

Kinks con dos componentes: de su relación con
sistemas dinámicos integrables y modelos
supersimétricos

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Salamanca

Memoria presentada por Alberto Alonso Izquierdo
para optar al Grado de Doctor en Matemáticas

Salamanca, 2001

Índice General

Introducción	1
1 Sobre Defectos Topológicos de tipo Kink	9
1.1 Introducción	9
1.2 De las ondas solitarias de tipo kink	9
1.2.1 Soluciones de vacío	13
1.2.2 Defectos Topológicos: Kinks	15
1.2.3 De la búsqueda de kinks	18
1.2.4 Mecánica Clásica	19
1.2.5 Mecánica PseudoClásica	23
1.2.6 Mecánica Clásica Supersimétrica	26
1.3 De kinks tratados en la literatura	28
1.3.1 Modelo ϕ^4	30
1.3.2 Modelo Seno-Gordon	34
1.3.3 Modelo Sigma O(2) Lineal	36
1.3.4 Modelo MSTB.	38
1.4 Sobre el estudio de kinks	48
1.4.1 Método de órbitas prueba.	49
1.4.2 De sistemas completamente integrables: Modelos de Liouville.	49
1.4.3 De los modelos presupersimétricos:	50
2 Kinks En Modelos De Liouville I	55
2.1 Introducción	55
2.2 De las coordenadas elípticas.	56
2.3 Descripción de la teoría de Hamilton-Jacobi	58
2.4 Propiedades generales	60
2.5 Análisis del término potencial	64
2.6 Modelo I $[\sigma,1][1][1,1]$	68
2.7 Modelo I $[\sigma,\tau,\sigma\tau][0][011]$	78
2.8 Kinks genéricos de Tipo I	93

3	Kinks En Modelos De Liouville III	101
3.1	Introducción	101
3.2	De las coordenadas parabólicas.	102
3.3	Descripción de la teoría de Hamilton-Jacobi.	104
3.4	Propiedades generales	105
3.5	Análisis del término potencial de tipo III	109
3.6	Modelo III[1][11].	112
3.7	Modelo III[1][31].	121
3.8	Modelo III[1 τ][011].	127
3.9	Kinks genéricos de tipo III	135
4	Kinks En Modelos de Liouville II y IV	141
4.1	Introducción	141
4.2	Modelos de Liouville de Tipo II	142
4.2.1	De las coordenadas polares.	142
4.2.2	Descripción de la teoría de Hamilton-Jacobi.	144
4.2.3	Propiedades generales del sistema físico:	145
4.2.4	Sobre el término potencial de tipo II	148
4.2.5	Modelo II[(1)(1)($\gamma,1$)].	149
4.2.6	Modelo II[(1a)(11),($\gamma,1$)].	152
4.2.7	Modelo II[(1a)(11)($\gamma, \frac{1}{2}$)]	156
4.2.8	Generalización de los kinks Tipo II:	160
4.3	Modelos de Liouville de tipo IV:	162
4.3.1	De los conceptos iniciales:	163
4.3.2	Descripción de la teoría de Hamilton-Jacobi.	164
4.3.3	Propiedades generales del sistema físico	165
4.3.4	Modelo $\phi_1^4 \oplus \phi_2^4$	166
4.3.5	Modelo Seno-Gordon N=2	169
5	Kinks en Modelos Presupersimétricos	173
5.1	Introducción	173
5.2	Modelos con superpotencial armónico	174
5.2.1	Cotas de Bogomolny:	174
5.2.2	Holomorfa del superpotencial	176
5.2.3	Modelo de Gibbons-Townsend	179
5.3	Modelo BNRT	189
6	Corrección cuántica a la masa de Kinks	199
6.1	Introducción	199
6.2	Corrección cuántica a la masa del kink	201

6.2.1	Aproximación de fase estacionaria	201
6.2.2	Regularización y renormalización de ΔM	203
6.2.3	Regularizaciones: corte de energías y corte de modos	204
6.3	La función zeta $\zeta(s)$: Trazas de operadores	209
6.4	La ecuación del calor: Caso unidimensional	211
6.5	Aproximación asintótica de ΔM con $N = 1$	214
6.6	Corrección cuántica a la masa del kink en modelos con $N = 1$	219
6.6.1	Modelo Seno-Gordon	219
6.6.2	Modelo ϕ^4	224
6.7	La ecuación del calor: Caso bidimensional	228
6.8	Aproximación asintótica de ΔM con $N = 2$	232
6.9	Corrección cuántica a la masa del kink en modelos con $N=2$	235
6.9.1	Modelo MSTB	236
6.9.2	Modelo BNRT	241
Introducción a la Supersimetría		249
7	Sistemas dinámicos supersimétricos	255
7.1	Introducción	255
7.2	Mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica	256
7.2.1	Mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica con métrica euclídea	256
7.2.2	Mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica con métrica	260
7.3	Sistemas mecánicos de SuperLiouville:	261
7.3.1	Sistema mecánico de SuperLiouville: Tipo I.	262
7.3.2	Sistema mecánico de SuperLiouville: Tipo III.	263
7.3.3	Sistema mecánico de SuperLiouville: Tipo II.	264
7.3.4	Sistema mecánico de SuperLiouville: Tipo IV.	265
7.4	De la presencia de invariantes bosónicos	266
7.4.1	Cálculos genéricos en coordenadas cartesianas	267
7.4.2	Cálculos genéricos en coordenadas curvadas	270
7.5	Invariantes en los sistemas de SuperLiouville	273
7.5.1	Sistemas mecánicos de SuperLiouville de Tipo I	273
7.5.2	Sistemas mecánicos de SuperLiouville de Tipo III	275
7.5.3	Sistemas mecánicos de SuperLiouville de Tipo II	276
7.5.4	Sistemas mecánicos de SuperLiouville de Tipo IV	278
7.6	De la presencia de invariantes fermiónicos	278
7.6.1	Sistemas mecánicos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos	280
7.6.2	Sistemas mecánicos $\mathcal{N} = 2 \oplus \mathcal{N} = 2$ supersimétricos	281
7.6.3	Sistemas mecánicos $\mathcal{N} = 4$ supersimétricos	282
7.6.4	Sistemas mecánicos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos de tipo i	282

7.6.5	Sistemas mecánicos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos de tipo ii	283
7.7	Supersoluciones:	284
8	Teoría de campos supersimétrica en (1+1) dimensiones y kinks	287
8.1	Introducción	287
8.2	Supersimetría $\mathcal{N} = 1$ en (1+1) dimensiones con métrica euclídea . . .	288
8.3	Supersimetría $\mathcal{N} = 1$ en (1+1) dimensiones con métrica.	292
8.3.1	Teoría con superpotencial	293
8.4	Modelos de SuperLiouville	294
8.4.1	Modelos de SuperLiouville de Tipo I	294
8.4.2	Modelos de SuperLiouville de Tipo III	294
8.4.3	Modelos de SuperLiouville de Tipo II	295
8.4.4	Modelos de SuperLiouville de Tipo IV:	296
8.5	Cuantificación y espectro SUSY	296
8.6	Búsqueda de invariancias fermiónicas.	300
8.6.1	Modelos $\mathcal{N} = 1 \oplus \mathcal{N} = 1$ supersimétricos	302
8.6.2	Supersimetría Extendida en (1+1) dimensiones:	303
8.6.3	Modelos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos	304
8.6.4	Modelos $\mathcal{N} = 4$ supersimétricos	309
8.6.5	Modelo $\mathcal{N} = 1$ supersimétrico con superpotencial armónico hiperbólico	310
8.7	Espacio de configuración: SuperKink.	311
8.8	SuperSoluciones en $N = 1$	314
8.8.1	Modelo supersimétrico ϕ^4	315
8.9	SuperSoluciones en $N = 2$	317
8.9.1	Modelos de SuperLiouville de tipo IV	318
8.9.2	Modelos de SuperLiouville de tipo III	320
8.9.3	Modelos $\mathcal{N} = 2$ Supersimétricos	324
	Conclusiones	327
	A Convenios y notación.	329
	B Sobre el problema espectral de operadores de tipo Schrödinger	333
	C Supersimetría y formalismo de Cartan.	339
	Bibliografía	343

Introducción

La presente memoria, enmarcada en el ámbito de la teoría de campos escalares, está dedicada al estudio de las soluciones de naturaleza topológica admitidas por el sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales

$$\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x_0^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial U}{\partial \phi^i} = 0 \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

donde usaremos la notación habitual en la que los índices griegos conciernen a los grados espacio-temporales y los latinos quedan restringidos a los espaciales, esto es, $x_\mu = (x_0, x_j) = (t, x)$. $\phi = \phi(x_\mu) = (\phi^1(x_\mu), \phi^2(x_\mu), \dots, \phi^N(x_\mu))$ es un campo con componentes escalares y $U = U(\phi^1, \dots, \phi^N)$ es una función cualquiera de dichos campos fijada por el problema. En una descripción más minuciosa nuestro trabajo está dirigido a identificar soluciones de la ecuación (1) cuya densidad de energía permanezca localizada a lo largo de la evolución del sistema, es decir, soluciones de naturaleza no dispersiva. Ello permite interpretarlas como partículas clásicas. Para apreciar la peculiaridad de la propiedad mencionada téngase presente que para el caso particular de la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar en (1+1) dimensiones

$$\frac{\partial^2 \phi(x_0, x_1)}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \phi(x_0, x_1)}{\partial x_1^2} + m^2 \phi(x_0, x_1) = 0 \quad (2)$$

las expresiones de tipo onda plana, $\cos(kx_1 \pm \omega x_0)$ y $\sin(kx_1 \pm \omega x_0)$ forman un conjunto completo de soluciones bajo la condición $\omega^2 = k^2 + m^2$. La solución general corresponde a una combinación lineal de las ondas planas, las cuales se propagan con velocidades diferentes, provocando el fenómeno de dispersión. Por ello, este tipo de soluciones no cumple las características indicadas en el párrafo precedente. La adición de términos no lineales a (2) proporciona la posibilidad de que el comportamiento dispersivo de las soluciones resultantes sea contrarrestado con la no linealidad de tales ecuaciones de forma que, como consecuencia, (1) admita soluciones del tipo sugerido. La literatura se refiere a ellas como *ondas solitarias* de forma genérica, aunque es extendido el uso del término *solitón*¹. Este análisis puede

¹Determinados autores emplean este término de forma restringida para designar ondas solitarias que preservan su identidad tras un proceso de colisión entre éstas.

ser asociado al estudio de un sistema físico lagrangiano en un métrica minkowskiana, de tal modo que el término $U(\phi)$ describe el potencial asociado a la teoría física. El vocablo *solitón* tiene su origen, en realidad, en la interpretación de partícula, preservada incluso en la teoría cuántica. De forma genérica, haciendo abstracción de la teoría en que se presentan, estas soluciones suelen ser denominadas *defectos topológicos* [139]. En la teoría de campos escalares, el teorema de Derrick [43] nos permite afirmar que la presencia de ondas solitarias, que viajan a velocidad constante, tiene lugar sólo en un espacio-tiempo de (1+1) dimensiones. En este caso particular, estas soluciones reciben el nombre de *kinks* [114] y es el concepto al que se consagra esta memoria. En (2+1) y (3+1) dimensiones, en el ámbito de las teorías cosmológicas, se relajan algunas de las exigencias sobre las ondas solitarias dando origen respectivamente a los *ribbons* y *domain walls*, que tras la adecuada proyección dimensional se identifican con una solución kink. Muy celebrados son los defectos topológicos que tienen lugar en teorías gauge; cuando se trabaja con las teorías abelianas asociadas al grupo gauge $U(1)$ en (2+1) dimensiones surgen los *vórtices*, mientras que para el grupo $SU(2)$ en (3+1) dimensiones aparecen los *monopolos*.

Evolución histórica.

El nacimiento histórico del concepto de onda solitaria o solitón es bien conocido y debido a una experiencia fortuita de J. Scott Russell en el año de 1834. Su relato acerca de este hecho describe admirablemente el fenómeno [129]:

I believe I shall best introduce this phenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped -not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of the a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation, a name which it now very generally bears; which I have since found to be an important element in almost every case of fluid resistance, and ascertained to be the type of that great moving elevation of the sea, which, with the regularity of a planet, ascends our rivers and rolls along our shores.

Russell dedicó gran parte de su trabajo de investigación al estudio de tal fenómeno.



Figura 1: *Recreación del solitón de Russel en Union Canal de Edimburgo por la Heriot-Watt University (1995).*

Tras numerosos resultados empíricos obtuvo la relación

$$c = \sqrt{g(h + \eta)}$$

donde c es la velocidad de la onda solitaria, η es la amplitud de la onda, h es la profundidad del canal y g es la aceleración de la gravedad. Los años siguientes correspondieron a una etapa de transición en los cuales los resultados de Russell no fueron aceptados por muchos de sus contemporáneos, como en los casos relevantes de Sir John Herschel o Airy. Fue en 1895 cuando Korteweg and de Vries propusieron la ecuación

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)$$

para describir ondas sobre fluidos de densidad ρ y tensión superficial T en canales poco profundos, donde $\sigma = \frac{h^3}{3} - \frac{Th}{g\rho}$. Esta ecuación admitía ondas solitarias como soluciones. El problema fue prácticamente olvidado hasta tal punto que el resurgimiento de dichas soluciones supuso de nuevo cierta sorpresa.

Ya en 1955, Fermi, Ulam y Pasta propusieron, para probar la puesta a punto del computador MANIAC (Los Alamos), el problema de la distribución de energía en una cadena de osciladores no lineales, caracterizado por las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acopladas

$$m\ddot{y}_i = k(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i) + k\alpha[(y_{i+1} - y_i)^2 - (y_i - y_{i-1})^2]$$

donde $y_i = y_i(t)$ con $i = 1, \dots, N - 1$ e $y_0 = y_N = 0$. Los valores típicos que los programadores introdujeron en la máquina correspondían a valores iniciales $y_i(0) =$

sen $\frac{i\pi}{N}$, $y_i(0) = 0$ con $N = 64$. El comportamiento que esperaban Fermi, Ulam y Pasta era que la energía se distribuyera uniformemente sobre los modos de la cadena. En vez de ello, la solución encontrada concentraba la energía en los modos de forma periódica. Fue más tarde, en 1965, cuando Zabusky y Kruskal obtuvieron el límite continuo del problema anterior, llegando a la relación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0$$

donde $\delta = \frac{h^2}{12}$ siendo h la distancia entre los osciladores. Esta ecuación es equivalente (reescalando las constantes del problema) a la de Korteweg-de Vries. El estudio numérico de tal ecuación reveló la presencia de las soluciones de tipo onda solitaria. Fueron estos autores, Zabusky y Kruskal, quienes introdujeron por primera vez el término *solitón* para tales soluciones. Estos resultados numéricos dieron origen a un desarrollo posterior de ciertas técnicas para tratar dichas situaciones, generando nuevas áreas en la Matemática Aplicada y Física Matemática. Recientes trabajos de relevancia [121] han sido obtenidos por P. Rosenay, Hyman, R. Camassa y D. Holmk, dando origen a nuevos términos como *compactones*, *peakons*, etc.

Objetivo de este trabajo

El propósito de esta memoria es identificar las soluciones de tipo kink presentes en determinados modelos físicos enmarcados en teorías de campos escalares de N -componentes con un espacio-tiempo bidimensional. Un procedimiento estándar para construir kinks es identificar las soluciones sin dependencia del parámetro temporal x_0 de las ecuaciones (1). Una vez obtenidas éstas, el uso de la invariancia lorentziana nos permite introducir una dependencia temporal que guarda la forma de la solución a lo largo de la evolución del problema. Subyace tras el esquema marcado la íntima conexión presente entre el problema planteado y la mecánica clásica, a través del proceso conocido como *símil mecánico*. Una vez hallados los kinks en determinados modelos físicos en el ámbito clásico y dada su caracterización topológica, es natural preguntarse si mantienen su entidad en el marco cuántico. La respuesta es afirmativa si las soluciones son clásicamente estables y ello motiva la cuestión de cómo se ve afectada la masa de las partículas asociadas a los kinks clásicos, al menos a primer orden en \hbar . Finalmente, uno de los marcos más brillantes de la Física Matemática es el dado por la supersimetría, donde las soluciones kinks son albergadas de forma singular.

A modo de presentación, los puntos a abordar en este trabajo son:

- Estudiar la clasificación completa de los modelos físicos correspondientes a teorías de campos escalares de dos componentes cuyo sistema mecánico asociado es de tipo Liouville y, en consecuencia, completamente integrable. Se

obtiene la totalidad de las soluciones kinks presentes en estos modelos y el estudio de su estabilidad clásica. El mismo análisis es considerado sobre modelos presupersimétricos con superpotencial armónico.

- Desarrollar un procedimiento de estimación de la corrección cuántica a primer orden (one-loop) de la masa de los kinks encontrados en los modelos ofrecidos, que evite la necesidad de resolución del espectro del hessiano asociado, utilizando técnicas asintóticas sobre la traza de tal operador mediante el análisis de la ecuación de calor. Así será encontrada la alteración a la masa clásica de los kinks descritos en el primer punto en el marco cuántico.
- Extender la estructura ofrecida en el primer punto al marco supersimétrico, en el que las soluciones kinks se presentan como estados BPS. En particular los modelos físicos denominados en esta memoria de Liouville admiten una extensión supersimétrica generando los modelos de *SuperLiouville*. Clásicamente generalizaremos la noción de kink al de *superkink* siguiendo las directrices marcadas por los trabajos de Manton.

Estructura de la Memoria

En el capítulo 1 de esta memoria, se recopilan los aspectos generales concernientes al concepto de solución de tipo kink que serán utilizados a lo largo de todo el texto presentado. Quedarán así fijados los convenios y la notación usados en este trabajo. Junto a ellos, la noción central que queda presentada es el símil mecánico, que basado en ansatz determinado por la transformación de Lorentz, equipara la identificación de kinks con un problema mecánico. Como consecuencia de ello, será útil hacer algunas reseñas acerca de determinadas herramientas utilizadas en mecánica clásica. En particular resultará imprescindible la mención de la ecuación de Hamilton-Jacobi. De forma paralela presentaremos, además, la mecánica clásica supersimétrica [53], la cual introduce junto a los grados bosónicos de los campos escalares otros de carácter grassmanniano. Ello será utilizado para abordar los últimos dos capítulos de esta memoria. De gran interés será exponer las nociones generales sobre kinks adquiridas en la literatura acerca de modelos físicos ampliamente tratados, tales como los ejemplos paradigmáticos con espacio interno unidimensional del modelo ϕ^4 y de Seno-Gordon [114]. En tal caso, las ecuaciones de Euler-Lagrange se corresponden con una ecuación diferencial no lineal de segundo orden que admite una integral primera conocida. Las soluciones de ondas solitarias pueden ser, por tanto, obtenidas. Con la intención de dirigir nuestro análisis a modelos físicos de espacio interno con mayor número de grados de libertad, son presentados además, el modelo Sigma $O(2)$ Lineal y una deformación de éste conocida como modelo MSTB (tratado inicialmente por Montonen [98], Sarker, Trullinger y Bishop [125, 133, 134]).

Ahora, las ecuaciones de Euler-Lagrange se corresponden con un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas. Encontrar las ondas solitarias asociadas a éstas, corresponde a un salto en dificultad nada desdeñable, dado que en general el problema deja de ser resoluble, tal como es advertido por Rajaraman [114]. Este autor propone como técnica de identificación de kinks el método de órbitas prueba, que consiste en ensayar expresiones que caractericen las trayectorias de hipotéticas soluciones sobre las ecuaciones diferenciales hasta hallar una respuesta correcta. Esta forma de obrar fue aprovechado sobre el modelo MSTB hasta obtener unas pocas soluciones. Sin embargo, el modelo ocultaba una rica estructura no apreciada por los investigadores referidos. Años más tarde, fue Ito quien, apoyado en la separabilidad en variables elípticas de la ecuación de Hamilton-Jacobi del sistema mecánico asociado al modelo MSTB, obtuvo al completo la variedad de kinks existente, junto con unas peculiares relaciones entre las energías de estas soluciones.

Es de justicia reconocer al modelo MSTB el papel de piedra angular en el presente texto y fue la motivación que auspició este trabajo. De hecho una de las aportaciones presentadas en esta memoria se basa en el reconocimiento de que este modelo no es ni mucho menos único. Nuestra contribución se centra en analizar los modelos que admiten como sistema mecánico asociado un sistema de Liouville. Tal es así, que en el capítulo 2 se trata su generalización, verificando que no es un modelo singular sino que pertenece a una familia de modelos con propiedades similares, los modelos separables en coordenadas elípticas o *de Liouville de Tipo I* [109].

En los capítulos 3 y 4 se completa la posibilidad ofrecida por los modelos separables Hamilton-Jacobi, mostrando los modelos que denominaremos de Liouville de Tipo III, que tienen asociado un sistema mecánico separable Hamilton-Jacobi en coordenadas parabólicas; modelos de Liouville de Tipo II, separables en polares y los de Tipo IV, separables en coordenadas cartesianas. En los capítulos mencionados 2, 3 y 4 se obtiene la variedad de kinks al completo y se indican las peculiaridades de estos modelos, tales como su carácter presupersimétrico mediante dos vías distintas, la presencia de relaciones entre las energías de distintas familias de kinks conocidas como reglas de suma, etc. En el siguiente capítulo, aunque el cometido de identificación de kinks sigue siendo el vigente, el enfoque es diferente. En este caso son analizados los modelos de carácter presupersimétrico, lo que proporciona un sistema de ecuaciones acopladas de primer orden más sencillo que el proporcionado por las ecuaciones de Euler-Lagrange. Un caso peculiarmente importante es el constituido por aquellos modelos que incluyen un superpotencial armónico, dado que se corresponden con el sector bosónico de la restricción dimensional de los modelos de Wess-Zumino (ampliamente tratados en la literatura bajo el ámbito de la supersimetría [141, 142, 143]). Ello permitirá de nuevo identificar la variedad de kinks presente. Relajando la condición de armonicidad sobre el superpotencial, la información sobre

tal variedad será parcial, aunque también de gran interés. Ilustraremos tal situación en el estudio de un modelo ampliamente tratado en la literatura, aunque de forma incompleta, en el mero empleo del método de las orbitas prueba [14, 16, 18]. Como recapitulación podemos advertir que los capítulos 2, 3, 4 y 5 son dedicados a la identificación de los kinks clásicos en distintos modelos, discutiendo su estructura y propiedades.

Dos interesantes ámbitos en el que quedan enmarcados las soluciones de tipo kink se ofrecen en los siguientes capítulos: el estudio de las correcciones cuánticas a la masa clásica de los kinks y la generalización de los modelos exhibidos en el marco supersimétrico. El primero de los propósitos viene justificado por el hecho de que la naturaleza topológica de las ondas solitarias obtenidas salvaguarda la entidad de los kinks como partículas en la teoría cuántica. Sin embargo, la masa clásica sufrirá una alteración cuya estimación a primer orden en \hbar (one-loop) suscita el análisis mostrado en el capítulo 6. Esta corrección es obtenida esencialmente mediante la suma de los autovalores del operador de pequeñas fluctuaciones de segundo orden (el hessiano) sobre la solución kink, lo que en nuestros sistemas se corresponde con un operador de tipo Schrödinger. El problema espectral es complejo ya para los casos con mundo interno unidimensional, de modo que en los casos que nos atañen, con dos o más campos escalares, el problema se antoja irresoluble. Para paliar tal deficiencia, desarrollaremos técnicas para calcular la corrección cuántica mediante métodos asintóticos en el cálculo de la traza de un operador, basados en el análisis de la ecuación de calor por desarrollo en serie. Como resultado encontraremos una fórmula que en términos del potencial del hessiano ofrece una aproximación aceptable de la corrección a primer orden demandada. Como parece pertinente ensayaremos la respuesta ofrecida sobre los modelos paradigmáticos, estudiados en la literatura [41, 120], es decir, el modelo ϕ^4 y el modelo Seno-Gordon, lo que nos permitirá la comparación entre los resultados obtenidos por el método desarrollado y la aceptada como correcta en los diversos estudios. La importancia del desarrollo quedará latente en la estimación de la corrección cuántica a la masa de kinks de dos componentes, presentes por ejemplo en los modelos MSTB y III[1][11]. En estos casos el cálculo exacto no es posible, de modo que el método asintótico es el único que ofrece una respuesta. Con ello finalizaremos el capítulo sexto.

El otro ámbito de estudio anunciado introduce en los modelos físicos una nueva estructura, la supersimetría [53], que es anticipada en el primer capítulo. En este caso se añaden a la teoría grados de libertad grassmannianos (fermiónicos) en tal modo que aparece una nueva simetría que entremezcla los grados bosónicos y estos últimos. Los kinks clásicos encontrados en la primera parte de la memoria se manifiestan como posibles estados BPS de la teoría cuántica, lo que justifica el análisis de este marco. Una cuestión que subyace es si existen kinks con una ex-

tensión grassmanniana, que verifiquen las ecuaciones de Euler-Lagrange de estos sistemas físicos. Incluso antes de esta pregunta hemos de recomponer la extensión supersimétrica de los modelos que hemos anticipado en esta memoria. De forma novedosa, ello originará los modelos supersimétricos derivados de los modelos de Liouville y que denominaremos como de SuperLiouville. Es apropiado cuestionarse si los sistemas mecánicos asociados a éstos mantienen las propiedades que caracterizaban a los primeros, la separabilidad de variables y la presencia de integrales primeras. Anticipando la respuesta, anunciaremos que la primera de éstas se pierde mientras que la segunda se mantiene. La búsqueda de estas integrales primeras en sistemas dinámicos supersimétricos ocupa casi al completo el capítulo 7, en el que serán mostrados los novedosos resultados encontrados. El siguiente capítulo, último de esta memoria, transcurre en el marco de la supersimetría en teoría de campos con espacio-tiempo de $(1+1)$ dimensiones, en el que sobre la base del símil mecánico utilizaremos los resultados del capítulo precedente para abordar la identificación del concepto de kink en este ámbito, el superkink. La pérdida de la separabilidad de los modelos nos aboca a tratar con las ecuaciones de primer orden obtenidas de las integrales primeras. La complejidad es entonces de forma genérica ineludible, de modo tal que nos contentaremos con el cálculo del superkink clásico [93] que extiende el TK1 en el modelo III[1][11].

Capítulo 1

Sobre Defectos Topológicos de tipo Kink

1.1 Introducción

Dedicaremos el presente capítulo a asentar la base teórica del estudio de los defectos topológicos inmersos en una teoría de campos escalares de N componentes. Quedará demostrado que el estudio de las soluciones kinks se equipara con un problema mecánico, lo cual justificará algunas reseñas acerca de la mecánica clásica como herramienta para afrontar dicho cometido. Sobre este punto, y únicamente con propósito introductorio, analizaremos la mecánica clásica supersimétrica. La literatura sobre defectos topológicos introduce como ejemplos ilustrativos el modelo ϕ^4 y el Seno-Gordon [39, 114]. Dada la importancia y la referencia continuada a lo largo de esta memoria de los modelos mencionados, optaremos por analizarlos de forma exhaustiva en el presente capítulo. Presentaremos, también, en este texto los modelos Sigma $O(2)$ Lineal y MSTB, ya conocidos [77, 78, 94]. Los resultados encontrados, junto a otros presentes en la literatura, inspiran dos grandes vías para el estudio de defectos topológicos en nuestro ámbito, uno basado sobre los sistemas completamente integrables de la mecánica clásica, ilustrados sobre los modelos de Liouville, y otro en la base del concepto de superpotencial sugerido por las teorías supersimétricas. Ambos procedimientos guardan una estrecha relación, como veremos.

1.2 De las ondas solitarias de tipo kink

En la introducción de esta memoria ha quedado explícito nuestro interés en las soluciones de onda solitaria de las ecuaciones diferenciales (1). La teoría variacional a la que obedecen puede ser asociada a un *sistema físico natural* embebido en

un espacio-tiempo minkowskiano de $(1+n)$ dimensiones con signatura $(+, -, \dots, -)$, cuya dinámica es determinada por el comportamiento del funcional *acción*

$$S[\phi] = \int_{\Omega} d^{1+n}x \mathcal{L}[\phi, \partial_{\mu}\phi] \quad (1.1)$$

donde \mathcal{L} es la *densidad lagrangiana*

$$\mathcal{L}[\phi, \partial_{\mu}\phi] = \frac{1}{2} \partial_{\mu}\phi^i \partial^{\mu}\phi^i - U(\phi) \quad (1.2)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$ y $\mu = 0, 1, \dots, n$.

Un sistema físico relativista debe ser invariante por la acción de las transformaciones del grupo de Poincaré, esto es, su funcional acción no se ve afectada bajo las transformaciones [117]:

- *Traslaciones espacio-temporales:* $\delta x^{\mu} = i\epsilon^{\rho} P_{\rho} x^{\mu} = \epsilon^{\mu}$, donde $P_{\rho} = -i\partial_{\rho}$. Esto tiene como consecuencia la aparición de las corrientes conservadas

$$j_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L}[\phi, \partial_{\mu}\phi] + \partial_{\mu}\phi^j \partial_{\nu}\phi^j$$

cuyas cargas

$$P_{\mu} = \int d^n x (-g_{\mu 0}\mathcal{L}[\phi, \partial_{\mu}\phi] + \partial_{\mu}\phi^j \partial_0\phi^j) \quad (1.3)$$

corresponden a la energía P_0 y a los momentos lineales P_i , $i = 1, \dots, n$, asociados al sistema físico. Más explícitamente, y referidas a sistemas naturales, recobramos las expresiones:

$$P_0[\phi] = \mathcal{E}[\phi] = \int d^n x \left(\frac{1}{2} \partial_0\phi^j \partial_0\phi^j + \frac{1}{2} \partial_i\phi^j \partial_i\phi^j + U(\phi) \right) \quad (1.4)$$

$$P_i[\phi] = \int d^n x \partial_i\phi^j \partial_0\phi^j \quad (1.5)$$

- *Rotaciones Lorentz:* $\delta x^{\mu} = \frac{1}{2}i\epsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} x^{\mu} = \epsilon^{\mu\rho} x_{\rho}$, donde se introducen los generadores infinitesimales $M_{\mu\nu} = i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}) + S_{\mu\nu}$ siendo $S_{\mu\nu}$ hermítico y satisfaciendo el mismo álgebra que el primer término de $M_{\mu\nu}$. Ahora, las corrientes aparecen como

$$j_{\mu\nu\rho} = (-g_{\mu\lambda}\mathcal{L} + \partial_{\mu}\phi^i \partial_{\nu}\phi^i)(g_{\nu}^{\lambda}x_{\rho} - g_{\rho}^{\lambda}x_{\nu}) = j_{\mu\nu}x_{\rho} - j_{\mu\rho}x_{\nu}$$

siendo las cargas pertinentes

$$M_{\nu\rho} = \int d^n x (j_{0\nu}x_{\rho} - j_{0\rho}x_{\nu}) \quad \nu, \rho = 0, 1, \dots, n$$

Los operadores infinitesimales introducidos por mor del teorema de Noether se ven sometidos al cumplimiento del álgebra de Lie-Poisson caracterizado por las operaciones

$$\begin{aligned} [P_\nu, P_\rho] &= 0 \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= -ig_{\mu\rho}P_\nu + ig_{\nu\rho}P_\mu \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\delta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + i\delta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + i\delta_{\nu\rho}M_{\mu\rho} - i\delta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} \end{aligned}$$

Las simetrías advertidas son catalogadas como espacio-temporales. El sistema físico puede incluir, además, simetrías internas resultantes de la invariancia respecto de transformaciones uniparamétricas de los campos escalares, los cuales conforman el espacio interno. Los generadores de tales transformaciones (denotados como B) constituyen un álgebra compacta \mathcal{G} . De forma simbólica, los generadores introducidos hasta el momento cumplen las relaciones:

$$[B, P] = 0 \qquad [B, M] = 0 \qquad [B, B] \sim B$$

Entonces, el lagrangiano asociado a nuestro sistema físico disfruta de simetrías que se hallan sujetas a un álgebra que corresponde a la suma directa de la de Poincaré y la referida a las simetrías internas, $\mathcal{P} \oplus \mathcal{G}$. Lo que acabamos de manifestar fue enunciado de forma precisa en 1967 por Coleman y Mandula en el siguiente teorema:

Teorema 1.1 (de Coleman-Mandula) [35]: *Bajo las hipótesis,*

1. *La matriz S está basada en una teoría local de campos cuánticos en el espacio-tiempo de 4 dimensiones.*
2. *Existe un número finito de partículas diferentes asociadas con estados de una partícula de una masa dada.*
3. *Existe un gap de energía entre el vacío y los estados de una partícula.*

se cumple que el álgebra de Lie más general de simetrías de la matriz S contiene los operadores momento-energía P_α , los generadores de rotación Lorentz $M_{\alpha\beta}$ y un número finito de operadores escalares Lorentz B_l , donde estos últimos forman un álgebra de Lie de un grupo compacto.

Este resultado implicaba importantes restricciones sobre los sistemas físicos que pueden ser construidos para describir el mundo realista. El teorema declaraba la diferente entidad que tenían las simetrías espacio-temporales y las simetrías internas en este punto de la teoría. Fue, entonces, el esfuerzo de aunar éstas, el detonante que auspició el nacimiento de una nueva estructura cobijada bajo el nombre de *supersimetría*, fuera de las hipótesis del teorema anterior. En este capítulo haremos mención en una forma simple a este nuevo marco dentro de la mecánica, dejando para capítulos sucesivos un estudio profundo en el marco de la teoría de campos en (1+1) dimensiones.

El desarrollo del funcional acción (1.1) para un sistema natural sobre pequeñas deformaciones $\delta\phi$ del campo, proporciona la expresión

$$S[\phi + \delta\phi] = S_0[\phi, \delta\phi] + S_1[\phi, \delta\phi] + S_2[\phi, \delta\phi] + o(\delta\phi^3)$$

donde S_0 es dado por (1.1)-(1.2). El sumando $S_1[\phi]$, originado por las perturbaciones a primer orden, es

$$S_1[\phi] = - \int d^{1+n}x \delta\phi^i \left(\partial_\mu \partial^\mu \phi^i + \frac{\partial U}{\partial \phi^i} \right)$$

de modo que siguiendo el principio variacional podemos afirmar que las soluciones clásicas (correspondientes a los puntos críticos del funcional acción) cumplen

$$\square\phi^i = -\frac{\partial U}{\partial \phi^i} \quad (1.6)$$

condición que corresponde a las ecuaciones de Euler-Lagrange en el presente caso y que reproducen (1). El espacio de configuración vendrá constituido en la forma:

$$\mathcal{C}' = \{\phi(x_0, x_j) \in \text{Maps}(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}^N) / P_0[\phi] < +\infty\}$$

Las variaciones a segundo orden originan la presencia del sumando $S_2[\phi]$, definido por

$$S_2[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^{1+n}x \delta\phi^i \left(\delta_{ij} \partial_\mu \partial^\mu + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \right) \delta\phi^j \quad (1.7)$$

y cuyo análisis nos permitirá estudiar la estabilidad para las soluciones de (1.6). El término (1.7) introduce *el operador de pequeñas fluctuaciones a segundo orden*,

$$\tilde{\mathcal{H}} = \delta_{jk} \partial_\mu \partial^\mu + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \quad (1.8)$$

El tratamiento de deformaciones sobre una solución estática ϕ que continúen siendo consistentes con la dinámica del sistema, nuevas soluciones de (1.6), nos traslada al análisis de la condición $\tilde{\mathcal{H}} \delta\phi(x_0, x_j) = 0$. Desarrollando las deformaciones $\delta\phi(x_0, x_j)$ en modos normales sobre la variable temporal, esto es, $\delta\phi(x_0, x_j) = A_\omega e^{i\omega x_0} \delta\phi(x_j)$, el estudio de la estabilidad se transforma en el problema espectral

$$\mathcal{H} \delta\phi_j = \left\{ -\delta_{jk} \nabla^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \right\} \delta\phi_k = \omega^2 \delta\phi_j \quad (1.9)$$

donde deben ser identificados los valores propios del *operador diferencial hessiano* \mathcal{H} . Se puede aseverar que si tal operador tiene un carácter hiperbólico las soluciones serán inestables, mientras que en otro caso se garantiza la estabilidad de la solución considerada.

Un resultado general es la presencia en el problema espectral descrito en (1.9) de l autofunciones con autovalor asociado nulo, *modos ceros*, para aquellos casos en que se presenta una familia l -paramétrica de soluciones estáticas $\phi = \phi(x, c) = \phi(x, c_1, \dots, c_l)$. Ello es puesto de manifiesto dado que al variar infinitesimalmente el parámetro c_i sobre una solución $\phi(x, c_1, \dots, c_i, \dots, c_l)$ obtendríamos de nuevo una solución del sistema $\phi(x, c_1, \dots, c_i + \delta c_i, \dots, c_l)$, lo que legitima a la expresión

$$\psi_i(x, c) = \frac{\partial \phi}{\partial c_i}$$

como función propia del operador hessiano. Una comprobación directa es mostrada por los cálculos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\psi_i(x, c) &= \left(-\delta_{jk} \nabla^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \right) \frac{\partial \phi^k}{\partial c_i} = -\delta_{jk} \nabla^2 \frac{\partial \phi^k}{\partial c_i} + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^j \partial c_i} = \\ &= \frac{\partial}{\partial c_i} \left(-\nabla^2 \phi^j + \frac{\partial U}{\partial \phi^j} \right) = 0 \end{aligned}$$

donde ha sido usado el hecho de que $\phi(x) = (\phi^1(x), \dots, \phi^N(x))$ es una solución estática del sistema físico.

En particular resulta conocido que la invariancia traslacional del sistema establece que si $\phi(x)$ es una solución estática, también lo será $\phi(x + \gamma_2)$ para cualquier valor de $\gamma_2 \in \mathbb{R}$. Es, por ello, que podemos reconocer de forma inmediata un modo cero (modo traslacional) con función propia $\frac{\partial \phi}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ asociado al hessiano.

Otro marco muy interesante de estudio de la estabilidad del conjunto de soluciones presentes en el sistema físico se apoya en la teoría de Morse [101, 97]. Las soluciones son tratadas como caminos sobre cierta variedad sobre la que se estudia su estabilidad mediante el teorema del índice [94, 9, 95, 96]. Un estudio sumamente detallado y su aplicación sobre deformaciones del modelo Sigma $O(N)$ Lineal es dado en [65].

1.2.1 Soluciones de vacío

De aquellas soluciones presentadas por el sistema serán sumamente importantes las configuraciones que se corresponden con los mínimos absolutos de la energía, debido a que, desde el punto de vista cuántico, estas soluciones clásicas proporcionan el valor esperado del operador campo en el estado fundamental de la teoría. Por este argumento emplearemos el término *punto de vacío* para designar a dichas soluciones, como un preestadio de la dinámica cuántica.

Sobre un sistema físico con densidad lagrangiana (1.2) elegiremos el convenio de hacer corresponder al mínimo absoluto del potencial $U(\phi)$ con el valor nulo, hecho que no cambia el comportamiento de la dinámica. Con la anterior afirmación estamos haciendo la suposición implícita de que los sistemas que estudiaremos incluirán

un término potencial semidefinido positivo. En estos supuestos el funcional energía es también semidefinida positiva. Así pues,

Definición 1.1: *Llamaremos soluciones triviales o puntos de vacío, que denotaremos como ϕ_v o simplemente v , a aquellas configuraciones de los campos que verifiquen que*

$$\mathcal{E}[\phi] = 0$$

Esta condición implica necesariamente el cumplimiento de

$$\text{a) } \frac{\partial \phi_v}{\partial x^0} = \frac{\partial \phi_v}{\partial x^j} = 0 \quad \text{b) } U(\phi_v) = 0$$

Dado que asumimos que los potenciales son semidefinidos positivos, bajo la condición b) subyace implícitamente el requisito $\frac{\partial U}{\partial \phi^i}(\phi_v) = 0$, es decir, ϕ_v son mínimos absolutos del término potencial.

Definición 1.2: *Llamaremos variedad de ceros o de vacíos \mathcal{M} al conjunto de soluciones del espacio de configuración formado por los puntos de vacío, esto es*

$$\mathcal{M} = \{\phi_v : \text{Maps}(\mathbb{R}^{1,n}, \mathbb{R}^N) \ / \ U(\phi) = 0\}$$

Dada una configuración que corresponde a un punto de vacío ϕ_v debe tenerse en cuenta que si G es el grupo de simetrías internas del lagrangiano, también deberá serlo cualquier otro valor del campo que resulte de la acción de las transformaciones de G sobre dicho punto de vacío, esto es, $G\phi_v \in \mathcal{M}$. Llamaremos *órbita de vacío* sobre ϕ_v al conjunto de puntos de vacío que surgen por la acción del grupo G sobre el vacío ϕ_v . Sobre el concepto anterior puede introducirse el moduli de la variedad de ceros $\text{Mod}(\mathcal{M})$ como el conjunto formado por las órbitas de vacío presentes en el modelo.

Es obvio que las soluciones referidas en \mathcal{M} son estables por motivos energéticos, no existen otras soluciones con menor energía. Para enfatizar este hecho puede verse fácilmente que en el caso unidimensional $n = 1$ el hessiano presenta la forma $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx_1^2} + H$, donde H es la matriz $\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^a \partial \phi^b}[\phi_v]$. El problema espectral se apoya, ahora, en la diagonalización de la matriz H en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\psi &= \left(-\frac{d^2}{dx_1^2}I + H\right)\psi = \left(-\frac{d^2}{dx_1^2}AIA^{-1} + AH^dA^{-1}\right)A\psi' = \\ &= A\left(-\frac{d^2}{dx_1^2}I + H^d\right)\psi' = A\omega^2\psi' = \omega^2A\psi' = \omega^2\psi \end{aligned}$$

donde H^d es una matriz numérica diagonal. En el caso de que A sea regular, el problema inicial es equivalente a la resolución del espectro

$$\left(-\frac{d^2}{dx_1^2}I + H^d\right)\psi' = \omega^2\psi'$$

que queda desacoplado en n problemas unidimensionales sobre cada modo normal

$$\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + H_{ii}^d\right) \psi'_i = \omega^2 \psi'_i$$

Puesto que los puntos de vacío son mínimos del potencial $U(\phi)$ podemos asegurar que los autovalores de la matriz H^d son positivos, o en algún caso, se admiten nuevos modos ceros asociados a las simetrías del espacio interno. Sobre cada uno de los modos normales aflora un espectro continuo soportado sobre los H_{ii} , cuyas funciones propias corresponden a ondas planas. En el lenguaje cuántico, diríamos que aparecen mesones de masa $m^2 = H_{ii}$.

El ejemplo paradigmático, que nos permitirá ilustrar de una forma sencilla los conceptos que iremos mostrando, corresponde al modelo Sigma $O(N)$ Lineal, cuya acción viene determinada por la expresión

$$S = \int d^{1+n}x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^t - \frac{\lambda}{4} (\phi \phi^t - a^2)^2 \right\} \quad (1.10)$$

siendo $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$ un campo escalar de N componentes en un mundo relativista de $(1+n)$ -dimensiones. Así, la variedad de vacío presente en este caso es $\mathcal{M} = \{\phi \in \mathcal{C}' / \phi \phi^t = a^2\}$. El caso particular en que $n = 1$ y $N = 1$ es el vastamente tratado modelo ϕ^4 , que estudiaremos en secciones posteriores.

1.2.2 Defectos Topológicos: Kinks

En el texto precedente hemos descrito aquellas soluciones que hacen nula la energía y hemos integrado éstas en el conjunto \mathcal{M} . Tras estudiar un sistema físico en el marco clásico, surge como cuestión inmediata si el problema tratado tendrá consistencia tras el proceso de cuantización. En el marco clásico, por ejemplo, el sistema de oscilador armónico admite un mínimo para $\phi = 0$, sobre el que afloran una gran cantidad de nuevos estados en el estadio cuántico, el fundamental de los cuales verifica que $\langle \phi \rangle = 0$. Análogamente, para sistemas mecánicos de una partícula caracterizados por potenciales con mínimos degenerados, el proceso cuántico genera un estado fundamental de mínima energía que resulta de la mezcla de los estados surgidos sobre cada uno de los mínimos, vía efecto tunel. Este resultado queda prohibido en la teoría de campos dado que en este caso el efecto tunel implicaría la penetración a través de una barrera infinita de energía, que conllevaría la violación de la conservación de la energía. Se tiene, entonces, la existencia de sectores desconectados asociados a cada vacío, sobre los que tienen su génesis los niveles cuánticos. Respecto del modelo ϕ^4 , los estados cuánticos brotan independientemente sobre el vacío $v^1 = -a$ y sobre $v^2 = a$.

De las soluciones kinks:

Ahora bien, todos los argumentos utilizados en el teorema anterior serán validos para soluciones con dependencia espacial que conecten asintóticamente diferentes vacíos. Esta observación da pie al estudio de soluciones de naturaleza topológica (defectos topológicos). Para dar una descripción de este tipo de soluciones nos ceñimos a la definición introducida en [114].

Definición 1.3: *Llamaremos kink, onda solitaria o solitón¹ a soluciones no singulares del sistema de ecuaciones (1.6), cuya densidad de energía permanece localizada y puede ser escrita bajo la forma*

$$\varepsilon(x_0, x) = \varepsilon(x - vx_0)$$

donde $v = (v_1, \dots, v_n)$ es interpretado como un vector velocidad.

Es decir, la densidad de energía es localizada y se mueve con velocidad constante. Este ansatz nos permite atisbar que las soluciones buscadas pueden obtenerse a partir de soluciones estáticas mediante una transformación de Lorentz². La definición anterior fuerza a las soluciones kink a cumplir una serie de requisitos, que enunciaremos:

1. Por su condición de estaticidad, $\phi_K = \phi_K(x)$, es decir, $\frac{\partial \phi_K}{\partial x_0} = 0$.
2. Corresponden a puntos críticos del funcional energía de la teoría de campos

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + U(\phi) \right\} \quad (1.11)$$

de modo que se cumplirán las ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i^2} = \frac{\partial U}{\partial \phi_j} \quad j = 1, \dots, N \quad (1.12)$$

3. Dado que la energía de un kink es finita, los dos sumandos de la integral (1.11) deberán serlo por separado, al tratarse de magnitudes semidefinidas positivas. La finitud de la contribución energética asociada al término potencial implica que

$$\lim_{x \rightarrow S^\infty} \phi_K^j(x) \in \mathcal{M} \quad (1.13)$$

¹El término solitón es a veces acuñado por algunos autores para designar soluciones que bajo los mismos requisitos de la definición conservan su entidad tras procesos de scattering.

²Conocida una solución estática, la invariancia lorentziana del sistema permite generar nuevas soluciones $\phi(x_0, x) = \phi\left(\frac{x - vx_0}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$ que cumplen la definición 1.3, donde v es el vector velocidad asociada al avance de la solución.

mientras que dicha condición sobre el término cinético obliga a que

$$\lim_{x \rightarrow S^\infty} \frac{\partial \phi_K^j(x)}{\partial x^i} = 0 \quad (1.14)$$

Las soluciones introducidas hasta el momento (cuya búsqueda en diversos sistemas físicos motiva esta memoria) son aquellos elementos del espacio de configuraciones estáticas

$$\mathcal{C} = \{\phi(x) \in \text{Maps}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N) \mid \mathcal{E}[\phi] < \infty\}$$

que son puntos estacionarios del funcional (1.11). Quedan incluidas en la definición de \mathcal{C} las soluciones triviales o de vacío y las soluciones kinks. Como ya fue advertido, estas soluciones no pueden ser deformadas continuamente a otras que impliquen puntos de vacío distintos sin previa violación del principio de conservación de la energía, de tal manera que pertenecen a nuevos sectores que permanecen desconectados. El espacio de configuración estará constituido por la unión de dichos sectores, $\mathcal{C} = \cup \mathcal{C}_{ab}$, donde \mathcal{C}_{ab} son los espacios de configuración determinados por los caminos que conectan los vacíos v^a y v^b . En particular, las soluciones triviales asociadas al vacío v^i pertenecen al sector \mathcal{C}_{ii} , el cual puede además integrar otras soluciones de tipo kink. Para sectores que aúnen vacíos diferentes, la búsqueda de configuraciones que correspondan a puntos críticos del funcional (1.11) nos reporta inapelablemente soluciones de tipo kink. Nos referiremos al conjunto de todas las soluciones de tipo kink como la variedad de kinks y será denotada por \mathcal{C}_K .

Un concepto muy útil [25] y que permitirá escribir de forma simple la información introducida en la variedad de soluciones \mathcal{C}_K será:

Definición 1.4: *La variedad de Moduli de soluciones kinks es el espacio cociente de la variedad de soluciones \mathcal{C}_K con respecto al producto del grupo compacto de simetrías internas G con el grupo asociado a las simetrías del espacio, esto es,*

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \frac{\mathcal{C}_K}{G \times \mathcal{P}_x}$$

En base a la condición (1.13) obtenemos una relación entre la dinámica del sistema físico y las propiedades topológicas del mismo. Los sectores desconectados que conforman el espacio de configuración \mathcal{C} de un sistema físico son determinados por las clases de homotopía del conjunto de aplicaciones que van desde $\partial\mathbb{R}^n$ a la variedad de ceros \mathcal{M} .

La conexión íntima entre la dinámica y conceptos topológicos nos permite recabar información sobre el comportamiento del sistema físico incluso antes de iniciar la manipulación de las oportunas expresiones dinámicas. En particular, nos permite identificar los sectores desconectados que conforman el espacio de configuración. Es

usual distinguir cada uno de dichos sectores mediante una carga topológica Q^T , que en el marco cuántico se convierte en un observable. Esta carga viene asociada a la corriente de naturaleza topológica

$$j^\mu[\phi, \partial_\mu\phi] = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu\phi$$

Viene a presentarse como un hecho curioso que teorías fermiónicas que admiten una identificación con teorías bosónicas mediante el proceso de bosonización, relacionan la corriente bosónica topológica con otra de naturaleza fermiónica asociada a una simetría local de tal teoría [36, 144, 91].

Un problema diferente a la clasificación de los sectores desconectados de \mathcal{C} es estudiar si estos sectores realmente albergan alguna solución, que corresponda a algún elemento de \mathcal{C}_K . En la próxima sección mostramos los aspectos generales en la identificación de éstas, que serán desarrolladas posteriormente en los sucesivos capítulos de esta memoria.

1.2.3 De la búsqueda de kinks

El cometido de este trabajo es explorar diversos sistemas físicos que admiten un proceso de ruptura de simetría, con el propósito de obtener soluciones de tipo kink. Éstos corresponden a puntos críticos de la energía (1.11), esto es, cualquier variación de los parámetros de los que depende la solución no repercutirá sobre $\mathcal{E}[\phi]$. Fundamentado en este hecho enunciamos un importante resultado debido a Derrick (1964) y Hobart (1963),

Teorema 1.2 (de Derrick) [43]: *Dado un sistema físico natural con espacio minkowskiano plano, sólo podremos encontrar soluciones kink (respetando la definición 1.3) cuando el sistema se halle en un mundo (1+1)-dimensional.*

Este resultado restringe nuestro estudio, encaminado a la búsqueda de kinks, al análisis de sistemas físicos naturales de (1+1) dimensiones espacio-temporales. El funcional (1.11) se convierte en:

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\phi^i}{dx_1} \frac{d\phi^i}{dx_1} + U(\phi) \right\} \quad (1.15)$$

Observando (1.15), podemos enunciar lo que viene en conocerse como

Símil mecánico [114, 33, 37]: *El estudio de las soluciones integradas en el espacio de configuración \mathcal{C} de la teoría clásica de n campos escalares en un sistema físico con mundo relativista de (1+1)-dimensiones, cuya dinámica es dominada por la expresión (1.15), y el problema de determinar la trayectoria de una partícula en un mundo euclídeo de n -dimensiones en Mecánica Clásica son problemas equivalentes.*

Para observar la analogía, tan sólo hay que equiparar las siguientes magnitudes en los dos problemas descritos:

Mecánica Clásica		Teoría de Campos	
Posición	x	ϕ	Campo
Parámetro temporal	t	x_1	Parámetro espacial
Potencial	$V(x)$	$-U(\phi)$	Término Potencial
Lagrangiano	$L = \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i - V(x)$	$-\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{d\phi^i}{dx_1} \frac{d\phi^i}{dx_1} + U(\phi)$	Densidad energía
Acción	$\int_{t_1}^{t_2} dt L$	$\int_a^b dx_1 \mathcal{L}$	Energía
Energía	$E = \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i + V(x)$	$I_1 = \frac{1}{2} \frac{d\phi^i}{dx_1} \frac{d\phi^i}{dx_1} - U(\phi)$	Integral primera

El símil mecánico nos otorga el beneficio del uso de todas las herramientas de la Mecánica Clásica para afrontar el problema de identificar las soluciones kinks de un modelo. En este punto en la revisión de los conceptos generales de la teoría de campos, abordaremos tres importantes esquemas en el ámbito de la Física Matemática: la *Mecánica Clásica*, y al añadir magnitudes de entidad grassmanniana, la *Mecánica Pseudoclásica* y la *Mecánica Clásica Supersimétrica*.

1.2.4 Mecánica Clásica

En nuestra intención está en los próximos párrafos hacer una somera descripción de las herramientas que, desarrolladas en este ámbito, serán utilizadas en posteriores análisis de las soluciones de tipo defecto topológico. Pieza clave será, por ejemplo, la teoría de Hamilton-Jacobi.

Formalismo lagrangiano

Como ya hemos anunciado de forma genérica en secciones precedentes, toda la información pertinente a la dinámica del sistema físico queda incorporada en el funcional acción, definida en este caso como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$$

donde $q(t)$ es una magnitud valorada sobre una variedad riemanniana, que usualmente representa la posición de una partícula puntual, y donde el lagrangiano $L(q^i, \dot{q}^i)$ es una función dependiente de las coordenadas (q^i, \dot{q}^i) del *fibrado tangente* TM , donde $1 \leq i \leq n$ siendo n el número de grados de libertad del sistema.

El principio de Acción de Hamilton establece que las soluciones son puntos estacionarios del funcional *acción*, esto es, $\delta S = 0$. El análisis funcional para dicha

condición se traduce en el cumplimiento del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (1.16)$$

que conforman las conocidas ecuaciones de Euler-Lagrange para la Mecánica Clásica.

Las necesidades planteadas por la búsqueda de soluciones kink nos permiten restringir nuestro interés a lagrangianos naturales y autónomos

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q^1, \dots, q^n) \quad (1.17)$$

donde introducimos la métrica g_{ij} de la variedad riemanniana en la que se estudia el sistema físico. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a (1.17), escritas en un sistema de coordenadas, proporcionan el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + g^{ij} \frac{\partial V}{\partial x^j} = 0$$

Teorema 1.3 (de Noether) [10]: *Si el sistema tiene como simetría un grupo uno-paramétrico de difeomorfismos $h^s : M \rightarrow M$, $s \in \mathbb{R}$ (esto es $L(h_*^s v) = L(v)$ para cualquier $v \in TM$), entonces el sistema admite la constante del movimiento o integral primera*

$$I = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{dh^s(q)}{ds} \right|_{s=0}$$

El teorema de Noether en la forma presentada genera integrales primeras lineales en las velocidades \dot{q}^i . Generalizaciones [119] de este teorema han sido realizados para incorporar invariantes con dependencias no lineales (simetrías ocultas).

Formalismo Hamiltoniano

Otro modo de abordar la Mecánica Clásica es trabajar en *el espacio de fases* coordinado por (q^i, p_i) donde $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ son los momentos generalizados asociados a las posiciones q^i . Será el hamiltoniano construido a partir del lagrangiano (1.17), vía la transformación de Legendre, $H(q^i, p_i) = p_i \dot{q}^i - L(q_i, \dot{q}^i)$, la entidad que contiene la información sobre la evolución del sistema físico. De forma más geométrica diríamos que del fibrado tangente TM usado en el formalismo lagrangiano pasamos a trabajar en el *fibrado cotangente* T^*M , los cuales para los sistemas físicos naturales son isomorfos vía la transformación de Legendre. El fibrado cotangente admite una estructura de variedad simpléctica natural definida sobre la 2-forma

$$\omega = dp_i \wedge dq^i$$

donde hemos elegido las coordenadas (q^i, p_i) según la condición de Darboux. Las ecuaciones del movimiento (1.16) son ahora determinadas por las ecuaciones de

Hamilton

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (1.18)$$

de modo que las n ecuaciones diferenciales de segundo orden sobre la coordenada q^i , que nos proporcionaban las ecuaciones de Euler-Lagrange, se convierten en $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden en las variables q^i y p_i , las cuales reciben el nombre de *ecuaciones canónicas*.

Toda variedad simpléctica admite una estructura de variedad de Poisson, en el que se define la operación binaria de *paréntesis de Poisson*,

$$\{f, g\}_P = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \quad (1.19)$$

de modo que las ecuaciones de Hamilton (1.18) adquieren las sencillas expresiones

$$\frac{dq^i}{dt} = \{H, q^i\}_P \quad \frac{dp_i}{dt} = \{H, p_i\}_P$$

lo que permite describir la evolución temporal de cualquier magnitud física F mediante la ecuación:

$$\dot{F} = \{H, F\}_P$$

Ahora, podemos caracterizar una *integral primera* I_k como aquella magnitud que verifica

$$\{H, I_k\}_P = 0 \quad (1.20)$$

Además, se tiene:

Teorema 1.4 (de Arnold-Liouville) [10, 109]: *Sea el espacio de fases $T^*M \equiv \mathbb{R}^{2n}$ de un sistema físico hamiltoniano (dotado de un sistema de coordenadas canónicas (q, p)) con el paréntesis de Poisson estándar y hamiltoniano $H(q, p)$. Si existen n integrales primeras F_k con $k = 1, \dots, n$ en involución y funcionalmente independientes, el sistema físico es completamente integrable (resoluble por cuadraturas).*

La integrabilidad en el sentido de Liouville obliga a la aceptación por parte de los sistemas físicos de tantas integrales primeras como grados de libertad disfruta el sistema. La mayoría de los sistemas físicos no son integrables, a pesar de lo cual la integrabilidad es una propiedad deseada porque genera una rica estructura en el espacio de fases, junto con la predicibilidad y regularidad del sistema [119].

Por lo visto hasta ahora, tenemos dos procedimientos que nos permiten estudiar la presencia de invariantes o integrales primeras, uno de ellos es mediante el teorema de Noether, lo que nos permite encontrar integrales primeras asociadas a una simetría ligada a un grupo de Lie, y el otro, más general que el anterior, basado en la relación (1.20), se fundamenta en encontrar expresiones I_k cuyo paréntesis de Poisson con el hamiltoniano sea nulo. Este último punto ha originado una cantidad

ingente de trabajos [71, 72, 67, 116, 73, 8]. Entre los más celebrados se encuentra el trabajo realizado por Hietarinta [71, 72] que permite clasificar los sistemas físicos completamente integrables que presentan un potencial polinómico de grado menor o igual a cinco con una integral primera dependiente a lo sumo de forma cuártica en los momentos. Por otra parte, Rañada [119] identifica sistemas que son *sobreintegrables*, esto es, con presencia de un número de invariantes superior a los grados de libertad del espacio de configuración.

La trascendencia del formalismo hamiltoniano reside en que trata en igualdad de condiciones las variables q^i y p_i .

Teoría de Hamilton-Jacobi

La teoría de Hamilton-Jacobi [63, 85] tiene el propósito de identificar una transformación canónica que relacione las antiguas variables canónicas (q^i, p_i) con otras nuevas (Q^i, P_i) que permanezcan constantes a lo largo del tiempo. De este modo, las ecuaciones que especifican el cambio de coordenadas en el espacio físico proporcionan las expresiones de las soluciones. Tal esquema puede ser alcanzado considerando que la hamiltoniana transformada $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$ es nula, lo que permite construir la *ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$H \left(q^1, \dots, q^n, \frac{\partial F_2}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q^n}; t \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (1.21)$$

que se manifiesta como una ecuación en derivadas parciales. La resolución de (1.21) nos proporciona la dependencia de la función generatriz F_2 respecto de las viejas coordenadas q^i y respecto de los nuevos momentos P_i que, por construcción, son constantes del movimiento (integrales primeras) que denotaremos por α_i con el propósito de enfatizar este hecho. Entonces, conocemos

$$F_2 = \mathcal{J} = \mathcal{J}(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n; t)$$

donde se obvian constantes aditivas. Además, las nuevas coordenadas Q^i son de nuevo valores constantes β_i que verifican

$$Q^i = \beta_i = \frac{\partial \mathcal{J}(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}$$

lo que nos permite obtener las soluciones del modelo. Finalmente, es beneficioso y jugará un papel sustancial en esta memoria encontrar un significado a la función generatriz $\mathcal{J}(q^i, \alpha_i, t)$. Dado que

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} = p_i q_i - H = L$$

entonces

$$\mathcal{J} = \int dt L \quad (1.22)$$

es decir, la función generatriz es una primitiva del lagrangiano, escrita en función de las variables q^i y α_i .

1.2.5 Mecánica PseudoClásica

En mecánica clásica las magnitudes x^i describen las posiciones de partículas puntuales de carácter bosónico. Pero en la naturaleza tienen presencia dos tipos de partículas, los bosones y los fermiones. En esta sección se pretende introducir una descripción clásica de los fermiones implantando un nuevo esquema conocido como *mecánica pseudoclásica*, apelativo que da cuenta de las reminiscencias cuánticas del esquema. El propósito perseguido es introducir los conceptos de este marco y asentar la notación y convenios que posteriormente serán utilizados en sucesivos capítulos, los cuales suelen aparecer dispares en la literatura.

Los fermiones aparecen en la teoría de campos como partículas de naturaleza puramente cuántica, las cuales son descritas por magnitudes que verifican un álgebra de Clifford C . Si queremos obtener el comportamiento clásico debemos considerar la contracción de tal álgebra en el caso de que el valor de \hbar sea nulo. En ese caso el álgebra de Clifford C se convierte en el álgebra de Grassmann B_L , a la vez que las magnitudes que describen los fermiones pasan de ser operadores a cantidades clásicas. En este particular, el anticonmutador de los L generadores $\theta^j \in B_L$ es nulo, esto es,

$$\theta^i \theta^j + \theta^j \theta^i = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, L$$

Cualquier elemento de este álgebra $a \in B_L$ puede ser expresado como una combinación de los productos de los L generadores θ^i , de modo que puede ser escrito que

$$a = a_0 \mathbf{1} + \sum a_{i_1 \dots i_m} \theta_{i_1} \dots \theta_{i_m} \quad (1.23)$$

Es usual en el ámbito de la Física clasificar las magnitudes en dos tipos: aquellas que implican en el desarrollo (1.23) un número par de factores en los productos de los generadores grassmannianos, lo que induce un carácter bosónico a tales magnitudes, y aquellas que introducen un número impar de factores, lo que les proporciona una naturaleza fermiónica.

Formalismo lagrangiano

Ahora, consideraremos la expresión de un lagrangiano que pueda caracterizar un sistema físico encuadrado en la mecánica pseudoclásica. La situación más sencilla y a la vez rica que podemos contemplar, es aquella que introduce un espacio de

configuración $\mathcal{N} = B_{L=2}$ formado por un grado de libertad bosónico y dos grados grassmannianos o fermiónicos, esto es, (x, θ_1, θ_2) . El lagrangiano es una función de las coordenadas de $T\mathcal{N}$ y debe incluir el término cinético debido a los grados bosónicos junto a su término potencial y además, el término cinético atribuido a los grados fermiónicos, junto con un término que acopla los grados bosónicos y los grassmannianos llamado acoplamiento tipo Yukawa³. Así, queda propuesto el lagrangiano pseudoclásico [30],

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}\dot{x} - V(x) + \frac{i}{2}\theta_\alpha\dot{\theta}_\alpha + iR(x)\theta_1\theta_2$$

donde usamos el convenio de Einstein sobre el subíndice α . La expresión anterior es directamente generalizable a un número arbitrario de grados de libertad. Asumiendo que el espacio de configuración $\mathcal{N} = B_{L=2} \otimes \binom{N}{\cdot} \otimes B_{L=2}$ es parametrizado por las coordenadas $(x^i, \theta_1^i, \theta_2^i)$ con $i = 1, 2, \dots, N$, podemos construir la expresión lagrangiana escrita como

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^j - V(x) + \frac{i}{2}\theta_\alpha^j\dot{\theta}_\alpha^j + iR_{jk}(x)\theta_1^j\theta_2^k \quad (1.24)$$

donde $j, k = 1, \dots, N$ y por sencillez asumiremos que el acoplamiento Yukawa es debido a un factor R_{jk} simétrico en los índices. Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos proporcionan las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{x}^j + \frac{\partial V}{\partial x^j} - i\frac{\partial R_{kl}}{\partial x^j}\theta_1^k\theta_2^l = 0 \quad \dot{\theta}_1^j = -R_{jk}\theta_2^k \quad \dot{\theta}_2^j = R_{kj}\theta_1^k$$

que determina la dinámica del sistema físico en estudio. Además, la invariancia por traslaciones temporales conduce a la conservación de la energía o hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^j + V(x) - iR_{jk}(x)\theta_1^j\theta_2^k \quad (1.25)$$

Formalismo Hamiltoniano

En esta sección nuestra preocupación consistirá en estudiar si los sistemas pseudoclásicos soportan la implementación del formalismo hamiltoniano [82]. Para ello definiremos el momento generalizado para las nuevas variables en la forma usual⁴,

$$\pi_{\theta_\alpha^k} = L \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_\alpha^k}} = \frac{i}{2}\theta_\alpha^k \quad (1.26)$$

³Adviértase la necesidad en este caso de considerar dos tipos de variables grassmannianas para justificar la presencia del acoplamiento tipo Yukawa. Si hubieramos considerado sólo un grado fermiónico no se hubiese podido generar términos de ese cariz.

⁴En lo sucesivo trataremos de evitar el uso del índice i para evitar la posible confusión con respecto a la unidad imaginaria.

Observamos la coincidencia salvo factores de las variables grassmannianas con sus momentos generalizados [51]. Esto constituye una *condición de segunda especie* sobre el espacio de fases o fibrado cotangente $T^*\mathcal{N}$. Éste posee $6n$ grados de libertad y es coordinado por $(x^k, \theta_1^k, \theta_2^k, p_k, \pi_{\theta_1^k}, \pi_{\theta_2^k})$, aunque la dinámica queda restringida a una variedad de $4n$ grados de libertad. El hamiltoniano, entonces, debe incorporar la situación descrita de tal forma que consideramos

$$H_T = \frac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^j + V(x) - iR_{jk}(x)\theta_1^j\theta_2^k - (\pi_{\theta_\alpha^j} - \frac{i}{2}\theta_\alpha^j)\lambda_\alpha^j$$

donde hemos introducido multiplicadores de Lagrange de naturaleza grassmanniana [46]. Las ecuaciones de Hamilton se escriben ahora según las expresiones

$$\dot{x}^j = \frac{\partial H_T}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H_T}{\partial x^j} \quad \dot{\theta}_\alpha^j = \frac{\partial H_T}{\partial \pi_{\theta_\alpha^j}} \quad \dot{\pi}_{\theta_\alpha^j} = \frac{\partial H_T}{\partial \theta_\alpha^j}$$

donde es de resaltar la diferencia existente entre los grados bosónicos y los fermiónicos; mientras que para los primeros las ecuaciones de Hamilton introducen un cambio de signo, en los segundos el signo permanece inalterado. Bajo el uso de estas ecuaciones podemos eliminar los multiplicadores de Lagrange de forma que podemos encontrar el hamiltoniano

$$H_T = \frac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^j + V(x) + R_{jk}(x)(\pi_{\theta_2^k}\theta_1^j - \pi_{\theta_1^k}\theta_2^j)$$

que proporciona el adecuado flujo. Sobre el esquema planteado puede ser implementada una variedad de Poisson, donde la operación de paréntesis de Poisson (1.19) es generalizada en la forma

$$\begin{aligned} \{F, G\}_P &= \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q^j} - \frac{\partial F}{\partial q^j} \frac{\partial G}{\partial p_j} + iF \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha^j} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha^j} G - \frac{1}{2}F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \pi_{\theta_\alpha^j}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha^j} G \\ &\quad - \frac{1}{2}F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha^j} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \pi_{\theta_\alpha^j}} G - \frac{i}{4}F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \pi_{\theta_\alpha^j}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \pi_{\theta_\alpha^j}} G \end{aligned}$$

de modo que las ecuaciones del movimiento se escriben como

$$\frac{dx^j}{dt} = \{H, x^j\}_P \quad \frac{dp_j}{dt} = \{H, p_j\}_P \quad \frac{d\theta_\alpha^j}{dt} = \{H, \theta_\alpha^j\}_P \quad \frac{d\pi_{\theta_\alpha^j}}{dt} = \{H, \pi_{\theta_\alpha^j}\}_P$$

o bien, de forma general para cualquier magnitud física F podemos manifestar que

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\}_P$$

Ahora, con toda la maquinaria hamiltoniana, una constante del movimiento [106, 107] o integral primera I debe verificar la condición:

$$\{H, I\}_P = 0$$

A efectos de cálculo, la condición de segunda especie (1.26) puede resolverse en primera instancia, de modo que podemos trabajar con el hamiltoniano (1.25) y el paréntesis de Poisson definido en la forma

$$\{F, G\}_P = \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q^j} - \frac{\partial F}{\partial q^j} \frac{\partial G}{\partial p_j} + iF \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha^j} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha^j} G$$

Ello sugiere las siguientes operaciones primarias:

$$\{p_j, x^k\}_P = \delta_j^k \quad \{x^j, x^k\}_P = \{p_j, p_k\}_P = 0 \quad \{\theta_\alpha^j, \theta_\beta^k\}_P = i\delta^{jk}\delta_{\alpha\beta} \quad (1.27)$$

Los resultados pueden ser trasladados al ámbito cuántico teniendo en cuenta que las magnitudes clásicas se convierten en operadores y los paréntesis de Poisson en conmutadores según la prescripción de Dirac, $\{ \}_P \rightarrow i[\]$, respecto del sistema natural de unidades. Las operaciones cuánticas verificarían [124]:

$$[p_j^B, x^k] = -i\delta_j^k \quad \{\theta_\alpha^j, \theta_\beta^k\} = \delta^{jk}\delta_{\alpha\beta} \quad [x^j, \theta_\alpha^k] = 0 \quad [p_j^B, \theta_\alpha^k] = 0 \quad (1.28)$$

El análisis plasmado en esta sección nos ha permitido incluir grados grassmannianos en la mecánica clásica. Una restricción de los modelos pseudoclásicos caracterizados por (1.24) nos trasladará a la última de las estructuras que queremos introducir, la mecánica clásica supersimétrica.

1.2.6 Mecánica Clásica Supersimétrica

Una de las estructuras más ricas y estudiadas en los últimos años en el marco de la Física Matemática viene constituida por la *supersimetría* [53]. Existen varias formas de introducir este esquema, la más bella de las cuales, desde nuestro punto de vista, está basada en el concepto de *superespacio* y que mostraremos en los capítulos sucesivos. En esta sección, sólo pretendemos introducir de una forma sencilla lo que viene a ser denominado como *mecánica clásica supersimétrica*. Este nuevo ámbito es un caso particular del aparecido en la mecánica pseudoclásica. El hecho primordial es construir una simetría del lagrangiano pseudoclásico que entremezcle los grados bosónicos y los fermiónicos. Así, sobre la expresión (1.24) estudiaremos las variaciones dadas por

$$\begin{array}{l} \text{Variación 1:} \\ \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 x^j = \varepsilon \theta_1^j \\ \delta_1 \theta_1^j = i\varepsilon \dot{x}^j \\ \delta_1 \theta_2^j = -i\varepsilon f^j(x) \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Variación 2:} \\ \left\{ \begin{array}{l} \delta_2 x^j = \varepsilon \theta_2^j \\ \delta_2 \theta_1^j = i\varepsilon g^j(x) \\ \delta_2 \theta_2^j = i\varepsilon \dot{x}^j \end{array} \right. \end{array}$$

donde puede observarse como las variaciones de la variable de carácter par son proporcionales a las variables grassmannianas multiplicadas por un parámetro grassmanniano infinitesimal ε , lo que permite recuperar la naturaleza bosónica de la variable x^j . La analogía es total con respecto al comportamiento de las perturbaciones

grassmannianas. La variación inducida sobre el lagrangiano viene determinada como

$$\begin{aligned}\delta_1 L &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{x}^j \varepsilon \theta_1^j \right] + \frac{1}{2} f^j \varepsilon \dot{\theta}_2^j - & \delta_2 L &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{x}^j \varepsilon \theta_2^j \right] - \frac{1}{2} g^j \varepsilon \dot{\theta}_1^j + \\ & - \left[R_{kj} \dot{x}^k + \frac{1}{2} f^j \right] \varepsilon \theta_2^j - & & + \left[R_{kj} \dot{x}^k + \frac{1}{2} g^j \right] \varepsilon \theta_1^j - \\ & - \left[\frac{\partial V}{\partial x^j} + R_{jk} f^k \right] \varepsilon \theta_1^j + & & - \left[\frac{\partial V}{\partial x^j} + R_{jk} g^k \right] \varepsilon \theta_2^j + \\ & + i \frac{\partial R_{jk}}{\partial x^l} \varepsilon \theta_1^l \theta_1^j \theta_2^k & & + i \frac{\partial R_{jk}}{\partial x^l} \varepsilon \theta_2^l \theta_1^j \theta_2^k\end{aligned}$$

Con objeto de que las variaciones 1 y 2 correspondan a simetrías del sistema físico, debe imponerse que las variaciones inducidas $\delta_1 L$ y $\delta_2 L$ se transformen en la expresión de una divergencia. Esta situación puede ser obtenida si son verificadas las siguientes condiciones sobre las magnitudes definidas con anterioridad,

$$V(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x^j} \frac{\partial W}{\partial x^j} \quad R_{jk} = - \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k} \quad f^j = g^j = \frac{\partial W}{\partial x^j}$$

donde $W(x^j)$ es una función de los grados bosónicos que es denominada *superpotencial*. Introduciendo estas circunstancias sobre la expresión (1.24) alcanzamos el lagrangiano de la mecánica clásica supersimétrica

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^j \dot{x}^j + \frac{i}{2} \theta_\alpha^j \dot{\theta}_\alpha^j - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x^j} \frac{\partial W}{\partial x^j} - i \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k} \theta_1^j \theta_2^k \quad (1.29)$$

que lleva asociado el hamiltoniano (al restringir (1.25) al presente caso):

$$H = \frac{1}{2} \dot{x}^j \dot{x}^j + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x^j} \frac{\partial W}{\partial x^j} + i \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k} \theta_1^j \theta_2^k \quad (1.30)$$

Las simetrías que hemos impuesto sobre nuestro sistema físico nos proporcionan las cantidades conservadas

$$Q_1 = \dot{x}^j \theta_1^j - \frac{\partial W}{\partial x^j} \theta_2^j \quad Q_2 = \dot{x}^j \theta_2^j + \frac{\partial W}{\partial x^j} \theta_1^j$$

a las que nos referiremos como *cargas supersimétricas* o *supercargas* y que verifican la siguiente estructura de paréntesis de Poisson

$$\{Q_1, Q_1\}_P = 2H \quad \{Q_1, Q_2\}_P = 0 \quad \{Q_2, Q_2\}_P = 2H$$

que es conocida como *superálgebra*.

Con lo anterior podemos concluir la presencia del hamiltoniano H y de las dos supercargas Q_1 y Q_2 como invariantes o integrales primeras del sistema físico que estudiamos. Para sistemas físicos con un grado de libertad bosónico $N = 1$ hemos de añadir a la relación anterior el invariante $I_3 = \theta_1 \theta_2$ [111]. Las supercargas Q_k son interpretadas como la raíz cuadrada de la energía mientras que I_3 da lugar a una rotación en los grados de libertad grassmannianos.

De la mecánica clásica a la mecánica supersimétrica

En las secciones precedentes han sido descritos los sistemas físicos enmarcados en la mecánica clásica y en la mecánica clásica supersimétrica tras introducir grados grassmannianos. Es lógico preguntarse en el modo en que un sistema físico descrito en el ámbito de la mecánica clásica puede ser trasladado al marco supersimétrico. Por simple inspección de los lagrangianos hemos de imponer la condición

$$V(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x^j} \frac{\partial W}{\partial x^j} \quad (1.31)$$

De forma genérica, el potencial clásico $V(x)$ puede expresarse como un medio del cuadrado de la norma del gradiente del superpotencial $W(x)$. Formalizamos esta reseña en la siguiente definición:

Definición 1.5: *Diremos que un sistema mecánico natural es presupersimétrico si podemos expresar el potencial clásico en la forma $V = \frac{1}{2} \|\text{grad } W\|^2$.*

En el caso de trabajar con sistemas que implican un sólo grado de libertad, la condición anterior queda reflejada en la relación

$$V(x) = \frac{1}{2} \frac{dW}{dx} \frac{dW}{dx} \quad (1.32)$$

que corresponde a una ecuación diferencial resoluble directamente por cuadraturas, obteniendo como resultado los dos superpotenciales

$$W(x) = \pm \int dx \sqrt{2V(x)}$$

es decir, podemos manifestar:

Proposición 1.1: *Todo sistema clásico con un sólo grado de libertad es presupersimétrico.*

Cuando se consideran sistemas con un número mayor de grados de libertad, la condición (1.31) se transforma en una ecuación no lineal en derivadas parciales, de modo que identificar el superpotencial adecuado a un potencial clásico deja de ser un trabajo trivial.

1.3 De kinks tratados en la literatura

En esta sección serán mostrados modelos de interés plasmados en la literatura y que, tras un proceso de ruptura espontánea de simetría, presentan soluciones de tipo kink que son identificadas. Iniciaremos tal estudio tratando modelos con espacio interno unidimensional considerando el comportamiento del denominado modelo ϕ^4 . Someramente también será tratado el modelo de Seno-Gordon. El propósito

perseguido en esta memoria aconseja mostrar la variedad de kinks presentes en sistemas con dos campos escalares, ejemplificados en los modelos Sigma O(2) Lineal y MSTB. El análisis del primero de ellos es trivial, al tratarse de una generalización rotacionalmente invariante del modelo unidimensional ϕ^4 . Es el segundo de los modelos mencionados el que posee una interesante variedad de soluciones kinks con unas sugestivas propiedades.

Kinks en modelos con $N = 1$

Consideremos el estudio particular de sistemas físicos naturales que con un espacio-tiempo de (1+1) dimensiones concurren en un espacio interno de una sola dimensión, es decir, el campo escalar ϕ está formado por una sola componente real. En tal caso, la expresión completa de la acción viene dada por:

$$S[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 - U(\phi) \right\}$$

Las soluciones del sistema deben cumplir la ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial U}{\partial \phi}$$

Restringidos al espacio de configuraciones estáticas \mathcal{C} , es el funcional energía

$$\mathcal{E}[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx_1} \right)^2 + U(\phi) \right\}$$

quien domina la dinámica del sistema mecánico asociado y admite una integral primera, que empleando el símil se interpreta como la energía mecánica,

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx_1} \right)^2 - U(\phi) \quad (1.33)$$

de modo que, atendiendo a las condiciones asintóticas (1.13) y (1.14), el valor de I_1 debe ser nulo para las soluciones pertenezcan a la variedad \mathcal{C}_K . Por ello, estas soluciones están sujetas al cumplimiento de la ecuación de primer orden:

$$\frac{d\phi}{dx_1} = \pm \sqrt{2U(\phi)} \quad (1.34)$$

Para cualquier sistema físico con un sólo campo escalar se concluye que este problema siempre es abordable y resoluble por cuadraturas mediante el procedimiento descrito.

La estabilidad de las posibles soluciones es enjuiciada mediante el análisis del espectro del operador hessiano

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi_K(x)} \quad (1.35)$$

lo cual corresponde a un problema completamente análogo a la resolución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo⁵. Por otra parte, este cálculo permite obtener las correcciones cuánticas a las masas de los kinks mediante aproximaciones semiclásicas [114, 150].

1.3.1 Modelo ϕ^4

El ejemplo paradigmático que ilustra el concepto de kink corresponde al nombrado modelo ϕ^4 , estudiado en primera instancia por Dashen et al. (1974), Goldstone, Jackiw (1975) y Polyakov (1974). En [80] el modelo es aplicado en dos ámbitos: el primero de ellos, encuadrado en la disciplina de la Física de la materia condensada, modeliza un sistema electrón-fonón en materiales como el polyacetyleno $(CH)_x$, constituido por una cadena que exhibe, en buena aproximación, un solo grado de libertad, estructura denominada trans- $(CH)_x$ [132, 136]. Una curiosa propiedad sobre esta sustancia de naturaleza aislante es el notable incremento de la conductividad cuando son introducidos solitones cargados [34], incluso hasta cotas similares a materiales metálicos. En el segundo ámbito, dado en la teoría de campos relativistas, los solitones provocan el fraccionamiento semientero del número fermiónico [64, 80]. De forma añadida, en teorías cosmológicas la introducción de los defectos topológicos, generados por el presente modelo, acoplados a dilatones incorpora la aparición de agujeros negros [7].

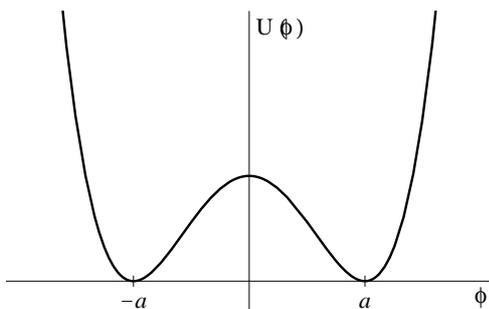


Figura 1.1. Potencial ϕ^4 .

Iniciemos el estudio de este modelo. El término potencial se presenta en la forma

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2$$

donde las constantes de acoplamiento λ y m^2 son supuestas positivas. Por simplicidad, introduciremos la constante a definida por $a = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$.

La acción queda expresada como

$$S[\phi] = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - a^2)^2 \right\} \quad (1.36)$$

la cual disfruta de una simetría respecto al grupo discreto \mathbb{Z}_2 de reflexiones en el espacio interno $\phi \rightarrow -\phi$. Las ecuaciones del movimiento asociadas corresponden a

⁵En lo sucesivo convenimos en denotar el parámetro espacial mediante x para facilitar la escritura.

la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = m^2 \phi - \lambda \phi^3$$

mientras que la energía introducida en (1.15) es

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dx} \frac{d\phi}{dx} + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - a^2)^2 \right\} \quad (1.37)$$

La variedad de ceros es $\mathcal{M} \equiv \{v^1 = -a, v^2 = a\}$, lo que manifiesta la presencia de dos soluciones triviales o vacíos del modelo. El espacio de configuración viene constituido por cuatro sectores desconectados $\mathcal{C} = \cup \mathcal{C}_{ab}$ con $a, b = 1, 2$. Las soluciones constantes dadas por $\phi_{v^1} = -a$ y $\phi_{v^2} = a$ forman parte de los sectores \mathcal{C}_{11} y \mathcal{C}_{22} respectivamente y su energía es nula. Resolviendo la ecuación diferencial, ilustrada en (1.34), obtenemos

$$\phi_K(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left\{ \frac{m}{\sqrt{2}} (x + \gamma_2) \right\} \quad (1.38)$$

como solución kink de nuestro sistema físico. Estrictamente (1.38) conforma una familia uniparamétrica de soluciones identificadas por el valor de γ_2 . Cada una de ellas se encuentra localizada en $x = -\gamma_2$. Ello viene justificado por la invariancia traslacional del sistema físico. En pos de ello y para facilitar la escritura convendremos en denotar $\bar{x} = x + \gamma_2$.

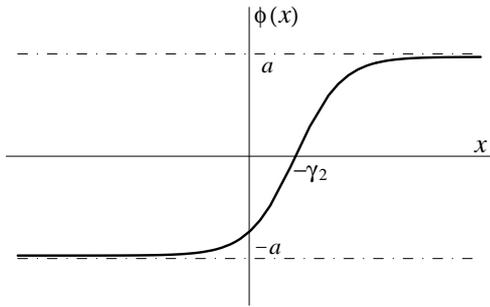


Figura 1.2. Soluciones kink (trazo continuo) y vacíos (trazo discontinuo).

Si es elegido el signo positivo sobre (1.38), la solución considerada conecta el punto de vacío $\phi_{v^1} = -a$ con $\phi_{v^2} = a$ para los valores asintóticos del espacio, es decir, se cumple $\phi(-\infty) = -a$ y $\phi(\infty) = a$. En este particular, denominaremos *kink* a la solución integrante del sector \mathcal{C}_{12} . Si es considerado el signo negativo obtendremos la solución *antikink*, que parte de $\phi_{v^2} = a$ hacia $\phi_{v^1} = -a$ formando parte del sector \mathcal{C}_{21} (ver figura 1.2).

Siguiendo la literatura, usaremos para designar la solución kink las siglas TK mientras que el antikink será representado por ATK. El moduli de la variedad de kinks estará conformado por un solo elemento dada la invariancia traslacional y por paridad que relaciona estas soluciones, $\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\mathbf{TK}\}$. La densidad de energía de la solución kink dada por el integrando de (1.37) proporciona

$$\varepsilon(x) = \frac{m^4}{2\lambda} \text{sech}^4 \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}}$$

La integración de la densidad de energía sobre el espacio facilita la masa clásica del kink

$$M_{cl} = \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda}$$

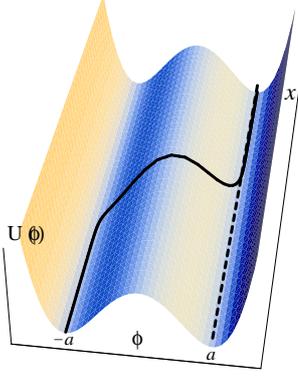


Figura 1.3. Soluciones kink y vacío.

En la figura adjunta a estas líneas queda plasmada la evolución espacial de la solución de vacío (representada por un trazo discontinuo) y de la solución kink (representada por un trazo continuo) sobre el potencial $U(\phi)$ marcado por la teoría de campos. La figura exhibe la barrera infinita de energía que impide en la teoría de campos que la solución kink decaiga a la solución trivial o de vacío.

El estudio de la estabilidad de las soluciones (1.38) nos lleva al estudio del espectro del hessiano (1.35). En tal caso, para los dos tipos de soluciones obtenidas, podemos encontrar:

- *Soluciones triviales: Vacíos.* Sobre la base del estudio presentado en la sección 1.2.1, el hessiano asociado en este caso

$$\mathcal{H}_v = -\frac{d^2}{dx^2} + 2m^2$$

presenta un espectro continuo asentado sobre el valor $2m^2$. La traducción cuántica nos permitiría afirmar que surgen mesones de masa $\sqrt{2}m$ sobre los sectores \mathcal{C}_{11} y \mathcal{C}_{22} .

- *Soluciones topológicas: kinks.* Considerando las expresiones (1.38) que determinan las soluciones de naturaleza topológica sobre la forma (1.35) del hessiano, el estudio de la estabilidad queda supeditado a la identificación de los autovalores y autofunciones,

$$\mathcal{H}_K \psi_n = \omega_n^2 \psi_n \quad \Rightarrow \quad -\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + \left(2m^2 - 3m^2 \operatorname{sech}^2 \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}} \right) \psi_n = \omega_n^2 \psi_n$$

que equivale a la resolución de un problema espectral con término potencial de tipo Pösch-Teller⁶ [47, 102]. Es conocido que el espectro discreto queda caracterizado por $\omega_n^2 = 2m^2 - \frac{m^2}{2}(2-n)^2$ con $n = 0, 1, 2$.

El espectro de pequeñas deformaciones de las soluciones de tipo kink [88] viene conformado por los siguientes autovalores:

⁶Introduciendo $z = \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}}$, el hessiano queda escrito en la forma $\mathcal{H}_K = \frac{m^2}{2} \left(-\frac{d^2}{dz^2} + 4 - 6 \operatorname{sech}^2 z \right)$.

- $\omega_0^2 = 0$:

Da cuenta del modo cero que presentan de forma genérica todas las soluciones de tipo kink. En este caso, la función propia asociada es dada por

$$\psi_0 \propto \operatorname{sech}^2 \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}}$$

Obsérvese en la figura 1.4 como el modo cero hace brotar un nuevo kink que es trasladado del originario.

- $\omega_1^2 = \frac{3}{2}m^2$:

Corresponde a un autovalor positivo y ligado del espectro, por lo que en el pre-ludio cuántico correspondería a un estado excitado del kink. La autofunción es dada ahora por:

$$\psi_1 \propto \sinh \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}^2 \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}}$$

El trazo discontinuo de la figura 1.5 representa el efecto de esta perturbación sobre la solución kink.

- $\omega_2^2 = 2m^2$:

Este valor propio es el punto de partida del espectro continuo asociado al problema de estudio. La autofunción es dada por

$$\psi_2 \propto 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}}$$

que corresponde ya a una expresión no normalizable, lo cual puede ser percibido al observar la figura 1.6.

- $\omega_q^2 = \{q^2 + 2m^2\}_{q \in \mathbb{R}}$:

La función propia que caracteriza el espectro continuo parametrizado por el valor de q es la expresión no normalizable

$$\psi_q \propto e^{iq\bar{x}} \left(-1 - \frac{2q^2}{m^2} + 3 \tanh \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{m} iq \tanh \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}} \right)$$

Quedan representados, en el marco cuántico, los mesones de distinto momento que

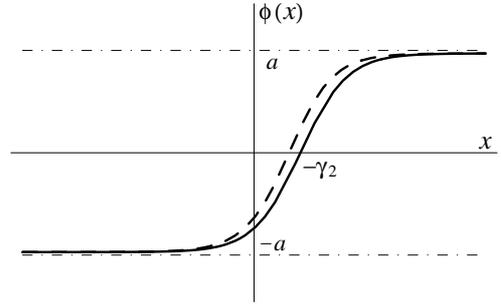


Figura 1.4. Perturbación ψ_0 sobre el kink (tramo discontinuo).

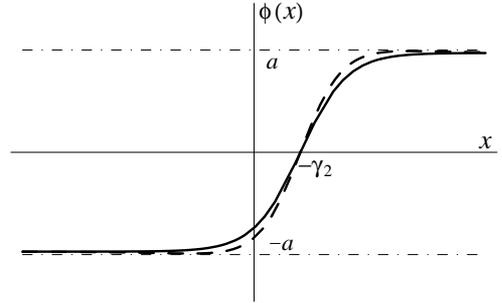


Figura 1.5. Perturbación ψ_1 sobre el kink (tramo discontinuo).

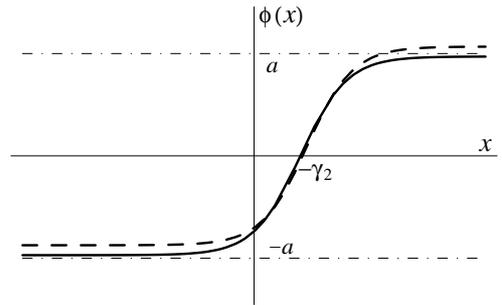


Figura 1.6. Perturbación ψ_2 sobre el kink (tramo discontinuo).

aflojan sobre el estado kink.

1.3.2 Modelo Seno-Gordon

Junto al modelo ϕ^4 , el modelo Seno-Gordon es de los más estudiados en la literatura. De hecho, es posible resolver de forma exacta la teoría cuántica para este caso. Dado que el estudio de la variedad de kinks es completamente análoga al considerado en el ejemplo precedente, los resultados serán expuestos de forma directa.

La energía del modelo viene caracterizada por el funcional

$$\mathcal{E}[\chi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \frac{d\chi}{dx} \frac{d\chi}{dx} + \frac{m^2}{\gamma} (1 - \cos \sqrt{\gamma} \chi) \right]$$

de donde puede comprobarse que el término potencial presenta un infinito numerable de mínimos o vacíos degenerados, los cuales se hallan situados en $\chi_v = \frac{n\pi}{\sqrt{\gamma}}$ con $n \in \mathbb{Z}$, de modo que $\mathcal{M} = \{v^{(n)} \equiv \frac{n\pi}{\sqrt{\gamma}}, n \in \mathbb{Z}\}$. Ello motiva que el modelo presente un proceso de ruptura de simetría en el que aparecen las soluciones de origen topológico

$$\chi_S(x) = \pm \frac{4}{\sqrt{\gamma}} \arctan e^{m\bar{x}}$$

que corresponden al conocido solitón (elegiendo el signo positivo) y su antisolitón (elegido el signo negativo). El estudio de la estabilidad de estas soluciones puede ser abordado analizando el espectro del hessiano asociado,

$$\mathcal{H}_S = -\frac{d^2}{dx^2} + m^2 - 2m^2 \operatorname{sech}^2 mx$$

que corresponde a un operador de tipo Schrödinger⁷. Su espectro discreto viene conformado por el autovalor $\omega_0^2 = 0$ con autofunción $\psi_0 \propto \operatorname{sech} mx$, que representa el modo cero atribuido a la simetría por traslaciones espaciales. El espectro continuo queda asentado sobre el valor m^2 con autofunción $\psi_q = e^{iqx} \left(1 - \frac{m \tanh mx}{iq}\right)$. La ausencia de autovalores negativos implica la estabilidad de esta solución.

Kinks en Modelos con $N = 2$

Por todo lo enunciado hasta ahora nos resultan de interés aquellos modelos físicos, que embebidos en un mundo relativista de (1+1)-dimensiones, poseen una dinámica gobernada por el funcional acción (1.1) asociada a un sistema natural (1.2), donde el campo ϕ incluye en general N componentes reales y tal que el término potencial $U(\phi)$ corresponde a una expresión semidefinida positiva. El estudio de la variedad

⁷Haciendo $z = mx$ se tiene el hessiano asociado $\mathcal{H}_S = m^2 \left(-\frac{d^2}{dz^2} + 1 - 2 \operatorname{sech}^2 z\right)$.

de kinks \mathcal{C}_K en estos casos es un problema no siempre abordable, valga la afirmación de Rajaraman en [114] en la que anuncia: “*Let us move on to the next level of complexity, i.e. static solutions to systems of coupled scalar fields in two space-time dimensions. This already brings us to the stage where no general methods are available for obtaining all localised static solutions, given the field equations. However, some solutions, but by no means all, can be obtained for a class of such lagrangians using a little trial and error*”. En las últimas líneas empieza a hacer mención del método de órbitas prueba, que permite obtener información parcial del sistema físico y que será detallado en próximas secciones. En particular elegiremos, en la presentación de los siguientes modelos, un espacio interno dotado de dos grados de libertad, esto es, $N = 2$. Esta elección contiene ya importantes propiedades de la generalización a un número de dimensiones arbitrarias. Análisis de los sistemas mostrados quedan registrados en el estudio de eventos físicos como cuerdas cosmológicas y domain walls descritos en [139], y entre ellos, otros más específicos como los *domain ribbons* [26], domain walls que habitan en cuerdas cosmológicas [145, 99, 100], domain walls superconductoras [86] o la descripción de agujeros negros asociados a defectos topológicos [7]. En el marco de la materia condensada, se describe el comportamiento de los antiferromagnetos como Rb_2NiF_4 y K_2MnF_4 [32] y de los sistemas de transición orden-desorden sobre redes biestructurales o transiciones de líquido-gas. También tienen relevancia en sucesos como el confinamiento en cromodinámica cuántica [135].

La energía (1.11) impuesta sobre el espacio de configuración \mathcal{C} es dada como

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi^1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi^2}{dx} \right)^2 + U(\phi^1, \phi^2) \right\} \quad (1.39)$$

sobre la que aplicaremos diversas técnicas que nos permitan extraer las soluciones kinks. La estabilidad de dichas soluciones será estudiada, en lo posible, mediante el análisis de los autovalores del operador hessiano, presentado como el operador diferencial matricial de orden dos

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_1^2} \Big|_{\phi(x)} & \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} \Big|_{\phi(x)} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} \Big|_{\phi(x)} & -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_2^2} \Big|_{\phi(x)} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

tal que el problema espectral requiere identificar los autovalores y autofunciones en la expresión

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} \psi_n^1 \\ \psi_n^2 \end{pmatrix} = \omega_n^2 \begin{pmatrix} \psi_n^1 \\ \psi_n^2 \end{pmatrix}$$

lo cual supone un grave problema que no ha sido abordado en general y que tan sólo puede ser analizado fructíferamente en algunos pocos casos en que el hessiano (1.40) aparece en forma diagonal.

1.3.3 Modelo Sigma O(2) Lineal

Este caso es la extensión $N = 2$ rotacionalmente invariante del modelo ϕ^4 presentado con anterioridad. Para ello aglutinamos las dos componentes reales en el campo complejo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Es propuesto el análisis de un sistema físico que incorpora el potencial:

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - a^2)^2$$

Este modelo ha sido tratado en las teorías cuánticas y es conocido como el modelo de Goldstone. Se observó que el espectro de partículas albergaba bosones de masa nula como consecuencia de la presencia de un modo cero generado por la simetría continua de rotaciones. En materia condensada es utilizado para la descripción del fenómeno de superfluidez, siendo el campo ϕ la magnitud que representa la función de ondas del gas condensado de Bose. El modelo de Goldstone adquiere una transcendencia esencial cuando es tratado como parte de una teoría gauge $U(1)$, conformando lo que se conoce como modelo de Higgs. En este supuesto es posible el mecanismo de Higgs, basado en un proceso de ruptura de simetría de tal manera que los campos $\phi(x)$, que describen los bosones Higgs, dotan de masa a las partículas con las cuales se acoplan. Así, en la teoría electro-débil standard [92] de Weinberg y Salam, donde el grupo gauge es $SU(2) \times U(1)$, este mecanismo es aplicado para generar masas no nulas para los bosones W^+ , W^- y Z^0 , responsables de la transmisión de la interacción débil. Con esta misma interpretación, en el marco de la materia condensada, la superconductividad es descrita mediante el modelo de Ginzburg-Landau donde el campo ϕ representa la función de onda del par de Cooper (estado ligado de dos electrones), mientras que en astrofísica diversos procesos cosmológicos son explicados por la presencia de domain walls, que dominarían el universo temprano según ciertas teorías [139, 48].

El funcional asociado en la teoría variacional es la acción

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - a^2)^2 \right\}$$

donde los campos solución de carácter estático se ven sometidos al cumplimiento de las ecuaciones no lineales en derivadas parciales acopladas

$$\frac{\partial^2 \phi^j}{\partial x^2} = \lambda \phi^j (\phi^* \phi - a^2) \quad \forall j = 1, 2$$

La acción S nos permite dilucidar la simetría respecto del grupo $U(1)$ de transformaciones de fase $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$ con α constante que disfruta el sistema físico. Aplicando el teorema de Noether identificamos la corriente conservada [117] determinada por

$$j_\mu[\phi, \partial_\mu \phi] = \phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*$$

La variedad de ceros está en este caso determinada por $\mathcal{M} = \{\phi \in \mathbb{C} / |\phi| = a\} \equiv S^1$. La simetría $U(1)$ asociada al lagrangiano queda rota al grupo discreto \mathbb{Z}_2 sobre la órbita de vacío. A pesar de la novedosa complejidad del modelo, mediante el uso del símil mecánico podemos identificar dos integrales primeras asociadas a la acción del sistema mecánico asociado a la búsqueda de soluciones estáticas en la teoría de campos; por una parte la energía mecánica

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{d\phi^*}{dx} \frac{d\phi}{dx} - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - a^2)^2$$

junto al momento angular

$$I_2 = \phi^1 \frac{d\phi^2}{dx} - \phi^2 \frac{d\phi^1}{dx}$$

Las soluciones de tipo kink pueden ser encontradas de manera sencilla, basándonos en la simetría rotacional del modelo y la información adquirida en secciones precedentes, de tal forma que podemos presentar las soluciones

$$\phi(x) = e^{i\alpha} \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}} \quad (1.41)$$

donde $\alpha \in [0, 2\pi)$ y que denotaremos por TK_α . El moduli de la variedad de kinks incluye un único elemento, $\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\mathbf{TK} \equiv [\text{TK}_{\alpha=0}]\}$, dado que estas soluciones quedan relacionadas por las simetrías rotacional, por paridad y traslacional del modelo. Por otra parte, el estudio de la estabilidad nos obliga al análisis de operador hessiano considerado sobre la expresión de la solución $\tilde{\phi}(x)$,

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{1} + \left(\begin{array}{cc} 3\lambda\phi_1^2 + \lambda\phi_2^2 - m^2 & 2\lambda\phi_1\phi_2 \\ 2\lambda\phi_1\phi_2 & \lambda\phi_1^2 + 3\lambda\phi_2^2 - m^2 \end{array} \right) \Big|_{\tilde{\phi}(x)}$$

de donde se tiene que:

- *Soluciones triviales:* Dada la invariancia rotacional, podemos tomar como solución de vacío el valor particular $\phi_v = (\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, 0)$ como representativa del comportamiento mostrado por las soluciones triviales. Es sencillo ver que el hessiano

$$\mathcal{H}[\phi_v] = -\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{1} + \left(\begin{array}{cc} 2m^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

presenta una forma diagonal, presentando un espectro continuo asentado sobre el valor $2m^2$ para perturbaciones del tipo $(\psi_1, 0)$ y sobre el valor nulo para autofunciones del tipo $(0, \psi_2)$. En el contexto cuántico se presentan, por la última reseña, partículas de masa nula (los bosones de Goldstone).

- *Soluciones kinks:* Aprovechando la invariancia bajo rotaciones del modelo, enfocaremos nuestro interés en la solución (1.41) con $\alpha = 0$, de modo que el hessiano

particular es ahora,

$$\mathcal{H}[\text{TK}_{\alpha=0}] = -\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 2m^2 - 3m^2 \operatorname{sech}^2 \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -m^2 \operatorname{sech}^2 \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

que nos traslada (dado que el hessiano \mathcal{H} es diagonal) al estudio espectral de los hessianos unidimensionales indicados por

$$\mathcal{H}_{11} = -\frac{d^2}{dx^2} + 2m^2 - 3m^2 \operatorname{sech}^2 \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}} \quad \mathcal{H}_{22} = -\frac{d^2}{dx^2} - m^2 \operatorname{sech}^2 \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}}$$

donde el primero de ellos fue analizado en detalle en secciones precedentes y respecto del segundo concluimos que sus autovalores son:

- $\omega_0^2 = -\frac{m^2}{2}$: En este caso, se observa la presencia de un autovalor negativo de modo que la solución que estamos tratando es inestable. La autofunción correspondiente es

$$\psi_{n=0}^2 \propto \operatorname{sech} \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}}$$

que tiene como consecuencia que el kink decaiga bien a un bosón de Goldstone o un conjunto de mesones.

- $\omega_1^2 = 0$: La función propia es escrita como

$$\psi_{n=1}^2 \propto \tanh \frac{m\bar{x}}{\sqrt{2}}$$

y responde a la posibilidad que aparece en el sistema de que una solución kink gire en el contorno de S^1 , es por tanto, responsable de un modo cero relacionado con la simetría rotacional de la teoría.

Es de advertir que la presencia de bosones de Goldstone está prohibida en la teoría de campos cuánticos escalares en (1+1) dimensiones, dado que en tal proceso son eliminadas las simetrías continuas mediante correcciones radiativas, dando origen a un potencial efectivo cuya variedad de ceros \mathcal{M} posee un número de elementos discreto, como es mostrado por el teorema de Coleman [38]. A la vista de lo comentado centraremos nuestro interés en sistemas físicos que presenten una simetría discreta, que puedan albergar un proceso de ruptura de simetría espontánea.

1.3.4 Modelo MSTB.

En 1975, Montonen [98], Sarker, Trullinger y Bishop [125] estudiaron un modelo Sigma $O(2)$ no lineal que presentaba un proceso de ruptura de simetría derivado de la existencia de dos vacíos degenerados. El modelo pasó a ser conocido como *modelo MSTB*. Presentaba un término potencial expresado en campos adimensionales como:

$$U_{\text{MSTB}}(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^* \phi - 1)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \phi_2^2$$

El uso de las órbitas prueba proporcionó algunas soluciones aisladas que se dieron en nombrar como **TK1** (kinks topológicos de una componente) [115] asentados sobre la órbita $\phi_2 = 0$ y **TK2** (kinks topológicos de dos componentes) asentados sobre una trayectoria semielíptica. El análisis numérico de dicho modelo [133, 90] dilucidó la existencia de infinitas soluciones añadidas a las anteriores, de naturaleza no topológica, los **NTK**. Asombrosamente, las energías de estas soluciones aparecían relacionadas en una manera muy simple $\mathcal{E}(\mathbf{NTK}) = \mathcal{E}(\mathbf{TK1}) + \mathcal{E}(\mathbf{TK2})$ [134]. Esta relación se conoce como *regla de suma*. Una década más tarde, Ito dió una explicación analítica a estas cuestiones, que surgían en este tan singular modelo, empleando el símil mecánico. La propiedad sobre la que se apoyan todos los resultados descritos es la separabilidad en variables de la teoría de Hamilton-Jacobi asociada a dicho modelo. Ito obtuvo las soluciones [77] y estudió posteriormente su estabilidad [78]. Estudios más detallados pueden encontrarse en [94, 2, 3]. La extensión de este modelo para el caso de tres grados de libertad del espacio interno es mostrado en [65, 2]. Recientes trabajos abordan el estudio de modelos similares, aunque en el mero empleo de las órbitas prueba como procedimiento de recabar información acerca de ellos [26, 99, 100, 14, 13, 15]. Ejemplos fenomenológicos se encuentran en Materia Condensada en antiferromagnetitas no axiales como Rb_2NiF_4 o K_2MnF_4 , que presentan transiciones de orden-desorden sobre redes biestructurales o en transiciones líquido-gas [32]. Un estudio en el marco de la teoría de campos cuánticos es dado en [96].

El sistema físico es gobernado por la dinámica presentada por la acción

$$S = \int d^2y \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \chi^* \partial^\mu \chi - U_{\text{MSTB}}(\chi, \chi^*) \right\}$$

donde χ es un campo complejo $\chi(y_\mu) = \chi_1(y_\mu) + i\chi_2(y_\mu)$ definido sobre un espacio de Minkowski de dos dimensiones. El potencial presentado por el modelo MSTB viene expresado como

$$U_{\text{MSTB}}(\chi) = \frac{\lambda^2}{4} \left(\chi^* \chi - \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4} \chi_2^2 \quad (1.42)$$

donde las constantes de acoplamiento λ, m y β poseen dimensiones de inverso de longitud en el sistema de unidades naturales. La expresión (1.42) es isótropa en los términos cuárticos y anisótropa en los cuadráticos. Corresponde a una deformación del potencial presente en el modelo Sigma O(2) Lineal, el cual se recupera para el valor $\beta = 0$. El paso natural será considerar expresiones adimensionales, lo cual puede ser establecido considerando los cambios $\chi \rightarrow \frac{m}{\lambda} \phi$, $y_\mu \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{m} x_\mu$ y $\frac{\beta^2}{m^2} \rightarrow \sigma^2$. Entonces, obtenemos

$$S = \frac{m^2}{\lambda^2} \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - U_{\text{MSTB}}(\phi, \phi^*) \right\}$$

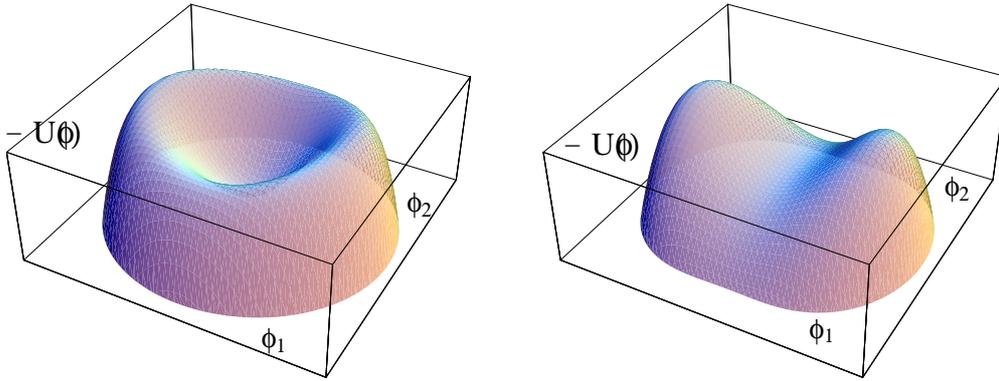
donde el factor global que aparece en la expresión anterior puede ser obviado cuando trabajamos en el marco clásico. Ahora, la energía adimensional (1.11) aparece como

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 + U_{\text{MSTB}}(\phi) \right\} \quad (1.43)$$

siendo

$$U_{\text{MSTB}}(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}(\phi_1^* \phi_2 - 1)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \phi_2^2 \quad (1.44)$$

lo que permite recuperar la energía dimensional mediante la relación $\mathcal{E}^d[\chi] = \frac{m^3}{\sqrt{2}\lambda^2} \mathcal{E}[\phi]$.



a) Régimen $\sigma < 1$.

b) Régimen $\sigma \geq 1$.

Figura 1.7. Potencial MSTB en sus dos regímenes

El sistema introduce un parámetro no trivial σ , en el sentido de que no puede ser eliminado obviando factores globales del potencial y ejecutando rotaciones y traslaciones en el espacio interno, los cuales no añaden propiedades novedosas sobre el sistema a estudiar. A modo de curiosidad en este punto, completamos este párrafo advirtiendo el carácter presupersimétrico de este modelo, aportando los superpotenciales

$$W(\phi_1, \phi_2) = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 \pm 2\sigma\phi_1 + \sigma^2} \left[\frac{1}{3} (\phi_1^2 + \phi_2^2 \mp \sigma\phi_1 + \sigma^2) - 1 \right]$$

que como puede ser verificado proporcionan (1.44) a partir de la relación (1.31).

Propiedades del modelo:

La introducción de las variables elípticas de Euler en el problema, $\xi_\sigma^*(\phi_1) = \frac{1}{\sigma}uv$ y $\xi_\sigma^*(\phi_2) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{(u^2 - \sigma^2)(\sigma^2 - v^2)}$, permite escribir el potencial (1.44) en la forma:

$$\xi_\sigma^* U_{\text{MSTB}} = \frac{1}{2(u^2 - v^2)} \left[(u^2 - 1)^2(u^2 - \sigma^2) + (v^2 - 1)^2(\sigma^2 - v^2) \right] \quad (1.45)$$

Los elementos que conforman la variedad de ceros especificados sobre el campo complejo adimensional $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ son

$$\mathcal{M} = \{v^1 = -1, v^2 = 1\}$$

de modo que los sectores desconectados del espacio de configuración son clasificados por los elementos de $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Existen cuatro sectores desconectados, esto es, $\mathcal{C} = \cup \mathcal{C}_{ab}$ con $a, b = 1, 2$. Los sectores \mathcal{C}_{11} y \mathcal{C}_{22} vienen constituidos respectivamente por las soluciones que conectan los vacíos v^1 o v^2 consigo mismos. Las soluciones que parten de v^1 y llegan a v^2 son integrantes del sector \mathcal{C}_{12} y aquellas que van de v^2 a v^1 lo son de \mathcal{C}_{21} .

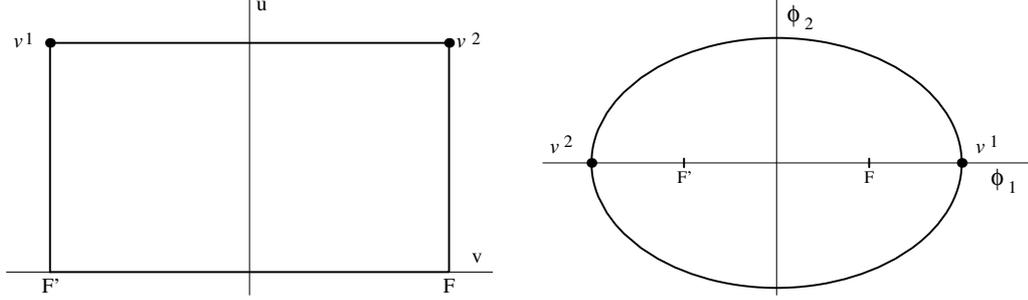


Figura 1.8: *Puntos de vacío y curvas separatrices del modelo MSTB en el plano elíptico (derecha) y cartesiano (izquierda).*

La distribución de la variedad de vacíos provoca que el sistema MSTB presente un escenario de ruptura de simetría. Junto a la invariancia bajo la acción del grupo de Poincaré, el lagrangiano disfruta de simetrías internas de reflexión $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, generadas por las transformaciones $\phi_1 \rightarrow -\phi_1$ y $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$, de modo que la variedad de ceros puede obtenerse por la acción del grupo G sobre algún elemento de \mathcal{M} . En este caso, la ruptura de simetría se caracteriza por la órbita de vacío

$$\mathcal{M}_{MSTB} \equiv G/H \equiv \mathbb{Z}_2$$

donde H es el grupo pequeño del vacío v^i dado por \mathbb{Z}_2 . El espectro de pequeñas deformaciones para las soluciones de vacío (espectro de partículas) es un continuo que se asienta sobre los valores:

$$M^2(v^1, v^2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Dado que los kinks son soluciones del sistema considerado, deberán corresponder evidentemente a puntos estacionarios del funcional (1.43) que, como cualquier otra solución, verificarán las ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d^2 \phi_i}{dx^2} = 2\phi_i(\phi_j \phi_j - 1) + \sigma^2 \delta_{i2} \phi_2$$

con $i = 1, 2$, las cuales admiten las dos integrales primeras

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)^2 - \frac{\sigma^2}{2} \phi_2^2 \quad (1.46)$$

y

$$I_2 = \left(\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \left[\left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - (\phi_1^2 - 1)^2 + \phi_2^2(\phi_2^2 - 2 + \sigma^2) \right]$$

que, empleando el símil mecánico, corresponden a la energía mecánica y a una expresión que podemos interpretar como un momento angular deformado [72] correspondientes al sistema mecánico asociado. Es de reseñar que, utilizando las condiciones asintóticas, el valor de dichas integrales para el caso de las soluciones kink es $I_1 = I_2 = 0$, hecho que nos proporcionará la posibilidad de obtener la expresión de algunas soluciones mediante el método de órbitas prueba introducido por Rajaraman [114], vía cuadraturas.

Galería de soluciones kinks:

Afrontaremos el cálculo de las expresiones que determinan las soluciones usando en primer lugar el método de órbitas prueba y posteriormente, tomamos como herramienta la teoría de Hamilton-Jacobi para obtener el resto de las posibles soluciones presentes en el modelo. Distinguiremos dos fases del modelo dependiendo del valor adoptado por el parámetro adimensional σ . La primera vendrá caracterizada por el rango $0 \leq \sigma^2 \leq 1$ (que corresponde a la situación más rica) y la segunda cuando $\sigma^2 \geq 1$. Entonces

FASE I: $0 \leq \sigma^2 < 1$. Para estos valores la discusión de las soluciones presentes queda detallada en los siguientes tres puntos:

1. TK1: Ensayaremos una condición de realidad sobre el campo complejo ϕ asumiendo que $\phi_2 = 0$. Trasladando dicha condición sobre la expresión de la integral (1.46), es fácil obtener la solución

$$\phi(x) = \pm \tanh \bar{x} \tag{1.47}$$

donde empleamos la notación ya usada $\bar{x} = x + \gamma_2$. Dado que la segunda componente de ϕ es nula, la solución se asienta sobre el eje ϕ_1 , conectando los puntos v^1 y v^2 , es decir, se trata de un kink topológico de una sola componente, que denotamos de forma genérica⁸ como **TK1**, entendiendo que realmente estamos tratando con dos soluciones, previa elección del signo en la expresión (1.47). Por convenio, nos referiremos por kink, si elegimos el signo positivo y antikink si es elegido el signo

⁸Puesto que será preciso a lo largo del estudio de distintos modelos identificar aquellos conjuntos de soluciones (familias) cuyo comportamiento es análogo con las mismas siglas, emplearemos junto con las letras **TK**(kink topológico) otra que sea su seña de identidad y que esté asociada a una propiedad que le sea inherente. De forma particular y específica, si es preciso se mostrará entre corchetes los índices de los vacíos que conecta cada solución particular.

negativo⁹, y los denotaremos por TK1[12] y TK1[21], si es preciso distinguirlos [115]. Obsérvese la figura 1.9.

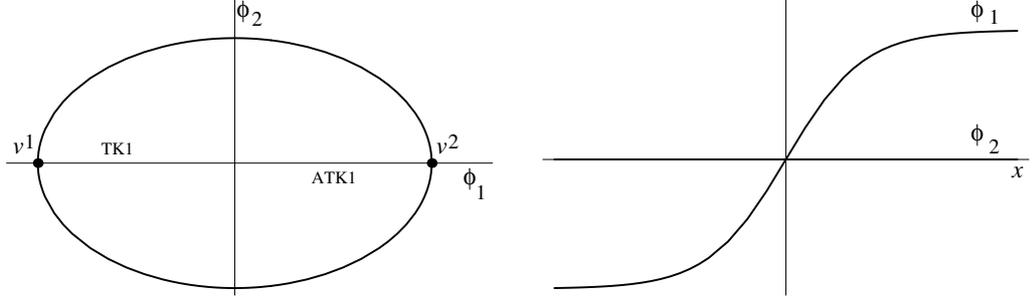


Figura 1.9: Sobre los kinks **TK1**. A la derecha se muestra la solución TK1[12].

La descripción de la solución **TK1** sobre el plano elíptico es dada señalando que la órbita seguida son los tramos rectilíneos que van desde v^1 hasta el foco F' , luego se dirige hacia el otro foco F , y desde ahí llega finalmente al vacío v^2 . El cálculo de la energía asociada a esta solución, bajo el uso de variables adimensionales, nos reporta:

$$\mathcal{E}[\mathbf{TK1}] = \frac{4}{3} \quad \text{ó} \quad \mathcal{E}^d[\mathbf{TK1}] = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda^2}$$

La estabilidad de la solución encontrada puede ser estudiada mediante el análisis espectral del hessiano

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 4 - 6 \operatorname{sech}^2 \bar{x} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + \sigma^2 - 2 \operatorname{sech}^2 \bar{x} \end{pmatrix}$$

que implica la resolución de dos problemas unidimensionales equiparables a la ecuación de Schrödinger con potencial de Pösch-Teller [88]. Los autovalores obtenidos figuran como

$$\begin{aligned} \text{Componente 1: } \omega_{n_1}^2 &= 4 - (2 - n_1)^2 & n_1 &= 0, 1, 2 \\ \text{Componente 2: } \omega_{n_2}^2 &= \sigma^2 - (1 - n_2)^2 & n_2 &= 0, 1 \end{aligned}$$

sobre los que descubrimos el modo cero atribuido al valor $n_1 = 0$, junto con un autovalor negativo para el particular $n_2 = 0$ en la fase $\sigma^2 < 1$. Por esta circunstancia, la solución **TK1** se presenta inestable. Nótese por otra parte que esta solución enmarcada en la fase $\sigma > 1$ se convierte en estable.

⁹Cada solución kink presente en el modelo conecta dos puntos de vacío. Emplearemos el término **kink** cuando el vacío de destino esté a la derecha del de partida, y si esto no es determinante cuando el primero esté por encima del segundo. En otro caso, consideraremos tal solución como **antikink**. Esta elección es totalmente artificial y lo único que se pretende es dar cuenta de que una trayectoria dada alberga dos soluciones dependiendo de en cuál de los dos sentidos sea recorrida.

2. TK2: Consideraremos la trayectoria elíptica

$$\phi_1^2 + \frac{\phi_2^2}{1 - \sigma^2} = 1 \quad (1.48)$$

ensayada sobre (1.46), lo cual nos proporciona la expresión

$$\phi(x) = \pm \tanh \sigma \bar{x} \pm i \bar{\sigma} \operatorname{sech} \sigma \bar{x} \quad (1.49)$$

donde $\bar{\sigma} = \sqrt{1 - \sigma^2}$ [98, 125]. Representa cuatro soluciones, obtenidas combinando los dobles signos de (1.49). Estas soluciones conectan los vacíos v^1 y v^2 y serán denotadas genéricamente por **TKE**¹⁰. Si debemos distinguir las cuatro soluciones denominaremos kinks, empleando la notación TKE[12] y TKE*[12], aquellas que conectan los vacíos v^1 y v^2 a lo largo del tramo superior e inferior de la elipse respectivamente; mientras que el término antikink será asociado a las soluciones (1.49) que conectan v^2 y v^1 , usando TKE[21] y TKE*[21] para referirnos a ellas de forma particular (ver figura 1.10).

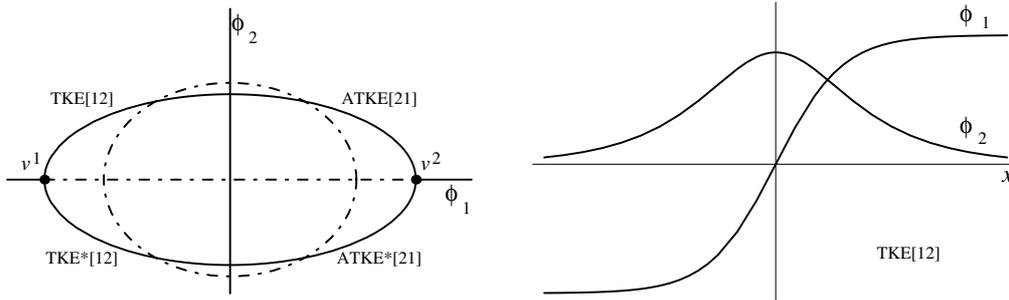


Figura 1.10: Sobre los kinks **TKE**. A la derecha, la solución TKE[12].

La relación (1.49) reescrita sobre el plano elíptico nos proporcionaría las condiciones

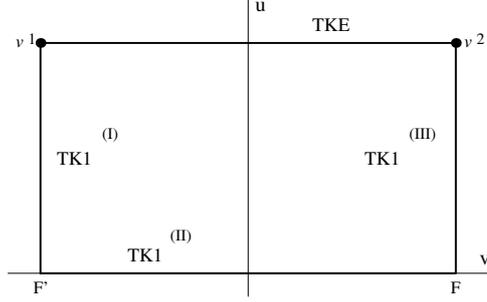
$$u = 1 \quad v = \pm \sigma \tanh \sigma \bar{x}$$

quedando asentada sobre el tramo horizontal que une v^1 y v^2 , (ver figura 1.11). El valor de su energía es

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKE}] = 2\sigma \left(1 - \frac{\sigma^2}{3}\right) \quad \text{ó} \quad \mathcal{E}^d[\mathbf{TK2}] = \frac{\sqrt{2}m^3\sigma}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{3}\right)$$

por lo que en el rango de estudio del parámetro σ se cumple la inecuación $\mathcal{E}[\mathbf{TKE}] < \mathcal{E}[\mathbf{TK1}]$.

¹⁰Mediante la letra **E** adosada a las siglas **TK** tratamos de enfatizar que se trata de un kink topológico sobre una órbita elíptica. En la literatura sobre el modelo, estas soluciones suelen ser denotadas por TK2, kinks topológicos de dos componentes. Desechamos esta notación, dado que en modelos más sofisticados no identifica los kinks presentes.


 Figura 1.11: *Kinks singulares sobre el plano elíptico*

El análisis de la estabilidad en este caso mediante el operador hessiano es un problema altamente no trivial [138, 16, 11]. La complejidad del problema está provocada por el carácter no diagonal de \mathcal{H} debida al acoplamiento de las perturbaciones. Es de destacar en esta materia los resultados hallados en [65]. Otras formas de abordar el problema, vía la teoría de Morse, aseguran la estabilidad de la solución **TK2** [94, 95, 65]. Argumentos energéticos que presentaremos más tarde inducen al mismo resultado.

