$s_1 = [1,2,1,2] = \dfrac{11}{8}$

$s_2 = [2,1,2] = \dfrac{8}{3}$

$s_3 = [1,2] = \dfrac{3}{2}$

$s_4 = [2] = \dfrac{2}{1}$

Residuos de $\dfrac{12}{7}$

$s_0 = [1,1,2,2] = \dfrac{12}{7}$

$s_1 = [1,2,2] = \dfrac{7}{5}$

$s_2 = [2,2] = \dfrac{5}{2}$

$s_3 = [2] = \dfrac{2}{1}$

Así, la expresión matemática para la conjugación se obtiene con un operador que revierta el orden de los cocientes parciales de las fracciones continuas (cuidando la paridad de éstos).

La aparición de secuencias de convergentes en caminos de $\mathcal{SB}$ aplica también para fracciones continuas infinitas y la secuencia de convergentes $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\alpha = [a_0, a_1, ...]$ converge al número irracional α [26], lo que justifica que a los números c_n se les llame *convergentes*. Este punto es crucial para este trabajo, puesto que los caminos infinitos de $\mathcal{SB}$ nos brindan una manera de construir a los números reales a partir de sucesiones de números racionales, mismas que, veremos, contienen información del número al que convergen. Si queremos asociar cada número irracional con un conjunto de números racionales, parece razonable utilizar conjuntos que contengan información de dicho número irracional. Utilizar a $\mathcal{SB}$ en una construcción de los números reales es una de las motivaciones para desarrollar una teoría formal adecuada para hablar de caminos en $\mathcal{SB}$, lo que es uno de los propósitos de este trabajo.

1.3. Aproximaciones racionales y medida de irracionalidad

La relación entre los convergentes de fracciones continuas y el árbol de Stern-Brocot se esclarece al analizar la interpretación geométrica de la construcción de $\mathcal{SB}$. Es posible encontrar los convergentes de $[a_0, a_1, a_2, ...]$ definiendo recursivamente los vectores (q_n, p_n) como:

$$\begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{n-2} \\ p_{n-2} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

cuyas pendientes cumplen:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}. \tag{9}$$

Si se toman como vectores iniciales $(q_{-2}, p_{-2}) = (1, 0)$ y $(q_{-1}, p_{-1}) = (0, 1)$, entonces se prueba que el convergente c_n de $[a_0, a_1, a_2, ...]$ coincide con la pendiente p_n/q_n de (q_n, p_n) para $n \geq 0$ [26]. Una cuidadosa revisión conjunta de la construcción de $\mathcal{SB}$ como sumas de vectores y la definición recursiva de (8) y (9) aclara que encontremos secuencias de convergentes en este árbol. También esclarece una de las propiedades características de los convergentes de una fracción continua: ser las *mejores aproximaciones racionales* del número real que representan [11].

Intuitivamente, las aproximaciones racionales nos ofrecen una forma de refinar el concepto de *densidad* de los números racionales en los números reales. Ésta dice que podemos aproximar a cualquier número real α por un número racional con un error tan pequeño como queramos, sin discriminar entre el tipo de racionales con que se aproxima. Pero si buscamos aproximar por racionales relativamente "simples", es decir, con denominadores relativamente "pequeños", no todos los números reales resultan igualmente bien aproximables. Las aproximaciones racionales permiten discriminar entre irrracionales según cuán bien aproximables son. Resulta que las mejores aproximaciones son los convergentes de su fracción continua, así que el conjunto de racionales dado por los convergentes y los caminos en $\mathcal{SB}$ tiene información sobre el número irracional al que convergen en cuanto a cómo queda distribuido en la recta real entre racionales relativamente simples. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.3. *Dados $p, q \in \mathbb{Z}$, decimos que p/q es una mejor aproximación de $\alpha \in \mathbb{R}$ si para toda pareja de enteros (q', p') tales que $0 < |q'| < |q|$ se tiene $|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$.*

Una vez más, la interpretación geométrica resulta esclarecedora (véase [25]). Dado $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ...] \in \mathbb{R}^+$, los vectores (q_n, p_n) se aproximan cada vez más a la recta por el origen con pendiente α, mientras que sus pendientes $c_n = p_n/q_n$ –los convergentes de $[a_0, a_1, a_2, ...]$–, se aproximan a α. Éstos quedan ordenados como:

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

y son las mejores aproximaciones de α, tanto si es racional como si es irracional.[5]

Existen diversas clasificaciones de números reales según cuán buenas aproximaciones racionales admiten. Se definen, por ejemplo, números reales *mal aproximables*, que a su vez se clasifican a través de los espectros de Markov y de Lagrange [11, 15]; se definen números extremadamente bien aproximables por racionales –los números de Liouville– e incluso se define una *medida de irracionalidad*. Ya que las mejores aproximaciones racionales están dadas por convergentes de fracciones continuas, estas propiedades suelen estudiarse a través de condiciones sobre los cocientes parciales de éstas [11], lo que se traduce en propiedades de caminos en $\mathcal{SB}$ [31]. Más aún, algunos resultados establecen una relación entre la periodicidad de su fracción continua y su grado de algebraicidad (teorema de Lagrange), o entre el grado de aproximaciones racionales que admite un número y su trascendencia (teoremas Liouville y Roth)[11].

1.4. Conmensurabilidad y equivalencia racional: el algoritmo de Euclides y el árbol de Calkin-Wilf generalizado

La relación entre secuencias de residuos y los caminos en $\overline{\mathcal{SB}}$ también se aclaran con la interpretación geométrica de las funciones i y d. Recordemos que al aplicar el algoritmo de Euclides para encontrar $mcd(a, b)$ obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= a_0 b + r_0, \text{ con } a_0 b \le a,\ r_0 < b \\ b &= a_1 r_0 + r_1, \text{ con } a_1 r_0 \le b,\ r_1 < r_0 \\ r_0 &= a_2 r_1 + r_2, \text{ con } a_2 r_1 \le r_0,\ r_2 < r_1 \\ &\ \vdots \qquad \vdots \\ r_{n-2} &= a_n r_{n-1} + r_n;\ a_n r_{n-1} = r_{n-2},\ r_n = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

donde $a_i, r_i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le n$ se obtienen restando repetidamente r_{i+1} de r_i cuantas veces sea posible, dejando el residuo r_{i+2}.

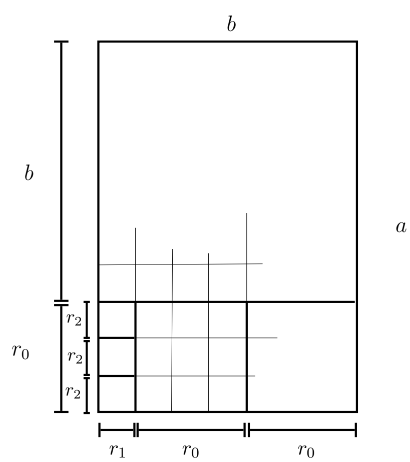

Figura 14

El procedimiento expresado en (10) es equivalente al procedimiento geométrico del algoritmo de Euclides para encontrar $mcd(a, b)$: cuadricular al rectángulo de $(b \times a)$ con cuadrados uniformes del mayor tamaño posible (fig. 14). Una revisión conjunta de este procedimiento con la

[5] Claramente, si $\alpha \in \mathbb{Q}$, la mejor aproximación racional de α intuitivamente es él mismo, pero si buscamos dar aproximaciones de α por números racionales distintos de α, la noción intuitiva coincide con la definición de mejores aproximaciones.

construcción de $\overline{\mathcal{SB}}$ revela que ésta –que describe la formación de rectángulos por yuxtaposición de cuadrados–, sigue un proceso inverso al algoritmo de Euclides, explicando su relación con los residuos de fracciones continuas. También muestra que los enteros a_i obtenidos en las ecuaciones (10) coinciden con los cocientes parciales de la fracción continua de a/b, pues de ellas se sigue:

$$\begin{aligned} a/b &= a_0 + r_0/b \\ b/r_0 &= a_1 + r_1/r_0 \\ &\vdots \\ r_{n-2}/r_{n-1} &= a_n + r_n/r_{n-1}, \end{aligned}$$

y consecuentemente (dado que $r_n = 0$):

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Notamos que el resultado del procedimiento no depende específicamente de las dimensiones del rectángulo, sino de la relación que guardan sus lados. El que a y b "sean" números irracionales significa que ambos son medidos respecto a una unidad independiente con la que no son conmensurables. Lo que el algoritmo de Euclides (y $\overline{\mathcal{SB}}$) retrata es la conmensurabilidad entre a y b: si pueden ser ambos medidos por una unidad común. Al ir obteniendo los cocientes r_{i-1}/r_i –que son los residuos s_j de la fracción continua de a/b–, lo que obtenemos son números conmensurables con a/b; el procedimiento termina si a/b es conmensurable con un entero (a_n) y por ende con el 1. Así, los residuos de $a/b = [a_0, a_1, ...]$ son números conmensurables con a/b, relación que podremos estudiar a través de la *equivalencia racional* entre números reales.

Definición 1.4. *Decimos que α y $\beta \in \mathbb{R}$ son racionalmente equivalentes si existen $a, b, c, e \in \mathbb{Z}$ tales que*

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + e} \qquad y \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{11}$$

Las transformaciones del tipo de (11) son conocidas como *transformaciones modulares*. Éstas surgen naturalmente al generalizar la construcción de $\overline{\mathcal{SB}}$; las funciones i y d con las que lo construimos pueden aplicarse a cualquier número real: dado $\beta \in \mathbb{R}^+$, repetimos la construcción de $\overline{\mathcal{SB}}$ partiendo de la raíz $\beta/1$ (fig. 15).

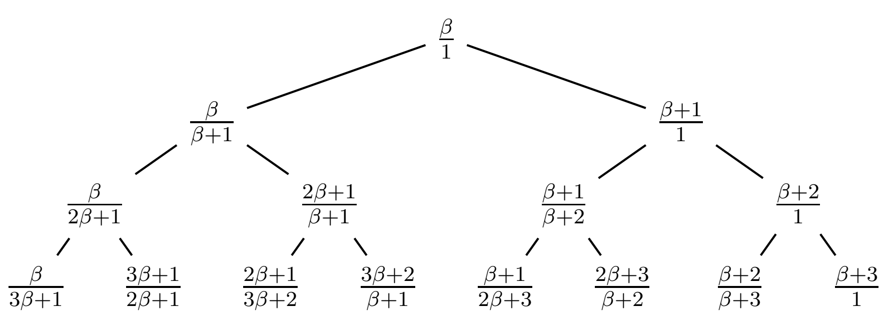

Figura 15: Primeros niveles del árbol de Calkin-Wilf generalizado ($\overline{\mathcal{SB}}_\beta$).

Este árbol, al que llamaremos *árbol de Calkin-Wilf generalizado* y que denotaremos por $\overline{\mathcal{SB}}_\beta$, coincide con $\overline{\mathcal{SB}}$ cuando $\beta = 1$. La interpretación geométrica que dimos se mantiene: ahora comenzamos con el rectángulo de base 1 y altura β y la pendiente β; formamos igualmente rectángulos yuxtaponiendo cuadrados a los rectángulos ya obtenidos (fig.16).

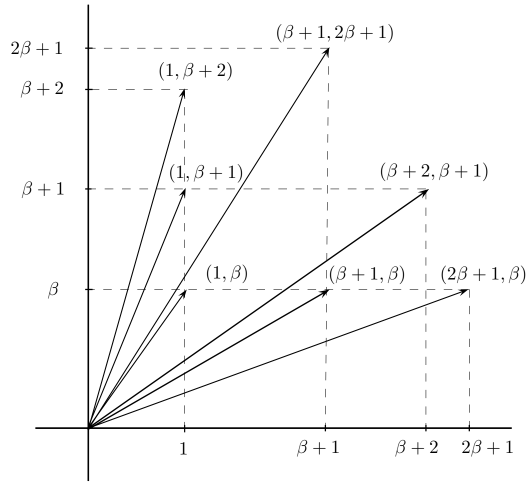

Figura 16

Todas las pendientes que así generamos son conmensurables con β y todas son de la forma $\frac{a\beta+b}{c\beta+e}$, con $a, b, c, e \in \mathbb{N}$ y $ae - bc = 1$. Notamos que β (o su recíproco) es un residuo s_i de la fracción continua de cada uno de los números $\frac{a\beta+b}{c\beta+e}$. Los árboles $\overline{\mathcal{SB}}_\beta$ y $\overline{\mathcal{SB}}_{1/\beta}$ generan a todos los números reales de la forma $[a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ...] = [a_0, a_1, ..a_n, \beta]$, de los que decimos que tienen fracción continua *eventualmente igual* a la de β, pues:

$$i(\beta) = i\left(\frac{\beta}{1}\right) = \frac{\beta}{\beta+1} = \frac{1}{\dfrac{\beta+1}{\beta}} = 0 + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\beta}} = [0, 1, \beta];$$

$$d(\beta) = d\left(\frac{\beta}{1}\right) = \frac{\beta+1}{1} = 1 + \frac{1}{0+\dfrac{1}{\beta}} = [1, 0, \beta] = [1, 1/\beta].$$

Definición 1.5. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Decimos que las fracciones continuas de $\alpha = [a_0, a_1, ...]$ y $\beta = [b_0, b_1, ...]$ son eventualmente iguales si existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $|a_{n+i}| = |b_{m+i}|\ \forall\, i \in \mathbb{N}$.*

La fracción continua de $\alpha = [a_0, ..., a_n, \beta]$ indica cómo ubicar a α en $\overline{\mathcal{SB}}_\beta$ o $\overline{\mathcal{SB}}_{1/\beta}$, como establece el siguiente resultado.

Proposición 1.2. *[31]*
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, con $\alpha = [a_0, a_1, ..a_n, \beta]$. Entonces

$$\alpha = \begin{cases} d^{a_0} i^{a_1} \cdots d^{a_n}(1/\beta) & \text{si } n \text{ es par} \\ d^{a_0} i^{a_1} \cdots i^{a_n}(\beta) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Como sugiere la construcción de $\overline{\mathcal{SB}}_\beta$, la equivalencia racional entre números reales coincide con que sus fracciones continuas sean eventualmente iguales y ambas indican la conmensurabilidad entre números reales.[6] La equivalencia queda establecida en el teorema de Serret.

Teorema 1.3. *(Serret, [34]) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. α y β son racionalmente equivalentes si y sólo si sus fracciones continuas son eventualmente iguales.*

Por ello cualquier número racional positivo es conmensurable con el 1: todos se obtienen en el árbol $\overline{\mathcal{SB}}_1$, todos ellos están en la misma clase de equivalencia racional (cuando $\beta = 1$) y, ya que $a_n = a_n - 1 + (1/1)$, todos comparten residuo de fracción continua –el 1–.

En resumen, los árboles $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$ representan la construcción de $\mathbb{Q}^+$ a través de convergentes y de residuos de fracciones continuas (leídas hacia adelante en $\mathcal{SB}$ y hacia atrás en $\overline{\mathcal{SB}}$), con sus respectivas interpretaciones geométricas de sumas de vectores y el algoritmo de Euclides. La conjugación es la función que lleva un árbol en el otro y relaciona sus propiedades. Los caminos infinitos en $\mathcal{SB}$ son ideales para representar números irracionales y su grado de aproximación por racionales, mientras que los caminos infinitos en $\overline{\mathcal{SB}}_\beta$ son idóneos para estudiar la equivalencia racional. El que dos números irracionales tengan fracciones continuas eventualmente iguales sugiere intuitivamente que, salvo algunas diferencias al comienzo, siguen el mismo tipo de construcción en $\mathcal{SB}$, lo que se traduce en que las aproximaciones racionales que admiten son similares; al mismo tiempo, forman parte de un mismo árbol $\overline{\mathcal{SB}}_\beta$ para algún número β o su recíproco, lo que se traduce en que dichos números irracionales son racionalmente equivalentes.[7]

Aspiramos a construir una teoría que describa a $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$ simultáneamente, en donde los elementos del dominio sean los racionales positivos y resulte cómodo hablar de caminos en $\mathcal{SB}$, $\overline{\mathcal{SB}}$ y $\overline{\mathcal{SB}}_\beta$. Esto prepara el camino para buscar una construcción de los números reales a través de conjuntos de números racionales que contengan la información relativa a las aproximaciones racionales y la equivalencia racional.

2. $\mathbb{Q}^+$ como dominio de estructuras arbóreas

Para describir los árboles que nos interesan partiremos de una estructura arbórea simple con dominio $\mathbb{Q}^+$ y buscaremos un lenguaje formal y una teoría axiomática que la describan. Iremos enriqueciendo progresivamente la estructura a la par que expandimos el lenguaje y añadimos axiomas a la teoría.

Comenzaremos por la estructura conformada por los racionales positivos organizados en el árbol binario infinito $\overline{\mathcal{SB}}$. Es decir, damos $\mathcal{Q}_1 = \langle \mathbb{Q}^+, 1, i, d \rangle$, con 1 como elemento distinguido de $\mathbb{Q}^+$ y con i y d las funciones que generan los descendientes izquierdo y derecho de $\overline{\mathcal{SB}}$, definidas como en (1). Tomaremos un lenguaje de primer orden con igualdad, con una constante individual y dos letras funcionales monarias. Por comodidad, tomaremos el lenguaje $\mathcal{L}_1 = \{1, i, d\}$, asumiendo que el contexto nos permite resolver la ambigüedad de notación entre los símbolos del lenguaje “1”, “i” y “d” y el elemento y funciones con que se interpretan.

[6] Estos resultados abarcan a los números reales en general y estrictamente nuestra construcción sólo a los positivos (nótese que en la definición de equivalencia racional se admiten matrices con entradas enteras, no únicamente positivas). Habría que extender ésta a los números negativos para tener la correspondencia completa.

[7] Para las relaciones entre la aproximación por racionales y la equivalencia racional véase [11] y especialmente el capítulo 7 de *The Markoff and Lagrange Spectra* [15]: *The Spectra via the Modular Group*.

Representamos en un árbol la construcción recursiva de los términos cerrados de $\mathcal{L}_1$ (fig. 17) y vemos que si los vértices de este árbol, al que llamaremos $\overline{\mathbf{A}}$, se corresponden uno a uno con los de $\overline{\mathcal{SB}}$, tendríamos a cada elemento de $\mathbb{Q}^+$ representado por un término cerrado de $\mathcal{L}_1$.

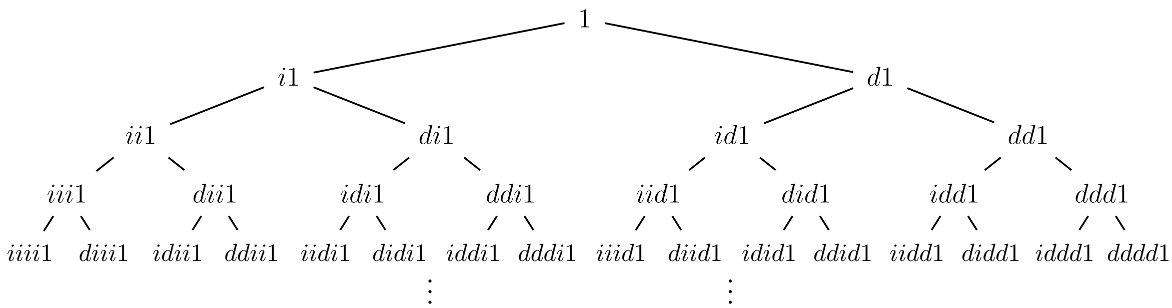

Figura 17: Construcción recursiva de términos cerrados de $\mathcal{L}_1$: $\overline{\mathbf{A}}$.

Esto es conveniente, ya que $\mathcal{L}_1$ no tiene letras relacionales y entonces sus fórmulas atómicas son únicamente igualdades; si logramos dar una teoría que decida correctamente qué términos cerrados son equivalentes en $\mathcal{Q}_1$ y cuáles no, tendremos una teoría capaz de demostrar cada sentencia atómica del lenguaje, o su negación, lo que significa que en todos los modelos de dicha teoría deberá haber una interpretación de los términos cerrados que cumplan exactamente lo que ésta diga de ellos. Dicho en otras palabras, deberán tener un submodelo isomorfo a $\mathcal{Q}_1$. Además, sabemos cuáles términos cerrados queremos que sean equivalentes en la teoría y cuáles no: para conseguir la correspondencia biunívoca entre los vértices de $\overline{\mathbf{A}}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$ requerimos que términos cerrados distintos de $\mathcal{L}_1$ representen elementos distintos. El propósito es entonces claro: construir una teoría en la que términos cerrados distintos sean demostrablemente distintos.

Una vez conseguida esta teoría básica, expandiremos el lenguaje para poder describir una estructura más rica, en la que haya funciones que generan los descendientes izquierdo y derecho de $\mathcal{SB}$, así como una función que nos permita reflejar los árboles por la vertical, para obtener el recíproco, y una función que transforme un árbol en el otro: la conjugación. Veamos cuidadosamente qué necesitamos añadir a nuestro lenguaje.

Notamos que cada término cerrado de $\mathcal{L}_1$ indica, a través de los functores que lo conforman, el lugar que ocupa en $\overline{\mathbf{A}}$. Utilizando el teorema 1.1, éstos también nos indican el lugar que cada término debe ocupar en el árbol de términos que representa a $\mathcal{SB}$: debemos añadir los functores de izquierda a derecha, en lugar de derecha a izquierda. Si hacemos la construcción recursiva de términos añadiendo los functores por la derecha, generamos el árbol que representa a $\mathcal{SB}$ (fig.18), al que llamaremos $\mathbf{A}$. Observamos que $\mathbf{A}$ se obtiene reordenando los elementos de $\overline{\mathbf{A}}$ de la misma manera que se obtiene $\mathcal{SB}$ a partir de $\overline{\mathcal{SB}}$.

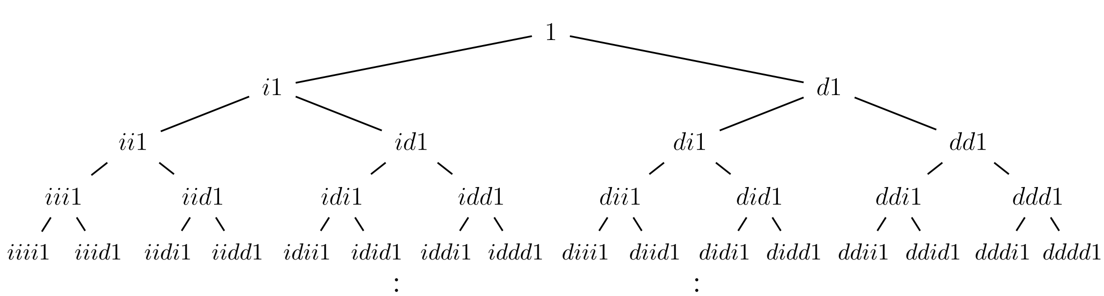

Figura 18: Construcción recursiva de $\mathbf{A}$.

Podríamos introducir en el lenguaje dos letras funcionales monádicas para los descendientes izquierdo y derecho en $\mathbf{A}$. Sin embargo, nos conviene más introducir una letra funcional binaria que permita concatenar los functores de dos términos cerrados. Concatenando por la derecha por $i1$ y $d1$ podremos dar la construcción recursiva de $\mathbf{A}$ y representar las funciones que generan los descendientes izquierdo y derecho en $\mathcal{SB}$. Además, como veremos, con ella podremos hablar de subárboles de $\mathbf{A}$ o $\overline{\mathbf{A}}$ construidos a partir de un vértice en particular. Así, añadiremos el símbolo funcional binario $*$, a la que llamaremos *concatenación*. Ahora, para expresar el recíproco de un vértice tanto en $\mathbf{A}$ como en $\overline{\mathbf{A}}$, requerimos transformarlo en el término que está en el vértice simétrico por la vertical, lo que se logra intercambiando los functores i's por d's y viceversa. Así que introduciremos también un símbolo funcional monádico, que llamaremos *recíproco*: $(\ )^{-1}$ destinado a hacer este intercambio. Finalmente, para hablar de la transformación de un árbol en el otro, necesitamos un símbolo funcional más, $(^{-})$, al que llamaremos *conjugado*, destinado a revertir el orden de los functores de cada término cerrado de $\mathcal{L}_1$. En resumen, expandiremos el lenguaje a $\mathcal{L}_2 = \{1, i, d, *, (\ )^{-1}, (^{-})\}$, añadiendo functores que permitan transformar unas secuencias de functores i y d en otras: concatenarlas, revertir su orden e intercambiar i's por d's. Necesitaremos una teoría adecuada para la nueva estructura expandida. Al introducir nuevos functores aumentamos el conjunto de términos cerrados del lenguaje, pero si logramos añadir axiomas que deduzcan que a cada uno de éstos corresponda un término cerrado de $\mathcal{L}_1$, entonces la teoría todavía será capaz de demostrar toda sentencia atómica o su negación, puesto que éstas siguen siendo igualdades entre términos.