3. $\underline{\text{NTK}}(\gamma_1)$: Con el propósito de encontrar el resto de las posibles soluciones del sistema, se introduce el análisis del problema mediante el uso de la teoría de Hamilton-Jacobi. Ello precisa el formalismo hamiltoniano y en particular la definición de los momentos generalizados

$$p_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - \sigma^2} \frac{du}{dx} \qquad p_v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dv}{dx}\right)} = \frac{u^2 - v^2}{\sigma^2 - v^2} \frac{dv}{dx}$$

de manera que el hamiltoniano del sistema mecánico asociado al problema de la búsqueda de kinks puede ser expresado como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{u^2 - v^2} (h_u + h_v)$$

siendo

$$h_u = \frac{1}{2}(u^2 - \sigma^2) [p_u^2 - (u^2 - 1)^2] \qquad h_v = \frac{1}{2}(\sigma^2 - v^2) [p_v^2 - (v^2 - 1)^2]$$

Sobre la ecuación de Hamilton-Jacobi (1.21), expresada en las variables elípticas,

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} + \mathcal{H} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial v}, u, v \right) = 0$$

ensayaremos la forma separada de *función generatriz* $\mathcal{J} = \mathcal{J}_x(x) + \mathcal{J}_u(u) + \mathcal{J}_v(v)$, de modo que la expresión obtenida consta de piezas dependientes por separado de

las variables u , v y x . Concluimos que debe verificarse:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_x &= -Ex \\ \mathcal{J}_u &= \text{Sign}(u') \int du \sqrt{\frac{2F + 2Eu^2 + (u^2 - 1)^2(u^2 - \sigma^2)}{u^2 - \sigma^2}} \\ \mathcal{J}_v &= \text{Sign}(v') \int dv \sqrt{\frac{-2F - 2Ev^2 + (v^2 - 1)^2(\sigma^2 - v^2)}{\sigma^2 - v^2}}\end{aligned}$$

Hemos denotado por simplicidad $u' = \frac{du}{dx}$ y $v' = \frac{dv}{dx}$. La teoría de Hamilton-Jacobi ofrece, respectivamente, las trayectorias y la dependencia de las soluciones respecto de la coordenada espacial mediante las expresiones:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial F} = \gamma_1 = \text{cte} \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial E} = \gamma_2 = \text{cte}$$

Considerando las derivadas respecto de las constantes E y F , y teniendo presente que las condiciones asintóticas (1.13) y (1.14) de las soluciones de tipo kink obligan a considerar posteriormente los valores $E = F = 0$, se obtienen las siguientes cuadraturas

$$\begin{aligned}\text{Sign}(u') \int \frac{du}{\sqrt{(u^2 - \sigma^2)^2(u^2 - 1)^2}} - \text{Sign}(v') \int \frac{dv}{\sqrt{(\sigma^2 - v^2)^2(v^2 - 1)^2}} &= \gamma_1 \\ \text{Sign}(u') \int \frac{u^2 du}{\sqrt{(u^2 - \sigma^2)^2(u^2 - 1)^2}} - \text{Sign}(v') \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{(\sigma^2 - v^2)^2(v^2 - 1)^2}} &= x + \gamma_2\end{aligned}$$

que resueltas proporcionan las trayectorias de las soluciones kinks

$$\left\{ \frac{(1+u)(u-\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}}{(1-u)(u+\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}} \right\}^{\text{Sign}(u')} \left\{ \frac{(1+v)(\sigma-v)^{\frac{1}{\sigma}}}{(1-v)(v+\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}} \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{2(1-\sigma^2)\gamma_1} \quad (1.50)$$

y la dependencia espacial de éstas

$$\left\{ \frac{(1-u)(u+\sigma)^\sigma}{(1+u)(u-\sigma)^\sigma} \right\}^{\text{Sign}(u')} \left\{ \frac{(1-v)(\sigma+v)^\sigma}{(1+v)(\sigma-v)^\sigma} \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{2(1-\sigma^2)(x+\gamma_2)}$$

Deben ser advertidas algunas propiedades de las soluciones halladas. Constituyen una familia biparamétrica, en la que el valor de $\gamma_1 \in (-\infty, \infty)$ fija una trayectoria particular, y γ_2 está asociada al modo cero de cada solución. Se distribuyen de forma densa dentro del recinto delimitado por la elipse (1.48), que denominaremos celda P_{11} , tal como queda demostrado en [2]. Observando la figura 1.12, podemos describir los kinks que aparecen; se trata de soluciones no topológicas (por lo que serán denotadas mediante $\mathbf{NTK}(\gamma_1)$) dado que comienzan y regresan en el mismo punto de vacío. La familia de soluciones que parten de v^1 regresan a este punto atravesando por el foco F (soluciones $\mathbf{NTK}[11](\gamma_1)$), mientras que aquellas que parten de v^2 cruzarán el foco F' (kinks $\mathbf{NTK}[22](\gamma_1)$).

* A pesar de la intrincada expresión de las trayectorias (1.50) puede obtenerse soluciones analíticas para determinados valores de los parámetros. Para el caso $\sigma = \frac{1}{2}$ y $\gamma_1 = 0$, asignados a la solución $\mathbf{NTK}_{\sigma=\frac{1}{2}}(0)$, (1.50) se convierte en la ecuación de la circunferencia centrada en el punto $P \equiv (\frac{1}{4}, 0)$ y de radio $\frac{3}{4}$,

$$(\phi_1 - \frac{1}{4})^2 + \phi_2^2 = (\frac{3}{4})^2$$

lo que permite encontrar la solución particular

$$\phi(x) = \frac{3}{2} \tanh^2 \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + i \operatorname{sech} \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} \tanh \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}}$$

La energía de todas estas soluciones no topológicas es:

$$\mathcal{E}[\mathbf{NTK}(\gamma_1)] = \frac{2}{3}(1 + \sigma)^2(2 - \sigma) \quad \text{ó} \quad \mathcal{E}^d[\mathbf{NTK}] = \frac{\sqrt{2}m^3}{3\lambda^2}(1 + \sigma)^2(2 - \sigma)$$

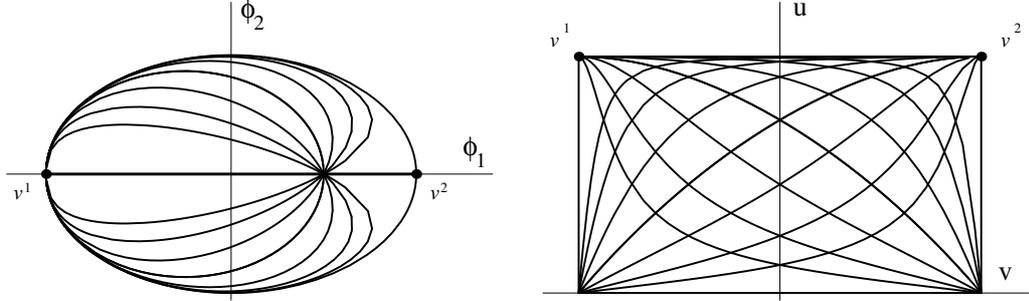


Figura 1.12: *Kinks densos del modelo MSTB: Soluciones NTK.*

Una descripción final puede ser manifestada apuntando que en el interior de la celda P_{11} sobreviven los kinks densos $\mathbf{NTK}(\gamma_1)$, mientras que sobre sus fronteras ∂P_{11} se asientan las soluciones singulares $\mathbf{TK1}$ y \mathbf{TKE} . En términos del espacio de Moduli podría ser transcrito que el sistema físico proporciona las soluciones

$$\operatorname{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\mathbf{TK1}, \mathbf{TKE}, \mathbf{NTK}(\gamma_1)\}.$$

Parametrización y reglas de suma

La expresión (1.50) describe los kinks no topológicos \mathbf{NTK} al considerar un valor finito para el parámetro natural γ_1 . Un valor asintótico de tal parámetro, $\gamma_1 \rightarrow \pm\infty$, transforma dichas soluciones en singulares, revelando la combinación de las soluciones $\mathbf{TK1} + \mathbf{TKE}$ (donde debemos entender que dicha nomenclatura incluye cualquiera de las posibilidades $\mathbf{TK1} + \mathbf{ATKE}$, $\mathbf{TK1} + \mathbf{ATKE}^*$, $\mathbf{ATK1} + \mathbf{TKE}$, $\mathbf{ATK1} + \mathbf{TKE}^*$). Es posible escribir esquemáticamente:

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{NTK}(\gamma_1) \equiv \mathbf{TK1} + \mathbf{TKE}$$

Explotando el estudio ejercido con anterioridad, se cumple la siguiente relación entre las energías de las distintas soluciones halladas en el modelo

$$\mathcal{E}[\mathbf{NTK}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TK1}] + \mathcal{E}[\mathbf{TKE}]$$

que es la *regla de suma*. Como ya ha sido comentado fue un resultado intuitivo mediante el empleo de cálculo numérico [90], observada en el caso particular $\sigma = \frac{1}{2}$ [134] y demostrada analíticamente para cualquier rango del modelo MSTB [77] finalmente. Los kinks **TKE** son las soluciones de mínima energía en el sector topológico de modo que deben ser estables.

Como ya fue advertido, el conjunto de todas las soluciones convergen en los puntos focales. El flujo de trayectorias sobre el plano elíptico en dichos puntos viene dado por

$$\frac{du}{dv} = \pm e^{2\sigma(1-\sigma^2)\gamma_1}$$

lo cual implica sobre el plano cartesiano el resultado

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \pm \frac{2e^{\sigma(1-\sigma^2)\gamma_1}}{1 - e^{2\sigma(1-\sigma^2)\gamma_1}} = \text{tg } \theta$$

inspirando una nueva parametrización basada en la magnitud θ que puede ser interpretada como el ángulo de incidencia de la órbita particular respecto del eje $O\phi_1$ a través del punto focal (véase figura 1.12). Por ello, junto a la parametrización natural asociada al valor de γ_1 , podemos usar aquella más geométrica basada en el ángulo θ . Sobre esta última parametrización podemos equiparar la variedad de las soluciones kinks halladas en este modelo con el de geodésicas cerradas sobre la esfera previa identificación de las soluciones **TKE**. Es, entonces, la aplicación de la teoría de Morse la que permite aclarar la estabilidad de la variedad de kinks [94, 95, 78]. Se puede concluir que las soluciones que atraviesan los focos son inestables. Entonces, las soluciones no topológicas $\mathbf{NTK}(\gamma_1)$ son inestables.

FASE II: $\sigma^2 \geq 1$. Esta situación es mucho más simple que la anterior. El estudio en tales circunstancias arroja la presencia de una sola solución de tipo kink. De toda la fauna de soluciones descritas en la fase I sólo sobrevive el **TK1**, que sigue la expresión (1.47) y que es ahora estable.

1.4 Sobre el estudio de kinks

Una vez que hemos descrito la noción de soluciones de tipo kink incorporadas en la teoría de campos escalares de (1+1) dimensiones, junto al conocimiento adquirido en determinados modelos presentes en la literatura, introduciremos los diversos procedimientos de trabajo, que serán aplicados a lo largo de esta memoria, en el empeño de identificar las soluciones kinks de un sistema físico. En principio habríamos de emprender la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden (1). Las técnicas que describiremos en las siguientes secciones tienen

como virtud transformar el problema en la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden. En particular indagaremos la presencia de soluciones *kinks* en el seno de sistemas físicos naturales con un mundo interno bidimensional \mathbb{R}^2 . El campo escalar estará constituido por dos componentes reales que, por simplicidad, agruparemos en un campo escalar complejo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$.

1.4.1 Método de órbitas prueba.

Como ya fue advertido para el caso de trabajar con un campo escalar de una sola componente, el análisis es siempre abordable vía cuadraturas, pero para un número mayor de dimensiones del espacio interno, como es el caso $N = 2$, el trabajo no siempre es fructífero e inabordable en la mayor parte de los supuestos. Rajaraman propone, en tales casos, el uso de una técnica que denomina de *órbitas prueba*, consistente en el ensayo de una expresión $f(\phi_1, \phi_2) = 0$ que relaciona las componentes del campo ϕ sobre las ecuaciones diferenciales hasta hallar una que sea compatible con éstas. Es, por ello, que mediante la relación sugerida $f(\phi_1, \phi_2) = 0$ debe identificarse (de forma milagrosa) alguna de las trayectorias del modelo con el objeto de encontrar una información válida. Se trata en el fondo de tantear en busca de una órbita para luego integrar una ecuación dependiente de un sólo campo. Este proceso es el único aplicable de forma genérica y sigue siendo explotado hasta hoy, como puede comprobarse en los trabajos recientes [7, 26, 14, 17, 18], siendo incluso generalizado a teorías gauge [56]. En este texto esta técnica será utilizada de forma particular para identificar soluciones singulares.

1.4.2 De sistemas completamente integrables: Modelos de Liouville.

La doctrina que hemos propugnado en la introducción de esta sección es la de intentar trasladar el estudio de soluciones kink al análisis de ecuaciones diferenciales de primer orden. Este planteamiento se obtiene directamente en modelos para los cuales el sistema mecánico asociado es completamente integrable. Existen, entonces, tantas integrales primeras como grados de libertad, y éstas conforman el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden anunciado. Las soluciones kinks verifican tales relaciones para valores concretos de las integrales primeras. Sin embargo, este rédito no garantiza la obtención de los kinks. Como caso particular en el que el resultado es positivo podemos encontrar los modelos de Liouville. En la base de los cálculos posteriormente mostrados, cabe resaltar el papel representado por el uso de sistemas de coordenadas curvilíneas sobre el mundo interno \mathbb{R}^2 . Por tal concepto se entiende una colección de funciones $\xi_1, \xi_2 \in C^h(U)$ que cumplen los siguientes dos

requisitos: las funciones ξ_1, ξ_2 separan puntos en el plano interno y para cada punto $a \in \mathbb{R}^2$, las $d_a \xi_1$ y $d_a \xi_2 \in \mathbb{R}^{2*}$ son linealmente independientes. Con ello se pretende la separación en variables de las ecuaciones dinámicas, vía la teoría de Hamilton-Jacobi. En tal línea argumental se produjeron una gran cantidad de estudios en el ámbito de la mecánica clásica de partículas, que permitió identificar una enorme cantidad de sistemas integrables en el sentido de Liouville. Sobre el plano se determinó la presencia de cuatro bloques de sistemas mecánicos separables Hamilton-Jacobi mediante el uso de sistemas de coordenadas específicos y que históricamente se dieron en llamar *modelos de Liouville*. Fueron clasificados como tipo I, los modelos separables mediante uso de coordenadas elípticas; tipo III, aquellos modelos separables en coordenadas parabólicas; el tipo II, los separables en coordenadas polares y al tipo IV pertenecen los separables en cartesianas [87, 109]. Trasladaremos este estudio a la teoría de campos (legitimados por el símil mecánico¹¹) asumiendo la siguiente definición:

Definición 1.6: *Un modelo físico en el ámbito de la teoría de campos en (1+1) dimensiones espacio-temporales será denominado de Liouville de tipo I, II, III o IV si su sistema mecánico asociado (a la búsqueda de soluciones estáticas) es de Liouville de ese tipo.*

1.4.3 De los modelos presupersimétricos:

Uno de los métodos que ha llegado a ser más fecundo en el estudio de soluciones kinks asociados a una teoría de campos con un espacio interno bidimensional está basado en el tratamiento del sector bosónico de una teoría supersimétrica, la cual presenta un potencial (como ya fue advertido) expresable en este ámbito como

$$U(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right)^2 \quad (1.51)$$

de modo que el funcional energía viene detallada en la forma

$$\mathcal{E}[\phi_1, \phi_2] = \int dx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\phi^1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\phi^2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right)^2 \right] \quad (1.52)$$

o bien, sobre el plano complejo

$$\mathcal{E}[\phi, \phi^*] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\phi^*}{dx} \frac{d\phi}{dx} - 2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \frac{\partial W}{\partial \phi^*} \right\} \quad (1.53)$$

¹¹Ha de ser advertido que a lo largo de esta memoria es usado de forma implícita el símil mecánico. Con esta observación tratamos de evitar las continuas referencias a dicho recurso que sobrecarguen innecesariamente el texto.

la cual admite como integral primera la expresión

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\phi^1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\phi^2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right)^2 \right] \quad (1.54)$$

En tal marco es posible atenuar la complejidad que constituye el problema de identificar la variedad de kinks mediante las ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden (1.11), que en este caso son

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi^1}{dx^2} = \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} + \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} \\ \frac{d^2\phi^2}{dx^2} = \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} + \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2 \partial \phi^2} \end{cases} \quad (1.55)$$

al que resulta de resolver las ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden [26, 14, 17, 18] establecidas mediante la saturación de la cota de Bogomolny [23]. El argumento es sencillo: partiendo de un superpotencial $W(\phi)$, podemos escribir la energía como la suma de dos términos semidefinidos positivos $\mathcal{E}[\phi] = \mathcal{E}_1[\phi] + |T|$, siendo

$$\mathcal{E}_1[\phi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi^1}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right)^2 + \left(\frac{d\phi^2}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right)^2 \right]$$

mientras que

$$|T| = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\phi^1}{dx} \frac{\partial W}{\partial \phi^1} + \frac{d\phi^2}{dx} \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right) \quad (1.56)$$

El comportamiento del superpotencial $W[\phi]$ fija el conjunto de ecuaciones diferenciales que podemos utilizar. Si asumimos que el superpotencial es una función suave $W[\phi] \in C^1(\mathbb{C})$, el valor del segundo sumando $|T|$ queda fijado por el sector topológico en el que tratamos de obtener las soluciones $\phi(x)$

$$\begin{aligned} |T| &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^1} d\phi^1 + \frac{\partial W}{\partial \phi^2} d\phi^2 \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dW(\phi^1, \phi^2) = \\ &= W[\phi^1(\infty), \phi^2(\infty)] - W[\phi^1(-\infty), \phi^2(-\infty)] \end{aligned}$$

de modo que el principio de estacionariedad del funcional acción $\mathcal{E}[\phi]$ (desde el punto de vista mecánico) viene a cumplirse cuando el término semidefinido positivo $\mathcal{E}_1[\phi]$ adopte el valor nulo. Es, por ello, que pueden existir soluciones asociadas al sistema físico sometidas a las ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{d\phi^1}{dx} = \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \quad \frac{d\phi^2}{dx} = \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \quad (1.57)$$

que presentan una energía $|T|$. El análisis de las ecuaciones (1.57) es más sencillo que el de (1.55). Este método es explotado en diversos trabajos [7, 26, 100, 14, 17, 18]

conjugado con el de órbitas prueba. No queremos ser tajantes como Bazeia et al. [17, 18] que aseguran: “*This is the price one has to pay, although we got a large class of systems wich can be investigated in a simpler way*”. En el capítulo siguiente introduciremos técnicas fructíferas basadas en el concepto de integrabilidad del sistema físico.

Hemos de completar el listado de ecuaciones diferenciales de primer orden que puede generar el procedimiento descrito, eligiendo distintas elecciones de signos en la determinación del funcional $\mathcal{E}[\phi]$. Podríamos haber escrito $\mathcal{E}[\phi] = \mathcal{E}'_1[\phi] + |T'|$, siendo

$$\mathcal{E}'_1[\phi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi^1}{dx} + \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right)^2 + \left(\frac{d\phi^2}{dx} + \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right)^2 \right]$$

mientras el segundo sumando quedaría expresado como

$$|T'| = - \{ W[\phi^1(\infty), \phi^2(\infty)] - W[\phi^1(-\infty), \phi^2(-\infty)] \}$$

resultando soluciones del sistema determinadas por las ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{d\phi^1}{dx} = - \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \quad \frac{d\phi^2}{dx} = - \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \quad (1.58)$$

las cuales podrían ser justificadas de forma paralela aludiendo sobre las ecuaciones (1.57) la invariancia por paridad de la coordenada espacial. En realidad si (1.57) proporcionan soluciones kinks, (1.58) nos reporta sus antikinks, en tal modo que la energía $\mathcal{E}[\phi] = |T'|$ de estas soluciones permanece siempre positiva.

Otras elecciones novedosas pueden ser adoptadas en la forma de reescribir la energía $\mathcal{E}[\phi]$, como la indicada por la suma $\mathcal{E}[\phi] = \mathcal{E}''_1[\phi] + |T''|$, donde

$$\mathcal{E}''_1[\phi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi^1}{dx} + \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right)^2 + \left(\frac{d\phi^2}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right)^2 \right]$$

mientras el segundo sumando quedaría expresado como

$$\begin{aligned} |T''| &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^1} d\phi^1 - \frac{\partial W}{\partial \phi^2} d\phi^2 \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dW(\phi^1, -\phi^2) = \\ &= W[\phi^1(\infty), -\phi^2(\infty)] - W[\phi^1(-\infty), -\phi^2(-\infty)] \end{aligned}$$

lo que se traduce en la aparición de las condiciones

$$\frac{d\phi^1}{dx} = \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \quad \frac{d\phi^2}{dx} = - \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \quad (1.59)$$

como método para distinguir las soluciones kinks. El uso de la invariancia por paridad del parámetro x arroja las mismas ecuaciones donde los signos son alternados. El conjunto de todas las ecuaciones diferenciales pueden registrarse en la fórmula

$$\frac{d\phi^1}{dx} = \pm \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \quad \frac{d\phi^2}{dx} = \pm \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \quad (1.60)$$

donde pueden elegirse arbitrariamente los signos. Una justificación más elegante sobre las cuestiones introducidas puede ser sintetizada por la afirmación de que el mismo potencial clásico puede ser generado por distintos superpotenciales. En particular cualquier elección de los superpotenciales $W(\phi^1, \phi^2)$, $-W(\phi^1, \phi^2)$, $W(\phi^1, -\phi^2)$ o $W(-\phi^1, \phi^2)$ genera el mismo potencial $U(\phi^1, \phi^2)$. Substituyendo cada uno de estos superpotenciales sobre las condiciones (1.57) quedan reproducidas aquellas mostradas en (1.60). La energía de las soluciones halladas es obtenida en cualquier caso estimando $|T|$, esto es, la diferencia de los valores asintóticos adoptados por el superpotencial pertinente.

Existe una gran relación entre los dos últimos procedimientos descritos, es decir, entre el concepto de completa integrabilidad y carácter presupersimétrico. La conexión queda manifestada vía la posibilidad que ofrecen las integrales primeras del modelo completamente integrable de generar sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden; o en otro sentido, la alternativa de generar distintos sistemas de ecuaciones ofrece la posibilidad de encontrar distintos superpotenciales asociados a un mismo modelo físico.

Capítulo 2

Kinks En Modelos De Liouville I

2.1 Introducción

En el capítulo precedente quedaron mostradas las propiedades de un peculiar modelo estudiado en la literatura, denominado MSTB. En el presente capítulo se advierte y enfatiza el hecho de que el modelo MSTB no es un sistema aislado con propiedades que le son únicas, sino que pertenece a una familia de modelos que cumplen propiedades análogas [3]. En realidad es el caso que, dentro de los modelos de Liouville de Tipo I, presenta el más simple de los escenarios de ruptura de simetría posible. Siguiendo la clasificación indicada por Liouville [87], en este bloque de modelos físicos son englobados aquellos cuyo sistema mecánico asociado es resoluble (vía la teoría de Hamilton-Jacobi) mediante el uso de un sistema de coordenadas elípticas. Iniciaremos el capítulo con la descripción de las propiedades genéricas de los modelos de este tipo, que sugiere la introducción de importantes conceptos como los de *solución singular*, *curvas separatrices* o *celdas*. Tras ello, se presentan dos nuevos sistemas físicos, el primero que incorpora un potencial polinómico de grado sexto y el segundo de grado octavo. Este último incorpora en su estructura las propiedades generales de cualquier otro modelo analizable por este procedimiento. Para designar de forma simple esta clase de modelos optaremos por detallar el tipo al que pertenece según la clasificación de Liouville, junto con una marca numérica que describa los parámetros asociados al modelo. Advertimos que esta nomenclatura no identifica unívocamente los modelos que de forma genérica se pudieran introducir pero sí distinguen los casos particulares que trataremos en esta memoria. En las postrimerías del presente capítulo se afronta la clasificación general de las soluciones kinks presentes en los modelos de Liouville de tipo I, así como sus reglas de suma.

2.2 De las coordenadas elípticas.

Asumiendo la definición de Euler [131], el cambio a coordenadas elípticas vendrá asociado al difeomorfismo

$$\begin{aligned} \xi_{\Omega} : \mathbb{E}^2 \equiv [\Omega, \infty) \times [-\Omega, \Omega] &\longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_2 \\ (u, v) &\longrightarrow (\phi_1, \phi_2) \end{aligned}$$

sobre el que, vía pull-back o imagen inversa, se verifica:

$$\xi_{\Omega}^*(\phi_1) = \frac{1}{\Omega} uv \qquad \xi_{\Omega}^*(\phi_2) = \frac{1}{\Omega} \sqrt{(u^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - v^2)} \quad (2.1)$$

El espacio elíptico es identificado por una caja bidimensional de altura infinita que denotamos por \mathbb{E}^2 , puesto que el rango de definición de las nuevas coordenadas es $u \in [\Omega, \infty)$ y $v \in [-\Omega, \Omega]$. El difeomorfismo (2.1) genera el semiplano interno $\phi_2 \geq 0$. Precisamos dos copias de (2.1) para restaurar todo el plano interno, una de ellas ξ_{Ω}^+ , que dé cuenta del semiplano $\phi_2 \geq 0$, y la otra ξ_{Ω}^- que lo haga para $\phi_2 \leq 0$. La recomposición de la información sobre las variables originales debe obtenerse compatibilizando las dos copias, empleando argumentos de continuidad sobre el campo ϕ y sus derivadas. Ω es un parámetro libre, lo que convierte (2.1) en la definición de una familia de sistemas de coordenadas. Las curvas isocoordenadas en el espacio elíptico (presentadas en la figura 2.1)

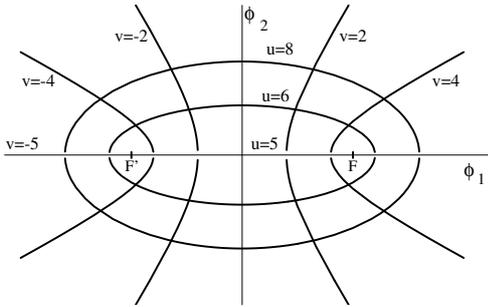


Figura 2.1. *Coordenadas elípticas.*

en elipsoes expresadas por $\frac{\phi_1^2}{u^2} + \frac{\phi_2^2}{u^2 - \Omega^2} = 1$ cuando queda fijado el valor de la coordenada u e hipérbolas dadas por $\frac{\phi_1^2}{v^2} - \frac{\phi_2^2}{\Omega^2 - v^2} = 1$ al fijar el de v . Ambas familias de curvas son homofocales. Sobre el plano cartesiano, los focos se sitúan en los puntos $F, F' = (\phi_1, \phi_2) = (\pm\Omega, 0)$, mientras que sobre el espacio elíptico \mathbb{E}^2 lo hacen en $F, F' = (v, u) = (\pm\Omega, \Omega)$. El valor de Ω especifica las excentricidades de las cónicas coordenantes.

Una vez considerados estos preliminares, asumamos el estudio de un sistema físico natural con un espacio interno bidimensional $N = 2$ con métrica euclídea que presenta un término potencial cuyas interacciones entre los campos ϕ_i dependen de una serie de parámetros, que reagrupamos en la magnitud $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. El término cinético de la expresión (1.39), bajo el sistema de coordenadas elípticas, es transformado como:

$$\xi_{\Omega}^* T(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$$

El comportamiento del término potencial es quien determina si el modelo en consideración pertenece a la categoría de Liouville de Tipo I. Por ello:

Definición 2.1 [109]: *Diremos que un sistema físico natural es de Liouville Tipo I si se verifica que*

$$U(u, v) = \xi_{\Omega}^* U(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{u^2 - v^2} (f(u) + g(v)) \quad (2.2)$$

donde $f(u)$ y $g(v)$ son funciones arbitrarias de las coordenadas elípticas.

El funcional energía (1.39) restringida a estos modelos es escrita sobre el plano elíptico \mathbb{E}^2 por:

$$\xi_{\Omega}^* \mathcal{E}[\phi_1, \phi_2] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{f(u) + g(v)}{u^2 - v^2} \right\} \quad (2.3)$$

La expresión (2.2), de modo genérico, incluirá singularidades en los puntos focales F y F' , hecho que puede constatar, teniendo en cuenta que el denominador de la expresión (2.2) para tales puntos se anula. Sin embargo, determinadas elecciones de las funciones $f(u)$ y $g(v)$ dotan de buen comportamiento al término potencial sobre todo el plano interno.

Las raíces de las funciones $f(u)$ y $g(v)$ juegan un papel fundamental en la dinámica del modelo físico. En tal modo, denotaremos por \tilde{u}_i y \tilde{v}_i los valores que cumplen, respectivamente, $f(u) = 0$ y $g(v) = 0$ ordenados mediante el subíndice i por orden creciente de su magnitud. Podemos introducir los siguientes conceptos:

Definición 2.2: *Llamaremos celda al paralelogramo abierto del espacio elíptico \mathbb{E}^2 determinado como $(\tilde{u}_i, \tilde{u}_{i+1}) \times (\tilde{v}_j, \tilde{v}_{j+1})$ y que denotaremos como P_{ij} .*

Por argumentos energéticos basados en el símil mecánico, que serán indicados posteriormente, las soluciones kinks quedan restringidas al paralelogramo $P = \cup_{i,j} \bar{P}_{ij}$. A lo largo de esta sección nos referiremos como *separatrices de tipo I* a cada uno de los lados de las celdas del modelo, es decir, el lugar geométrico sobre P determinado como ∂P_{ij} .

Definición 2.3: *Llamaremos retículo $Ret(P)$ al conjunto de separatrices de tipo I, es decir, $Ret(P) = \cup_{i,j} \partial P_{ij}$. El retículo puede ser entendido paralelamente por $Ret(P) = P_u^g \cup P_v^g$, donde dichos subconjuntos reúnen curvas según la definición $P_u^g = \{(u, v) \in \mathbb{E}^2 / f(u) = 0\}$ y $P_v^g = \{(u, v) \in \mathbb{E}^2 / g(v) = 0\}$.*

Estos conceptos traducidos en el plano cartesiano \mathbb{R}^2 son totalmente análogos, con la única peculiaridad de que el retículo $\xi^{*-1}(Ret(P))$ está formado por elipses $\frac{\phi_1^2}{\tilde{u}_i^2} + \frac{\phi_2^2}{\tilde{u}_i^2 - \Omega^2} = 1$ e hipérbolas $\frac{\phi_1^2}{\tilde{v}_i^2} - \frac{\phi_2^2}{\Omega^2 - \tilde{v}_i^2} = 1$, mientras que las celdas adquieren un carácter curvilíneo. Otro hecho a resaltar es que todos los puntos de vacío estarán

asentados sobre los vértices de las celdas. La afirmación recíproca no es cierta en general, no todos los vértices serán puntos de vacío.

Bajo el requisito (2.2) pueden ser identificadas dos integrales primeras o constantes del movimiento, de modo que el sistema mecánico asociado es completamente integrable. Sus expresiones, empleando el formalismo lagrangiano sobre el plano elíptico, se contemplan como

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - \frac{f(u) + g(v)}{u^2 - v^2} \quad (2.4)$$

que representa la energía mecánica, mientras que

$$I_2 = \frac{1}{2} (v^2 - u^2) \left[\frac{\Omega^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{u^2 - \Omega^2}{\Omega^2 - v^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] - \frac{1}{u^2 - v^2} [(u^2 - \Omega^2)g(v) - (\Omega^2 - v^2)f(u)] \quad (2.5)$$

correspondiente a la segunda integral primera puede ser interpretada como un momento angular generalizado, vía el pull-back a variables cartesianas.

2.3 Descripción de la teoría de Hamilton-Jacobi

Con el propósito de usar la teoría de Hamilton-Jacobi sobre el esquema trazado, introduciremos el formalismo hamiltoniano, definiendo en primer lugar los momentos generalizados

$$p_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{du}{dx} \right)} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} \frac{du}{dx} \quad p_v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dv}{dx} \right)} = \frac{u^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \frac{dv}{dx}$$

El hamiltoniano puede ser expresado como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{u^2 - v^2} (h_u + h_v)$$

siendo

$$h_u = \frac{1}{2} (u^2 - \Omega^2) p_u^2 - f(u) \quad h_v = \frac{1}{2} (\Omega^2 - v^2) p_v^2 - g(v)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi (1.21), base de todo nuestro posterior estudio, viene apuntada para este tipo de modelos por la expresión

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} + \mathcal{H} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial v}, u, v \right) = 0 \quad (2.6)$$

tal que *función generatriz* \mathcal{J} posee la información del sistema físico. Ensayando la forma separada

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_x(x) + \mathcal{J}_u(u) + \mathcal{J}_v(v)$$

sobre (2.6), concluimos que debe verificarse

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_x &= -Ex \\ \mathcal{J}_u &= \text{Sign}(u') \int du \sqrt{\frac{2(F + Eu^2 + f(u))}{u^2 - \Omega^2}} \\ \mathcal{J}_v &= \text{Sign}(v') \int dv \sqrt{\frac{2(-F - Ev^2 + g(v))}{\Omega^2 - v^2}}\end{aligned}$$

lo que permite calcular una expresión explícita de la función generatriz \mathcal{J} . Hemos hecho uso en el argumento de la función signo del convenio $u' = \frac{du}{dx}$ y $v' = \frac{dv}{dx}$ con el propósito de no recargar innecesariamente las fórmulas. Este criterio será asumido a lo largo de todo el texto. Las magnitudes E y F permanecen constantes en la evolución del sistema, por lo que constituyen integrales primeras del sistema que pueden ser escritas en función de I_1 y I_2 ; $E = I_1$, $F = -\Omega^2 I_1 - I_2$. Siguiendo las directrices de la teoría, las trayectorias son fijadas por la expresión

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial F} = \gamma_1 = \text{cte} \quad (2.7)$$

mientras que la dependencia de las soluciones respecto de la coordenada espacial queda dada por

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial E} = \gamma_2 = \text{cte} \quad (2.8)$$

Las soluciones de tipo kink (sometidas a las condiciones asintóticas (1.13) y (1.14)) son caracterizadas por los valores $E = F = 0$. En este caso, las ecuaciones (2.7) y (2.8) quedan determinadas por las expresiones:

$$\text{Sign}(u') \int \frac{du}{\sqrt{(u^2 - \Omega^2)f(u)}} - \text{Sign}(v') \int \frac{dv}{\sqrt{(\Omega^2 - v^2)g(v)}} = \sqrt{2}\gamma_1 \quad (2.9)$$

$$\text{Sign}(u') \int \frac{u^2 du}{\sqrt{(u^2 - \Omega^2)f(u)}} - \text{Sign}(v') \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{(\Omega^2 - v^2)g(v)}} = \sqrt{2}(x + \gamma_2) \quad (2.10)$$

La condición (2.9) nos proporciona las trayectorias de las soluciones kinks, caracterizando cada una de ellas por el valor de γ_1 . Ello nos da un procedimiento para identificar cada una de las soluciones presentes en un determinado sector del espacio de configuración exhibido por el sistema físico, al que nos referiremos como *parametrización Hamilton-Jacobi o natural*. Dada la ambigüedad de las coordenadas elípticas, debe ser advertido que dicha identificación es unívoca sobre $\mathcal{C}_K/\mathbb{Z}_2$. En las afirmaciones anteriores hemos obviado el papel del parámetro γ_2 como registro de las soluciones kinks, con el argumento de que representa el modo cero atribuido a la simetría respecto de traslaciones espaciales de las que goza el sistema. La estructura del espacio de moduli definido en (1.5) engloba todas las soluciones relacionadas por tal simetría en un mismo elemento.

2.4 Propiedades generales

De forma totalmente genérica, los modelos de Liouville Tipo I comparten una serie de propiedades, que iremos introduciendo en los siguientes párrafos. Así,

Definición 2.4: *Aquella solución asociada a un modelo físico natural de Liouville de Tipo I parametrizada por un valor infinito de la constante γ_1 introducida en la relación (2.9) recibe el nombre de solución singular.*

Proposición 2.1: *Los modelos de Liouville de Tipo I admiten soluciones de tipo kink singulares, cuya órbita se encuentra asentada sobre el retículo $\text{Ret}(P)$.*

Demostración: Una solución kink verifica las ecuaciones diferenciales marcadas por $I_1 = 0$ y $I_2 = 0$. Una hipotética solución establecida sobre el retículo detenta trayectorias descritas por $u = \tilde{u}_i$ o $v = \tilde{v}_i$ sobre el plano elíptico. Estas últimas relaciones deben ser compatibles con las condiciones sobre las integrales primeras indicadas arriba. Usaremos en la demostración de esta proposición las separatrices caracterizadas por $u = \tilde{u}_i$ (los mismos argumentos serían usados para completar la demostración sobre $v = \tilde{v}_i$). Introduciendo tal relación en (2.4) y (2.5) se consigue

$$\frac{1}{2} \frac{\tilde{u}_i^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - \frac{g(v)}{\tilde{u}_i^2 - v^2} = 0$$

y

$$(\Omega^2 - \tilde{u}_i^2) \left[\frac{1}{2} \frac{\tilde{u}_i^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - \frac{g(v)}{\tilde{u}_i^2 - v^2} \right] = 0$$

que resultan ser idénticas. Por todo ello, queda demostrado que $u = \tilde{u}_i$ corresponde a la órbita de alguna solución del modelo. Inspeccionando la expresión (2.9), es obvio que para esta particular trayectoria el primer término presenta un denominador nulo, de modo que se obliga a que la constante γ_1 sea infinita, esto es, estamos tratando con una solución singular. C.Q.D.

Reescribiendo la expresión (2.9), podemos encontrar el flujo de las trayectorias sobre el plano elíptico \mathbb{E}^2 en el modo

$$\Phi = \frac{du}{dv} = \frac{\text{Sign}(u') \sqrt{(u^2 - \Omega^2)f(u)}}{\text{Sign}(v') \sqrt{(\Omega^2 - v^2)g(v)}}$$

o bien, si recurrimos al plano ϕ_1 - ϕ_2 :

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \frac{\Omega(\Phi u + v)}{\phi_2(\Phi v + u)} - \frac{\phi_1}{\phi_2}$$

Otra importante magnitud atribuida a la solución $\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$ es su energía. Ésta viene determinada por el valor del funcional (1.39) sobre la que debemos introducir la expresión explícita de $\phi(x)$. En general, la energía depende

de la expresión que adopte la solución y a priori no es posible anunciar su valor sin el conocimiento detallado de la solución. Sin embargo, para las soluciones kinks en este tipo de modelos que estamos introduciendo aparece un interesante comportamiento. Veremos como la energía no depende de la forma explícita de la solución sino tan sólo de los nudos del retículo que queden conectados por $\phi(x)$. Introduciremos para ver esto dos operadores sobre el plano elíptico que llamaremos *proyectores de camino* π_u y π_v . Mediante estos operadores se quiere dar cuenta del camino proyectado sobre los ejes u y v que sigue la solución. No queremos reflejar la proyección usual como puede entenderse con el siguiente ejemplo: si una solución $(u(x), v(x))$ tiene un comportamiento monótono para ir desde un punto (u_0, v_0) hasta el punto (u_1, v_1) y luego regresa al punto de partida, la proyección usual \mathbf{P}_u daría como resultado el intervalo $[u_0, u_1]$, mientras que la proyección de camino π_u nos daría el camino $[u_0, u_1] \cup [u_1, u_0]$.

Para los modelos en estudio podemos enunciar:

Proposición 2.2: *La energía de las soluciones kink $\phi(x)$ de los modelos de Liouville de Tipo I es calculada mediante la expresión*

$$\mathcal{E}[\phi(x)] = \left| \int_{\pi_u(\xi^*\phi)} du \sqrt{\frac{2f(u)}{u^2 - \Omega^2}} \right| + \left| \int_{\pi_v(\xi^*\phi)} dv \sqrt{\frac{2g(v)}{\Omega^2 - v^2}} \right| \quad (2.11)$$

El cumplimiento de tal proposición tiene como consecuencia los siguientes hechos:

1. El valor de la energía depende de los puntos de vacío conectados y los tramos seguidos sobre el retículo $Ret(P)$ por la proyección de la trayectoria del kink. La energía no depende de los detalles de la solución.
2. La expresión (2.11) restringida a soluciones $\phi(x)$ con comportamiento monótono en la variable espacial puede reescribirse como

$$\mathcal{E}[\phi(x)] = \left| \int_{u(-\infty)}^{u(\infty)} du \sqrt{\frac{2f(u)}{u^2 - \Omega^2}} \right| + \left| \int_{v(-\infty)}^{v(\infty)} dv \sqrt{\frac{2g(v)}{\Omega^2 - v^2}} \right| \quad (2.12)$$

3. Si la proyección de camino para la órbita de cierta solución $\phi(x)$ es escrita como

$$\pi_u(\xi^*\phi) = \cup_{i=1}^n [u_i, u_{i+1}] \quad \pi_v(\xi^*\phi) = \cup_{i=1}^m [v_i, v_{i+1}] \quad (2.13)$$

el cálculo de la energía (2.11) es desarrollado por la igualdad

$$\mathcal{E}[\phi(x)] = \sum_i \left| \int_{u_i}^{u_{i+1}} du \sqrt{\frac{2f(u)}{u^2 - \Omega^2}} \right| + \sum_j \left| \int_{v_j}^{v_{j+1}} dv \sqrt{\frac{2g(v)}{\Omega^2 - v^2}} \right| \quad (2.14)$$

Se hace obvio que todas las soluciones o secuencias de soluciones que tengan la misma proyección de camino (2.13) tendrán la misma energía. Esta es la justificación de las conocidas *reglas de suma*.

Demostración: La teoría de Hamilton-Jacobi nos permitió interpretar la función generatriz como la integral indefinida de la densidad lagrangiana, la acción del sistema dinámico (véase tabla 1.1), lo cual coincide en el marco de la teoría de campos con la energía asociada a la solución cuando tal integral es considerada sobre el camino marcado por la órbita. Por ello, podemos afirmar que la energía de cualquier solución atiende a la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\phi(x)] &= \int_{\xi^*\phi} du \operatorname{Sign}(u') \sqrt{\frac{2(F + Eu^2 + f(u))}{u^2 - \Omega^2}} + \\ &+ \int_{\xi^*\phi} dv \operatorname{Sign}(v') \sqrt{\frac{2(-F - Ev^2 + g(v))}{\Omega^2 - v^2}} - Ex|_{\xi^*\phi} \end{aligned}$$

El segundo miembro está compuesto por sumandos que dependen de forma separada de las variables u y v , por lo que para soluciones kinks (con $E = F = 0$) la expresión anterior se convierte en (2.11). C.Q.D.

Proposición 2.3: *Un modelo de Liouville de tipo I es siempre presupersimétrico. La expresión que adquiere el superpotencial escrita en el plano elíptico \mathbb{E}^2 viene determinada por¹*

$$W(u, v) = \pm \int du \sqrt{\frac{2f(u)}{u^2 - \Omega^2}} \pm \int dv \sqrt{\frac{2g(v)}{\Omega^2 - v^2}} \quad (2.15)$$

precisamente, la función generatriz $\mathcal{J}(u, v, x)$ sopesada sobre las soluciones kinks, $E = F = 0$.

Demostración: Si sobre la condición (1.51) escrita en las variables elípticas

$$\frac{1}{2(u^2 - v^2)} \left\{ (u^2 - \Omega^2) \left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + (\Omega^2 - v^2) \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right\} = \frac{1}{u^2 - v^2} (f(u) + g(v))$$

es ensayada la forma separada $W(u, v) = W_1(u) + W_2(v)$ para el superpotencial, se concluye

$$\frac{dW_1}{du} = \pm \sqrt{\frac{2f(u)}{u^2 - \Omega^2}} \quad \frac{dW_2}{dv} = \pm \sqrt{\frac{2g(v)}{\Omega^2 - v^2}}$$

que nos traslada finalmente a la expresión (2.15). C.Q.D.

En la expresión (2.15) queda patente la presencia de cuatro superpotenciales. Es constatable que bajo este concepto podríamos haber introducido una definición más natural de los modelos de Liouville de Tipo I (que reemplazase la definición 2.1) en la forma:

¹Los signos de (2.15) pueden ser combinados arbitrariamente. Los signos globales del superpotencial tienen una interpretación en base a la invariancia de paridad sobre la variable espacial. Son los signos relativos los que introducen un nuevo comportamiento.

Definición 2.5: *Un sistema físico pertenece a los modelos de Liouville de Tipo I si admite un superpotencial expresado en la forma separada*

$$\xi^*W = W_1(u) + W_2(v) \quad \text{esto es} \quad \frac{\partial^2(\xi^*W)}{\partial u \partial v} = 0$$

o bien, en las variables originales

$$\phi^1\phi^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} - \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2 \partial \phi^2} \right) + (\phi^2\phi^2 - \phi^1\phi^1 + \Omega^2) \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} + \phi^2 \frac{\partial W}{\partial \phi^1} - \phi^1 \frac{\partial W}{\partial \phi^2} = 0$$

Las ecuaciones diferenciales de primer orden (1.60) que surgen del esquema supersimétrico son

$$\frac{du}{dx} = \pm \frac{\sqrt{2(u^2 - \Omega^2)f(u)}}{u^2 - v^2} \quad \frac{dv}{dx} = \pm \frac{\sqrt{2(\Omega^2 - v^2)g(v)}}{u^2 - v^2} \quad (2.16)$$

las cuales incorporan doble signos dado que consideramos al tiempo los dos superpotenciales mencionados arriba. Resulta de interés conocer si la información proporcionada por (2.16) es completa o sólo parcial. Por ello:

Proposición 2.4: *Dado un sistema físico de Liouville de Tipo I, las soluciones obtenidas a partir de las ecuaciones de primer orden (1.60) o (2.16) corresponden a todas las soluciones kinks presentes en el modelo.*

Demostración: Dada la presencia en los sistemas que estamos estudiando de las integrales primeras descritas por las expresiones (2.4) y (2.5), cualquier solución cumple las relaciones,

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 &= \frac{2(u^2 - \Omega^2) [-I_2 + I_1(u^2 - \Omega^2) + f(u)]}{(u^2 - v^2)^2} \\ \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 &= \frac{2(\Omega^2 - v^2) [I_2 + I_1(\Omega^2 - v^2) + g(v)]}{(u^2 - v^2)^2} \end{aligned}$$

que junto con las condiciones $I_1 = I_2 = 0$ (que caracterizan toda la variedad de soluciones kink), nos proporcionan,

$$\left(\frac{du}{dx} \right)^2 = \frac{2f(u)(u^2 - \Omega^2)}{(u^2 - v^2)^2} \quad \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{2g(v)(\Omega^2 - v^2)}{(u^2 - v^2)^2} \quad (2.17)$$

Es decir, las expresiones (2.16) aglutinan todas las soluciones pertenecientes al espacio de configuración \mathcal{C} . C.Q.D.

En este punto es conveniente resaltar el siguiente hecho: para adquirir toda la variedad de kinks \mathcal{C}_K hemos debido hacer uso de cuatro superpotenciales. Esto es, la información obtenida sobre la base de uno de ellos hubiese sido parcial. Las

integrales primeras (2.4) y (2.5) quedan reflejadas en el plano cartesiano por la expresión (1.54) para la energía, mientras que el segundo invariante es

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\phi^2 \frac{d\phi^1}{dx} - \phi^1 \frac{d\phi^2}{dx} \right)^2 - \Omega^2 \frac{d\phi^2}{dx} \frac{d\phi^1}{dx} - \left(\phi^2 \frac{\partial W}{\partial \phi^1} - \phi^1 \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right)^2 + \Omega^2 \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right]$$

el cual, introduciendo los momentos generalizados

$$\Pi_j = \frac{d\phi_j}{dx} + i \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \quad (2.18)$$

queda reducida a la forma:

$$I_2 = \frac{1}{2} [|\phi^2 \Pi_1 - \phi^1 \Pi_2|^2 - \Omega^2 |\Pi_2|^2]$$

La relación anterior implica la acción del cuadrado del momento angular asociado al momento generalizado junto al cuadrado de una traslación.

Por otra parte, la necesidad de dos superpotenciales podría verse desde las condiciones $I_1 = 0$ y $I_2 = 0$. Si trabajamos con un superpotencial llegaríamos a las expresiones naturales (1.60), junto con la nueva posibilidad

$$\frac{d\phi_i}{dx} = \pm (-1)^i \frac{\Omega^2 \frac{\partial W}{\partial \phi_i} - \epsilon^{ij} \phi_1 \phi_2 \frac{\partial W}{\partial \phi_j} - (\phi_1^2 - \phi_2^2) \frac{\partial W}{\partial \phi_i}}{\sqrt{(\Omega^2 - 2\Omega\phi_1 + \phi_1^2 + \phi_2^2)(\Omega^2 + 2\Omega\phi_1 + \phi_1^2 + \phi_2^2)}}$$

y puesto que el segundo miembro cumple las condiciones del teorema de Green vía la definición (2.5), la ecuación anterior podría adoptar la forma natural (1.60) sobre la expresión de un nuevo superpotencial \tilde{W} , indicado en la proposición 2.3.

2.5 Análisis del término potencial

La forma genérica del potencial de un modelo Liouville de Tipo I fue introducida en la expresión (2.2), advirtiendo que presentaba, por lo general, singularidades en los puntos focales. Dado que nuestro propósito reside en estudiar detalladamente las propiedades de posibles soluciones kinks, presentes en el sistema físico, es beneficioso considerar potenciales que sean semidefinidos positivos, preferentemente carentes de singularidades y en los que exista una estructura no trivial para la variedad de ceros \mathcal{M} que posibilite la presencia de un proceso de ruptura de simetría espontánea. En particular, enfocaremos nuestro estudio a potenciales que incluyan términos anarmónicos sobre los que introduciremos constantes de acoplamiento adecuadamente. Entonces,

Proposición 2.5: *La familia $(n_{max} + 2)$ -paramétrica de sistemas físicos que incluyen el término potencial correspondiente a la expresión polinómica de grado*

$2n_{max}$ sobre los campos ϕ_1 y ϕ_2 dada como

$$U(\phi_1, \phi_2) = \sum_{n=0}^{n_{max}} b_n \prod_{i=1}^n \left\{ \phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\Omega\phi_1 \cos \frac{i\pi}{n+1} + \Omega^2 \right\} \quad (2.19)$$

pertenece al Tipo I de los modelos de Liouville.

Demostración: Reescribiendo la expresión (2.19) en variables elípticas sobre el plano interno y tomando $b_n = \frac{a_n}{\Omega^{2n}}$, se obtiene

$$\xi_{\Omega}^* U = \sum_{n=0}^{n_{max}} a_n \prod_{i=1}^n \left(u^2 + v^2 - 2uv \cos \frac{i\pi}{n+1} \right)$$

que se transforma, usando la identidad (2.22) de [131], en la simple expresión

$$\xi_{\Omega}^* U = \frac{1}{u^2 - v^2} \sum_{n=0}^{n_{max}} a_n (u^{2n+2} - v^{2n+2}) \quad (2.20)$$

que muestra bien a las claras que se trata de un potencial de Tipo I. C.Q.D.

Adecuando los valores de los a_n , el potencial (2.20) puede ser elegido semidefinido positivo, teniendo en cuenta que las coordenadas verifican $u \geq v$. Así, por ejemplo, los potenciales cuártico y sexto más generales que pueden ser tratados mediante este procedimiento, se rigen por las expresiones

$$\begin{aligned} U(\phi_1, \phi_2) &= A(\phi_1^2 + \phi_2^2 \pm a^2)^2 + \beta_1\phi_1^2 + \beta_2\phi_2^2 \\ U(\phi_1, \phi_2) &= \beta_3(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \Omega^2)^2(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \beta) - 2\Omega^2\beta_3\phi_2^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \\ &\quad + (\beta_2 - \beta_3\Omega^2(\Omega^2 + \beta_1))\phi_1^2 + \beta_2\phi_2^2 + \beta_0 \end{aligned}$$

con $A, a, \beta, \beta_i, B_i, \kappa \in \mathbb{R}$.

Si el sistema físico es caracterizado por la presencia de (2.19) como término potencial, las integrales primeras (2.4) y (2.5) pueden ser reescritas como

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 - \sum_{n=0}^{n_{max}} b_n \prod_{i=1}^n \left\{ \phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\Omega\phi_1 \cos \frac{i\pi}{n+1} + \Omega^2 \right\}$$

y

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 - \Omega^2 \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 \right\} + \sum_{n=0}^{n_{max}} b_n \left\{ -\phi_1^2 \prod_{i=1}^{n-1} (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2\Omega\phi_1 \cos \frac{i\pi}{n} + \Omega^2) + \Omega^2 \prod_{i=1}^n \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\Omega\phi_1 \cos \frac{i\pi}{n+1} + \Omega^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

El término potencial presentado en la proposición 2.5 resulta excesivamente genérico para nuestras pretensiones. Dado que las soluciones kinks vienen caracterizadas por la conexión entre distintos puntos mínimos en los que el potencial

adopta el valor nulo, restringimos la expresión (2.20) a aquella en la que los ceros del potencial son obtenidos de la forma más eficaz posible. En este capítulo nos centraremos en sistemas físicos cuyo término potencial puede ser expresado en la forma

$$\xi_{\Omega}^* U = \frac{A^2}{u^2 - v^2} \left[u^{2\alpha_0} (u^2 - \Omega^2) \prod_{i=1}^n (u^2 - \sigma_i^2)^{2\alpha_i} + v^{2\alpha_0} (\Omega^2 - v^2) \prod_{i=1}^n (v^2 - \sigma_i^2)^{2\alpha_i} \right] \quad (2.21)$$

donde sin pérdida de generalidad supondremos que

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{r-1} < \sigma_r = \Omega < \sigma_{r+1} < \dots < \sigma_n$$

La nomenclatura que utilizaremos para etiquetar los sistemas físicos con potencial (2.21) especificará todos los parámetros del sistema, empleando el formalismo $I[(\sigma_1, \dots, \sigma_r), (\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)][\alpha_0][(\alpha_1, \dots, \alpha_r), (\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)]$. Será conveniente distinguir varios casos marcados por los valores adoptados por los parámetros α_0 y α_r . Entonces, consideraremos

- CASO A:** $\alpha_0 = \alpha_r = 0$
- CASO B:** $\alpha_0 \geq 1; \alpha_r = 0$
- CASO C:** $\alpha_0 = 0; \alpha_r \geq 1$
- CASO D:** $\alpha_0 \geq 1; \alpha_r \geq 1$

Si sobre las restricciones precedentes imponemos que los parámetros no prefijados sean iguales a la unidad, esto es, $\alpha_i = 1$ ($i \neq 0, r$), los modelos obtenidos tendrán como referencia, respectivamente, las marcas **A1**, **B1**, **C1** y **D1**.

Habiendo enfocado nuestro estudio sobre sistemas físicos que son regidos por el potencial (2.21), analizaremos la estructura de la variedad \mathcal{M} , que puede determinar un proceso de ruptura de simetría. Las separatrices que presentan estos modelos pueden ser agrupados en los siguientes conjuntos:

$$H = \left\{ (\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{\phi_2^2}{\Omega^2 - \sigma_i^2} - \frac{\phi_1^2}{\sigma_i^2} = 1 \quad \text{o} \quad v = \sigma_i; \quad 1 \leq i < r \right\} \subset P_v^g$$

que denominaremos *conjunto de hipérbolas separatrices*,

$$E = \left\{ (\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{\phi_2^2}{\sigma_i^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_1^2}{\sigma_i^2} = 1 \quad \text{o} \quad u = \sigma_i; \quad i > r \right\} \subset P_u^g$$

que será el *conjunto de elipses separatrices*,

$$X = \left\{ (\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \phi_2 = 0 \quad \text{o} \quad u = \Omega \cup v = \pm\Omega \right\}$$

esto es, el eje OX, el cual surge dentro del esquema por las elipses e hipérbolas que degeneran a tal recta, y

$$Y = \left\{ (\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \phi_1 = 0 \quad \text{o} \quad v = 0 \right\} \in P_v^g$$

el eje OY, donde degeneran dos ramas hiperbólicas coordenantes. Se cumple que $\xi^* \text{Ret}(P) = H \cup E \cup X \cup Y$.

Proposición 2.6: *La variedad de ceros \mathcal{M} para sistemas de Liouville de Tipo I regidos por el potencial (2.21) viene determinada como*

CASO A	$\alpha_0 = \alpha_r = 0$	$\mathcal{M} = (H \cap E) \cup (H \cap X) \cup (E \cap X)$ $\text{card}(\mathcal{M}) = 4(r - \frac{1}{2})(n - r + \frac{1}{2}) - 1$
CASO B	$\alpha_0 > 0; \alpha_r = 0$	$\mathcal{M} = (H \cap E) \cup (H \cap X) \cup (E \cap X) \cup (E \cap Y) \cup (X \cap Y)$ $\text{card}(\mathcal{M}) = 4r(n - r + \frac{1}{2}) - 1$
CASO C	$\alpha_0 = 0; \alpha_r > 0$	$\mathcal{M} = (H \cap E) \cup (H \cap X) \cup (E \cap X) \cup \{F\} \cup \{F'\}$ $\text{card}(\mathcal{M}) = 4(r - \frac{1}{2})(n - r + \frac{1}{2}) + 1$
CASO D	$\alpha_0 > 0; \alpha_r > 0$	$\mathcal{M} = (H \cap E) \cup (H \cap X) \cup (E \cap X) \cup (E \cap Y) \cup (X \cap Y) \cup \{F\} \cup \{F'\}$ $\text{card}(\mathcal{M}) = 4r(n - r + \frac{1}{2}) + 1$

esto es, los puntos de vacío quedan asentados sobre la intersección de las curvas separatrices.

Demostración: Es fácil comprobar la veracidad de la proposición advirtiendo que para el potencial (2.21) se tiene $f(u) = u^{2\alpha_0}(u^2 - \Omega^2) \prod_{i=1}^n (u^2 - \sigma_i^2)^{2\alpha_i}$ y $g(v) = v^{2\alpha_0}(\Omega^2 - v^2) \prod_{i=1}^n (v^2 - \sigma_i^2)^{2\alpha_i}$. En cualquiera de los casos introducidos, los elementos del conjunto E verifican la condición $f(u) = 0$, los de H cumplen que $g(v) = 0$, mientras que el conjunto X constituido por la recta $\phi_2 = 0$ verifica $f(u) = 0$ para el segmento definido en el intervalo $(-\Omega, \Omega)$ y $g(v) = 0$ en el resto. El conjunto Y acata la condición $g(v) = 0$ siempre y cuando el modelo pertenezca a los casos **B** y **D**. Por otra parte, para los casos **C** y **D**, en los que aparece los factores $(u^2 - \Omega^2)$ y $(\Omega^2 - v^2)$ con un exponente mayor a la unidad, los puntos focales F y F' son raíces de las funciones $f(u)$ y $g(v)$. A partir de toda esta información y teniendo en cuenta que la variedad de ceros estará constituida por aquellos puntos $(u, v) \in \mathbb{E}^2$ que cumplan al tiempo las ecuaciones $f(u) = 0$ y $g(v) = 0$, puede completarse la tabla anterior. C.Q.D.

Sobre la figura 2.2 puede observarse el retículo generado para los casos tratados, tanto en el plano elíptico como en el cartesiano. Los nudos de $\text{Ret}(P)$ corresponden a los puntos de vacío (estrictamente para los casos B y D) junto con los puntos focales (para el caso A y C). El plano queda dividido en *celdas* delimitadas por las separatrices.

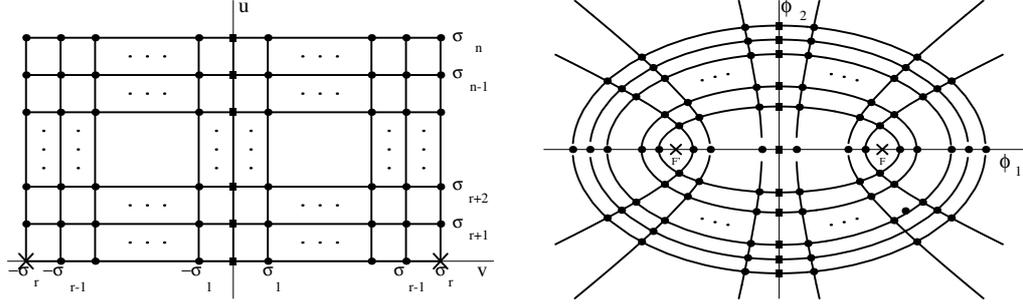


Figura 2.2: *Retículo y variedad de ceros para los casos: A (indicados como \bullet), B (\bullet, \square), C (\bullet, \times) y D (\bullet, \square, \times)*

Dado (2.21), las ecuaciones (2.17) descritas sobre el espacio de fases quedan expresadas como

$$p_u^2 = 2u^{2\alpha_0} \prod_{i=1}^n (u^2 - \sigma_i^2)^{2\alpha_i} \quad p_v^2 = v^{2\alpha_0} \prod_{i=1}^n (v^2 - \sigma_i^2)^{2\alpha_i}$$

El problema tratado en el espacio de fases queda desacoplado en cada coordenada elíptica. El argumento utilizado por Rajaraman [114], para delimitar la zona en que se presentan kinks en modelos con un campo escalar, puede ser utilizado en cada componente elíptica, lo que restringe la presencia de soluciones de carácter topológico al rango $u \in [\Omega, \sigma_n)$ y $v \in [-\Omega, \Omega]$.

Es conveniente, en aras de la inteligibilidad de nuestro estudio, introducir el estudio sistemático y profundo de varios modelos, que se enmarcan en los perfiles descritos. Posteriormente generalizaremos estos sistemas.

2.6 Modelo I $[\sigma, 1][1][1, 1]$

Describiremos en esta sección un modelo físico que presenta un proceso de ruptura de simetría más rico si cabe que el modelo MSTB, en el sentido de que aparece una plétora de defectos topológicos más compleja que en tal caso. El modelo [3] viene caracterizado por la presencia de la acción

$$S = \int dy^2 \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \chi^* \partial^\mu \chi - U_{I[\sigma, 1][1][1, 1]}(\chi, \chi^*) \right\}$$

donde, ahora,

$$U_{I[\sigma, 1][1][1, 1]} = \frac{\lambda^4}{4m^2} \chi^* \chi \left(\chi^* \chi - \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2 + \frac{\beta^2}{2} \chi^2 \left(\chi^* \chi - \frac{m^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{2\lambda^2} \right) \right)$$

tal que la energía es equiparada a la expresión dada en (1.43). El nuevo potencial puede ser escrito empleando las variables adimensionales $\chi \rightarrow \frac{m}{\lambda} \phi$, $y_\mu \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{m} x_\mu$ y

$\frac{\beta^2}{m^2} \rightarrow \sigma^2$ como

$$U_{I[\sigma,1][1][1,1]}(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} \phi^* \phi (\phi^* \phi - 1)^2 + \sigma^2 \phi_2^2 \left(\phi^* \phi - 1 + \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (2.22)$$

Este tipo de modelos surge en la descripción de defectos iónicos de orientación en *hydrogen-bonded networks* [112] o en twistones encontrados en las cadenas del polietileno [149]. Otros modelos similares a (2.22) han sido estudiados en [49] en el ámbito de las órbitas prueba.

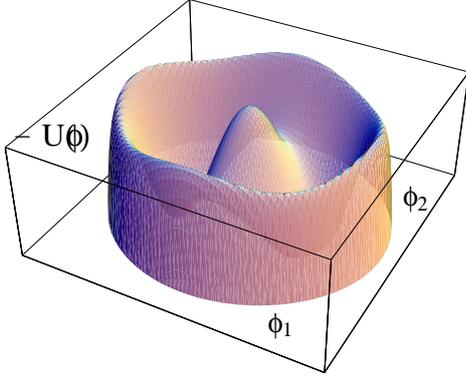


Figura 2.3. Potencial $I[\sigma,1][1][1,1]$.

La expresión (2.22) corresponde a una perturbación del potencial de Chern-Simon,

$$U_{\text{CH-S}}(\phi) = \frac{1}{2} \phi^* \phi (\phi^* \phi - 1)^2$$

que es recuperado para el caso particular de $\sigma = 0$. Este modelo (que posee simetría rotacional) ha sido empleado en teorías gauge $U(1)$ para modelizar determinados comportamientos de superconductores de tipo II, tal y como es apuntado en [81, 79, 57, 58].

El superpotencial (2.15) asociado a este modelo en las variables elípticas es $W(u, v) = \frac{1}{4}(u^4 - 2u^2) \pm \frac{1}{4}(v^4 - 2v^2)$, lo que arroja las siguientes dos posibilidades en las coordenadas iniciales, o bien,

$$W^I(\phi) = \frac{1}{4} [(\phi^* \phi - 1)^2 + 2\sigma^2 \phi_2^2]$$

que es el potencial asociado al modelo MSTB salvando un factor global y redefiniendo la constante de acoplamiento $\sigma^2 \rightarrow 2\sigma^2$; o bien,

$$W^{II}(\phi) = \frac{1}{4} \sqrt{(\phi_1 + \sigma)^2 + \phi_2^2} \sqrt{(\phi_1 - \sigma)^2 + \phi_2^2 (\phi^* \phi + \sigma^2 - 2)}$$

que introduce puntos de ramificación en la teoría.

Propiedades del modelo:

Empleando el plano elíptico \mathbb{E}^2 , la expresión (2.22) se transforma en

$$\xi_\sigma^* U_{I[\sigma,1][1][1,1]} = \frac{1}{2(u^2 - v^2)} [u^2(u^2 - 1)^2(u^2 - \sigma^2) + v^2(v^2 - 1)^2(\sigma^2 - v^2)]$$

por lo que el presente sistema es integrante del caso B de modelos de Liouville de tipo I y donde deben considerarse los valores, $A^2 = \frac{1}{2}, n = 2, r = 1, \alpha_0 = 1, \sigma_1 =$

$\sigma, \alpha_1 = 1, \sigma_2 = 1, \alpha_2 = 1$, es decir, puede ser caracterizado como $I[\sigma, 1][1][1, 1]$. La variedad de ceros \mathcal{M} es discreta y se erige como

$$\mathcal{M} = \{v^1 = -1; v^2 = -i\bar{\sigma}; v^3 = 0; v^4 = i\bar{\sigma}; v^5 = 1\}$$

donde $\bar{\sigma} = \sqrt{1 - \sigma^2}$. En el plano elíptico, el modelo forja dos celdas; la primera P_{11} delimitada por los puntos v^1, v^2, v^3 y F' y la segunda P_{21} por v^3, v^4, v^5 y F , tal y como queda plasmado en la figura 2.4.

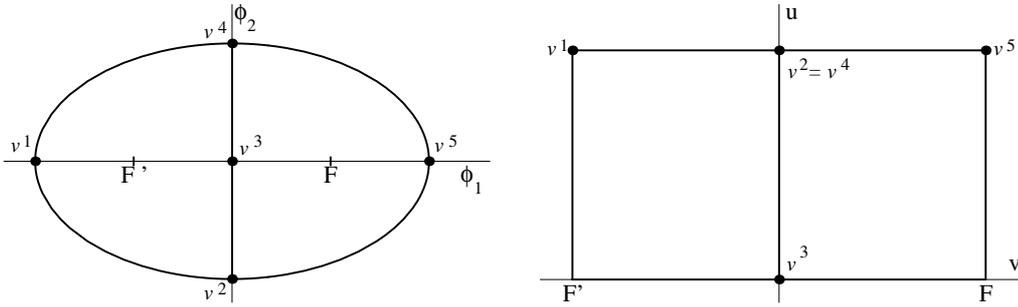


Figura 2.4: Vacíos (puntos) y curvas separatrices (trazos continuos) del modelo.

El espacio de configuración vendrá constituido por 25 sectores desconectados identificados por los elementos del grupo $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, conectando cada uno de los posibles puntos de vacío, esto es,

$$\mathcal{C} = \cup \mathcal{C}_{ab} \quad a, b = 1, 2, 3, 4, 5$$

El espectro de pequeñas deformaciones o espectro de partículas se refleja en las masas

$$M^2(v^1, v^5) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \sigma^4 \end{pmatrix} \quad M^2(v^2, v^4) = \begin{pmatrix} \sigma^4 & 0 \\ 0 & 4\bar{\sigma}^4 \end{pmatrix} \quad M^2(v^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^4 \end{pmatrix}$$

La degeneración de la variedad de vacíos origina un proceso de ruptura de simetría en el modelo. Para v^1 y v^5 la simetría $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ que presenta el lagrangiano es rota a $H_1 = e \times \mathbb{Z}_2 : \phi_2 \rightarrow -\phi_2$, para v^2 y v^4 se rompe al grupo $H_2 = \mathbb{Z}_2 \times e : \phi_1 \rightarrow -\phi_1$, mientras que para v^3 , la simetría G es respetada. La variedad de Moduli sobre \mathcal{M} queda constituida por tres elementos, $\text{Mod}(\mathcal{M}) = \{[v^1], [v^2], [v^3]\}$.

Podemos presentar las integrales primeras, que aseguran el carácter de integrabilidad del modelo estudiado. Así, la integral primera asociada al funcional (1.39), correspondiente a la energía mecánica, será

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \phi^* \phi (\phi^* \phi - 1)^2 - \sigma^2 \phi_2^2 (\phi^* \phi - 1 + \frac{\sigma^2}{2}) \quad (2.23)$$

mientras que la segunda integral primera, que hace las veces de momento angular generalizado, se escribe como

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - \frac{\sigma^2}{2} \phi_2^2 [\sigma^2 \phi_1^2 - (\phi^* \phi - 1 + \sigma^2)^2]$$

donde, como ya fue advertido, para las soluciones que nos preocupan tales expresiones adoptan los valores nulos, $I_1 = I_2 = 0$. La energía, usando (2.12), puede ser calculada mediante

$$\mathcal{E} = \left| \int_{u_A}^{u_B} du u(1-u^2) \right| + \left| \int_{v_A}^{v_B} dv v(1-v^2) \right|$$

siendo (u_A, v_A) y (u_B, v_B) las componentes de los puntos de vacío que definen la solución kink particular, cuya energía pretende ser calculada.

Galería de soluciones: Parametrización.

Pasemos a estudiar los kinks presentes en el sistema I[$\sigma,1$][1][1,1], para lo cual emplearemos el mismo proceso que introducimos en el modelo MSTB:

1. **TK1:** Empleando el método de las órbitas prueba, ensayaremos la restricción dada por $\phi_2 = 0$, de modo que sobre la condición (2.23), puede extraerse la expresión de la solución kink de componente imaginaria nula,

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \tanh \bar{x}} \quad (2.24)$$

que llamaremos **TK1** siguiendo la notación habitual. Aparecen cuatro soluciones singulares dependiendo del signo elegido en (2.24), kink y antikink conectando los vacíos v^1 y v^3 , que denotamos por TK1[13] y TK1[31] respectivamente, junto con los que conectan v^3 y v^5 , a las que nos referiremos como TK1[35] y TK1[53], ver figura 2.5.

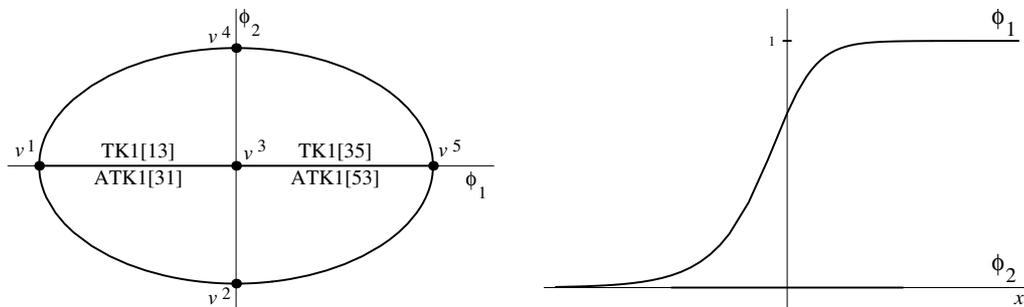


Figura 2.5: Órbitas de las soluciones **TK1** (izquierda) y kink TK1[35] (derecha).

En la descripción particular de la solución TK1[13] sobre el plano elíptico habríamos de señalar que se sitúa en el retículo del modelo sobre dos tramos rectilíneos; el

primero va desde el punto v^1 hasta F' y el segundo desde F' hasta el vacío final v^3 . Por ello, $\pi_u(\mathbf{TK1}[13]) = [\sigma, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TK1}[13]) = [-\sigma, 0]$. La energía adimensional de la que están dotadas el conjunto de estas soluciones es

$$\mathcal{E}[\mathbf{TK1}] = \frac{1}{4}$$

El hessiano asociado al **TK1** adquiere la forma diagonal del operador diferencial matricial

$$\mathcal{H}(\mathbf{TK1}) = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{5}{4} \pm \frac{3}{2} \tanh \bar{x} + \frac{15}{4} \tanh^2 \bar{x} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + \sigma^4 - \sigma^2 - \frac{1}{4} \pm (\sigma^2 - \frac{1}{2}) \tanh \bar{x} + \frac{3}{4} \tanh^2 \bar{x} \end{pmatrix}$$

cuyo espectro puede ser resuelto [88, 84]. La primera componente presenta un único autovalor ligado asociado al modo cero cuya autofunción es

$$\psi_0^{(1)} \propto \frac{1}{\sqrt{2} \cosh^3 \bar{x} e^{\bar{x}}}$$

junto con un espectro continuo no degenerado entre los valores 1 y 4 sobre el que se sostiene el espectro doblemente degenerado. Para la segunda componente se observa un único autovalor ligado de magnitud nula para la autofunción

$$\psi_0^{(2)} \propto \cosh^{-\frac{1}{2}} x e^{(\frac{1}{2} - \sigma^2)x}$$

siendo el espectro continuo no degenerado definido entre los valores σ^4 y $(1 - \sigma^2)^2$, y para valores mayores aparece un espectro continuo doblemente degenerado. Estos resultados dictaminan la estabilidad de esta solución. Además, la presencia de un modo cero asociado a las variaciones ortogonales sugiere la presencia de una familia uniparamétrica de soluciones, de la que el **TK1** es un elemento particular.

2. TKY: Consideremos la posible existencia de soluciones imaginarias puras, es decir, verifican la restricción $\phi_1 = 0$ (elemento del conjunto de curvas Y). Sobre (2.23) se concluye

$$\phi(x) = \pm i \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \tanh \bar{x}} \quad (2.25)$$

La combinación de los signos en (2.25) concibe cuatro soluciones, denotadas genéricamente por **TKY**² conectando los puntos de vacío v^2 , v^3 y v^4 mediante los kinks específicos TKY[23], TKY[34] y los antikinks TKY[43], TKY[32], ver figura 2.6. En el plano elíptico están asociadas a una única separatriz, la cual une los vacíos v^3 y $v^{2,4}$ como puede observarse en la figura 2.7. Dado que $\pi_u(\mathbf{TKY}) = [\sigma, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TKY}) = 0$, estas soluciones poseen la energía

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKY}] = \frac{1}{4} + \frac{\sigma^2}{2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

²Usando la letra **Y** se pretende señalar que la solución queda asentada sobre el eje ϕ_2 .

La forma del hessiano es declarada por

$$\mathcal{H}(\mathbf{TKY}) = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\sigma^4 - 6\sigma^2 + 1}{4} \pm \frac{\sigma^4 - 1}{2} \tanh \bar{x} + \frac{3\bar{\sigma}^4}{4} \tanh^2 \bar{x} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + \bar{\sigma}^4 \left[-\frac{5}{4} \pm \frac{3}{2} \tanh \bar{x} + \frac{15}{4} \tanh^2 \bar{x} \right] \end{pmatrix}$$

que nos permite afirmar que para la primera componente se presenta un espectro continuo no degenerado sobre el autovalor σ^4 y 1, valor a partir del cual el espectro es doblemente degenerado. Es reseñable la ausencia de estados ligados. Para la segunda componente aparece un único estado ligado correspondiente al modo cero junto al espectro continuo no degenerado entre los valores $\bar{\sigma}^4$ y $4\bar{\sigma}^4$, sobre el que se asienta el espectro doblemente degenerado. La solución es estable. La ausencia de un modo cero para las variaciones ortogonales a la trayectoria del kink sugiere que se trata de una solución aislada en el sector de estudio.

3. TKE: Estudiamos, ahora, la presencia de soluciones asentadas sobre el tramo elíptico $\phi_1^2 + \frac{\phi_2^2}{1-\sigma^2} = 1$ (separatriz del conjunto E), a las cuales nombraremos como **TKE**. Empleando (2.23) se obtienen las ocho soluciones

$$\phi = \pm_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \tanh(\pm_2 \sigma^2 \bar{x})} \pm_3 i \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \tanh(\pm_2 \sigma^2 \bar{x})} \quad (2.26)$$

combinando arbitrariamente los signos marcados con distintos subíndices 1,2 y 3. Las soluciones conectan los vacíos v^1 , v^2 , v^4 y v^5 ; mediante los kinks TKE[14], TKE[12], TKE[25], TKE[45] junto con sus antikinks TKE[41], TKE[21], TKE[52] y TKE[54], ver figura 2.6. (Téngase presente que la notación de la que estamos haciendo uso especifica los índices de los vacíos que son conectados, tal que el primero se refiere al de partida y el segundo al de llegada).

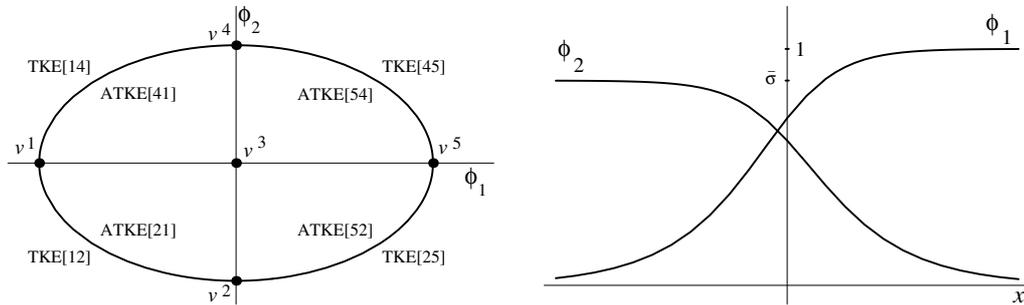


Figura 2.6: Trayectorias de las soluciones **TKE** (izquierda) y kink TKE[45] (derecha).

Estas soluciones sobreviven en el plano elíptico sobre el tramo horizontal que conecta los vacíos v^1 , $v^{2,4}$ y v^5 , donde $\pi_u(\mathbf{TKE}) = 0$ y $\pi_v(\mathbf{TKE}) = [0, \sigma]$. Se cumple que:

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKE}] = \frac{\sigma^2}{2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

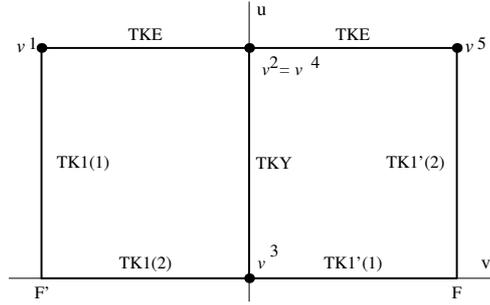


Figura 2.7: Soluciones singulares sobre el plano elíptico

Las soluciones descritas quedan asentadas en trayectorias situadas sobre el retículo $Ret(P)$ que forman las curvas separatrices (ver figura 2.7).

4. **TKI**(γ_1) y **TKF**(γ_1): Abandonando el método de órbitas prueba, aplicaremos la teoría de Hamilton-Jacobi sobre el plano elíptico, para obtener las trayectorias de las soluciones densas. Habida cuenta de (2.9), se tiene

$$\left\{ \frac{u^{2\bar{\sigma}^2}(1-u^2)^{\sigma^2}}{u^2-\sigma^2} \right\}^{\text{Sign}(u')} \left\{ \frac{|v|^{2\bar{\sigma}^2}(1-v^2)^{\sigma^2}}{\sigma^2-v^2} \right\}^{\text{Sign}(vv')} = e^{2\sigma^2\bar{\sigma}^2\gamma_1} \quad (2.27)$$

y la dependencia espacial, según (2.10), será

$$\left\{ \frac{1-u^2}{u^2-\sigma^2} \right\}^{\text{Sign}(u')} \left\{ \frac{1-v^2}{\sigma^2-v^2} \right\}^{\text{Sign}(vv')} = e^{2\bar{\sigma}^2(x+\gamma_2)}$$

Para el modelo en tratamiento, el flujo de trayectorias es indicada por

$$\frac{du}{dv} = \frac{\text{Sign}(u')}{\text{Sign}(v')} \frac{u(1-u^2)(u^2-\sigma^2)}{v(1-v^2)(\sigma^2-v^2)}$$

Las expresiones mostradas introducen dos familias de kinks topológicos, caracterizadas por las condiciones $\text{Sign}(u') = \text{Sign}(v')$ y $\text{Sign}(u') \neq \text{Sign}(v')$. Dentro de cada familia, la trayectoria es especificada por el valor del parámetro γ_1 . Su comportamiento puede ser descrito como

4.1. **Familia TKI**(γ_1): Este caso viene determinado por la elección $\text{Sign}(u') = \text{Sign}(v')$ sobre (2.27). Las soluciones vienen distribuidas en dos subfamilias que permanecen en cada una de las celdas, delimitadas por curvas separatrices. En la celda P_{11} quedan conectados los vacíos v^1 y v^3 , y para la celda P_{21} lo son v^3 y v^5 , mediante soluciones TKI[13](γ_1), TKI[31](γ_1), TKI[35](γ_1) y TKI[53](γ_1), a los que nos referiremos globalmente por **TKI**(γ_1) (ver figura 2.8). Para esta familia es posible reexpresar los resultados en las variables originales mediante relaciones relativamente sencillas. Se tiene que las trayectorias de estas soluciones siguen la forma

$$(\sigma^2\phi_1^2)^{\bar{\sigma}^2} [\bar{\sigma}^2(1-\phi_1^2) - \phi_2^2]^{\sigma^2} = \sigma^2 e^{2\sigma^2\bar{\sigma}^2\gamma_1} \phi_2^2$$

presentándose como solución

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2(x+x_1)} + e^{2\sigma^2(x+x_2)}}} + \frac{i\bar{\sigma}}{\sqrt{1 + e^{2\bar{\sigma}^2(x+x_1)} + e^{-2\sigma^2(x+x_2)}}}$$

donde $x_1 = \gamma_2 + \frac{\ln \sigma}{\bar{\sigma}^2}$ y $x_2 = \gamma_2 - \gamma_1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{2\sigma^2}$.

* En particular si elegimos los valores $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ y $\gamma_1 = 0$ aparecen trayectorias descritas por semicircunferencias de radio $\frac{1}{2}$ y centradas en los puntos $(\pm \frac{1}{2}, 0)$,

$$(\phi_1 \pm \frac{1}{2})^2 + \phi_2^2 = (\frac{1}{2})^2$$

donde queda ubicada la solución:

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2} (1 + \tanh \frac{\bar{x}}{2}) \pm 2i \operatorname{sech} \frac{\bar{x}}{2}$$

Considerando los valores asintóticos del parámetro γ_1 sobre (2.27), se cumple:

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKI}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TK1} \\ \mathbf{TKE} + \mathbf{TKY} \end{cases}$$

Apoyados sobre el hecho de que $\pi_u(\mathbf{TKI}) = [\sigma, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TKI}) = [0, \sigma]$, (2.11) permite calcular el valor de la energía para estas soluciones, siendo:

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKI}(\gamma_1)] = \frac{1}{4} + \frac{\sigma^2}{2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

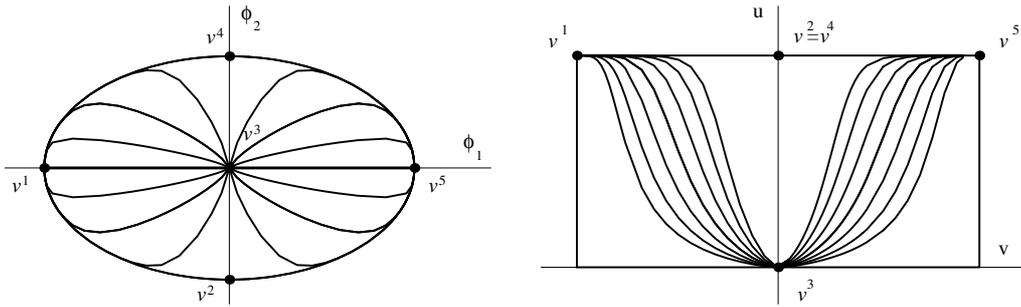


Figura 2.8: *Kinks TKI: en el plano cartesiano (izquierda) y en el plano elíptico (derecha).*

Las soluciones encontradas son integrantes de los sectores topológicos \mathcal{C}_{13} , \mathcal{C}_{31} , \mathcal{C}_{35} y \mathcal{C}_{53} . Pueden ser parametrizadas por el valor de $\gamma_1 \in (-\infty, +\infty)$. En esta familia, la parametrización basada en el flujo de trayectorias sobre los vacíos es infructuosa, dado que muestra una expresión indefinida en tales puntos, tal y como puede ser observado en la figura 2.8. Una parametrización alternativa puede ser caracterizada por el punto de corte a alguna elipse coordenante, la cual puede ser elegida arbitrariamente de la gama $u = a$ con $\sigma < a < 1$. Trabajando en el plano elíptico,

dicha parametrización vendrá dispuesta por el valor \tilde{v} adoptado por la variable v al resolver la ecuación implícita

$$\frac{|\tilde{v}|^{2\bar{\sigma}^2}(1-\tilde{v}^2)^{\sigma^2}}{\sigma^2-\tilde{v}^2} = \frac{a^2-\sigma^2}{a^{2\bar{\sigma}^2}(1-a^2)^{\sigma^2}} e^{2\sigma^2\bar{\sigma}^2\gamma_1}$$

Si nos proponemos identificar las soluciones del sector \mathcal{C}_{13} , todas aquellas que emerjan en el semiplano de abscisas ϕ_2 positivas (**TKI**(+)) tendrán asociado el valor del parámetro \tilde{v} en el rango $[-\sigma, 0]$ (véase figura 2.8). En el mismo rango son identificadas las soluciones que permanecen en el semiplano inferior (**TKI**(-)). La carta de la variedad de soluciones del sector \mathcal{C}_{13} es completada atribuyendo a estas últimas un valor positivo del parámetro \tilde{v} , tal que su rango, ahora, es $[-\sigma, \sigma]$, donde quedan incluidas todas las soluciones. La información recabada nos permite escribir lo siguiente:

	Parámetro	Solución
1)	$\tilde{v} = -\sigma$	TK1[13]
2)	$\tilde{v} \in (-\sigma, 0)$	TKI[13](+)
3)	$\tilde{v} = 0^-$	TKE[14]+TKY[43]
4)	$\tilde{v} = 0^+$	TKE[12]+TKY[23]
5)	$\tilde{v} \in (0, \sigma)$	TKI[13](-)
6)	$\tilde{v} = \sigma$	TK1[13]

La teoría de Morse nos indicaría que esta familia de soluciones es estable por la ausencia de puntos conjugados. Finalmente, debe advertirse que los kinks encontrados verifican las ecuaciones de primer orden asociadas con el superpotencial $W^I(\phi)$, cuya expresión carece de puntos de ramificación, lo cual les confiere un carácter BPS en el estadio presupersimétrico. Esto sugiere de nuevo la estabilidad de la familia de kinks encontrada, usando los argumentos detallados en [65].

4.2. Familia TKF(γ_1): Estimemos la condición $\text{Sign}(u') = -\text{Sign}(v')$ sobre (2.27). Los kinks, como en el caso anterior, se encuadran en dos subfamilias que se ubican en las celdas P_{11} y P_{21} . Todas estas soluciones conectan v^2 y v^4 (vértice común a ambas celdas), atravesando un punto focal, diferente para cada subfamilia. Las englobaremos bajo las siglas **TKF**(γ_1), que en particular corresponderían a las soluciones TKF[24](γ_1) y TKF[42](γ_1), ver figura 2.9.

* Entre las curvas que forman parte de la colección de órbitas (2.27) queda ubicada una de sencillo análisis analítico. Es asociada a la constante de acoplamiento $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ con parámetro natural $\gamma_1 = 0$ y descrita por la semicircunferencia de $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{1}{2}$, de modo que, la particular solución adopta la expresión:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+2e^{\bar{x}})} \left[2\sqrt{2}e^{\frac{\bar{x}}{2}} + i(1-2e^{\bar{x}}) \right]$$

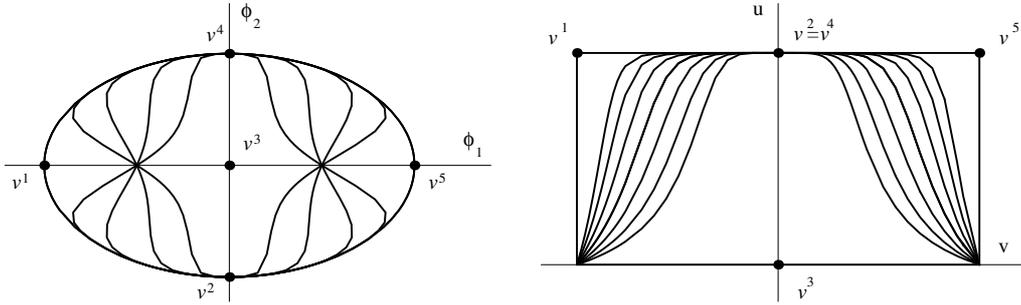


Figura 2.9: *Kinics TKF: en el plano cartesiano (izquierda) y en el plano elíptico (derecha).*

El comportamiento asintótico del parámetro γ_1 sobre esta familia establece que

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKF}(\gamma_1) \equiv \mathbf{TKE} + \mathbf{TK1} + \mathbf{TKY}$$

mientras que la observación $\pi_u(\mathbf{TKF}) = 2[\sigma, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TKF}) = 2[0, \sigma]$ proporciona

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKF}(\gamma_1)] = \frac{1}{2} + \sigma^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Para estas soluciones podemos considerar la parametrización basada en el valor del flujo de trayectorias sobre el punto focal. Sobre el plano elíptico, es fácil obtener

$$\left. \frac{du}{dv} \right|_{(\sigma, \pm\sigma)} = \mp e^{\mp 2\sigma^2 \bar{\sigma}^2 \gamma_1} = \text{tg } \theta_E$$

que nos proporciona el ángulo de incidencia sobre los puntos focales en relación con el parámetro natural γ_1 . Sobre el plano cartesiano, la información anterior reza como

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \pm \frac{2e^{\mp 2\sigma^2 \bar{\sigma}^2 \gamma_1}}{1 - e^{\mp 2\sigma^2 \bar{\sigma}^2 \gamma_1}} = \text{tg } \theta$$

Fijemos el sector \mathcal{C}_{24} del espacio de configuración \mathcal{C} como tubo de ensayo. La variedad de soluciones viene constituida por dos facciones, una conformada por aquellas soluciones que pasan por el foco F' y la otra las que lo hacen a través de F . Precisaremos dos cartas para coordinar toda la variedad de soluciones, las primeras serán parametrizadas por el ángulo de incidencia sobre el foco F' , mientras que las segundas por el formado sobre F . Fusionando las dos cartas, podemos encontrar que:

	Parámetro	Solución
1)	$\theta = 0$	TKY[23]+TK1[35]+TKE[54]
2)	$\theta \in (0, \pi)$	TKF[24](F)
3)	$\theta = \pi^-$	TKE[25]+TK1[53]+TKY[34]
4)	$\theta = \pi^+$	TKE[21]+TK1[13]+TKY[34]
5)	$\theta \in (\pi, 2\pi)$	TKF[24](F')
6)	$\theta = 2\pi$	TKY[23]+TK1[31]+TKE[14]

Aplicando la teoría de Morse podemos concluir la inestabilidad de las soluciones de la presente familia dado que todas ellas cruzan a través de los focos, que es interpretado geoméricamente como puntos conjugados [65, 5]. Acuñaando el concepto de superpotencial debe tenerse en cuenta que estas soluciones son generadas por las ecuaciones de primer de orden asociadas a $W^{II}(\phi)$, el cual presenta un punto de ramificación en los puntos focales. Ello indica, de nuevo, que las soluciones halladas son inestables.

Todos los puntos anteriores pueden ser resumidos afirmando que el espacio de Moduli está compuesto por

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\mathbf{TK1}, \mathbf{TKE}, \mathbf{TKY}, \mathbf{TKI}(\gamma_1), \mathbf{TKF}(\gamma_1)\}$$

Puede concluirse comentando que en las celdas P_{11} y P_{21} quedan inmersas las soluciones densas \mathbf{TKI} y \mathbf{TKF} , mientras que sobre las fronteras ∂P_{11} y ∂P_{21} se distribuyen los kinks singulares \mathbf{TKE} , $\mathbf{TK1}$ y \mathbf{TKY} .

Reglas de suma:

Concluiremos el estudio de este modelo mostrando las relaciones entre las energías. Atendiendo a la expresión (2.12), debe cumplirse (sin observar el valor específico que ha sido asignado a cada solución) las siguientes relaciones

1. $\mathcal{E}[\mathbf{TKI}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TKE}] + \mathcal{E}[\mathbf{TK1}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKY}]$
2. $\mathcal{E}[\mathbf{TKF}(\gamma_1)] = 2\mathcal{E}[\mathbf{TKI}(\gamma_1)]$

las cuales, pueden ser verificadas empleando los datos calculados. A partir de las relaciones anteriores pueden obtenerse otras *reglas de suma*. Por ejemplo, es evidente que:

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKF}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TKE}] + \mathcal{E}[\mathbf{TK1}] + \mathcal{E}[\mathbf{TKY}] = 2\mathcal{E}[\mathbf{TKY}]$$

2.7 Modelo $\mathbf{I}[\sigma, \tau, \sigma\tau][\mathbf{0}][\mathbf{011}]$

De forma análoga al análisis realizado en el modelo anterior, estudiaremos, en esta sección, un sistema físico cuyo comportamiento es extremadamente rico, englobando en sí mismo las características de aquellos modelos que pueden asignarse al tipo I. La dinámica, como siempre, atiende al estudio de la expresión

$$S = \int d^2y \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \chi^* \partial^\mu \chi - U_{\mathbf{I}[\sigma, \tau, \sigma\tau][\mathbf{0}][\mathbf{011}]}(\chi, \chi^*) \right\}$$

que incluye un término potencial

$$U(\chi, \chi^*) = \frac{\lambda^6}{2m^4} \left[\chi^* \chi - \delta_1^2 \frac{m^2}{\lambda^4} \right]^2 \left[\chi^* \chi - \delta_2^2 \frac{m^2}{\lambda^4} \right]^2 + \frac{\alpha m^2}{2} \chi_2^2 + \frac{\delta_1^4 \delta_2^4}{2\lambda^6} \chi_2^4 + \frac{3\delta_1^2 \delta_2^2}{2m^2} \chi_2^2 \left[\chi^* \chi + \frac{m^2}{3\lambda^4} \left(\frac{\delta_1^2 \delta_2^2}{\lambda^2} - 2\delta_1^2 - 2\delta_2^2 \right) \right]^2$$

donde λ , m , δ_1 y δ_2 son constantes de acoplamiento, cuyas dimensiones son la inversa de longitud en un sistema de unidades naturales y α es un parámetro con dependencia sobre las magnitudes anteriores especificada por

$$\alpha = \frac{\delta_1^2 \delta_2^2}{3\lambda^8} \left(\frac{2\delta_1^4 \delta_2^4}{\lambda^4} - \frac{2\delta_1^2 \delta_2^4}{\lambda^2} - \frac{2\delta_1^4 \delta_2^2}{\lambda^2} - \delta_1^4 - \delta_2^4 + 4\delta_1^2 \delta_2^2 \right)$$

Introduciendo variables adimensionales, $\chi \rightarrow \frac{m}{\lambda} \phi$, $y_\mu \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{m} x_\mu$, $\sigma^2 \rightarrow \frac{\delta_1^2}{\lambda^2}$ y $\tau^2 \rightarrow \frac{\delta_2^2}{\lambda^2}$, la engorrosa expresión del potencial se transforma en la más cómoda

$$U = (\phi^* \phi - \sigma^2)^2 (\phi^* \phi - \tau^2)^2 + 3\sigma^2 \tau^2 \phi_2^2 \left(\phi^* \phi + \frac{\sigma^2 \tau^2 - 2\sigma^2 - 2\tau^2}{3} \right)^2 + \alpha \phi_2^2 + \sigma^2 \tau^4 \phi_2^4 \quad (2.28)$$

donde $\alpha = \frac{\sigma^2 \tau^2}{3} (2\sigma^4 \tau^4 - 2\sigma^4 \tau^2 - 2\sigma^2 \tau^4 + 4\sigma^2 \tau^2 - \sigma^4 - \tau^4)$.

Propiedades del modelo:

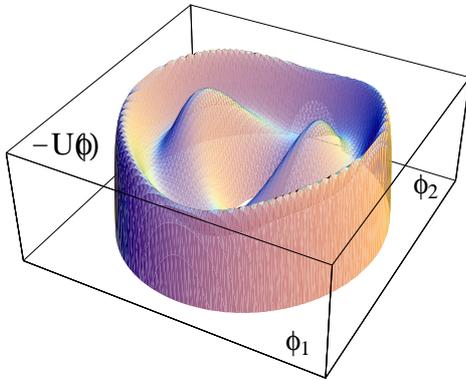


Figura 2.10. *Potencial del modelo.*

El sistema físico introducido presenta un potencial que sigue una expresión polinómica de octavo grado semidefinida positiva. El lagrangiano disfruta de simetrías bajo el grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ de las reflexiones internas, $\phi_1 \rightarrow -\phi_1$, $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$. Pese a la desventaja que puede suponerse la presentación de un potencial tan complejo, ha de ser advertido la presencia de dos parámetros, cuyo rango de definición es $0 \leq \sigma^2 < \infty$, $0 \leq \tau^2 < \infty$, de modo que estamos tratando con un inmenso abanico de modelos, de forma total-

mente genérica. Esto es, estudiamos de forma conjunta una familia biparamétrica de modelos. El estudio de modelos que dependen de una cantidad indefinida de parámetros es inherente a la estructura considerada en este capítulo y no constituye un motivo vinculante para presentar este sistema en particular. Es expuesto por poseer una estructura muy rica, presentando diferentes estadios asociados a los valores relativos entre los parámetros σ y τ , que pueden ser analizados de forma paralela. Considerando que los parámetros podrían incluir una dependencia implícita de alguna magnitud física, como la temperatura del sistema, $\sigma(T)$, $\tau(T)$, distinguiremos tres posibles **fases** del modelo:

- **FASE I. ELÍPTICA:** $0 < \tau^2 < \sigma^2 < 1$.
- **FASE II. HIPERBÓLICA:** $0 < \sigma^2 < 1 < \tau^2$.
- **FASE III. FOCALIZADA:** $0 < \sigma^2 < 1 = \tau^2$

Otras fases pueden ser consideradas, pero resultan mucho más triviales que las enunciadas. Definamos, por comodidad en la escritura, las magnitudes $\bar{\sigma} = \sqrt{1 - \sigma^2}$, $\bar{\tau} = \sqrt{|1 - \tau^2|}$ y $\bar{\gamma} = \sqrt{|\sigma^2 - \tau^2|}$. Una característica común a cualquiera de las fases es la separabilidad del modelo empleando las coordenadas elípticas descritas en (2.1), donde asumiremos que $\Omega(\sigma, \tau) = \sigma\tau$. El potencial, dado por (2.28), se expresa en el plano elíptico como

$$\xi_{\sigma\tau}^* U = \frac{1}{u^2 - v^2} [(u^2 - \sigma^2)^2(u^2 - \tau^2)^2(u^2 - \sigma^2\tau^2) + (v^2 - \sigma^2)^2(v^2 - \tau^2)^2(\sigma^2\tau^2 - v^2)]$$

que manifiesta la forma particular de un modelo de Liouville de tipo I. El superpotencial asociado a este modelo es

$$W(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(\phi_1 \pm \sigma\tau)^2 + \phi_2^2} [3(\phi^* \phi \mp \sigma\tau\phi_1 + \sigma^2\tau^2)(\phi^* \phi \pm \sigma\tau\phi_1 + \sigma^2\tau^2) - 5(\sigma^2 + \tau^2)(\phi^* \phi \mp \sigma\tau\phi_1 + \sigma^2\tau^2) \mp 3\sigma\tau\phi_1(\phi^* \phi + \sigma^2\tau^2) + 15\sigma^2\tau^2]$$

Sobre la expresión (2.21) se debe identificar los valores, $A^2 = 1$, $\alpha_0 = 0$, pero distinguiendo para las distintas fases las siguientes características:

- **FASE I:** El modelo pertenece al caso A presentado en (2.21), con $n = 3$, $r = 1$, $\sigma_1 = \sigma\tau$, $\alpha_1 = 0$, $\sigma_2 = \tau$, $\alpha_2 = 1$, $\sigma_3 = \sigma$, $\alpha_3 = 1$, de tal modo que $\text{card}(\mathcal{M}) = 4(1 - \frac{1}{2})(3 - 1 + \frac{1}{2}) - 1 = 4$, es decir, concluimos la presencia de cuatro puntos de vacío. El potencial es identificado por $I[\sigma\tau, \tau, \sigma][0][0, 11]$. El retículo presentado por este modelo encierra dos celdas que representamos como P_{11} (delimitado por los puntos distinguidos v^2 , v^3 , F y F') y P_{21} (determinado por los puntos v^1 , v^2 , v^3 y v^4) como puede comprobarse en la figura 2.11.

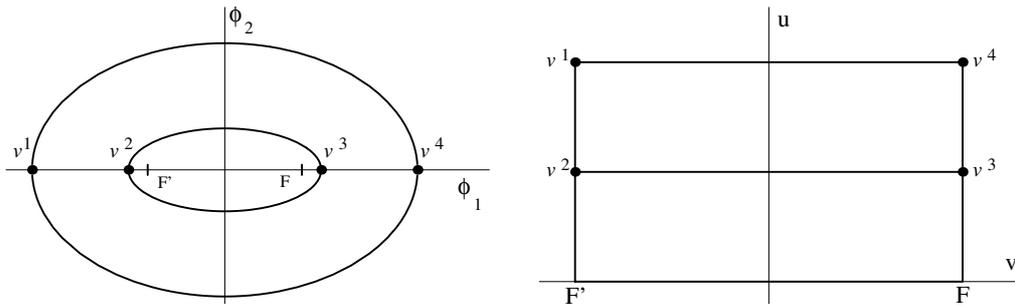


Figura 2.11: Vacíos (puntos) y curvas separatrices (tramos continuos) de la Fase I.

La variedad de ceros en las variables iniciales queda establecida por,

$$\mathcal{M}_I = \{v_1^1 = -\tau; v_1^2 = -\sigma; v_1^3 = \sigma; v_1^4 = \tau\}$$

La presencia de vacíos degenerados introduce el proceso de ruptura de simetría. De la original simetría $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ exhibida por el lagrangiano, los vacíos conservan tan sólo $\mathbb{Z}_2 \times \{e\}$. El espacio de Moduli, conformado por las órbitas de vacío, es $\text{Mod}(\mathcal{M}) = \{[v_1^3], [v_1^4]\}$.

- **FASE II:** El modelo en esta fase sigue incluido en el caso A, donde $n = 3$, $r = 2$, $\sigma_1 = \sigma$, $\alpha_1 = 1$, $\sigma_2 = \sigma\tau$, $\alpha_2 = 0$, $\sigma_3 = \tau$, $\alpha_3 = 1$, con lo que $\text{card}(\mathcal{M}) = 4(2 - \frac{1}{2})(3 - 2 + \frac{1}{2}) - 1 = 8$, atisbando, por ello, la existencia de ocho puntos de vacío. El modelo atiende a la etiqueta $I[\sigma, \sigma\tau, \tau][0][10,1]$. En esta fase, sobre el plano elíptico aparecen tres celdas, P_{11} (cuyos vértices son los puntos singulares v^1, v^5, v^2 y F'), P_{12} (delimitados por v^5, v^7, v^3 y v^2) y P_{13} (encerrado por los lados $v^3 - v^7 - v^4 - F$), verificándose que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{II} = \{ & v_{II}^1 = -\tau; v_{II}^2 = -\sigma; v_{II}^3 = \sigma; v_{II}^4 = \tau; v_{II}^5 = 1 - i\bar{\sigma}\bar{\tau}; \\ & v_{II}^6 = -1 - i\bar{\sigma}\bar{\tau}; v_{II}^7 = -1 + i\bar{\sigma}\bar{\tau}; v_{II}^8 = 1 + i\bar{\sigma}\bar{\tau} \} \end{aligned}$$

Los vacíos v^1, v^2, v^3 y v^4 rompen la simetría original del lagrangiano al subgrupo $\mathbb{Z}_2 \times \{e\}$, mientras que para los restantes vacíos v^5, v^6, v^7 y v^8 , ésta queda totalmente rota, ver figura 2.12.

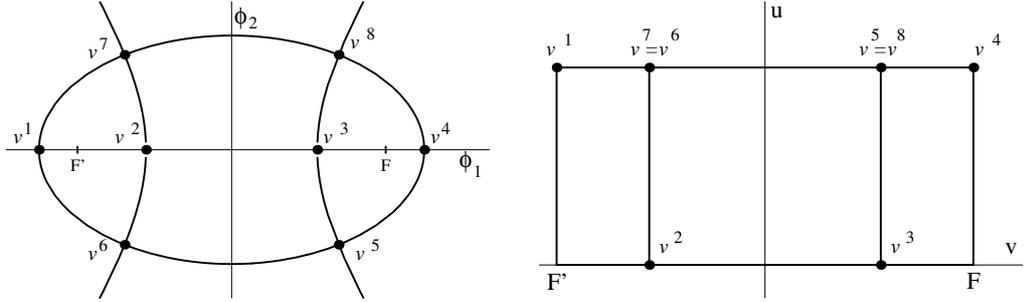


Figura 2.12: Vacíos (puntos) y curvas separatrices (tramos continuos) de la Fase II.

- **FASE III:** El modelo pertenece, ahora, al caso C, donde los parámetros que caracterizan el modelo son $n = 2$, $r = 1$, $\sigma_1 = \sigma$, $\alpha_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\alpha_2 = 1$ y donde $\text{card}(\mathcal{M}) = 4(1 - \frac{1}{2})(2 - 1 + \frac{1}{2}) + 1 = 4$, concluyendo la presencia de cuatro vacíos. El potencial, identificado como $I[(\sigma), (1)][0][(1), (1)]$, aparece en el plano elíptico \mathbb{E}^2 como

$$\xi^* U = \frac{1}{u^2 - v^2} [(u^2 - \sigma^2)^3 (u^2 - 1)^2 - (v^2 - \sigma^2)^3 (v^2 - 1)^2] \quad (2.29)$$

El modelo presenta sólo una celda como puede verse en la figura 2.13 delimitada por los vacíos. El sistema en estudio puede considerarse como una deformación de aquel que incluye un potencial $U(\phi) = (\phi^* \phi)^2 (\phi^* \phi - 1)^2$. Se tiene:

$$\mathcal{M}_{\text{III}} = \{v_{\text{III}}^1 = -1; v_{\text{III}}^2 = -\sigma; v_{\text{III}}^3 = \sigma; v_{\text{III}}^4 = 1\}$$

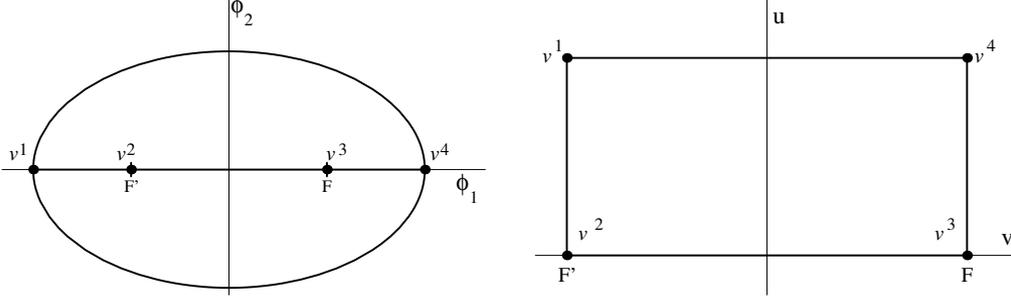


Figura 2.13: Vacíos (puntos) y curvas separatrices (tramos continuos) de la Fase III.

Como puede observarse, la variedad de ceros \mathcal{M} aparece dispar en cada una de las fases. Las masas que determinan el espectro de partículas (los valores que soportan el espectro continuo de pequeñas deformaciones), son

$$M^2(v_{\text{I,II,III}}^{2,3}) = \begin{pmatrix} 8\sigma^2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^2\tau^6\bar{\sigma}^4 \end{pmatrix} \quad M^2(v_{\text{I,II,III}}^{1,4}) = \begin{pmatrix} 8\tau^2\gamma^4 & 0 \\ 0 & 2\sigma^6\tau^2\bar{\tau}^4 \end{pmatrix}$$

Falta, aún, por obtener algunas masas. Si definimos los parámetros $\mu^4 = \sigma^4 + \sigma^2\tau^2 + \tau^4$ y $\nu^2 = \tau^2 + \sigma^2$, éstas pueden ser escritas como

$$M^2(v_{\text{II}}^{5,6,7,8}) = 8 \begin{pmatrix} \mu^4 - 3\sigma^2\tau^2\nu^2 + 3\sigma^4\tau^4 & \bar{\sigma}\bar{\tau}(\mu^4 - 2\sigma^2\tau^2\nu^2 + \sigma^4\tau^4) \\ \bar{\sigma}\bar{\tau}(\mu^4 - 2\sigma^2\tau^2\nu^2 + \sigma^4\tau^4) & \bar{\sigma}^2\bar{\tau}^2(\mu^4 - 2\sigma^2\tau^2\nu^2) \end{pmatrix}$$

que tras ser diagonalizadas adoptan la sencilla apariencia

$$M^2(v_{\text{II}}^{5,6,7,8}) = \begin{pmatrix} 8\sigma^6\bar{\tau}^4 & 0 \\ 0 & 8\tau^6\bar{\sigma}^4 \end{pmatrix}$$

El sistema mecánico asociado al modelo presenta junto a la energía mecánica

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - U(\phi_1, \phi_2) \quad (2.30)$$

un nuevo invariante que le concede el carácter de completa integrabilidad y que es expresada como

$$I_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 - \sigma^2\tau^2 \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 \right\} + \\ - \sigma^2\tau^2\phi_2^2(\phi^*\phi + \sigma^2\tau^2 - \sigma^2 - \tau^2) \left((\phi^*\phi - \frac{\sigma^2 + \tau^2}{2})^2 + 2\sigma^2\tau^2\phi_2^2 + \beta \right)$$

donde $\beta = \sigma^4\tau^4 - \sigma^4\tau^2 - \sigma^2\tau^4 - \frac{\sigma^4}{4} - \frac{\tau^4}{4} + \frac{3\sigma^2\tau^2}{2}$. Las soluciones kinks verifican las relaciones $I_1 = I_2 = 0$, como puede entenderse al llevar las condiciones asintóticas (1.13) y (1.14) sobre las expresiones de las integrales primeras.

Galería de soluciones:

Estudiemos las soluciones presentes en el modelo, para cada una de las fases:

FASE I

I.1 TK1: Iniciamos la búsqueda de las soluciones usando el método de órbitas prueba para trayectorias que se asientan sobre el eje real del plano interno, esto es, $\phi_2 = 0$. Vía una cuadratura, la fórmula (2.30) nos reporta la expresión en forma implícita

$$\left| \frac{\sigma + \phi_1}{\sigma - \phi_1} \right|^{\frac{1}{\sigma}} \left| \frac{\tau - \phi_1}{\tau + \phi_1} \right|^{\frac{1}{\tau}} = e^{\pm 2\sqrt{2}(\sigma^2 - \tau^2)\bar{x}} \quad (2.31)$$

que determina el comportamiento de la componente ϕ_1 . La relación indicada en (2.31) constituye seis soluciones: TK1[12], TK1[34], TK1[21] y TK1[43] que denotaremos por $\mathbf{TK1}^{(1)}$ junto con TK1[23] y TK1[32], que llamaremos como $\mathbf{TK1}^{(2)}$. Dichos kinks conectan los vacíos v^1 , v^2 , v^3 y v^4 , tal que los sectores topológicos \mathcal{C}_{12} , \mathcal{C}_{34} , \mathcal{C}_{21} , \mathcal{C}_{43} , \mathcal{C}_{23} y \mathcal{C}_{32} albergan estas soluciones. Las proyecciones de las soluciones anteriores $\pi_u(\mathbf{TK1}^{(1)}) = [\sigma, \tau]$, $\pi_v(\mathbf{TK1}^{(1)}) = 0$, $\pi_u(\mathbf{TK1}^{(2)}) = 2[\sigma\tau, \tau]$ y $\pi_v(\mathbf{TK1}^{(2)}) = [\sigma\tau, \tau]$ nos permiten el cálculo de las energías:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}] &= \frac{2\sqrt{2}}{15}(\sigma - \tau)^3(\sigma^2 + 3\sigma\tau + \tau^2) \\ \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(2)}] &= \frac{4\sqrt{2}}{15}\tau^3(5\sigma^2 + 15\sigma^3 - 5\sigma^5 - \tau^2 - 5\sigma^3\tau^2 + 3\sigma^5\tau^2) \end{aligned}$$

I.2 TKE{I}: Asumiremos en este punto el estudio de aquellas soluciones que se encuentren vinculadas a la trayectoria elíptica descrita por la expresión

$$\phi_1^2 + \frac{\phi_2^2}{\sigma^2} = \tau^2 \quad (2.32)$$

de modo que usando (2.30) obtenemos la ecuación implícita para la componente real del campo ϕ ,

$$\left| \frac{\tau + \phi_1}{\tau - \phi_1} \right|^{\frac{1}{\tau}} \left| \frac{1 - \phi_1}{1 + \phi_1} \right| = e^{2\sqrt{2}\sigma^3\tau^2\bar{x}} \quad (2.33)$$

que corresponde a cuatro soluciones que conectan los puntos de vacío v^1 y v^4 , las cuales explícitamente son los kinks TKE{I}[14], TKE*{I}[14] y los antikinks

$\text{TKE}\{\text{I}\}$ [41] y $\text{TKE}^*\{\text{I}\}$ [41] y que genéricamente denotamos por $\mathbf{TKE}\{\text{I}\}$. Son elementos de los sectores \mathcal{C}_{14} y \mathcal{C}_{41} . Además, $\pi_u(\mathbf{TKE}\{\text{I}\}) = 0$ junto con $\pi_v(\mathbf{TKE}\{\text{I}\}) = [-\sigma\tau, \sigma\tau]$. La energía es

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKE}\{\text{I}\}] = \frac{2\sqrt{2}}{15} \sigma^3 \tau^3 (15 - 5\sigma^2 - 5\tau^2 + 3\sigma^2\tau^2)$$

I.3 $\mathbf{TKE}\{\text{II}\}$: Una novedad que incluye el sistema es que podemos considerar como órbita otro tramo elíptico diferente a la expresión (2.32). Existen, por tanto, dos trayectorias elípticas que soportan soluciones. La segunda es la curva

$$\phi_1^2 + \frac{\phi_2^2}{\bar{\tau}^2} = \sigma^2 \quad (2.34)$$

que siguiendo los pasos anteriores, nos proporciona la solución en forma implícita

$$\left| \frac{\sigma + \phi_1}{\sigma - \phi_1} \right|^{\frac{1}{\sigma}} \left| \frac{1 - \phi_1}{1 + \phi_1} \right| = e^{2\sqrt{2}\tau^3\bar{\sigma}^2\bar{x}} \quad (2.35)$$

La ecuación (2.35) determina soluciones que conectan los vacíos v^2 y v^3 mediante cuatro soluciones que nombramos como $\text{TKE}\{\text{II}\}$ [23], $\text{TKE}^*\{\text{II}\}$ [23], $\text{TKE}\{\text{II}\}$ [32] y $\text{TKE}^*\{\text{II}\}$ [32], a las cuales designamos simbólicamente por $\mathbf{TKE}\{\text{II}\}$. Forman parte de los sectores \mathcal{C}_{23} y \mathcal{C}_{32} del espacio de configuración. El cálculo de la energía reporta el mismo resultado que en el punto anterior. La figura 2.11 muestra las trayectorias (2.32) y (2.34) seguidas por las soluciones \mathbf{TKE} .

I.4 $\mathbf{NTK}(\gamma_1)$ y $\mathbf{TKS}(\gamma_1)$: En los anteriores puntos hemos descrito las soluciones singulares del modelo en su fase I. Corresponde, ahora, encontrar las soluciones densas que aparecen en el sistema. Como es habitual, para tal fin, es preciso emplear la teoría de Hamilton-Jacobi, plasmada en las ecuaciones (2.9) y (2.10). Se concluye que tales soluciones poseen una trayectoria regida por la fórmula

$$\left\{ \left(\frac{u - \sigma\tau}{u + \sigma\tau} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^2\bar{\tau}^2}} \left| \frac{u + \tau}{u - \tau} \right|^{\frac{\sigma^3}{\bar{\sigma}^2\gamma^2}} \left(\frac{\sigma - u}{\sigma + u} \right)^{\frac{\tau^3}{\bar{\tau}^2\gamma^2}} \right\}^{\text{Sign}(u')} \cdot \left\{ \left(\frac{\sigma\tau - v}{\sigma\tau + v} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^2\bar{\tau}^2}} \left(\frac{\tau + v}{\tau - v} \right)^{\frac{\sigma^3}{\bar{\sigma}^2\gamma^2}} \left(\frac{\sigma - v}{\sigma + v} \right)^{\frac{\tau^3}{\bar{\tau}^2\gamma^2}} \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{2\sqrt{2}\sigma^3\tau^3\gamma_1} \quad (2.36)$$

mientras que su dependencia espacial es

$$\left\{ \left(\frac{u - \sigma\tau}{u + \sigma\tau} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^2\bar{\tau}^2}} \left| \frac{u + \tau}{\tau - u} \right|^{\frac{\sigma}{\bar{\sigma}^2\gamma^2}} \left(\frac{\sigma - u}{\sigma + u} \right)^{\frac{\tau}{\bar{\tau}^2\gamma^2}} \right\}^{\text{Sign}(u')} \cdot \left\{ \left(\frac{\sigma\tau - v}{\sigma\tau + v} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^2\bar{\tau}^2}} \left(\frac{\tau + v}{\tau - v} \right)^{\frac{\sigma}{\bar{\sigma}^2\gamma^2}} \left(\frac{\sigma - v}{\sigma + v} \right)^{\frac{\tau}{\bar{\tau}^2\gamma^2}} \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{2\sqrt{2}\sigma\tau(x+\gamma_2)} \quad (2.37)$$

Las expresiones (2.36) y (2.37) describen dos familias de soluciones kinks:

I.4.1 Familia $\mathbf{NTK}(\gamma_1)$: Son parametrizadas por el valor de γ_1 en el rango $(-\infty, \infty)$ y se encuentran encerradas en la celda ξ^*P_{11} , delimitada por la elipse (2.32). Se caracterizan por la conexión del vacío v^2 o v^3 consigo mismo, formando parte de los sectores \mathcal{C}_{22} y \mathcal{C}_{33} . Su comportamiento es totalmente análogo al descrito para los kinks presentes en el modelo MSTB, ver figura 1.12. Por ello, los denotaremos por $\mathbf{NTK}(\gamma_1)$, que específicamente vienen constituidos por $\mathbf{NTK}[22](\gamma_1)$ y $\mathbf{NTK}[33](\gamma_1)$. En cuanto a los valores asintóticos, podemos escribir, para este caso,

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{NTK}(\gamma_1) \equiv \mathbf{TK1}^{(2)} + \mathbf{TKE}\{\mathbf{II}\}$$

Otra parametrización para estas soluciones puede ser determinada por el ángulo de incidencia de la órbita sobre el punto focal, tal y como fue descrito en la sección 1.3.4. La energía para estas soluciones, sobre la base de que las proyecciones de camino aparecen como $\pi_u(\mathbf{NTK}) = 2[\sigma\tau, \tau]$ y $\pi_v(\mathbf{NTK}) = [-\sigma\tau, \sigma\tau]$, nos proporciona el valor:

$$\mathcal{E}[\mathbf{NTK}(\gamma_1)] = \frac{2\sqrt{2}}{15} \tau^3 (10\sigma^2 + 45\sigma^3 - 15\sigma^5 - 2\tau^2 - 15\sigma^3\tau^2 + 9\sigma^5\tau^2)$$

I.4.2 Familia $\mathbf{TKS}(\gamma_1)$: Sobre el área delimitada entre las dos elipses (2.32) y (2.34), esto es, la celda curvilínea ξ^*P_{21} , se presentan dos subfamilias de soluciones parametrizadas por γ_1 , que conectan los puntos de vacío v^1 y v^3 , una de ellas emergiendo en el semiplano de ϕ_2 positivas y otra en el semiplano negativo, ver figura 2.14. Igualmente se presentan kinks que conectan los vacíos v^2 con v^4 . Forman parte de los sectores \mathcal{C}_{13} , \mathcal{C}_{31} , \mathcal{C}_{24} y \mathcal{C}_{42} . Serán denotados como $\mathbf{TKS}(\gamma_1)$, cuyos elementos son los $\mathbf{TKS}[13](\gamma_1)$, $\mathbf{TKS}[24](\gamma_1)$ y sus antikinks. Ahora, es

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKS}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TKE}\{\mathbf{I}\} + \mathbf{TK1}^{(1)} \\ \mathbf{TKE}\{\mathbf{II}\} + \mathbf{TK1}^{(1)} \end{cases}$$

mientras que $\pi_u(\mathbf{TKS}) = [\tau, \sigma]$ y $\pi_v(\mathbf{TKS}) = [-\sigma\tau, \sigma\tau]$, de modo que

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKS}(\gamma_1)] = \frac{2\sqrt{2}}{15} (\sigma^5 - 5\sigma^3\tau^2 + 5\sigma^2\tau^3 + 15\sigma^3\tau^3 - \tau^5 - 5\sigma^3\tau^5 + 3\sigma^5\tau^5)$$

Fijado el sector \mathcal{C}_{13} (lo siguiente también vale para cualquier otro sector de la familia), la parametrización de las soluciones puede realizarse a través del valor adoptado por γ_1 . Un modo más geométrico puede ser considerado siguiendo el procedimiento usado con las soluciones $\mathbf{TKI}(\gamma_1)$ del modelo I $[\sigma, 1][1][1, 1]$.

Se puede afirmar que en la celda P_{11} se encuadran los kinks \mathbf{NTK} , en P_{21} se tienen los \mathbf{TKS} , sobre ∂P_{11} se encuentran los $\mathbf{TK1}^{(2)}$ y $\mathbf{TKE}\{\mathbf{II}\}$ y finalmente sobre

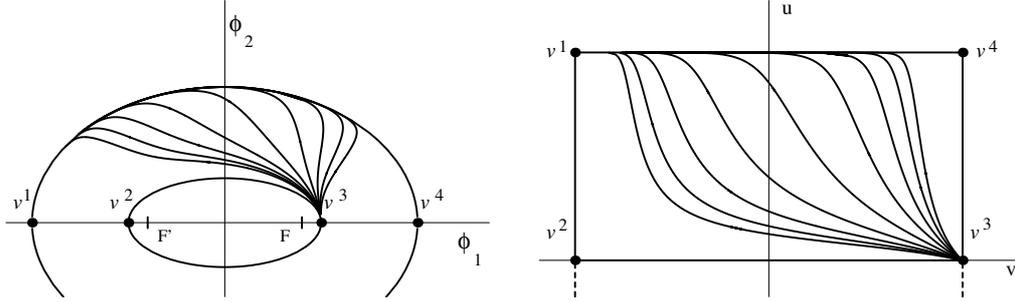


Figura 2.14: *Kinks TKS: en los planos cartesiano (izquierda) y elíptico (derecha).*

∂P_{21} tienen cabida los **TK1**⁽¹⁾ y **TKE{I}**. La aplicación de la teoría de Morse sobre la variedad de soluciones kinks dictamina la estabilidad de las soluciones **TK1**⁽¹⁾, **TKE{I}**, **TKE{II}**, **TKS**(γ_1), mientras que los **TK1**⁽²⁾ y **NTK**(γ_1) son inestables.

FASE II

II.1 TK1: Las soluciones de una sola componente siguen la expresión dada por las ecuaciones en forma implícita (2.31), que ahora conforman las soluciones TK1[12], TK1[23], TK1[34], TK1[21], TK1[32] y TK1[43] y que son clasificadas en el mismo modo dado en la fase I. Son elementos de los sectores topológicos \mathcal{C}_{12} , \mathcal{C}_{23} , \mathcal{C}_{21} , \mathcal{C}_{32} y \mathcal{C}_{43} . Las proyecciones de camino son distintas a las obtenidas en aquel punto, siendo ahora para el primer grupo de soluciones, $\pi_u(\mathbf{TK1}^{(1)}) = [\sigma\tau, \tau]$ y $\pi_v(\mathbf{TK1}^{(1)}) = [\sigma, \sigma\tau]$, que nos permiten el cálculo

$$\mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}] = \frac{2\sqrt{2}}{15} (\sigma + \tau)^3 (3\sigma\tau - \sigma^2 - \tau^2)$$

mientras que para el segundo grupo, siendo $\pi_u(\mathbf{TK1}^{(2)}) = 0$ y $\pi_v(\mathbf{TK1}^{(2)}) = [-\sigma, -\sigma]$, se obtiene

$$\mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(2)}] = \frac{4\sqrt{2}}{15} \sigma^3 (5\tau^2 - \sigma^2)$$

II.2 TKE: Sobre la elipse (2.32) encontramos doce soluciones que enunciamos: TKE[17], TKE[71], TKE[16], TKE[61], TKE[84], TKE[48], TKE[54], TKE[45] (que denotaremos en conjunto como **TKE**⁽¹⁾), TKE[78], TKE[87], TKE[65] y TKE[56] (a las que nos referiremos como **TKE**⁽²⁾). Estas soluciones verifican la expresión dada por (2.33). Las energías corresponden a los valores

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\mathbf{TKE}^{(1)}] &= \frac{\sqrt{2}}{15} \sigma^3 (\tau - 1)^2 (2\sigma^2 + 4\sigma^2\tau - 10\tau^2 + 6\tau^2\sigma^2 - 5\tau^3 + 3\sigma^2\tau^3) \\ \mathcal{E}[\mathbf{TKE}^{(2)}] &= \frac{4\sqrt{2}}{15} \sigma^3 (5\tau^2 - \sigma^2) \end{aligned}$$

donde explícitamente hemos usado que $\pi_u(\mathbf{TKE}^{(1)}) = 0$, $\pi_v(\mathbf{TKE}^{(1)}) = [\sigma, \sigma\tau]$, $\pi_u(\mathbf{TKE}^{(2)}) = 0$ y $\pi_v(\mathbf{TKE}^{(2)}) = [-\sigma, \sigma]$ sobre (2.11).

II.3 TKH: Teniendo en cuenta el rango de definición de los parámetros σ y τ , advertimos que la curva dada en (2.34) se convierte en una hipérbola, que reescribimos como

$$\phi_1^2 - \frac{\phi_2^2}{\tau^2 - 1} = \sigma^2 \quad (2.38)$$

Ensayando dicha órbita encontraremos soluciones que verifican la expresión (2.35). Como ilustra la figura 2.12, se conectan los vacíos v^6 , v^2 , v^7 , v^5 , v^3 y v^8 , mediante kinks que llamaremos TKH[62], TKH[72], TKH[35] y TKH[38], junto con los antikinks TKH[26], TKH[27], TKH[53] y TKH[83]. En conjunto quedan señaladas por **TKH**.

II.4 TKP(γ_1), TKQ(γ_1) y TKS(γ_1): Usando la teoría de Hamilton-Jacobi, para esta fase obtenemos expresiones similares a (2.36) y (2.37). Para las trayectorias, se tiene

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{u - \sigma}{u + \sigma} \right)^{\frac{\tau^3}{\bar{\tau}^2 \gamma^2}} \left(\frac{u + \sigma\tau}{u - \sigma\tau} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^2 \bar{\tau}^2}} \left(\frac{\tau - u}{\tau + u} \right)^{\frac{\sigma^3}{\bar{\sigma}^2 \gamma^2}} \right\}^{\text{Sign}(u')} \\ & \cdot \left\{ \left| \frac{v - \sigma}{v + \sigma} \right|^{\frac{\tau^3}{\bar{\tau}^2 \gamma^2}} \left(\frac{\sigma\tau - v}{\sigma\tau + v} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^2 \bar{\tau}^2}} \left(\frac{\tau + v}{\tau - v} \right)^{\frac{\sigma^3}{\bar{\sigma}^2 \gamma^2}} \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{2\sqrt{2}\sigma^3\tau^3\gamma_1} \end{aligned} \quad (2.39)$$

y la dependencia espacial viene expresada como

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{u - \sigma}{u + \sigma} \right)^{\frac{\tau}{\bar{\tau}^2 \gamma^2}} \left(\frac{u + \sigma\tau}{u - \sigma\tau} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^2 \bar{\tau}^2}} \left(\frac{\tau - u}{\tau + u} \right)^{\frac{\sigma}{\bar{\sigma}^2 \gamma^2}} \right\}^{\text{Sign}(u')} \\ & \cdot \left\{ \left| \frac{v - \sigma}{v + \sigma} \right|^{\frac{\tau}{\bar{\tau}^2 \gamma^2}} \left(\frac{\sigma\tau + v}{\sigma\tau - v} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}^2 \bar{\tau}^2}} \left(\frac{\tau - v}{\tau + v} \right)^{\frac{\sigma}{\bar{\sigma}^2 \gamma^2}} \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{2\sqrt{2}\sigma\tau(x+\gamma_2)} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Las curvas separatrices vienen determinadas por la elipse (2.32), la hipérbola (2.38) y el eje OX. Estas curvas delimitan las celdas ξ^*P_{11} , ξ^*P_{12} y ξ^*P_{13} . Siguiendo la expresión (2.39), encontramos tres familias parametrizadas por el valor de γ_1 , que clasificamos como

II.4.1 Familia TKP(γ_1): Corresponden a soluciones que denotaremos por las siglas **TKP(γ_1)**, constituidas por aquellas que podemos especificar como TKP[73](γ_1), TKP[28](γ_1), TKP[37](γ_1) y TKP[82](γ_1), encerradas en la región $\xi_+^*(P_{12})$ y los kinks TKP[63](γ_1), TKP[25](γ_1), TKP[36](γ_1) y TKP[52](γ_1), situados en $\xi_-^*(P_{12})$. Ver figura 2.15. Se cumple que:

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKP}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TKH} + \mathbf{TKE}^{(2)} \\ \mathbf{TK1}^{(2)} + \mathbf{TKH} \end{cases}$$

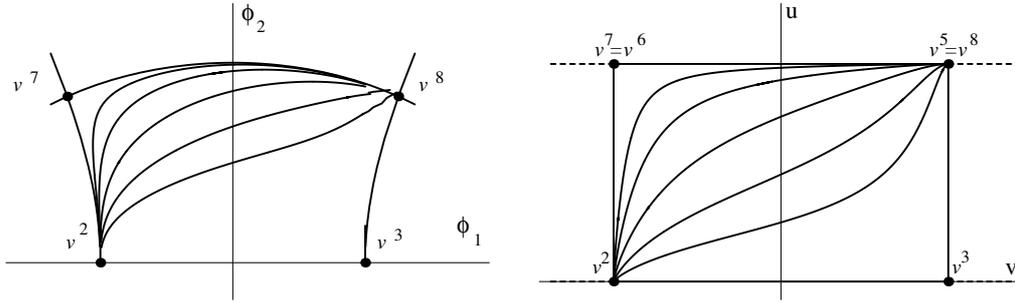


Figura 2.15: *Kinks TKP en los planos cartesiano (izquierda) y elíptico (derecha).*

A la vista de los resultados anteriores, la parametrización de las soluciones puede ser obtenida considerando, como ya hicimos en otros casos, el valor \tilde{v} que es fijado por el punto de corte de la trayectoria con una elipse dada por $u = a$. La energía, bajo el cumplimiento de $\pi_u(\mathbf{TKP}(\gamma_1)) = [\sigma\tau, \tau]$ y $\pi_v(\mathbf{TKP}(\gamma_1)) = [-\sigma, \sigma]$, es

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKP}(\gamma_1)] = \frac{\sqrt{2}}{15}(-4\sigma^5 + 20\sigma^3\tau^2 + 10\sigma^2\tau^3 + 15\sigma^3\tau^3 - 5\sigma^5\tau^3 - 2\tau^5 - 5\sigma^3\tau^5 + 3\sigma^5\tau^5)$$

II.4.2 Familia $\mathbf{TKQ}(\gamma_1)$: Englobamos bajo la notación $\mathbf{TKQ}(\gamma_1)$ aquellas soluciones situadas en las celdas P_{11} y P_{13} , que surgen de la expresión (2.39) al tomar $\text{Sign}(u') \neq \text{Sign}(v')$. Sobre P_{11} se conectan los puntos de vacío v^1 y v^2 , originando las soluciones particulares $\mathbf{TKQ}[12](\gamma_1)$ y $\mathbf{TKQ}[21](\gamma_1)$ y en P_{12} se enlazan v^3 y v^4 mediante kinks $\mathbf{TKQ}[34](\gamma_1)$ y $\mathbf{TKQ}[43](\gamma_1)$, como puede ser comprobado en la figura 2.16. Asintóticamente

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKQ}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TKE}^{(1)} + \mathbf{TKH} \\ \mathbf{TK1}^{(1)} \end{cases}$$

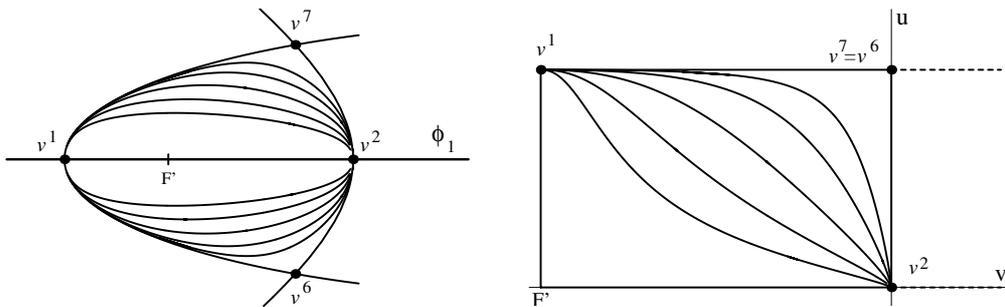


Figura 2.16: *Kinks TKQ en los planos cartesiano (izquierda) y elíptico (derecha).*

Dado que para estas soluciones las proyecciones de camino verifican las igualdades $\pi_u(\mathbf{TKQ}(\gamma_1)) = [\sigma\tau, \tau]$ y $\pi_v(\mathbf{TKQ}(\gamma_1)) = [\sigma, \sigma\tau]$, su energía será:

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKQ}(\gamma_1)] = \frac{2\sqrt{2}}{15}(\sigma + \tau)^3(3\sigma\tau - \sigma^2 - \tau^2)$$

II.4.3 Familia $\mathbf{TKF}(\gamma_1)$: Coexiste, además, una tercera familia de soluciones, embebida en las celdas P_{11} y P_{13} , y que son caracterizadas por la igualdad de signos $\text{Sign}(u') = \text{Sign}(v')$ en (2.39). En P_{11} se enlazan los puntos v^6 y v^7 mediante la presencia de los kinks $\mathbf{TKF}[67](\gamma_1)$ y $\mathbf{TKF}[76](\gamma_1)$, que cruzan por el foco F' . Sobre P_{13} quedan ligados v^5 y v^8 mediante los kinks $\mathbf{TKF}[58](\gamma_1)$ y $\mathbf{TKF}[85](\gamma_1)$ que atraviesan el foco F , véase figura 2.17. Los llamaremos de forma genérica por $\mathbf{TKF}(\gamma_1)$. Podemos concluir que

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKF}(\gamma_1) \equiv \mathbf{TKE}^{(1)} + \mathbf{TK1}^{(1)} + \mathbf{TKH}$$

lo que se encuentra relacionado con los resultados $\pi_u(\mathbf{TKF}) = 2[\sigma\tau, \tau]$ y $\pi_v(\mathbf{TKF}) = 2[\sigma, \sigma\tau]$, de donde se deduce que

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKF}(\gamma_1)] = \frac{4\sqrt{2}}{15}(\sigma + \tau)^3(3\sigma\tau - \tau^2 - \sigma^2)$$

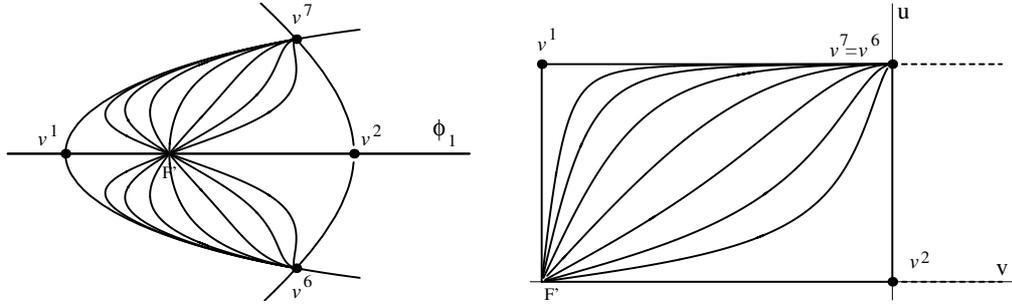


Figura 2.17: Kinks \mathbf{TKF} en los planos cartesiano (izquierda) y elíptico (derecha).

Ahora, puede ser usada la parametrización flujo focal como herramienta para analizar los sectores de esta familia. Para el sector \mathcal{C}_{67} , se tiene:

	Parámetro	Solución
1)	$\theta = 0$	$\mathbf{TKE}[61] + \mathbf{TK1}[12] + \mathbf{TKH}[27]$
2)	$\theta \in (0, \pi)$	$\mathbf{TKF}[67]$
3)	$\theta = \pi$	$\mathbf{TKH}[62] + \mathbf{TK1}[21] + \mathbf{TKE}[17]$

Podemos resumir diciendo que sobre P_{12} sobreviven los kinks $\mathbf{TKP}(\gamma_1)$, sobre P_{11} y P_{13} coexisten los $\mathbf{TKQ}(\gamma_1)$ con los $\mathbf{TKF}(\gamma_1)$. Además, sobre la frontera ∂P_{12}

se asientan los **TKH**, los **TK1⁽²⁾** y **TKE⁽²⁾** y sobre ∂P_{11} y ∂P_{13} lo hacen **TK1⁽¹⁾**, **TKE⁽¹⁾** y **TKH**. El análisis de la estabilidad vía la teoría de Morse proporciona los siguientes resultados: los kinks **TK1⁽²⁾**, **TKE⁽¹⁾**, **TKE⁽²⁾**, **TKH**, **TKP^(γ_1)** y **TKQ^(γ_1)** son estables, mientras que los kinks **TK1⁽¹⁾**, **TKF^(γ_1)** son inestables.

FASE III

Este caso es más simple que los anteriores. Las soluciones de tipo kink quedan descritas en los siguientes puntos:

III.1 TK1: Existen seis soluciones con componente imaginaria nula, expresadas por la condición (2.31), clasificadas y denotadas como en las fases anteriores. En lo que se refiere a la energía, siendo $\pi_u(\mathbf{TK1}^{(1)}) = [\sigma, 1]$, $\pi_v(\mathbf{TK1}^{(1)}) = 0$, $\pi_u(\mathbf{TK1}^{(2)}) = 0$ y $\pi_v(\mathbf{TK1}^{(2)}) = [-\sigma, \sigma]$, se concluye:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}] &= \frac{2\sqrt{2}}{15}(1-\sigma)^3(1+\sigma(3+\sigma)) \\ \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(2)}] &= \frac{4\sqrt{2}}{15}\sigma^3(5-\sigma^2)\end{aligned}$$

III.2 TKE: Sobre la órbita elíptica dada por (2.32) encontraremos cuatro kinks, que verifican la relación (2.33) y que seguiremos denotando por **TKE**, siendo ahora $\pi_u(\mathbf{TKE}) = 0$ y $\pi_v(\mathbf{TKE}) = [-\sigma, \sigma]$, en tal sentido que:

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKE}(\gamma_1)] = \frac{4\sqrt{2}}{15}\sigma^3(5-\sigma^2)$$

III.3 TKV^(γ_1): La teoría de Hamilton-Jacobi nos permite encontrar una familia de soluciones parametrizadas por γ_1 que conectan los vacíos v^1 y v^3 , que llamamos como **TKV[13]^(γ_1)** y **TKV[31]^(γ_1)**, junto con los que unen v^2 y v^4 , representados como **TKV[24]^(γ_1)** y **TKV[42]^(γ_1)**. En conjunto, serán denotados por **TKV^(γ_1)**, y resultan de la expresión

$$\begin{aligned}& \left\{ \left(\frac{u+\sigma}{u-\sigma} \right)^{\frac{1-3\sigma^2}{2}} \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\sigma^3} \exp \left[\frac{-\sigma\bar{\sigma}^2 u}{u^2 - \sigma^2} \right] \right\}^{\text{Sign}(u')} \\ & \left\{ \left(\frac{\sigma-v}{\sigma+v} \right)^{\frac{1-3\sigma^2}{2}} \left(\frac{1-v}{1+v} \right)^{\sigma^3} \exp \left[\frac{\sigma\bar{\sigma}^2 v}{v^2 - \sigma^2} \right] \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{2\sqrt{2}\gamma_1}\end{aligned}\tag{2.41}$$

que nos proporciona sus órbitas, mientras que la dependencia espacial viene determinada mediante

$$\left\{ \left(\frac{u - \sigma}{u + \sigma} \right)^{\frac{1-3\sigma^2}{2\sigma^3}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right) \exp \left[\frac{\bar{\sigma}^2 u}{\sigma^2(u^2 - \sigma^2)} \right] \right\}^{\text{Sign}(u')} \cdot \left\{ \left(\frac{\sigma + v}{\sigma - v} \right)^{\frac{1-3\sigma^2}{2\sigma^3}} \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \exp \left[\frac{-\bar{\sigma}^2 v}{\sigma^2(v^2 - \sigma^2)} \right] \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{2\sqrt{2}\gamma_1} \quad (2.42)$$

Sobre estas soluciones, podemos escribir

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKV}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TK1}^{(1)} + \mathbf{TKE} \\ \mathbf{TK1}^{(1)} + \mathbf{TK1}^{(2)} \end{cases}$$

El modelo presenta una sola celda P_{11} , en la que se ubican los kinks $\mathbf{TKV}(\gamma_1)$. Sobre ∂P_{11} lo hacen las soluciones singulares, $\mathbf{TK1}$ y \mathbf{TKE} .

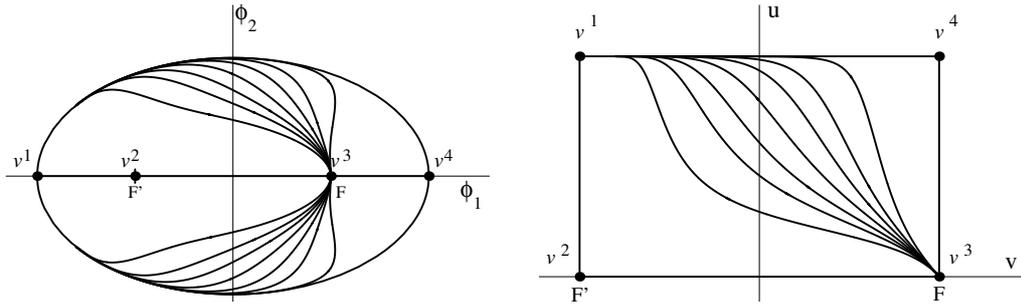


Figura 2.18: *Kinks* \mathbf{TKV} en los planos cartesiano (izquierda) y elíptico (derecha).

Adviértase la similitud existente entre este modelo en su Fase III y el modelo MSTB, lo cual es manifestado en sus etiquetas (que identifican los parámetros del sistema), $I[\sigma, 1][0][1, 1]$ y $I[\sigma, 1][0][0, 1]$ respectivamente, o bien repasando las expresiones (1.45) y (2.29) que muestran las expresiones elípticas de ambos potenciales. La diferencia esencial reside en que en el caso presente los puntos focales se convierten en vacíos del sistema físico. Las soluciones surgen o perecen en los puntos focales. Las proyecciones de camino son $\pi_u(\mathbf{TKV}(\gamma_1)) = [\sigma, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TKV}(\gamma_1)) = [-\sigma, \sigma]$, de modo que:

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKV}(\gamma_1)] = \frac{2\sqrt{2}}{15}(1 - 5\sigma^2 + 15\sigma^3 - 3\sigma^5)$$

El uso de la parametrización flujo focal queda mal definida, en contra de lo acaecido en el modelo MSTB (véase figura 2.18). Podría emplearse como parametrización de las soluciones aquella basada en el corte de la ordenada en el plano ϕ_1 - ϕ_2 , en tal sentido que cada solución viene identificada por su corte con el eje $\phi_1 = 0$. Para el sector \mathcal{C}_{13} podemos anunciar lo siguiente

	Parámetro	Solución
1)	$\tilde{\phi}_2 = \bar{\sigma}\tau$	TKE[14] + TK1 ⁽¹⁾ [43]
2)	$\tilde{\phi}_2 \in (\bar{\sigma}\tau, 0)$	TKV[13](+)
3)	$\tilde{\phi}_2 = 0$	TK1 ⁽¹⁾ [12] + TK1 ⁽²⁾ [23]
4)	$\tilde{\phi}_2 \in (0, -\bar{\sigma}\tau)$	TKV[13](-)
5)	$\tilde{\phi}_2 = -\bar{\sigma}\tau$	TKE*[14] + TK1 ⁽¹⁾ [43]

El análisis de la estabilidad mediante la teoría de Morse establece la identificación de la variedad de kinks descrita con las geodésicas de la esfera que parten del polo norte y concluyen en el polo sur. Por ello, las soluciones presentes en la fase III del modelo serían estables.

Los espacios de Moduli son presentados como un compendio de los resultados obtenidos

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K^I) = \{\mathbf{TK1}^{(1)}, \mathbf{TK1}^{(2)}, \mathbf{TKE}\{\mathbf{I}\}, \mathbf{TKE}\{\mathbf{II}\}, \mathbf{NTK}(\gamma_1), \mathbf{TKS}(\gamma_1)\}$$

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K^{II}) = \{\mathbf{TK1}^{(1)}, \mathbf{TK1}^{(2)}, \mathbf{TKE}^{(1)}, \mathbf{TKE}^{(2)}, \mathbf{TKH}, \mathbf{TKP}(\gamma_1), \mathbf{TKQ}(\gamma_1), \mathbf{TKF}(\gamma_1)\}$$

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K^{III}) = \{\mathbf{TK1}^{(1)}, \mathbf{TK1}^{(2)}, \mathbf{TKE}, \mathbf{TKV}(\gamma_1)\}$$

Reglas de suma:

Finalmente, haremos mención de las reglas de suma para cada fase. Quedan enunciadas en el siguiente párrafo,

- **FASE I:**

1. $\mathcal{E}[\mathbf{TKE}\{\mathbf{I}\}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKE}\{\mathbf{II}\}]$
2. $\mathcal{E}[\mathbf{TKS}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKE}] + \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}]$
3. $\mathcal{E}[\mathbf{NTK}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKE}\{\mathbf{II}\}] + \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(2)}]$

- **FASE II:**

1. $\mathcal{E}[\mathbf{TKE}^{(2)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(2)}]$
2. $\mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKE}^{(1)}] + \mathcal{E}[\mathbf{TKH}]$
3. $\mathcal{E}[\mathbf{TKP}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKE}^{(2)}] + \mathcal{E}[\mathbf{TKH}]$
4. $\mathcal{E}[\mathbf{TKQ}] = \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}]$
5. $\mathcal{E}[\mathbf{TKF}] = 2\mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}]$

- **FASE III:**

1. $\mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(2)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKE}]$
2. $\mathcal{E}[\mathbf{TKV}] = \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}] + \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(2)}]$

Debe llamarse la atención sobre los siguientes curiosos comportamientos:

- i) Respecto de la fase I, los kinks asentados sobre las elipses (2.32) y (2.34) de distinto trazado y recorrido están caracterizados por el mismo valor de la energía. A este respecto, una brillante explicación en base a la métrica de Jacobi puede leerse en [65].
- ii) En la fase II poseen la misma energía las soluciones que unen v^2 y v^3 asentadas sobre el eje $O\phi_1$ que aquellas que conectan v^5 y v^6 a lo largo del tramo elíptico (2.32). Además, los **TKF** que ligan, por ejemplo, v^7 y v^6 poseen doble energía que los **TK1** que enlazan v^1 y v^2 .
- iii) Sobre la fase III es de resaltar que el kink TKE[14] tiene el mismo valor de la energía que el TK1⁽²⁾[23].

2.8 Kinks genéricos de Tipo I

Con el objeto de concluir este capítulo, dedicado íntegramente a los modelos de Liouville de tipo I en teorías de campos con ruptura de simetría espontánea y tras haber estudiado varios ejemplos de forma detallada, generalizaremos los resultados encontrados abarcando aquellos sistemas físicos que introducían el término potencial (2.21). La descripción del retículo y de las celdas que tienen lugar, fueron comentadas genéricamente en la sección 2.5. En estos casos, las expresiones (2.9) y (2.10) quedan dadas por

$$\int \frac{\text{Sign}(u') du}{u^{\alpha_0}(u^2 - \Omega^2) \prod_{i=1}^n |u^2 - \sigma_i^2|^{\alpha_i}} + \int \frac{\text{Sign}(v^{\alpha_0} v') dv}{v^{\alpha_0}(v^2 - \Omega^2) \prod_{i=1}^n |v^2 - \sigma_i^2|^{\alpha_i}} = \sqrt{2}A\gamma_1$$

y

$$\int \frac{\text{Sign}(u') u^2 du}{u^{\alpha_0}(u^2 - \Omega^2) \prod_{i=1}^n |u^2 - \sigma_i^2|^{\alpha_i}} + \int \frac{\text{Sign}(v^{\alpha_0} v') v^2 dv}{v^{\alpha_0}(v^2 - \Omega^2) \prod_{i=1}^n |v^2 - \sigma_i^2|^{\alpha_i}} = \sqrt{2}A(x + \gamma_2)$$

Con el objetivo de abordar estas expresiones, los modelos elípticos se agruparon inicialmente en cuatro casos. Analizaremos las características de las soluciones kinks de cada uno de ellos, estudiando casos que sin ser tan generales como los mencionados, describen perfectamente todas las propiedades de las soluciones presentes.

- **CASO A1.** Viene caracterizado por los valores $\alpha_0 = \alpha_r = 0, \alpha_i = 1$, con $1 \leq i \leq n$ sobre la relación (2.21). Los sistemas físicos quedarían identificados

por las siglas $I[\vec{\sigma}][0][(1\dots 10), (1\dots 1)]$ e incluirían un potencial expresado como

$$U = \frac{A^2}{u^2 - v^2} \left[(u^2 - \Omega^2) \prod_{i \neq r}^n (u^2 - \sigma_i^2)^2 + (\Omega^2 - v^2) \prod_{i \neq r}^n (v^2 - \sigma_i^2)^2 \right]$$

La trayectoria, tras la integración de los términos que aparecen en las fórmulas mostradas arriba, atiende a la expresión

$$\{f_A(u)\}^{\text{Sign}(u')} \{f_A(v)\}^{\text{Sign}(v')} = e^{\sqrt{2}A\gamma_1} \quad (2.43)$$

mientras que la dependencia espacial sigue de

$$\{f_B(u)\}^{\text{Sign}(u')} \{f_B(v)\}^{\text{Sign}(v')} = e^{\sqrt{2}A(x+\gamma_2)} \quad (2.44)$$

donde las funciones $f_A(u)$ y $f_B(u)$ quedan definidas en el apéndice A.

- **CASO B1.** Corresponde a los valores $\alpha_0 = 1, \alpha_r = 0, \alpha_i = 1$ con $1 \leq i \leq n$ sobre (2.21), es decir, el potencial es de la forma

$$U = \frac{A^2}{u^2 - v^2} \left[u^2(u^2 - \Omega^2) \prod_{i \neq r}^n (u^2 - \sigma_i^2)^2 + v^2(\Omega^2 - v^2) \prod_{i \neq r}^n (v^2 - \sigma_i^2)^2 \right]$$

que caracteriza los modelos $I[\vec{\sigma}][1][(1\dots 0)(1\dots 1)]$. Usando las funciones definidas en el apéndice A, la trayectoria puede escribirse como

$$\{f_C(u)\}^{\text{Sign}(u')} \{f_C(v)\}^{\text{Sign}(vv')} = e^{\sqrt{2}A\gamma_1} \quad (2.45)$$

mientras que la dependencia espacial llega a ser

$$\{f_D(u)\}^{\text{Sign}(u')} \{f_D(v)\}^{\text{Sign}(vv')} = e^{\sqrt{2}A(x+\gamma_2)} \quad (2.46)$$

- **CASO C1.** Ahora, tomaremos $\alpha_0 = 0, \alpha_r = 1, \alpha_i = 1$ con $1 \leq i \leq n$, que particulariza el caso C más genérico. Los modelos son representados por $I[\vec{\sigma}][0][1\dots 1]$, e incluye el potencial,

$$U = \frac{A^2}{u^2 - v^2} \left[(u^2 - \Omega^2) \prod_{i=1}^n (u^2 - \sigma_i^2)^2 + (\Omega^2 - v^2) \prod_{i=1}^n (v^2 - \sigma_i^2)^2 \right]$$

La trayectoria atiende a la expresión

$$\frac{\{f_E(u)\}^{\text{Sign}(u')}}{\{f_E(v)\}^{\text{Sign}(v')}} = e^{\sqrt{2}A\gamma_1} \quad (2.47)$$

mientras que la dependencia espacial sigue de

$$\frac{\{f_F(u)\}^{\text{Sign}(u')}}{\{f_F(v)\}^{\text{Sign}(v')}} = e^{\sqrt{2}A(x+\gamma_2)} \quad (2.48)$$

con las definiciones mostradas en el apéndice A.

Las expresiones para los casos más generales que nombrabamos como A, B, C y D pueden ser obtenidas pero corresponden a expresiones altamente engorrosas y no funcionales. Además, los kinks de los casos A1, B1 y C1 describen perfectamente las propiedades de todas las soluciones posibles en este tipo I.

Compendio de propiedades de los kinks tipo I

El estudio de las expresiones (2.43), (2.45) y (2.47), nos permite enunciar una serie de propiedades generales de los kinks que podemos encontrar en el tipo I:

- Las soluciones de cada modelo son obtenidas, vía Hamilton-Jacobi, mediante las relaciones (2.9) y (2.10), la primera de las cuales depende del valor γ_1 que parametriza las posibles trayectorias, mientras que la segunda dependiente de γ_2 parametriza el modo cero de las soluciones kinks.
- Las separatrices, introducidas en la sección 2.2, surgen como un límite singular de la expresión (2.9), en el que la constante $\gamma_1 \rightarrow \pm\infty$. Forman en el plano elíptico el llamado *retículo*, que delimita un conjunto de *celdas*, en la que los nudos constituyen los puntos de vacío junto con los puntos focales.
- Por inspección de las condiciones (2.43), (2.45) y (2.47) puede ser afirmado que para un valor finito de γ_1 , la trayectoria no cruzará en ningún momento las curvas separatrices, sino que queda encerrada en las distintas celdas, siendo la única posibilidad, a la vista de las expresiones anteriores, que el traspaso a otra celda se haga a través de los vértices de la celda (nudos del retículo). Dentro de una celda mediante el teorema de Bolzano y técnicas de paso al límite puede comprobarse que los kinks tienen trayectorias que conectan los vértices opuestos. Estos vértices, como ya fue señalado, pueden ser puntos de vacío (lo cual determinaría una solución kink simple a través de un espacio infinito) o bien que alguno de ellos fuese un punto focal, permitiendo en tal caso el traspaso a otra celda, tal que la solución finalizaría en el vértice opuesto de la nueva celda, el cual correspondería a un punto de vacío. En ambos casos, las trayectorias son densas, en el sentido de que llenan el área del interior de la celda. Las soluciones singulares aparecen sobre el retículo conectando nudos opuestos dentro de tal restricción.
- El flujo de trayectorias, de forma general, viene expresada como

$$\frac{du}{dv} = \frac{\text{Sign}(u') u^{\alpha_0} (u^2 - \Omega^2)^{\alpha_r+1} \prod_{i \neq r}^n (u^2 - \sigma_i^2)^{\alpha_i}}{\text{Sign}(v_0^\alpha v') v^{\alpha_0} (v^2 - \Omega^2)^{\alpha_r+1} \prod_{i \neq r}^n (v^2 - \sigma_i^2)^{\alpha_i}}$$

magnitud que es indefinida para todas las trayectorias en los puntos de vacío. Sin embargo, para las trayectorias que abarcan dos celdas, atravesando por algún punto focal, el flujo adopta en tales puntos un valor que puede utilizarse para identificar cada una de las trayectorias. Así, para el caso A, será

$$\left. \frac{du}{dv} \right|_{(\pm\Omega, \Omega)} = \pm \exp \left\{ \pm 2\sqrt{2} \Omega A \gamma_1 \prod_{i \neq r}^n (\Omega^2 - \sigma_j^2) \right\}$$

mientras que para el caso B, se tiene el valor

$$\left. \frac{du}{dv} \right|_{(\pm\Omega, \Omega)} = \pm \exp \left\{ \pm 2\sqrt{2} \Omega^2 A \gamma_1 \prod_{i \neq r}^n (\Omega^2 - \sigma_j^2) \right\}$$

siendo indefinido el flujo para el caso C, habida cuenta de que los puntos focales se convierten en puntos de vacío.

Galería de kinks de tipo I:

Llegado este momento, podemos describir las soluciones existentes de forma general, y con tal motivo, identificaremos cada nudo del retículo por un par de índices (i, j) , correspondientes a los subíndices de las constantes de acoplamiento σ_k , que caracterizan la localización del punto de vacío. El primer índice determina la hipérbola separatriz (positivo si es referido al semiplano $v > 0$ y negativo para $v < 0$) y el segundo especifica la elipse separatriz, cuya intersección implica la presencia del punto de vacío. El elenco de kinks debe ser relatado en cada caso particular. Así,

CASO A:

Definiendo los conjuntos de índices,

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \{-r, -(r-1), -(r-2), \dots, -1, 1, \dots, r-1, r\} \\ \mathbf{j} &= \{r, r+1, \dots, n-1, n\} \end{aligned}$$

los vacíos quedan caracterizados por el conjunto de índices,

$$\mathcal{I}_A = \mathbf{i} \times \mathbf{j} - \{(-r, r), (r, r)\}$$

en el sentido de que los vacíos se encuentran localizados en los puntos del plano elíptico $v^{(i,j)} = (\text{Sign}(k_1)\sigma_{|k_1|}, \sigma_{k_2})$ con $(k_1, k_2) \in \mathcal{I}_A$. Debe advertirse el hecho de que han sido eliminados del conjunto de índices dobles \mathcal{I}_A aquellos puntos que aun siendo nudos del retículo corresponden a los puntos focales y no son vacíos del modelo. Concluimos los aspectos de notación describiendo diversas operaciones sobre índices: fijado un vacío caracterizado por los índices $\mathbf{l} = (\pm i, j) \in \mathcal{I}_A$, consideraremos los nuevos índices $\mathbf{l}' = (\pm i+, j+)$, $\mathbf{l}'' =$

$(\pm i+, j), \mathbf{I}''' = (\pm i, j+)$, siendo $i+$ una operación prioritaria en el subconjunto de índices $\mathbf{i}' = \{-1, 1, 2, \dots, r-1, r\} \subset \mathbf{i}$ tal que a un elemento i' le asocia el siguiente elemento en orden de \mathbf{i}' y $j+$ el siguiente en \mathbf{j} .

Los kinks quedan identificados enumerando los nudos del retículo que incluye cada solución. La variedad de soluciones quedará descrita por el espacio de Moduli $\text{Mod}(\mathcal{C}_K)$, al que permanecen la siguiente letanía de kinks:

Soluciones densas:
TK[\mathbf{I}, \mathbf{I}'](γ_1) TK[$\mathbf{I}'', \mathbf{I}'''$](γ_1) TKF=TK[($\pm r-, r+$), ($\pm r, r$), ($\pm r-, r+$)](γ_1)
Soluciones singulares:
TKH[$\mathbf{I}, \mathbf{I}'''$] TKE[\mathbf{I}, \mathbf{I}''] TK1[($\pm r, r+1$), ($\pm r, r$), ($\pm(r-1), r$)] Caso especial: $r = 1$. TK1FF'=TK1[(1,2), (1,1), (-1,1), (-1,2)]

para cualquier $\mathbf{I}, \mathbf{I}', \mathbf{I}'', \mathbf{I}''' \in \mathcal{I}_A$. Téngase en cuenta, por ejemplo, que los modelos MSTB y el modelo $\text{I}[\sigma, \tau, \sigma\tau][0][011]$ en su fase I implican que $r = 1$.

CASO B:

Para este caso, se redefine el conjunto de índices como

$$\mathbf{i} = \{-r, -(r-1), -(r-2), \dots, -1, 0, 1, \dots, r-1, r\}$$

$$\mathbf{j} = \{r, r+1, \dots, n-1, n\}$$

de modo que el conjunto de índices dobles será

$$\mathcal{I}_B = \mathbf{i} \times \mathbf{j} - \{(-r, r), (r, r)\}.$$

La operación $i+$ se define sobre el subconjunto $\mathbf{i}' = \{0, 1, 2, \dots, r-1, r\} \in \mathbf{i}$. La relación de kinks, que define $\text{Mod}(\mathcal{C}_K)$, es:

Soluciones densas:
TK[\mathbf{I}, \mathbf{I}'](γ_1) TK[$\mathbf{I}'', \mathbf{I}'''$](γ_1) TKF=TK[($\pm r-, r+$), ($\pm r, r$), ($\pm r-, r+$)](γ_1)

Soluciones singulares:
TKH[$\mathbf{l}, \mathbf{l}'''$]
TKE[\mathbf{l}, \mathbf{l}'']
TK1[$(\pm r, r+1), (\pm r, r), (\pm(r-1), r)$]

con $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}''' \in \mathcal{I}_B$.

CASO C:

Los conjuntos \mathbf{i}, \mathbf{j} y la operación $i+$ vienen caracterizados de igual modo que en el caso A, pero se define

$$\mathcal{I}_C = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$$

tal que las soluciones presentes son

Soluciones densas:	Soluciones singulares:
TK[\mathbf{l}, \mathbf{l}'](γ_1)	TKH[$\mathbf{l}, \mathbf{l}'''$]
TK[$\mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$](γ_1)	TKE[\mathbf{l}, \mathbf{l}'']

con $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}''' \in \mathcal{I}_C$.

Reglas de suma

Una vez que se han determinado las soluciones existentes, podremos obtener las reglas de suma, que se disponen como

CASO A:

Fijado $\mathbf{l} \in \mathcal{I}_A$, se cumple:

1. $\mathcal{E}[\text{TK}[\mathbf{l}, \mathbf{l}'](\gamma_1)] = \mathcal{E}[\text{TK}[\mathbf{l}'', \mathbf{l}''']] = \mathcal{E}[\text{TKH}[\mathbf{l}, \mathbf{l}''']](\gamma_1) + \mathcal{E}[\text{TKE}[\mathbf{l}''', \mathbf{l}']]$
2. $\mathcal{E}[\text{TK}[\mathbf{l}, \mathbf{l}'](\gamma_1)] = \mathcal{E}[\text{TKE}[\mathbf{l}, \mathbf{l}''']] + \mathcal{E}[\text{TKH}[\mathbf{l}'', \mathbf{l}']]$
3. $\mathcal{E}[\text{TKH}[\mathbf{l}, \mathbf{l}''']] = \mathcal{E}[\text{TKH}[\mathbf{l}'', \mathbf{l}']]$
4. $\mathcal{E}[\text{TKE}[\mathbf{l}''', \mathbf{l}']] = \mathcal{E}[\text{TKE}[\mathbf{l}, \mathbf{l}''']]$
5. $\mathcal{E}[\text{TKF}(\gamma_1)] = 2\mathcal{E}[\text{TK1}[(\pm r, r+1), (\pm r, r), (\pm(r-1), r)]]$
6. $\mathcal{E}[\text{TKF}(\gamma_1)] = 2\mathcal{E}[\text{TKH}[(r-1, r), (r-1, r+1)]] + 2\mathcal{E}[\text{TKE}[(r-1, r+1), (r, r+1)]]$

Para el caso especial en que $r = 1$, se tiene:

7. $\mathcal{E}[\text{TKF}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\text{TK}[(-1, j), (1, j)]] + \mathcal{E}[\text{TK1FF}']$ y cualquiera de las relaciones que puedan ser obtenidas tras la manipulación de las dadas.

CASO B:

Subsisten las relaciones 1, 2, 3 y 4 de las dadas anteriores, para cada $\mathbf{l} \in \mathcal{I}_B$.

CASO C:

Persisten en este caso las relaciones 1,2 y 3, con $\mathbf{l} \in \mathcal{I}_C$

Capítulo 3

Kinks En Modelos De Liouville III

3.1 Introducción

El primer capítulo albergó el estudio del modelo MSTB, ampliamente introducido en la literatura referente a defectos topológicos [94, 98, 125, 115, 133, 90, 134, 77, 78, 3], como el primer eslabón del análisis de la variedad de kinks incluidos en una serie de modelos que comparten interesantes propiedades, los mencionados modelos de Liouville de Tipo I. En el presente capítulo mostraremos la estructura de la variedad de soluciones kinks asociada a un nuevo bloque de modelos de Liouville, aquellos sistemas físicos que pueden ser resueltos utilizando en los cálculos un sistema de coordenadas parabólicas y que recaen bajo el epígrafe *Tipo III* [109]. En estos modelos la estructura básica es totalmente análoga a los del tipo I. Por ello, presentaremos los resultados de forma somera, aunque con el propósito de fijar las peculiaridades que resultan en estos nuevos casos muchos de los conceptos acuñados en el segundo capítulo serán revisados. Este bloque de modelos también incorpora un sistema físico estandarte, sometido a la presencia de un potencial polinómico cuártico con un estadio de ruptura espontánea de simetría, que puede considerarse como punto de arranque en el estudio de esta clase de modelos, tal y como el modelo MSTB lo fue en el capítulo precedente. Diferentes trabajos en el mismo ámbito en que queda inmersa esta memoria [14, 17, 18, 16, 11] analizan diversos sistemas físicos que incluyen potenciales polinómicos de grado cuatro con cierta libertad de elección en los parámetros, que ajustados proporcionan el aludido con anterioridad. Sin embargo, el estudio realizado se restringe a la obtención de unas pocas soluciones de tipo kink mediante el método de órbitas prueba. En este capítulo completaremos el estudio de la variedad de kinks de dicho modelo e introduciremos el estudio de otros dos modelos, caracterizados por potenciales polinómicos de grado sexto y octavo. Este último contiene en su esencia todas las propiedades de cualquier modelo que pueda generarse mediante esta estructura. Formalmente las características genéricas de los

modelos de Liouville de Tipo III son enunciadas en el final del capítulo mediante la clasificación de los kinks presentes y de las reglas de suma que se verifican.

3.2 De las coordenadas parabólicas.

Consideraremos, de nuevo, el estudio de sistemas físicos en un mundo relativista (1+1) dimensional, en el que alguna magnitud física viene caracterizada por el valor del campo complejo $\phi(x_0, x_1) = \phi_1(x_0, x_1) + i\phi_2(x_0, x_1)$. Supondremos que estos sistemas poseen una dependencia sobre una serie de parámetros que aglomeramos en el vector $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Entenderemos como un sistema de coordenadas parabólico aquel cuya relación con las coordenadas iniciales viene determinado por la transformación

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{P}^2 \equiv (-\infty, \infty) \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_0, v_0) &\longrightarrow (\phi_1^0, \phi_2^0) \end{aligned}$$

de modo que las funciones coordenadas son definidas vía imagen inversa en la forma:

$$\rho^*(\phi_1) = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \qquad \rho^*(\phi_2) = uv \qquad (3.1)$$

El rango de definición de las nuevas variables, que determinan el espacio parabólico, viene establecido como $-\infty < u < \infty$ y $0 \leq v < \infty$, esto es, conforman el semiplano \mathbb{P}^2 . El espacio interno es coordinado por parábolas homofocales sobre el origen, de tal modo que fijando el valor de la variable u se determina la parábola $\phi_2^2 + 2\phi_1 u^2 = u^4$ y si fijamos la otra variable v , el resultado es la curva $\phi_2^2 - 2\phi_1 v^2 = v^4$.

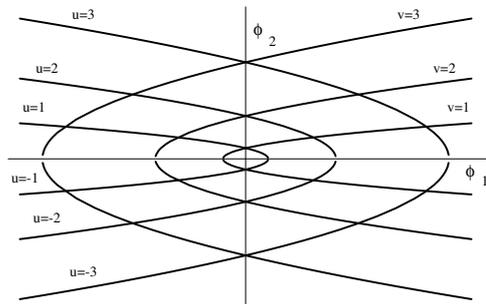


Figura 3.1. Sistema de coordenadas parabólicas

Obsérvese una notable diferencia con el comportamiento de los modelos que componen el tipo I, mientras que la definición (2.1) implica una familia de sistemas de nuevas coordenadas, parametrizadas por el factor $\Omega(\vec{\sigma})^1$, ahora la ausencia de tal grado de libertad tiene como consecuencia la rigidez de la definición (3.1). El resultado es que los sistemas físicos que presentan el mismo grado para el polinomio que caracteriza el término potencial presentarán un número de constantes de acoplamiento inferior en una unidad al obtenido en los sistemas de tipo I. Así, el modelo más simple que abordaremos, de grado cuártico, carecerá de parámetro libre no trivial. Otra diferencia resaltable es que en este caso sólo necesitamos una copia de (3.1) para recuperar todo el plano interno.

¹Este comportamiento está asociado a la libertad de elección en la excentricidad de las cónicas coordenadas que son usadas para las coordenadas elípticas en los modelos de Liouville de Tipo I.

Un sistema físico natural en el marco de la teoría de campos tiene asociado el funcional energía (1.39). Introduciendo el sistema de coordenadas parabólico, el término cinético de tal funcional se convierte en

$$\rho^*T = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right\}$$

El comportamiento del término potencial de (1.39) bajo la transformación (3.1) determina si el sistema físico es englobado en el tipo III. Entonces,

Definición 3.1 [109]: *Diremos que un sistema físico natural cuya dinámica es gobernada por la expresión (1.39) es separable Liouville de Tipo III, si bajo el uso de las coordenadas parabólicas (3.1), el término potencial aparece en la forma*

$$\rho^*U(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{u^2 + v^2} \{f(u) + g(v)\}$$

donde $f(u)$ y $g(v)$ son funciones cualesquiera de las coordenadas parabólicas.

Dicho potencial, genéricamente, introduce una singularidad en el origen. La energía (1.39) para un sistema Liouville de Tipo III puede ser reescrita como

$$\rho^*E = \int dx \left\{ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] + \frac{1}{u^2 + v^2} (f(u) + g(v)) \right\} \quad (3.2)$$

Los mismos conceptos introducidos en los modelos de tipo I tienen validez en este nuevo marco. Se tiene:

Definición 3.2: *Llamaremos celdas asociadas a los modelos de Liouville de Tipo III a aquellos paralelogramos abiertos, englobados en el espacio parabólico \mathbb{P}^2 , determinados como $P_{ij} \equiv (\tilde{u}_i, \tilde{u}_{i+1}) \times (\tilde{v}_j, \tilde{v}_{j+1})$, donde \tilde{u}_i y \tilde{v}_j son respectivamente las raíces de $f(u)$ y $g(v)$ ordenados de menor a mayor².*

Definición 3.3: *Llamaremos separatrices de tipo III a las fronteras ∂P_{ij} de cada celda P_{ij} .*

El retículo $Ret(P)$ puede construirse como el lugar geométrico caracterizado por $Ret(P) = P_u^g \cup P_v^g$, donde $P_u^g = \{(u, v) \in \mathbb{P}^2 / f(u) = 0\}$ y $P_v^g = \{(u, v) \in \mathbb{P}^2 / g(v) = 0\}$, o bien como $Ret(P) = \cup \partial P_{ij}$. Los puntos de vacío y el foco del modelo, situado en el origen, se sitúan sobre los nudos del retículo. Los elementos del conjunto $Ret(P)$ corresponden a tramos rectilíneos en \mathbb{P}^2 , bien caracterizados por la condición $u = \tilde{u}_i$, bien por $v = \tilde{v}_i$. Sobre el plano cartesiano la definición del conjunto $Ret(P)$ se transforma en la unión de los conjuntos $\rho^*(P_u^g) = \{\phi \in \mathbb{C} / \phi^2 + 2\phi_1 \tilde{u}_i^2 = \tilde{u}_i^4\}$ y

²Entendemos por $(\tilde{u}_i, \tilde{u}_{i+1})$ el intervalo abierto entre los puntos \tilde{u}_i y \tilde{u}_{i+1} del eje u del espacio parabólico. Igualmente se interpreta $(\tilde{v}_i, \tilde{v}_{i+1})$.

$\rho^*(P_v^g) = \{\phi \in \mathbb{C} / \phi_2^2 - 2\phi_1\tilde{v}_i^2 = \tilde{v}_i^4\}$, esto es, el retículo está formado por tramos parabólicos.

Para finalizar esta sección anunciamos que el carácter de completa integrabilidad de los sistemas mecánicos asociados a los modelos de Liouville es debida a la presencia de dos integrales primeras. Una de ellas corresponde a la energía mecánica

$$I_1 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right\} - \frac{1}{u^2 + v^2} \{f(u) + g(v)\} \quad (3.3)$$

mientras que la segunda representa un momento angular generalizado

$$I_2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \left\{ u^2 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - v^2 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right\} + \frac{1}{u^2 + v^2} \{v^2 f(u) - u^2 g(v)\} \quad (3.4)$$

3.3 Descripción de la teoría de Hamilton-Jacobi.

Dado que nuestro propósito es el uso de la teoría de Hamilton-Jacobi como herramienta de trabajo, debe ser manejado el formalismo hamiltoniano. Los momentos generalizados quedan definidos como

$$p_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} = (u^2 + v^2) u' \quad p_v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = (u^2 + v^2) v'$$

donde convenimos la notación $u' = \frac{du}{dx}$ y $v' = \frac{dv}{dx}$, que será usado en lo que sigue. La densidad hamiltoniana puede ser escrita como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{u^2 + v^2} (h_u + h_v)$$

donde sus sumandos son

$$h_u = \frac{1}{2}p_u^2 - f(u) \quad h_v = \frac{1}{2}p_v^2 - g(v)$$

Llevando sobre la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.6) la forma separada de la función generatriz $\mathcal{J} = \mathcal{J}_x(x) + \mathcal{J}_u(u) + \mathcal{J}_v(v)$, identificaremos la expresión adoptada por cada uno de dichos sumandos. Ésta es

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_x &= -Ex \\ \mathcal{J}_u &= \text{Sign}(u') \int du \sqrt{2(F + Eu^2 + f(u))} \\ \mathcal{J}_v &= \text{Sign}(v') \int dv \sqrt{2(-F + Ev^2 + g(v))} \end{aligned}$$

donde por construcción de la teoría, tanto las magnitudes E como F resultan ser constantes del movimiento, esto es, integrales primeras, las cuales pueden ser escritas

en función de (3.3) y (3.4), $E = I_1$ y $F = -I_2$. La trayectoria de las soluciones presentes queda determinada por la condición

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial F} = \gamma_1 = \text{cte} \quad (3.5)$$

mientras que su dependencia respecto de la variable espacial x es estudiada a través de la expresión

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial E} = \gamma_2 = \text{cte} \quad (3.6)$$

Dado que este trabajo viene justificado por el estudio de las soluciones de tipo kink, presentes en los distintos sectores desconectados del espacio de configuración \mathcal{C} , debemos imponer las condiciones asintóticas (1.13) y (1.14) lo que tiene como consecuencia la anulación de las constantes del movimiento E y F . Las expresiones (3.5) y (3.6) para tal caso se simplifican hasta la obtención de

$$\text{Sign}(u') \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} - \text{Sign}(v') \int \frac{dv}{\sqrt{g(v)}} = \sqrt{2}\gamma_1 \quad (3.7)$$

$$\text{Sign}(u') \int \frac{u^2 du}{\sqrt{f(u)}} + \text{Sign}(v') \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{g(v)}} = \sqrt{2}(x + \gamma_2) \quad (3.8)$$

de modo que el flujo de las trayectorias distribuidas sobre el plano parabólico queda determinado como

$$\Phi = \frac{du}{dv} = \frac{\text{Sign}(u')\sqrt{f(u)}}{\text{Sign}(v')\sqrt{g(u)}}$$

La expresión (3.7) proporciona una manera de parametrizar las soluciones presentes en el modelo a través del parámetro γ_1 . Nos referiremos a este proceso como parametrización *natural*. En el formalismo hamiltoniano las integrales primeras son escritas como

$$I_1 = \frac{1}{u^2 + v^2} \left\{ \frac{1}{2}p_u^2 + \frac{1}{2}p_v^2 - f(u) - g(v) \right\}$$

junto con

$$I_2 = \frac{1}{u^2 + v^2} \left\{ \frac{1}{2}u^2 p_v^2 - \frac{1}{2}v^2 p_u^2 + v^2 f(u) - u^2 g(v) \right\}$$

3.4 Propiedades generales

Como en el capítulo anterior debe ser introducido el concepto de solución singular sobre los modelos de Tipo III. Diremos que una solución del sistema físico es singular si lleva asociada un valor infinito del parámetro natural γ_1 . Entonces,

Proposición 3.1: *Los modelos de Liouville de tipo III presentan soluciones cuya órbita queda asentada sobre el retículo $\text{Ret}(P)$ y además son singulares.*

Demostración: Ensayaremos bajo el método de órbitas prueba la condición marcada por el hecho de que la solución subsista sobre el retículo. Ello debería ser compatible con las condiciones representadas por la nulidad de las integrales primeras (3.3) y (3.4), forzadas por las condiciones asintóticas de la solución kink. Es decir, debe cumplirse que las tres condiciones conformen un sistema de ecuaciones que sea dependiente. Demostraremos la proposición para el subconjunto $P_u^g \in \text{Ret}(P)$. El procedimiento puede ser seguido para los elementos del subconjunto P_v^g de forma directa. El resultado de substituir la condición $u = \tilde{u}_i \in P_u^g$ sobre las integrales primeras nos proporciona las expresiones

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}(\tilde{u}_i^2 + v^2) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - \frac{1}{\tilde{u}_i^2 + v^2} g(v) = 0 \\ I_2 &= \tilde{u}_i^2 \left\{ \frac{1}{2}(\tilde{u}_i^2 + v^2) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - \frac{1}{\tilde{u}_i^2 + v^2} g(v) \right\} = 0 \end{aligned}$$

que constituyen la misma condición. Por ello, junto con la expresión de la trayectoria y cualquiera de las condiciones de las integrales primeras queda determinada y bien definida la solución. Con ello hemos demostrado que las separatrices corresponden a las órbitas de cierta solución kink. Para verificar que son soluciones singulares no hay más que inspeccionar la expresión (3.7). En el primer miembro aparece un denominador que es anulado para las raíces de $f(u)$, esto es, para las trayectorias específicas que estamos tratando. Dado que son soluciones, como se demostró anteriormente, deben caer en el esquema de Hamilton-Jacobi sólo si el segundo miembro de dicha expresión es infinita, lo cual es obtenido cuando la constante γ_1 tiende al infinito, lo cual confiere a estas soluciones el carácter de singulares. C.Q.D.

Una serie de resultados importantes quedan enunciados en los siguientes párrafos:

Proposición 3.2: *La energía asociada a cada solución kink presente en los modelos de Liouville de Tipo III se expresa como*

$$\mathcal{E}[\phi] = \left| \int_{\pi_u[\rho^*\phi]} du \sqrt{2f(u)} \right| + \left| \int_{\pi_v[\rho^*\phi]} dv \sqrt{2g(v)} \right| \quad (3.9)$$

lo que tiene como consecuencia los siguientes puntos:

- La expresión (3.9) no depende de los detalles de la trayectoria seguida por la solución kink, sino sólo de los nudos que son conectados en el retículo por ésta, y por consiguiente, de la proyección sobre los ejes de los tramos seguidos por la solución.
- Para soluciones monótonas que conectan dos puntos de vacío, la expresión

(3.9) se convierte en la más sencilla

$$\mathcal{E}[\phi] = \left| \int_{u(-\infty)}^{u(\infty)} du \sqrt{2f(u)} \right| + \left| \int_{v(-\infty)}^{v(\infty)} dv \sqrt{2g(v)} \right| \quad (3.10)$$

- El resultado encontrado es la causa directa de que en estos modelos aparezcan las mágicas *reglas de suma*, puesto que simbólicamente podríamos escribir que todas aquellas soluciones o combinaciones de soluciones que verifiquen

$$\pi_u[\rho^*\phi] = \sum_{i=1}^n [u_i, u_{i+1}] \quad \pi_v[\rho^*\phi] = \sum_{i=1}^m [v_i, v_{i+1}]$$

poseen la misma energía, cuyo valor es

$$\mathcal{E}[\phi] = \sum_{i=1}^n \left| \int_{u_i}^{u_{i+1}} du \sqrt{2f(u)} \right| + \sum_{i=1}^m \left| \int_{v_i}^{v_{i+1}} dv \sqrt{2g(v)} \right|$$

Demostración: El valor de la energía puede ser calculado substituyendo en la energía estática (1.39) de la teoría de campos la forma explícita de la solución $\phi = \phi(x)$ que estimemos. El mismo papel es jugado por la función generatriz (ver tabla 1.1), que de forma genérica es presentada como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{J} &= \text{Sign}(u') \int_{\rho^*\phi} du \sqrt{2(F + Eu^2 + f(u))} + \\ &+ \text{Sign}(v') \int_{\rho^*\phi} dv \sqrt{2(-F + Ev^2 + g(v))} - Ex|_{\rho^*\phi} \end{aligned}$$

La restricción a soluciones kinks, distinguidas por las condiciones $E = F = 0$, de la expresión anterior, constituida por sumandos definidos positivos que dependen por separado de las variables elípticas, nos da como resultado (3.9). C.Q.D.

Proposición 3.3: *Los modelos de Liouville de tipo III son presupersimétricos, y admite cuatro superpotenciales que sobre el semiplano parabólico \mathbb{P}^2 son*

$$W(u, v) = \pm \int du \sqrt{2f(u)} \pm \int dv \sqrt{2g(v)} \quad (3.11)$$

precisamente la función generatriz restringida a las condiciones que caracterizan las soluciones kinks.

Demostración: Por (1.51), la búsqueda de la expresión del superpotencial requiere la resolución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{1}{2(u^2 + v^2)} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right\} = \frac{1}{u^2 + v^2} (f(u) + g(v))$$

la cual, ensayando la forma separada $W(u, v) = W_1(u) + W_2(v)$ para el superpotencial, nos permite encontrar

$$\frac{dW_1}{du} = \pm\sqrt{2f(u)} \quad \frac{dW_2}{dv} = \pm\sqrt{2g(v)}$$

que nos traslada finalmente a la expresión (3.11). C.Q.D.

La expresión (3.11) conlleva la presencia de cuatro superpotenciales según los signos relativos que sean considerados en tal relación. La condición de que un sistema físico corresponda a un modelo de Liouville de tipo III podría interpretarse sobre el concepto de superpotencial en la siguiente definición:

Definición 3.4: *Un sistema físico natural es de Liouville de Tipo III si admite un superpotencial que verifica $\rho^*W = W_1(u) + W_2(v)$, o lo que es lo mismo que*

$$\frac{\partial^2(\rho^*W)}{\partial u \partial v} = 0$$

La condición expresada en la definición 3.4 puede transcribirse en el plano cartesiano mediante la relación sobre el superpotencial

$$2\phi^1 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} + \phi^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2 \partial \phi^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} \right) + \frac{\partial W}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.12)$$

Con este punto de vista, las integrales primeras (3.3) y (3.4) quedan reflejadas como (1.54) para la energía y

$$I_2 = \left(\phi^1 \frac{d\phi^2}{dx} - \phi^2 \frac{d\phi^1}{dx} \right) \frac{d\phi^2}{dx} - \left(\phi^1 \frac{\partial W}{\partial \phi^2} - \phi^2 \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right) \frac{\partial W}{\partial \phi^2}$$

para el segundo invariante, el cual usando (2.18) aparece como $I_2 = \Re e[(\phi^1 \Pi_2 - \phi^2 \Pi_1) \Pi_2]$, que implica la acción del momento angular y una traslación generalizados. Si el superpotencial es fijado, las ecuaciones de primer orden que podemos obtener a partir de las integrales primeras corresponden a las habituales expresiones (1.60), junto con la novedosa posibilidad establecida por

$$\frac{d\phi_i}{dx} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\phi^* \phi}} \left(\phi_i \frac{\partial W}{\partial \phi_1} + \epsilon^{ij} \phi_j \frac{\partial W}{\partial \phi_2} \right)$$

que puede ser transformada en las ecuaciones de primer orden del tipo (1.60) para un nuevo superpotencial \tilde{W} , habida cuenta de que el segundo miembro de la fórmula precedente verifica las condiciones del teorema de Green en el plano, teniendo en consideración el cumplimiento de (3.12). Esto justifica la doble posibilidad en la elección del superpotencial (3.11). Las ecuaciones de primer orden sobre el plano parabólico rezan como

$$\frac{du}{dx} = \pm \frac{\sqrt{2f(u)}}{u^2 + v^2} \quad \frac{dv}{dx} = \pm \frac{\sqrt{2g(v)}}{u^2 + v^2} \quad (3.13)$$

las cuales nos permiten obtener todas las soluciones kinks que se encuentran en el modelo, tal y como puede ser demostrado siguiendo los mismos pasos que fueron tomados en cuenta en la proposición (2.4) del capítulo anterior.

3.5 Análisis del término potencial de tipo III

La forma más genérica adoptada por el término potencial atribuido a sistemas de Liouville de tipo III fue indicada en (3.2). Sin embargo, generalmente un potencial de ese tipo conlleva una singularidad en el origen, como consecuencia de la anulación del denominador de (3.2) en ese punto. Por otra parte, es usual recurrir a potenciales que adopten expresiones polinómicas en los campos, dado que la teoría de campos cuánticos que originan es renormalizable. Entonces,

Proposición 3.4: *La familia $(n_{max} + 1)$ -paramétrica de sistemas físicos que incluyen el potencial con términos anarmónicos de la forma*

$$U(\phi_1, \phi_2) = a_0 + \sum_{n=1}^{n_{max}} a_n \prod_{i=1}^n \left[4\phi_1^2 + 2\phi_2^2 \left(1 + \cos \frac{2i\pi}{2n+1} \right) \right] \quad (3.14)$$

correspondiente a una expresión polinómica de grado $2n_{max}$ con coeficientes libres a_i , pertenecen a los modelos de Liouville de Tipo III.

Demostración: El término potencial puede ser reescrito como

$$U(\phi_1, \phi_2) = \sum_{n=0}^{n_{max}} a_n \prod_{i=1}^n \left[4\phi_1^2 + 2\phi_2^2 + 2\phi_2^2 \cos \frac{2i\pi}{2n+1} \right]$$

de modo que usando las variables parabólicas en el mundo interno obtenemos

$$\rho^* U = \sum_{n=0}^{n_{max}} a_n \prod_{i=1}^n \left[u^4 + v^4 + 2u^2 v^2 \cos \frac{2i\pi}{2n+1} \right]$$

Usando el resultado (2.21) de [131] podemos concluir que nuestro potencial aparece como

$$\rho^* U = \frac{1}{u^2 + v^2} \sum_{n=0}^{n_{max}} a_n \{u^{4n+2} + v^{4n+2}\}$$

Así pues, el sistema que incluye dicho potencial cumple la definición 3.1 de los sistemas Liouville de Tipo III. Además, al tratarse de una expresión polinómica sobre el plano interno cartesiano carece de singularidades. C.Q.D.

La expresión polinómica de segundo grado, que caracteriza los modelos de Liouville de tipo III sometidos a la proposición 3.4, es

$$V_1(\phi) = a_1(4\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

que presenta un único mínimo, situado en el origen del plano interno, por lo que no se introduce proceso alguno de ruptura de simetría. Para ello es necesario recurrir a potenciales al menos de grado cuártico, que siguiendo la forma (3.14) son

$$V_2(\phi) = A(4\phi_1^2 + \phi_2^2 \pm a^2)^2 + 4A\phi_1^2\phi_2^2 + a_0 \quad (3.15)$$

que ahora sí presentan un posible escenario de ruptura de simetría eligiendo el signo negativo en el doble signo.

En nuestro trabajo no abordaremos la expresión (3.14) de forma tan genérica, sino que preocupados por estudiar modelos que presenten soluciones kinks nos restringiremos a aquellos sistemas que incluyan un potencial que presente ceros de forma efectiva. Elegiremos, por ello, el estudio de los potenciales que se presenten sobre el semiplano parabólico del modo

$$\rho^*U = \frac{A^2}{u^2 + v^2} \left[u^{2\alpha_0} \prod_{i=1}^n (u^4 - \sigma_i^2)^{2\alpha_i} + v^{2\alpha_0} \prod_{i=1}^n (v^4 - \sigma_i^2)^{2\alpha_i} \right] \quad (3.16)$$

donde los σ_i son parámetros reales del sistema físico, que asumimos ordenados por su índice, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$, y los $\alpha_i \in \mathbb{N}$ con $\alpha_0 \geq 1$. Las funciones $f(u)$ y $g(v)$ son elegidas como el producto de monomios con dependencia cuarta sobre sus variables con exponente α_i . El potencial será etiquetado como $P[\vec{\sigma}][\vec{\alpha}]$ donde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ y $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, es decir, especificando los parámetros del sistema físico. En el análisis de los sistemas de Liouville de tipo III sometidos al potencial (3.16) nos vemos obligados a considerar los siguientes casos distinguidos

CASO A: $\alpha_0 = 1$

CASO B: $\alpha_0 > 1$

Nos referiremos a aquellos subsistemas caracterizados por las potencias $\alpha_i = 1$ con $1 \leq i \leq n$ como los subcasos **A1** o **B1**.

Si el sistema físico viene caracterizado por el potencial (3.16), podemos obtener el retículo $Ret(P)$ de forma general. Para ello, introducimos los siguientes conjuntos de curvas definidos sobre el plano interno de partida,

$$P_u = \{\phi \in \mathbb{C} / \phi_2^2 + 2\sigma_i\phi_1 = \sigma_i^2 \quad (u^4 = \sigma_i^2) \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n\}$$

correspondientes a parábolas homofocales con generatriz sobre el semieje $O\phi_1$ negativo, y

$$P_v = \{\phi \in \mathbb{C} / \phi_2^2 - 2\sigma_i\phi_1 = \sigma_i^2 \quad (v^4 = \sigma_i^2) \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n\}$$

formado por parábolas homofocales con generatriz sobre el semieje $O\phi_1$ positivo. Se incluye, además, otro conjunto

$$X = \{\phi \in \mathbb{C} / \phi_2 = 0 \quad (u = 0 \cup v = 0)\}$$

que determina el eje $O\phi_1$. El retículo o conjunto de separatrices mostrado en la figura 3.2 queda conformado por $Ret(P) = P_u \cup P_v \cup X$.

Proposición 3.5: *La variedad de ceros para modelos de Liouville de Tipo II, cuyo potencial es de la forma (3.16), viene constituida de la siguiente manera:*

CASO A	$\alpha_0 = 1$
$\mathcal{M} = (P_u \cap P_v) \cup (P_u \cap X) \cup (P_v \cap X)$ $\text{card}(\mathcal{M}) = 2n(n + 1)$	
CASO B	$\alpha_0 > 1$
$\mathcal{M} = (P_u \cap P_v) \cup (P_u \cap X) \cup (P_v \cap X) \cup \{O\}$ $\text{card}(\mathcal{M}) = 2n(n + 1) + 1$	

Demostración: Por definición habíamos dividido las curvas separatrices en los conjuntos:

- (a) P_u^g : curvas del plano interno que cumplen $f(u) = 0$.
- (b) P_v^g : curvas del plano interno que cumplen $g(v) = 0$.
- (c) X : semieje positivo $O\phi_1$ cumple $g(v) = 0$.
: semieje negativo $O\phi_1$ cumple $f(u) = 0$.

En aquellos lugares geométricos que cumplan las dos condiciones $f(u) = 0$ y $g(v) = 0$ al tiempo, el potencial (3.16) adquiere el valor nulo y como tratamos con potenciales semidefinidos positivos, estos puntos son mínimos o integrantes de la variedad de ceros \mathcal{M} . Especial tratamiento debe conferirse al punto focal de las parábolas coordenantes, situado en el origen, en el siguiente sentido: si la potencia $\alpha_0 = 1$, entonces el punto $\phi = 0$, a pesar de constituir raíces de los polinomios $f(u)$ y $g(v)$ no corresponde a un cero del potencial como consecuencia de la presencia del factor métrico en (3.16). Es fácil advertir que las dos contribuciones se contrarrestan originando un valor finito no nulo para dicha expresión. Esto es, en el caso A el punto focal no pertenece a la variedad de ceros. Otro caso diferente se presenta si la potencia $\alpha_0 > 1$, pues en tal caso, la tendencia a cero del numerador de (3.16) es más fuerte que el del denominador, de modo que el punto focal ya es un elemento de la variedad \mathcal{M} . C.Q.D.

Describiremos en las próximas secciones la estructura general cimentada anteriormente mostrando el análisis de diversos modelos. El primero de ellos que llamaremos III[1][11] introduce un potencial polinómico cuártico y presenta un proceso de ruptura de simetría atribuido a la presencia de cuatro puntos de vacíos. El siguiente modelo al que denominamos III[1][31] está asociado a un potencial algebraico de grado sexto con una variedad de ceros constituido por cinco vacíos degenerados. Las amplias posibilidades del marco trazado pueden ser observadas en el último ejemplo, en el que a través del modelo III[1 τ][011] se presenta un espacio de configuración compuesto por 144 sectores topológicos desconectados.

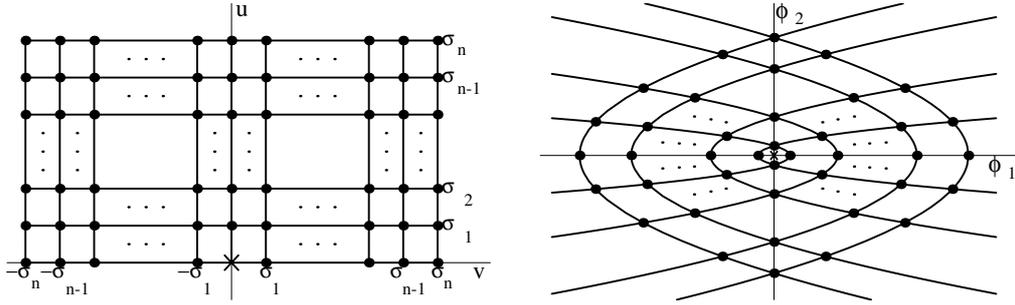


Figura 3.2: *Retículo y vacíos, caso A (•) y B (•, ×), en los modelos Liouville Tipo III.*

3.6 Modelo III[1][11].

Como fue anunciado en párrafos precedentes, el sistema físico más sencillo que introduce un proceso de ruptura de simetría, albergado por el presente esquema, venía asociado al potencial (3.15). Afrontaremos su estudio [3] y nos referiremos a tal modelo como III[1][11]. En [26, 14, 18, 11] es analizado un sistema que engloba, para la elección particular de las constantes de acoplamiento, $\lambda = 4\sqrt{2}$, $\mu = 2\sqrt{2}$ y $a = \frac{1}{2}$, el tratado en la presente sección. Los resultados obtenidos en tales estudios se restringen a la identificación, mediante el uso del método de las órbitas prueba, de dos soluciones de tipo kink, una de ellas con componente imaginaria nula ($\phi_2 = 0$) y la otra con trayectoria elíptica. Veremos para nuestro modelo que en realidad aparecen infinitas soluciones de tipo kink, específicamente, dos familias uniparamétricas de éstas, con propiedades interesantes.

La dinámica del modelo III[1][11] viene regida por el funcional acción

$$S[\chi] = \int dy^2 \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \chi^* \partial^\mu \chi - \frac{\lambda^2}{2} \left(4\chi_1^2 + \chi_2^2 - \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2 - 2\lambda^2 \chi_1^2 \chi_2^2 \right\}$$

donde como es usual $\chi(x_\mu)$ es un campo complejo sumido en un mundo minkowskiano de (1+1) dimensiones. Las constantes de acoplamiento m y λ tienen dimensiones de inversa de longitud en un sistema natural de unidades, ($\hbar = 1$, $c = 1$). Usando las variables adimensionales $\chi_i = \frac{m}{\lambda} \phi_i$, $y = \frac{\sqrt{2}}{m} x$, el funcional que domina el comportamiento de las soluciones englobadas en el espacio de configuración \mathcal{C} , corresponde a la expresión³ $\bar{\mathcal{E}}[\phi] = \frac{m^3}{\sqrt{2}\lambda^2} \mathcal{E}[\phi]$, donde $\mathcal{E}[\phi]$ es el funcional energía en variables adimensionales

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 + (4\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)^2 + 4\phi_1^2 \phi_2^2 \right\} \quad (3.17)$$

³El sistema presentado guarda una gran relación con el introducido por Ishihara, Kubotani, Nambu [139, 76] en el estudio de domain walls. Reescalando la primera componente y rotando $\pi/4$ el espacio interno, la identificación se obtiene bajo los valores $V_0 = -1/3$, $\lambda = 3/4$, $\eta = 2/\sqrt{3}$, $\epsilon = 1/2$. No se pretende equiparar ambos modelos sino mostrar su analogía.

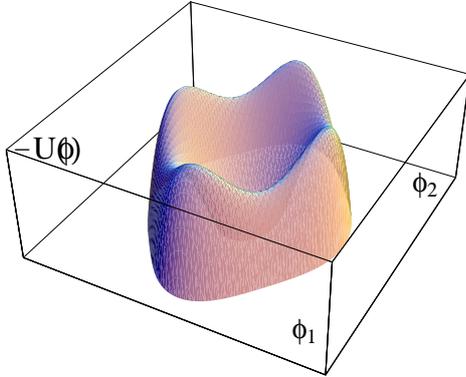


Figura 3.3. *Potencial III[1][11].*

Es decir, el sistema físico incluye un potencial expresado por

$$U_{III[1][11]}(\phi) = (4\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)^2 + 4\phi_1^2\phi_2^2$$

donde hemos eliminado la presencia de parámetros triviales. Queda representado en la figura 3.3. En la relación (3.15), introducida inicialmente, se han reescalado el factor global A y la constante a a la unidad, redefiniendo los campos y la variable espacial.

La expresión (3.11) de los superpotenciales asociados a este modelo es dada en la forma $W(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} u^6 - u^2 \right) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} v^6 - v^2 \right)$, presentándose en las variables originales como

$$W^I(\phi) = \pm \frac{2}{3\sqrt{2}} \phi_1 (4\phi_1^2 + 3\phi_2^2 - 3) \quad (3.18)$$

o bien,

$$W^{II}(\phi) = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\phi^* \phi} (4\phi_1^2 + \phi_2^2 - 3) \quad (3.19)$$

Propiedades del sistema:

Haciendo uso del plano parabólico $u - v$, el potencial puede ser escrito por

$$\rho^* U = \frac{1}{u^2 + v^2} [u^2(u^4 - 1)^2 + v^2(v^4 - 1)^2]$$

que se ajusta a la expresión (3.16) tomando $n = 1$, $A = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_1 = 1$. Queda patente su pertenencia a los modelos de Liouville de Tipo III, y en particular al subcaso A1 definido con anterioridad. Ello justifica que el sistema quede especificado bajo las siglas III[1][11], siguiendo la notación convenida. Por los conocimientos transcritos en la tabla 3.1, se tiene $\text{card}(\mathcal{M}) = 4$, esto es, la variedad de ceros \mathcal{M} consta de cuatro elementos. De forma específica, podemos escribir que

$$\mathcal{M} = \left\{ v^1 = -\frac{1}{2}, v^2 = -i, v^3 = +i, v^4 = \frac{1}{2} \right\}$$

A la vista del funcional (3.17), podemos afirmar que el lagrangiano disfruta de las simetrías por paridad interna asociadas al grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, lo que origina al elegir un vacío un proceso de ruptura de simetría. Los vacíos v^1 y v^4 pierden la simetría primitiva del lagrangiano, conservando tan sólo la del grupo pequeño $H_1 = \{e\} \times \mathbb{Z}_2$. Por otra parte, los vacíos v^2 y v^3 rompen la simetría inicial al grupo $H_2 = \mathbb{Z}_2 \times \{e\}$.

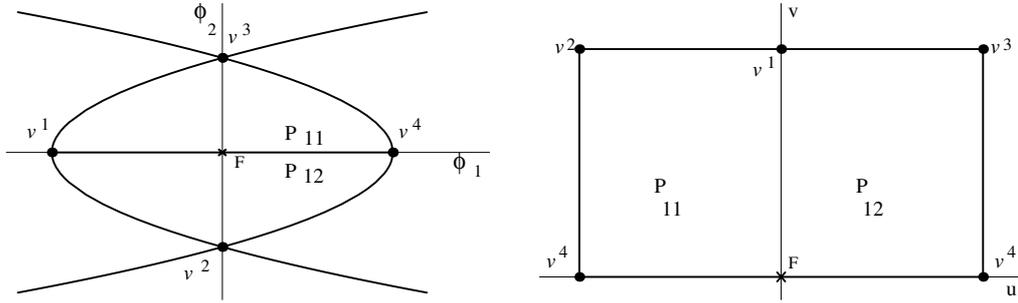


Figura 3.4: Retículo del modelos III[1][11].

El espectro continuo de pequeñas deformaciones sobre las soluciones triviales o de vacío (espectro de masas) se asienta sobre los valores

$$M^2(v^2, v^3) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad M^2(v^1, v^4) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El espacio de configuración $\mathcal{C} = \{\phi(x) \in \text{Maps}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) / \mathcal{E}[\phi] < +\infty\}$ queda constituido por dieciséis sectores desconectados, es decir, $\mathcal{C} = \cup \mathcal{C}_{ab}$ donde $a, b = 1, 2, 3, 4$. Las soluciones inmersas en \mathcal{C} son caracterizadas por las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales acopladas

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} = 8\phi_1(8\phi_1^2 + 3\phi_2^2 - 2) \\ \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} = 4\phi_2(6\phi_1^2 + 2\phi_2^2 - 1) \end{cases}$$

Las integrales primeras atribuidas al funcional (3.17), la acción del sistema mecánico asociado, son

- la energía mecánica:

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - (4\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)^2 - 4\phi_1^2\phi_2^2 \quad (3.20)$$

- el momento angular mecánico generalizado:

$$I_2 = \left\{ \phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right\} \frac{d\phi_2}{dx} + 4\phi_1\phi_2^2(2\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) \quad (3.21)$$

Éstas conforman las ecuaciones diferenciales de primer orden que deben verificar las soluciones. En particular, las soluciones kinks cumplen las condiciones $I_1 = I_2 = 0$.

Galería de soluciones: Parametrización.

Afrontaremos ahora el problema de obtener las soluciones kinks que aparecen en nuestro sistema físico. Para ello, inicialmente utilizaremos el método de órbitas prueba, tomando como referencia las expresiones de las curvas separatrices, motivados por los resultados de la proposición 3.1. Ello no es re restrictivo, y es posible usar el método con éxito sobre otras ligaduras entre las componentes del campo ϕ . Finalmente, dado que este sencillo método no nos proporciona al completo la variedad de soluciones kinks será preciso utilizar la teoría de Hamilton-Jacobi. Las conclusiones obtenidas son expuestas en los siguientes puntos:

1. **TK1**: Consideremos en primer lugar que la solución es un campo $\phi(x)$ real, esto es, asumimos que $\phi_2(x) = 0$. Esta curva corresponde a un elemento del conjunto de separatrices X . Haciendo uso de la condición (3.20), obtenemos la solución

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2} \tanh(2\sqrt{2}\bar{x}) \quad (3.22)$$

que conecta los puntos de vacío v^1 y v^4 , que denotamos como hasta ahora mediante las siglas **TK1**. En particular, estas soluciones son el kink TK1[14] y el antikink TK1[41], que forman parte respectivamente de los sectores \mathcal{C}_{14} y \mathcal{C}_{41} . Sus proyecciones se presentan por $\pi_u(\mathbf{TK1}) = [0, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TK1}) = [0, 1]$, siendo por ello:

$$\mathcal{E}[\mathbf{TK1}] = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Su estabilidad puede ser abordada resolviendo el espectro del hessiano

$$\mathcal{H}[\mathbf{TK1}] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 32 - 48 \operatorname{sech}^2 2\sqrt{2}\bar{x} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + 2 - 6 \operatorname{sech}^2 2\sqrt{2}\bar{x} \end{pmatrix}$$

que es equivalente a dos problemas espectrales unidimensionales descritos por la ecuación de Schrödinger con potencial de Pösch-Teller⁴ [88]. Los resultados obtenidos son

$$\begin{aligned} \text{Componente 1: } \omega_{n_1}^2 &= 32 - 8(2 - n_1)^2 & n_1 &= 0, 1, 2 \Rightarrow \omega_{n_1}^2 = 0, 24, 32, \text{ continuo} \\ \text{Componente 2: } \omega_{n_2}^2 &= 2 - 8\left(\frac{1}{2} - n_2\right)^2 & n_2 &= 0 \Rightarrow \omega_{n_2}^2 = 0, \text{ continuo} \end{aligned}$$

donde identificamos la presencia de dos modos ceros, uno de ellos debido a la invariancia traslacional de x , y el otro debido a que esta solución pertenece en realidad a una familia uniparamétrica. La ausencia de autovalores negativos implica la estabilidad del kink considerado.

⁴Tomando $z = 2\sqrt{2}x$ las componentes del hessiano son $\mathcal{H}_{11}[\mathbf{TK1}] = 8\left(-\frac{d^2}{dz^2} + 4 - 6 \operatorname{sech}^2 z\right)$ y $\mathcal{H}_{22}[\mathbf{TK1}] = 8\left(-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \operatorname{sech}^2 z\right)$.

2. \mathbf{TKP}_u : Otra solución singular es aquella que tiene la trayectoria parabólica $\phi_2^2 + 2\phi_1 = 1$, incluida en el subconjunto P_u . Ensayando esta expresión sobre la condición $I_1 = 0$, se tiene la solución ⁵,

$$\phi(x) = \frac{1}{4} \left(1 - \tanh[\pm_1 2\sqrt{2}\bar{x}] \right) \pm_2 i \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \tanh[\pm_1 2\sqrt{2}\bar{x}] \right)}$$

En este caso quedan conectados los vacíos v^1 y v^2 , mediante los kinks \mathbf{TKP}_u [12]⁶ y antikink \mathbf{TKP}_u [21], y los vacíos v^1 y v^3 por el kink \mathbf{TKP}_u [13] y el antikink \mathbf{TKP}_u [31]. De forma global nos referiremos a ellos como \mathbf{TKP}_u . Sobre su energía podemos afirmar que, dado que $\pi_u(\mathbf{TKP}_u) = [0, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TKP}_u) = 0$, su valor es

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u] = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

3. \mathbf{TKP}_v : Empleando como órbitas prueba las curvas $\phi_2^2 - 2\phi_1 = 1$, que forman parte del subconjunto de curvas separatrices P_v , obtenemos soluciones singulares análogas a las del anterior punto, dadas como

$$\phi(x) = -\frac{1}{4} \left(1 - \tanh[\pm_1 2\sqrt{2}\bar{x}] \right) \pm_2 i \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \tanh[\pm_1 2\sqrt{2}\bar{x}] \right)}$$

Mediante estas soluciones quedan ligados los vacíos v^3 y v^4 , para las soluciones que identificamos como \mathbf{TKP}_v [34] y \mathbf{TKP}_v [43], y los vacíos v^2 y v^4 , a través de los \mathbf{TKP}_v [24] y \mathbf{TKP}_v [42]. Genéricamente los citaremos como \mathbf{TKP}_v . En este caso $\pi_u(\mathbf{TKP}_v) = 0$ y $\pi_v(\mathbf{TKP}_v) = [0, 1]$, por lo que

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v] = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

4. $\mathbf{TKF}(0)$: En los anteriores puntos hemos identificado las soluciones singulares. Estudiaremos, ahora, la posible existencia de soluciones que presenten un campo ϕ que sea imaginario puro, es decir, consideraremos que $\phi_1 = 0$. Las condiciones dadas por las integrales primeras $I_1 = I_2 = 0$ sobre dicha condición son compatibles y nos reportan la solución

$$\phi(x) = \pm \frac{i}{2} \tanh(\sqrt{2}\bar{x})$$

caracterizada por el nexo entre los vacíos v^2 y v^3 . Esta solución con el signo positivo parte de v^2 , originando el kink que denotaremos por $\mathbf{TKF}[23](0)$, y con el signo

⁵Los dobles signos con distinto subíndice pueden ser elegidos arbitrariamente, mientras que la elección en un doble signo con cierto índice fija el resto de aquellos que tengan el mismo.

⁶Mediante la sigla \mathbf{TKP} se quiere enfatizar que las soluciones son kinks topológicos que se asientan sobre un tramo parabólico. El subíndice \mathbf{u} o \mathbf{v} da cuenta de la orientación de esta trayectoria parabólica.

negativo da lugar al antikink al que asignaremos el nombre TKF[32](0), que parte de v^3 . El hessiano mostrado en este caso es

$$\mathcal{H}[\text{TKF}(0)] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 8 - 24 \operatorname{sech}^2 \sqrt{2} \bar{x} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + 8 - 12 \operatorname{sech}^2 \sqrt{2} \bar{x} \end{pmatrix}$$

cuyo espectro⁷ es

$$\begin{aligned} \text{Comp. 1: } \omega_{n_1}^2 &= 8 - 2(3 - n_1)^2 & n_1 &= 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \omega_{n_1}^2 = -10, 0, 6, 8, \text{ continuo} \\ \text{Comp. 2: } \omega_{n_2}^2 &= 8 - 2(2 - n_2)^2 & n_2 &= 0, 1, 2 \Rightarrow \omega_{n_2}^2 = 0, 6, 8, \text{ continuo} \end{aligned}$$

donde se manifiesta la inestabilidad de la solución alcanzada debido a la presencia del autovalor negativo $\omega_{n_1}^2 = -10$ en el espectro del hessiano.

5. TKB(γ_1) y TKF(γ_1): Emplearemos la teoría de Hamilton-Jacobi para extraer las soluciones kinks que aún quedan por identificar en el sistema. Haciendo uso de las expresiones (3.7) y (3.8) podemos encontrar que las órbitas de las soluciones sobre el plano elíptico deben verificar

$$\left(\frac{u^4}{1 - u^4} \right)^{\operatorname{Sign}(uu')} \left(\frac{1 - v^4}{v^4} \right)^{\operatorname{Sign}(v')} = e^{4\sqrt{2}\gamma_1} \quad (3.23)$$

mientras que la dependencia sobre la variable espacial podrá ser determinada por la condición

$$\left(\frac{1 + u^2}{1 - u^2} \right)^{\operatorname{Sign}(uu')} \left(\frac{1 + v^2}{1 - v^2} \right)^{\operatorname{Sign}(v')} = e^{4\sqrt{2}(x+\gamma_2)} \quad (3.24)$$

El flujo de trayectorias en este sistema físico queda dispuesto por

$$\frac{du}{dv} = \frac{\operatorname{Sign}(uu')}{\operatorname{Sign}(v')} \frac{u(1 - u^4)}{v(1 - v^4)}$$

magnitud que posteriormente usaremos para intentar parametrizar parte de las soluciones presentes. La expresión (3.23) determina las siguientes familias de kinks:

5.1 Familia TKB(γ_1): Eligiendo sobre la ecuación (3.23) la opción $\operatorname{Sign}(uu') = -\operatorname{Sign}(v')$, se obtiene la descripción de una familia uniparamétrica de soluciones identificadas por el valor de la constante γ_1 , que vienen caracterizadas por la conexión de los puntos de vacío v^1 y v^4 . Son mostrados en la figura 3.5. Globalmente se denotarán como **TKB**, teniendo en cuenta que si debemos identificar la solución particular a la que nos estemos refiriendo se deberá especificar tanto el sector topológico al que pertenece como su constante γ_1 asociada, de modo que tendremos los kinks

⁷Tomando $z = \sqrt{2}x$ el hessiano es determinado por $\mathcal{H}_{11}[\text{TKF}(0)] = 2 \left(-\frac{d^2}{dz^2} + 4 - 12 \operatorname{sech}^2 z \right)$ y $\mathcal{H}_{22}[\text{TKF}(0)] = 2 \left(-\frac{d^2}{dz^2} + 4 - 6 \operatorname{sech}^2 z \right)$.

TKB[14](γ_1) y los antikinks TKB[41](γ_1). Las fórmulas (3.23) y (3.24) pueden reexpresarse en los campos iniciales de forma que aparecen las trayectorias

$$\left(1 - e^{-4\sqrt{2}\gamma_1}\right) \phi_2^4 - 4\phi_1^2 - 2\phi_2^2 + 1 = 0$$

mientras que la dependencia espacial es dada por la relación

$$\frac{2\phi_1}{1 - \phi_2^2} = -\tanh[2\sqrt{2}\bar{x}]$$

Despejando las variables se obtienen las expresiones que determinan las soluciones kinks para esta familia

$$\phi = -\frac{\sinh 2\sqrt{2}\bar{x}}{2(e^{2\sqrt{2}\gamma_1} + \cosh 2\sqrt{2}\bar{x})} \pm \frac{i}{\sqrt{1 + e^{-2\sqrt{2}\gamma_1} \cosh 2\sqrt{2}\bar{x}}}$$

El cálculo de la energía, basada en las proyecciones $\pi_u(\mathbf{TKB}) = [0, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TKB}) = [0, 1]$, proporciona el valor

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKB}(\gamma_1)] = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Cuando la constante γ_1 adquiere valores asintóticos obtenemos alguna combinación de soluciones singulares; en el presente caso

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKB}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TK1} \\ \mathbf{TKP}_u + \mathbf{TKP}_v \end{cases}$$

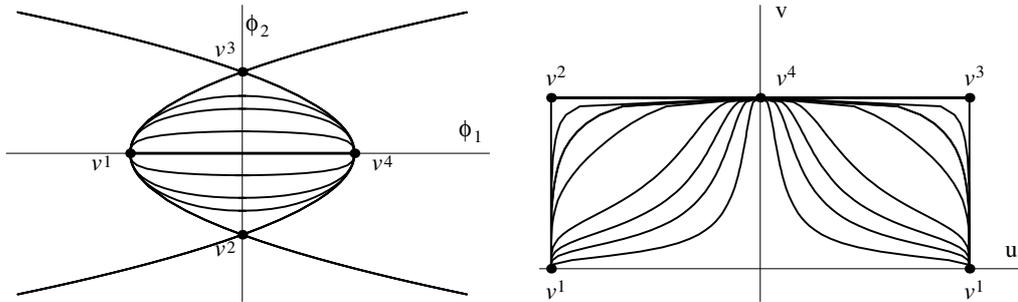


Figura 3.5: *Kinks TKB: en el plano cartesiano (izquierda) y en el plano parabólico (derecha).*

El criterio de parametrización de las soluciones de esta familia es dado por el punto de corte de cada una de ellas en el eje $O\phi_2$. La relación entre esta parametrización particular y la natural debida a la constante γ_1 viene caracterizada por el requisito $u = v$ sobre la expresión (3.23), esto es,

$$\tilde{\phi}_2 = \frac{\pm e^{\sqrt{2}\gamma_1}}{\sqrt{1 + e^{2\sqrt{2}\gamma_1}}}$$

Así, la nueva parametrización nos permite presentar el siguiente cuadro resumen:

	Parámetro	Solución
1)	$\tilde{\phi}_2 = 1$	TKP _u [13] + TKP _v [34]
2)	$\tilde{\phi}_2 \in (0, 1)$	TKB[14](+)
3)	$\tilde{\phi}_2 = 0$	TK1[14]
4)	$\tilde{\phi}_2 \in (0, -1)$	TKB[14](-)
5)	$\tilde{\phi}_2 = -1$	TKP _u [12] + TKP _v [24]

El hessiano asociado a estas soluciones $\mathcal{H}[\mathbf{TKB}(\gamma_1)]$ no es diagonal,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 8 \left(-2 + \frac{3}{1+e^{-c} \cosh \hat{x}} + \frac{6 \sinh^2 \hat{x}}{(e^c + \cosh \hat{x})^2} \right) & \pm \frac{24 \sinh \hat{x}}{(e^c + \cosh \hat{x}) \sqrt{1+e^{-c} \cosh \hat{x}}} \\ \pm \frac{24 \sinh \hat{x}}{(e^c + \cosh \hat{x}) \sqrt{1+e^{-c} \cosh \hat{x}}} & -\frac{d^2}{dx^2} + 4 \left(-1 + \frac{3}{1+e^{-c} \cosh \hat{x}} + \frac{3 \sinh^2 \hat{x}}{2(e^c + \cosh \hat{x})^2} \right) \end{pmatrix}$$

donde $c = 2\sqrt{2}\gamma_1$ y $\hat{x} = 2\sqrt{2}x$, de modo que su espectro no puede ser calculado. Lo que podemos asegurar es la presencia de dos modos ceros,

$$\psi_0^{(1)}(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \propto \begin{pmatrix} \frac{1+e^c \cosh \hat{x}}{(e^c + \cosh \hat{x})^2} \\ \mp \frac{e^{-c} \sinh \hat{x}}{(1+e^{-c} \cosh \hat{x})^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \quad \psi_0^{(2)}(x) = \frac{\partial \phi}{\partial c} \propto \begin{pmatrix} \mp \frac{e^c \sinh \hat{x}}{2(e^c + \cosh \hat{x})^2} \\ \frac{e^c \cosh \hat{x}}{2(e^{-c} + \cosh \hat{x})^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

Junto al modo cero atribuido a la invariancia por traslaciones espaciales, aparece uno nuevo asociado a que el kink tratado pertenece a una familia uniparamétrica de soluciones, de manera que perturbando el valor de c obtenemos un nuevo kink. Aplicando la teoría de Morse puede concluirse la ausencia de puntos conjugados sobre la variedad de soluciones kinks \mathcal{C}_K , por lo que hemos de inferir la estabilidad de todas las soluciones $\mathbf{TKB}(\gamma_1)$. Estas soluciones pueden ser obtenidas de forma paralela por la resolución de las ecuaciones de primer orden (1.57) asociadas al superpotencial $W^I(\phi)$. Éste carece de puntos de ramificación, lo cual apunta, de nuevo, a la estabilidad de los kinks $\mathbf{TKB}(\gamma_1)$ según los detalles dados en [65].

5.2 Familia TKF(γ_1): Tomando $\text{Sign}(uu') = \text{Sign}(v')$ sobre (3.23), encontramos una nueva familia de soluciones parametrizadas por el valor de γ_1 . En este caso, las soluciones conectan los puntos de vacío v^2 y v^3 , cruzando todas ellas a través del punto focal situado en el origen del plano interno como puede ser comprobado en la figura 3.6. Denotaremos específicamente a estas soluciones kinks como TKF[23](γ_1) y a los antikinks por TKF[32](γ_1). Globalmente todas ellas recaen bajo las siglas $\mathbf{TKF}(\gamma_1)$. La traducción al espacio interno inicial nos proporciona la expresión algebraica

$$16 e^{4\sqrt{2}\gamma_1} \phi_1^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (1 - e^{4\sqrt{2}\gamma_1})^2 \phi_2^4 (2\phi_1 - \phi_2^2 + 1)(2\phi_1 + \phi_2^2 - 1) = 0$$

como determinante de las trayectorias, en las cuales se advierte que el origen es un punto múltiple. Este punto junto a los vacíos v^2 y v^3 son comunes a todas las

órbitas. La dependencia espacial se lee ahora

$$\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{(1 - \phi_2^2)^2} = \frac{1}{4} \tanh^2 2\sqrt{2}\bar{x}$$

Los valores asintóticos del parámetro natural proporcionan los límites

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKF}(\gamma_1) \equiv \mathbf{TKP}_u + \mathbf{TK1} + \mathbf{TKP}_v$$

de forma que se cumple $\pi_u(\mathbf{TKF}(\gamma_1)) = [-1, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TKF}(\gamma_1)) = 2[0, 1]$, lo que permite el cálculo de la energía

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKF}(\gamma_1)] = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

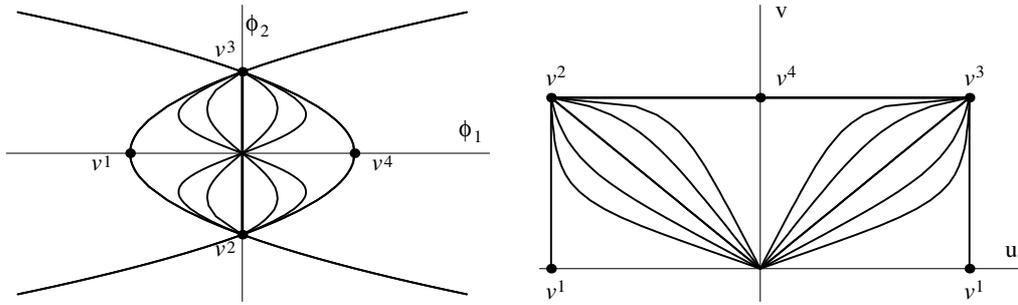


Figura 3.6: *Kinks* \mathbf{TKF} en el plano cartesiano (izquierda) y elíptica (derecha).

La parametrización flujo focal es útil para estas soluciones. La relación entre las dos parametrizaciones mencionadas viene dada a través de la expresión

$$\frac{du}{dv} = \pm e^{\sqrt{2}\gamma_1}$$

que sobre el plano cartesiano se transforma en

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \frac{\pm 2e^{\sqrt{2}\gamma_1}}{e^{2\sqrt{2}\gamma_1} - 1} = \operatorname{tg} \theta$$

La parametrización sobre las soluciones inmersas en el sector \mathcal{C}_{24} nos permite introducir la tabla:

	Parámetro	Solución
1)	$\theta = 0$	$\mathbf{TKP}_u[21] + \mathbf{TK1}[14] + \mathbf{TKP}_v[43]$
2)	$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$	$\mathbf{TKF}[23](+)$
3)	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\mathbf{TKF}[23](0)$
4)	$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$	$\mathbf{TKF}[23](-)$
5)	$\theta = \pi$	$\mathbf{TKP}_v[24] + \mathbf{TK1}[41] + \mathbf{TKP}_u[13]$

sobre la que introduciendo las técnicas de la teoría de Morse nos permite, en este caso, concluir que las soluciones $\mathbf{TKF}(\gamma_1)$ son inestables, dado que quedarían identificadas con las geodésicas de la esfera que empiezan y terminan en el polo norte en tal sentido que el polo sur (foco del modelo) sería un punto conjugado, originando la presencia de un autovalor negativo en el hessiano. Además, las soluciones englobadas en esta familia pueden ser obtenidas como soluciones de las ecuaciones de primer orden asociadas al superpotencial $W^{II}(\phi)$, el cual presenta un punto de ramificación, por el que pasan los kinks $\mathbf{TKF}(\gamma_1)$. Ello sugiere de forma alternativa la inestabilidad de estas soluciones.

El conjunto de soluciones kinks queda recogido en el moduli:

$$\text{Mod } \mathcal{C}_K = \{\mathbf{TK1}, \mathbf{TKP}_u, \mathbf{TKB}(\gamma_1), \mathbf{TKF}(\gamma_1)\}$$

Reglas de suma:

Finalmente podemos introducir las reglas de suma que pueden ser calculadas sobre la base de la expresión (3.9). Éstas son:

1. $\mathcal{E}[\mathbf{TKB}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u] + \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v]$
2. $\mathcal{E}[\mathbf{TKF}(\gamma_1)] = 2 \mathcal{E}[\mathbf{TKB}(\gamma_1)]$
3. $\mathcal{E}[\mathbf{TKF}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u] + \mathcal{E}[\mathbf{TK1}] + \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v]$
4. $\mathcal{E}[\mathbf{TK1}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u] + \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v]$
5. $\mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v]$

3.7 Modelo III[1][31].

En la sección precedente estudiamos un modelo físico con la presencia de cuatro puntos de vacío, lo que proporcionaba un proceso de ruptura de simetría espontánea. En aquel caso el foco de las parábolas coordenantes definidas por (3.1), situado en el origen, se convertía en un punto conjugado en el estudio de la estabilidad de las soluciones \mathbf{TKF} . Incluiremos en la presente sección el estudio de un nuevo modelo físico, que presentará cinco puntos de vacío degenerados, añadiendo a los presentados por el modelo III[1][11], otro situado en el origen. Siguiendo la nomenclatura establecida, este modelo es caracterizado por las siglas III[1][31] como será justificado posteriormente. El estudio de los posibles defectos topológicos requiere el análisis del funcional energía (1.39), que para este modelo incluye el potencial expresado bajo el uso de variables adimensionales

$$U(\phi) = (4\phi_1^2 + \phi_2^2)(4\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)^2 + 4\phi_1^2\phi_2^2(8\phi_1^2 + 3\phi_2^2 - 2) \quad (3.25)$$

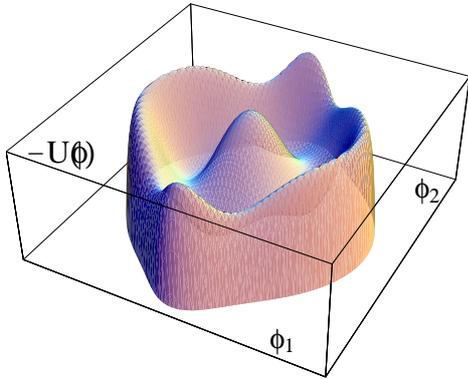


Figura 3.7. *Potencial III[1][31]*.

el cual se corresponde con una expresión polinómica semidefinida positiva de sexto grado. El lagrangiano presenta una simetría asociada al grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, como viene siendo norma en los sucesivos modelos estudiados (ver figura 3.7). Recordemos que las simetrías continuas eran discriminadas en nuestro estudio, puesto que en el proceso cuántico éstas son destruidas. De nuevo el sistema físico carece de parámetros libres no triviales.

El resultado 3.1 nos informa del carácter presupersimétrico de los modelos en estudio. El presente sistema admite la presencia de cuatro superpotenciales indicados por la expresión en parábolicas $\rho^*W = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{u^8}{2} - u^4 \right) \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{v^8}{2} - v^4 \right)$. Sobre el plano interno original se da lugar a los superpotenciales

$$W^I(\phi) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}} \left[2 \left(2\phi_1^2 + \phi_2^2 - \frac{1}{2} \right)^2 - \phi_2^4 \right]$$

$$W^{II}(\phi) = \pm \sqrt{2} \phi_1 \sqrt{\phi^* \phi} (2\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)$$

Propiedades del sistema:

La presentación del potencial en el semiplano parabólico convierte la expresión (3.25) en la siguiente

$$\rho^*U = \frac{1}{u^2 + v^2} \{ u^6(u^4 - 1)^2 + v^6(v^4 - 1)^2 \}$$

de modo que la comparación con el potencial genérico (3.16) nos permite identificar el valor de los parámetros que caracterizan el modelo, siendo $n = 1$, $\alpha_0 = 3$, $\sigma_1 = 1$ y $\alpha_1 = 1$. El potencial queda etiquetado por III[1][31] y pertenece al subcaso B1. La variedad de ceros

$$\mathcal{M} = \left\{ v^1 = -\frac{1}{2}; v^2 = -i; v^3 = 0; v^4 = i; v^5 = \frac{1}{2} \right\}$$

es compuesta por $\text{card}(\mathcal{M}) = 2 \cdot 1 \cdot (1 + 1) + 1 = 5$ elementos (ver figura 3.8). El moduli de la variedad de vacíos será $\text{Mod}(\mathcal{M}) = \{[v^1], [v^2], [v^3]\}$. Sobre estos elementos se tiene el espectro de pequeñas deformaciones o de masas:

$$M^2(v^1, v^5) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2(v^2, v^4) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad M^2(v^3) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A la vista de la estructura presentada por la variedad \mathcal{M} podemos concluir la presencia de un escenario de ruptura de simetría, donde la simetría por paridad de las componentes del campo presentada por la densidad lagrangiana, asociada al grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, es restringida al grupo pequeño $\{e\} \times \mathbb{Z}_2$ para los vacíos v^1 y v^5 , mientras que para v^2 y v^4 lo es al grupo $\mathbb{Z}_2 \times \{e\}$. Finalmente para v^3 la simetría primitiva queda intacta.

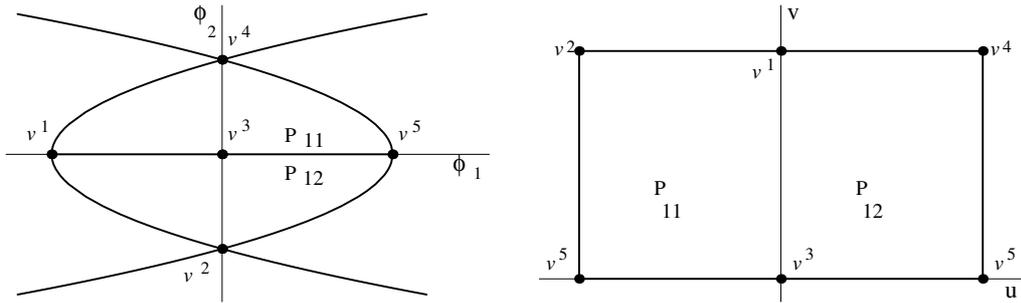


Figura 3.8: *Retículo del modelo III[1][31].*

El sistema mecánico asociado al modelo III[1][31] presenta dos integrales primeras

- la energía mecánica:

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - (4\phi_1^2 + \phi_2^2)(4\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)^2 - 4\phi_1^2\phi_2^2(8\phi_1^2 + 3\phi_2^2 - 2) \quad (3.26)$$

- el momento angular mecánico generalizado:

$$I_2 = \left\{ \phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right\} \frac{d\phi_2}{dx} + 4\phi_1\phi_2^2 \left[8\phi_1^4 + \phi_2^4 + 8\phi_1^2\phi_2^2 - 4\phi_1^2 - 2\phi_2^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (3.27)$$

que aseguran la posibilidad de encontrar las soluciones pretendidas.

Galería de soluciones:

Siguiendo el esquema trazado en todas las secciones anteriores, debemos ilustrar ahora las soluciones que pueden ser encontradas en el modelo, comenzando por las soluciones singulares de las que nos es conocida la expresión de las órbitas que las determinan. Concluimos:

1. TK1: Tomemos como ensayo de una hipotética solución la trayectoria dada por $\phi_2 = 0$, es decir, el campo ϕ es una magnitud real. El uso de la integral primera (3.26) con las condiciones asintóticas (1.13) y (1.14) nos permite afirmar que la expresión

$$\phi(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{4 + e^{\pm 4\sqrt{2}x}}} \quad (3.28)$$

constituye cuatro soluciones del espacio de configuración, los kinks TK1[13] y TK1[35] junto con sus antikinks TK1[31] y TK1[53]. Como es habitual serán denotados globalmente como **TK1**. Dado que las proyecciones de camino se presentan como $\pi_u(\mathbf{TK1}) = 0$ y $\pi_v(\mathbf{TK1}) = [0, 1]$, se verifica $\mathcal{E}[\mathbf{TK1}] = \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

2. TKV(0): Otra posibilidad evidente en este caso, observando la figura 3.8, es ensayar la órbita $\phi_1 = 0$, de modo que ϕ es un campo imaginario. Trasladando esta información a las condiciones (3.26) y (3.27), llegamos a la solución

$$\phi(x) = \frac{\pm i}{\sqrt{1 + e^{\pm 2\sqrt{2}\bar{x}}}} \quad (3.29)$$

que engloba cuatro kinks eligiendo arbitrariamente los signos de (3.29) y que especificamos mediante los siguientes términos TKV[23](0), TKV[34](0), TKV[43](0) y TKV[32](0). La energía asociada corresponde al valor $\mathcal{E}[\mathbf{TKV}(0)] = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Para estas soluciones el problema espectral del hessiano es resoluble. Este operador se presenta en la forma

$$\mathcal{H}[\mathbf{TKV}(0)] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 4(2 - 3 \operatorname{sech}^2 \sqrt{2}\bar{x}) & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + 5 - \frac{15}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{2}\bar{x} - 3 \tanh \sqrt{2}\bar{x} \end{pmatrix}$$

cuya primera componente incorpora un espectro discreto $\omega_{n_1}^2 = 8 - 2(2 - n_1)^2$ con $n_1 = 0, 1, 2$, sobre el que se genera un espectro continuo. El proporcionado por la segunda componente da lugar a un espectro discreto formado únicamente por el modo cero, junto a un espectro continuo no degenerado en el rango de autovalores $[2, 8]$, sobre el que se presenta el continuo doblemente degenerado.

3. TKP_u: La trayectoria $u = 1$ forma parte del retículo del modelo y debe albergar soluciones singulares según la proposición 3.1. Esto se refleja en el plano cartesiano por la presencia de kinks sobre la trayectoria parabólica $\phi_2^2 - 2\phi_1 = 1$. De este requisito se obtiene que el comportamiento de la segunda componente del campo ϕ debe ser determinado por la condición implícita

$$\frac{\phi_2^2}{1 - \phi_2^2} e^{-\frac{1}{\phi_2^2}} = e^{\pm 2\sqrt{2}\bar{x}} \quad (3.30)$$

que describe cuatro soluciones, que bajo las siglas **TKP_u**, pueden ser especificadas como TKP_u[21], TKP_u[14], TKP_u[12] y TKP_u[41], donde quedan marcados los vacíos que son conectados. Siendo de forma genérica $\pi_u(\mathbf{TKP}_u) = [0, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TKP}_u) = 0$, la energía es $\mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u] = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, donde se ha tenido en cuenta el resultado 3.2.

4. TKP_v: De forma similar al punto anterior aparecen otras trayectorias parabólicas como asentamiento de soluciones singulares. Así, la expresión $v = 1$ o bien $\phi_2^2 + 2\phi_1 = 1$ nos proporciona la condición (3.30) para fijar la componente ϕ_2 . Surgen

las soluciones TKP_v [25], TKP_v [45], TKP_v [52] y TKP_v [54]. Todas ellas serán denominadas mediante la etiqueta \mathbf{TKP}_v . Las proyecciones son $\pi_u(\mathbf{TKP}_v) = 0$ y $\pi_v(\mathbf{TKP}_v) = [0, 1]$ de manera que se tiene $\mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v] = \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

5. $\mathbf{TKB}(\gamma_1)$ y $\mathbf{TKV}(\gamma_1)$: Utilizaremos la teoría de Hamilton-Jacobi para encontrar nuevos kinks, una vez que han sido estudiadas completamente las soluciones kink singulares mediante el método de órbitas prueba. Usando la expresión (3.7) encontraremos las trayectorias, las cuales quedan determinadas como

$$\left\{ \frac{1-u^2}{1+u^2} e^{\frac{2}{u^2}} \right\}^{\text{Sign}(uu')} \left\{ \frac{1+v^2}{1-v^2} e^{-\frac{2}{v^2}} \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{4\sqrt{2}\gamma_1} \quad (3.31)$$

y al considerar (3.8) la dependencia espacial queda dada por

$$\left\{ \frac{1-u^4}{u^4} \right\}^{\text{Sign}(uu')} \left\{ \frac{1-v^4}{v^4} \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{4\sqrt{2}(x+\gamma_2)} \quad (3.32)$$

La descripción de las soluciones, que nos reportan las expresiones (3.31) y (3.32), es llevada a cabo mediante la siguiente clasificación en familias:

5.1. Familia $\mathbf{TKB}(\gamma_1)$: Caracterizada por la condición $\text{Sign}(uu') \neq \text{Sign}(v')$ sobre la expresión (3.31), estas soluciones son integrantes del sector \mathcal{C}_{15} o \mathcal{C}_{51} , esto es, quedan en conexión los vacíos v^1 y v^5 (ver figura 3.9). Parametrizadas por el valor de γ_1 atienden a las siglas $\text{TKB}[15](\gamma_1)$ y $\text{TKB}[51](\gamma_1)$ o globalmente a $\mathbf{TKB}(\gamma_1)$. Están asociadas a las ecuaciones de primer orden (1.60) evaluadas sobre el superpotencial $W^I(\phi)$. Las trayectorias escritas en las variables iniciales aparecen como

$$\frac{1-2|\phi|+\phi_2^2}{1+2|\phi|+\phi_2^2} e^{\frac{|\phi|}{\phi_2^2}} = e^{4\sqrt{2}\gamma_1}$$

Se verifica $\mathcal{E}[\mathbf{TKB}(\gamma_1)] = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, dado que la proyección de camino sobre el eje elíptico u es $\pi_u(\mathbf{TKB}(\gamma_1)) = [0, 1]$, mientras que $\pi_v(\mathbf{TKB}(\gamma_1)) = [0, 1]$. El estudio asintótico de los valores del parámetro γ_1 concluye que

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKB}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TK1} + \mathbf{TK1} \\ \mathbf{TKP}_u + \mathbf{TKP}_v \end{cases}$$

La parametrización de las soluciones encontradas puede ser caracterizada por el valor de la segunda componente del campo ϕ cuando la solución corta el eje $O\phi_2$. La relación existente entre la parametrización normal y la mencionada es implícita en la relación

$$\frac{1-\phi_2}{1+\phi_2} e^{\frac{2}{\phi_2}} = e^{2\sqrt{2}\gamma_1}$$

Se puede completar la siguiente tabla:

	Parámetro	Solución
1)	$\tilde{\phi}_2 = 1$	TKP _u [14] + TKP _v [45]
2)	$\tilde{\phi}_2 \in (0, 1)$	TKB[15](+)
3)	$\tilde{\phi}_2 = 0$	TK1[13]+TK1[35]
4)	$\tilde{\phi}_2 \in (0, -1)$	TKB[15](-)
5)	$\tilde{\phi}_2 = -1$	TKP _u [12] + TKP _v [25]

sobre la que los resultados de la teoría de Morse vienen a indicar la estabilidad de estas soluciones, puesto que los kinks se identifican con las geodésicas de la esfera que empiezan en el polo norte y terminan en el polo sur. El superpotencial asociado a las ecuaciones de primer orden (1.57) que las genera carece de puntos de ramificación, lo cual constituye de nuevo un indicio para asegurar la estabilidad de éstas [65].

5.2 Familia TKV(γ_1): Una nueva familia de soluciones viene determinada al considerar sobre (3.31) y (3.32) la condición $\text{Sign}(uu') = \text{Sign}(v')$. Los mínimos que llegan a ser ligados son v^2 y v^3 , de modo que aparecen kinks asociados a los sectores \mathcal{C}_{23} y \mathcal{C}_{32} , y v^3 con v^4 , tal que los sectores \mathcal{C}_{34} y \mathcal{C}_{43} introducen soluciones del sistema. Aparecen dos subfamilias dependiendo de los mínimos conectados; en una primera subfamilia se encuadran las soluciones kink TKV[23](γ_1) y antikink TKV[32](γ_1), y en la segunda los kink TKV[34](γ_1) junto a sus antikinks TKV[43](γ_1). Su clase de equivalencia en el espacio de moduli será denominada **TKV**(γ_1). Además, son generadas por las ecuaciones de primer orden (1.60) asociadas a la expresión $W^{II}(\phi)$. En coordenadas cartesianas las trayectorias se identifican por

$$\frac{1 - 2\phi_1 - \phi_2^2}{1 + 2\phi_1 - \phi_2^2} e^{-\frac{2\phi_1}{\phi_2^2}} = e^{4\sqrt{2}\gamma_1}$$

El cumplimiento de $\pi_u(\mathbf{TKV}(\gamma_1)) = [0, 1]$ y $\pi_v(\mathbf{TKV}(\gamma_1)) = [0, 1]$ implica que $\mathcal{E}(\mathbf{TKV}(\gamma_1)) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. El límite asintótico del parámetro γ_1 para esta familia lleva a las soluciones singulares en el modo

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKV}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TKP}_v + \mathbf{TK1} \\ \mathbf{TKP}_u + \mathbf{TK1} \end{cases}$$

Contemplar una parametrización para la presente familia implica en primer lugar advertir la presencia de un punto de vacío en el foco de las parábolas coordenantes. Ello tiene como consecuencia la inoperancia en este caso de la parametrización flujo-focal. Nos vemos obligados a utilizar la parametrización determinada por el punto de corte con cierta parábola, elegida entre aquellas que vienen definidas como $v = a$ donde $a \in (0, 1)$. Cualquiera que sea nuestra elección sobre el valor de a , podemos exhibir los siguientes datos:

	Parámetro	Solución	Sector
1)	$\tilde{u} = 1$	TK1[31] + TKP _u [14]	\mathcal{C}_{34}
2)	$\tilde{u} \in (0, 1)$	TKV[34](+)	\mathcal{C}_{34}
3)	$\tilde{u} = 0^+$	TK1[35] + TKP _v [54]	\mathcal{C}_{34}
4)	$\tilde{u} = 0^-$	TK1[35] + TKP _v [52]	\mathcal{C}_{32}
5)	$\tilde{u} \in (0, -1)$	TKB[32](-)	\mathcal{C}_{32}
6)	$\tilde{u} = -1$	TK1[31] + TKP _u [12]	\mathcal{C}_{32}

en tal sentido que la teoría de Morse determina que esta familia de soluciones es estable. Desde otro punto de vista, las soluciones descritas no atraviesan el punto de ramificación presentado por $W^H(\phi)$, lo cual implica la estabilidad de éstas.

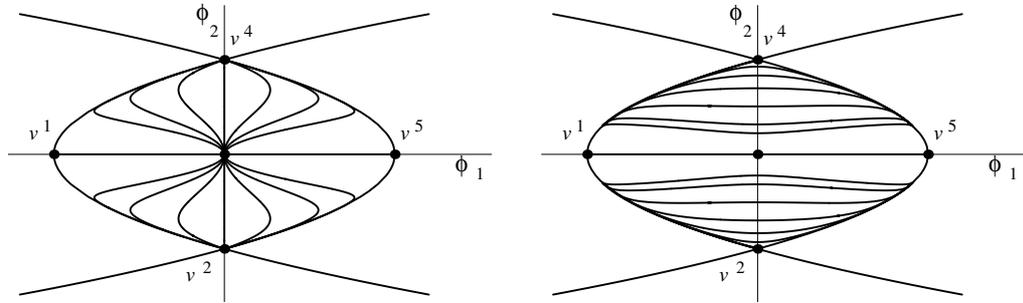


Figura 3.9: *Kinks TKV* (izquierda) y *Kinks TKB* (derecha).

Toda la variedad de kinks puede ser especificada mostrando el espacio de moduli de \mathcal{C}_K

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\text{TKB}(\gamma_1), \text{TKV}(\gamma_1), \text{TKP}_u, \text{TK1}\}$$

Reglas de suma:

Para finalizar los resultados asociados al presente modelo enunciamos las reglas de suma:

1. $\mathcal{E}[\text{TKB}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\text{TKV}(\gamma_1)] = \mathcal{E}(\text{TK1})$
2. $\mathcal{E}[\text{TKP}_u] = \mathcal{E}[\text{TKP}_v] = 2 \mathcal{E}[\text{TK1}]$

3.8 Modelo III[17][011].

Para terminar el análisis de los modelos particulares de Liouville de tipo III tratados en este capítulo, abordaremos en esta sección el estudio de un sistema físico natural caracterizado por un término potencial adimensional determinado por la expresión polinómica de octavo grado

$$U_{\text{III}[17][011]}(\phi) = (4\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)^2 (4\phi_1^2 + \phi_2^2 - \tau^2)^2 + \quad (3.33)$$

$$+4\phi_1^2\phi_2^2(1+4\tau^2+\tau^4-2(1+\tau^2)(8\phi_1^2+3\phi_2^2))+48\phi_1^4+36\phi_1^2\phi_2^2+6\phi_2^4$$

que a pesar de su intrincada forma, ejemplifica las propiedades más generales de los sistemas asignados a los modelos de Liouville de tipo III.

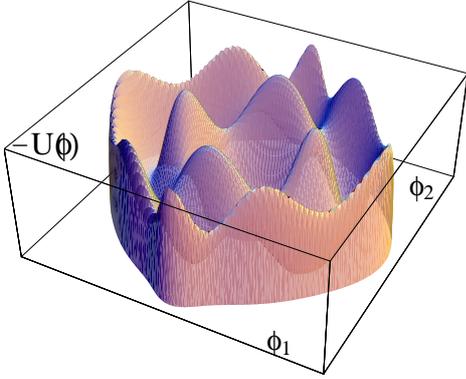


Figura 3.10. *Potencial III[1τ][011]*.

El potencial (3.33) permite disfrutar al lagrangiano de las simetrías asociadas a la acción de las reflexiones del grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. El sistema incorpora la presencia de un parámetro no trivial τ que no puede ser eliminado mediante redefiniciones de las magnitudes del modelo. Por convenio, supondremos para el parámetro τ un valor superior a la unidad. Además, definimos el parámetro $\bar{\tau}^2 = \tau^2 - 1$.

Según la proposición 3.3 el sistema considerado debe tener un carácter presuper-simétrico. Así, la expresión (3.11) permite calcular cuatro superpotenciales asociados al modelo

$$W^I(\phi) = \pm\sqrt{2}\phi_1 \left[\frac{16}{5}\phi_1^4 + 4\phi_1^2\phi_2^2 + \phi_2^4 - \frac{1+\tau^2}{3}(4\phi_1^2 + 3\phi_2^2) + \tau^2 \right]$$

$$W^{II}(\phi) = \pm\sqrt{2}\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} \left[\frac{1}{5}(16\phi_1^4 + 12\phi_1^2\phi_2^2 + \phi_2^4) - \frac{1+\tau^2}{3}(4\phi_1^2 + \phi_2^2) + \tau^2 \right]$$

que generan tantos sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (1.60), que caracterizan los defectos topológicos del modelo.

Propiedades del sistema:

El término potencial (3.33) puede ser expresado en el plano elíptico de la forma

$$\rho^*U = \frac{1}{u^2 + v^2} \left[u^2(u^4 - 1)^2(u^4 - \tau^2)^2 + v^2(v^4 - 1)^2(v^4 - \tau^2)^2 \right]$$

El potencial genérico (3.16) es restringido al presente modelo al elegir los valores de las constantes como $n = 2$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \tau$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 1$, lo que permite concluir que el sistema analizado pertenece al caso A1 y lleva asociado las siglas III[1τ][011]. El uso de los conocimientos adquiridos nos permite asegurar la existencia de doce puntos de vacío, mínimos con valor nulo del potencial. El modelo presenta ocho celdas delimitadas en el plano interno por las curvas separatrices

$$P_u = \{ \phi \in \mathbb{C} / \phi_2^2 + 2\phi_1 = 1 (u^4 = 1) \text{ y } \phi_2^2 + 2\tau\phi_1 = \tau^2 (u^4 = \tau^2) \}$$

$$P_v = \{ \phi \in \mathbb{C} / \phi_2^2 - 2\phi_1 = 1 (v^4 = 1) \text{ y } \phi_2^2 - 2\tau\phi_1 = \tau^2 (v^4 = \tau^2) \}$$

$$X = \{ \phi \in \mathbb{C} / \phi_2 = 0 \}$$

de forma que $\rho^* \text{Ret}(P) = P_u \cup P_v \cup X$. La variedad de ceros queda determinada por los elementos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \{ & v^1 = i\tau; v^2 = -\frac{\tau-1}{2} + i\sqrt{\tau}; v^3 = \frac{\tau-1}{2} + i\sqrt{\tau}; v^4 = i; \\ & v^5 = -\frac{\tau}{2}; v^6 = -\frac{1}{2}; v^7 = \frac{1}{2}; v^8 = \frac{\tau}{2}; \\ & v^9 = -i; v^{10} = -\frac{\tau-1}{2} - i\sqrt{\tau}; v^{11} = \frac{\tau-1}{2} - i\sqrt{\tau}; v^{12} = -i\tau \} \end{aligned}$$

que es ilustrada en la figura 3.11, junto a las curvas singulares o separatrices que delimitan las ocho celdas presentadas por el modelo. Las simetrías del sistema relacionan los puntos de vacío, tal que $\text{Mod}(\mathcal{M}) = \{[v^1], [v^2], [v^4], [v^5], [v^6]\}$.

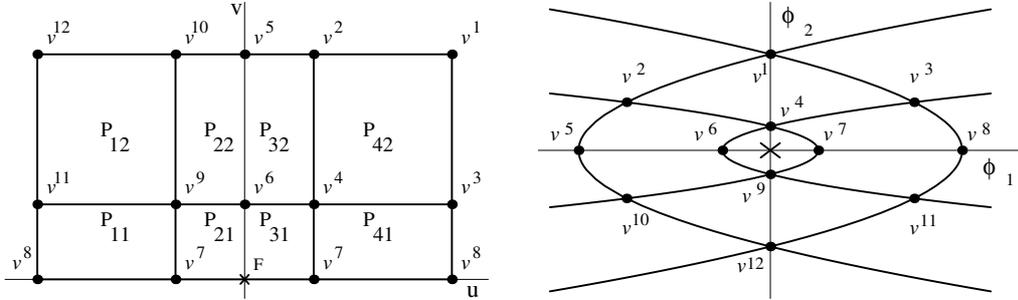


Figura 3.11: *Retículo y vacíos (indicados por \bullet) del modelo III[17][011].*

La compleja estructura de la variedad \mathcal{M} origina un proceso de ruptura de simetría. Para los vacíos v^5, v^6, v^7 y v^8 la simetría inicial queda rota al subgrupo pequeño $H = \{e\} \times \mathbb{Z}_2$, que conserva la invariancia bajo las reflexiones de la segunda componente del campo ϕ . Los vacíos v^1, v^4, v^9 y v^{12} guardan las simetrías de reflexión bajo la componente ϕ_1 , tal que la invariancia queda especificada por el grupo $H = \mathbb{Z}_2 \times \{e\}$. Para el resto de los vacíos la simetría del lagrangiano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ queda totalmente rota. El espectro de partículas o de pequeñas deformaciones sobre los vacíos viene caracterizado por un continuo asentado sobre las masas

$$\begin{aligned} M^2(v^5, v^8) &= \begin{pmatrix} 32\tau^2\bar{\tau}^2 & 0 \\ 0 & 2\tau^2 \end{pmatrix} & M^2(v^1, v^{12}) &= \begin{pmatrix} 8\tau^2\bar{\tau}^2 & 0 \\ 0 & 8\tau^2\bar{\tau}^2 \end{pmatrix} \\ M^2(v^4, v^9) &= \begin{pmatrix} 8\bar{\tau}^2 & 0 \\ 0 & 8\bar{\tau}^2 \end{pmatrix} & M^2(v^6, v^7) &= \begin{pmatrix} 32\bar{\tau}^2 & 0 \\ 0 & 2\tau^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

junto con la más complicada

$$M^2(v^2, v^3, v^{10}, v^{11}) = 32(\tau-1)^2 \begin{pmatrix} 1 - \tau + \tau^2 - \tau^3 + \tau^4 & \sqrt{\tau}(\tau-1)(1+\tau^2) \\ \sqrt{\tau}(\tau-1)(1+\tau^2) & \tau(1-\tau+\tau^2) \end{pmatrix}$$

que al ser diagonalizada se convierte en

$$M^2(v^2, v^3, v^{10}, v^{11}) = 32(\tau - 1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau^4 \end{pmatrix}$$

El espacio de configuración \mathcal{C} estará formado por la unión de 144 sectores desconectados, atendiendo a los puntos de vacío que pueden ser ligados. Muchos de estos sectores carecerán de soluciones de tipo kink, o bien sólo las soluciones homogéneas formarán parte de ellos. El par de integrales primeras mecánicas asociadas al modelo que estudiamos, corresponden a las expresiones:

- La energía mecánica

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - U_{\text{III}[1\tau][011]}(\phi_1, \phi_2)$$

- El momento angular mecánico generalizado

$$I_2 = \left\{ \phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right\} \frac{d\phi_2}{dx} + \\ + 4\phi_1\phi_2^2(4\phi_1^2 + 2\phi_2^2 - 1 - \tau^2)(8\phi_1^4 + \phi_2^4 + 8\phi_1^2\phi_2^2 + (1 + \tau^2)(2\phi_1^2 + \phi_2^2) - \tau^2)$$

Galería de soluciones: Parametrización.

Como en anteriores modelos, llegado este punto de la exposición mostraremos interés por las posibles soluciones de tipo kink presentes en el sistema, iniciando esta sección con el estudio de las soluciones singulares. Entonces,

1. $\mathbf{TK1}$: Por argumentos generales ya expuestos debe existir una solución singular cuya trayectoria vendrá caracterizada por la condición $\phi_2 = 0$ sobre el plano cartesiano, que se traduce en la relación $u = 0 \cup v = 0$ en el plano elíptico. El comportamiento de la componente real del campo $\phi(x)$ viene determinado por la relación implícita

$$\left| \frac{1 + 2\phi_1}{1 - 2\phi_1} \right| \left(\frac{\tau - 2\phi_1}{\tau + 2\phi_1} \right)^{\frac{1}{\tau}} = e^{\pm 2\sqrt{2}\tau^2 \bar{x}}$$

que determina seis soluciones: los kinks $\mathbf{TK1}$ [56], $\mathbf{TK1}$ [78] junto a sus antikinks $\mathbf{TK1}$ [65], $\mathbf{TK1}$ [87], que forman la clase de equivalencia $\mathbf{TK1}^{(1)}$, y el kink $\mathbf{TK1}$ [67] con su antikink $\mathbf{TK1}$ [76], que constituyen la clase $\mathbf{TK1}^{(2)}$ (véase la figura 3.13).