Llegados a este punto, consideraremos la estructura que incorpora además la relación usual del orden en $\mathbb{Q}^+$ y expandiremos el lenguaje a $\mathcal{L}_3$ añadiendo la correspondiente letra relacional binaria. Tendremos que añadir a la teoría los correspondientes axiomas que permitan deducir qué sentencias son verdaderas en la estructura que buscamos describir. Para ello tenemos una guía ideal: recordamos que los números en $\mathcal{SB}$ quedan ordenados de izquierda a derecha; si revisamos el árbol $\mathbf{A}$, vemos que ordenar los términos cerrados de $\mathcal{L}_1$ según aparecen de izquierda a derecha en $\mathbf{A}$ coincide con ordenarlos según un orden lexicográfico. Ese es el orden que buscaremos retratar en la teoría. Notamos que, aunque en este caso no tendremos nuevos términos, sí nuevas sentencias atómicas, pero si para cada pareja de términos cerrados la teoría permite deducir si están o no relacionados (lo que podremos hacer a través del orden lexicográfico), entonces podrá todavía demostrar cada una de las sentencias atómicas o su negación.

Finalmente, añadiremos a la estructura las operaciones aritméticas usuales en $\mathbb{Q}^+$: sumas, productos y cocientes. Expandiremos el lenguaje a $\mathcal{L}_4$, añadiendo los símbolos funcionales binarios "$+$", "$\times$" y "$\div$". Naturalmente, añadiremos axiomas para tener una teoría para la nueva estructura. Tendremos nuevos términos cerrados en el lenguaje, así que buscaremos que la teoría deduzca a qué término cerrado de $\mathcal{L}_1$ corresponde cada uno de ellos.

Aspiramos a que $\overline{\mathcal{SB}}$ planteado como la estructura $\langle \mathbb{Q}^+, 1, i, d \rangle$ y después como sus respectivas expansiones sea un modelo para cada uno de estos lenguajes y que en cada uno de ellos todos los elementos del dominio queden denotados por un término cerrado; pretendemos dar en cada caso una teoría axiomática que pueda demostrar todas las sentencias atómicas de los respectivos lenguajes.

Notamos que en esencia estamos llevando la construcción de $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$ a una construcción lingüística y buscando una teoría que describa el comportamiento de transformaciones de los términos cerrados del lenguaje, una forma de ordenarlos y finalmente, hacer operaciones aritméticas entre ellos.

2.1. Una teoría axiomática básica para una estructura arbórea binaria

Sea pues $\mathcal{L}_1 = \{1, i, d\}$, para el cual $\mathcal{Q}_1 = \langle \mathbb{Q}^+, 1, i, d\rangle$ es modelo. Queremos dar axiomas que describan a $\mathcal{Q}_1$, que representamos como un árbol binario infinito: que éste tenga una raíz y que cada vértice tenga estrictamente dos descendientes, distintos entre sí y distintos a todos los otros vértices. Proponemos entonces:

$A1)$ $\forall x(ix \neq 1 \wedge dx \neq 1)$ (el 1 no está en el rango de i ni de d)

$A2)$ $\forall xy[(ix = iy \to x = y) \wedge (dx = dy \to x = y)]$ (i y d son inyectivas)

$A3)$ $\forall xy(ix \neq dy)$ (los rangos de i y d son ajenos).

Notamos que estos axiomas son una generalización de los axiomas de Peano con dos funciones sucesor en lugar de una. Sea $\mathcal{A}_1 = \{A1, A2, A3\}$. Veremos que $CON(\mathcal{A}_1) := \{\varphi | \, \mathcal{A}_1 \models \varphi\}$ cumple lo que buscamos: si dos términos cerrados no son el mismo, puede demostrarse en la teoría que son distintos.

Si t es un término cerrado de $\mathcal{L}_1$, entonces es o bien la constante 1, o una sucesión de functores seguidos del 1. Es decir, se escribe como $f_n, ...f_1 1$, con $f_i \in \{i, d\}$ y $n \geq 0$, dándose la igualdad cuando t es 1. La longitud del término t indica qué tan complejo es en cuanto a su construcción recursiva (en qué nivel de $\overline{\mathbf{A}}$ está).

Definición 2.1. *Sea t un término cerrado de $\mathcal{L}_1$. Decimos que t tiene longitud n, $long(t) = n$, si en él aparecen n functores. Es decir, si es de la forma $f_n...f_1 1$, con $f_i \in \{i, d\}$.*

Teorema 2.1. *Para todos t y t' términos cerrados de $\mathcal{L}_1$ se tiene que si t y t' son términos distintos, entonces $\mathcal{A}_1 \vdash t \neq t'$.*

Demostración. Sean t y t' términos cerrados de $\mathcal{L}_1$. Hagamos inducción sobre $n = long(t) + long(t')$. Si $n = 0$, tanto t como t' serían 1, así que nuestra afirmación es cierta trivialmente. Supongamos que para todos p y p' términos cerrados tales que $long(p) + long(p') \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ se tiene que, si p y p' son distintos, entonces $\mathcal{A}_1 \vdash p \neq p'$. Sean ahora t y t' términos cerrados con $long(t) + long(t') = n + 1$. Supongamos t distinto de t'. Veremos que $\mathcal{A}_1 \vdash t \neq t'$. Si t o t' son la constante 1, usamos que ésta no está en el rango de i ni de d ($A1$):

1.	$\forall x(ix \neq 1 \wedge dx \neq 1)$	$A1$
2.	$t \neq t'$	de $A1$ por eliminación de cuantificador y conjunción

Así, $\mathcal{A}_1 \vdash t \neq t'$. Ahora, si $long(t) \neq 0 \neq long(t')$ (en cuyo caso $n \geq 2$), entonces tenemos tres posibles casos: el primer functor es i en ambos términos, o es d en ambos, o en uno es i y en el otro es d. Escribimos estos casos *s.p.g.* como: 1) t es ip y t' es ip'; 2) t es dp y t' es dp'; 3) t es ip y t' es dp', con $long(p) + long(p') = n - 1$ en todos los casos. Si se da 1) o 2), como t y t' son términos distintos, también deben serlo p y p', así que por hipótesis de inducción $\mathcal{A}_1 \vdash p \neq p'$. De aquí y $A2$: $\forall xy[(ix = iy \to x = y) \wedge (dx = dy \to x = y)]$obtenemos la deducción deseada. En 1), por ejemplo, hacemos:

1.	$p \neq p'$	deducible de $A1, A2$ y $A3$ (h.i.)
2.	$ip = ip' \to p = p'$	de $A2$ por eliminación de cuantificador y conjunción
3.	$ip \neq ip'$	de 1 y 2 por razonamiento proposicional (*Modus Tollens*)

Así, $\mathcal{A}_1 \vdash t \neq t'$. En 2) hacemos lo análogo, utilizando la segunda parte de $A2$. Si se da 3), utilizamos que los rangos de i y d son ajenos ($A3$):

1.	$\forall xy(ix \neq dy)$	$A3$
2.	$ip \neq dp'$	de $A3$ por eliminación de cuantificador

de donde también tenemos $\mathcal{A}_1 \vdash t \neq t'$. □

Se sigue que toda sentencia atómica de $\mathcal{L}_1$ o su negación es demostrable a partir de $\mathcal{A}_1$, y por tanto en $CON(\mathcal{A}_1)$.

Corolario 2.2. *Sea* $\Delta := \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}_1) | \varphi \text{ es atómica}\}$. *Entonces para toda* $\varphi \in \Delta$ *se tiene* $\mathcal{A}_1 \models \varphi$ *o* $\mathcal{A}_1 \models \neg\varphi$.

Demostración. Ya que en $\mathcal{L}_1$ no hay letras relacionales, las sentencias atómicas son únicamente igualdades entre términos cerrados; dados t y t' términos cerrados, si son el mismo, trivialmente $\mathcal{A}_1 \vdash t = t'$; si son distintos, $\mathcal{A}_1 \vdash t \neq t'$ (teorema 2.1). □

Conviene subrayar que para todo término cerrado el sistema deduce que éste es o bien 1 o es el producto de aplicar i o d a otro término (en otras palabras, todo término cerrado es o bien 1 o el sucesor –izquierdo o derecho– de algún otro término).

Corolario 2.3. *Para todo término cerrado* t *de* $\mathcal{L}_1$ *se tiene*

$$\mathcal{A}_1 \vdash t = 1 \vee \exists x(t = ix) \vee \exists x(t = dx). \tag{12}$$

Equivalentemente:

$$\mathcal{A}_1 \vdash (t \neq 1) \rightarrow (\exists t'(t = it') \vee \exists t'(t = dt')). \tag{13}$$

Demostración. Sea t un término cerrado de $\mathcal{L}_1$. Si t es la constante 1, entonces $\mathcal{A}_1 \vdash t = 1$ trivialmente. Si introducimos la disyunción obtenemos (12). Si $long(t) = n > 0$, entonces t es $f_n(f_{n-1}...f_1 1)$, con $f_n \in \{i, d\}$. Dependiendo de si f_n es i o d, al introducir el cuantificador existencial sobre $f_{n-1}...f_1 1$ deducimos $\exists t'(t = it')$ o $\exists t'(t = dt')$ y concluimos (12), que por silogismo disyuntivo es equivalente a (13). □

2.2. Incorporación de operaciones propias de la estructura arbórea

Continuamos con nuestro plan, expandiendo $\mathcal{L}_1$ para enriquecer su capacidad descriptiva de $\boldsymbol{A}$ y $\overline{\boldsymbol{A}}$. Sea $\mathcal{L}_2 = \{1, i, d, *, (\,)^{-1}, (\overline{\ })\}$. Los axiomas que añadimos para definir recursivamente el comportamiento de los functores sobre los términos cerrados son:

$A4a)$ $\forall y(1 * y = y)$	$A5a)$ $1^{-1} = 1$	$A6a)$ $\overline{1} = 1$
$A4b)$ $\forall xy((ix) * y = i(x * y))$	$A5b)$ $\forall x((ix)^{-1} = dx^{-1})$	$A6b)$ $\forall x\,(\overline{ix} = \overline{x} * i1)$
$A4c)$ $\forall xy((dx) * y = d(x * y))$	$A5c)$ $\forall x((dx)^{-1} = ix^{-1})$	$A6c)$ $\forall x\,(\overline{dx} = \overline{x} * d1)$

Sea $\mathcal{A}_2 = \{A1, A2, A3, A4a\text{-}c, A5a\text{-}c, A6a\text{-}c\}$. En $\mathcal{L}_2$ tenemos dos tipos de términos cerrados:

1. Aquellos que son también términos cerrados de $\mathcal{L}_1$, a los que llamaremos *términos puros*; se escriben como $f_1...f_k 1$, con $f_j \in \{i, d\}$.
2. Aquellos en los que aparece al menos uno de los functores $*, (\,)^{-1}$ o $(^{-})$.

Veremos que los functores se comportan como esperamos sobre los términos puros. Comenzamos por ver que la concatenación actúa como una sustitución.

Nota: No confundir la notación estándar para las fracciones continuas: $[a_0, ..., a_1]$ con la notación estándar utilizada en los lenguajes formales para referirse a la sustitución de un término por otro en una expresión del lenguaje formal: $\varphi[t/x]$.

Proposición 2.4. *Sea t' un término de $\mathcal{L}_2$. Para todo término t de la forma $f_n...f_1\, x$, con $f_i \in \{i, d\}$, se tiene:*

$$\mathcal{A}_2 \vdash t\,[1/x] * t' = t[t'/x].$$

Demostración. Sea t' un término de $\mathcal{L}_2$ y sea t el término $f_n...f_1\, x$, con $f_i \in \{i, d\}$. Haremos inducción sobre n. Si $n = 0$, entonces t es la variable x y damos la deducción:

1.	$x[1/x] * t' = t'$	de $A4a$ por eliminación de cuantificador
2.	$t' = x[t'/x]$	introducción de la identidad
3.	$x[1/x] * t' = x[t'/x]$	de 1 y 2 por eliminación de la identidad

Es decir, $\mathcal{A}_2 \vdash t[1/x] * t' = t[t'/x]$. Ahora suponemos que para todo término p de la forma $f'_n...f'_1 x$, con $f'_i \in \{i, d\}$, se cumple que $\mathcal{A}_2 \vdash p[1/x] * t' = p[t'/x]$. Veamos qué ocurre con t el término $f_{n+1} f_n...f_1 x$, con $f_{n+1} \in \{i, d\}$. Si f_{n+1} es i, entonces t es ip, con p el término $f_n...f_1 x$. Entonces:

1.	$if_n...f_1 x[1/x] * t' = i(f_n...f_1 x[1/x] * t')$	de $A4b$
2.	$f_n...f_1 x[1/x] * t' = f_n...f_1 x[t'/x]$	deducible de $\mathcal{A}_2$ por *h.i.*
3.	$if_n...f_1 x[1/x] * t' = if_n...f_1 x[t'/x]$	de 1 y 2 por eliminación de la identidad

Así que también $\mathcal{A}_2 \vdash t[1/x] * t' = t[t'/x]$. Si f_{n+1} es d, hacemos lo análogo, utilizando en 1 el axioma $A4c$. □

Es inmediato de la proposición 2.4 que la concatenación "$*$" realmente concatena secuencias de functores en términos puros.

Corolario 2.5. *Para todos términos puros $f_n...f_1 1$ y $g_m...g_1 1$ se tiene:*

$$\mathcal{A}_2 \vdash f_n...f_1\, 1 * g_m...g_1 1 = f_n...f_1 g_m...g_1 1. \tag{14}$$

Ejemplo 2.1. *Consideremos los términos puros $iid1$ y $ddidd1$. Del corolario 2.5 tenemos: $\mathcal{A}_2 \vdash iid1 * ddidd1 = iidddidd1$.*

Corolario 2.6. *Para todo término de $\mathcal{L}_1$ se tiene $\mathcal{A}_2 \vdash t * 1 = t$.*

Dado un término puro t, podemos considerar las operaciones "$*t$" y "$t*$" –concatenar por t por la derecha y por la izquierda respectivamente–. En particular, notamos que $*i1$ y $*d1$ generan a todos los términos puros: la construcción recursiva a partir de 1 produce $\mathbf{A}$. También notamos que aplicar "$*t$" a todos los términos de $\overline{\mathbf{A}}$ produce el subárbol de $\overline{\mathbf{A}}$ con raíz t (fig. 19), mientras que aplicar "$*t$" a todo $\mathbf{A}$ produce un subárbol de $\mathbf{A}$ con raíz t (fig. 20).[8]

[8]Obsérvese que $\overline{\mathbf{A}} * t$, el resultado de aplicar "$*t$" a todos los términos de $\overline{\mathbf{A}}$, se obtiene sustituyendo en cada

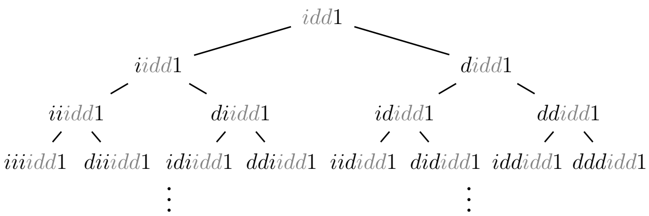

Figura 19: $\overline{\mathbf{A}} * idd1$.

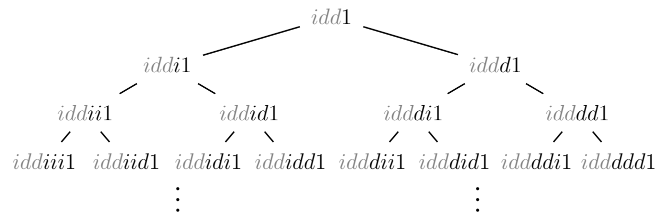

Figura 20: $idd1 * \mathbf{A}$.

Analicemos ahora el recíproco, que esperamos que intercambie los functores i's y d's de un término puro.

Lema 2.7. *Sea $f_n...f_1 1$ un término puro. Entonces $\mathcal{A}_2 \vdash (f_n...f_1 1)^{-1} = g_n...g_1 1$, donde $g_i = i$ si y sólo si $f_i = d$ para $i \in \{1, ..., n\}$.*

Demostración. Sea t un término puro. Haremos inducción sobre $long(t)$. Si $long(t) = 0$, entonces $\mathcal{A}_2 \vdash t^{-1} = 1$ ($A5a$) y la afirmación es cierta por vacuidad. Supongamos que para todo término puro de la forma $f_n...f_1 1$ sucede $\mathcal{A}_2 \vdash (f_n...f_1 1)^{-1} = g_n...g_1 1$, con $g_i = i$ si y sólo si $f_i = d$ para $i \in \{1, ..., n\}$. Ahora, si t es el término $f_{n+1} f_n...f_1 1$ de $\mathcal{L}_1$, entonces por $h.i.$ se tiene $\mathcal{A}_2 \vdash (f_n...f_1 1)^{-1} = g_n...g_1 1$, con $g_i = i$ si y sólo si $f_i = d$ para $i \in \{1, ..., n\}$. Si f_{n+1} es i, de los axiomas del recíproco obtenemos:

1.	$(if_n...f_1 1)^{-1} = d(f_n...f_1 1)^{-1}$	de $A5b$ por eliminación de cuantificador
2.	$(f_n...f_1 1)^{-1} = g_n...g_1 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ ($h.i.$)
3.	$(if_n...f_1 1)^{-1} = dg_n...g_1 1$	de 1 y 2 por eliminación de la identidad

Si f_{n+1} es d, hacemos lo análogo usando $A5c$ en 1. En ambos casos $\mathcal{A}_2 \vdash (f_{n+1} f_n...f_1 1)^{-1} = g_{n+1} g_n...g_n 1$, con $g_i = i$ si sólo si $f_i = d$ para $i \in \{1, ..., n, n+1\}$. ☐

Ejemplo 2.2. *Sea t el término $iiidi1$. Entonces $\mathcal{A}_2 \vdash t^{-1} = dddid1$.*

Veamos finalmente que la conjugación invierte el orden de los functores de un término puro.

Lema 2.8. *Sea $f_n...f_1 1$ un término puro. Entonces $\mathcal{A}_2 \vdash \overline{f_n...f_1 1} = f_1...f_n 1$.*

Demostración. Sea t el término puro $f_n...f_1 1$. Haremos inducción sobre n. Si $n = 0$, entonces $\mathcal{A}_2 \vdash \overline{1} = 1$ ($A6a$). Supongamos que para todo término puro $f'_n...f'_1 1$ se tiene $\mathcal{A}_2 \vdash \overline{f'_n...f'_1 1} = f'_1...f'_n 1$. Si t es $f_{n+1} f_n...f_1 1$, de los axiomas del conjugado y la hipótesis de inducción, tenemos que si f_{n+1} es i:

1.	$\overline{if_n...f_1 1} = \overline{f_n...f_1 1} * i1$	de $A6b$ por eliminación de cuantificador
2.	$\overline{f_n...f_1 1} = f_1...f_n 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ ($h.i.$)
3.	$f_1...f_n 1 * i1 = f_1...f_n i1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (proposición 2.4)
4.	$\overline{if_n...f_1 1} = f_1...f_n i1$	de 1, 2 y 3 por eliminación de la identidad

término de $\overline{\mathbf{A}}$ el 1 por t ($\overline{\mathbf{A}}[t/1]$, abusando del lenguaje). Esto no dista mucho de la construcción del árbol $\overline{\mathcal{SB}}$ generalizado, aunque aquí sólo podríamos construir $\overline{\mathcal{SB}}_\beta$ a partir de $\beta \in \mathbb{Q}^+$. Si consideramos la restricción de $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{A}_2$ a $\{1, i, d, *\}$ y la teoría generada por los axiomas $A1 - A4$, suena razonable que si $\overline{\mathcal{SB}}$ es en efecto modelo de dicha teoría, el subárbol de $\overline{\mathcal{SB}}$ con raíz en el racional representado por t sea también modelo de ella, además isomorfo a $\overline{\mathcal{SB}}$ (basta interpretar la constante 1 como el número representado por t). Ello da cabida a notar el carácter fractal o "autosimilar" de $\overline{\mathbf{A}}$ (y lo mismo con $\mathbf{A}$). Aunque un análisis detallado de este aspecto escapa a las posibilidades de este trabajo, puede intuirse que esta propiedad tiene un papel importante en el estudio de las aproximaciones racionales y la equivalencia racional.

Si f_{n+1} es d, lo análogo, con $A6c$ en 1. En ambos casos $\mathcal{A}_2 \vdash \overline{f_{n+1}f_n...f_1 1} = f_1...f_nf_{n+1}1$. $\square$

Ejemplo 2.3. *El conjugado del término* $iiidi1$ *es* $\overline{iiidi1} = idiii1$.

Nota: Vemos que $\mathbf{A}$ es el árbol que se obtiene al conjugar cada uno de los términos de $\overline{\mathbf{A}}$. Por ello llamamos a $\mathbf{A}$ "árbol *conjugado* de $\overline{\mathbf{A}}$". Esto justifica que llamemos al árbol de Calkin-Wilf el árbol conjugado de $\mathcal{SB}$ y lo denotemos por $\overline{\mathcal{SB}}$.

Ahora veremos que aunque en $\mathcal{L}_2$ tenemos términos nuevos, éstos no denotan elementos nuevos en el modelo para $\mathcal{L}_2$ que buscamos describir con la teoría $CON(\mathcal{A}_2)$, cuyo dominio es $\mathbb{Q}^+$: para cada término cerrado de $\mathcal{L}_2$ existe un término puro equivalente a éste en $CON(\mathcal{A}_2)$. Así que podremos tomar a los términos puros como representantes canónicos de los elementos y $CON(\mathcal{A}_2)$ también podrá deducir cada sentencia atómica del lenguaje, o su negación.

Teorema 2.9. *(De la representación canónica de términos de $\mathcal{L}_2$)*
Sea t un término cerrado de $\mathcal{L}_2 = \{1, i, d, *, (\,)^{-1}, (^{-})\}$. Existe t' término puro tal que $\mathcal{A}_2 \vdash t = t'$. Además, para cualquier término t'' de $\mathcal{L}_1$ distinto de t' se tiene $\mathcal{A}_2 \vdash t \neq t''$.

Demostración. Haremos inducción sobre la formación de términos de $\mathcal{L}_2$. Un término cerrado de $\mathcal{L}_2$ es o bien 1 o uno de los siguientes: ip, dp, $p*q$, p^{-1}, $\overline{p}$, donde p y q son términos cerrados de $\mathcal{L}_2$. Si t es 1, proponemos t' como 1 y trivialmente $\mathcal{A}_2 \vdash t = t'$. Supongamos ahora que para los términos cerrados p y q de $\mathcal{L}_2$ existen los términos puros p' y q' tales que $\mathcal{A}_2 \vdash p = p'$ y $\mathcal{A}_2 \vdash q = q'$. Analicemos los posibles casos para t: $ip, dp, p*q, p^{-1}$ y $\overline{p}$. Ya que p' y q' son términos puros, podemos utilizar los lemas anteriores para encontrar el término t' buscado.

- Si t es ip, proponemos t' como ip', en cuyo caso $\mathcal{A}_2 \vdash p = p'$ $(h.i.)$ y $\mathcal{A}_2 \vdash ip = ip'$.
- Si t es dp, proponemos a t' como dp' y análogamente tenemos $\mathcal{A}_2 \vdash dp = dp'$.
- Si t es de la forma $p*q$, p' es $f_n...f_1 1$ y q' es $g_m...g_1 1$, entonces proponemos t' como $f_n...f_1g_m...g_1 1$. Ya que $\mathcal{A}_2 \vdash p' * q' = f_n...f_1g_m...g_1 1$ (corolario 2.5), tenemos:

1.	$p = p'$	deducible de $\mathcal{A}_2$ $(h.i.)$
2.	$q = q'$	deducible de $\mathcal{A}_2$ $(h.i.)$
3.	$p' * q' = f_n...f_1g_m...g_1 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (corolario 2.5)
4.	$p * q = f_n...f_1g_m...g_1 1$	de 1, 2, 3 y de $p*q = p*q$ (introducción y eliminación de la identidad)

- Si t es p^{-1} y p' es $f_n...f_1 1$, proponemos a t' como $f'_n...f'_1 1$, donde $f'_i = i$ si y sólo si $f_i = d$. El lema 2.7 asegura que $\mathcal{A}_2 \vdash p'^{-1} = f'_n...f'_1 1$. Así:

1.	$p = p'$	deducible de $\mathcal{A}_2$ $(h.i.)$
2.	$p'^{-1} = f'_n...f'_1 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.7)
4.	$p^{-1} = f'_n...f'_1 1$	de 1, 2 y de $p^{-1} = p^{-1}$ (introducción y eliminación de la identidad)

- Si t es $\overline{p}$ y p' es $f_n...f_1 1$, proponemos a t' como $f_1...f_n 1$ y damos una deducción análoga a la del caso anterior, utilizando en 2 el lema 2.8, que dice que $\mathcal{A}_2 \vdash \overline{f_n...f_1 1} = f_1...f_n 1$.