2. $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}$: Ensayando como trayectorias validas los tramos parabólicos $\rho^*(u = \pm 1)$ (ver figura 3.13), que equivalentemente corresponden a la expresión en cartesianas

$$\phi_2^2 = 1 + 2\phi_1$$

encontramos soluciones que verifican la dependencia espacial implícita sobre la componente imaginaria del campo complejo $\phi(x)$

$$|\phi_2|^{\frac{1}{\tau^2}} \left(\frac{|\phi_2^2 - \tau|}{\phi_2^2 + \tau} \right)^{\frac{1}{4\tau\bar{\tau}^2}} \frac{|\tau^2 - \phi_2^4|^{\frac{1}{4\tau^2\bar{\tau}^2}}}{|1 - \phi_2^2|^{\frac{1}{2\bar{\tau}^2}}} = e^{\pm\sqrt{2}\bar{x}} \quad (3.34)$$

y que constituyen ocho soluciones que agrupamos en las clases de equivalencia $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(1)}$ (que engloba los kinks $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(1)}$ [97], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(1)}$ [74] y sus antikinks $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(1)}$ [79], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(1)}$ [47]) y $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)}$ (cuyos elementos son los kinks particulares $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)}$ [42], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)}$ [10 – 9] y sus correspondientes antikinks, esto es, los $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)}$ [24], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)}$ [9 – 10]).

3. $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}$: En el caso de adoptar como órbita prueba la separatriz $\rho^*(v = 1) \equiv \phi_2^2 = 1 - 2\phi_1 \in P_v$ obtendremos como resultado la aparición de soluciones que siguen la expresión (3.34), que en este caso proporciona los kinks que bajo los epígrafes $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)}$ conectan los vacíos v^4 , v^6 y v^9 y $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(2)}$ los vacíos v^3 , v^4 , v^9 y v^{11} . Al ser enumerados obtendremos los kinks $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)}$ [96], $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)}$ [64], $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(2)}$ [43], $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(2)}$ [11 – 9] y sus antikinks $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)}$ [69], $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)}$ [46], $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(2)}$ [14], $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(2)}$ [9 – 11] (ver figura 3.13).

4. $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}$: El modelo presenta otras separatrices que deben ser tratadas bajo el método de órbitas prueba. Así, a la trayectoria $\rho^*(u = \pm\sqrt{\tau}) \equiv \phi_2^2 = \tau^2 + 2\tau\phi_1 \in P_u$ encontramos asociadas las soluciones que verifican

$$|\phi_2|^{\frac{1}{\tau^4}} \left| 1 - \frac{\phi_2^4}{\tau^2} \right| \frac{(\tau^2 - \phi_2^2)^{\frac{1}{2\tau^4\bar{\tau}^2}}}{|\tau^2 - \phi_2^2|^{\frac{1}{2\tau^4\bar{\tau}^2}}} = e^{\pm 2\tau^3\bar{x}} \quad (3.35)$$

Conectan los puntos de vacío v^1 , v^3 , v^8 , v^{11} y v^{12} . Las soluciones particulares serán los kinks $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}$ [11 – 8], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}$ [83] y antikinks $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}$ [8 – 11], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}$ [38] (que constituyen la clase de equivalencia $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}$), junto con los kinks $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}$ [12 – 11], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}$ [31] y sus antikinks $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}$ [11 – 12], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}$ [13] (que forman $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}$), véase la figura 3.13.

5. $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{II}\}$: Sobre el tramo $\rho^*(v = \sqrt{\tau}) \equiv \phi_2^2 = \tau^2 - 2\tau\phi_1 \in P_u$ (ver figura 3.13) se asientan soluciones que verifican la relación (3.35) y que agruparemos en kinks $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{II}\}^{(1)}$, referidos específicamente como $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}$ [10 – 5], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}$ [52] y sus antikinks $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}$ [5 – 10], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}$ [25], frente a los kinks $\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{II}\}^{(2)}$ constituidos por $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}$ [12 – 10], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}$ [21], $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}$ [10 – 12] y finalmente por $\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}$ [12].

6. $\mathbf{TKL}(\gamma_1)$, $\mathbf{TKM}(\gamma_1)$, $\mathbf{TKN}(\gamma_1)$ y $\mathbf{TKF}(\gamma_1)$: Una vez estudiadas todas las soluciones singulares incluidas en el sistema, emplearemos la teoría de Hamilton-Jacobi para obtener las soluciones densas. Empleando (3.7) y (3.8) tales soluciones deben

cumplir la relación que fija la trayectoria

$$\left\{ \frac{|u|^{\frac{4}{\tau^2}} (\tau^2 - u^4)^{\frac{1}{\tau^2 \tau^2}}}{|1 - u^4|^{\frac{1}{\tau^2}}} \right\}^{\text{Sign}(uu')} \left\{ \frac{|1 - v^4|^{\frac{1}{\tau^2}}}{v^{\frac{4}{\tau^2}} (\tau^2 - v^4)^{\frac{1}{\tau^2 \tau^2}}} \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{4\sqrt{2}\gamma_1} \quad (3.36)$$

y su dependencia espacial

$$\left\{ \left(\frac{\tau^2 - u^2}{\tau^2 + u^2} \right)^{\frac{1}{\tau^2}} \frac{1 + u^2}{|1 - u^2|} \right\}^{\text{Sign}(uu')} \left\{ \left(\frac{\tau^2 - v^2}{\tau^2 + v^2} \right)^{\frac{1}{\tau^2}} \frac{1 + v^2}{|1 - v^2|} \right\}^{\text{Sign}(v')} = e^{4\sqrt{2}\tau^2(x+\gamma_2)} \quad (3.37)$$

Las expresiones (3.36) y (3.37) determinan la siguiente plétora de soluciones kinks:

- Sobre las celdas P_{11} , P_{22} , P_{32} y P_{41} sobreviven

6.1. Familia $\mathbf{TKL}\{\mathbf{I}\}(\gamma_1)$: Estas soluciones, que llamaremos como $\mathbf{TKL}\{\mathbf{I}\}(\gamma_1)$ sobre el espacio de Moduli, forman parte de los sectores \mathcal{C}_{37} , \mathcal{C}_{26} , \mathcal{C}_{7-11} , \mathcal{C}_{6-10} , \mathcal{C}_{73} , \mathcal{C}_{62} , \mathcal{C}_{11-7} y \mathcal{C}_{10-6} . Sobre (3.36) y (3.37) son generadas bajo la condición $\text{Sign}(uu') = \text{Sign}(v')$. Surgen en el esquema de modelos presupersimétricos aplicando las ecuaciones de primer orden (1.60) sobre el superpotencial $W^I(\phi)$. Las soluciones ilustradas en la figura 3.12 son los $\mathbf{TKL}\{\mathbf{I}\}[73](\gamma_1)$, $\mathbf{TKL}\{\mathbf{I}\}[62](\gamma_1)$, $\mathbf{TKL}\{\mathbf{I}\}[11-7](\gamma_1)$ y $\mathbf{TKL}\{\mathbf{I}\}[10-6](\gamma_1)$ y sus respectivos antikinks. Si es considerado el límite asintótico del parámetro se puede escribir

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKL}\{\mathbf{I}\}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)} + \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)} \\ \mathbf{TK1}^{(1)} + \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)} \end{cases}$$

6.2. Familia $\mathbf{TKL}\{\mathbf{II}\}(\gamma_1)$: Verificando que $\text{Sign}(uu') = -\text{Sign}(v')$ encontraremos soluciones que nombradas genéricamente como $\mathbf{TKL}\{\mathbf{II}\}(\gamma_1)$ enlazan los pares de puntos de vacío v^4 y v^8 , v^4 y v^5 , v^9 y v^8 , v^9 y v^5 (ver figura 3.12). Las soluciones particulares corresponden a los $\mathbf{TKL}\{\mathbf{II}\}[84](\gamma_1)$, $\mathbf{TKL}\{\mathbf{II}\}[54](\gamma_1)$, $\mathbf{TKL}\{\mathbf{II}\}[95](\gamma_1)$ y $\mathbf{TKL}\{\mathbf{II}\}[98](\gamma_1)$. Esta familia es asociada a la presencia del superpotencial $W^I(\phi)$. En este caso, tendremos

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKL}\{\mathbf{II}\}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TKP}_v\{\mathbf{II}\}^{(1)} + \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)} \\ \mathbf{TK1}^{(1)} + \mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)} \end{cases}$$

- Sobre las celdas P_{12} y P_{42} hallaremos

6.3. Familia $\mathbf{TKM}\{\mathbf{I}\}(\gamma_1)$: Con $\text{Sign}(uu') = \text{Sign}(v')$, las soluciones interrelacionan los mínimos v^1 , v^4 , v^9 y v^{12} , mediante los kinks $\mathbf{TKM}\{\mathbf{I}\}[41](\gamma_1)$, $\mathbf{TKM}\{\mathbf{I}\}[12-9](\gamma_1)$ y antikinks $\mathbf{TKM}\{\mathbf{I}\}[41](\gamma_1)$, $\mathbf{TKM}\{\mathbf{I}\}[9-12](\gamma_1)$, que conforman los elementos de $\mathbf{TKM}\{\mathbf{I}\}(\gamma_1)$ en el espacio de Moduli. Pueden ser visualizados en la figura 3.13. Un método alternativo para extraer estas soluciones viene reflejado en el estudio de

las ecuaciones de primer orden (1.60) generadas por el superpotencial $W^{II}(\phi)$. Se verifica que

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKM}\{\mathbf{I}\}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(2)} + \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)} \\ \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)} + \mathbf{TKP}_v\{\mathbf{II}\}^{(2)} \end{cases}$$

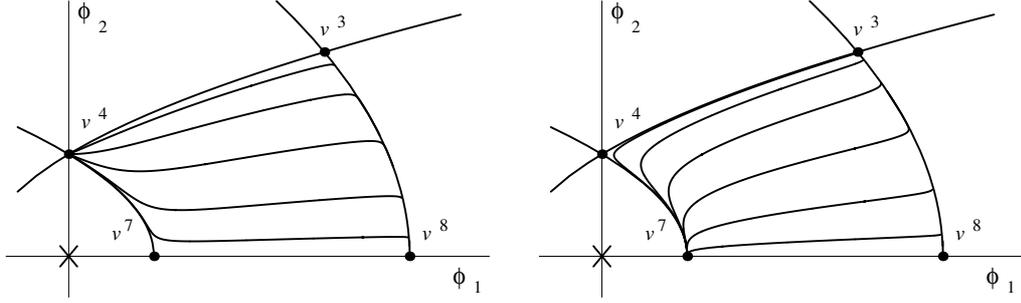


Figura 3.12: *Kinks* $\mathbf{TKL}\{\mathbf{II}\}$ (izquierda) y *kinks* $\mathbf{TKL}\{\mathbf{I}\}$ (derecha).

6.4. Familia $\mathbf{TKM}\{\mathbf{II}\}(\gamma_1)$: Se verifica que $\text{Sign}(uu') = -\text{Sign}(v')$. Las soluciones forman el elemento $\mathbf{TKM}\{\mathbf{II}\}(\gamma_1)$ del espacio de Moduli, que viene constituido sobre \mathcal{C} por los kinks $\mathbf{TKM}\{\mathbf{II}\}[23](\gamma_1)$, $\mathbf{TKM}\{\mathbf{II}\}[10-11](\gamma_1)$ y antikinks $\mathbf{TKM}\{\mathbf{II}\}[32](\gamma_1)$, $\mathbf{TKM}\{\mathbf{II}\}[11-10](\gamma_1)$. El superpotencial relevante en este caso corresponde a $W^I(\phi)$. Al tomar sobre esta familia los valores asintóticos de γ_1 se tiene

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKM}\{\mathbf{II}\}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)} + \mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(2)} \\ \mathbf{TKP}_v\{\mathbf{II}\}^{(2)} + \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)} \end{cases}$$

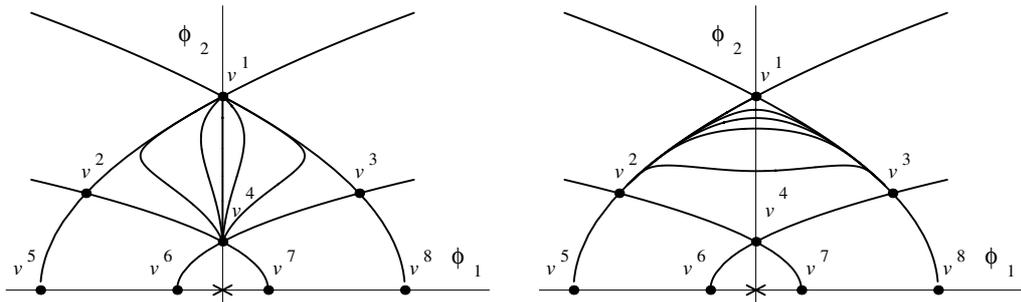


Figura 3.13: *Kinks* $\mathbf{TKM}\{\mathbf{I}\}$ (izquierda) y *kinks* $\mathbf{TKM}\{\mathbf{II}\}$ (derecha).

- En las celdas P_{21} y P_{31} subsisten

6.5. Familia $\mathbf{TKN}(\gamma_1)$: Compuesta por soluciones que conectan los vacíos v^6 y v^7 , que bajo las siglas del elemento $\mathbf{TKN}(\gamma_1) \in \text{Mod}\mathcal{C}_K$ conforman los kinks $\mathbf{TKN}[67](\gamma_1)$ y los antikinks $\mathbf{TKN}[76](\gamma_1)$ en el espacio de configuración. Su comportamiento es totalmente análogo al de las soluciones \mathbf{TKB} del modelo III[1][11]

presentado en este capítulo (ver figura 3.5). El uso del superpotencial $W^I(\phi)$ sobre (1.60) nos permitiría recuperar los mismos resultados expuestos. Cuando se aumenta el valor del parámetro natural, las soluciones densas se singularizan en el modo

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKN}(\gamma_1) \equiv \begin{cases} \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(1)} + \mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)} \\ \mathbf{TK1}^{(2)} \end{cases}$$

6.6. Familia $\mathbf{TKF}(\gamma_1)$: Estas soluciones trascurren en dos celdas al atravesar el foco (vértice de P_{21} y P_{31}) localizado en el origen. Quedan en conexión los puntos de vacío v^9 y v^4 . Como es ya natural, serán denotadas como $\mathbf{TKF}(\gamma_1) \in \text{Mod } \mathcal{C}_K$ y corresponden a los kinks $\mathbf{TKF}[94](\gamma_1)$ y a los antikinks $\mathbf{TKF}[49](\gamma_1)$. Su descripción es idéntica a la proporcionada para las soluciones $\mathbf{TKF}(\gamma_1)$ del modelo III[1][11] (ver figura 3.6). El superpotencial que permitiría su estudio es asociado a la expresión $W^{II}(\phi)$ en este caso. Se tiene:

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKF}(\gamma_1) \equiv \mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)} + \mathbf{TK1}^{(2)} + \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(1)}$$

A modo de sumario puede ser mostrado el espacio de Moduli \mathcal{C}_K :

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\mathcal{C}_K) = & \{ \mathbf{TK1}^{(1)}, \mathbf{TK1}^{(2)}, \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(1)}, \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)}, \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}, \\ & \mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}, \mathbf{TKL}\{\mathbf{I}\}(\gamma_1), \mathbf{TKL}\{\mathbf{II}\}(\gamma_1), \mathbf{TKM}\{\mathbf{I}\}(\gamma_1), \\ & \mathbf{TKM}\{\mathbf{II}\}(\gamma_1), \mathbf{TKN}(\gamma_1), \mathbf{TKF}(\gamma_1) \} \end{aligned}$$

La teoría de Morse aplicada sobre el conjunto de familias de soluciones que hemos encontrado, permite concluir la estabilidad de todas las soluciones a excepción de los kinks $\mathbf{TKF}(\gamma_1)$, que atraviesan un punto conjugado y son inestables. Otra forma de establecer este carácter viene determinado por la observación de que estas soluciones pasan por el punto de ramificación del superpotencial $W^{II}(\phi)$, cuyas ecuaciones de primer orden asociadas caracterizan estos kinks.

Reglas de suma:

Sobre de la tupida fauna de soluciones encontradas, cabe resaltar las sencillas relaciones entre el valor de sus energías. Así, se cumple que:

1. $\mathcal{E}[\mathbf{TKL}\{\mathbf{I}\}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TKL}\{\mathbf{II}\}]$
2. $\mathcal{E}[\mathbf{TKM}\{\mathbf{I}\}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TKM}\{\mathbf{II}\}]$
3. $\mathcal{E}[\mathbf{TKF}(\gamma_1)] = 2 \mathcal{E}[\mathbf{TKN}(\gamma_1)] = 2 \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(2)}]$
4. $\mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(1)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(1)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{II}\}^{(1)}]$

5. $\mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}]$
6. $\mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(2)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{II}\}^{(2)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}]$
7. $\mathcal{E}[\mathbf{TKL}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(2)}] + \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)}]$
8. $\mathcal{E}[\mathbf{TKM}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{II}\}^{(2)}] + \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(2)}]$
9. $\mathcal{E}[\mathbf{TKN}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_u\{\mathbf{I}\}^{(1)}] + \mathcal{E}[\mathbf{TKP}_v\{\mathbf{I}\}^{(1)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(2)}]$

y donde la energía de cualquier kink puede ser obtenido teniendo presente los valores particulares

$$\mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(1)}] = \frac{1}{15}(\tau - 1)^3(1 + 3\tau + \tau^2) \quad \mathcal{E}[\mathbf{TK1}^{(2)}] = \frac{2}{15}(5\tau^2 - 1)$$

3.9 Kinks genéricos de tipo III

Habiendo realizado un profundo estudio de la variedad de kinks presentes en los modelos particulares III[1][11], III[1][31] y III[1 τ][011], como casos significativos de los modelos de Liouville de tipo III, resulta de interés generalizar la estructura albergada por tales modelos. Así, al aplicar sobre los sistemas físicos que incluyen un término potencial genérico dado por (3.16) la teoría de Hamilton-Jacobi plasmada en las ecuaciones (3.7) y (3.8), obtenemos como resultado la expresión que define la trayectoria de los kinks presentes en éstos

$$\text{Sign}(u') \int \frac{A du}{|u^{\alpha_0} \prod_i (u^4 - \sigma_i^2)^{\alpha_i}|} - \text{Sign}(v') \int \frac{A dv}{|v^{\alpha_0} \prod_i (v^4 - \sigma_i^2)^{\alpha_i}|} = \sqrt{2}\gamma_1 \quad (3.38)$$

mientras que su dependencia espacial es obtenida resolviendo

$$\text{Sign}(u') \int \frac{A u^2 du}{|u^{\alpha_0} \prod_i (u^4 - \sigma_i^2)^{\alpha_i}|} + \text{Sign}(v') \int \frac{A v^2 dv}{|v^{\alpha_0} \prod_i (v^4 - \sigma_i^2)^{\alpha_i}|} = \sqrt{2}(x + \gamma_2) \quad (3.39)$$

En la sección 3.5 los modelos que incluyen el término potencial (3.16) habían sido divididos en los subgrupos A y B. Estudiaremos los subcasos A1 y B1, los cuales muestran de forma genérica las propiedades de los casos más generales pertenecientes a A y B. Entonces,

- **Caso A1:**

Los sistemas físicos considerados en este bloque quedan restringidos a aquellos con un potencial (3.16) en la forma

$$\rho^* U = \frac{A^2}{u^2 + v^2} \left\{ u^2 \prod_{i=1}^n (u^4 - \sigma_i^2)^2 + v^2 \prod_{i=1}^n (v^4 - \sigma_i^2)^2 \right\}$$

tal que los parámetros introducidos permiten identificar el modelo, según la nomenclatura convenida, como III[($\vec{\sigma}$)] [11...1]. Incluidos en este caso se encuentran los modelos III[1][11] y III[1 τ][011] estudiados con anterioridad. Considerando las integraciones de (3.38) y (3.39), la trayectoria queda especificada por la ecuación entre componentes parabólicas

$$\frac{\{f_C(u^2)\}^{\text{Sign}(uu')}}{\{f_C(v^2)\}^{\text{Sign}(v')}} = e^{2\sqrt{2}A\gamma_1} \quad (3.40)$$

mientras que la dependencia espacial surge como

$$\{f_A(u^2)\}^{\text{Sign}(uu')} \cdot \{f_A(v^2)\}^{\text{Sign}(v')} = e^{2\sqrt{2}A(x+\gamma_2)} \quad (3.41)$$

donde las funciones introducidas quedan definidas en el apéndice A.

• **Caso B1:**

Los sistemas físicos incluidos en este caso quedan referidos como III[($\vec{\sigma}$)] [31...1], de modo que el potencial (3.16) se restringe a

$$\rho^*U = \frac{A^2}{u^2 + v^2} \left\{ u^6 \prod_{i=1}^n (u^4 - \sigma_i^2)^2 + v^6 \prod_{i=1}^n (v^4 - \sigma_i^2)^2 \right\}$$

tal que la trayectoria de las soluciones kinks presentes en este tipo de modelos es determinada por la expresión

$$\frac{\{f_G(u)\}^{\text{Sign}(uu')}}{\{f_G(v)\}^{\text{Sign}(v')}} = e^{2\sqrt{2}A\gamma_1} \quad (3.42)$$

y su dependencia espacial queda plasmada en la relación

$$\{f_C(u^2)\}^{\text{Sign}(uu')} \cdot \{f_C(v^2)\}^{\text{Sign}(v')} = e^{2\sqrt{2}A(x+\gamma_2)} \quad (3.43)$$

donde las funciones siguen las expresiones marcadas en el apéndice A.

Compendio de propiedades de los kinks de tipo III:

Las soluciones que surgen de las expresiones (3.40), (3.41), (3.42) y (3.43) están regidas por los siguientes comportamientos

- Las soluciones de cada modelo conforman una familia biparamétrica, determinadas por el valor de los parámetros γ_1 y γ_2 . El primero de ellos parametriza la trayectoria seguida mientras que el segundo caracteriza el modo cero. Las soluciones singulares aparecen cuando alguno de los parámetros crece indefinidamente, dando origen al concepto de separatrices, y en su conjunto al concepto de retículo.

- Las curvas (3.40) y (3.42) definen las trayectorias de la solución sobre el plano parabólico. Dentro de cada celda tales curvas son monótonas y alcanzan vértices opuestos. Cuando dichos vértices corresponden a puntos de vacío queda definido un kink simple a lo largo de un espacio infinito. Otra posibilidad aparece en el caso A para aquellas soluciones que pasan por el origen, que se asienta en el vértice de dos celdas adjuntas sin adoptar el carácter de vacío. En tal caso la solución parte de un punto de vacío en una celda inicial, cruza el origen llegando a una nueva celda y finaliza en el vacío asentado en el vértice opuesto.
- El flujo de trayectorias queda regida por la expresión

$$\frac{du}{dv} = \frac{\text{Sign}(u'u^{\alpha_0}) u^{\alpha_0} (u^4 - \sigma_i^2)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (u^4 - \sigma_n^2)^{\alpha_n}}{\text{Sign}(v') v^{\alpha_0} (v^4 - \sigma_i^2)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (v^4 - \sigma_n^2)^{\alpha_n}}$$

la cual queda indefinida para los puntos de vacío de cada modelo. Un hecho importante es que para las familias de soluciones que convergen en el foco, como ocurre para el caso A1, el flujo a través de este punto queda definido en el modo

$$\left. \frac{du}{dv} \right|_{(0,0)} = \pm e^{(-1)^n \sqrt{2} A \gamma_1} \Pi \sigma_i^2$$

lo cual permitirá parametrizar dichas soluciones por el ángulo de cruce respecto del origen (parametrización flujo-focal).

Galería de kinks de tipo III:

Analizaremos las posibles soluciones kinks que aparecen en los modelos A y B, a la vista de las propiedades anteriores. Seguiremos los convenios adoptados en el capítulo precedente. Los kinks quedan caracterizados por la identidad de los vértices de las celdas que son conectados. Generalmente bastará indicar mediante índices los vacíos que determinan las ondas solitarias, aunque algunos kinks deben ser descritos señalando su paso a través del foco situado en el origen. Como es habitual distinguiremos los distintos casos introducidos en la sección 3.5.

CASO A:

Introduciendo los conjuntos de índices,

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \{-n, -(n-1), -(n-2), \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n\} \\ \mathbf{j} &= \{0, 1, \dots, n-1, n\} \end{aligned}$$

definimos el conjunto de índices dobles como

$$\mathcal{I}_A = \mathbf{i} \times \mathbf{j} - \{(0, 0)\}$$

de modo que la variedad de ceros sobre el plano parabólico es conformada por los siguientes elementos $\rho^* \mathcal{M} = \{v^{(i,j)} = (\text{Sign}(i)\sigma_{|i|}, \sigma_j)\}$ con $(i, j) \in \mathcal{I}_A$. Recuérdese que el punto focal se halla en el origen $F \equiv (u, v) = (0, 0)$, y por la elección tomada de \mathcal{I}_A no es incluido en la definición dada de la variedad \mathcal{M} . Los kinks que presenta este bloque de modelos pueden ser listados como

Soluciones densas:	Soluciones singulares:
TK[\mathbf{l}, \mathbf{l}'](γ_1)	TKP _v [\mathbf{l}, \mathbf{l}'']
TK[$\mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$](γ_1)	TKP _u [$\mathbf{l}, \mathbf{l}'''$]
TKF[($\pm 1, 1$), ($0, 0$), ($\mp 1, 0$)](γ_1)	TK1[($\pm 1, 1$), ($0, 0$), ($\mp 1, 0$)]

para cualquier $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}''' \in \mathcal{I}_A$. La descripción de las soluciones enunciadas puede realizarse apoyados sobre los ejemplos presentados en las secciones precedentes. Las soluciones densas TK[\mathbf{l}, \mathbf{l}'](γ_1) y TK[$\mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$](γ_1) unen vacíos situados en los vértices opuestos de las celdas, delimitadas por los kinks singulares asentados sobre tramos parabólicos TKP_v[\mathbf{l}, \mathbf{l}''] y TKP_u[$\mathbf{l}, \mathbf{l}'''$]. La especificación de las soluciones que pasan por el origen completa el cuadro anterior.

CASO B:

En este caso, la construcción del conjunto de índices dobles es realizada mediante la definición

$$\mathcal{I}_B = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$$

tal que los vacíos quedan localizados en los puntos $v^{(i,j)} = (\text{Sign}(i)\sigma_{|i|}, \sigma_j)$ con $(i, j) \in \mathcal{I}_B$. Ahora, el punto focal se convierte en un punto de vacío y se encuentra incluido en $\rho^* \mathcal{M}$, lo que simplifica la descripción de las soluciones de defecto topológico mostrados por el modelo, dado que sobre los datos introducidos en el cuadro del caso A no hemos de distinguir soluciones que cubran dos celdas. Los kinks que podemos encontrar serán

Soluciones densas:	Soluciones singulares:
TK[\mathbf{l}, \mathbf{l}'](γ_1)	TKP _v [\mathbf{l}, \mathbf{l}'']
TK[$\mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$](γ_1)	TKP _u [$\mathbf{l}, \mathbf{l}'''$]

para cualquier $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}''' \in \mathcal{I}_B$.

Reglas de suma:

Finalmente tras identificar, de forma general, la variedad de kinks de los modelos de tipo Liouville de tipo III, mostramos las relaciones existentes entre sus energías basadas sobre la base de la proposición 3.2.

CASO A:

1. $\mathcal{E}[\text{TK}[\mathbf{l}, \mathbf{l}'](\gamma_1)] = \mathcal{E}[\text{TK}[\mathbf{l}'', \mathbf{l}'''](\gamma_1)] = \mathcal{E}[\text{TKP}_u[\mathbf{l}, \mathbf{l}']] + \mathcal{E}[\text{TKP}_v[\mathbf{l}'', \mathbf{l}''']]$
2. $\mathcal{E}[\text{TKP}_u[\mathbf{l}, \mathbf{l}']] = \mathcal{E}[\text{TKP}_u[\mathbf{l}'', \mathbf{l}''']]$
3. $\mathcal{E}[\text{TKP}_v[\mathbf{l}'', \mathbf{l}''']] = \mathcal{E}[\text{TKP}_v[\mathbf{l}, \mathbf{l}']]$
4. $\mathcal{E}[\text{TKP}_u[(i, j), (i+1, j)]] = \mathcal{E}[\text{TKP}_v[(j, i), (j, i+1)]]$
5. $\mathcal{E}[\text{TKF}[(\pm 1, 1), (0, 0), (\mp 1, 0)](\gamma_1)] = 2 \mathcal{E}[\text{TKP}_u[(0, 1), (1, 1)]] + 2 \mathcal{E}[\text{TKP}_v[(1, 1), (1, 0)]]$
6. $\mathcal{E}[\text{TK1}[(\pm 1, 0), (0, 0), (\mp 1, 0)]] = \mathcal{E}[\text{TKP}_u[(0, 1), (1, 1)]] + \mathcal{E}[\text{TKP}_v[(1, 1), (1, 0)]]$

con $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}''' \in \mathcal{I}_A$. Además, se pueden obtener otras reglas manipulando las relaciones dadas.

CASO B:

En este caso, siguen vigentes las reglas de suma marcadas como 1, 2, 3 y 4, considerando que $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}''' \in \mathcal{I}_B$.

Capítulo 4

Kinks En Modelos de Liouville II y IV

4.1 Introducción

En los capítulos precedentes han sido analizados los modelos físicos en el marco de la teoría de campos en $(1+1)$ dimensiones con mundo interno bidimensional $N = 2$ que tienen asociados un modelo mecánico de Liouville de tipo I y III en el propósito de la identificación de soluciones kinks. Por completitud del presente texto introduciremos asimismo los sistemas físicos que pueden ser asociados, mediante el símil mecánico, a los modelos de Liouville de tipo II y IV. A estos tipos pertenecen aquellos sistemas resolubles por separación de variables de la ecuación de Hamilton-Jacobi en la teoría mecánica asociada mediante el uso de coordenadas polares y cartesianas respectivamente. Las nociones introducidos en los dos capítulos precedentes tienen vigencia en los nuevos modelos con mínimas modificaciones atribuidas a los sistemas de coordenadas de trabajo. Con ello en mente nos limitaremos en este capítulo a la mera mención de los conceptos utilizados ya en otros tipos de modelos y su ilustración con diversos modelos particulares. Así, para la primera parte del capítulo, en el que son tratados los modelos de Liouville de tipo II, analizaremos tres modelos que presentan distintos procesos de ruptura de simetría y una estructura dispar para la variedad que recoge las soluciones kinks; el modelo $\text{II}[1,1,\gamma 1]$ que presenta simetría bajo las reflexiones de ambos ejes del plano interno, una de las cuales es rota sobre los dos vacíos presentes en el sistema, el modelo $\text{II}[1a,11,\gamma 1]$ con cuatro vacíos situados sobre el eje real que rompen la simetría en la misma forma que el modelo mencionado antes y el modelo $\text{II}[1a,11,\gamma \frac{1}{2}]$ que con dos vacíos situados sobre el eje real positivo conserva la simetría original $e \times \mathbb{Z}_2$ de la acción. Más elemental será el estudio de los modelos de Liouville de tipo IV, que vienen constituidos por la suma directa de dos copias $N = 1$, aunque aparecen muchas nuevas ondas solitarias

dotadas de interesantes propiedades. Ilustraremos éstos mediante la generalización a este estadio de los modelos ϕ^4 y Seno-Gordon.

4.2 Modelos de Liouville de Tipo II

Liouville clasificó como Tipo II aquellos sistemas dinámicos bidimensionales que podían ser separables Hamilton-Jacobi utilizando un cambio de coordenadas basado en un sistema de coordenadas polares. Denotaremos de igual forma, los modelos de teorías de campos con dos componentes escalares cuyo sistema mecánico asociado sea de Liouville de tipo II. Así pues,

4.2.1 De las coordenadas polares.

En este caso, el mundo interno caracterizado por el valor del campo complejo $\phi(x)$ será analizado mediante las coordenadas polares R y φ , cuya relación con las originales tiene lugar mediante la transformación

$$\zeta : \mathbf{P}^2 \equiv \mathbb{R}^+ \times \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (R_0, \varphi_0) \longrightarrow (\phi_1^0, \phi_2^0)$$

tal que la imagen inversa corresponde a:

$$\zeta^*(\phi_1) = R \cos \varphi \qquad \zeta^*(\phi_2) = R \operatorname{sen} \varphi \qquad (4.1)$$

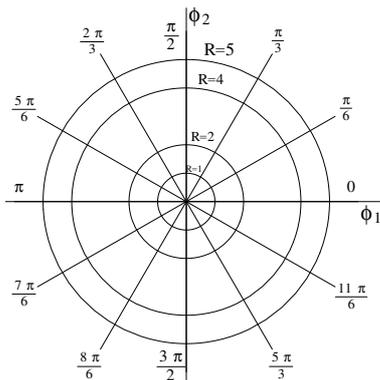


Figura 4.1. *Coordenadas polares*

El rango de definición de las nuevas variables es $0 \leq R < \infty$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$, formando un cono de altura infinita sobre el que podremos estudiar las propiedades del sistema físico. Las curvas coordenantes corresponden a circunferencias $\phi_1^2 + \phi_2^2 = R_0^2$ cuando es fijada la coordenada radial $R = R_0$ y a semirrectas $\phi_2 = \operatorname{tg} \varphi_0 \phi_1$ cuando se fija la coordenada angular $\varphi = \varphi_0$. Un punto distinguido en el nuevo sistema de coordenadas es el origen del plano.

Consideremos, como es habitual, un modelo físico natural en el marco de la teoría de campos donde el vector $\vec{\sigma}$ agrupa las constantes de acoplamiento involucradas. Entonces, el término cinético de la energía se convierte en

$$\zeta^*T = \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2$$

mientras que al respecto del término potencial diremos

Definición 4.1 [109]: *Un modelo físico en teoría de campos será de Liouville Tipo II si su sistema mecánico asociado es natural y con un término potencial de la forma*

$$U(\phi_1, \phi_2) = f(\phi_1^2 + \phi_2^2) + U_H(\phi_1, \phi_2) \quad (4.2)$$

donde $U_H(\phi_1, \phi_2)$ es una función homogénea de grado -2 respecto de las componentes del campo $\phi(x)$. Lo anterior equivale a decir que el término potencial se transforma bajo la acción de ζ^* en el modo

$$\zeta^*U(\phi_1, \phi_2) = f(R) + \frac{1}{R^2}g(\varphi)$$

donde $f(R)$ y $g(\varphi)$ son funciones cualesquiera de las coordenadas polares. Una característica primordial de los potenciales de tipo II es que conllevan una singularidad inevitable en el origen asociada al sistema de coordenadas. Un sistema físico de Liouville Tipo II presenta un funcional energía (1.11)

$$\zeta^*E = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + f(R) + \frac{1}{R^2} g(\varphi) \right\} \quad (4.3)$$

Las integrales primeras, que aseguran la integrabilidad del modelo mecánico asociado, pueden ser encontradas y presentadas como:

- La energía del sistema mecánico

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - U(\phi_1, \phi_2) \quad (4.4)$$

o bien, sobre el plano polar,

$$\zeta^*I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - f(R) - \frac{1}{R^2} g(\varphi) \quad (4.5)$$

- Momento angular generalizado del sistema mecánico

En las variables originales, se tiene la expresión

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 - g(\arctan \frac{\phi_2}{\phi_1}) \quad (4.6)$$

la cual puede ser reescrita como

$$I_2 = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - g(\varphi) \quad (4.7)$$

que se muestra como un momento angular deformado por la presencia del sumando $g(\varphi)$, causante de la ruptura de la simetría de rotación $U(1)$ en el funcional energía (4.3). Por las condiciones asintóticas, las soluciones kink de nuestro sistema físico verifican que $I_1 = I_2 = 0$.

Tal como en los modelos de tipo I y III analizados en los capítulos 2 y 3 se pueden introducir los siguientes conceptos:

Definición 4.2: *Llamaremos celda asociada a los modelos de Liouville de tipo II a los paralelogramos abiertos $P_{ij} \equiv (\tilde{R}_i, \tilde{R}_{i+1}) \times (\tilde{\varphi}_j, \tilde{\varphi}_{j+1})$, donde $\tilde{R}_i > 0$ y $\tilde{\varphi}_j$ son las raíces de $f(R)$ y $g(\varphi)$ respectivamente ordenados por magnitud creciente.*

Definición 4.3: *Las separatrices de tipo II corresponden a las fronteras de las celdas ∂P_{ij} . Nos referiremos como retículo $Ret(P)$ al conjunto de las separatrices de tipo II.*

Con la advertencia de que en los modelos de tipo II queda discriminada la recta $R = 0$ del plano polar \mathbf{P}^2 como curva separatriz por motivos dinámicos, que luego serán claros, zanjamos la presente sección suponiendo que el lector está totalmente familiarizado con los conceptos enunciados habida cuenta del estudio realizado en los capítulos que preceden.

4.2.2 Descripción de la teoría de Hamilton-Jacobi.

El formalismo hamiltoniano implica la definición de los momentos generalizados

$$p_R = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R'} = R' \qquad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} = R^2 \varphi'$$

con $R' = \frac{dR}{dx}$ y $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$. La densidad hamiltoniana queda determinada por

$$\mathcal{H} = h_R + \frac{1}{R^2} h_\varphi$$

donde los sumandos son definidos como

$$h_R = \frac{1}{2} p_R^2 - f(R) \qquad h_\varphi = \frac{1}{2} p_\varphi^2 - g(\varphi)$$

La aplicación de la ecuación de Hamilton-Jacobi (1.21),

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} + \mathcal{H} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial R}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \varphi}, R, \varphi \right) = 0 \qquad (4.8)$$

sobre la dependencia separada de la función generatriz $\mathcal{J} = \mathcal{J}_R(R) + \mathcal{J}_\varphi(\varphi) + \mathcal{J}_x(x)$, nos permite identificar la expresión seguida por \mathcal{J} , la cual engloba toda la información acerca del comportamiento del sistema físico a estudiar. Así, tendremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_x &= -Ex \\ \mathcal{J}_R &= \text{Sign}(R') \sqrt{2} \int dR \sqrt{f(R) + E + \frac{F}{R^2}} \\ \mathcal{J}_\varphi &= \text{Sign}(\varphi') \sqrt{2} \int d\varphi \sqrt{g(\varphi) - F} \end{aligned}$$

donde E y F son constantes del movimiento que se anulan para las soluciones kink, cuya relación con las integrales primeras mostradas con anterioridad es $E = I_1$ y $F = -I_2$. Entonces, las soluciones de este tipo quedan determinadas mediante su trayectoria

$$\text{Sign}(R') \int \frac{dR}{R^2 \sqrt{2f(R)}} - \text{Sign}(\varphi') \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2g(\varphi)}} = \gamma_1 \quad (4.9)$$

y su dependencia respecto del espacio x

$$\text{Sign}(R') \int \frac{dR}{\sqrt{2f(R)}} = x + \gamma_2 \quad (4.10)$$

La constante γ_1 parametriza las trayectorias seguidas por las soluciones kinks mientras que el parámetro γ_2 caracteriza el modo cero de éstas.

4.2.3 Propiedades generales del sistema físico:

En esta sección describiremos los comportamientos generales que muestran los sistemas físicos de tipo II. En primer lugar, ha de advertirse que las soluciones que atraviesen por el origen de coordenadas no pertenecen a la variedad de las soluciones kinks, puesto que incumplirían la finitud en la energía como consecuencia de la singularidad situada en dicho punto. Así,

Proposición 4.1: *Sobre el espacio de configuración \mathcal{C} de los sistemas físicos de Liouville de Tipo II existen kinks singulares cuya órbita queda asentada sobre el retículo $\text{Ret}(P)$.*

Demostración: Las ecuaciones $I_1 = 0$ y $I_2 = 0$ sobre la condición de que la hipotética solución tenga por trayectoria un tramo del retículo se comportan de la siguiente manera:

- Caso 1: Si $R = R_0$ (raíz de $f(R)$) entonces,

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}R_0^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \frac{1}{R_0^2}g(\varphi) = 0$$

- Caso 2: Si $\varphi = \varphi_0$ (raíz de $g(\varphi)$) se tiene,

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dx} \right)^2 - f(R) = 0 \quad I_2 = \frac{1}{R}g(\varphi) = 0$$

de modo que en cualquiera de los casos las soluciones asentadas sobre las curvas separatrices son compatibles con el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden generadas por las integrales primeras. Por otra parte, dado que las trayectorias aparecen determinadas por las raíces de las funciones $f(R)$ y $g(\varphi)$, el valor del parámetro natural dado en (4.9) debe ser infinito. C.Q.D.

El flujo de las trayectorias en el plano polar viene dado como

$$\Phi = \frac{dR}{d\varphi} = \frac{\text{Sign}(R')\sqrt{f(R)}}{\text{Sign}(\varphi')\sqrt{g(\varphi)}}$$

o introduciendo las componentes iniciales del plano interno se tendrá la siguiente relación para el flujo

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \frac{\phi_1\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} + \Phi\phi_2}{\Phi\phi_1 - \phi_2\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}}$$

Podemos enunciar ahora lo siguiente:

Proposición 4.2: *La energía asociada a cada solución kink de los modelos de Liouville de Tipo II sigue la expresión*

$$\mathcal{E}[\phi(x)] = \left| \int_{\pi_R[\zeta^*\phi]} dR \sqrt{2f(R)} \right| + \left| \int_{\pi_\varphi[\zeta^*\phi]} d\varphi \sqrt{2g(\varphi)} \right| \quad (4.11)$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

- La energía de las soluciones kinks no depende de la expresión explícita adoptada por éstas sino que depende de la proyección de camino de su trayectoria sobre los ejes polares, lo cual queda determinado por los nudos del retículo que son enlazados por cada solución.
- Si las trayectorias de una solución kink definida sobre una celda vienen determinadas sobre el plano interno por una función monótona que conecta dos puntos de vacío, la expresión (4.11) se convierte en

$$\mathcal{E} = \left| \int_{R(-\infty)}^{R(\infty)} dR \sqrt{2f(R)} \right| + \left| \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(\infty)} d\varphi \sqrt{2g(\varphi)} \right| \quad (4.12)$$

- Las *reglas de suma* aparecen fundamentadas por el hecho de que toda solución o combinación de soluciones del sistema físico que tengan las mismas proyecciones de camino

$$\pi_R[\zeta^*\phi] = \sum_{i=1}^n [R_i, R_{i+1}] \quad \pi_\varphi[\zeta^*\phi] = \sum_{i=1}^m [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$$

adoptan el mismo valor para la energía:

$$\mathcal{E}[\phi(x)] = \sum_{i=1}^n \left| \int_{R_i}^{R_{i+1}} dR \sqrt{2f(R)} \right| + \left| \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} d\varphi \sqrt{2g(\varphi)} \right|$$

Proposición 4.3: *Los modelos de Liouville de tipo II son presupersimétricos y presentan cuatro superpotenciales determinados por la integral indefinida*

$$W(R, \varphi) = \pm \int dR \sqrt{2f(R)} \pm \int d\varphi \sqrt{2g(\varphi)} \quad (4.13)$$

Demostración: La condición (1.51) escrita en coordenadas polares reza por

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right] = f(R) + \frac{1}{R^2} g(\varphi)$$

de forma que suponiendo que el superpotencial adopta la forma separada en variables $W(R, \varphi) = W_1(R) + W_2(\varphi)$, encontraremos que debe cumplirse

$$\frac{dW_1}{dR} = \pm \sqrt{2f(R)} \quad \frac{dW_2}{d\varphi} = \pm \sqrt{2g(\varphi)}$$

que implica el cumplimiento de la expresión (4.13). C.Q.D.

La proposición anterior establece la presencia de al menos dos superpotenciales no triviales y sugiere una definición alternativa de los modelos de Liouville del presente tipo.

Definición 4.4: *Diremos que un sistema físico natural en el marco de la teoría de campos en (1+1) dimensiones pertenece a los modelos de Liouville de tipo II si admite un superpotencial que verifica que $\zeta^* W(\phi) = W_1(R) + W_2(\varphi)$, o equivalentemente $\frac{\partial^2 W}{\partial R \partial \varphi} = 0$.*

La condición marcada en la definición 4.4 se refleja en las componentes del campo complejo como

$$-\phi^1 \phi^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} - \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2 \partial \phi^2} \right) + (\phi^1 \phi^1 - \phi^2 \phi^2) \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} + \phi^1 \frac{\partial W}{\partial \phi^2} - \phi^2 \frac{\partial W}{\partial \phi^1} = 0 \quad (4.14)$$

El uso del concepto de superpotencial permite la escritura de las integrales primeras mediante las simétricas expresiones proporcionadas por (1.54) para la energía y

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\phi^2 \frac{d\phi^1}{dx} - \phi^1 \frac{d\phi^2}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\phi^2 \frac{\partial W}{\partial \phi^1} - \phi^1 \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right)^2$$

para el segundo invariante, el cual puede ser escrito usando (2.18) como el cuadrado del momento angular asociado al momento generalizado, $I_2 = \frac{1}{2} |\phi^2 \Pi_1 - \phi^1 \Pi_2|^2$.

Las ecuaciones de primer orden (1.60) asociadas a los superpotenciales (4.13) encontrados se expresan como

$$\frac{dR}{dx} = \pm \sqrt{2f(R)} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \pm \frac{\sqrt{2g(\varphi)}}{R^2} \quad (4.15)$$

las cuales reportan todas las soluciones kinks del modelo. El vínculo entre los caracteres de completa integrabilidad y presupersimetría del presente modelo puede observarse al fijar una expresión del superpotencial sobre las integrales primeras y manipular tales expresiones hasta adquirir las ecuaciones de primer orden que determinan las soluciones kinks. Este proceso concede dos resultados, unas ecuaciones diferenciales de primer orden asociadas a la expresión habitual (1.60) junto con la siguiente posibilidad

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dx} &= \pm \frac{1}{\phi^*\phi} \left[2\phi_1\phi_2 \frac{\partial W}{\partial \phi^2} + (\phi_1^2 - \phi_2^2) \frac{\partial W}{\partial \phi_1} \right] \\ \frac{d\phi_2}{dx} &= \pm \frac{1}{\phi^*\phi} \left[2\phi_1\phi_2 \frac{\partial W}{\partial \phi^1} + (\phi_2^2 - \phi_1^2) \frac{\partial W}{\partial \phi_2} \right]\end{aligned}$$

que puede ser asociado a las ecuaciones de primer orden (1.60) para un nuevo superpotencial $\tilde{W}(\phi)$, construido vía el teorema de Green interpretado sobre el plano interno.

4.2.4 Sobre el término potencial de tipo II

El potencial genérico dado en (4.2) incluye en cualquier circunstancia una singularidad en el origen de coordenadas. Ésta es la diferencia más resaltable con respecto a los modelos precedentes y la razón que obliga a descartar del conjunto de curvas separatrices a la recta $R = 0$ sobre el plano polar. La elección sobre el término potencial considerada en los tipos I y III atendía al propósito de eliminar las singularidades en la expresión del término potencial. Esas características, en este caso, no pueden ser mantenidas. La elección que se hará ahora, alberga el espíritu de alcanzar estadios interesantes de ruptura de simetría para los sistemas físicos que incorporaremos. Asumiremos que éstos se ven sometidos a la presencia de un potencial caracterizado por la relación

$$\zeta^*U = \prod_{i=1}^n (R^2 - \sigma_i^2)^{2\alpha_i} + \frac{\gamma^2}{R^2} \text{sen}^2(\beta\varphi) \quad (4.16)$$

con $\alpha_i \in \mathbb{N}$ y $\beta, \sigma_i \in \mathbb{R}$. Es supuesta sin pérdida de generalidad la ordenación $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$. La expresión (4.16) motiva la nomenclatura utilizada para designar los modelos, los cuales serán nombrados detallando los parámetros que intervienen en (4.16) mediante las siglas $\text{II}[(\vec{\sigma})(\vec{\alpha})(\gamma\beta)]$. Sobre el plano cartesiano el término potencial es descrito como

$$U(\phi_1, \phi_2) = \prod_{i=1}^n (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \sigma_i^2)^{2\alpha_i} + \frac{\gamma^2}{R^2} \text{sen}^2 \left(\beta \arctg \frac{\phi_2}{\phi_1} \right)$$

que para el caso particular en que el parámetro β se convierte en un número entero $n \in \mathbb{N}$ puede reescribirse atendiendo al hecho de que el segundo miembro de la expresión precedente es:

$$V_2(\phi_1, \phi_2) = \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^2 \phi_2}{2\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1-i}{i} \left(\frac{2\phi_1}{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}} \right)^{n-1-i}$$

Los sistemas físicos que adoptan la expresión (4.16) como término potencial dan lugar a las curvas separatrices apiladas en la definición de los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} P_R &= \left\{ \phi \in \mathbb{C} / \phi_1^2 + \phi_2^2 = \sigma_i^2 \quad (R = \sigma_i) \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n \right\} \\ P_\varphi &= \left\{ \phi \in \mathbb{C} / \phi_2 = \text{tg} \frac{k\pi}{\beta} \phi_1 \quad \left(\varphi = \frac{k\pi}{\beta} \right) \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

El conjunto P_R está formado por circunferencias centradas en el origen de radio σ_i , mientras que el conjunto P_φ está constituido por semirrectas que parten del origen con una pendiente predeterminada por la constante de acoplamiento β del sistema físico. El retículo puede ser construido mediante la expresión $\text{Ret}(P) = P_R \cup P_\varphi$. La variedad de vacíos asienta sus elementos sobre los nudos del retículo, lo que nos capacita para escribir $\mathcal{M} = P_R \cap P_\varphi$, de modo que albergará $\text{int}(2 \cdot n \cdot \alpha)$ elementos.

Estudiemos algunos casos particulares de los sistemas introducidos. El primero de ellos es el modelo II[(1)(1),(γ ,1)], que presenta dos vacíos sobre los que la simetría original del lagrangiano asociada al grupo de reflexiones $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ queda rota al subgrupo $\{e\} \times \mathbb{Z}_2$. El segundo modelo que se presenta es el II[(1a)(11),(γ ,1)], que implica la presencia de cuatro vacíos con un proceso de ruptura de simetría análogo al caso anterior pero con una variedad de kinks más rica. Finalmente presentaremos el modelo II[(1a)(11),(γ , $\frac{1}{2}$)], sobre el que aparecen dos vacíos sin ruptura de la simetría inicial presentada por el lagrangiano y una curiosa variedad de kinks.

4.2.5 Modelo II[(1)(1)(γ ,1)].

El primer ejemplo que consideraremos para ilustrar los modelos de Liouville de Tipo II, corresponderá a un sistema físico en (1+1)-dimensiones con un campo escalar complejo cuya dinámica viene caracterizada por el funcional acción

$$S = \int d^2y \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \chi^* \partial^\mu \chi - \frac{\lambda^2}{2} \left(\chi^* \chi - \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2 - \frac{\beta^2 m^6}{2} \frac{\chi_2^2}{(\chi^* \chi)^2} \right\}$$

Utilizando las variables adimensionales $\chi \rightarrow \frac{m}{\lambda} \phi$, $x_\mu \rightarrow \frac{m}{\sqrt{2}} y_\mu$ y $\beta^2 = \frac{\gamma^2}{\lambda^4}$ podemos expresar la forma de el funcional energía en el ámbito de la teoría de campos como

$$E = \frac{m^2}{\lambda^2} \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 + (\phi^* \phi - 1)^2 + \frac{\gamma^2 \phi_2^2}{(\phi^* \phi)^2} \right\} \quad (4.17)$$

lo que nos permite identificar el término potencial según la relación

$$U_{II[(1)(1)(\gamma,1)]}(\phi) = (\phi^* \phi - 1)^2 + \frac{\gamma^2 \phi_2^2}{(\phi^* \phi)^2} \quad (4.18)$$

que puede ser entendido como una particular deformación al potencial presente en los modelos de Goldstone o de Higgs y que es recuperado para el valor $\gamma = 0$. La expresión (4.18) se revela como un nuevo camino para deformar los modelos anteriores, añadido al obtenido mediante el estudio del modelo MSTB. La singularidad mostrada por el sistema en el origen es advertida por inspección de la expresión (4.18). La proposición 4.3 acerca del carácter presupersimétrico de los modelos tratados queda verificada en este caso al cotejar que la expresión

$$W(\phi) = \pm \sqrt{2} \left[\sqrt{\phi^* \phi} \left(\frac{1}{3} \phi^* \phi - 1 \right) \mp \gamma \frac{\phi_1}{\sqrt{\phi^* \phi}} \right]$$

donde los dobles signos pueden ser conjugados con arbitrariedad, cumple la condición (1.51) y da lugar a cuatro superpotenciales.

Propiedades del sistema:

Sobre el plano polar la expresión (4.18) se transforma como

$$\zeta^* U = (R^2 - 1)^2 + \frac{\gamma^2}{R^2} \text{sen}^2 \varphi$$

que corresponde a la restricción de la expresión general (4.16) para los valores $n = 1$, $A = 1$, $\sigma_1 = 1$ y $\alpha_1 = 1$. Conforman un sistema de Liouville de tipo II al que la nomenclatura convenida marca como $II[(1)(1)(\gamma,1)]$. Las propiedades genéricas enunciadas al principio de este capítulo indican la existencia de $\text{card}(\mathcal{M}) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ puntos de vacío. Concretamente, la variedad \mathcal{M} está formada por

$$\mathcal{M} = \{v^1 = -1, v^2 = 1\}$$

lo que en las nuevas coordenadas puede leerse por

$$\zeta^* \mathcal{M} = \{v^1 = (1, \pi), v^2 = (1, 0)\}$$

cuyo espectro de pequeñas deformaciones o de partículas queda asentado sobre las masas:

$$M^2(v^1, v^2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2\gamma^2 \end{pmatrix}$$

La acción del modelo es invariante bajo las transformaciones $\phi_1 \rightarrow -\phi_1$ y $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$, tal que las simetrías del modelo vienen determinadas por el grupo de reflexiones $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Los elementos de \mathcal{M} presentan un esquema de ruptura de simetría dado

que el grupo pequeño asociado a éstos es $H_1 = \mathbb{Z}_2$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange que deben ser resueltas en la búsqueda de soluciones son

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} = 4\phi_1(\phi^*\phi - 1) - \frac{4\gamma^2\phi_2\phi_2^2}{(\phi^*\phi)^3} \\ \frac{d^2\phi_2}{dx^2} = 4\phi_2(\phi^*\phi - 1) - \frac{4\gamma^2\phi_2^3}{(\phi^*\phi)^3} + \frac{2\gamma^2\phi_2}{(\phi^*\phi)^2} \end{cases}$$

mientras que las integrales primeras son

- la energía:

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - (\phi^*\phi - 1)^2 - \frac{\gamma^2\phi_2^2}{(\phi^*\phi)^2} \quad (4.19)$$

- el momento angular generalizado:

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 - \frac{\gamma^2\phi_2^2}{(\phi^*\phi)^2} \quad (4.20)$$

las cuales aseguran en el sentido de Liouville la integrabilidad del sistema mecánico asociado. En particular, las soluciones kinks cumplen las condiciones $I_1 = I_2 = 0$.

Galería de soluciones: Parametrización.

Indagaremos la presencia de soluciones de tipo kink siguiendo la estructura marcada en capítulos anteriores. Distinguiamos los siguientes puntos:

1. SEI1: Ensayando la condición $\phi_2(x) = 0$, que proporciona soluciones reales sobre las integrales primeras (4.19) y (4.20), podemos obtener

$$\phi(x) = \pm \tanh \sqrt{2} \bar{x}$$

Los puntos de vacío v^1 y v^2 pertenecen al trazo marcado por tal solución (ver figura 4.2). Sin embargo, estas soluciones no adquieren la naturaleza de defectos topológicos o kinks dado que precipitan en la singularidad, lo que les dota de una energía infinita, de tal modo que se elude la definición (1.3).

2. TKC: Sabemos de la presencia de soluciones singulares asentadas sobre la curva separatriz descrita por la circunferencia $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$ del plano interno, que corresponde a un elemento del subconjunto de circunferencias P_R . La sustitución de esta condición sobre (4.19) y (4.20), nos da la solución

$$\phi(x) = \pm \tanh \sqrt{2} \gamma \bar{x} \pm i \operatorname{sech} \sqrt{2} \gamma \bar{x}$$

que une los vacíos existentes v^1 y v^2 sorteando la singularidad (ver figura 4.2). Corresponde a kinks topológicos que denotaremos genéricamente por **TKC**. Quedan

englobados de forma particular los kinks $\text{TKC}[12]$, $\text{TKC}^*[12]$ (que ubicados sobre la semicircunferencia superior e inferior respectivamente parten del vacío v^1 hacia v^2) y los antikinks $\text{TKC}[21]$, $\text{TKC}^*[21]$. Las proyecciones sobre el plano polar determinan $\pi_R[\mathbf{TKC}] = 0$ y $\pi_\varphi[\mathbf{TKC}] = [0, \pi]$, de modo que

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKC}] = 2\sqrt{2}\gamma$$

3. $\text{SEI}(\gamma_1)$: Una vez agotado el método de las órbitas prueba aplicado sobre las soluciones singulares, utilizaremos las ecuaciones de Hamilton-Jacobi (4.9) y (4.10) para obtener las soluciones densas. Tales soluciones sobre el plano polar deben cumplir

$$R(x) = \tanh\left(\text{Sign}(R')\sqrt{2}(x + \gamma_2)\right) \quad (4.21)$$

junto con la relación

$$e^{-\frac{1}{R}} \cdot e^{\sqrt{2}(x+\gamma_2-\gamma_1)} = \left(\text{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{\text{Sign}(\varphi' \text{sen } \varphi)}{\gamma}} \quad (4.22)$$

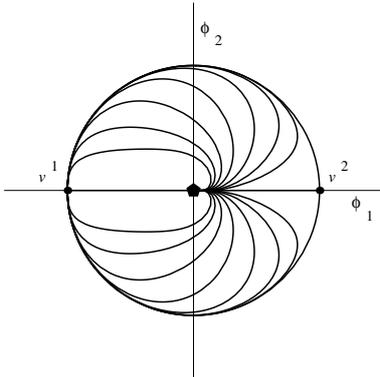


Figura 4.2. *Soluciones $\text{SEI}(\gamma_1)$.*

De las expresiones (4.21) y (4.22) emergen una familia biparamétrica de soluciones. La descripción de su comportamiento puede ser visualizado en la figura 4.2, donde queda patente que las soluciones parten de alguno de los vacíos v^1 o v^2 y tras describir una orbita en la celda delimitada por separatriz $C_{R=1}$ alcanzan irremisiblemente la singularidad situada en el origen. En base a ello, no corresponden a soluciones kinks. Nos referiremos a éstas como **SEI**(γ_1) (soluciones de energía infinita).

Finalmente, como resumen de los resultados encontrados al respecto del modelo $\text{II}[(1)(1)(\gamma,1)]$ podemos manifestar la presencia de cuatro soluciones de tipo kink en la variedad \mathcal{C}_K . Usando el concepto de espacio de Moduli sobre tal variedad escribiríamos:

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\mathbf{TKC}\}$$

El estudio de la estabilidad mediante argumentos energéticos nos permite asegurar la estabilidad de las soluciones encontradas debida cuenta de que no existen otras soluciones a las que puedan decaer en su sector topológico.

4.2.6 Modelo $\text{II}[(1\mathbf{a})(11),(\gamma,1)]$.

Con la esperanza de alcanzar en otros modelos una variedad de kinks \mathcal{C}_K más rica que la obtenida en la sección anterior, presentamos un sistema físico dominado por

la presencia de un término potencial que queda exhibido al uso de las variables adimensionales introducidas en el ejemplo anterior como

$$U_{II[(1a)(11),(\gamma,1)]}(\phi) = (\phi^* \phi - 1)^2 (\phi^* \phi - a^2)^2 + \frac{\gamma^2 \phi_2^2}{(\phi^* \phi)^2} \quad (4.23)$$

que como es inevitable presenta una singularidad en el origen. Los superpotenciales (4.13) asociados al presente modelo son especificados por

$$W(\phi) = \pm \sqrt{2} \left[\sqrt{\phi^* \phi} \left(\frac{1}{5} (\phi^* \phi)^2 - \frac{1+a^2}{3} \phi^* \phi - a^2 \right) \mp \gamma \frac{\phi_1}{\sqrt{\phi^* \phi}} \right]$$

Propiedades del sistema:

La utilización de las coordenadas polares permite escribir el término potencial en la forma separada

$$\zeta^* U = (R^2 - 1)^2 (R^2 - a^2)^2 + \frac{\gamma^2}{R^2} \sin^2 \varphi$$

que identifica el sistema físico que analizamos como II[(1a)(11)($\gamma 1$)]. Se presentan dos celdas (como puede ser advertido en la figura 4.3), delimitadas por las curvas separatrices

$$\begin{aligned} P_R &= \{ \phi \in \mathbb{C} / \phi_1^2 + \phi_2^2 = 1 \text{ y } \phi_1^2 + \phi_2^2 = a^2 \} \\ P_\varphi &= \{ \phi \in \mathbb{C} / \phi_2 = 0 \} \end{aligned}$$

La variedad de ceros queda constituida por 4 elementos, situados sobre el eje real,

$$\mathcal{M} = \{ v^1 = -a; v^2 = -1; v^3 = 1; v^4 = a \}$$

sobre los cuales se tiene el espectro de pequeñas deformaciones o de masas:

$$M^2(v^1, v^4) = \begin{pmatrix} 8a^2(a^2 - 1)^2 & 0 \\ 0 & \frac{2\gamma^2}{a^4} \end{pmatrix} \quad M^2(v^2, v^3) = \begin{pmatrix} 8(a^2 - 1)^2 & 0 \\ 0 & 2\gamma^2 \end{pmatrix}$$

La degeneración en la variedad de ceros introduce un proceso de ruptura de simetría dado que la invariancia bajo el grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ de la acción queda rota para los elementos de \mathcal{M} al subgrupo \mathbb{Z}_2 . Las integrales primeras que introduce el sistema físico son

- la energía:

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - (\phi^* \phi - 1)^2 (\phi^* \phi - a^2)^2 - \frac{\gamma^2 \phi_2^2}{(\phi^* \phi)^2} \quad (4.24)$$

- el momento angular generalizado:

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 - \frac{\gamma^2 \phi_2^2}{(\phi^* \phi)^2} \quad (4.25)$$

Galería de soluciones: Parametrización.

Las soluciones que alberga el sistema son descritas en los siguientes puntos:

1. TK1: Dado que el eje $O\phi_1$ está encuadrado como una de las separatrices, ensayaremos sobre las expresiones de las integrales primeras (4.24) y (4.25) la presencia de soluciones reales, es decir, $\phi_2 = 0$. Ello nos permite encontrar la relación implícita sobre la primera componente del campo

$$\frac{1 + \phi_1}{1 - \phi_1} \left(\frac{a - \phi_1}{a + \phi_1} \right)^{\frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}(a^2 - 1)\bar{x} \quad (4.26)$$

que constituye un conjunto de seis soluciones. La expresión (4.26) representa las soluciones kinks TK1[12] y TK1[24] junto con sus antikinks TK1[21] y TK1[42] que quedan embebidas en la celda P_{21} . Como es habitual serán denotados globalmente como **TK1**. Además sobre la celda P_{11} aparecen como en el sistema físico estudiado en la sección precedente soluciones que acaban cayendo en la singularidad y que desconsideramos como kinks. Las soluciones kinks integradas en este punto cumplen que $\pi_R[\mathbf{TK1}] = [1, a]$ y $\pi_\varphi[\mathbf{TK1}] = 0$ de tal manera que su energía es:

$$\mathcal{E}[\mathbf{TK1}] = \frac{2\sqrt{2}}{15}(a - 1)^3(a^2 + 3a + 1)$$

2. TKC⁽¹⁾: Es posible ensayar la dependencia circular $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$ con éxito garantizado, dado que tal curva constituye una de las separatrices del modelo. Así, la solución asociada es escrita como

$$\phi(x) = \pm \tanh \sqrt{2}\gamma\bar{x} \pm i \operatorname{sech} \sqrt{2}\gamma\bar{x} \quad (4.27)$$

que determina cuatro soluciones que especificamos como **TKC⁽¹⁾** donde quedan conectados los vacíos v^2 y v^3 . Son por ello los kinks TKC⁽¹⁾[23], TKC^{*⁽¹⁾}[23], donde el primero se asienta sobre la semicircunferencia situada en los valores positivos de la componente imaginaria y el segundo sobre los negativos. También aparecen los antikinks TKC⁽¹⁾[32], TKC^{*⁽¹⁾}[32], en la misma disposición discutida anteriormente. Las proyecciones en este caso son $\pi_R[\mathbf{TKC}^{(1)}] = 0$ y $\pi_\varphi[\mathbf{TKC}^{(1)}] = [0, \pi]$ de modo que la energía es

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKC}^{(1)}] = 2\sqrt{2}\gamma$$

3. TKC⁽²⁾: De forma totalmente pareja al punto anterior puede considerarse la circunferencia $\phi_1^2 + \phi_2^2 = a^2$ como órbita de cuatro soluciones

$$\phi(x) = \pm a \tanh \sqrt{2}\gamma\bar{x} \pm i a \operatorname{sech} \sqrt{2}\gamma\bar{x} \quad (4.28)$$

que llamaremos de forma general **TKC**⁽²⁾. En particular tendremos los kinks **TKC**⁽²⁾[14], **TKC**^{* (2)}[14] y los antikinks **TKC**⁽²⁾[41], **TKC**^{* (2)}[41]. La energía asociada adopta el valor

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKC}^{(2)}] = 2\sqrt{2}\gamma$$

dado que se verifica que $\pi_R[\mathbf{TKC}^{(2)}] = 0$ y $\pi_\varphi[\mathbf{TKC}^{(2)}] = [0, \pi]$.

4. SEI(γ_1),TKD(γ_1): En la obtención del resto de la pletora de soluciones emplearemos la teoría de Hamilton-Jacobi. Las soluciones encontradas se encuentran caracterizadas por las expresiones

$$\frac{\left\{ e^{-\frac{1}{a^2 R}} \left(\frac{1+R}{1-R}\right)^{\frac{1}{2(a^2-1)}} \left(\frac{a-R}{a+R}\right)^{\frac{1}{2a^3(a^2-1)}} \right\}^{\text{Sign}(R')}}{\left| \text{tg} \frac{\varphi}{2} \right|^{\frac{\text{Sign}(\varphi' \text{sen } \varphi)}{\gamma}}} = e^{\sqrt{2}\gamma_1} \tag{4.29}$$

y

$$\left[\frac{1+R}{1-R} \left(\frac{a-R}{a+R}\right)^{\frac{1}{a}} \right]^{\text{Sign}(R')} = e^{2\sqrt{2}(a^2-1)(x+\gamma_2)} \tag{4.30}$$

La ecuación (4.29) proporciona las trayectorias de las soluciones mientras que (4.30) da la dependencia de éstas respecto de la variable x . Ambas ecuaciones definen dos familias de soluciones:

4.1. Familia SEI(γ_1): El sistema presenta soluciones que caen en la singularidad totalmente análogas en su comportamiento a las **SEI**(γ_1) halladas en el modelo precedente y que tienen cabida en la celda P_{11} (ver figura 4.2). No llegan a ser consideradas soluciones kinks.

4.2. Familia TKD(γ_1): Bajo la notación **TKD**(γ_1) englobaremos aquellas soluciones que conectan entre si los vacíos v^1 y v^3 mediante los kinks que quedaran señalados en la forma **TKD**[13](γ_1), **TKD**[31](γ_1) y los vacíos v^2 y v^4 mediante los kinks **TKD**[24](γ_1), **TKD**[42](γ_1), los cuales pueden ser visualizados en la figura 4.3. Son soluciones densas que llenan el espacio conformado por la celda P_{21} , que aparece como la corona circular generada por las curvas separatrices de P_R . La tendencia del parámetro dado en (4.29) hacia el infinito transforma las soluciones densas en la siguiente combinación de soluciones singulares,

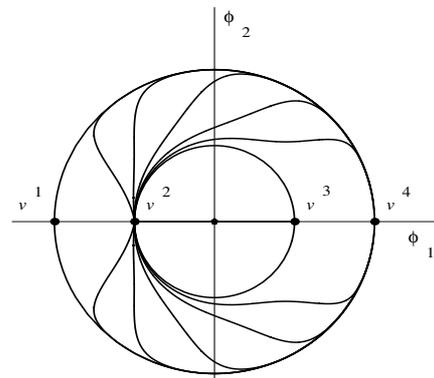


Figura 4.3. Soluciones TKD.

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{TKD}(\gamma_1) \equiv \mathbf{TK1} + \mathbf{TK1} + \mathbf{TKC}$$

La técnica de las proyecciones $\pi_R[\mathbf{TKD}] = [1, a]$ y $\pi_\varphi[\mathbf{TKD}] = [0, \pi]$ nos proporciona el valor de la energía:

$$\mathcal{E}[\mathbf{TKD}(\gamma_1)] = 2\sqrt{2} \left[\gamma + \frac{1}{15}(a-1)^3(a^2 + 3a + 1) \right]$$

A modo de recapitulación el espacio de Moduli sobre la variedad de kinks queda conformado de la siguiente manera:

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\mathbf{TK1}, \mathbf{TKC}^{(1)}, \mathbf{TKC}^{(2)}, \mathbf{TKD}(\gamma_1)\}$$

La parametrización del conjunto de estas soluciones puede ser alcanzada fijando una circunferencia centrada en el origen de radio $1 < R_0 < a$ de modo que las trayectorias de las soluciones cortan en un solo punto Q de ésta. El segmento que va desde el origen al Q determina un ángulo α que puede ser utilizado como parámetro que identifica cada una de las soluciones presentes en el modelo. Si enfocamos dicho esquema sobre el sector \mathcal{C}_{24} encontraríamos que

	Parámetro	Solución
1)	$\alpha = 0$	$\mathbf{TKC}^{(1)}[23] + \mathbf{TK1}[34]$
2)	$\alpha \in (0, \pi)$	$\mathbf{TKD}[24](\gamma_1)$
3)	$\alpha = \pi^-$	$\mathbf{TK1}[21] + \mathbf{TKC}^{(2)}[14]$
4)	$\alpha = \pi^+$	$\mathbf{TK1}[21] + \mathbf{TKC}^{(2)*}[14]$
5)	$\alpha \in (\pi, 2\pi)$	$\mathbf{TKD}^*[24](\gamma_1)$
6)	$\alpha = 2\pi$	$\mathbf{TKC}^{(1)*}[23] + \mathbf{TK1}[34]$

lo que permite equiparar el problema de la estabilidad de las soluciones kinks de \mathcal{C}_K con el de geodésicas sobre la esfera S^2 que van del polo norte al sur, previa identificación de los kinks singulares \mathbf{TKC} y \mathbf{TKC}^* . Entonces, puede inferirse la estabilidad de todas las soluciones kinks encontradas.

Reglas de suma:

Basándonos en la expresión (4.11), podemos afirmar que:

1. $\mathcal{E}[\mathbf{TKC}^{(1)}] = \mathcal{E}[\mathbf{TKC}^{(2)}]$
2. $\mathcal{E}[\mathbf{TKD}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TK1}] + \mathcal{E}[\mathbf{TKC}^{(1)}]$

4.2.7 Modelo II[(1a)(11)($\gamma, \frac{1}{2}$)]

Analizaremos como último ejemplo de los modelos de Liouville de tipo II un sistema físico en (1+1) dimensiones espacio-temporales con un campo complejo gobernado

por la dinámica atribuida a un funcional acción que implica un término potencial expresado como

$$U_{\text{II}[(1a)(11)(\gamma, \frac{1}{2})]}(\phi_1, \phi_2) = (\phi^* \phi - 1)^2 (\phi^* \phi - a^2)^2 + \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{1}{\phi^* \phi} - \frac{\phi_1}{(\phi^* \phi)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (4.31)$$

La expresión de la acción es invariante bajo las reflexiones $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$, es decir, disfruta de las simetrías asociadas al grupo \mathbb{Z}_2 . La fórmula (4.13) nos proporciona los superpotenciales asociados al modelo que tratamos. Se tiene

$$W(\phi) = \pm \sqrt{2} \left[\sqrt{\phi^* \phi} \left(\frac{1}{5} (\phi^* \phi)^2 - \frac{1+a^2}{3} \phi^* \phi - a^2 \right) \mp 2\gamma \sqrt{1 + \frac{\phi_1}{\sqrt{\phi^* \phi}}} \right]$$

donde de nuevo se identifica la presencia de dos superpotenciales no triviales (no relacionados por la simetría de paridad del problema).

Propiedades del sistema:

El término potencial (4.31) puede ser reescrito en función de las coordenadas polares obteniendo como resultado

$$\zeta^* U = (1 - R)^2 (a^2 - R^2)^2 + \frac{\gamma^2}{R^2} \text{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$$

de tal modo que estos sistemas físicos pueden enmarcarse bajo la identificación $\text{II}[(1a)(11)(\gamma \frac{1}{2})]$ siguiendo la nomenclatura prescrita en secciones precedentes. La variedad de ceros asociado a este sistema físico consta de dos elementos en la forma

$$\mathcal{M} = \{v^1 = 1, v^2 = a\}$$

tal que la simetría de reflexiones queda conservada sobre los vacíos. El espectro de pequeñas deformaciones o de masas asociado es dado como

$$M^2(v^1) = \begin{pmatrix} 8(a^2 - 1)^2 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^2}{2} \end{pmatrix} \quad M^2(v^2) = \begin{pmatrix} 8a^2(a^2 - 1)^2 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^2}{2a^4} \end{pmatrix}$$

mientras que las integrales primeras corresponden a las siguientes expresiones:

- la energía

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - U_{\text{II}[(1a)(11)(\gamma \frac{1}{2})]}(\phi_1, \phi_2) \quad (4.32)$$

- el momento angular generalizado

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 - \frac{\gamma^2}{2} \left(1 - \frac{\phi_1}{\sqrt{\phi^* \phi}} \right) \quad (4.33)$$

Descripción de las soluciones:

Veamos ahora cuál es el comportamiento de las soluciones que se presentan en el modelo, siguiendo el habitual esquema:

1. TK1: Las soluciones $\phi(x)$ reales asentadas en la frontera ∂P_{21} cumplirán la siguiente dependencia respecto del espacio en su primera componente

$$\frac{1 + \phi_1}{1 - \phi_1} \left(\frac{a - \phi_1}{a + \phi_1} \right)^{\frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}(a^2 - 1)\bar{x}$$

lo que traducido sobre la segunda celda posibilita la presencia de un kink que enlaza los vacíos presentes en el modelo (ver figura 4.4). Será el habitual **TK1**. Sus proyecciones cumplen que $\pi_R[\mathbf{TK1}] = [1, a]$ y $\pi_\varphi[\mathbf{TK1}] = 0$ de modo que su energía es

$$\mathcal{E}[\mathbf{TK1}] = \frac{2\sqrt{2}}{15}(a - 1)^3(a^2 + 3a + 1)$$

identica evidentemente al modelo anterior.

2. NTKC⁽¹⁾: Ensayaremos sobre las integrales primeras (4.32) y (4.33) la dependencia entre componentes definida por la separatriz $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$, esto es, la órbita de la solución es una circunferencia centrada en el origen de radio unidad. Proporciona las siguientes expresiones

$$\phi(x) = 2 \tanh^2 \frac{\gamma \bar{x}}{\sqrt{2}} - 1 \pm i 2 \operatorname{sech} \frac{\gamma \bar{x}}{\sqrt{2}} \tanh \frac{\gamma \bar{x}}{\sqrt{2}}$$

que corresponden a kinks no topológicos que conectan el vacío v^1 consigo mismo. Serán denotadas como **NTKC⁽¹⁾**. Se verifica que $\pi_R[\mathbf{NTKC}^{(1)}] = 0$ para la variable radial y $\pi_\varphi[\mathbf{NTKC}^{(1)}] = [0, 2\pi]$ para la polar, por lo que su energía es:

$$\mathcal{E}[\mathbf{NTKC}^{(1)}] = 4\sqrt{2}\gamma$$

3. NTKC⁽²⁾: De forma análoga al punto anterior, podemos considerar la circunferencia centrada en el origen de radio a , $\phi_1^2 + \phi_2^2 = a^2$, como la trayectoria asociada a alguna solución, la cual puede ser identificada. Ello proporciona la expresión

$$\phi(x) = 2a \tanh^2 \frac{\gamma \bar{x}}{\sqrt{2}a^2} - a \pm i 2a \operatorname{sech} \frac{\gamma \bar{x}}{\sqrt{2}} \tanh \frac{\gamma \bar{x}}{\sqrt{2}a^2}$$

que genera soluciones no topológicas sobre el vacío v^2 . Llevarán asociadas las siglas **NTKC⁽²⁾**. Su energía es

$$\mathcal{E}[\mathbf{NTKC}^{(2)}] = 4\sqrt{2}\gamma$$

dado que sus proyecciones aparecen dadas por $\pi_R[\mathbf{NTKC}^{(2)}] = 0$ sobre el eje radial y $\pi_\varphi[\mathbf{NTKC}^{(2)}] = [0, 2\pi]$ sobre el eje angular.

4. SEI(γ_1) y TKD(γ_1): Finalmente la obtención de las soluciones densas utilizando las ecuaciones (4.9) y (4.10) surgidas de la teoría de Hamilton-Jacobi nos proporcionan, sobre el plano polar, la expresión que rige la dependencia espacial dada como

$$\left[\frac{1+R}{1-R} \left(\frac{a-R}{a+R} \right)^{\frac{1}{a}} \right]^{\text{Sign}(R')} = e^{2\sqrt{2}(a^2-1)(x+\gamma_2)}$$

mientras que la trayectoria queda fijada por

$$\frac{\left\{ e^{-\frac{1}{a^2 R}} \left(\frac{1+R}{1-R} \right)^{\frac{1}{2(a^2-1)}} \left(\frac{a-R}{a+R} \right)^{\frac{1}{2a^3(a^2-1)}} \right\}^{\text{Sign}(R')}}{\left| \text{tg} \frac{\varphi}{4} \right|^{\frac{2}{\gamma} \text{Sign}(\varphi' \text{sen} \frac{\varphi}{2})}} = e^{\sqrt{2}\gamma_1}$$

Las expresiones anteriores conciben las siguientes soluciones:

4.1. Familia SEI(γ_1): Sobre la celda P_{11} aparecen las desventuradas soluciones SEI(γ_1), a las cuales no atribuíamos la categoría de kinks. No corresponden a elementos de la variedad de soluciones kinks \mathcal{C}_K .

4.2. Familia TKD(γ_1): Sobre la celda P_{12} tienen lugar soluciones que conectan los vacíos v^1 y v^2 bordeando la singularidad a lo largo de la corona circular P_{12} , (véase su comportamiento sobre las figuras 4.4 y 4.5) y que nombraremos como TKD(γ_1). Se verifica

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \pm\infty} \text{TKD}(\gamma_1) \equiv \text{TK1} + \text{TKC}$$

Siendo $\pi_R[\text{TKD}] = [1, a]$ y $\pi_\varphi[\text{TKD}] = [0, 2\pi]$, el valor de la energía debe presentarse por:

$$\mathcal{E}[\text{TKD}(\gamma_1)] = 2\sqrt{2} \left[2\gamma + \frac{1}{15}(a-1)^3(a^2+3a+1) \right]$$

La plétora de soluciones albergadas por el modelo que estamos tratando puede resumirse por

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\text{TK1}, \text{NTKC}^{(1)}, \text{NTKC}^{(2)}, \text{TKD}(\gamma_1)\}$$

que pueden equipararse tras el uso de la misma parametrización descrita en el modelo precedente con las geodésicas sobre la esfera que parten de un polo y llegan al otro. Por ello, las soluciones presentes en el modelo son estables.

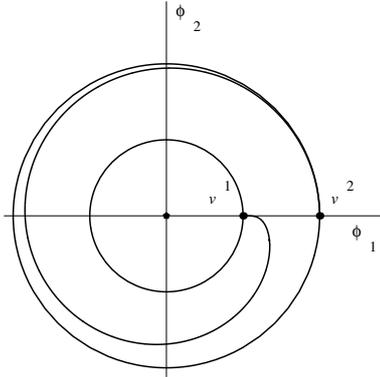


Figura 4.4. Órbita de una solución TKD en el modelo $II[1a, 11, \gamma \frac{1}{2}]$

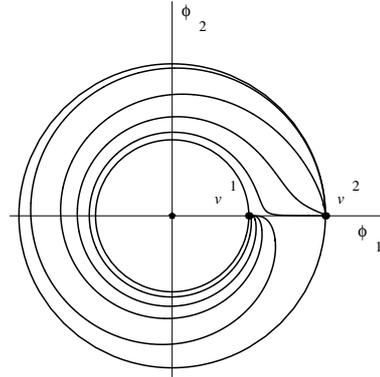


Figura 4.5. Varias órbitas TKD en el modelo $II[(1a)(11), (\gamma, \frac{1}{2})]$

Reglas de suma:

Para terminar de describir el comportamiento del presente modelo, introducimos las reglas de suma alcanzadas sobre (4.11). Éstas quedan compendiadas según las relaciones:

1. $\mathcal{E}[\text{TKC}^{(1)}] = \mathcal{E}[\text{TKC}^{(2)}]$
2. $\mathcal{E}[\text{TKD}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\text{TK1}] + \mathcal{E}[\text{TKC}^{(1)}]$

4.2.8 Generalización de los kinks Tipo II:

Después de haber analizado como ejemplos que ilustran los modelos de Liouville de tipo II los sistemas $II[(1)(1), (\gamma, 1)]$, $II[(1a)(11), (\gamma, 1)]$ y $II[(1a)(11), (\gamma, \frac{1}{2})]$, introduciremos el estudio genérico de éstos, asumiendo un sistema físico caracterizado por una dinámica gobernada por el potencial (4.16). En este caso, la ecuación de Hamilton-Jacobi se simplifica en el modo

$$\text{Sign}(R') \int \frac{dR}{R^2 \prod |R^2 - \sigma_i^2|^{\alpha_i}} - \text{Sign}(\varphi') \int \frac{d\varphi}{\gamma |\text{sen}(\beta\varphi)|} = \sqrt{2}\gamma_1$$

y

$$\text{Sign}(R') \int \frac{dR}{\prod |R^2 - \sigma_i^2|^{\alpha_i}} = \sqrt{2}(x + \gamma_2)$$

Fijaremos los valores de los parámetros α_i a la unidad con el objetivo de presentar expresiones tangibles que caractericen las soluciones kinks, aunque los resultados obtenidos pueden extrapolarse para cualquiera otros valores enteros de dichos parámetros. Así, la dependencia espacial de la componente radial queda fijada como

$$f_A(R) = e^{\text{Sign}(R')\sqrt{2}(x+\gamma_2)} \quad (4.34)$$

mientras que la trayectoria será obtenida de la expresión

$$\frac{[f_A(R)]^{\text{Sign}(R')}}{[\tan \frac{\alpha\varphi}{2}]^{\frac{\text{Sign}(\varphi' \text{sen}(\alpha\varphi))}{\gamma\alpha}}} = e^{\sqrt{2}\gamma_1} \quad (4.35)$$

donde la función f_A queda registrada en el apéndice A.

Compendio de propiedades de los kinks de tipo II:

Las soluciones obtenidas de (4.34) y (4.35) muestran los siguientes comportamientos:

- Como ya sabemos, los valores de γ_1 y γ_2 parametrizan, respectivamente, la trayectoria y el modo cero de las soluciones. El retículo está constituido en este caso a partir de circunferencias y semirectas, sobre las que se asientan las soluciones singulares.
- Sobre la celda que alberga el origen de coordenadas se originan las soluciones **SEI**(γ_1) que caen irremisiblemente en la singularidad situada en el origen y que no consideramos como soluciones kinks porque llegan a adquirir una energía infinita, lo cual transgrede la definición 1.3.
- Sobre el resto de las celdas generadas por el modelo la descripción de las soluciones es sencilla. Existen kinks cuya trayectoria sobre el plano de coordenadas polares conecta los vértices opuestos de cada celda donde se asientan los vacíos. Esta afirmación es estricta en los casos en que β es un número entero. Hay que llamar la atención en que si son elegidos sistemas donde el término potencial incluye valores de β racionales entonces el concepto de celda es dilatado obligando a adquirir sucesivas cartas de (4.1) para abarcar plenamente sobre el plano polar tal estructura. El supuesto en que β fuese un número irracional el modelo dejaría de abarcar soluciones kinks habida cuenta de que usando el símil mecánico la solución que partiría de un vacío viajaría indefinida sin encontrar otro, adquiriendo por ello una energía infinita.
- La aplicación de la teoría de Morse sobre la variedad de soluciones kinks y la carencia por parte de este tipo de modelos de puntos conjugados (focales) en las congruencias de trayectorias asociadas a los kinks, nos permite intuir la estabilidad de todas las soluciones encontradas en este tipo de modelos.

Galería de kinks

Los kinks pueden ser compendiados para el caso en que (4.16) es regido por $\beta \in \mathbb{Z}$ de una manera simple. Introduciendo los índices

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \{1, \dots, m-1, m\} \\ \mathbf{j} &= \{0, 1, \dots, 2\beta-2, 2\beta-1\} \end{aligned}$$

se define el conjunto de índices dobles

$$\mathcal{I} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$$

La variedad de ceros sobre el plano polar, entonces, puede ser escrita por

$$\mathcal{M} = \left\{ v^{(i,j)} = \left(\sigma_i, \frac{j\pi}{\beta} \right) \text{ con } (i,j) \in \mathcal{I} \right\}$$

Entonces, los kinks se presentan según la relación:

Soluciones densas:	Soluciones singulares:
TK[\mathbf{l}, \mathbf{l}'](γ_1) TK[$\mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$](γ_1)	TKC[\mathbf{l}, \mathbf{l}''] TK φ [$\mathbf{l}, \mathbf{l}'''$]

para cualquier $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}''' \in \mathcal{I}$. Para aquellos modelos particulares para los que la distribución de vacíos identifica \mathbf{l} y \mathbf{l}'' los kinks que de forma genérica hemos denotado como TKC[\mathbf{l}, \mathbf{l}''] adquieren un carácter no topológico.

Reglas de suma:

Finalmente, para terminar de exponer los resultados concernientes a los modelos de Liouville de Tipo II, especificaremos las reglas de suma asociadas a las soluciones kinks enunciadas anteriormente. Éstas se resumen en las relaciones:

1. $\mathcal{E}[\text{TK}[\mathbf{l}, \mathbf{l}'](\gamma_1)] = \mathcal{E}[\text{TK}[\mathbf{l}'', \mathbf{l}'''](\gamma_1)]$
2. $\mathcal{E}[\text{TK}[\mathbf{l}, \mathbf{l}'](\gamma_1)] = \mathcal{E}[\text{TKC}[\mathbf{l}, \mathbf{l}'']] + \mathcal{E}[\text{TK}\varphi[\mathbf{l}'', \mathbf{l}''']]$

4.3 Modelos de Liouville de tipo IV:

Finalmente, Liouville incluyó aquellos modelos físicos que admitían la separación de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en las variables originales del problema (o coordenadas cartesianas) bajo el epígrafe *Tipo IV*. Daremos término al estudio de los kinks presentes en las teorías de campos asociadas a modelos de Liouville presentando algunos resultados correspondientes a este último grupo de sistemas. En este caso, los conceptos desarrollados en las secciones precedentes referidos a otros tipos de modelos quedan extremadamente trivializados. En la base de ello, se encuentra el hecho de que en realidad estos modelos pueden ser interpretados como dos copias de modelos unidimensionales, esto es, corresponde a la suma directa de éstos, aunque la variedad de soluciones es mucho más rica en este caso. Ni tan siquiera hemos de introducir una transformación del sistema de coordenadas con el que trabajamos. En virtud de todo lo dicho, optaremos meramente por introducir la información asociada a estos modelos siguiendo el esquema de secciones anteriores sin ahondar en los detalles. Finalmente introduciremos dos modelos representativos de este tipo de sistemas que ilustren sus propiedades.

4.3.1 De los conceptos iniciales:

Dado que de inicio trabajamos con las variables que manipularemos a lo largo de la resolución del problema, introduciremos directamente la exigencia necesaria para que un modelo pertenezca al tipo de modelos que hemos introducido.

Definición 4.5: *Un sistema físico natural asociado al funcional acción (1.2) es de Liouville de Tipo IV si su potencial admite la forma separada en las variables*

$$U(\phi) = f(\phi_1) + g(\phi_2) \quad (4.36)$$

El funcional energía determinada bajo la condición (4.36) queda representada por la expresión

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 + f(\phi_1) + g(\phi_2) \right\} \quad (4.37)$$

donde es evidente por la ausencia de acoplamientos entre las componentes del campo $\phi(x)$ que estos modelos pueden entenderse como la suma directa de dos modelos con mundos internos unidimensionales, cada uno de ellos asociados a las variables ϕ_1 y ϕ_2 por separado.

Dado que nuestro estudio se restringe a potenciales semidefinidos positivos y en atención a la expresión (4.37), las raíces de cada uno de los sumandos juegan un papel esencial en el comportamiento del modelo físico. Así, denotaremos por α_i ($i = 1, \dots, n$) los ceros de la función $f(\phi_1)$ y por β_i ($i = 1, \dots, m$) aquellos valores que caracterizan $g(\phi_2) = 0$. Además, supondremos sin pérdida de generalidad que el índice i ordena de menor a mayor cada una de las magnitudes α_i y β_i . Con estas consideraciones podemos introducir

Definición 4.6: *Llamaremos celda asociada a los modelos de Liouville Tipo IV a aquellos paralelogramos contruidos como $P_{ij} = (\alpha_i, \alpha_{i+1}) \times (\beta_i, \beta_{i+1})$.*

En el mismo sentido que en modelos ya analizados, las separatrices de los modelos de tipo IV corresponden a las fronteras de tales celdas ∂P_{ij} . El retículo es el lugar geométrico constituido por todas las rectas separatrices, es decir, $Ret(P) = \cup \partial P_{ij}$. No existe ningún punto del plano interno que juegue el papel de los focos mostrados por los modelos de tipo I o III. Todos los nudos del retículo se convierten lógicamente en puntos de vacío del sistema físico. Es fácil advertir que el número de elementos de la variedad de ceros es dado por $\text{card}(\mathcal{M}) = n \cdot m$.

El problema mecánico asociado a la identificación de los kinks se corresponde la búsqueda de las trayectorias seguida por una partícula en los modelos de Liouville de tipo IV. Éstos son completamente integrables, de modo que deben aparecer dos integrales primeras en involución asociados al sistema físico. Éstas pueden escribirse

como

$$I_1 = \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + f(\phi_1) \quad I_2 = \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 + g(\phi_2)$$

lo que muestra que la energía asociada a cada una de las componentes del campo se conserva por separado.

4.3.2 Descripción de la teoría de Hamilton-Jacobi.

El formalismo hamiltoniano define los momentos generalizados

$$p_{\phi_1} = \frac{d\phi_1}{dx} \quad p_{\phi_2} = \frac{d\phi_2}{dx}$$

lo que nos permite introducir la densidad hamiltoniana por

$$\mathcal{H} = h_{\phi_1} + h_{\phi_2}$$

donde los sumandos corresponden a las expresiones

$$h_{\phi_1} = \frac{1}{2} p_{\phi_1}^2 - f(\phi_1) \quad h_{\phi_2} = \frac{1}{2} p_{\phi_2}^2 - g(\phi_2)$$

La teoría de Hamilton-Jacobi (1.21) sobre la que ensayamos la forma separada de la función generatriz $\mathcal{J} = \mathcal{J}_x(x) + \mathcal{J}_{\phi_1}(\phi_1) + \mathcal{J}_{\phi_2}(\phi_2)$, lo cual implica el cumplimiento de

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_x(x) &= -Ex \\ \mathcal{J}_{\phi_1}(\phi_1) &= \text{Sign}(\phi_1') \int d\phi_1 \sqrt{2(F + f(\phi_1))} \\ \mathcal{J}_{\phi_2}(\phi_2) &= \text{Sign}(\phi_2') \int d\phi_2 \sqrt{2(E - F + g(\phi_2))} \end{aligned}$$

asevera que las expresiones que rigen la trayectoria y la dependencia espacial de las soluciones del modelo se presentan respectivamente como

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial F} = \gamma_1 = \text{cte} \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial E} = \gamma_2 = \text{cte} \quad (4.38)$$

La relación entre las constantes del movimiento son $E = I_1 + I_2$ y $F = I_1$. Además, la variedad de soluciones kinks verifican las ecuaciones (4.38) aunque debido a su comportamiento asintótico (1.13) y (1.14) restringen el valor de las constantes F y E a cero. Es por ello, que podemos afirmar que las soluciones kinks pertenecientes a los modelos de Liouville de Tipo IV deben cumplir en tal caso las relaciones

$$\text{Sign}(\phi_1') \int \frac{d\phi_1}{\sqrt{f(\phi_1)}} - \text{Sign}(\phi_2') \int \frac{d\phi_2}{\sqrt{g(\phi_2)}} = \sqrt{2}\gamma_1 \quad (4.39)$$

$$\text{Sign}(\phi_2') \int \frac{d\phi_2}{\sqrt{g(\phi_2)}} = \sqrt{2}(x + \gamma_2) \quad (4.40)$$

La ecuación (4.39) nos proporciona la trayectoria seguida por las soluciones kinks, donde el valor de γ_1 parametriza la curva asociada a cada solución. La relación (4.40) nos permite el cálculo de la dependencia espacial en la componente imaginaria del campo $\phi(x)$ lo que unido al uso de la órbita nos permite obtener la dependencia espacial de la parte real del campo.

4.3.3 Propiedades generales del sistema físico

El compendio de resultados obtenidos para los modelos de Liouville son directamente generalizados aquí. Resumimos lo introducido entonces, enunciando

Proposición 4.4: *Existen soluciones singulares asentadas sobre el retículo de los modelos de Liouville de tipo IV.*

Esto es, podemos asegurar que el uso del método de las órbitas prueba es sencillo y fructífero ensayando las relaciones para las componentes del campo dadas o bien por $\phi_1(x) = \alpha_i$, o bien $\phi_2(x) = \beta_i$. En tales casos necesariamente el valor del parámetro γ_1 en la fórmula (4.39) se dispara a infinito.

Proposición 4.5: *La energía asociada a cada una de las soluciones de tipo kink albergadas por los modelos de Liouville de tipo IV puede ser obtenida mediante la expresión*

$$\mathcal{E}[\phi(x)] = \left| \int_{\pi_{\phi_1}[\phi(x)]} d\phi_1 \sqrt{2f(\phi_1)} \right| + \left| \int_{\pi_{\phi_2}[\phi(x)]} d\phi_2 \sqrt{2g(\phi_2)} \right| \quad (4.41)$$

Lo anterior tiene como consecuencia los siguientes puntos:

- Para soluciones que se muestren monótonas en el interior de cierta celda P_{ij} la energía es directamente computada según la expresión

$$\mathcal{E}[\phi(x)] = \left| \int_{\phi_1(-\infty)}^{\phi_1(\infty)} d\phi_1 \sqrt{2f(\phi_1)} \right| + \left| \int_{\phi_2(-\infty)}^{\phi_2(\infty)} d\phi_2 \sqrt{2g(\phi_2)} \right|$$

- Todas solución o secuencia de soluciones que tengan la misma proyección de camino poseen la misma energía, esto es, si tenemos una solución que verifica

$$\pi_{\phi_1}[\phi(x)] = \sum_{i=1}^n [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \quad \pi_{\phi_2}[\phi(x)] = \sum_{i=1}^m [\beta_i, \beta_{i+1}]$$

el valor de su energía será:

$$\mathcal{E}[\phi(x)] = \sum_{i=1}^n \left| \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} d\phi_1 \sqrt{2f(\phi_1)} \right| + \sum_{i=1}^m \left| \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} d\phi_2 \sqrt{2g(\phi_2)} \right|$$

Proposición 4.6: *Los sistemas físicos con funcional energía (1.39) asociada a un modelo de Liouville de tipo IV son presupersimétricos presentando cuatro superpotenciales dados por las expresiones*

$$W(\phi) = \pm \int d\phi_1 \sqrt{2f(\phi_1)} \pm \int d\phi_2 \sqrt{2g(\phi_2)}$$

resultado que se convierte para los modelos en estudio en algo obvio. Las ecuaciones de primer orden rezan

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \pm \sqrt{2f(\phi_1)} \quad \frac{d\phi_2}{dx} = \pm \sqrt{2g(\phi_2)} \quad (4.42)$$

las cuales nos permiten otra vía para el cálculo de todas las soluciones kinks existentes en el sistema físico. Diríamos más, es la técnica más sencilla y potente para esta clase de modelos.

Sin más, introduciremos dos ejemplos en lo que concierne a este tipo de modelos. Consideraremos el sistema más simple con presencia de ruptura de simetría que puede acaecer en estos modelos, el cual será denominado modelo $\phi_1^4 \oplus \phi_2^4$. Otra muestra será el modelo seno-Gordon $N = 2$.

4.3.4 Modelo $\phi_1^4 \oplus \phi_2^4$.

Consideremos un sistema físico en (1+1) dimensiones caracterizadas por la presencia de un funcional acción dada por

$$S[\phi] = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{\lambda_1}{4} (\phi_1^2 - a_1)^2 - \frac{\lambda_2}{4} (\phi_2^2 - a_2)^2 \right\}$$

de modo que el término potencial que es presentado por el modelo corresponde a la expresión separada en cada una de las componentes dada por

$$U(\phi) = \frac{\lambda_1}{4} (\phi_1^2 - a_1)^2 + \frac{\lambda_2}{4} (\phi_2^2 - a_2)^2$$

donde como en el primer capítulo hemos introducido las constantes $a_i = \frac{m_i}{\sqrt{\lambda_i}}$. El funcional que caracteriza las soluciones estáticas y en particular a las soluciones kinks corresponde a la energía

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda_1}{4} (\phi_1^2 - a_1)^2 + \frac{\lambda_2}{4} (\phi_2^2 - a_2)^2 \right\}$$

que ofrece configuraciones extremales bajo el cumplimiento de las condiciones expresadas por las ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales desacopladas sobre los campos

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{dx} = \lambda_i \phi_i^3 - m_i^2 \phi_i \quad \text{sin suma en } i$$

La variedad de ceros asociada a este modelo viene constituida por cuatro elementos en la forma $\mathcal{M} = \{v^1 = -1 - i; v^2 = 1 - i; v^3 = -1 + i; v^4 = 1 + i\}$, de forma que la simetría asociada al grupo discreto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es totalmente rota sobre cada uno de éstos. El espacio de configuración muestra por tanto dieciseis posibles sectores desconectados. Las integrales primeras presentadas por el modelo son

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda_1}{4} (\phi_1^2 - a_1^2)^2 \quad I_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda_2}{4} (\phi_2^2 - a_2^2)^2$$

que nos proporciona el camino más sencillo para calcular las soluciones kinks, dado que para éstas las constantes del movimiento I_1 y I_2 son nulas recuperando las ecuaciones de primer orden mostradas en (4.42). Debemos resolver por tanto dos ecuaciones diferenciales de primer orden no acopladas. La teoría de Hamilton-Jacobi nos lleva a la misma información. Por ambos procedimientos se verifica que todas las soluciones kinks recaen bajo la expresión

$$\phi(x) = \pm a_1 \tanh[\sqrt{2}(x + \gamma_2)] \pm i a_2 \tanh[\sqrt{2}(x + \gamma_1 + \gamma_2)] \quad (4.43)$$

cuya órbita puede ser descrita por la relación:

$$\frac{a_1 + \text{sign}(\phi_1') \phi_1}{a_1 - \text{sign}(\phi_1') \phi_1} \cdot \frac{a_2 - \text{sign}(\phi_2') \phi_2}{a_2 + \text{sign}(\phi_2') \phi_2} = e^{2\sqrt{2}\gamma_1}$$

Considerando una descripción detallada de la expresión (4.43) podemos concluir los siguientes puntos:

1. Soluciones singulares: Sobre la proposición 4.4 tenemos la posibilidad de ensayar dos tipos de órbitas. Entonces,

1.1. TKX: Considerando sobre (4.43) que el parámetro natural γ_2 va a infinito mientras que la suma $\gamma_1 + \gamma_2$ se mantiene constante, aparece una solución singular que se asienta sobre las rectas $\phi_1 = \pm a_1$. Estas soluciones presentan una naturaleza topológica uniendo los puntos v^1 y v^2 cuando es considerado el signo negativo, o bien los vacíos v^3 y v^4 para el signo positivo. La expresión de las soluciones que denotaremos por **TKX** queda dada por

$$\phi(x) = \pm a_1 \pm i a_2 \tanh[\sqrt{2}(\bar{x} + \gamma_1)]$$

y transportan una energía que adopta el valor $\mathcal{E}[\text{TKX}] = \frac{2\sqrt{2} m_1^2}{3 \lambda_1}$. El hessiano adopta una sencilla expresión

$$\mathcal{H}[\text{TKX}] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 2m_1^2 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + m_2^2(2 - 3 \text{sech}^2 \sqrt{2}(\bar{x} + \gamma_1)) \end{pmatrix}$$

cuya primera componente adquiere un espectro continuo asentado sobre el valor $2m_1^2$ mientras que la segunda componente presenta un espectro discreto

$$\lambda_n^{(2)} = m_2^2 \left(2 - \frac{1}{2}(2 - n)^2 \right) \quad n = 0, 1, 2$$

sobre el que se genera el espectro continuo. El modo cero es asignado al valor $n = 0$, y su aparición se debe, como bien sabemos, a la presencia de la invariancia traslacional del sistema. Dado la ausencia de autovalores negativos en el espectro de \mathcal{H} debe inferirse la estabilidad de esta solución.

1.2. TKY: Si consideramos que el parámetro $\gamma_1 = \pm\infty$ sobre (4.43) la solución singular se asienta sobre las rectas del plano interno expresadas como $\phi_2 = \pm a_2$ quedando definida por

$$\phi(x) = \pm a_1 \tanh[\sqrt{2}\bar{x}] \pm i a_2$$

Integran los sectores desconectados \mathcal{C}_{13} , \mathcal{C}_{31} , \mathcal{C}_{24} y \mathcal{C}_{42} y serán referidas por las **TKY**. Se verifica que $\mathcal{E}[\mathbf{TKY}] = \frac{2\sqrt{2}m_2^2}{3\lambda_2}$, mientras que el hessiano asociado a estas soluciones

$$\mathcal{H}[\mathbf{TKY}] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + m_1^2(2 - 3 \operatorname{sech}^2 \sqrt{2}\bar{x}) & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + 2m_2^2 \end{pmatrix}$$

determina un espectro totalmente análogo al expuesto en el punto anterior donde deben ser intercambiados los papeles de las componentes. De nuevo se concluye la estabilidad de este tipo de soluciones.

2. Soluciones densas TKD(γ_1): Si los parámetros γ_i permanecen finitos sobre (4.43), obtenemos soluciones que llenan la celda formada por el paralelogramo delimitado por los vacíos del modelo. Existen dos familias, una conecta los puntos v^1 con v^4 mientras que la otra comunica los vacíos v^2 y v^3 . En conjunto son llamadas **TKD(γ_1)** y su energía viene determinada como $\mathcal{E}[\mathbf{TKD}(\gamma_1)] = \frac{4\sqrt{2}m_1^2}{3\lambda_1}$. En cualquiera de los casos, el hessiano queda expresado como

$$\mathcal{H}[\mathbf{TKD}] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + m_1^2(2 - 3 \operatorname{sech}^2 \sqrt{2}\bar{x}) & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + m_2^2(2 - 3 \operatorname{sech}^2 \sqrt{2}(\bar{x} + \gamma_1)) \end{pmatrix}$$

que permite encontrar los autovalores discretos asociados a cada componente en la siguiente manera

$$\lambda_n^{(i)} = m_i^2 \left(2 - \frac{1}{2}(2 - n_i)^2 \right) \quad n_i = 0, 1, 2$$

los cuales resultan ser semidefinidos positivos lo que informa de la estabilidad de los kinks introducidos en este punto. Es de resaltar además la presencia de dos modos ceros que pueden atribuirse a la posibilidad de pasar de una solución a otra

en la familia biparamétrica de soluciones, bien a través de la invariancia traslacional manifiesta al variar el valor de γ_2 , bien al moverse a través de trayectorias contiguas al variar γ_1 .

Para concluir con el análisis de este modelo presentamos la estructura del espacio de moduli de la variedad de kinks

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\mathbf{TKX}, \mathbf{TKY}, \mathbf{TKD}(\gamma_1)\}$$

junto con las reglas de suma que relacionan sus energías

$$1. \mathcal{E}[\mathbf{TKD}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\mathbf{TKX}] + \mathcal{E}[\mathbf{TKY}]$$

4.3.5 Modelo Seno-Gordon N=2

Para finalizar el estudio de los modelos de Liouville de tipo IV y zanjar, por tanto, el presente capítulo, asumiremos el estudio en esta sección de un modelo físico cuyo comportamiento viene dominado por el funcional acción (1.2) que introduce un término potencial de la forma

$$U(\phi) = \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \cos \beta \phi_1 \cos \beta \phi_2)$$

el cual es semidefinido positivo de forma que los mínimos de dicha expresión corresponden a los ceros del potencial. Las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del campo $\phi(x)$ quedan registradas en el siguiente modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2} &= -\frac{\alpha}{\beta} \text{sen } \beta \phi_1 \cos \beta \phi_2 \\ \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_1^2} &= -\frac{\alpha}{\beta} \cos \beta \phi_1 \text{sen } \beta \phi_2 \end{aligned}$$

que implican la presencia de dos integrales primeras asociadas a la identificación de soluciones estáticas que se encuentran en involución,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \cos \beta \phi_1 \cos \beta \phi_2) \\ I_2 &= \frac{1}{4} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} - \frac{\alpha}{\beta^2} \text{sen } \beta \phi_1 \text{sen } \beta \phi_2 \end{aligned}$$

La variedad de ceros queda definida en la manera

$$\mathcal{M} = \left\{ \phi = \frac{2\pi m}{\beta} + i \frac{2\pi n}{\beta} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sobre los vacíos de \mathcal{M} se construye un espectro de pequeñas deformaciones o espectro de partículas asentadas sobre los valores de las masas

$$m^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Con la pretensión de identificar la variedad de soluciones kinks consideraremos un giro de 45 grados en el espacio interno de nuestro modelo introduciendo los campos,

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_2) \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \phi_2)$$

de manera que el funcional energía queda descrita por

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\eta_i}{dx} \right)^2 + \frac{\alpha}{2\beta^2} (1 - \cos \sqrt{2}\beta \eta_i) \right] \right\}$$

que adquiere una forma separada en las componentes del campo $\eta(x)$. Ahora, es claro que el modelo integra dos copias en cada una de las componentes del modelo unidimensional de sine-Gordon. Sobre estas variables la variedad de ceros se estructura como

$$\mathcal{M} = \left\{ v^{n,m} = \frac{\sqrt{2}\pi m}{\beta} + i \frac{\sqrt{2}\pi n}{\beta} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

La identificación de las soluciones presentes en el modelo puede ser obtenida bajo el uso de las ecuaciones de primer orden de las que nos dota (4.42) o por la teoría de Hamilton-Jacobi. El conjunto de las soluciones que obtenemos con tales técnicas corresponden a las expresiones

$$\eta(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \left(\frac{(1+2m)\pi}{2} + \operatorname{arctg} e^{\pm\sqrt{\alpha}(x-x_1)} + i \frac{(1+2n)\pi}{2} + i \operatorname{arctg} e^{\pm\sqrt{\alpha}(x-x_2)} \right) \quad (4.44)$$

1. Soluciones singulares: En el caso de considerar soluciones cuya órbita descansa sobre el retículo podemos concluir:

1.1. TKX: Ensayando como trayectorias las expresiones de los segmentos rectos dados por $\eta_2 = \frac{\sqrt{2}\pi(1+2n)}{\beta}$ donde $n \in \mathbb{Z}$ se obtiene sobre (4.44) la solución escrita por

$$\eta(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \left(\frac{(1+2m)\pi}{2} \operatorname{arctg} e^{\pm\sqrt{\alpha}(x-x_1)} \right) + i \frac{\sqrt{2}\pi(1+2n)}{\beta}$$

de manera que se ligan los vacíos $v^{m,n}$ y $v^{m+1,n}$. Poseen una energía $\mathcal{E}[\mathbf{TKX}] = \frac{4\sqrt{\alpha}}{\beta^2}$. El análisis de la estabilidad arroja como resultado que son estables.

1.2. TKY: Si consideramos la restricción $\eta_1 = \frac{\sqrt{2}\pi(1+2m)}{\beta}$ con $m \in \mathbb{Z}$ que corresponde a un tramo rectilíneo, se obtiene la solución dada en la forma

$$\eta(x) = \frac{\sqrt{2}\pi(1+2m)}{\beta} + i \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \left(\frac{(1+2n)\pi}{2} + \operatorname{arctg} e^{\pm\sqrt{\alpha}(x-x_2)} \right)$$

donde los vacíos que fijan el comportamiento asintótico corresponden a $v^{m,n}$ y $v^{m,n+1}$. Su energía es dada como $\mathcal{E}[\text{TKY}] = \frac{4\sqrt{\alpha}}{\beta^2}$ adoptando un carácter estable.

2. Soluciones densas TKD(γ_1): En este caso se toma los parámetros x_1 y x_2 como magnitudes finitas, en tal modo que la expresión (4.44) proporciona soluciones de tipo soliton simple en el sentido de que se conectan vacíos adyacentes que delimitan la misma celda. Entonces, existen familias de soluciones que extrapolan los vacíos $v^{m,n}$ con respecto a $v^{m+1,n+1}$ y otras que conectan los vacíos $v^{m+1,n}$ y $v^{m,n-1}$. La valor de la energía es $\mathcal{E}[\text{TKD}(\gamma_1)] = \frac{8\sqrt{\alpha}}{\beta^2}$.

Sobre la congregación de soluciones kinks mostradas anteriormente puede advertirse el cumplimiento de la regla de suma

$$\mathcal{E}[\text{TKD}(\gamma_1)] = \mathcal{E}[\text{TKX}] + \mathcal{E}[\text{TKY}]$$

La estabilidad de las soluciones obtenidas (4.44) es indagada mediante el estudio del comportamiento del operador hessiano asociado a las soluciones para el sistema que estamos tratando. En este supuesto se tiene

$$\mathcal{H}[\phi] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha - 2\alpha \operatorname{sech}^2 \sqrt{\alpha}(x-x_1) & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha - 2\alpha \operatorname{sech}^2 \sqrt{\alpha}(x-x_2) \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores corresponden a

$$\lambda^{1,2} = \alpha - \alpha(1 - n_{1,2})^2 \quad \text{con} \quad n_{1,2} = 0, 1.$$

donde aparece el modo cero degenerado en dos veces, cuya interpretación atiende a las mismas valoraciones que en el modelo precedente. No se presenta ningún autovalor negativo de forma que hemos de intuir la estabilidad de las soluciones kinks que hemos descrito.

Una importante propiedad de este modelo es la presencia de soluciones multi-soliton (soluciones dependientes del tiempo con naturaleza topológica integrantes de cualquier sector). En estas nuevas variables las soluciones se ven sometidas al cumplimiento de las ecuaciones diferenciales de segundo orden escritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_1^2} &= -\frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta} \operatorname{sen} \sqrt{2}\beta\eta_1 \\ \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x_1^2} &= -\frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta} \operatorname{sen} \sqrt{2}\beta\eta_2 \end{aligned}$$

donde podemos conjugar las distintas soluciones multisoliton que caracterizan los modelos unidimensionales sobre cada una de las componentes del campo η . Así, entonces, los casos más sencillos de esta clase de soluciones corresponden a las expresiones:

3. Soluciones SS,SS: Este tipo de soluciones forman parte de sectores del tipo $\mathcal{C}_{nm, n+2m+2}$, esto es, van desde un vacío $v^{n,m}$ hasta otro vacío $v^{n+2, m+2}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$. Su expresión corresponde a

$$\eta(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \arctan \frac{v_1 \sinh \frac{\sqrt{\alpha}(x-x_1)}{\sqrt{1-v_1^2}}}{\cosh \frac{\sqrt{\alpha}v_1 t}{\sqrt{1-v_1^2}}} + i \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \arctan \frac{v_2 \sinh \frac{\sqrt{\alpha}(x-x_2)}{\sqrt{1-v_2^2}}}{\cosh \frac{\sqrt{\alpha}v_2 t}{\sqrt{1-v_2^2}}}$$

4. Soluciones SS,SA: En esta clase de soluciones los vacíos que son conectados son $v^{m,n}$ con $v^{m+2, n}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$. La expresión que caracteriza estos solitones es

$$\eta(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \arctan \frac{v_1 \sinh \frac{\sqrt{\alpha}(x-x_1)}{\sqrt{1-v_1^2}}}{\cosh \frac{\sqrt{\alpha}v_1 t}{\sqrt{1-v_1^2}}} + i \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \arctan \frac{\sinh \frac{\sqrt{\alpha}v_2(x-x_2)}{\sqrt{1-v_2^2}}}{v_2 \cosh \frac{\sqrt{\alpha}t}{\sqrt{1-v_2^2}}}$$

5. Soluciones SA,SA: Otra posibilidad son aquellas soluciones que unen un vacío consigo mismo, y que integran de una forma no trivial el sector $\mathcal{C}_{mn, mn}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$. Esto ocurre para las soluciones expresadas como

$$\eta(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \arctan \frac{\sinh \frac{\sqrt{\alpha}v_1(x-x_1)}{\sqrt{1-v_1^2}}}{v_1 \cosh \frac{\sqrt{\alpha}t}{\sqrt{1-v_1^2}}} + i \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \arctan \frac{\sinh \frac{\sqrt{\alpha}v_2(x-x_2)}{\sqrt{1-v_2^2}}}{v_2 \cosh \frac{\sqrt{\alpha}t}{\sqrt{1-v_2^2}}}$$

que describen los famosos “breather” que acaecen en los modelos de Seno-Gordon.

Esto corresponde a ejemplos particulares de toda la gama de soluciones multisoliton que se pueden construir. En particular es fácil construir soluciones que formen parte de los sectores $\mathcal{C}_{mn, m+1n+2}$.

Capítulo 5

Kinks en Modelos Presupersimétricos

5.1 Introducción

En los capítulos precedentes hemos identificado la variedad de soluciones kinks en una gran cantidad de sistemas físicos en el marco de la teoría de campos sobre la base del carácter de completa integrabilidad del modelo mecánico asociado. Otra de las posibilidades, anunciada en el primer capítulo, corresponde al estudio del sector bosónico de un sistema físico supersimétrico. En estos casos el término potencial debe presentarse en la forma (1.51), lo que permite identificar las ecuaciones diferenciales de primer orden (1.60) asociadas a las soluciones kink. Su resolución, aunque mucho más asequible que la de las ecuaciones de segundo orden (1.55), sigue suponiendo un problema no trivial. Una de las limitaciones en la búsqueda de la variedad de kinks en estos modelos, sugerida por el estudio de los capítulos iniciales, es la imposibilidad a priori de determinar la existencia y el número de superpotenciales asociados al sistema físico en estudio. Podría ocurrir que un sistema incluirá un superpotencial que no hubiese sido identificado, de tal modo que sus ecuaciones de primer orden generarán nuevas familias de soluciones kinks, que no habrían sido contempladas por otros superpotenciales. Ello fue advertido en el estudio de la relación entre los modelos de Liouville y los presupersimétricos. Téngase en cuenta que éstos podrían haber sido analizados en el capítulo presente desde este nuevo punto de vista y con la certeza de la presencia de cuatro superpotenciales caracterizando distintas familias de soluciones kinks. El propósito marcado en los próximos párrafos será, sin embargo, el estudio más profundo de las posibles prestaciones del método descrito, al margen de la propiedad de integrabilidad del modelo mecánico asociado, señalando distintos escenarios en los que puede ser identificados la pletora de kinks al completo. El primero de ellos es el caso en que el sistema físico intro-

duce un superpotencial armónico. Quedará demostrado, entonces, que existe una familia uniparamétrica de superpotenciales asociados al mismo modelo, que generan nuevas ecuaciones de primer orden y, por ello, la posibilidad de identificar nuevos defectos topológicos. Como ejemplos de este tipo de estructuras consideraremos los sistemas físicos descritos por los modelos de Wess-Zumino, tratados en trabajos como [31, 61, 137, 21, 122, 29, 12], que verifican los requisitos manifestados. Finalmente, debido a su continuada presencia en la literatura [14, 17, 18, 16, 11], analizaremos el modelo caracterizado por un superpotencial polinómico de grado cúbico $W[\phi] = \lambda(\frac{1}{3}\phi_1^3 - a^2\phi_1) + \frac{\mu}{2}\phi_1\phi_2^2$, estudiado inicialmente por los autores D. Bazeia, J.R.S. Nascimento, R.F. Ribeiro y D. Toledo, por lo que será denominado como modelo BNRT. Éste ha sido estudiado mediante el método de órbitas prueba permitiendo la identificación de dos soluciones kinks topológicos. Su interés principal radica en que introduce nuevos interrogantes que son solucionados parcialmente. En nuestro análisis es identificada una familia uniparamétrica de soluciones kinks pero queda latente la incognita de si coexisten otras familias.

5.2 Modelos con superpotencial armónico

Bajo este epígrafe estudiaremos aquellos sistemas físicos en (1+1) dimensiones espacio-temporales bajo el marco de la teoría de campos, que presentan un funcional acción restringida a soluciones estáticas determinada por (1.52), donde el superpotencial $W_1(\phi_1, \phi_2)$ corresponde a una expresión armónica $\frac{\partial^2 W_1}{\partial \phi_1 \partial \phi_1} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial \phi_2 \partial \phi_2} = 0$. Hemos utilizado un subíndice en la notación del superpotencial para distinguirlo de otros superpotenciales que puedan quedar asociados al mismo modelo físico. Esta clase de sistemas cobija una estructura sumamente rica, incluyendo un familia uniparamétrica de superpotenciales y por extensión una familia de ecuaciones diferenciales de primer orden que caracteriza las soluciones kinks. Esto queda manifestado en la siguiente sección.

5.2.1 Cotas de Bogomolny:

Como primer acercamiento a este tipo de modelos podemos anunciar la posibilidad de construir dos formas diferentes de saturar la cota de Bogomolny. Si construimos la teoría sobre el superpotencial dado $W_1(\phi^1, \phi^2)$, la afirmación enunciada puede hacerse explícita sobre las siguientes puntos:

- Escribiendo el funcional energía para soluciones estáticas como

$$\mathcal{E}[\phi] = \frac{1}{2} \int dx \left[\left(\frac{d\phi_1}{dx} - \frac{dW_1}{d\phi_1} \right)^2 + \left(\frac{d\phi_2}{dx} - \frac{dW_1}{d\phi_2} \right)^2 \right] + |T|$$

donde

$$T = \int dW = \int dx \left(\frac{dW_1}{d\phi_1} \frac{d\phi_1}{dx} + \frac{dW_1}{d\phi_2} \frac{d\phi_2}{dx} \right) = W_1(\infty) - W_1(-\infty) \quad (5.1)$$

las ecuaciones de primer orden

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \frac{dW_1}{d\phi_1} \quad \frac{d\phi_2}{dx} = \frac{dW_1}{d\phi_2}$$

determinan soluciones estáticas que corresponden a puntos críticos del funcional acción $S[\phi]$. El análisis puede ser completado conjugando distintos signos en el argumento anterior. Éstas son las relaciones que habíamos anunciado en (1.60) y por ello pueden existir soluciones topológicas sometidas a tales condiciones.

- Por otra parte, cabría escribir el funcional energía en una forma alternativa,

$$\mathcal{E}[\phi] = \frac{1}{2} \int dx \left[\left(\frac{d\phi_1}{dx} - \frac{dW_1}{d\phi_2} \right)^2 + \left(\frac{d\phi_2}{dx} + \frac{dW_1}{d\phi_1} \right)^2 \right] + |\tilde{T}|$$

donde

$$\tilde{T} = \int *dW = \int dx \left(\frac{dW_1}{d\phi_1} \frac{d\phi_2}{dx} - \frac{dW_1}{d\phi_2} \frac{d\phi_1}{dx} \right) = \int \left(\frac{dW_1}{d\phi_1} d\phi_2 - \frac{dW_1}{d\phi_2} d\phi_1 \right) \quad (5.2)$$

La aplicación del argumento esgrimido en el punto anterior implica la imposición de que el valor de \tilde{T} sobre una configuración dependa sólo de las condiciones iniciales marcadas por el punto de partida y destino, asumiendo su independencia del camino o trayectoria seguida por la solución. La una-forma bajo el signo integral en (5.2), que define \tilde{T} , debe ser exacta. Con tal supuesto el teorema de Green sobre el plano exige

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial \phi^2 \partial \phi^2} = 0 \quad (5.3)$$

concluyendo la armonicidad del superpotencial, lo cual constituye el soporte de la presente sección. Las ecuaciones de primer orden asociadas a la carga central (5.2) aparecen como

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \frac{dW_1}{d\phi_2} \quad \frac{d\phi_2}{dx} = -\frac{dW_1}{d\phi_1} \quad (5.4)$$

que pese a su novedosa forma pueden reescribirse bajo el habitual formato (1.60) introduciendo un nuevo superpotencial sometido a las relaciones

$$\frac{\partial W_1}{\partial \phi^1} = \frac{\partial W_2}{\partial \phi^2} \quad \frac{\partial W_1}{\partial \phi^2} = -\frac{\partial W_2}{\partial \phi^1} \quad (5.5)$$

con respecto al superpotencial primitivo $W_1(\phi_1, \phi_2)$ con el que caracterizamos el problema inicialmente. Ello siempre es posible habida cuenta del cumplimiento de (5.3). Las ecuaciones (5.5) implican necesariamente la condición de armonicidad no sólo sobre el superpotencial $W_1(\phi_1, \phi_2)$ sino también sobre la expresión de nueva construcción $W_2(\phi_1, \phi_2)$. Por ello, es de resaltar la siguiente afirmación: el sistema físico admite dos superpotenciales armónicos diferentes. La consideración más importante, sin embargo, atiende al hecho de que las relaciones (5.5) entre los dos superpotenciales enunciados pueden entenderse como las condiciones de Cauchy-Riemann de una función superpotencial compleja. Esta es la motivación de la siguiente sección.

5.2.2 Holomorfa del superpotencial

La condición de armonicidad (5.3) del superpotencial queda expresada respecto del plano complejo interno como

$$\frac{\partial^2 W(\phi, \phi^*)}{\partial \phi \partial \phi^*} = 0$$

lo que muestra que el superpotencial debe ser expresado en la forma $W(\phi, \phi^*) = f(\phi) + g(\phi^*)$. Por otra parte, la condición de realidad del potencial bosónico restringe el formato anterior a $W(\phi, \phi^*) = f(\phi) + f(\phi^*)$. La teoría física representada por el funcional (1.53) puede equipararse a la proporcionada por el superpotencial holomorfo $W(\phi) = f(\phi)$ asociado al funcional energía

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\phi^*}{dx} \frac{d\phi}{dx} + 2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \left[\frac{\partial W}{\partial \phi} \right]^* \right\} \quad (5.6)$$

sobre la que basaremos nuestro análisis. En la sección 5.2.1 deducimos la presencia de dos superpotenciales $W_1(\phi_1, \phi_2)$ y $W_2(\phi_1, \phi_2)$ asociados al mismo sistema físico, relacionados entre si por (5.5). Es natural compilar estas pesquisas mediante la construcción de un superpotencial complejo

$$W(\phi) = w_1(\phi_1, \phi_2) + iw_2(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} [W_1(\phi_1, \phi_2) + iW_2(\phi_1, \phi_2)]$$

Enfatizamos la notación particular $W_A(\phi^1, \phi^2) = 2w_A(\phi^1, \phi^2)$, que relaciona las componentes del superpotencial complejo con respecto a los superpotenciales de los modelos en estudio. Este superpotencial complejo se presenta como una función holomorfa, dado que las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial w_1}{\partial \phi^1} = \frac{\partial w_2}{\partial \phi^2} \quad \frac{\partial w_1}{\partial \phi^2} = -\frac{\partial w_2}{\partial \phi^1} \quad (5.7)$$

son verificadas bajo la relación (5.5) y además implican la armonicidad de cada una de las componentes de $W(\phi)$. El término potencial puede ser reescrito como

$$U(\phi^1, \phi^2) = 2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial 2w_1}{\partial \phi^1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial 2w_1}{\partial \phi^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial 2w_2}{\partial \phi^1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial 2w_2}{\partial \phi^2} \right)^2$$

lo que nos permite afirmar, de nuevo, que el doble de las componentes del superpotencial $W(\phi^1, \phi^2)$, las magnitudes reales $2w_1(\phi_1, \phi_2)$ y $2w_2(\phi_1, \phi_2)$, conforman superpotenciales de la teoría. La adhesión de los dos superpotenciales $W_1(\phi_1, \phi_2)$ y $W_2(\phi_1, \phi_2)$ es una forma sencilla de describir el modelo físico. Sobre la base de lo enunciado, podemos construir las ecuaciones de primer orden atribuidas al uso de cada uno de los superpotenciales que hemos encontrado. Entonces, existen soluciones que cumplen las ecuaciones diferenciales de primer orden constituidas por las expresiones

$$(a) \begin{cases} \frac{d\phi^1}{dx} = \frac{\partial 2w_1}{\partial \phi^1} \\ \frac{d\phi^2}{dx} = \frac{\partial 2w_1}{\partial \phi^2} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \frac{d\phi^1}{dx} = \frac{\partial 2w_2}{\partial \phi^1} \\ \frac{d\phi^2}{dx} = \frac{\partial 2w_2}{\partial \phi^2} \end{cases} \quad (5.8)$$

como ya nos resultaba conocido por la sección precedente. Para estos sistemas de ecuaciones diferenciales la cota de Bogomolny se satura, originando una carga central cuyo valor es $T = W_1(\infty) - W_1(-\infty) = 2[w_1(\infty) - w_1(-\infty)]$ para el primero de ellos, mientras que para el segundo se tiene que $\tilde{T} = W_2(\infty) - W_2(-\infty) = 2[w_2(\infty) - w_2(-\infty)]$. Es también esclarecedor que las curvas solución generadas por los sistemas (a) y (b) sobre el plano interno son ortogonales, lo cual es advertido tras el uso de las condiciones de Cauchy-Riemann (5.7). En otro orden de cosas, podemos extraer el flujo de las trayectorias. Para (5.8(a)) se concluye que

$$\Phi = \frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \frac{\frac{\partial w_1}{\partial \phi^2}}{\frac{\partial w_1}{\partial \phi^1}} \Rightarrow \frac{\partial w_1}{\partial \phi^2} d\phi^1 - \frac{\partial w_1}{\partial \phi^1} d\phi^2 = 0$$

expresión que, empleando las condiciones de Cauchy-Riemann, nos permite obtener

$$\frac{\partial w_2}{\partial \phi^1} d\phi^1 + \frac{\partial w_2}{\partial \phi^2} d\phi^2 = dw_2 = 0$$

de donde puede concluirse que las órbitas que cumplen las ecuaciones diferenciales de primer orden (5.8(a)) son dadas por la expresión

$$w_2(\phi^1, \phi^2) = \gamma_1^\perp \quad \text{ó} \quad W_2(\phi^1, \phi^2) = 2\gamma_1^\perp \quad (5.9)$$

donde γ_1^\perp es una constante [31]. Para estas soluciones se verifica necesariamente que $\tilde{T} = 0$. Un argumento totalmente análogo al que acabamos de mostrar puede ser aplicado sobre (5.8(b)), concluyendo que las trayectorias de sus soluciones vienen determinadas por la condición

$$w_1(\phi^1, \phi^2) = \gamma_1 \quad \text{ó} \quad W_1(\phi^1, \phi^2) = 2\gamma_1 \quad (5.10)$$

de tal forma que la carga central T será nula, $T = 0$. De forma concisa puede anunciarse que las trayectorias de los kinks asociadas a las ecuaciones diferenciales de primer orden (5.8(a)) y (5.8(b)) son curvas *isosuperpotenciales*, valga el término.

Tras el esquema planteado, daremos un nuevo paso conceptual afirmando que

Cualquier sistema físico con la acción (5.6) admite la familia uniparamétrica de superpotenciales

$$\begin{aligned} W^{(\alpha)}(\phi) &= e^{i\alpha}W(\phi) = \frac{1}{2} \left[W_1^{(\alpha)}(\phi_1, \phi_2) + W_2^{(\alpha)}(\phi_1, \phi_2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\cos \alpha W_1 - \text{sen } \alpha W_2) + \frac{i}{2} (\text{sen } \alpha W_1 + \cos \alpha W_2) \end{aligned}$$

justificada fácilmente a la vista de (5.6). El valor $\alpha = 0$ reproduce la expresión del superpotencial $W_1(\phi)$, mientras que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ genera $W_2(\phi)$. En general, el cambio en la fase de magnitud $\frac{\pi}{2}$ permite trasladar los argumentos de la componente real del superpotencial a su componente imaginaria. Las ecuaciones de primer orden (5.8) asociadas a la familia de superpotenciales son

$$\begin{cases} \frac{d\phi^1}{dx} = \frac{\partial W_1^{(\alpha)}}{\partial \phi^1} = \cos \alpha \frac{\partial W_1}{\partial \phi_1} - \text{sen } \alpha \frac{\partial W_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{d\phi^2}{dx} = \frac{\partial W_2^{(\alpha)}}{\partial \phi^1} = \text{sen } \alpha \frac{\partial W_1}{\partial \phi_1} + \cos \alpha \frac{\partial W_1}{\partial \phi_2} \end{cases} \quad (5.11)$$

las cuales nos permiten enunciar lo siguiente:

Los sistemas físicos que admiten superpotenciales armónicos presentan soluciones asentadas sobre las trayectorias representadas por la familia biparamétrica de curvas

$$w_2^{(\alpha)}(\phi_1, \phi_2) = \text{sen } \alpha w_1(\phi_1, \phi_2) + \cos \alpha w_2(\phi_1, \phi_2) = \gamma_1 \quad (5.12)$$

Mostrado nuestro interés por las soluciones de tipo defecto topológico hemos de escoger entre todas las órbitas (5.12) aquellas que correspondan a soluciones que conectan vacíos del modelo físico. La descripción del trabajo a realizar es dada advirtiendo que debemos encontrar el valor del parámetro α y de la constante γ_1 que permita la conexión de algún par de vacíos v^k y $v^{k'}$, esto es, la identificación de aquellas rectas plasmadas sobre el plano $w_1 - w_2$ que unen puntos de vacío. Debe verificarse por ende que $w_1^{(\alpha)}(v^k) = w_1^{(\alpha)}(v^{k'})$. La carga central, que nos proporciona la energía asumida por las soluciones, puede ser contemplada según las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} T^{(\alpha)} &= W_1^{(\alpha)}(x = \infty) - W_1^{(\alpha)}(x = -\infty) = \\ &= \cos \alpha W_1(v^k) - \text{sen } \alpha W_2(v^k) - \cos \alpha W_1(v^{k'}) + \text{sen } \alpha W_2(v^{k'}) = \\ &= \sqrt{[W_1(v^k) - W_1(v^{k'})]^2 + [W_2(v^k) - W_2(v^{k'})]^2} \end{aligned}$$

donde ha sido usada la fórmula (5.12).

Métrica de Jacobi

El traslado del problema de la identificación de los defectos topológicos en un sistema físico a la geometría riemanniana, vía la métrica de Jacobi, permite dislumbrar los resultados anteriores de una forma brillante [65]. El funcional energía viene dado por el siguiente cálculo, apoyado en la relación (5.7),

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\phi] &= \int ds \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial \phi^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial \phi^2} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{d\phi^1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\phi^2}{ds} \right)^2 \right] \\ &= 4 \int dx \left[\left(\frac{dw_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw_2}{dx} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

La conclusión que podemos obtener a la vista de la expresión anterior es que las soluciones kinks se corresponden con las geodésicas sobre el plano cuando son usadas las coordenadas $w_1 - w_2$. Las soluciones quedarían especificadas por las ecuaciones de segundo orden

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0 \qquad \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0$$

que manifiestan las soluciones

$$w_i(s) = a_i s + b_i$$

donde el uso de la longitud de arco s impone la restricción $a_i a_i = 1$. Las órbitas de las soluciones son las rectas en el plano de componentes del superpotencial. Los kinks vienen identificados por las condiciones asintóticas. Este esquema reproduce fielmente los mismos resultados enunciados con anterioridad en un modo mucho más simple.

5.2.3 Modelo de Gibbons-Townsend

En [61, 137], Gibbons y Townsend proponen el estudio de un modelo particular cuyo origen procede de teorías cosmológicas que admiten domain walls [122, 21]. En [148] se muestra la relevancia del modelo expuesto en el caso de cuatro dimensiones con simetría gauge $SU(n-1)$. Un estudio en el marco de la teoría supersimétrica $\mathcal{N} = 1$ Yang-Mills es dado en [29]. Se plantea el estudio de defectos topológicos en el sector bosónico de una teoría $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica en (1+1) dimensiones regida por la presencia del superpotencial complejo

$$W[\phi] = \phi - \frac{\phi^n}{n} \tag{5.13}$$

que podemos reescribir usando la representación polar del plano interno como

$$W[\phi] = \left(r \cos \varphi - \frac{r^n}{n} \cos n\varphi \right) + i \left(r \sin \varphi - \frac{r^n}{n} \sin n\varphi \right)$$

La dinámica del sistema físico es gobernada por el potencial

$$U(r, \varphi) = 2 \left(1 + r^{2(n-1)} - 2r^{n-1} \cos(n-1)\varphi \right)$$

que se presenta como una expresión semidefinida positiva y cuyos mínimos constituyen los elementos de la variedad de ceros o de vacíos. Ésta queda establecida como

$$\mathcal{M} = \left\{ v^k = e^{i \frac{2\pi k}{n-1}} \equiv 1_{\frac{2\pi k}{n-1}} \right\} \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n-2$$

El lagrangiano del sistema físico disfruta de una simetría asociada al grupo dihédrico $D_{2(n-1)} \equiv \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{n-1}$ asociado a las transformaciones $\varphi' \rightarrow -\varphi$ y $\varphi' \rightarrow \varphi + \frac{2\pi j}{n-1}$ con $j = 0, 1, 2, \dots, n-2$. Tras el uso de las coordenadas cartesianas, las transformaciones del grupo dihédrico

$$(a) \quad \phi'_2 \rightarrow -\phi_2, \phi'_1 \rightarrow \phi_1.$$

$$(b) \quad \phi^{1'} \rightarrow \cos \frac{2\pi j}{n-1} \phi^1 - \sin \frac{2\pi j}{n-1} \phi^2, \phi^{2'} \rightarrow \sin \frac{2\pi j}{n-1} \phi^1 + \cos \frac{2\pi j}{n-1} \phi^2$$

pueden entenderse como un subgrupo del grupo $O(2)$. La afirmación de que la simetría original es rota al subgrupo \mathbb{Z}_2 generado por la transformación $\varphi' \rightarrow -\varphi - \frac{2\pi k}{n-1}$, la cual deja un vacío v^k inalterado cuando n es par y dos v^k y $v^{k+\frac{n-1}{2}}$ para n impar, describe al completo el proceso de ruptura espontánea de simetría.

Las ecuaciones de primer orden (5.8) escritas en estas nuevas variables vienen expresadas en la forma

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{dr}{dx} = 2(\cos \varphi - r^{n-1} \cos n\varphi) \\ r \frac{d\varphi}{dx} = 2(-\sin \varphi + r^{n-1} \sin n\varphi) \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} \frac{dr}{dx} = 2(\sin \varphi - r^{n-1} \sin n\varphi) \\ r \frac{d\varphi}{dx} = 2(\cos \varphi - r^{n-1} \cos n\varphi) \end{cases} \quad (5.14)$$

cuyas soluciones para la elección particular de $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$ presentan las órbitas

$$r \cos \varphi - \frac{r^n}{n} \cos n\varphi = \gamma_1 \quad (5.15)$$

$$r \sin \varphi - \frac{r^n}{n} \sin n\varphi = \gamma_1^\perp \quad (5.16)$$

Entre las trayectorias (5.15) y (5.16) hemos de distinguir aquellas que correspondan a soluciones de tipo kink. Para ello hemos de imponer que las trayectorias de éstas conecten dos puntos de vacío. Supongamos que son los mínimos v^k y $v^{k'}$. La condición sobre (5.15) es enunciada diciendo que para dichos puntos la constante γ_1 debe ser la misma, lo que se traduce en

$$\text{sen} \frac{(k+k')\pi}{n-1} \text{sen} \frac{(k-k')\pi}{n-1} = \frac{1}{n} \text{sen} \frac{(k+k')n\pi}{n-1} \text{sen} \frac{(k-k')n\pi}{n-1}$$

que se cumple no trivialmente para la relación

$$k + k' = 0 \bmod (n - 1)$$

Por otra parte, considerando que (5.16) debe albergar las soluciones kinks descritas anteriormente debe imponerse que

$$\cos \frac{(k + k')\pi}{n - 1} \operatorname{sen} \frac{(k - k')\pi}{n - 1} = \frac{1}{n} \cos \frac{(k + k')n\pi}{n - 1} \operatorname{sen} \frac{(k - k')n\pi}{n - 1}$$

lo cual es verificado no trivialmente para los vacíos que cumplan que:

$$2(k + k') = (n - 1) \bmod 2(n - 1)$$

El conjunto de trayectorias (5.12) que caracteriza el problema genérico atiende a la expresión

$$\operatorname{sen} \alpha \left(r \cos \varphi - \frac{r^n}{n} \cos n\varphi \right) + \cos \alpha \left(r \operatorname{sen} \varphi - \frac{r^n}{n} \operatorname{sen} n\varphi \right) = \gamma_1 \quad (5.17)$$

que puede interpretarse como el giro de las soluciones mostradas en (5.15) y (5.16), con la restricción de que tal rotación continúe enlazando algún par de vacíos del modelo, con el propósito de que se correspondan con soluciones kinks.

Estudiaremos en algún detalle los modelos que surgen asociados a los valores del parámetro n más bajos.

- **Caso $n = 3$:**

En este caso, el sistema físico incluye un superpotencial complejo (5.13) escrito en la forma

$$W[\phi] = \phi - \frac{\phi^3}{3} = \left(\phi_1 - \frac{\phi_1^3}{3} + \phi_1 \phi_2^2 \right) + i \left(\phi_2 - \phi_1^2 \phi_2 + \frac{\phi_2^3}{3} \right)$$

lo que genera un término potencial

$$U_{n=3}(\phi_1, \phi_2) = 2 [(\phi \phi^* - 1)^2 + 4\phi_2^2]$$

que se corresponde con el presentado por el modelo MSTB para el valor específico de $\sigma^2 = 4$ y un factor global de 4. Ello proporciona la variedad de ceros

$$\mathcal{M} = \{v^0 = 1; v^1 = -1\}$$

sobre los que la simetría inicial de reflexiones de los ejes $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ queda rota al subgrupo $e \times \mathbb{Z}_2$. El resultado (5.17) proporciona las trayectorias de las soluciones mediante la expresión:

$$\operatorname{sen} \alpha \left(\phi_1 - \frac{\phi_1^3}{3} + \phi_1 \phi_2^2 \right) + \cos \alpha \left(\phi_2 - \phi_1^2 \phi_2 + \frac{\phi_2^3}{3} \right) = \gamma_1 \quad (5.18)$$

La ecuación (5.18) con el valor de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\gamma_1 = 0$ reproduce una curva con una rama que describe la órbita $\phi_2 = 0$, sobre la que se asienta soluciones de tipo kink caracterizados por el enlace de los dos vacíos que presenta el modelo. En la notación que especifica los mínimos de partida y de llegada, tendríamos la presencia del kink $\text{TK}[1, 0]$ y del antikink $\text{TK}[0, 1]$. Conforman en el lenguaje utilizado en el modelo MSTB la clase de equivalencia **TK1** del espacio de moduli de \mathcal{C}_K . La resolución de las ecuaciones definidas en (5.14) nos proporciona la ya consabida solución

$$\phi(x) = \pm \tanh 2\bar{x}$$

donde el signo positivo caracteriza la solución kink y el signo negativo queda asociado al antikink. Su energía es

$$\mathcal{E} [\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{1}]] = |T| = \frac{8}{3}$$

donde hemos usado congruencias de orden dos, $\bar{k} \equiv k \pmod{2}$.

- **Caso $n = 4$:**

Este modelo ha sido el más extensamente tratado en la literatura [61]. Modelos similares con tres vacíos dispuestos sobre los vértices de un triángulo equilátero, como el modelo que introduciremos, han sido tratados en [12] como aproximación al presente caso. El sistema físico viene en este punto caracterizado por la presencia del superpotencial complejo

$$W[\phi] = \phi - \frac{\phi^4}{4} = \left(\phi_1 - \frac{\phi_1^4}{4} + \frac{3}{2}\phi_1^2\phi_2^2 - \frac{\phi_2^4}{4} \right) + i\phi_2 (1 - \phi_1^3 + \phi_1\phi_2^2)$$

el cual genera un término potencial, ilustrado en la figura 5.1, que puede escribirse según la expresión algebraica

$$U_{n=4}(\phi_1, \phi_2) = 2 [(\phi\phi^*)^3 - 2\phi_1(\phi_1^2 - 3\phi_2^2) + 1]$$

La variedad de ceros que se manifiesta en este caso es caracterizada por la existencia de tres elementos:

$$\mathcal{M} = \left\{ v^0 = 1; v^1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; v^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

La teoría general discutida hasta el momento permite encontrar las trayectorias seguidas por las soluciones de (5.11), las cuales quedan englobadas en la expresión:

$$\sin \alpha \left(\phi_1 - \frac{\phi_1^4}{4} + \frac{3}{2}\phi_1^2\phi_2^2 - \frac{\phi_2^4}{4} \right) + \cos \alpha \phi_2 (1 - \phi_1^3 + \phi_1\phi_2^2) = \gamma_1 \quad (5.19)$$

Los valores $\alpha = 0$ y $\gamma_1 = -\frac{3}{8}$ sobre (5.19) señalan una órbita que conecta los puntos de vacío v^1 y v^2 , conformando una solución kink que nombraremos como TK[1, 2] junto a su antikink TK[2, 1]. El resultado queda trivializado al trasladar el análisis al plano isosuperpotencial, en el que la concordancia de la abscisa entre los vacíos v^1 y v^2 implica la presencia sobre la recta $w_1 = \frac{-3}{8}$ del kink nombrado arriba (ver figura 5.1, tramo continuo). La simetría \mathbb{Z}_3 presentada por el modelo permite completar la variedad \mathcal{C}_K , añadiendo los kinks aislados que unen los vacíos v^0 y v^1 , representados como TK[0, 1] y TK[1, 0], junto con otros que unen los vacíos v^0 y v^2 , dados por TK[0, 2] y TK[2, 0] (ver figura 5.1, tramos discontinuos). Es, por ello, que el moduli de la variedad de kinks viene constituido por un único elemento $\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\mathbf{TK}[0, 1]\}$. La energía de tales soluciones viene dada como

$$\mathcal{E} [\mathbf{TK}[\bar{k}, \bar{k} + \bar{1}]] = |T'| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

siendo $\bar{k} \equiv k \pmod{3}$. La resolución de las ecuaciones definidas en (5.14) nos conduce a la relación $\phi(x) = h^{-1}(\bar{x})$ donde la función $h(\phi)$ viene determinada por la cuadratura

$$h(\phi) = \int \frac{d\phi_1}{2\sqrt{\frac{3}{2} + 4\phi_1 + 8\phi_1^4} \sqrt{3\phi_1^2 - \sqrt{\frac{3}{2} + 4\phi_1 + 8\phi_1^4}}}$$

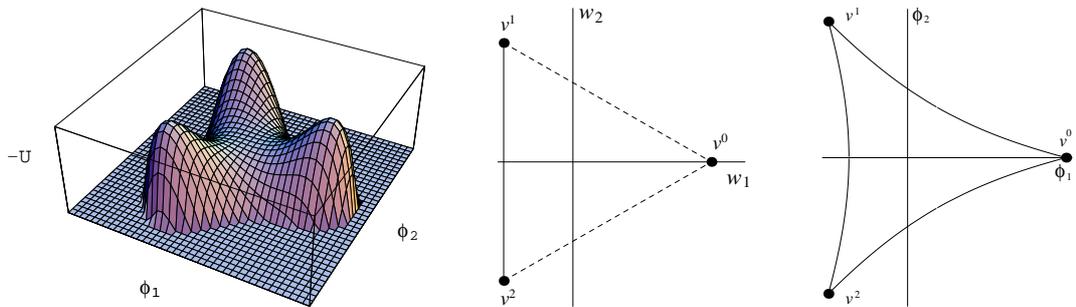


Figura 5.1: Modelo de Gibbons con $n = 4$: Potencial (a la izquierda) y las órbitas de los kinks en el plano isosuperpotencial (en el centro) y en el campo complejo (a la derecha).

• Caso $n = 5$:

En este punto consideraremos el valor $n = 5$ en el superpotencial complejo (5.13), de modo que de forma explícita el sistema físico presuper-simétrico admite el superpotencial

$$W[\phi] = \left(\phi_1 - \frac{\phi_1^5}{5} + 2\phi_1^3\phi_2^2 - \phi_1\phi_2^4 \right) + i\phi_2 \left(1 - \phi_1^4 + 2\phi_1^2\phi_2^2 - \frac{\phi_2^4}{5} \right)$$

lo que genera un término potencial que puede escribirse como

$$U_{n=5}(\phi_1, \phi_2) = 2 [(\phi\phi^* + 1)^2 - 4\phi_1^2] [(\phi\phi^* + 1)^2 - 4\phi_2^2]$$

El lagrangiano disfruta de invariancias bajo las transformaciones generadas por el grupo dihédrico D_8 , en el que permanecen las rotaciones de $\frac{\pi}{2}$. Los elementos de la variedad de ceros se distribuyen sobre los vértices de un cuadrado, en la forma:

$$\mathcal{M} = \{v^0 = 1; v^1 = i; v^2 = -1; v^3 = -i\}$$

Las trayectorias de las soluciones de las ecuaciones de primer orden son indicadas por (5.17), que proporciona las curvas

$$\sin \alpha \phi_1 \left(1 - \frac{\phi_1^4}{5} + 2\phi_1^2\phi_2^2 - \phi_2^4\right) + \cos \alpha \phi_2 \left(1 - \phi_1^4 + 2\phi_1^2\phi_2^2 - \frac{\phi_2^4}{5}\right) = \gamma_1 \quad (5.20)$$

El estudio de las soluciones de tipo kink es facilitada al tratar el plano $w_1 - w_2$ (figura 5.2) llegando a los siguientes resultados:

1. Los valores de $\alpha = 0$ y $\gamma_1 = 0$ sobre (5.20) proporciona la posibilidad de conexión entre los vacíos v^0 y v^2 a través de la órbita $\phi_2 = 0 \equiv w_2 = 0$, generando una solución kink a la que denominaremos detallando los vacíos que la caracterizan, esto es, TK[0, 2], o bien TK[2, 0]. Su dependencia espacial queda determinada mediante la ecuación implícita

$$\arctg \phi_1 + \operatorname{arctanh} \phi_1 = 4\bar{x}$$

Por otra parte, ajustando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\gamma_1 = 0$ sobre (5.20) se tiene la interrelación entre los vacíos v^1 y v^3 mediante el kink TK[3, 1] o su antikink TK[1, 3], asentados sobre la recta $\phi_1 = 0 \equiv w_1 = 0$ y que verifican

$$\arctg \phi_2 + \operatorname{arctanh} \phi_2 = 4\bar{x}$$

La energía adquirida por estas soluciones es expresada como

$$\mathcal{E} [\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{2}]] = |T| = \frac{16}{5}$$

donde $\bar{k} = k \bmod 4$.

2. Una nueva posibilidad es construir las soluciones kinks que unen vacíos consecutivos. Consideremos aquella que parte desde el vacío v^0 hasta v^1 . En este supuesto la órbita sobre el plano de coordenadas isosuperpotenciales queda declarada por la recta $w_1 + w_2 = \frac{4}{5}$, lo que es equivalente a

adoptar $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $\gamma_1 = 0$ sobre (5.20), generando el kink $\text{TK}[0,1]$. Las rotaciones sucesivas de ángulo $\frac{\pi}{2}$ dan lugar al resto de soluciones $\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} + \bar{1}]$. La energía de cada una de ellas es

$$\mathcal{E} [\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} + \bar{1}]] = |T| = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

La compilación de los resultados encontrados en los puntos precedentes proporciona el espacio de Moduli de la variedad de soluciones kinks

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\text{TK}[0, 1], \text{TK}[0, 2]\}$$

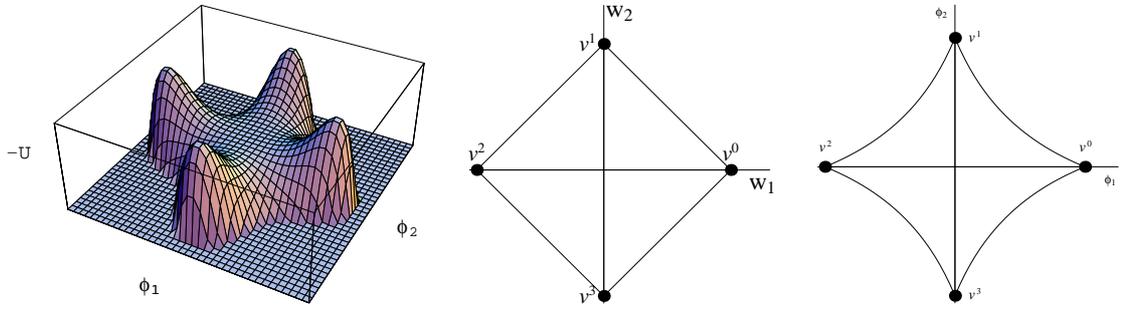


Figura 5.2: Modelo de Gibbons con $n = 5$: Potencial (a la izquierda) y las órbitas de los kinks en el plano isosuperpotencial (en el centro) y en el campo complejo (a la derecha).

- **Caso $n = 6$:**

Para el presente caso, el comportamiento del sistema físico es determinado por el superpotencial complejo

$$W[\phi] = \phi - \frac{\phi^6}{6} = w_1(\phi_1, \phi_2) + iw_2(\phi_1, \phi_2)$$

donde sus componentes son

$$\begin{aligned} w_1(\phi_1, \phi_2) &= \phi_1 - \frac{\phi_1^6}{6} + \frac{5}{2}\phi_1^4\phi_2^2 - \frac{5}{2}\phi_1^2\phi_2^4 + \frac{\phi_2^6}{6} \\ w_2(\phi_1, \phi_2) &= \phi_2 \left(1 - \phi_1^5 + \frac{10}{3}\phi_1^3\phi_2^2 - \phi_1\phi_2^4 \right) \end{aligned}$$

lo que genera un término potencial que puede escribirse como:

$$U_{n=6}(\phi_1, \phi_2) = 2 [(\phi\phi^*)^5 - 2\phi_1(\phi_1^4 + 5\phi_2^4 - 10\phi_1^2\phi_2^2) + 1]$$

En este caso, la simetría exhibida por el lagrangiano corresponde al grupo D_{10} , en el que quedan incluidas las rotaciones de fase $\frac{2\pi}{5}$ (véase figura 5.3). La

variedad de ceros viene constituida por los vértices de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio unidad

$$\mathcal{M} = \{v^0 = 1; v^1 = \alpha; v^2 = \beta; v^3 = \beta^*; v^4 = \alpha^*\}$$

donde $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ y $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$. Como ya resulta conocido, las trayectorias de las soluciones buscadas se convierten en rectas sobre el plano $w_1 - w_2$,

$$\sin \alpha w_1(\phi_1, \phi_2) + \cos \alpha w_2(\phi_1, \phi_2) = \gamma_1 \quad (5.21)$$

de donde la variedad \mathcal{C}_K queda determinada por los siguientes resultados:

1. El valor $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\gamma_1 = -\frac{5}{24}(1 + \sqrt{5})$ sobre (5.21) proporciona soluciones kinks que unen los vacíos v^2 y v^3 (vacíos consecutivos) que distinguimos por TK[2, 3] o TK[3, 2]. Manifestando la simetría del sistema físico se concluye la presencia de las soluciones del tipo TK $[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{1}]$, cuya energía es

$$\mathcal{E} [\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{1}]] = |T| = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

siendo $\bar{k} = k \bmod 5$.

2. Asumiendo el valor $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\gamma_1 = \frac{5}{24}(-1 + \sqrt{5})$ sobre la ecuación (5.21) podemos asegurar la presencia de soluciones de tipo kink que conectan los vacíos v^1 y v^4 (vacíos que alternan entre ellos otro). Aplicando las simetrías del problema podemos asegurar la presencia de soluciones que unen vacíos v^k y v^{k+2} y que quedarán representados por TK $[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{2}]$. Adquieren una energía dada por

$$\mathcal{E} [\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{2}]] = |T| = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

Aplicando la simetría \mathbb{Z}_5 que posee el sistema físico podemos afirmar que cada sector desconectado \mathcal{C}_{ab} con $a, b = 1, 2, \dots, 5$ posee alguna solución del sistema como elemento, es decir, el sistema presenta kinks que se extrapolan entre cualesquiera vacíos del modelo, como viene representado en la figura 5.3. Así, de forma compacta puede afirmarse que el moduli de la variedad de kinks viene determinado por

$$\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\mathbf{TK}[0, 1], \mathbf{TK}[0, 2]\}$$

- **Caso $n = 7$:**

Para terminar el estudio de este tipo de modelos, abordaremos finalmente aquellos sistemas físicos que admiten un superpotencial

$$W[\phi] = \phi - \frac{\phi^7}{7} = w_1(\phi_1, \phi_2) + iw_2(\phi_1, \phi_2)$$

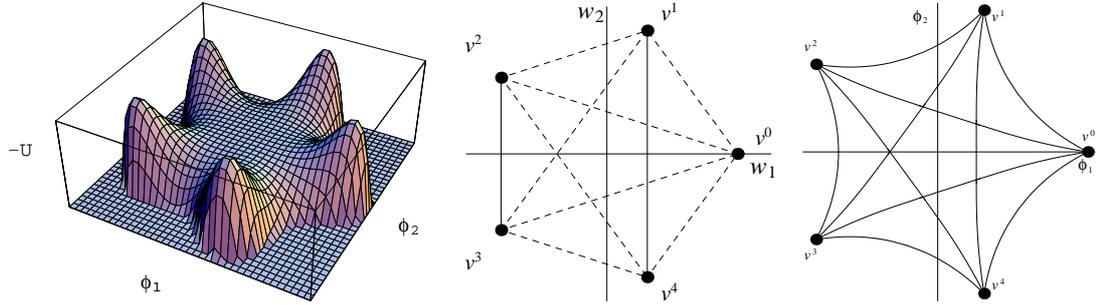


Figura 5.3: Modelo de Gibbons con $n = 6$: Potencial (a la izquierda) y las órbitas de los kinks en el plano isosuperpotencial (en el centro) y en el campo complejo (a la derecha).

siendo las componentes dadas por las expresiones algebraicas

$$w_1(\phi_1, \phi_2) = \phi_1 - \frac{\phi_1^7}{7} + 3\phi_1^5\phi_2^2 - 5\phi_1^3\phi_2^4 + \phi_1\phi_2^6$$

$$w_2(\phi_1, \phi_2) = \phi_2 - \frac{\phi_2^7}{7} + 5\phi_1^4\phi_2^3 - 3\phi_1^2\phi_2^5 + \frac{\phi_2^7}{7}$$

de donde se construye la expresión del término potencial

$$U_{n=7}(\phi_1, \phi_2) = 2 \left\{ (\phi\phi^*)^6 - 2(\phi_1^2 - \phi_2^2) [(\phi\phi^*)^2 - 16\phi_1^2\phi_2^2] + 1 \right\}$$

El lagrangiano del sistema físico manifiesta invariancias bajo las transformaciones del grupo D_{12} , del que forman parte las rotaciones de fase $\frac{\pi}{3}$. El modelo presenta una variedad de ceros

$$\mathcal{M} = \left\{ v^0 = 1; v^1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; v^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; v^3 = -1; v^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; v^5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

de modo que los puntos de vacío se distribuyen sobre los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio unidad. Las trayectorias son extraídas a partir de la expresión (5.12), esto es

$$\sin \alpha w_1(\phi_1, \phi_2) + \cos \alpha w_2(\phi_1, \phi_2) = \gamma_1 \quad (5.22)$$

Las soluciones de tipo kinks son discernidas de forma sencilla en el plano $w_1 - w_2$ (véase figura 5.4) y son caracterizadas de la siguiente manera:

1. Analizando las trayectorias determinadas por la relación (5.22) tenemos que para el valor del parámetro $\alpha = 0$ y $\gamma_1 = \frac{3\sqrt{3}}{7}$ aparecen soluciones de tipo kink que conectan los puntos de vacío v^1 y v^2 , mientras que si $\gamma_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{7}$ surgen kinks dispuestos entre los vacíos v^4 y v^5 . Al uso de las simetrías del modelo podemos concluir la presencia de soluciones

que unen mínimos consecutivos, que nombramos por $\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{1}]$, donde $\bar{k} = k \text{ mod } 6$. Poseen una energía

$$\mathcal{E} [\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{1}]] = |T| = \frac{12}{7}$$

- El valor de los parámetros $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\gamma_1 = \frac{3}{7}$ sobre la relación (5.22) nos indica la presencia de soluciones de tipo kink determinadas por los puntos de vacío v^1 y v^5 , mientras que si es considerado $\gamma_1 = -\frac{3}{7}$ los kinks extrapolan los vacíos v^2 y v^4 . Usando la invariancia rotacional aludida en los primeros párrafos de este punto, quedan conectados los mínimos que saltan otro, v^k y v^{k+2} y que denotamos por $\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{2}]$. Su energía es

$$\mathcal{E} [\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{2}]] = |T| = \frac{12\sqrt{3}}{7}$$

- Junto a las soluciones anteriores hemos de añadir aquella que surge para los valores $\alpha = 0$ y $\gamma_1^\perp = 0$ sobre (5.22), que caracterizan kinks que unen los mínimos v^0 y v^3 asentados sobre la trayectoria $\phi^2 = 0$. Empleando la invariancia del sistema físico sobre el resultado anterior queda patente la presencia de una plétora de kinks que unen los puntos de vacío opuestos v^k y v^{k+3} , que nombramos $\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{3}]$. Implican una energía más alta a los casos anteriores determinada por

$$\mathcal{E} [\text{TK}[\bar{k}, \bar{k} \pm \bar{3}]] = |T| = \frac{24}{7}$$

Como resumen de la información adquirida podemos advertir la presencia de kinks que ponen en conexión cualquiera de los vacíos del sistema físico, y que componen el espacio de moduli de la variedad de kinks presentado en la forma $\text{Mod}(\mathcal{C}_K) = \{\mathbf{TK}[0, 1], \mathbf{TK}[0, 2], \mathbf{TK}[0, 3]\}$.

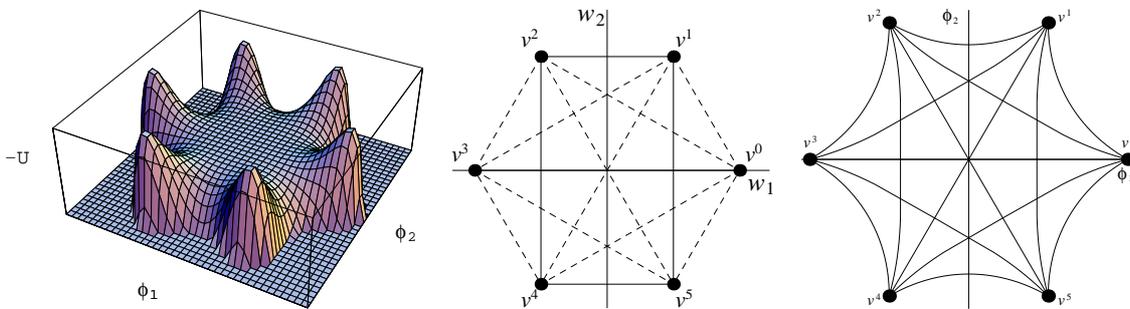


Figura 5.4: Modelo de Gibbons con $n = 7$: Potencial (a la izquierda) y las órbitas de los kinks en el plano isosuperpotencial (en el centro) y en el campo complejo (a la derecha).

Como sinopsis de los kinks resultantes en los modelos de Gibbons-Townsend con superpotencial holomorfo (5.13) podemos certificar la presencia de kinks que unen todas las combinaciones de vacíos posibles, de modo que se presentan $(n-2)(n-3)$ soluciones de tipo topológico comprendiendo tanto kinks como antikinks. Todos estos kinks son aislados y no conforman familias como era el habitual resultado encontrado para modelos de Liouville. Es claro, además, que por esta característica mencionada las soluciones son estables dado que en su sector topológico son las únicas presentes y por razones topológicas no pueden decaer a otras.

5.3 Modelo BNRT

Trataremos, en esta sección, con un modelo enmarcado en la estructura que analizamos en este capítulo con la intención de mostrar las alternativas, las limitaciones y las conjeturas que se albergan en un modelo presupersimétrico general. El modelo elegido apareció por primera vez en el artículo de Bazeia, Nascimento, Ribeiro y Toledo [16], lo cual justifica el nombre que le hemos asignado; posteriormente, en las referencias [14, 17, 18, 11] quedaron identificadas dos soluciones particulares mediante el empleo del método de órbitas prueba. Veremos a continuación que este modelo engloba realmente una amplísima variedad de kinks estructurados de manera notable.

Como es natural, el sistema físico está enmarcado en un mundo minkowskiano de (1+1)-dimensiones con presencia de un campo complejo $\chi(x) = \chi_1(x) + i\chi_2(x)$ y caracterizado por el funcional (1.52) con el superpotencial

$$W(\chi) = \lambda \left(\frac{1}{3}\chi_1^3 - a^2\chi_1 \right) + \frac{1}{2}\mu\chi_1\chi_2^2 \quad (5.23)$$

de modo que el término potencial viene determinado por la expresión polinómica de cuarto grado

$$U(\chi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\chi_1^2 - a^2)^2 + \frac{1}{2}\lambda\mu(\chi_1^2 - a^2)\chi_2^2 + \frac{1}{8}\mu^2\chi_2^4 + \frac{1}{2}\mu^2\chi_1^2\chi_2^2$$

donde $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. El funcional energía, sobre el que los kinks corresponden a puntos estacionarios, resulta ser

$$\mathcal{E}^d[\chi] = \int dy \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi_1}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi_2}{dy} \right)^2 + U(\chi) \right]$$

Con la voluntad de simplificar el estudio del modelo introduciremos, como es habitual, el uso de las variables adimensionales utilizadas a lo largo de esta memoria para evitar la presencia de parámetros no significativos. Haciendo $\chi_j = 2a\phi_j$, $y = \frac{2\sqrt{2}}{a\lambda}x$

y $\sigma = \frac{\mu}{\lambda}$, se obtiene la relación $\mathcal{E}^d[\chi] = \sqrt{2}a^3\lambda\mathcal{E}[\phi]$, siendo el funcional energía adimensional

$$\mathcal{E}[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 + U(\phi) \right]$$

y donde el término potencial y el superpotencial en las nuevas variables quedan escritos por

$$U(\phi) = (4\phi_1^2 + 2\sigma\phi_2^2 - 1)^2 + 16\sigma^2\phi_1^2\phi_2^2 \quad W(\phi) = 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{3}\phi_1^3 - \frac{1}{4}\phi_1 + \frac{\sigma}{2}\phi_1\phi_2^2 \right)$$

Una de las propiedades que resultó determinante en los modelos discutidos en los capítulos previos correspondió a la completa integrabilidad de los modelos mecánicos que los representan. El presente caso no lleva asociado un sistema mecánico de Liouville de manera general, ni se corresponde con ninguno de los sistemas físicos completamente integrables sometidos a potenciales polinómicos de grado menor o igual al quinto con integrales primeras cuadráticas en los momentos proporcionada en la literatura [72]. Siempre es advertida la presencia de la integral primera asociada a la energía mecánica

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 - (4\phi_1^2 + 2\sigma\phi_2^2 - 1)^2 - 16\sigma^2\phi_1^2\phi_2^2$$

Sí existen, sin embargo, determinadas elecciones de los parámetros que caracterizan el modelo que llevan a sistemas mecánico completamente integrables, como veremos más tarde. La variedad de ceros puede ser distinguida por los puntos críticos del superpotencial

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_1} = 4\sqrt{2} \left(\phi_1^2 - \frac{1}{4} + \frac{\sigma}{2} \phi_2^2 \right) = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \phi_2} = 4\sqrt{2}\sigma \phi_1\phi_2 = 0$$

de donde puede comprobarse que los valores $(\pm\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2\sigma}})$ cumplen las ecuaciones previas. Los últimos puntos hallados no siempre tienen cabida en el espacio interno puesto que determinadas elecciones de la constante de acoplamiento σ convertirían en compleja la segunda componente. Quedan establecidas dos fases:

- **Fase A.** En el supuesto en que $\sigma < 0$:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{A}} = \{v^1 = (\frac{1}{2}, 0); v^2 = (-\frac{1}{2}, 0)\}$$

- **Fase B.** Siendo $\sigma > 0$ queda:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{B}} = \left\{ v^1 = (\frac{1}{2}, 0); v^2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}); v^3 = (-\frac{1}{2}, 0); v^4 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2\sigma}}) \right\}$$

Cualquier solución debe satisfacer las ecuaciones de segundo orden (1.55):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} &= 16\phi_1 (4\phi_1^2 + 2\sigma(1 + \sigma)\phi_2^2 - 1) \\ \frac{d^2\phi_2}{dx^2} &= 8\sigma\phi_2 (4(\sigma + 1)\phi_1^2 + 2\sigma\phi_2^2 - 1) \end{aligned}$$

En particular, entre las soluciones posibles encontraremos las de tipo kink, las cuales deben entrelazar los puntos de vacío anunciados en \mathcal{M} . Considerada la descripción general del modelo, establecida en estos párrafos preliminares, pasamos a explotar los recursos de que nos dota la teoría de los modelos presupersimétricos. Para ello, iniciaremos la búsqueda de soluciones de tipo kink estudiando la información proporcionada por el superpotencial (5.23) y sus ecuaciones de primer orden. Como resultado encontraremos la existencia de un conjunto de soluciones kinks que nombraremos como *familia I*. La experiencia con los modelos de Liouville nos dice que las soluciones así generadas pueden no constituir al completo la variedad \mathcal{C}_K . Es, por ello, que será pertinente indagar la posibilidad de existencia de otras soluciones, las cuales supondremos corresponden a una *familia II*. El establecimiento de los puntos descritos es dado por:

1. Familia I: El sistema de ecuaciones de primer orden (1.60) asociado al superpotencial (5.23) proporciona las siguientes relaciones

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \sqrt{2}(4\phi_1^2 + 2\sigma\phi_2^2 - 1) \quad \frac{d\phi_2}{dx} = 4\sqrt{2}\sigma\phi_1\phi_2 \quad (5.24)$$

El método de órbitas prueba puede ser ensayado sobre (5.24), considerando los siguientes puntos:

1.1. TK1: La presencia de soluciones reales que implican la condición $\phi_2 = 0$ es consistente con las ecuaciones (5.24), cuya resolución proporciona el kink

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2} \tanh 2\sqrt{2}\bar{x}$$

La estabilidad para la solución mostrada puede ser estudiada mediante el análisis del espectro del hessiano

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 32 - 48 \operatorname{sech}^2 2\sqrt{2}\bar{x} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + 8\sigma^2 - 8\sigma(\sigma + 1) \operatorname{sech}^2 2\sqrt{2}\bar{x} \end{pmatrix}$$

La obtención del espectro puede realizarse resolviendo separadamente el espectro de cada una de las componentes del operador mostrado¹. Para la primera componente \mathcal{H}_{11} se identifica la presencia de un conjunto discreto de autovalores

$$\omega_{n_1}^2 = 8(4 - (2 - n_1)^2) \quad \text{con} \quad n_1 = 0, 1, 2$$

con autofunciones correspondientes: $\operatorname{sech}^2 z$, $\tanh z \operatorname{sech} z$ (estados semiligados) y $1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 z$ (estado semiligado). Como era esperado aparece un autovalor cero debido a la invariancia bajo traslaciones espaciales del sistema. El continuo es doblemente degenerado y queda asentado sobre el valor 32. Sus autofunciones pueden

¹Tomando $z = 2\sqrt{2}x$ las componentes del hessiano son $\mathcal{H}_{11}[\text{TK1}] = 8\left(-\frac{d^2}{dz^2} + 4 - 6 \operatorname{sech}^2 z\right)$ y $\mathcal{H}_{22}[\text{TK1}] = 8\left(-\frac{d^2}{dz^2} + \sigma^2 - \sigma(\sigma + 1) \operatorname{sech}^2 z\right)$.

expresarse, bien en términos de funciones hipergeométricas, bien en función de los polinomios de Jacobi de orden dos, en la forma:

$$\psi_k(z) = \operatorname{sech}^k z {}_2F_1 \left(k-2, k+3, k+1, \frac{1}{2}(1+\tanh z) \right) = e^{ikz} P_2^{(-ik, ik)}(\tanh z)$$

con autovalor asociado $8(k^2+4)$. El estudio realizado establece la estabilidad de la solución respecto a variaciones tangentes a la solución.

Más compleja es la situación para la segunda componente. En este caso el espectro discreto que se presenta es

$$\omega_{n_2}^2 = 8 [\sigma^2 - (\sigma - n_2)^2]$$

donde² $n_2 = 0, 1, \dots, E[\sigma]$ y no existe espectro discreto para el rango $\sigma < 0$.

Por su parte, el espectro continuo presenta autovalores siempre positivos $8(k^2 + \sigma^2)$.

Las autofunciones del continuo son de la forma:

$$\psi_k = \frac{N}{(e^z + e^{-z})^{ik}} {}_2F_1 \left(ik - \sigma, ik + \sigma + 1, ik + 1, \frac{1}{2}(1 + \tanh z) \right)$$

El autovalor fundamental del espectro de \mathcal{H}_{22} es nulo y describe un modo cero. Desde el punto de vista geométrico, vía la métrica de Jacobi asociada al sistema, este hecho se interpreta como la existencia de un campo de Jacobi (campo del núcleo del operador de desviación geodésica, ver por ejemplo [65] para detalles) que además es una variación propia; es fácil demostrar que este tipo de variación transforma geodésicas en geodésicas y, en consecuencia, kinks en kinks con la misma energía. La expresión de la autofunción correspondiente es:

$$\psi_{-i\sigma} = \frac{N}{(e^z + e^{-z})^\sigma} {}_2F_1 \left(0, 1 + 2\sigma, 1 + \sigma, \frac{1}{2}(1 + \tanh z) \right) = \frac{N}{2} \operatorname{sech}^\sigma z$$

que se anula únicamente en los puntos de vacío, para cualquier valor positivo de σ , nos indica por un lado que la solución TK1 es estable y, por otro, que existe una familia uniparamétrica de kinks en el mismo sector topológico que el TK1.

1.2. TKD(0): Una nueva posibilidad surge al ensayar como trayectoria el tramo elíptico

$$\phi_1^2 + \frac{\sigma}{2(1-\sigma)} \phi_2^2 = \frac{1}{4} \quad (5.25)$$

que proporciona la solución kink

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2} \tanh 2\sqrt{2}\sigma\bar{x} \pm i \sqrt{\frac{1-\sigma}{2\sigma}} \operatorname{sech} 2\sqrt{2}\sigma\bar{x}$$

² $E[\sigma]$ denota a la función parte entera de σ .

Estas soluciones son válidas solamente en el rango $\sigma \in (0, 1)$, y junto con el TK1, constituyen los únicos kinks del modelo identificados en la literatura hasta la fecha [18, 16]. La notación usada para denotar este kink, TKD(0), es la habitual para una familia uniparamétrica, habida cuenta que se trata de un miembro de la familia de kinks (el correspondiente a parámetro nulo) que analizaremos en el siguiente punto.

1.3 TKD(γ_1): El análisis puede ser completado identificando el flujo de trayectorias asociado a (5.24) mediante la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \frac{4\phi_1^2 + 2\sigma\phi_2^2 - 1}{4\sigma\phi_1\phi_2}$$

Esta última relación admite el factor integrante $|\phi_2|^{-\frac{2}{\sigma}}\phi_2^{-1}$ lo que permite encontrar las trayectorias asociadas a (5.24). Éstas quedan precisadas, para $\sigma \neq 1$ y $\sigma \neq 0$, por la fórmula

$$\phi_1^2 + \frac{\sigma}{2(1-\sigma)}\phi_2^2 = \frac{1}{4} + \frac{\gamma_1}{2\sigma}|\phi_2|^{\frac{2}{\sigma}} \quad (5.26)$$

donde la constante de integración ha sido denotada como γ_1 por similitud con el parámetro natural de los modelos de Liouville. Las trayectorias de las soluciones identificadas deben conectar los vacíos $(\pm\frac{1}{2}, 0)$, es decir, los dos vacíos existentes en el caso de la primera fase, los vacíos v^1 y v^3 para la segunda, siguiendo un comportamiento análogo al presentado en la figura 3.5. Las soluciones encontradas en [18, 16] quedan apuntadas para el valor específico $\gamma_1 = 0$, en cuyo caso las órbitas son los tramos elípticos (5.25) (evidentemente sólo si $0 < \sigma < 1$). No es posible, sin embargo, encontrar la forma funcional respecto de la variable espacial x de las soluciones de forma genérica. No todas las trayectorias descritas por (5.26) corresponden a soluciones kinks, puesto que para determinados valores de γ_1 las curvas (5.26) no enlazan los puntos de vacío. De manera general tendremos que (5.26) describe soluciones kink para valores de la constante γ_1 pertenecientes al intervalo: $\gamma_1 \in (-\infty, \bar{\gamma}_1)$, donde:

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{1}{4} \frac{\sigma}{1-\sigma} (2\sigma)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}$$

y, en consecuencia, es positivo para $\sigma \in (0, 1)$ y negativo para $\sigma \in (1, \infty)$. Para el valor $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1$ la ecuación (5.25) se corresponde con dos curvas separatrices, envolventes de la familia de kinks descrita, y que representan trayectorias kink en los sectores topológicos que conectan los vacíos v^1 con v^2 , v^2 con v^3 , v^3 con v^4 y v^1 con v^4 , como puede verse en la figura 5.5. Para valores de γ_1 superiores a $\bar{\gamma}_1$ la ecuación (5.25) se corresponde con dos curvas simétricas que no representan trayectorias kink puesto que no conectan vacíos de la teoría.

Un caso que merece una consideración especial es el correspondiente a $\sigma = 1$. La

integración de la ecuación de primer orden para este caso conduce a la solución

$$\phi_1^2 - \phi_2^2 \left(\frac{\gamma_1}{2} + \text{Ln} |\phi_2| \right) = \frac{1}{4}$$

donde ahora aparecen trayectorias kink para $\gamma_1 \in (-\infty, \bar{\gamma}_1)$, con $\bar{\gamma}_1 = -1 + \ln 2$. La situación cualitativa que presenta esta ecuación es idéntica que la obtenida para $\sigma \neq 1$.

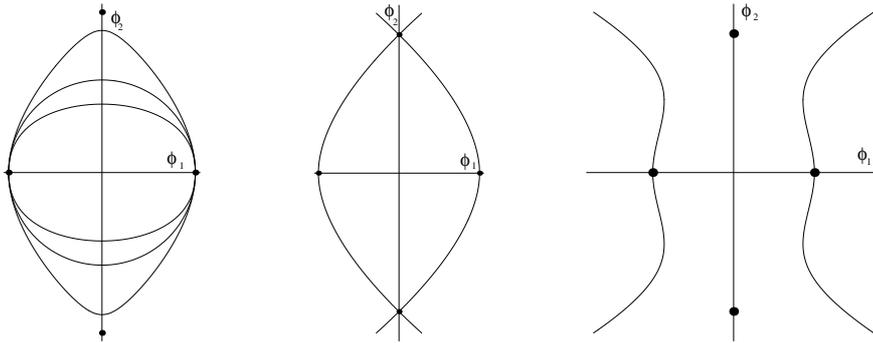


Figura 5.5: Representación gráfica de las curvas (5.26): a la izquierda para $\gamma_1 \in (-\infty, \bar{\gamma}_1)$ (kinks); en el centro $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1$ (separatriz) y a la derecha $\gamma_1 \in (\bar{\gamma}_1, \infty)$.

2. Familia II: Tras haber estudiado las soluciones de tipo kink asociadas a las ecuaciones de primer orden (5.24) hemos de investigar si otras soluciones, al margen de las compendiadas en la familia I, aparecen en el sistema físico que discutimos. Si ensayamos el método de la órbita prueba, considerando $\text{Re}(\phi) = 0$, obtendremos la siguiente solución kink:

2.1. TKY: El uso de la relación $I_1 = 0$ restringida al uso de soluciones imaginarias puras revela la presencia de la solución

$$\phi(x) = \pm i \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \tanh 2\sqrt{\sigma} \bar{x}$$

referida a la fase B, conectando los vacíos v^2 y v^4 . La expresión presentada verifica las ecuaciones de segundo orden. Además, el hessiano asociado a esta solución aparece en forma diagonal³,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 16 [\sigma - (1 + \sigma) \text{sech}^2 2\sqrt{\sigma} \bar{x}] & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + 8\sigma [2 - 3 \text{sech}^2 2\sqrt{\sigma} \bar{x}] \end{pmatrix}$$

El estudio del espectro de la segunda componente, es decir en la dirección tangente a la trayectoria solución, \mathcal{H}_{22} , es sencillo y, de hecho, ya se expuso en el apartado

³Haciendo $z = 2\sqrt{\sigma}x$ el hessiano es descrito por $\mathcal{H}_{11}[\text{TKY}] = 4\sigma \left(-\frac{d^2}{dz^2} + 4 - \frac{4(1+\sigma)}{\sigma} \text{sech}^2 z \right)$ y $\mathcal{H}_{22}[\text{TKY}] = 4\sigma \left(-\frac{d^2}{dz^2} + 4 - 6 \text{sech}^2 z \right)$.

anterior. Se tienen los autovalores discretos

$$\omega_{n_2}^2 = 4\sigma[4 - (2 - n_2)^2] \quad \text{con} \quad n_2 = 0, 1$$

junto a un continuo doblemente degenerado que brota sobre la base 16σ . El autovalor fundamental, $n_2 = 0$, caracteriza el modo cero asociado a la invariancia por traslaciones espaciales del sistema. El resto de autovalores son magnitudes positivas lo que indica la estabilidad del TKY respecto de perturbaciones tangentes.

Mucho más interesante es el estudio de las variaciones ortogonales al kink TKY. De manera general, el espectro consta de una parte discreta y una continua, si bien el número de autofunciones del discreto depende de los valores que tome la constante σ . De esta forma el espectro discreto de \mathcal{H}_{11} es

$$\omega_{n_1}^2 = 4\sigma \left[4 - \left(C - \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) \right)^2 \right]$$

donde $C = \sqrt{\frac{4(\sigma+1)}{\sigma}} + \frac{1}{4}$, y siendo $n_1 = 0, 1, \dots < C - \frac{1}{2}$. Las correspondientes autofunciones son:

$$\psi_n = \frac{N {}_2F_1[-n_1, 2C - n_1, C - n_1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 + \tanh z)]}{\cosh^{C-(n_1+\frac{1}{2})} z}$$

En lo que respecta a las autofunciones del continuo, se escriben como

$$\psi_k = N \cosh^{ik} z {}_2F_1 \left[\frac{1}{2} - ik + C, \frac{1}{2} - ik - C, 1 - ik, \frac{1}{2}(1 + \tanh z) \right]$$

con autovalores asociados $4\sigma(k^2 + 4)$.

La presencia de modos cero en el espectro discreto viene determinada por la posibilidad de que $\omega_{n_1}^2$ se anule. No es difícil deducir que tal situación se produce para los casos en los que la constante σ puede escribirse de la forma:

$$\sigma = \frac{4}{l(l+1) - 4} \quad l = 2, 3, \dots \tag{5.27}$$

Por otro lado, en el espectro continuo siempre se dispone de un modo cero, el correspondiente a $k = 2i$, cuya expresión resulta:

$$\psi_J = N \operatorname{sech}^2 z {}_2F_1 \left[\frac{5}{2} + C, \frac{5}{2} - C, 3, \frac{1}{2}(1 + \tanh z) \right]$$

y desde el punto de vista geométrico se trata de un campo de Jacobi. ψ_J no es, de manera general, una autofunción normalizable, o si se quiere, no constituye una variación propia, desde el punto de vista del cálculo variacional, excepto en los casos en los que el problema espectral se reduce a un caso tipo Pösch-Teller sin reflexión, lo cual ocurre exactamente para los valores de σ dados por la expresión (5.27).

Concluimos por tanto que para los valores $\sigma = 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{4}{l(l+1)-4}, \dots$, el modelo presenta necesariamente una familia uniparamétrica de kinks en el sector topológico al que pertenece el kink TKY.

Es posible entonces un análisis detallado de la estabilidad de la solución TKY para los diferentes valores de la constante σ . De hecho, para $\sigma \in [2, \infty)$ tenemos que los campos ψ_J , que se anulan en un punto de vacío, no vuelven a hacerlo en ningún otro punto de la trayectoria TKY, el índice de Morse es en consecuencia nulo y el kink es estable. Para $\sigma = 2$, ψ_J se anula en los dos puntos de vacío y de esta forma tendremos toda una familia de soluciones kink en este sector topológico, estables y con la misma energía que el TKY; el modo discreto de autovalor más grande se convierte en este caso en un estado semiligado, punto de arranque del espectro continuo. Para los valores $\sigma \in [\frac{1}{2}, 2)$, ψ_J se anula en un punto interior de la trayectoria TKY, el índice de Morse es uno y el kink TKY es inestable. $\sigma = \frac{1}{2}$ es otro caso especial, ψ_J es de nuevo una variación propia y aparece por tanto una familia de kinks inestables, en el mismo sector topológico, que confluyen en los puntos de vacío y en el punto conjugado, ver figura 5.6.

Los razonamientos anteriores pueden ser generalizados de manera que para $\sigma \in \left[\frac{4}{l(l+1)-4}, \frac{4}{l(l-1)-4} \right)$ tendremos que el índice de Morse es $l-2$ y únicamente en los extremos inferiores de dichos intervalos se tendrán modelos con una familia degenerada de kinks en el sector topológico del kink TKY.

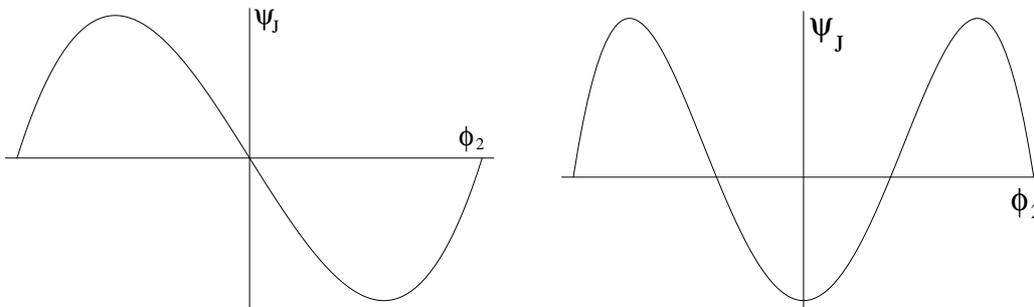


Figura 5.6: Representación gráfica del campo de Jacobi ψ_J frente a ϕ_2 para los casos $\sigma = \frac{1}{2}$ (izquierda) y $\sigma = \frac{1}{4}$ (derecha).

3. Una vez descritas las características fundamentales de los kinks de las Familias I y II, analizaremos a continuación el comportamiento concreto que se observa para algunos valores significativos, por lo singular, de la constante σ .

- $\sigma = 2$:

Para este valor del parámetro la expresión del potencial se reduce a

$$U(\phi) = (4\phi_1^2 + 4\phi_2^2 - 1)^2 + 64\phi_1^2\phi_2^2$$

que si realizamos una rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ en el espacio interno se convierte (salvo constantes) en el modelo $\phi_1^4 \oplus \phi_2^4$ analizado en la sección 4.3.4 y, en consecuencia, un modelo completamente integrable y separable en coordenadas cartesianas (rotadas). En este caso la familia I y la II son completamente análogas y por tanto estables, como se ha establecido en las secciones precedentes (el índice de Morse de las soluciones kink es nulo).

- $\sigma = \frac{1}{2}$:

Para este valor del parámetro, el modelo BNRT se convierte en el modelo de Liouville III[1][11], estudiado en el capítulo 3. Las órbitas (5.26) quedan especificadas mediante la fórmula $\phi_1^2 + \frac{1}{2}\phi_2^2 = \frac{1}{4} + \gamma_1\phi_2^4$. Puede comprobarse que el rango que proporciona soluciones de tipo kink es $\gamma_1 \in (-\infty, \frac{1}{4}]$. Si el rango anterior es especificado por el intervalo abierto los kinks conectan los puntos de vacío v^1 y v^3 , según el comportamiento ya mencionado. El valor asintótico $\gamma_1 \rightarrow -\infty$ da lugar al TK1. Para el valor $\gamma_1 = \frac{1}{4}$ la expresión que determina las trayectorias factoriza en el modo $(1 + 2\phi_1 - \phi_2^2)(1 - 2\phi_1 - \phi_2^2) = 0$, lo que proporciona las parábolas separatrices del modelo de Liouville mencionado, sobre las que se asientan los kinks singulares que unen, en este caso, los vacíos v^1 o v^4 con v^2 o v^3 según las distintas combinaciones. Además, el kink TKD(0) permanece entre la familia de soluciones descritas.

En lo que respecta a la Familia II, tenemos ahora que el espectro de \mathcal{H}_{11} es de la forma: $\text{Spec}(\frac{\mathcal{H}_{11}}{4\sigma}) = \{-5\} \cup \{0\} \cup \{\text{continuo}\}$, como corresponden al modelo de Liouville de tipo III que denominamos como III[1][11]. Quedó patente que el TKY formaba parte de la familia de kinks **TKF**(γ_1), lo que da cuenta del modo cero que hemos mencionado. Además de ello, el espectro presenta un autovalor negativo explicado mediante la presencia de un punto conjugado en la familia de soluciones TKF, localizado en el origen del plano interno. El campo de Jacobi presente en este caso se anula en el punto (0, 0) (además de hacerlo en los vacíos v^2 y v^4 , ver figura 5.6), que constituye el punto conjugado antes mencionado. Los kinks de esta familia serán inestables, por aplicación directa de la Teoría de Morse de kinks (ver [65] para detalles).

- $\sigma = \frac{1}{4}$:

El siguiente caso singular relevante para la familia II es, como hemos visto, el correspondiente a $l = 4$ en la expresión (5.27), es decir $\sigma = \frac{1}{4}$. En este caso ψ_J se anula en dos puntos interiores de la trayectoria TKY, el índice de Morse es 2 y existe en consecuencia una familia de kinks inestables en el sector topológico correspondiente. El espectro de $\frac{\mathcal{H}_{11}}{4\sigma}$ es ahora $\text{Spec}(\frac{\mathcal{H}_{11}}{4\sigma}) = \{-12\} \cup \{-5\} \cup \{0\} \cup \{\text{continuo}\}$.

- $\sigma = -2$:

Como ya se ha comentado, los valores negativos de la constante σ nos reducen a la que hemos denominado Fase A, con únicamente dos puntos de vacío. La variedad de kinks se reduce entonces a la solución TK1. Para el valor particular $\sigma = -2$, tenemos además que el modelo BNRT es $\mathcal{N} = 2$ presupersimétrico. Siguiendo las directrices marcadas en la sección precedente, queda identificada así una familia uniparamétrica de superpotenciales. Cabe destacar entre éstos la expresión $W_2 = 4\sqrt{2}\phi_2(\phi_1^2 - \frac{1}{3}\phi_2^2 - \frac{1}{4})$.

Finalmente, podemos resumir los resultados obtenidos resaltando los siguientes puntos: 1) Se ha calculado una familia biparamétrica de soluciones kinks a partir de las ecuaciones de primer orden asociadas al superpotencial (5.23). 2) Mediante el método de las órbitas prueba hemos determinado otra solución de las ecuaciones de segundo orden del modelo, no inmersa en las ecuaciones de primer orden mencionadas anteriormente. Dicha solución kink pertenece a una nueva familia, en el mismo sentido que acaecía en los modelos de Liouville, en la que identificábamos dos familias biparamétricas de soluciones distintas. En este caso, dicha familia de soluciones de las ecuaciones del modelo está constituida por soluciones de tipo kink sólo para determinados valores de la constante σ , que quedan determinados por la expresión (5.27). 3) Como consecuencia de lo anterior, es evidente que existe otro superpotencial, además de (5.23), que ha de generar nuevas ecuaciones de primer orden que incorporen estas nuevas soluciones. El cálculo correspondiente se ha hecho explícitamente para los valores $\sigma = 2$ y $\sigma = \frac{1}{2}$, para los que el Modelo BNRT se reduce a modelos ya estudiados a lo largo de la memoria.

Capítulo 6

Corrección cuántica a la masa de Kinks

6.1 Introducción

En los primeros capítulos de esta memoria hemos ofrecido una amplia pletora de soluciones estáticas clásicas con un carácter topológico de distinta naturaleza asociadas a sistemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, las cuales caracterizan el comportamiento de sistemas físicos en el marco de la teoría de campos relativista. Estas soluciones fueron denominadas *kinks*. Las propiedades peculiares de tales soluciones; una localización definida con la presencia de una masa en reposo M y la invariancia de Lorentz, que permite dotarlas de movimiento bajo el requisito $E = \sqrt{P^2 + M^2}$, aleccionan la interpretación de éstas como partículas extensas en el ámbito clásico. Es de resaltar que la estabilidad de dichas estructuras venía asegurada por fuertes argumentos topológicos. Sobre esta base es natural preguntarse si el esquema descrito continua preservándose en el marco cuántico y si las partículas asociadas a las soluciones de tipo kink salvaguardan su entidad. La respuesta es afirmativa. Aún así, la teoría cuántica modificará las magnitudes características de éstas, como es el caso de la masa M del kink clásico. El cálculo de tal magnitud a primer orden (one-loop) en la teoría cuántica motiva el presente capítulo. Diferentes técnicas han sido desarrolladas respecto del tópico *cuantización de soluciones kinks* basadas en métodos funcionales, cuantización canónica, métodos sobre operadores, etc. plasmados en los trabajos originales [33, 64, 41, 28, 113] y compendiados en [114, 39, 27]. Todos ellos precisan de un proceso de regularización y posterior renormalización para encontrar la adecuada respuesta finita. Los trabajos más importantes al respecto son debidos a Dashen, Hasslacher y Neveu [41], en los que se obtiene la corrección cuántica de la masa a primer orden asociada al kink del modelo unidimensional ϕ^4 , la cual es asumida como correcta en nuestros días.

La base de tal cálculo precisa de la resolución del espectro del hessiano asociado a la solución kink. La suma de todos los autovalores hallados tras el proceso de regularización y renormalización proporciona el resultado demandado. Este proceso conlleva cierta ambigüedad, tal y como han explicado exhaustivamente Rebhan y van Nieuwenhuizen [120, 105]. Se demuestra que el proceso de regularización debe realizarse contraponiendo modo a modo entre los espectros de los hessianos asociados al kink y al vacío.

En general, los estudios sobre la corrección ΔM a primer orden en la masa de soluciones topológicas introducidos en la literatura son referidos a modelos de mundo interno unidimensional. La aproximación de fase estacionaria sobre la integral funcional de la acción proporciona una expresión para ΔM que depende de los autovalores del operador hessiano. La resolución de tal hessiano es posible en unos pocos casos favorables, tal son el modelo ϕ^4 y el modelo de Seno-Gordon, permitiendo el cálculo exacto de la corrección cuántica en estudio. Debe tenerse en cuenta que cuando son considerados modelos con mundo interno bidimensional, tal como los presentados a lo largo de esta memoria, resulta ya difícil la obtención de las soluciones, aún más la resolución del espectro del operador diferencial matricial asociado al hessiano, cuando sino debieramos decir imposible hoy por hoy. La única posibilidad de estimar la corrección cuántica en tales modelos es desarrollar técnicas que permitan el cálculo aproximado de tal magnitud aprovechando los desarrollos asintóticos de la traza del operador $e^{-\beta\mathcal{H}}$, de carácter más convergente que la traza del propio hessiano. La transformación de Mellin y una regularización en base a las funciones zeta generalizadas completan tal empeño.

La descripción del contenido de las próximas secciones es descrito en las siguientes líneas. Para abordar el propósito convenido mostraremos la aproximación de fase estacionaria que nos permite encontrar la expresión de la corrección cuántica a primer orden de la masa de una solución estática. Esta expresión será completada bajo los procesos de regularización y renormalización, haciendo énfasis en la utilización de una regularización que contraponga modo a modo del espectro de los hessianos implicados en dichas expresiones. En la sección 6.3 será introducida la función zeta como técnica de regularización. Ya en la sección 6.4 y 6.5 serán elaborados los desarrollos asintóticos mediante el estudio de la ecuación del calor para modelos con espacio interno unidimensional, lo cual nos permitirá obtener una estimación aproximada de la corrección cuántica para aquellos modelos que no permitan la resolución de los hessianos. En la sección 6.6 contrastaremos los resultados de cada una de las técnicas descritas, tomando como paradigmas el modelo de Seno-Gordon y el modelo ϕ^4 , lo que nos permitirá verificar la bondad de las aproximaciones consideradas. En las secciones sucesivas, se glosa la generalización a sistemas físicos con dos grados de libertad, que es el objetivo inicialmente propuesto. Empezaremos

seguidamente el estudio de la corrección cuántica a los kinks estables hallados en los modelos MSTB y BNRT ilustrados en capítulos precedentes.

6.2 Corrección cuántica a la masa del kink

El tratamiento perturbativo de la integral de Feynman, bajo la aproximación de fase estacionaria, permitirá encontrar las expresiones para la estimación de la corrección cuántica a primer orden a la masa de los kinks, hasta hallar aquella que resulte más satisfactoria en su aplicación sobre los modelos bidimensionales.

6.2.1 Aproximación de fase estacionaria

Los sucesivos párrafos no pretenden ser más que una exposición de los resultados conocidos acerca de la aproximación de fase estacionaria de la integral funcional, lo cual nos permitirá establecer la notación y convenios a utilizar posteriormente [114]. La usual noción de integral de camino referida a una teoría de campos corresponde a la expresión

$$G_H(T) \equiv \text{Tr} e^{-\frac{iHT}{\hbar}} = \int \mathcal{D}[\phi(x,t)] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\phi(x,t)] \right\} \quad (6.1)$$

donde la integral es considerada sobre todas las posibles configuraciones sometidas a las condiciones de contorno impuestas por el sector topológico que es estudiado. La expresión (6.1) proporciona una relación entre el problema espectral de la energía y la integral funcional escrita en el tercer miembro. La primera de las igualdades en (6.1) es

$$G_H(T) = \sum_{\{n_r\}} \exp \left[-\frac{iE_{n_r}T}{\hbar} \right]$$

que puede entenderse como la generalización infinito dimensional del problema mecánico (usual en una teoría de campos). Los $\{n_r\}$ corresponden a una secuencia infinita numerable de enteros $\{n_0, n_1, n_2, \dots\}$. Por otra parte, el último miembro de (6.1) puede ser estimado para pequeñas perturbaciones de una solución clásica de naturaleza estática $\phi_{\text{cl}}(x)$, la cual extremiza la acción $S[\phi]$. Un desarrollo a primer orden en las configuraciones $\phi(x,t)$ respecto de $\phi_{\text{cl}}(x)$ permite escribir la acción como

$$S[\phi(x,t)] = -\mathcal{E}[\phi_{\text{cl}}]T + \frac{1}{2} \int dx \int dt \Psi^j(x,t) \tilde{\mathcal{H}}_{jk}(x,t) \Psi^k(x,t) + o(\Psi^3)$$

siendo $\Psi^j(x,t) = \phi^j(x,t) - \phi_{\text{cl}}^j(x)$ y donde el operador hessiano $\tilde{\mathcal{H}}_{jk}(x,t)$ es indicado por (1.8). Las condiciones de contorno para las variaciones de la solución estática $\Psi(x,t) = (\Psi^1(x,t), \dots, \Psi^n(x,t))$ son dadas, sea cual fuere el sector topológico, como

$$\Psi(\pm\infty, t) = 0$$

Es, ahora, cuando puede ser introducida la aproximación de fase estacionaria sobre la integral funcional (6.1). Ésta consiste en desprestigiar los términos de orden cúbico y superiores sobre la variable $\Psi(x, t)$. Ello permite concluir que

$$G_H(T) \approx e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}[\phi_{\text{cl}}]T} \int \mathcal{D}[\Psi(x, t)] \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int dx \int dt \Psi^j(x, t) \tilde{\mathcal{H}}_{jk}(x, t) \Psi^k(x, t) \right\}$$

lo que origina

$$G_H(T) \approx B(T) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}[\phi_{\text{cl}}]T} \left\{ \text{Det} [-\tilde{\mathcal{H}}(x, t)] \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (6.2)$$

donde hemos desarrollado una integral funcional gaussiana en las operaciones intermedias. La magnitud $B(T)$ es un factor de medida que debe ser ajustado para obtener la adecuada normalización de los estados. Podemos desglosar aún más el cálculo precedente advirtiendo la dependencia aislada respecto del parámetro temporal del operador hessiano $\tilde{\mathcal{H}}_{jk}(x, t)$. Esta circunstancia permite diagonalizar $\tilde{\mathcal{H}}_{jk}(x, t)$ separadamente en los parámetros temporal y espacial, considerando la factorización de las funciones propias $\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$. Así, la dependencia espacial del problema espectral viene reflejada por

$$\mathcal{H}_{jk}(x, t) \psi_n^k(x) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta^{jk} + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^j \partial \phi^k}[\phi_{\text{cl}}] \right) \psi_n^k(x) = \omega_n^2 \psi_n^j(x) \quad (6.3)$$

que se equipara con el tratamiento de la estabilidad clásica abordado en (1.9). Apoyados sobre (6.3) se tiene

$$\text{Det} [-\tilde{\mathcal{H}}(x, t)] = \prod_{n=0}^{\infty} \text{Det} \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega_n^2 \right)$$

que corresponde a un producto infinito de determinantes de tipo oscilador armónico. El problema ampliamente analizado en la literatura [27, 114] permite escribir el resultado

$$G_H(T) = \sum_{\{n_r\}} \exp \left\{ -\frac{iT}{\hbar} \left[\mathcal{E}[\phi_{\text{cl}}] + \sum_r \hbar \omega_r \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (6.4)$$

donde la suma sobre magnitudes $\{n_r\}$ es considerada sobre todas las posibilidades del conjunto de enteros $\{n_0, n_1, n_2, \dots\}$. Los niveles de energía generados sobre la solución clásica $\phi = \phi_{\text{cl}}$ afloran (bajo la aproximación de fase estacionaria) como:

$$E_{\{n_r\}} \approx \mathcal{E}[\phi_{\text{cl}}] + \sum_r \hbar \omega_r \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \quad (6.5)$$

La usual interpretación de las magnitudes manipuladas en la teoría de campos cuánticos nos permite afirmar que la masa cuántica atribuida a la partícula asociada a la solución clásica $\phi = \phi_{\text{cl}}$ es caracterizada por la anulación del conjunto de

índices $\{n_r\}$. Valores no nulos de estos índices indican la presencia de mesones. Por ello, podemos escribir:

$$M = \mathcal{E}[\phi_{\text{cl}}] + \frac{1}{2}\hbar \sum_r \omega_r = \mathcal{E}[\phi_{\text{cl}}] + \frac{1}{2}\hbar \text{Tr} \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}$$

La contribución $\Delta M = \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}$ a la masa del kink, interpretada como la suma de las energías fundamentales de infinitos osciladores armónicos, es obviamente infinita. Esta magnitud puede ser regularizada mediante la adición a la densidad lagrangiana de la constante cosmológica Λ [27], de modo que la corrección cuántica es determinada como:

$$\Delta M = \frac{\hbar}{2} \left(\text{Tr} \mathcal{H}^{\frac{1}{2}} + \Lambda \right) \quad (6.6)$$

6.2.2 Regularización y renormalización de ΔM

La expresión (6.6) corresponde al resultado perseguido en esta sección. Proporciona la corrección cuántica, bajo la aproximación de fase estacionaria, a la masa clásica de una solución estática en la teoría de campos. Aun cuando formalmente el problema parece resuelto, (6.6) conlleva ciertos puntos conflictivos. El primero de ellos se hace evidente en el instante en el que el problema espectral (6.3) es considerado. Sólo circunstancias muy favorables permiten la obtención de los valores propios del operador hessiano \mathcal{H} . Si como es nuestro propósito intentamos obtener una estimación de las masas cuánticas de los kinks encontrados en los modelos precedentes, hemos de desarrollar métodos para calcular aun cuando sea aproximadamente el valor de $\text{Tr} \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}$. Otro punto insatisfactorio de (6.6) proviene del hecho de que una representación matricial de \mathcal{H} será infinito dimensional de modo que la traza implica una suma infinita de valores propios ω_r (que suponemos no negativas al asociarse a soluciones clásicas estables) por lo que hará proliferar infinitos como resultado. Como es usual en este tipo de teorías, en pos de encontrar respuestas finitas, ensayaremos técnicas de regularización y renormalización. Específicamente, el primero de los procesos aparece habida cuenta de que el propio vacío de la teoría adquiere una energía infinita y es usualmente elegido como origen para medir el resto de energías. Con ello, la corrección cuántica a la masa del kink quedará dada por

$$\Delta M = \frac{\hbar}{2} \left[\text{Tr} \mathcal{H}_{\text{K}}^{\frac{1}{2}} - \text{Tr} \mathcal{H}_v^{\frac{1}{2}} + \Lambda_{\text{K}} - \Lambda_v \right] \quad (6.7)$$

donde la energía clásica del vacío es considerada nula y Λ_v y Λ_{K} son, respectivamente, las constantes cosmológicas renormalizadas asociadas al vacío y al kink. Hemos llamado $\mathcal{H}_{\text{K}} = \mathcal{H}[\phi_{\text{K}}]$ y $\mathcal{H}_v = \mathcal{H}[\phi_v]$, los hessianos valorados respectivamente sobre la solución kink y el vacío, que aparecen como operadores diferenciales de tipo Schrödinger

$$\mathcal{H}_v = -\frac{d^2}{dx^2} + V^0 \quad \mathcal{H}_{\text{K}} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

siendo V^0 constante y $V(x)$ una función dependiente del espacio, obtenidas respectivamente calculando la matriz de derivadas segundas del término potencial $U(\phi)$ sopesada sobre el vacío y el kink.

Aún tras el proceso descrito, la respuesta puede continuar siendo no finita, y la razón en ello debe ser atribuida a que no ha sido introducida en nuestro tratamiento la prescripción de orden normal sobre los operadores, lo cual origina la presencia de una divergencia ultravioleta en (6.7). El proceso de renormalización de la masa, mediante la suma de los correspondientes contratérminos \mathcal{E}_{ct} , solventa este problema proporcionando la adecuada respuesta finita. El teorema de Wick impone que

$$:\mathcal{H}:=\mathcal{H}+\int dx:\left(1-\exp\left[-\hbar\sum_{j=1}^N\delta m_{jj}^2\frac{\delta^2}{\delta\phi_j\delta\phi_j}\right]\right)U(\phi):+K$$

lo que a primer orden en el desarrollo de la exponencial se transforma en

$$:\mathcal{H}:=\mathcal{H}+\int dx\hbar\sum_{j=1}^N\delta m_{jj}^2:\frac{\delta^2U(\phi)}{\delta\phi_j\delta\phi_j}:+o(\hbar^2)+K$$

donde $\delta m_{jj}^2=\int\frac{dk}{4\pi}\frac{\delta_{jj}}{\sqrt{k^2+V^0}}$. En la teoría cuántica los kinks son interpretados como estados coherentes, de modo que el valor esperado de un operador ordenado normalmente puede ser obtenido mediante sus valores clásicos, $\langle:F(p,q):\rangle=F(\langle p\rangle,\langle q\rangle)$ [39]. Por ello, los contratérminos quedan dados como

$$\mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{C}}]=\langle\phi_{\text{C}}|:\mathcal{H}:-\mathcal{H}-K|\phi_{\text{C}}\rangle=\hbar\int dx\sum_{j=1}^N\frac{\delta^2U}{\delta\phi^j\delta\phi^j}[\phi_{\text{C}}]$$

Completamos, por ello, el resultado (6.7) en la forma:

$$\Delta M=\frac{\hbar}{2}\left[\text{Tr}\mathcal{H}_{\text{K}}^{\frac{1}{2}}-\text{Tr}\mathcal{H}_v^{\frac{1}{2}}+\Lambda_{\text{K}}-\Lambda_v\right]+\mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{K}}]-\mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_v]\quad(6.8)$$

6.2.3 Regularizaciones: corte de energías y corte de modos

Aunque hemos avanzado bastante, la respuesta (6.8) introduce aún cierta ambigüedad asociada a la manera en que es computada la diferencia de las constantes cosmológicas $\Delta R=\Lambda_{\text{K}}-\Lambda_v$. Si consideramos el sistema confinado en un intervalo de longitud grande L , los hessianos asociados a la solución kink y del vacío presentan sólo espectro discreto. Podremos denotar por ω_r^{K} y ω_r^v , respectivamente, sus autovalores donde supondremos que r es un índice sobre los naturales. La regularización atribuida a las constantes cosmológicas puede ser obtenida de dos formas diferentes; la primera de ellas proporciona la corrección cuántica basada en un procedimiento

de corte en energías, $\Delta M^{\text{C.E.}}$, mientras que la segunda queda basada en el corte en el número de modos $\Delta M^{\text{C.M.}}$. Podríamos escribir:

$$\begin{aligned}\Delta M^{\text{C.E.}} &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_{\omega=\omega_0}^{\Lambda} \left[\frac{\hbar}{2} \omega_r^{\text{K}} - \frac{\hbar}{2} \omega_r^{\text{v}} \right] + \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{K}}] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{v}}] \\ \Delta M^{\text{C.M.}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^N \left[\frac{\hbar}{2} \omega_r^{\text{K}} - \frac{\hbar}{2} \omega_r^{\text{v}} \right] + \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{K}}] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{v}}]\end{aligned}$$

La magnitud $\Delta M^{\text{C.E.}}$ viene caracterizada sobre (6.8) por la condición $\Lambda_{\text{K}} - \Lambda_{\text{v}} = 0$ y es la que resulta más sencilla de calcular. Es conocido, sin embargo, que el procedimiento de regularización acertado es aquel basado en el corte en el número de modos de energía. Esta certidumbre esta basada en la comparación de los resultados obtenidos con distintas regularizaciones con el resultado exacto logrado en el caso del modelo de Seno-Gordon. Este inconveniente puede ser eludido explotando la relación existente entre ambas regularizaciones, advertida en los trabajos [120, 105] para los modelos de Seno-Gordon y ϕ^4 , la cual introduce términos de superficie en los desfases. Generalizando tal expresión a cualquier modelo, siguiendo escrupulosamente los pasos plasmados en [120, 105] para los casos particulares mencionados, podemos introducir las siguientes consideraciones:

Supongamos que \mathcal{H}_{K} y \mathcal{H}_{v} son, respectivamente, los hessianos asociados a una solución de tipo topológico y al vacío presentes en un modelo determinado, y que el espectro engendrado por el primero de ellos es caracterizado por un discreto de n valores propios junto con un continuo que aflora sobre la masa del vacío, $\text{Spec } \mathcal{H}_{\text{K}} = \{\omega_i^2\}_{i=0, \dots, n-1} \cup \{q^2 + V^0\}_{q \in \mathbb{R}^+}$, mientras que el segundo de los hessianos presenta $\text{Spec } \mathcal{H}_{\text{v}} = \{V^0\}_{\frac{1}{2}} \cup \{k^2 + V^0\}_{k \in \mathbb{R}^+}$. Si el sistema físico es confinado en una caja de longitud L , las densidades espectrales de cada uno de los operadores anteriores son $\rho_{\mathcal{H}_{\text{K}}}(q) = \frac{L}{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial \delta(q)}{\partial q}$ y $\rho_{\mathcal{H}_{\text{v}}}(k) = \frac{L}{\pi}$, donde $\delta(q)$ representa el desfase (ver apéndice B). Hay que advertir que los estados asociados a un valor del momento nulo, *estados semiligados*, contribuyen la mitad que un estado ligado a la corrección cuántica. En el problema libre aparece un estado semiligado con autovalor $\omega^2 = V^0$, que también es admitido por aquellos hessianos con potencial $V(x)$ sin reflexión.

Convengamos en denotar en los próximos cálculos la totalidad de los contratérminos mediante \mathcal{E}_{ct} por sencillez en la escritura, esto es, $\mathcal{E}_{\text{ct}} = \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{K}}] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{v}}]$. Si entendemos por $\Delta M^{\text{C.E.}}$ la corrección cuántica obtenida tras el proceso de regularización basada en el corte de energías podemos escribir

$$\begin{aligned}\Delta M^{\text{C.E.}} &= \frac{\hbar}{2} \left(\text{Tr } \mathcal{H}_{\text{K}}^{\frac{1}{2}} - \text{Tr } \mathcal{H}_{\text{v}}^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\text{C.E.}} + \mathcal{E}_{\text{ct}} = \frac{\hbar}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i + \\ &+ \frac{\hbar}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda} dq \rho_{\mathcal{H}_{\text{K}}}(q) \sqrt{q^2 + V^0} - \frac{\hbar}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda} dk \rho_{\mathcal{H}_{\text{v}}}(k) \sqrt{k^2 + V^0} - \frac{\hbar \sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}} =\end{aligned}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i + \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty dq \frac{\partial \delta(q)}{\partial q} \sqrt{q^2 + V^0} - \frac{\hbar \sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}}$$

donde el sumatorio recorre los estados del discreto con peso 1 para los estados ligados y $\frac{1}{2}$ para los semiligados. El sumando $-\frac{\hbar \sqrt{V^0}}{4}$ es debido al estado semiligado del problema libre.

Por $\Delta M^{\text{C.M.}}$ denotamos la corrección cuántica derivada de la regularización basada en el corte de los modos asociados a cada hessiano. Si consideramos en el hessiano del vacío $2N + 1$ estados junto con el estado semiligado, y elegimos en el hessiano asociado al kink este mismo número, distribuidos en n estados del discreto y completados con estados del continuo, podremos introducir

$$\begin{aligned} \Delta M^{\text{C.M.}} &= \frac{\hbar}{2} \left(\text{Tr } \mathcal{H}_K^{\frac{1}{2}} - \text{Tr } \mathcal{H}_v^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\text{C.M.}} + \mathcal{E}_{\text{ct}} = \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i + \frac{\hbar}{2} \sum_{\text{completar}} \sqrt{q_i^2 + V^0} - \frac{\hbar}{2} \sum_{i=-N}^N \sqrt{k_i^2 + V^0} - \frac{\hbar \sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}} \end{aligned}$$

donde el segundo sumatorio recorre estados hasta que su peso total sumado al discreto sea igual al peso total de estados del hessiano libre, esto es, $2N + \frac{3}{2}$. Este peso dependerá del problema, así si el espectro discreto de \mathcal{H}_K carece de estados semiligados, el sumatorio debe incluir estados hasta que su peso sea $2N + \frac{3}{2} - n$ (potenciales con reflexión); mientras que si presenta uno, el peso a considerar es $2N - n + 2$ (potenciales sin reflexión). Simbólicamente consideraremos que se precisan $2N - [n] + 1$ estados para equiparar el número de modos de cada espectro, donde $[n]$ es la magnitud a ajustar para cada caso: $n - \frac{1}{2}$ en el primer caso y $n - 1$ en el segundo. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta M^{\text{C.M.}} &= \frac{\hbar}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i + \hbar \sum_{i=1}^{N - \frac{[n]}{2}} \sqrt{q_i^2 + V^0} - \hbar \sum_{i=1}^N \sqrt{k_i^2 + V^0} - \frac{\hbar \sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}} = \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i + \hbar \sum_{i=\frac{[n]}{2}+1}^N \sqrt{q_{i-\frac{[n]}{2}}^2 + V^0} - \hbar \sum_{i=1}^N \sqrt{k_i^2 + V^0} - \frac{\hbar \sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\hbar}{2} \omega_i - \hbar \sum_{i=1}^{\frac{[n]}{2}} \sqrt{q_{i-\frac{[n]}{2}}^2 + V^0} + \hbar \sum_{i=1}^N \left(\sqrt{q_{i-\frac{[n]}{2}}^2 + V^0} - \sqrt{k_i^2 + V^0} \right) - \frac{\hbar \sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}} \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno aplicadas sobre los modos tratados se presentan como

$$k_i L = q_{i-\frac{[n]}{2}} L + \delta(q_{i-\frac{[n]}{2}}) + 2\pi \frac{[n]}{2} = 2\pi i$$

Tales condiciones, aplicadas sobre la forma de la corrección presentada arriba, pro-

porcionan la expresión

$$\Delta M^{\text{C.M.}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\hbar}{2} \omega_i - \hbar \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sqrt{q_{i-\frac{[n]}{2}}^2 + V^0} - \frac{\hbar}{L} \sum_{i=1}^N \frac{q_{i-\frac{[n]}{2}} \tilde{\delta}(q_{i-\frac{[n]}{2}})}{\sqrt{q_{i-\frac{[n]}{2}}^2 + V^0}} + o\left(\frac{1}{L^2}\right) - \frac{\hbar\sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}}$$

donde $\tilde{\delta}(q_{i-\frac{[n]}{2}}) = \delta(q_{i-\frac{[n]}{2}}) + 2\pi\frac{[n]}{2}$. Procedemos, ahora, a considerar el paso límite al continuo en el que la caja adquiere una longitud infinita. El espectro discreto sobre el valor V^0 se convierte en continuo. Es por ello que los pocos estados aglutinados en el segundo término de la expresión precedente colapsan en la base en que aflora el continuo espectral. Por otra parte, dada la tendencia de la magnitud L , se tendrá:

$$\begin{aligned} \Delta M^{\text{C.M.}} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\hbar}{2} \omega_i - \frac{\hbar}{2} [n] \sqrt{V^0} - \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty \frac{q dq}{\sqrt{q^2 + V^0}} \tilde{\delta}(q) - \frac{\hbar\sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\hbar}{2} \omega_i - \frac{\hbar}{2} [n] \sqrt{V^0} - \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty dq \frac{\partial \sqrt{q^2 + V^0}}{\partial q} \tilde{\delta}(q) - \frac{\hbar\sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\hbar}{2} \omega_i - \frac{\hbar}{2} [n] \sqrt{V^0} - \frac{\hbar}{2\pi} \sqrt{q^2 + V^0} \tilde{\delta}(q) \Big|_{q=0}^{q=\infty} + \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + V^0} \frac{\partial \tilde{\delta}(q)}{\partial q} - \\ &\quad - \frac{\hbar\sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\hbar\omega_i}{2} - \frac{\hbar\sqrt{V^0}}{2} [n] - \frac{\hbar}{2\pi} \lim_{q \rightarrow \infty} \sqrt{q^2 + V^0} \tilde{\delta}(q) + \frac{\hbar\sqrt{V^0}}{2\pi} \tilde{\delta}(0^+) + \\ &\quad + \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + V^0} \frac{\partial \tilde{\delta}(q)}{\partial q} - \frac{\hbar\sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}} \end{aligned}$$

La arbitrariedad en la elección de los desfases es fijada de modo que para momentos q altos el desfase tienda a cero, $\tilde{\delta}(q \rightarrow \infty) = 0$. El teorema de Levinson aplicado en una dimensión nos dice que $\tilde{\delta}(0^+) = \pi n_B - \frac{\pi}{2}$, donde n_B es una magnitud aditiva en la que cada estado ligado contribuye con la unidad, mientras que los *estados semiligados*, lo hacen con $\frac{1}{2}$. Este resultado, trasladado sobre la expresión precedente, nos permite mostrar la fórmula:

$$\begin{aligned} \Delta M^{\text{C.M.}} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \hbar\omega_i + \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty dq \sqrt{q^2 + V^0} \frac{\partial \tilde{\delta}(q)}{\partial q} - \frac{\hbar\sqrt{V^0}}{4} + \mathcal{E}_{\text{ct}} - \\ &\quad - \frac{\hbar}{2\pi} \lim_{q \rightarrow \infty} \sqrt{q^2 + V^0} \tilde{\delta}(q) + \frac{1}{2} \hbar\sqrt{V^0} (n_B - \frac{1}{2} - [n]) \end{aligned}$$

El último sumando es cero, de modo que

$$\Delta R = \Delta M^{\text{C.M.}} - \Delta M^{\text{C.E.}} = -\frac{\hbar}{2\pi} \lim_{q \rightarrow \infty} \sqrt{q^2 + V^0} \tilde{\delta}(q) \quad (6.9)$$

es la relación existente entre las dos regularizaciones a la corrección cuántica de la masa del kink descritas anteriormente.

El comportamiento del desfase para momentos altos puede ser obtenido por la aproximación de Born [54, 59]

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(k) &\approx -i \ln \left(1 + \frac{1}{2ik} \int_{\Omega} dx [V(x) - V^0] \right) \approx -\frac{1}{2k} \int_{\Omega} dx (V(x) - V^0) = \\ &= -\frac{1}{2k} \langle V(x) - V^0 \rangle\end{aligned}$$

El resultado anterior puede ser generalizado a modelos con espacio interno bidimensional $N = 2$, véase apéndice B. Todos estos aspectos permiten simplificar la expresión de ΔR :

$$\Delta R = \frac{\hbar}{4\pi} \langle V(x) - V^0 \rangle \quad (6.10)$$

Por lo visto, entonces, a lo largo de este capítulo, la expresión de la corrección cuántica a primer orden puede ser establecida como

$$\Delta M = \frac{\hbar}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i + \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^{\infty} dq \frac{\partial \delta(q)}{\partial q} \sqrt{q^2 + V^0} + \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{K}}] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_v] - \frac{\hbar \sqrt{V^0}}{4} + \Delta R \quad (6.11)$$

a la que nos referiremos como cálculo basado en las densidades espectrales, siendo la usual expresión utilizada en la literatura [66, 120].

Para facilitar el estudio de las expresiones halladas, el cálculo concreto de ΔM para modelos específicos quedará basado en magnitudes adimensionales, a partir de las cuales puede recuperarse la respuesta final. Los hessianos \mathcal{H} asociados a las soluciones de vacío y kink con dimensiones de inversa de longitud al cuadrado

$$\mathcal{H}_v = -\frac{d^2}{dx^2} + V^0 \quad \mathcal{H}_{\text{K}} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

pueden convertirse en hessianos adimensionales $\bar{\mathcal{H}}$,

$$\bar{\mathcal{H}}_v = -\frac{d^2}{d\bar{x}^2} + \mathcal{V}^0 \quad \bar{\mathcal{H}}_{\text{K}} = -\frac{d^2}{d\bar{x}^2} + \mathcal{V}(\bar{x})$$

bajo el cambio $\bar{x} = C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}} x$ donde $C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}$ es una constante con dimensiones de inversa de longitud, determinada por las peculiaridades del modelo. Si por ω_n^2 y $\bar{\omega}_n^2$ denotamos respectivamente los autovalores asociados al hessiano con y sin dimensiones, se verifica la relación $\omega = C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}} \bar{\omega}$. En la base de estas magnitudes adimensionales, la fórmula de la corrección cuántica (6.11) queda modificada en el modo,

$$\Delta M = \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i + \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{2\pi} \int_0^{\infty} dq \frac{\partial \bar{\delta}(q)}{\partial q} \sqrt{q^2 + \mathcal{V}^0} + \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{K}}] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_v] + C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}} \Delta \bar{R} \quad (6.12)$$

donde la diferencia entre las constantes cosmológicas adimensionales se escribe como $\Delta \bar{R} = \frac{\hbar}{4\pi} \langle \mathcal{V}(\bar{x}) - \mathcal{V}^0 \rangle$.

6.3 La función zeta $\zeta(s)$: Trazas de operadores

En la sección precedente fue establecido que las magnitudes esenciales para determinar la corrección cuántica a la masa del kink en la fase estacionaria corresponden a las trazas de los operadores hessianos. En la presente sección introduciremos importantes relaciones referidas a la traza de un operador cualquiera $A \in \mathcal{A}[\bar{L}^2(\mathbb{R})]$, que elegimos por conveniencia caracterizado por un espectro $\text{Spec } A = \{\omega_n^2 \in \mathbb{R} / A\psi_n = \omega_n^2\psi_n\}$ discreto y positivo. La función zeta generalizada para el operador A queda definida en la forma

$$\zeta_A(s) = \text{Tr } A^{-s} = \sum_n \frac{1}{(\omega_n^2)^s} \quad , \quad s \in \mathbb{C} \quad (6.13)$$

la cual presenta una estructura meroforma y es bien definida para $\text{Re } s \gg 0$ [62]. Debe advertirse, aunque no se explicita en la notación para evitar recargar las expresiones, que para que (6.13) no incurra en incoherencias dimensionales hemos asumido que los operadores están descritos por variables adimensionales, tal y como ha sido el hábito considerado en esta memoria. Es sencillo recobrar la dimensionalidad de las expresiones multiplicando por la pertinente constante $C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}$.

Resulta conocido que los contratérminos $\mathcal{E}_{\text{ct}} = \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{K}}] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_v]$ dependen de la magnitud $\delta m^2 = \hbar \int \frac{dk}{4\pi} (k^2 + V^0)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{4\pi} \zeta_{\mathcal{H}_v}(\frac{1}{2})$. Mediante la continuación de dicha expresión sobre el plano complejo, definiríamos $\delta m^2(s) = \frac{\hbar}{4\pi} \zeta_{\mathcal{H}_v}(s)$, lo que permite definir la función de la variable compleja que engloba la totalidad de los contratérminos y que escribimos como $\mathcal{E}_{\text{ct}}[\zeta_{\mathcal{H}_v}(s)]$. Es claro que $\mathcal{E}_{\text{ct}} = \mathcal{E}_{\text{ct}}[\zeta_{\mathcal{H}_v}(\frac{1}{2})]$. La corrección cuántica puede ser determinada mediante la regularización ofrecida por la función zeta como,

$$\Delta M = \frac{\hbar}{2} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} [\zeta_{\mathcal{H}_{\text{K}}}(s) - \zeta_{\mathcal{H}_v}(s)] + \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\text{ct}}[\zeta_{\mathcal{H}_v}(s)] \quad (6.14)$$

Debe ser advertido que la respuesta proporcionada por (6.14) se corresponde con la corrección cuántica con una regularización basada en el corte de energía-momento. Como ya fue observado la regularización que reproduce la respuesta correcta debe ser basada en el corte en los modos de energía. Por ello, se completa la fórmula (6.14) en el modo:

$$\Delta M = \frac{\hbar}{2} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} [\zeta_{\mathcal{H}_{\text{K}}}(s) - \zeta_{\mathcal{H}_v}(s)] + \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\text{ct}}[\zeta_{\mathcal{H}_v}(s)] + \Delta R \quad (6.15)$$

donde quedó establecido la expresión seguida por la diferencia de las constantes cosmológicas ΔR mediante (6.9), o de forma específica para modelos con $N = 1$ por (6.10).

El cálculo directo de (6.15) mediante la función zeta generalizada es difícil e inabordable de forma genérica. Sin embargo, puede ser evaluada de forma indirecta a partir de la estimación de la función de calor

$$h_A(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta A} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \omega_n^2} \quad (6.16)$$

estudiada profundamente en diversas ramas de la física matemática, habiendo provocado la génesis de diversas técnicas para su evaluación, entre las más exitosas su inteligencia a partir del núcleo integral obtenido como solución de la ecuación del calor, que será introducida en la próxima sección. La relación entre las dos funciones introducidas en esta sección viene facilitada por la transformación de Mellin,

$$\zeta_A(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\beta \beta^{s-1} h_A(\beta) \quad (6.17)$$

o bien, de forma directa sobre las trazas:

$$\text{Tr} A^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\beta \beta^{s-1} \text{Tr} e^{-\beta A} \quad (6.18)$$

Puede ser clarificador introducir un ejemplo sencillo que ilustre los conceptos que acabamos de definir. Para ello consideraremos un sistema físico confinado en una caja de longitud L , que se considera muy grande. Calcularemos la función zeta asociada al operador libre $\mathcal{H}_v = -\frac{d^2}{dx^2} + V^0$, cuyo espectro es claramente $\omega^2 = \{q^2 + V^0\}_{q \in \mathbb{R}}$, con una densidad espectral $\rho_{\mathcal{H}_v} = \frac{L}{2\pi}$. Es directo el cálculo de la función de calor,

$$h_{\mathcal{H}_v}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \rho_{\mathcal{H}_v}(q) e^{-\beta(q^2 + V^0)} = \frac{L}{2\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta V^0}$$

lo que, tras la transformación de Mellin (6.17), proporciona la función zeta generalizada asociada al operador libre

$$\zeta_{\mathcal{H}_v}(s) = \frac{L}{2\sqrt{\pi}} (V^0)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma[s - \frac{1}{2}]}{\Gamma[s]} \quad (6.19)$$

La evaluación de (6.15) mediante la relación de las dos funciones (6.13) y (6.16) introduce un punto delicado cuando existen modos ceros asociados a los operadores. Es sabido que estos modos traslacionales no contribuyen a la corrección cuántica a primer orden [114]; su presencia es sentida a ordenes superiores. La función zeta para argumentos negativos no es sensible a estos modos, pero si lo es la función $h_A(\beta)$, introduciendo posteriormente una contribución espurea en (6.15). Debe por ello abstraerse la respuesta atribuida al modo cero para encontrar la adecuada corrección. Así, para el caso que nos ocupa, si el hessiano asociado a la solución kink introduce j modos ceros, la función zeta generalizada es calculada por

$$\zeta_{\mathcal{H}_k}^*(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\beta \beta^{s-1} h_{\mathcal{H}_k}^*(\beta)$$

con $h_{\mathcal{H}_K}^*(\beta) = \text{Tr}^* e^{-\beta\mathcal{H}_K} = \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}_K} - j$. La expresión para la corrección cuántica se completaría en la forma

$$\Delta M = \frac{\hbar}{2} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\beta \beta^{s-1} [h_{\mathcal{H}_K}^*(\beta) - h_{\mathcal{H}_v}^*(\beta)] + \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\text{ct}}[\zeta_{\mathcal{H}_v}(s)] + \Delta R \quad (6.20)$$

La fórmula (6.20) mostrada requiere la resolución del problema espectral asociado a los operadores $e^{-\beta\mathcal{H}_K}$ y $e^{-\beta\mathcal{H}_v}$, lo cual sugiere la observación inmediata de que el problema si cabe sigue siendo al menos tan difícil como el planteado en la relación (6.11). La razón de realizar estas derivaciones atienden al hecho de que (6.20) admite un desarrollo asintótico, que permite encontrar una estimación de la corrección cuántica, aún en aquellos casos en que el espectro de los hessianos no puede ser identificado. Este desarrollo es basado en el estudio de la ecuación de calor [62].

6.4 La ecuación del calor: Caso unidimensional

En la sección anterior hemos derivado el estudio de la corrección cuántica sobre el análisis de la traza de operadores en la forma $A = e^{-\beta\mathcal{H}}$. Por otra parte, sabemos que estimar dicha magnitud resolviendo el problema espectral (6.3) es un camino generalmente inabordable. Se hace preciso elaborar un procedimiento que nos permita obtener un valor aproximado de dichas cantidades, el método del heat kernel o más castizamente de la ecuación del calor, bien establecido en el caso de teorías con espacio interno unidimensional $N = 1$ [62, 55]. Parece provechoso presentar el método en este marco y posteriormente generalizarlo al caso de modelos con espacio interno bidimensional $N = 2$, que ocupan la presente memoria.

El problema que se plantea es la obtención aproximada de la traza $\text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}}$, donde \mathcal{H} es un operador cualquiera que actúa sobre cierto espacio de Hilbert. De forma particular, nuestro estudio hace corresponder \mathcal{H} con $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ y el espacio de Hilbert con $\bar{L}^2(\mathbb{R})$. El problema espectral viene representado por la ecuación

$$\mathcal{H} |\xi_k\rangle = \omega_k^2 |\xi_k\rangle$$

donde hemos hecho uso del formalismo de Dirac en mecánica cuántica, mantenida a lo largo de esta sección. Asumiremos la normalización genérica de los estados propios del operador \mathcal{H} ,

$$\langle \xi_k | \xi_{k'} \rangle = \delta(k - k') + s(k) \delta_{kk'}$$

donde en la notación usual para un espectro continuo quedan inmersos, también, los posibles estados del espectro discreto. Esta notación debe ser entendida a lo largo

de todo el sucesivo texto. El operador $e^{-\beta\mathcal{H}}$, cuya traza queremos estimar, admite una representación sobre los estados de posición originando el núcleo integral

$$K_{\mathcal{H}}(x, y; \beta) = \langle x | e^{-\beta\mathcal{H}} | y \rangle \quad (6.21)$$

Puede comprobarse que

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{H}}(x, y; \beta) &= \int dk \int dk' \langle x | \xi_k \rangle \langle \xi_k | e^{-\beta\mathcal{H}} | \xi_{k'} \rangle \langle \xi_{k'} | y \rangle = \\ &= \int dk \int dk' e^{-\beta\omega_k^2} \langle \xi_k | \xi_{k'} \rangle \xi_k(x) \xi_{k'}^*(x) = \\ &= \int dk \xi_k^*(y) \xi_k(x) e^{-\beta\omega_k^2} \end{aligned}$$

lo que permite identificar el núcleo integral (6.21) si el problema espectral es resuelto. La elección de la base de estados posición en el cálculo de la traza $\text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}}$ proporciona la función de calor,

$$h_{\mathcal{H}}(\beta) \equiv \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}} = \int_{\Omega} dx \langle x | e^{-\beta\mathcal{H}} | x \rangle = \int_{\Omega} dx K_{\mathcal{H}}(x, x; \beta)$$

Por ello, el conocimiento del núcleo $K_{\mathcal{H}}(x, y; \beta)$ permite calcular el resultado buscado mediante una simple integración. Dado que el problema espectral es usualmente inabordable, resulta poco práctico en la identificación del núcleo. Debe ser elaborada una vía alternativa. Derivando la definición (6.21) respecto del parámetro β , se consigue la relación

$$\frac{\partial}{\partial\beta} K_{\mathcal{H}}(x, y; \beta) = -\langle x | \mathcal{H} e^{-\beta\mathcal{H}} | y \rangle = -\mathcal{H}^{(x)} \langle x | e^{-\beta\mathcal{H}} | y \rangle = -\mathcal{H}^{(x)} K_{\mathcal{H}}(x, y; \beta)$$

donde $\mathcal{H}^{(x)}$ es la representación espacial del operador \mathcal{H} . Entonces, queda

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] K_{\mathcal{H}}(x, y; \beta) = 0 \quad (6.22)$$

de modo que el núcleo integral verifica la conocida *ecuación del calor*. La expresión (6.21) establece, además, la condición inicial:

$$K_{\mathcal{H}}(x, y; 0) = \delta(x - y) \quad (6.23)$$

La relación (6.22) motiva la denominación núcleo de calor o heat kernel del operador \mathcal{H} para la magnitud (6.21). La determinación del heat kernel resulta sencilla para un operador de la forma $\mathcal{H}_v = -\frac{d^2}{dx^2} + V^0$, habida cuenta de que las autofunciones de \mathcal{H}_v son $\xi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ y sus autovalores $\omega_k^2 = k^2 + V^0$. El resultado final proporciona la expresión

$$K_{\mathcal{H}_v}(x, y; \beta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta V^0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\beta}}$$

En general identificar el núcleo de calor, bien sea apoyados sobre la resolución del problema espectral, bien sea mediante la ecuación del calor (6.22), resulta un problema inabordable de forma exacta. Por ello, debemos acudir a un desarrollo asintótico para $K_{\mathcal{H}}(x, y; \beta)$. Factorizado en la forma,

$$K_{\mathcal{H}}(x, y; \beta) = K_{\mathcal{H}_v}(x, y; \beta) A(x, y; \beta) \quad (6.24)$$

el desarrollo en serie mencionado será ejecutado en torno a $\beta = 0$ y es explicitado sobre la magnitud $A(x, y; \beta)$, esto es,

$$A(x, y; \beta) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, y) \beta^n \quad (6.25)$$

Las condiciones iniciales (6.23) se traducen en los requisitos

$$A(x, y; 0) = 1 \quad \text{o bien} \quad a_0(x, y) = 1$$

Por otra parte, la estimación de la función de calor queda dada como

$$h_{\mathcal{H}}(\beta) \approx \frac{e^{-\beta V^0}}{2\sqrt{\pi\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n(\mathcal{H}) \beta^n \quad \text{con} \quad \tilde{a}_n(\mathcal{H}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx a_n(x, x) \quad (6.26)$$

La incorporación de (6.24) en la ecuación del calor (6.22) establece el comportamiento de la magnitud $A(x, y; \beta)$, fijada por la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{x-y}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) - V^0 \right) A(x, y; \beta) = 0 \quad (6.27)$$

Llevando (6.25) a (6.27), podemos extraer la ley de recurrencia para los parámetros $a_n(x, y)$:

$$(n+1) a_{n+1}(x, y) + (x-y) \frac{\partial a_{n+1}(x, y)}{\partial x} + (V(x) - V^0) a_n(x, y) = \frac{\partial^2 a_n(x, y)}{\partial x^2} \quad (6.28)$$

Para nuestros propósitos es preciso obtener la relación entre los coeficientes en la forma $a_n(x, x)$; de modo que sobre (6.28) debe ser considerado el límite en que y tiende a x . Esto debe hacerse de forma cuidadosa, dado que tomar directamente el límite sobre (6.28) introduce magnitudes que no quedan bien definidas. Por ello, se consideran las cantidades,

$${}^{(k)}A_n(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial^k a_n(x, y)}{\partial x^k}$$

Derivando k veces la ley (6.28) y tomando después la tendencia $y \rightarrow x$, se desarrolla una nueva ley de recurrencia

$${}^{(k)}A_n(x) = \frac{1}{n+k} \left[{}^{(k+2)}A_{n-1}(x) - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^j (V - V^0)}{\partial x^j} {}^{(k-j)}A_{n-1}(x) \right]$$

lo que permite generar de forma recursiva los ${}^{(k)}A_n(x)$ a partir del primero de ellos

$${}^{(k)}A_0(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial^k a_0}{\partial x^k} = \delta^{k0}$$

de modo que, ahora, el límite mencionado sobre (6.28) proporciona la relación bien definida

$$a_{n+1}(x, x) = \frac{1}{n+1} [{}^{(2)}A_n(x) - (V(x) - V^0) a_n(x, x)]$$

que permite calcular los coeficientes necesarios en (6.25) y (6.26). Así, los primeros coeficientes quedan especificados en la tabla:

$$\begin{aligned} a_0(x, x) &= 1 \\ a_1(x, x) &= -(V - V^0) \\ a_2(x, x) &= -\frac{1}{6} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (V - V^0)^2 \\ a_3(x, x) &= -\frac{1}{60} \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \frac{1}{6} (V - V^0) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{6} (V - V^0)^3 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(\mathcal{H}) &= \int_{\Omega} dx \\ \tilde{a}_1(\mathcal{H}) &= -\int_{\Omega} dx (V - V^0) \\ \tilde{a}_2(\mathcal{H}) &= \int_{\Omega} dx \left[-\frac{1}{6} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (V - V^0)^2 \right] \\ \tilde{a}_3(\mathcal{H}) &= \int_{\Omega} dx \left[-\frac{1}{60} \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \frac{1}{6} (V - V^0) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{6} (V - V^0)^3 \right] \end{aligned}$$

6.5 Aproximación asintótica de ΔM con $N = 1$

Dada la presencia explícita de la constante \hbar en nuestros desarrollos, optaremos por el uso modificado de las unidades naturales, considerando sólo $c = 1$ y salvaguardando el valor de \hbar a lo largo del presente capítulo¹. La pretensión de esta sección es aprovechar el conocimiento del comportamiento de la función de calor descrito en la sección anterior para obtener una aproximación a la corrección de la masa (6.15). La herramienta matemática que permite tal labor es la transformada de Mellin. Para evitar ambigüedades sobre dicho concepto optamos por seguir el siguiente procedimiento en la estimación de la corrección de la masa de una solución clásica para un modelo concreto: en primer lugar reformulamos las magnitudes del sistema físico

¹En tal caso las dimensiones de cantidades notables son $[\hbar] = ML$, $[x] = L$, $[\phi] = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$, $[\mathcal{E}] = M$, $[\mathcal{H}] = L^{-2}$, $[\omega] = L^{-1}$ y $[k] = L^{-1}$.

mediante variables adimensionales² y basaremos luego sobre éstas las estimaciones ofrecidas por el desarrollo asintótico. En particular, se planteará la manipulación de un hessiano adimensional $\bar{\mathcal{H}}$ definido a partir del usual \mathcal{H} con dimensiones de inversa de longitud al cuadrado. Sus autovalores diferirán sólo en un cierto factor $C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}$ tal como ya ha sido descrito con anterioridad. Dado el uso reiterado que haremos más adelante, recordaremos en este punto la expresión de la función de calor o traza del operador $e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}}$ mediante la aproximación asintótica

$$h_{\bar{\mathcal{H}}}(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}} = \frac{e^{-\beta\mathcal{V}^0}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n < n_0} \tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}) \beta^{n-\frac{1}{2}} + o(\beta^{n_0-\frac{1}{2}})$$

donde los coeficientes $\tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}})$ han sido mostrados en la sección 6.4. El cálculo de la corrección cuántica a la masa (6.15) o (6.20) implica la estimación de la función de calor para los hessianos asociados a la solución de vacío y a la solución kink. El primero de ellos es resuelto de forma exacta

$$h_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_v} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} e^{-\beta\mathcal{V}^0} \int_{\Omega} d\bar{x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} e^{-\beta\mathcal{V}^0} \tilde{a}_0(\bar{\mathcal{H}}_v)$$

lo que permite construir la función zeta asociada, vía la transformación de Mellin. Ésta puede ser desglosada por conveniencia en el modo

$$\begin{aligned} \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 d\beta \beta^{s-1} \text{Tr} e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_v} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} d\beta \beta^{s-1} \text{Tr} e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_v}}_{B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s)} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 d\beta \beta^{s-1} \text{Tr} e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_v} + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s) = \\ &= \frac{\tilde{a}_0(\bar{\mathcal{H}}_v)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(s)} \int_0^1 d\beta \beta^{s-\frac{3}{2}} e^{-\beta\mathcal{V}^0} + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s) = \\ &= \frac{\tilde{a}_0(\bar{\mathcal{H}}_v)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(s)} (\mathcal{V}^0)^{\frac{1}{2}-s} \gamma[-\frac{1}{2} + s, \mathcal{V}^0] + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s) \end{aligned}$$

donde $\gamma[z, \mathcal{V}^0] = \Gamma[z] - \Gamma[z, \mathcal{V}^0]$ es la función gamma incompleta [1]. La traza del segundo operador mencionado exige el desarrollo asintótico para su evaluación. Debe advertirse, además, que la contribución de los j modos ceros debe ser substraída convenientemente de la traza de $e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_K}$. Es por ello que,

$$\text{Tr}^* e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_K} = \text{Tr} e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_K} - j e^0 = -j + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n < n_0} \tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}_K) e^{-\beta\mathcal{V}^0} \beta^{n-\frac{1}{2}} + o(\beta^{n_0-\frac{1}{2}}) \quad (6.29)$$

de modo que la función zeta generalizada es

$$\zeta_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 d\beta \beta^{s-1} \text{Tr}^* e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_K} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} d\beta \beta^{s-1} \text{Tr}^* e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_K}}_{B_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(s)}$$

²Así, la longitud adimensional que caracteriza el sistema corresponderá a la magnitud $\bar{L} = LC_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}$, siendo $[C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}] = L^{-1}$.

Los términos $B_{\mathcal{H}}^*(s)$ que han aparecido en la definición de las funciones zeta conforman funciones enteras de la variable s . Se presume que su contribución en la corrección cuántica es despreciable por motivos analíticos, dado que la exponencial que aparece en su definición comienza a adoptar valores muy pequeños. El primero de los sumandos definido mediante una integración con $0 < \beta < 1$ admite la expansión asintótica introducida en la sección anterior. Consideremos que el cálculo efectivo de tal desarrollo es realizado mediante los n_0 primeros sumandos. Por ello, se tiene

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathcal{H}_K}^*(s) &= -\frac{j}{\Gamma(s)} \int_0^1 d\beta \beta^{s-1} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(s)} \sum_{n < n_0} \tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}_K) \int_0^1 d\beta \beta^{s+n-\frac{3}{2}} e^{-\beta\mathcal{V}^0} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \underbrace{\sum_{n \geq n_0} \tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}_K) \int_0^1 d\beta \beta^{s+n-\frac{3}{2}} e^{-\beta\mathcal{V}^0}}_{b_{n_0, \bar{\mathcal{H}}_K}(s)} + B_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(s) \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathcal{H}_K}^*(s) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(s)} \sum_{n < n_0} \tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}_K) (\mathcal{V}^0)^{\frac{1}{2}-n-s} \gamma[n + s - \frac{1}{2}, \mathcal{V}^0] - \\ &- \frac{j}{\Gamma(s)} \int_0^1 d\beta \beta^{s-1} + \frac{1}{\Gamma(s)} b_{n_0, \bar{\mathcal{H}}_K}(s) + B_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(s) \end{aligned} \quad (6.30)$$

La expresión (6.30) presenta polos localizados en $s = \frac{1}{2} - n$. Por otra parte, la función $b_{n_0, \bar{\mathcal{H}}_K}(s)$ es holomorfa para $\text{Re } s > -n_0 + \frac{1}{2}$ [62] y su contribución caracteriza los términos del desarrollo asintótico con $n \geq n_0$, no tomados en cuenta en el cálculo efectivo. Este error es controlable, dado que eligiendo un valor suficientemente grande para n_0 la convergencia del desarrollo asintótico asegura que estos términos son despreciables. Los modos ceros provocan la presencia del sumando $\bar{R}_0(s) = -\frac{j}{\Gamma(s)} \int_0^1 d\beta \beta^{s-1}$. Un proceso de regularización sobre \bar{R}_0 proporciona el valor:

$$\bar{R}_0(s) = -\frac{j}{\Gamma(s)} \int_0^1 d\beta \beta^{s-1} = -\frac{j}{s\Gamma(s)}$$

La expresión de la corrección cuántica (6.15) introduce la diferencia de las funciones zeta señaladas con anterioridad. Recordando que $\tilde{a}_0(\bar{\mathcal{H}}_v) = \tilde{a}_0(\bar{\mathcal{H}}_K)$ se obtiene

$$\zeta_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(s) - \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s) \approx -\frac{j}{s\Gamma(s)} + \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{\tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}_K) (\mathcal{V}^0)^{\frac{1}{2}-n-s}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(s)} \gamma[n + s - \frac{1}{2}, \mathcal{V}^0]$$

donde el error cometido en la estimación previa corresponde a los términos

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} b_{n_0, \bar{\mathcal{H}}_K}(s) + B_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(s) - B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s)$$

el cual suponemos despreciable en la corrección cuántica a la masa.

Por todo lo comentado podemos escribir la corrección (6.15) en el modo:

$$\begin{aligned}
\Delta M = & \underbrace{-\frac{\hbar C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}}{2\sqrt{\pi}} j}_{R_0} - \underbrace{\frac{\hbar C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}}{8\pi} \sum_{n=2}^{n_0-1} \tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}^0)^{-n+1} \gamma[n-1, \mathcal{V}^0]}_{d_{n_0}} + \\
& + \underbrace{\frac{\hbar C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \tilde{a}_1(\bar{\mathcal{H}}_K) \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(\mathcal{V}^0)^{-\frac{1}{2}-s}}{\Gamma(s)} \gamma[s + \frac{1}{2}, \mathcal{V}^0]}_{R_{\text{ultr}}^1} + \\
& + \underbrace{\hbar (\mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_K] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_v])}_{R_{\text{ultr}}^2} + \underbrace{\frac{\hbar C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} \langle \mathcal{V}(\bar{x}) - \mathcal{V}^0 \rangle}_{\Delta R} + \underbrace{\frac{\hbar C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}}{2} \varepsilon(-\frac{1}{2})}_{\text{error}}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

La constante $C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}$ es incorporada para justificar los factores que recuperan la expresión final a partir del hessiano adimensional. Cada uno de los sumandos queda designado mediante la notación plasmada bajo las llaves de (6.31). Quedan identificados en tal expresión la contribución atribuida al modo cero R_0 , el valor del desarrollo asintótico d_{n_0} , los términos de la renormalización $R_{\text{ultr}} = R_{\text{ultr}}^1 + R_{\text{ultr}}^2$, la diferencia entre las constantes cosmológicas ΔR y un término de error que será desestimado en los cálculos específicos. La divergencia ultravioleta mencionada en párrafos superiores queda concentrada en el polo localizado en el valor $s = -\frac{1}{2}$ de R_{ultr}^1 . Recuérdese que este comportamiento motivó el proceso de renormalización de la masa mediante la adición de los contratérminos R_{ultr}^2 , que deben ser obtenidos en cada modelo en concreto. Es lógico pensar que estos términos contrarrestan la respuesta infinita añadiendo a lo sumo una pieza finita atribuida al proceso de renormalización que denotamos por R_{ultr} . Podemos profundizar aún más en el comportamiento de estos términos, afirmando lo siguiente: los contratérminos R_{ultr}^2 vienen dados como una función de la magnitud $\delta m^2 = \hbar \int \frac{dk}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \mathcal{V}^0}}$ y dado que la corrección considerada es a primer orden tal dependencia debe ser lineal. Es por ello que podemos escribir que $R_{\text{ultr}}^2 = \lambda \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2})$, donde la constante λ debe ser elegida de tal modo que contrarreste el polo de R_{ultr}^1 . Los términos responsables de la divergencia ultravioleta proporcionan la siguiente respuesta

$$\begin{aligned}
R_{\text{ultr}} &= R_{\text{ultr}}^1 + R_{\text{ultr}}^2 = \\
&= \frac{\hbar C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \tilde{a}_1(\bar{\mathcal{H}}_K) \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(\mathcal{V}^0)^{-\frac{1}{2}-s}}{\Gamma[s]} \gamma[s + \frac{1}{2}, \mathcal{V}^0] + \lambda \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s) = \\
&= \frac{\hbar C_{\mathcal{H},\bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \tilde{a}_1(\bar{\mathcal{H}}_K) \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(\mathcal{V}^0)^{-\frac{1}{2}-s}}{\Gamma[s]} \gamma[s + \frac{1}{2}, \mathcal{V}^0] + \\
&\quad + \frac{\lambda \bar{L}}{2\sqrt{\pi}} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(\mathcal{V}^0)^{\frac{1}{2}-s}}{\Gamma[s]} \gamma[-\frac{1}{2} + s, \mathcal{V}^0] + \lambda B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \tilde{a}_1(\bar{\mathcal{H}}_K) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{V}^0)^{-\varepsilon}}{\Gamma[-\frac{1}{2} + \varepsilon]} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}^0] + \frac{\lambda \bar{L}}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{V}^0)^{-\varepsilon}}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}^0] + \lambda B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = \\
&= \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \tilde{a}_1(\bar{\mathcal{H}}_K) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{V}^0)^{-\varepsilon} (-\frac{1}{2} + \varepsilon)}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}^0] + \\
&\quad + \frac{\lambda \bar{L}}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{V}^0)^{-\varepsilon}}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}^0] + \lambda B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = \\
&= -\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{8\sqrt{\pi}} \tilde{a}_1(\bar{\mathcal{H}}_K) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{V}^0)^{-\varepsilon} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}^0]}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} + \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \tilde{a}_1(\bar{\mathcal{H}}_K) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{V}^0)^{-\varepsilon} \varepsilon \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}^0]}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} + \\
&\quad + \frac{\lambda \bar{L}}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{V}^0)^{-\varepsilon}}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}^0] + \lambda B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = \\
&= \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} \tilde{a}_1(\bar{\mathcal{H}}_K) + \lambda B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = -\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} \int d\bar{x} (\mathcal{V}(\bar{x}) - \mathcal{V}^0) + \lambda B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = \\
&= -\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} \langle \mathcal{V}(\bar{x}) - \mathcal{V}^0 \rangle + \lambda B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

habiendo elegido $\lambda = \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\bar{L}} \tilde{a}_1(\bar{\mathcal{H}}_K)$ para alcanzar el proceso de renormalización, esto es, los contratérminos adoptan la forma:

$$\mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_K] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_v] = \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\bar{L}} \tilde{a}_1(\bar{\mathcal{H}}) \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) \quad (6.32)$$

La contribución R_{ultr} coincide con el término ΔR con signo opuesto. Es, por ello, que la corrección cuántica en el caso de modelos con mundo interno unidimensional $N = 1$, a lo cual se ciñe todo lo explicado en esta sección, queda especificado definitivamente como

$$\boxed{\Delta M = \underbrace{-\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{2\sqrt{\pi}} j}_{R_0} - \underbrace{\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{8\pi} \sum_{n=2}^{n_0-1} \tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}_K) (\mathcal{V}^0)^{-n+1} \gamma[n-1, \mathcal{V}^0]}_{d_{n_0}} + \text{Error}} \quad (6.33)$$

donde el sumando “Error” da cuenta de los términos que son despreciados en la estimación de ΔM ,

$$\text{Error} = \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{2} \left[-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} b_{n_0, \bar{\mathcal{H}}_K}(-\frac{1}{2}) + B_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(-\frac{1}{2}) - B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(-\frac{1}{2}) \right] + \lambda B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2})$$

Si bien es cierto que la expresión (6.33) no ofrece una respuesta exacta, posee dos virtudes; la primera es que se sospecha que es una buena aproximación (para el caso del kink unidimensional el error cometido es del 0.07 % de la corrección a primer orden aceptada como exacta), y la segunda reside en que la corrección es expresada en función del término potencial $\mathcal{V}(\bar{x})$ del hessiano asociado a la solución de tipo kink. No es preciso la resolución (generalmente inabordable) del problema espectral de \mathcal{H}_K . Esta peculiaridad permitirá hacer uso de (6.33) para estimar la corrección a la masa de los kinks presentes en modelos con $N = 2$ introducidos en los capítulos precedentes.