En todos los casos concluimos que $\mathcal{A}_2 \vdash t = t'$. Ahora, si t'' es un término puro distinto de t', $\mathcal{A}_2 \vdash t \neq t''$ es consecuencia directa del teorema 2.1 $\square$

Observamos que el teorema 2.9 nos dice que, si $\mathcal{A}_2$ es consistente, entonces para cada término cerrado de $\mathcal{L}_2$ existe un único término puro equivalente a éste; la prueba del teorema indica cómo encontrarlo. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.4. *Encontremos el término puro equivalente a* $((idd1)^{-1} * \overline{idd1}) * i1$ *en* $\mathcal{A}_2$*.*

$$\begin{aligned} (idd1)^{-1} &= dii1 && \textit{(lema 2.7)} \\ \overline{idd1} &= ddi1 && \textit{(lema 2.8)} \\ dii1 * ddi1 &= diiddi1 && \textit{(corolario 2.5)} \\ diiddi1 * i1 &= diiddii1 && \textit{(corolario 2.5)} \\ ((idd1)^{-1} * \overline{idd1}) * i1 &= diiddii1 \end{aligned}$$

El término que buscamos es $diiddii1$*.*

Exploremos ahora algunas propiedades que se deducen sobre las nuevas operaciones.

Proposición 2.10. *La concatenación es asociativa. Esto es, dados* t_1, t_2 *y* t_3 *términos cerrados de* $\mathcal{L}_2$ *se tiene* $\mathcal{A}_2 \vdash t_1 * (t_2 * t_3) = (t_1 * t_2) * t_3$*.*

Demostración. Si t_1, t_2 y t_3 son los términos puros $f_n ... f_1 1$, $g_m ... g_1$ y $h_k ... h_1$ respectivamente, la afirmación es consecuencia directa del corolario 2.5, que garantiza

$$\mathcal{A}_2 \vdash f_n ... f_1 1 * (g_m ... g_1 * h_k ... h_1) = (f_n ... f_1 1 * g_m ... g_1) * h_k ... h_1.$$

Ahora, si t_1, t_2 y t_3 son términos de $\mathcal{L}_2$, entonces existen t'_1, t'_2 y t'_3 términos de $\mathcal{L}_1$ tales que $\mathcal{A}_2 \vdash t_i = t'_i$ para $i = 1, 2, 3$ (teorema 2.9). Como recién vimos, $\mathcal{A}_2 \vdash t'_1 * (t'_2 * t'_3) = (t'_1 * t'_2) * t'_3$, así que, aplicando las reglas de la identidad, tenemos $\mathcal{A}_2 \vdash t_1 * (t_2 * t_3) = (t_1 * t_2) * t_3$. $\square$

Claramente, la concatenación no es en general conmutativa: por ejemplo, $\mathcal{A}_2 \vdash d1 * i1 = di1$, $\mathcal{A}_2 \vdash i1 * d1 = id1$ y $\mathcal{A}_2 \vdash di1 \neq id1$. Sin embargo, recordamos que algunos casos especiales sí conmutan.

Observación 2.1. *Para todo término cerrado* t *de* $\mathcal{L}_2$ *se tiene* $\mathcal{A}_2 \vdash t * 1 = t$*.*

Demostración. Sea t término cerrado de $\mathcal{L}_2$. Entonces existe t' término puro (teorema 2.9) tal que $\mathcal{A}_2 \vdash t = t'$. Ya que $\mathcal{A}_2 \vdash t' * 1 = t'$ (corolario 2.6), aplicando las reglas de la identidad concluimos $\mathcal{A}_2 \vdash t * 1 = t$. $\square$

Proposición 2.11. *La concatenación permite cancelar por la izquierda y por la derecha: para todos términos cerrados* t, t_1 *y* t_2 *de* $\mathcal{L}_2$ *se tiene*

$$\mathcal{A}_2 \vdash (t * t_1 = t * t_2) \rightarrow (t_1 = t_2) \quad y \quad \mathcal{A}_2 \vdash (t_1 * t = t_2 * t) \rightarrow (t_1 = t_2).$$

Demostración. Si t, t_1 y t_2 son términos puros, digamos $f_n ... f_1 1$, $g_m ... g_1 1$ y $h_k ... h_1 1$ respectivamente, del corolario 2.5 tenemos:

1.	$f_n...f_1 1 * g_m...g_1 1 = f_n...f_1 1 * h_k...h_1 1$	hipótesis
2.	$f_n...f_1 1 g_m...g_1 1 = f_n...f_1 1 h_k...h_1 1$	de 1 (corolario 2.5)
3.	$g_m...g_1 1 \neq h_k...h_1 1$	supuesto
4.	$f_n...f_1 1 g_m...g_1 1 \neq f_n...f_1 1 h_k...h_1 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ y 3 (teorema 2.1)
5.	$g_m...g_1 1 = h_k...h_1 1$	de 2, 3 y 4 por reducción al absurdo
6.	$(f_n...f_1 1 * g_m...g_1 1 = f_n...f_1 1 * h_k...h_1 1) \cdots \rightarrow (g_m...g_1 1 = h_k...h_1 1)$	de 1 y 5 (*Modus Ponens*)

Así, $\mathcal{A}_2 \vdash (t * t_1 = t * t_2) \rightarrow (t_1 = t_2)$. Una deducción análoga prueba $\mathcal{A}_2 \vdash (t_1 * t = t_2 * t) \rightarrow (t_1 = t_2)$. El teorema 2.9 permite extender el resultado para t, t_1 y t_2 términos cerrados de $\mathcal{L}_2$. □

Como era de esperarse, el recíproco y la conjugación son demostrablemente involuciones en los términos cerrados.[9] Es decir, la composición consigo mismos actúa en los términos cerrados como la función identidad.

Proposición 2.12. *Para todo término cerrado t de $\mathcal{L}_2$ se tiene $\mathcal{A}_2 \vdash (t^{-1})^{-1} = t$.*

Demostración. Cuando t es un término puro, digamos $f_n...f_1 1$, la afirmación es una consecuencia directa del lema 2.7:

1.	$(f_n...f_1 1)^{-1} = g_n...g_1 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$, donde $g_i = i$ sii $f_i = d$ (lema 2.7)
2.	$(g_n...g_1 1)^{-1} = h_n...h_1 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$, donde $h_i = i$ sii $g_i = d$; es decir, $h_i = f_i$ (lema 2.7)
3.	$((f_n...f_1 1)^{-1})^{-1} = f_n...f_1 1$	de 1 y 2 por introducción y eliminación de la identidad

Así, $\mathcal{A}_2 \vdash (t^{-1})^{-1} = t$. El teorema 2.9 permite extender el resultado a todos los términos cerrados de $\mathcal{L}_2$. □

Proposición 2.13. *Para todo término cerrado t en $\mathcal{L}_2$ se tiene $\mathcal{A}_2 \vdash \overline{\overline{t}} = t$.*

Demostración. Si t es el término puro $f_n...f_1 1$, es inmediato del lema 2.8, que establece que $\mathcal{A}_2 \vdash \overline{f_n...f_1 1} = f_1...f_n 1$: aplicándolo dos veces (junto con alguna introducción y eliminación de la identidad), vemos que

$$\mathcal{A}_2 \vdash \overline{\overline{f_n...f_1 1}} = f_n...f_1 1.$$

Con el teorema 2.9 extendemos el resultado a todos los términos cerrados de $\mathcal{L}_2$. □

Ahora veremos que la concatenación es definible para términos cerrados a través de la conjugación, que el recíproco se distribuye sobre la concatenación y una propiedad distributiva similar para el conjugado, aunque con el orden de la concatenación invertido.

Proposición 2.14. *Para todo término cerrado t en $\mathcal{L}_2$ se tiene $\mathcal{A}_2 \vdash t * i1 = \overline{i\overline{t}}$ y $\mathcal{A}_2 \vdash t * d1 = \overline{d\overline{t}}$.*

Demostración. Es consecuencia de la proposición 2.13. Para t término cerrado de $\mathcal{L}_2$ tenemos:

[9] La conjugación misma puede actuar como la identidad en algunos términos especiales: los "palíndromos". Recuérdese que los números cuyas fracciones continuas tienen cocientes parciales que se leen igual de izquierda a derecha cumplen propiedades especiales (véase [12]).

1.	$\overline{\overline{t}} = t$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (proposición 2.13)
2.	$\overline{i\overline{t}} = \overline{\overline{t}} * i1$	de $A6b$ por eliminación del cuantificador
3.	$\overline{i\overline{t}} = t * i1$	de 1 y 2 por eliminación de la identidad

Concluimos $\mathcal{A}_2 \vdash t * i1 = \overline{i\overline{t}}$. En el caso de $t * d1$ hacemos una deducción análoga. □

Proposición 2.15. *Sean t_1 y t_2 términos cerrados de $\mathcal{L}_2$. Entonces $\mathcal{A}_2 \vdash (t_1 * t_2)^{-1} = t_1^{-1} * t_2^{-1}$.*

Demostración. Mostremos primero que la proposición se cumple para términos puros. Sean $f_n ... f_1 1$ y $g_m ... g_1 1$ términos puros. Damos la siguiente deducción:

1.	$f_n ... f_1 1 * g_m ... g_1 1 = f_n ... f_1 g_m ... g_1 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (corolario 2.5)
2.	$(f_n ... f_1 g_m ... g_1 1)^{-1} = f'_n ... f'_1 g'_m ... g'_1 1$	con $f'_i = i$ sii $f_i = d$ y $g'_i = i$ sii $g_i = d$ deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.7))
3.	$f'_n ... f'_1 g'_m ... g'_1 1 = f'_n ... f'_1 1 * g'_m ... g'_1 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (corolario 2.5)
4.	$(f'_n ... f'_1 1)^{-1} = f_n ... f_1 1$	donde $f'_i = i$ sii $f_i = d$ deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.7)
5.	$(g'_m ... g'_1 1)^{-1} = g_m ... g_1 1$	donde $g'_i = i$ sii$g_i = d$ deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.7)
6.	$(f_n ... f_1 1 * g_m ... g_1 1)^{-1} = (f'_n ... f'_1 1)^{-1} * (f'_n ... f'_1)^{-1}$	de 1, 2, 3, 4 y 5 por repetidas introducciones y eliminaciones de la identidad)

Del teorema 2.9 obtenemos el caso general. □

Proposición 2.16. *Sean t_1 y t_2 términos cerrados de $\mathcal{L}_2$. Entonces $\mathcal{A}_2 \vdash \overline{t_1 * t_2} = \overline{t_2} * \overline{t_1}$.*

Demostración. Mostremos primero que la proposición se cumple para términos cerrados de $\mathcal{L}_1$. Sean $f_n ... f_1 1$ y $g_m ... g_1 1$ términos de $\mathcal{L}_1$. Damos la siguiente deducción:

1.	$f_n ... f_1 1 * g_m ... g_1 1 = f_n ... f_1 g_m ... g_1 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (corolario 2.5)
2.	$\overline{f_n ... f_1 g_m ... g_1 1} = g_1 ... g_m f_1 ... f_n 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.8))
3.	$g_1 ... g_m f_1 ... f_n 1 = g_1 ... g_m 1 * f_1 ... f_n 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (corolario 2.5)
4.	$\overline{f_n ... f_1 1} = f_1 ... f_n 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.8)
5.	$\overline{g_m ... g_1 1} = g_1 ... g_m 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.8)
6.	$\overline{f_n ... f_1 1 * g_m ... g_1 1} = \overline{g_m ... g_1 1} * \overline{f_n ... f_1}$	de 1, 2, 3, 4 y 5 por repetidas introducciones y eliminaciones de la identidad)

Usamos el caso de $\mathcal{L}_1$ para demostrar el caso general de forma análoga a como hicimos en la demostración de la proposición 2.16 y concluimos que para todo término cerrado de $\mathcal{L}_2$ se tiene $\mathcal{A}_2 \vdash \overline{t_1 * t_2} = \overline{t_2} * \overline{t_1}$. □

En cuanto al recíproco y el conjugado, como era de esperar conociendo su acción en los términos puros, éstos conmutan sobre términos cerrados de $\mathcal{L}_2$.

Proposición 2.17. *Para todo término cerrado t en $\mathcal{L}_2$ se tiene $\mathcal{A}_2 \vdash \overline{t^{-1}} = (\overline{t})^{-1}$.*

Demostración. Como hemos venido haciendo, mostraremos la proposición para términos cerrados de $\mathcal{L}_1$ y luego la extenderemos a $\mathcal{L}_2$ por medio del teorema 2.9. Sea $f_n...f_1 1$ un término de $\mathcal{L}_1$. Damos la siguiente deducción:

1.	$(f_n...f_1 1)^{-1} = g_n...g_1 1$	con $g_i = i$ sii $f_i = d$ deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.7)
2.	$\overline{g_n...g_1 1} = g_1...g_n 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.8))
3.	$\overline{f_n...f_1 1} = f_1...f_n 1$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.8)
4.	$(f_1...f_n 1)^{-1} = g_1...g_n 1$	con $g_i = i$ sii $f_i = d$ deducible de $\mathcal{A}_2$ (lema 2.7)
5.	$\overline{(f_n...f_1 1)^{-1}} = (\overline{f_n...f_1 1})^{-1}$	de 1, 2, 3 y 4

Al igual que en las demostraciones anteriores, obtenemos el caso general del teorema 2.9. $\square$

Hacemos un comentario final sobre la interacción de las operaciones. Podemos construir $\overline{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{A}$ a partir ya sea de i y d o de $*i1$ y $*d1$, expresando a las otras dos a través de la concatenación y el conjugado. Veremos que es demostrable en $\mathcal{A}_2$ que $*i1$ y $*d1$ cumplen los respectivos axiomas análogos a $A1 - A3$ para los términos cerrados de $\mathcal{L}_2$, de donde se desprende que para éstos se cumplen también el resto de las consecuencias de $\mathcal{A}_2$. Esto demuestra que la rica estructura conjugada de $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$ está implícita en $\overline{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{A}$: en la construcción recursiva de los términos puros, que a su vez describen la construcción de un árbol binario infinito arbitrario.

Proposición 2.18. *Para todos t y t' términos cerrados de $\mathcal{L}_2$ se cumple:*

- $\mathcal{A}_2 \vdash t * i1 \neq 1 \wedge t' * d1 \neq 1$ *(el 1 no está en la imagen de los elementos representados por términos cerrados de $\mathcal{L}_2$ bajo $*i1$ ni bajo $*d1$)*
- $\mathcal{A}_2 \vdash t * i1 = t' * i1 \to t = t') \wedge (t * d1 = t' * d1 \to t = t')]$ *($*i1$ y $*d1$ son inyectivas en el conjunto de términos representados por términos cerrados de $\mathcal{L}_2$)*
- $\mathcal{A}_2 \vdash t * i1 \neq t' * d1$ *(las imágenes de los elementos representados por términos cerrados de $\mathcal{L}_2$ bajo $*i1$ y $*d1$ son conjuntos ajenos).*

Demostración. Mostremos primero que $\mathcal{A}_2 \vdash t * i1 \neq 1 \wedge t' * d1 \neq 1$.

1.	$t * i1 = 1$	supuesto
2.	$t * i1 = \overline{i\overline{t}}$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (proposición 2.14)
3.	$\overline{i\overline{t}} = 1$	De 1 y 2 por eliminación de identidad
4.	$i\overline{t} = 1$	de 3 y de proposición 2.13
5.	$i\overline{t} \neq 1$	de $A1$ por eliminación de cuantificador y conjunción
6.	$t * i1 \neq 1$	de 1, 4 y 5 por introducción de conjunción y negación.
7.	$t * d1 = 1$	supuesto
8.	$t * d1 = \overline{d\overline{t}}$	deducible de $\mathcal{A}_2$ (proposición 2.14)
9.	$t * d1 \neq 1$	análogo a pasos 3-6
10.	$t * i1 \neq 1 \vee t * d1 \neq 1$	de 6 y 9 por introducción de disyunción

Ahora probemos $\mathcal{A}_2 \vdash (t * i1 = t' * i1 \to t = t') \wedge (t * d1 = t' * d1 \to t = t')$.

1.	$t * i1 = t' * i1$	supuesto
2.	$i\overline{t} = i\overline{t'}$	De 1 y de proposiciones 2.13 y 2.14
3.	$i\overline{t} = i\overline{t'} \rightarrow \overline{t} = \overline{t'}$	de $A2$ por eliminación de cuantificador y conjunción
4.	$t = t'$	de 2 y 3 por eliminación del condicional
5.	$(t * i1 = t' * i1) \rightarrow t = t'$	de $1-4$ por introducción del condicional.
6.	$t * d1 = t' * d1$	supuesto
7.	$d\overline{t} = d\overline{t'}$	De 1 y de proposiciones 2.13 y 2.14
8.	$(t * d1 = t'di1) \rightarrow t = t'$	análogo a pasos 3-5
9.	$(t * i1 = t' * i1) \rightarrow t = t' \cdots \wedge (t * d1 = t' * d1) \rightarrow t = t'$	de 5 y 9 por introducción de la conjunción

Finalmente, probemos que $\mathcal{A}_2 \vdash t * i1 \neq t' * d1$.

1.	$t * i1 = t' * d1$	supuesto
2.	$\overline{i\overline{t}} = \overline{d\overline{t'}}$	deducible de $\mathcal{A}_2$ y 1 (proposición 2.14)
3.	$i\overline{t} = d\overline{t'}$	deducible de $\mathcal{A}_2$ y 2(proposición 2.13)
4.	$i\overline{t} \neq d\overline{t'}$	de $A3$ por eliminación de cuantificador
5.	$t * i1 \neq t' * d1$	de 1, 3 y 4 por introducción de la negación.

□

Finalmente, una de las consecuencias más importantes del teorema 2.9 es que en $\mathcal{A}_2$ seguimos teniendo que toda sentencia atómica de $\mathcal{L}_2$ o su negación es demostrable de $\mathcal{A}_2$ y por tanto en $CON(\mathcal{A}_2)$.

Corolario 2.19. *Sea $\Delta := \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}_2) | \varphi$ es atómica$\}$. Entonces para toda $\varphi \in \Delta$ se tiene $\mathcal{A}_2 \models \varphi$ o $\mathcal{A}_2 \models \neg\varphi$.*

2.3. Incorporación de una relación de orden para la teoría

Continuamos como planeamos con la expansión de la estructura, del lenguaje y de la teoría. Introducimos al lenguaje una letra relacional binaria destinada a representar el orden. Sea $\mathcal{L}_3 = \{1, i, d, *, (^-), (\,)^{-1}, <\}$. Añadimos a nuestro conjunto de axiomas los siguientes:

A7a) $\forall x[\neg(x < x)]$ (irreflexividad de $<$)

A7b) $\forall xyz[(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z]$ (transitividad de $<$)

A7c) $\forall xy[(\exists z(x = y * iz) \vee \exists z(y = x * dz) \vee \exists pzw(x = p * iz \wedge y = p * dw)) \rightarrow x < y]$

Sea $\mathcal{A}_3 = \{A1, A2, A3, A4a\text{-}c, A5a\text{-}c, A6a\text{-}c, A7a\text{-}c\}$. Notamos que hemos ampliado nuestro conjunto de fórmulas atómicas, pero no el de términos; por ello las afirmaciones demostrables en $\mathcal{A}_2$ sobre términos cerrados de $\mathcal{L}_2$ se mantienen en $\mathcal{A}_3$ para los términos cerrados de $\mathcal{L}_3$.

El axioma $A7c$ pretende dar condiciones que garanticen $t_1 < t_2$. La motivación de su formulación es que, según vimos en las propiedades de $\mathcal{SB}$, queremos que $<$ ordene a los términos de $\mathbf{A}$ "de izquierda a derecha", lo que coincide con ordenar a los términos puros, que son los representantes canónicos de los elementos, de acuerdo al orden lexicográfico para el alfabeto $\{i, d\}$. Para saber cuál de dos términos puros distintos es menor, comparamos sus functores término a término, de izquierda a derecha, y cuando difieran, el que tenga el functor i debe ser el menor; si se terminan los functores de uno y el próximo functor del otro es i, este último es menor, si es d, es mayor. Esto es los que el axioma $A7c$ busca reflejar: dice que t_1 es menor que t_2 si existe un elemento p para el cual t_1 está en el subárbol de $\mathbf{A}$ generado a partir de $p * i1$ y t_2 en el generado a partir de $p * d1$; o si t_1 está en algún lugar del subárbol que se genera a partir del descendiente izquierdo de t_2, (que es $t_2 * i1$); o si t_2 está en algún lugar del subárbol generado por el descendiente derecho de t_1 (que es $t_1 * d1$).

Veremos que $<$ funciona como deseamos. Primero notamos que todo término puro se relaciona con sus descendientes en $\mathbf{A}$ y $\overline{\mathbf{A}}$ como esperamos. Es decir, $<$ demostrablemente sitúa a cada término t entre sus descendientes en $\mathbf{A}$: $t * i1 < t < t * d1$; y en $\overline{\mathbf{A}}$ el descendiente izquierdo siempre es menor que 1 y el derecho, siempre mayor que 1.

Proposición 2.20. *Para todo término cerrado t de $\mathcal{L}_2$ se tiene*

a) $\mathcal{A}_3 \vdash t * i1 < t$ *y* $\mathcal{A}_3 \vdash t < t * d1$.

b) $\mathcal{A}_3 \vdash it < 1$ *y* $\mathcal{A}_3 \vdash 1 < dt$.

Demostración. Ambas son inmediatas del axioma $A7c$. Para (a), tenemos:

1.	$t * i1 = t * i1$	Introducción de la identidad
2.	$\exists r(t * i1 = t * ir)$	de 1 por introducción del cuantificador
3.	$\exists r(t * i1 = t * ir) \vee \exists r(t = t * i1 * dr) \cdots$	de 2 por introducción
	$\cdots \vee \exists prs(t * i1 = p * ir \wedge t = p * ds)$	de la disyunción
4.	$t * i1 < t$	de $A7c$ por eliminación
		del condicional

Análogamente se prueba $\mathcal{A}_3 \vdash t < t * d1$. Para (b), tenemos:

1.	$it = 1 * it$	de axioma $A4a$
2.	$\exists r(it = 1 * ir)$	de 1 por introducción del cuantificador
3.	$\exists r(it = 1 * ir) \vee \exists r(1 = it * dr) \cdots$	de 2 por introducción
	$\cdots \vee \exists prs(it = p * ir \wedge 1 = p * ds)$	de la disyunción
4.	$it < 1$	de $A7c$ por eliminación
		del condicional

Análogamente se prueba $\mathcal{A}_3 \vdash 1 < dt$. □

Damos un resultado que eventualmente resultará útil. Sólo se vuelve intuitivo tras una cuidadosa revisión de las propiedades en $\mathbf{A}$ del orden lexicográfico para el alfabeto $\{i, d\}$.

Lema 2.21. *Sean p_1, p_2, q_1 y q_2 términos cerrados de $\mathcal{L}_3$. Entonces*

$$\mathcal{A}_3 \cup \{p_1 * ip_2 = q_1 * dq_2\} \vdash \exists r(p_1 = q_1 * dr) \vee \exists r(q_1 = p_1 * ir). \tag{15}$$

Consecuentemente, $\mathcal{A}_3 \cup \{p_1 * ip_2 = q_1 * dq_2\} \vdash q_1 < p_1$.

Demostración. Si el conjunto $\mathcal{A}_3 \cup \{p_1 * ip_2 = q_1 * dq_2\}$ es inconsistente, entonces cualquier fórmula es deducible de él y (15) es cierta trivialmente. Supongamos entonces que es consistente. Si p_1, p_2, q_1 y q_2 son términos puros, entonces $p_1 * ip_2$ y $q_1 * dq_2$ deben ser el mismo término, o tendríamos $\mathcal{A}_3 \vdash p_1 * ip_2 \neq q_1 * dq_2$ (lema 2.1), contradiciendo nuestra hipótesis de consistencia. Dicho término se escribe entonces simultáneamente como

$$f_1...f_n i f'_1...f'_m 1 \qquad \text{y} \qquad g_1...g_k d g'_1...g'_l 1. \tag{16}$$

Es decir, los functores de los términos en (16) deben igualarse uno a uno, de donde $n \neq k$. Si $n > k$, entonces $f_1...f_k 1$ y $g_1...g_k 1$ son el mismo término, f_{k+1} es d y $f_1...f_n i f'_1...f'_m 1$ es $g_1...g_k d...f_n i f'_1...f'_m 1$. Tenemos entonces:

1.	$f_1...f_n 1 * i f'_1...f'_m 1 = g_1...g_k d...f_n * i f'_1...f'_m 1$	(proposición 2.5)
2.	$f_1...f_n 1 = g_1...g_k d...f_n 1$	de 1 (afirmación 2.11)
3.	$\exists r(f_1...f_n 1 = g_1...g_k 1 * dr)$	de 1 (introducción de cuantificador existencial y proposición 2.5)

Así que $\mathcal{A}_3 \cup \{p_1 * ip_2 = q_1 * dq_2\} \vdash \exists r(p_1 = q_1 * dr)$, de lo que a su vez se deduce $q_1 < p_1$ (por *A7c*). Análogamente, si $n < k$, obtendríamos $\mathcal{A}_3 \cup \{p_1 * ip_2 = q_1 * dq_2\} \vdash \exists r(q_1 = p_1 * ir)$. De esto último y *A7c* se deduce $q_1 < p_1$. Con esto queda demostrado el resultado para términos puros. El teorema 2.9 nos permite extenderlo a todos los términos cerrados de $\mathcal{L}_3$, con lo que terminamos la demostración. □

Ahora veremos que $<$ es un orden estricto para los términos cerrados de $\mathcal{L}_3$; es decir, que es una relación irreflexiva, transitiva y tricotómica para estos términos.

Proposición 2.22. *La relación $<$ es un orden estricto para los términos cerrados de $\mathcal{L}_3$. Es decir, para todos términos cerrados t_1, t_2 y t_3 de $\mathcal{L}_3$ se tiene:*

- *(irreflexividad)* $\mathcal{A}_3 \vdash \neg(t < t)$
- *(transitividad)* $\mathcal{A}_3 \vdash (t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_3) \to t_1 < t_3$
- *(tricotomía)* $$\begin{aligned}[\mathcal{A}_3 \vdash (t_1 < t_2) \vee (t_2 < t_1) \vee (t_1 = t_2) \cdots \\ \wedge (t_2 < t_1) \to (\neg(t_1 < t_2) \wedge t_2 \neq t_1) \cdots \\ \wedge (t_1 = t_2) \to (\neg(t_1 < t_2) \wedge \neg(t_2 < t_1))].\end{aligned}$$

Demostración. La irreflexividad y la transitividad las tenemos por los axiomas *A7a-b*. Probemos la tricotomía, es decir, que para cada pareja de términos cerrados t_1 y t_2 de $\mathcal{L}_3$ se tiene que o bien t_1 y t_2, o $t_1 < t_2$, o $t_2 < t_1$, y sólo ocurre una de estas opciones. Sean t_1, t_2 términos cerrados de $\mathcal{L}_3$. Veremos que:

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}_3 \vdash (t_1 < t_2) \vee (t_2 < t_1) \vee (t_1 = t_2) \cdots \\ \wedge (t_1 < t_2) \to (\neg(t_2 < t_1) \wedge t_1 \neq t_2) \cdots \\ \wedge (t_2 < t_1) \to (\neg(t_1 < t_2) \wedge t_2 \neq t_1) \cdots \\ \wedge (t_1 = t_2) \to (\neg(t_1 < t_2) \wedge \neg(t_2 < t_1)) \cdots].\end{aligned}$$

De la transitividad y la reflexividad se sigue fácilmente

$$\mathcal{A}_3 \vdash (t_1 < t_2) \to (\neg(t_2 < t_1) \wedge t_1 \neq t_2);$$
$$\mathcal{A}_3 \vdash (t_2 < t_1) \to (\neg(t_1 < t_2) \wedge t_2 \neq t_1); \text{ y}$$
$$\mathcal{A}_3 \vdash (t_1 = t_2) \to (\neg(t_1 < t_2) \wedge \neg(t_2 < t_1).$$

De *A7b* y el supuesto $t_1 < t_2$, si suponemos además $t_2 < t_1$, podríamos deducir de éstos $t_1 < t_1$, lo que contradice *A7a*. Por reducción al absurdo, tenemos $\neg(t_2 < t_1)$. Lo mismo pasa si suponemos $t_2 = t_1$. Así, tenemos $A \vdash (t_1 < t_2) \to (\neg(t_2 < t_1) \wedge t_1 \neq t_2)$. Una prueba análoga muestra que $\mathcal{A}_3 \vdash (t_2 < t_1) \to (\neg(t_1 < t_2) \wedge t_2 \neq t_1)$. Finalmente, del supuesto $t_1 = t_2$, al suponer además $(t_2 < t_1)$ o $(t_2 < t_1)$ obtenemos nuevamente una contradicción con *A7a*; concluimos $\mathcal{A}_3 \vdash (t_1 = t_2) \to (\neg(t_1 < t_2) \wedge \neg(t_2 < t_1)$.

Queremos ver ahora que $\mathcal{A}_3 \vdash (t_1 < t_2) \vee (t_2 < t_1) \vee (t_1 = t_2)$. Veamos primero qué pasa en el caso de términos puros. Sean t_1 y t_2 los términos $f_1...f_n1$ y $g_1...g_m1$ respectivamente. Supongamos *s.p.g.* $n \leq m$. Si t_1 y t_2 son el mismo término, entonces $\mathcal{A}_3 \vdash t_1 = t_2$. Si son términos distintos, consideramos $U = \{j \in \{1, ...n\} | f_j \neq g_j\}$. Si $U = \emptyset$, entonces $n < m$ y t_2 es $f_1...f_n g_{n+1}...g_m 1$, de donde $\mathcal{A}_3 \vdash t_2 = t_1 * g_{n+1}...g_m 1$. Si g_{n+1} es i, entonces $\mathcal{A}_3 \vdash t_2 < t_1$ (introducimos el cuantificador existencial sobre $g_{n+2}...g_m 1$ para obtener $\mathcal{A}_3 \vdash \exists r(t_2 = t_1 * ir)$ y usamos *A7c*); si es d, análogamente $\mathcal{A}_3 \vdash t_1 < t_2$. Si $U \neq \emptyset$, entonces tiene primer elemento j, para el cual f_j y g_j son uno i y otro d. Si f_j es i y g_j es d, entonces $\mathcal{A}_3 \vdash f_1...f_{j-1}1 = g_1...g_{j-1}1$. Introduciendo sobre este término y sobre $f_{j+1}...f_n1$ y $g_{j+1}...g_m1$ cuantificadores existenciales, tenemos $\mathcal{A}_3 \vdash \exists pqr(t_1 = p * iq \wedge t_2 = p * dq)$ y consecuentemente (*A7c*) $\mathcal{A}_3 \vdash t_1 < t_2$. Si f_j es d y g_j es i con un razonamiento similar concluimos $\mathcal{A}_3 \vdash t_1 < t_2$. Con esto mostramos la tricotomía para términos puros y que sobre estos términos $<$ es un orden estricto. Utilizando el teorema 2.9 podemos extender el resultado a términos de $\mathcal{L}_3$. $\square$

En $\mathcal{L}_3$ sí ampliamos nuestro conjunto de fórmulas atómicas respecto a $\mathcal{L}_2$; sin embargo, gracias a la tricotomía para términos cerrados de $\mathcal{L}_3$, tenemos que de $\mathcal{A}_3$ también se puede deducir toda sentencia atómica o su negación: las igualdades las tenemos ya del respectivo resultado en $\mathcal{A}_2$. Si φ es $t < t'$ para t y t' términos cerrados de $\mathcal{L}_3$, la tricotomía que recién probamos para este caso garantiza que o bien $\mathcal{A}_3 \vdash t < t'$ o $\mathcal{A}_3 \vdash \neg(t < t')$.

Corolario 2.23. *Sea* $\Delta := \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}_3) | \varphi$ *es atómica*$\}$. *Entonces para toda* $\varphi \in \Delta$ *se tiene* $\mathcal{A}_3 \models \varphi$ *o* $\mathcal{A}_3 \models \neg\varphi$.

Observación 2.2. *Notamos que la fórmula* $\forall xy(x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y)$ *define una nueva relación de orden que conforma un orden parcial para los términos cerrados de* $\mathcal{L}_3$*: para todos términos cerrados* t, t' *y* t'' *se tiene* $\mathcal{A}_3 \vdash t \leq t$ *(es reflexiva);* $\mathcal{A}_3 \vdash t(\leq t' \wedge t' \leq t) \to t = t'$ *(es antisimétrica); y* $\mathcal{A}_3 \vdash (t \leq t' \wedge t' \leq t'') \to t \leq t''$ *(es transitiva).*

$\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{A}_3$ nos dan una teoría axiomática básica para la estructura arbórea $\overline{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{A}$.Sin embargo, queremos que nuestra teoría describa también la estructura aritmética del modelo estándar que tenemos en mente ($\mathbb{Q}^+$). Expandiremos una vez más el lenguaje y la teoría con este propósito.

2.4. Aritmética arbórea: incorporación de las operaciones $+, \times$ y $\div$

Queremos introducir las operaciones usuales de suma, producto y cociente en los números racionales, así que añadimos tres nuevos functores al lenguaje. Notamos que la interpretación que queremos dar a d en el modelo estándar que tenemos en mente es la misma que la de la función *sucesor* en la aritmética de Peano: $dx = x + 1$. Utilizaremos este hecho para dar definiciones recursivas de suma y producto sobre los términos cerrados. Sea $\mathcal{L}_4 = \{1, i, d, *, ()^{-1}, (^{-}), +, \times, \div, <\}$; añadimos los axiomas siguientes:

$A8a)\forall x(x + 1 = dx)$	$A9a)\forall x(x \times 1 = x)$	$A10a)\forall xy\left(x/y = x \times y^{-1}\right)$
$A8b)\forall xy\,(x + dy = d(x + y))$	$A9b)\forall xy\,(x \times dy = (x \times y) + x)$	$A10b)\forall xy\left(dx/y = x/y + y^{-1}\right)$
	$A9c)\forall xy\left(x \times x^{-1} = 1\right)$	

Sea $\mathcal{A}_4' = \mathcal{A}_3 \cup \{A8a\text{-}b, A9a\text{-}c, A10a\text{-b}\}$. Notamos que $\mathcal{A}_4' \vdash 1 = 1/1$, lo que es un caso particular del siguiente resultado.

Proposición 2.24. *Para todo término t de $\mathcal{L}_4$ se tiene $\mathcal{A}_4' \vdash t/1 = t$, $\mathcal{A}_4' \vdash 1/t = t^{-1}$ y $\mathcal{A}_4' \vdash t/t = 1$.*

Demostración. Dado un término t en $\mathcal{L}_4$, de $A10a$ se deduce $t/1 = t \times 1^{-1}$ y $1/t = 1 \times t^{-1}$, de donde $\mathcal{A}_4' \vdash t/1 = t$ y $\mathcal{A}_4' \vdash 1/t = t^{-1}$. También de $A10a$ se deduce $t/t = t \times t^{-1}$ y de aquí y $A9c$ que $t/t = 1$. □

Aunque $\mathcal{A}_4'$ define sólo parcialmente a $+, \times$ y $\div$, basta para determinar cómo operan sobre los términos puros de la forma $d...d1$, a los que llamaremos términos *naturales*. De aquí y las otras operaciones deduciremos cómo se comportan sobre el resto de los términos cerrados.

Definición 2.2. *Decimos que un término puro t (término cerrado de $\mathcal{L}_1$) es un término natural si es la constante 1 o si es de la forma $f_n...f_1 1$, con $f_j = d$ para $j \in \{1, ..., n\}$.*

Enunciamos algunos hechos claros sobre términos naturales.

Proposición 2.25. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un término natural de longitud n. Además, si t es un término natural de longitud n:*

I) *El término dt es un término natural de longitud $n + 1$.*

II) *El término it no es un término natural.*

III) *t es el único término de longitud n que es un término natural.*

IV) *Si t no es la constante 1, entonces es el término dt', donde t' es el término natural de longitud $n - 1$.*

Demostración. Es claro que dado $n \in \mathbb{N}$ existe un término natural de longitud n. Sea t un término natural con $long(t) = n$. (I) y (II) son inmediatos de la definición de término natural. Para (III) hacemos inducción sobre n. Si $n = 0$, entonces t es 1 y éste es el único término natural de longitud 0. Supongamos que t' es el único término natural de longitud k; si t'' es un término puro de longitud $k + 1$, entonces t'' es o bien dt' o it'. De estos dos, sólo dt' es un término natural, así que éste es el único término natural de longitud $k + 1$ (queda probado (III)); si $n = k + 1$, este término debe ser t, de donde se sigue (IV). □

Pueden probarse muchas propiedades (conmutatividad, distributividad, asociatividad) sobre las operaciones actuando sobre términos naturales e incluso para algunos términos más, pero hay que ser cuidadoso con los detalles. Probaremos sólo una de ellas como ejemplo, puesto que no las utilizaremos en pruebas subsiguientes y son similares a las que se dan para las correspondientes propiedades en la aritmética de Peano.

Proposición 2.26. *(Asociatividad de la suma para términos naturales)*
Sean t_1*,* t_2 *términos de* $\mathcal{L}_4$*. Para todo término natural* t *se tiene* $\mathcal{A}'_4 \vdash (t_1+t_2)+t = t_1+(t_2+t)$*.*

Demostración. Sean t_1, t_2 términos de $\mathcal{L}_4$ y sea t un término natural. Haremos inducción sobre $long(t)$. Si $long(t) = 0$, entonces t es 1 y

1.	$(t_1 + t_2) + 1 = d(t_1 + t_2)$	de $A8a$
2.	$d(t_1 + t_2) = t_1 + d(t_2)$	de $A8b$
3.	$t_1 + d(t_2) = t_1 + (t_2 + 1)$	de $A8a$
4.	$(t_1 + t_2) + 1 = t_1 + (t_2 + 1)$	de 1-3

Así, $\mathcal{A}'_4 \vdash (t_1 + t_2) + t = t_1 + (t_2 + t)$. Ahora supongamos que para todo término natural p con $long(p) = n$ se tiene $\mathcal{A}'_4 \vdash (t_1 + t_2) + p = t_1 + (t_2 + p)$. Si t es de longitud $n + 1$, tenemos que t es dt' para algún término natural t' de longitud n, para el que aplica nuestra hipótesis de inducción. Entonces:

1.	$(t_1 + t_2) + t = (t_1 + t_2) + dt'$	pues t es dt'
2.	$(t_1 + t_2) + dt' = d((t_1 + t_2) + t')$	de $A8b$
3.	$d((t_1 + t_2) + t') = d(t_1 + (t_2 + t'))$	deducible de $\mathcal{A}'_4$ *(h.i.)*
4.	$d(t_1 + (t_2 + t')) = t_1 + d(t_2 + t')$	de $A8b$
5.	$t_1 + d(t_2 + t') = t_1 + (t_2 + dt')$	de $A8b$
6.	$t_1 + (t_2 + dt') = t_1 + (t_2 + t)$	pues t es dt'
7.	$(t_1 + t_2) + t = t_1 + (t_2 + t)$	de 1-7

□

Veamos que la suma y el producto de términos naturales son cada uno demostrablemente equivalentes a un término natural.

Proposición 2.27. *Sean* t_1*,* t_2 *términos naturales. Entonces* $\mathcal{A}'_4 \vdash t_1 + t_2 = t$*, donde* t *es el término natural de longitud* $long(t_1) + long(t_2) + 1$*.*

Demostración. Sean t_1, t_2 términos naturales. Haremos inducción sobre $n = long(t_1)+long(t_2)$. Si $n = 0$, entonces tanto t_1 como t_2 son la constante 1 y tenemos por $A8a$ que $\mathcal{A}'_4 \vdash 1+1 = d1$, y $d1$ es el término natural de longitud $n+1 = 1$. Supongamos ahora que para todos términos naturales p_1 y p_2 tales que $n = long(p_1) + long(p_2)$ se tiene que $\mathcal{A}'_4 \vdash p_1 + p_2 = p$, donde p es el término natural con $long(p) = long(p_1)+long(p_2)+1$. Ahora supongamos $long(t_1)+long(t_2) = n+1$. Ya que t_2 es término natural, tenemos que es o bien la constante 1, o dt'_2 para el natural t'_2 con $long(t_2) = long(t'_2)+1$ (proposición 3.1). En el primer caso, tenemos que $\mathcal{A}'_4 \vdash t_1+t_2 = dt_1$, y dt_1 es un término natural de longitud $long(t_1)+1 = long(t_1)+long(t_2)+1$ y se cumple nuestra afirmación. En el segundo caso, $long(t_1) + long(t'_2) = n$ y por hipótesis de inducción tenemos $\mathcal{A}'_4 \vdash t_1+t'_2 = t'$, con t' el término natural de longitud $long(t_1)+long(t'_2)+1 = n+1$. Deducimos entonces:

1.	$t_1 + t_2 = t_1 + dt'_2$	(t_2 es dt'_2)
2.	$t_1 + dt'_2 = d(t_1 + t'_2)$	de $A8b$
3.	$t_1 + t'_2 = t'$	deducible de $\mathcal{A}'_4$ (*h.i.*)
4.	$t_1 + t_2 = dt'$	de 1-3

Ya que t' es el término natural de longitud $n+1$, dt' es el término natural t de longitud $n+1+1$, de donde $\mathcal{A}'_4 \vdash t_1 + t_2 = t$, con $long(t) = long(t_1) + long(t_2) + 1$. □

Corolario 2.28. *Sean a y b términos naturales de longitudes n y m respectivamente. Entonces $\mathcal{A}'_4 \vdash a + b = d(a * b)$.*

Demostración. Sean a y b los términos naturales $f_n...f_1 1$ y $g_m...g_1 1$. Entonces $\mathcal{A}'_4 \vdash a + b = h_{m+n+1} h_{m+n}...h_1 1$, donde todos los functores h_i son d. Ya que $\mathcal{A}'_4 \vdash d(a * b) = df_n...f_1 g_m...g_1 1$ (corolario 2.5), $d(a*b)$ es un término natural de longitud $m+n+1$, al igual que $h_{m+n+1}h_{m+n}...h_1 1$. De la proposición 3.1 concluimos que son el mismo término, de donde $\mathcal{A}'_4 \vdash a+b = d(a*b)$. □

Proposición 2.29. *Sean t_1 y t_2 términos naturales con longitudes m_1 y m_2 respectivamente. $\mathcal{A}'_4 \vdash t_1 \times t_2 = t$, donde t es el término natural de longitud $((m_1 + 1) \times (m_2 + 1)) - 1$.*

Demostración. Sean t_1, t_2 términos naturales de longitudes m_1 y m_2 respectivamente. Observamos que $((m_1 + 1) \times (m_2 + 1)) - 1$ es siempre un número natural. Haremos inducción sobre $n = m_1 + m_2$. Si $n = 0$, entonces tanto t_1 como t_2 son la constante 1 y tenemos por $A9a$ que $\mathcal{A}'_4 \vdash 1 \times 1 = 1$. 1 es un término natural y $(m_1 + 1 \times m_2 + 1) - 1 = (1 \times 1) - 1 = 0 = long(1)$, así que se cumple nuestra afirmación para este caso. Supongamos ahora que para todos términos p_1 y p_2 con $long(p_1) + long(p_2) = n$ se tiene que $\mathcal{A}'_4 \vdash p_1 \times p_2 = p$, donde p es el término natural de longitud $((long(p_1) + 1) \times (long(p_2) + 1)) - 1$. Ahora supongamos $m_1 + m_2 = n + 1$. Ya que t_2 es término natural, tenemos que es o bien la constante 1 o es dt'_2 para el término natural t'_2 con $long(t'_2) = m_2 - 1$. Si t_2 es la constante 1, tenemos por $A9a$ que $\mathcal{A}'_4 \vdash t_1 \times t_2 = t_1$, y $((m_1 + 1) \times (m_2 + 1)) - 1 = ((m_1 + 1) \times 1) - 1 = m_1 = long(t_1)$. Si t_2 es dt'_2, entonces $long(t_1) + long(t'_2) = n$ y por hipótesis de inducción $\mathcal{A}'_4 \vdash t_1 \times t'_2 = t'$, con t' el término natural de longitud $((m_1 + 1) \times m_2) - 1$. Deducimos entonces:

1.	$t_1 \times t_2 = t_1 \times dt'_2$	pues t_2 es dt'_2
2.	$t_1 \times dt'_2 = (t_1 \times t'_2) + t_1$	de $A9b$
3.	$t_1 \times t'_2 = t'$	deducible de $\mathcal{A}'_4$, con t' un término natural (*h.i.*)
4.	$t_1 \times dt'_2 = t' + t_1$	de 2 y 3 por eliminación de la identidad
5.	$t_1 \times t_2 = t' + t_1$	de 1 y 4 por eliminación de la identidad

Ya que t_1 y t' son términos naturales, entonces $\mathcal{A}'_4 \vdash t_1 \times t' = t$, con t el término natural de longitud $long(t_1) + long(t') + 1$ (proposición 2.27), de donde $long(t) = m_1 + ((m_1 + 1) \times m_2) - 1 = ((m_1 + 1) \times (m_2 + 1)) - 1$ con lo que queda probada nuestra afirmación. □

Corolario 2.30. *Para todo término t de $\mathcal{L}_4$, si t es equivalente a la suma o producto de términos naturales, entonces t es equivalente a un término natural: si existen términos naturales n y m tales que $\mathcal{A}'_4 \vdash t = n + m$, entonces existe un término natural t' tal que $\mathcal{A}'_4 \vdash t = t'$.*

Utilizamos este hecho para dar una definición recursiva que nos permita expresar a cada término puro como un cociente de naturales. Sea $\mathcal{A}_4'' = \mathcal{A}_4' \cup \{A11a\text{-}b\}$, con:

$$A11a)\ \forall x\left(x = \frac{y}{z} \to ix = \frac{y}{y+z}\right) \qquad A11b) \forall x\left(x = \frac{y}{z} \to dx = \frac{y+z}{z}\right).$$

Ya que $\mathcal{A}_4' \vdash 1 = 1/1$, los axiomas $A11a$ y $A11b$ y las proposiciones 2.27 y 2.29 garantizan que cada término puro es demostrablemente igual a un cociente de términos naturales.

Proposición 2.31. *Para todo término puro t existen términos naturales n y m tales que $\mathcal{A}_4'' \vdash t = n/m$.*

Demostración. Sea t un término puro. Haremos inducción sobre $long(t)$. Si $long(t) = 0$, entonces t es la constante 1 y $\mathcal{A}_4'' \vdash 1 = 1/1$; ya que 1 es un término natural, se cumple nuestra afirmación. Supongamos ahora que para todo término p de longitud k se cumple que existen términos naturales n' y m' tales que $\mathcal{A}_4'' \vdash p = n/m$. Entonces si $long(t) = k+1$, t es o bien dt' o it' para t' un término puro de longitud k, así que por hipótesis de inducción existen términos naturales n y m tales que $\mathcal{A}_4'' \vdash t' = n/m$. Ahora, por $A11a$ y $A11b$, tenemos $\mathcal{A}_4'' \vdash dt' = (n+m)/m$ y $\mathcal{A}_4'' \vdash it' = n/(n+m)$. Ya que n y m son términos naturales, existe un término natural l tal que $\mathcal{A}_4'' \vdash n + m = l$ (proposición 2.27). Así, $\mathcal{A}_4'' \vdash t = n/l$ y $\mathcal{A}_4'' \vdash t = l/m$ para n, m y l términos naturales, como queríamos probar. ☐

Notamos que el recíproco de cada término natural t es equivalente al término puro de la misma longitud que t, pero con todas las letras funcionales i. De este hecho y del axioma $A10a$ podemos concluir que los cocientes de naturales son demostrablemente equivalentes a términos de la forma $d...d1 \times i...i1$. Por tanto (proposición 2.31), todo término puro también lo es.