6.6 Corrección cuántica a la masa del kink en modelos con $N = 1$

Una vez que el desarrollo genérico del cálculo de la corrección cuántica a la masa del kink ha sido elaborado, tomaremos en consideración los cálculos particulares para alguno de los modelos que han sido introducidos en esta memoria. Aplicaremos los procedimientos descritos a los ejemplos tópicos, constituidos por el modelo Seno-Gordon y el modelo ϕ^4 [120, 66]. La estructura en que es abordado tal análisis consiste en una primera discusión dimensional de los modelos tratados, seguida del cálculo de la corrección cuántica utilizando el procedimiento tradicional basado en las densidades espectrales, en el que es necesario la resolución del problema espectral. Tras ello, y dado que la resolución espectral es abordable en los casos mencionados, serán obtenidas de forma exacta las funciones zeta generalizadas y ejecutada la regularización en base a éstas, que proporciona el resultado buscado. Finalmente pondremos en uso el método del desarrollo asintótico, que no precisa el espectro de los hessiano y que ofrece una estimación de la corrección que podremos comparar finamente con los métodos anteriores.

6.6.1 Modelo Seno-Gordon

Uno de los sistemas físicos más profusamente estudiado es el modelo de Seno-Gordon. De hecho, la teoría cuántica es resuelta de forma exacta y correspondió al banco de pruebas que determinó que la regularización que suminitraba la respuesta adecuada debía ser basada sobre el corte en igual número de modos para los hessianos. Como ya fue advertido, el trabajo inicial de esta sección consistirá en presentar el modelo y definir las adecuadas variables adimensionales sobre las que obtendremos el desarrollo asintótico.

La energía del modelo viene caracterizada por el funcional³,

$$\mathcal{E}[\chi] = \int dy \left[\frac{1}{2} \frac{d\chi}{dy} \frac{d\chi}{dy} + \frac{m^2}{\gamma} (1 - \cos \sqrt{\gamma} \chi) \right] \quad (6.34)$$

que se transforma, introduciendo las variables adimensionales $x = my$, $\phi = \sqrt{\gamma} \chi$, en el modo

$$\mathcal{E}[\chi] = \frac{m}{\gamma} \int dx \left[\frac{1}{2} \frac{d\phi}{dx} \frac{d\phi}{dx} + (1 - \cos \phi) \right] = \frac{m}{\gamma} \bar{\mathcal{E}}[\phi]$$

El término potencial presenta un infinito numerable de mínimos o vacíos degenerados, los cuales se hallan situados en

$$\phi_v = n\pi$$

³Las dimensiones de las magnitudes que caracterizan este modelo se identifican como $[\gamma] = M^{-1}L^{-1}$ y $[m] = L^{-1}$.

con $n \in \mathbb{Z}$. Ello motiva que el modelo presente un proceso de ruptura de simetría, en el que aparecen las soluciones de origen topológico

$$\phi_S(x) = \pm 4 \arctan e^x$$

que corresponden al conocido solitón (elegiendo el signo positivo) y su antisolitón (elegido el signo negativo). Es fácil obtener los hessianos asociados a las soluciones de vacío y topológicas, los cuales quedan indicados respectivamente como

$$\bar{\mathcal{H}}_v = -\frac{d^2}{dx^2} + 1 \qquad \bar{\mathcal{H}}_S = -\frac{d^2}{dx^2} + 1 - 2 \operatorname{sech}^2 x \qquad (6.35)$$

expresados en función de variables adimensionales, $\mathcal{V}^0 = 1$ y $\mathcal{V}(x) = 1 - 2 \operatorname{sech}^2 x$. Observando la definición de las variables adimensionales se concluye que la relación existente entre los autovalores ω_n del hessiano dimensional (obtenido del funcional (6.34)) y los autovalores $\bar{\omega}_n$ del hessiano adimensional (6.35) es $\omega_n = m \bar{\omega}_n$, lo que induce que la constante $C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}} = m$.

Finalmente con el propósito de obtener la corrección cuántica debe ser considerada la prescripción de orden normal en el funcional energía, lo que proporciona los pertinentes contratérminos [39]

$$\mathcal{E}_{\text{ct}}(\chi_C) = \hbar m \bar{\mathcal{E}}_{\text{ct}}(\phi_C) = -\hbar m \int_{\Omega} dx \delta \bar{m}^2 (1 - \cos \phi_C)$$

siendo

$$\delta \bar{m}^2 = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 1}} = -\frac{1}{4\bar{L}} \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v} \left(\frac{1}{2}\right)$$

con $\bar{L} = mL$ la magnitud adimensional que mide el tamaño del intervalo en que queda confinado el sistema físico que tratamos. En resumen, el proceso de renormalización agrega la contribución

$$R_{\text{ultr}}^2 = \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_S] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_v] = \frac{\hbar m}{4\bar{L}} \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v} \left(\frac{1}{2}\right) \int_{\Omega} dx (\cos \phi_v - \cos \phi_S) = \frac{\hbar m}{\bar{L}} \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v} \left(\frac{1}{2}\right)$$

lo que coincide con el comportamiento anunciado (6.32) sabiendo que $\tilde{a}_1 = 4$.

Una vez considerada las pertinentes reseñas sobre el modelo Seno-Gordon, se ofrecen tres alternativas en el estudio de la corrección cuántica; bien recurriendo a la expresión (6.11), basada en el concepto de densidades espectrales y que da un resultado exacto para ΔM , puesto que es posible, en este caso, la resolución de los hessianos (6.35); bien utilizando la fórmula (6.20) para recuperar de nuevo una respuesta exacta; bien empleando el desarrollo asintótico (6.33) para estimar aproximadamente ΔM . Presentaremos en el orden mencionado cada uno de estos procedimientos aplicados sobre el modelo en estudio. La razón en la elección de este orden de exposición parece razonable atendiendo al hecho de que el primero de ellos

es el utilizado en la literatura al respecto y servirá para contrastar los otros dos; el segundo basado sobre (6.20) corresponde a la expresión fundamentada en la función de calor $h_{\mathcal{H}}(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}}$, que nos permitió derivar el desarrollo asintótico (6.33) aplicable en cualquier modelo.

Corrección cuántica: Método de las densidades espectrales

La obtención del espectro de los hessianos (6.35), introducidos en esta sección, se equipara a la resolución conocida de la ecuación de Schrödinger para el problema libre y para un pozo sin reflexión de tipo Pösch-Teller [47, 102]. Sus espectros son caracterizados por: 1) $\text{Spec } \bar{\mathcal{H}}_v = \{1\}_{\frac{1}{2}} \cup \{k^2 + 1\}_{k \in \mathbb{R}}$ siendo su densidad espectral $\rho_v(k) = \frac{\bar{L}}{2\pi}$, donde es supuesto que \bar{L} es grande; 2) $\text{Spec } \bar{\mathcal{H}}_S = \{0\} \cup \{1\}_{\frac{1}{2}} \cup \{q^2 + 1\}_{q \in \mathbb{R}}$ con $\rho_S(q) = \frac{\bar{L}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta(q)}{dq}$ siendo $\delta(q) = 2 \arctan \frac{1}{q}$. Junto al estado semiligado libre aparece otro asociado a $\bar{\mathcal{H}}_K$, ambos con autovalor 1 (que hemos identificado en el espectro con el subíndice $\frac{1}{2}$), y cuya contribución en ΔM se contrarresta. Aplicando la fórmula (6.11) podemos introducir

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{\hbar m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 1} \frac{d\delta(q)}{dq} + \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_K] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_v] + \Delta R = \\ &= -\frac{\hbar m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{2\sqrt{q^2 + 1}}{q^2 + 1} + \frac{\hbar m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 1}} + \frac{\hbar m}{4\pi} \langle V(x) \rangle = \\ &= 0 + \frac{\hbar m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx (-2 \text{sech}^2 x) = \\ &= -\frac{\hbar m}{\pi} \end{aligned}$$

como queda indicado en los trabajos [120, 105], esto es, la corrección cuántica a primer orden a la masa del soliton queda determinada como $\Delta M = -\frac{\hbar m}{\pi}$. Es, por tanto, esta magnitud la que será comparada con los resultados obtenidos en los restantes dos procedimientos de cálculo de ΔM .

Corrección cuántica: Funciones zeta exactas

La posibilidad de resolución del problema espectral asociado a los hessianos (6.35), ya mencionada, posibilita el cálculo exacto de las trazas o equivalentemente de las funciones zeta generalizadas acaecidas en este modelo. El paso al continuo del momento k junto a la definición (6.16) permite escribir la expresión seguida por las trazas

$$\text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}_S} - \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}_v} - e^0 = -\text{Erfc}\sqrt{\beta} \quad (6.36)$$

lo que proporciona las funciones zeta generalizadas, tras realizar la conveniente transformada de Mellin,

$$\zeta_{\mathcal{H}_S}^*(s) - \zeta_{\mathcal{H}_v}(s) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[s + \frac{1}{2}] 1}{\Gamma[s] s}$$

Este resultado trasladado a la expresión (6.15) da la corrección cuántica

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{\hbar m}{2} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} [\zeta_{\mathcal{H}_S}^*(s) - \zeta_{\mathcal{H}_v}(s)] + \frac{\hbar m}{L} \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \zeta_{\mathcal{H}_v}(s) + \Delta R = \\ &= \frac{\hbar m}{2\sqrt{\pi}} \left[-\lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\Gamma[s + \frac{1}{2}] 1}{\Gamma[s] s} + \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\Gamma[s - \frac{1}{2}]}{\Gamma[s]} \right] + \Delta R = -\frac{\hbar m}{\pi} \end{aligned}$$

que se corresponde con la respuesta exacta conocida [120, 105] y donde se ha aplicado la conveniente regularización sobre los polos:

$$\begin{aligned} -\lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\Gamma[s + \frac{1}{2}] 1}{\Gamma[s] s} + \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\Gamma[s - \frac{1}{2}]}{\Gamma[s]} &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma[\varepsilon]}{\Gamma[-\frac{1}{2} + \varepsilon]} \frac{1}{(-\frac{1}{2} + \varepsilon)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma[\varepsilon]}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma[\varepsilon]}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma[\varepsilon]}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} = 0 \end{aligned}$$

La respuesta encontrada es, por tanto, $\Delta M = -\frac{\hbar m}{\pi}$, que coincide con la encontrada en la subsección precedente. Queda establecida, la equivalencia entre los procedimientos de cálculo de la corrección cuántica basada en las densidades espectrales y las funciones zeta.

Corrección cuántica: Desarrollo asintótico de las funciones zeta

Finalmente, hallaremos la corrección cuántica mediante (6.33), aplicable aún cuando el espectro de los hessianos fuese desconocido. Debe recordarse que la respuesta encontrada es aproximada. La expresión (6.33) consta de los siguientes términos:

- *Término de regularización del modo cero.* Dada la presencia de un único modo cero, atribuido a la invariancia por traslaciones de la solución soliton, se cumple $R_0 = -\frac{\hbar m}{2\sqrt{\pi}}$, originando el valor numérico:

$$R_0 = -0.282095 \hbar m$$

- *Términos del desarrollo asintótico.* Para el modelo de Seno-Gordon la suma parcial de la serie que conforma el desarrollo asintótico es

$$d_{n_0} = -\frac{\hbar m}{8\pi} \sum_{n=2}^{n_0-1} \tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}_K) \gamma[n-1, 1]$$

donde los coeficientes $\tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}_K)$ con calculados a partir de los términos potenciales de los hessianos:

k	$\tilde{a}_k(\mathcal{H}_K)$	$n_0 - 1$	d_{n_0}
2	2.66667	2	-0.0670702
3	1.06667	3	-0.0782849
4	0.30476	4	-0.0802324
5	0.06772	5	-0.0805373
6	0.012324	6	-0.0805803
7	0.0018944	7	-0.0805857
8	0.00025258	8	-0.0805863
9	0.00002972	9	-0.0805863

El desarrollo asintótico converge aceptablemente para los primeros nueve términos, adoptando el valor:

$$d_{10} = -0.0805863 \hbar m$$

La estimación para la corrección cuántica de la masa será:

$$\Delta M = \underbrace{-0.282095 \hbar m}_{R_0} - \underbrace{0.0805863 \hbar m}_{d_{10}} = -0.362681 \hbar m$$

Entonces, el resultado obtenido mediante el procedimiento del desarrollo asintótico de las funciones zeta proporciona el valor $\Delta M = -0.362681 \hbar m$. Este valor puede ser contrastado con el resultado exacto $\Delta M = -\frac{\hbar m}{\pi} \approx -0.31831 \hbar m$ alcanzado en [120, 105] mediante los procedimientos anteriores. Es comprobado que la aproximación es aceptable.

Dos son los puntos interesantes que podemos mencionar a partir de la expresión exacta de las trazas señaladas en (6.36): 1) la posibilidad de encontrar el desarrollo asintótico a partir de dicha expresión y 2) evaluar cuál es el valor de la función "Error", que fue despreciado en (6.33). Respecto del primero de los puntos, el trabajo es satisfecho realizando el desarrollo en serie de la función Error Modificada basada en la fórmula (7.1.6) de [1], lo cual proporciona la relación

$$d_\infty = -\frac{\hbar m}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!!} \gamma[n, 1] \Rightarrow \tilde{a}_{n+1}(\bar{\mathcal{H}}_K) = \frac{2^{n+2}}{(2n+1)!!}$$

lo que reproduce los datos exhibidos en la tabla con extraordinaria exactitud. El segundo de los puntos aludidos queda resuelto mediante el cálculo

$$\text{Error} = \frac{\hbar m}{2\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} d\beta \left(\frac{1}{2} \frac{\text{Erfc}\sqrt{\beta}}{\beta^{\frac{3}{2}}} + \frac{e^{-\beta}}{\sqrt{\pi}\beta} \right) \approx 0.044373 \hbar m$$

que es un valor pequeño respecto la corrección cuántica encontrada. Esta cantidad corresponde exactamente al defecto de masa hallado en la respuesta calculada en esta sección por el método asintótico. Es presumible, además, que en los modelos de tipo kink, esta cantidad sea aún más pequeña de modo que la estimación de la corrección será más cercana al resultado exacto.

La conclusión que queremos enfatizar en este apartado es que mediante la fórmula (6.20), basada en la traza del heat-kernel, su posterior transformada de Mellin y una regularización sobre las funciones zeta, hemos reproducido el resultado aceptado en la literatura [40, 41] calculada mediante las densidades espectrales asociadas a los hessianos. Debe resaltarse la necesidad de abstraer el modo cero asociado a la solución solitón. Además, y más interesante, el desarrollo asintótico de la traza del heat-kernel, proporcionó una estimación aceptable para la corrección cuántica. Este último método será el único aplicable en la mayoría de los kinks de los modelos con $N = 2$, dado que de forma genérica desconocemos el espectro del operador hessiano asociado a las soluciones encontradas. Analizaremos en la siguiente subsección la corrección cuántica a la masa del kink obteniendo resultados similares a los del presente modelo.

6.6.2 Modelo ϕ^4

El modelo ϕ^4 es el ejemplo paradigmático en el estudio de los defectos topológicos o kinks. Será analizado en esta sección con el propósito de estimar la corrección cuántica asociada a la masa de la solución de tipo kink. Las expresiones (1.36) y (1.37), proporcionadas en el primer capítulo, caracterizan respectivamente la acción y la energía de este sistema físico. La introducción de las variables adimensionales, $\phi = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \chi$; $x = \frac{m}{\sqrt{2}} y$, elimina todos los parámetros de la teoría junto con la dimensionalidad de sus variables⁴, presentando el funcional energía adimensional

$$\bar{\mathcal{E}}[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \frac{d\phi}{dx} \frac{d\phi}{dx} + \frac{1}{2} (\phi^2 - 1)^2 \right]$$

que implica un potencial adimensional $\bar{U}[\phi] = \frac{1}{2} (\phi^2 - 1)^2$. El funcional dotado de dimensiones puede ser recuperado de forma sencilla dada la relación $\mathcal{E}[\chi] = \frac{m^3}{\sqrt{2}\lambda} \bar{\mathcal{E}}[\phi]$. La variedad de vacíos, como nos es ya conocido, viene constituida por dos elementos $\phi_v = \pm 1$, cuya energía es nula. Tiene lugar un proceso de ruptura espontánea de simetría, que permite la presencia de las soluciones kinks:

$$\phi_K(x) = \pm \tanh x$$

Los hessianos adimensionales asociados a las soluciones mencionadas se corresponden con las expresiones ($\mathcal{V}^0 = 4$, $\mathcal{V}(x) = 4 - 6 \operatorname{sech}^2 x$),

$$\bar{\mathcal{H}}_v = -\frac{d^2}{dx^2} + 4 \qquad \bar{\mathcal{H}}_K = -\frac{d^2}{dx^2} + 4 - 6 \operatorname{sech}^2 x \qquad (6.37)$$

⁴Las dimensiones de las magnitudes presentes en el modelo atienden a $[\lambda] = M^{-1}[L]^{-3}$ y $[m] = L^{-1}$.

cuyos autovalores permiten recuperar los pertenecientes a los de los hessianos originales (con dimensiones de inversa al cuadrado de longitud) mediante la correspondencia $\omega_n = \frac{m}{\sqrt{2}} \bar{\omega}_n$. Entonces, la constante que recupera las dimensiones en las fórmulas de la corrección cuántica a la masa mostradas en este capítulo es $C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$. La longitud adimensional que caracteriza el sistema es $\bar{L} = \frac{m}{\sqrt{2}} L$. El orden normal sobre el funcional energía afecta al término potencial, generando los contratérminos $\mathcal{E}_{\text{ct}}[\chi] = \sqrt{2} \hbar m \bar{\mathcal{E}}_{\text{ct}}[\phi]$, siendo

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{ct}}[\phi_{\text{C}}] = \int dx \left(-\frac{1}{2} \delta \bar{m}^2 \phi_{\text{C}}^2 \right)$$

donde

$$\delta \bar{m}^2 = 3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 4}} = \frac{3}{2\bar{L}} \zeta_{\mathcal{H}_v}(\frac{1}{2})$$

Es, por ello, que la contribución debida al proceso de renormalización puede escribirse en la forma

$$R_{\text{ultr}}^2 = \mathcal{E}[\phi_{\text{K}}] - \mathcal{E}[\phi_v] = -\frac{\hbar m}{\sqrt{2}} \delta \bar{m} \int_{\Omega} dx (\phi_{\text{K}}^2 - \phi_v^2) = \frac{3\hbar m}{\sqrt{2}\bar{L}} \zeta_{\mathcal{H}_v}(\frac{1}{2})$$

lo que sigue la relación predicha en (6.32), teniendo en cuenta que $\tilde{a}_1 = 12$.

De forma análoga al ejemplo anterior, hallaremos la corrección cuántica a la masa del kink mediante los tres procedimientos descritos en este texto, comparando las respuestas proporcionadas por cada uno.

Corrección cuántica: Método de las densidades espectrales

El espectro de los hessianos presentados en (6.37) puede ser obtenido. Éste queda caracterizado por los siguientes autovalores: 1) $\text{Spec } \bar{\mathcal{H}}_v = \{4\}_{\frac{1}{2}} \cup \{k^2 + 4\}_{k \in \mathbb{R}}$ siendo su densidad espectral $\rho_v(k) = \frac{\bar{L}}{2\pi}$, donde el sistema es confinado en una caja de tamaño adimensional \bar{L} grande; 2) $\text{Spec } \bar{\mathcal{H}}_{\text{K}} = \{0\} \cup \{3\} \cup \{4\}_{\frac{1}{2}} \cup \{q^2 + 4\}_{q \in \mathbb{R}}$ donde $\rho_{\text{K}}(q) = \frac{\bar{L}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta(q)}{dq}$ con $\delta(q) = -2 \arctan \frac{3q}{2-q^2}$. De nuevo, existen dos estados semiligados con autovalor 4, asociados al operador libre $\bar{\mathcal{H}}_v$ y al operador de tipo Schrödinger con potencial Pösch-Teller sin reflexión $\bar{\mathcal{H}}_{\text{K}}$, que contrarrestan su contribución en ΔM .

Aplicando las fórmulas (6.10) y (6.11), la corrección cuántica será especificada mediante el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{\hbar m}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 4} \frac{d\delta(q)}{dq} \right) + \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{K}}] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_v] + \Delta R = \\ &= \frac{\sqrt{3}\hbar m}{2\sqrt{2}} - \frac{\hbar m}{2\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{3\sqrt{q^2 + 4}(q^2 + 2)}{q^4 + 5q^2 + 4} + \frac{3\hbar m}{2\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 4}} + \frac{\hbar m}{4\sqrt{2}\pi} \langle \mathcal{V}(x) - 4 \rangle = \\ &= \frac{\sqrt{3}\hbar m}{2\sqrt{2}} - \frac{\hbar m}{\sqrt{6}} + \frac{\hbar m}{4\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx (-6 \text{sech}^2 x) = \end{aligned}$$

$$= \hbar m \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

resultado transcrito en el trabajo de R.F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu [40, 41], retomados posteriormente utilizando diversas técnicas por H. Nastase, M. Stephanov, P. van Nieuwenhuizen, A. Rebhan, [120, 105], M. Bordag [24], A.I. Bochkarev [22], R.L. Jaffe, E. Farhi, N.M. Graham [66] entre otros. Esta magnitud será la referencia sobre la que compararemos la respuesta obtenida mediante las otras dos técnicas desarrolladas en este capítulo, con especial mención del desarrollo asintótico.

Corrección cuántica: Funciones zeta exactas

En el presente caso, el problema espectral es abordable de forma exacta, lo que permite calcular como en la sección precedente las expresiones seguidas por las funciones de calor mediante la ecuación (6.16). Esto permitirá verificar la bondad del proceso de regularización basado en las funciones zeta generalizadas. El paso al continuo de los momentos en el espectro de los hessianos permite la escritura de

$$\text{Tr } e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_K} - \text{Tr } e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_v} - e^0 = e^{-3\beta} - e^{-3\beta} \text{Erfc}\sqrt{\beta} - \text{Erfc } 2\sqrt{\beta}$$

lo que proporciona la diferencia de las funciones zeta asociadas al kink y al vacío tras realizar la transformación de Mellin,

$$\zeta_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(s) - \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s) = -\frac{4^{-s}}{\sqrt{\pi}s} \frac{\Gamma[\frac{1}{2} + s]}{\Gamma[s]} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} 3^{-\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma[\frac{1}{2} + s]}{\Gamma[s]} {}_2F_1[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + s, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}]$$

El proceso de regularización mostrado en la expresión (6.15) proporciona la corrección cuántica:

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{\hbar m}{2\sqrt{2}} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} (\zeta_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(s) - \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s)) + \frac{3\hbar m}{\sqrt{2L}} \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s) + \Delta R = \\ &= \frac{\hbar m}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[-\frac{4^{-s}\Gamma[\frac{1}{2} + s]}{s\Gamma[s]} + 2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma[\frac{1}{2} + s]}{\Gamma[s]} {}_2F_1[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + s, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}] \right] + \\ &\quad + \frac{3\hbar m}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} 4^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma[s - \frac{1}{2}]}{\Gamma[s]} + \Delta R = \hbar m \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \right) \end{aligned}$$

El cálculo precedente implica la conveniente regularización sobre los polos:

$$\begin{aligned} &\lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[-\frac{4^{-s}\Gamma[\frac{1}{2} + s]}{s\Gamma[s]} + 2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma[\frac{1}{2} + s]}{\Gamma[s]} {}_2F_1[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + s, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}] \right] + 3 \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} 4^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma[s - \frac{1}{2}]}{\Gamma[s]} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{4^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\Gamma[\varepsilon]}{(-\frac{1}{2} + \varepsilon)\Gamma[-\frac{1}{2} + \varepsilon]} + 2 \frac{3^{-\varepsilon}\Gamma[\varepsilon]}{\Gamma[-\frac{1}{2} + \varepsilon]} {}_2F_1[\frac{1}{2}, \varepsilon, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}] \right] + 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4^{-\varepsilon}\Gamma[\varepsilon]}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{2}{\varepsilon\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} [-2 + \gamma + \ln 4 + \psi(\frac{3}{2})] + o(\varepsilon) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} [\gamma + \ln 3 + \psi(\frac{3}{2}) - {}_2F_1'[\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}]] + o(\varepsilon) \right] + \\
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{3}{\varepsilon\sqrt{\pi}} - \frac{3}{\sqrt{\pi}} [\gamma + \ln 4 + \psi(\frac{1}{2})] + o(\varepsilon) \right] = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2 + \ln \frac{3}{4} - {}_2F_1'[\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}] \right) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

Por tanto, la respuesta proporcionada por la regularización de las funciones zeta es $\Delta M = \hbar m \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \right)$, la cual coincide con la aceptada como correcta en la literatura. Queda demostrada para este caso la bondad del método utilizado.

Corrección cuántica: Desarrollo asintótico de las funciones zeta

Estimaremos, finalmente, la corrección cuántica a la masa del kink empleando la fórmula del desarrollo asintótico (6.33). En él quedan identificados los siguientes sumandos:

- *Término de regularización del modo cero.* La contribución dimensional proporciona el sumando $R_0 = \frac{\hbar m}{2\sqrt{2\pi}}$, considerando que $j = 1$ en (6.33) puesto que aparece un único modo cero, asociado a la invariancia traslacional del sistema. Corresponde al valor numérico

$$R_0 = -0.199471 \hbar m$$

- *Términos del desarrollo asintótico.* En este caso la serie queda expresada en la forma

$$d_{n_0} = -\frac{\hbar m}{8\sqrt{2\pi}} \sum_{n=2}^{n_0-1} \tilde{a}_n(\bar{\mathcal{H}}_K) 4^{-n+1} \gamma[n-1, 4]$$

donde los coeficientes de Seeley son obtenidos de forma recurrente a partir del término potencial, dando lugar a los resultados:

k	$\tilde{a}_k(\mathcal{H}_K)$	$n_0 - 1$	d_{n_0}
2	24.0000	2	-0.165717
3	35.2000	3	-0.221946
4	39.3143	4	-0.248281
5	34.7429	5	-0.261260
6	25.2306	6	-0.267436
7	15.5208	7	-0.270186
8	8.27702	8	-0.271317
9	3.89498	9	-0.271748
10	1.63998	10	-0.271900

de modo que concluimos

$$d_{11} = -0.271900 \hbar m$$

Conjugando todos los datos hallados se tiene:

$$\Delta M = \underbrace{-0.199471 \hbar m}_{R_0} - \underbrace{0.271900 \hbar m}_{d_{11}} = -0.471371 \hbar m$$

que puede compararse con los resultados obtenidos en diversos trabajos [40, 120, 105, 41, 24, 22]. Todos ellos proporcionan como valor de la corrección $\Delta M = \hbar m \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{2}\pi} \right) \approx -0.471113 \hbar m$. El error cometido en la estimación obtenida por el método asintótico es del 0.07 % de la corrección exacta.

La obtención de las expresiones exactas seguidas por las funciones zeta en el apartado precedente abre la vía para contrastar su desarrollo en serie con el obtenido mediante del desarrollo asintótico. Aplicando de nuevo la fórmula (7.1.6) de [1], puede concluirse que

$$d_\infty = -\frac{\hbar m}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{2n+1}}{2^n (2n+1)!!} \gamma[n, 4] \Rightarrow \tilde{a}_{n+1}(\bar{\mathcal{H}}_K) = \frac{2^{n+2}(1 + 2^{2n+1})}{(2n+1)!!}$$

lo que permite alcanzar los datos plasmados en la tabla en buena aproximación. Otro de los aspectos importantes es la posibilidad de calcular el error cometido mediante el método del desarrollo asintótico. Se tiene que

$$\text{Error} = \frac{\hbar m}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty d\beta \left[-\frac{e^{-3\beta}}{2\beta^{\frac{3}{2}}} + \frac{e^{-3\beta} \text{Erfc}\sqrt{\beta}}{2\beta^{\frac{3}{2}}} + \frac{\text{Erfc}2\sqrt{\beta}}{2\beta^{\frac{3}{2}}} + \frac{3e^{-4\beta}}{\sqrt{\pi}\beta} \right] \approx 0.00032792 \hbar m$$

lo cual representa un valor satisfactoriamente pequeño respecto la corrección cuántica encontrada. Se ajusta de forma exacta con el defecto de masa encontrado en la respuesta determinada por el desarrollo asintótico.

6.7 La ecuación del calor: Caso bidimensional

Una vez que ha sido descrito el procedimiento de cálculo de la corrección cuántica a la masa de kinks en modelos con espacio interno unidimensional $N = 1$, trataremos de extender estos conocimientos a los modelos con espacio interno bidimensional $N = 2$. Dado que el espectro de los hessianos asociados a estos modelos son genéricamente irresolubles, queda vetado el uso de los métodos de las densidades espectrales y el de las funciones zeta generalizadas en su versión exacta. Desarrollaremos para estos casos, por tanto, el método asintótico. Ello exige el estudio de la ecuación de calor bidimensional que mostramos en los siguientes párrafos.

El operador hessiano en sistemas físicos con $N = 2$ es un operador diferencial matricial de orden 2, como viene indicado en (1.40). El espacio de Hilbert quedará especificado por $\bar{L}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$. El problema espectral (6.3) viene dado como

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} I + V(x) \right] \begin{pmatrix} \xi_k^1(x) \\ \xi_k^2(x) \end{pmatrix} = \omega_k^2 \begin{pmatrix} \xi_k^1(x) \\ \xi_k^2(x) \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

donde $V(x)$ es la matriz de funciones $V = \begin{pmatrix} V_{11}(x) & V_{12}(x) \\ V_{12}(x) & V_{22}(x) \end{pmatrix}$. El formalismo de Dirac puede ser trasladado en este caso, asumiendo los convenios,

$$\langle x^i | \xi_k \rangle = \xi_k^i(x) \quad \langle x^i | \mathcal{H} = \mathcal{H}_{ij}^{(x)} \langle x^j | \Rightarrow \mathcal{H}_{ij}^{(x)} = \langle x^i | \mathcal{H} | x^j \rangle$$

donde los estados posición deben especificar la componente del estado requerida y $\mathcal{H}_{ij}^{(x)}$ es la representación espacial de las componentes del operador \mathcal{H} especificado en (6.38). Entonces (6.38) puede escribirse como

$$\langle x^i | \mathcal{H} | \xi_k \rangle = \omega_k^2 \langle x^i | \xi_k \rangle$$

El núcleo integral queda definido como

$$K_{\mathcal{H}}^{ij}(x, y; \beta) = \langle x^i | e^{-\beta\mathcal{H}} | y^j \rangle \quad (6.39)$$

de donde se verifica que

$$\langle x^i | e^{-\beta\mathcal{H}} | \xi_k \rangle = \sum_{j=1}^2 \int dy \langle x^i | e^{-\beta\mathcal{H}} | y^j \rangle \langle y^j | \xi_k \rangle$$

La resolución del problema espectral permite identificar el núcleo integral (tal y como ocurría en el caso unidimensional) a la vista de la relación,

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{H}}^{ij}(x, y; \beta) &= \langle x^i | e^{-\beta\mathcal{H}} | y^j \rangle = \\ &= \int dk \int dk' \langle x^i | \xi_k \rangle \langle \xi_k | e^{-\beta\mathcal{H}} | \xi_{k'} \rangle \langle \xi_{k'} | y^j \rangle = \\ &= \int dk \int dk' \xi_k^{*j}(y) \xi_k^i(x) e^{-\beta\omega_k^2} \langle \xi_k | \xi_{k'} \rangle = \\ &= \int dk \xi_k^{*j}(y) \xi_k^i(x) e^{-\beta\omega_k^2} \end{aligned}$$

Este procedimiento de cálculo del núcleo integral se ve truncada en la mayoría de los casos por la imposibilidad de resolver de forma efectiva el problema espectral. Como en la sección precedente, es fácil verificar

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \langle x^i | e^{-\beta\mathcal{H}} | y^k \rangle = \langle x^i | -\mathcal{H} e^{-\beta\mathcal{H}} | y^k \rangle = -\mathcal{H}_{ij}^{(x)} \langle x^j | e^{-\beta\mathcal{H}} | y^k \rangle$$

o equivalentemente,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} I + V(x) \right)_{ij} K_{\mathcal{H}}^{jk}(x, y; \beta) = 0 \quad (6.40)$$

lo cual nos permite manifestar que el núcleo de calor $K_{\mathcal{H}}^{ij}(x, y; \beta)$ verifica la ecuación del calor generalizada a dos grados de libertad con condiciones iniciales

$$K_{\mathcal{H}}^{ij}(x, y; 0) = \delta^{ij} \delta(x - y) \quad (6.41)$$

La resolución de la ecuación (6.40) es inabordable en la mayoría de los supuestos, por lo que implementaremos métodos aproximados para estimar la magnitud $K_{\mathcal{H}}^{ij}(x, y; \beta)$. La función de calor $h_{\mathcal{H}}(\beta)$, esto es la traza del operador $e^{-\beta\mathcal{H}}$, viene relacionada con la noción de núcleo integral vía la integración sobre el parámetro espacial x y la traza sobre los índices jk ,

$$h_{\mathcal{H}}(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}} = \int dk \langle \xi_k | e^{-\beta\mathcal{H}} | \xi_k \rangle = \sum_{j=1}^2 \int dx K_{\mathcal{H}}^{jj}(x, x, \beta)$$

Aun cuando el núcleo integral asociado a un hessiano no pueda ser obtenido de forma exacta, podemos elaborar un desarrollo en serie tomando como punto de partida el hessiano asociado al vacío,

$$\mathcal{H}_v = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + V_1^0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + V_2^0 \end{pmatrix}$$

cuyo kernel puede ser obtenido de forma exacta,

$$K_{\mathcal{H}_v}(x, y; \beta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\beta}} \begin{pmatrix} e^{-\beta V_1^0} & 0 \\ 0 & e^{-\beta V_2^0} \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

Se estipula que el núcleo integral del hessiano \mathcal{H}_K asociado a la solución kink puede escribirse mediante la factorización

$$K_{\mathcal{H}_K} = A(x, y; \beta) \cdot K_{\mathcal{H}_v} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\beta}} \begin{pmatrix} e^{-\beta V_1^0} A_{11}(x, y; \beta) & e^{-\beta V_2^0} A_{12}(x, y; \beta) \\ e^{-\beta V_1^0} A_{21}(x, y; \beta) & e^{-\beta V_2^0} A_{22}(x, y; \beta) \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

donde las magnitudes $A_{ij}(x, y; \beta)$ pueden ser desarrolladas en serie de Taylor respecto del valor $\beta = 0$, proporcionando la expresión

$$A_{ij}(x, y; \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{ij}(x, y) \beta^n \quad (6.44)$$

y donde las condiciones iniciales quedan establecidas por

$$A_{ij}(x, y; 0) = \delta^{ij} \quad \text{o bien} \quad a_0^{ij}(x, y) = \delta^{ij} \quad (6.45)$$

Al uso de este desarrollo en serie, el valor de la función de calor, que es el resultado que tratamos de alcanzar, se corresponde con

$$h_{\mathcal{H}}(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}_K} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-\beta V_1^0} \tilde{a}_n^{11}(\mathcal{H}_K) + e^{-\beta V_2^0} \tilde{a}_n^{22}(\mathcal{H}_K) \right] \beta^n \quad (6.46)$$

con la usual definición $\tilde{a}_n^{ij}(\mathcal{H}_K) = \int dx a_n^{ij}(x, x)$. Si (6.43) es introducida en (6.40), el sistema de ecuaciones cumplimentadas por las magnitudes $A_{ij}(x, y; \beta)$ queda reflejada en las expresiones:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{x-y}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{11}(x) - V_1^0 \right) A_{11}(x, y; \beta) + V_{12}(x) A_{21}(x, y; \beta) = 0 \quad (6.47)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{x-y}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{11}(x) - V_2^0 \right) A_{12}(x, y; \beta) + V_{12}(x) A_{22}(x, y; \beta) = 0 \quad (6.48)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{x-y}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{22}(x) - V_1^0 \right) A_{21}(x, y; \beta) + V_{12}(x) A_{11}(x, y; \beta) = 0 \quad (6.49)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{x-y}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{22}(x) - V_2^0 \right) A_{22}(x, y; \beta) + V_{12}(x) A_{12}(x, y; \beta) = 0 \quad (6.50)$$

Usando el desarrollo en serie (6.44) de las componentes $A_{ij}(x, y; \beta)$, las ecuaciones (6.47)-(6.50) se convierten en las leyes de recurrencia

$$(n+1)a_{n+1}^{11}(x, y) + (x-y) \frac{\partial a_{n+1}^{11}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial^2 a_{n+1}^{11}(x, y)}{\partial x^2} + (V_{11} - V_1^0)a_n^{11}(x, y) + V_{12}a_n^{21}(x, y) = 0$$

$$(n+1)a_{n+1}^{12}(x, y) + (x-y) \frac{\partial a_{n+1}^{12}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial^2 a_{n+1}^{12}(x, y)}{\partial x^2} + (V_{11} - V_2^0)a_n^{12}(x, y) + V_{12}a_n^{22}(x, y) = 0$$

$$(n+1)a_{n+1}^{21}(x, y) + (x-y) \frac{\partial a_{n+1}^{21}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial^2 a_{n+1}^{21}(x, y)}{\partial x^2} + (V_{22} - V_1^0)a_n^{21}(x, y) + V_{12}a_n^{11}(x, y) = 0$$

$$(n+1)a_{n+1}^{22}(x, y) + (x-y) \frac{\partial a_{n+1}^{22}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial^2 a_{n+1}^{22}(x, y)}{\partial x^2} + (V_{22} - V_2^0)a_n^{22}(x, y) + V_{12}a_n^{12}(x, y) = 0$$

De nuevo el paso al límite $y \rightarrow x$ requiere manipular minuciosamente las expresiones (6.47)-(6.50). En primer lugar, quedan definidas las magnitudes

$${}^{(k)}A_n^{ij}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial^k a_n^{ij}(x, y)}{\partial x^k}$$

de modo que derivando k veces las expresiones recurrentes mostradas arriba y llevando a cabo posteriormente el límite en el que coinciden x e y , debe cumplirse

$${}^{(k)}A_{n+1}^{11}(x) = \frac{1}{m_{n,k}} \left\{ {}^{(k+2)}A_n^{11}(x) - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[\frac{\partial^j (V_{11} - V_1^0)^{(k-j)} A_n^{11}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial^j V_{12}^{(k-j)} A_n^{21}(x)}{\partial x^j} \right] \right\}$$

$${}^{(k)}A_{n+1}^{12}(x) = \frac{1}{m_{n,k}} \left\{ {}^{(k+2)}A_n^{12}(x) - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[\frac{\partial^j (V_{11} - V_2^0)^{(k-j)} A_n^{12}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial^j V_{12}^{(k-j)} A_n^{22}(x)}{\partial x^j} \right] \right\}$$

$${}^{(k)}A_{n+1}^{21}(x) = \frac{1}{m_{n,k}} \left\{ {}^{(k+2)}A_n^{21}(x) - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[\frac{\partial^j (V_{22} - V_1^0)^{(k-j)} A_n^{21}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial^j V_{12}^{(k-j)} A_n^{11}(x)}{\partial x^j} \right] \right\}$$

$${}^{(k)}A_{n+1}^{22}(x) = \frac{1}{m_{n,k}} \left\{ {}^{(k+2)}A_n^{22}(x) - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[\frac{\partial^j (V_{22} - V_2^0)^{(k-j)} A_n^{22}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial^j V_{12}^{(k-j)} A_n^{12}(x)}{\partial x^j} \right] \right\}$$

donde $m_{n,k} = n + k + 1$. Además ${}^{(k)}A_0^{ij}(x) = \delta^{k0} \delta^{ij}$. Todas las consideraciones anteriores permiten escribir desde las ecuaciones (6.47)-(6.50) el resultado:

$$a_{n+1}^{11}(x, x) = \frac{1}{n+1} \left[{}^{(2)}A_n^{11}(x) - (V_{11}(x) - V_1^0) a_n^{11}(x, x) - V_{12}(x) a_n^{21}(x, x) \right]$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^{12}(x, x) &= \frac{1}{n+1} \left[{}^{(2)}A_n^{12}(x) - (V_{11}(x) - V_2^0) a_n^{12}(x, x) - V_{12}(x) a_n^{22}(x, x) \right] \\
a_{n+1}^{21}(x, x) &= \frac{1}{n+1} \left[{}^{(2)}A_n^{21}(x) - (V_{22}(x) - V_1^0) a_n^{21}(x, x) - V_{12}(x) a_n^{11}(x, x) \right] \\
a_{n+1}^{22}(x, x) &= \frac{1}{n+1} \left[{}^{(2)}A_n^{22}(x) - (V_{22}(x) - V_2^0) a_n^{22}(x, x) - V_{12}(x) a_n^{12}(x, x) \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, pueden ser exhibidas las expresiones de los coeficientes de índice más bajo. Son presentados en la siguiente relación:

$$a_0^{ij}(x, x) = \delta^{ij}$$

$$\begin{aligned}
a_1^{11}(x, x) &= -(V_{11}(x) - V_1^0) \\
a_1^{12}(x, x) &= -V_{12}(x) \\
a_1^{21}(x, x) &= -V_{12}(x) \\
a_1^{22}(x, x) &= -(V_{22}(x) - V_2^0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2^{11}(x, x) &= -\frac{1}{6} \frac{\partial^2 V_{11}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (V_{11}(x) - V_1^0)^2 + \frac{1}{2} V_{12}(x) V_{12}(x) \\
a_2^{12}(x, x) &= -\frac{1}{6} \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} V_{12}(x) [V_{11}(x) + V_{22}(x) - 2V_2^0] \\
a_2^{21}(x, x) &= -\frac{1}{6} \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} V_{12}(x) [(V_{11}(x) + V_{22}(x) - 2V_1^0)] \\
a_2^{22}(x, x) &= -\frac{1}{6} \frac{\partial^2 V_{22}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (V_{22}(x) - V_2^0)^2 + \frac{1}{2} V_{12}(x) V_{12}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3^{11}(x, x) &= -\frac{1}{60} \frac{\partial^4 V_{11}}{\partial x^4} + \frac{1}{6} (V_{11}(x) - V_1^0) \frac{\partial^2 V_{11}}{\partial x^2} + \frac{1}{6} V_{12}(x) \frac{\partial V_{12}}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial V_{11}}{\partial x} \frac{\partial V_{11}}{\partial x} + \\
&\quad + \frac{1}{12} \frac{\partial V_{12}}{\partial x} \frac{\partial V_{12}}{\partial x} - \frac{1}{6} (V_{12}(x))^2 (V_{22}(x) - V_1^0) - \frac{1}{6} (V_{11}(x) - V_1^0)^3 \\
&\quad - \frac{1}{3} (V_{12}(x))^2 (V_{11}(x) - V_1^0) \\
a_3^{22}(x, x) &= -\frac{1}{60} \frac{\partial^4 V_{22}}{\partial x^4} + \frac{1}{6} (V_{22}(x) - V_2^0) \frac{\partial^2 V_{22}}{\partial x^2} + \frac{1}{6} V_{12}(x) \frac{\partial V_{12}}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial V_{22}}{\partial x} \frac{\partial V_{22}}{\partial x} + \\
&\quad + \frac{1}{12} \frac{\partial V_{12}}{\partial x} \frac{\partial V_{12}}{\partial x} - \frac{1}{6} (V_{12}(x))^2 (V_{11}(x) - V_2^0) - \frac{1}{6} (V_{22}(x) - V_2^0)^3 \\
&\quad - \frac{1}{3} (V_{12}(x))^2 (V_{22}(x) - V_2^0)
\end{aligned}$$

6.8 Aproximación asintótica de ΔM con $N = 2$

Las expresiones encontradas en la sección 6.5 referidas a la corrección cuántica para modelos con espacio interno unidimensional pueden ser generalizadas para el caso de modelos con espacio interno bidimensional. En los sucesivos párrafos se analiza

esta generalización en una forma escueta dada su similitud con el caso ya tratado en la sección 6.5. Como ya fue advertido basaremos nuestro estudio sobre hessianos adimensionales

$$\bar{\mathcal{H}}_v = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{V}_1^0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{V}_2^0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathcal{H}}_K = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{V}_{11}(x) & \mathcal{V}_{12}(x) \\ \mathcal{V}_{12}(x) & -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{V}_{22}(x) \end{pmatrix}$$

que no introducen ambigüedades dimensionales en la función zeta generalizada. La traza atribuida al operador $e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_v}$ es

$$\text{Tr} e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_v} = \frac{\bar{L}}{2\sqrt{\pi}\beta} \left(e^{-\beta\mathcal{V}_1^0} + e^{-\beta\mathcal{V}_2^0} \right)$$

lo que proporciona la función zeta generalizada asociada al hessiano del vacío

$$\zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s) = \frac{\bar{L}}{2\sqrt{\pi}\Gamma[s]} \left((\mathcal{V}_1^0)^{\frac{1}{2}-s} \gamma[-\frac{1}{2} + s, \mathcal{V}_1^0] + (\mathcal{V}_2^0)^{\frac{1}{2}-s} \gamma[-\frac{1}{2} + s, \mathcal{V}_2^0] \right) + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s)$$

La corrección cuántica introduce además la traza del hessiano $\bar{\mathcal{H}}_K$, la cual debe ser estudiada mediante el desarrollo asintótico introducido en la sección anterior. No hemos de olvidar que debe ser substraida la contribución debida a los j modos ceros del hessiano. Entonces, para $0 < \beta < 1$,

$$\text{Tr}^* e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_K} = \text{Tr} e^{-\beta\bar{\mathcal{H}}_K} - j e^0 = -j + \frac{e^{-\beta\mathcal{V}_1^0}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n^{11}(\bar{\mathcal{H}}_K) \beta^{n-\frac{1}{2}} + \frac{e^{-\beta\mathcal{V}_2^0}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n^{22}(\bar{\mathcal{H}}_K) \beta^{n-\frac{1}{2}}$$

lo que permite escribir

$$\zeta_{\bar{\mathcal{H}}_K}(s) - \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s) \approx -\frac{j}{s\Gamma[s]} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma[s]} \sum_{n=1}^{n_0-1} \left[\tilde{a}_n^{11}(\bar{\mathcal{H}}_K) (\mathcal{V}_1^0)^{\frac{1}{2}-n-s} \gamma[n + s - \frac{1}{2}, \mathcal{V}_1^0] + \tilde{a}_n^{22}(\bar{\mathcal{H}}_K) (\mathcal{V}_2^0)^{\frac{1}{2}-n-s} \gamma[n + s - \frac{1}{2}, \mathcal{V}_2^0] \right]$$

donde se han despreciado los términos

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} b_{n_0, \bar{\mathcal{H}}_K}(s) + B_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(s) - B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(s)$$

Además, es preciso obtener la diferencia entre las constantes cosmológicas. Asumiendo que trataremos con hessianos bidimensionales cuyas componentes no diagonales se desvanecen para grandes distancias, tendremos

$$\Delta R = -\frac{\hbar}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sqrt{k^2 + V_1^0} \delta_1(k) + \sqrt{k^2 + V_2^0} \delta_2(k) \right]$$

de modo que el uso de la aproximación de Born [59] para hessianos bidimensionales, que describe el comportamiento de los desfases para momentos altos,

$$\delta_1(k) \approx -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} dx [V_{11}(x) - V_1^0 + V_{12}(x)]$$

$$\delta_2(k) \approx -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} dx [V_{22}(x) - V_2^0 + V_{12}(x)]$$

proporciona la contribución sobre los términos potenciales adimensionales

$$\Delta R = \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} \langle \mathcal{V}_{11}(\bar{x}) - \mathcal{V}_1^0 + 2\mathcal{V}_{12}(\bar{x}) + \mathcal{V}_{22}(\bar{x}) - \mathcal{V}_2^0 \rangle$$

lo que permite completar la fórmula seguida por la corrección cuántica a la masa del kink:

$$\begin{aligned} \Delta M = & \\ = & \underbrace{-\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{8\pi} \sum_{n=2}^{n_0-1} [\tilde{a}_n^{11}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_1^0)^{-n+1} \gamma[n-1, \mathcal{V}_1^0] + \tilde{a}_n^{22}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_2^0)^{-n+1} \gamma[n-1, \mathcal{V}_2^0]}_{d_{n_0}} + \\ & + \underbrace{\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \left((\mathcal{V}_1^0)^{-\frac{1}{2}-s} \tilde{a}_1^{11}(\bar{\mathcal{H}}_K) \frac{\gamma[s+\frac{1}{2}, \mathcal{V}_1^0]}{\Gamma(s)} + (\mathcal{V}_2^0)^{-\frac{1}{2}-s} \tilde{a}_1^{22}(\bar{\mathcal{H}}_K) \frac{\gamma[s+\frac{1}{2}, \mathcal{V}_2^0]}{\Gamma(s)} \right)}_{R_{\text{ultr}}^1} + \\ & + \underbrace{\hbar C_{\text{ct}} (\bar{\mathcal{E}}_{\text{ct}}[\bar{\phi}_K] - \bar{\mathcal{E}}_{\text{ct}}[\bar{\phi}_v])}_{R_{\text{ultr}}^2} + \underbrace{\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} \langle \mathcal{V}_{11}(\bar{x}) - \mathcal{V}_1^0 + 2\mathcal{V}_{12}(\bar{x}) + \mathcal{V}_{22}(\bar{x}) - \mathcal{V}_2^0 \rangle}_{\Delta R} - \\ & \underbrace{-\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{2\sqrt{\pi}} j}_{R_0} + \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{2} \varepsilon(-\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

De modo análogo al argumento usado en el caso unidimensional, los contratérminos se corresponden con una función lineal en δm^2 y por ello $R_{\text{ultr}}^2 = \lambda \zeta_{\mathcal{H}_v}(\frac{1}{2})$, donde la constante λ debe ser elegida de tal modo que contrarreste el polo de R_{ultr}^1 . Es por ello que podemos concluir que

$$\begin{aligned} R_{\text{ultr}} &= R_{\text{ultr}}^1 + R_{\text{ultr}}^2 = R_{\text{ultr}}^1 + \lambda \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \zeta_{\mathcal{H}_v}(s) = \\ &= \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\tilde{a}_1^{11}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_1^0)^{-\frac{1}{2}-s} \gamma[s+\frac{1}{2}, \mathcal{V}_1^0] + \tilde{a}_1^{22}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_2^0)^{-\frac{1}{2}-s} \gamma[s+\frac{1}{2}, \mathcal{V}_2^0]}{\Gamma[s]} + \\ &+ \frac{\lambda \bar{L}}{2\sqrt{\pi}} \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(\mathcal{V}_1^0)^{\frac{1}{2}-s} \gamma[-\frac{1}{2}+s, \mathcal{V}_1^0] + (\mathcal{V}_2^0)^{\frac{1}{2}-s} \gamma[-\frac{1}{2}+s, \mathcal{V}_2^0]}{\Gamma[s]} + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = \\ &= \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{a}_1^{11}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_1^0)^{-\varepsilon} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}_1^0] + \tilde{a}_1^{22}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_2^0)^{-\varepsilon} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}_2^0]}{\Gamma[-\frac{1}{2}+\varepsilon]} + \\ &+ \frac{\lambda \bar{L}}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{V}_1^0)^{-\varepsilon} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}_1^0] + (\mathcal{V}_2^0)^{-\varepsilon} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}_2^0]}{\Gamma[\frac{1}{2}+\varepsilon]} + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = \\ &= \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{2}+\varepsilon) (\tilde{a}_1^{11}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_1^0)^{-\varepsilon} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}_1^0] + \tilde{a}_1^{22}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_2^0)^{-\varepsilon} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}_2^0])}{\Gamma[\frac{1}{2}+\varepsilon]} + \\ &+ \frac{\lambda \bar{L}}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{V}_1^0)^{-\varepsilon} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}_1^0] + (\mathcal{V}_2^0)^{-\varepsilon} \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}_2^0]}{\Gamma[\frac{1}{2}+\varepsilon]} + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{a}_1^{11}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_1^0)^{-\varepsilon} \varepsilon \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}_1^0] + \tilde{a}_1^{22}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_2^0)^{-\varepsilon} \varepsilon \gamma[\varepsilon, \mathcal{V}_2^0]}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = \\
 &= \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} [\tilde{a}_1^{11}(\bar{\mathcal{H}}_K) + \tilde{a}_1^{22}(\bar{\mathcal{H}}_K)] + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = \\
 &= -\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} \int d\bar{x} [\mathcal{V}_{11}(\bar{x}) - \mathcal{V}_1^0 + \mathcal{V}_{22}(\bar{x}) - \mathcal{V}_2^0] + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2}) = \\
 &= -\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4\pi} \langle \mathcal{V}_{11}(\bar{x}) - \mathcal{V}_1^0 + \mathcal{V}_{22}(\bar{x}) - \mathcal{V}_2^0 \rangle + B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

habiendo elegido $\lambda = \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{4L} [\tilde{a}_1^{11}(\bar{\mathcal{H}}_K) + \tilde{a}_1^{22}(\bar{\mathcal{H}}_K)]$. Con todo ello, la corrección a la masa viene definitivamente determinada en la forma

$$\Delta M \approx \underbrace{-\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{2\sqrt{\pi}} j}_{R_0} - \underbrace{\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{8\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=2}^{n_0-1} \tilde{a}_n^{kk}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_k^0)^{-n+1} \gamma[n-1, \mathcal{V}_k^0]}_{d_{n_0}} + \underbrace{\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{2\pi} \langle \mathcal{V}_{12}(\bar{x}) \rangle}_{R_{\text{ultr}} + \Delta R} \quad (6.51)$$

o bien, para aquellos casos en que el término $V_{12}(x)$ sea impar (como en los casos que trataremos),

$$\Delta M = \underbrace{-\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{2\sqrt{\pi}} j}_{R_0} - \underbrace{\frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{8\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=2}^{n_0-1} \tilde{a}_n^{kk}(\bar{\mathcal{H}}_K)(\mathcal{V}_k^0)^{-n+1} \gamma[n-1, \mathcal{V}_k^0]}_{d_{n_0}} + \text{Error} \quad (6.52)$$

donde el término no computable en un problema general, designado por “Error” es

$$\text{Error} = \frac{\hbar C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}}}{2} \left[-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} b_{n_0, \bar{\mathcal{H}}_K}(-\frac{1}{2}) + B_{\bar{\mathcal{H}}_K}^*(-\frac{1}{2}) - B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(-\frac{1}{2}) \right] + \lambda B_{\bar{\mathcal{H}}_v}(\frac{1}{2})$$

6.9 Corrección cuántica a la masa del kink en modelos con $N=2$

Terminaremos el capítulo, utilizando las técnicas descritas sobre dos modelos de espacio interno bidimensional ya tratados en capítulos precedentes, son el modelo MSTB y el modelo BNRT, este último abarca el modelo III[1][11]. El primero de ellos introduce un parámetro no trivial σ que genera dos fases distintas, la primera $\sigma^2 > 1$ en la que existe una única solución kink, el TK1, y la segunda $\sigma^2 < 1$ en la que aflora una interesante variedad de kinks, que engloba la solución TK1, TK2 y los NTK(γ_1). En este rango estamos interesados por la solución estable TK2. Obtendremos la corrección cuántica a dichas soluciones. Por otra parte, el modelo BNRT presenta también una amplia gama de soluciones de tipo kink. En particular, nos centraremos en los kinks estables TK1 y TKD(0) de los que conocemos explícitamente la expresión de su hessiano y podremos aplicar los procedimientos anteriores.

6.9.1 Modelo MSTB

El modelo MSTB, estudiado exhaustivamente en el capítulo 2, presenta un funcional energía correspondiente a la forma

$$\mathcal{E}[\chi] = \int dy \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \chi_1}{\partial y} \frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \chi_2}{\partial y} \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\lambda^2}{4} \left(\chi_1^2 + \chi_2^2 - \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4} \chi_2^2 \right]$$

donde las constantes de acoplamiento que entran a formar parte del sistema físico tienen las dimensiones $[\beta] = L^{-1}$, $[\lambda^2] = M^{-1}L^{-3}$. Es por ello, que el sistema introduce un término potencial

$$U(\chi_1, \chi_2) = \frac{\lambda^2}{4} \left(\chi_1^2 + \chi_2^2 - \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4} \chi_2^2$$

La prescripción de orden normal introduce en la corrección ΔM los contratérminos

$$\mathcal{E}_{\text{ct}}[\chi] = \int dy \left[-\frac{1}{2} \lambda^2 \hbar (3\delta m_1^2 + \delta m_2^2) \chi_1^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \hbar (3\delta m_2^2 + \delta m_1^2) \chi_2^2 + D \right] \quad (6.53)$$

donde $\delta m_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{q^2 + V_i^0}}$ con $V_1^0 = 2m^2$ y $V_2^0 = \frac{\beta^2}{2}$. En la expresión (6.53) pueden distinguirse las contribuciones asociadas a la renormalización de las dos masas que caracterizan el sistema,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ct}}^1[\chi] &= -\frac{1}{2} \lambda^2 \hbar \delta m_1^2 \int dy [3\chi_1^2 + \chi_2^2] \\ \mathcal{E}_{\text{ct}}^2[\chi] &= -\frac{1}{2} \lambda^2 \hbar \delta m_2^2 \int dy [\chi_1^2 + 3\chi_2^2] \end{aligned}$$

La introducción de las magnitudes $\chi = \frac{m}{\lambda} \phi$, $y = \frac{\sqrt{2}}{m} x$ y $\sigma^2 = \frac{\beta^2}{\lambda^2}$ permiten encontrar expresiones adimensionales que caracterizan el modelo en estudio. Así, pues el funcional energía puede escribirse como $\mathcal{E}[\chi] = \frac{m^3}{\sqrt{2}\lambda^2} \bar{\mathcal{E}}[\phi]$, donde $\bar{\mathcal{E}}[\phi]$ es el funcional adimensional

$$\bar{\mathcal{E}}[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} + \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \phi_2^2 \right]$$

mientras que la relación entre los autovalores asociados al hessiano con y sin dimensiones es $\omega_n = \frac{m}{\sqrt{2}} \bar{\omega}_n$, lo que consecuentemente proporciona que $C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$. Al uso de tales variables fue demostrado la presencia de las soluciones triviales $\phi_v = \pm 1$, junto a otras soluciones estables, de naturaleza topológica, según el régimen de valores adoptados por el parámetro σ^2 . Si el rango correspondía a $0 < \sigma^2 < 1$, la solución TK2,

$$\phi_{\text{TK2}}(x) = \pm \tanh \sigma x + i \bar{\sigma} \operatorname{sech} \sigma x$$

conformaba la solución de mínima energía en su sector topológico, siendo el hessiano asociado

$$\bar{\mathcal{H}}^{\text{TK2}} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 4 - 2(2 + \sigma^2) \operatorname{sech}^2 \sigma x & 4\bar{\sigma} \operatorname{sech} \sigma x \tanh \sigma x \\ 4\bar{\sigma} \operatorname{sech} \sigma x \tanh \sigma x & -\frac{d^2}{dx^2} + \sigma^2 + 2(2 - 3\sigma^2) \operatorname{sech}^2 \sigma x \end{pmatrix}$$

mientras que si acaecía el rango $\sigma^2 > 1$ la solución TK1,

$$\phi_{\text{TK1}}(x) = \pm \tanh x$$

adquiría tal papel, siendo su hessiano la forma diagonal

$$\bar{\mathcal{H}}^{\text{TK1}} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 4 - 6 \operatorname{sech}^2 x & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + \sigma^2 - 2 \operatorname{sech}^2 x \end{pmatrix}$$

Una vez introducidos todos los preliminares acerca del modelo MSTB, pasaremos al cálculo de la corrección cuántica a la masa de las dos soluciones kinks mencionadas según los valores del parámetro σ . En el rango $\sigma^2 > 1$, el hessiano asociado a la solución estable TK1 es diagonal y sus componentes presentan problemas espectrales que pueden ser resueltos. En este caso podremos utilizar tanto los métodos que aportan la respuesta exacta, de densidades espectrales y de las funciones zeta generalizadas, como el desarrollo asintótico. Sin embargo, en el rango $0 < \sigma^2 < 1$, en el que el kink con dos componentes no nulas TK2 es estable, será el último método el único capaz de proporcionarnos el resultado buscado.

Corrección cuántica del TK1: Densidades espectrales

La evaluación de la corrección cuántica a la masa del TK1 puede ser abordada mediante la expresión (6.11), dado que el carácter diagonal del hessiano implicado permite resolver el problema espectral. Entonces, la contribución de cada componente en el hessiano será aditiva, tal que se tiene que $\Delta M = \Delta M(\mathcal{H}_{11}^{\text{TK1}}) + \Delta M(\mathcal{H}_{22}^{\text{TK1}})$. El espectro de los hessianos adimensionales queda especificado según la forma siguiente: 1) $\operatorname{Spec} \bar{\mathcal{H}}_{11}^{\text{TK1}} = \{0\} \cup \{3\} \cup \{4\}_{\frac{1}{2}} \cup \{q^2 + 4\}_{q \in \mathbb{R}}$ con desfases $\delta_1(q) = -2 \arctan \frac{3q}{2-q^2}$; 2) $\operatorname{Spec} \bar{\mathcal{H}}_{22}^{\text{TK1}} = \{\sigma^2 - 1\} \cup \{\sigma^2\}_{\frac{1}{2}} \cup \{q^2 + \sigma^2\}_{q \in \mathbb{R}}$ con desfases $\delta_2(q) = 2 \arctan \frac{1}{q}$. Existen dos estados semiligados libres junto a otros dos asociados a cada componente del hessiano $\bar{\mathcal{H}}^{\text{TK1}}$, los cuales contrarrestan su contribución en la corrección ΔM .

El cálculo de $\Delta M(\mathcal{H}_{11})$ se corresponde idénticamente con el realizado para la corrección cuántica a la masa del kink en el modelo ϕ^4 , y por ello, $\Delta M(\mathcal{H}_{11}) = \hbar m \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \right)$. $\Delta M(\mathcal{H}_{22})$ es obtenida escribiendo

$$\Delta M(\mathcal{H}_{22}) = \frac{\hbar m}{2\sqrt{2}} \left[\sqrt{\sigma^2 - 1} + \int \frac{dq}{2\pi} \frac{\partial \delta_2(q)}{\partial q} \sqrt{q^2 + \sigma^2} \right] + \mathcal{E}_{\text{ct}}^2[\phi_{\text{TK1}}] - \mathcal{E}_{\text{ct}}^2[\phi_v] + \Delta R^{22} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar m}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sigma^2 - 1} - \frac{\hbar m}{4\sqrt{2}\pi} \int dq \left[\frac{2\sqrt{q^2 + \sigma^2}}{1 + q^2} - \frac{2}{\sqrt{q^2 + \sigma^2}} \right] + \frac{\hbar m}{4\sqrt{2}\pi} \langle \mathcal{V}_{22}(x) - \sigma^2 \rangle = \\
&= \hbar m \left[\frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sqrt{2}\pi} \arcsen \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \right]
\end{aligned}$$

de tal modo que la corrección cuántica a la masa para la solución topológica de una componente TK1 será:

$$\Delta M_{\text{TK1}} = \hbar m \left[\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}\pi} + \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sqrt{2}\pi} \arcsen \frac{1}{\sigma} \right]$$

Si $\sigma^2 < 1$ la respuesta es compleja, indicando la inestabilidad del kink y por ello puede decaer a otra solución.

Corrección cuántica del TK1: Funciones zeta exactas

En este apartado aplicaremos la regularización mediante el uso de las funciones zeta generalizadas. En este caso podemos considerar el método sobre cada una de las componentes de los hessianos asociados. Es, por ello, que dado el estudio considerado en la sección 6.6.2 al respecto, la primera de las contribuciones puede ser escrita directamente, $\Delta M(\mathcal{H}_{11}) = \hbar m \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{2}\pi} \right)$. La segunda contribución precisa hacer explícitos los cálculos. El conocimiento del espectro de los operadores hessianos permite obtener

$$\text{Tr} e^{-\beta \bar{\mathcal{H}}_{22}^{\text{TK1}}} - \text{Tr} e^{-\beta \bar{\mathcal{H}}_{22}^v} - e^0 = -1 + e^{-\beta(\sigma^2 - 1)} - e^{-\beta(\sigma^2 - 1)} \text{Erfc} \sqrt{\beta}$$

que proporciona la diferencia entre las funciones zeta generalizada sobre el kink y el vacío,

$$\zeta_{\bar{\mathcal{H}}_{22}^{\text{TK1}}}^*(s) - \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_{22}^v}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi} (\sigma^2 - 1)^{\frac{1}{2} + s}} \frac{\Gamma[\frac{1}{2} + s]}{\Gamma[s]} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + s, \frac{3}{2}; \frac{-1}{\sigma^2 - 1}\right]$$

Por otra parte, los contratérminos que afectan a esta componente pueden plasmarse en el siguiente modo

$$\mathcal{E}_{\text{ct}}^2[\phi_{\text{TK1}}] - \mathcal{E}_{\text{ct}}^2[\phi_v] = -\frac{1}{2} \lambda^2 \hbar \delta m_2^2 \int dx [\chi_1^2(\phi_{\text{TK1}}) - \chi_1^2(\phi_v)] = \frac{\hbar m}{\sqrt{2}\bar{L}} \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_{22}^v}\left(\frac{1}{2}\right)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\zeta_{\bar{\mathcal{H}}_{22}^v}(-\frac{1}{2}) = \frac{\bar{L}}{2\pi} \int \frac{dq}{\sqrt{q^2 + \sigma^2}}$, siendo $\bar{L} = \frac{m}{\sqrt{2}} L$ la magnitud adimensional que determina la longitud del sistema. La regularización basada en las funciones zeta generalizadas requiere la continuación analítica de la expresión precedente sobre el plano complejo,

$$\mathcal{E}_{\text{ct}}^2[\zeta_{\bar{\mathcal{H}}_{22}^v}(s)] = \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\hbar m}{\sqrt{2}\bar{L}} \zeta_{\bar{\mathcal{H}}_{22}^v}(s)$$

La aplicación de tal regularización concluye

$$\begin{aligned}
\Delta M(\mathcal{H}_{22}) &= \frac{\hbar m}{2\sqrt{2}} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} [\zeta_{\mathcal{H}_{22}^{\text{TK1}}}(s) - \zeta_{\mathcal{H}_{22}^v}(s)] + \frac{\hbar m}{\sqrt{2L}} \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \zeta_{\mathcal{H}_{22}^v}(s) + \Delta R^{22} = \\
&= \frac{\hbar m}{2\sqrt{2}} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi} (\sigma^2 - 1)^{\frac{1}{2}+s}} \frac{\Gamma[\frac{1}{2} + s]}{\Gamma[s]} {}_2F_1[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + s, \frac{3}{2}; \frac{-1}{\sigma^2-1}] + \\
&\quad + \frac{\hbar m}{\sqrt{2L}} \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\bar{L}}{2\sqrt{\pi}} (\sigma^2)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma[-\frac{1}{2} + s]}{\Gamma[s]} + \Delta R^{22} = \\
&= \frac{\hbar m}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{(\sigma^2 - 1)^\varepsilon} \frac{\Gamma[\varepsilon]}{\Gamma[-\frac{1}{2} + \varepsilon]} {}_2F_1[\frac{1}{2}, \varepsilon, \frac{3}{2}; \frac{-1}{\sigma^2-1}] + \\
&\quad + \frac{\hbar m}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma^2)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma[\varepsilon]}{\Gamma[\frac{1}{2} + \varepsilon]} + \Delta R^{22} = \\
&= \frac{\hbar m}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\gamma + \ln(\sigma^2 - 1) + \psi(\frac{3}{2}) - {}_2F_1'[\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}; \frac{-1}{\sigma^2-1}] \right] \right] + \\
&\quad + \frac{\hbar m}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\gamma - \ln \sigma^2 - \psi(\frac{1}{2}) \right] \right] + \Delta R^{22} = \\
&= \frac{\hbar m}{2\sqrt{2\pi}} \left(2 + \ln \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2} - {}_2F_1'[\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}; \frac{-1}{\sigma^2-1}] \right) - \frac{\hbar m}{\sqrt{2\pi}} = \\
&= \frac{\hbar m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\sigma^2 - 1} \arcsen \frac{1}{\sigma} - \frac{\hbar m}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

donde por ${}_2F_1'[a, b, c; z]$ denotamos la derivada de la función hipergeométrica respecto del segundo argumento. La respuesta final se obtiene de sumar las dos contribuciones atribuidas a las componentes del hessiano, $\Delta M_{\text{TK1}} = \Delta M_{\text{TK1}}(\mathcal{H}_{11}) + \Delta M_{\text{TK1}}(\mathcal{H}_{22}) = \hbar m \left[\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{2\pi}} \arcsen \frac{1}{\sigma} \right]$ que coincide con la respuesta encontrada anteriormente⁵.

Corrección cuántica del TK1 y TK2: Desarrollo asintótico

Finalmente aplicaremos el desarrollo asintótico para obtener la estimación de la corrección cuántica a la masa de los kinks TK1 y TK2. La virtud de este método es que evita la resolución espectral de los hessianos, de modo que incluso en el rango de las soluciones TK2, donde los hessianos son no diagonales, podremos obtener estimaciones a tal corrección.

La aplicación de la fórmula (6.52) exige en primer lugar la evaluación de los coeficientes del desarrollo asintótico $a_i^{11}(\bar{\mathcal{H}}_{\text{TK1}})$ y $a_i^{22}(\bar{\mathcal{H}}_{\text{TK1}})$ en el régimen $\sigma^2 \leq 1$ y $a_i^{11}(\bar{\mathcal{H}}_{\text{TK2}})$ y $a_i^{22}(\bar{\mathcal{H}}_{\text{TK2}})$ en el régimen $0 < \sigma^2 < 1$. Éstos quedan exhibidos en la siguiente tabla:

⁵El resultado obtenido puede escribirse en una forma más simétrica dada por la relación $\Delta M = \frac{\hbar m}{2\sqrt{2\pi}} \left(2 + \ln \frac{3}{4} - {}_2F_1'[\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}; \frac{-1}{3}] + 2 + \ln \frac{\sigma^2-1}{\sigma^2} - {}_2F_1'[\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}; \frac{-1}{\sigma^2-1}] \right) + \Delta R$, sobre la que quedan aisladas las contribuciones de los espectros discretos y continuo de cada hessiano.

i	$\sigma = 0.4$		$\sigma = 0.5$		$\sigma = 0.55$	
	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$
1	21.5885	-15.1848	17.9984	-9.99909	16.7449	-7.94519
2	42.2799	26.5812	34.9975	16.3313	32.4671	12.6500
3	57.4180	-30.1703	47.9636	-16.8309	44.7212	-12.3062
4	58.5047	25.8672	49.4219	13.2491	46.3860	9.16729
5	47.6157	-17.8041	40.6415	-8.41779	38.3798	-5.58457
6	32.2580	10.2438	27.7911	4.4983	26.3875	2.87923
7	18.7171	-5.06707	16.2632	-2.08006	15.5166	-1.29275
8	9.4974	2.19973	8.31759	-0.849979	7.97034	0.516246
9	4.28184	-0.851489	3.77771	-0.295903	3.63439	-0.186287
10	1.73679	0.297602	1.51992	0.0884623	1.48987	0.0614301

i	$\sigma = 0.6$		$\sigma = 0.7$		$\sigma = 0.8$	
	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$
1	15.7831	-6.13326	14.2285	-3.02857	13.2000	-0.4000
2	30.4424	9.45048	27.5051	4.95579	25.6320	2.42133
3	42.1577	-8.61765	38.5365	-3.88117	36.3858	-1.46193
4	44.0430	6.17577	40.9039	2.58248	39.2877	0.984184
5	36.6873	-3.61578	34.5847	-1.43041	33.7529	-0.53935
6	25.3728	1.80867	24.2279	0.696572	23.9672	0.267282
7	14.9467	-0.795022	14.4768	-0.30375	14.4819	-0.117869
8	7.7382	0.31335	7.53962	0.119982	7.61204	0.0464771
9	3.5428	-0.112272	3.47957	-0.0425253	3.53989	-0.0162638
10	1.45761	0.0369178	1.44002	0.0132872	1.47558	0.00497705

i	$\sigma = 0.9$		$\sigma = 0.95$		$\sigma \geq 1$	
	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TK2}})$	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TK1}})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TK1}})$
1	12.4889	1.91111	12.2211	2.97895	12.0000	4.0000
2	24.5218	1.67378	24.1951	1.952444	24.0000	2.66667
3	35.3368	-0.241656	35.16.16	0.310882	35.2000	1.066667
4	38.8216	0.341514	38.9553	0.230323	39.3143	0.304762
5	33.8715	-0.16798	34.2227	-0.053986	34.7429	0.0677249
6	24.3610	0.0863412	24.7475	0.0372813	25.2306	0.0123136
7	14.8742	-0.0370868	15.1758	-0.0145382	15.5208	0.0018944
8	7.88516	0.0140749	8.07351	0.00547229	8.27702	0.000252587
9	3.69263	-0.0046464	3.79191	-0.00173035	3.89498	$2.97134 \cdot 10^{-5}$
10	1.54847	0.001313	1.594006	0.0003535	1.63998	$3.12591 \cdot 10^{-6}$

Estas tablas pueden ser usadas para estimar finalmente el valor arrojado por la fórmula (6.52) para la corrección cuántica a la masa del TK2 y del TK1 en su rango de estabilidad. Así, para distintos valores de la constante de acoplamiento adimensional σ , se encuentra los siguientes resultados:

σ	$\Delta M/\hbar m$	σ	$\Delta M/\hbar m$
0.4	-1.103270	1.2	-0.518426
0.5	-0.852622	1.4	-0.509645
0.6	-0.689001	1.6	-0.502291
0.7	-0.583835	1.8	-0.496369
0.8	-0.524363	2.0	-0.49172
0.9	-0.505708	2.5	-0.484183
0.95	-0.511638	3.0	-0.480101
1.0	-0.528311	4.0	-0.476181

Todas las estimaciones encontradas quedan resumidas en la figura 6.2, en el que se representan la corrección cuántica en la masa respecto de la constante de acoplamiento σ , y donde debe considerarse que en cada régimen la solución kink estable viene determinada bien por el TK1, bien por el TK2. La respuesta exacta para el TK1 queda representado por el tramo continuo, mientras que los datos obtenidos por el desarrollo asintótico son plasmados mediante puntos.

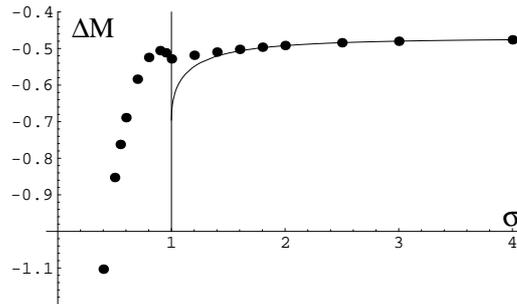


Figura 6.1: Corrección cuántica a la masa del TK2 ($0 < \sigma^2 < 1$) y TK1 ($\sigma^2 > 1$) en el modelo MSTB.

A la vista de la gráfica mencionada hemos de advertir los siguientes puntos: 1) La comparación entre los resultados exactos y la estimación asintótica para el caso de la solución TK1 nos permite afirmar que el desarrollo asintótico proporciona una respuesta con gran exactitud para los valores sobre $\sigma > 1.2$. 2) La discrepancia surgida en la corrección cuántica calculada mediante el desarrollo asintótico en el rango aproximado entre $\sigma \in (0.9, 1.1)$ respecto de la respuesta exacta puede ser explicada en la base de que para el valor $\sigma = 1$ el autovalor fundamental de la segunda componente \mathcal{H}_{22} del hessiano se convierte en un modo cero, añadido al ya presentado por la primera componente \mathcal{H}_{11} , de modo que en tal caso caso habría que modificar el procedimiento para describir esta nueva situación. Los efectos de este nuevo modo distorsionan la respuesta del procedimiento en una pequeña franja alrededor del valor unitario de la constante de acoplamiento σ . 3) En el rango en el que la solución estable es el TK2, el único procedimiento que nos permite encontrar alguna respuesta es el desarrollo asintótico, de modo que en la figura sólo encontramos datos representados por puntos. No es posible acotar el error cometido en este caso, que suponemos lo suficientemente pequeño para que los valores encontrados puedan suponerse como buenas aproximaciones.

6.9.2 Modelo BNRT

Analizaremos en esta sección el comportamiento a nivel cuántico de las masas de algunos de los kinks estables hallados en el modelo BNRT. El término potencial

asociado a este sistema físico escrito en las variables originales es

$$U(\chi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\chi_1^2 - a^2)^2 + \frac{1}{2}\lambda\mu(\chi_1^2 - a^2)\chi_2^2 + \frac{1}{8}\mu^2\chi_2^4 + \frac{1}{2}\mu^2\chi_1^2\chi_2^2$$

La renormalización de la masa, obtenida sobre la prescripción de orden normal sobre los operadores introduce los contratérminos

$$\mathcal{E}_{\text{ct}}[\chi] = - \int dy \left(\hbar [3\lambda^2\delta m_1^2 + \frac{1}{2}\mu(\lambda + \mu)\delta m_2^2]\chi_1^2 + \hbar [\frac{3}{4}\mu^2\delta m_2^2 + \frac{1}{2}\mu(\lambda + \mu)\delta m_1^2]\chi_2^2 \right)$$

que podemos descomponer en la suma de dos términos $\mathcal{E}_{\text{ct}}[\chi] = \mathcal{E}_{\text{ct}}^1[\chi] + \mathcal{E}_{\text{ct}}^2[\chi]$, siendo

$$\mathcal{E}_{\text{ct}}^1[\chi] = -\hbar\delta m_1^2 \int dy [3\lambda^2\chi_1^2 - \frac{1}{2}\mu(\lambda + \mu)\chi_2^2]$$

$$\mathcal{E}_{\text{ct}}^2[\chi] = -\hbar\delta m_2^2 \frac{\mu}{2} \int dy [(\lambda + \mu)\chi_1^2 + \frac{3}{2}\mu\chi_2^2]$$

donde $\delta m_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 + V_i^0}}$.

El estudio de este modelo, realizado en el capítulo 5, definía las variables adimensionales $\chi_j = 2a\phi_j$, $y = \frac{2\sqrt{2}}{a\lambda}x$ y $\sigma = \frac{\mu}{\lambda}$, que implicaban la relación entre las energías $\mathcal{E}^d[\chi] = \sqrt{2}a^3\lambda\mathcal{E}[\phi]$. En estas variables el término potencial quedaba escrito como

$$U(\phi) = (4\phi_1^2 + 2\sigma\phi_2^2 - 1)^2 + 16\sigma^2\phi_1^2\phi_2^2$$

El cálculo de las correcciones cuánticas será considerado sobre dos soluciones:

- *i*) En primera instancia trataremos con un kink topológico de una componente no nula, el TK1

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2} \tanh 2\sqrt{2}x \quad \text{ó} \quad \chi(y) = a \tanh(a\lambda y)$$

cuyo hessiano es diagonal y dado como,

$$\bar{\mathcal{H}}^{\text{TK1}} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2} + 4 - 6 \operatorname{sech}^2 z & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dz^2} + \sigma^2 - \sigma(\sigma + 1) \operatorname{sech}^2 z \end{pmatrix}$$

siendo $z = my$, donde por sencillez en la escritura hacemos $m = \lambda a$.

- *ii*) Seguidamente consideraremos un kink topológico dos componentes no nulas, el TKD(0)

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2} \tanh 2\sqrt{2}\sigma x \pm i \sqrt{\frac{1-\sigma}{2\sigma}} \operatorname{sech} 2\sqrt{2}\sigma x$$

con hessiano asociado

$$\bar{\mathcal{H}}^{\text{TKD}(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz'^2} + \frac{2}{\sigma^2} [2 - (2 + \sigma^2) \operatorname{sech}^2 z'] & 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\sigma(1-\sigma)(1+\sigma)}}{\sigma^2} \operatorname{sech} z' \tanh z' \\ 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\sigma(1-\sigma)(1+\sigma)}}{\sigma^2} \operatorname{sech} z' \tanh z' & -\frac{d^2}{dz'^2} + \frac{1}{\sigma} [\sigma + 2(1 - 2\sigma) \operatorname{sech}^2 z'] \end{pmatrix}$$

con $z' = 2\sqrt{2}\sigma x = m\sigma y$.

Corrección cuántica del TK1: Densidades espectrales

La corrección cuántica a la masa del kink TK1 será calculada en primer lugar usando la fórmula (6.11) basada en las densidades espectrales del operador hessiano asociado. Este operador se presenta diagonal, tal que la corrección buscada es la suma de las contribuciones asociadas a cada componente, $\Delta M = \Delta(\mathcal{H}_{11}^{\text{TK1}}) + \Delta(\mathcal{H}_{22}^{\text{TK1}})$. El espectro asociado al hessiano adimensional $\bar{\mathcal{H}}_{11}^{\text{TK1}}$ es $\text{Spec}(\bar{\mathcal{H}}_{11}^{\text{TK1}}) = \{0\} \cup \{3\} \cup \{4\}_{\frac{1}{2}} \cup \{q^2 + 4\}_{q \in \mathbb{R}}$ donde el desfase corresponde a la expresión $\delta_1(q) = -2 \arctan \frac{3q}{2-q^2}$. Dado el cambio realizado $z = my$ es fácil comprobar la relación entre los autovalores de los hessianos con y sin dimensiones, $\omega_n = m\bar{\omega}_n$, lo que implica que $C_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}} = m$. La primera contribución a la corrección cuántica obedece a los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \Delta M_{11}[\text{TK1}] &= \frac{\hbar m}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \sqrt{q^2 + 4} \frac{d\delta(q)}{dq} \right) + \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_{\text{TK1}}] - \mathcal{E}_{\text{ct}}[\phi_v] + \Delta R = \\ &= \frac{\sqrt{3}\hbar m}{2} - \frac{\hbar m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{3\sqrt{q^2 + 4}(q^2 + 2)}{q^4 + 5q^2 + 4} + \frac{3\hbar m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 4}} + \frac{\hbar m}{4\pi} \langle \mathcal{V}(x) - 4 \rangle = \\ &= \frac{\sqrt{3}\hbar m}{2} - \frac{\hbar m}{\sqrt{3}} + \frac{\hbar m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx (-6 \text{sech}^2 x) = \hbar m \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{\pi} \right) \end{aligned}$$

Más detalles deben ser utilizados en la identificación del espectro del operador $\bar{\mathcal{H}}_{22}^{\text{TK1}}$, dado que en este caso el potencial introduce en general reflexión en el proceso de scattering. El espectro puede ser escrito distinguiendo dos situaciones

$$\text{Spec } \bar{\mathcal{H}}_{22}^{\text{TK1}} = \begin{cases} \{n(2\sigma - n)\}_{n=0,1,\dots,E[\sigma]} \cup \{q^2 + \sigma^2\}_{q \in \mathbb{R}^+} & \text{si } \sigma \notin \mathbb{N} \\ \{n(2\sigma - n)\}_{n=0,1,\dots,\sigma-1} \cup \{\sigma^2\}_{\frac{1}{2}} \cup \{q^2 + \sigma^2\}_{q \in \mathbb{R}^+} & \text{si } \sigma \in \mathbb{N} \end{cases}$$

donde $E[\sigma]$ es la función parte entera de σ . Por otra parte, los estados de scattering [47] aparecen en la forma

$$\psi_q = N e^{iqz} {}_2F_1[-\sigma, \sigma + 1, 1 - iq, \frac{e^{-z}}{e^z + e^{-z}}]$$

cuyo comportamiento asintótico nos permite identificar los coeficientes de reflexión y transmisión

$$\rho = \frac{\Gamma[\sigma + 1 - iq] \Gamma[-\sigma - iq] \Gamma[iq]}{\Gamma[\sigma + 1] \Gamma[-\sigma] \Gamma[-iq]} \quad \tau = \frac{\Gamma[\sigma + 1 - iq] \Gamma[-\sigma - iq]}{\Gamma[1 - iq] \Gamma[-iq]}$$

Para aquellos casos en que la constante de acoplamiento adimensional σ es un número natural $\sigma \in \mathbb{N}$, el potencial no provoca reflexión en los estados de scattering (el coeficiente de reflexión es nulo) y además, el último estado del espectro discreto se convierte en semiligado. El coeficiente de transmisión puede escribirse en la forma más simple

$$\tau = \prod_{k=0}^{\sigma-1} \frac{\sigma - k - iq}{-\sigma + k - iq} = \prod_{k=0}^{\sigma-1} \frac{q^2 - (\sigma - k)^2 + 2iq(\sigma - k)}{q^2 + (k - \sigma)^2} \quad \sigma \in \mathbb{N}$$

Los desfases asociados al proceso de dispersión pueden ser identificados mediante $e^{i\delta_P(q)} = \tau + \rho$ y $e^{i\delta_I(q)} = \tau - \rho$. El desfase $\delta_2(q)$ que define la densidad espectral resulta de la semisuma de los desfases anteriores, $\delta_2(q) = \frac{1}{2}(\delta_P(q) + \delta_I(q))$ (ver apéndice B). Restringiéndonos al caso mencionado, $\sigma \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\delta_2(q) = \arctg \frac{\text{Im} \prod_{k=0}^{\sigma-1} [q^2 - (\sigma - k)^2 + 2iq(\sigma - k)]}{\text{Re} \prod_{k=0}^{\sigma-1} [q^2 - (\sigma - k)^2 + 2iq(\sigma - k)]}$$

que debe ser calculada para cada valor natural específico de σ^6 . La expresión del desfase para un valor arbitrario de σ es más compleja, aunque en cualquier caso la derivada de tal magnitud puede ser obtenida en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_2(q)}{\partial q} &= -\frac{i}{2} \left[e^{-i\delta_P} \frac{\partial e^{i\delta_P}}{\partial q} + e^{-i\delta_I} \frac{\partial e^{i\delta_I}}{\partial q} \right] = \psi(iq) - \psi(-\sigma - iq) - \\ & - \psi(1 + \sigma - iq) + \frac{\psi(-iq) \Gamma^2[iq] \Gamma^2[1 - iq] - \psi(1 - iq) \Gamma^2[-\sigma] \Gamma^2[1 + \sigma]}{\Gamma^2[1 - iq] \Gamma^2[iq] - \Gamma^2[-\sigma] \Gamma^2[1 + \sigma]} \end{aligned}$$

Con todos los ingredientes expuestos, puede ser abordado el cálculo de la contribución $\Delta M(\mathcal{H}_{22}^{\text{TK1}})$,

$$\begin{aligned} \Delta M(\mathcal{H}_{22}^{\text{TK1}}) &= \frac{\hbar m}{2} \sum_{n=0}^{E[\sigma]} \sqrt{n(2\sigma - n)} + \frac{\hbar m}{2\pi} \int_0^\infty dq \frac{\partial \delta_2(q)}{\partial q} \sqrt{q^2 + \sigma^2} + \\ & + \frac{\hbar m \sigma (1 + \sigma)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2 + \sigma^2}} - \frac{\hbar m \sigma}{4} + \Delta R = \\ & = \frac{\hbar m}{2} \sum_{n=0}^{E[\sigma]} \sqrt{n(2\sigma - n)} + \frac{\hbar m}{2\pi} \int_0^\infty dq \left[\frac{\partial \delta_2(q)}{\partial q} \sqrt{q^2 + \sigma^2} + \frac{\sigma(1 + \sigma)}{\sqrt{q^2 + \sigma^2}} \right] \\ & - \frac{\hbar m \sigma}{4} + \frac{\hbar m}{4\pi} \langle -\sigma(\sigma + 1) \text{sech}^2 z \rangle = \\ & = \frac{\hbar m}{2} \sum_{n=0}^{E[\sigma]} \sqrt{n(2\sigma - n)} - \frac{\hbar m \sigma (\sigma + 1)}{2\pi} - \frac{\hbar m \sigma}{4} + \frac{\hbar m}{2\pi} \int_0^\infty dq \left[\frac{\partial \delta_2(q)}{\partial q} \sqrt{q^2 + \sigma^2} + \frac{\sigma(1 + \sigma)}{\sqrt{q^2 + \sigma^2}} \right] \end{aligned}$$

El sumando $-\frac{\hbar\sigma}{4}$ es debida a la contribución del estado semiligado libre. El sumatorio recorre todos los estados del espectro discreto, teniendo presente que si aparece un estado ligado su peso es $\frac{1}{2}$. Dada la complejidad de las expresiones acuñadas no es posible la integración exacta de la expresión precedente. La contribución $\Delta M_{22}(\mathcal{H}_{22}^{\text{TK1}})$ debe ser estimada mediante una integración numérica. Se obtienen los siguientes datos para el rango $0.4 \leq \sigma \leq 3.3$:

⁶Los desfases para los valores de σ más bajos, $\delta_2^{\sigma=1}(q) = \arctg \frac{2q}{q^2-1} = 2\arctg \frac{1}{q}$ y $\delta_2^{\sigma=2}(q) = \arctg \frac{6q^3-12q}{q^4-13q^2+4} = -2\arctg \frac{3q}{2-q^2}$ reproducen los adquiridos en los casos de los modelos de Seno-Gordon y ϕ^4 . Además, $\delta_2^{\sigma=3}(q) = 2\arctg \frac{6(q^2-1)}{q(q^2-11)}$.

σ	$\Delta M(\mathcal{H}_{22}^{\text{TK1}})/\hbar m$	σ	$\Delta M(\mathcal{H}_{22}^{\text{TK1}})/\hbar m$	σ	$\Delta M(\mathcal{H}_{22}^{\text{TK1}})/\hbar m$
0.4	-0.133080	1.4	-0.449927	2.4	-0.824449
0.5	-0.163637	1.5	-0.484311	2.5	-0.865861
0.6	-0.194114	1.6	-0.519340	2.6	-0.908014
0.7	-0.224700	1.7	-0.555028	2.7	-0.950919
0.8	-0.255533	1.8	-0.591393	2.8	-0.986907
0.9	-0.286711	1.9	-0.628449	2.9	-1.03902
0.99	-0.315129	1.99	-0.662399	2.99	-1.07967
1.00	-0.31831	2.0	-0.666254	3.0	-1.05684
1.01	-0.321495	2.01	-0.670018	3.01	-1.08878
1.1	-0.350388	2.1	-0.704683	3.1	-1.13019
1.2	-0.382994	2.2	-0.743871	3.2	-1.17694
1.3	-0.416163	2.3	-0.783797	3.3	-1.22446

La respuesta final, que proporciona la corrección cuántica a la masa del kink TK1, corresponde a la suma de las dos contribuciones calculadas, $\Delta M(\mathcal{H}^{\text{TK1}}) = \Delta(\mathcal{H}_{11}^{\text{TK1}}) + \Delta(\mathcal{H}_{22}^{\text{TK1}})$. Los datos numéricos calculados quedan plasmados en siguiente gráfica 6.2 mediante puntos.

Corrección cuántica del TK1: Desarrollo asintótico

El análisis de la corrección cuántica a la masa del TK1 puede ser realizado, también, mediante el uso de la fórmula (6.52). Como fue demostrado en el capítulo 5, el hessiano presenta dos modos ceros; uno de ellos asociado a la invariancia traslacional del espacio, mientras que el otro se atribuye a que el kink TK1 es un elemento particular de la familia uniparamétrica de soluciones **TKD**, pertenecientes al mismo sector topológico. Por ello $j = 2$ en (6.52). Siguiendo el procedimiento ya marcado en otros modelos podemos encontrar la corrección cuántica del TK1 mediante el desarrollo asintótico para distintos valores del parámetro σ . Como ejemplo de los resultados finales encontrados, se proporciona la siguiente tabla:

σ	$\Delta M(\mathcal{H}^{\text{TK1}})/\hbar m$	σ	$\Delta M(\mathcal{H}^{\text{TK1}})/\hbar m$	σ	$\Delta M(\mathcal{H}^{\text{TK1}})/\hbar m$
0.5	-0.962386	1.1	-1.05073	1.7	-1.22526
0.6	-0.970537	1.2	-1.07468	1.8	-1.2599
0.7	-0.981183	1.3	-1.10097	1.9	-1.29571
0.8	-0.994487	1.4	-1.12939	2.0	-1.33324
0.9	-1.01053	1.5	-1.15971	2.1	-1.37074
1.0	-1.0293	1.6	-1.19174	2.2	-1.41007

Los datos anteriores son representados en la gráfica 6.2 mediante el símbolo \square . La comparación entre las correcciones obtenidas mediante el método de las densidades espectrales y mediante el desarrollo asintótico, visualizada en la figura 6.2, permite enunciar los siguientes puntos: 1) la estimación mediante el desarrollo asintótico de

forma genérica es muy buena en el rango mostrado; 2) la precisión de este método es tanto mejor cuanto mayor es el valor de la constante de acoplamiento σ , por ejemplo para $\sigma = 1.5$ el error cometido es del 0.79 % y para $\sigma = 2.0$ el error cometido es del 0.055 %; 3) sin embargo, el método proporciona un resultado menos preciso en el rango $\sigma < 1$, así para $\sigma = 1$ el error es del 4.5 % y para $\sigma = 0.9$ es error es aproximadamente del 6.0 %.

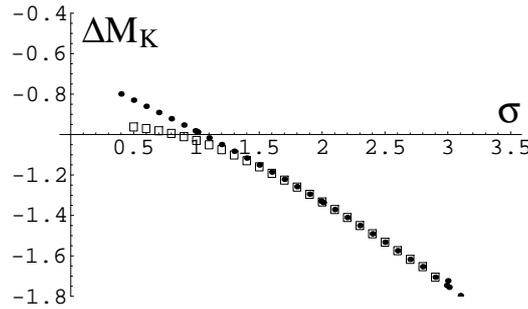


Figura 6.2: Corrección cuántica a la masa del TK1 en el modelo BNRT, en unidades de $\hbar m$, calculada mediante el método de las densidades espectrales (●) y el desarrollo asintótico (□).

Corrección cuántica del TKD(0): Desarrollo asintótico

Tras haber obtenido la corrección cuántica a la masa del TK1 resulta interesante saber cuál es esta corrección sobre la otra solución que mencionamos en esta sección, el TKD(0). La situación que encontramos ahora es análoga a la del TK2 en el modelo MSTB, la solución tiene sus dos componentes no nulas, de modo que el acoplamiento entre los campos tiene como consecuencia que el operador hessiano es un operador matricial de orden dos no diagonal. La resolución del problema espectral en este caso es hoy por hoy imposible (aunque sí fue demostrado la presencia de dos modos ceros), por lo que el método de densidades espectrales no es aplicable. Podemos, sin embargo, aplicar el desarrollo asintótico (6.52), que evita este inconveniente. Elegiremos los valores particulares en el rango $\sigma \in [0.96, 1)$ para realizar los cálculos. Entonces, los coeficientes del desarrollo son

i	$\sigma = 0.96$		$\sigma = 0.97$	
	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TKD}(0)})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TKD}(0)})$	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TKD}(0)})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TKD}(0)})$
1	12.6806	3.83333	12.5025	3.87629
2	27.2626	2.91223	26.3923	2.84445
3	43.0467	0.929709	40.8995	0.971713
4	51.8330	0.431151	48.3164	0.391887
5	49.4842	-0.00452478	45.2317	0.0193729
6	38.8786	0.0514525	34.8351	0.0380063
7	25.8993	-0.0156285	22.7417	-0.0090224
8	14.9659	0.00713977	12.8764	0.00456185

i	$\sigma = 0.98$		$\sigma = 0.99$	
	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TKD}(0)})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TKD}(0)})$	$\tilde{a}_i^{11}(\mathcal{H}_{\text{TKD}(0)})$	$\tilde{a}_i^{22}(\mathcal{H}_{\text{TKD}(0)})$
1	12.3299	3.91837	12.1624	3.9596
2	25.5597	2.78109	24.7630	2.7219
3	38.8820	1.00819	36.9849	1.03968
4	45.0733	0.358188	42.0798	0.329352
5	41.3849	0.0389505	37.9012	0.0548776
6	31.2486	0.0273206	28.0632	0.0188943
7	19.9962	-0.00450157	17.6055	-0.000842262
8	11.0960	0.00265278	9.57626	0.0003676

Dado que en el rango de definición de la solución TKD(0) fue mostrado que para valores pequeños de σ los errores en la estimación de ΔM pueden llegar a ser considerables, nos hemos restringido a la estimación de la corrección cuántica del TKD(0) para valores de σ cercanos a la unidad. Es importante recordar que sobre (6.52) consideraremos que $j = 2$. Finalmente la estimación a la corrección en los casos considerados es

σ	$\Delta M(\mathcal{H}^{\text{TKD}(0)})/\hbar m$
0.96	-1.06082
0.97	-1.05253
0.98	-1.04422
0.99	-1.03624

Introducción a la Supersimetría

A excepción de la gravedad, todas las fuerzas fundamentales conocidas son transmitidas por campos gauge de spin 1. Tales campos están necesariamente asociados con la representación adjunta de un grupo de Lie compacto, por lo que existe la posibilidad de dar una descripción unificada de estas fuerzas eligiendo un adecuado grupo de simetría. Esta unificación es alcanzada mediante $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ en la *teoría standard*, que aúna las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes. Una *gran unificación* basada en grupos simples como $SU(5)$, $SO(10)$ o E_6 puede también generar teorías de interés físico. La mayoría de los resultados empíricos concernientes a partículas elementales son descritos satisfactoriamente en el marco de las teorías renormalizables gauge asintóticamente libres, bajo ordenes de energía de 100 GeV. Existen, sin embargo, varios contrapuntos que indican la necesidad de introducir un nuevo marco en el esquema trazado anteriormente.

El primero de ellos es que la teoría standard introduce un gran número de parámetros adimensionales arbitrarios que deben ser ajustados mediante experimentos para poder obtener posteriores predicciones empíricas; junto a lo cual, debe implementarse un grupo de simetría gauge y representaciones para los campos de Fermi y partículas Higgs de spin cero. Algunas teorías caen en la inconsistencia de adquirir tal cantidad de parámetros indeterminados que superan al número de experimentos conocidos para poder ajustarlos. Otro conjunto de cuestiones sin resolver concierne a los problemas de jerarquía y ajuste fino. El grupo G.U.T. es roto a escalas de alrededor de $10^{15} GeV$ mientras que el grupo débil $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ lo es sobre $10^{12} GeV$. Fenomenológicamente se requiere que la ruptura de simetría a escala G.U.T. divida los escalares Higgs para dar uno o dos dobletes con masa del orden de la escala débil, mientras sus compañeros del triplete de color adquieran masas del orden de la propia escala G.U.T. En el marco standard esto requiere el ajuste fino de los parámetros para establecer las relaciones en la teoría de campos clásica y preservarlos de correcciones radiativas. Un nuevo punto de conflicto se refiere a la gravedad, dado que a los ordenes de magnitud de energía que discutimos estas interacciones no pueden ser despreciadas. Deben compaginarse la teoría de campos cuánticos del modelo standard con la relatividad general. Existe una manera estandar de tomar cualquier teoría y hacerla generalmente covariante, acoplándola

a la gravedad. Este hecho no resuelve los problemas anteriores sino que introduce otros nuevos. El gravitón, el cuanto de gravedad, es una partícula sin masa de spin 2, en contraste con los cuantos de spin 1 asociados a otras fuerzas. Ello significa que no puede ser incluido en la unificación en las mismas condiciones que los campos gauge, implicando severas divergencias ultravioletas. Cuando la gravedad es omitida, las divergencias pueden ser eliminadas mediante renormalización, pero cuando la gravedad es incluida, esto no es posible como consecuencia de las singularidades a distancias cortas. La teoría es no renormalizable.

Da la impresión (en vista de los desarrollos recientes) que tales problemas pueden ser resueltos en el contexto de la teoría de supercuerdas iniciada a finales de la década de los 60. Ello implica tres nuevos ingredientes en el marco de la teoría de campos cuánticos. El primero es abandonar la idea de que las partículas elementales son puntos matemáticos y permitir, en cambio, que sean curvas unidimensionales llamadas cuerdas. El segundo ingrediente es la supersimetría [53, 126, 89, 141, 130], introducido inicialmente hacia 1971 por Ramond [118] y Neveu, Schwarz [127], Wess y Zumino [142] y consistente en un principio de simetría que relaciona bosones y fermiones, dando origen al concepto de *superálgebra de Lie* que permite eludir las fronteras impuestas por el teorema de Coleman-Mandula. El tercer ingrediente es la inclusión de seis dimensiones espaciales extra, dando lugar a un espacio-tiempo decadimensional.

La introducción de la supersimetría supuso en sí mismo un avance teórico notable y es estudiada en numerosos ámbitos. En esta memoria será analizada asociada a sistemas dinámicos clásicos con grados grassmannianos y en la teoría de campos en (1+1) dimensiones espacio-temporales.

Fundamentos matemáticos: Superálgebras, superespacio y supercampos.

Para generar un *superálgebra* [53] se requiere:

1. Sea \mathcal{S} un espacio vectorial sobre el cuerpo de los complejos \mathbb{C} graduado de módulo 2. Ello significa que sus elementos son de dos tipos, unos que denominaremos *bosónicos* o *pares*, que pertenecen a un espacio vectorial V^0 , y otros que recibirán el apelativo de *fermiónicos* o *impares*, que forman parte del espacio vectorial V^1 . Entonces $\mathcal{S} = V^0 \cup V^1$. Así, cualquier combinación lineal de elementos de V^0 pertenece a V^0 y cualquier combinación entre elementos fermiónicos queda incluida en V^1 . Queda prohibida, dada la construcción de \mathcal{S} , elementos asociados a una combinación lineal de V^0 y V^1 . Diremos, además, que los elementos bosónicos tienen un grado 0 mientras que los fermiónicos llevan grado 1.

El producto de dos elementos de \mathcal{S} atiende a las siguientes condiciones:

- El producto de dos elementos bosónicos (de grado 0) corresponde a un elemento bosónico

$${}^0v \cdot {}^0v' = {}^0v'' \qquad \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

- El producto de un elemento bosónico (de grado 0) con uno fermiónico (de grado 1) es un elemento fermiónico (de grado 1)

$${}^0v \cdot {}^1v' = {}^1v'' \qquad \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$$

- El producto de dos elementos fermiónicos (de grado 1) corresponde a un elemento bosónico (de grado 0)

$${}^1v \cdot {}^1v' = {}^0v'' \qquad \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$$

2. \mathcal{S} posee una operación binaria, bilineal, superanticonmutativa y aditiva graduada modulo 2.

Superanticonmutatividad significa que cuando la operación se ejecuta entre dos elementos bosónicos, o bien entre un elemento bosónico y otro fermiónico, la operación anticonmuta, $[A, B] = -[B, A]$, pero cuando se realiza entre dos elementos fermiónicos la operación conmuta, $[A, B] = [B, A]$. El calificativo de aditiva graduada módulo 2 significa que si a y b son los grados de los elementos A y B , entonces $C = [A, B]$ tiene grado $c = a+b \pmod{2}$. (Usualmente cuando la operación es referida a dos elementos fermiónicos es denotada mediante $\{A, B\}$, enfatizando que en este caso es referida al anticonmutador).

3. La operación anterior obedece la superidentidad de Jacobi,

$$(-1)^{ac}[A, [B, C]] + (-1)^{ba}[B, [C, A]] + (-1)^{cb}[C, [A, B]] = 0$$

Existe un catálogo bien estructurado que muestra las posibles superálgebras. Así, los trabajos de Kac [83], Freund [53], Kaplansky, Nahm y Scheunert [104], entre los años 1975-1980, clasificaron las superálgebras en ocho familias infinitas, $sl(m|n)$, $osp(m|n)$, $P(n)$, $Q(n)$, $W(n)$, $S(n+2)$, $\tilde{S}(n+2)$, $H(n+3)$, junto a las superálgebras excepcionales $D(2|1, \alpha)$ (con parámetro continuo), $G(3)$ y $F(4)$. Sin embargo, una supersimetría admisible físicamente debe satisfacer los siguientes dos principios:

- i) El sector de Bose ${}^0\mathcal{S}$ debe ser la suma directa $P + G$, donde P es el grupo de Poincaré y G es el grupo de simetrías internas.
- ii) Los elementos del sector fermiónico ${}^1\mathcal{S}$ deben transformarse como spinors de Lorentz.

Aunque ciertos autores muestran interés por los supergrupos $o(4, 1)$ para espacios de-Sitter y $o(3, 2)$ para espacios anti-de-Sitter, en nuestro caso nos centraremos en el llamado superálgebra de Poincaré, que puede ser obtenido de los anteriores como un caso particular. Fue demostrado por Haag, Lopuszanski y Sohnius [69] en 1975 que dicha superálgebra está asociada con la supersimetría más general de la matriz S en una teoría relativista en cuatro dimensiones que presenta multipletes finitos de partículas con masa. Simbólicamente, se verifica

$$\begin{aligned} [M, M] &\sim M & [M, B] &\sim 0 & [M, Q] &\sim Q & [Z, Z] &\sim 0 \\ [M, P] &\sim P & [P, B] &\sim 0 & [B, Q] &\sim Q & [Z, Q] &\sim 0 \\ [P, P] &\sim 0 & [B, B] &\sim B & [P, Q] &\sim 0 & [Z, B] &\sim 0 \\ & & & & [Q, Q] &\sim P + Z & & \end{aligned}$$

donde P , M representa el conjunto de los generadores del álgebra de Poincaré, B de las simetrías internas, Q los generadores de supersimetría y Z son las cargas centrales. Una vez introducido el concepto de *superálgebra*, el siguiente paso que será desarrollado es la generalización del espacio de Minkowski al *superespacio de Minkowski* [151, 123, 140, 52].

Siendo B_L un álgebra de Grassmann⁷ de L generadores v_i , cualquier elemento $a \in B_L$ (supernúmero) puede ser escrito por la suma de dos términos, el primero de ellos, un número ordinario al que nos referimos como *cuerno* de a , mientras que el segundo consta de productos de los generadores grassmannianos y recibe el nombre de *alma* de a , esto es,

$$a = a_B + a_S = a_0 \mathbf{1} + \sum_{\Gamma} a_{\Gamma} v_{\Gamma}$$

donde

$$v_{\Gamma} \equiv v_{i_1 i_2 \dots i_m} \equiv i^{m(m-1)/2} v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_m} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_m$$

Junto con los escalares, los elementos a conforman un espacio vectorial donde los v_{Γ} conforman la base 2^L -dimensional de B_L . El álgebra de Grassmann es graduado con módulo 2, tal que

$$B_L = {}^0 B_L + {}^1 B_L$$

donde ${}^0 B_L$ viene constituido por aquellos elementos con $a_{\Gamma} = 0$ para los elementos $v_{\Gamma} = v_{i_1 i_2 \dots i_m}$ con m impar y donde ${}^1 B_L$ está formado por los que implican $a_0 = 0$ y $a_{\Gamma} = 0$ para $v_{\Gamma} = v_{i_1 i_2 \dots i_m}$ con m par, de modo que ambos tienen dimensión 2^{L-1} .

⁷Mientras Hamilton desarrollaba los conocidos cuaterniones, Herman Gunther Grassmann (1809-1877) publicó hacia 1844 Die Lineale Ausdehnungsbereiche, en el que desarrollaba sus mencionadas álgebras. Sin embargo, los matemáticos y físicos de la época no se interesaron por su trabajo durante largo tiempo.

Los elementos de 0B_L conmutan con todos los elementos de B_L , mientras que dos elementos de 1B_L anticonmutan.

Definición: *El superespacio (m,n) de Minkowski plano es definido como*

$$B_L^{m,n} = {}^0B_L \times \overset{(m)}{\dots} \times {}^0B_L \times {}^1B_L \times \overset{(n)}{\dots} \times {}^1B_L$$

con la topología (separable) Hausdorff inducida por la norma

$$\|a\| = |a_0| + \sum_{\Gamma} |a_{\Gamma}|$$

Un punto definido sobre tal superespacio viene identificado por m elementos pares $x^0, \dots, x^{m-1} \in {}^0B_L$ y n elementos impares $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n \in {}^1B_L$. Las magnitudes x^i , en general, no corresponden a variables reales ordinarias, mientras que los θ^i corresponden a espinores de Majorana en virtud de la elección real considerada para B_L . Las coordenadas del superpunto $\mathbf{z} \in B_L$ pueden ser organizadas en la $(m+n)$ -upla $\mathbf{z} \equiv (x^0, x^1, \dots, x^{m-1}, \theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$.

Definición: *Llamaremos supercampo Φ a cualquier función de las coordenadas del superespacio $B_L^{m,n}$.*

Físicamente son resaltables aquellos supercampos de naturaleza bosónica o par. Cualquier supercampo puede ser desarrollado respecto de las coordenadas nilpotentes del superespacio, obteniéndose un desarrollo finito de potencias. Los coeficientes de tal desarrollo corresponden a campos del espacio-tiempo ordinario y reciben el nombre de *componentes* del supercampo. Es de advertir que a pesar de las ventajas que supone introducir el formalismo de superespacio existen dos contrapuntos: el primero es que no siempre es posible implantar ese formalismo, como en los modelos Sigma y Yang-Mills con 8 y 16 supersimetrías respectivamente; y en segundo lugar, que aquellas teorías realizables físicamente en la mayor parte de los casos deben considerar severas restricciones sobre los supercampos, (altamente no triviales) y que tienen por objetivo eliminar las componentes del supercampo que no poseen entidad física. Así, nacen los supercampos quirales o los vectoriales presentes en la teoría de (3+1) dimensiones.

Capítulo 7

Sistemas dinámicos supersimétricos

7.1 Introducción

La identificación de las soluciones kinks en la teoría de campos escalares con espacio-tiempo de 1+1 dimensiones, realizada en los primeros capítulos de esta memoria, fue llevada a cabo al equiparar este problema con uno mecánico, vía el símil mecánico. Con el propósito de generalizar la noción de solución kink a la teoría supersimétrica en (1+1) dimensiones, *el superkink*, parece razonable, por tanto, realizar un estudio profundo de los sistemas dinámicos que implican supersimetría, *la mecánica clásica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica*, con el afán de hacer uso del símil mecánico que tan fructífero resultó en los capítulos precedentes. En este nuevo marco deben ser identificadas, junto a las variables de carácter bosónico, las magnitudes grassmannianas que caracterizan el sistema dinámico. Cuando el espacio interior es unidimensional, el esquema a la Manton [82, 93, 70] permite encontrar las soluciones mediante cuadraturas, en el mismo sentido que tenía lugar en la mecánica clásica. La complejidad es incrementada al considerar espacios internos con mayor número de grados de libertad como es el caso de los modelos de SuperLiouville, que conforman la extensión de los modelos de Liouville a este ámbito. En el sector puramente bosónico, la variedad de soluciones kinks era calculada en estos modelos debido a la propiedad de separabilidad en determinadas variables de las ecuaciones diferenciales del sistema mecánico asociado, el cual presentaba, como consecuencia, dos integrales primeras en involución. En el marco supersimétrico los acoplamientos de tipo Yukawa malogran tal peculiaridad, aunque puede ser comprobada la presencia de integrales primeras para el sistema mecánico supersimétrico asociado, que son las generalizaciones de aquellas encontradas en el sector bosónico. Un punto importante en este capítulo será obtener sus expresiones.

El estudio llevado a cabo en este capítulo es descrito en los siguientes párrafos. En las primeras secciones quedan recopilados los conocimientos generales acerca de la mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica, que pueden encontrarse en la bibliografía más básica [53]. En la sección 7.3 se calcula la extensión supersimétrica de modelos de Liouville, que pasaremos a llamar modelos de SuperLiouville, como puede ser fácilmente asumido. Será preceptivo, por tanto, explorar la existencia o no de las segundas integrales primeras, que aseguraban la integrabilidad del problema en el sector bosónico de la teoría clásica. Siguiendo las mismas directrices que el estudio anterior serán analizadas las condiciones que debe cumplir un sistema mecánico supersimétrico para soportar la presencia de cargas de naturaleza fermiónica añadidas a las cargas supersimétricas. Finalmente, analizaremos las ecuaciones diferenciales que caracterizan los sistemas en estudio, cuya resolución proporcionan *las supersoluciones*.

7.2 Mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica

La identificación de las configuraciones estáticas que correspondían a puntos críticos del funcional energía de la teoría de campos permitía obtener las soluciones de tipo kink. El uso del símil mecánico en el capítulo 1 traslada la búsqueda de kinks a la resolución de un problema mecánico. En el ámbito supersimétrico, la restricción de la teoría de campos supersimétrica a configuraciones estáticas nos procura la mecánica clásica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica. Con tal motivación dedicaremos esta sección al estudio de esta estructura (ya introducida en el primer capítulo) en base al concepto de superespacio. En particular, generaremos las expresiones dinámicas que caracterizan la Mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica, tanto sobre la métrica euclídea (sección 7.2.1) como sobre una métrica cualquiera (sección 7.2.2).

7.2.1 Mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica con métrica euclídea

Introduciremos esta estructura utilizando la notación compacta del formalismo de superespacio [53]. Ahora, un superpunto vendrá identificado por la terna $(t, \tau^1, \tau^2) \in {}^0B_L \times {}^1B_L \times {}^1B_L$. El supercampo puede ser expandido en sus componentes

$$X^a(t, \tau^1, \tau^2) = x^a(t) + \theta_\alpha^a(t)\tau^\alpha + iF^a(t)\tau^1\tau^2 \quad (7.1)$$

donde $\alpha = 1, 2$ y $a = 1, \dots, N$, esto es, incluimos una teoría con $2N$ grados de libertad bosónicos debidos a las variables $x^a(t)$ y $F^a(t)$, junto con $2N$ grados fermiónicos atribuidos a las magnitudes grassmannianas $\theta_\alpha^a(t)$. Obsérvese el balance de los grados pares e impares característico del foro supersimétrico¹. Aparecen dos invariancias

¹En el presente capítulo tomaremos como convenio habitual tratar con índices latinos representados por las primeras letras del alfabeto acompañando a magnitudes inmersas en una métrica

supersimétricas asociadas a supertraslaciones por la izquierda del superespacio

$$\begin{aligned} \text{supersimetría 1: } & \tau^1 \rightarrow \tau^1 - \varepsilon^1 & \tau^2 \rightarrow \tau^2 & t \rightarrow t - i\tau^1 \varepsilon^1 \\ \text{supersimetría 2: } & \tau^1 \rightarrow \tau^1 & \tau^2 \rightarrow \tau^2 - \varepsilon^2 & t \rightarrow t - i\tau^2 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

que implican la presencia de dos generadores de supersimetría $Q_\alpha = i\tau^\alpha \partial_t - \partial_\alpha$ con $\alpha = 1, 2$, que junto al generador de traslaciones temporales $H = -i\partial_t$ generan el superálgebra:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}H \quad [Q_\alpha, H] = 0 \quad [H, H] = 0$$

La variación sobre el supercampo que inducen los generadores de supersimetría se manifiesta en las siguientes expresiones:

$$\begin{array}{cc} \textit{Supersimetría 1} & \textit{Supersimetría 2} \\ \delta_1 X^a = \varepsilon Q_1 X^a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 x^a = \varepsilon \theta_1^a \\ \delta_1 \theta_1^a = i\varepsilon \dot{x}^a \\ \delta_1 \theta_2^a = -i\varepsilon F^a \\ \delta_1 F^a = -\varepsilon \dot{\theta}_2^a \end{array} \right. & \delta_2 X^a = \varepsilon Q_2 X^a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta_2 x^a = \varepsilon \theta_2^a \\ \delta_2 \theta_1^a = i\varepsilon F^a \\ \delta_2 \theta_2^a = i\varepsilon \dot{x}^a \\ \delta_2 F^a = \varepsilon \dot{\theta}_1^a \end{array} \right. \end{array}$$

Teoría libre:

Apoyándonos en el concepto de derivada covariante, generador de supertraslaciones por la derecha,

$$D_\alpha = i\tau^\alpha \partial_t + \partial_\alpha$$

podemos construir acciones invariantes bajo transformaciones supersimétricas, a la vista de la relación $\{D_\alpha, Q_\beta\} = 0$. Así, introduciendo la expresión de la acción en la forma

$$S = \int dt d\tau^1 d\tau^2 \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta} D_\alpha X^a D_\beta X^a \quad (7.2)$$

podemos afirmar que la variación del lagrangiano asociado

$$\delta^\gamma \mathcal{L} = \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta} \varepsilon Q_\gamma \{D_\alpha X^a D_\beta X^a\} = i\tau^\gamma \partial_t \mathcal{L} \quad (7.3)$$

corresponde a la expresión de una divergencia, que deja invariante (7.2). Empleando el desarrollo del supercampo (7.1), encontramos que el lagrangiano aparece como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^a, \theta_\alpha^a, F^a] &= \frac{1}{4} \theta_1^a \theta_2^a - \frac{i}{2} \tau^1 (\dot{x}^a \theta_2^a + \theta_1^a F^a) + \frac{i}{2} \tau^2 (\dot{x}^a \theta_1^a - \theta_2^a F^a) + \\ &+ \tau^2 \tau^1 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^a \dot{x}^a + \frac{i}{2} \theta_\alpha^a \dot{\theta}_\alpha^a + \frac{1}{2} F^a F^a \right) \end{aligned}$$

euclídea, mientras que las letras intermedias del alfabeto lo harán a magnitudes asociadas a métricas no euclídeas.

por lo que, tras considerar su integración de Berezin, la acción es

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{x}^a \dot{x}^a + \frac{i}{2} \theta_\alpha^a \dot{\theta}_\alpha^a + \frac{1}{2} F^a F^a \right)$$

La relación (7.3) proporciona los cambios en el lagrangiano mediante una transformación supersimétrica

$$\delta^{(1)} \mathcal{L} = \tau^2 \tau^1 \partial_t \left\{ -\frac{1}{2} (\dot{x}^a \theta_1^a - \theta_2^a F^a) \right\} \quad \delta^{(2)} \mathcal{L} = \tau^2 \tau^1 \partial_t \left\{ -\frac{1}{2} (\dot{x}^a \theta_2^a + \theta_1^a F^a) \right\}$$

lo que tiene como consecuencia la aparición de las cargas conservadas:

$$j^{(1)}(x^a, \theta^a) = -\dot{x}^a \theta_1^a + \theta_2^a F^a \quad j^{(2)}(x^a, \theta^a) = -\dot{x}^a \theta_2^a - \theta_1^a F^a$$

Las magnitudes F^a son campos auxiliares (no propagantes), cuyo papel esencial es que el álgebra se verifique al margen del cumplimiento de las ecuaciones del movimiento (*off shell*). Utilizando éstas se tiene que $F^a = 0$, de modo que la acción se escribe finalmente como

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{x}^a \dot{x}^a + \frac{i}{2} \theta_\alpha^a \dot{\theta}_\alpha^a \right)$$

que describe una teoría libre para bosones y fermiones representados respectivamente por las variables x^a y θ^a . Éstas deben verificar las ecuaciones diferenciales desacopladas:

$$\ddot{x}^a = 0 \quad \dot{\theta}_\alpha^a = 0$$

Las variaciones supersimétricas, bajo el cumplimiento de las ecuaciones del movimiento (*on shell*), vienen dadas como

$$\begin{array}{lll} \text{Supersimetría 1:} & \delta_1 x^a = \varepsilon \theta_1^a & \delta_1 \theta_1^a = i\varepsilon \dot{x}^a & \delta_1 \theta_2^a = 0 \\ \text{Supersimetría 2:} & \delta_2 x^a = \varepsilon \theta_2^a & \delta_2 \theta_1^a = 0 & \delta_2 \theta_2^a = i\varepsilon \dot{x}^a \end{array}$$

de forma que las cargas conservadas *on shell* corresponden a las expresiones:

$$j^{(1)}(x, \theta) = Q^{(1)}(x, \theta) = -\dot{x}^a \theta_1^a \quad j^{(2)}(x, \theta) = Q^{(2)}(x, \theta) = -\dot{x}^a \theta_2^a$$

Teoría con interacción:

Nuestro interés seguidamente será incorporar en la teoría libre términos de interacción compatibles con el esquema de supersimetría. Tal propósito puede ser obtenido añadiendo a la expresión (7.2) el sumando

$$S_{int} = i \int dt d\tau^2 d\tau^1 W[X^a(t, \tau^1, \tau^2)]$$

donde $W[X^a(t, \tau^1, \tau^2)]$ es una función arbitraria de los supercampos X^a , denominada *superpotencial*. La expansión de esta nueva magnitud respecto de los términos nilpotentes es:

$$W[X^a(t, \tau^1, \tau^2)] = W[x^a(t)] - \tau^\alpha \theta_\alpha^a \frac{\partial W}{\partial x^a} + \tau^1 \tau^2 \left(i F^a \frac{\partial W}{\partial x^a} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_1^a \theta_2^b \right)$$

La acción, una vez que los términos de interacción han sido adheridos y la integración sobre los parámetros temporales de carácter impar ha sido realizada, viene expresada por

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^a \dot{x}^a + \frac{i}{2} \theta_\alpha^a \dot{\theta}_\alpha^a + \frac{1}{2} F^a F^a - F^a \frac{\partial W}{\partial x^a} - i \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_1^a \theta_2^b \right\}$$

de modo que, eliminando los campos auxiliares F^a tras el uso de las ecuaciones del movimiento, que nos reportan la igualdad

$$F^a = \frac{\partial W}{\partial x^a}$$

podemos escribir finalmente la habitual expresión para la acción supersimétrica

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^a \dot{x}^a + \frac{i}{2} \theta_\alpha^a \dot{\theta}_\alpha^a - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x^a} \frac{\partial W}{\partial x^a} - i \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_1^a \theta_2^b \right\} \quad (7.4)$$

donde cada sumando del integrando describe, respectivamente, el término cinético bosónico, el término cinético asociado a los grados grassmannianos, el término potencial en el sector bosónico y el acoplamiento Yukawa con los grados fermiónicos. Las ecuaciones del movimiento, que gobiernan el comportamiento del sistema físico, son:

$$\ddot{x}^a + \frac{\partial W}{\partial x^b} \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} + i \frac{\partial^3 W}{\partial x^a \partial x^b \partial x^c} \theta_1^b \theta_2^c = 0 \quad (7.5)$$

$$\dot{\theta}_1^a = \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_2^b \quad \dot{\theta}_2^a = - \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_1^b \quad (7.6)$$

Por otra parte, las variaciones supersimétricas *on shell* aparecen en la forma

$$\begin{array}{lll} \text{Supersimetría 1:} & \delta_1 x^a = \varepsilon \theta_1^a & \delta_1 \theta_1^a = i \varepsilon \dot{x}^a & \delta_1 \theta_2^a = -i \varepsilon \frac{\partial W}{\partial x^a} \\ \text{Supersimetría 2:} & \delta_2 x^a = \varepsilon \theta_2^a & \delta_2 \theta_1^a = i \varepsilon \frac{\partial W}{\partial x^a} & \delta_2 \theta_2^a = i \varepsilon \dot{x}^a \end{array}$$

dando origen a las cargas conservadas:

$$Q^{(1)} = \dot{x}^a \theta_1^a - \frac{\partial W}{\partial x^a} \theta_2^a \quad Q^{(2)} = \dot{x}^a \theta_2^a + \frac{\partial W}{\partial x^a} \theta_1^a$$

Junto a las constantes del movimiento introducidas anteriormente, hay que recordar que la invariancia respecto de traslaciones del tiempo ordinario origina la conservación de la energía (1.30).

7.2.2 Mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica con métrica

Consideremos, ahora, sistemas físicos con superespacio $(1, 2)$, que sigue parametrizado como en la sección anterior por las coordenadas (t, τ^1, τ^2) . Por ello, la expansión del supercampo es expresada mediante (7.1). La acción sin término potencial, asociada a la dinámica de la partícula superpuntual $\mathcal{N} = 2$, que generaliza la expresión (7.2) para sistemas definidos sobre variedades riemannianas N -dimensionales es

$$S_0 = \int dt d\tau^1 d\tau^2 \frac{1}{4} g_{jk}(X^l) \epsilon^{\alpha\beta} D_\alpha X^j D_\beta X^k \quad (7.7)$$

La expansión respecto de los grados nilpotentes de cada una de las magnitudes que forman parte de (7.7), valga como ejemplo la expansión del factor métrico

$$g_{jk}(X^l) = g_{jk}(x^l) + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \vartheta_\alpha^l \tau^\alpha + \tau^1 \tau^2 \left(i \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} F^l - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^r \partial x^s} \vartheta_1^r \vartheta_2^s \right)$$

nos permite acceder, tras la integración de Berezin, a la expresión de la acción

$$S_0 = \int dt \left\{ \frac{1}{2} g_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{i}{2} g_{jk} \vartheta_\alpha^j D_t \vartheta_\alpha^k + \frac{1}{2} g_{jk} F^j F^k + i \Gamma_{l,jk} \vartheta_1^j \vartheta_2^k F^l + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^r \partial x^s} \vartheta_1^j \vartheta_2^k \vartheta_1^r \vartheta_2^s \right\}$$

donde se define

$$D_t \vartheta_\alpha^j = \dot{\vartheta}_\alpha^j + \Gamma_{sr}^j \dot{x}^r \vartheta_\alpha^s$$

siendo Γ_{sr}^j los símbolos de Christoffel. Para obtener la acción expresada sólo sobre variables con significado físico debe ser eliminado el campo auxiliar F^l utilizando las ecuaciones del movimiento. Ello nos indica que

$$F^l = -i \Gamma_{jk}^l \vartheta_1^j \vartheta_2^k$$

por lo que finalmente se tendrá

$$S_0 = \int dt \left\{ \frac{1}{2} g_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{i}{2} g_{jk} \vartheta_\alpha^j D_t \vartheta_\alpha^k + \frac{1}{4} R_{jklm} \vartheta_1^j \vartheta_2^l \vartheta_1^k \vartheta_2^m \right\}$$

siendo R_{jklm} el tensor de curvatura.