Corolario 2.32. *Para todos términos naturales a y b existen términos puros $f_n...f_1 1$ y $g_m...g_1$ tales que $f_j = d$ para $j \in \{1, ..., n\}$, $g_j = i$ para $j \in \{1, ..., m\}$ y $\mathcal{A}_4'' \vdash a/b = f_n...f_1 1 \times g_m...g_1$.*

Ahora daremos axiomas para definir la suma y el producto para todos los términos cerrados de $\mathcal{L}_4$ a través de los cocientes de naturales. Sea $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_4'' \cup \{A12a\text{-}c\}$, con:

$$A12a)\ \forall xyzw\left(\frac{x}{w} + \frac{y}{z} = \frac{(x \times z) + (y \times w)}{z \times w}\right) \qquad A12b) \forall xyzw\left(\frac{x}{w} \times \frac{y}{z} = \frac{x \times y}{z \times w}\right)$$

$$A12c)\ \forall xyzw\left(\frac{x/w}{y/z} = \frac{(x \times z)}{(y \times w)}\right).$$

Observación 2.3. *Si w es la constante 1, ya que para todo término t se tiene $\mathcal{A}_4 \vdash t/1 = t$ y que $t \times 1 = t$, entonces de los axiomas A12a y A12b se deducen los siguientes hechos, que usaremos frecuentemente:*

$$\forall xyz\left(x + \frac{y}{z} = \frac{(x \times z) + y}{z}\right) \quad y \quad \forall xyz\left(x \times \frac{y}{z} = \frac{x \times y}{z}\right). \tag{17}$$

Proposición 2.33. *Para todos t y t' términos de $\mathcal{L}_4$ se tiene $\mathcal{A}_4 \vdash (t/t')^{-1} = t'/t$.*

Demostración. Damos la siguiente deducción:

1.	$1/(t/t') = (t/t')^{-1}$	(proposición 2.24)
2.	$1/(t/t') = (1/1)/(t/t')$	deducible de $\mathcal{A}_4$, pues $\mathcal{A}_4 \vdash 1 = 1/1$
3.	$(1/1)/(t/t') = (t' \times 1)/(t \times 1)$	de $A12c$
4.	$(t' \times 1)/(t \times 1) = t'/t$	$A9a$
5.	$(t/t')^{-1} = t'/t$	de 1-4

□

Con $A12a$-c las operaciones quedan definidas para todos los cocientes de naturales, y por tanto, para todos los términos puros y para todos los términos cerrados de $\mathcal{L}_3$. Si todo término cerrado de $\mathcal{L}_4$ es equivalente a un término puro, tendremos las operaciones definidas para todos los términos cerrados de $\mathcal{L}_4$, además de que $\mathcal{A}_4$ podrá deducir toda formula atómica de $\mathcal{L}_4$ o su negación. Para probar que cada cociente de naturales es equivalente a un término puro nos basaremos en dos resultados: el algoritmo de la división y el algoritmo de Euclides.

Teorema 2.34. *(Algoritmo de la división)*

Sean a y b términos naturales con $long(b) \leq long(a)$. Entonces se cumple una de las siguientes opciones:

I . *Existe q término natural tal que $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = q$.*

II . *Existen q y r términos naturales tales que $long(r) < long(b)$ y $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = q + (r/b)$.*

Notamos que si $long(a) = long(b)$, entonces a y b son el mismo término (proposición 3.1) y $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = 1$ (proposición 2.24), cumpliendo (I). Por tanto, el enunciado del teorema abarca todas las parejas de términos naturales a y b. Antes de pasar a la demostración, vale la pena mirar qué significa intuitivamente esta afirmación en $\overline{\mathbf{A}}$. Expresar a/b como $q + (r/b)$ con $long(r) < long(b)$ es separar a/b en su parte entera (q) más algo menor que 1 (r/b). Si tomamos un término puro, ya que aplicar d es sumar 1, expresar a a/b como $q + (r/b)$ equivale a separar todas las d's que aparecen al comienzo de dicho término, expresándolo como la suma de un término natural y de otro que comienza con el functor i (menor que 1). En la estructura arbórea, esto corresponde a tomar el último descendiente izquierdo que se tomó en la formación del término, y expresar los últimos q descendientes derechos como la suma de un término natural. Lo que el teorema 2.34 dice sobre los términos de la estructura arbórea es que o bien están sobre la rama derecha, correspondiente a los naturales, o pueden ser expresados como un término r/b que es el descendiente izquierdo de alguien, más una serie de descendientes derechos, con el término r/b claramente en un nivel de $\overline{\mathbf{A}}$ superior al de a/b.

Demostración. (del teorema 2.34) Sean a y b términos naturales. Ya vimos qué ocurre si long(a)=long(b). Supongamos $long(b) < long(a)$. Tomemos b fijo y hagamos inducción sobre $long(a)$. No puede pasar $long(a) = 0$, así que tomamos $long(a) = 1$. En este caso b debe ser 1, puesto que $long(a) > long(b)$, de donde a/b es $a/1$ y $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = a$ (proposición 2.24), cumpliendo (I). Supongamos ahora que para el término natural t con $long(t) = n > long(b)$, se cumplen (I) o (II) para el cociente de naturales t/b; es decir, o bien existe q' término natural tal que $\mathcal{A}_4 \vdash t/b = q'$, o existen q' y r' términos naturales con $long(r) < long(b)$ tales que $\mathcal{A}_4 \vdash t/b = q' + (r'/b)$. Veamos qué ocurre si $long(a) = n + 1$. Ya que a es término natural, por la proposición (3.1) sabemos que a es dt, donde t es el término natural tal que $long(a) = long(t) + 1$. Por $A10b$ tenemos $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = (t/b) + (1/b)$. Analicemos los casos para equivalencias de t/b dados por la hipótesis inductiva:

- Si $\mathcal{A}_4 \vdash t/b = q'$ con q' término natural, entonces $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = q' + (1/b)$. Si b es 1, tenemos $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = dq'$.

- Si se cumple $\mathcal{A}_4 \vdash t/b = q' + (r'/b)$, con q' y r' términos naturales tales que $long(r') < long(b)$, entonces

$$
\begin{array}{lll}
1. & a/b = (t/b) + (1/b) & \\
2. & a/b = (q' + (r'/b)) + (1/b) & \text{de 1 y de hipótesis} \\
3. & a/b = (((q' \times b) + r')/b) + (1/b) & \text{de 2 y de } A12a \\
4. & a/b = (d((q' \times b) + r')/b) & \text{de 3 y de } A10b \\
5. & a/b = ((q' \times b) + dr')/b) & \text{de 4 y de } A8b \\
6. & a/b = q' + (dr'/b) & \text{de 5 y de } A12a \\
7. & a/b = q' + ((r'/b)) + (1/b)) & \text{de 6 y de } A10b \\
8. & a/b = q' + (dr'/b)) & \text{de 7 y de } A10b
\end{array}
$$

  Ya que $long(r') < long(b)$, entonces $long(b) = long(r') + 1$ o $long(r') + 1 < long(b)$. En el primer caso tenemos $\mathcal{A}_4 \vdash dr' = b$, por lo que $\mathcal{A}_4 \vdash dr'/b = 1$ (por $A10c$) y $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = dq'$, cumpliendo (I). En el segundo caso, dr' es un término natural de longitud menor a la de b tal que $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = q' + (dr'/b)$, cumpliendo (II).

□

La aplicación reiterada del algoritmo de la división nos brinda una manera de dar para un cociente de naturales un término equivalente de la forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

donde $a_0, ..., a_n$ son términos naturales. Teniendo una expresión de este estilo, será fácil encontrar el término puro que le corresponde. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.5. *Tomemos el término:*

$$d1 + \cfrac{1}{dd1 + \cfrac{1}{ddd1 + \cfrac{1}{dddd1}}}.$$

Aprovechando que $\mathcal{A}_4 \vdash 1/x = x^{-1}$, que el recíproco de un término puro equivale a intercambiar las i's por d's y viceversa y que sabemos sumar en el sistema un término natural a un término *puro: $a+b=d(a*b)$ (corolario 2.28); es demostrable en $\mathcal{A}_4$:*

$$\begin{aligned} d1+\cfrac{1}{dd1+\cfrac{1}{ddd1+\cfrac{1}{dddd1}}} &= d1+\cfrac{1}{dd1+\cfrac{1}{ddd1+iiii1}} = d1+\cfrac{1}{dd1+\cfrac{1}{ddddiiii1}} = d1+\cfrac{1}{dd1+iiiidddd1} \\ &= d1+\cfrac{1}{dddiiiidddd1} = d1+iiiddddiiii1 = ddiiiddddiiii1. \end{aligned}$$

La prueba formal es laboriosa por la notación, pero la idea es la misma que hemos planteado aquí; teniéndola presente resultan claros los siguientes resultados.

Teorema 2.35. *(Algoritmo de Euclides)*

Sean a y b términos naturales. Existen $q_0,...q_n$ términos naturales para los que se cumple una de las siguientes:

$$\mathcal{A}_4 \vdash \frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_n}}} \qquad o \qquad \mathcal{A}_4 \vdash \frac{a}{b} = \cfrac{1}{q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}} \tag{18}$$

Demostración. Sean a y b términos naturales. Supongamos $long(b)\leq long(a)$. Por el algoritmo de la división (teorema 2.34) sabemos que se cumple una de las siguientes:

I) existe q_0 término natural tal que $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = q_0$

II) existen q_0 y r_0 términos naturales tales que $long(r_0) < long(b)$ y $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = q_0 + (r_0/b)$.

Si pasa (I), es inmediato que se cumple nuestra afirmación. Si no, entonces debe suceder (II). Utilizando los axiomas $A10a$ y el hecho de que $\mathcal{A}_4 \vdash (r_0/b)^{-1} = b/r_0$ (proposición 2.33), tenemos

$$\mathcal{A}_4 \vdash \frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_0}}.$$

Aplicando nuevamente el algoritmo de la división, sabemos que se cumple una de las siguientes:

I) existe q_1 término natural tal que $\mathcal{A}_4 \vdash b/r_0 = q_1$

II) existen q_1 y r_1 términos naturales tales que $long(r_1) < long(r_0)$ y $\mathcal{A}_4 \vdash b/r_0 = q_1 + (r_1/r_0)$.

Si sucede (I), tenemos:

$$\mathcal{A}_4 \vdash \frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1},$$

como queremos probar. Si ocurre (II), consideramos

$$\mathcal{A}_4 \vdash \frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}$$

y volvemos a aplicar el algoritmo de la división a r_0/r_1. Continuamos así sucesivamente, obteniendo una sucesión de términos naturales $q_0, q_1, q_2, ...$ y $r_0, r_1, r_2, ...$, con $long(r_0) > long(r_1) > long(r_2)...$, a cuyos cocientes consecutivos r_i/r_{i+1} podemos aplicar el algoritmo de la división. No puede ocurrir indefinidamente la opción (II), pues tendríamos un conjunto no vacío de naturales sin primer elemento. Así, en algún momento sucede (I) y

$$\mathcal{A}_4 \vdash \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n,$$

produciendo

$$\mathcal{A}_4 \vdash \frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}.$$

Si tuviéramos $long(a) < long(b)$, ya que $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = (b/a)^{-1}$, podemos aplicar lo arriba descrito a b/a y obtenemos

$$\mathcal{A}_4 \vdash \frac{a}{b} = \cfrac{1}{q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}.$$

$\square$

Lema 2.36. *Dados $a_0, ..., a_n$ términos naturales, se cumple:*

$$\mathcal{A}_4 \vdash a_n + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}} = \underbrace{d \dots d}_{m_n} \cdots \underbrace{i \dots i}_{m_1} \underbrace{d \dots d}_{m_0} 1 \qquad \textit{si } n \textit{ es par}$$

$$\mathcal{A}_4 \vdash a_n + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}} = \underbrace{d \dots d}_{m_n} \cdots \underbrace{d \dots d}_{m_1} \underbrace{i \dots i}_{m_0} 1 \qquad \textit{si } n \textit{ es impar,}$$

donde $m_0 = long(a_0)$ y $m_i = long(a_i) + 1$ para $i \in \{1, ..., n\}$.

Demostración. Haremos inducción sobre el número de términos naturales $a_0, ..., a_n$. Para un solo término natural a_0 con $long(a_0) := m_0$, a_0 es $\underbrace{d \dots d}_{m_0} 1$, de donde:

$$\mathcal{A}_4 \vdash \underbrace{d \dots d}_{m_0} 1 = a_0.$$

Esto cumple la afirmación del lema, puesto que 0 es par. Supongamos que para todos $a_0, ..., a_n$ términos naturales con $long(a_0) = m_0$, $long(a_i) + 1 := m_i$ para $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene:

$$\mathcal{A}_4 \vdash a_n + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_0}} = \underbrace{d\ldots d}_{m_n} \cdots \underbrace{i\ldots i}_{m_1}\underbrace{d\ldots d}_{m_0}1 \qquad \text{si } n \text{ es par} \tag{19}$$

$$\mathcal{A}_4 \vdash a_n + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_0}} = \underbrace{d\ldots d}_{m_n} \cdots \underbrace{d\ldots d}_{m_1}\underbrace{i\ldots i}_{m_0}1 \qquad \text{si } n \text{ es impar} \tag{20}$$

Tomemos ahora $a_0, ..., a_n, a_{n+1}$ términos naturales y sean $m_0 := long(a_0)$, $m_i := long(a_i)+1$ para $i \in \{0, ..., n+1\}$. Si n es par, en cuyo caso $n+1$ es impar, entonces:

1. $a_{n+1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_0}}} = a_{n+1} + \cfrac{1}{\underbrace{d...d}_{m_n} \cdots \underbrace{i...i}_{m_1}\underbrace{d...d}_{m_0}1}$ deducible de $\mathcal{A}_4$ (*h.i.* (19))

2. $\cfrac{1}{\underbrace{d...d}_{m_n} \cdots \underbrace{i...i}_{m_1}\underbrace{d...d}_{m_0}1} = (\underbrace{d...d}_{m_n} \cdots \underbrace{i...i}_{m_1}\underbrace{d...d}_{m_0}1)^{-1}$ de $A10a$

3. $(\underbrace{d...d}_{m_n} \cdots \underbrace{i...i}_{m_1}\underbrace{d...d}_{m_0}1)^{-1} = \underbrace{i...i}_{m_n} \cdots \underbrace{d...d}_{m_1}\underbrace{i...i}_{m_0}1$ deducible de $\mathcal{A}_4$ (lema 2.7)

4. $a_{n+1} + \underbrace{i...i}_{m_n} \cdots \underbrace{d...d}_{m_1}\underbrace{i...i}_{m_0}1 = \underbrace{d...d}_{m_{n+1}}\underbrace{i...i}_{m_n} \cdots \underbrace{d...d}_{m_1}\underbrace{i...i}_{m_0}1$ deducible de $\mathcal{A}_4$ (proposición 2.28)

5. $a_{n+1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_0}}} = \underbrace{d...d}_{m_{n+1}}\underbrace{i...i}_{m_n} \cdots \underbrace{d...d}_{m_1}\underbrace{i...i}_{m_0}1$ de 1-4 eliminando identidades

Por otro lado, si n es impar, en cuyo caso $n+1$ es par, con una deducción totalmente análoga obtenemos:

$$\mathcal{A}_4 \vdash a_{n+1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_0}}} = \underbrace{d...d}_{m_{n+1}}\underbrace{i...i}_{m_n} \cdots \underbrace{i...i}_{m_1}\underbrace{d...d}_{m_0}1,$$

terminando así la prueba por inducción. □

Corolario 2.37. *Sean $a_0, ..., a_n$ términos naturales. Existe t término puro tal que*

$$\mathcal{A}_4 \vdash a_n + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}} = t.$$

Teorema 2.38. *Sean a y b términos naturales. Existe t término puro tal que $\mathcal{A}_4 \vdash a/b = t$; t está determinado por los naturales q_i obtenidos en el algoritmo de Euclides (teorema 2.35).*

Demostración. Sean a y b términos naturales. Por el algoritmo de Euclides (teorema 2.35) tenemos que existen $q_0, ..., q_n$ términos naturales tales que

$$\mathcal{A}_4 \vdash \frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}} \qquad \text{o} \qquad \mathcal{A}_4 \vdash \frac{a}{b} = \cfrac{1}{q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \tag{21}$$

El corolario 2.37 asegura entonces que existe un término puro t demostrablemente equivalente a a/b (en el segundo caso, tenemos que a/b es demostrablemente equivalente al recíproco de un término puro, que también es un término puro). El lema 2.36 nos dice exactamente quién es este término; en el primer caso de (21):

$$\underbrace{d \dots d}_{m_n} \cdots \underbrace{d \dots d}_{m_0} 1 = \overline{\underbrace{d \dots d}_{m_0} \cdots \underbrace{d \dots d}_{m_n} 1}$$

si n es par, y

$$\underbrace{d \dots d}_{m_n} \cdots \underbrace{i \dots i}_{m_0} 1 = \overline{\underbrace{d \dots d}_{m_0} \cdots \underbrace{i \dots i}_{m_n} 1}$$

si n es impar, donde $m_0 = long(q_0)$ y $m_i = long(q_i) + 1$ para $i \in \{1, ..., n\}$; en el segundo caso de (21) t sería el recíproco de los términos recién descritos. ☐

Lo que el algoritmo de Euclides nos da es un procedimiento para encontrar a partir de un término de la forma $d...d1 \times i...i1$ un término puro. Si partimos de un término puro t y queremos escribirlo como un producto de la forma $d...d1 \times i...i1$, hacer el proceso inverso nos da un algoritmo fácil que podemos seguir en $\overline{\mathbf{A}}$: partir de t en $\overline{\mathbf{A}}$ y regresar hasta el último descendiente izquierdo; ir al vértice simétrico de $\overline{\mathbf{A}}$ respecto a la vertical y repetir el procedimiento. Eventualmente llegamos a la raíz 1. Dicho en otros términos, separamos todos los primeros functores d hasta tener la suma de un término natural con un término puro que comienza con i: $t = d..d1 + it_1$, lo que equivale a separar la parte entera de t; tomamos el recíproco de it_1, produciendo un término puro que comienza con d, del que podemos separar nuevamente su parte entera: $(it_1)^{-1} = d...d1 + it_2$. Continuamos de esta manera, obteniendo términos t_i de longitud cada vez menor, hasta terminar con un término natural, obteniendo una expresión en fracción continua. Llevando a cabo las operaciones, se obtiene el cociente de naturales que nos da el término $d...d1 \times i...i1$ buscado.

Tenemos todo lo necesario para probar que todo término cerrado de $\mathcal{L}_4$ es demostrablemente equivalente a un término puro.

Teorema 2.39. *(De la representación canónica de términos de $\mathcal{L}_4$)*

Sea t un término cerrado de $\mathcal{L}_4 = \{1, i, d, *, (\,)^{-1}, (^{-}), +, \times, /, <\}$. Existe un término puro t' tal que $\mathcal{A}_4 \vdash t = t'$.

Demostración. Haremos inducción sobre la formación de términos de $\mathcal{L}_4$. Un término cerrado de $\mathcal{L}_4$ es o bien la constante 1 o uno de los siguientes: $ip, dp, p * q, p^{-1}, \overline{p}, p+q, p\times q$, o p/q, donde p y q son términos cerrados de $\mathcal{L}_4$. Si t es la constante 1, proponemos t' como 1 y trivialmente $\mathcal{A}_4 \vdash t = t'$. Supongamos ahora que para los términos cerrados p y q de $\mathcal{L}_4$ existen los términos puros p' y q' tales que $\mathcal{A}_4 \vdash p = p'$ y $\mathcal{A}_4 \vdash q = q'$. Si t es $ip, dp, p * q, p^{-1}$ o $\overline{p}$, la demostración es la misma que la del teorema 2.9. Veamos el resto de los casos.

- Si t es $p+q$, entonces sabemos que al ser términos puros, existen términos naturales a, b, c y d tales que $\mathcal{A}_4 \vdash p' = a/b$ y $\mathcal{A}_4 \vdash q' = c/d$ (proposición 2.31). Del axioma $A12a$ y de las proposiciones 2.27 y 2.29 podemos concluir que su suma es equivalente a un cociente de naturales. El teorema 2.38 dice entonces que es equivalente a un término puro.

1.	$p+q = p'+q'$	deducible de $\mathcal{A}_4$ (*h.i.*)
2.	$p'+q' = \dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$	deducible de $\mathcal{A}_4$ (proposición 2.31)
3.	$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d} = \dfrac{(a\times d)+(c\times b)}{b\times d}$	de $A12a$
4.	$\dfrac{(a\times d)+(c\times b)}{b\times d} = \dfrac{r}{s}$	donde r y s son términos naturales (proposiciones 2.27 y 2.29)
5.	$r/s = t$	donde t es un término puro (teorema 2.38)
6.	$p+q = t$	de 1-5 por eliminaciones de identidad

- Si t es de la forma $p \times q$, análogamente al caso anterior, tenemos (por hipótesis de inducción y por la proposición 2.31) que su producto es equivalente al producto de cocientes de naturales, que a su vez es demostrablemente equivalente a un cociente de naturales (proposiciones 2.27 y 2.29, el cual es demostrablemente equivalente a un término puro (teorema 2.38).

- Finalmente, si t es de la forma p/q, la demostración es la misma que en los casos anteriores, utilizando $A12c$ y la proposición 2.29 para ver que es demostrable en $\mathcal{A}_4$ que p/q es equivalente a un cociente de naturales, y con ello a un término puro.

□

Corolario 2.40. *Sea $\Delta_4 := \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}_4) | \varphi$ es atómica$\}$. Entonces para toda $\varphi \in \Delta$ se tiene $\mathcal{A}_4 \models \varphi$ o $\mathcal{A}_4 \models \neg\varphi$.*

Así, hemos construido la teoría axiomática buscada, $\mathcal{A}_4$. Aún nos falta añadir un axioma (o esquema de axioma) para hacer de nuestra teoría una descripción más precisa de $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$: el axioma de inducción. Antes de pasar a ello, hacemos algunos comentarios sobre los modelos de las teorías construidas.

2.5. El modelo estándar de la teoría axiomática: $\mathbb{Q}^+$ como $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$

Es tiempo de probar que las estructuras que teníamos en mente al dar $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ y $\mathcal{A}_4$ son en efecto modelo de las teorías axiomáticas que construimos. A pesar de saber qué es lo que buscábamos representar sobre $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$, no hemos dicho explícitamente cuáles son las expresiones matemáticas que definen en los racionales positivos a las funciones $*$ y $(^-)$ que interpretan a sus functores homólogos. Esto se debe a que, aunque su acción sobre $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$ es clara, su expresión matemática presenta dificultades de notación que las oscurece. Para esclarecerlas basta mantener en mente algunos detalles: 1)cada número racional positivo tiene una representación única en fracción continua (con las convenciones adecuadas), lo que nos permite definir funciones a través de ellas; 2) el teorema 1.1 ofrece una correspondencia entre fracciones continuas y caminos en $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$; 3) en dicha correspondencia debemos restar 1 al último cociente parcial de la fracción continua y; 3) en dicha correspondencia, la paridad de los cocientes parciales determina si corresponden a i's o d's, lo que juega su papel si queremos concatenar o revertir los functores de los términos puros. Sean pues $* : \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ y $()^{-1}, (^-) : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ definidas como:

$$[a_0, ..., a_n] * [b_0, ..., b_m] = \begin{cases} [a_0, ..., a_n - 1 + b_0, ..., b_m] & \text{si } n \text{ es par} \\ [a_0, ..., a_n - 1, b_0, ..., b_m] & \text{si } n \text{ es impar y } b_0 \neq 0 \\ [a_0, ..., a_n - 1 + b_1, ..., b_m] & \text{si } n \text{ es impar y } b_0 = 0 \end{cases} \tag{22}$$

$$[a_0, a_1, ..., a_n]^{-1} = [0, a_0, a_1, ..., a_n] \tag{23}$$

$$\overline{[a_0, ..., a_n]} = \begin{cases} [a_n - 1, ..., a_0 + 1] & \text{si } n \text{ es par} \\ [0, a_n - 1, ..., a_0 + 1] & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{24}$$

Ya podemos dar a $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$ explícitamente como modelos para $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_4$. Sea $\mathcal{Q}_4 = \langle \mathbb{Q}^+, 1, i, d, *, ()^{-1}, (^-), < +, \times, \div \rangle$, donde $1 \in \mathbb{Q}^+$, $i(x) = x/(x+1)$, $d(x) = x + 1$, las funciones $*, ()^{-1}$ y $(^-)$ están definidas como en (22-24),"$<$" es el orden usual en $\mathbb{Q}^+$, y $+, \times, \div$ son las operaciones usuales en $\mathbb{Q}^+$. Y sean $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_3$ las respectivas reducciones de $\mathcal{Q}_4$ a los lenguajes correspondientes $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3$.

Teorema 2.41. *Sea $\mathcal{Q}_4 = \langle \mathbb{Q}^+, 1, i, d, *, ()^{-1}, (^-), < +, \times, \div \rangle$, donde $1 \in \mathbb{Q}^+$, $i(x) = x/(x+1)$, $d(x) = x + 1$, las funciones $*, ()^{-1}$ y $(^-)$ están definidas como en (22-24),"$<$" es el orden usual en $\mathbb{Q}^+$, y $+, \times, \div$ son las operaciones usuales en $\mathbb{Q}^+$. Y sean $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_3$ las respectivas reducciones de $\mathcal{Q}_4$ a los lenguajes correspondientes $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3$. Entonces $\mathcal{Q}_1 \models \mathcal{A}_1$, $\mathcal{Q}_2 \models \mathcal{A}_2$, $\mathcal{Q}_3 \models \mathcal{A}_3$ y $\mathcal{Q}_4 \models \mathcal{A}_4$. Consecuentemente, cada uno de estos modelos es también modelo de las teorías generadas por las consecuencias de $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_4$.*

Demostración. Hay que probar que la estructura $\mathcal{Q}_4$ es modelo de los axiomas $A1 - A12$. De aquí se sigue que sus reducciones $Q_1 - Q_3$ son modelo de los respectivos sistemas $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$. Es de esperarse que $\mathcal{Q}_4$ satisfaga $A1 - A12$, puesto que éstos fueron construidos con esta estructura en mente. Para $\mathcal{Q}_4 \models \{A1, A2, A3\}$, por ejemplo, vemos que dado $x \in \mathbb{Q}^+$ se tiene

$x+1 \neq 1$ y $x/(x+1) \neq 1$, así que $\mathcal{Q}_4 \models A1$; además, i y d son inyectivas (d claramente lo es y $(x/(x+1)) = y/(y+1)$ implica $xy + x = xy + y$ y por tanto $x = y$), así que $\mathcal{Q}_4 \models A2$; finalmente, para todo $x \in \mathbb{Q}^+$ se tiene $x+1 > 1$ y $x/(x+1) < 1$, de donde los rangos de i y d son ajenos y $\mathcal{Q}_4 \models A3$. Que $\mathcal{Q}_4$ es modelo de $A8 - A12$ debería ser claro. Tal vez las pruebas que requerirían mirarse más de cerca son $\mathcal{Q}_4 \models A4 - A7$. Sin embargo, no las haremos aquí, ya que suponen más un reto de manejo de notación que de conceptos. $\square$

Observación 2.4. *$\mathcal{N}_1 = \langle \mathbb{N}^+, 1, d\rangle$, donde d es el sucesor en los naturales, es un submodelo de la reducción de $\mathcal{Q}_1$ a $\langle \mathbb{Q}^+, 1, d\rangle$.*

Los modelos $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$ y $\mathcal{Q}_4$ son el modelo estándar de las teorías $CON(\mathcal{A}_1)$, $CON(\mathcal{A}_2)$, $CON(\mathcal{A}_3)$ y $CON(\mathcal{A}_4)$. Las teorías describen con bastante precisión lo que ocurre con los elementos representados por términos cerrados, pero sobre otros posibles elementos queda mucho sin especificar. Es natural esperar que haya una multiplicidad de modelos cuyo comportamiento escape a las descripciones de las teorías $CON(\mathcal{A}_1)$, $CON(\mathcal{A}_2)$, $CON(\mathcal{A}_3)$ y $CON(\mathcal{A}_4)$, mismos que pueden construirse del mismo modo que los modelos no estándar de la aritmética de Peano de primer orden: como consecuencia del teorema de compacidad. No estudiaremos aquí estos modelos (ni otros modelos isomorfos al estándar), aunque algo más diremos sobre modelos de estas teorías en la sección 3.3. Sin embargo, con lo que tenemos a mano podemos saber algo sobre cualquier modelo de $CON(\mathcal{A}_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Las sentencias atómicas de un lenguaje $\mathcal{L}$ enuncian todas las relaciones e igualdades posibles entre términos cerrados de $\mathcal{L}$, de modo que el conjunto Δ de sentencias atómicas o sus negaciones que son verdaderas en un modelo $\mathcal{M}$ para $\mathcal{L}$ describe con precisión todas las igualdades y relaciones (denotadas en el lenguaje) que se dan en $\mathcal{M}$ para los elementos del dominio representados por términos cerrados. Cuando todos los elementos del dominio de $\mathcal{M}$ están denotados por algún término cerrado, puede utilizarse este hecho para caracterizar a los modelos $\mathcal{M}'$ de Δ: que exista una inmersión de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}'$ [6].

Teorema 2.42. *[6] Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathcal{M}$ un modelo para $\mathcal{L}$ con dominio D y sea $\Delta := \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}) \,|\, \mathcal{M} \models \varphi$, con φ atómica o su negación$\}$. Si todos los elementos de D están denotados por un término cerrado de $\mathcal{L}$, entonces todo modelo $\mathcal{M}^*$ para $\mathcal{L}$ es modelo de Δ si y sólo si existe una inmersión de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}^*$.*

Corolario 2.43. *Sea $\mathcal{M}_4$ un modelo para $\mathcal{L}_4$. Si $\mathcal{M}_4$ es modelo de $CON(\mathcal{A}_4)$, entonces existe una inmersión de $\mathcal{Q}_4$ en $\mathcal{M}_4$. Lo mismo ocurre para los respectivos lenguajes $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3$, teorías generadas por $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$ y las estructuras $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_3$.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ un modelo para $\mathcal{L}_4$ y sea $\Delta_4 := \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}_4) \,|\, \mathcal{Q}_4 \models \varphi$ y φ es atómica o su negación$\}$. Por el corolario 2.40, si $\varphi \in \Delta_4$, entonces $\mathcal{A}_4 \vdash \varphi$, de donde $\mathcal{A}_4 \models \Delta_4$. Si $\mathcal{M}$ es modelo de $CON(\mathcal{A}_4)$, entonces también lo es de $\mathcal{A}_4$, y por tanto de Δ_4. Además, todo elemento de $\mathbb{Q}^+$ es denotado por un término cerrado de $\mathcal{L}_1$ (y por tanto de $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_4$); aplicando el teorema 2.43 se sigue que existe una inmersión de $\mathcal{Q}_4$ en $\mathcal{M}$. Debido a los corolarios 2.2, 2.19, y 2.23, el resultado se cumple también para las respectivas reducciones $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_3$. $\square$

El teorema 2.42 surge en el contexto del método de *diagramas* para construir modelos a partir de un modelo $\mathcal{M}$ de modo que contengan una inmersión de $\mathcal{M}$. Recordemos que si $\mathcal{M}$ es un modelo para $\mathcal{L}$ con dominio D, si $\mathcal{L}'$ es la expansión de $\mathcal{L}$ generada al añadir una constante para cada $\delta \in D$, y si $\mathcal{M}'$ es la expansión del modelo correspondiente, entonces el conjunto de sentencias atómicas de $\mathcal{L}'$ o sus negaciones que son verdaderas en $\mathcal{M}'$ se conoce como el *diagrama* de $\mathcal{M}$ ($Diag(\mathcal{M})$) [14]. Ya que cada elemento de $\mathbb{Q}^+$ está denotado por un término cerrado en $\mathcal{L}_4$, tenemos ya un nombre para cada elemento del dominio de $\mathcal{Q}_4$, sin necesidad de expandir el lenguaje y el modelo, de modo que como aplicación del teorema 2.42 tenemos que $\mathcal{M}$ es modelo de $Diag(\mathcal{Q}_4)$, si y sólo si existe una inmersión de $\mathcal{Q}_4$ en $\mathcal{M}$.

3. Inducción en $\mathbb{Q}^+$: la aritmética de Euclides de primer y segundo orden

Para hacer más acertada la descripción de $\overline{\mathcal{SB}}$ de las teorías construidas queremos que lo que puede afirmarse en el lenguaje formal sobre los términos cerrados sea verdadero para todos los elementos del dominio, de modo que los resultados que vimos en la sección pasada sean válidos para todos los términos y no sólo para los términos cerrados. Para ello añadiremos a nuestros axiomas un esquema de axioma de inducción, si deseamos permanecer en primer orden, o un axioma de inducción, permitiéndonos llevar las teorías a un lenguaje de segundo orden. Nos será conveniente añadir además una letra relacional al lenguaje para poder hablar de los números naturales. Agregamos a $\mathcal{L}_4$ la letra relacional "N" y damos el axioma:

$$A13)\ \forall xy(Nx \leftrightarrow (x = 1 \vee \exists y(Ny \wedge x = dy))).$$

Notamos que N es definible en $\mathcal{L}_4$, así que la añadimos por comodidad, pero podríamos ahorrárnosla. Llamamos $\mathcal{L}_5$ a este lenguaje expandido. Para diferenciarlo de su correspondiente lenguaje de segundo orden, a este último lo llamaremos $\mathcal{L}_{5\mathcal{S}}$. Llamaremos "números naturales" a los elementos del dominio que tengan la propiedad N, que aunque en el modelo estándar corresponden a los números naturales usuales, en modelos no estándar pueden ser otros (naturales "no estándar").

3.1. El axioma y esquema de axioma de inducción binaria

En primer orden, añadimos para cada propiedad P definible en $\mathcal{L}_5$ el axioma:

$$A14_{(P)}:\ (P1 \wedge (Px \to (Pix \wedge Pdx))) \to \forall x Px.$$

En segundo orden, añadimos simplemente:

$$A14)\ \forall P[(P1 \wedge (Px \to (Pix \wedge Pdx))) \to \forall x Px].$$

Notamos que el primero es un esquema de axioma e involucra un conjunto infinito de axiomas de primer orden, mientras que el segundo es un axioma, pero de segundo orden, puesto que involucra una variable relacional. Sean

$$\mathcal{A}_5 := \{A1 - A13\} \cup \{A14_{(P)}\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{A}_{5\mathcal{S}} := \{A1 - A14\}.$$

Llamamos "aritmética de Euclides de primer orden" ($AEPO$) a las consecuencias de $\mathcal{A}_5$ y "aritmética de Euclides de segundo orden" ($AESO$) a las de $\mathcal{A}_{5\mathcal{S}}$:

$$AEPO := \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}_5) \mid \mathcal{A}_5 \models \varphi\}$$
$$AESO := \{\varphi \in SENT(\mathcal{L}_{5\mathcal{S}}) \mid \mathcal{A}_{5\mathcal{S}} \models \varphi\}.$$

Como la lógica de primer orden es completa, $AEPO$ coincide con el conjunto de consecuencias sintácticas de $\mathcal{A}_5$. Sin embargo, dada la incompletitud de la lógica de segundo orden, el conjunto de consecuencias sintácticas de $\mathcal{A}_{5\mathcal{S}}$ dependerá del cálculo deductivo con el que trabajemos, y ninguno de ellos será igual a $AESO$, aunque todos estarán contenidos en $AESO$ (a menos de que el cálculo deductivo no fuera correcto, en cuyo caso éste sería inútil).

El axioma (o esquema) de inducción binaria nos permite deducir como teorema lo que en los axiomas de Peano es el axioma de inducción. En $AEPO$ produciremos un esquema de teorema de inducción para cada propiedad P, mientras que en $AESO$ tendremos un teorema en forma. Para probarlo necesitamos el siguiente resultado, que es casi una observación.

Proposición 3.1. *Son demostrables en $\mathcal{A}_5$: $\forall x \neg Nix$ y $\forall x(Nx \leftrightarrow Ndx)$.*

Demostración. Es fácil ver que por $A1, A3$ y $A13$ se tiene $\mathcal{A}_5 \vdash \forall x(\neg Nix)$ y $\mathcal{A}_5 \vdash \forall x(Nx \to Ndx)$. Damos sólo la deducción detallada para $\mathcal{A}_5 \vdash \forall x(Ndx \to Nx)$:

1.	Ndt	supuesto
2.	$dt = 1 \vee \exists x(Nx \wedge dt = dx)$	de 1 y $A13$
3.	$dt \neq 1$	de $A1$
4.	$\exists x(Nx \wedge dt = dx)$	de 2 y 3 (silogismo disyuntivo)
5.	$Nr \wedge dt = dr$	supuesto
6.	$t = r$	de 5 y $A2$ (inyectividad de d)
7.	Nt	de 5 y 6
8.	Nt	de 5-7 por eliminación de cuantificador
9.	$Ndt \to Nt$	de 1-8 por introducción de condicional
10.	$\forall x(Ndx \to Nx)$	de 9 por introducción de cuantificador

□

Teorema 3.2. *(Esquema de Teorema de inducción en AEPO para números naturales)*

Dada una propiedad P expresable en $\mathcal{L}_5$, se tiene:

$$\mathcal{A}_5 \vdash (P1 \wedge (Px \to Pdx)) \to \forall x(Nx \to Px). \tag{25}$$

Demostración. Sea P una propiedad definible en $\mathcal{L}_5$. Utilizaremos el esquema de axioma de inducción: $A14_{(R)}$ con R definida como $Rx \leftrightarrow (Nx \to Px)$. Si de $\mathcal{A}_5 \cup \{P1 \wedge (Px \to Pdx)\}$ deducimos $R1$ y $Rx \to Rix \wedge Rdx$, entonces tendremos $\mathcal{A}_5 \vdash \forall x Rx$ y consecuentemente (*modus ponens*), $\mathcal{A}_5 \vdash P1 \wedge (Px \to Pdx) \to \forall x(Nx \to Px)$. Veamos que podemos hacerlo. Como $N1 \to P1$ es deducible de $P1$, claramente $\mathcal{A}_5 \cup \{P1 \wedge (Px \to Pdx)\} \vdash R1$. Queremos ver

$$\mathcal{A}_5 \cup \{P1 \wedge (Px \to Pdx)\} \vdash Rx \to Rix \wedge Rdx.$$

Ya que de $\mathcal{A}_5$ y Ndx se deduce Nx (proposición 3.1), de estas mismas premisas y del supuesto $Nx \to Px$ (es decir Rx) se deduce $Ndx \to Px$ (*modus ponens*). Por otro lado, como demostrablemente ix no puede ser equivalente a un número natural (proposición 3.1), claramente $\mathcal{A}_5 \cup \{Nix\}$ es inconsistente, así que $Nix \to Pix$ es deducible de $\mathcal{A}_5$. Utilizando ambos hechos, tenemos:

1.	$Px \to Pdx$	de hipótesis
2.	$Nx \to Px$	supuesto
3.	Ndx	supuesto
4.	$Ndx \to Px$	deducible de $\mathcal{A}_5$, 2 y 3
5.	Pdx	de 3,4 y 1
6.	$Ndx \to Pdx$	de 3-5 (introducción del condicional)
7.	$Nix \to Pix$	deducible de $\mathcal{A}_5$
8.	$Rx \to (Rit \wedge Rdt)$	de 2-7(introducción de conjunción y condicional)

□

Notamos que para deducir $\forall P(P1 \wedge (Px \to Pdx) \to \forall x(Nx \to Px))$ en $\mathcal{A}_{5\mathcal{S}}$, requerimos únicamente en la deducción anterior poder introducir un cuantificador universal sobre la variable relacional P. Entonces con cualquier cálculo que tenga las reglas del cálculo de deducción natural de primer orden (o equivalentes) una regla que permita la introducción de cuantificador universal sobre variables relacionales se tendrá el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *(Teorema de inducción en AESO para los números naturales)*

$$\mathcal{A}_{5\mathcal{S}} \vdash \forall P(P1 \wedge (Px \to Pdx) \to \forall x(Nx \to Px)). \tag{26}$$

De los dos teoremas anteriores podemos concluir que las pruebas usuales que se dan por inducción en la aritmética de Peano (en sus respectivos órdenes) pueden darse también en la aritmética de Euclides, enunciadas para números naturales. Veamos un ejemplo sencillo.

Proposición 3.4.

$$\mathcal{A}_5 \vdash \forall x(Nx \to x + 1 = 1 + x). \tag{27}$$

Demostración. Consideremos la propiedad $Px \leftrightarrow (Nx \to x + 1 = 1 + x)$. Si $\mathcal{A}_5 \vdash P1$ y $\mathcal{A}_5 \vdash Px \to Pdx$, entonces $\mathcal{A}_5 \vdash \forall x Px$ (teorema 3.2). Claramente $\mathcal{A}_5 \vdash P1$. Ahora, a $\mathcal{A}_5$ añadimos el supuesto $Nx \to x + 1 = 1 + x$ (es decir, Px). Si suponemos Ndx, deducimos Nx (proposición 3.1) y por tanto (*modus ponens*) $x + 1 = 1 + x$. De aquí podemos deducir $dx + 1 = 1 + dx$:

1.	$dx + 1 = d(x + 1)$	de $A8a$ dos veces
2.	$d(x + 1) = d(1 + x)$	de $x + 1 = 1 + x$
3.	$d(1 + x) = 1 + dx$	de $A8b$

Introduciendo el condicional a partir del supuesto Ndx (cancelamos el supuesto), obtenemos $Ndx \to dx + 1 = 1 + x$, es decir, Pdx. Introduciendo otra vez un condicional y cancelando el primer supuesto, obtenemos $\mathcal{A}_5 \vdash Px \to Pdx$. □

Cabe preguntarse la diferencia entre demostrar afirmaciones universales utilizando el teorema de inducción en los naturales y después extendiéndolas a los otros términos a través de los axiomas $A11$ y $A12$ y utilizar el axioma de inducción binaria directamente. Dependiendo del tipo de propiedad, algunas serán más fáciles de demostrar de una u otra manera. Es probable que aquellas relacionadas con la estructura arbórea, la divisibilidad y el algoritmo de Euclides sean más fáciles de llevarse a cabo directamente con la inducción binaria. Como ejemplo, probaremos de este modo que todo elemento es equivalente a un cociente de "elementos naturales" (con la propiedad N). Para ello usaremos un resultado que conviene demostrar utilizando el teorema 3.2: que la suma de términos naturales es demostrablemente equivalente a un término natural. Su prueba será un ejemplo del uso de dicho teorema.

Proposición 3.5. *Si dos elementos son demostrablemente iguales en $\mathcal{A}_5$ a un número natural, entonces su suma también lo es.*

$$\mathcal{A}_5 \vdash \forall xy(Nx \wedge Ny \to N(x+y)). \tag{28}$$

Demostración. Usaremos dos veces el esquema de teorema de inducción para números naturales, una para cada cuantificador de (28). Sea n un término fijo de $\mathcal{L}_5$. Consideremos la propiedad

$$Py \leftrightarrow (Nn \wedge Ny \to N(n+y)). \tag{29}$$

Queremos ver que $\mathcal{A}_5 \vdash P1$ y $\mathcal{A}_5 \vdash Py \to Pdy$, pues de aquí y el teorema 3.2 se sigue $\mathcal{A}_5 \vdash \forall y(Nn \to Py)$. $\mathcal{A}_5 \vdash P1$ es claro: el consecuente de (29) es inmediato de $A13$. Veamos $\mathcal{A}_5 \vdash Py \to Pdy$:

1.	$Nn \wedge Ny \to N(n+y)$	supuesto
2.	$Nn \wedge Ndy$	supuesto
3.	Ny	deducible de $\mathcal{A}_5$ y 2 (proposición 3.1)
4.	$N(n+y)$	de 1, 2 y 3 (*modus ponens*)
5.	$Nd(n+y)$	de 4 y $A13$
6.	$N(n+dy)$	de 5 y $A8b$
7.	$Nn \wedge Ndy \to N(n+dy)$	de 2-6 por introducción de la implicación

Concluimos entonces $\mathcal{A}_5 \vdash \forall y(Nn \to Py)$. Ahora usaremos el teorema 3.2 con la propiedad

$$Px \leftrightarrow \forall y(Nx \wedge Ny \to N(x+y)).$$

Nuevamente, queremos ver $\mathcal{A}_5 \vdash P1$ y $\mathcal{A}_5 \vdash Px \to Pdx$. Claramente $\mathcal{A}_5 \vdash P1$. Veamos $\mathcal{A}_5 \vdash Px \to Pdx$.

1.	$\forall y(Nx \wedge Ny \to N(x+y))$	supuesto (Px)
2.	$Ndx \wedge Nt$	supuesto
3.	Nx	deducible de $\mathcal{A}_5$ y 2 (eliminación de conjunción y proposición 3.1)
4.	$Nx \wedge Nt \to N(x+t)$	de 1 por eliminación de cuantificador
5.	$N(x+t)$	de 2, 3 y 4 por introducciones y eliminaciones de conjunciones y *modus ponens*
6.	$Nd(x+t)$	de 5 y $A13$
7.	$N(x+dt)$	de 6 y $A8b$
8.	$Ndx \wedge Nt \to N(dx+t)$	de 2-7 por introducción de la implicación
9.	$\forall y(Ndx \wedge Ny \to N(dx+y))$	de 8 por introducción de cuantificador (Pdx)
10.	$Px \to Pdx$	de 1-9 por introducción de la implicación

Del teorema 3.2 concluimos $\mathcal{A}_5 \vdash \forall xy(Nx \wedge Ny \to N(x+y))$. □

Hagamos una prueba utilizando el axioma de inducción binaria.

Teorema 3.6. *En $\mathcal{A}_5$ es demostrable que todo elemento es equivalente al cociente de elementos representados por términos naturales:*

$$\mathcal{A}_5 \vdash \forall x \exists yz(Ny \wedge Nz \wedge x = y/z).$$

Demostración. Consideremos la propiedad $Px \leftrightarrow \exists yz(Ny \wedge Nz \wedge x = y/z)$. Veamos que $\mathcal{A}_5 \vdash P1$ y $\mathcal{A}_5 \vdash Px \rightarrow Pix \wedge Pdx$. Por $A14(P)$ entonces $\mathcal{A}_5 \vdash \forall x Px$. $\mathcal{A}_5 \vdash P1$, pues tanto $1/1$ como $N1$ son demostrables en $\mathcal{A}_5$. Veamos $\mathcal{A}_5 \vdash Px \rightarrow Pix \wedge Pdx$:

1.	$\exists yz(Ny \wedge Nz \wedge x = y/z)$	(Px) supuesto
2.	$Nn \wedge Nm \wedge x = n/m$	supuesto
3.	$ix = n/(n+m)$	de 2 y $A11a$
4.	$dx = (n+m)/m$	de 2 y $A11b$
5.	$N(n+m)$	de $\mathcal{A}_5$ y 2 (proposición 3.5)
6.	$\exists yz(Ny \wedge Nz \wedge ix = y/z)$	de 2,3 y 5
7.	$\exists yz(Ny \wedge Nz \wedge dx = y/z)$	de 2,4 y 5
8.	$Pix \wedge Pdx$	de 6 y 7
9.	$Pix \wedge Pdx$	de 3-9 por eliminación de cuantificador
10.	$Px \rightarrow Pix \wedge Pdx$	de 1-10 por introducción del condicional

□

El mismo comentario sobre la validez del teorema de inducción para números naturales en $\mathcal{A}_{5\mathcal{S}}$ aplica en el resto de los resultados de la sección. Si en el cálculo deductivo tenemos una regla sobre variables relacionales equivalente a la introducción del cuantificador universal, también son válidos en $\mathcal{A}_{5\mathcal{S}}$. La diferencia entre $\mathcal{A}_5$ y $\mathcal{A}_{5\mathcal{S}}$ es que éste último es más potente: puede hablar de todas las relaciones posibles y no sólo de las definibles, que es lo más que alcanza a expresar el esquema de axioma en primer orden. A lo más tenemos una cantidad numerable de fórmulas y por tanto sólo una cantidad numerable de propiedades de $\mathbb{Q}^+$ es definible, en contraste con las $2^{\aleph_0}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^+)$. También podría estudiarse la aritmética de Euclides de segundo orden cambiando la semántica estándar (que es con la que estamos trabajando) por la semántica general de Henkin, con las consecuencias de recuperar la completitud del cálculo, pero perdiendo capacidad expresiva sobre los subconjuntos del dominio, limitando aquellos sobre los que podemos cuantificar [29].

3.2. Metateoría de la aritmética de Euclides: modelos no estándar, completitud y categoricidad

El modelo estándar $\mathcal{Q}_4$ siguen siendo modelo estándar tanto de $AEPO$ como de $AESO$. Al introducir el axioma de inducción (o su esquema) restringimos los modelos de $CON(\mathcal{A}_4)$. ¿Qué tanto? La compacidad de la lógica de primer orden sigue garantizando la existencia de los modelos no estándar de $AEPO$, aunque debe seguir habiendo una inmersión del modelo estándar en ellos (por las mismas razones que en el caso de $CON(\mathcal{A}_4)$). En segundo orden (con la semántica estándar), el axioma de inducción pide que en cualquier modelo de $AESO$ el conjunto del dominio coincida con el de los elementos representados por términos puros, es decir, los del modelo estándar. Esto elimina la posibilidad de que existan modelos no estándar de $AESO$. Al igual que con la aritmética de Peano de segundo orden, la restricción que supone introducir el axioma de inducción es tan fuerte que $AESO$ se vuelve una teoría categórica.

La teoría $AEPO$ contiene a la aritmética de Peano de primer orden (al conjunto de consecuencias de los axiomas de Peano de primer orden) y es una teoría recursivamente axiomatizable, por lo que es aplicable el teorema de incompletitud de Gödel y, si $AEPO$ es consistente, entonces es incompleta. Por tanto, aunque el conjunto de consecuencias sintácticas de $\mathcal{A}_5$ es igual a $AEPO$, ésta es distinta a $TEO(\mathcal{Q}_4)$, la teoría que consiste en todas las sentencias de $\mathcal{L}_4$ verdaderas en el modelo estándar $\mathcal{Q}_4$. Por otro lado, $AESO$ es categórica, y por tanto es una teoría completa y coincide con $TEO_{\mathcal{S}}(\mathcal{Q}_4)$, el conjunto de sentencias de $\mathcal{L}_{5\mathcal{S}}$ verdaderas en $\mathcal{Q}_4$. Sin embargo, recordemos que, con la semántica estándar, para ningún cálculo deductivo tendremos una equivalencia entre el conjunto de consecuencias sintácticas de $\mathcal{A}_{5\mathcal{S}}$ y $AESO$.