La presencia de términos de interacción en el sistema físico nos lleva a introducir en la acción el sumando

$$S_{int} = \int dt d\tau^1 d\tau^2 i W[X^k]$$

donde $W[X^k]$ es el superpotencial. Los cálculos a seguir son totalmente análogos a los presentados en la sección anterior. El campo auxiliar es ahora,

$$F^l = -i \Gamma_{jk}^l \vartheta_1^j \vartheta_2^k + g^{jl} \frac{\partial W}{\partial x^j}$$

de modo que la acción que incluye términos de interacción puede ser dada como

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} g_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{i}{2} g_{jk} \vartheta_\alpha^j D_t \vartheta_\alpha^k + \frac{1}{4} R_{jklm} \vartheta_1^j \vartheta_2^l \vartheta_1^k \vartheta_2^m - \frac{1}{2} g^{jk} W_{;j} W_{;k} - i W_{;j;k} \vartheta_1^j \vartheta_2^k \right\} \quad (7.8)$$

donde $W_{;j}$ representa la derivada covariante. Así,

$$W_{;j;k} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{jk}^l \frac{\partial W}{\partial x^l}$$

Por otra parte indicaremos las cargas conservadas debido al marco supersimétrico. La invariancia de la acción frente a las variaciones

$$\delta_1 x^j = \varepsilon \vartheta_1^j \quad \delta_1 \vartheta_1^j = i \varepsilon \dot{x}^j \quad \delta_1 \vartheta_2^j = -i \varepsilon F^j \quad \delta_1 F^j = -\varepsilon \dot{\vartheta}_2^j$$

provoca la conservación de la supercarga

$$Q_1 = g_{jk} \dot{x}^j \vartheta_1^k - \frac{\partial W}{\partial x^j} \vartheta_2^j$$

mientras que su invariancia respecto de las perturbaciones

$$\delta_2 x^j = \varepsilon \vartheta_2^j \quad \delta_2 \vartheta_1^j = i \varepsilon F^j \quad \delta_2 \vartheta_2^j = i \varepsilon \dot{x}^j \quad \delta_2 F^j = \varepsilon \dot{\vartheta}_1^j$$

manifiesta la constancia de la magnitud

$$Q_2 = g_{jk} \dot{x}^j \vartheta_2^k + \frac{\partial W}{\partial x^j} \vartheta_1^j$$

La energía es escrita para estos sistemas físicos en la forma:

$$H = \frac{1}{2} g_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{1}{2} g^{jk} W_{;j} W_{;k} + i W_{;j;k} \vartheta_1^j \vartheta_2^k \quad (7.9)$$

7.3 Sistemas mecánicos de SuperLiouville:

En los capítulos dedicados a la búsqueda de kinks tratamos con los sistemas mecánicos de Liouville. Recuérdese que la característica esencial de éstos era el hecho de ser completamente integrables como consecuencia de la existencia de dos integrales primeras en involución. Su integrabilidad explícita estaba apoyada en el uso de un determinado sistema de coordenadas que permitía la separación en variables de las ecuaciones del problema. En los próximos párrafos dotaremos a los modelos de Liouville de una estructura compatible con la supersimetría. Se nos antoja que la nomenclatura natural para estos modelos es la de *sistemas mecánicos de SuperLiouville*. La obtención de las expresiones dinámicas será sencilla apoyados sobre la

covariancia de la expresión (7.8), que nos otorga la posibilidad de adoptar la visión de que un cambio de variables introduce una métrica manifestada en la expresión

$$g_{jk'} = \delta_{ab} \frac{dx^a}{dx^{j'}} \frac{dx^b}{dx^{k'}} \quad (7.10)$$

En cualquier caso, los modelos de Liouville implican, en realidad, un espacio plano por lo que la curvatura será nula, $R_{jkl'n} = 0$. Los campos fermiónicos se transforman como tensores contravariantes. Así, con estas premisas presentaremos las expresiones que caracterizan los denominados sistemas dinámicos de SuperLiouville distinguiendo cuatro bloques, según el sistema de coordenadas utilizado en la separación en variables de las ecuaciones del movimiento en el sector bosónico.

7.3.1 Sistema mecánico de SuperLiouville: Tipo I.

Los modelos de Liouville de Tipo I venían caracterizados por el uso de coordenadas elípticas (2.1), lo que transformaba la expresión de la acción en (2.3). Identificamos las nuevas variables como $(x'^1, x'^2) = (u^1, u^2) = (u, v)$ con el propósito de facilitar la escritura. La inspección de la fórmula (2.3) o la aplicación de (7.10) identifican la métrica asociada $g'(u, v) = (g'_{jk})$ al cambio de coordenadas,

$$g'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{u^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \end{pmatrix}$$

de modo que los símbolos de Christoffel para este caso vienen especificados como

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{-u(\Omega^2 - v^2)}{(u^2 - v^2)(u^2 - \Omega^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{v(u^2 - \Omega^2)}{(u^2 - v^2)(\Omega^2 - v^2)} & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{-v}{u^2 - v^2} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{v(\Omega^2 - v^2)}{(u^2 - v^2)(u^2 - \Omega^2)} & \Gamma_{22}^1 &= \frac{-u(u^2 - \Omega^2)}{(u^2 - v^2)(\Omega^2 - v^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{u}{u^2 - v^2} \end{aligned}$$

El lagrangiano supersimétrico (7.8) asociado a estos modelos será presentado como la suma $L = L_B^0 + L_B^I + L_F^0 + L_F^I$, en la que vienen indicados respectivamente el término cinético de los campos bosónicos, los términos del potencial clásico, el término cinético asociado a los grados grassmannianos y los acoplamientos de tipo Yukawa. En el sector bosónico quedan incluidos los términos

$$L_B^0[u, v] = \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} \dot{u} \dot{u} + \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \dot{v} \dot{v}$$

junto a la presencia del potencial

$$L_B^I[u, v] = -U_B = -\frac{1}{2} \frac{u^2 - \Omega^2}{u^2 - v^2} \left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 - v^2}{u^2 - v^2} \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2$$

lo que engarza directamente con los resultados obtenidos en el capítulo 2, en el sentido de que los modelos de Liouville de tipo I tenían un carácter presupersimétrico. En el sector fermiónico, junto a la parte libre

$$L_F^0[u, v, \vartheta_\alpha^u, \vartheta_\alpha^v] = \frac{i}{2} \frac{u^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} \vartheta_\alpha^u D_t \vartheta_\alpha^u + \frac{i}{2} \frac{u^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \vartheta_\alpha^v D_t \vartheta_\alpha^v$$

aparecen los acoplamientos tipo Yukawa

$$\begin{aligned} L_F^I[u, v] = & -i \left[\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial u} + \frac{\Omega^2 - v^2}{(u^2 - v^2)(u^2 - \Omega^2)} \left(u \frac{\partial W}{\partial u} - v \frac{\partial W}{\partial v} \right) \right] \vartheta_1^u \vartheta_2^u - \\ & -i \left[\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u^2 - v^2} \left(v \frac{\partial W}{\partial u} - u \frac{\partial W}{\partial v} \right) \right] (\vartheta_1^u \vartheta_2^v + \vartheta_1^v \vartheta_2^u) \\ & -i \left[\frac{\partial^2 W}{\partial v \partial v} + \frac{(u^2 - \Omega^2)}{(u^2 - v^2)(\Omega^2 - v^2)} \left(u \frac{\partial W}{\partial u} - v \frac{\partial W}{\partial v} \right) \right] \vartheta_1^v \vartheta_2^v \end{aligned}$$

Trasladando la definición 2.1 o 2.5 al nuevo marco podemos introducir:

Definición 7.1: Diremos que un sistema mecánico supersimétrico es SuperLiouville de Tipo I si existe un sistema de coordenadas definidos por (2.1) en el que la acción (7.4) presenta un superpotencial de la forma:

$$\xi^* W = W_1(u) + W_2(v)$$

donde W_1 es una función exclusivamente de la variable u y W_2 de v .

7.3.2 Sistema mecánico de SuperLiouville: Tipo III.

Los modelos de Liouville pertenecientes al Tipo III son aquellos que admiten su integrabilidad usando un sistema de coordenadas parabólico (3.1). La expresión (3.2), donde queda expresado el término cinético, nos permite inferir que la métrica $g'(u, v) = (g'_{jk})$ asociada al cambio de coordenadas viene determinada como

$$g'_{jk} = \frac{\partial x^a}{\partial u^j} \frac{\partial x^b}{\partial u^k} \delta_{ab} \quad g'(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

donde de nuevo asumimos el convenio $(x^1, x^2) = (u^1, u^2) = (u, v)$. Los símbolos de Christoffel aparecen definidos como

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

El sector bosónico de la teoría supersimétrica de estos modelos viene caracterizado por los siguientes términos

$$L_B^0 = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) (\dot{u}\dot{u} + \dot{v}\dot{v})$$

junto al término potencial expresado como

$$L_B^I = -U_B = -\frac{1}{2(u^2 + v^2)} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right]$$

lo cual puede ser contrastado directamente con los resultados obtenidos en el tercer capítulo que afirmaban la presupersimetría de estos sistemas. La parte libre del sector fermiónico corresponde a

$$L_F^0 = \frac{i}{2}(u^2 + v^2)\vartheta_\alpha^u D_t \vartheta_\alpha^u + \frac{i}{2}(u^2 + v^2)\vartheta_\alpha^v D_t \vartheta_\alpha^v$$

mientras que los acoplamientos tipo Yukawa proporcionan los términos

$$\begin{aligned} L_F^I = & -i \left[\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial u} - \frac{1}{u^2 + v^2} \left(u \frac{\partial W}{\partial u} - v \frac{\partial W}{\partial v} \right) \right] \vartheta_1^u \vartheta_2^u - \\ & -i \left[\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} - \frac{1}{u^2 + v^2} \left(u \frac{\partial W}{\partial v} + v \frac{\partial W}{\partial u} \right) \right] (\vartheta_1^u \vartheta_2^v + \vartheta_1^v \vartheta_2^u) \\ & -i \left[\frac{\partial^2 W}{\partial v \partial v} + \frac{1}{u^2 + v^2} \left(u \frac{\partial W}{\partial u} - v \frac{\partial W}{\partial v} \right) \right] \vartheta_1^v \vartheta_2^v \end{aligned}$$

Generalizando la definición 3.1 o 3.4, diremos que:

Definición 7.2: *Un sistema mecánico SuperLiouville de Tipo III es aquel en el que usando un sistema de coordenadas parabólicos definido por (3.1) incluye en (7.4) un superpotencial de la forma:*

$$\rho^* W = W_1(u) + W_2(v)$$

7.3.3 Sistema mecánico de SuperLiouville: Tipo II.

Introduciremos en esta sección los modelos supersimétricos que generalizan los modelos de Liouville de Tipo II, es decir, aquellos modelos que admitían separación en variables de la ecuación de Hamilton-Jacobi utilizando el sistema de coordenadas polares. Este cambio de variables está asociado a la métrica $g'(R, \varphi) = (g'_{jk})$

$$g'_{jk} = \frac{\partial x^a}{\partial u^j} \frac{\partial x^b}{\partial u^k} \delta_{ab} \quad g'(R, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

donde $(x^1, x^2) = (u^1, u^2) = (R, \varphi)$. Los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0 \quad \Gamma_{22}^1 = -R \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{R}$$

La descripción del sector bosónico en estos modelos supersimétricos responde a las expresiones del término cinético

$$L_B^0[R, \varphi] = \frac{1}{2} \dot{R} \dot{R} + \frac{1}{2} R^2 \dot{\varphi} \dot{\varphi}$$

y el término potencial

$$L_B^I[R, \varphi] = -U_B = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial R} \right)^2 - \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2$$

que reproduce el potencial que asignábamos a la definición 4.4 de los modelos de Liouville de Tipo II. La parte libre del sector fermiónico aparece como

$$L_F^0[R, \varphi, \vartheta_\alpha^i] = \frac{i}{2} \vartheta_\alpha^R D_t \vartheta_\alpha^R + \frac{i}{2} R^2 \vartheta_\alpha^\varphi D_t \vartheta_\alpha^\varphi$$

siendo los acoplamientos tipo Yukawa

$$\begin{aligned} L_F^I[R, \varphi, \vartheta_\alpha^i] = & -i \frac{\partial^2 W}{\partial R \partial R} \vartheta_1^R \vartheta_2^R - i \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \varphi} + R \frac{\partial W}{\partial R} \right) \vartheta_1^\varphi \vartheta_2^\varphi - \\ & -i \left(\frac{\partial^2 W}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) (\vartheta_1^R \vartheta_2^\varphi + \vartheta_1^\varphi \vartheta_2^R) \end{aligned}$$

Ahora, podemos anunciar que:

Definición 7.3: *Un sistema mecánico en el marco de la supersimetría será llamado de SuperLiouville de Tipo II si usando un sistema de coordenadas polares definidos por (4.1) incluye un superpotencial de la forma*

$$\zeta^* W = W_1(R) + W_2(\varphi)$$

o análogamente,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial R \partial \varphi} = 0$$

Un hecho que puede ser observado es que si el superpotencial es rotacionalmente invariante también lo será, como consecuencia, el lagrangiano asociado al sistema físico supersimétrico.

7.3.4 Sistema mecánico de SuperLiouville: Tipo IV.

Este bloque de sistemas físicos corresponde al caso más sencillo de los pertenecientes a los modelos de Liouville. El sistema de coordenadas utilizado son las cartesianas, esto es, las variables originales que habíamos introducido para indicar las expresiones de las teorías supersimétricas. Finalmente la definición que delimita los sistemas de SuperLiouville de Tipo IV viene confirmada por el enunciado:

Definición 7.4: *Un sistema mecánico supersimétrico pertenece al Tipo IV de los modelos de SuperLiouville si se verifica que el superpotencial $W(x^1, x^2)$ aparece en la forma*

$$W(x^1, x^2) = W_1(x^1) + W_2(x^2)$$

El lagrangiano queda restringido a la expresión

$$L = \sum_{a=1}^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^a \dot{x}^a + \frac{i}{2} \vartheta_\alpha^a \dot{\vartheta}_\alpha^a - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x^a} \frac{\partial W}{\partial x^a} - i \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^a} \vartheta_1^a \vartheta_2^a \right)$$

donde puede advertirse que, en realidad, el modelo corresponde a la suma directa de dos copias de los modelos supersimétricos $\mathcal{N} = 2$ con $N = 1$.

7.4 De la presencia de invariantes bosónicos

Sobre la experiencia obtenida en el estudio de los modelos de Liouville en el marco de la teoría estática de campos escalares, en los cuales aparecía una nueva integral primera añadida a la energía, es primordial analizar si en los sistemas físicos supersimétricos asociados a dichos modelos subsiste todavía esa propiedad. La literatura acerca de este respecto, ensalzada en el trabajo de Hietarinta [71, 72] propone la siguiente conducta: tratar de forma directa con la expresión de un candidato a integral primera y obligar a que su conmutador (paréntesis de Poisson) con respecto al hamiltoniano sea nulo. Con este punto de vista se trazaron multitud de estudios [71, 72, 67, 116, 73, 119]. Bien es cierto que para los modelos de Liouville en el ámbito de la mecánica clásica la construcción de la segunda integral primera puede llevarse a efecto utilizando la separación en variables admitida por éstos, pero hay que hacer notar que esta propiedad es perdida en los sistemas de SuperLiouville como consecuencia de la presencia de los acoplamientos de Yukawa. Todo ello sugiere que sigamos el esquema indicado por Hietarinta.

En esta sección trataremos el estudio de invariantes o integrales primeras de carácter bosónico asociados a distintos modelos dinámicos supersimétricos. La pregunta substancial a la que trataremos de dar respuesta es si los modelos de SuperLiouville contruidos anteriormente heredan la presencia de una segunda integral primera. La forma en que obraremos es descrita en las próximas líneas. Ensayaremos para el invariante buscado I una expresión genérica obligando al cumplimiento de la condición $\{I, H\}_P = 0$, que nos aseguraría su conservación en el tiempo. Este cálculo es realizado de dos formas: en primera instancia trabajaremos con las variables originales o cartesianas y posteriormente el mismo cálculo se realizará con las coordenadas curvadas, apoyados en el esquema de Cartan trazado en el apéndice C. Ello radica en que nuestro análisis de sistemas de SuperLiouville tiene dos comportamientos analíticos; uno en el que las operaciones a ejecutar son más simples empleando las coordenadas curvilíneas pertinentes, que aseguran la separabilidad del superpotencial en esas variables, y otro en el que las expresiones son adecuadamente mejor manipuladas en cartesianas, habida cuenta de que al tratar el sistema físico en cuestión bajo una métrica euclídea, los acoplamientos Yukawa se exhiben

de forma natural como simples derivadas parciales segundas. El estudio simultáneo de estas dos formas nos permitirá encontrar la información requerida.

7.4.1 Cálculos genéricos en coordenadas cartesianas

Ensayaremos para el nuevo invariante una forma cuadrática en los momentos, inspirada en la expresión seguida por las integrales primeras de los modelos de Liouville, junto con los distintos acoplamientos a los grados grassmannianos que se pueden generar

$$I = \frac{1}{2}H^{ij}p_i p_j + V(x_1, x_2) + F_{ij}\theta_1^i \theta_2^j + G_{ij}\theta_1^i \theta_1^j + J_{ij}\theta_2^i \theta_2^j + L_{jk}^i p_i \theta_1^j \theta_1^k + M_{jk}^i p_i \theta_2^j \theta_2^k + N_{jk}^i p_i \theta_1^j \theta_2^k + S_{ijkl}\theta_1^i \theta_2^k \theta_1^j \theta_2^l \quad (7.11)$$

donde sin pérdida de generalidad, debido a las simetrías que se introducen en los productos de los momentos bosónicos y las variables grassmannianas, asumimos que:

- H^{ij} es simétrico, de modo que constituyen tres cantidades a determinar.
- L_{jk}^i y M_{jk}^i son antisimétricos al intercambio de los índices j, k . Se tiene $L_{jk}^i = -L_{kj}^i$ y $M_{jk}^i = -M_{kj}^i$. En conjunto conforman cuatro grados de libertad.
- G_{ij} y J_{ij} son antisimétricos en los índices, esto es, $G_{ij} = -G_{ji}$ y $J_{ij} = -J_{ji}$, tal que para determinar dichas magnitudes debemos especificar dos componentes. La magnitud F_{ij} es designada por cuatro componentes.
- Finalmente S_{ijkl} es antisimétrico al intercambio de los índices i, j y k, l y simétrico para el intercambio de los pares de índices ij, kl . Guarda, por tanto, las mismas simetrías que el tensor de curvatura. Por ello, sólo sobrevive una de sus componentes cuando $N = 2$.

El paréntesis de Poisson entre el hamiltoniano y la magnitud (7.11) queda expresado como

$$\begin{aligned} -\{I, H\}_P &= \frac{1}{2} \frac{\partial H^{jk}}{\partial x^l} p_l p_j p_k + \left(-H^{lj} \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial W}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_l} \right) p_l + \\ &+ \left(-iH^{nj} \frac{\partial^3 W}{\partial x^k \partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_n} + 2L_{km}^n \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial x_l} + 2M_{lm}^n \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial x^k} \right) p_n \theta_1^k \theta_2^l + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_l \partial x^k} F_{lj} - M_{kj}^n \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x_l} \frac{\partial W}{\partial x^l} \right) \theta_2^k \theta_2^j + \left(\frac{\partial J_{lj}}{\partial x_k} + N_{mj}^k \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial x^l} \right) p_k \theta_2^l \theta_2^j - \\ &- \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x_k} F_{nk} + L_{nj}^l \frac{\partial^2 W}{\partial x^l \partial x^k} \frac{\partial W}{\partial x_k} \right) \theta_1^n \theta_1^j + \left(\frac{\partial G_{nj}}{\partial x_l} - N_{nk}^l \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_k} \right) p_l \theta_1^n \theta_1^j + \\ &+ 2 \left(G_{nj} \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x^k} + J_{kl} \frac{\partial^2 W}{\partial x^n \partial x_l} - \frac{1}{2} N_{nk}^j \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^l} \frac{\partial W}{\partial x_l} \right) \theta_1^n \theta_2^k + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial L_{jk}^n}{\partial x_l} p_l p_n \theta_1^j \theta_1^k + \frac{\partial M_{jk}^n}{\partial x_l} p_l p_n \theta_2^j \theta_2^k + \frac{\partial N_{jk}^n}{\partial x_l} p_l p_n \theta_1^j \theta_2^k + \\
& - i N_{jk}^n \frac{\partial^3 W}{\partial x^n \partial x^l \partial x^m} \theta_1^j \theta_2^k \theta_1^l \theta_2^m - i \frac{\partial S_{njkl}}{\partial x_m} p_m \theta_1^n \theta_2^k \theta_1^j \theta_2^l
\end{aligned}$$

por lo que hemos de asumir las siguientes condiciones

BLOQUE 1:

$$1a): \quad \frac{\partial H^{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial H^{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial H^{kj}}{\partial x^l} = 0$$

BLOQUE 2:

$$2a): \quad H^{jk} \frac{\partial^2 W}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial W}{\partial x_l} = \frac{\partial V}{\partial x_j}$$

BLOQUE 3:

$$3a): \quad \epsilon^{kl} \frac{\partial L_{kl}^j}{\partial x_n} + \epsilon^{kl} \frac{\partial L_{kl}^n}{\partial x_j} = 0$$

$$3b): \quad \epsilon^{kl} \frac{\partial M_{kl}^j}{\partial x_n} + \epsilon^{kl} \frac{\partial M_{kl}^n}{\partial x_j} = 0$$

BLOQUE 4:

$$4a): \quad H^{nj} \frac{\partial^3 W}{\partial x^k \partial x^l \partial x^j} + i \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_n} + 2i L_{km}^n \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial x_l} + 2i M_{lj}^n \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x^k} = 0$$

$$4b): \quad \epsilon^{nj} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x^k} F_{kj} - M_{nj}^k \frac{\partial^2 W}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial W}{\partial x^l} \right) = 0$$

$$4c): \quad \epsilon^{nj} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x_k} F_{nk} + L_{nj}^l \frac{\partial^2 W}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial W}{\partial x_k} \right) = 0$$

BLOQUE 5:

$$5a): \quad \epsilon^{nj} \left(\frac{\partial G_{nj}}{\partial x_l} - N_{jk}^l \frac{\partial^2 W}{\partial x_n \partial x_k} \right) = 0$$

$$5b): \quad \epsilon^{nj} \left(\frac{\partial J_{nj}}{\partial x_k} + N_{mj}^k \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial x^n} \right) = 0$$

$$5c): \quad G_{nj} \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x^k} + J_{kl} \frac{\partial^2 W}{\partial x^n \partial x_l} - \frac{1}{2} N_{nk}^j \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^l} \frac{\partial W}{\partial x_l} = 0$$

$$5d): \quad \frac{\partial N_{jk}^n}{\partial x_l} + \frac{\partial N_{jk}^l}{\partial x_n} = 0$$

$$5e): \quad \epsilon^{nj} \epsilon^{lk} N_{jk}^m \frac{\partial^3 W}{\partial x^n \partial x^l \partial x^m} = 0$$

BLOQUE 6:

$$6a): \quad \epsilon^{nj} \epsilon^{kl} \frac{\partial S_{njkl}}{\partial x_m} = 0$$

con el propósito de que la expresión de I adopte el papel de invariante.

Sobre las propiedades de las condiciones:

Cada uno de los bloques guarda condiciones autoconsistentes, los primeros bloques permiten identificar ciertas componentes de I que posteriormente son usadas en los posteriores bloques para obtener otras. En total suman 31 condiciones que determinan 15 componentes libres que conforman la integral primera (7.11). Es fácil asumir las siguientes consecuencias:

1. Las condiciones expresadas en el *bloque 1* y *2* corresponden a las relaciones halladas en la teoría sin grados de libertad fermiónicos. Esta información puede ser directamente obtenida de los resultados clásicos. Esto nos permite identificar las expresiones seguidas por H^{jk} y por V .
2. Las igualdades integradas en el *bloque 3* son verificadas asumiendo la forma afín para las componentes no triviales de las magnitudes L_{jk}^l y M_{jk}^l ,

$$\begin{aligned} L_{12}^1 &= Cx_2 + A_1 & L_{12}^2 &= -Cx_1 + A_2 \\ M_{12}^1 &= Dx_2 + B_1 & M_{12}^2 &= -Dx_1 + B_2 \end{aligned}$$

donde A_j , B_j , C y D corresponden a constantes.

3. El *bloque 4* constituye un conjunto de 10 ecuaciones que establecen el comportamiento de las cuatro componentes de la magnitud F_{jk} . La condición 4a) obliga el cumplimiento de la siguiente relación

$$\epsilon^{mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[L_{jk}^n \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x^l} + M_{jl}^n \frac{\partial^2 W}{\partial x^k \partial x_j} + \frac{i}{2} H^{nj} \frac{\partial^3 W}{\partial x^j \partial x^k \partial x^l} \right] = 0$$

que quedará referida como condición 4d). La suposición añadida de la simetricidad de F_{ij} (lo que reduce los grados de libertad de esta magnitud a tres) junto con la igualdad $L_{jk}^l = M_{jk}^l$ (establecida mediante las relaciones $C = D$, $A_j = B_j$) transforman las condiciones 4b) y 4c) en una sóla. Quedan bajo estas hipótesis 4 relaciones para determinar el tensor simétrico F_{jk} .

4. Las condiciones del *bloque 5* son directamente verificadas considerando la anulación de los tensores G_{jk} , J_{jk} y N_{jkl} ;

$$G_{jk} = J_{jk} = N_{jkl} = 0$$

5. El *bloque 6* es autoconsistente y nos informa que la única componente no fijada por simetrías de S_{ijkl} debe ser constante, esto es

$$S_{1212} = \text{cte}$$

Esto nos lleva directamente a enunciar que la magnitud

$$I_3 = \theta_1^1 \theta_1^2 \theta_2^1 \theta_2^2$$

expresada como el producto de todos los grados grassmannianos que son introducidos en la teoría es una integral primera. Ésta es una afirmación generalizable a cualquier sistema físico supersimétrico.

7.4.2 Cálculos genéricos en coordenadas curvadas

Esta sección es dedicada, como había sido anunciado, a abordar los mismos cálculos realizados en la sección anterior considerados, esta vez, sobre sistemas físicos que introducen una métrica genérica g_{jk} . Las expresiones generales que hallaremos nos permitirán estudiar, en particular, la presencia de un nuevo invariante en un sistema físico con curvatura plana usando un sistema de coordenadas cualquiera $x'^j = x'^j(x^k)$. Este es el caso de los sistemas mecánicos de SuperLiouville al que nos restringimos. El cometido perseguido es verificar si en algún caso el uso adecuado de un sistema de coordenadas permite analizar el comportamiento del invariante que estamos buscando de forma más simple. Recuérdese, además, que los grados grassmannianos se comportan como tensores contravariantes, tal que $\vartheta_\alpha^j = E^j_a \theta_\alpha^a$ (ver apéndice C). Por comodidad de escritura introduciremos la notación $t_j = g_{jk} \dot{x}^k$. Como en los cálculos precedentes, el objetivo será identificar la expresión de I tal que su paréntesis de Poisson con respecto al hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} g^{jk} t_j t_k + \frac{1}{2} g^{jk} W_{;j} W_{;k} + i W_{;j;k} \vartheta_1^j \vartheta_2^k$$

sea nulo. Ensayaremos para I una expresión cuadrática en los momentos de tipo bosónico, como fue considerado en (7.11). Entonces

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} \tilde{H}^{ij} t_i t_j + \frac{1}{2} \tilde{K}^{ij} W_{;i} W_{;j} + \tilde{F}_{ij} \vartheta_1^i \vartheta_2^j + \tilde{G}_{ij} \vartheta_1^i \vartheta_1^j + \tilde{J}_{ij} \vartheta_2^i \vartheta_2^j + \\ & + \tilde{L}_{jk}^i t_i \vartheta_1^j \vartheta_1^k + \tilde{M}_{jk}^i t_i \vartheta_2^j \vartheta_2^k + \tilde{N}_{jk}^i t_i \vartheta_1^j \vartheta_2^k \end{aligned} \quad (7.12)$$

donde sin pérdida de generalidad asumimos que las magnitudes tilde exhiben las mismas propiedades que las mostradas en la sección precedente. Los resultados obtenidos allí nos permiten simplificar los cálculos, eliminando los términos cuárticos en los grados fermiónicos y ensayando sobre el término de potencial una expresión del tipo $V(x) = \frac{1}{2} \tilde{K}^{ij} W_{;i} W_{;j}$. Si estudiamos una misma teoría en dos sistemas de coordenadas diferentes, la covariancia permite transformar las magnitudes introducidas en la sección precedente en las nuevas magnitudes tildadas o viceversa. El conmutador o paréntesis de Poisson queda dado como:

$$-i\{I, H\}_P = \frac{i}{2} \left(g^{kr} \frac{\partial \tilde{H}^{jl}}{\partial x'^r} - \tilde{H}^{jr} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x'^r} \right) t_k t_l t_j +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{2} \left[-\tilde{H}^{jr} \frac{\partial(g^{kl}W_{;k}W_{;l})}{\partial x'^r} + g^{jr} \frac{\partial(\tilde{K}^{kl}W_{;k}W_{;l})}{\partial x'^r} \right] t_j + \\
& + \left(\tilde{H}^{jr}W_{;k;l;r} + ig^{jr}\tilde{F}_{kl;r} - 2i\tilde{L}_{kr}^j g^{sr}W_{;s;l} - 2i\tilde{M}_{ls}^j g^{sr}W_{;k;r} \right) t_j \vartheta_1^k \vartheta_2^l + \\
& + i \left(g^{kr}\tilde{F}_{rj}W_{;k;l} - \frac{1}{2}\tilde{M}_{lj}^k \frac{\partial(g^{rs}W_{;r}W_{;s})}{\partial x'^k} \right) \vartheta_2^l \vartheta_2^j - \\
& - i \left(g^{lr}\tilde{F}_{jr}W_{;k;l} - \frac{1}{2}\tilde{L}_{jk}^l \frac{\partial(g^{rs}W_{;r}W_{;s})}{\partial x'^l} \right) \vartheta_1^j \vartheta_1^k + \\
& + i \left(g^{kr}\tilde{G}_{lj;r} - g^{rs}\tilde{N}_{ls}^k W_{;r;j} \right) t_k \vartheta_1^l \vartheta_1^j + i \left(g^{kr}\tilde{J}_{lj;r} + g^{rs}\tilde{N}_{sj}^k W_{;r;l} \right) t_k \vartheta_2^l \vartheta_2^j + \\
& + i \left(2g^{rs}\tilde{G}_{jr}W_{;s;k} + 2g^{rs}\tilde{J}_{ks}W_{;j;r} + \frac{1}{2}\tilde{N}_{jk}^l \frac{\partial(g^{rs}W_{;r}W_{;s})}{\partial x'^l} \right) \vartheta_1^j \vartheta_2^k + \\
& + i \left[g^{rn} \left(\frac{\partial\tilde{L}_{jk}^s}{\partial x'^n} - \Gamma_{nj}^r \tilde{L}_{lk}^s - \Gamma_{nk}^r \tilde{L}_{jl}^s \right) - \tilde{L}_{jk}^l \frac{\partial g^{rs}}{\partial x'^l} \right] t_r t_s \vartheta_1^j \vartheta_1^k + \\
& + i \left[g^{ns} \left(\frac{\partial\tilde{M}_{jk}^l}{\partial x'^s} - \Gamma_{sj}^r \tilde{M}_{rk}^l - \Gamma_{sk}^r \tilde{M}_{jr}^l \right) - \tilde{M}_{jk}^r \frac{\partial g^{nl}}{\partial x'^r} \right] t_n t_l \vartheta_2^j \vartheta_2^k + \\
& + i \left[g^{ns} \left(\frac{\partial\tilde{N}_{jk}^l}{\partial x'^s} - \Gamma_{rj}^l \tilde{N}_{sk}^r - \Gamma_{sk}^r \tilde{N}_{jr}^l \right) - \tilde{N}_{jk}^s \frac{\partial g^{nl}}{\partial x'^s} \right] t_n t_l \vartheta_1^j \vartheta_2^k
\end{aligned}$$

El conjunto de condiciones que convierten a la magnitud I en una integral primera asociada al sistema físico supersimétrico es:

BLOQUE I:

$$\begin{aligned}
\text{Ia):} \quad & \tilde{H}^{kj} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x'^j} + \tilde{H}^{mj} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x'^j} + \tilde{H}^{lj} \frac{\partial g^{mk}}{\partial x'^j} - \\
& - g^{kj} \frac{\partial \tilde{H}^{lm}}{\partial x'^j} - g^{mj} \frac{\partial \tilde{H}^{kl}}{\partial x'^j} - g^{lj} \frac{\partial \tilde{H}^{mk}}{\partial x'^j} = 0
\end{aligned}$$

BLOQUE II:

$$\text{IIa):} \quad \tilde{H}^{jk} \frac{\partial(g^{rs}W_{;r}W_{;s})}{\partial x'^k} = g^{jk} \frac{\partial(\tilde{K}^{rs}W_{;r}W_{;s})}{\partial x'^k}$$

BLOQUE III:

$$\text{IIIa):} \quad g^{rs} \left(\frac{\partial\tilde{L}_{jk}^l}{\partial x'^s} - \Gamma_{sj}^m \tilde{L}_{mk}^l - \Gamma_{sk}^m \tilde{L}_{jm}^l \right) - \tilde{L}_{jk}^s \frac{\partial g^{rl}}{\partial x'^s} = 0$$

$$\text{IIIb):} \quad g^{rs} \left(\frac{\partial\tilde{M}_{jk}^l}{\partial x'^s} - \Gamma_{sj}^m \tilde{M}_{mk}^l - \Gamma_{sk}^m \tilde{M}_{jn}^l \right) - \tilde{M}_{jk}^m \frac{\partial g^{rl}}{\partial x'^m} = 0$$

BLOQUE IV:

$$\text{IVa):} \quad \tilde{H}^{jl}W_{;r;s;l} + ig^{jl}\tilde{F}_{rs;l} - 2i\tilde{L}_{rm}^j g^{lm}W_{;l;s} - 2i\tilde{M}_{sl}^j g^{lm}W_{;r;m} = 0$$

$$\text{IVb):} \quad \epsilon^{jk} \left(g^{rl}\tilde{F}_{lj}W_{;r;k} - \frac{1}{2}\tilde{M}_{kj}^l \frac{\partial(g^{rs}W_{;r}W_{;s})}{\partial x'^l} \right) = 0$$

$$\text{IVc): } \epsilon^{jk} \left(g^{rl} \tilde{F}_{jl} W_{;k;r} - \frac{1}{2} \tilde{L}_{jk}^l \frac{\partial(g^{rs} W_{;r} W_{;s})}{\partial x'^l} \right) = 0$$

BLOQUE V:

$$\text{Va): } \epsilon^{jk} \left(g^{rs} \tilde{G}_{jk;s} - g^{sl} \tilde{N}_{jl}^r W_{;s;k} \right) = 0$$

$$\text{Vb): } \epsilon^{jk} \left(g^{rs} \tilde{J}_{jk;s} + g^{sl} \tilde{N}_{lk}^r W_{;s;j} \right) = 0$$

$$\text{Vc): } 2g^{lr} \tilde{G}_{jl} W_{;r;k} + 2g^{rs} \tilde{J}_{ks} W_{;j;r} + \frac{1}{2} \tilde{N}_{jk}^l \frac{\partial(g^{rs} W_{;r} W_{;s})}{\partial x'^l} = 0$$

$$\text{Vd): } g^{rs} \left(\frac{\partial \tilde{N}_{jk}^l}{\partial x'^s} - \Gamma_{mj}^l \tilde{N}_{sk}^m - \Gamma_{sk}^n \tilde{N}_{jm}^l \right) - \tilde{N}_{jk}^s \frac{\partial g^{rl}}{\partial x'^s} = 0$$

Estudio de las propiedades de las condiciones:

Las condiciones mostradas anteriormente, que verifican las magnitudes \tilde{H}^{ij} , \tilde{K}^{ij} , \tilde{F}_{ij} , \tilde{G}_{ij} , \tilde{J}_{ij} , \tilde{L}_{ij}^i , \tilde{M}_{ij}^i , \tilde{N}_{ij}^i que forman parte de la expresión (7.12), nos permiten asegurar que:

1. En caso de eliminar los grados fermiónicos, la teoría quedaría restringida a los sistemas mecánicos clásicos. Por ello, el estudio de las condiciones del bloque 1 y 2 determinaría la integral primera del sector bosónico del sistema supersimétrico. Los resultados clásicos pueden ser utilizados para obtener las magnitudes aludidas en los dos primeros bloques.
2. Bajo la hipótesis $\tilde{K}^{ij} = \tilde{H}^{ij}$, la condición IIa) se transforma en la relación:

$$\tilde{H}^{jk} g^{rs} \frac{\partial(W_{;r} W_{;s})}{\partial x'^k} = g^{jk} \tilde{H}^{rs} \frac{\partial(W_{;r} W_{;s})}{\partial x'^k}$$

Para modelos físicos que admitan un sistema de coordenadas que genere una métrica g^{jk} y una magnitud \tilde{H}^{ij} diagonales, la condición que acabamos de presentar se convierte en

$$(\tilde{H}^{11} g^{22} - g^{11} \tilde{H}^{22}) \frac{\partial(W_{;2} W_{;2})}{\partial x'^1} = 0 \quad (\tilde{H}^{22} g^{11} - g^{22} \tilde{H}^{11}) \frac{\partial(W_{;1} W_{;1})}{\partial x'^2} = 0$$

las cuales se verifican siempre bajo el requisito de separabilidad del superpotencial en las nuevas variables

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^1 \partial x'^2} = 0$$

Esto se ajusta a las definiciones de los modelos de SuperLiouville. Recuérdese, además, que para estos sistemas el estudio del sector bosónico realizado en los primeros capítulos determinó la igualdad y la diagonalidad de las magnitudes \tilde{H}^{ij} y \tilde{K}^{ij} , como requería la hipótesis de partida de este punto.

3. Las condiciones del *bloque III y IV* constituyen expresiones mucho más complejas que las encontradas en la sección anterior y su estudio será contemplado mediante el uso de la covariancia de la teoría y de las condiciones descritas en el bloque 4.
4. Las condiciones plasmadas en el *bloque V* son verificadas mediante la anulación de las magnitudes

$$\tilde{G}_{ij} = \tilde{J}_{ij} = \tilde{N}_{jk}^i = 0$$

Esto es un resultado esperado desde la información de la sección precedente, apoyados en la covariancia de la teoría.

7.5 Invariantes en los sistemas de SuperLiouville

Nos prestaremos en esta sección al cálculo de la extensión supersimétrica de las segundas integrales primeras, que aparecían en los modelos de Liouville. Téngase en cuenta que dichos invariantes no se conservan tal cual aparecían en la mecánica clásica debido a la presencia del acoplamiento de tipo Yukawa, de forma que hemos de añadir términos a la expresión de la segunda integral primera originaria para alcanzar su conservación en la mecánica supersimétrica. Así, pues, escribiremos la constante del movimiento buscada como la suma de dos términos

$$I_2 = I_2^{(B)} + I_2^{(F)}$$

de modo que $I_2^{(B)}$ corresponde a la porción de la integral primera que no muestra una dependencia explícita de las variables grassmannianas, mientras que $I_2^{(F)}$ es la parte que incluye estos grados y representa, por ello, la extensión supersimétrica de I_2 . Mostraremos los resultados referidos a cada uno de los tipos de los modelos que tratamos:

7.5.1 Sistemas mecánicos de SuperLiouville de Tipo I

El conjunto de modelos, que quedan abarcados por este tipo, son aquellos que presentan un superpotencial separable mediante el uso de coordenadas elípticas. Basado en el estudio del sector bosónico de estos sistemas es sencillo extraer la forma de los tensores H^{jk} y \tilde{H}^{jk} , siendo:

$$H = (H^{jk}) = \begin{pmatrix} x^2 x^2 & -x^1 x^2 \\ -x^1 x^2 & x^1 x^1 - \Omega^2 \end{pmatrix} \quad \tilde{H} = (\tilde{H}^{jk}) = \frac{(\Omega - v^2)(u^2 - \Omega)}{u^2 - v^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La condición 2a) impone que $\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = 0$, o sobre las variables iniciales,

$$x^1 x^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} \right) + (x^2 x^2 - x^1 x^1 + \Omega^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} + x^2 \frac{\partial W}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial W}{\partial x^2} = 0$$

Obviamente esta condición se cumple directamente para los modelos de SuperLiouville de Tipo I. Por otra parte, las condiciones del bloque 3 permiten calcular las magnitudes $L^k = (L_{ij}^k)$ y $M^k = (M_{ij}^k)$

$$L^1 = M^1 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ -x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad L^2 = M^2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -x^1 \\ x^1 & 0 \end{pmatrix}$$

o bien, en coordenadas elípticas, siendo $\tilde{L}^k = (\tilde{L}_{ij}^k)$ y $\tilde{M}^k = (\tilde{M}_{ij}^k)$,

$$\tilde{L}^1 = \tilde{M}^1 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{L}^2 = \tilde{M}^2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -u \\ u & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando el estudio del próximo bloque de condiciones, encontramos que el requisito 4a) proporciona la forma de $F = (F_{jk})$

$$F = i \begin{pmatrix} -x^2 \frac{\partial W}{\partial x^2} - x^1 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} + x^2 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} & -x^1 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} + x^2 \frac{\partial W}{\partial x^1} + x^2 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} \\ -x^1 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} + x^2 \frac{\partial W}{\partial x^1} + x^2 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} & -(\Omega^2 - x^1 x^1) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} - x^1 \frac{\partial W}{\partial x^1} - x^1 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} \end{pmatrix}$$

Según IV, el mismo resultado puede ser expresado por

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} -i(\Omega^2 - v^2) \left[W_{;u;u} + \frac{v W_{;v}}{u^2 - \Omega^2} \right] & \frac{i u (\Omega^2 - v^2) W_{;v}}{u^2 - v^2} + \frac{i v (u^2 - \Omega^2) W_{;u}}{u^2 - v^2} \\ \frac{i u (\Omega^2 - v^2) W_{;v}}{u^2 - v^2} + \frac{i v (u^2 - \Omega^2) W_{;u}}{u^2 - v^2} & i (u^2 - \Omega^2) \left[W_{;v;v} - \frac{u W_{;u}}{\Omega^2 - v^2} \right] \end{pmatrix}$$

Las condiciones restantes se verifican inmediatamente bajo el requisito que cumplen aquellos superpotenciales asociados a los modelos de SuperLiouville de tipo I. Entonces, escribimos la segunda integral primera en la forma $I_2 = I_2^{(B)} + I_2^{(F)}$, donde:

$$\begin{aligned} I_2^{(B)} &= \frac{1}{2} \left[(x^2 \dot{x}^1 - x^1 \dot{x}^2)^2 - \Omega^2 \dot{x}^2 \dot{x}^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\left(x^2 \frac{\partial W}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial W}{\partial x^2} \right)^2 - \Omega^2 \frac{\partial W}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial x^2} \right] \\ I_2^{(F)} &= i(x^2 \dot{x}^1 - x^1 \dot{x}^2) \theta_\alpha^1 \theta_\alpha^2 + \left(-i x^2 \frac{\partial W}{\partial x^2} - i x^1 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} + i x^2 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} \right) \theta_1^1 \theta_2^1 + \\ &+ \left(-i x^1 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} + i x^2 \frac{\partial W}{\partial x^1} + i x^2 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} \right) (\theta_1^1 \theta_2^2 + \theta_1^2 \theta_2^1) + \\ &+ i \left(2x^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} \right) \theta_1^2 \theta_2^2 \end{aligned}$$

o bien, en el plano elíptico,

$$\begin{aligned} I_2^{(B)} &= \frac{1}{2} (u^2 - v^2) \left[\frac{u^2 - \Omega^2}{\Omega^2 - v^2} \dot{v} \dot{v} - \frac{\Omega^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} \dot{u} \dot{u} \right] + \frac{(u^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - v^2)}{2(u^2 - v^2)} (W_{;v}^2 - W_{;u}^2) \\ I_2^{(F)} &= i(u^2 - v^2) \left(\frac{v \dot{u}}{u^2 - \Omega^2} - \frac{u \dot{v}}{\Omega^2 - v^2} \right) \vartheta_\alpha^u \vartheta_\alpha^v + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i \left[\frac{u(\Omega^2 - v^2)W_{;v}}{u^2 - v^2} + \frac{v(u^2 - \Omega^2)W_{;u}}{u^2 - v^2} \right] (\vartheta_1^u \vartheta_2^v + \vartheta_1^v \vartheta_2^u) - \\
& - i(\Omega^2 - v^2) \left[W_{;u;u} + \frac{vW_{;v}}{u^2 - \Omega^2} \right] \vartheta_1^u \vartheta_2^u + i(u^2 - \Omega^2) \left[W_{;v;v} - \frac{uW_{;u}}{\Omega^2 - v^2} \right] \vartheta_1^v \vartheta_2^v
\end{aligned}$$

donde la parte bosónica de I reproduce el resultado clásico.

7.5.2 Sistemas mecánicos de SuperLiouville de Tipo III

El estudio del sector bosónico de esta variedad de modelos realizado en capítulos anteriores nos proporcionó el invariante (3.4), de donde puede leerse directamente como resultado

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -x^2 \\ -x^2 & 2x^1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{H} = \begin{pmatrix} -\frac{v^2}{u^2 + v^2} & 0 \\ 0 & \frac{u^2}{u^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

que a su vez verifican 1a). La condición IIa) para los valores de $i = 1, 2$ se manifiesta como

$$-\frac{2}{u^2 + v^2} \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = 0 \quad \frac{2}{u^2 + v^2} \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = 0$$

de donde es natural imponer en este caso la condición $\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = 0$, que reproduce la definición de los modelos de SuperLiouville de tipo III. En las variables iniciales el requisito anterior se refleja como:

$$2x^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} + x^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} \right) + \frac{\partial W}{\partial x^2} = 0 \quad (7.13)$$

La condición 3a) dictamina que

$$L^1 = M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L^2 = M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

o bien, en las coordenadas parabólicas utilizadas en IIIa)

$$\tilde{L}^1 = \tilde{M}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}v \\ \frac{i}{2}v & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{L}^2 = \tilde{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}u \\ \frac{i}{2}u & 0 \end{pmatrix}$$

El primer requisito mostrado por el bloque 4 nos permite reconstruir la magnitud de acoplamiento con grados fermiónicos

$$F = \begin{pmatrix} -ix^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} & -ix^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} \\ -ix^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} & 2ix^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} - i \frac{\partial W}{\partial x^1} - ix^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo, según IV,

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} -iv^2W_{;u;u} + ivW_{;v} & -\frac{iuv}{u^2+v^2}(uW_{;u} - vW_{;v}) \\ -\frac{iuv}{u^2+v^2}(uW_{;u} - vW_{;v}) & iu^2W_{;v;v} - iuW_{;u} \end{pmatrix}$$

mientras que las condiciones remanentes se verifican inmediatamente bajo (7.13), que define los modelos de SuperLiouville de Tipo III. Entonces, el invariante a añadir junto al hamiltoniano quedará expresado como la suma de los términos

$$\begin{aligned} I_2^{(B)} &= (x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1)\dot{x}^2 + \left(x^1\frac{\partial W}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)\frac{\partial W}{\partial x^2} \\ I_2^{(F)} &= -i\dot{x}^2\theta_\alpha^1\theta_\alpha^2 - ix^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2}\theta_1^1\theta_2^1 - ix^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2}(\theta_1^1\theta_2^2 + \theta_1^2\theta_2^1) \\ &\quad + i\left(2x^1\frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2}\right)\theta_1^2\theta_2^2 \end{aligned}$$

o bien, usando las variables parabólicas,

$$\begin{aligned} I_2^{(B)} &= \frac{1}{2}(u^2+v^2)(u^2\dot{v}\dot{v} - v^2\dot{u}\dot{u}) + \frac{1}{2(u^2+v^2)}(u^2W_{;v}W_{;v} - v^2W_{;u}W_{;u}) \\ I_2^{(F)} &= -i(u^2+v^2)(v\dot{u} + u\dot{v})\vartheta_\alpha^u\vartheta_\alpha^v - iv(vW_{;u;u} - W_{;v})\vartheta_1^u\vartheta_2^u + \\ &\quad -\frac{iuv}{u^2+v^2}(uW_{;u} - vW_{;v})(\vartheta_1^u\vartheta_2^v + \vartheta_1^v\vartheta_2^u) + iu(uW_{;v;v} - W_{;u})\vartheta_1^v\vartheta_2^v \end{aligned}$$

donde de nuevo es lícito afirmar, al contrastar la parte bosónica de la integral primera encontrada con respecto al resultado clásico (3.4), que corresponden a la misma expresión.

7.5.3 Sistemas mecánicos de SuperLiouville de Tipo II

Este tipo de modelos requería que bajo el uso de variables polares (4.1) el superpotencial se manifestará como una expresión separada, de modo que $\frac{\partial^2 W}{\partial R \partial \varphi} = 0$, lo cual respecto de las variables iniciales queda indicado como

$$-x^1x^2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2}\right) + (x^1x^1 - x^2x^2)\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2} + x^1\frac{\partial W}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial W}{\partial x^1} = 0 \quad (7.14)$$

Entonces, las magnitudes

$$H = \begin{pmatrix} x^2x^2 & -x^1x^2 \\ -x^1x^2 & x^1x^1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifican respectivamente las relaciones 1a) y Ia). La condición de separabilidad sobre el potencial expuesta en (7.14) transforma 2a) y IIa) en identidades. Los

requisitos del bloque 3 son satisfechos eligiendo

$$L^1 = M^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}x^2 \\ -\frac{i}{2}x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad L^2 = M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}x^1 \\ \frac{i}{2}x^1 & 0 \end{pmatrix}$$

o bien, en las coordenadas polares,

$$\tilde{L}^1 = \tilde{M}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{L}^2 = \tilde{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}R \\ \frac{i}{2}R & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la condición 4a) establece la necesidad de que el tensor F_{jk} quede determinado en la forma

$$F = i \begin{pmatrix} -x^2 \frac{\partial W}{\partial x^2} - x^1 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} + x^2 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} & -x^1 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} + x^2 \frac{\partial W}{\partial x^1} + x^2 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} \\ -x^1 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} + x^2 \frac{\partial W}{\partial x^1} + x^2 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} & x^1 x^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} - x^1 \frac{\partial W}{\partial x^1} - x^1 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} \end{pmatrix}$$

que podemos expresar en variables polares como

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & iR^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \varphi} \end{pmatrix}$$

El resto de las condiciones pertenecientes a este bloque reproducen la igualdad (7.14) y se verifican, por tanto, por la propia definición de los sistemas de SuperLiouville del tipo II.

Al recopilar toda esta información, podemos escribir la nueva integral primera siguiendo la expresión genérica (7.11)

$$\begin{aligned} I_2^{(B)} &= \frac{1}{2} (x^2 \dot{x}^1 - x^1 \dot{x}^2)^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial W}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial W}{\partial x^2} \right)^2 \\ I_2^{(F)} &= i (x^2 \dot{x}^1 - x^1 \dot{x}^2) \theta_\alpha^1 \theta_\alpha^2 + ix^2 \left(x^2 \frac{\partial W}{\partial x^1 \partial x^1} - x^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x^2} \right) \theta_1^1 \theta_2^1 + \\ &+ ix^2 \left(x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial W}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} \right) (\theta_1^1 \theta_2^2 + \theta_1^2 \theta_2^1) + \\ &+ ix^1 \left(x^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} \right) \theta_1^2 \theta_2^2 \end{aligned}$$

o bien, sobre el plano polar,

$$I_2 = \frac{1}{2} R^2 \dot{\varphi} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - iR^3 \dot{\varphi} \vartheta_\alpha^R \vartheta_\alpha^\varphi + iR^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \varphi} \vartheta_1^\varphi \vartheta_2^\varphi$$

donde puede observarse que la expresión $I_2^{(B)}$ coincide plenamente con la segunda integral primera (4.6) surgida en el sistema clásico de Liouville de tipo II. Entonces, $I_2^{(F)}$ es la extensión supersimétrica buscada.

7.5.4 Sistemas mecánicos de SuperLiouville de Tipo IV

Los modelos encuadrados en esta clase de sistemas físicos incluyen superpotenciales con una forma separada en variables, de modo que se verifica

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} = 0$$

Las integrales primeras pueden ser identificadas en este caso de una manera sencilla, advirtiendo que los modelos de Liouville de Tipo IV vienen constituidos por dos copias de teorías supersimétricas $\mathcal{N} = 2$ con espacio unidimensional $N = 1$. Por ello, la segunda integral primera añadida a la energía, corresponde a la expresión

$$I_2 = \frac{1}{2} \dot{x}^1 \dot{x}^1 + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x^1} \frac{\partial W}{\partial x^1} + i \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} \theta_1^1 \theta_2^1$$

7.6 De la presencia de invariantes fermiónicos

La sección precedente nos permitió dilucidar la presencia de integrales primeras de carácter bosónico añadidas a la energía para los modelos de SuperLiouville. Junto a dichos invariantes para sistemas mecánicos supersimétricos $\mathcal{N} = 2$ hemos de adjuntar las dos supercargas de carácter fermiónico. En esta sección trataremos de examinar si existen nuevos invariantes de naturaleza fermiónica. Ensayaremos la expresión más general de tipo impar asociada a un sistema físico con $N = 2$,

$$q = \underbrace{A^a{}_b p_a \theta_1^b + B_{abc} \theta_1^a \theta_2^b \theta_2^c + U_a \theta_2^a}_{q_1} + \underbrace{C^a{}_b p_a \theta_2^b + D_{abc} \theta_1^a \theta_1^b \theta_2^c + V_a \theta_1^a}_{q_2} \quad (7.15)$$

en la que distinguimos dos subexpresiones, la primera abarcada por q_1 que consta de los tres primeros sumandos y la segunda por q_2 conformada por los últimos tres sumandos. Pretendemos que el paréntesis de Poisson de (7.15) con respecto al hamiltoniano sea nulo, esto es, $\{H, q\}_P = 0$. El cálculo explícito de dicha operación arroja las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} -i\{H, q\}_P &= -i \frac{\partial A^k{}_j}{\partial x^l} p_l p_k \theta_1^j - i \frac{\partial B_{ljk}}{\partial x^r} p_r \theta_1^l \theta_2^j \theta_2^k - i \left(\frac{\partial U_j}{\partial x^k} + A^k{}_l \frac{\partial^2 W}{\partial x^l \partial x^j} \right) p_k \theta_2^j \\ &+ i \left(A^k{}_j \frac{\partial W}{\partial x^r} \frac{\partial^2 W}{\partial x^r \partial x^k} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^r} U_r \right) \theta_1^j + \\ &+ \left(A^k{}_j \frac{\partial^3 W}{\partial x^r \partial x^s \partial x^k} + 2i \frac{\partial^2 W}{\partial x^l \partial x^j} B_{rks} \right) \theta_1^r \theta_1^j \theta_2^s \\ &- i \frac{\partial C^k{}_j}{\partial x^l} p_l p_k \theta_2^j - i \frac{\partial D_{ljk}}{\partial x^r} p_r \theta_1^l \theta_1^j \theta_2^k - i \left(\frac{\partial V_j}{\partial x^k} - C^k{}_l \frac{\partial^2 W}{\partial x^l \partial x^j} \right) p_k \theta_1^j \\ &+ i \left(\frac{1}{2} C^k{}_j \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial W}{\partial x^l} \frac{\partial W}{\partial x^l} \right] - \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k} V_k \right) \theta_2^j - \\ &- \left(C^r{}_k \frac{\partial^3 W}{\partial x^j \partial x^l \partial x^r} + 2i \frac{\partial^2 W}{\partial x^r \partial x^l} D_{rjk} \right) \theta_1^j \theta_2^l \theta_2^k \end{aligned}$$

donde es advertido que podemos agrupar las condiciones en dos sistemas de ecuaciones desacoplados totalmente análogos, uno de ellos que permite especificar las magnitudes que forman parte de q_1 y el otro que da q_2 . Desde este punto de vista podemos afirmar que este tipo de invariantes aparecen de forma apareada. Si es calculada una integral primera de carácter fermiónica q_1 , podemos identificar de forma directa otra carga q_2 . Los requisitos que verifican las componentes de cada una de las cargas mencionadas quedan expuestos en la siguiente tabla:

Sobre la carga q_1 :		
Condición 1: $\frac{\partial A^k_j}{\partial x^l} + \frac{\partial A^l_j}{\partial x^k} = 0$	Condición 2: $\epsilon^{jk} \frac{\partial B_{ljk}}{\partial x^r} = 0$	Condición 3: $\frac{\partial U_j}{\partial x^k} + A^k_l \frac{\partial^2 W}{\partial x^l \partial x^j} = 0$
Condición 4: $A^l_j \frac{\partial W}{\partial x^k} \frac{\partial^2 W}{\partial x^l \partial x^k} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k} U_k$	Condición 5: $\epsilon^{rj} \left[A^l_j \frac{\partial^3 W}{\partial x^r \partial x^k \partial x^l} + 2i \frac{\partial^2 W}{\partial x^l \partial x^j} B_{rlk} \right] = 0$	

Sobre la carga q_2 :		
Condición 1: $\frac{\partial C^k_j}{\partial x^l} + \frac{\partial C^l_j}{\partial x^k} = 0$	Condición 2: $\epsilon^{jk} \frac{\partial D_{jkl}}{\partial x^r} = 0$	Condición 3: $\frac{\partial V_j}{\partial x^k} - C^k_l \frac{\partial^2 W}{\partial x^l \partial x^j} = 0$
Condición 4: $\frac{1}{2} C^k_j \frac{\partial W}{\partial x^l} \frac{\partial^2 W}{\partial x^l \partial x^k} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k} V_k$	Condición 5: $\epsilon^{rj} \left[C^l_j \frac{\partial^3 W}{\partial x^r \partial x^k \partial x^l} - 2i \frac{\partial^2 W}{\partial x^l \partial x^k} D_{lrj} \right] = 0$	

En las veinticuatro condiciones anteriores subyace los siguientes comportamientos referidos a las dieciséis magnitudes que tratamos de especificar:

1. Las condiciones 1 de la tabla que precede nos proporcionan una expresión arquetipo para las magnitudes A^i_j y C^i_j . Éstas aparecen como

$$A = \begin{pmatrix} a_1 x^2 + a_{11} & a_2 x^2 + a_{12} \\ -a_1 x^1 + a_{21} & -a_2 x^1 + a_{22} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 x^2 + c_{11} & c_2 x^2 + c_{12} \\ -c_1 x^1 + c_{21} & -c_2 x^1 + c_{22} \end{pmatrix}$$

donde los coeficientes a_i , a_{ij} , c_i y c_{ij} son constantes reales.

2. Las condiciones 2 que especifican las magnitudes B_{ijk} y D_{ijk} nos indican que

$$B_{i12} = cte \qquad D_{i12} = cte$$

3. Las condiciones 3 permiten identificar los términos U_i y V_i . La compatibilidad de éstas está supeditada al cumplimiento de las relaciones,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^2} \left(A^1_b \frac{\partial^2 W}{\partial x^b \partial x^i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left(A^2_b \frac{\partial^2 W}{\partial x^b \partial x^i} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \left(C^1_b \frac{\partial^2 W}{\partial x^b \partial x^i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left(C^2_b \frac{\partial^2 W}{\partial x^b \partial x^i} \right)\end{aligned}$$

lo que constituye una restricción sobre los superpotenciales y por ende de los sistemas físicos capaces de admitir estas nuevas integrales primeras. Las condiciones 4 y 5 constituyen también restricciones sobre el superpotencial.

Téngase presente el conocido resultado de que el paréntesis de Poisson de dos integrales primeras constituye de nuevo una integral primera. Por ello, de forma genérica se tiene que las expresiones

$$\begin{aligned}\{q_1, q_1\}_P &= A^i_b A^a_b p_i p_a + 2i A^i_j \frac{\partial A^a_b}{\partial x^i} p_a \theta_1^b \theta_1^j + 4B_{abc} B_{ibk} \theta_1^a \theta_1^i \theta_2^k \theta_2^c + \\ &\quad + 2A^a_b B_{bjk} p_a \theta_2^j \theta_2^k - 2 \left(i A^a_b \frac{\partial U_i}{\partial x^a} - 2B_{bij} U_j \right) \theta_1^b \theta_2^i + U_a U_a \\ \{q_2, q_2\}_P &= C^i_b C^a_b p_i p_a + 2i C^i_j \frac{\partial C^a_b}{\partial x^i} p_a \theta_2^b \theta_2^j + 4D_{bca} D_{bki} \theta_1^k \theta_1^c \theta_2^a \theta_2^i + \\ &\quad + 2C^a_b D_{jkb} p_a \theta_1^j \theta_1^k + 2 \left(i C^a_b \frac{\partial V_i}{\partial x^a} - 2D_{ijb} V_j \right) \theta_1^i \theta_2^b + V_a V_a\end{aligned}$$

se erigen como nuevas integrales primeras. Introduciremos el estudio de las integrales primeras de naturaleza fermiónica a través de las condiciones sugeridas anteriormente, que fijarán las características y restricciones sobre los modelos físicos que incluyen tales invariantes. Se destacan los siguientes casos:

7.6.1 Sistemas mecánicos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos

El esquema planteado es totalmente genérico y en particular debemos identificar a las supercargas como integrales primeras de carácter fermiónico del tipo propuesto. Esto queda verificado considerando los valores de los parámetros expuestos en los siguientes puntos:

- $c = d = 0$, $a_{ij} = \delta_{ij}$ y $B_{ijk} = 0$. Bajo esta elección de las constantes necesariamente $U_i = -\frac{\partial W}{\partial x^i}$, mientras que las condiciones que se imponen sobre el superpotencial se convierten en identidades que igualan dos miembros nulos. Es decir, encontramos que la expresión $q_1 = \dot{x}^i \theta_1^i - \frac{\partial W}{\partial x^i} \theta_2^i$ es una constante del movimiento. Este invariante reproduce la supercarga, lo cual no constituye un resultado novedoso dado que ya fue advertido en estudios previos.

- $c_i = 0$, $c_{ij} = \delta_{ij}$ y $D_{ijk} = 0$. En este caso se tendrá que $V_i = \frac{\partial W}{\partial x^i}$ con ausencia de restricción alguna sobre el superpotencial. Queda demostrada la conservación de la supercarga $Q_2 = \dot{x}^i \theta_2^i + \frac{\partial W}{\partial x^i} \theta_1^i$, algo que ya nos era conocido.

Se cumplen las relaciones $\{Q_1, Q_1\}_P = \{Q_2, Q_2\}_P = 2H$ junto con $\{Q_1, Q_2\}_P = 0$. En estos párrafos hemos visto la confirmación de que las supercargas corresponden a invariantes de los modelos mecánicos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos.

7.6.2 Sistemas mecánicos $\mathcal{N} = 2 \oplus \mathcal{N} = 2$ supersimétricos

Otro caso englobado en el esquema introducido es aquel conformado por dos copias de la mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica con espacio unidimensional $N = 1$, tal y como ocurre para los modelos de SuperLiouville de tipo IV. Entonces, se tiene las siguientes consideraciones:

- $a_i = 0$, $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, $a_{11} = 1$ y $B_{ijk} = 0$. En este caso, todas las condiciones se verifican bajo la hipótesis

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} = 0 \quad (7.16)$$

es decir, el superpotencial adopta una expresión separada en las variables x^i , de modo que $W = W^{(1)}(x^1) + W^{(2)}(x^2)$. Encontramos que $U_1 = -\frac{\partial W}{\partial x^1}$ y $U_2 = 0$. La expresión explícita de la carga es

$$q_1 = \dot{x}^1 \theta_1^1 - \frac{\partial W}{\partial x^1} \theta_2^1$$

- $c_i = 0$, $c_{12} = c_{21} = c_{22} = 0$, $c_{11} = 1$ y $D_{ijk} = 0$. Análogamente al punto anterior, la condición que aparece para salvaguardar la consistencia del esquema es que el superpotencial cumpla (7.16). Ahora, $V_1 = 0$ y $V_2 = \frac{\partial W}{\partial x^2}$. La carga conservada es:

$$q_2 = \dot{x}^2 \theta_1^2 + \frac{\partial W}{\partial x^2} \theta_2^2$$

La condición de separabilidad sobre el superpotencial (7.16) impone que el hamiltoniano aparece en la forma $H = H^{(1)} + H^{(2)}$ con

$$H^{(j)} = \frac{1}{2} \dot{x}^j \dot{x}^j + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x^j} \frac{\partial W}{\partial x^j} + i \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^j} \theta_1^j \theta_2^j$$

donde el convenio de Einstein ha sido desestimado en esta expresión. Así, por construcción se hace evidente que las magnitudes $H^{(j)}$ corresponden a invariantes del sistema físico, tal y como fue advertido en la sección 7.5.4. La estructura de paréntesis de Poisson es

$$\boxed{\{Q_i, Q_j\}_P = 2H\delta_{ij} \quad \{q_i, q_j\}_P = 2\delta_{ij}H^{(j)} \quad \{q_i, Q_j\}_P = 0}$$

7.6.3 Sistemas mecánicos $\mathcal{N} = 4$ supersimétricos

Bajo este epígrafe quedan incorporados los sistemas caracterizados por los valores enumerados en los siguientes puntos:

- $a_i = 0$, $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = -a_{21} = 1$, $B_{ijk} = 0$, $U_1 = -\frac{\partial W}{\partial x^2}$ y $U_2 = \frac{\partial W}{\partial x^1}$. La condición a verificar por el superpotencial es la relación

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} = 0 \quad (7.17)$$

esto es, que la expresión del superpotencial sea armónica (verifica la ecuación de Laplace). La nueva supercarga viene dada como

$$Q_3 = \epsilon^{ij} \left(\dot{x}^i \theta_1^j + \frac{\partial W}{\partial x^i} \theta_2^j \right)$$

- $c_i = 0$, $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = -c_{21} = 1$ y $D_{ijk} = 0$. De nuevo se sostiene la condición (7.17). La expresión de la supercarga se atribuye a

$$Q_4 = \epsilon^{ij} \left(\dot{x}^i \theta_2^j - \frac{\partial W}{\partial x^i} \theta_1^j \right)$$

La estructura de paréntesis de Poisson se presenta como

$$\boxed{\{Q_A, Q_B\}_P = 2H\delta_{AB}}$$

donde $A, B = 1, 2, 3, 4$. Se habla en este caso de una teoría extendida $\mathcal{N} = 4$ de la mecánica supersimétrica. En el marco cuántico todas las supercargas corresponden a observables del sistema.

7.6.4 Sistemas mecánicos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos de tipo i

Otro caso novedoso aparece cuando los parámetros que caracterizan la nueva carga fermiónica vienen dados por

- $a_i = 0$, $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = a_{21} = 1$, $B_{ijk} = 0$, $U_1 = -\frac{\partial W}{\partial x^2}$ y $U_2 = -\frac{\partial W}{\partial x^1}$. La condición que aparece en estas circunstancias sobre el superpotencial es

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} = 0 \quad (7.18)$$

esto es, la expresión del superpotencial verifica la ecuación de ondas. El invariante fermiónico es ahora

$$\tilde{Q}_1 = \dot{x}^1 \theta_1^2 + \dot{x}^2 \theta_1^1 - \frac{\partial W}{\partial x^2} \theta_2^1 - \frac{\partial W}{\partial x^1} \theta_2^2$$

- $c_i = 0$, $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = c_{21} = 1$, $D_{ijk} = 0$, $U_1 = \frac{\partial W}{\partial x^2}$ y $U_2 = \frac{\partial W}{\partial x^1}$. De nuevo aparece la restricción (7.18). La carga es entonces

$$\tilde{Q}_2 = \dot{x}^1 \theta_2^2 + \dot{x}^2 \theta_2^1 + \frac{\partial W}{\partial x^2} \theta_1^1 + \frac{\partial W}{\partial x^1} \theta_1^2$$

La estructura de paréntesis de Poisson nos proporciona:

$$\boxed{\{Q_A, Q_B\}_P = 2\delta_{AB}H \quad \{\tilde{Q}_A, \tilde{Q}_B\}_P = 2\delta_{AB}H \quad \{Q_A, \tilde{Q}_B\}_P = 2\delta_{AB}I}$$

donde

$$I = \dot{x}^1 \dot{x}^2 + \frac{\partial W}{\partial x^1} \frac{\partial W}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} (\theta_1^1 \theta_2^1 + \theta_1^2 \theta_2^2) + i \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} (\theta_1^1 \theta_2^2 + \theta_1^2 \theta_2^1)$$

lo cual corresponde a una integral primera añadida a las ya construidas. Debe resaltarse el hecho de que los nuevos invariantes no pueden considerarse como supercargas nuevas dado que la operación entre las cargas Q_A y \tilde{Q}_B no es nula.

7.6.5 Sistemas mecánicos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos de tipo ii

Finalmente consideraremos un resultado más genérico que engloba como caso particular el sistema anterior. Su análisis queda descrito en los siguientes puntos:

- $a_{11} = a$; $a_{12} = a_{21} = 1$; $a_{22} = 0$; $B_{ijk} = 0$. Con esta elección de los parámetros hemos de exigir el cumplimiento de la relación,

$$a \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^1 \partial x^1} = 0 \quad (7.19)$$

de modo que el invariante de carácter grassmanniano corresponde a la expresión

$$q_1 = a \dot{x}^1 \theta_1^1 + \dot{x}^1 \theta_1^2 + \dot{x}^2 \theta_1^1 - \left(\frac{\partial W}{\partial x^2} + a \frac{\partial W}{\partial x^1} \right) \theta_2^1 - \left(a \frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial x^1} \right) \theta_2^2$$

- $c_{11} = a$; $c_{12} = c_{21} = 1$; $c_{22} = 0$; $D_{ijk} = 0$. Se recupera la restricción (7.19). El estudio de las condiciones nos proporciona el invariante

$$q_2 = a \dot{x}^1 \theta_2^1 + \dot{x}^1 \theta_2^2 + \dot{x}^2 \theta_2^1 + \left(\frac{\partial W}{\partial x^2} + a \frac{\partial W}{\partial x^1} \right) \theta_1^1 + \left(a \frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial x^1} \right) \theta_1^2$$

La estructura de paréntesis de Poisson es

$$\{Q_1, Q_1\} = 2H$$

$$\{Q_2, Q_2\} = 2H$$

$$\{Q_1, Q_2\} = 0$$

$$\begin{aligned} \{q_1, q_1\} &= (a^2 + 1)\dot{x}^1\dot{x}^1 + 2a\dot{x}^1\dot{x}^2 + \dot{x}^2\dot{x}^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x^2} + a\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(a\frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \\ &+ 2i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2} + 2a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}\right)\theta_1^1\theta_2^1 + 2i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2} + a\frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2} + a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}\right) + \\ &+ a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2}\theta_1^1\theta_2^2 + 2i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2} + a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}\right)\theta_1^2\theta_2^1 + 2i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1} + a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2}\right)\theta_1^2\theta_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{q_2, q_2\} &= (a^2 + 1)\dot{x}^1\dot{x}^1 + 2a\dot{x}^1\dot{x}^2 + \dot{x}^2\dot{x}^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x^2} + a\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(a\frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \\ &+ 2i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2} + 2a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}\right)\theta_1^1\theta_2^1 + 2i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1} + a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2}\right)\theta_1^2\theta_2^2 + \\ &+ 2i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2} + a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}\right)\theta_1^1\theta_2^2 + 2i\left(a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2} + a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1} + a\frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2}\right)\theta_1^2\theta_2^1 \end{aligned}$$

$$\{q_1, q_2\} = ia\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}(\theta_2^1\theta_2^2 - \theta_1^1\theta_1^2)$$

$$\{Q_2, q_1\} = -a\dot{x}^2\frac{\partial W}{\partial x^2} + i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2}\right)\theta_2^1\theta_2^2$$

$$\{Q_1, q_2\} = a\dot{x}^2\frac{\partial W}{\partial x^2} + i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}\right)\theta_1^1\theta_1^2$$

$$\begin{aligned} \{Q_1, q_1\} &= a\dot{x}^1\dot{x}^1 + 2\dot{x}^1\dot{x}^2 + a\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\frac{\partial W}{\partial x^1} + \frac{\partial W}{\partial x^2}\frac{\partial W}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial W}{\partial x^1}\frac{\partial W}{\partial x^2} + \\ &+ 2i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2} + a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}\right)\theta_1^1\theta_2^1 + i\left(a\frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2}\right)\theta_1^2\theta_2^2 + \\ &+ i\left(2a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2}\right)\theta_1^1\theta_2^2 + 2i\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}\theta_1^2\theta_2^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{Q_2, q_2\} &= a\dot{x}^1\dot{x}^1 + 2\dot{x}^1\dot{x}^2 + a\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\frac{\partial W}{\partial x^1} + \frac{\partial W}{\partial x^2}\frac{\partial W}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial W}{\partial x^1}\frac{\partial W}{\partial x^2} + \\ &+ 2i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2} + a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}\right)\theta_1^1\theta_2^1 + i\left(a\frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2}\right)\theta_1^2\theta_2^2 + \\ &+ 2i\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1}\theta_1^1\theta_2^2 + i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^1} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2\partial x^2} + 2a\frac{\partial^2 W}{\partial x^1\partial x^2}\right)\theta_1^2\theta_2^1 \end{aligned}$$

7.7 Supersoluciones:

Uno de los propósitos en los análisis llevados a cabo en este capítulo es el estudio de las soluciones asociados a los sistemas dinámicos supersimétricos, en el que las magnitudes que trataremos de identificar implican grados grassmannianos. Para ello hemos de afrontar la resolución de las ecuaciones del movimiento (7.5) y (7.6), las cuales al introducir las variables $\theta_+^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1^a + i\theta_2^a)$ y $\theta_-^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1^a - i\theta_2^a)$ aparecen en la más sencilla forma

$$\ddot{x}^a + \frac{\partial W}{\partial x^b}\frac{\partial^2 W}{\partial x^a\partial x^b} - \frac{\partial^3 W}{\partial x^a\partial x^b\partial x^c}\theta_+^b\theta_-^c = 0 \quad (7.20)$$

$$\dot{\theta}_+^a = -i\frac{\partial^2 W}{\partial x^a\partial x^b}\theta_+^b \quad \dot{\theta}_-^a = i\frac{\partial^2 W}{\partial x^a\partial x^b}\theta_-^b \quad (7.21)$$

donde quedan desacopladas las componentes de los espinores de Majorana. Un apunte importante al respecto de las relaciones anteriores es el hecho de que x^a es una magnitud grassmanniana de carácter par. Es conveniente justificar la presencia de integrales primeras asociadas a las ecuaciones (7.20) y (7.21), aun cuando el resultado nos es conocido por otras vías. Se tiene:

- *La energía:* Multiplicando por \dot{x}^a la relación (7.20), sumando las ecuaciones resultantes y considerando las ecuaciones de primer orden (7.21), pueden justificarse los cálculos

$$\begin{aligned} \dot{x}^a \ddot{x}^a + \dot{x}^a \frac{\partial W}{\partial x^b} \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} - \dot{x}^a \frac{\partial^3 W}{\partial x^a \partial x^b \partial x^c} \theta_+^b \theta_-^c &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^a \dot{x}^a + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x^a} - \frac{\partial W}{\partial x^a} \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_+^a \theta_-^b \right) \\ H &= \frac{1}{2} \dot{x}^a \dot{x}^a + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x^a} \frac{\partial W}{\partial x^a} \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_+^a \theta_-^b \end{aligned}$$

que muestran que la energía permanece constante a lo largo de la evolución temporal.

- *Las supercargas:* Multiplicando la primera relación de (7.21) por el factor $\dot{x}^a + i \frac{\partial W}{\partial x^a}$ y teniendo en cuenta (7.20) puede ser escrito que

$$\begin{aligned} \dot{x}^a \dot{\theta}_+^a + i \frac{\partial W}{\partial x^a} \dot{\theta}_+^a + i \dot{x}^a \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_+^b - \frac{\partial W}{\partial x^a} \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_+^b &= 0 \\ \dot{x}^a \dot{\theta}_+^a + i \frac{\partial W}{\partial x^a} \dot{\theta}_+^a + i \dot{x}^a \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_+^b + \ddot{x}^a \theta_+^a - \frac{\partial^3 W}{\partial x^a \partial x^b \partial x^c} \theta_+^a \theta_-^b \theta_-^c &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\left(\dot{x}^a + i \frac{\partial W}{\partial x^a} \right) \theta_+^a \right] &= 0 \quad \Rightarrow \quad Q_+ = \left(\dot{x}^a + i \frac{\partial W}{\partial x^a} \right) \theta_+^a \end{aligned}$$

lo que permite encontrar de nuevo la supercarga como invariante asociado al sistema físico. De igual modo podría hallarse la supercarga Q_- .

- *Producto de las componentes del espinor:* Considerando las ecuaciones diferenciales (7.21) puede obtenerse que

$$\frac{d}{dt} [\theta_+^a \theta_-^a] = \dot{\theta}_+^a \theta_-^a + \theta_+^a \dot{\theta}_-^a = -i \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_+^b \theta_-^a + i \frac{\partial^2 W}{\partial x^a \partial x^b} \theta_+^a \theta_-^b = 0$$

de donde puede concluirse que $I_3 = \theta_+^a \theta_-^a$ permanece constante.

De las supersoluciones de sistemas mecánicos con $N = 1$

Los argumentos introducidos en los párrafos anteriores pueden ser utilizados con éxito en la obtención de supersoluciones asociadas a modelos supersimétricos con un sólo grado de libertad, como es bien mostrado en los trabajos de Manton [82, 93, 70]. En estas circunstancias, las ecuaciones del movimiento (7.20) y (7.21) rezan

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + i \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \theta_1 \theta_2 = 0 \\ \dot{\theta}_+ = -i \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \theta_+ \\ \dot{\theta}_- = i \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \theta_- \end{cases} \quad (7.22)$$

La identificación de las integrales primeras realizada en la sección anterior permite obtener la forma explícita de las soluciones de estos sistemas físicos. Hemos de distinguir los siguientes casos:

- *Soluciones con $\dot{x} \neq 0$ y $\dot{x}^a \pm i \frac{\partial W}{\partial x^a} \neq 0$.* Las supersoluciones pueden ser escritas en base a las siguientes expresiones

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{2H - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} I_3}} \quad (7.23)$$

que implica una integración respecto de una variable grassmanniana de carácter par formalmente idéntica a la realizada sobre una variable ordinaria [44]. Los grados fermiónicos son obtenidos directamente a partir de las supercargas, siendo:

$$\theta_+ = \frac{Q_+}{\dot{x} + i \frac{\partial W}{\partial x}} \quad \theta_- = \frac{Q_+}{\dot{x} - i \frac{\partial W}{\partial x}} \quad (7.24)$$

- *Soluciones con $\dot{x}^a \pm i \frac{\partial W}{\partial x^a} = 0$.* La expresión (7.23) sigue rigiendo el comportamiento de la variable x^a . Las supercargas no pueden ser consideradas como integrales primeras de modo que no podemos sostener el mismo argumento que en el punto anterior. Sin embargo, los grados fermiónicos pueden ser resueltos a partir de (7.22) originando las expresiones

$$\begin{aligned} \theta_+(t) &= \theta_{+0} \exp \left(-i \int_0^t dt' \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x_B(t')) \right) \\ \theta_-(t) &= \theta_{-0} \exp \left(i \int_0^t dt' \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x_B(t')) \right) \end{aligned} \quad (7.25)$$

- *Soluciones con $\dot{x}^a = 0$.* La variable de carácter par x^a es estacionaria y puede ser obtenida resolviendo la ecuación

$$\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} I_3 = 0$$

mientras que (7.25) determina los campos fermiónicos.

La obtención de supersoluciones en sistemas físicos que implican un número mayor de grados de libertad es altamente más complejo y se carece de una metodología aplicable de forma genérica. En el capítulo que sigue serán calculadas algunas soluciones de tipo superkink en diversos modelos mediante el uso de sus integrales primeras.

Capítulo 8

Teoría de campos supersimétrica en (1+1) dimensiones y kinks

8.1 Introducción

En el capítulo precedente fueron mostrados los principios de la supersimetría y su interés en sistemas físicos que poseen rigor en la realidad. Debe añadirse que las teorías $N = 2$ proporcionan un buen germen que conserva muchas de las propiedades que se cultivan en la teoría general. Así, Gervais y Sakita [60] mostraron que los grados de libertad de una cuerda cósmica pueden ser descritos mediante una teoría supersimétrica bidimensional [128]. Basándonos en ello, nuestro trabajo seguirá las directrices del buen entendimiento de estas últimas, es decir, las teorías supersimétricas en un mundo de (1+1) dimensiones, en las que como es nuestra línea estudiaremos la posible existencia de defectos topológicos. La introducción de la supersimetría incide de forma drástica en el espectro de partículas, originando un aumento del número de partículas presentes en la teoría. Así, en el modelo Standard aparecen junto con los *quarks* fermiónicos sus compañeros supersimétricos que son llamados los *squarks* de naturaleza bosónica. Frente a los *gluones* bosónicos (campos gauge de QCD) se tienen los *gluinos* como sus supercompañeros. En las teorías supersimétricas en las que se introduce gravedad aparecen los *gravitinos* como integrantes del multiplete de supersimetría en el que aparece el *gravitón*. Una conclusión interesante es que la supersimetría debe darse a escalas de TeV, escala a la que deberían manifestarse los supercompañeros de las partículas en el modelo estándar. Esto es una importante observación dado que los aceleradores de partículas de próxima generación, previstos para una o dos décadas, trabajarán a ese rango de energías, lo que permitirá discernir la bondad de estas teorías. Según palabras de algunos autores, será entonces cuando las dimensiones impares del espacio-tiempo serán descubiertas [128]. Si la supersimetría fuese conservada, las partículas de cada

supermultiplete aparecerían degeneradas en masa, hecho que a la vista del mundo real debe implicar la ruptura de la supersimetría en teorías realistas.

El estudio considerado en el presente capítulo se describe de la siguiente manera: en las secciones 8.2, 8.3 y 8.5 se introducen los aspectos generales de la teoría supersimétrica en (1+1) dimensiones; mientras que la sección 8.4 es dedicada a la obtención de la extensión supersimétrica de los modelos de Liouville en el marco de la teoría de campos; en la sección 8.6 tratamos la cuestión de la posible existencia de cargas conservadas asociadas a estos modelos, en el mismo sentido que el cálculo de integrales primeras realizado en el capítulo precedente; finalmente, trataremos de identificar el kink supersimétrico o superkink desde un punto de vista clásico.

8.2 Supersimetría $\mathcal{N} = 1$ en (1+1) dimensiones con métrica euclídea

Superespacio y supercampos

La estructura asociada a los modelos con supersimetría en (1+1) dimensiones [128, 53] será mostrada empleando directamente el formalismo de superespacio. Las coordenadas de un superpunto serán parametrizadas por cuatro magnitudes; dos de ellas son ordinarias, referidas al tiempo t y al espacio x , y las otras dos θ^1 y θ^2 implican una naturaleza grassmanniana. Por ello, cada punto del superespacio viene coordinado como $\mathbf{z} = (t, x, \theta^1, \theta^2)$, donde θ^α ($\alpha = 1, 2$) constituyen un espinor de Majorana. El supercampo (ver apéndice A) puede ser expandido como

$$\Phi^a(x, \theta) = \phi^a(x) + \bar{\theta}\chi^a(x) - \frac{1}{2}i\bar{\theta}\theta F^a(x) \quad (8.1)$$

donde introducimos los campos bosónicos $\phi^a(x)$ y $F^a(x)$ junto a los campos fermiónicos de Majorana $\chi^a(x)$, con $a = 1, \dots, N$. Aparecen $2N$ grados bosónicos en balance con los $2N$ grados fermiónicos atribuidos a los N espinores χ^a . El campo F^a representa un campo auxiliar no propagante, cuyo cometido esencial es el cierre *off shell* del superálgebra [152]. Las traslaciones superespaciales por la izquierda, determinadas por las expresiones

$$\theta_\alpha \rightarrow \theta_\alpha + i\varepsilon_\alpha \quad x^\mu \rightarrow x^\mu + \bar{\theta}\gamma^\mu\varepsilon \quad (8.2)$$

deben dejar por construcción invariante la acción, mostrando la estructura supersimétrica del sistema físico. El generador de supersimetría, asociado a (8.2), aparece como

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\gamma^\mu\theta\partial_\mu \quad \text{ó} \quad Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\gamma^\mu\theta)_\alpha\partial_\mu$$

lo que permite obtener las variaciones supersimétricas sobre las componentes de los supercampos

$$\delta\Phi = i\bar{\varepsilon}Q\Phi \Rightarrow \begin{cases} \delta\phi^a = i\bar{\varepsilon}\chi^a \\ \delta\chi^a = \gamma^\mu\partial_\mu\phi^a\varepsilon + F^a\varepsilon \\ \delta F^a = i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\chi^a \end{cases} \quad (8.3)$$

El anticonmutador entre los generadores de supersimetría Q_α proporciona como resultado una combinación lineal de los generadores de traslaciones espacio-temporales ordinarias

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta}P_\mu = -2i \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_0 + \partial_1 \end{pmatrix}_{\alpha\beta}$$

La construcción de acciones invariantes por las transformaciones de supersimetría está basada en la definición de la derivada covariante (generador de las supertraslaciones por la derecha)

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\gamma^\mu\theta\partial_\mu$$

toda vez que esta magnitud anticonmuta con el generador Q , es decir:

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = 0$$

Construiremos en primer lugar la teoría libre a la que añadiremos posteriormente términos de interacción.

Teoría libre

La teoría supersimétrica libre se halla asociada a la acción

$$S_0[\Phi] = -\frac{1}{2} \int d^2x d^2\theta \bar{D}\Phi^a D\Phi^a \quad (8.4)$$

correspondiente a la integración sobre el superespacio de una densidad lagrangiana dependiente de las derivadas covariantes de los supercampos. La invariancia por supersimetría se hace evidente ante la forma de la transformación

$$\delta D_\alpha\Phi^a = i\bar{\varepsilon}QD_\alpha\Phi^a$$

que nos permite escribir

$$\delta\mathcal{L} = i\bar{\varepsilon}Q\mathcal{L} = i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta\partial_\mu\mathcal{L} \quad (8.5)$$

lo que muestra bien a las claras que las transformaciones supersimétricas provocan un cambio en la expresión del lagrangiano que es identificado como un término de divergencia. Advirtiendo el desarrollo

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\bar{\chi}^a\chi^a + i\bar{\theta}(\gamma^\mu\chi^a\partial_\mu\phi^a - \chi^a F^a) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta(\partial_\mu\phi^a + i\bar{\chi}^a\gamma^\mu\partial_\mu\chi^a - F^a F^a)$$

y realizada la integración sobre variables impares concluimos que la acción es

$$S_0 = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{1}{2} i \bar{\chi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \chi^a - \frac{1}{2} F^a F^a \right)$$

mientras que la corriente conservada, facilitada por la invariancia del sistema físico respecto de la variación (8.5), se manifiesta como

$$j^\mu(\phi^a, \chi^a) = \gamma^\nu \gamma^\mu \chi^a \partial_\nu \phi^a - \gamma^\mu \chi^a F^a$$

La eliminación del campo auxiliar mediante el uso de las ecuaciones del movimiento, las cuales nos informan que $F^a = 0$, permite escribir la acción en función de las variables físicamente significativas como

$$S_0 = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{i}{2} \bar{\chi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \chi^a \right)$$

que describe la teoría libre de bosones y de fermiones de Majorana representados, respectivamente, por los campos $\phi^a(x)$ y $\chi^a(x)$. Las variaciones *on shell* asociadas a la supersimetría

$$\delta \phi^a = i \bar{\varepsilon} \chi^a \quad \delta \chi^a = \gamma^\mu \partial_\mu \phi^a \varepsilon$$

determinan la expresión de la supercorriente

$$j^\mu(\phi^a, \chi^a) = \gamma^\nu \gamma^\mu \chi^a \partial_\nu \phi^a$$

de modo que la carga asociada, correspondiente a la integral espacial de la componente temporal de la corriente, es escrita como

$$Q = \int dx \{ \gamma^\mu \gamma^0 \chi^a \partial_\mu \phi^a \}$$

Teoría con interacción

La introducción de términos de interacción en la teoría, invariantes bajo (8.3), puede ser obtenida añadiendo un término de *superpotencial* a (8.4)

$$S_{int} = 2 \int d^2x d^2\theta W[\Phi^a(x, \theta)] \quad (8.6)$$

donde $W = W[\Phi]$ es una función cualquiera de los supercampos usualmente de buen comportamiento (aunque este requisito puede ser relajado determinando novedosas propiedades [65]). Desarrollando ésta en potencias sobre los elementos nilpotentes del superespacio, se advierte que

$$W[\Phi^a(x, \theta)] = W[\phi^a] + \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \bar{\theta} \chi^a - \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta \left(i \frac{\partial W}{\partial \phi^a} F^a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \bar{\chi}^a \chi^b \right)$$

lo que tiene como consecuencia que la acción queda expresada en la forma

$$S = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{1}{2} i \bar{\chi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \chi^a - \frac{1}{2} F^a F^a - i \frac{\partial W}{\partial \phi^a} F^a - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \bar{\chi}^a \chi^b \right)$$

Los campos auxiliares F^a , obtenidos a partir de sus ecuaciones del movimiento

$$F^a = -i \frac{\partial W}{\partial \phi^a}$$

proporcionan la habitual forma de la acción supersimétrica en (1+1) dimensiones [45, 74, 103, 25],

$$\boxed{S = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{1}{2} i \bar{\chi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \chi^a - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \frac{\partial W}{\partial \phi^a} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \bar{\chi}^a \chi^b \right)} \quad (8.7)$$

de donde concluimos que el potencial que rige el sector bosónico de la teoría viene determinado por la expresión:

$$U_B(\phi^a) = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \frac{\partial W}{\partial \phi^a}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, que verifican las soluciones del sistema físico, aparecen como el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas

$$\begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu \phi^a + \frac{\partial W}{\partial \phi^b} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b \partial \phi^c} \bar{\chi}^b \chi^c = 0 \\ i \partial_\mu \bar{\chi}^a \gamma^\mu + \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \bar{\chi}^b = 0 \end{cases} \quad (8.8)$$

La invariancia por traslaciones espacio-temporales proporciona, vía el teorema de Noether, la conservación de la energía y el momento

$$\begin{aligned} P_0 &= \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_0 \phi^a \partial_0 \phi^a + \frac{1}{2} \partial_1 \phi^a \partial_1 \phi^a + \frac{i}{2} \bar{\chi}^a \gamma_1 \partial_1 \chi^a + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \frac{\partial W}{\partial \phi^a} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \bar{\chi}^a \chi^b \right] \\ P_1 &= \int dx \left[\partial_0 \phi^a \partial_1 \phi^a + \frac{i}{2} \bar{\chi}^a \gamma_0 \partial_1 \chi^a \right] \end{aligned}$$

Por otra parte, la acción (8.7) es invariante bajo las transformaciones supersimétricas, las cuales escritas *on-shell* vienen expresadas como

$$\delta \phi^a = i \bar{\varepsilon} \chi^a \quad \delta \chi^a = \partial_\mu \phi^a \gamma^\mu \varepsilon - i \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \varepsilon$$

por lo que la corriente asociada es

$$j^\mu(\phi^a, \chi^a) = \gamma^\nu \gamma^\mu \chi^a \partial_\nu \phi^a + i \gamma^\mu \chi^a \frac{\partial W}{\partial \phi^a}$$

lo que permite construir la carga supersimétrica:

$$Q = \int dx \left\{ \gamma^\mu \gamma^0 \chi^a \partial_\mu \phi^a + i \gamma^0 \chi^a \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \right\} \quad (8.9)$$

8.3 Supersimetría $\mathcal{N} = 1$ en (1+1) dimensiones con métrica.

En secciones precedentes hemos considerado modelos supersimétricos que implicaban una métrica euclídea en el espacio interno. Generalizaremos los cálculos realizados en la sección 8.2 para el caso en que el sistema presenta una métrica cualquiera [42]. El propósito final de este tratamiento es encontrar expresiones covariantes, que bajo transformaciones de coordenadas (difeomorfismos) sobre la variedad de campos

$$\phi^a \rightarrow \phi'^j(\phi^a) \quad , \quad \chi^a \rightarrow \chi'^j = \frac{\partial \phi'^j}{\partial \phi^a} \chi^a \quad (8.10)$$

lleven a escribir de forma sencilla las nuevas expresiones. Ello permitirá obtener las generalizaciones de los modelos de Liouville en este marco. Utilizando el formalismo de superespacio, un superpunto continua siendo caracterizado por las coordenadas $(x^0, x^1, \theta^1, \theta^2)$ y el supercampo puede ser expandido en la forma (8.1). La supersimetría queda patente mediante la invariancia de la acción por las transformaciones (8.2).

Modelo Sigma supersimétrico

Teniendo en cuenta que para el caso de métrica euclídea la expresión (8.4) podía ser escrita como

$$S_0 = -\frac{1}{2} \int d^2x d^2\theta \delta_{jk} \bar{D}\Phi^j D\Phi^k$$

la generalización a un modelo con un espacio interno curvado¹ es obtenida mediante la expresión

$$S_0 = -\frac{1}{2} \int d^2x d^2\theta g_{jk}(\Phi) \bar{D}\Phi^j D\Phi^k \quad (8.11)$$

donde la métrica g_{jk} es una magnitud tensorial de naturaleza dos-covariante que depende en general de los supercampos. Su desarrollo respecto de variables impares queda anotado como

$$g_{jk}(\Phi) = g_{jk}(\phi) + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \phi^l} \bar{\theta} \chi^l - \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta \left(i \frac{\partial g_{jk}}{\partial \phi^l} F^l + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial \phi^l \partial \phi^r} \bar{\chi}^l \chi^r \right)$$

lo que agrupado en (8.11) nos permite encontrar la expresión expandida en componentes de la acción. Ésta es

$$S_0 = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} g_{jk} \partial_\mu \phi^j \partial^\mu \phi^k + \frac{i}{2} g_{jk} \bar{\chi}^j \gamma^\mu \partial_\mu \chi^k - \frac{1}{2} g_{jk} F^j F^k + \frac{i}{2} \partial_\mu \phi^l g_{jr} \Gamma_{kl}^r \bar{\chi}^j \gamma^\mu \chi^k + \frac{i}{2} F^l g_{lr} \Gamma_{jk}^r \bar{\chi}^j \chi^k - \frac{1}{8} \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial \phi^l \partial \phi^r} \bar{\chi}^j \chi^k \bar{\chi}^l \chi^r \right\}$$

¹Espacio “blanco” en la terminología del modelo Sigma no lineal.

de modo que empleando la expresión del campo auxiliar F^j , proporcionada por las ecuaciones del movimiento

$$F^l = \frac{i}{2} \Gamma_{jk}^l \bar{\chi}^j \chi^k$$

y tras manipular concienzudamente las fórmulas resultantes, la acción es

$$S_0 = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} g_{jk} \partial_\mu \phi^j \partial^\mu \phi^k + \frac{i}{2} g_{jk} \bar{\chi}^j \gamma^\mu D_\mu \chi^k - \frac{1}{12} R_{jklm} \bar{\chi}^j \chi^l \bar{\chi}^k \chi^m \right\}$$

donde se define la derivada covariante del campo fermiónico χ^j en el modo

$$D_\mu \chi^j = \partial_\mu \chi^j + \Gamma_{lk}^j \partial_\mu \phi^k \chi^l$$

A la vista de (8.3), las variaciones *on shell* que determinan la invariancia supersimétrica aparecen en el modo

$$\delta \phi^k = i \bar{\varepsilon} \chi^k \quad \delta \chi^k = \gamma^\mu \partial_\mu \phi^k \varepsilon + \frac{i}{2} \Gamma_{ij}^k \bar{\chi}^i \chi^j \varepsilon$$

de tal manera que la corriente supersimétrica asociada es

$$j^\mu(\phi, \chi) = i g_{jk} \partial_\nu \phi^j \gamma^\nu \gamma^\mu \chi^k$$

8.3.1 Teoría con superpotencial

Para introducir términos de interacción en la teoría y siguiendo los pasos trazados en secciones precedentes, hemos de integrar en la expresión de la acción (8.11) el sumando (8.6) que incluye el superpotencial. Desarrollando respecto de las componentes del supercampo, el funcional acción aparece en la forma

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} g_{jk} \partial_\mu \phi^j \partial^\mu \phi^k + \frac{1}{2} i g_{jk} \bar{\chi}^k \gamma^\mu \partial_\mu \chi^j - \frac{1}{2} g_{jk} F^j F^k + \frac{i}{2} \partial_\mu \phi^l g_{jr} \Gamma_{kl}^r \bar{\chi}^j \gamma^\mu \chi^k \right. \\ \left. + \frac{i}{2} F^l g_{lr} \Gamma_{jk}^r \bar{\chi}^j \chi^k - \frac{1}{8} \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial \phi^l \partial \phi^r} \bar{\chi}^j \chi^k \bar{\chi}^l \chi^r - i \frac{\partial W}{\partial \phi^j} F^j - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \bar{\chi}^j \chi^k \right\}$$

Las ecuaciones del movimiento asociadas al campo auxiliar F^k proporcionan la relación

$$F^k = \frac{i}{2} \Gamma_{rs}^k \bar{\chi}^r \chi^s - i g^{kj} \frac{\partial W}{\partial \phi^j}$$

que introducida en la expresión de la acción proporciona

$$S = S_0 + \int d^2x \left\{ -\frac{1}{2} g^{jk} \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \frac{\partial W}{\partial \phi^k} - \frac{1}{2} W_{j;k} \bar{\chi}^j \chi^k \right\}$$

Un estudio totalmente análogo al realizado en secciones precedentes nos permite acceder a la corriente supersimétrica, expresada en este caso por

$$j^\mu(\phi, \chi) = i g_{jk} \partial_\nu \phi^j \gamma^\nu \gamma^\mu \chi^k - \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \gamma^\mu \chi^j$$

8.4 Modelos de SuperLiouville

Esta memoria se inició con el estudio de modelos enmarcados en la teoría de campos en (1+1) dimensiones. Como casos particulares afrontamos el estudio de los defectos topológicos englobados en los modelos de Liouville. Sobre dichos modelos queremos insuflar la estructura supersimétrica, en modo totalmente análogo al análisis realizado respecto de los sistemas mecánicos. Dado que conceptualmente el procedimiento fue descrito en el capítulo 7 nos limitaremos a introducir, aprovechando la sección previa, las expresiones para cada modelo de SuperLiouville, que difieren ligeramente en su forma a las encontradas en la sección 7.5.

8.4.1 Modelos de SuperLiouville de Tipo I

El sector bosónico de la teoría supersimétrica para este tipo de modelos queda caracterizado por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} \partial_\mu u \partial^\mu u + \frac{1}{2} \frac{u^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \partial_\mu v \partial^\mu v - U_B(u, v)$$

donde el término potencial queda especificado como

$$U_B = \frac{1}{2} \frac{u^2 - \Omega^2}{u^2 - v^2} \left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 - v^2}{u^2 - v^2} \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2$$

lo que reproduce los resultados obtenidos en el capítulo 2. En el sector fermiónico, junto a la parte libre

$$\mathcal{L}_F^0 = \frac{i}{2} \frac{u^2 - v^2}{u^2 - \Omega^2} \bar{\chi}^u \gamma^\mu D_\mu \chi^u + \frac{i}{2} \frac{u^2 - v^2}{\Omega^2 - v^2} \bar{\chi}^v \gamma^\mu D_\mu \chi^v$$

aparecen los acoplamientos tipo Yukawa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F^I = & -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial u} - \frac{(\Omega^2 - v^2)(u \frac{\partial W}{\partial u} + v \frac{\partial W}{\partial v})}{(u^2 - v^2)(u^2 - \Omega^2)} \right] \bar{\chi}^u \chi^u - \\ & - \left[\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + \frac{v \frac{\partial W}{\partial u} - u \frac{\partial W}{\partial v}}{u^2 - v^2} \right] \bar{\chi}^u \chi^v - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial v \partial v} + \frac{(u^2 - \Omega^2)(u \frac{\partial W}{\partial u} - v \frac{\partial W}{\partial v})}{(u^2 - v^2)(\Omega^2 - v^2)} \right] \bar{\chi}^v \chi^v \end{aligned}$$

La definición 2.5 sigue rigiendo en este nuevo marco como determinante de este tipo de modelos.

8.4.2 Modelos de SuperLiouville de Tipo III

El sector bosónico de la teoría supersimétrica adopta la siguiente forma

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) (\partial_\mu u \partial^\mu u + \partial_\mu v \partial^\mu v) - \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right]$$

de modo que podemos afirmar que aparece un término potencial en este sector que viene expresado como

$$U_B = \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right]$$

lo cual puede ser contrastado directamente con los resultados obtenidos en el tercer capítulo. La parte libre del sector fermiónico corresponde a

$$\mathcal{L}_F^0 = \frac{i}{2} (u^2 + v^2) \bar{\chi}^u \gamma^\mu D_\mu \chi^u + \frac{i}{2} (u^2 + v^2) \bar{\chi}^v \gamma^\mu D_\mu \chi^v$$

mientras que los acoplamientos tipo Yukawa proporcionan los términos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F^I = & -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial u} - \frac{u \frac{\partial W}{\partial u} - v \frac{\partial W}{\partial v}}{u^2 + v^2} \right] \bar{\chi}^u \chi^u - \\ & - \left[\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + \frac{u \frac{\partial W}{\partial v} - v \frac{\partial W}{\partial u}}{u^2 + v^2} \right] \bar{\chi}^u \chi^v - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial v \partial v} + \frac{u \frac{\partial W}{\partial u} - v \frac{\partial W}{\partial v}}{u^2 - v^2} \right] \bar{\chi}^v \chi^v \end{aligned}$$

De nuevo, un sistema supersimétrico corresponderá al tipo III si verifica la definición 3.4.

8.4.3 Modelos de SuperLiouville de Tipo II

La descripción del sector bosónico en esta clase de modelos supersimétricos responde a las expresiones

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} \partial_\mu R \partial^\mu R + \frac{1}{2} R^2 \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial R} \right)^2 - \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2$$

por lo que el potencial que rige el sector bosónico es encontrado como

$$U_B = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial R} \right)^2 + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2$$

que reproduce el potencial asignado en la definición de los modelos de Liouville de Tipo II. La parte libre del sector fermiónico aparece como

$$\mathcal{L}_F^0 = \frac{i}{2} \bar{\chi}^R \gamma^\mu D_\mu \chi^R + \frac{i}{2} R^2 \bar{\chi}^\varphi \gamma^\mu D_\mu \chi^\varphi$$

siendo los acoplamientos tipo Yukawa

$$\mathcal{L}_F^I = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial R \partial R} \bar{\chi}^R \chi^R - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \bar{\chi}^R \chi^\varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \varphi} + R \frac{\partial W}{\partial R} \right) \bar{\chi}^\varphi \chi^\varphi$$

La definición 4.4 sigue siendo válida para determinar los modelos de SuperLiouville de tipo II en teorías de (1+1) dimensiones.

8.4.4 Modelos de SuperLiouville de Tipo IV:

El sistema de coordenadas que proporciona la separación en variables de la expresión del potencial bosónico en estos modelos corresponde a las variables originales o cartesianas, que habíamos introducido para indicar las expresiones de las teorías supersimétricas. La definición para los sistemas de SuperLiouville de Tipo IV viene dada por (6.6), ya usada en el contexto de los sistemas dinámicos introducidos en el capítulo precedente. El lagrangiano asociado a esta clase de sistemas es

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^2 \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{1}{2} i \bar{\chi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \chi^a - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \frac{\partial W}{\partial \phi^a} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^a} \bar{\chi}^a \chi^a \right) \quad (8.12)$$

8.5 Cuantificación y espectro SUSY

Una de las características primordiales que confiere la supersimetría a un sistema físico es la presencia de nuevas simetrías, las cuales generan el hamiltoniano tras la operación bilineal constituida por el paréntesis de Poisson en el marco clásico o por el conmutador en el cuántico. En esta sección consideraremos el último ámbito con el objetivo de presentar importantes resultados. Entre éstos avanzamos que las soluciones de tipo kink, sometidas a las ecuaciones de primer orden (1.60), aparecen en este esquema como soluciones distinguidas. El procedimiento de cuantización canónico convierte los campos en operadores y la operación bilineal definida por el paréntesis de Poisson se convierte en las siguientes relaciones de conmutación a igual tiempo

<i>Sector bosónico</i>	<i>Sector fermiónico</i>	
$[\phi^j(t, x), \Pi_0^k(t, y)] = i \delta^{jk} \delta(x - y)$	$\{\chi_+^j(t, x), \chi_+^k(t, y)\} = \delta^{jk} \delta(x - y)$	(8.13)
$[\phi^j(t, x), \phi^k(t, y)] = 0$	$\{\chi_-^j(t, x), \chi_-^k(t, y)\} = \delta^{jk} \delta(x - y)$	
$[\Pi_0^j(t, x), \Pi_0^k(t, y)] = 0$	$\{\chi_+^j(t, x), \chi_-^k(t, y)\} = 0$	

Con el objeto de seguir fielmente la literatura [146] introducimos el uso de las proyecciones quirales de las magnitudes fermiónicas, definidas a través del operador de proyección quiral $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, cuya acción sobre el campo espinorial $\chi^j(x)$ se resuelve en el sentido

$$\tilde{\chi}_+^j = P_+ \chi^j = \begin{pmatrix} \chi_1^j \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\chi}_-^j = P_- \chi^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_2^j \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

La proyección de las cargas supersimétricas aparecen en los siguientes términos

$$Q_+ = \int dx \left\{ (\partial_0 \phi^j - \partial_1 \phi^j) \chi_+^j + \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \chi_-^j \right\} \quad (8.15)$$

$$Q_- = \int dx \left\{ (\partial_0 \phi^j + \partial_1 \phi^j) \chi_-^j - \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \chi_+^j \right\} \quad (8.16)$$

donde χ_+^j y χ_-^j son, ahora, operadores campos de naturaleza fermiónica de una sola componente equiparables, respectivamente, a las componentes χ_1^j y χ_2^j . Adviértase que tanto Q_+ como Q_- son operadores hermíticos. Junto a las proyecciones quirales de los campos fermiónicos se definen las magnitudes $P_+ = P_0 + P_1$ y $P_- = P_0 - P_1$, que proporcionan explícitamente las expresiones

$$P_+ = \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_0 \phi^j + \partial_1 \phi^j)^2 + i \chi_-^j \partial_1 \chi_-^j + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \frac{\partial W}{\partial \phi^j} - i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \chi_+^j \chi_-^k \right\} \quad (8.17)$$

$$P_- = \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_0 \phi^j - \partial_1 \phi^j)^2 - i \chi_+^j \partial_1 \chi_+^j + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \frac{\partial W}{\partial \phi^j} - i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \chi_+^j \chi_-^k \right\} \quad (8.18)$$

El cálculo del álgebra generado por las cargas supersimétricas nos reporta en primer lugar el importante resultado

$$\{Q_+, Q_-\} = 2 \int dx \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \frac{\partial \phi^j}{\partial x} = 2 \int dx \frac{\partial W}{\partial x} = 2W[\phi(x)] \Big|_{\text{cont}} = 2T$$

de modo que si las condiciones de contorno son tomadas sobre el infinito, la definición de T se convierte en

$$T = W[\phi(\infty)] - W[\phi(-\infty)]$$

cuyo valor es cero para las soluciones triviales pero que adopta un valor no nulo para aquellas soluciones de origen topológico [146, 25], como es el caso de las soluciones kinks. Por simplicidad hemos asumido que el superpotencial corresponde a una función de buen comportamiento sobre los campos ϕ^i . Como ya fue advertido en el primer capítulo, la forma de la T puede verse alterada para sistemas físicos que admitan superpotenciales con puntos de ramificación [65]. La presencia de esta magnitud tendrá una importante repercusión sobre el espectro engendrado sobre tales soluciones, tal y como será mostrado posteriormente [89]. El álgebra se completa enunciando que

$$\begin{aligned} \{Q_+, Q_+\} &= 2P_- & \{Q_-, Q_-\} &= 2P_+ & \{Q_+, Q_-\} &= 2T \\ [Q_+, T] &= 0 & [Q_-, T] &= 0 & [T, T] &= 0 \end{aligned}$$

junto con

$$[P_0, T] = -i \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \frac{\partial \phi^a}{\partial t} \Big|_{S_{\text{cont}}} \quad [P_1, T] = -2i \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \frac{\partial \phi^a}{\partial x} \Big|_{S_{\text{cont}}}$$

por lo que se puede afirmar que para soluciones pertenecientes al espacio de configuración \mathcal{C} , el operador T se manifiesta como una carga central, cuyo origen es totalmente topológico. La estructura del álgebra de supersimetría obliga a que la energía asociada al sistema físico sea en todo caso definida positiva. Distinguiremos dos situaciones en la identificación del espectro:

- *Sector No Topológico:* Manipulaciones sencillas

$$2P_0 = P_+ + P_- = Q_+^2 + Q_-^2 \pm Q_+Q_- \pm Q_-Q_+ = (Q_+ + Q_-)^2 = \tilde{Q}_{1,2}^2$$

nos permiten escribir

$$P_0 = \frac{1}{2}(Q_+ \pm Q_-)^2 = \frac{1}{2}\tilde{Q}_{1,2}^2$$

El hecho de que los operadores Q_+ y Q_- sean hermíticos implica que para cualquier estado $|s\rangle$

$$E = \langle s|P_0|s\rangle = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_+ + Q_-) \right\|^2 \geq 0$$

de donde queda patente el resultado de que los autovalores de energía resultantes de la teoría deben ser semidefinidos positivos [75]. Entonces, el espectro de partículas es descrita según las siguientes situaciones:

- *Partículas con masa:* Si consideramos partículas con una masa en reposo dada por $P = (m, 0)$, el álgebra supersimétrica queda restringida a

$$\{Q_+, Q_+\} = 2m \quad \{Q_+, Q_-\} = 0 \quad \{Q_-, Q_-\} = 2m$$

de modo que podemos definir los operadores creación-destrucción

$$a = \frac{1}{2\sqrt{m}}(Q_2 + iQ_1) \quad a^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{m}}(Q_2 - iQ_1)$$

que verifican como es natural el álgebra

$$\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \quad \{a, a^\dagger\} = 1$$

de forma que sobre cierto estado $|\Omega\rangle$ del sistema físico, el multiplete de supersimetría queda constituido como

$$|\Omega\rangle \quad a^\dagger |\Omega\rangle$$

- *Partículas sin masa:* En este caso las partículas vienen caracterizadas por $P = (E, E)$, lo que convierte el álgebra supersimétrica en

$$\{Q_+, Q_+\} = 0 \quad \{Q_+, Q_-\} = 0 \quad \{Q_-, Q_-\} = 4E$$

de tal forma que el operador Q_+ es realizado trivialmente, considerando que $Q_+ \equiv 0$. No pueden ser construidos operadores de creación-destrucción. Sobre un estado $|\Omega\rangle$ la supersimetría no genera nuevos estados.

- *Sector Topológico:* En este sector se tienen valores no nulos para la carga central T . Resulta

$$P_0 = \frac{1}{2}(P_+ + P_-) = |T| + \frac{1}{2}(Q_+ \pm Q_-)^2 \quad (8.19)$$

de donde

$$P_0 \geq |T|$$

Para una partícula simple en reposo con masa M , la condición arriba escrita queda reflejada en la relación

$$M \geq |T| \quad (8.20)$$

En el caso de que la desigualdad (8.20) no quede saturada (desigualdad estricta) el espectro de partículas generado es similar al caso no topológico basado sobre los operadores de creación-destrucción

$$a, a^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{m(m^2 - T^2)}} \left[mQ_2 + (-T \pm i\sqrt{m^2 - T^2})Q_1 \right]$$

Por otra parte, el cumplimiento de la igualdad en (8.20), saturación de la cota, ocurrirá para aquellos estados caracterizados por alguna de las condiciones $(Q_+ \pm Q_-)|\alpha\rangle = 0$, como es de recibo al observar la fórmula (8.19). Éstos son los llamados estados BPS. Desarrollando explícitamente dicho requisito encontramos

$$\int dx \left\{ \left(\frac{\partial\phi^j}{\partial x^0} + \frac{\partial\phi^j}{\partial x^1} \pm \frac{\partial W}{\partial\phi^j} \right) \chi_+^j \pm \left(\frac{\partial\phi^j}{\partial x^0} - \frac{\partial\phi^j}{\partial x^1} \mp \frac{\partial W}{\partial\phi^j} \right) \chi_-^j \right\} = 0$$

Para el espacio de configuración \mathcal{C} definido en el capítulo 1, en el que quedan integradas las soluciones con independencia temporal, las condiciones anteriores son verificadas por las soluciones que obedezcan

$$\frac{\partial\phi^j}{\partial x^1} = \pm \frac{\partial W}{\partial\phi^j} \quad (8.21)$$

que constituyen las ecuaciones (1.60) que caracterizaban las soluciones kinks. Estas soluciones, por tanto, aparecen en la estructura supersimétrica como soluciones distinguidas. El estado BPS puede ser escrito como $|\alpha\rangle = |\phi_K(x_1)\rangle \otimes |F\rangle$. En la notación de superespacio, los supercampos correspondientes a soluciones kink son caracterizados por el ansatz

$$\Phi(x, \theta) = f \left(x \pm \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta \right)$$

En cuanto al análisis del espectro de partículas puede advertirse que no existe realización alguna no trivial de los operadores de creación-destrucción ($a \equiv a^\dagger \equiv 0$). No aparecen nuevos estados en el multiplete supersimétrico sobre los estados BPS. En dimensiones mayores el efecto provocado es un acortamiento en el número de estados del multiplete supersimétrico generado en el sector no topológico [89].

8.6 Búsqueda de invariancias fermiónicas.

En el formalismo clásico, el lagrangiano asociado a una teoría supersimétrica en (1+1) dimensiones venía expresado por (8.7). Fue mostrado que en presencia de un término de superpotencial genérico subsistía una invariancia por las transformaciones

$$\delta\phi^j = i\bar{\varepsilon}\chi^j \quad \delta\chi^j = \partial_\mu\phi^j\gamma^\mu\varepsilon - i\frac{\partial W}{\partial\phi^j}\varepsilon$$

que proporciona la conservación de la supercarga (8.9). Nuestro interés reside, ahora, en discernir la posibilidad de que existan sistemas físicos que incluyan nuevas invariancias supersimétricas clásicas mezclando grados bosónicos y fermiónicos. Para ello, ensayaremos las variaciones genéricas

$$\begin{cases} \delta\phi^j = i(f_B)^j_k\bar{\varepsilon}^B\chi^k \\ \delta\chi^j = -i(z_B)^j_k\frac{\partial W}{\partial\phi^k}\varepsilon^B + (h_B)^j_k\partial_\mu\phi^k\gamma^\mu\varepsilon^B \\ \delta\bar{\chi}^j = -i(z_B)^j_k\frac{\partial W}{\partial\phi^k}\bar{\varepsilon}^B - (h_B)^j_k\partial_\mu\phi^k\gamma^\mu\bar{\varepsilon}^B \end{cases} \quad (8.22)$$

donde $(f_B)^j_k$, $(h_B)^j_k$, $(z_B)^j_k$ son tensores 1-covariante 1-contravariante dependientes de los campos bosónicos. Impondremos que las variaciones (8.22) estén asociadas a una simetría del sistema físico. El lagrangiano experimenta la perturbación

$$\delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 + \delta\mathcal{L}_3$$

donde distinguimos los siguientes sumandos:

- Términos que incluyen la cadena $\bar{\chi}^j\gamma^\mu\gamma^\nu\varepsilon^B$, englobados bajo el sumando $\delta\mathcal{L}_0$. Se encuentra que

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_0 = & i\partial_\mu\phi^j\partial^\mu(f_B)^j_k\bar{\chi}^k\varepsilon^B + i(f_B)^j_k\partial_\mu\phi^j\partial^\mu\bar{\chi}^k\varepsilon^B - \\ & -\frac{i}{2}(h_B)^j_k\partial_\nu\phi^k\partial_\mu\bar{\chi}^j\gamma^\mu\gamma^\nu\varepsilon^B + \frac{i}{2}\partial_\mu(h_B)^j_k\partial_\nu\phi^k\bar{\chi}^j\gamma^\mu\gamma^\nu\varepsilon^B + \\ & +\frac{i}{2}(h_B)^j_k\partial_{\mu\nu}\phi^k\bar{\chi}^j\gamma^\mu\gamma^\nu\varepsilon^B \end{aligned}$$

lo que puede escribirse como

$$\delta\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \left[\frac{i}{2}(f_B)^j_k\partial_\nu\phi^j\bar{\chi}^k\gamma^\nu\gamma^\mu\varepsilon^B \right]$$

asumiendo las condiciones

$$\frac{\partial(f_B)^j_k}{\partial\phi^l} = 0 \quad (f_B)^j_k = (h_B)^k_j \quad (8.23)$$

que nos proporciona la constancia del tensor $(f_B)^j_k$ y la relación entre éste y el tensor $(h_B)^j_k$, responsables de las variaciones de los campos en la teoría sin interacción, tal como puede verse en (8.22).

- Términos que incluyen la cadena $\bar{\chi}^j \gamma^\mu \varepsilon^B$, considerados bajo $\delta \mathcal{L}_1$. Se tiene

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{2} (z_B)^j_k \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \partial_\mu \bar{\chi}^j \gamma^\mu \varepsilon^B + \frac{1}{2} \partial_\mu (z_B)^j_k \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \bar{\chi}^j \gamma^\mu \varepsilon^B + \\ &+ \frac{1}{2} (z_B)^j_k \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^k \partial \phi^l} \partial_\mu \phi^l \bar{\chi}^j \gamma^\mu \varepsilon^B - (h_B)^k_l \partial_\mu \phi^l \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \bar{\chi}^j \gamma^\mu \varepsilon^B \end{aligned}$$

lo cual guía a la divergencia expresada como

$$\delta \mathcal{L}_1 = \partial_\mu \left[-\frac{1}{2} (z_B)^j_k \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \bar{\chi}^j \gamma^\mu \varepsilon^B \right]$$

bajo las siguientes restricciones

$$\frac{\partial (z_B)^j_k}{\partial \phi^l} = 0 \quad (z_B)^j_k \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^k \partial \phi^l} = (f_B)^l_k \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^k \partial \phi^j} \quad (8.24)$$

consideradas sobre el tensor $(z_B)^j_k$ asociado a términos de interacción en (8.22).

- Términos que incluyen la cadena $\bar{\chi}^j \varepsilon^B$, enmarcados en la variación $\delta \mathcal{L}_2$. Ahora,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_2 &= -i (f_B)^k_l \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \bar{\chi}^l \varepsilon^B + i (z_B)^k_l \frac{\partial W}{\partial \phi^l} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \bar{\chi}^j \varepsilon^B = \\ &= i \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k} (z_B)^k_l - \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^l \partial \phi^k} (f_B)^k_j \right] \frac{\partial W}{\partial \phi^l} \bar{\chi}^j \varepsilon^B = \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado la traspuesta de la condición (8.24).

- Términos que incluyen la cadena $\bar{\chi}^j \chi^k \bar{\chi}^l \varepsilon^B$, inmersos en la magnitud $\delta \mathcal{L}_3$. Resulta

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_3 &= \frac{i}{2} (f_B)^l_r \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k \partial \phi^l} \bar{\chi}^j \chi^k \bar{\chi}^r \varepsilon^B = \\ &= \frac{i}{2} (f_B)^l_r \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k \partial \phi^l} [(\chi_2^j \chi_1^k \chi_1^r - \chi_1^j \chi_2^k \chi_1^r) \varepsilon_2^B + (\chi_1^j \chi_2^k \chi_2^r - \chi_2^j \chi_1^k \chi_2^r) \varepsilon_1^B] = \\ &= i (f_B)^l_r \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k \partial \phi^l} \chi_2^j \chi_1^k \chi_1^r \varepsilon_2^B + i (f_B)^l_r \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k \partial \phi^l} \chi_1^j \chi_2^k \chi_2^r \varepsilon_1^B \end{aligned}$$

donde hemos de asumir el cumplimiento de la condición

$$\epsilon^{kr} (f_B)^l_r \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k \partial \phi^l} = 0 \quad (8.25)$$

Con los puntos anteriores puede concluirse como resultado que bajo las relaciones (8.23), (8.24) y (8.25), la variación del lagrangiano respecto de las transformaciones (8.22) queda determinada como el término de divergencia

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{i}{2} (f_B)^j_k \partial_\nu \phi^j \bar{\chi}^k \gamma^\mu \gamma^\nu \varepsilon^B - \frac{1}{2} (z_B)^j_k \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \bar{\chi}^j \gamma^\mu \varepsilon^B \right]$$

de modo que aparece una corriente conservada expresada por:

$$j^\mu(\phi, \chi) = i (f_B)^j_k \partial_\nu \phi^j \gamma^\nu \gamma^\mu \chi^k + (z_B)^j_k \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \gamma^\mu \chi^j \quad (8.26)$$

El esquema planteado debe albergar la posibilidad de recuperar la supercarga (8.9) sin la exigencia de ningún requisito añadido sobre el sistema físico, que pudiera derivarse de las ecuaciones (8.23), (8.24) y (8.25). Esto supone, además, un test inicial para comprobar la bondad de los cálculos emprendidos anteriormente. Considerando los valores $(f_B)^j_k = (h_B)^j_k = (z_B)^j_k = \delta_k^j$, las condiciones sobre el superpotencial (8.24) y (8.25) se convierten en identidades. Recuperamos, por tanto, la supersimetría estandar y aparecerá de forma general en cualquier otro subsistema que consideremos. Asociaremos el valor $B = 1$, a esta invariancia general. En las siguientes secciones distinguiremos algunas situaciones que admiten nuevas invariancias respecto de los cambios (8.22). La situación más rica corresponde a la supersimetría $\mathcal{N} = 2$, en la que aparecen cuatro supercargas como invariantes del sistema.

8.6.1 Modelos $\mathcal{N} = 1 \oplus \mathcal{N} = 1$ supersimétricos

La primera posibilidad de encontrar sistemas que admitan invariantes de tipo fermiónico corresponde a los modelos de SuperLiouville de tipo IV en un espacio-tiempo con (1+1) dimensiones, y cuyo superpotencial es una expresión separada $W = W_1(\phi^1) + W_2(\phi^2)$. Si elegimos en este caso que

$$(f_{B=2})^j_k = (z_{B=2})^j_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las condiciones (8.24) y (8.25), que rigen las características del superpotencial, se leen mediante la condición en derivadas parciales dada como $\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} = 0$, que se cumple de forma inmediata dada la definición de los modelos que tratamos. De manera consecuente se tiene la corriente

$$j_2^\mu(\phi, \chi) = i \partial_\nu \phi^1 \gamma^\nu \gamma^\mu \chi^1 + \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \gamma^\mu \chi^1$$

que arenga la conservación de la magnitud

$$q = \int dx \left(i \partial_\nu \phi^1 \gamma^\nu \gamma^0 \chi^1 + \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \gamma^0 \chi^1 \right)$$

Se cumple la siguiente estructura de anticonmutadores

$$\begin{aligned} \{Q_\pm, Q_\pm\} &= 2P_\mp & \{q_\pm, q_\pm\} &= 2P_\mp^1 & \{Q_\pm, q_\pm\} &= 2P_\mp^1 \\ \{Q_+, Q_-\} &= 2T & \{q_+, q_-\} &= 2T_+^1 & \{Q_\pm, q_\mp\} &= 2T^1 \end{aligned}$$

donde $T^1 = W_1(\phi^1 = \infty) - W_1(\phi^1 = -\infty)$. En realidad este tipo de modelos está formado por dos copias de sistemas físicos $\mathcal{N} = 1$ supersimétricos con $N = 1$, los cuales se encuentran desacoplados.