En el caso de $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$, también éstas siguen siendo modelos de las respectivas teorías $CON(\mathcal{A}_i)$, añadiendo a $\mathcal{A}_i$ el axioma (o esquema de axioma) de inducción. Diremos sólo algunas cosas sobre los modelos de estas teorías, después de mirar con cuidado el caso de las consecuencias de $\mathcal{A}_1$ junto con el axioma de inducción (en segundo orden).

3.3. Sistemas de Euclides

Sea $\mathcal{L} = \{1, i, d\}$ un lenguaje de segundo orden con una constante y dos functores monarios. Damos los axiomas:

$S1)$ $\forall x(ix \neq 1 \wedge dx \neq 1)$ (el 1 no está en el rango de i ni de d)

$S2)$ $\forall xy((ix = iy \to x = y) \wedge (dx = dy \to x = y))$ (i y d son inyectivas)

$S3)$ $\forall xy(ix \neq dy)$ (los rangos de i y d son ajenos).

$S4)$ $\forall P[(P1 \wedge (Px \to Pix \wedge Pdx) \to \forall x Px)]$ (axioma de inducción).

Llamamos *sistema de Euclides* (SE) a la teoría generada por el conjunto de consecuencias semánticas de los axiomas:

$$SE = \{\varphi \in FORM(\mathcal{L}) | \{S1, S2, S3, S4\} \models \varphi\}.$$

$S1 - S4$ corresponden a añadir a $\mathcal{A}_1$ el axioma de inducción. Dados E un conjunto, e un elemento distinguido en E y las funciones $\mathbf{i}, \mathbf{d} : E \to E$, decimos que $\langle E, e, \mathbf{i}, \mathbf{d} \rangle$ forma un *modelo de Euclides* si es modelo de un sistema de Euclides. Veamos algunos ejemplos de modelos de Euclides:

- El modelo estándar $\mathcal{Q}_1$: $\langle \mathbb{Q}^+, 1, \mathbf{i}, \mathbf{d} \rangle$, con $\mathbf{i}(x) = x/(x+1)$ y $\mathbf{d}(x) = x + 1$.
- $\langle \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, (1,1), \mathbf{i}, \mathbf{d} \rangle$, con $\mathbf{i}, \mathbf{d} : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$; $\mathbf{i}((x,y)) = (x+y, y)$ y $\mathbf{d}((x,y)) = (x, x+y)$ (figura 21).

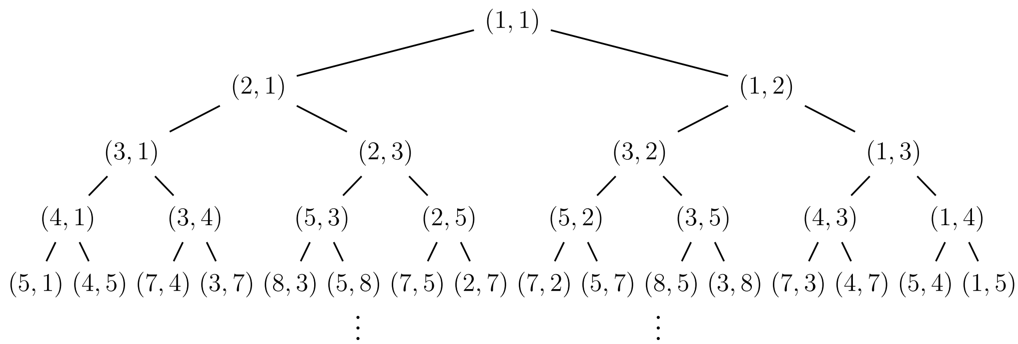

Figura 21

- $\left\langle M_{\mathbb{Z}^+(2\times 2)}, \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \mathbf{i}, \mathbf{d}\right\rangle$, donde $M_{\mathbb{Z}^+(2\times 2)}$ es el conjunto de matrices de 2×2 con entradas enteras positivas (figura 22) y $\mathbf{i}, \mathbf{d} : M_{\mathbb{Z}^+(2\times 2)} \to M_{\mathbb{Z}^+(2\times 2)}$ son :

$$\mathbf{i}(A) = A \times \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{d}(A) = A \times \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right).$$

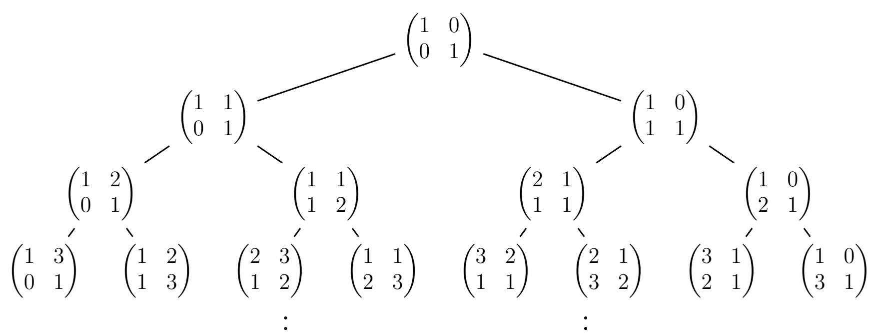

Figura 22

- $\left\langle \left\{ \frac{a\beta+b}{c\beta+e} \mid a,b,c,e \in \mathbb{Z}^+, ad-bc=1 \right\}, \beta, \mathbf{i}, \mathbf{d} \right\rangle$, con $\beta \in \mathbb{R}$, e $\mathbf{i}, \mathbf{d}$ como en $\mathcal{Q}_1$ (figura 23). Notamos que esta estructura coincide con el árbol de Calkin-Wilf generalizado (pág. 12).

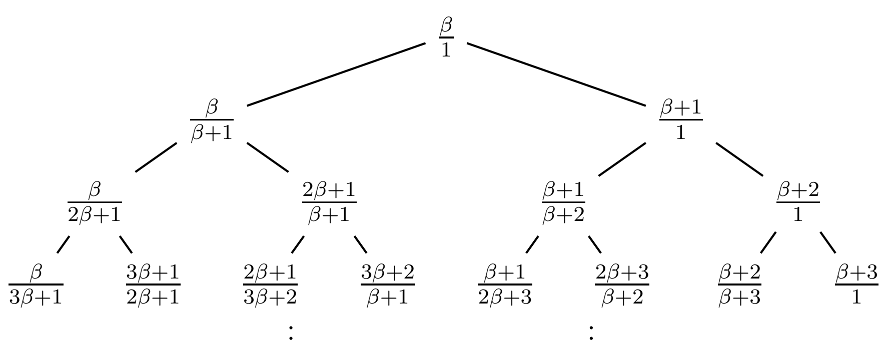

Figura 23

No es difícil probar que en todos éstos $S1 - S4$ son verdaderos. Los resultados que lo garantizan aparecen en [31]. Hay otros contextos en los que la estructura de $\mathcal{SB}$ y $\overline{\mathcal{SB}}$ se manifiesta y por ello es natural buscar plantearlos como modelos de Euclides: teselaciones hiperbólicas (la teselación de Farey en particular), empaquetamientos de círculos (círculos de Ford)[10] o espacios de funciones (en [31], p.208 se da un ejemplo con transformaciones lineales en $\mathbb{R}$, pero podrían explorarse modelos cuyo dominio fueran los polinomios en $\mathbb{R}$ u otras clases de funciones). Un ejemplo particularmente ilustrativo es el conjunto de los *enredos racionales* de Conway[11] con d e i interpretadas respectivamente como "torcer" y la composición "*torcer-rotar-torcer*". Ponemos un fragmento del árbol que se genera en la figura 24.

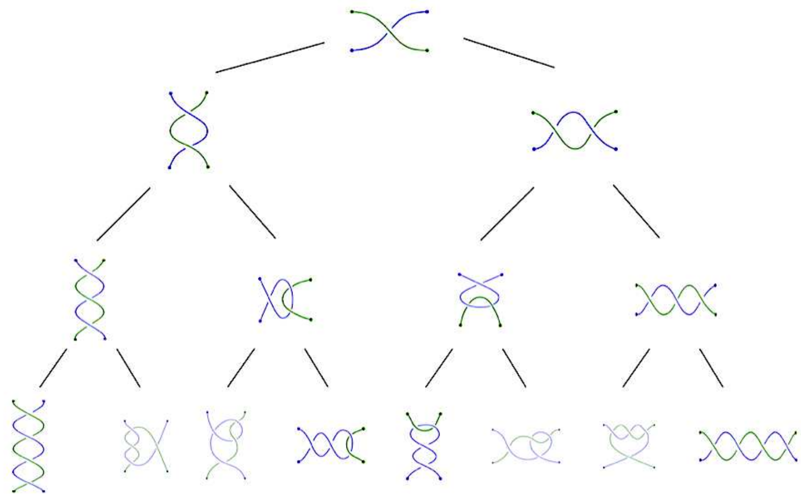

Figura 24

Entre las preguntas que surgen sobre los modelos de Euclides está si éstos son isomorfos, como ocurre con los sistemas de Peano y lo que ocurre con sus expansiones. Sabemos que el modelo estándar $\mathcal{Q}_1$ puede ser expandido para ser modelo de $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ y $\mathcal{A}_4$ con el axioma de inducción añadido. Una pregunta interesante es si con el axioma de inducción podemos dar los axiomas recursivos como definiciones y así construir las estructuras $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_3$ sin necesidad de introducir nuevos axiomas, proceso que se podría repetir para cada modelo de Euclides. No abordaremos estas preguntas en este trabajo, pero damos un resultado que puede ayudar a responderlas.

3.4. El teorema de recursión binaria

Queremos reformular el teorema de recursión usual para los sistemas de Euclides de modo que permita definir funciones a través de dos funciones sucesor en lugar de únicamente una. Naturalmente, utilizará el axioma de inducción binaria.

Teorema 3.7. *(De recursión binaria)*

Sean $\langle E, i, d, e\rangle$ un modelo de Euclides, W un conjunto, c un elemento en W y $g_1 : W \to W$, $g_2 : W \to W$ funciones uno-arias en W (posiblemente la misma). Entonces existe una única función $F : E \to W$ que satisface:

[10] Véanse [8], donde aparece un detallado estudio de la teselación de Farey y [19] para un planteamiento de fracciones a través de círculos y su relación con $\mathcal{SB}$.

[11] Véase [21].

1. $F(1) = c$
2. $F(ix) = g_1(F(x))$ *para todo* $x \in E$
3. $F(dx) = g_2(F(x))$ *para todo* $x \in E$.

La idea de la demostración es exactamente igual a la del teorema de recursión para los modelos de Peano (tomada de [30]): se construye paso a paso la función F para cada elemento r de E y sus sucesores ir y dr a través de *funciones adecuadas*, asegurando que esta construcción define siempre de la misma manera a los valores asignados a los "antecesores" de r; el axioma de inducción hace el resto.

Demostración. Sean $\langle E, i, d, e\rangle$, c, W, g_1 y g_2 como en las hipótesis del teorema 3.7. Para cada $r \in E$ decimos que $f : A \to W$ es **r**-*adecuada* si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $A \subseteq E$	*iv)* $\forall x(ix \in A \wedge dx \in A \to x \in A)$
ii) $1 \in A$	*v)* $f(1) = c$
iii) $r \in A$	*vi)* $\forall x(ix \in A \wedge dx \in A \to f(ix) = g_1(f(x)) \wedge f(dx) = g_2(f(x)))$

Notamos que ser **r**-*adecuada* es definible en nuestro lenguaje de segundo orden. Utilizaremos las funciones **r**-*adecuadas* para definir F. Haremos la demostración en varias partes.

I) Si $f : A \in W$ es **ir**-adecuada y **dr**-adecuada, entonces f es **r**-adecuada.

   Al ser **ir**-adecuada y **dr**-adecuada, se tiene que $ir, dr \in A$ (condición (*iii*)). Esto implica que $r \in A$ (condición (*iv*)), con lo que f cumple (*iii*) para ser **r**-adecuada. El resto de las propiedades las hereda directamente del hecho de que es **ir**-adecuada y **dr**-adecuada.

II) Para todo $r \in E$ existe al menos una función **r**-adecuada.

   Utilizaremos el axioma de inducción. Digamos que $r \in E$ tiene la propiedad P si existe una función f que es **r**-adecuada (notamos que esta propiedad es definible en nuestro lenguaje de segundo orden). El 1 tiene la propiedad P, pues podemos definir $f : \{1\} \to W$ como $f(1) = c$, que es claramente 1-adecuada. Suponemos ahora que r tiene la propiedad P, es decir, que existe una función f **r**-adecuada. Veamos ahora que tanto ir como dr tienen la propiedad P. Sea $A' = dom(f) \cup \{ir, dr\}$. Definimos la función $f^* : A' \to W$ como:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x) && \text{si } x \in dom(f) \\ f^*(ir) &= g_1(f(r)) && \text{si } ir \notin dom(f) \\ f^*(dr) &= g_2(f(r)) && \text{si } dr \notin dom(f). \end{aligned}$$

   Veremos que f^* es tanto **ir**-adecuada como **dr**-adecuada, de donde podremos concluir que ir y dr tienen la propiedad P.

   i) $A' = dom(f) \cup \{ir, dr\} \subseteq E$ pues $ir, dr \in E$ y al ser f **r**-adecuada, $dom(f) \subseteq E$.

   ii) $1 \in A'$, pues $1 \in dom(f)$ por ser f **r**-adecuada.

   iii) $ir \in A'$ y $dr \in A'$ por definición de A'.

iv) $\forall x((ix \in A' \wedge dx \in A') \rightarrow x \in A')$. En efecto, si $ix, dx \in dom(f)$, entonces por la respectiva propiedad (*iv*) de ser **r**-adecuada tenemos que $x \in dom(f) \subseteq A'$. Por otra parte, si $ix \notin dom(f)$ entonces ix es ir, y como i es inyectiva (por axioma A2), x es r y $x \in dom(f) \subseteq A'$; análogamente si $dx \notin dom(f)$, dx es dr, de donde x es r y $x \in dom(f) \subseteq A'$. Así, $\forall x(ix \in A' \wedge dx \in A') \rightarrow x \in A'$.

v) $f^*(1) = c$, pues f es **r**-adecuada, de donde $f^*(1) = f(1) = c$.

vi) $\forall x((ix \in A' \wedge dx \in A') \rightarrow (f(ix) = g_1(f(x)) \wedge f(dx) = g_2(f(x))))$. En efecto, por como definimos $f*$, si $ir \in dom(f)$, entonces $f * (ir) = f(ir) = g_1(f(r))$ (por propiedad (*vi*)). De igual modo, si $dr \in dom(f)$, entonces $f*(dr) = f(dr) = g_2(f(r))$. Así, si $ir, dr \in A'$, tanto si ir y dr están en el dominio de f como si no, se tiene $(f(ix) = g_1(f(x))$ y $f(dx) = g_2(f(x)))$.

Así, ir y dr tienen la propiedad P. Ya que el que r tenga la propiedad P implica que ir y dr la tienen, como el modelo satisface por hipótesis el axioma de inducción, tenemos que todo elemento $r \in E$ tiene la propiedad P.

III) Para todo $r \in E$, si dos funciones f y h son **r**-adecuadas, entonces el valor que asignan a r es el mismo: $f(r) = h(r)$. Nuevamente, utilizaremos que el modelo de Euclides satisface el axioma inducción. Digamos ahora que r tiene la propiedad P si para todas funciones f y h que son **r**-adecuadas se tiene $f(r) = h(r)$. El 1 tiene la propiedad P, puesto que si f y h son **1**-adecuadas, entonces $f(1) = h(1) = c$. Supongamos que r tiene la propiedad P, es decir, que si f y h son **r**-adecuadas, entonces $f(r) = h(r)$. Veremos que entonces ir y dr también la tienen. Sean f y h funciones **ir**-adecuadas y **dr**-adecuadas. Por la propiedad (*vi*) se tiene que si $ir, dr \in dom(f)$, entonces $f(ir) = g_1(f(r))$ y $f(dr) = g_2(f(r))$ y si $ir, dr \in dom(h)$, entonces $h(ir) = g_1(h(r))$ y $f(dr) = g_2(f(r))$. Pero además, según vimos en I), al ser **ir**-adecuadas y **dr**-adecuadas, f y h también son **r**-adecuadas, de donde $f(r) = h(r)$, pues supusimos que r tiene la propiedad P. Juntando ambos hechos obtenemos que $f(ir) = g_1(f(r)) = g_1(h(r)) = h(ir)$ y $f(dr) = g_2(f(r)) = g_2(h(r)) = h(dr)$, con lo que concluimos que ir y dr tienen la propiedad P. El axioma de inducción nos garantiza entonces que todo elemento $r \in E$ tiene la propiedad P.

Con esto podemos definir en E la función $F : E \rightarrow W$ que deseamos. Para cada $r \in E$ tenemos que existe al menos una función f **r**-adecuada (II)). Definimos $F(n) = f(n)$. Esta definición no depende de la elección de la función f **r**-adecuada (III)). Además, F cumple:

1. $F(1) = c$, pues todas las funciones 1-adecuadas deben valer c en 1.

2. $F(ix) = g_1(F(x))$ para todo $x \in E$, pues toda función f que es **ir**-adecuada cumple $f(ix) = g_1(f(x))$.

3. $F(dx) = g_2(F(x))$ para todo $x \in E$, pues toda función f que es **dr**-adecuada cumple $f(dx) = g_2(f(x))$.

F es función, pues ya que $\langle E, 1, i, d\rangle$ es modelo del axioma $A3$, los rangos de i y d son ajenos, de modo que para todos x e y de E se tiene que $ix \neq dy$. Si $F(u) \neq F(u')$, tenemos dos posibilidades: o bien ambas son definidas a través de g_1, o ambas a través de g_2, o una a través de g_1 y otra a través de g_2. En los dos primeros casos, como g_1 y g_2 son funciones por hipótesis, entonces $u \neq u'$. En el tercer caso debe pasar que $u = is$ y $F(u) = g_1(F(s))$ para algún $s \in E$, y $u' = ds'$ y $F(u') = g_2(F(s'))$ para algún $s' \in E$ (o viceversa). Pero entonces $u \neq u'$, pues de lo contrario tendríamos $is = ds'$, lo que contradice $A3$.

Con esto queda demostrada la existencia de F. Falta probar su unicidad. Supongamos que existen funciones $F_1, F_2 : E \to W$ que cumplen 1, 2, 3. Recurrimos nuevamente al axioma de inducción. Digamos que $r \in E$ tiene la propiedad P si $F_1(r) = F_2(R)$. Veamos que todo elemento de E tiene la propiedad P. El 1 tiene la propiedad, puesto que $F_1(1) = f(1) = c$ para alguna función **1**-adecuada f y $F_2(1) = h(1) = c$ para alguna función **1**-adecuada h. Supongamos que r tiene la propiedad P, es decir, $F_1(r) = F_2(r)$. Veremos que ir y dr también la tienen. Por cumplir 1, 2, 3 y por tener r la propiedad P tenemos que F_1 y F_2 cumplen $F_1(ir) = g_1(F_1(r)) = g_1(F_2(r)) = F_2(ir)$ y $F_1(dr) = g_2(F_1(r)) = g_2(F_2(r)) = F_2(dr)$. Es decir, ir y dr tiene la propiedad P. Del axioma de inducción concluimos que todo elemento r de E tiene la propiedad P. Así, F_1, F_2 comparten dominio y rango y coinciden en todos sus valores, así que son la misma función. □

Como consecuencia del teorema de recursión binaria podemos definir funciones recursivamente a través de i y d, por lo que podemos definir la concatenación y el recíproco en cualquier modelo de Euclides.

Teorema 3.8. *Sea $\langle E, 1, i, d\rangle$ un modelo de Euclides. Existe una única función binaria $* : E \times E \to E$ tal que:*

1. *$1 * x = x$ para todo $x \in E$*
2. *$iy * x = i(y * x)$ para todos $x, y \in E$*
3. *$dy * x = d(y * x)$ para todos $x, y \in E$*

Demostración. Probaremos primero para cada $x \in E$ la existencia de la función monaria "$*x$". Aplicamos el teorema de recursión binaria al modelo $\langle E, 1, i, d\rangle$, el conjunto E, el elemento x y las funciones $g_1 = \mathbf{i}$ y $g_2 = \mathbf{d}$ y concluimos que existe una única función $f_{*x} : E \to E$, $f_{*x}(y) := x * y$ que cumple:

1. $f_{*x}(1) = x$
2. $f_{*x}(iy) = i(f_{*x}(y))$ para todo $y \in E$
3. $f_{*x}(dy) = d(f_{*x}(y))$ para todo $y \in E$

Ahora definimos la función binaria $* : E \times E \to E$ como $*(x, y) = f_{*x}(y) = x * y$ para todos $x, y \in E$, obteniendo la función deseada. Claramente, $*$ es función, (puesto que f_{*x} lo es para cada $x \in E$) con lo que queda probada la existencia de la función deseada. Falta probar su unicidad. Suponemos que existe otra función $h : E \times E \to E$ que satisface $h(x, 1) = x$; $h(x, iy) = i(h(x, y))$; $h(x, dy) = d(h(x, y))$. Probaremos que para todo $y \in E$ se tiene $h(x, y) = f_{*x}(y)$ usando que $\langle E, 1, i, d\rangle$ cumple el axioma de inducción $S4$. Dado $x \in E$ consideramos la propiedad $Py \leftrightarrow h(x, y) = f_{*x}(y) = x * y$. Ya que supusimos $h(x, 1) = x$, tenemos que $P1$ es verdadera en $\langle E, 1, i, d\rangle$. Si suponemos que Py es verdadera, entonces tenemos

$h(x, y) = x * y$ y, ya que también supusimos $h(x, iy) = i(h(x, y)); h(x, dy) = d(h(x, y))$, entonces $h(x, iy) = i(h(x, y)) = i(x * y) = x * iy$ y $h(x, dy) = d(h(x, y)) = d(x * y) = x * dy$, lo que significa que Piy y Pdy son también verdaderas en $\langle E, 1, i, d\rangle$, de donde tendremos por $S4$ que es verdadera también $\forall y Py$, lo que implica la unicidad de $*$. $\square$

Teorema 3.9. *Sea $\langle E, 1, i, d\rangle$ un modelo de Euclides. Existe una única función monaria $()^{-1} : E \to E$ tal que:*

1. $1^{-1} = 1$
2. $(ix)^{-1} = d(x^{-1})$ *para todo* $x \in E$
3. $(dx)^{-1} = i(x^{-1})$ *para todo* $x \in E$

Demostración. Aplicamos el teorema de recursión binaria al modelo $\langle E, 1, i, d\rangle$, el conjunto E, el elemento 1 y las funciones $g_1(x) = d(x)$ y $g_2(x) = i(x)$; concluimos que existe una única función $()^{-1} : E \to E$, ${}^{-1}(x) = x^{-1}$. $\square$

No es inmediato que pueda definirse de manera única la operación de la conjugación, así como la suma, producto y cociente, lo que no abordaremos en este trabajo. En cuanto a la extensión que incluye la relación de orden, únicamente delineamos algunas reflexiones al respecto. Todo apunta a que si cambiamos el condicional por bicondicional en $A7c$, podría obtenerse una definición de la relación en el sistema, de la que se deducen, con ayuda del lema 2.21, la irreflexividad y transitividad de la relación, permitiéndonos prescindir de $A7a - b$. Habría que ver si es posible definir con la fórmula de $A7c$ con bicondicional la relación de orden en el modelo de Euclides.

Otro aspecto que merece consideración y que no abordaremos aquí es cómo son los modelos en los que $S4$ es verdadero, a los que llamaremos *modelos de inducción binaria* en analogía a los modelos de inducción estudiados por Henkin (véase [23, 29]). En [23] Henkin estudia las posibilidades de modelos del axioma de inducción usual, mostrando además que deben ser modelo de alguno de los otros dos axiomas de Peano. Igualmente podría plantearse qué tipos de modelos de inducción binaria hay y qué otros axiomas de SE deben cumplir. También resulta interesante preguntarse qué tipo de funciones pueden definirse en los modelos de inducción binaria, motivados por el hecho de que hay modelos de inducción en los que no puede definirse la exponenciación [23].

3.5. Pertinencia matemática de la inducción en $\mathbb{Q}^+$: un ejemplo de su uso

Cabe la pregunta de si el tipo de demostración por inducción que hemos planteado tiene relevancia en las matemáticas más allá de la construcción formal de teorías. Para ver la pertinencia de su uso, damos aquí una demostración por inducción en los racionales de un resultado sobre explosión de singularidades de ecuaciones diferenciales cuya prueba puede darse fácilmente por este método.[12]

[12] Véase [24] para una construcción formal de la explosión de singularidades, [4] para una exposición corta del tema y [31] para el problema aquí abordado y su solución a través del árbol $\mathcal{SB}$ y las fracciones continuas.