8.6.2 Supersimetría Extendida en (1+1) dimensiones:

Será en esta sección en la que analizaremos una clase de sistemas de gran interés y que revela novedosas propiedades. Se plantea dotar a las nuevas invariancias (8.22) del estatus de supercarga, adquiriendo las mismas propiedades que la magnitud Q expresada en (8.9), esto es, hemos de imponer que cumplan el *superálgebra extendida*

$$[\delta_1^B, \delta_2^A] = 2i \delta^{AB} \bar{\varepsilon}_2^A \gamma^\mu \varepsilon_1^B \partial_\mu \quad (8.27)$$

el cual ha sido escrito empleando generadores infinitesimales. Así, teniendo en cuenta el número \mathcal{N} de supercargas encontradas hablaremos de \mathcal{N} supersimetrías. De forma genérica, el conmutador de dos variaciones específicas, expresadas por (8.27), nos proporcionará el comportamiento del álgebra *on shell*. Encontramos los siguientes resultados

$$\begin{aligned} [\delta_1^B, \delta_2^A] \phi^j &= ((f_A)^j_k (f_B)^l_k + (f_B)^j_k (f_A)^l_k) i \partial_\mu \phi^l \bar{\varepsilon}_2^A \gamma^\mu \varepsilon_1^B + \\ &+ ((f_A)^j_k (z_B)^k_l - (f_B)^j_k (z_A)^k_l) \frac{\partial W}{\partial \phi^l} \bar{\varepsilon}_2^A \varepsilon_1^B \\ [\delta_1^B, \delta_2^A] \chi^j &= ((f_B)^k_j (f_A)^k_l + (f_A)^k_j (f_B)^k_l) i \partial_\mu \chi^l \bar{\varepsilon}_2^A \gamma^\mu \varepsilon_1^B + \\ &+ ((f_B)^k_j (f_A)^k_l - (z_A)^j_k (z_B)^l_k) \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^l \partial \phi^r} \chi^r \bar{\varepsilon}_2^A \varepsilon_1^B \end{aligned}$$

donde implícitamente hemos hecho uso de la condición:

$$(f_B)^k_j (f_A)^k_l + (f_A)^k_j (f_B)^k_l = (z_B)^j_k (z_A)^l_k + (z_A)^j_k (z_B)^l_k \quad (8.28)$$

El requerimiento de que las relaciones de conmutación exhibidas reproduzcan el superálgebra (8.27) obliga a introducir severas restricciones sobre los tensores $(f_B)^j_k$, $(z_A)^j_k$ y el superpotencial $W(\phi)$. En primera instancia debe imponerse

$$\begin{cases} ((f_A)^j_k (z_B)^k_l - (f_B)^j_k (z_A)^k_l) \frac{\partial W}{\partial \phi^l} = 0 \\ \left((z_B)^j_k (z_A)^l_k - (z_A)^j_k (z_B)^l_k + (f_B)^k_j (f_A)^k_l - (f_A)^k_j (f_B)^k_l \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^l \partial \phi^r} = 0 \end{cases} \quad (8.29)$$

lo que tiene como consecuencia que nuestros cálculos aparezcan ahora en la forma más simplificada:

$$\begin{aligned} [\delta_1^B, \delta_2^A] \phi^j &= ((f_A)^j_k (f_B)^l_k + (f_B)^j_k (f_A)^l_k) i \partial_\mu \phi^l \bar{\varepsilon}_2^A \gamma^\mu \varepsilon_1^B \\ [\delta_1^B, \delta_2^A] \chi^j &= ((f_B)^k_j (f_A)^k_l + (f_A)^k_j (f_B)^k_l) i \partial_\mu \chi^l \bar{\varepsilon}_2^A \gamma^\mu \varepsilon_1^B \end{aligned}$$

Una de las simetrías englobadas debe corresponder a la estandar como ya fue advertido, la cual identificaremos con el índice $A = 1$. Resultaba $(f_{A=1})^j_k = \delta_k^j$ y $(z_{A=1})^j_k = \delta_k^j$. Empleando esta condición en (8.29) se concluye que $(f_A)^j_k = (z_A)^j_k$. Seguidamente, para reproducir el $\mathcal{N} = 2$ superálgebra debe imponerse

$$(f_A)^j_k (f_B)^l_k + (f_B)^j_k (f_A)^l_k = 2\delta_{AB}\delta^{jl}$$

Analizando esta condición, se obtienen las siguientes propiedades:

$$A = 1, B \neq 1 \Rightarrow (f_B)^j_k = -(f_B)^k_j \quad (8.30)$$

$$A \neq B, A, B \neq 1 \Rightarrow (f_A)^j_k (f_B)^k_l = -(f_B)^j_k (f_A)^k_l \quad (8.31)$$

$$A = B \neq 1 \Rightarrow (f_A)^j_k (f_A)^k_l = -\delta_l^j \quad (8.32)$$

El determinante sobre (8.31) proporciona la condición $1 = (-1)^m$, donde m es el orden de la representación matricial de $(f_A)^j_k$. De ello, hemos de concluir que $m = 2n$ con $n \in \mathbb{N}$, es decir, sólo aparecerán supersimetrías extendidas para aquellas variedades de dimensión par. La condición (8.32), que cumplen las magnitudes $(f_A)^j_k$, dota de una estructura cuasi-compleja a la variedad en la que implementamos la teoría supersimétrica. Además, las magnitudes $(f_A)^j_k$ son estructuras constantes cuasihermíticas. Una variedad de dimensión $2n$ con tal estructura es llamada variedad Kähler [19, 45, 147, 110, 108, 68].

8.6.3 Modelos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos

Restringiremos el estudio mostrado en la sección precedente a modelos supersimétricos con dos grados de libertad bosónicos en el espacio interno $N = 2$. Estos modelos tienen relevancia dado que surgen como la restricción dimensional de teorías de supercuerdas de tipo II. En estos supuestos las magnitudes $K_A = (f_A)^j_k$ quedan representados por matrices cuadradas de orden 2. La única elección sobre el tensor $(f_A)^j_k$ capaz de verificar cada uno de los requisitos encontrados (8.31), (8.32) y (8.32) es

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos informa de que la variedad que soporta la teoría que estudiamos admite la presencia de la aplicación lineal K_2 de $T(M)$ en $T(M)$, tal que $K_2 K_2 = -1$ emulando el comportamiento de la unidad imaginaria. Explícitamente la acción de la estructura cuasicompleja es $\phi^1 \rightarrow \phi^2$ y $\phi^2 \rightarrow -\phi^1$ [50]. Con lo anterior podemos encontrar las características de la interacción más genérica compatible con la supersimetría $\mathcal{N} = 2$. De las condiciones (8.24) y (8.29) se lee que un sistema físico

soporta estas nuevas simetrías si el superpotencial que lo caracteriza es armónico, esto es, verifica la ecuación de Laplace

$$d * dW = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} + \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2 \partial \phi^2} = 0 \quad (8.33)$$

Debe recordarse que en el capítulo 5 estudiamos la presencia de defectos topológicos en el sector bosónico de sistemas físicos que verificaban esta restricción. Los resultados obtenidos continúan teniendo vigencia en este nuevo marco al considerar la anulación de los grados fermiónicos. Las variaciones supersimétricas (8.22) quedan restringidas como

$$\begin{aligned} \text{Supersimetría 1: } & \begin{cases} \delta \phi^1 = i\bar{\varepsilon}^B \chi^1 & \delta \phi^2 = i\bar{\varepsilon}^B \chi^2 \\ \delta \chi^1 = \partial_\mu \phi^1 \gamma^\mu \varepsilon^B - i \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \varepsilon^B & \delta \chi^2 = \partial_\mu \phi^2 \gamma^\mu \varepsilon^B - i \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \varepsilon^B \end{cases} \\ \text{Supersimetría 2: } & \begin{cases} \delta \phi^1 = i\bar{\varepsilon}^B \chi^2 & \delta \phi^2 = -i\bar{\varepsilon}^B \chi^1 \\ \delta \chi^1 = -\partial_\mu \phi^2 \gamma^\mu \varepsilon^B - i \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \varepsilon^B & \delta \chi^2 = \partial_\mu \phi^1 \gamma^\mu \varepsilon^B + i \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \varepsilon^B \end{cases} \end{aligned}$$

lo que nos permite obtener dos cargas supersimétricas ($B = 1, 2$), cuyas proyecciones quirales quedan expresadas mediante

$$Q_+^B = \int dx (f_B)^j_k \left[(\partial_0 \phi^j - \partial_1 \phi^j) \chi_+^k + \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \chi_-^j \right] \quad (8.34)$$

$$Q_-^B = \int dx (f_B)^j_k \left[(\partial_0 \phi^j + \partial_1 \phi^j) \chi_-^k - \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \chi_+^j \right] \quad (8.35)$$

Hablamos por ello de sistemas físicos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos. Asumiendo las relaciones de conmutación (8.13) en un instante t dado, el superálgebra presentado por esta clase de modelos puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \{Q_\pm^1, Q_\pm^1\} &= 2P_\mp & \{Q_+^1, Q_+^2\} &= 0 & \{Q_+^1, Q_-^1\} &= 2T & \{Q_+^1, Q_-^2\} &= 2\tilde{T} \\ \{Q_\pm^2, Q_\pm^2\} &= 2P_\mp & \{Q_-^1, Q_-^2\} &= 0 & \{Q_+^2, Q_-^2\} &= -2T & \{Q_+^2, Q_-^1\} &= 2\tilde{T} \end{aligned}$$

o de forma compacta,

$$\{Q_\pm^A, Q_\pm^B\} = 2\delta^{AB} P_\mp \quad \{Q_+^A, Q_-^B\} = -(-1)^B (\delta_{AB} 2T + \epsilon^{AB} 2\tilde{T}) \quad (8.36)$$

donde quedan registradas las cargas centrales (5.1) y (5.2) de origen topológico.

Estructura cuasicompleja:

Para los modelos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos en un mundo interno bidimensional la estructura cuasicompleja puede ser puesta de manifiesto directamente trabajando con los campos

$$\begin{cases} \phi(x) = \phi^1(x) + i\phi^2(x) \\ \phi^*(x) = \phi^1(x) - i\phi^2(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \chi(x) = \chi^1(x) + i\chi^2(x) \\ \chi^*(x) = \chi^1(x) - i\chi^2(x) \end{cases}$$

esto es, con un campo bosónico complejo $\phi(x)$ y un campo espinorial de Dirac $\chi(x)$ que auna los dos espinores de Majorana $\chi^1(x)$ y $\chi^2(x)$. La condición de armonicidad (8.33) sobre el superpotencial se lee en las nuevas variables como

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \phi^*} = 0 \quad (8.37)$$

lo que restringe la expresión del lagrangiano en la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + \frac{i}{2} \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi + 2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \frac{\partial W}{\partial \phi^*} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \phi} \chi^t \gamma^0 \chi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^* \partial \phi^*} \chi^{*t} \gamma^0 \chi^*$$

La condición (8.37), necesaria para soportar las nuevas simetrías, implica que el superpotencial debe aparecer como una forma separada del campo ϕ y su conjugado ϕ^* , esto es,

$$W(\phi, \phi^*) = f(\phi) + g(\phi^*)$$

Sobre el formato anterior se añade la exigencia de realidad sobre el potencial asociado al sistema físico, que viene resuelta asumiendo que la función g adquiere la misma forma que la función f . Entonces,

$$W(\phi, \phi^*) = f(\phi) + f(\phi^*)$$

lo que nos faculta para escribir la condición

$$\frac{\partial W}{\partial \phi^*} = \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^*$$

A la vista de los resultados anteriores, la teoría puede ser caracterizada por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + \frac{i}{2} \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi + 2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \left[\frac{\partial W}{\partial \phi} \right]^* - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \chi^t \gamma^0 \chi - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \right]^* \chi^{*t} \gamma^0 \chi^*$$

donde el superpotencial es una función holomorfa del campo, esto es, $W = W(\phi)$, de modo que la condición (8.37) es verificada inmediatamente. El requisito de realidad sobre el potencial bosónico es impuesto sobre la forma del lagrangiano presentado. El aspecto que infiere mayor relevancia al modelo presentado es que se corresponde con la reducción dimensional del modelo $\mathcal{N} = 1$ supersimétrico de Wess-Zumino considerado en (3+1) dimensiones espacio-temporales [143]. El lagrangiano mostrado arriba es invariante bajo las variaciones supersimétricas, que aparecen en términos de los campos complejos como

$$\begin{cases} \delta \phi = i \bar{\varepsilon} \chi & \delta \chi = \partial_\mu \phi \gamma^\mu \varepsilon - 2i \frac{\partial W}{\partial \phi^*} \varepsilon^* \\ \delta \phi^* = i \bar{\chi} \varepsilon & \delta \chi^* = -\partial_\mu \phi^* \bar{\varepsilon} \gamma^\mu - 2i \frac{\partial W}{\partial \phi} \varepsilon^t \gamma^0 \end{cases}$$

El álgebra, escrita en esta notación, puede ser obtenida introduciendo las cargas supersimétricas complejas $Q = Q^1 + iQ^2$ y $Q^* = Q^1 - iQ^2$, mientras que sobre las cargas centrales

$$T = \int dx \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \phi^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) \quad \tilde{T} = -i \int dx \left(W_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial \phi^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right)$$

se puede definir

$$Z = 2 \int dx \frac{\partial W}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = T + i\tilde{T}$$

de modo que el superálgebra verifica las relaciones:

$$\begin{aligned} \{Q_\pm, Q_\pm\} &= 0 & \{Q_\pm^*, Q_\pm^*\} &= 0 & \{Q_\pm, Q_\pm^*\} &= 4P_\mp \\ \{Q_+, Q_-\} &= 4Z & \{Q_+^*, Q_-^*\} &= 4Z^* & \{Q_+, Q_-^*\} &= 0 \end{aligned}$$

Una vez identificada el álgebra supersimétrica extendida (8.36) podemos determinar el espectro de partículas generado. Puesto que P_μ conmuta con todos los generadores de supersimetría, todos los miembros del multiplete aparecen con la misma masa. Hemos de distinguir las siguientes situaciones:

- **Sector no topológico:**

- *Partículas con masa:* Las partículas masivas son definidas como representaciones irreducibles del grupo de Poincare. Estados de una partícula son caracterizados como autoestados del tensor momento-energía P_μ donde $P^2 = m^2$. En un sistema de referencia en reposo $P_\mu = (m, 0)$ el álgebra (8.36) queda restringido en la forma

$$\{Q_\pm^A, Q_\pm^B\} = 2\delta^{AB}P_\mp \quad \{Q_+^A, Q_-^B\} = 0$$

de modo que los operadores construidos por

$$a_A = \frac{1}{2\sqrt{m}} (Q_+^A + iQ_-^A) \quad a_A^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{m}} (Q_+^A - iQ_-^A)$$

ampan el anticonmutador $\{a_A, a_A^\dagger\} = 1$ como el único no nulo. Por ello, a_A y a_A^\dagger con $A = 1, 2$ son operadores de creación y destrucción respectivamente. Es, por ello, que el multiplete supersimétrico engendrado sobre un estado $|\Omega\rangle$ que verifica $a_A|\Omega\rangle = 0$ viene constituido por los estados:

$$|\Omega\rangle \quad a_1^\dagger|\Omega\rangle \quad a_2^\dagger|\Omega\rangle \quad a_1^\dagger a_2^\dagger|\Omega\rangle$$

- *Partículas sin masa:* Este tipo de multipletes sin masa son sumamente interesantes dado que aparecen en las teorías de Yang-Mills supersimétricas

y en supergravedad con un espacio-tiempo de un número de dimensiones mayor. El multiplete vendrá constituido por un menor número de estados que en el caso anterior. El marco de referencia es caracterizado por la presencia de un tensor momento-energía donde $P_\mu = (E, E)$. Entonces, el álgebra supersimétrica queda explicitado por los anticonmutadores $\{Q_+^A, Q_+^B\} = \{Q_+^A, Q_-^B\} = 0$ y $\{Q_-^A, Q_-^B\} = 4\delta^{AB}E$, de tal manera que definiendo los operadores

$$a_\pm = \frac{1}{2\sqrt{E}} (Q_\pm^1 + iQ_\pm^2) \quad a_\pm^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{E}} (Q_\pm^1 - iQ_\pm^2)$$

se concluye que a_+ y a_+^\dagger se realizan trivialmente mientras que a_- y a_-^\dagger verifican un álgebra de Clifford. Entonces, los estados que conforman el multiplete de supersimetría asentados sobre el estado $|\Omega\rangle$ (caracterizado por $a_- |\Omega\rangle = 0$) vienen determinados por

$$|\Omega\rangle \quad a_-^\dagger |\Omega\rangle$$

- *Sector topológico (Estados BPS):* Como en la teoría $\mathcal{N} = 1$ supersimétrica introduciremos los estados BPS como aquellos sobre los que haremos actuar determinadas combinaciones de las supercargas elegidas adecuadamente sobre un estado $|\alpha\rangle$, estudiando en qué casos se anulan. Se observan los siguientes resultados:

– A la vista de la siguiente acción de operadores

$$(Q_+^B \pm Q_-^B) |\alpha\rangle = - \int dx \left(\partial_1 \phi^j \pm \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \right) (f_B)^j_k (\chi_+^k \mp \chi_-^k) |\alpha\rangle$$

podemos concluir que aquellas soluciones de tipo kink que cumplen las condiciones (5.8(a)) conservan la supersimetría que marcaremos mediante las supercargas \tilde{Q}_\pm^1 . El doble signo da cuenta de la invariancia por paridad de la coordenada espacial del sistema físico y provoca la transformación de un kink en su antikink.

– Bajo los cálculos

$$(Q_+^1 \pm Q_-^2) |\alpha\rangle = - \int dx \left(\partial_1 \phi^j \pm \epsilon^{jk} \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \right) (\chi_+^i \mp \epsilon^{jl} \chi_-^l) |\alpha\rangle$$

o

$$(Q_-^1 \pm Q_+^2) |\alpha\rangle = \int dx \left(\partial_1 \phi^j \pm \epsilon^{jk} \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \right) (\chi_-^i \mp \epsilon^{jl} \chi_+^l) |\alpha\rangle$$

se concluye que las soluciones asociadas a las ecuaciones diferenciales (5.8(b)) o equivalentemente (5.4) son estados BPS que conservan $\frac{1}{4}$ de la supersimetría. El doble signo da cuenta de la simetría por paridad del parámetro espacial.

Por los argumentos esgrimidos y con el propósito de marcar las supersimetrías conservadas sobre las soluciones de tipo kink, introducimos la siguiente tabla:

Carga SUSY	Definición	Condición de los estados BPS
\tilde{Q}_+^1	$Q_+^1 + Q_-^1$	$\frac{d\phi^j}{dx} + \frac{\partial W}{\partial \phi^j} = 0$
\tilde{Q}_-^1	$Q_+^1 - Q_-^1$	$\frac{d\phi^j}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi^j} = 0$
\tilde{Q}_+^2	$Q_+^1 + Q_-^2$	$\frac{d\phi^j}{dx} + \epsilon^{jk} \frac{\partial W}{\partial \phi^k} = 0$
\tilde{Q}_-^2	$Q_-^1 - Q_+^2$	$\frac{d\phi^j}{dx} - \epsilon^{jk} \frac{\partial W}{\partial \phi^k} = 0$

Las condiciones anunciadas en el cuadro nos habilitan para trasladar los conocimientos adquiridos en el capítulo 5 acerca de la búsqueda de soluciones de tipo defecto topológico al ámbito de esta clase de modelos.

8.6.4 Modelos $\mathcal{N} = 4$ supersimétricos

El trabajo respecto de la supersimetría extendida plasmado en modelos físicos que incorporan un espacio interno bidimensional $N = 2$ puede ser completado con el estudio de sistemas con un espacio interno de cuatro dimensiones como próximo paso a ejecutar de forma natural. Las magnitudes $K_B' = (f_B)^i_j$ quedan representadas por matrices cuadradas de orden cuatro. La estructura cuasicompleja (8.32) obliga a adoptar

$$K_1' = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}; K_2' = \begin{pmatrix} -K_2 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}; K_3' = \begin{pmatrix} 0 & -K_2 \\ K_2 & 0 \end{pmatrix}; K_4' = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

que dotan a los campos de una estructura de variedad hiperKähler. Se verifican los siguientes productos: $K_1'K_2' = -K_3'$, $K_1'K_3' = K_2'$ y $K_2'K_3' = -K_1'$. Las condiciones (8.24) y (8.25), que verifica el superpotencial para admitir las nuevas supersimetrías, tienen en este caso drásticas consecuencias. Las sucesivas restricciones guían a $\frac{\partial W}{\partial \phi^j} = 0$, de modo que la supersimetría extendida con $\mathcal{N} = 4$ es sólo sustentada por la teoría libre. La estructura puede ser puesta de manifiesta considerando un campo bosónico y un campo fermiónico de naturaleza cuaterniónica. Claramente estos modelos carecen de interés desde el punto de vista de defectos topológicos y por ello no trataremos su análisis.

8.6.5 Modelo $\mathcal{N} = 1$ supersimétrico con superpotencial armónico hiperbólico

Como última estructura que admite invariantes de naturaleza fermiónica introduciremos un caso inspirado en los resultados obtenidos en los modelos mecánicos. Tomaremos en consideración los siguientes valores

$$(f_{B=2})^j_k = (z_{B=2})^j_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de modo que dadas las condiciones (8.24) y (8.25), el sistema físico debe implicar un superpotencial que verifique la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} - \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2 \partial \phi^2} = 0$$

Por ello, en este caso se tiene la corriente

$$j_2^\mu(\phi, \chi) = i \partial_\nu \phi^1 \gamma^\nu \gamma^\mu \chi^2 + i \partial_\nu \phi^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \chi^1 + \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \gamma^\mu \chi^1 + \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \gamma^\mu \chi^2$$

lo que induce la conservación de la carga

$$\tilde{Q} = \int dx \left(i \partial_\nu \phi^1 \gamma^\nu \gamma^0 \chi^2 + i \partial_\nu \phi^2 \gamma^\nu \gamma^0 \chi^1 + \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \gamma^0 \chi^1 + \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \gamma^0 \chi^2 \right)$$

Ahora, se tiene el cumplimiento de las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} \{Q_\pm, Q_\pm\} &= 2P_\mp & \{Q_+, Q_-\} &= 2T & \{Q_\pm, \tilde{Q}_\pm\} &= 2I_\mp \\ \{\tilde{Q}_\pm, \tilde{Q}_\pm\} &= 2P_\mp & \{\tilde{Q}_+, \tilde{Q}_-\} &= 2T & \{Q_\pm, \tilde{Q}_\mp\} &= 2R \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I_- &= \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_0 \phi^1 - \partial_1 \phi^1) (\partial_0 \phi^2 - \partial_1 \phi^2) - i \chi_+^1 \partial_1 \chi_+^2 - i \chi_+^2 \partial_1 \chi_+^1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \frac{\partial W}{\partial \phi^2} - i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} (\chi_+^1 \chi_-^1 + \chi_+^2 \chi_-^2) - i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} (\chi_+^1 \chi_-^2 + \chi_+^2 \chi_-^1) \right\} \\ I_+ &= \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_0 \phi^1 + \partial_1 \phi^1) (\partial_0 \phi^2 + \partial_1 \phi^2) + i \chi_-^1 \partial_1 \chi_-^2 + i \chi_-^2 \partial_1 \chi_-^1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \frac{\partial W}{\partial \phi^2} - i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} (\chi_+^1 \chi_-^1 + \chi_+^2 \chi_-^2) - i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} (\chi_+^1 \chi_-^2 + \chi_+^2 \chi_-^1) \right\} \\ R &= \int dx \left\{ \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \frac{d\phi^2}{dx} + \frac{\partial W}{\partial \phi^2} \frac{d\phi^1}{dx} \right\} \end{aligned}$$

de modo que los anticonmutadores no nulos entre las cargas fermiónicas estropean la interpretación de éstas últimas como una supersimetría extendida.

8.7 Espacio de configuración: SuperKink.

En el primer capítulo restringimos nuestro estudio a la obtención de las soluciones de tipo defecto topológico. Estas soluciones correspondían a configuraciones del espacio \mathcal{C} y se obtuvieron como los puntos estacionarios del funcional acción en la que se obvia la dependencia temporal. En el marco supersimétrico, si fijamos los grados fermiónicos como nulos, las expresiones de los kinks obtenidos en capítulos precedentes se presentan como soluciones en este nuevo ámbito. Trataremos de obtener en esta sección, desde un punto de vista clásico, soluciones de tipo defecto topológico que posean comportamientos no triviales para los campos grassmannianos, los superkinks. El espacio de configuraciones quedará definido como

$$\mathcal{C} = \{\phi^j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbf{c}}, \chi^j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbf{a}} / \phi^j = \phi^j(x), \chi^j = \chi^j(x)\}$$

lo que induce que las soluciones de la teoría correspondan a los puntos críticos del funcional

$$S_e = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi^j}{\partial x^1} \frac{\partial \phi^j}{\partial x^1} - \frac{i}{2} \chi_1^j \frac{\partial \chi_1^j}{\partial x^1} + \frac{i}{2} \chi_2^j \frac{\partial \chi_2^j}{\partial x^1} + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \frac{\partial W}{\partial \phi^j} - i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \chi_1^j \chi_2^k \right\} \quad (8.38)$$

A la vista de (8.38) puede advertirse que el problema de identificar soluciones pertenecientes al espacio de configuración \mathcal{C} en una teoría de campos supersimétrica de (1+1) dimensiones espacio-temporales es equiparable a la búsqueda de supersoluciones en la mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica. En este proceso de analogía, los espinores constituidos por dos componentes en (1+1)-dimensiones se convierten en (1+0)-dimensiones en dos espinores de una sola componente. La misma derivación recae sobre las cargas supersimétricas. La similitud entre ambos problemas es completada considerando la permuta entre las siguientes magnitudes

T. C. $\mathcal{N} = 1$ SUSY (1+1)D	Mecánica $\mathcal{N} = 2$ Supersimétrica
x	$\longleftrightarrow t$
W	$\longleftrightarrow i W_{\text{mec}}$
χ_1^j	$\longleftrightarrow -i \theta_1^j$
χ_2^j	$\longleftrightarrow \theta_2^j$

lo que permite usar los resultados del capítulo 7, referido a la mecánica supersimétrica, en la teoría de campos presente.

La estaticidad de las soluciones sobre (8.8) o la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre el funcional (8.38) guían a las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 \phi^j}{dx^2} - \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k \partial \phi^l} \bar{\chi}^k \chi^l = 0$$

$$i\frac{d\bar{\chi}^j}{dx}\gamma^1 + \frac{\partial^2 W}{\partial\phi^j\partial\phi^k}\bar{\chi}^k = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\chi_1^j}{dx} = -\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^j\partial\phi^k}\chi_2^k \\ \frac{d\chi_2^j}{dx} = -\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^j\partial\phi^k}\chi_1^k \end{array} \right.$$

cuya manipulación resulta más sencilla bajo el uso de las magnitudes $\chi_+^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1^j + \chi_2^j)$ y $\chi_-^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1^j - \chi_2^j)$, de modo que utilizaremos la siguiente forma de las ecuaciones de segundo orden

$$\frac{d^2\phi^j}{dx^2} - \frac{\partial W}{\partial\phi^k}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^j\partial\phi^k} - i\frac{\partial^3 W}{\partial\phi^j\partial\phi^k\partial\phi^l}\chi_+^k\chi_-^l = 0 \quad (8.39)$$

$$\frac{d\chi_+^j}{dx} = -\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^j\partial\phi^k}\chi_+^k \quad (8.40)$$

$$\frac{d\chi_-^j}{dx} = \frac{\partial^2 W}{\partial\phi^j\partial\phi^k}\chi_-^k \quad (8.41)$$

sobre las que quedan desacopladas las componentes fermiónicas con distinto subíndice. El tensor momento-energía para configuraciones estáticas viene expresado por

$$P_0 = \int dx \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial\phi^j}{\partial x^1}\frac{\partial\phi^j}{\partial x^1} + \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial\phi^j}\frac{\partial W}{\partial\phi^j} + \frac{1}{2}\bar{\chi}^j \left(i\gamma_1\frac{\partial\chi^j}{\partial x^1} + \frac{\partial^2 W}{\partial\phi^j\partial\phi^k}\chi^k \right) \right\}$$

$$P_1 = \int dx \frac{i}{2}\bar{\chi}^j\gamma_0\frac{\partial\chi^j}{\partial x^1} = \int dx \frac{i}{2} \left\{ \chi_1^j\frac{\partial\chi_1^j}{\partial x^1} + \chi_2^j\frac{\partial\chi_2^j}{\partial x^1} \right\}$$

de modo que si son usadas las ecuaciones del movimiento se tiene

$$P_0 = \mathcal{E}[\Phi_K] = \int dx \left\{ \frac{1}{2}\frac{d\phi^j}{dx}\frac{d\phi^j}{dx} + \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial\phi^j}\frac{\partial W}{\partial\phi^j} \right\}$$

$$P_1 = \int dx \frac{i}{2} \left\{ -\chi_1^j\frac{\partial^2 W}{\partial x^j\partial x^k}\chi_2^k - \chi_2^j\frac{\partial^2 W}{\partial x^j\partial x^k}\chi_1^k \right\} = 0$$

Bajo la restricción de estaticidad el momento permanece nulo, como era esperado, mientras que sobre la expresión de la energía puede destacarse la desaparición de los términos asociados a los grados fermiónicos. La energía del superkink viene determinado exclusivamente por los grados bosónicos mediante la expresión (1.52). Por otra parte, las cargas supersimétricas en la teoría de campos se convierten en

$$Q_1 = \int dx \left(-\frac{\partial\phi^j}{\partial x^1}\chi_1^j + \frac{\partial W}{\partial\phi^j}\chi_2^j \right) \quad Q_2 = \int dx \left(\frac{\partial\phi^j}{\partial x^1}\chi_2^j - \frac{\partial W}{\partial\phi^j}\chi_1^j \right) \quad (8.42)$$

Con el propósito de identificar las soluciones que tienen lugar en el modelo supersimétrico es conveniente señalar las integrales primeras de las ecuaciones (8.39)-(8.41), que corresponderán a aquellas del sistema mecánico supersimétrico asociado. Apoyados sobre los argumentos aplicados en el capítulo precedente, es fácil advertir

que la multiplicación de (8.39) por el factor $\frac{d\phi^j}{dx}$, junto con el uso de (8.40) y (8.41), proporciona como integral primera la energía mecánica

$$I_1 = H^{\text{est}} = \frac{1}{2} \frac{d\phi^j}{dx} \frac{d\phi^j}{dx} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \frac{\partial W}{\partial \phi^j} - i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^j \partial \phi^k} \chi_+^j \chi_-^k \quad (8.43)$$

Por otra parte, si la relación (8.40) es multiplicada por $\frac{d\phi^j}{dx} + \frac{\partial W}{\partial \phi^j}$, junto con la igualdad (8.39), puede llegarse a la conservación de la magnitud

$$Q_+^{\text{est}} = \left(\frac{d\phi^j}{dx} + \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \right) \chi_+^j \quad (8.44)$$

mientras que si (8.41) se multiplica por $\frac{d\phi^j}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi^j}$ y se considera (8.39) puede obtenerse la carga

$$Q_-^{\text{est}} = \left(\frac{d\phi^j}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \right) \chi_-^j \quad (8.45)$$

Las dos últimas integrales primeras anunciadas se corresponden con las supercargas asociadas a la acción (8.38). Otra forma de obtener este resultado es apreciar la invariancia del funcional energía bajo las transformaciones

$$\begin{aligned} \text{Supersimetría 1:} \quad & \delta_1 \phi^j = \varepsilon \chi_1^j & \delta_1 \chi_1^j &= -i \varepsilon \frac{\partial \phi^j}{\partial x} & \delta_1 \chi_2^j &= i \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \\ \text{Supersimetría 2:} \quad & \delta_2 \phi^j = \varepsilon \chi_2^j & \delta_2 \chi_1^j &= -i \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \phi^j} & \delta_2 \chi_2^j &= i \varepsilon \frac{\partial \phi^j}{\partial x} \end{aligned}$$

que implican la conservación de las cargas

$$Q_1^{\text{est}} = \frac{\partial \phi^j}{\partial x} \chi_1^j + \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \chi_2^j \quad Q_2^{\text{est}} = \frac{\partial \phi^j}{\partial x} \chi_2^j + \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \chi_1^j$$

El álgebra debida a las cargas anteriores resulta sencillo de obtener aprovechando el paralelismo marcado entre la teoría de campos y la mecánica supersimétrica, donde $Q_1^{\text{est}} \rightarrow -i Q_1^{\text{mec}}$ y $Q_2^{\text{est}} \rightarrow Q_2^{\text{mec}}$. Es fácil advertir que se verifica:

$$\{Q_1^{\text{est}}, Q_1^{\text{est}}\} = -2I_1 \quad \{Q_1^{\text{est}}, Q_2^{\text{est}}\} = 0 \quad \{Q_2^{\text{est}}, Q_2^{\text{est}}\} = 2I_1 \quad (8.46)$$

La impresión que debemos percibir es que el argumento utilizado para introducir las supercargas como invariantes exige el cumplimiento de $\partial_x \phi^j + \frac{\partial W}{\partial \phi^j} \neq 0$, de modo que la supercarga Q_+ encontrada no puede ser considerada integral primera para las soluciones kink que cumplen $\partial_x \phi^j + \frac{\partial W}{\partial \phi^j} = 0$. Bien es cierto que este tipo de solitones sí verifica la conservación de la supercarga Q_- . Las consecuencias de este comportamiento son tan drásticas que afecta al espectro de partículas en la teoría cuántica mediante el acortamiento de los multipletes de supersimetría. Para estas soluciones sólo se consigue construir una supercarga. También hemos de recordar la presencia de $I_3 = \theta_+^j \theta_-^j$ como invariante asociados a (8.40) y (8.41).

8.8 SuperSoluciones en $N = 1$.

El estudio de la dinámica de los sistemas físicos supersimétricos con espacio interno unidimensional $N = 1$ puede ser abordado con éxito. Apoyados sobre las integrales primeras (8.43)-(8.45) podemos concluir de manera análoga a los cálculos considerados en el capítulo anterior los siguientes resultados:

- *Soluciones con $\frac{d\phi}{dx} \neq 0$ y $\frac{d\phi}{dx} \pm \frac{\partial W}{\partial \phi} \neq 0$.* Las supersoluciones quedan especificadas por

$$a) \quad x - x_0 = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2I_1 + \frac{\partial W}{\partial \phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} + 2i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} I_3}} \quad b) \quad \chi_{\pm} = \frac{Q_{\pm}}{\frac{d\phi}{dx} \pm \frac{\partial W}{\partial \phi}} \quad (8.47)$$

- *Soluciones con $\frac{d\phi}{dx} \neq 0$ y $\frac{d\phi}{dx} \pm \frac{\partial W}{\partial \phi} = 0$.* Los grados de carácter par vienen regidos por la expresión (8.47a), mientras que los grados fermiónicos, obtenidos de la integración de (8.40) y (8.41), responden a

$$\chi_{\pm}(x) = \chi_{\pm}^0 \exp \left[\mp \int_0^x dx' \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} [\phi(x')] \right] \quad (8.48)$$

- *Soluciones con $\frac{d\phi}{dx} = 0$.* Mientras los grados fermiónicos siguen la relación (8.48), la variable $\phi(x)$ puede ser resuelta desde la ecuación

$$\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi} \frac{\partial W}{\partial \phi} + i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} I_3 + I_1 = 0$$

proporcionando las soluciones de vacío del modelo supersimétrico.

Aun cuando hemos afrontado la descripción de las supersoluciones que presentan los modelos con espacio interno unidimensional, no ha sido mencionado si el concepto de kink puede ser trasladado a este ámbito, originando la noción de *superkink*. Con este propósito introducimos un segundo procedimiento para derivar las supersoluciones. La variable bosónica puede ser escrita especificando su cuerpo y alma

$$\phi(x) = \phi_B(x) + q(x) \chi_+^0 \chi_-^0$$

donde hemos elegido χ_+^0 y χ_-^0 como los generadores constantes del álgebra de Grassmann y $\phi_B(x)$, $q(x)$ son magnitudes ordinarias. La integral primera sometida a dicha expansión presenta la forma $I_1 = I_1^B + I_1^F \chi_+^0 \chi_-^0$, donde cada uno de los sumandos viene representado por las expresiones

$$I_1^B = \frac{1}{2} \frac{d\phi_B}{dx} \frac{d\phi_B}{dx} - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi_B} \frac{\partial W}{\partial \phi_B} \quad (8.49)$$

$$I_1^F = \frac{d\phi_B}{dx} \frac{dq}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi_B} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2} q(x) - i \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2} \quad (8.50)$$

Este argumento usado con profusión en distintos trabajos [93, 70] proporciona al margen de la explicación inicial un método alternativo para recomponer la solución $\phi(x)$ de carácter par. Concluimos de manera sencilla que el cuerpo $\phi_B(x)$ puede ser obtenido según la relación

$$x - x_0 = \int \frac{d\phi_B}{\sqrt{2I_1^B + \frac{\partial W}{\partial \phi_B} \frac{\partial W}{\partial \phi_B}}}$$

mientras que el alma es determinada por el comportamiento de $q(x)$,

$$q(x) = \frac{\partial_x q(0)}{\partial_x \phi_B(0)} \frac{d\phi_B(x)}{dx} + \frac{d\phi_B(x)}{dx} \int_0^x dx' \frac{I_1^F + i \frac{\partial^2 W[\phi_B]}{\partial \phi_B^2}}{2I_1^B + \frac{\partial W}{\partial \phi_B} \frac{\partial W}{\partial \phi_B}} \quad (8.51)$$

como puede ser comprobado de forma directa al llevar esta expresión (8.51) sobre (8.50). Han sido introducidos dos caminos distintos en la búsqueda de supersoluciones dado que cada uno de ellos presenta virtudes diferentes. Mientras el primero presenta una elegancia inherente, el segundo permite una comparación directa con la teoría clásica sin grados fermiónicos. Bajo esta identificación es claro que las supersoluciones de tipo kink deben asumir un cuerpo gobernado por las ecuaciones (1.60),

$$\frac{d\phi_B}{dx} \pm \frac{\partial W}{\partial \phi_B} = 0$$

que respeta las condiciones asintóticas (1.13) y (1.14) sobre la variable $\phi_B(x)$. Debe por ello cumplirse que $I_1^B = 0$, aun cuando no reconocemos ninguna restricción sobre el valor de I_1^F . En otras palabras la integral primera I_1 para las soluciones kinks carece de cuerpo, sólo presenta alma, que además para el presente caso, $N = 1$, debe ser proporcional a I_3 . Una de las características básicas sobre el concepto de kink correspondía a la finitud de la energía asociada a tal solución. Hemos de verificar si la generalización supersimétrica de tal concepto, el superkink, salvaguarda tal propiedad. Ello debe ser verificado de forma directa sobre la expresión

$$\begin{aligned} P_0 &= \int dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\phi_B}{dx} \frac{d\phi_B}{dx} + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi_B} \frac{\partial W}{\partial \phi_B} + \left(\frac{d\phi_B}{dx} \frac{dq}{dx} + \frac{\partial W}{\partial \phi_B} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2} q(x) \right) \chi_+^0 \chi_-^0 \right\} = \\ &= \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_B}{dx} \mp \frac{\partial W}{\partial \phi_B} \right)^2 + \frac{d\phi_B}{dx} \left(\frac{dq}{dx} \mp \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2} q(x) \right) \chi_+^0 \chi_-^0 \right\} + |T| \end{aligned}$$

lo cual puede imponer nuevas restricciones sobre la expresión del superkink, que deben ser analizadas sobre cada modelo.

8.8.1 Modelo supersimétrico ϕ^4

Abordemos el estudio del modelo ϕ^4 dentro del marco de la supersimetría. Éste presenta un superpotencial caracterizado por la siguiente función polinómica del

supercampo Φ

$$W[\Phi] = \frac{1}{3}\Phi^3 - a^2\Phi$$

el cual genera la expresión de la acción

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{i}{2}\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi - \frac{1}{2}(\phi^2 - a^2)^2 - \phi\bar{\chi}\chi \right\}$$

Los mínimos clásicos en este modelo están situados sobre los valores $\phi(x) = \pm a$, de modo que $\langle\phi\rangle = \pm a$. En el estadio cuántico, el campo $\phi(x)$ da lugar a una partícula bosónica con masa $m_B = 2\lambda a$, mientras que la partícula fermiónica adquiere una masa $m_F = 2\lambda\langle\phi\rangle = 2\lambda a$, por lo que podemos afirmar que la supersimetría es conservada.

Estudiaremos el sector topológico en el espacio de configuraciones, que debe dar cabida a las soluciones superkink. Siguiendo el esquema a la Manton [93, 70], el cuerpo de estas soluciones atiende a la ecuación

$$\frac{\partial\phi_B}{\partial x^1} = \pm(\phi_B^2 - a^2)$$

que prescribe la forma habitual de la solución clásica del kink y del antikink

$$\phi_B^{\text{TK}}(x) = a \tanh[a(x - \gamma_2)] \quad \phi_B^{\text{ATK}}(x) = -a \tanh[a(x - \gamma_2)]$$

La resolución de (8.48), que extrae los campos fermiónicos, nos permite escribir

$$\begin{aligned} \chi_+^{\text{TK}}(x) &= \chi_+^0 \operatorname{sech}^2 a(x - \gamma_2) & \chi_+^{\text{ATK}}(x) &= \chi_+^0 \cosh^2 a(x - \gamma_2) \\ \chi_-^{\text{TK}}(x) &= \chi_-^0 \cosh^2 a(x - \gamma_2) & \chi_-^{\text{ATK}}(x) &= \chi_-^0 \operatorname{sech}^2 a(x - \gamma_2) \end{aligned}$$

o bien, recuperando las componentes iniciales:

$$\begin{aligned} \chi_{1,2}^{\text{TK}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_+^0 \operatorname{sech}^2 a(x - \gamma_2) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_-^0 \cosh^2 a(x - \gamma_2) \\ \chi_{1,2}^{\text{ATK}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_+^0 \cosh^2 a(x - \gamma_2) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_-^0 \operatorname{sech}^2 a(x - \gamma_2) \end{aligned}$$

Estos resultados trasladados sobre la relación (8.46) proporcionan el valor de las integrales primeras de tipo grassmanniano del sistema mecánico asociado, debidas a las supersimetrías de la teoría estática. Se tiene

$$\begin{aligned} Q_1^{\text{est}}(\text{TK}) &= \sqrt{2}a^2\chi_-^0 & Q_1^{\text{est}}(\text{ATK}) &= -\sqrt{2}a^2\chi_+^0 \\ Q_2^{\text{est}}(\text{TK}) &= -\sqrt{2}a^2\chi_-^0 & Q_2^{\text{est}}(\text{ATK}) &= -\sqrt{2}a^2\chi_+^0 \end{aligned}$$

de tal forma que se tiene el cumplimiento de $Q_1^{\text{est}}Q_1^{\text{est}} = Q_2^{\text{est}}Q_2^{\text{est}} = 0$ para cualquiera de las soluciones tratadas. Las supercargas (8.42), que aparecen en la teoría de

campos como una integración a lo largo de todo el espacio, quedan fijadas por los valores

$$Q_1^{\text{TK}} = -\frac{2}{3}a^2\chi_+^0 \quad Q_2^{\text{TK}} = \frac{2}{3}a^2\chi_+^0 \quad Q_1^{\text{ATK}} = \frac{2}{3}a^2\chi_-^0 \quad Q_2^{\text{ATK}} = \frac{2}{3}a^2\chi_-^0$$

Finalmente, puede obtenerse de forma sencilla la expresión de la variable $q(x)$ usando (8.50), siendo ésta

$$q(x) = \pm C \operatorname{sech}^2 a\bar{x} + \frac{i}{2a^2} \cosh^2 a\bar{x} - \frac{I_1^F}{32a^3} (3a\bar{x} \operatorname{sech}^2 a\bar{x} + \cosh^2 a\bar{x} \tanh a\bar{x})$$

donde $\bar{x} = x - \gamma_2$ y C es una constante de integración. Por construcción la solución superkink en la teoría de campos posee una energía cuyo cuerpo es número real finito. Ninguna restricción es aplicada sobre el alma de dicha magnitud en principio. Sin embargo, por extensión acuñaremos en lo que sigue el término *superkink* para aquellas soluciones que preserven la finitud del alma de la energía. Con este propósito hemos de imponer la condición $I_1^F = 0$ sobre la expresión de $q(x)$. La expresión del superkink clásico queda determinado, entonces, como:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{TK}}(x) &= a \tanh a(x - \gamma_2) + [C \operatorname{sech}^2 a(x - \gamma_2) + \frac{i}{2a^2} \cosh^2 a(x - \gamma_2)] \chi_+^0 \chi_-^0 \\ \chi_+^{\text{TK}}(x) &= \chi_+^0 \operatorname{sech}^2 a(x - \gamma_2) \quad \chi_-^{\text{TK}}(x) = \chi_-^0 \cosh^2 a(x - \gamma_2) \end{aligned}$$

Esta expresión del superkink clásico implica la anulación de la parte nilpotente de la energía. La masa clásica del superkink corresponde al valor $M_{\text{STK}} = \frac{4}{3}\lambda a^3$.

8.9 SuperSoluciones en $N = 2$

Como ya advirtiera Rajaraman [114], el aumento del número de grados de libertad del espacio interno en una teoría de campos impide en general la obtención de las soluciones kinks. Esta dificultad es inherente al proceso de incremento dimensional del espacio interno y es multiplicada cuando es insuflada la estructura supersimétrica. Como es habitual en el presente texto, nuestro análisis queda restringido a sistemas físicos supersimétricos que incorporan dos grados de libertad bosónicos $\phi^i(x^\mu)$ ($i = 1, 2$), de forma que aparecen asociadas cuatro componentes fermiónicas o grassmannianas χ_α^i ($i, \alpha = 1, 2$). La identificación de la variedad de kinks en los modelos de Liouville fue viable por el carácter de completa integrabilidad del modelo mecánico asociado, el cual era apuntado por la presencia de dos integrales primeras en involución. El conjunto de estas dos magnitudes configuraban un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas resoluble mediante un cambio de variables adecuado. Con estos precedentes la búsqueda de la extensión supersimétrica de las integrales primeras de los modelos mecánicos realizada

en el capítulo 6 resultaba ineludible. En esta sección se pretende obtener la expresión de alguna solución superkink atribuida a modelos de SuperLiouville, aplicando técnicas a la Manton. La complejidad de las expresiones implicadas conlleva la obtención muy limitada de soluciones. Estas nociones serán ilustradas empleando el modelo III[1][11]. Otras consideraciones serán tomadas en cuenta sobre los modelos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos. La siguiente tabla ilustra el estado en la identificación de las integrales presentes en cada uno de los casos:

		Mod. Liouville			$\mathcal{N} = 2$ SUSY		
Grad. bosónic.	Grad. fermiónic.	Cargas bosónic.	Super-cargas	Otras cargas	Cargas bosónic.	Super-cargas	Otras cargas
ϕ^1	χ_1^1, χ_2^1	I_1	Q_1, Q_2	I_3	I_1	Q_1, Q_2	I_3
ϕ^2	χ_1^2, χ_2^2	I_2	\times	\times	\times	Q_3, Q_4	\times

En los modelos de SuperLiouville quedaron identificadas dos integrales primeras de carácter bosónico, junto a las dos supercargas de naturaleza fermiónico; mientras que para los modelos $\mathcal{N} = 2$ supersimétricos aparecían cuatro supercargas y de manera genérica sólo encontramos una integral primera bosónica. Siempre hemos de considerar la presencia del invariante I_3 .

8.9.1 Modelos de SuperLiouville de tipo IV

A pesar de la dificultad que entraña la obtención de supersoluciones para modelos con mundo interno de un número de grados de libertad mayor a la unidad, existe un abánico de sistemas conformado por los modelos de SuperLiouville de tipo IV, en que ello es posible sin dificultad. El fundamento de tal comportamiento viene basado en la ausencia de acoplamiento en los campos convirtiendo el modelo en dos copias independientes del problema con $N = 1$. Como ejemplo consideremos aquel sistema físico gobernado por la presencia del superpotencial

$$W[\Phi^1, \Phi^2] = \frac{1}{3} \Phi_1^3 - a_1^2 \Phi_1 + \frac{1}{3} \Phi_2^3 - a_2^2 \Phi_2$$

lo que proporciona la acción

$$S = \int d^2x \sum_{j=1}^2 \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^j \partial^\mu \phi^j + \frac{i}{2} \bar{\chi}^j \gamma^\mu \chi^j - \frac{1}{2} (\phi_j^2 - a_j^2)^2 - \phi_j \bar{\chi}^j \chi^j \right]$$

El sector bosónico de la teoría presenta cuatro mínimos asentados sobre los puntos del espacio interno $v^1 \equiv \phi(x) = (a_1, a_2)$, $v^2 \equiv \phi(x) = (-a_1, a_2)$, $v^3 \equiv \phi(x) = (-a_1, -a_2)$ y $v^4 \equiv \phi(x) = (a_1, -a_2)$. El modelo presenta dieciséis sectores topológicos. Los campos ϕ_j describen partículas bosónicas de masa $m_j^B = 2a_j$, mientras que sus compañeros supersimétricos adquieren una masa $m_j^F = 2 \langle \phi_j \rangle = 2a_j$.

Las soluciones kinks identificadas en el capítulo 4 para el sector bosónico del modelo conservan este status en el nuevo marco bajo la imposición de que los grados fermiónicos sean nulos $\chi_\alpha^j(x) = 0$, de tal modo que quedarían agrupadas en los siguientes términos

1. *Grupo 1*: Soluciones no topológicas ($v^j \leftrightarrow v^j$), de modo que $|T| = 0$. Se tiene,

$$\phi_j(x) = \pm a_j; \quad \chi_\alpha^j(x) = 0$$

donde los signos pueden ser conjugados arbitrariamente.

2. *Grupo 2*: Soluciones con la segunda componente constante ($v^1 \leftrightarrow v^2$ y $v^3 \leftrightarrow v^4$) con $|T| = \frac{4}{3}a_1^3$, Entonces:

$$\phi_1(x) = \pm a_1 \tanh[\sqrt{2}(x + x_0)]; \quad \phi_2(x) = a_2; \quad \chi_\alpha^j(x) = 0$$

3. *Grupo 3*: Soluciones con la primera componente constante ($v^1 \leftrightarrow v^3$ y $v^2 \leftrightarrow v^4$) siendo $|T| = \frac{4}{3}a_2^3$. Será

$$\phi_1(x) = a_1; \quad \phi_2(x) = \pm a_2 \tanh[\sqrt{2}(x + x_0)]; \quad \chi_\alpha^j(x) = 0$$

4. *Grupo 4*: Soluciones que conectan los vacíos $v^1 \leftrightarrow v^4$ con $|T| = \frac{4}{3}a_1^3 + \frac{4}{3}a_2^3$,

$$\phi_1(x) = \pm a_1 \tanh[\sqrt{2}(x + x_1)]; \quad \phi_2(x) = \pm a_2 \tanh[\sqrt{2}(x + x_2)]; \quad \chi_\alpha^j(x) = 0$$

5. *Grupo 5*: Soluciones que enlazan $v^2 \leftrightarrow v^3$, siendo $|T| = \frac{4}{3}a_1^3 + \frac{4}{3}a_2^3$. Se tiene:

$$\phi_1(x) = \pm a_1 \tanh[\sqrt{2}(x + x_1)]; \quad \phi_2(x) = \mp a_2 \tanh[\sqrt{2}(x + x_2)]; \quad \chi_\alpha^j(x) = 0$$

Otro aspecto importante es que dada la elección del superpotencial $W(\phi)$ sólo parte de las soluciones enunciadas con anterioridad verifican las ecuaciones (1.60) y por tanto sólo éstas pueden interpretarse como estados BPS. En el presente caso se trata de las soluciones introducidas en los grupos 1, 2, 3 y 4 exhibidos anteriormente.

La representación de las variables fermiónicas clásicamente mediante la expansión en generadores de un álgebra de Grassmann permite encontrar soluciones más generales a las consideradas arriba. Sobre los modelos con dos grados de libertad internos usaremos un álgebra de Grassmann con cuatro generadores ζ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) como consecuencia de la presencia de cuatro componentes fermiónicas en la teoría. Dado los resultados obtenidos en los estudios del superkink en el espacio interno unidimensional podemos escribir la extensión supersimétrica de las soluciones mencionadas. Entonces, los superkinks para este modelo son

$$\phi^1(x) = a_1 \tanh a_1(x - x_1) + [C_1 \operatorname{sech}^2(x - x_1) + \frac{i}{2a_1^2} \cosh a_1(x - x_1)]\zeta_1\zeta_2$$

$$\chi_+^1 = \zeta_1 \operatorname{sech}^2 a_1(x - x_1) \quad \chi_-^1 = \zeta_2 \cosh^2 a_1(x - x_1)$$

$$\phi^2(x) = a_2 \tanh a_2(x - x_2) + [C_2 \operatorname{sech}^2(x - x_2) + \frac{i}{2a_2^2} \cosh a_2(x - x_2)]\zeta_3\zeta_4$$

$$\chi_+^2 = \zeta_3 \operatorname{sech}^2 a_2(x - x_2) \quad \chi_-^2 = \zeta_4 \cosh^2 a_2(x - x_2)$$

8.9.2 Modelos de SuperLiouville de tipo III

En esta sección estudiaremos la posibilidad de obtener la generalización supersimétrica de la solución kink en los modelos de Liouville de tipo III, ilustrados mediante el modelo III[1][11]. Es directo advertir que las soluciones de tipo kink obtenidas en el capítulo 3 aparecen de forma intacta en el nuevo marco eligiendo que los grados fermiónicos sean nulos. Tomaremos en consideración el marco supersimétrico del modelo III[1][11] generado por la designación de $W^{(1)}(\phi_1, \phi_2)$ como superpotencial. En este caso los kinks con carácter BPS vienen constituidos por aquellos que verifican las ecuaciones de primer orden (1.60) para $W^{(1)}(\phi_1, \phi_2)$, lo que en particular apunta a la familia de soluciones **TKB**(γ_1) junto con las soluciones singulares. Con el propósito de encontrar superkinks con grados fermiónicos no triviales consideraremos la expansión de las componentes de las variables de la teoría respecto de los generadores ζ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) de un álgebra de Grassmann

$$\begin{aligned}\phi^a(x) &= \phi_B^a + q_{jk}^a \zeta_j \zeta_k + r^a \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \\ \chi_+^a(x) &= A_j^{a,1} \zeta_j + B_{jkl}^{a,1} \zeta_j \zeta_k \zeta_l \\ \chi_-^a(x) &= A_j^{a,2} \zeta_j + B_{jkl}^{a,2} \zeta_j \zeta_k \zeta_l\end{aligned}\tag{8.52}$$

donde las magnitudes q_{jk}^a y $B_{jkl}^{a,\alpha}$ son antisimétricas en los subíndices. La recomposición de la solución superkink es establecida identificando las magnitudes $\phi_B^a(x)$, $q_{jk}^a(x)$, $r^a(x)$, $A_j^{a,\alpha}$ y $B_{jkl}^{a,\alpha}$ mediante el uso de las ecuaciones de primer orden (8.40) y (8.41) asociados a los grados fermiónicos, junto con las integrales primeras de carácter bosónico constituidas por la energía mecánica asociada (8.43) y el momento angular generalizado asociado I_2 , el cual puede ser traducido a la teoría de campos desde el invariante calculado en el capítulo 7, como

$$\begin{aligned}I_2 &= \left[\phi^1 \frac{d\phi^2}{dx} - \phi^2 \frac{d\phi^1}{dx} \right] \frac{d\phi^2}{dx} - \left[\phi^1 \frac{dW}{d\phi^2} - \phi^2 \frac{dW}{d\phi^1} \right] \frac{dW}{d\phi^2} + \\ &+ i \frac{d\phi^2}{dx} (\chi_1^1 \chi_1^2 - \chi_2^1 \chi_2^2) - i \phi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} \chi_1^1 \chi_2^1 - i \phi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2 \partial \phi^2} (\chi_1^1 \chi_2^2 + \chi_1^2 \chi_2^1) + \\ &+ i \left[2\phi^1 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2 \partial \phi^2} - \phi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} - \frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right] \chi_1^2 \chi_2^2\end{aligned}$$

Los desarrollos sobre los generadores constantes grassmannianos de las integrales primeras proporcionan

$$I_A = I_A^B + 2I_{A,jk}^{(2)} \zeta_j \zeta_k + I_A^{(4)} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \quad A = 1, 2$$

con $j < k$. La constancia de estas magnitudes obliga a que las componentes surgidas adopten esta misma característica. Desde este punto de partida el cuerpo de la variable $\phi(x)$ se ve sometida a las mismas condiciones que las surgidas en ausencia de

grados fermiónicos, lo cual nos permite aplicar el trabajo de capítulos precedentes. Una vez identificada el cuerpo de la supersolución podemos obtener la forma de las variables $A_j^{a,\alpha}$, empleando los términos que introducen un sólo generador en el desarrollo de (8.40) y (8.41), lo que nos proporciona las relaciones

$$\frac{dA_j^{a,\alpha}}{dx} = (-1)^\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b} A_j^{b,\alpha}$$

donde $\frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b}$ debe ser interpretado como la correspondiente derivada valorada sobre la magnitud cuerpo $\phi_B(x)$. Tomaremos este convenio sobre cualquier orden de las derivadas parciales. Tras dicho proceso, el uso de la constancia de las magnitudes $I_{A,ij}^2$ proporciona los requisitos

$$\begin{aligned} I_{1,jk}^{(2)} &= \frac{dq_{jk}^a}{dx} \frac{d\phi_B^a}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi_B^a} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b} q_{jk}^b - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b} A_{[j}^{a,1} A_{k]}^{b,2} \\ I_{2,jk}^{(2)} &= \left(\phi_B^1 \frac{d\phi_B^2}{dx} - \phi_B^2 \frac{d\phi_B^1}{dx} \right) \frac{dq_{jk}^2}{dx} + \left(\phi_B^1 \frac{dq_{jk}^2}{dx} - \phi_B^2 \frac{dq_{jk}^1}{dx} \right) \frac{d\phi_B^2}{dx} - \\ &- \frac{\partial W}{\partial \phi_B^2} \left(\phi_B^1 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^b} q_{jk}^b - \phi_B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^b} q_{jk}^b + \frac{\partial W}{\partial \phi_B^2} q_{jk}^1 - \frac{\partial W}{\partial \phi_B^1} q_{jk}^2 \right) - \\ &- \left(\phi_B^1 \frac{\partial W}{\partial \phi_B^2} - \phi_B^2 \frac{\partial W}{\partial \phi_B^1} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^b} q_{jk}^b + \frac{i}{2} \left(\frac{d\phi_B^2}{dx} + \phi_B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2} \right) A_{[j}^{11} A_{k]}^{22} + \\ &+ \frac{i}{2} \left(\frac{d\phi_B^2}{dx} - \phi_B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2} \right) A_{[j}^{12} A_{k]}^{21} - \frac{i}{2} \phi_B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^2} A_{[j}^{12} A_{k]}^{11} + \\ &+ \frac{i}{2} \left(2\phi_B^1 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2} - \phi_B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^2} - \frac{\partial W}{\partial \phi_B^1} \right) A_{[j}^{22} A_{k]}^{21} \end{aligned}$$

los cuales permiten obtener las componentes q_{jk}^a . Tras este cómputo las relaciones obtenidas del desarrollo de (8.40) y (8.41) dependientes de productos de tres generadores grassmannianos permitirán obtener las magnitudes $B_{jkl}^{a,\alpha}$. Para ello deben ser resueltas las ecuaciones

$$\frac{dB_{jkl}^{a,\alpha}}{dx} = (-1)^\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b} B_{jkl}^{b,\alpha} + \frac{(-1)^\alpha}{6} \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b \partial \phi_B^c} q_{[jk}^b A_{l]}^{c,\alpha}$$

donde por convenio $j < k < l$. Finalmente hay que utilizar el desarrollo de las integrales primeras a los ordenes más altos de los generadores para encontrar las ecuaciones que determinarán las variables $r^a(x)$. En este caso se tiene el cumplimiento del sistema de ecuaciones de primer orden acopladas

$$\begin{aligned} I_1^{(4)} &= \frac{d\phi_B^a}{dx} \frac{dr^a}{dx} + \frac{1}{2} \epsilon^{jkr s} \frac{dq_{jk}^a}{dx} \frac{dq_{rs}^a}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi_B^a} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b} r^b + \epsilon^{jkr s} q_{jk}^b q_{rs}^c \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b \partial \phi_B^c} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \epsilon^{jkr s} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^c} q_{jk}^b q_{rs}^c - i \epsilon^{jkr s} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b} \left(A_j^{a,1} B_{kr s}^{b,2} + A_s^{b,2} B_{jkr}^{a,1} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - i\epsilon^{jkr s} \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_B^a \partial \phi_B^b \partial \phi_B^c} q_{jk}^a A_r^{b,1} A_s^{c,2} \\
I_2^{(4)} = & \left(\phi_B^1 \frac{d\phi_B^2}{dx} - \phi_B^2 \frac{d\phi_B^1}{dx} \right) \frac{dr^2}{dx} + (\phi_B^1 r^2 - \phi_B^2 r^1) \frac{d\phi_B^2}{dx} + \\
& + \epsilon^{jkr s} \left[\frac{d\phi_B^2}{dx} \left(q_{jk}^1 \frac{dq_{rs}^2}{dx} - q_{jk}^2 \frac{dq_{rs}^1}{dx} \right) + \frac{dq_{jk}^2}{dx} \left(\phi_B^1 \frac{dq_{rs}^2}{dx} - \phi_B^2 \frac{dq_{rs}^1}{dx} \right) \right] - \\
& - \left(\phi_B^1 \frac{\partial W}{\partial \phi_B^2} - \phi_B^2 \frac{\partial W}{\partial \phi_B^1} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^b} r^b + \epsilon^{jkr s} q_{jk}^b q_{rs}^c \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^b \partial \phi_B^c} \right) - \\
& - \epsilon^{jkr s} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^b} q_{rs}^b \left(\phi_B^1 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^b} q_{jk}^b - \phi_B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^b} q_{jk}^b + q_{jk}^1 \frac{\partial W}{\partial \phi_B^2} - q_{jk}^2 \frac{\partial W}{\partial \phi_B^1} \right) - \\
& - \phi_B^1 \frac{\partial W}{\partial \phi_B^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^b} r^b + \epsilon^{jkr s} q_{jk}^b q_{rs}^c \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^b \partial \phi_B^c} \right) - r^1 \frac{\partial W}{\partial \phi_B^2} \frac{\partial W}{\partial \phi_B^2} + \\
& + \phi_B^2 \frac{\partial W}{\partial \phi_B^1} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^b} r^b + \epsilon^{jkr s} q_{jk}^b q_{rs}^c \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^b \partial \phi_B^c} \right) + r^2 \frac{\partial W}{\partial \phi_B^1} \frac{\partial W}{\partial \phi_B^2} - \\
& - \epsilon^{jkr s} \frac{\partial W}{\partial \phi_B^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^b} q_{jk}^1 q_{rs}^b + \epsilon^{jkr s} \frac{\partial W}{\partial \phi_B^1} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^b} q_{jk}^2 q_{rs}^b + \\
& + i\epsilon^{jkr s} \left(\frac{d\phi_B^2}{dx} + \phi_B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2} \right) (A_j^{1,1} B_{krs}^{2,2} + A_s^{2,2} B_{jkr}^{1,1}) + \\
& + i\epsilon^{jkr s} \left(\frac{dq_{jk}^2}{dx} + \phi_B^2 q_{jk}^a \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2 \partial \phi_B^a} + q_{jk}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2} \right) A_r^{1,1} A_s^{2,2} + \\
& + i\epsilon^{jkr s} \left(\frac{d\phi_B^2}{dx} - \phi_B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2} \right) (A_j^{1,2} B_{krs}^{2,1} + A_s^{2,1} B_{jkr}^{1,2}) + \\
& + i\epsilon^{jkr s} \left(\frac{dq_{jk}^2}{dx} - \phi_B^2 q_{jk}^a \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2 \partial \phi_B^a} - q_{jk}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2} \right) A_r^{1,2} A_s^{2,1} - \\
& - i\epsilon^{jkr s} \phi_B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^2} (A_j^{1,2} B_{krs}^{1,1} + A_s^{1,1} B_{jkr}^{1,2}) - \\
& - i\epsilon^{jkr s} \left(\phi_B^2 q_{jk}^a \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^2 \partial \phi_B^a} + q_{jk}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^2} \right) (A_r^{1,2} A_s^{1,1} + A_r^{2,2} A_s^{2,1}) + \\
& + i\epsilon^{jkr s} \left(2\phi_B^1 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2} - \frac{\partial W}{\partial \phi_B^1} - \phi_B^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^2} \right) (A_j^{2,2} B_{krs}^{2,1} + A_s^{2,1} B_{jkr}^{2,2}) + \\
& + i\epsilon^{jkr s} \left(2\phi_B^1 q_{jk}^a \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2 \partial \phi_B^a} + 2q_{jk}^1 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^2 \partial \phi_B^2} - q_{jk}^a \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_B^1 \partial \phi_B^a} \right) A_r^{2,2} A_s^{2,1}
\end{aligned}$$

No pasa desapercibida la complejidad de cálculo que supone construir la extensión supersimétrica del kink, habida cuenta de las expresiones presentadas. Consecuentemente elegiremos un caso relativamente sencillo para ilustrar el método. En particular abordaremos la extensión de la solución (3.22). Aplicando la metodología descrita podemos encontrar el candidato a superkink

$$\phi^1(x) = \frac{1}{2} \tanh \tilde{x} + \left[d_{jk}^1 \operatorname{sech}^2 \tilde{x} + \frac{i c_{jk}}{8\sqrt{2}} \cosh^2 \tilde{x} \right] \zeta_j \zeta_k -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4\sqrt{2}} \epsilon^{jkr s} c_{rs} \left[i d_{jk}^1 + \frac{5}{64\sqrt{2}} c_{jk} \right] \tilde{x} \operatorname{sech}^2 \tilde{x} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \epsilon^{jkr s} c_{rs} \left[i d_{jk}^1 - \frac{5\sqrt{2}}{384} c_{jk} \right] \tanh \tilde{x} \cosh^2 \tilde{x} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 - \\
& - \frac{1}{4\sqrt{2}} \epsilon^{jkr s} c_{rs} \left[i d_{jk}^1 + \frac{5\sqrt{2}}{128} c_{jk} \right] \tanh \tilde{x} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 - \\
& - \frac{1}{192} \epsilon^{jkr s} c_{jk} c_{rs} \cosh^4 \tilde{x} \tanh \tilde{x} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 + e \operatorname{sech}^2 \tilde{x} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \\
& + \frac{i}{8\sqrt{2}} \epsilon^{jkr s} (4c_j^{11} f_{krs}^{12} + 4c_s^{12} f_{jkr}^{11} + c_j^{21} f_{krs}^{22} + c_s^{22} f_{jkr}^{21}) \cosh^2 \tilde{x} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4
\end{aligned}$$

$$\phi^2(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
\chi_+^1(x) &= c_j^{11} \operatorname{sech}^2 \tilde{x} \zeta_j - \frac{i}{24\sqrt{2}} c_{[jk} c_{l]}^{11} \tilde{x} \operatorname{sech}^2 \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l + f_{jkl}^{11} \operatorname{sech}^2 \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l - \\
& - \frac{2}{3} d_{[jk}^1 c_{l]}^{11} \tanh \tilde{x} \operatorname{sech}^2 \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l - \frac{i}{24\sqrt{2}} c_{[jk} c_{l]}^{11} \tanh \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_-^1(x) &= c_j^{12} \cosh^2 \tilde{x} \zeta_j + \frac{i}{24\sqrt{2}} c_{[jk} c_{l]}^{12} \tilde{x} \cosh^2 \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l + f_{jkl}^{12} \cosh^2 \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l + \\
& + \frac{2}{3} d_{[jk}^1 c_{l]}^{12} \cosh^2 \tilde{x} \tanh \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l + \frac{i}{24\sqrt{2}} c_{[jk} c_{l]}^{12} \cosh^4 \tilde{x} \tanh \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_+^2(x) &= c_j^{21} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} \tilde{x} \zeta_j - \frac{i}{96\sqrt{2}} c_{[jk} c_{l]}^{21} \tilde{x} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l + f_{jkl}^{21} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l - \\
& - \frac{1}{6} d_{[jk}^1 c_{l]}^{21} \tanh \tilde{x} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l - \frac{i}{96\sqrt{2}} c_{[jk} c_{l]}^{21} \cosh^{\frac{3}{2}} \tilde{x} \tanh \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_-^2(x) &= c_j^{22} \cosh^{\frac{1}{2}} \tilde{x} \zeta_j + \frac{i}{96\sqrt{2}} c_{[jk} c_{l]}^{22} \tilde{x} \cosh^{\frac{1}{2}} \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l + f_{jkl}^{22} \cosh^{\frac{1}{2}} \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l + \\
& + \frac{1}{6} d_{[jk}^1 c_{l]}^{22} \tanh \tilde{x} \cosh^{\frac{1}{2}} \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l + \frac{i}{96\sqrt{2}} c_{[jk} c_{l]}^{22} \cosh^{\frac{5}{2}} \tilde{x} \tanh \tilde{x} \zeta_j \zeta_k \zeta_l
\end{aligned}$$

donde ha sido adoptado el convenio de $j_1 < j_2 < \dots < j_n$ para los distintos productos de los generadores grassmannianos $\zeta_{j_1} \zeta_{j_2} \dots \zeta_{j_n}$. Las constantes de integración son c_j^{kl} , d_{jk}^l , f_{ijk}^{nm} y e . Además, por simplicidad en la escritura se han introducido las magnitudes $c_{jk} = \frac{1}{2} \left(4c_{[j}^{11} c_{k]}^{12} + c_{[j}^{21} c_{k]}^{22} \right)$ y $\tilde{x} = 2\sqrt{2}(x - x_0)$. El valor de las integrales primeras asociadas sobre la supersolución mostrada viene determinado como $I_1 = 0$ y $I_2 = ic_{[j}^{22} c_{k]}^{21} \zeta_j \zeta_k + i\sqrt{2} \epsilon^{jkr s} (c_j^{22} f_{krs}^{21} + c_s^{21} f_{jkr}^{22}) \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4$. Sobre la noción de superkink agregamos la finitud de la energía surgida en la teoría de campos. La expansión de esta magnitud arroja la forma $P_0 = P_0^B + P_0^{(1)} \zeta_j \zeta_k + P_0^{(2)} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4$, siendo

$$P_0^B = \int dx \left(\frac{1}{2} \frac{d\phi^a}{dx} \frac{d\phi^a}{dx} + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \right)$$

$$\begin{aligned}
P_0^{(1)}{}_{jk} &= \int dx \left(\frac{dq_{jk}^a}{dx} \frac{d\phi^a}{dx} + \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b} q_{jk}^b \right) \\
P_0^{(2)} &= \int dx \left(\frac{dr^a}{dx} \frac{d\phi^a}{dx} + \frac{1}{2} \epsilon^{jkr s} \frac{dq_{jk}^a}{dx} \frac{dq_{rs}^a}{dx} + \frac{1}{2} \epsilon^{jkr s} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^c} q_{jk}^b q_{rs}^c + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial W}{\partial \phi^a} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b} r^b + \epsilon^{jkr s} \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^a \partial \phi^b \partial \phi^c} q_{jk}^b q_{rs}^c \right] \right)
\end{aligned}$$

Por construcción el cuerpo de la energía permanecerá finita, sin embargo deberemos imponer nuevas restricciones sobre la supersolución encontrada para que el alma de la energía sea una cantidad acotada. Al insertar ésta sobre la expresión de las componentes energéticas obtenemos la nulidad de la $P_0^{(1)}{}_{jk}$ y la necesidad de requerir la condición $\epsilon^{jkr s} c_{jk} c_{rs} = 0$ para que $P_0^{(2)}$ permanezca finita. El superkink vendrá determinado por

$$\begin{aligned}
\phi^1(x) &= \frac{1}{2} \tanh \tilde{x} + \left[d_{jk}^1 \operatorname{sech}^2 \tilde{x} + \frac{i c_{jk}}{8\sqrt{2}} \cosh^2 \tilde{x} \right] \zeta_j \zeta_k + \left[-\frac{i}{4\sqrt{2}} \epsilon^{jkr s} c_{rs} d_{jk}^1 \tanh \tilde{x} + \right. \\
&\quad + \frac{i}{8\sqrt{2}} \epsilon^{jkr s} (4c_j^{11} f_{kr}^{12} + 4c_s^{12} f_{jk}^{11} + c_j^{21} f_{kr}^{22} + c_s^{22} f_{jk}^{21}) \cosh^2 \tilde{x} + e \operatorname{sech}^2 \tilde{x} - \\
&\quad \left. - \frac{i}{4\sqrt{2}} \epsilon^{jkr s} c_{rs} d_{jk}^1 \tilde{x} \operatorname{sech}^2 \tilde{x} + \frac{i}{2\sqrt{2}} \epsilon^{jkr s} c_{rs} d_{jk}^1 \tanh \tilde{x} \cosh^2 \tilde{x} \right] \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4
\end{aligned}$$

donde el resto de variables permanece inalterada con respecto a la supersolución mencionada anteriormente. La energía total asociada a esta expresión es

$$P_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \epsilon^{jkr s} d_{jk}^1 \left(\frac{32\sqrt{2}}{5} d_{rs}^1 + i c_{rs} \right) \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4$$

La aplicación del método sobre otro tipo de soluciones es posible aunque de forma general la incapacidad de resolver sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas impide encontrar la solución buscada. En los casos casos más benévolos es, sin embargo, la intrincada expresión de la solución la que inhabilita su exposición.

8.9.3 Modelos $\mathcal{N} = 2$ Supersimétricos

El estudio realizado en las secciones precedentes nos ofreció la siguiente derivación: La dinámica en el sector bosónico de una teoría $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica viene determinada por un superpotencial holomorfo; recuérdese el primer sistema analizado en el capítulo 5. Como allí, podemos partir, bien de la parte real, bien de la parte imaginaria de dicho superpotencial, pues las ecuaciones de Cauchy-Riemann garantizan que obtenemos la misma acción. Si denotamos como entonces por $W_A(\phi^1, \phi^2)$, $A = 1, 2$, respectivamente a la parte real y a la imaginaria, $W(\phi) = W_1 + iW_2$, $\phi = \phi^1 + i\phi^2$, la extensión supersimétrica asociada a cada una de las componentes

mencionadas incluye los grados fermiónicos descritos por los campos χ_A ($A = 1, 2$), donde con el índice introducido ha de distinguir las teorías surgidas sobre cada una de las ellas. Es obvio que pueden construirse los siguientes lagrangianos

$$\mathcal{L}_{W_A}(\phi, \chi_A) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{i}{2} \bar{\chi}_A^a \gamma^\mu \partial_\mu \chi_A^a - \frac{1}{2} \frac{\partial W_A}{\partial \phi^a} \frac{\partial W_A}{\partial \phi^a} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_A}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \bar{\chi}_A^a (f_{B=1})^b{}_c \chi_A^c$$

donde el índice A está fijado por la componente usada. Las teorías supersimétricas generadas sobre cada componente no son idénticas pero aún así se manifiestan estrechamente relacionadas. La estructura cuasi-compleja se presenta como puente entre estas dos posibilidades dado que erigiendo los lagrangianos asociados a una componente sobre la expresión de la otra, se observa que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W_A}(\phi, \chi_A) &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{1}{2} i \bar{\chi}_A^a \gamma^\mu \partial_\mu \chi_A^a - \frac{1}{2} |\epsilon^{AC}| |\epsilon^{AD}| \frac{\partial W_C}{\partial \phi^a} \frac{\partial W_D}{\partial \phi^a} - \\ &- \frac{1}{2} |\epsilon^{AC}| \frac{\partial^2 W_C}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \bar{\chi}_A^a (f_{B=2})^b{}_c \chi_A^c \end{aligned}$$

donde el valor del índice A es fijo.

El cálculo de las soluciones de tipo superkink es en este caso un problema complejo de resolver dada la ausencia de las integrales primeras de carácter bosónico. Sin embargo, a tal respecto debemos hacer una importante reseña respecto de las soluciones de tipo superkink que carecen de extensión supersimétrica, esto es, de alma en su expresión. En tales circunstancias, el problema ya fue expuesto en el capítulo 4 al tratar los modelos presupersimétricos que presentaban un superpotencial armónico. Como resultado se encontró la presencia de soluciones que enlazaban cada uno de los vacíos de la teoría cuyas trayectorias resultaban ser rectas en el plano de líneas isoperpotenciales. Es conveniente discernir el modo en que estas soluciones allí mostradas se amoldan a la nueva estructura. Debido a que el sistema físico es generado a partir de un superpotencial particular, aún cuando las soluciones kinks descritas mantienen esta idiosincrasia en la estructura supersimétrica, sólo algunas de ellas corresponden a estados BPS. Éstas verifican las condiciones exhibidas en la tabla 7.1. de modo que vienen descritas como aquellas soluciones con trayectoria ya no sólo rectilínea entre puntos de vacío, sino que tengan bien abscisa u ordenada igual a constante.

Conclusiones

Las conclusiones más importantes que han sido alcanzadas tras la realización de este trabajo son las siguientes:

1. Identificación, clasificación y descripción de la variedad de kinks presente en los modelos enmarcados en las teorías de campos escalares de dos componentes que llevan asociado un sistema mecánico de Liouville, mediante la resolución de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi correspondientes. Se desvela la estructura general de este tipo de modelos.

2. Demostración de las reglas de suma que verifican las energías de cada familia de kinks calculada. Análisis de la estabilidad de cada tipo de kink por medio del estudio del espectro del operador hessiano asociado y de la aplicación de la Teoría de Morse de kinks.

3. Demostración de que los modelos de Liouville poseen un carácter presupersimétrico, presentando cuatro superpotenciales diferentes, cuyas ecuaciones de primer orden asociadas generan la variedad de kinks al completo.

4. Estudio de los modelos presupersimétricos con superpotencial armónico. Se prueba que admiten una familia uniparamétrica de superpotenciales, que proporcionan infinitos sistemas no equivalentes de ecuaciones de primer orden. Se clasifican y describen los kinks presentes en los modelos de Gibbons y Townsend generalizados.

5. Análisis del modelo BNRT como paradigma del comportamiento general de los modelos presupersimétricos. Se identifica una familia de kinks asociada a las ecuaciones de primer orden del superpotencial que caracteriza al modelo, y se distinguen, dentro de los valores posibles de la constante de acoplamiento, aquellos para los cuales el operador hessiano posee un modo cero ortogonal, lo cual implica, por la aplicación de la Teoría de Morse, la existencia de una nueva familia de soluciones kinks.

5. Estudio completo de las correcciones cuánticas de la masa del kink a primer orden, desarrollando un procedimiento de estimación de ésta, el método del desarrollo asintótico de la función del calor asociada al operador hessiano, que elude la resolución del problema espectral, inabordable en la mayoría de los casos. Este

método es aplicado a kinks con dos componentes, caso en el cual los métodos que habitualmente se presentan en la literatura no pueden ser utilizados.

6. Extensión de los sistemas dinámicos de Liouville al marco supersimétrico, en el que los acoplamientos de tipo Yukawa impiden la separación convencional de variables del problema. Se identifican las extensiones supersimétricas de las integrales primeras de estos modelos.

7. Definición del concepto de superkink como la generalización del concepto de kink clásico a teorías de campos supersimétrica en (1+1)-dimensiones. Cálculo explícito de los superkinks para varios modelos significativos.

Apéndice A

Convenios y notación.

En una teoría de campos escalares con $(1+n)$ dimensiones espaciales, se consideran:

- Es usado a lo largo de la memoria un sistema natural de unidades, donde las constantes físicas relevantes son $c = \hbar = 1$, salvo en el capítulo 6, en el que al tratar las correcciones cuánticas de los defectos topológicos hemos considerado adecuado hacer explícita la presencia de la constante \hbar en las fórmulas.
- $x^\mu = (x^0, x) = (x^0, x^j)$ con $j = 1, \dots, n$. Téngase en cuenta que se abusa de la notación considerando que $\vec{x} = x$ para no recargar las expresiones, esto es, el símbolo x recoge los grados espaciales. Los índices griegos recorren los grados de libertad espacio-temporales, mientras que los latinos sólo los espaciales.
- Se ha adoptado una métrica con la signatura $(+, -, \dots, -)$.
- Salvo que se indique lo contrario se asume el convenio de Einstein de suma en índices repetidos.
- Como es usualmente asumido $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$, $\partial_\mu\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}$, $x^\mu x_\mu = x_0x_0 - x_i x_i$ y $x \cdot x = x_i x_i$.
- El tensor antisimétrico de segundo orden es elegido con el convenio $\epsilon^{12} = 1$.
- Como comportamiento habitual se evita el uso de la letra i como índice, para evitar la posible confusión con la unidad imaginaria. Cuando se relacionen magnitudes en una métrica euclídea con otra genérica se usarán habitualmente las primeras letras latinas como índices asociadas a la métrica euclídea y las intermedias a la genérica.
- Los corchetes encerrando índices representa un proceso de antisimetrización sobre éstos, $A_{[ij]} = A_{ij} - A_{ji}$, $A_{[i}B_j] = A_i B_j - A_j B_i$.

- Es frecuente el uso de los siguientes símbolos $\bar{\sigma}^2 = 1 - \sigma^2$, $\bar{\tau}^2 = 1 - \tau^2$ y $\bar{x} = x + \gamma_2$.
- Los kinks suelen ser denotados mediante las siglas TK seguidas de una letra que especifique la familia a la que pertenecen. El uso de letras romanas indica una solución particular, mientras que la negrita se refiere a su clase de equivalencia en el espacio de Moduli.
- Es habitual la notación \mathcal{H}_v y \mathcal{H}_K para representar los hessianos considerados respectivamente sobre las soluciones de vacío y sobre la solución kink.

Convenios sobre espinores:

Fijaremos los convenios y la notación de los cuales nos serviremos para el estudio de sistemas físicos supersimétricos enmarcados en un espacio-tiempo ordinario de (1+1) dimensiones. Las elecciones realizadas son las seguidas por Schwarz [126]. En cualquier dimensión $1 + n$, podemos introducir los siguientes puntos generales:

- Las matrices de Dirac [53] conforman una representación matricial del álgebra de Clifford, sometidas a las relaciones,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

que fija el comportamiento de los espinores o campos fermiónicos.

- La matriz de conjugación de carga C es definida como aquella que cumple la relación

$$C\gamma^\mu C^{-1} = (\gamma^\mu)^t$$

- La representación adjunta para un espinor χ es dada como

$$\bar{\chi} = \chi^\dagger \gamma^0$$

- El espinor conjugado de carga es definido por

$$\tilde{\chi} = C\bar{\chi}^t = C(\gamma^0)^t \chi^*$$

- Un espinor de Majorana, por definición, es un espinor autoconjugado, esto es,

$$\tilde{\chi} = \chi$$

es decir, es un espinor que describe tanto su partícula como su antipartícula.

- En dimensiones que aceptan una representación del álgebra de Dirac con la matriz γ^0 antisimétrica y con el resto $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ simétricas (teniendo en cuenta que γ^0 es hermítico y el resto de las matrices son antihermíticas), todas las matrices son puramente imaginarias. Tal elección es denominada representación de Majorana [53]. En tal representación la matriz de conjugación es

$$C = -\gamma^0$$

- Para la elección anterior, la condición de espinor de Majorana se convierte en $\chi = \chi^*$, es decir, corresponde a una condición de realidad sobre las componentes del espinor χ .

Convenio para $n = 1$

En un mundo en (1+1)-dimensiones trabajaremos con una representación de Majorana de las matrices de Dirac, descrita por la particular elección,

$$\gamma^0 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Introduciremos, además, la matriz γ^5 definida como $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1$.

Notación sobre funciones utilizadas

En los capítulos dedicados al estudio de las soluciones de tipo defecto topológico presentes en los modelos de Liouville son utilizadas las funciones definidas en el modo:

$$f_A(z) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{z + \sigma_i}{z - \sigma_i} \right)^{\frac{-1}{2\sigma_i\kappa_i}} \quad f_B(z) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{z + \sigma_i}{z - \sigma_i} \right)^{\frac{-\sigma_i}{2\kappa_i}} \quad (\text{A.1})$$

$$f_C(z) = z \frac{(-1)^n}{\prod \sigma_i^2} \prod_{i=1}^n (z^2 - \sigma_i^2)^{\frac{1}{2\sigma_i^2\kappa_i}} \quad f_D(z) = \prod_{i=1}^n (z^2 - \sigma_i^2)^{\frac{1}{2\kappa_i}} \quad (\text{A.2})$$

$$f_E(z) = \left(\frac{z + \Omega}{z - \Omega} \right)^{A_i^+} \prod_{i \neq r}^n \left(\frac{z + \sigma_i}{z - \sigma_i} \right)^{B_i^+} \exp \frac{-z}{2\Omega^2(z^2 - \Omega^2)\kappa_r} \quad (\text{A.3})$$

siendo,

$$A_i^+ = \frac{2}{3\Omega^3\eta} \frac{4^{n-1}}{12\Omega^3\kappa_r} - \frac{5}{2} \sum_{i \neq r}^n \frac{1}{(\Omega^2 - 4\sigma_i^2)(\sigma_i^2 - \Omega^2)\kappa_i}$$

$$B_i^+ = \frac{-1}{2\sigma_i(\sigma_i^2 - \Omega^2)\kappa_i}$$

y

$$f_{\text{F}}(z) = \left(\frac{z + \Omega}{z - \Omega} \right)^{A_i^-} \prod_{i \neq r}^n \left(\frac{z + \sigma_i}{z - \sigma_i} \right)^{B_i^-} \exp \frac{-z}{2(z^2 - \Omega^2)\kappa_r} \quad (\text{A.4})$$

con

$$A_i^- = \frac{2 \cdot 4^{n-2}}{3\Omega\eta} - \frac{5}{12\Omega^2\kappa_r} - \frac{3\Omega}{2} \sum_{i \neq r}^n \frac{\sigma_i^2}{(\Omega^2 - 4\sigma_i^2)(\sigma_i^2 - \Omega^2)\kappa_i}$$

$$B_i^- = \frac{-\sigma_i}{2(\sigma_i^2 - \Omega^2)\kappa_i}$$

$$f_G(z) = \exp \left(\frac{(-1)^{n+1}}{z^2 \prod \sigma_i^2} \right) \prod_{i=1}^n \left(\frac{z^2 - \sigma_i}{z^2 + \sigma_i} \right) \frac{1}{2\sigma_i^3 \prod_{j \neq i} (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} \quad (\text{A.5})$$

y donde

$$\kappa_i = \prod_{j \neq i}^n (\sigma_i^2 - \sigma_j^2) \quad \eta = \prod_{j \neq r}^n (\Omega^2 - 4\sigma_j^2)$$

Apéndice B

Sobre el problema espectral de operadores de tipo Schrödinger

En este apéndice trataremos de exponer los aspectos generales sobre el problema espectral de un operador \mathcal{H} de tipo Schrödinger, que son utilizados a lo largo de esta memoria, necesarios principalmente en el análisis de la estabilidad del kink y en el cálculo de su corrección cuántica.

El problema espectral viene representado por la obtención de los valores y funciones propias de la relación

$$\mathcal{H}|\psi_k\rangle = \omega_k^2|\psi_k\rangle \quad (\text{B.1})$$

donde \mathcal{H} es un operador de la forma

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (\text{B.2})$$

El espectro de forma genérica será

$$\text{Spec } \mathcal{H} = \{\omega_j^2\}_{j \in I} \cup \{k^2 + \mu^2\}_{k \in \mathbb{R}}$$

donde I es un conjunto de índices que caracteriza el espectro discreto.

Densidades espectrales

Las funciones propias del espectro continuo tienen un comportamiento asintótico totalmente análogo al que sería encontrado en el problema espectral libre. Las discrepancias en el infinito corresponden tan sólo a cambios de fase, tal que su conocimiento permitiría la descripción de $V(x)$. Así, consideraremos que los estados de scattering quedan descritos por una onda incidente desde las abscisas negativas, que tras el proceso de dispersión presentará una onda reflejada con amplitud $|\rho|^2$ y una onda transmitida con amplitud $|\tau|^2$, esto es,

$$\psi^{(-)}(x) = \begin{cases} e^{ik-x} + \rho_- e^{-ik-x} & x \rightarrow -\infty \\ \tau_- e^{ik+x} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

donde $k_+, k_- \geq 0$. En el caso de que la onda incidente fuese originada desde las abscisas positivas, la situación quedaría descrita mediante los estados de scattering

$$\psi^{(+)} = \begin{cases} e^{-ik_+x} + \rho_+ e^{ik_+x} & x \rightarrow +\infty \\ \tau_+ e^{-ik_-x} & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Los coeficientes $\rho_{+,-}$ y $\tau_{+,-}$ son denominados respectivamente coeficientes de reflexión y transmisión, y albergan toda la información acerca del proceso de scattering, la cual puede ser introducida en la matriz S

$$S = \begin{pmatrix} \tau_- & \rho_+ \\ \rho_- & \tau_+ \end{pmatrix}$$

Puede demostrarse que es una matriz unitaria a partir de las propiedades de los coeficientes $\rho_{+,-}$ y $\tau_{+,-}$. Por ello, sus valores propios son de la forma $e^{i\delta_A}$ y $e^{i\delta_B}$, donde δ_A y δ_B son magnitudes reales que reciben el nombre de desfasajes. Para potenciales pares, $V(x) = V(-x)$, el problema aparece en una forma más simple: $\rho_+ = \rho_- = \rho$, $\tau_+ = \tau_- = \tau$ y los estados de scattering pueden escribirse mediante la combinación de las funciones trigonométricas, presentando lo que en la literatura se conoce como el canal par, representado por la autofunción $A \cos(kx + \delta_P)$, y el canal impar, considerada la autofunción $A \sin(kx + \delta_I)$. Sobre esta base se deduce la relación entre los desfasajes y los coeficientes de reflexión y transmisión

$$e^{i\delta_0} = \tau + \rho \qquad e^{i\delta_1} = \tau - \rho \qquad (\text{B.3})$$

Si se considera el problema espectral libre confinado en un intervalo de longitud L , de modo que el potencial se describe como

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ \infty & \text{si } |x| \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

las condiciones de contorno son en cada canal

$$\begin{array}{lll} \text{Canal par:} & A \cos \frac{kL}{2} = 0 & \Rightarrow \quad kL = (2n + 1)\pi \quad n \in \mathbb{N} \\ \text{Canal impar:} & A \sin \frac{kL}{2} = 0 & \Rightarrow \quad kL = (2n)\pi \quad n \in \mathbb{N} \\ \text{Total de canales:} & & kL = \pi n \quad n \in \mathbb{N} \end{array}$$

La diferencia entre los momentos de dos estados consecutivos es $k_{i+1} - k_i = \Delta k = \frac{\pi}{L}$, de donde se obtiene la densidad espectral en la forma $\rho_{k \in \mathbb{R}^+}(k) = \frac{1}{\Delta k} = \frac{L}{\pi}$. Cualquier magnitud F aditiva en los estados podría calcularse mediante la integración

$$F = \int_0^\infty dk \rho_{k \in \mathbb{R}^+}(k) f(k)$$

Es habitual en la literatura considerar una densidad espectral definida sobre toda la recta real, definiendo $\rho_{k \in \mathbb{R}}(k) = \frac{L}{2\pi}$, de modo que

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} dk \rho_{k \in \mathbb{R}}(k) f(k)$$

La situación es ligeramente diferente en el caso de un problema espectral genérico, el cual presenta un término potencial $V(x)$. En este caso, seguimos considerando el confinamiento del sistema en una caja de longitud L , aunque impondremos que esta magnitud sea muy grande. Entonces, habríamos de resolver el espectro asociado a un operador con un potencial en la forma

$$\bar{V}(x) = \begin{cases} V(x) & \text{si } |x| \leq \frac{L}{2} \\ \infty & \text{si } |x| \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

Las condiciones de contorno sobre cada uno de los canales proporciona los siguientes comportamientos

$$\begin{aligned} \text{Canal par:} \quad & A \cos\left(\frac{k_n L}{2} + \delta_P\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n L + \delta_P = (2n + 1)\pi \quad n \in \mathbb{N} \\ \text{Canal impar:} \quad & A \sin\left(\frac{k_n L}{2} + \delta_I\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n L + \delta_I = (2n)\pi \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{L}{2}(k_{n+1}^A - k_n^A) + \delta^A(k_{n+1}^A) - \delta^A(k_n^A) &= \pi \\ \frac{L}{2}\Delta k_n^A + \frac{\partial \delta^A(k^A)}{\partial k^A} \Delta k_n^A &= \pi \\ \rho_{k^A \in \mathbb{R}^+}^A &= \frac{1}{\Delta k_n^A} = \frac{L}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial \delta^A(k^A)}{\partial k^A} \end{aligned}$$

donde por el índice A damos a entender que los cálculos ofrecidos conciernen a cada uno de los canales por separado. La densidad espectral quedará determinada mediante la suma de las densidades espectrales atribuidas a cada canal, $\rho_{k \in \mathbb{R}^+} = \rho_{k \in \mathbb{R}^+}^P + \rho_{k \in \mathbb{R}^+}^I$. Se concluye que

$$\rho_{k \in \mathbb{R}^+}(k) = \frac{L}{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial k} [\delta_P(k) + \delta_I(k)] \tag{B.4}$$

o simplemente

$$\rho_{k \in \mathbb{R}^+}(k) = \frac{L}{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial \delta(k)}{\partial k}$$

definiendo el desfase total $\delta(k) = \delta_P(k) + \delta_I(k)$.

Problema espectral con potencial de Pösch-Teller

A lo largo de esta memoria ha sido extensamente usado el resultado de la resolución de un problema espectral con potencial tipo Pösch-Teller. Las expresiones usadas [102] se corresponden con el problema

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + (\epsilon - v + v \operatorname{sech}^2 z)\psi = 0$$

de modo que los autovalores del discreto son

$$\epsilon_n = v - \left[\sqrt{v + \frac{1}{4}} - (n - \frac{1}{2}) \right]^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots < \sqrt{v + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

con autofunciones

$$\psi_n = \frac{N}{(e^z + e^{-z})^{\sqrt{v-\epsilon_n}}} {}_2F_1[-n, 2\sqrt{v + \frac{1}{4}} - n, \sqrt{v - \epsilon_n} + 1, \frac{e^{-z}}{e^z + e^{-z}}]$$

El espectro continuo es caracterizado por las autofunciones

$$\psi_\epsilon = \frac{N}{(e^z + e^{-z})^{\sqrt{v-\epsilon}}} {}_2F_1[\sqrt{v - \epsilon} + \frac{1}{2} - \sqrt{v + \frac{1}{4}}, \sqrt{v - \epsilon} + \frac{1}{2} + \sqrt{v + \frac{1}{4}}, \sqrt{v - \epsilon} + 1, \frac{e^{-z}}{e^z + e^{-z}}]$$

Aproximación de Born

Uno de los resultados utilizados en esta memoria es la aproximación de Born, que proporciona el comportamiento asintótico de los desfases respecto del momento k , para operadores diferenciales matriciales. La justificación a la fórmula usada viene apoyada por los siguientes argumentos [59]:

Escribiremos el operador matricial de tipo Schrödinger en la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + U(x)$, siendo

$$(\mathcal{H}_0)_{ab} = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + m_a^2 \right) \delta_{ab} \quad (U)_{ab} = U_{ab}(x) \quad (\text{B.5})$$

de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = 0$$

El problema espectral puede presentarse como $(-\mathcal{H}_0 + \omega_k^2)\psi_k = U\psi_k$, de modo que la solución del problema de scattering en la aproximación de Born (en la que se considera que los momentos son grandes) es

$$\psi_k(x) = \psi_k^0(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x') U(x') \psi_k^0(x')$$

siendo $(-\mathcal{H}_0 + \omega_k^2)\psi_k^0 = 0$ y $G(x - x')$ la función de Green, que verifica:

$$(-\mathcal{H}_0 + \omega_k^2)G(x - x') = -\delta(x - x')$$

A la vista de (B.5), la función de Green puede ser calculada, obteniéndose

$$G_{ab}(x - x') = -\frac{\delta_{ab}}{2ik_a} e^{ik_a|x-x'|}$$

mientras que para $\psi_k^0(x)$ hemos de tomar $(\psi_k^0(x))_a = e^{ik_ax}$, donde se asume que $\omega_k^2 = m_1^2 + k_1^2 = m_2^2 + k_2^2$.

Entonces, se puede obtener el comportamiento asintótico ($x \rightarrow \infty$) de la solución bajo esta aproximación

$$\begin{aligned} (\psi_k^0(x))_1 &\approx e^{ik_1x} \left[1 + \frac{1}{2ik_1} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(U_{11}(x') + e^{i(k_2-k_1)x'} U_{12}(x') \right) \right] \\ (\psi_k^0(x))_2 &\approx e^{ik_2x} \left[1 + \frac{1}{2ik_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(U_{22}(x') + e^{i(k_1-k_2)x'} U_{12}(x') \right) \right] \end{aligned}$$

lo que permite obtener los desfases, dado que la función de onda es determinada como $(\psi_k(s))_a \approx e^{i[k_ax + \delta_a(k_a)]}$ para valores asintóticos del espacio. Por ello,

$$\begin{aligned} \delta_1(k_a) &= -i \ln \left[1 + \frac{1}{2ik_1} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(U_{11}(x') + e^{i(k_2-k_1)x'} U_{12}(x') \right) \right] \\ \delta_2(k_a) &= -i \ln \left[1 + \frac{1}{2ik_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(U_{22}(x') + e^{i(k_1-k_2)x'} U_{12}(x') \right) \right] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que para valores de los momentos altos $k_1, k_2 \gg 0$, el logaritmo se puede desarrollar a orden dominante, y que $k_1 - k_1 = -\frac{m_1^2 - m_2^2}{k_2 + k_1} \approx 0$ da lugar a que $e^{i(k_2-k_1)x'} \approx 1$, se llega a la respuesta final

$$\delta_1(k_1) \approx -\frac{1}{2k_1} \int_{-\infty}^{\infty} dx' [U_{11}(x') + U_{12}(x')] \tag{B.6}$$

$$\delta_2(k_2) \approx -\frac{1}{2k_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' [U_{22}(x') + U_{12}(x')] \tag{B.7}$$

Reconstruir los argumentos anteriores para un operador diferencial (B.2) o bien restringir los resultados a tal situación es sencillo, obteniéndose el resultado conocido

$$\delta(k) \approx -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} dx' U(x')$$

Apéndice C

Supersimetría y formalismo de Cartan.

El formalismo de Cartan es habitualmente utilizado al trabajar modelos que presentan métrica no euclídea. El lagrangiano asociado a un sistema físico enmarcado en la mecánica $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica era dado por la expresión (7.8), mientras que el hamiltoniano era escrito como (7.9). Los momentos generalizados son

$$p_i^B = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = g_{ij} \dot{x}^j + \frac{i}{2} \Gamma_{i,sk} \theta_\alpha^i \theta_\alpha^s \quad p_{i,\alpha}^F = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha^i} = -\frac{i}{2} g_{ij} \theta_\alpha^j$$

donde observamos la inclusión de términos fermiónicos en la expresión del momento bosónico. Es en este punto donde es habitual el uso del convenio de Cartan. Asumiendo un espacio interno que presenta la estructura

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

el formalismo de Cartan desdobra la métrica en las magnitudes denominadas $(n+1)$ -beins e^a_i en el modo:

$$g_{ij} = \eta_{ab} e^a_i e^b_j \quad \eta^{ab} = g^{ij} e^a_i e^b_j$$

Los inversos de los objetos e^a_i serán denotadas por E^i_a , esto es,

$$e^a_i E^i_b = \delta^a_b$$

Basado en este concepto se define la 1-forma $e^a = e^a_i dx^i$, que no es necesariamente una 1-forma exacta. Entonces, se verifica $ds^2 = \eta_{ab} e^a e^b$. Se completa la estructura de Cartan definiendo la 1-forma de la conexión de spin ω^a_b siguiendo la expresión

$$de^a + \omega^a_b \wedge e^b = T^a$$

donde T^a es una 2-forma denominada *torsión* la cual con métrica riemanniana se anula, esto es, $T^a = 0$. Finalmente se define la *curvatura* como la 2-forma

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} e^c \wedge e^d$$

Como ha sido apuntado para variedades riemannianas la torsión es nula, $T^a = 0$, y además $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$. Se verifican las siguientes identidades:

$$\omega^a{}_{b\mu} = e^a{}_\nu E_b{}^\nu{}_{;\mu} = e^a{}_\nu (\partial_\mu E_b{}^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu E_b{}^\lambda) = -E_b{}^\nu e^a{}_{\nu;\mu} = -E_b{}^\nu (\partial_\mu e^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e^a{}_\lambda)$$

Formalismo de Cartan asociado a cambios de variables.

Para modelos embebidos en una teoría de campos con un mundo interno plano, un cambio en las coordenadas de dicho espacio implica la aparición de una métrica según (7.10), la cual no llega asociada curvatura alguna, $R_{ijkl} = 0$. Esto es útil en los modelos de Liouville, por ejemplo. El formalismo de Cartan queda trivializado puesto que en (7.10) puede leerse la forma de los beins, que serán:

$$e^a{}_j = \frac{\partial x^a}{\partial x'^j}$$

En el caso de trabajar en un mundo con métrica euclídea las relaciones de conmutación eran sencillas de obtener. Es conocido que el momento puede ser realizado en el espacio de configuración mediante la expresión

$$p_a = -i \frac{\partial}{\partial x^a}$$

Considerando el cambio de variables, se tiene

$$p_a = -i \frac{\partial}{\partial x^a} = -i \frac{\partial x'^j}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x'^j} = E^j{}_a p'_j$$

de donde puede concluirse que

$$[p_a, \theta_\alpha^b] = 0 \Rightarrow [E^j{}_a p'_j, e^b{}_i \theta_\alpha^i] = 0 \Rightarrow E^j{}_a \left([p'_j, e^b{}_i] \theta_\alpha^i + e^b{}_i [p'_j, \theta_\alpha^i] \right)$$

de donde:

$$[p'_j, \theta_\alpha^i] = i E^i{}_b \frac{\partial e^b{}_k}{\partial x'^j} \theta_\alpha^k = i \Gamma_{jk}^i \theta_\alpha^k - i E^i{}_b \omega^b{}_{cj} e^c{}_k \theta_\alpha^k$$

Por otra parte, es claro el argumento siguiente

$$\{\theta_\alpha^i, \theta_\alpha^j\} = \{E^i{}_a \theta_\alpha^a, E^j{}_b \theta_\alpha^b\} = E^i{}_a E^j{}_b \{\theta_\alpha^a, \theta_\alpha^b\} = E^i{}_a E^j{}_b \delta^{ab} = g^{ij}$$

luego:

$$\{\theta_\alpha^i, \theta_\alpha^j\} = g^{ij}$$

Empleando el formalismo de Cartan el lagrangiano sería

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{i}{2}\theta_\alpha^a\dot{\theta}_\alpha^a + \frac{i}{2}\omega_{ack}\dot{x}^k\theta_\alpha^a\theta_\alpha^c + \frac{1}{4}e^i{}_a e^k{}_b e^j{}_c e^l{}_d R_{ijkl}\theta_1^a\theta_2^b\theta_1^c\theta_2^d - \frac{1}{2}e^i{}_a e^j{}_a W_i W_j + [\partial_j(E^l{}_a W_l) - \omega_a{}^c{}_j E^l{}_c W_l] E^j{}_b \theta_1^a \theta_2^b$$

de donde el momento queda definido como:

$$p_k = g_{ki}\dot{x}^i + \frac{i}{2}\omega_{ack}\theta_\alpha^a\theta_\alpha^c = g_{ki}\dot{x}^i + \frac{i}{2}\Gamma_{i,kn}\theta_\alpha^i\theta_\alpha^n - \frac{i}{2}e^a{}_i \partial_k e^a{}_n \theta_\alpha^i \theta_\alpha^n$$

Dado que la supercarga venía expresada como

$$Q_1 = g_{ij}\dot{x}^i\theta_1^j - \theta_2^i W_i$$

por simplicidad optaremos por estudiar el comportamiento de la parte bosónica del momento mostrado anteriormente, esto es consideraremos la magnitud,

$$t_i = g_{ij}\dot{x}^j$$

de donde puede obtenerse de forma sencilla que:

$$[t_i, f(x)] = -i\frac{\partial f}{\partial x^i} \quad [t_j, \theta_\beta^k] = i\Gamma_{ij}^k \theta_\beta^i \quad [t_i, t_j] = \frac{1}{2}R_{klij}\theta_\beta^k\theta_\beta^l$$

Las operaciones entre conmutadores mostradas nos permiten obtener de forma más sencilla otros conmutadores con los que debemos trabajar¹ Así puede comprobarse que

$$\{Q_1, Q_1\} = \{Q_2, Q_2\} = 2H$$

¹Relaciones entre conmutadores:

$$\begin{aligned} \{B_1 F_1, B_2 F_2\} &= [B_1, B_2]F_1 F_2 + B_1[F_1, B_2]F_2 - B_2[B_1, F_2]F_1 + B_2 B_1\{F_1, F_2\} \\ [F_1 F_2, F_3 F_4] &= \{F_1, F_3\}F_4 F_2 + F_1\{F_2, F_3\}F_4 - F_3\{F_1, F_4\}F_2 - F_1 F_3\{F_2, F_4\} \\ [B_1, F_1 F_2 F_3] &= [B_1, F_1]F_2 F_3 + F_1[B_1, F_2]F_3 + F_1 F_2[B_1, F_3] \\ [F_1, F_2 F_3] &= \{F_1, F_2\}F_3 - F_2\{F_1, F_3\} \\ \{F_1 F_2 F_3, F_4\} &= \{F_1, F_4\}F_2 F_3 - F_1\{F_2, F_4\}F_3 + F_1 F_2\{F_3, F_4\} \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Abramowitz, M., “*Handbook of Mathematical Functions*”, Dover Publications, Inc., New York 1972.
- [2] Alonso Izquierdo, A., González León, M.A. y Mateos Guilarte, J., “*Kinks from dynamical systems: domain walls in a deformed $O(N)$ linear sigma model*”, *Nonlinearity* **13** July 2000, no. 4, 1137-1169.
- [3] Alonso Izquierdo, A., González León, M.A. y Mateos Guilarte, J., “*Kink manifolds in (1+1)-dimensional scalar field theory*”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 209-229.
- [4] Alonso Izquierdo, A., González León, M.A. y Mateos Guilarte, J., “ *$\mathcal{N} = 2$ supersymmetric kinks and real algebraic curves*”, *Phys. Lett.* **B480** (2000), 373-380.
- [5] Alonso Izquierdo, A., González León, M.A. y Mateos Guilarte, J., “*Kinks out of Geodesics. Topological walls in the Linear Sigma Model*”, contenido en “*Geometry and physics (Zaragoza, 1998)*” *An. Fís. Monogr.*, 5, 15-35.
- [6] Alonso Izquierdo, A., González León, M.A. y Mateos Guilarte, J., “*Invariants in SUSY Classical Mechanics*”, aparecerá en los proceedings de “*Geometry and physics (Medina del Campo, 2000)*”.
- [7] Alves, M., Bazeia, D. y Bezerra, V.B., “*Black hole formation in bidimensional dilaton gravity coupled to scalar matter systems*”, *Modern Phys. Lett.* **A14** (1999) no. 39, 2687-2694.
- [8] Aizawa, Y. y Saito, N., *J. Phys. Soc. Japan* **32** (1972) 1636.
- [9] Atiyah, M. y Bott, R., *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, **A308** (1982) 523.
- [10] Arnold, V.I., “*Mecánica Clásica*”, Paraninfo, Madrid 1983.
- [11] Bazeia, D., Boschi-Filho, H. y Brito, F.A., “*Domain Defects in systems of two real scalar fields*”, *J. High Energy Phys.* **4** (1999) 28

- [12] Bazeia, D. y Brito, F.A. “*Tiling the plane without supersymmetry*”, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) no. 6, 1094-1097.
- [13] Bazeia, D. y Brito, F.A., “*Bags, junctions and networks of BPS and non-BPS defects*”, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 209-229.
- [14] Bazeia, D., Dos Santos, M.J. y Ribeiro, R.F., “*Solitons in systems of coupled scalar fields*”, Phys. Lett. **A208** (1995) no. 1-2, 84-88.
- [15] Bazeia D. y Morris, J., Phys. Rev. **D54** (1996), 5217.
- [16] Bazeia, D., Nascimento, J.R.S., Ribeiro, R.F. y Toledo, D., “*Soliton stability in systems of two real scalar fields*”, J. Phys. **A30** (1997) no. 23, 8157-8166.
- [17] Bazeia, D., Ribeiro, R.F. y Santos, M.M., “*Topological defects inside domain walls*”, Phys. Rev. **D54** (1996) no. 2, 1852-1855.
- [18] Bazeia, D., Ribeiro, R.F. y Santos M.M., “*Solitons in a class of two coupled real scalar fields*”, Phys. Rev. **E54** 3 (1996) 2943-2948.
- [19] Belavin, A. y Polyakov, A., JETP Letters. **22** (1975) 245
- [20] Berezin, F.A. y Marinov, M.S., Ann. Phys. **104**, (1977) 336.
- [21] Binosi, D. y ter Veldhuis, T., “*Domain wall junctions in a generalized Wess-Zumino model*”, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1727.
- [22] Bochkarev, A.I., “*Trace identities and analytical evaluation of the functional determinants*”, Nucl. Phys. **B508** (1997) 449-467.
- [23] Bogomolny, E.B., “*The stability of classical solutions*”, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) no.4, 449-454.
- [24] Bordag, M., “*Vacuum energy in smooth background fields*”, J. Phys. **A28** (1995) 755-765.
- [25] Boya, L.J. y Casahorrán, J., “*Bidimensional supersymmetric field theories with discrete moduli space*”, Ann. Physics **266** (1998) no. 1, 63-80.
- [26] Brito, F.A. y Bazeia, D., “*Domain ribbons inside domain walls at finite temperature*”, Phys. Rev. **D56** (1997) no. 12, 7869-7876.
- [27] Brown, L.S., “*Quantum field theory*”, Cambridge University Press 1992.
- [28] Cahill, K., Phys. Lett. **53B** (1974) 174.

- [29] Carroll, S.M., Hellerman, S. y Trodden, M., “*Domain wall junction are 1/4-BPS states*”, Phys. Rev. **D61** (2000) 065001.
- [30] Casalbuoni, R., “*The classical mechanics for Bose-Fermi systems*”, Nuovo Cim, **33A** (1976) 389-431.
- [31] Cecotti, S. y Vafa, C., “*On classification of $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric theories*”, Comm. Math. Phys. **158** (1993) no. 3, 569-644.
- [32] Chaikin, P.M. y Lubensky, T.C., “*Principles of condensed matter physics*”, Cambridge University Press, 1995.
- [33] Christ, N.H. y Lee, T.D., “*Quantum expansion of soliton solutions*”, Phys. Rev., **D12** (1975) no. 6, 1606-1627.
- [34] Chung, T.C., Moraes, F., Flood, J.D. y Heeger, A.J., Phys. Rev. **B29** (1984) 2341.
- [35] Coleman, S. y Mandula, J., Phys. Rev. **159** (1967) 1251.
- [36] Coleman, S., “*Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model*”, Phys. Rev., **D11** (1975) 2088.
- [37] Coleman, S., “*Classical lumps and their quantum descendants*” contenido en “*New phenomena in sub-nuclear physics*”, ed. A. Zichichi (Plenum, New York, 1977).
- [38] Coleman, S., “*There are no Goldstone bosons in two dimensions*”, Commun. Math. Phys. **31** (1973) 259-264.
- [39] Coleman, S., “*Aspects of symmetry*”, Cambridge University Press 1985.
- [40] Dashen, R.F., Hasslacher, B. y Neveu, A., Phys. Rev. **D10** (1974) 4130.
- [41] Dashen, R.F., Hasslacher, B. y Neveu, A., “*Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory. Two-dimensional models and extended hadrons*”, Phys. Rev. **D10** no. 12 (1974) 4130-4138.
- [42] de Wit, B. y van Nieuwenhuizen, P., “*Rigidly and locally supersymmetric two-dimensional nonlinear σ -models with torsion*”, Nucl. Phys., **B312** (1989) 58-94.
- [43] Derrick, G.H., “*Comments on non linear wave equations as models for elementary particles*”, J. Math. Phys., **5** (1964) 1252-1254.

- [44] DeWitt, B., *"Supermanifolds"*, Cambridge University Press, Cambridge-New York 1984.
- [45] Di Vecchia, P. y Ferrara, S., *"Classical solutions in two-dimensional supersymmetric fields theories"*, Nucl. Phys., **B130** (1977) 93-104.
- [46] Dirac, P.A.M., *"Lectures on quantum mechanics"*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.
- [47] Drazin, P.G. y Johnson, R.S., *"Solitons: an introduction"*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [48] Dvali, G. y Shifman, M., *"Dynamical compactification as mechanism of spontaneous supersymmetry breaking"*, Nucl. Phys. **B504** (1997) no. 1-2, 127-146.
- [49] Edelstein, J.D., Trobo, M.L., Brito, F.A. y Bazeia, D., *"Kinks inside supersymmetric domain ribbons"*, Phys. Rev. **D57** (1998) no. 12, 7561-7569.
- [50] Eguchi, T., Gilkey, P.B. y Hanson, A.J., *"Gravitation, gauge theories and differential geometry"*, Phys. Rep. **66** no.6 (1980) 213-393.
- [51] Faddeev, L. y Jackiw, R., *"Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems"*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) no. 17, 1692-1694.
- [52] Ferrara, S., Wess, J. y Zumino, B., Phys. Lett. **51B**, (1974) 239.
- [53] Freund, P.G.O. *"Introduction to Supersymmetry"*, Cambridge University Press, 1986.
- [54] Galindo, A. y Pascual, P., *"Mecánica Cuántica"*, Ed. Alhambra, 1978.
- [55] García Fuertes, W. *"Defectos topológicos en teoría de campos. De kinks, vórtices y monopolos en modelos escalares y teorías gauge"*, Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo. Oviedo, 1998.
- [56] García Fuertes, W. y Mateos Guilarte, J., *"Trial surfaces gauge fields and planar solutions"*, Phys. Rev. **D49** 12 (1994) 6687-6691.
- [57] García Fuertes, W. y Mateos Guilarte, J., *"Self-dual solitons in N=2 supersymmetric Chern-Simons gauge theory"*, J. Math. Phys. **38**, no. 12 (1997) 6224-6229.
- [58] García Fuentes, W. y Mateos Guilarte, J., *"Semilocal Chern-Simons Defects"*, J. Math. Phys. **37** (1996) no. 2, 554-566.
- [59] García Fuertes, W., Notas y conversaciones privadas.

- [60] Gervais, J.L. y Sakita, B., Nucl. Phys. **B34** (1971) 632
- [61] Gibbons, G. y Townsend, P., “*A Bogomol’nyi equation for intersecting domain walls*”, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1727-1730.
- [62] Gilkey, P.B., “*Invariance theory, the Heat equation and the Atiyah-Singer index theorem*”, Publish or Perish, Inc 1984.
- [63] Goldstein, H., “*Mecánica Clásica*”, Editorial Reverté, 1988.
- [64] Goldstone, J. y Jackiw, R., Phys. Rev., **D11** (1975) 1486.
- [65] González León, M.A., “*Kinks, sistemas integrables y geodésicas: Solitones en el modelo Sigma O(3) Lineal*”, Tesis doctoral, Universidad de Salamanca. Salamanca, 2001.
- [66] Graham, N.M., “*Exact renormalized one-loop quantum corrections to energies of solitonic field configurations*”, Tesis doctoral, 1999.
- [67] Grammaticos, B., Borizzi B. y Padjen, B., “*Painlevé property and integrals of motion for the Hénon/mhy Heiler systems*” Phys. Lett. **89A** (1982) 111-113.
- [68] Grisarú, M.T., Massar, M., Servin, A. y Troost, J., “*Some aspects of $N = (2, 2), D = 2$ supersymmetry*”, hep-th/9801080
- [69] Haag, R., Lopuszanski, J.T. y Sohnius, M., “*All possible generators of supersymmetries of the S-matrix*”, Nucl. Phys. Rep. **B88**, (1975) 257-274.
- [70] Heumann, R. y Manton, N.S., “*Classical Supersymmetric Mechanics*”, Annals of Physics **284** (2000) 52-88.
- [71] Hietarinta, J., “*Quantum integrability is not a trivial consequence of classical integrability*”, Phys. Lett. **93A** (1982) no. 2, 55-57.
- [72] Hietarinta, J., “*A search for integrable two-dimensional hamiltonian systems with polynomial potencial*” Phys. Lett. **96A** (1983) no. 6, 273-278.
- [73] Holt, C.R., “*Construction of new integrable hamiltonians in two degrees of freedom*”, J. Math. Phys. **23** (1982) no. 6, 1037-1046.
- [74] Hruby, J., “*On the supersymmetric sine-Gordon model and a two-dimensional bag*”, Nucl. Phys. **B131** (1977) no. 2-3, 275-284.
- [75] Iliopoulos, J. y Zumino, B., Nucl. Phys., **B76** (1974) 310

- [76] Ishihara, H., Kubotani, H. y Nambu, Y., “*Cell structure formation of domain walls*”, Phys. Lett. B. in press?
- [77] Ito, H., “*Kink energy sum rule in a two-component scalar field model of 1+1 dimensions*”, Phys. Lett. **112A** (1985) 119-123.
- [78] Ito, H., “*Stability theory for nonlinear Klein-Gordon Kinks and Morse’s index theorem*”, Phys. Lett. **113A** (1985) 179-182.
- [79] Jackiw, R., Lee, K. y Weinberg, E., “*Self-dual Chern-Simons solitons*”, Phys. Rev. **D42** (1990) 3488-3499.
- [80] Jackiw, R. y Schrieffer, J.R., “*Solitons with fermion number 1/2 in condensed matter and relativistic field theories*”, Nucl. Phys., **B190** (1981) 253-265.
- [81] Jackiw, R. y Weinberg, E., “*Self-dual Chern-Simons vortices*”, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) no. 19, 2234-2237.
- [82] Junker, G., “*Supersymmetric methods in quantum and Statistical Physics*”, Springer, 1996.
- [83] Kac, V.G., “*A sketch of Lie superalgebra theory*”, Comm. Math. Phys. **53**, (1977) no. 1, 31-64.
- [84] Khari, A.. “*Static finite energy solutions of a classical field theory with positive mass-square*”, Lett. Math. Phys. **3**, (1979) 475-480.
- [85] Landau, L.D. y Lifshitz, E.M., “*Mechanics*”, Pergamon, Oxford 1960.
- [86] Lazarides, G. y Shafi, Q., Phys. Lett., **159B** (1985) 261.
- [87] Liouville, J., J. Math. Phys. Appl. **11** (1849), 345.
- [88] Lohe, M.A. “*Soliton structures in $P(\phi)_2$* ”, Phys. Rev., **D20**, 12 (1979) 3120-3130.
- [89] Lykken, J.D., “*Introduction to supersymmetry*”, Fermilab-PUB-96/445-T, hep-th/9612114. “*Introduction to supersymmetry. Fields, strings and duality*”, Boulder, co, 1996, 85-153, World Sci. Publishing, RiverEdge, NJ, 1997.
- [90] Magyari, E. y Thomas, H., “*Solitary waves in a 1D anharmonic lattice with two-component order parameter*”, Phys. Lett. **100A** (1984) no. 1, 11-14.
- [91] Mandelstam, S., “*Soliton operator for the quantized sine-Gordon equation*”, Phys, Rev., **D11** (1975) 3026-3030.

- [92] Mandl, F. y Shaw G., “*Quantum Field Theory*”, John Wiley & Sons, 1984.
- [93] Manton, N.S., “*Deconstructing supersymmetry*”, J. Math. Phys. **40** (1999), no. 2, 736-750.
- [94] Mateos Guilarte, J., “*Stationary phase approximation and quantum soliton families*”, Annals of Physics, **188** no. 2 (1988) 307-346.
- [95] Mateos Guilarte, J., “*A note on Morse Theory and One dimensional solitons*”, Letters in Math. Phys., **14** (1987) 169-176.
- [96] Mateos Guilarte, J., “*Sphalerons and instantons in two dimensional field theory*”, Annals of Physics, **216** (1992) no. 1, 122-151.
- [97] Milnor, J., “*Morse Theory*”, Princeton University Press, Princeton, 1962.
- [98] Montonen, C., Nucl. Phys. **B112** (1976) 349.
- [99] Morris, J.R., “*Domain defects in strings and walls*”, Phys. Rev., **D51** no. 2 (1995) 697-702.
- [100] Morris, J.R., “*Nested domain defects*”, Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998) 1115-1128.
- [101] Morse, M., “*The calculus of variations in the large*”, Am. Math. Soc. Providence, R.I. (1996) xii+368pp.
- [102] Morse, P.M. y Feshbach, H., “*Methods of Theoretical Physics*”, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.
- [103] Murphy, T. y Raifeartaigh, L.O., Nucl. Phys. **B218** (1983) 484
- [104] Nahm, W., Rittenberg, V. y Scheunert, M., “*Graded Lie algebras: generalization of hermitian representations*”, J. Math. Phys. **18**, (1977) 146-154.
- [105] Nastase, H., Stephanov, M., van Nieuwenhuizen, P. y Rebhan, A., “*Topological boundary conditions, the BPS bound, and elimination of ambiguities in quantum mass of solitons*”, Nucl. Phys. **B542** (1999) no. 1-2, 471.
- [106] Nirov, K.S. y Plyushchay, M.S., “*P, T-invariant system of Chern-Simons fields: Pseudoclassical model and hidden symmetries*”, Nucl. Phys. **B512** (1998) no. 1-2, 295-319.
- [107] Nirov, K.S. y Plyushchay, M.S., “*Symmetries and classical quantization*”, Phys. Lett. **B405** (1997) no. 1-2, 114-120.

- [108] Papadopoulos, G., “*(2,0)-supersymmetric sigma models and almost complex structures*”, hep-th/9503063
- [109] Perelomov, A., “*Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras*”, Birkhäuser, Boston MA.
- [110] Perelomov, A., “*Instantons and kähler manifolds*”, Commun. Math. Phys. **63** (1978) no. 3, 237-242.
- [111] Plyushchay, M.S., “*Integrals of motion, supersymmetric quantum mechanics and dynamical supersymmetry: Supersymmetries and quantum symmetries*”, (Dubna 1997) 270-276, Lecture Notes in Phys. 524, Springer, Berlin 1999.
- [112] Pnermatikos, S., Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1534.
- [113] Polyakov, A.M., Phys. Lett. **59B** (1975) 82.
- [114] Rajaraman, R., “*Solitons and Instantons*”, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [115] Rajaraman, R. y Weinberg, E.J., Phys. Rev. **D11** (1975) 2950
- [116] Ramani, A., Dorizzi B. y Grammaticos, B., “*Painlevé conjecture revisited*”, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) no. 21, 1539-1541.
- [117] Ramond, P., “*Field Theory, a modern primer*”, The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981.
- [118] Ramond, P. “*Dual theory for free fermions*”, Phys. Rev. **D3**, (1971) 2415-2418.
- [119] Rañada, M.F., “*Sistemas Sobreintegrables*”, VI Workshop de Otoño: Geometría y Física. Salamanca 1997.
- [120] Rebhan, A. y van Nieuwenhuizen, P., “*No saturation of the quantum Bogomolnyi bound by two-dimensional $N=1$ supersymmetric solitons*”, Nucl. Phys. **B508** (1997) 449-467.
- [121] Rosenau, P., “*New wave mathematics*”, What’s happening in the Mathematical Sciences. “*On analytic solitary waves formed by a non linear dispersion*”, Phys. Lett. **A230** (1997) no. 5-6, 305-318.
- [122] Saffin, P.M., “*Tiling with almost-BPS invariant domain wall junctions*”, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) no. 21, 4249-4252.
- [123] Salam, A. y Strathdee, S., “*Super-gauge transformations*”, Nucl. Phys. **B76**, (1974) 477-482.

- [124] Salomonson, P. y Van Holten, J.W. “*Fermionic coordinates and supersymmetry in quantum mechanics*”, Nucl. Phys. **B196** (1982) no. 3, 509-531.
- [125] Sarker, S., Trullinger, S.E. y Bishop, A.R., “*Solitay-wave solution for a complex one-dimensional field*”, Phys. Lett. **59A** (1976) 255-258.
- [126] Schwarz, J.H., “*Introduction to supersymmetry*”, CALT-68-1282. Doe Research and Development Report. “*Introduction to superstrings. Supersymmetry and supergravity*”, Trieste 1984, 426-448, World Sci. Publishing, Singapore 1984.
- [127] Schwarz, J.H., Nucl. Phys. **B31**, (1971) 1109.
- [128] Schwarz, J.H. y Seiberg, N., “*String theory, supersymmetry, unification and all that*”, American Physical Society Centenary of Reviews of Modern Physics, March 1999.
- [129] Scott Russell, J., Esq., M.A., F.R.S. Edin., made to the Meetings in 1842 y 1843. Report on Waves.
- [130] Sohnius, M., “*Introducing supersymmetry*”, Phys. Rep. **128**, (1985) 39-204.
- [131] Spiegel, M.R., “*Manual de fórmulas y tablas matemáticas*”, Schaum-Mcgraw-hill (1988).
- [132] Su, W.P., Schrieffer, J.R. y Heeger, A.J., Phys. Rev. Lett., **42** (1979) 1698.
- [133] Subbaswamy, K.R. y Trullinger, S.E., “*Intriguing properties of kinks in a simple model with a two-component field*”, Physica2D (1981) no. 2, 379-388.
- [134] Subbaswamy, K.R. y Trullinger, S.E., “*Inestability of non topological solitons of coupled scalar field theories in two dimensions*”, Phys. Rev. **D22** (1980) 1495-1496.
- [135] 't Hooft, G., Nucl. Phys. **B75** (1974) 461.
- [136] Takayama, H., Lin-Liu, Y.R. y Maki, J., Phys. Rev., **B21** (1980) 2388.
- [137] Townsend, P., “*Three Lectures on Supersymmetry and Extended Objects*”, Integrable systems, quantum groups and quantum field theories (Salamanca, 1992), 317-345, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci, 409, Kluwer Acad. Publi. Dordrecht 1993.
- [138] Veerman, J.J.P., Bazeia, D. y Moraes, F., “*Soliton stability in a $Z(2)$ field theory*”, Journal of Math. Physics **40**, 8 (1999) 3925-3929.

- [139] Vilenkin, A. y Shellard, E.P.S., *“Cosmic strings and other topological defects”*, Cambridge University Press, 1994.
- [140] Volkov, D.V. y Akulov, V.P., Phys. Lett. **46B**, (1973) 109.
- [141] Wess, J. y Bagger, J., *“Supersymmetry and Supergravity”*, Princeton University Press, Princeton, NJ 1992.
- [142] Wess, J. y Zumino, B., Nucl. Phys. **B78**, (1974) 1.
- [143] Wess, J. y Zumino, B., Phys. Lett. **B49** (1974) 52.
- [144] Witten, E., *“Non-Abelian bosonization in two dimensions”*, Physics, Springer-Verlag 1984, 455-471.
- [145] Witten, E., Nucl. Phys., **B249** (1985) 557.
- [146] Witten, E. y Olive, D., *“Supersymmetry algebras that include topological charges”*, Phys. Lett. **78B** no. 1 (1978) 97-101.
- [147] Witten, E., Phys. Rev. **16** (1977) 2991
- [148] Witten, E., *“Constraints on supersymmetry breaking”*, Nucl. Phys. **B202** (1982) 253-316.
- [149] Zhang, F. y Collins, M.A., Phys. Rev. E **49** (1994) 5804.
- [150] Zloshchastiev, K.G., *“Classical and quantum comparison of kink and bell soliton as zero-branes”*, Modern Physics Lett. **A15** (2000) no. 1, 67-81.
- [151] Zumino, B., *“Superspace”*, Lectures of Workshop on unification of the fundamental interaction, Erice, 17-24 March, 1980.
- [152] Zumino, B., *“Renormalization and invariance in quantum field theory”*, ed. E. Caianiello (Plenum Press, 1974).