Teorema 3.10. *[31]* † *Para todo $q/p \in \mathbb{Q}^+, q/p = [a_0, a_1, ..., a_n]$ se tiene que al hacer la explosión sucesiva de singularidades de las ecuaciones diferenciales que se obtienen partiendo de la ecuación $(\dot{x}, \dot{y}) = (px, qy)$, con $x, y \in \mathbb{R}$, en $\sum_{i=0}^{n} a_i$ explosiones (elegidas adecuadamente) se obtiene una ecuación definida por una transformación lineal con un valor propio cero (llamado caso dicrítico).*

Nota: Recordemos que al explotar el origen de $(\dot{x}, \dot{y}) = (mx, ny), x, y \in \mathbb{R}^2$ haciendo los cambios de coordenadas $(x, y) \to (x, u)$, con $u = y/x$ y $(x, y) \to (v, y)$, con $v = x/y$ se obtienen las ecuaciones: $(\dot{x}, \dot{u}) = (mx, (n-m)u)$ y $(\dot{v}, \dot{y}) = ((m-n)v, ny)$, una en cada una de los nuevos sistemas coordenados resultantes de la explosión (fig. 25).

$$\begin{tikzcd}
& \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[dl, "{(x,y) \to (x,u)}"', "{u = y/x}"] \arrow[dr, "{(x,y) \to (v,y)}", "{v = x/y}"'] & \\
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

Figura 25

Demostración. Haremos inducción en $\mathbb{Q}^+$. Vemos que la afirmación es cierta para $q/p = 1 = [1]$: al explotar el origen de $(\dot{x}, \dot{y}) = (x, y)$ obtenemos $(\dot{x}, \dot{u}) = (x, 0)$ y $(\dot{v}, \dot{y}) = (0, y)$, así que requerimos una explosión para llegar al caso dicrítico. Supongamos que para $q/p = [a_0, a_1, ..., a_n]$ se requieren $\sum_{i=0}^{n} a_i$ explosiones partiendo de $(\dot{x}, \dot{y}) = (px, qy)$ para llegar al caso dicrítico. Veamos qué ocurre con $i(q/p) = q/(q+p) = [0, 1, a_0, ..., a_n]$ y $d(q/p) = (q+p)/p = [a_0 + 1, a_1, ..., a_n]$. Al explotar la singularidad de $(\dot{x}, \dot{y}) = ((q+p)x, qy)$ obtenemos las ecuaciones $(\dot{x}, \dot{u}) = ((q+p)x, -pu)$ y $(\dot{v}, \dot{y}) = (pv, qy)$. Eligiendo la segunda para explotar nuevamente, tenemos por hipótesis de inducción que en $\sum_{i=0}^{n} a_i$ explosiones más se llega al caso dicrítico, así que en total se requirieron $(\sum_{i=0}^{n} a_i) + 1$ explosiones y la afirmación es válida para $i(q/p)$. De igual modo, al explotar el origen de $(\dot{x}, \dot{y}) = (px, (q+p)y)$ obtenemos $(\dot{x}, \dot{u}) = (px, qu)$ y $(\dot{v}, \dot{y}) = (-qv, (q+p)y)$. Escogiendo la primera y aplicando la hipótesis de inducción, concluimos que la afirmación es válida para $d(q/p)$. Así, por inducción en los racionales positivos, hemos probado que la afirmación es cierta para todo $q/p \in \mathbb{Q}^+$. □

Al igual que los cómputos con fracciones continuas son laboriosos en el lenguaje aritmético usual, algunas propiedades fácilmente demostrables con la aritmética usual resultan incómodas en el lenguaje de la aritmética arbórea. Ya que éste es adecuado en muchos contextos (aunque esto no sea evidente a primera vista, como puede ser el caso del teorema 3.10), es probable que en ellos la inducción en $\mathbb{Q}^+$ resulte útil.

---

†En el área de ecuaciones diferenciales es un hecho conocido que al hacer explosiones sucesivas a las singularidades de $(\dot{x}, \dot{y}) = (px, qy)$, con $x, y \in \mathbb{R}$ se llega al caso dicrítico en un número finito de pasos si $q/p \in \mathbb{Q}^+$. En [31] se explora el tipo de ecuaciones que se obtienen en el proceso de explosión, dando exactamente el número de explosiones requeridas para llegar al caso dicrítico: la suma de los cocientes parciales de la fracción continua de q/p. También se estudia el caso $q/p \notin \mathbb{Q}$, planteando algunos resultados cuyas pruebas podrían darse por inducción en el modelo de Euclides $\overline{\mathcal{SB}}_\beta$.

4. Posibilidades de la aritmética de Euclides

La aritmética de Euclides, tanto de primer como de segundo orden, ofrecen la descripción de los números racionales positivos en una estructura diferente a la usual, utilizando un lenguaje cómodo para propiedades relacionadas con el algoritmo de Euclides, misma que se manifiesta en diversos modelos. Pero su interés y posibilidades no terminan en la descripción de los racionales positivos. Como indican los estudios de aproximaciones racionales y equivalencia racional, así como las transformaciones modulares y la medida de irracionalidad, la estructura arbórea de los racionales también es significativa en el contexto de los números reales. El que los números irracionales puedan construirse como sucesiones convergentes de racionales dadas por los caminos de $\mathcal{SB}$ sugiere que el lenguaje es también adecuado para hablar de la estructura de los números reales y motiva a buscar una construcción alternativa de los números reales a través de $\mathcal{SB}$. Delineamos, a nivel intuitivo, una propuesta de cómo podría hacerse esto.

4.1. Cortaduras de Stern-Brocot: hacia una construcción alternativa de $\mathbb{R}$

Recordemos que cada camino en $\mathcal{SB}$ converge a un número real, correspondiendo (salvo un detalle menor)[13] los infinitos a números irracionales y los finitos a números racionales. Sería natural asociar a cada número real el término infinito $f_1 f_2 ... f_n ..,1$, con $f_j \in \{i, d\}$, pero esto conlleva varios problemas. En primer lugar, llevar la teoría a un lenguaje que admita términos infinitos nos llevaría a otra lógica, cuyas características desconocemos. Además, notamos que los infinitos functores crecen hacia la derecha, lo que resulta extraño, siendo que no hay *un* primer functor que aplicar al 1. Aunque esto puede resolverse tomando la construcción recursiva de términos con $*i1$ y $*d1$, no queda claro cómo operaría la conjugación entre las dos construcciones. El paso de lo finito a lo infinito es un problema profundo tanto en la filosofía como en la lógica y en las matemáticas (es *el* problema fundamental de las matemáticas, dirían algunos). En ello radicaba el problema de la continuidad y los límites, los números irracionales y la fundamentación del análisis, que tanto preocupaba a Dedekind y a sus contemporáneos. La solución de Dedekind para la fundamentación de los números reales, como sabemos, fue construirlos a través de conjuntos de números racionales: las *cortaduras de Dedekind*, para las que definió operaciones aritméticas, un orden y un axioma de completud para caracterizar a los números reales como un campo ordenado completo [16].

Siguiendo los pasos de Dedekind, podemos construir a cada número irracional como un conjunto infinito de racionales. Los caminos de $\mathcal{SB}$ son los candidatos ideales, puesto que contienen más información sobre el número irracional al que corresponden que una cortadura de Dedekind, que considera básicamente la relación de orden que guardan los racionales entre sí. Si tomáramos cada camino de $\mathcal{SB}$ (omitiendo los que acaban en una sucesión infinita de descendientes izquierdos o de descendientes derechos) como una *cortadura de Stern-Brocot*, tendríamos a cada racional representado por un conjunto finito de racionales y a cada irracional representado por un conjunto infinito de racionales. Éstos pueden verse, por un lado, como

[13] Los caminos infinitos que eventualmente toman sólo descendientes derechos o sólo descendientes izquierdos corresponden a racionales. Intuitivamente, si el último cociente parcial fuera ∞, su recíproco sería 0 y obtendríamos un número racional, que también podría expresarse añadiendo una cola infinita de 0 al final de sus cocientes parciales. Al pedir que los cocientes parciales sean enteros positivos (salvo en $0 = [0]$) se evitan estos caminos y la pérdida de unicidad. Algo así como eliminar en la expansión decimal las colas de 9's, que coinciden con el siguiente entero.

una sucesión que converge al número irracional que representan, y por otro, como conjuntos de racionales que contienen la información de cuán bien aproximable por racionales es dicho número irracional, al igual que todas las caracterizaciones que puedan darse en términos de los cocientes parciales de fracciones continuas y sus convergentes. Por ejemplo, sabemos (teorema de Lagrange, [11]) que un número irracional es raíz de un polinomio de grado dos si y sólo si su fracción continua es eventualmente periódica. Esta información estaría contenida en la cortadura de Stern-Brocot de dicho número irracional. De igual modo, los resultados que dan condiciones suficientes sobre los cocientes parciales (teoremas de Liouville y Roth [11, 32]) para que un número sea trascendente darían condiciones sobre las cortaduras de Stern-Brocot de dichos números que garantizan la trascendencia del irracional al que representan. Finalmente, la misma partición de los números reales dada por la equivalencia racional y las transformaciones modulares podría hacerse directamente sobre las cortaduras de Stern-Brocot, aprovechando que números equivalentes comparten "cola" de fracción continua. Quizá también pudiera caracterizarse la medida de irracionalidad en términos de estas cortaduras. En el caso de números racionales n/m, la cardinalidad de la cortadura asociada representa su "complejidad" en términos de cuántos pasos conlleva terminar el algoritmo de Euclides aplicado a n y m. En resumen, las cortaduras de Stern-Brocot brindarían una caracterización más fina de los irracionales, que involucrarían nociones que van más allá del orden, relacionadas con la estructura arbórea que hemos venido estudiando.

En cuanto a teorías formales, ¿qué implicaría buscar una construcción de los reales por medio de cortaduras de Stern-Brocot? Aunque no hay manera de salvar el asunto del infinito, pues igualmente tendremos que pasar a considerar conjuntos infinitos de términos, la construcción de las cortaduras de Stern-Brocot es clara. Por ejemplo, en lugar de considerar el término infinito $iddid\ldots 1$, consideramos la secuencia de términos finitos $\{1, i1, id1, idd1, iddi1, iddid1, ...\}$, entre los cuales podemos identificar a los convergentes, en función de los grupos de i's y d's consecutivas. Qué tan extensos son estos grupos habla del tamaño de los cocientes parciales de las fracciones continuas, lo que da esperanza de traducir al lenguaje formal las propiedades relativas a aproximaciones racionales y equivalencia racional. Otra ventaja de esto es que mientras trabajemos con términos finitos, seguimos conociendo la acción de la conjugación y podemos sacar jugo a la estructura conjugada. Para poder hablar de dichos conjuntos requeriríamos una lógica de segundo orden. En este contexto, la elección de semántica nos llevaría a un terreno interesante en cuanto a que involucraría considerar la definibilidad de los conjuntos de racionales que constituyen cada cortadura de Stern-Brocot, y con ello limitar los números irracionales sobre los que podemos hablar.

4.2. Implicaciones matemáticas y filosóficas

Mencionamos algunas de las implicaciones matemáticas de la aritmética de Euclides. La primera es la posibilidad de hacer pruebas por inducción en los racionales positivos. De hecho, como vimos en la sección 3.3, ya que el árbol $\overline{\mathcal{SB}_\beta}$ puede formar un modelo de Euclides, se podrían hacer también algunas pruebas por inducción en afirmaciones sobre los irracionales racionalmente equivalentes a β que aparecen en $\overline{\mathcal{SB}_\beta}$ (y con algunos ajustes, posiblemente para toda la clase de equivalencia de β). Como dijimos, lugares en donde es posible encontrar utilidad a este método de demostración es en aquellos en donde las fracciones continuas y las aproximaciones racionales tomen un papel relevante (como en los círculos de Ford, teselaciones hiperbólicas y enredos racionales). Otra de las implicaciones matemáticas es la posibilidad de estudiar ciertas estructuras algebraicas a partir de los modelos de Euclides y $\overline{\mathcal{SB}}_\beta$.

La construcción de $AEPO$ arroja luz sobre la naturaleza del orden y las operaciones aritméticas en los racionales. Notamos que no requerimos hablar de la suma para definir el orden, sino que fue un producto natural de la construcción arbórea. Por otro lado, en la estructura arbórea es natural introducir el recíproco, así como la suma y producto por naturales. Pero la suma de números racionales en general no resulta natural. Tuvimos que recurrir a la suma de naturales y después extenderla a los otros elementos. Lo que sí resulta sencillo en el lenguaje $\mathcal{L}_4$ es sumar racionales que tienen el mismo denominador (hecho clave para el algoritmo de Euclides). Y es lo que hacemos al sumar fracciones de la manera usual: las llevamos primero a una forma en que compartan denominador. En cuanto al proceso "natural" de construcción de los números reales a través de operaciones aritméticas, vale la pena revisar la perspectiva de Dedekind sobre este punto y contrastarla con la construcción de $AESO$:

> Veo toda la aritmética como una consecuencia necesaria o al menos natural del acto aritmético más sencillo, contar, y contar no es nada más que la creación sucesiva de la serie infinita de los números enteros positivos, en la que cada individuo viene definido mediante el inmediatamente precedente [...]. La cadena de estos números [...] ofrece una inagotable riqueza de leyes notables que se alcanzan mediante la introducción de las cuatro operaciones aritméticas básicas. La adición es la reunión en un sólo acto de una repetición cualquiera del acto más simple indicado anteriormente y de ella surge, de la misma forma, la multiplicación. Mientras ambas operaciones son siempre ejecutables, las operaciones inversas, sustracción y división, sólo son limitadamente admisibles. [...] Basta saber que esta limitación de realizar las operaciones indirectas es precisamente, en cada caso, la verdadera causa de un nuevo acto creativo; así, los números negativos y quebrados han sido creados por la mente humana, y con el sistema de todos los números racionales se ha ganado un instrumento de completud infinitamente mayor. Este sistema, que quiero designar con **R**, posee ante todo una autonomía y un cierre que en otro lugar he designado como característicos de un *cuerpo de números*, y que consisten en que las cuatro operaciones básicas son siempre ejecutables con dos individuos cualesquiera [...] si excluimos un único caso, la división por el número cero. (Dedekind, 1998, [17], pp.88-89.)

El contraste más notable entre la concepción de Dedekind y la construcción de $AESO$ es que ésta última muestra que los racionales pueden construirse como producto de un acto igualmente natural que la creación de los naturales, sólo que con dos sucesores en lugar de uno sólo. Aquí también cada individuo viene definido mediante el inmediatamente precedente, sólo que se tienen dos maneras posibles de crear un "elemento siguiente". La "reunión en un sólo acto de una repetición cualquiera del acto más simple" corresponde a una función que permite repetir la construcción de un número a partir de otro (generando un subárbol); es decir, la concatenación. El recíproco y el conjugado, como vimos, también surgen naturalmente en la estructura arbórea, lo que convierte a la operación 'invertir' en una operación natural de la estructura (que al no tener el cero, no tiene aún ninguna "imposibilidad"). La incorporación de las funciones inversas de i y d nos daría la construcción de todos los números racionales (incluyendo negativos). Curiosamente, lo que resulta más complicado de incorporar en esta estructura arbórea son las operaciones más simples indicadas por Dedekind: la suma y el producto. Sin embargo, notamos que sí que resulta natural añadirlas (como hicimos) para términos naturales, que es en esencia lo que hace Dedekind. Aunque defendemos que el lenguaje de $AEPO$ (o $AESO$) resulta natural para una construcción de los racionales, no lo plantearíamos como una "mejor alternativa" a la construcción usual de la aritmética de Peano, sino como una herramienta alterna que resulta más natural en algunos contextos, particularmente en todos aquellos relacionados con la conmensurabilidad.

Llamamos la atención sobre otro aspecto filosófico que sale a la luz con la construcción de $AESO$. Las propiedades relacionadas con las aproximaciones racionales, equivalencia racional o los resultados que hablan sobre irracionales cuadráticos, algebraicos y trascendentes son propiedades que atribuimos a los números irracionales. Notamos, sin embargo, que la clave para determinar cuán bien aproximable es un número irracional está ya presente en un conjunto de racionales: en el camino de $\mathcal{SB}$ asociado a dicho número. Es interesante que propiedades que pensamos propias de los números irracionales lo sean de conjuntos de racionales, que además no dependen de que los elementos de los conjuntos en sí sean números racionales (recordemos la diversidad de modelos de $AESO$), sino de la manera en que éstos fueron construidos: de la estructura arbórea, lo que queda esclarecido al tomar como modelo al lenguaje mismo.

4.3. Otros caminos

Para finalizar este trabajo mencionamos algunos lugares que quedan por explorar. En el ámbito lógico, tenemos el estudio y descripción de los modelos no estándar de $AEPO$, el estudio de cómo son los modelos de inducción, cuántos tipos de ellos hay y qué axiomas involucran, la extensión de la teoría incorporando las funciones inversas de i y d para tener como modelo estándar a todos los racionales (y en el caso de matrices, a todo el grupo modular), la construcción de una teoría para los números reales, naturalmente, a través de las cortaduras de Stern-Brocot y la posibilidad de llevar las teorías a una lógica que admita términos infinitos. En el ámbito matemático, pueden estudiarse estructuras algebraicas a través de Sistemas de Euclides y tal vez estructuras algebraicas que acepten tanto elementos resultantes de caminos infinitos en $\mathcal{SB}$ (números irracionales) como caminos infinitos en $\overline{\mathcal{SB}}$ (que serán elementos no finitos). En el ámbito de teoría de conjuntos puede ser interesante buscar una teoría axiomática construida a partir de dos sucesores (conjuntistas) en lugar de uno y definir así conjuntos con cardinalidad fraccionaria. En el ámbito de la computabilidad, se puede explorar una definición alternativa de números reales computables según si su fracción continua puede ser calculada por medios finitos (por una máquina de Turing), lo que equivale a qué términos cerrados infinitos de $\mathcal{L}_1$ pueden ser escritos por una máquina de Turing.

5. Conclusiones

La construcción formal de los números racionales suele darse como una extensión de la estructura aritmética de los números naturales, donde las operaciones (suma y producto) son construidas a partir del proceso de tomar un elemento y generar el resto a través de la función sucesor. Es posible construir a los números racionales positivos de otra manera, organizándolos en una estructura más rica, en la que las operaciones usuales son construidas a partir del proceso de tomar un elemento y generar el resto a través de dos funciones sucesor. Se genera una estructura arbórea, que puede verse como el árbol de Stern-Brocot (o el árbol de Calkin-Wilf: en la estructura hay una operación de conjugación que transforma uno en el otro); los naturales y su función sucesor forman una subestructura de ella. La estructura puede expandirse añadiendo las operaciones aritméticas usuales de suma y producto, cuya interacción con las otras operaciones de la estructura arbórea puede ser estudiada.

En este trabajo damos una construcción progresiva de teorías axiomáticas de primer y segundo orden cuyo modelo estándar son los números racionales positivos estructurados en los árboles de Stern-Brocot y Calkin-Wilf. Demostramos que los modelos no estándar de las teorías axiomáticas que se obtienen en primer orden deben contener una inmersión del modelo estándar. Con estas teorías obtenemos una fundamentación para hacer inducción en los números racionales positivos y sentamos las bases para dar una construcción alternativa de los números reales.

Referencias

[1] Arnold, V. I. (1983). *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, New York: Springer-Verlag.

[2] Arnold, V. I. (1992). *Ordinary Differential Equations.* New York: Springer-Verlag.

[3] Arnold, V. I. (2015). *Lectures and Problems: A Gift to Young Mathematicians.* Providence: American Mathematical Society.

[4] Álvarez, M. J., Ferragut, A., y Jarque, X. (2011). A survey on the Blow Up Technique. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(11), 3103-3118.

[5] Barba E., J. (2010). *Lógica, Lógicas.* Valladolid: Universidad de Valladolid.

[6] Barba E., J. (2019). *El método de los Diagramas.* (Notas del curso *Metalógica I*) Máster interuniversitario en Lógica y Filosofía de la Ciencia. Salamanca: Universidad de Salamanca.

[7] Bates, B., Bunder, M. y Tognetti, K. (2010). Linking the Calkin-Wilf and Stern-Brocot trees. *European Journal of Combinatorics*, 31, 1637-1661. doi:10.1016/j.ejc.2010.04.002.

[8] Bonahon, F. (2009). *Low-dimensional geometry. From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots.* Providence: American Mathematical Society.

[9] Brezinski, C. (1991). *History of Continued Fractions and Padé Approximants.* New York: Springer-Verlag.

[10] Brocot, A. (1862). *Calcul des rouages par approximation. Nouvelle méthode, par Achille Brocot*, Paris. Recuperado de: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1661912

[11] Burger, E. B. (2000). *Exploring the Number Jungle: A Journey into Diophantine Analysis*, Providence: American Mathematical Society.

[12] Burger, E. B. (2005). A Tail of Two Palindromes. *American Mathematical Monthly.* 112(4), pp. 311-321.

[13] Calkin, N., Wilf, Herbert. (2000). Recounting the Rationals. *American Mathematical Monthly*. 107(4), pp.360-363.

[14] Chang, C., Keisler, H. (1990). *Model Theory*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.

[15] Cusick, T. W., Flahive, M. E. (1989). *The Markoff and Lagrange Spectra*, Mathematical Surveys and monographs, 30, Providence: American Mathematical Society.

[16] Dedekind, R. (1998). Continuidad y números irracionales. En *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de las matemáticas* Ed. por J.Ferreirós. Madrid: Alianza Editorial, 83-102.

[17] Dedekind, R. (1998). ¿Qué son y para qué sirven los números? En *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de las matemáticas* Ed. por J.Ferreirós. Madrid: Alianza Editorial, 103-156.

[18] Ford, L. R. (1917). A geometrical proof of a theorem of Hurwitz. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. 35, 59-65.

[19] Ford, L. R. (1938). Fractions. *The American Mathematical Monthly*. 45(9), 586-601.

[20] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O. (1989). *Concrete Mathematics*, Reading, Massachusets: Addison-Wesley.

[21] Goldman, J. R., Kauffman, L.H. (1997). Rational Tangles. *Advances in Applied Mathematics*. 18, 300-332.

[22] Hardy, G. H., Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford: Oxford University Press.

[23] Henkin, L. (1960). On mathematical induction. *The American Mathematical Monthly*. 67(4), 323-338.

[24] Y. Ilyashenko, S. Yakovenko. (2008). *Lectures on Analytic Differential Equations*. Rhode Island: American Mathematical Society.

[25] Irwin, M. C. (1989). Geometry of Continued Fractions. *The American Mathematical Monthly*. 96(8), 696-703.

[26] Khinchin, A. Y. (1964). *Continued Fractions*. Chicago: University of Chicago Press.

[27] Kindt, M. (2005). Fracciones intermedias. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 60, 51-60.

[28] Lang, S. (1966). *Introduction to Diophantine Approximations*. USA: Addison-Weslew Publishing Company.

[29] Manzano A., M. (1996). *Extensions of First Order Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

[30] Mendelson, E. (1973). *Number Systems and the Foundations of Analysis.* New York: Dover Publications.

[31] Neve J., C. (2015). Ortiz B., L. (Dir.) *Estudio geométrico de explosión de singularidades y la estructura de los números reales.* (Tesis de Licenciatura). México: UNAM. Recuperado de: 132.248.9.195/ptd2015/octubre/0737500/Index.html

[32] Roth, K. F. (1955). Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika* 2, 1-20.

[33] Stern, M. (1858). Über eine zahlentheoretische Funktion. *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 55, 193-220.

[34] Steuding, J. (2005). *Diophantine analysis.* Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.

FACULTAD DE FILOSOFÍA

Campus Miguel de Unamuno, Edificio F.E.S.
37007 - Salamanca
Tel . (34) 923 29 46 42
e-mail: masterfia@usal.es, adm.ffs@usal.es
http://www.usal.es/webusal/node/29

Declaración de integridad intelectual

Trabajo Fin Máster

Curso: 2019-2020

Título del trabajo: Inducción en los números racionales: hacia una potencial construcción de los números reales.

1. Sé que copiar es una forma de deshonestidad académica.
2. He leído el documento sobre cómo ser intelectualmente íntegro, estoy familiarizado con sus contenidos y he evitado todas las formas de plagio allí recogidas.
3. Cuando utilizo las palabras de otros, lo indico mediante el uso de comillas.
4. He referenciado todas las citas e igualmente el resto de ideas tomadas de otros.
5. No he plagiado mi propio trabajo.
6. No permitiré a otros que plagien mi trabajo.

Fecha: 29 de julio de 2020

Firma: