

Luis Ferragut Canals
Mabel Asensio Sevilla

Métodos Numéricos avanzados para Ecuaciones en Derivadas Parciales

El Método de Elementos Finitos

Edición año 2021



2

Grupo de Investigación en Simulación Numérica y Cálculo
Científico
Universidad de Salamanca

Como Henri Poincaré comentó una vez, “solución de un problema matemático” es una frase de significado indefinido. Los matemáticos puros a veces se conforman con demostrar que la inexistencia de una solución implica una contradicción lógica, mientras que los ingenieros pueden considerar un resultado numérico como el único objetivo razonable. Tales opiniones unilaterales parecen reflejar limitaciones humanas en lugar de valores objetivos. En sí misma, la matemática es un organismo indivisible que une la contemplación teórica y la aplicación activa.

Richard Courant

Prefacio

Estos apuntes tienen su origen en una notas elaboradas por el Prof. Ferragut para la asignatura *Métodos Numéricos en Ecuaciones en Derivadas Parciales* [1] de la extinta Licenciatura de Matemáticas tras su llegada a la Universidad de Salamanca en 1995. Estas notas se han ido ampliando y corrigiendo durante los años de docencia de la asignatura *Cálculo Científico*, del actual grado de Matemáticas. Nuestro objetivo es que sigan creciendo e incorporando nuevos capítulos, es por tanto una obra en crecimiento. Esta versión sirve de material de consulta para el alumnado de la asignatura *Métodos Numéricos avanzados en Ecuaciones en Derivadas Parciales* del *Máster en Modelización Matemática* que nace con ilusión y esfuerzo en este complicado 2020.

La mayor parte de los contenidos de estos apuntes se basan en el clásico libro de P.A. Raviart y J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, de la Editorial Masson de 1983, perteneciente a la colección *Mathématiques appliquées par la maîtrise* dirigida por P.G. Ciarlet y J.L. Lions [2]. Este libro recoge el contenido del curso de Análisis Numérico avanzado impartido por P.A. Raviart en el D.E.A. de Análisis Numérico de la Universidad Pierre et Marie Curie (París VI) en el que se formó el Prof. Ferragut. No podemos dejar de mencionar el libro que Philippe G. Ciarlet publicó en 1978 titulado "The Finite Element Method for Elliptic Problems" [3], donde se analizan los aspectos matemáticos básicos del MEF y que merece nuestro reconocimiento personal pues fueron la base de estos cursos de Análisis Numérico avanzado.

Estos apuntes tratan de dar una visión general del Método de los Elementos Finitos (MEF), sin perder el rigor matemático imprescindible, pero sin alejarse de las aplicaciones y de la práctica.

El empleo de métodos de discretización espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas de ingeniería o física es conocido desde antiguo, y el concepto de *elemento finito* parte de esa idea. El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día está ligado en su origen al cálculo estructural aeroespacial. En 1943, R. Courant, en su artículo titulado *Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibrations* [4], propone la utilización de funciones polinómicas para la aproximación lineal de pro-

blemas de elasticidad en subdominios triangulares llamados *elementos*. El primer párrafo de este artículo recogido al inicio de este documento, refleja a la perfección el espíritu de estos apuntes, uniendo el rigor matemático con la resolución práctica de problemas reales.

J.H. Argyris fue otro de los pioneros en el desarrollo del MEF contribuyendo con estudios sobre la teoría matricial de estructuras para elementos discretos. No podemos olvidar a L. Schwartz, quien desarrolló en los años 40 la teoría de distribuciones necesaria para definir los espacios de Sobolev, y por la que recibió la medalla Fields en 1950.

El trabajo en el que se estableció por primera vez el concepto de Elemento Finito tal y como lo entendemos hoy es el artículo de M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin y L.J. Topp de 1953 titulado “Stiffness and deflection analysis of complex structures” [5], en el que se aplican elementos finitos simples (barras y placas triangulares) al análisis de estructuras aeronáuticas.

O.C. Zienkiewicz destacó por haber reconocido el potencial del MEF para resolver problemas en áreas fuera de la mecánica estructural. Sus libros sobre el MEF fueron los primeros en presentar el tema y hasta el día de hoy siguen siendo textos de referencia, como el clásico “The finite element method for solid and structural mechanics” publicado en 1967 junto con R.J. Taylor [6].

En la década de los 60, con la llegada de los centros de cálculo y los primeros programas comerciales, el MEF adquirió una gran popularidad en la industria, pero a la vez se avanzó en sus bases teóricas en los centros universitarios.

En los años 70, se estudian nuevos tipos de elementos y se sientan las bases matemáticas rigurosas del MEF. Lo que en principio surgió como una técnica de la ingeniería, empieza a entenderse como método numérico de las Matemáticas, y la bibliografía al respecto se multiplica. En 1973, Strang y Fix publicaron el primer libro de texto sobre las propiedades matemáticas del MEF titulado “An Analysis of The Finite Element Method” [7]. Sin embargo su aplicación práctica sigue estando aún limitada a caros ordenadores centrales en manos de la gran industria aeronáutica, de automoción, defensa o nuclear.

En los años 80, con el desarrollo de los ordenadores personales se extiende el uso de programas comerciales del MEF, que incluyen procesadores gráficos para la realización del mallado y la visualización de resultados. Se amplía el uso del MEF a gran variedad de problemas y se continúa con el análisis teórico del método.

El desarrollo práctico del MEF ha ido caminando parejo al desarrollo de las innovaciones en el campo de la arquitectura de los ordenadores. El descenso del coste de los ordenadores y el incremento en la potencia de cálculo, han permitido que el MEF haya desarrollado una increíble precisión en todos los ámbitos de la ingeniería.

Salamanca,
Agosto de 2020

Luis Ferragut
Mabel Asensio

Índice general

1. Espacios de Sobolev	1
1.1. Nociones sobre teoría de distribuciones	1
1.2. El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$	2
1.3. El espacio $H_0^1(\Omega)$	5
1.4. Teorema de la traza	11
1.5. Aplicaciones del teorema de la traza	17
1.6. Un resultado de compacidad	19
1.7. Los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$	19
2. Formulación débil de problemas elípticos	21
2.1. Problemas variacionales abstractos	21
2.2. Formulación débil de problemas unidimensionales	25
2.3. Problema de Dirichlet homogéneo asociado al operador $-\Delta$	29
2.4. Problema de Neumann homogéneo asociado al operador $-\Delta + Id$..	31
2.5. Problema de Dirichlet no homogéneo asociado al operador $-\Delta$	33
2.6. Problema de Neumann no homogéneo asociado al operador $-\Delta + Id$	36
2.7. Problema de contorno asociado a un operador elíptico de segundo orden	37
2.8. Un ejemplo sin unicidad	42
2.9. Deformación elástica de un sólido	45
2.10. Elasticidad plana	53
2.11. Sistema de Stokes	55
3. Aproximación numérica mediante el Método de Elementos Finitos ...	59
3.1. Aproximación variacional abstracta: Método de Galerkin	59
3.2. El M.E.F. para el problema modelo de dimensión 1 con funciones lineales a trozos	64
3.3. Construcción de espacios de Elementos Finitos	67
3.3.1. Generalidades	67
3.3.2. Concepto de Elemento Finito	68

3.3.3.	Elementos Finitos de Lagrange en un d -simplex	70
3.3.4.	Un método general para construir a partir de un elemento finito $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ toda una familia de elementos finitos (T, P, Σ)	74
3.3.5.	Construcción de subespacios de H^1	79
4.	Análisis numérico del Método de Elementos Finitos	83
4.1.	Resultados generales de aproximación en espacios de Sobolev	84
4.2.	Aplicación al análisis numérico del M.E.F. en problemas elípticos de segundo orden	93
5.	Aspectos prácticos y programación del M.E.F.	97
5.1.	Un Método de Elementos Finitos para el problema de Poisson	97
5.2.	Cálculo de la matriz del sistema de ecuaciones y del segundo miembro: Un ejemplo	102
5.3.	Un método general para el cálculo de matrices y vectores elementales	106
6.	El Método Multimalla	109
6.1.	Introducción	109
6.2.	Definiciones y Algoritmo Multimalla	111
6.2.1.	Descripción del problema	111
6.2.2.	Descripción del algoritmo multimalla	111
6.2.3.	Interpretación Matricial	113
6.3.	Análisis numérico del método multimalla	117
6.3.1.	Método de dos mallas	119
6.3.2.	Convergencia del Método multimalla, ciclo W ($\gamma = 2$)	127
6.3.3.	Convergencia del Método multimalla, ciclo V ($\gamma = 1$)	128
6.4.	Complejidad Algorítmica del Método Multimalla	132
6.5.	Anexo: Desigualdades de Hölder	136
7.	Problemas parabólicos	141
7.1.	La ecuación del calor	141
7.2.	Problemas parabólicos abstractos	143
7.3.	Semidiscretización espacial de problemas parabólicos	145
7.4.	Discretización total de problemas parabólicos	146
8.	Problemas hiperbólicos	147
8.1.	La ecuación de ondas	147
8.2.	Semidiscretización espacial de problemas hiperbólicos	149
8.3.	Discretización total de problemas hiperbólicos. Método de Newmark	150
	Referencias	151

Capítulo 1

Espacios de Sobolev

Resumen Este capítulo se centra en algunos resultados de análisis funcional necesarios para la formulación variacional de problemas en derivadas parciales. En concreto, se estudian los espacios de Sobolev y algunas de sus propiedades como la desigualdad de Poincaré, el teorema de la traza y algunas de sus aplicaciones que más nos interesan en este curso, como la fórmula de Green.

1.1. Nociones sobre teoría de distribuciones

Sea Ω un abierto no vacío de \mathbb{R}^d .

Definición 1.1 $\mathcal{D}(\Omega)$ es el espacio de funciones de clase $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω .

Utilizaremos la siguiente notación para las derivadas en $\mathcal{D}(\Omega)$: si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ es un multientero, con $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, denotamos

$$\partial^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

Pseudotopología en $\mathcal{D}(\Omega)$

Definición 1.2 si $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de $\mathcal{D}(\Omega)$ diremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$

si:

1. el soporte de φ_n permanece en un compacto fijo K de $\Omega \forall n$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ se tiene convergencia uniforme, es decir,

$$\sup_{x \in \Omega, \alpha \in \mathbb{N}^d} |\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Definición 1.3 Se denomina espacio de distribuciones sobre Ω , $\mathcal{D}'(\Omega)$, al dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, el espacio de las formas lineales continuas sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.

Pseudotopología en $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definición 1.4 si $\{T_n\}$ es una sucesión de $\mathcal{D}'(\Omega)$ diremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ejemplos:

1. Delta de Dirac:

Sea $a \in \Omega$, la delta de Dirac en a , δ_a se define $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

2. Espacio de funciones $L^2(\Omega)$:

Recordemos que $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles} : \int_{\Omega} f^2 dx < \infty\}$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(f, g)_{0, \Omega} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ y la correspondiente norma asociada $\|f\|_{0, \Omega} = (\int_{\Omega} f(x)^2 dx)^{1/2}$. Además $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$. A cada $f \in L^2(\Omega)$ le asociamos la distribución T_f definida por: $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La aplicación $L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ que asigna a cada función f la correspondiente distribución asociada T_f así definida es inyectiva y continua.

Derivación en el sentido de las distribuciones

Definición 1.5 Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución, se define la derivada de T respecto a x_i en el sentido de las distribuciones, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, como la siguiente distribución:

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De manera general, sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución y $\alpha \in \mathbb{N}^d$ un multientero, se define:

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Propiedades:

1. Si $f \in C^1(\Omega)$, su derivada clásica coincide con su derivada en el sentido de las distribuciones, es decir, $T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial T_f}{\partial x_i}$.
2. La aplicación $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ es continua.
3. Una distribución es infinitamente derivable en el sentido de las distribuciones.
4. La aplicación $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ es continua $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

1.2. El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$

Sea $f \in L^2(\Omega)$ que puede ser o no derivable en el sentido clásico, pero entendida como distribución, $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, podemos derivarla en el sentido de las distribuciones $\frac{\partial T_f}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \leq i \leq d$. En general, esta distribución no está en $L^2(\Omega)$,

pero si existe una función $g \in L^2(\Omega)$ tal que $T_g = \frac{\partial T_f}{\partial x_i}$ entonces podemos escribir $g = \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ en el sentido de las distribuciones, cumpliéndose,

$$\int_{\Omega} g \varphi dx = \langle T_g, \varphi \rangle = \langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Definición 1.6 Se llama espacio de Sobolev de orden 1 sobre Ω al espacio,

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d\}$$

donde las derivadas son en el sentido de las distribuciones.

Se dota a este espacio del siguiente producto escalar,

$$(u, v)_{1, \Omega} = \int_{\Omega} (uv + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx,$$

y la correspondiente norma asociada,

$$\|u\|_{1, \Omega} = (u, u)_{1, \Omega}^{1/2} = (\int_{\Omega} u^2 + \sum_{i=1}^d (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx)^{1/2}.$$

Teorema 1.1 $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la norma $\|\cdot\|_{1, \Omega}$.

Demostración:

Recordemos que un espacio de Hilbert es un espacio vectorial dotado de un producto escalar que es completo para la norma asociada, es decir, que toda sucesión de Cauchy es convergente. Basta pues demostrar que en $H^1(\Omega)$ toda sucesión de Cauchy es convergente para la norma $\|\cdot\|_{1, \Omega}$.

Sea $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$, por lo tanto,

$$\|v_n - v_m\|_{1, \Omega}^2 = \int_{\Omega} ((v_n - v_m)^2 + \sum_{i=1}^d (\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v_m}{\partial x_i})^2) dx \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

lo cual implica,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v_n - v_m)^2 dx &\xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0, \\ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d (\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v_m}{\partial x_i})^2 dx &\xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las sucesiones $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\}_{m=1}^{\infty}$ para $i = 1, \dots, d$, entendidas como sucesiones de $L^2(\Omega)$ son de Cauchy. Como $L^2(\Omega)$ es un espacio completo, estas sucesiones son convergentes en este espacio, es decir, existen funciones v y v_i , $1 \leq$

$i \leq d$, en $L^2(\Omega)$, tales que,

$$\begin{aligned} v_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} v, \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_i} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} v_i, \quad 1 \leq i \leq d. \end{aligned}$$

Basta demostrar que $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq d$, en el sentido de las distribuciones. Puesto que la inclusión canónica de $L^2(\Omega)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es continua, la convergencia de las sucesiones en $L^2(\Omega)$ implica la convergencia en $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir,

$$\begin{aligned} T_{v_n} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_v, \\ T_{\frac{\partial v_n}{\partial x_i}} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_{v_i}, \quad 1 \leq i \leq d. \end{aligned}$$

Por otro lado, la continuidad de la derivada en el sentido de las distribuciones implica,

$$\frac{\partial T_{v_n}}{\partial x_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial T_v}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Como además $\frac{\partial T_{v_n}}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial v_n}{\partial x_i}}$, $1 \leq i \leq d$ por ser $v_n \in H^1(\Omega)$, y el límite es único, entonces $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq d$, en el sentido de las distribuciones. ■

Teorema 1.2 $H^1(\Omega)$ es separable, es decir, tiene una parte densa numerable.

Demostración:

La demostración de este resultado se basa en las siguientes propiedades de los espacios separables:

1. el producto cartesiano de espacios separables es separable,
2. un subespacio cerrado de un espacio separable es separable.

$L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable, entonces el espacio producto $(L^2(\Omega))^{d+1}$ con la estructura hilbertiana producto es separable. Por otro lado, la aplicación,

$$J : v \mapsto \left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_d} \right)$$

de $H^1(\Omega)$ en $(L^2(\Omega))^{d+1}$ es una isometría, puesto que,

$$\|Jv\|_{(L^2(\Omega))^{d+1}} = (\|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^d \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} = \|v\|_{1,\Omega}.$$

Identificando $H^1(\Omega)$ con $J(H^1(\Omega))$, al ser este un subespacio cerrado del espacio separable $(L^2(\Omega))^{d+1}$, es separable, y por tanto $H^1(\Omega)$ es separable. ■

1.3. El espacio $H_0^1(\Omega)$

Sabemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ es un cierto subespacio de $L^2(\Omega)$. Nos preguntamos si $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H^1(\Omega)$, en general NO, pero si $\Omega = \mathbb{R}^d$ entonces si es cierto.

Definición 1.7 Se define $H_0^1(\Omega)$ como la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, es decir, $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.

Teorema 1.3 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^d)$, es decir, $H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$.

Demostración:

La demostración de este resultado se divide en dos partes: truncamiento y regularización. Con la regularización demostramos que el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en el espacio de las funciones de $H^1(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto, y con el truncamiento demostramos que este espacio es denso en $H^1(\mathbb{R}^d)$.

1- Truncamiento

Queremos aproximar las funciones de $H^1(\mathbb{R}^d)$ por funciones de $H^1(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto. Para ello introducimos una función $M \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que:

$$\begin{cases} M(x) = 1 & \text{para } |x| \leq 1 \\ 0 < M(x) < 1 & \text{para } 1 < |x| < 2 \\ M(x) = 0 & \text{para } |x| > 2 \end{cases}$$

Ahora, para todo número real $R > 0$, definimos la función $M_R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dada por:

$$M_R(x) = M\left(\frac{x}{R}\right) \quad \text{donde } \frac{x}{R} = \left(\frac{x_1}{R}, \dots, \frac{x_d}{R}\right).$$

Entonces, si $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, la función $M_R \cdot v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ y es de soporte compacto pues su soporte es el de M_R . Veamos ahora que $M_R \cdot v \xrightarrow{R \rightarrow \infty} v$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$ y habremos concluido. Para ello tenemos que demostrar dos cosas:

$$\begin{aligned} \mathbf{1-} & M_R \cdot v \xrightarrow{R \rightarrow \infty} v \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^d) \\ \mathbf{2-} & \frac{\partial M_R \cdot v}{\partial x_i} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^d) \quad \text{para } i = 1, \dots, d \end{aligned}$$

1- Tenemos que ver que $\|M_R \cdot v - v\|_{0, \mathbb{R}^d} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$, en efecto,

$$\begin{aligned} \|M_R \cdot v - v\|_{0, \mathbb{R}^d}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} (M_R \cdot v - v)^2 dx = \\ &= \int_{|x| < R} (M_R \cdot v - v)^2 dx + \int_{|x| \geq R} (M_R \cdot v - v)^2 dx \\ &= \int_{|x| \geq R} (M_R \cdot v - v)^2 dx \leq \int_{|x| \geq R} v^2 dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

2- Calculemos $\frac{\partial M_R \cdot v}{\partial x_i}$ en el sentido de las distribuciones.

$$\frac{\partial M_R \cdot v}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial M_R}{\partial x_i} \right) \cdot v + M_R \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

En el segundo término, M_R converge a 1 cuando $R \rightarrow \infty$. Veamos el primer término.

Tenemos que $\frac{\partial M_R}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial x_i} \left(\frac{x}{R} \right)$, por tanto $\forall i = 1, \dots, d$, se tiene que $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{\partial M_R}{\partial x_i}(x) = 0$. Así podemos concluir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial M_R}{\partial x_i} \cdot v \right)^2 dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial M_R}{\partial x_i} \right|^2 \int_{\mathbb{R}^d} v^2 dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

2- Regularización

Queremos demostrar que toda función de $H^1(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto se puede escribir como límite en $H^1(\mathbb{R}^d)$ de funciones $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Para ello definimos una función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que:

$$\begin{cases} \varphi \geq 0 \\ \varphi(x) = 0 \text{ si } |x| > 1 \\ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1 \end{cases}$$

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$, construimos la función $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ definida por $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ que verifica:

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon \geq 0 \\ \varphi_\varepsilon(x) = 0 \text{ si } |x| > \varepsilon \\ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1 \end{cases}$$

Consideramos la función regularizada $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \star v$, es decir,

$$v_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y)v(y)dy$$

Como v y φ_ε son de soporte compacto, v_ε también es de soporte compacto. Por las propiedades del producto de convolución y por ser $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tenemos que v_ε es C^∞ -diferenciable.

Por último, utilizando el resultado del lema que demostramos a continuación, tenemos:

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v \text{ en } L^2(\mathbb{R}^d) \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} &= \varphi_\varepsilon \star \frac{\partial v}{\partial x_i} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ en } L^2(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

Y así tenemos que $v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$. ■

Lema 1.1 Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi_\varepsilon \star f \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Demostración:

Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$, se puede considerar una sucesión $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y escribir,

$$\varphi_\varepsilon \star f - f = \varphi_\varepsilon \star f - \varphi_\varepsilon \star f_n + \varphi_\varepsilon \star f_n - f_n + f_n - f$$

Tomando la norma $\|\cdot\|_{0, \mathbb{R}^d}$,

$$\|\varphi_\varepsilon \star f - f\|_{0, \mathbb{R}^d} \leq \|\varphi_\varepsilon \star f - \varphi_\varepsilon \star f_n\|_{0, \mathbb{R}^d} + \|\varphi_\varepsilon \star f_n - f_n\|_{0, \mathbb{R}^d} + \|f_n - f\|_{0, \mathbb{R}^d}$$

Por un lado, por las propiedades del producto de convolución, y por ser $\|\varphi_\varepsilon\|_{0,1, \mathbb{R}^d} = 1$, tenemos,

$$\|\varphi_\varepsilon \star f - \varphi_\varepsilon \star f_n\|_{0, \mathbb{R}^d} = \|\varphi_\varepsilon \star (f - f_n)\|_{0, \mathbb{R}^d} \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{0,1, \mathbb{R}^d} \|f - f_n\|_{0, \mathbb{R}^d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por otro lado, obviamente,

$$\|f_n - f\|_{0, \mathbb{R}^d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por último, multiplicando por $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y) dy = 1$

$$\begin{aligned} (\varphi_\varepsilon \star f_n - f_n)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y) f_n(y) dy - f_n(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y) f_n(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y) dy f_n(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y) (f_n(y) - f_n(x)) dy = \\ &= \int_{|x-y| \leq \varepsilon} \varphi_\varepsilon(x-y) (f_n(y) - f_n(x)) dy, \end{aligned}$$

tomando valor absoluto,

$$\begin{aligned} |(\varphi_\varepsilon \star f_n - f_n)(x)| &\leq \int_{|x-y| \leq \varepsilon} |\varphi_\varepsilon(x-y)| |f_n(y) - f_n(x)| dy \leq \\ \sup_{y: |x-y| \leq \varepsilon} |f_n(y) - f_n(x)| &\int_{|x-y| \leq \varepsilon} |\varphi_\varepsilon(x-y)| dy = \\ \sup_{y: |x-y| \leq \varepsilon} |f_n(y) - f_n(x)| & \end{aligned}$$

Tenemos que $\sup_{y: |x-y| \leq \varepsilon} |f_n(y) - f_n(x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ uniformemente, por tanto $|(\varphi_\varepsilon \star f_n - f_n)(x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ uniformemente. Además φ_ε y f_n tienen soporte compacto, luego su producto de convolución también tiene soporte compacto. Sea $K = \text{sop} \varphi_\varepsilon \cup \text{sop} f_n$, entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_\varepsilon \star f_n - f_n|^2 dx \leq \sup_{y: |x-y| \leq \varepsilon} |f_n(y) - f_n(x)|^2 \int_K 1 dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

es decir, también tiende a 0 el término que faltaba para completar la demostración.

$$\|\varphi_\varepsilon \star f_n - f_n\|_{0, \mathbb{R}^d} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

■

Teorema 1.4 (Teorema de prolongación) Si $v \in H_0^1(\Omega)$, la función \tilde{v} , prolongación de v por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$, es una función de $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Demostración:

Para esta demostración utilizaremos repetidamente el teorema de prolongación de aplicaciones lineales continuas: Sea E un subespacio de un espacio normado \bar{E} , con E denso en \bar{E} , B un espacio de Banach y $f : E \rightarrow B$ una aplicación lineal continua, entonces existe una prolongación $\tilde{f} : \bar{E} \rightarrow B$ lineal y continua.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, evidentemente $\tilde{\varphi}$ prolongación de φ por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ es una función de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pues φ en la frontera de Ω es 0. Por tanto $\tilde{\varphi}$ sigue siendo de soporte compacto y C^∞ -diferenciable en todo \mathbb{R}^d . Además $\|\tilde{\varphi}\|_{1,\mathbb{R}^d} = \|\varphi\|_{1,\Omega}$ provisto $\mathcal{D}(\Omega)$ de la norma inducida por la de $H^1(\Omega)$. Por tanto, la siguiente aplicación es lineal y continua:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset H^1(\mathbb{R}^d) \\ \varphi &\longmapsto \tilde{\varphi} \end{aligned}$$

Por otro lado, $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, entonces utilizando teorema de prolongación de aplicaciones lineales continuas, esta aplicación se prolonga a una aplicación lineal continua,

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^d) \\ v &\longmapsto \tilde{v} \end{aligned}$$

Para concluir tenemos que ver que \tilde{v} es la prolongación por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. En efecto, sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ que converge a v en $H_0^1(\Omega)$, en particular converge en $L^2(\Omega)$. Por la continuidad de la aplicación ampliada, $\tilde{\varphi}_n$ converge a \tilde{v} en $H^1(\mathbb{R}^d)$ y también en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces podemos extraer una subsucesión $\{\tilde{\varphi}_{n_k}\}$ que converja a \tilde{v} casi por todas partes en \mathbb{R}^d , y por tanto,

$$\begin{aligned} \text{si } x \in \Omega \text{ se tiene que } \tilde{\varphi}_{n_k}(x) &= \varphi_{n_k}(x) \rightarrow v(x) = \tilde{v}(x) \\ \text{si } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \text{ se tiene que } \tilde{\varphi}_{n_k}(x) &= 0 \rightarrow 0 = \tilde{v}(x) \end{aligned}$$

■

Fórmula de Green para funciones de $H_0^1(\Omega)$:

Teorema 1.5

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega) \text{ se tiene } \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx \quad \forall i = 1, \dots, d$$

Demostración:

La demostración de basa en la fórmula de Green para funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ (integración por partes) y la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$.

Por la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, existen dos sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ que convergen respectivamente a u y v en la norma de $H^1(\Omega)$, por tanto, $\forall i = 1, \dots, d$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{en } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_i} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{en } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Green clásica a las funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n dx + \int_{\Gamma} u_n v_n \eta_i ds$$

Como son funciones de soporte compacto, la integral sobre la frontera es nula, y pasando al límite se concluye. ■

Definición 1.8 Se define la siguiente seminorma sobre $H^1(\Omega)$:

$$v \mapsto |v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

Esta aplicación es sólo seminorma porque hay funciones de $H^1(\Omega)$ que no son nulas pero sus derivadas sí lo son.

Teorema 1.6 (Desigualdad de Poincaré) Si Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^d , existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

Demostración:

Por la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, basta demostrar este resultado para funciones $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, luego tomando sucesiones convergentes queda demostrado $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Como Ω está acotado, podemos suponer que está contenido en una banda $\{x = (x', x_d), x' = (x_1, \dots, x_{d-1}), a \leq x_d \leq b\}$. Sea $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ y \tilde{v} su prolongación por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Obviamente $\tilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, y se tiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\tilde{v}(x', x_d) = \int_a^{x_d} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi) d\xi \leq \left(\int_a^{x_d} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi) \right)^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_a^{x_d} 1^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Tomando el cuadrado del valor absoluto,

$$|\tilde{v}(x', x_d)|^2 \leq (x_d - a) \int_a^{x_d} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi) \right|^2 d\xi \leq (x_d - a) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi) \right|^2 d\xi,$$

integrando respecto a la variable x' ,

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\tilde{v}(x', x_d)|^2 dx' \leq (x_d - a) \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x) \right|^2 dx,$$

finalmente, integrando respecto a la variable x_d ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{v}(x)|^2 dx = \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\tilde{v}(x', x_d)|^2 dx' dx_d \leq \frac{1}{2} (b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x) \right|^2 dx,$$

obteniendo,

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,\Omega}^2 &= \|\tilde{v}\|_{0,\mathbb{R}^d}^2 \leq \frac{1}{2} (b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x) \right|^2 dx = \frac{1}{2} (b-a)^2 \left\| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d} \right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} (b-a)^2 \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 = \frac{1}{2} (b-a)^2 \|v\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada, concluimos $\|v\|_{0,\Omega} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|v\|_{1,\Omega}$.

■

Observar que en la demostración anterior basta exigir que Ω sea acotado en una dirección.

Supongamos que Ω es acotado y definimos v tal que $v(x) = 1, \forall x \in \Omega$, esta función es de $H^1(\Omega)$ pero no verifica la desigualdad de Poincaré. Por tanto, podemos concluir el siguiente resultado:

Corolario 1.1 Si Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^d , entonces $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio propio de $H^1(\Omega)$, es decir, $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$.

Corolario 1.2 Si Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^d , entonces la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ es una norma sobre $H_0^1(\Omega)$ equivalente a la norma inducida por $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, es decir, existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \|v\|_{1,\Omega} \leq |v|_{1,\Omega} \leq C_2 \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración:

Es evidente que $C_2 = 1$, en efecto,

$$|v|_{1,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq \int_{\Omega} v^2 + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx = \|v\|_{1,\Omega}^2$$

Como Ω es acotado y $v \in H_0^1(\Omega)$, utilizando la desigualdad de Poincaré obtenemos $C_1 = 1/\sqrt{C^2(\Omega) + 1}$ despejando de:

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq (C^2(\Omega) + 1) \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 = (C^2(\Omega) + 1) |v|_{1,\Omega}^2$$

■

1.4. Teorema de la traza

Sea $\Gamma = \partial\Omega$, dada una función $v \in H^1(\Omega)$, queremos definir su valor en la frontera Γ .

Para $d = 1$, se tiene $H^1(I) \subset C^0(\bar{I})$, entonces como toda función $v \in H^1(I)$ tiene un representante continuo en \bar{I} , basta tomar el valor de este representante en los extremos del intervalo I para definir $v|_{\Gamma}$. Sin embargo, para $d \geq 2$, las funciones de $H^1(\Omega)$ no son en general continuas y hacen falta argumentos más sofisticados para definir su valor en la frontera.

Nuestro objetivo es estudiar si $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$, para así poder prolongar por continuidad la aplicación γ_0 ,

$$\begin{array}{ccc} \gamma_0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) & \longrightarrow & C^0(\Gamma) \\ & v \longmapsto & \gamma_0 v = v|_{\Gamma} \\ & & \Downarrow \\ \gamma_0 : H^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Gamma) \\ & v \longmapsto & \gamma_0 v = v|_{\Gamma} \end{array}$$

y así dar sentido al valor de las funciones $v \in H^1(\Omega)$ en Γ . Esta aplicación prolongada se llama APLICACIÓN TRAZA, y el valor de $\gamma_0 v$ de una función $v \in H^1(\Omega)$ se llama TRAZA de v en Γ .

$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ será denso en $H^1(\Omega)$ para Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^d con frontera Γ *suficientemente regular*. Veamos cuáles son estas condiciones de regularidad suficientes.

Caso A

Consideremos el caso más simple, $\Omega = \mathbb{R}_+^d$ donde

$$\mathbb{R}_+^d = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d, x_d > 0\}.$$

Entonces, la frontera de Ω es el hiperplano $\Gamma = \{x = (x', 0) \in \mathbb{R}^d, x' \in \mathbb{R}^{d-1}\}$.

Teorema 1.7 $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}_+^d})$ es denso en $H^1(\mathbb{R}_+^d)$.

Demostración:

De nuevo, esta demostración se divide en fase de truncamiento y fase de regularización.

1- Truncamiento

Queremos aproximar las funciones de $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ por funciones de $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ con soporte compacto en \mathbb{R}_+^d . La demostración es igual que en el caso anterior.

2- Regularización

Queremos demostrar que toda función de $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ con soporte compacto se puede escribir como límite en $H^1(\mathbb{R}_+^d)$ de funciones $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$. Se procede de nuevo mediante regularización por convolución, pero en este caso se plantean algunas dificultades.

Sea $v \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$ con soporte compacto en \mathbb{R}_+^d , para aplicar convolución necesitamos que sea una función ampliada de todo \mathbb{R}^d y luego volver a restringir a \mathbb{R}_+^d el producto de convolución. Sin embargo, si prolongamos $v \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$ por 0 a todo \mathbb{R}^d , la función prolongada no pertenece a $H^1(\mathbb{R}^d)$. Para resolver esta dificultad trasladamos la función.

Sea w_h la siguiente función $\tau_{-h}v = w_h(x', x_d) = v(x', x_d + h)$, definida para $x_d \geq -h$, y consideremos $v_h = w_h|_{\mathbb{R}_+^d}$. Veamos que $v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} v$ en $H^1(\mathbb{R}_+^d)$, para ello basta ver que $v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} v$ en $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ y observar que $\tau_{-h} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{-h}v)$. Para demostrar que $v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} v$ en $L^2(\mathbb{R}_+^d)$, por densidad, basta demostrarlo para $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$.

Sea $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$, por tanto tiene soporte compacto dentro de \mathbb{R}_+^d , luego podemos ampliarla por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{R}_+^d$ y la función ampliada $\tilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Por Cauchy-Schwarz, tenemos,

$$\begin{aligned} (\tau_{-h}\tilde{v} - \tilde{v})(x) &= \tilde{v}(x', x_d + h) - \tilde{v}(x', x_d) = \int_0^1 h \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th) dt \leq \\ &\left(\int_0^1 h^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th) \right)^2 dt \right)^{1/2} = h \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th) \right)^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

integrando el cuadrado en todo \mathbb{R}^d ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{-h}\tilde{v} - \tilde{v})^2(x) dx &\leq h^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th) \right)^2 dt dx = \\ h^2 \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x) \right)^2 dx &= h^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(x) \right)^2 dx \leq h^2 |\tilde{v}|_{1, \mathbb{R}^d}^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

y finalmente, siendo $v_h = \tau_{-h}\tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d}$, tenemos,

$$\|v_h - v\|_{0, \mathbb{R}_+^d}^2 = \int_{\mathbb{R}_+^d} (v_h - v)^2 dx = \int_{\mathbb{R}_+^d} (\tau_{-h}\tilde{v} - \tilde{v})^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{-h}\tilde{v} - \tilde{v})^2 dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Una vez que hemos demostrado que $v_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} v$ en $H^1(\mathbb{R}_+^d)$, podemos limitar nuestro estudio a funciones v que son restricciones a \mathbb{R}_+^d de funciones $w \in H^1(\mathbb{R}_{-h}^d)$ y de soporte compacto.

Sea $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{-h}^d)$ tal que $\psi = 1$ en el *sop*(v) y $\psi = 0$ cuando $x_d \leq -h/2$. Naturalmente $\psi w_h \in H^1(\mathbb{R}_{-h}^d)$, se anula en un entorno de la frontera de \mathbb{R}_{-h}^d y su

prolongación por 0 a todo \mathbb{R}^d , $\widetilde{\psi w_h}$, pertenece a $H^1(\mathbb{R}^d)$. Ahora ya estamos en condiciones de aplicar regularización por convolución, por tanto, existe una sucesión de funciones $\varphi_\varepsilon \star \widetilde{\psi w_h}$ tales que $\varphi_\varepsilon \star \widetilde{\psi w_h} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \widetilde{\psi w_h}$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$. Por las propiedades del producto de convolución, a partir de un ε suficientemente pequeño, se tiene,

$$\text{sop}(\varphi_\varepsilon \star \widetilde{\psi w_h}) \subset \text{sop}(\varphi_\varepsilon) + \text{sop}(\widetilde{\psi w_h}) \subset \mathbb{R}_{-h}^d$$

por tanto, tomando restricciones a \mathbb{R}_{-h}^d ,

$$(\varphi_\varepsilon \star \widetilde{\psi w_h})|_{\mathbb{R}_{-h}^d} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi w_h \text{ en } H^1(\mathbb{R}_{-h}^d),$$

y tomando restricciones a \mathbb{R}_+^d ,

$$(\varphi_\varepsilon \star \widetilde{\psi w_h})|_{\mathbb{R}_+^d} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi w_h|_{\mathbb{R}_+^d} \text{ en } H^1(\mathbb{R}_+^d),$$

donde naturalmente $(\varphi_\varepsilon \star \widetilde{\psi w_h})|_{\mathbb{R}_+^d} \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$

■

Lema 1.2 Para toda función v de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$ se tiene la desigualdad

$$\|v(\cdot, 0)\|_{0, \mathbb{R}^{d-1}} \leq \|v\|_{1, \mathbb{R}_+^d}$$

Demostración:

Sea $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$, por el teorema fundamental del cálculo integral,

$$|v(x', 0)|^2 = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_d} |v(x', x_d)|^2 dx_d = -2 \int_0^\infty v(x', x_d) \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', x_d) dx_d,$$

utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$|v(x', 0)|^2 \leq 2 \left(\int_0^\infty |v(x', x_d)|^2 dx_d \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', x_d) \right|^2 dx_d \right)^{1/2},$$

y la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$|v(x', 0)|^2 \leq \int_0^\infty \left(|v(x', x_d)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', x_d) \right|^2 \right) dx_d,$$

de modo que concluimos integrando en x' ,

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, 0)\|_{0, \mathbb{R}^{d-1}} &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(x', 0)|^2 dx' \leq \\ &\int_{\mathbb{R}_+^d} \left(|v(x', x_d)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_d}(x', x_d) \right|^2 \right) dx \leq \|v\|_{1, \mathbb{R}_+^d}^2. \end{aligned}$$



Corolario 1.3 (*Teorema de la traza en \mathbb{R}_+^d*) La aplicación lineal continua

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1}) \subset L^2(\mathbb{R}^{d-1}) \\ v &\longmapsto v(\cdot, 0) \end{aligned}$$

se prolonga por continuidad a una aplicación lineal continua

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{R}_+^d) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{d-1}) \\ v &\longmapsto v(\cdot, 0) \end{aligned}$$

verificándose además $\forall v \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$

$$\|v(\cdot, 0)\|_{0, \mathbb{R}^{d-1}} \leq \|v\|_{1, \mathbb{R}_+^d}.$$

Caso B

Definición 1.9 Un abierto Ω de \mathbb{R}^d se dice que es 1-regular si es acotado y su frontera Γ es una variedad de clase C^1 de dimensión $d - 1$.

Esto significa que existe un número finito de abiertos acotados θ_i de \mathbb{R}^d , $0 \leq i \leq I$, tales que $\overline{\theta_0}$ está incluido en Ω , $\{\theta_i\}_{i=0}^I$ es un recubrimiento abierto de $\overline{\Omega}$, y para todo $i = 1, \dots, I$ existe una aplicación invertible de clase C^1 $\varphi_i : x \mapsto y = \varphi_i(x)$ de θ_i en B , bola abierta de \mathbb{R}^d de radio 1, cuya aplicación inversa φ_i^{-1} también es de clase C^1 y tal que

$$\varphi_i(\theta_i \cap \Omega) = B \cap \mathbb{R}_+^d = \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^d, |y'| < 1, y_d > 0\},$$

$$\varphi_i(\theta_i \cap \Gamma) = \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^d, |y'| < 1, y_d = 0\}.$$

Diremos que $\{\theta_i, \varphi_i\}_{i=1}^I$ es un sistema de cartas locales que definen Γ .

Vamos a demostrar el teorema de la traza para $\Omega \in \mathbb{R}^d$ abierto 1-regular, pero también se puede generalizar a abiertos acotados con frontera de clase C^1 a trozos.

La demostración se hace en varias etapas, a través de los siguientes lemas.

Lema 1.3 Si Ω es 1-regular, existe un operador P lineal continuo llamado de 1-prolongación $P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$, tal que

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad Pv = v \quad \text{casi por todas partes en } \Omega.$$

Demostración:

Veamos primero el caso de $\Omega = \mathbb{R}_+^d$ y luego por cartas locales y partición de la unidad lo extenderemos al caso de Ω un abierto 1-regular.

Caso: $\Omega = \mathbb{R}_+^d$

Si $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$, sea Pv su prolongación por reflexión,

$$Pv(x', x_d) = \begin{cases} v(x', x_d) & \text{si } x_d \geq 0 \\ v(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0 \end{cases}$$

Pv es continua, está en $H^1(\mathbb{R}^d)$ y se tiene,

$$\frac{\partial Pv}{\partial x_i}(x', x_d) = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', x_d) & \text{si } x_d \geq 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0 \text{ y } 1 \leq i \leq d-1 \\ -\frac{\partial v}{\partial x_i}(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que $\|Pv\|_{1, \mathbb{R}^d} = \sqrt{2}\|v\|_{1, \mathbb{R}_+^d}$ que nos da la continuidad de la aplicación $P: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset H^1(\mathbb{R}^d)$.

Como $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^d})$ es denso en $H^1(\mathbb{R}_+^d)$, esta aplicación se prolonga por continuidad a todo $H^1(\mathbb{R}_+^d)$, verificando que $Pv(x) = v(x)$ casi por todo \mathbb{R}_+^d .

Caso: Ω abierto 1-regular

Sea $\{\alpha_i\}_{i=1}^I$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{\theta_i\}_{i=1}^I$, es decir, $\alpha_i \in \mathcal{D}(\theta_i)$, $\forall i = 0, \dots, I$ y $\sum_{i=1}^I \theta_i = 1$. Si $v \in H^1(\Omega)$, escribimos,

$$v = \sum_{i=1}^I \alpha_i v,$$

y para cada $i = 0, 1, \dots, I$ definimos $P(\alpha_i v)$ de modo que,

$$Pv = \sum_{i=1}^I P(\alpha_i v).$$

Por un lado, $P(\alpha_0 v) = \widetilde{\alpha_0 v}$, prolongación de $\alpha_0 v$ por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Por otro lado, para $i = 1, \dots, I$, consideramos la función $w_i = (\alpha_i v) \circ (\varphi_i^{-1}|_{B_+})$, donde $B_+ = B \cap \mathbb{R}_+^d$. Se tiene que $w_i \in H^1(B_+)$ y es nula en un entorno de $\{y \in \partial B_+; y_d > 0\}$, entonces podemos prolongar w_i por 0 en $\mathbb{R}_+^d \setminus B_+$ y obtener una función $\widetilde{w}_i \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$, y ésta a su vez prolongarla por reflexión a una función $\overline{w}_i \in H^1(\mathbb{R}^d)$ de soporte compacto en B . Finalmente, $\overline{w}_i \circ \varphi_i$ definido en θ_i se prolonga por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \theta_i$ de modo que $\widetilde{\overline{w}_i \circ \varphi_i}$ es una función de $H^1(\mathbb{R}^d)$. De este modo definimos $P(\alpha_i v) = \widetilde{\overline{w}_i \circ \varphi_i}$ para $i = 1, \dots, I$.

Ahora es fácil verificar que la aplicación $v \rightarrow \sum_{i=0}^I P(\alpha_i v)$ verifica las condiciones del lema. ■

Lema 1.4 Si Ω es 1-regular, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$.

Demostración:

: Sea $v \in H^1(\Omega)$ y $Pv \in H^1(\mathbb{R}^d)$ su prolongación a todo \mathbb{R}^d . Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^d)$ existe una sucesión $\{w_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Pv$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$. Sea $v_n = w_n|_\Omega$, la sucesión $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v$ en $H^1(\Omega)$. ■

Para el tercer lema utilizaremos la siguiente notación $d\sigma$ denota la medida superficial sobre Γ , inducida por la medida Lebesgue dx . Así definimos $L^2(\Gamma)$ el conjunto de las funciones definidas sobre Γ medibles para la medida $d\sigma$ y de cuadrado integrable, con la norma $\|v\|_{0,\Gamma} = \left(\int_\Gamma v^2 d\sigma\right)^{1/2}$.

De manera equivalente, utilizando la partición de la unidad, podemos definir,

$$L^2(\Gamma) = \{v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad \widetilde{(\alpha_i v)} \circ \varphi_i^{-1}(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R}^{d-1}), \quad 1 \leq i \leq I\}$$

con la norma

$$\|v\|_{0,\Gamma} = \left(\sum_{i=1}^I \|\widetilde{(\alpha_i v)} \circ \varphi_i^{-1}\|_{0,\mathbb{R}^{d-1}}^2\right)^{1/2}$$

que es equivalente a la anterior, es decir, existen constantes C_1 y C_2 tales que $C_1 \|v\|_{0,\Gamma} \leq \|v\|_{0,\Gamma} \leq C_2 \|v\|_{0,\Gamma}$.

Lema 1.5 *Si Ω es 1-regular, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \quad \|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} \leq C \|v\|_{1,\Omega}.$$

Demostración:

: Sea $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, utilizando la partición de la unidad $\{\alpha_i\}_{i=1}^I$, definimos en B_+ las funciones $w_i = (\alpha_i v) \circ \varphi_i^{-1}$, para $1 \leq i \leq I$. Sea \tilde{w}_i su prolongada por 0 a todo \mathbb{R}_+^d . Según el teorema de la traza en \mathbb{R}_+^d , se tiene que $\|\tilde{w}_i(\cdot, 0)\|_{0,\mathbb{R}^{d-1}} \leq \|\tilde{w}_i\|_{1,\mathbb{R}_+^d}$, y por las propiedades de α_i y φ_i , se deduce $\|\tilde{w}_i\|_{1,\mathbb{R}_+^d} \leq C_i \|v\|_{1,\Omega}$. Finalmente, por la equivalencia anterior de normas, se concluye,

$$\begin{aligned} \|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} &\leq C_2 \|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} = C_2 \left(\sum_{i=1}^I \|\widetilde{w_i(\cdot, 0)}\|_{0,\mathbb{R}^{d-1}}^2\right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_2 \left(\sum_{i=1}^I C_i^2\right)^{1/2} \|v\|_{1,\Omega} = C \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

El teorema de la traza es consecuencia directa de estos tres resultados. ■

Teorema 1.8 (Teorema de la Traza) *Sea Ω un abierto 1-regular de \mathbb{R}^d . Entonces $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ y la aplicación lineal continua $\gamma_0 : v \mapsto \gamma_0 v = v|_\Gamma$ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ en $L^2(\Gamma)$ se prolonga por continuidad a una aplicación lineal continua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$, que denotamos también γ_0 , llamada aplicación traza.*

1.5. Aplicaciones del teorema de la traza

Fórmula de Green para funciones de $H^1(\Omega)$.

Denotamos por η_i la i -ésima componente del vector normal unitario exterior de Ω .

Teorema 1.9 *Sea Ω un abierto 1-regular de \mathbb{R}^d . Entonces $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ se tiene,*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Gamma} uv \eta_i d\sigma, \quad \forall i = 1, \dots, d.$$

Demostración:

: Si $u, v \in H^1(\Omega)$, entonces existen sendas sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tales que convergen respectivamente a u y v en $H^1(\Omega)$.

Para $u_n, v_n \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es válida la fórmula de Green,

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n dx + \int_{\Gamma} u_n v_n \eta_i d\sigma, \quad \forall i = 1, \dots, d.$$

Se concluye pasando al límite, puesto que por la continuidad de la aplicación traza, $u_n|_{\Gamma}$ y $v_n|_{\Gamma}$ convergen respectivamente a $u|_{\Gamma}$ y $v|_{\Gamma}$ en $L^2(\Gamma)$. ■

Caracterización del espacio $H_0^1(\Omega)$.

El teorema de la traza también nos permite caracterizar de forma más sencilla el subespacio $H_0^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$.

Teorema 1.10 *Sea Ω un abierto 1-regular de \mathbb{R}^d . Entonces $H_0^1(\Omega)$ es el núcleo de la aplicación traza $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$, esto es,*

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} = 0\}$$

Demostración:

Sea $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v$ en $H^1(\Omega)$. Por la continuidad de la aplicación traza, $\|\gamma_0 \varphi_n - \gamma_0 v\|_{0,\Gamma} \leq C \|\varphi_n - v\|_{1,\Omega}$, de donde $\gamma_0 \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma_0 v$ en $L^2(\Gamma)$. Como las funciones φ_n son de soporte compacto en Ω , entonces $\gamma_0 \varphi_n = 0 \forall n$, y por tanto $\gamma_0 v = 0$ en Γ .

La demostración del recíproco es más delicada. Lo demostraremos para $\Omega = \mathbb{R}_+^d$, pues por cartas locales y partición de la unidad se generaliza al caso Ω abierto 1-regular.

Sea pues $v \in \{v \in H^1(\mathbb{R}_+^d) : \gamma_0 v = v(\cdot, 0) = 0\}$ y queremos demostrar que $v \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$, es decir, que se puede aproximar por funciones $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$. Buscamos una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ en $H^1(v)$.

Sea \tilde{v} la prolongación por 0 de v a todo \mathbb{R}^d . Es fácil ver que $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Obviamente $\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y también $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\forall i = 1, \dots, d$. Basta demostrar que $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} = \widetilde{\frac{\partial v}{\partial x_i}}$, $\forall i = 1, \dots, d$ y tendremos que $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^d)$. En efecto, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, aplicando la fórmula de Green y teniendo en cuenta que $v(\cdot, 0) = 0$, tenemos que $\forall i = 1, \dots, d$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle \tilde{v}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_{\mathbb{R}_+^d} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx - \\ &\int_{\{(x', 0), x' \in \mathbb{R}^{d-1}\}} v \varphi \gamma_i d\sigma = \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Como en los casos anteriores, tenemos que hacer producto de convolución por una sucesión regularizante, $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pero de nuevo el soporte de $\varphi_\varepsilon \star \tilde{v}$ puede estar fuera de \mathbb{R}_+^d . Para evitarlo nos trasladamos una magnitud h definiendo $\tau_h \tilde{v}(x', x_d) = \tilde{v}(x', x_d - h)$. Ya demostramos que $\tau_h \tilde{v} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{v}$ y que además $\text{supp } \tau_h \tilde{v} \subset \mathbb{R}_+^d$, por tanto $\tau_h \tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d}$ en $H^1(\mathbb{R}_+^d)$. Por otro lado, $\text{supp } (\varphi_\varepsilon \star \tau_h \tilde{v}) \subset \mathbb{R}_+^d$ y como ya vimos $\varphi_\varepsilon \star \tau_h \tilde{v} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_h \tilde{v}$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$. Con ambas cosas, $\varphi_\varepsilon \star \tau_h \tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, h \rightarrow 0} \tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d}$ en $H^1(\mathbb{R}_+^d)$, siendo $\varphi_\varepsilon \star \tau_h \tilde{v}|_{\mathbb{R}_+^d} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d)$ la sucesión buscada. ■

Construcción de subespacios de $H^1(\Omega)$ de dimensión finita.

En el capítulo 3 estudiaremos la construcción de subespacios de dimensión finita de $H^1(\Omega)$. Para ello se procederá a construir funciones de $H^1(\Omega)$ mediante funciones a “trozos”. Será de gran utilidad el siguiente resultado.

Sea $\overline{\Omega} = \cup_{r=1}^N \overline{\Omega}_r$ una descomposición de Ω tal que:

- Ω_r es un abierto de \mathbb{R}^d contenido en Ω con frontera Γ_r de clase C^1 , para todo $r = 1, \dots, N$,
- $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$ para $r \neq s$.

Teorema 1.11 *Sea $v \in C^0(\overline{\Omega})$ tal que la restricción $v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r) \forall r = 1, \dots, N$, entonces $v \in H^1(\Omega)$.*

Demostración:

: Sea $v \in C^0(\overline{\Omega})$ con $v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r)$, $\forall r = 1, \dots, N$. Evidentemente $v \in L^2(\Omega)$, veamos que también las derivadas en el sentido de las distribuciones $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ son también funciones de $L^2(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, d$. Definimos $v_i \in L^2(\Omega)$ tal que $v_i|_{\Omega_r} = \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{\Omega_r}$, $\forall r = 1, \dots, N$, veamos que $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ en el sentido de las distribuciones. En efecto,

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se tiene,

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \rangle &= -\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \\ \sum_{r=1}^N \left(\int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx - \int_{\partial \Omega_r} v \varphi \eta_i d\sigma \right) &= \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx \\ \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} v_i \varphi dx &= \int_{\Omega} v_i \varphi dx = \langle v_i, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Entonces $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ y por tanto $v \in H^1(\Omega)$. ■

1.6. Un resultado de compacidad

El siguiente resultado se llama teorema de Rellich, y será útil para las sucesiones pues nos permite afirmar que en las condiciones del teorema de la traza, dada una sucesión acotada en $H^1(\Omega)$, podemos extraer una subsucesión convergente en $L^2(\Omega)$.

Teorema 1.12 *Sea Ω un abierto 1-regular de \mathbb{R}^d . Entonces la inyección canónica de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, es decir, todo subconjunto acotado de $H^1(\Omega)$ es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$.*

1.7. Los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$

Generalicemos la definición del espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$.

Definición 1.10 *Para todo entero $m \geq 1$ llamamos espacio de Sobolev de orden m sobre Ω al espacio*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

dotado del producto escalar,

$$(u, v)_{m, \Omega} = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \right) dx,$$

la norma asociada,

$$\|u\|_{m, \Omega} = (u, u)_{m, \Omega}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u)^2 dx \right)^{1/2},$$

y la seminorma,

$$|u|_{m, \Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} (\partial^{|\alpha|} u)^2 dx \right)^{1/2},$$

Teorema 1.13 $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable para la norma

$$\|\cdot\|_{m,\Omega}$$

La demostración es idéntica al caso $m = 1$.

Caso particular $H^2(\Omega)$.

Si Ω es 1-regular, se puede definir la traza de una función $v \in H^2(\Omega)$, $\gamma_0 v = v|_\Gamma$. Por otro lado, si $v \in H^2(\Omega)$ entonces $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$, $1 \leq i \leq d$, y por tanto también se pueden definir las trazas de estas funciones $\gamma_0 \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}|_\Gamma$, $1 \leq i \leq d$, que pertenecen a $L^2(\Gamma)$. La función $\eta_i \frac{\partial v}{\partial x_i}|_\Gamma$ es entonces una función de $L^2(\Gamma)$ por ser producto de una función de $L^\infty(\Gamma)$ y otra de $L^2(\Gamma)$, y podemos definir la derivada normal,

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}|_\Gamma = \sum_{i=1}^d \eta_i \frac{\partial v}{\partial x_i}|_\Gamma$$

como una función de $L^2(\Gamma)$.

Sea $\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ el Laplaciano de una distribución u . Entonces si $u \in H^2(\Omega)$, se tiene para toda función $v \in H^1(\Omega)$,

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v dx = -\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = \sum_{i=1}^d \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \eta_i d\sigma \right\},$$

de donde se obtiene la fórmula de Green generalizada.

Teorema 1.14 (Fórmula de Green generalizada) Si Ω es 1-regular, para toda función u de $H^2(\Omega)$ y toda función v de $H^1(\Omega)$, se tiene:

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma.$$

Nota: para $m > d/2$ las funciones de $H^m(\Omega)$ son continuas, en particular, si Ω es un abierto de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , entonces $H^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$.

Capítulo 2

Formulación débil de problemas elípticos

Resumen En este capítulo veremos la formulación débil o variacional de algunos problemas elípticos lineales que permitan una demostración fácil de la existencia y la unicidad de las soluciones y que además se adapten bien a la aproximación numérica que se presentará en el siguiente capítulo. Este tipo de problemas tienen muchas aplicaciones físicas, en concreto detallaremos el problema de la deformación elástica de un sólido.

2.1. Problemas variacionales abstractos

Vamos a introducir un marco abstracto bien adaptado para problemas de contorno asociados a ecuaciones en derivadas parciales. Sean:

1. V un **espacio de Hilbert** sobre \mathbb{R} de norma $\|\cdot\|$,
2. una **forma bilineal** $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ **continua**, es decir, existe una constante $M \geq 0$ tal que $\forall u, v \in V, a(u, v) \leq M\|u\|\|v\|$, y **V -elíptica**¹, es decir, existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2$,
3. y una **forma lineal** $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ **continua**, es decir, $\forall v \in V, |L(v)| \leq \|L\|_* \cdot \|v\|$, donde $\|L\|_* = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{L(v)}{\|v\|}$

Consideramos el siguiente problema variacional:

$$(P) \quad \text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

La existencia y unicidad de la solución de este problema nos la da el teorema de Lax-Milgram.

¹ Esta propiedad también se llama coerciva o fuertemente coerciva.

Teorema 2.1 (Teorema de Lax-Milgram) *Si se verifican las condiciones 1, 2 y 3, el problema (P) tiene solución única.*

Observar que si suponemos que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es además simétrica, entonces $a(\cdot, \cdot)$ es un producto escalar en V con norma asociada $\|v\|_E = (a(v, v))^{1/2}$, que es equivalente a la norma $\|\cdot\|$ de V . En este caso, la existencia y unicidad de la solución del problema (P) viene dada por el teorema de Riesz-Frechet.

Demostración:

Introducimos el siguiente operador,

$$\begin{aligned} A : V &\longrightarrow V \\ u &\longmapsto Au \end{aligned}$$

definido por $(Au, v) = a(u, v) \forall v \in V$ donde (\cdot, \cdot) designa el producto escalar en V . Esta aplicación está bien definida pues fijado u , la aplicación $v \mapsto a(u, v)$ es lineal y continua de V en \mathbb{R} , y por el teorema de Riesz-Frechet se puede representar dicha aplicación por un único elemento de V que llamaremos Au .

Evidentemente la aplicación A es lineal y continua por serlo $a(\cdot, \cdot)$, y además verifica,

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|v\|} \leq M \|u\| \\ (Av, v) &\geq \alpha \|v\|^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, al ser L una forma lineal continua sobre V , aplicando de nuevo el teorema de Riesz-Frechet, existe un único $\tau L \in V$ tal que $\forall v \in V$ se tiene $L(v) = (\tau L, v)$.

Observar que esto define una biyección lineal,

$$\begin{aligned} \tau : V' &\longrightarrow V \\ L &\longmapsto \tau L \end{aligned}$$

que es una isometría puesto que,

$$\|\tau L\| = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{(\tau L, v)}{\|v\|} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{L(v)}{\|v\|} = \|L\|_*$$

Entonces el problema (P) se puede escribir de la siguiente forma,

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } (Au, v) = (\tau L, v) \quad \forall v \in V,$$

esto es,

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } Au = \tau L.$$

Para demostrar que este problema, en su última versión, tiene solución única utilizaremos el teorema de Punto Fijo de Banach para contracciones estrictas. Para

ello, dado un $\rho > 0$ que elegiremos más adelante de forma apropiada, escribimos nuestro problema de la siguiente forma,

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } u = u - \rho(Au - \tau L).$$

De este modo, tenemos definida una aplicación,

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v - \rho(Av - \tau L) \end{aligned}$$

cuyo punto fijo sería solución de nuestro problema. Para demostrar que esta aplicación tiene un único punto fijo bastará demostrar que es una contracción estricta puesto que al ser V un espacio de Hilbert y por tanto completo, podremos aplicar el teorema de Banach que asegura en este caso la existencia de un único punto fijo.

En efecto, se tiene que,

$$\begin{aligned} \|Tv_1 - Tv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho(A(v_1 - v_2))\|^2 = \\ &= \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2) + \rho^2\|A(v_1 - v_2)\|^2 \leq \\ &(1 - 2\alpha\rho + \rho^2M^2)\|v_1 - v_2\|^2 \end{aligned}$$

luego para que T sea una contracción estricta basta tomar ρ de modo que $1 - 2\alpha\rho + \rho^2M^2 < 1$, y esto es cierto para $0 < \rho < 2\alpha/M^2$.

Por tanto para cada ρ entre 0 y $2\alpha/M^2$ hemos demostrado que existe una solución del problema (P) , veamos que esta es única independientemente del valor de ρ elegido. Supongamos que existen u_1 y u_2 dos soluciones de (P) , entonces,

$$\begin{aligned} a(u_1, v) &= L(v) \quad \forall v \in V, \\ a(u_2, v) &= L(v) \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Restando $a(u_1 - u_2, v) = 0, \forall v \in V$, en particular, $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$, y por la V -elipticidad de la aplicación bilineal, $0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha\|u_1 - u_2\|^2$. Por tanto $u_1 = u_2$. ■

Corolario 2.1 *La solución del problema (P) está acotada por los datos, es decir,*

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_*$$

donde α es la constante de elipticidad de la aplicación bilineal.

Demostración:

Basta con elegir $v = u$ en el problema (P) , y por la elipticidad de la aplicación bilineal se tiene,

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) = L(u)$$

Por otro lado, la aplicación lineal L es continua, por tanto

$$|L(u)| \leq \|L\|_* \|u\|$$

de donde se concluye el resultado. ■

Cuando la aplicación bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es además simétrica, el problema (P) es equivalente a un problema de optimización.

Teorema 2.2 *Si se verifican las condiciones 1, 2 y 3, y además $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica y verifica $a(v, v) \geq 0 \forall v \in V$, entonces el problema (P) es equivalente al siguiente problema de optimización,*

$$(Q) \quad \text{Hallar } u \in V \text{ tal que } J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

$$\text{donde } J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Demostración:

Sea u solución del problema (P) . Sea $v \in V$ cualquiera con $v \neq u$, es decir, $v = u + w$ con $w \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u + w) = \frac{1}{2}a(u + w, u + w) - L(u + w) = \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + a(u, w) + \frac{1}{2}a(w, w) - L(u) - L(w) = \\ &= J(u) + a(u, w) - L(w) + \frac{1}{2}a(w, w). \end{aligned}$$

Como u es solución de (P) , entonces $a(u, w) = L(w)$, por otro lado $a(w, w) \geq 0$, por tanto,

$$J(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(w, w) \geq J(u),$$

y esto es cierto $\forall v \in V$ con $v \neq u$.

Veamos la demostración del recíproco. Sea u solución del problema de optimización (Q) , entonces $\forall v \in V$ y $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(u + \lambda(v - u)) \\ J(u) &\leq \frac{1}{2}a(u + \lambda(v - u), u + \lambda(v - u)) - L(u + \lambda(v - u)) \\ J(u) &\leq \frac{1}{2}a(u, u) + \lambda a(u, v - u) + \frac{\lambda^2}{2}a(v - u, v - u) - L(u) - \lambda L(v - u) \\ 0 &\leq \lambda a(u, v - u) + \frac{\lambda^2}{2}a(v - u, v - u) - \lambda L(v - u) \\ 0 &\leq \frac{\lambda}{2}a(v - u, v - u) + a(u, v - u) - L(v - u). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\lambda \rightarrow 0^+$, tenemos,

$$0 \leq a(u, v - u) - L(v - u).$$

Como esta desigualdad es cierta $\forall v \in V$, podemos tomar $v + u$ en lugar de v , de donde,

$$0 \leq a(u, v) - L(v), \quad \forall v \in V,$$

y de la misma forma, tomando $-v$ en lugar de v ,

$$0 \geq a(u, v) - L(v), \quad \forall v \in V,$$

de donde se deduce,

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

■

2.2. Formulación débil de problemas unidimensionales

Problema de Dirichlet homogéneo asociado al operador $-d^2/dx^2$

Sea $I = (a, b) \in \mathbb{R}$ un intervalo de la recta real, $f \in L^2(I)$, consideremos el problema:

Hallar u tal que

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en } I \quad (2.1)$$

$$u(a) = 0 \quad (2.2)$$

$$u(b) = 0 \quad (2.3)$$

En principio supondremos que $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ para que la ecuación anterior tenga sentido y de modo que se verifiquen las condiciones de contorno (2.2) y (2.3). Vamos a formular el problema anterior de otra manera. Elegimos una función $v \in H_0^1(I)$ cualquiera, multiplicamos los dos miembros de la ecuación (2.1) por v e integramos por partes,

$$\int_a^b u'v' dx - (u'(b)v(b) - u'(a)v(a)) = \int_a^b fvdx \quad (2.4)$$

como $v(a) = v(b) = 0$ el problema se reformula de la siguiente manera: hallar $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$\int_a^b u'v' dx = \int_a^b fvdx \quad \forall v \in H_0^1(I) \quad (2.5)$$

Nos referiremos a (2.5) como la formulación débil o formulación variacional del problema de partida (2.1, 2.2, 2.3). Observemos que para que (2.5) tenga sentido no es necesario que $u \in H^2(I)$. Tenemos ahora que justificar la formulación anterior, es decir, demostrar que el problema (2.5) tiene solución y verificar si ésta es única. Para ello utilizaremos el teorema de Lax Milgram.

Antes repasemos algunas propiedades del espacio $H_0^1(I)$.

Teorema 2.3 Sobre $H_0^1(I)$ la seminorma $|v|_{1,I} = (\int_a^b (v')^2 dx)^{1/2}$ y la norma de $L^2(I)$, $\|v\|_{0,I} = (\int_a^b v^2 dx)^{1/2}$ verifican la siguiente desigualdad

$$\|v\|_{0,I} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} |v|_{1,I}$$

Demostración:

Es un caso particular del teorema de Poincaré del capítulo anterior. Basta demostrar el teorema para funciones $v \in \mathcal{D}(I)$, pues $\mathcal{D}(I)$ es denso en $H_0^1(I)$.

$$v(x) = \int_a^x v'(x) dx$$

tomando valores absolutos y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(I)$ obtenemos para $x \in (a, b)$

$$|v(x)| \leq \left(\int_a^x 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^x (v')^2 dx \right)^{1/2}$$

mayorando la segunda integral tomando $x = b$ como límite superior de la integral

$$|v(x)| \leq (x-a)^{1/2} \left(\int_a^b (v')^2 dx \right)^{1/2} = (x-a)^{1/2} |v|_{1,I}$$

Elevando al cuadrado e integrando de nuevo en I

$$\|v\|_{0,I}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} |v|_{1,I}^2$$

Finalmente tomando la raíz cuadrada positiva obtenemos el resultado buscado. ■

Corolario 2.2 Sobre $H_0^1(I)$ la seminorma $|v|_{1,I}$ es una norma equivalente a la norma de $H^1(I)$.

Demostración:

Puesto que

$$\|v\|_{1,I}^2 = \int_a^b (v^2 + (v')^2) dx = \|v\|_{0,I}^2 + |v|_{1,I}^2$$

Tenemos de forma inmediata

$$|v|_{1,I} \leq \|v\|_{1,I}$$

Por otra parte, utilizando la desigualdad demostrada en el teorema anterior

$$\|v\|_{1,I}^2 = \|v\|_{0,I}^2 + |v|_{1,I}^2 \leq \left(\frac{(b-a)^2}{2} + 1\right) |v|_{1,I}^2$$

de donde finalmente

$$\sqrt{\frac{2}{2+(b-a)^2}} \|v\|_{1,I} \leq |v|_{1,I} \leq \|v\|_{1,I}$$

■

Teorema 2.4 *El problema formulado en la pregunta anterior tiene solución única.*

Demostración:

Aplicamos el teorema de Lax-Milgram. La forma bilineal es

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) : H_0^1(I) \times H_0^1(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u, v &\rightarrow a(u, v) = \int_a^b u'v' dx \end{aligned} \quad (2.6)$$

La forma lineal es

$$\begin{aligned} L(\cdot) : H_0^1(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow l(v) = \int_a^b f v dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

- La forma (2.6) es evidentemente bilineal.
- La forma (2.6) es continua, pues para todo $u, v \in H_0^1(I)$

$$|a(u, v)| = \left| \int_a^b u'v' dx \right| \leq \|u\|_{1,I} \|v\|_{1,I} \leq \|u\|_{1,I} \|v\|_{1,I}$$

- La forma (2.6) es elíptica, pues para todo $v \in H_0^1(I)$

$$a(v, v) = \int_a^b (v')^2 dx = |v|_{1,I}^2 \geq \frac{2}{2+(b-a)^2} \|v\|_{1,I}^2$$

donde hemos aplicado la equivalencia entre de la norma $\|\cdot\|_{1,I}$ y la seminorma $|\cdot|_{1,I}$ demostrada anteriormente.

- La forma (2.7) es evidentemente lineal.
- La forma (2.7) es continua, pues para todo $v \in H_0^1(I)$, $l(v) = \int_a^b f v dx$, resulta por una parte aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Poincaré

$$|l(v)| = \left| \int_a^b f v dx \right| \leq \|f\|_{0,I} \|v\|_{0,I} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|f\|_{0,I} |v|_{1,I} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|f\|_{0,I} \|v\|_{1,I}$$

■

Teorema 2.5 *El problema débil (2.5) es equivalente al problema de optimización siguiente:*

Hallar $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$J(u) = \inf_{v \in H} J(v)$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_a^b (v')^2 dx - \int_a^b f v dx$$

Demostración:

La forma bilineal (2.6) continua y elíptica es también simétrica. ■

Teorema 2.6 *La solución del problema débil (2.5) verifica la ecuación (2.1) en el sentido de las distribuciones y en consecuencia $u \in H^2(I)$. Además la solución u de (2.5) verifica las condiciones de contorno (2.2) y (2.3).*

Demostración:

Sea $u \in H_0^1(I)$ la solución del problema débil (2.5). Tomando en (2.5) en lugar de v cualquier función $\varphi \in \mathcal{D}(I) \subset H_0^1(I)$, funciones de clase $C^\infty(I)$ y de soporte compacto en I , tenemos

$$\int_a^b u' \varphi' dx = \int_a^b f \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

Podemos interpretar las integrales de la expresión anterior como el valor de las distribuciones u' y f en φ' y φ respectivamente, es decir,

$$\langle u', \varphi' \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

o bien

$$- \langle u'', \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

de donde

$$-u'' = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(I)$$

finalmente, como $f \in L^2(I)$

$$-u'' = f \quad \text{en } L^2(I) \quad \text{y} \quad u \in H^2(I)$$

además la igualdad en $L^2(I)$ implica

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en c.t.p. de } I$$

que es la ecuación (2.1).

Además como $u \in H_0^1(I)$ verifica las condiciones de contorno (2.2) y (2.3). ■

2.3. Problema de Dirichlet homogéneo asociado al operador

$-\Delta$

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^d con frontera Γ de clase C^1 a trozos. El problema a resolver es:

(PDH1) Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar u definida en Ω y solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

Supongamos que u es suficientemente regular de modo que la ecuación anterior tenga sentido, por ejemplo $u \in H^2(\Omega)$, entendiendo las derivadas en el sentido de las distribuciones. Multiplicando la primera ecuación por una función test $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando en Ω ,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Utilizando la fórmula de Green, teniendo en cuenta que $v|_{\Gamma} = 0$, tenemos,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

de modo que la ecuación anterior queda,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Esta ecuación tiene sentido aunque u no esté en $H^2(\Omega)$, basta con que $u \in H^1(\Omega)$. Por otro lado, al ser $u = 0$ sobre Γ y por las propiedades de Γ tenemos que $u \in H_0^1(\Omega)$. Así podemos reemplazar el problema anterior por el siguiente, que recibe el nombre de FORMULACIÓN VARIACIONAL O DÉBIL,

(PDH2) Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 2.7 *El problema anterior tiene solución única.*

Demostración:

Basta demostrar que se verifican las condiciones del teorema de Lax-Milgram, siendo,

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega), \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

Evidentemente $a(\cdot, \cdot)$ es bilineal. La continuidad se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz, en efecto,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| = \left| \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^d \left| \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0, \Omega} \cdot \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0, \Omega} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2} \\ &= \|u\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega} \leq \|u\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega}. \end{aligned}$$

La V -elipticidad se obtiene por la equivalencia de normas en $H_0^1(\Omega)$, por ser Ω acotado, ya que en este caso se verifica la desigualdad de Poincaré, en efecto,

$$a(v, v) = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx = |v|_{1, \Omega}^2 \geq \alpha \|v\|_{1, \Omega}^2.$$

Finalmente $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ con $L(v) = \int_{\Omega} f v dx$, es evidentemente lineal, y además $L(v) = \int_{\Omega} f v dx \leq \|f\|_{0, \Omega} \|v\|_{0, \Omega} \leq \|f\|_{0, \Omega} \|v\|_{1, \Omega}$, y por tanto continua. ■

Comentarios

1. Observar que evidentemente una solución del problema fuerte (PDH1) es solución del problema débil (PDH2). Recíprocamente, si $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución del problema débil (PDH2), entonces podemos recuperar las ecuaciones de la formulación fuerte en el sentido de las distribuciones y el teorema de la traza. En efecto, como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que la ecuación de la formulación débil también es cierta $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

que interpretándolo como productos de dualidad entre $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$, equivale a,

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

y aplicando la definición de derivada en el sentido de las distribuciones,

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De este modo recuperamos la primera ecuación en el sentido de las distribuciones,

$$-\Delta u = f, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega),$$

en particular, como $f \in L^2(\Omega)$, se tiene,

$$-\Delta u = f, \quad \text{en } L^2(\Omega),$$

y por las propiedades de las funciones de $L^2(\Omega)$

$$-\Delta u = f, \quad \text{en c.t.p. de } \Omega.$$

Por último, por las condiciones de la frontera del dominio, podemos aplicar el teorema de la Traza de modo que, al ser $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces $u|_\Gamma = 0$.

2. Observar también que al ser la aplicación bilineal de este caso simétrica, el problema débil es equivalente al siguiente problema de optimización, Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

$$\text{donde } J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

2.4. Problema de Neumann homogéneo asociado al operador $-\Delta + Id$

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^d con frontera Γ de clase C^1 a trozos. El problema a resolver es:

(PNH1) Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar u definida en Ω y solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f && \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 && \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

Supongamos que u es suficientemente regular, por ejemplo $u \in H^2(\Omega)$. Multipliquemos la primera ecuación de (PNH1) por una función test $v \in H^1(\Omega)$ e integramos en Ω ,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Utilizando la fórmula de Green, teniendo en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial \eta}|_\Gamma = 0$, tenemos,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

de modo que la ecuación anterior queda,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Podemos reemplazar el problema anterior por la correspondiente FORMULACIÓN VARIACIONAL O DÉBIL,

(PNH2) Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Teorema 2.8 *El problema anterior tiene solución única.*

Demostración:

Se demuestra aplicando el teorema de Riesz-Frechet siendo,

$$\begin{aligned} V &= H^1(\Omega), \\ a(u, v) &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u v dx = (u, v)_{1, \Omega}, \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

donde como vimos antes $L(\cdot)$ es lineal y continua, y como la aplicación bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es directamente el producto escalar en $H^1(\Omega)$, aplicando directamente el teorema de Riesz-Frechet, tenemos que el problema (PNH2) tiene solución única. ■

Comentarios

1. Es evidente que una solución del problema fuerte (PNH1) es solución del problema débil (PNH2). Veamos en que medida una solución del problema débil (PNH2) es también solución del problema fuerte (PNH1). Si u es solución del problema débil (PNH2), como $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, se verifica,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Interpretando las integrales como productos de dualidad entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$, podemos escribir,

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

y como por definición de derivada en el sentido de las distribuciones $\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = -\langle \Delta u, \varphi \rangle$, podemos recuperar la ecuación de la formulación fuerte en el sentido de las distribuciones,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

De hecho, como $f \in L^2(\Omega)$, se tiene,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Para recuperar la condición de contorno se necesita cierta regularidad en la solución. En efecto, si suponemos que $u \in H^2(\Omega)$, tiene sentido integrar por partes en la ecuación de la formulación débil tenemos,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u)v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

pero como ya hemos recuperado $-\Delta u + u = f$ en $L^2(\Omega)$, entonces,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Como $u \in H^2(\Omega)$ entonces $\frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$, y al ser $H^{1/2}(\Gamma)$ denso en $L^2(\Gamma)$, se tiene que $\frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma} = 0$ en $L^2(\Gamma)$.

Observar que para recuperar la condición de contorno es imprescindible la hipótesis de regularidad $u \in H^2(\Omega)$.

- Al ser $a(\cdot, \cdot)$ el producto escalar en $H^1(\Omega)$, es simétrico, y tenemos la equivalencia del problema (PNH2) con el problema de optimización, Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que,

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

donde $J(v) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Omega} uv dx \right) - \int_{\Omega} f v dx$.

- En el problema de Neumann las condiciones de contorno se recogen directamente en la formulación variacional, mientras que en el problema de Dirichlet aparecen en el espacio funcional elegido para resolver el problema.

2.5. Problema de Dirichlet no homogéneo asociado al operador

$-\Delta$

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^d con frontera Γ de clase C^1 a trozos. El problema a resolver es:

(PD1) Dada $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, hallar u definida en Ω solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega \\ u &= g && \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

Supongamos que $u \in H^2(\Omega)$, multiplicamos la primera ecuación de (PD1) por una función test $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos en Ω . Aplicando la fórmula de Green obtenemos que la función u verifica,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Esta formulación no encaja en el marco abstracto del teorema de Lax-Milgram puesto que $u \in H^1(\Omega)$ con $u|_{\Gamma} = g$ y $v \in H_0^1(\Omega)$. Sin embargo, como $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, existe una función $u_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $u_0|_{\Gamma} = g$. Sea $w = u - u_0$, entonces $w|_{\Gamma} = 0$, y si u es solución de la ecuación anterior, entonces w lo es de la siguiente,

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

De esta forma hemos trasladado el problema al caso homogéneo, de modo que el problema variacional es,

(PD2') Dada $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, hallar $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que,

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donde $u_0 \in H^1(\Omega)$ con $u_0|_{\Gamma} = g$.

Resuelto este problema, la solución que buscamos es $u = w + u_0$. Por tanto, el problema variacional que realmente resolvemos es,

(PD2) Dada $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} f v dx, && \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u|_{\Gamma} &= g \end{aligned}$$

Teorema 2.9 *El problema anterior tiene solución única.*

Demostración:

Sea $u_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $u_0|_\Gamma = g$ y w solución del problema (PD2'), veamos que w existe y es única. Si demostramos que la siguiente aplicación,

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx \end{aligned}$$

es lineal y continua, estaremos en las condiciones del teorema de Lax-Milgram como en el caso homogéneo. Evidentemente es lineal, la continuidad se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz y al hecho de ser u_0 fijo, en efecto,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^d \left| \int_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \cdot \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \\ &= \|u_0\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \leq \|u_0\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos,

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega), \\ a(u, v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \text{ bilineal, continua y } H_0^1(\Omega)\text{-elíptica} \\ L(v) &= \int_\Omega f v dx - \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx, \text{ lineal y continua.} \end{aligned}$$

y por el teorema de Lax-Milgram existe una única $w \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema (PD2'). Entonces $u = w + u_0$ es solución del problema (PD2), pero como la elección de u_0 no es única, tenemos que demostrar la unicidad de u .

Sean u_1 y u_2 dos soluciones del problema (PD2), entonces se verifica,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v dx &= \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_1|_\Gamma &= g \\ \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v dx &= \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_2|_\Gamma &= g \end{aligned}$$

restando las dos expresiones,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v dx &= 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ (u_1 - u_2)|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

tomando $v = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$, resulta,

$$C \|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}^2 \leq \|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla u_1 - u_2 dx = 0,$$

por tanto $\|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}^2 = 0$ en $H^1(\Omega)$, luego $u_1 = u_2$ en $H^1(\Omega)$. ■

2.6. Problema de Neumann no homogéneo asociado al operador $-\Delta + Id$

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^d con frontera Γ de clase C^1 a trozos. El problema a resolver es:

(PN1) Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$ (o bien $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, donde $H^{-1/2}(\Gamma)$ designa el espacio dual de $H^{1/2}(\Gamma)$), hallar u definida en Ω y solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= g & \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

Supongamos que $u \in H^2(\Omega)$, multiplicamos la primera ecuación de (PN1) por una función test $v \in H^1(\Omega)$ e integramos en Ω . Aplicando la fórmula de Green obtenemos,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

El correspondiente problema variacional o formulación débil es,

(PN2) Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Observación Si $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ hay que sustituir el término $\int_{\Gamma} g v d\sigma$ por $\langle g, v \rangle$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto de dualidad entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$

Teorema 2.10 *El problema anterior tiene solución única.*

Demostración:

La demostración es como en el caso homogéneo, aplicando el teorema de Riesz-Frechet donde,

$$\begin{aligned} V &= H^1(\Omega), \\ a(u, v) &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u v dx = (u, v)_{1, \Omega}, \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v d\sigma. \end{aligned}$$

Basta demostrar que la siguiente aplicación es lineal y continua,

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \int_{\Gamma} g v d\sigma. \end{aligned}$$

Evidentemente es lineal, veamos la continuidad, que se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz, al teorema de la traza y al hecho de ser g fijo, en efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} g v d\sigma &\leq \left(\int_{\Gamma} g^2 d\sigma \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma} v^2 d\sigma \right)^{1/2} = \\ &= \|g\|_{0,\Gamma} \|v\|_{0,\Gamma} \leq C \|g\|_{0,\Gamma} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Riesz-Frechet que nos asegura la existencia y unicidad de la solución. ■

2.7. Problema de contorno asociado a un operador elíptico de segundo orden

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^d con frontera Γ de clase C^1 a trozos. Sea V un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ tal que,

$$H_0^1(\Omega) \subseteq V \subseteq H^1(\Omega).$$

Sean $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq d$ y a_0 funciones medibles y acotadas en Ω , es decir, funciones de $L^\infty(\Omega)$. Definamos la siguiente aplicación,

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u, v &\longmapsto a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 u v \right) dx \end{aligned}$$

que es una forma bilineal y continua en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. En efecto, la bilinealidad es inmediata. Verifiquemos la continuidad:

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \left| \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| + \left| \int_{\Omega} a_0 u v dx \right| \\
&\leq \max_{ij} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} \sum_{i,j=1}^d \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \right) + \|a_0\|_{0,\infty,\Omega} \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\
&= \max_{ij} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega} \right) \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \right) + \|a_0\|_{0,\infty,\Omega} \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\
&\leq \max_{ij} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} \left(\sum_{j=1}^d 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^d 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} + \\
&\quad + \|a_0\|_{0,\infty,\Omega} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\
&= (d \max_{ij} \|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} + \|a_0\|_{0,\infty,\Omega}) \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Supongamos que $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq d$ y a_0 verifican las hipótesis de elipticidad:

1. Existe un número real $\alpha > 0$ tal que,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

2. Existe un número real α_0 tal que,

$$\forall x \in \Omega, a_0(x) \geq \alpha_0, \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

De estas hipótesis se deduce que $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica si $\alpha_0 > 0$. En efecto

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0 v^2 dx \\
&\geq \alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \alpha_0 \int_{\Omega} v^2 dx \\
&= \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2 + \alpha_0 \|v\|_{0,\Omega}^2
\end{aligned}$$

Cuando $V = H^1(\Omega)$ la condición $\alpha_0 > 0$ es necesaria y suficiente para que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ sea V -elíptica. Por el contrario, cuando $V = H_0^1(\Omega)$, para que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ sea V -elíptica, basta que $\alpha_0 \geq 0$, o incluso es suficiente que $\alpha_0 > -\frac{\alpha}{C^2(\Omega)}$, donde $C(\Omega)$ es la constante de la desigualdad de Poincaré.

Finalmente, sea $f \in L^2(\Omega)$ y definamos,

$$\begin{aligned}
L(\cdot) : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\
v &\longmapsto L(v) = \int_{\Omega} f v dx
\end{aligned}$$

que es lineal y continua en V .

Definamos el siguiente problema,

(PV) Dadas $a(\cdot, \cdot)$ y $L(\cdot)$ definidas sobre V como antes, hallar $u \in V$ tal que,

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Si la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica, el teorema de Lax-Milgram nos da la existencia y unicidad de la solución de (PV).

Veamos como recuperar el problema fuerte a partir de esta formulación variacional. Si elegimos una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ en lugar de $v \in V$, utilizando las reglas de derivación en el sentido de las distribuciones, obtenemos,

$$a(u, \varphi) = \langle Au, \varphi \rangle,$$

donde A es el operador diferencial elíptico de segundo orden con coeficientes variables definido por,

$$Au = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u.$$

Por otra parte, $L(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$. Por tanto, se verifica la ecuación en derivadas parciales de segundo orden,

$$Au = f$$

en el sentido de las distribuciones sobre Ω . Pero como $f \in L^2(\Omega)$, entonces la distribución $Au \in L^2(\Omega)$, y la igualdad anterior es cierta en $L^2(\Omega)$, y en consecuencia,

$$Au(x) = f(x) \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

Teniendo en cuenta que $Au = f \in L^2(\Omega)$, deducimos también,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} Au v dx \quad \forall v \in V,$$

relación que tenemos que traducir en términos de condiciones de contorno. Para esto es para lo que necesitamos suponer que la frontera Γ de Ω es de clase C^1 a trozos, es decir, que estamos en las condiciones del teorema de la traza. Supongamos además que las funciones $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq d$ son funciones de $C^1(\overline{\Omega})$ y que $u \in H^2(\Omega)$, por tanto las funciones $\sum_{j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $1 \leq i \leq d$, pertenecen a $H^1(\Omega)$. Entonces, aplicando la fórmula de Green generalizada, tenemos que $\forall u \in H^2(\Omega)$ y $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Au v dx &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}) v dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx - \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_i v d\sigma = \\ &= a(u, v) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_A} v d\sigma, \end{aligned}$$

donde el operador $\frac{\partial}{\partial \eta_A} = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \eta_i$ se denomina derivada conormal asociada al operador A .

Por lo tanto, despejando,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} Au v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_A} v d\sigma,$$

por lo que podemos deducir que,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_A} v d\sigma = 0, \quad \forall v \in V.$$

Observar que si las hipótesis de regularidad no se verifican, la derivada conormal no tiene sentido.

En resumen, la solución u de (PV) verifica:

$$\begin{cases} u \in V, \\ Au = f \quad \text{en } \Omega, \\ a(u, v) = \int_{\Omega} Au v dx \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

donde esta última ecuación, en condiciones de regularidad suficientes se puede sustituir por,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_A} v d\sigma = 0, \quad \forall v \in V.$$

Veamos que problema fuerte estamos resolviendo según la elección de V .

1. $V = H_0^1(\Omega) \Rightarrow$ PROBLEMA DE DIRICHLET HOMOGÉNEO

El problema resuelto es,

$$\begin{cases} Au = f \quad \text{en } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

En este caso $\alpha_0 \geq 0$ o $\alpha_0 > \frac{-\alpha}{C^2(\Omega)}$ es suficiente para que el problema variacional tenga solución única.

2. $V = H^1(\Omega) \Rightarrow$ PROBLEMA DE NEUMANN HOMOGÉNEO

El problema resuelto es,

$$\begin{cases} Au = f \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_A} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

En este caso es necesario suponer $\alpha_0 > 0$ para que el problema variacional tenga solución única.

3. $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\} \Rightarrow$ PROBLEMA MIXTO

El problema resuelto es,

$$\begin{cases} Au = f \quad \text{en } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0, \frac{\partial u}{\partial \eta_A} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1, \end{cases}$$

donde Γ_0 y Γ_1 son dos partes de la frontera Γ tales que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ y con interiores disjuntos.

La aplicación composición de la aplicación traza $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ y de la aplicación restricción de $L^2(\Gamma)$ sobre $L^2(\Gamma_0)$ es evidentemente continua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma_0)$. Es sencillo comprobar que V es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ y por lo tanto espacio de Hilbert con la norma inducida por la de $H^1(\Omega)$. Si suponemos que $\alpha_0 > 0$ entonces la aplicación bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica y el correspondiente problema variacional tiene solución única.

Este resultado se puede generalizar al caso $\alpha_0 \geq 0$ si suponemos que Ω es conexo y la parte de la frontera con condiciones de tipo Dirichlet Γ_0 , tiene medida no nula, pues en este caso la V -elipticidad de la aplicación bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 2.11 *Si Ω es un abierto acotado conexo de \mathbb{R}^d con frontera Γ de clase C^1 a trozos y Γ_0 una parte de la frontera de medida superficial no nula, entonces la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ induce una norma sobre el espacio $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$ equivalente a la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.*

Demostración:

Veamos que la siguiente aplicación es una norma sobre V ,

$$V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto |v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

Basta demostrar que si $v \in V$ es tal que $|v|_{1,\Omega} = 0$ entonces $v = 0$. En efecto, si $|v|_{1,\Omega} = 0$ entonces $\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$ en Ω , $\forall i = 1, \dots, d$, por tanto v es constante en Ω en virtud de su conexidad, pero como además $v|_{\Gamma_0} = 0$, entonces $v = 0$ en Ω .

Veamos ahora la equivalencia de las normas, es decir, que existen dos constantes C_1 y C_2 positivas tales que $\forall v \in V$,

$$C_1 \|v\|_{1,\Omega} \leq |v|_{1,\Omega} \leq C_2 \|v\|_{1,\Omega}.$$

Evidentemente, la segunda desigualdad es cierta para $C_2 = 1$. La primera desigualdad se deduce por reducción al absurdo. Supongamos que esta desigualdad no es cierta, entonces $\forall n$ entero positivo, existe una función $w_n \in V$ tal que $\|w_n\|_{1,\Omega} > n|w_n|_{1,\Omega}$. Sea $v_n = w_n/\|w_n\|_{1,\Omega}$, así obtenemos una sucesión $\{v_n\} \subset V$ tal que $\|v_n\|_{1,\Omega} = 1$ y $|v_n|_{1,\Omega} < 1/n$. Por el teorema de Rellich, la inyección canónica de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, por tanto, podemos extraer una subsucesión convergente $\{v_\mu\}$ convergente en $L^2(\Omega)$,

$$v_\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} v \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Pero tenemos que $|v_\mu|_{1,\Omega} < 1/\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$, por tanto para $i = 1, \dots, d$, se tiene $\left\| \frac{\partial v_\mu}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} < 1/\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$, es decir, $\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$. Luego $v \in H^1(\Omega)$, como V es cerrado

$v \in V$. Además v es constante en Ω y como $v|_{\Gamma_0} = 0$, entonces $v = 0$ en Ω , pero esto no es posible porque $\|v\|_{1,\Omega} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|v_\mu\|_{1,\Omega} = 1$. ■

Ejercicio: Problema mixto asociado a la ecuación de transmisión de calor.

Consideremos el problema de la determinación de la distribución de la temperatura u de un cuerpo que ocupa una región Ω del espacio \mathbb{R}^d , siendo $d = 1, 2$ ó 3 . En física e ingeniería se conoce con frecuencia la temperatura de una parte Γ_0 de la frontera de Ω , y en el resto de la frontera Γ_1 , se conoce sino el flujo de calor, una relación que liga éste con la temperatura en Γ_1 , que suele ser una condición de transmisión de calor por convección en la frontera y que depende de un coeficiente h de convección.

Las ecuaciones que rigen este fenómeno son,

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (K_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}) &= f && \text{en } \Omega \\ -\sum_{i,j=1}^d K_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_i &= h(u - u_\infty) && \text{sobre } \Gamma_1 \\ u &= g && \text{sobre } \Gamma_0 \end{aligned}$$

donde $K_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ es el tensor de conductividad, que se supone elíptico, es decir, existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i,j=1}^d K_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$. Si $K = kId$, se dice que el medio es isótropo, es decir, el calor se transmite igual en todas direcciones. $h \in L^\infty(\Gamma_1)$, es el coeficiente de convección, $u_\infty \in L^2(\Gamma_1)$ es la temperatura ambiente, $f \in L^2(\Omega)$ es la fuente de calor y $g \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ es la temperatura en Γ_0 .

- Deducir la formulación débil.
- Estudiar la existencia y unicidad de solución.
- Interpretación del problema resuelto.

2.8. Un ejemplo sin unicidad

Observemos el problema de Neumann asociado al operador de Laplace,

(P1) Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$ (o más generalmente, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$) hallar u definida en Ω y solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= g && \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

En caso de que tenga solución, ésta no sería única pues cualquier solución más una constante sería también solución. En ese caso podemos caracterizar el conjunto de soluciones.

Razonemos desde el punto de vista físico de la ecuación del calor, u representa la temperatura de un cuerpo, $f \in L^2(\Omega)$ son las fuentes volumétricas de calor, y $g \in L^2(\Gamma)$ las fuentes superficiales de calor. Estamos buscando una solución estacionaria, es decir, independiente del tiempo, pero si el aporte global de calor al cuerpo es positivo (resp. negativo), la temperatura del mismo aumentará (resp. disminuirá) con el tiempo y por tanto la solución no sería estacionaria. Luego parece un requisito indispensable para que nuestro problema tenga al menos una solución, que el aporte global de calor sea nulo, lo que matemáticamente se expresa,

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g d\sigma = 0$$

El correspondiente problema variacional, procediendo como de costumbre, es,

(P2) Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Primero observemos que tomando $v = 1$ obtenemos que la condición

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g d\sigma = 0$$

es necesaria para la existencia de solución. Veamos que también es condición suficiente. Inicialmente nuestro espacio de trabajo sería $V = H^1(\Omega)$, y la forma bilineal $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$, que no es elíptica sobre $H^1(\Omega)$, y por tanto no podemos aplicar el teorema de Lax-Milgram.

Sin embargo, el hecho de que una solución venga determinada salvo constantes, nos lleva a introducir un nuevo espacio de clases de funciones, el espacio cociente

$$V = H^1(\Omega)/\mathbb{R},$$

cuyos elementos son clases de equivalencia \tilde{u} , donde dos funciones $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia si $u_1 - u_2 = cte$.

Este espacio cociente V , es un espacio vectorial normado con la suma, producto por escalares y norma habituales,

$$\begin{aligned} \tilde{u} + \tilde{v} &= \widetilde{u+v}, \\ \lambda \tilde{u} &= \widetilde{\lambda u}, \\ \|\tilde{u}\|_V &= \inf_{u \in \tilde{u}} \|u\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Además V es un espacio completo por ser $H^1(\Omega)$ completo con la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y \mathbb{R} un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$.

Por otro lado, podemos definir un producto escalar en V ,

$$(\tilde{u}, \tilde{v})_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

con $u \in \tilde{u}$ y $v \in \tilde{v}$, y su correspondiente norma asociada,

$$|\tilde{u}|_V = (\tilde{u}, \tilde{u})_V^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Teorema 2.12 *La norma $|\tilde{u}|_V = (\tilde{u}, \tilde{u})_V^{1/2}$ es equivalente a la norma cociente en $V = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.*

Demostración:

En concreto, vamos a demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que $C|\tilde{u}|_V \leq |\tilde{u}|_V \leq C|\tilde{u}|_V$.

Primero observemos que $\forall u \in \tilde{u}$, se tiene,

$$|\tilde{u}|_V^2 = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx = \|u\|_{1,\Omega}^2,$$

y como es $\forall u \in \tilde{u}$, tomando ínfimos,

$$|\tilde{u}|_V^2 \leq \inf_{u \in \tilde{u}} \|u\|_{1,\Omega}^2 = \|\tilde{u}\|_V^2.$$

Recíprocamente, por reducción al absurdo, supongamos que no es cierta la desigualdad inversa, es decir, que para todo entero positivo n , existe una clase \tilde{w}_n tal que $|\tilde{w}_n|_V < \|\tilde{w}_n\|_V/n$. Denotemos $\tilde{u}_n = \tilde{w}_n/|\tilde{w}_n|_V$, formando una sucesión $\{\tilde{u}_n\} \subset V$ tal que $|\tilde{u}_n|_V = 1$ y $|\tilde{u}_n|_V < 1/n$. Como $|\tilde{u}_n|_V = \inf_{u_n \in \tilde{u}_n} \|u_n\|_{1,\Omega}$, existirá, cualquiera que sea n , un $\varepsilon > 0$ y un representante $u_n \in \tilde{u}_n$ tales que $\|u_n\|_{1,\Omega} \leq 1 + \varepsilon$. Entonces $\{u_n\}$ forman una sucesión acotada en $H^1(\Omega)$, por tanto existe una subsucesión $\{u_{\mu}\}$ convergente en $L^2(\Omega)$, sea u su límite. Por otra parte, como $|\tilde{u}_{\mu}|_V < 1/\mu \rightarrow 0$, tenemos que $\frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_i} \rightarrow 0$ en $L^2(\Omega)$, y por la continuidad de las derivadas en el sentido de las distribuciones, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $\forall i = 1, \dots, d$. Por tanto, u es constante, luego,

$$\|\tilde{u}_{\mu}\|_V = \inf_{u_{\mu} \in \tilde{u}_{\mu}} \|u_{\mu}\|_{1,\Omega} \leq \|u_{\mu} - u\|_{1,\Omega} \rightarrow 0,$$

pero esto no es posible porque $\|\tilde{u}_{\mu}\|_V = 1$. Por tanto es cierta la desigualdad $|\tilde{u}|_V \geq C|\tilde{u}|_V$, $\forall \tilde{u} \in V$. ■

Por tanto, $V = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ es un espacio de Hilbert en el que $\|\cdot\|_V$ y $|\cdot|_V$ son normas equivalentes.

Por otro lado, definamos la siguiente forma lineal,

$$L : V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{v} \longmapsto L(\tilde{v}) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v d\sigma, \quad \forall v \in \tilde{v}.$$

Es fácil comprobar que está bien definida, en efecto, sean $v_1, v_2 \in \tilde{v}$, entonces,

$$\int_{\Omega} f(v_1 - v_2) dx + \int_{\Gamma} g(v_1 - v_2) d\sigma = C \left(\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g d\sigma \right) = 0.$$

La linealidad es trivial, y la continuidad se obtiene por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el teorema de la traza, en efecto,

$$|L(\tilde{v})| \leq \left| \int_{\Omega} f v dx \right| + \left| \int_{\Gamma} g v d\sigma \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Gamma} \|v\|_{0,\Gamma} \leq \\ \leq (\|f\|_{0,\Omega} + C(\Omega) \|g\|_{0,\Gamma}) \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in \tilde{v},$$

y como esta desigualdad sigue siendo cierta tomando ínfimos en $v \in \tilde{v}$, tenemos,

$$|L(\tilde{v})| \leq (\|f\|_{0,\Omega} + C(\Omega) \|g\|_{0,\Gamma}) \|\tilde{v}\|_V.$$

Por tanto, simplemente aplicando el teorema de Riesz-Frechet en V , tenemos la existencia y unicidad del problema siguiente,

Hallar una clase $\tilde{u} \in V = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ que verifica

$$(\tilde{u}, \tilde{v})_V = L(\tilde{v}), \quad \forall \tilde{v} \in V.$$

2.9. Deformación elástica de un sólido

Un ejemplo de problema elíptico fundamental en la Mecánica de sólidos es el sistema de ecuaciones de la elasticidad. Consideremos un cuerpo sólido que se deforma elásticamente bajo la acción de fuerzas exteriores. El cuerpo ocupa una región Ω del espacio \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$). Supongamos que una parte de la frontera Γ_0 , de medida no nula en \mathbb{R}^{d-1} , se mantiene fija. En el resto de la frontera $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$, supongamos que se ejercen unas fuerzas superficiales $\vec{g} = (g_1, \dots, g_d) \in (L^2(\Gamma))^d$. En Ω se ejercen unas fuerzas volumétricas $\vec{f} = (f_1, \dots, f_d) \in (L^2(\Omega))^d$. Debido a la acción de estas fuerzas exteriores \vec{f} y \vec{g} , el cuerpo se deforma y cada punto sufre un desplazamiento $\vec{u} = (u_1, \dots, u_d)$. Al deformarse, se generan en el cuerpo unas tensiones elásticas, caracterizadas por el tensor de tensiones $\sigma_{i,j}(\vec{u})$, hasta que se logra un equilibrio con las fuerzas exteriores.

Las ecuaciones que rigen este problema se estudian en la teoría de la elasticidad y son,

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{i,j}(\vec{u}) &= f_i \quad \text{en } \Omega, \quad i = 1, \dots, d, \\
u_i &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0, \quad i = 1, \dots, d, \\
\sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(\vec{u}) \eta_j &= g_i \quad \text{sobre } \Gamma_1, \quad i = 1, \dots, d.
\end{aligned}$$

Las primeras y últimas ecuaciones representan el equilibrio entre las fuerzas exteriores y las fuerzas elásticas. Las segundas ecuaciones representan que en la parte de la frontera Γ_0 no hay desplazamiento.

El tensor de tensiones viene dado por la ley del comportamiento del material o ley de Hooke,

$$\sigma_{i,j}(\vec{u}) = \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \delta_{i,j} + 2\mu \varepsilon_{i,j}(\vec{u}) \quad (2.8)$$

donde,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i,j}(\vec{u}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \sum_{i=1}^d \varepsilon_{ii}(\vec{u}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\
\delta_{i,j} &= 1, \text{ si } i = j, \delta_{i,j} = 0, \text{ si } i \neq j, \\
\lambda &\geq 0, \mu > 0
\end{aligned}$$

Los coeficientes $\lambda \geq 0$ y $\mu > 0$ se llaman coeficientes de Lamé, dependen del material y están directamente relacionados con el módulo de Young $E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$ y el coeficiente de Poisson $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ del material. Se puede demostrar, como consecuencia de la ley general de conservación de momento angular que el tensor de tensiones σ es simétrico. El tensor de deformaciones es obviamente simétrico.

La ley de Hooke (2.8) se puede invertir, y podemos expresar el tensor de deformaciones en función del tensor de tensiones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \left(\sum_{l=1}^d \sigma_{ll} \right) \delta_{ij} \quad (2.9)$$

Veamos la correspondiente formulación variacional. Consideramos el espacio $(H^1(\Omega))^d = H^1(\Omega) \times \dots \times H^1(\Omega)$, que es un espacio de Hilbert con el producto,

$$(\vec{u}, \vec{v})_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^d (u_i, v_i)_{1,\Omega}.$$

El espacio donde buscamos la solución, llamado espacio de desplazamientos admisibles es,

$$V = \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^d : v_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, i = 1, \dots, d \}.$$

Multiplicando escalarmente el primer grupo de ecuación por $\vec{v} \in V$, integrando en Ω y aplicando la fórmula de Green, tenemos,

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,j}(\vec{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Gamma_1} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,j}(\vec{u}) \eta_j v_i d\sigma = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d f_i v_i dx.$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_{i,j}(\vec{u})$ es simétrico, y utilizando el tercer grupo de ecuación, queda,

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(\vec{u}) \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Gamma_1} g_i v_i d\sigma.$$

Por tanto, el correspondiente problema variacional a resolver es,

(PE) Dadas $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^d$ y $\vec{g} \in (L^2(\Gamma))^d$, hallar $\vec{u} \in V$ tal que,

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(\vec{u}) \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Gamma_1} g_i v_i d\sigma, \quad \forall \vec{v} \in V. \quad (2.10)$$

Esto significa que la posición de equilibrio se obtiene para $\vec{u} \in V$ verificando esta ecuación para cualquiera que sea $\vec{v} \in V$. Es lo que se conoce en física como *principio de trabajos virtuales*: el primer miembro representa el trabajo de las fuerzas elásticas y el segundo miembro el trabajo de las fuerzas exteriores.

Para poder demostrar la existencia y unicidad de la solución de este problema se necesitan los siguientes resultados.

Teorema 2.13 (Desigualdad de Korn) Supongamos que Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^d de frontera Γ de clase C^1 a trozos. Entonces,

$$E = \{\vec{v} \in (L^2(\Omega))^d; \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) \in L^2(\Omega), i, j = 1, \dots, d\} = (H^1(\Omega))^d,$$

y existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que $\forall \vec{v} \in (H^1(\Omega))^d$,

$$\sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 \geq C \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2.$$

Se han utilizado sobre los espacios $(L^2(\Omega))^d$ y $(H^1(\Omega))^d$ las normas hilbertianas,

$$\|\vec{v}\|_{0,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^d \|v_i\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad \|\vec{v}\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^d \|v_i\|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

La desigualdad de Korn no es en absoluto trivial pues el primer miembro sólo hace intervenir ciertas combinaciones lineales de las primeras derivadas, mientras que en el segundo miembro intervienen todas las derivadas.

Algunas notas sobre la demostración de la desigualdad de Korn

La demostración se realiza en tres pasos

1. Sea $H_0^1(\Omega)$, sea $H^{-1}(\Omega)$ su dual. Entonces si,

$$w \in L^2(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$$

En efecto: Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ resulta

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle w, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} w \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

de donde

$$\left| \left\langle \frac{\partial w}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right| \leq \|w\|_{0,\Omega} \cdot \|\varphi\|_{1,\Omega}$$

por tanto la aplicación

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_i} : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightarrow - \int_{\Omega} w \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

se extiende por continuidad a todo el espacio $H_0^1(\Omega)$ definiendo una forma lineal continua sobre $H_0^1(\Omega)$.

2. Si $w \in H^{-1}(\Omega)$ es tal que $\frac{\partial w}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$ $i = 1, \dots, d$ entonces $w \in L^2(\Omega)$. Demostración en “Les inéquations en Mécanique et en Physique”, G. Duvaut, J.L. Lions pág. 111, Ed. Dunod [8].
3. Pongamos $E = \{\vec{v} \in (L^2(\Omega))^d; \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \in L^2(\Omega)\}$. Está claro que $E \supset (H^1(\Omega))^d$. Veamos que $E \subset (H^1(\Omega))^d$. E es un espacio de Hilbert con la norma

$$\vec{v} \rightarrow \left(\|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

Para todo $\vec{v} \in E$ tenemos por una parte

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$$

por lo demostrado en el paso 1 y por otra parte como $\vec{v} \in (L^2(\Omega))^d \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \in H^{-1}(\Omega)$ resulta $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \in L^2(\Omega)$, por lo visto en el paso 2, es decir $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^d$. En definitiva, $E = (H^1(\Omega))^d$.

Finalmente, la aplicación idéntica

$$\begin{aligned} (H^1(\Omega))^d &\rightarrow E \\ \vec{v} &\rightarrow \vec{v} \end{aligned}$$

es biyectiva y continua pues evidentemente

$$\|\vec{v}\|_E = \left(\sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \leq \|\vec{v}\|_{1,\Omega}$$

Por el teorema del grafo cerrado la inversa existe y es continua, es decir

$$\|\vec{v}\|_{1,\Omega} \leq C \|\vec{v}\|_E = C \left(\sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

que es la desigualdad de Korn.

Como consecuencia de la desigualdad de Korn, tenemos el siguiente resultado que nos va a permitir demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema variacional de la elasticidad (PE).

Teorema 2.14 (Corolario de la desigualdad de Korn) *Supongamos que Ω es un abierto acotado conexo de \mathbb{R}^d de frontera Γ de clase C^1 a trozos. Entonces existe una constante $C_0 > 0$ tal que, $\forall \vec{v} \in V$,*

$$\sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \geq C_0 \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2.$$

Demostración:

Demostraremos primeramente que

$$\vec{v} \rightarrow \left(\sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

es una norma sobre V . En efecto, pongamos

$$\mathcal{R} = \{ \vec{v} \in H^1(\Omega)^d; \varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0 \text{ para } 1 \leq i, j \leq d \}$$

El conjunto \mathcal{R} se llama conjunto de desplazamientos rígidos.

- Caso $d = 2$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow v_1(x_1, x_2) = g(x_2)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow v_2(x_1, x_2) = f(x_1)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = 0 \Rightarrow g'(x_2) + f'(x_1) = 0$$

que implica

$$\begin{aligned} g'(x_2) &= \lambda & g(x_2) &= \lambda x_2 + a_1 \\ f'(x_1) &= -\lambda & f(x_1) &= -\lambda x_1 + a_2 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2) &= a_1 + \lambda x_2 \\ v_2(x_1, x_2) &= a_2 - \lambda x_1 \end{aligned}$$

es decir

$$\mathcal{R} = \{ \vec{v} \in H^1(\Omega)^2; v_1(x_1, x_2) = a_1 + \lambda x_2, v_2(x_1, x_2) = a_2 - \lambda x_1 \}$$

Si $\vec{v} \in \mathcal{R}$ se anula en 2 puntos distintos de \mathbb{R}^2 entonces $\vec{v} = 0$. Como suponemos que la medida 1-dimensional de Γ_0 es mayor que cero, tenemos

$$V \cap \mathcal{R} = \{\vec{0}\}$$

- Caso $d = 3$. Si $\varepsilon_{ij} = 0$ para $1 \leq i, j \leq 3$ tenemos

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} = 0$$

para $1 \leq i, j, k \leq 3$, de modo que v_i es un polinomio de grado menor o igual que 1, es decir

$$v_i(x_1, x_2, x_3) = a_i + \sum_{k=1}^3 b_{ik} x_k \quad 1 \leq i \leq 3$$

además $\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} + b_{ji} = 0$. Así pues,

$$b_{ii} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$b_{ij} = -b_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad i \neq j$$

denotando

$$b_{12} = b_{21} = -b_3$$

$$b_{23} = b_{32} = -b_2$$

$$b_{31} = b_{13} = -b_1$$

resulta

$$v_1(x_1, x_2, x_3) = a_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3$$

$$v_2(x_1, x_2, x_3) = a_2 - b_1 x_3 + b_3 x_1$$

$$v_3(x_1, x_2, x_3) = a_3 - b_2 x_1 + b_1 x_2$$

o bien, con notación evidente

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{x}$$

Entonces si $\vec{v} \in \mathcal{R}$ se anula en 3 puntos no alineados de \mathbb{R}^3 entonces $\vec{v} = 0$. Como suponemos que la medida 1-dimensional de Γ_0 es mayor que cero, tenemos

$$V \cap \mathcal{R} = \{\vec{0}\}$$

y esto prueba que

$$\vec{v} \rightarrow \left(\sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

es una norma sobre V .

Demostramos ahora la equivalencia de las dos normas, es decir, existen dos constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \|\vec{v}\|_{1,\Omega} \leq \left(\sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \leq C_2 \|\vec{v}\|_{1,\Omega}$$

La segunda desigualdad es inmediata con $C_2 = 1$. Demostremos la otra por reducción al absurdo. Supongamos que no existe ninguna constante C_1 verificando la primera desigualdad de la expresión anterior, es decir, supongamos que para todo entero $n \geq 1$ existe un $\vec{w}_n \in V$ tal que

$$\frac{1}{n} \|\vec{w}_n\|_{1,\Omega} > \left(\sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{ij}(\vec{w}_n)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

y tomemos $\vec{v}_n = \frac{\vec{w}_n}{\|\vec{w}_n\|_{1,\Omega}}$, resulta

$$\|\vec{v}_n\|_{1,\Omega} = 1 \tag{2.11}$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{ij}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{n} \tag{2.12}$$

Como la inclusión de

$$I: (H^1(\Omega))^d \rightarrow (L^2(\Omega))^d \\ \vec{v} \rightarrow \vec{v}$$

es compacta, y la sucesión $(\vec{v}_n)_n$ es acotada, existe una subsucesión $(\vec{v}_\mu)_\mu$ de $(\vec{v}_n)_n$ convergente en $(L^2(\Omega))^d$. Sea

$$\vec{v} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \vec{v}_\mu \quad \text{en } (L^2(\Omega))^d$$

Tenemos por la continuidad de la derivación en el sentido de las distribuciones

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_{ij}(\vec{v}_\mu) = \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

Por otra parte por (2.12) resulta

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_{ij}(\vec{v}_\mu) = \varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0 \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

de donde el límite $\vec{v} \in E = (H^1(\Omega))^d$. Utilizando la desigualdad de Korn, $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \vec{v}_\mu = \vec{v}$ en $(H^1(\Omega))^d$. Además como V es un subespacio cerrado de $(H^1(\Omega))^d$ y $(\vec{v}_\mu)_\mu \subset V$, $\vec{v} \in V$. Finalmente como $\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0$ resulta $\vec{v} = 0$ lo que contradice (2.11). ■

Como consecuencia de estos dos resultados tenemos la existencia y unicidad de la solución del problema variacional de la elasticidad (PE).

Teorema 2.15 *El problema (PE) tiene solución única.*

Demostración:

Denotemos,

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(\vec{u}) \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) dx, \\ L(\vec{v}) &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Gamma_1} g_i v_i d\sigma. \end{aligned}$$

Por tanto el problema (PE) se escribe ahora,

$$\text{Hallar } \vec{u} \in V \text{ tal que } a(\vec{u}, \vec{v}) = L(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Es fácil ver que $L(\cdot)$ es lineal y continua, y que $a(\cdot, \cdot)$ es bilineal y continua. La V -elipticidad es consecuencia del corolario de la desigualdad de Korn, en efecto,

$$\begin{aligned} a(\vec{v}, \vec{v}) &= \lambda \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d (\varepsilon_{i,j}(\vec{v}))^2 dx \geq \\ &\geq 2\mu \sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \geq 2\mu C_0 \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Y en estas condiciones, el teorema es consecuencia del Lax-Milgram. ■

Equivalencia con un problema de optimización.

La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, por tanto,

Teorema 2.16 *La solución \vec{u} del problema (PE) verifica,*

$$J(\vec{u}) = \min_{\vec{v} \in V} J(\vec{v}),$$

donde,

$$J(\vec{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(\vec{v}) \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) dx - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Gamma_1} g_i v_i d\sigma.$$

La formulación del problema de elasticidad de esta forma se conoce en física como el principio de mínima energía, e indica que el estado de equilibrio de un cuerpo elástico se corresponde al de la mínima energía. La aplicación bilineal $a(\cdot, \cdot)$, representa el trabajo de deformación elástica, la aplicación lineal $L(\cdot)$, el trabajo de las fuerzas exteriores, y el funcional $J(\vec{v})$, la energía total del sistema correspondiente al estado \vec{v} .

2.10. Elasticidad plana

Campo de deformaciones planas

Si en un cuerpo elástico el campo de desplazamientos es de la forma

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0$$

el campo de deformaciones está dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= 0 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{23} = 0 \end{aligned}$$

decimos que tenemos un campo de deformaciones planas. Se observa que las únicas componentes no nulas de este tensor de deformaciones son las componentes ε_{ij} , $i, j = 1, 2$. además las componentes solo dependen de x_1 y de x_2 , pero no de x_3 .

El tensor de tensiones asociado es de la forma

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

donde las componentes σ_{ij} , $i, j = 1, 2$ solo dependen de x_1 y de x_2 y vienen dadas por

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll} \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{para } i, j = 1, 2$$

Por otra parte como $\varepsilon_{33} = 0$, resulta de la relación (2.9)

$$(1 + \nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0$$

es decir,

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

El campo de tensiones es pues, como el campo de desplazamientos y de deformaciones, independiente de x_3 .

Campo de tensiones planas

Un campo de tensiones planas es por definición un campo de tensiones σ_{ij} que solo depende de x_1 y de x_2 y tal que las componentes σ_{i3} , $i = 1, 2, 3$ son nulas. Si el cuerpo elástico es isótropo, el campo de deformaciones asociado ε_{ij} está relacionado con el tensor de tensiones por la ley de Hooke (2.8), es decir

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{para } i, j = 1, 2 \quad (2.13)$$

$$0 = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (2.14)$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} \quad (2.15)$$

resulta de la última de estas relaciones que ε_{33} se expresa explícitamente en función de ε_{11} y de ε_{22} por

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.16)$$

Se puede escribir la relación (2.13) como función únicamente de las componentes ε_{ij} , $i, j = 1, 2$, obteniendo

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda^* \left(\sum_{l=1,2} \varepsilon_{ll} \right) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \quad i, j = 1, 2 \quad (2.17)$$

donde

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$$

Resulta además que ε_{ij} , $i, j = 1, 2$ solo dependen de x_1 y de x_2 y lo mismo ocurre con ε_{33} como consecuencia de (2.16).

Un problema de tensiones planas conduce pues a las mismas ecuaciones de equilibrio que un problema de deformaciones planas sin más que sustituyendo λ por λ^* en (2.17).

Formulación débil de problemas de elasticidad plana

Con las notaciones para las coordenadas cartesianas mediante $x = x_1$ e $y = x_2$, y para los desplazamientos $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en elasticidad plana, teniendo en cuenta las observaciones de las subsecciones anteriores la expresión correspondiente a (2.10) se escribe para deformaciones planas:

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \, dx dy = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i \, dx dy + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_1} g_i v_i \, d\sigma \quad (2.18)$$

y teniendo en cuenta (2.18) y desarrollando tendremos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \, dx dy \\
&= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} (\lambda \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\vec{u})) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \, dx dy \\
&= \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \\
&\quad + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \, dx dy \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i \, dx dy + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} g_i v_i \, d\sigma
\end{aligned}$$

debiendo sustituir el valor de λ por el de λ^* en el caso de tensiones planas.

2.11. Sistema de Stokes

Otro ejemplo de problema elíptico, en este caso en la Mecánica de Fluidos, es el sistema de Stokes, que procede de la linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes, válido para números de Reynolds muy pequeños.

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un abierto acotado, conexo y con frontera de clase C^1 a trozos. Queremos describir el movimiento lento de un fluido incompresible viscoso confinado en Ω y sometido a unas fuerzas exteriores $\vec{f} = (f_1, \dots, f_d) \in (L^2(\Omega))^d$. Las ecuaciones son,

$$\begin{aligned}
-v \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p &= \vec{f} \quad \text{en } \Omega, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\
\vec{u} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma,
\end{aligned}$$

que escrito en sus componentes es

$$\begin{aligned}
-v \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i \quad \text{en } \Omega, \quad i = 1, \dots, d, \\
\sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\
u_i &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad i = 1, \dots, d.
\end{aligned}$$

donde $\vec{u} = (u_1, \dots, u_d)$ es la velocidad del fluido, p es la presión y $\nu > 0$ es la viscosidad. Recordemos que un fluido incompresible es aquel cuya densidad permanece constante, y tiene capacidad de oponerse a la compresión, esto quiere decir que ni la masa ni el volumen del fluido pueden cambiar, en términos matemáticos es $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

El espacio en el que se escribe la formulación débil es

$$V = \{ \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d : \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \}$$

que es un subespacio cerrado de $(H_0^1(\Omega))^d$. Por la desigualdad de Poincaré, V es un espacio de Hilbert con la norma

$$\vec{v} \mapsto |\vec{v}|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i,j=1}^d \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

Multiplicando la primera ecuación por v_i , componente i -ésima de $\vec{v} \in V$, integrando en Ω y sumando sobre $i = 1, \dots, d$, tenemos

$$\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} -v \Delta u_i v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx$$

Aplicando la fórmula de Green, y teniendo en cuenta que $v_i \in H_0^1(\Omega)$ y que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(-v \Delta u_i v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \right) dx &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(-v \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \right) dx = \\ \sum_{i=1}^d \left[\int_{\Omega} \left(v \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dx - \sum_{j=1}^d \int_{\Gamma} \left(v \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \eta_j v_i - p v_i \eta_i \right) d\sigma \right] &= \\ \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \end{aligned}$$

Por tanto, la formulación débil es:

(PS1) Dada $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^d$, hallar $\vec{u} \in V$ tal que,

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx \quad \forall \vec{v} \in V \quad (2.19)$$

La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ sobre $V \times V$ dada por,

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} v \vec{\nabla} \vec{u} : \vec{\nabla} \vec{v} dx$$

es continua. Además, como $a(\vec{v}, \vec{v}) = v |\vec{v}|_{1,\Omega}^2$, $\forall \vec{v} \in V$, también es V -elíptica ($v > 0$).

Por otro lado, la forma lineal,

$$L(\vec{v}) = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx$$

es continua sobre V . Por tanto, aplicando el teorema de Lax-Milgram, el problema débil tiene solución única.

La dificultad aquí es recuperar la formulación fuerte a partir de la débil, concretamente la presión p . Además, $(\mathcal{D}(\Omega))^d$ no está contenido en V , por lo que no podemos proceder como es habitual. Tendremos que hacer uso de este resultado cuya demostración no trivial se puede encontrar en [2].

Teorema 2.17 *Sea Ω un abierto acotado conexo de \mathbb{R}^d de frontera de clase C^1 a trozos, y sea L una forma lineal continua sobre $(H_0^1(\Omega))^d$. Entonces, la forma lineal continua L se anula sobre V si y solo si $\exists \varphi \in L^2(\Omega)$ tal que,*

$$\forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d, \quad L(\vec{v}) = \int_{\Omega} \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dx \quad (2.20)$$

Además, esta condición determina φ de forma unívoca salvo constantes.

Esto nos permite recuperar el problema fuerte a partir del siguiente resultado.

Teorema 2.18 *Existe una única función $\vec{u} \in V$, y una función $p \in L^2(\Omega)$ determinada de forma unívoca salvo constantes, tales que*

$$\forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d, \quad a(\vec{u}, \vec{v}) - \int_{\Omega} p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx \quad (2.21)$$

Además, \vec{u} es la solución del problema débil.

Demostración:

Si $(\vec{u}, p) \in V \times L^2(\Omega)$ es solución de (2.21), entonces también es solución de (2.19) pues si $\vec{u} \in V$, entonces $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

Recíprocamente, si $\vec{u} \in V$ es solución de (2.19), considerando la forma bilineal

$$\vec{v} \mapsto L(\vec{v}) = a(\vec{u}, \vec{v}) - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx$$

esta es continua en $(H_0^1(\Omega))^d$ y se anula en V , y por el teorema anterior, $\exists p \in L^2(\Omega)$, único salvo constantes, tal que,

$$L(\vec{v}) = \int_{\Omega} p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dx, \quad \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d$$

por lo que (\vec{u}, p) es solución de (2.21). ■

El problema (PS1) es la versión reducida de la formulación débil del problema de Stokes. En la práctica, la formulación débil que se utiliza es la siguiente:

(PS2) Dada $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^d$, hallar $\vec{u} \in (H_0^1(\Omega))^d$ y $p \in L_0^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) &= (\vec{f}, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d, \\ b(\vec{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0\}$, esto es, de entre todas las posibles presiones buscamos la de media nula, y

$$\begin{aligned} b(\vec{u}, q) &= - \int_{\Omega} q \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dx, \\ (\vec{f}, \vec{v}) &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx. \end{aligned}$$

La existencia y unicidad de la solución del problema (PS2) requiere además de la V -elipticidad de la aplicación bilineal a , la verificación de la condición *inf-sup* de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) que se puede escribir

$$\inf_{\vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0} \sup_{q \in L^2(\Omega), q \neq 0} \frac{b(\vec{v}, q)}{\|\vec{v}\|_V \|q\|_{0,\Omega}} \geq k > 0$$

Capítulo 3

Aproximación numérica mediante el Método de Elementos Finitos

Resumen Este capítulo veremos la resolución numérica mediante el Método de Elementos Finitos de los problemas elípticos lineales planteados en el capítulo anterior. Comenzaremos estableciendo el marco general del método de Galerkin, para entender el Método de Elementos Finitos como una forma de construir los subespacios de dimensión finita donde se resuelve la aproximación de Galerkin. Veremos un primer ejemplo sencillo en dimensión 1 para después generalizar y comprender como se construye un espacio de Elementos Finitos. Detallaremos el concepto de Elemento Finito de Lagrange, y algunos tipos de elementos finitos sobre d -simplex y paralelótopos. Terminaremos explicando como se construyen los subespacios de dimensión finita de H^1 .

3.1. Aproximación variacional abstracta: Método de Galerkin

Consideremos el problema abstracto presentado en el capítulo anterior: Sean

1. V un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|$,
2. $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal continua y V -elíptica o coerciva,
3. $L(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua.

El problema es:

$$(P) \quad \text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

El espacio V es de dimensión infinita. A fin de obtener una *aproximación numérica* de la solución u del problema (P), reemplazamos el problema (P) por un problema aproximado de dimensión finita. Habrá que verificar que el problema aproximado tiene una solución única, y que esta converge a la solución u del problema (P). Sea V_h una familia de subespacios de dimensión finita, que dependen de un parámetro positivo h , tal que

$$V_h \subset V, \quad \dim V_h = N_h < \infty \quad \forall h > 0.$$

El correspondiente problema aproximado, llamado *aproximación de Galerkin*, será:

$$(P_h) \quad \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Teorema 3.1 *El problema aproximado (P_h) tiene solución única.*

Demostración:

El espacio de dimensión finita V_h es un espacio de Hilbert con la norma de V , $a(\cdot, \cdot)$ es bilineal, continua y elíptica sobre V_h y $L(\cdot)$ es lineal y continua en V_h . Por tanto, por el teorema de Lax-Milgram concluimos. ■

Resolución Práctica

Sea $[\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}]$ una base de V_h . (P_h) se escribe

Hallar $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_h^j \varphi_j$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N_h} a(\varphi_j, \varphi_i) u_h^j = L(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, N_h \quad (3.1)$$

Es decir, un sistema algebraico lineal de ecuaciones.

Denotamos por A a la matriz del sistema, llamada *matriz de rigidez*, cuyos elementos son

$$A_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i)$$

y por \mathbf{b} al vector de componentes $b_i = L(\varphi_i)$. Si denotamos por \mathbf{u} al vector de componentes las incógnitas del sistema algebraico, este se escribe,

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}.$$

La matriz de rigidez tiene propiedades que son independientes de la base de funciones elegidas para V_h , y que dependen exclusivamente de las propiedades del problema variacional que aproxima. Sin embargo, hay otras propiedades, como el número de condicionamiento o la dispersidad (sparsity) que si dependen de la base elegida. El Método de Elementos Finitos nos proporciona una forma de construir esos espacios de dimensión finita y sus bases de la aproximación de Galerkin. En particular, para el MEF las funciones de las bases serán funciones de pequeño soporte, algo interesante desde el punto de vista computacional pues generarán matrices muy dispersas (huecas). Lo interesante es siempre elegir espacios V_h que requieran

poco esfuerzo computacional para el cálculo de la matriz de rigidez y el término independiente.

Teorema 3.2 *La matriz A asociada la aproximación de Galerkin de un problema elíptico cuya forma bilineal sea V -elíptica, es definido positiva.*

Demostración:

Recordemos que una matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definido positiva si

$$\mathbf{v}^t B \mathbf{v} \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \mathbf{v}^t B \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$$

Podemos definir una biyección de \mathbb{R}^{N_h} en V_h de la siguiente forma,

$$\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^{N_h} \leftrightarrow v_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} v_j \varphi_j \in V_h$$

Dado un vector cualquiera $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^{N_h}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^t A \mathbf{v} &= \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} v_i a_{i,j} v_j = \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} v_i a(\varphi_j, \varphi_i) v_j \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} a(v_j \varphi_j, v_i \varphi_i) = a\left(\sum_{j=1}^{N_h} v_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i\right) \\ a(v_h, v_h) &\geq \alpha \|v_h\|_V^2 \geq 0 \end{aligned}$$

gracias a que la forma $a(\cdot, \cdot)$ es bilineal y V -elíptica.

Además, si $\mathbf{v}^t A \mathbf{v} = 0$, entonces $\|v_h\|_V^2 = 0$ también, es decir, $v_h = 0$, y por tanto $\mathbf{v} = 0$. ■

Observación: La demostración que se ha hecho de la **existencia** y **unicidad** de la solución del problema de Galerkin (P_h) hace uso del teorema de Lax-Milgram. Pero este problema es equivalente a un sistema lineal, por lo que demostrar la existencia y unicidad de la solución de uno equivale a la del otro. Desde el punto de vista del sistema lineal, este tiene solución única si la única solución del sistema homogéneo $A\mathbf{v} = 0$ es la solución nula, y esto se deduce de forma inmediata por ser la matriz A definido positiva. Esta es otra forma de demostrar existencia y unicidad de la solución del problema de Galerkin.

Otro resultado importante relacionado con la **estabilidad** de la solución u_h del problema aproximado es el siguiente:

Corolario 3.1 *La solución del problema (P_h) está acotada por los datos, es decir,*

$$\|u_h\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_*$$

donde α es la constante de elipticidad de la aplicación bilineal.

La demostración es igual al caso continuo. La importancia de este resultado radica en que la norma $\|u_h\|$ de la solución discreta permanece acotada, uniformemente respecto a h lo que garantiza la estabilidad del método de Galerkin.

Queda por abordar la cuestión de la convergencia, esto es, si la solución del problema de Galerkin (P_h) converge a la solución del problema débil (P) . Para ello veamos estos dos resultados:

Teorema 3.3 (Ortogonalización de Galerkin) *La solución del problema de Galerkin verifica*

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.2)$$

Demostración:

Por un lado tenemos el problema continuo,

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V,$$

y como $V_h \subset V$, también tenemos

$$a(u, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

que no es más que la **consistencia fuerte** del esquema aproximado.

Por otro lado tenemos el problema discreto

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Restando

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

■

Esta propiedad se llama ortogonalidad de Galerkin porque si la aplicación bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, la solución u_h del método de Galerkin se puede interpretar geoméricamente (utilizando la terminología euclidiana) como la proyección ortogonal en V_h de la solución exacta u . En efecto, si $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, la solución obtenida es la mejor posible en el sentido de la norma

$$\|v\|_A = a(v, v)^{1/2}$$

puesto que

$$\|u - u_h\|_A^2 = a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq \|u - u_h\|_A \cdot \|u - v_h\|_A$$

y finalmente

$$\|u - u_h\|_A = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_A$$

Esto es, u_h es la mejor aproximación de u en el espacio V_h , con respecto a la norma $\|\cdot\|_A$.

Teorema 3.4 (Lema de Céa) Existe una constante $C > 0$ independiente de V_h tal que

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \quad (3.3)$$

Demostración:

Tomando en la aplicación bilineal $u - u_h$ en ambos factores, teniendo en cuenta la ortogonalidad de Galerkin, y la elipticidad y continuidad de la aplicación bilineal, tenemos

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$$

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h$$

y finalmente

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

■

Si $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, se puede mejorar el resultado anterior. En efecto, para todo $v_h \in V_h$

$$\begin{aligned} a(u - v_h, u - v_h) &= a(u - u_h + u_h - v_h, u - u_h + u_h - v_h) = \\ &= a(u - u_h, u - u_h) + 2a(u - u_h, u_h - v_h) + a(u_h - v_h, u_h - v_h) \end{aligned}$$

En el segundo miembro, el segundo término es nulo y el tercero es mayor o igual que cero. De donde

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - v_h, u - v_h) \leq M \|u - v_h\|^2$$

y finalmente

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h$$

es decir

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

Con esto, es evidente que para que el método de Galerkin converja es suficiente requerir que cuando h tiende a 0, el espacio finito V_h tienda a “llenar” el espacio entero V . Para ello, supondremos que $\forall v \in V$, existe una sucesión $v_h \in V_h$ tal que $v_h \rightarrow v$ en V cuando $h \rightarrow 0$, de forma precisa, debemos suponer la siguiente propiedad de densidad,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \min_{v_h \in V_h} \|v - v_h\| = 0, \quad \forall v \in V.$$

En este caso, el método de Galerkin converge y podemos escribir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0$$

La elección de V_h se debe hacer con cuidado para garantizar esta propiedad de densidad. Una vez satisfecha esta propiedad, la convergencia se debe verificar independientemente de como sea la solución u . Por el contrario, la velocidad de esta convergencia, es decir, el orden de reducción del error respecto a h , dependerá en general tanto de la solución u como de la elección del espacio V_h .

Aquí estamos introduciendo el concepto de **orden de convergencia**. En la terminología clásica del Análisis Numérico se dice que un método de aproximación es de orden k si $\|u - u_h\| = O(h^k)$ cuando $h \rightarrow 0$. Gracias al lema de Céa, para obtener un método de Galerkin de orden k bastaría con encontrar unos subespacios V_h de V de dimensión finita de modo que para cada $u \in V$ existiese una sucesión aproximante $v_h \in V_h$ tal que $\|u - v_h\| = O(h^k)$.

El Método de Elementos Finitos nos permite construir subespacios de dimensión finita verificando esta propiedad de densidad, de modo que bajo ciertas condiciones de regularidad podremos obtener resultados de convergencia del tipo

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}$$

Este tipo de resultados para el Método de Elementos Finitos se analizan en el Capítulo 4.

3.2. El M.E.F. para el problema modelo de dimensión 1 con funciones lineales a trozos

Vamos a construir una aproximación del problema (2.5) mediante un método de elementos finitos. El espacio $H_0^1(I)$ en el que está formulado (2.5) es un espacio de dimensión infinita. La idea del M.E.F. es buscar soluciones de 2.5 en un subespacio de $H_0^1(I)$, más sencillo de manejar, en particular en un subespacio de dimensión finita. Esto nos permitirá representar cualquier función de este subespacio como combinación lineal de elementos de una base. En primer lugar construiremos un subespacio V_h de $H_0^1(I)$. Para ello sea $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$, una partición del intervalo $(0,1)$ en subintervalos $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ de longitud $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, N+1$ y sea $h = \max h_i$. La cantidad h es una medida de lo fina que es la partición. Consideremos ahora el conjunto de funciones v_h lineales en cada subintervalo I_i , y continuas en $[0,1]$ y tales que $v(0) = v(1) = 0$, como en el ejemplo de la siguiente figura:

Una base de este espacio está constituida por el siguiente conjunto de funciones $\varphi_j \in V_h$, $i = 1, \dots, N$, definidas por:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

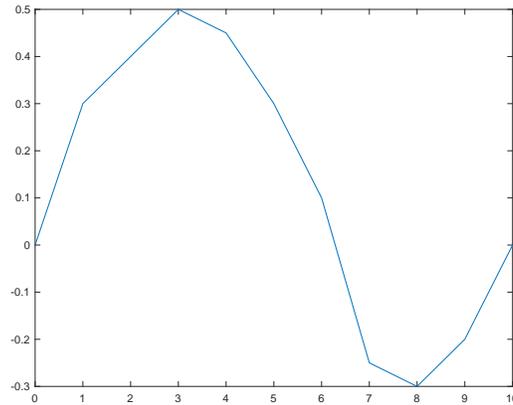


Figura 3.1 Ejemplo de una función $v_h \in V_h$, 10 subintervalos.

es decir, φ_i es continua y lineal a trozos y toma el valor 1 en el nodo x_i y el valor 0 en los otros nodos. De forma más precisa:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{if } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{if } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{if } x_{i+1} < x \end{cases}$$

Una función $v_h \in V_h$ se escribe de forma única como combinación lineal de funciones de la base $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$,

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_h(x_i) \varphi_i(x) \quad x \in [0, 1]$$

El método de elementos finitos para el problema de contorno (2.1)-(2.2)-(2.3) se formula de la siguiente manera:

Hallar $u_h \in V_h$ tal que para todo $v_h \in V_h$ verifique:

$$\int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad (3.4)$$

Este problema, como hemos visto es equivalente a resolver un sistema algebraico lineal, en efecto:

Para que se verifique 3.4 para cualquier v_h es necesario y suficiente que se verifique para cualquier función de la base. Por otra parte, la solución u_h se expresa en función de los elementos de la base $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, esto es, $u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)$, donde $u_j = u_h(x_j)$, resultando que el problema a resolver es:

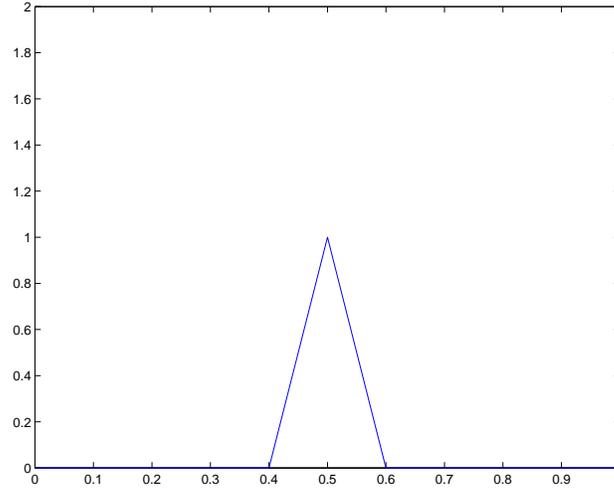


Figura 3.2 Ejemplo de una función de la base de V_h , 10 subintervalos.

Hallar $\mathbf{u} = \{u_j\}_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$ solución de

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx \right) u_j = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \quad i = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

En forma matricial el sistema se puede escribir

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

donde la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^N$, $a_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx$ y el segundo miembro $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^N$ viene dado por $b_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$

Los elementos a_{ij} de la matriz \mathbf{A} se calculan fácilmente. Observemos primero que si $|i - j| > 1$ entonces $a_{ij} = 0$ pues en este caso para todo $x \in [0, 1]$, $\varphi_i(x)$ o $\varphi_j(x)$ es igual a cero. Por tanto la matriz \mathbf{A} es tridiagonal, es decir, únicamente los elementos de la diagonal principal y los elementos de las dos diagonales adyacentes pueden ser diferentes de cero. Tenemos para $i = 1, \dots, N$,

$$\int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1}^2} dx = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}$$

y para $i = 2, \dots, N$,

$$\int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_{i-1}'(x) dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i^2} dx = -\frac{1}{h_i}$$

Observamos además que la matriz es simétrica y definida positiva, en efecto, $a_{ij} = a_{ji}$ y por otra parte para cualquier $(v_i)_{i=1}^N$, vector de \mathbb{R}^N , distinto del vector nulo, sea $v_h = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i$, entonces

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} v_j v_i = \int_0^1 v'_h(x) v'_h(x) dx > 0$$

En el caso especial en el que los subintervalos I_i tengan todos la misma longitud $h = \frac{1}{N+1}$ el sistema tiene la forma

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

que dividiendo por h se interpreta como un esquema en diferencias finitas para resolver el problema (2.1)-(2.2)-(2.3)

3.3. Construcción de espacios de Elementos Finitos

El método de Elementos Finitos consiste en elegir un subespacio V_h de dimensión finita y más precisamente una base de este subespacio en el que la funciones de dicha base son de pequeño soporte.

3.3.1. Generalidades

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, un abierto poliédrico de \mathbb{R}^d (un polígono si estamos en \mathbb{R}^2) de frontera Γ .

Vamos a considerar una descomposición finita de Ω :

$$\overline{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

tal que:

1. Cada elemento T de \mathcal{T}_h es un poliedro de \mathbb{R}^d de interior no vacío.
2. Los interiores de dos poliedros distintos de \mathcal{T}_h son disjuntos.
3. Toda cara de un poliedro $T_1 \in \mathcal{T}_h$ es o bien una cara de otro poliedro T_2 , en cuyo caso T_1 y T_2 son adyacentes, o bien una parte de la frontera Γ de Ω

Definición 3.1 Toda descomposición de $\overline{\Omega}$ verificando las propiedades anteriores se llama triangulación de $\overline{\Omega}$. En la figura 3.3 se muestra un ejemplo.

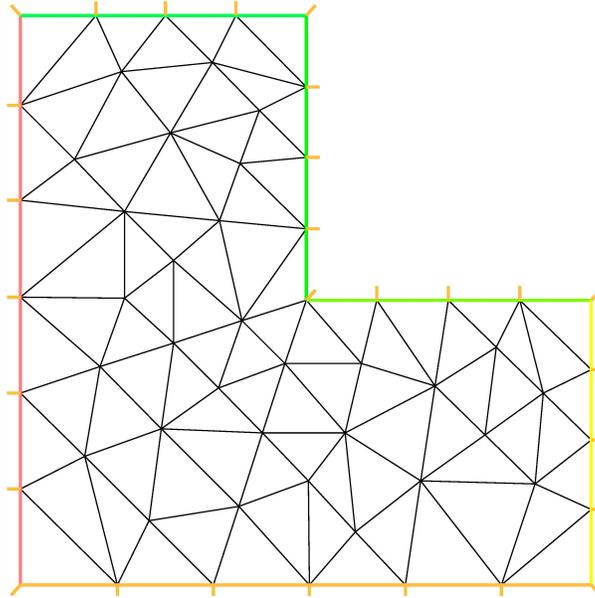


Figura 3.3 Ejemplo de triangulación

Notación \mathcal{T}_h designará en general una triangulación de $\overline{\Omega}$ tal que $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ donde h_T es el diámetro del poliedro T .

Un subespacio de V_h de dimensión finita de $H^1(\Omega)$ se puede construir, como se verá más adelante, tomando por ejemplo,

$$V_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}); v|_T \in P_k \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

donde P_k designa un espacio de polinomios de grado k en el poliedro T .

3.3.2. Concepto de Elemento Finito

Un Elemento Finito es una terna (T, P, Σ) donde

1. T es una parte compacta de \mathbb{R}^d conexa de interior no vacío.
2. P es un espacio vectorial de dimensión finita N cuyos elementos son funciones de T en \mathbb{R} .
3. Σ es una base del espacio dual de P , es decir, N funciones lineales de P en \mathbb{R} linealmente independientes.

Base asociada a un elemento finito

La base dual de Σ en P es la base asociada, es decir si $\Sigma = \{\mathcal{L}_i\}_{i=1}^N$, la base asociada al elemento finito (T, P, Σ) será el conjunto $\{p_j\}_{j=1}^N \subset P$ tal que $\mathcal{L}_i(p_j) = \delta_{ij}$.

Elementos Finitos de Lagrange

Definición 3.2 Se dice que el conjunto $\{a_j\}_{j=1}^N$ de puntos de T es P -unisolvente si y solo si, dados N escalares reales cualesquiera $\alpha_j \quad 1 \leq j \leq N$, existe una función p del espacio P y una sola tal que

$$p(a_j) = \alpha_j \quad 1 \leq j \leq N$$

Definición 3.3 Un Elemento Finito de Lagrange es entonces un Elemento Finito (T, P, Σ) en el que $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$ y donde $\{a_i\}_{i=1}^N$ es un conjunto de puntos de T , P -unisolvente.

Interpretación de la definición: Los puntos $\{a_i\}_{i=1}^N$ se pueden considerar como formas lineales del dual de P , en efecto

$$\begin{aligned} a_i : P &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longrightarrow a_i(p) = p(a_i) \end{aligned}$$

Un Elemento Finito de Lagrange es entonces una terna (T, P, Σ) donde

1. T es una parte compacta de \mathbb{R}^d conexa de interior no vacío.
2. $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N$ es un conjunto finito de N puntos P -unisolvente de T
3. P es un espacio vectorial de dimensión finita y compuesto por funciones definidas sobre T a valores reales.

Dado un elemento finito (T, P, Σ) se llaman funciones de base a la base dual de Σ , es decir, a las N funciones $p_i \quad 1 \leq i \leq N$ definidas por

$$p_i(a_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq N$$

Comentario : Una condición necesaria para que el conjunto Σ sea P -unisolvente es que la dimensión de P sea igual al cardinal de $\Sigma = N$. Una vez verificada esta condición, tenemos dos criterios sencillos que aseguran la P -unisolvencia de Σ .

1. Basta verificar que la única función $p \in P$ que se anula en Σ es la función nula. En efecto, cuando esta propiedad se satisface, la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : P &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ p &\longrightarrow (p(a_j))_{j=1}^N \end{aligned}$$

es inyectiva y por lo tanto biyectiva pues P es de dimensión N

2. Basta hallar las funciones $\{p_i\}_{i=1}^N$ del espacio P verificando $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ para probar la P -unisolvencia. En efecto, si estas funciones existen, a todo conjunto de N escalares reales $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq N}$ le asociamos la función

$$p = \sum \alpha_j p_j$$

Esta función es una función de P tal que $p(a_j) = \alpha_j$ $1 \leq j \leq N$. Esto prueba que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : P &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ p &\longrightarrow (p(a_j))_{j=1}^N \end{aligned}$$

es sobreyectiva y por tanto biyectiva.

Definición 3.4 *Operador de P -interpolación sobre T .* Se llama operador de P -interpolación de Lagrange sobre T al operador que a toda función v definida en T le asocia la función $\Pi_T v$ definida por $\Pi_T v = \sum v(a_i) p_i$. $\Pi_T v$ se llama la función interpolada de v .

La función $\Pi_T v$ verifica

$$\Pi_T v(a_j) = \sum v(a_i) p_i(a_j) = \sum v(a_i) \delta_{ij} = v(a_j) \quad 1 \leq j \leq N$$

Es pues la única función p de P verificando $p(a_j) = v(a_j)$.

3.3.3. Elementos Finitos de Lagrange en un d -simplex

Vamos a construir una clase de elementos finitos de Lagrange (T, P, Σ) donde T será un d -simplex de \mathbb{R}^d . Recordemos la noción de d -simplex:

Consideremos $d+1$ puntos $a_j = (a_{ij})_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$ $1 \leq j \leq d+1$ no situados en un mismo hiperplano de \mathbb{R}^d , es decir, que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \dots & a_{d,d+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

sea no singular.

Se llama d -simplex T de vértices a_j a la envolvente convexa de los puntos a_j . Si $d=2$ se llaman triángulos y si $d=3$ tetraedros.

Coordenadas baricéntricas

Todo punto x de \mathbb{R}^d de coordenadas cartesianas x_i $1 \leq i \leq d$, está caracterizado dando $d+1$ escalares $\lambda_j = \lambda_j(x)$ $1 \leq j \leq d+1$ definidos como solución del sistema lineal

$$\sum_{j=1}^{d+1} a_{ij} \lambda_j = x_i$$

$$\sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j = 1$$

cuya matriz es precisamente la matriz regular A .

Los escalares $\lambda_j(x)$ $1 \leq j \leq d+1$ se llaman las coordenadas baricéntricas del punto x con respecto a los puntos a_j . Cada una de estas funciones es una función afin de \mathbb{R}^d en \mathbb{R} y se tiene para todo $x \in \mathbb{R}^d$

$$x = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j(x) a_j$$

El d -simplex T definido por los vértices a_j está caracterizado por

$$T = \{x \in \mathbb{R}^d; \quad x = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j(x) a_j \quad 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1, \quad 1 \leq j \leq d+1\}$$

Observemos que $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq d+1$.

Ejemplos

1. Tria-p1-c:

T : Triángulo.

P : Polinomios de grado 1.

Σ : Los tres vértices del triángulo.

Es el ejemplo que hemos estudiado. Las funciones de la base local son $p_i = \lambda_i$.

2. Tria-p2-c:

T : Triángulo.

P : Polinomios de grado 2.

Σ : Los tres vértices y los puntos medios de las aristas.

Las funciones de P son pues funciones de la forma $p(x, y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$. P es un espacio de dimensión seis. La base asociada de P estará formada por las seis funciones p_i verificando $p_i(a_j) = \delta_{ij}$. Para hallar las seis funciones de la base, podemos proceder de la manera siguiente: Llamemos a_i , $i = 1, 2, 3$ los tres vértices y a_i , $i = 4, 5, 6$ los tres puntos medios de las aristas (ver figura 3.4). Para hallar p_1 , es decir una función que verifique

$$p(a_1) = 1 \quad p(a_j) = 0 \quad j \neq 1$$

Observemos que λ_1 la coordenada baricéntrica que vale 1 en el nodo a_1 y cero en a_2, a_3, a_4 no se anula en a_5, a_6 donde vale $\lambda_1(a_5) = \lambda_1(a_6) = 1/2$. Por tanto si tomamos

$$p_1 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$$

verifica las propiedades requeridas. Análogamente las otras dos funciones asociadas a los vértices serán

$$p_2 = \lambda_2(2\lambda_2 - 1)$$

$$p_3 = \lambda_3(2\lambda_3 - 1)$$

Busquemos ahora p_4, p_5 y p_6 , las funciones asociadas a los puntos medios de los lados. Basta observar que la función λ_2 se anula en la recta $a_1 - a_5 - a_3$, y λ_3 se anula en la recta $a_1 - a_6 - a_2$, por lo tanto $\lambda_2\lambda_3$ se anula en todos los puntos de Σ salvo en a_4 donde vale $\lambda_2(a_4)\lambda_3(a_4) = 1/2, 1/2 = 1/4$, de donde finalmente la función

$$p_4 = 4\lambda_2\lambda_3$$

será la función base asociada al nodo a_4 . Análogamente obtenemos

$$p_5 = 4\lambda_1\lambda_3$$

$$p_6 = 4\lambda_1\lambda_2$$

En las figuras 3.5,3.6,3.7,3.8,3.9 y 3.10 se representan las gráficas de las funciones de la base p_i , $i = 1, \dots, 6$ en el triángulo de referencia de vértices $(0,0), (1,0), (0,1)$.

3. Tetra-p1-c:

T : Tetraedro.

P : Polinomios de grado 1 de tres variables.

Σ : Los cuatro vértices del tetraedro.

Las funciones de la base local son $p_i = \lambda_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

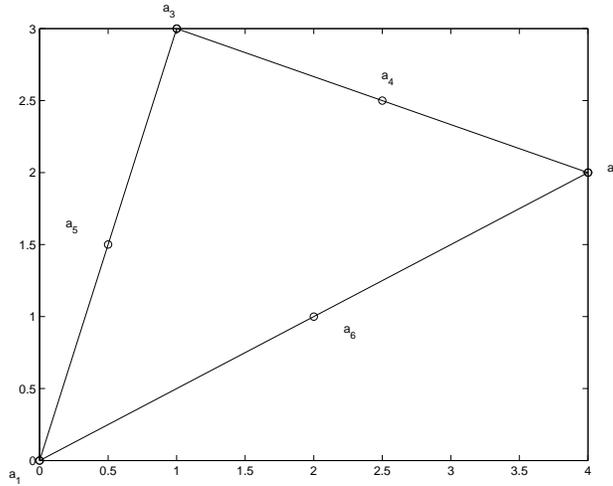


Figura 3.4 triángulo de seis nodos

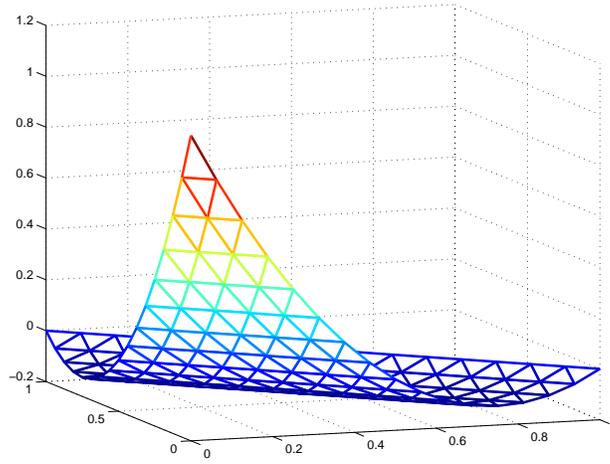


Figura 3.5 función p_1

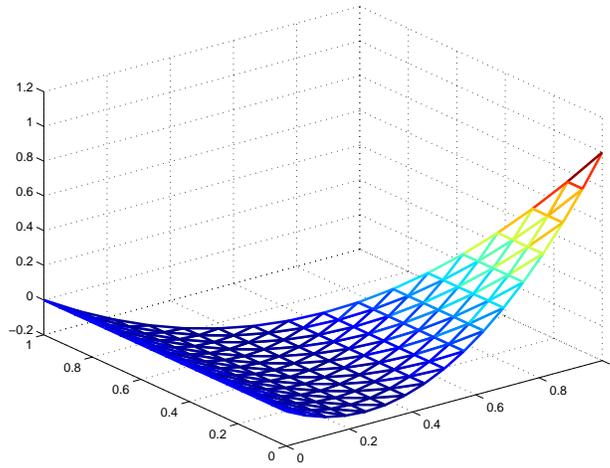
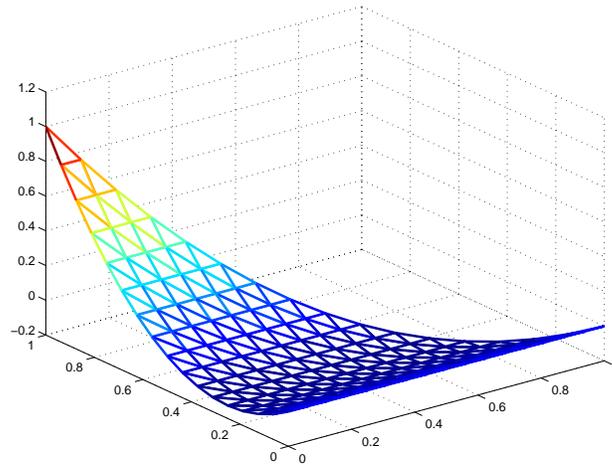
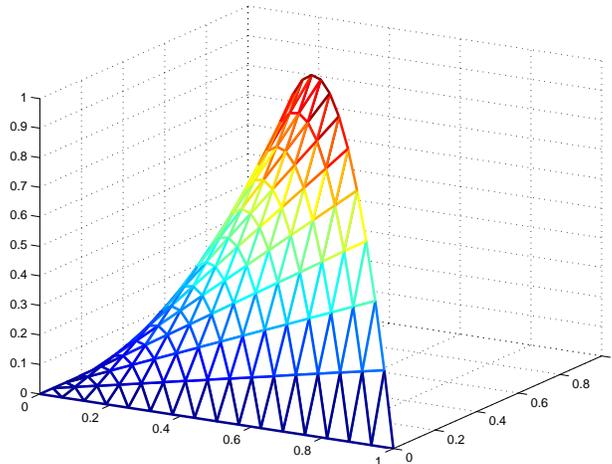


Figura 3.6 función p_2

Figura 3.7 función p_3 Figura 3.8 función p_4

3.3.4. Un método general para construir a partir de un elemento finito $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ toda una familia de elementos finitos (T, P, Σ)

Consideremos un conjunto compacto \hat{T} de \mathbb{R}^d , convexo y de interior no vacío. F una aplicación de \hat{T} en \mathbb{R}^d . Supongamos que $T = F(\hat{T})$ es una parte compacta, conexa y de interior no vacía (por ejemplo exigiendo que F sea biyectiva y bicontinua de \hat{T} en T).

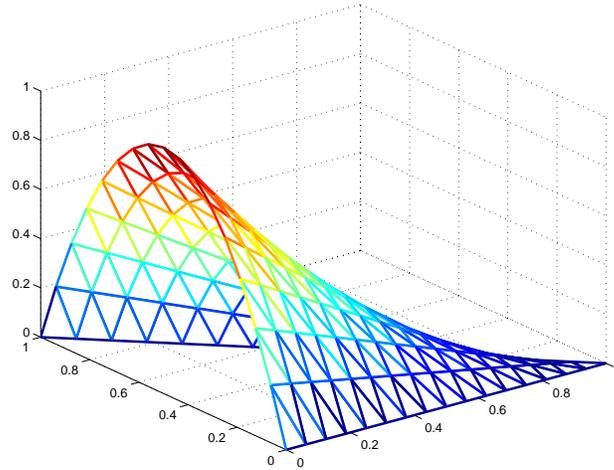


Figura 3.9 función p_5

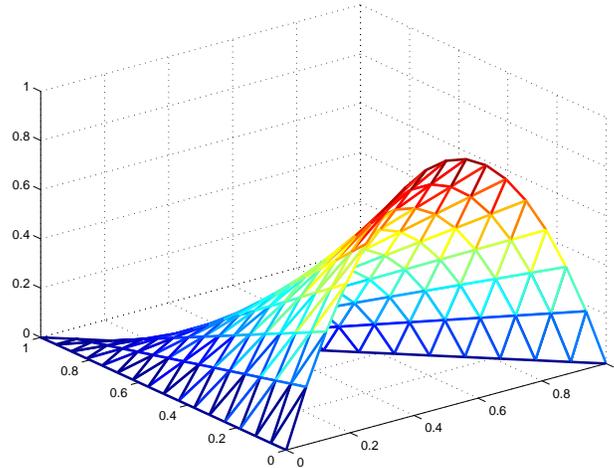


Figura 3.10 función p_6

Teorema 3.5 *Supongamos que la aplicación F es biyectiva. Entonces si $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ es un elemento finito de Lagrange, la terna (T, P, Σ) donde $T = F(\hat{T})$ y donde $P = \{p : T \rightarrow \mathbb{R} \mid p \circ F \in \hat{P}\}$ y $\Sigma = F(\hat{\Sigma})$ es un elemento finito de Lagrange.*

Demostración:

Sea $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ un elemento finito donde $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_j\}_{j=1}^N$ es un conjunto de N puntos distintos de \hat{T} .

Pongamos $a_j = F(\hat{a}_j) \quad 1 \leq j \leq N$

Entonces $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N \quad 1 \leq j \leq N$

Puesto que F es biyectiva de \hat{T} en $T = F(\hat{T})$

$$\text{card}(\Sigma) = \text{card}(\hat{\Sigma}) = \dim(\hat{P}) = \dim(P)$$

para demostrar que Σ es P -unisolvente basta obtener las funciones de base correspondientes a (T, P, Σ) .

Sean $\hat{p}_i \quad i = 1, \dots, N$ las funciones de base correspondientes a $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, entonces

$$p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1} \quad i = 1, \dots, N$$

son las funciones de base correspondientes a P , en efecto $p_i \in P$ pues

$$p_i \circ F = \hat{p}_i \circ F^{-1} \circ F = \hat{p}_i \in \hat{P}$$

y además si $a_i \in \Sigma$

$$p_i(a_j) = (\hat{p}_i \circ F^{-1})(a_j) = \hat{p}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}$$

■

Definición 3.5 Dos elementos finitos de Lagrange $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ y (T, P, Σ) se dice que son equivalentes si existe una aplicación F biyectiva de \hat{T} en T verificando:

$$P = \{p : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{p} = p \circ F \in \hat{P}\}$$

$$\Sigma = F(\hat{\Sigma})$$

Cuando se puede elegir como aplicación F una aplicación afín, los elementos finitos se llaman afín equivalentes.

Teorema 3.6 Sean $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ y (T, P, Σ) dos elementos de Lagrange equivalentes y F una biyección de \hat{T} en T verificando la condición de equivalencia.

Si $\hat{\Pi}$ es el operador de \hat{P} -interpolación sobre $\hat{\Sigma}$, el operador Π de P -interpolación sobre Σ está caracterizado por

$$(\Pi v) \circ F = \hat{\Pi}(v \circ F)$$

para toda función v definida en T .

Ejemplo 1

Veamos como podemos construir una familia de elementos finitos (T, P, Σ) afín equivalentes al elemento finito $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ siguiente:

\hat{T} : Triángulo de \mathbb{R}^2 de vértices $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$

\hat{P} : Polinomios de grado 2 en \hat{T} .

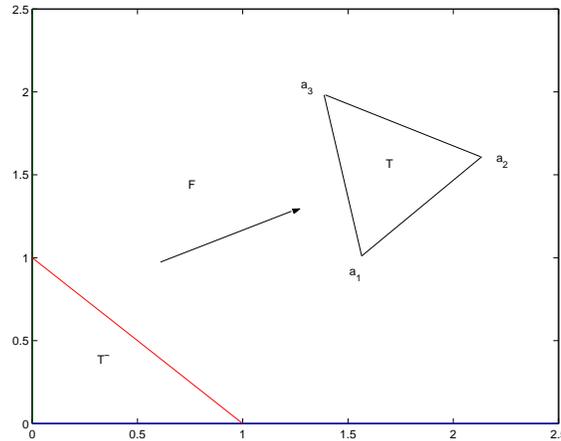
$\hat{\Sigma}$: $\{\hat{a}_i\}_{i=1}^6$, donde $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ son los tres vértices de \hat{T} , y $\hat{a}_4, \hat{a}_5, \hat{a}_6$ son los puntos medios de las aristas de \hat{T} .

Consideremos la aplicación afín F que lleva los vértices de \hat{T} , $\{\hat{a}_i\}_{i=1,2,3}$ a los vértices $\{a_i\}_{i=1,2,3}$ de T respectivamente. Esta aplicación es fácil de construir. Observemos que

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= 1 - \hat{x} - \hat{y} \\ \hat{\lambda}_2 &= \hat{x} \\ \hat{\lambda}_3 &= \hat{y}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \hat{\lambda}_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = (1 - \hat{x} - \hat{y}) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \hat{x} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \hat{y} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} = F(\hat{\mathbf{x}})\end{aligned}$$



La aplicación F es afín y lleva los vértices a los vértices. Por otra parte si definimos sobre T las funciones $p_i = \hat{\lambda}_i \circ F^{-1}$, para $i = 1, 2, 3$ son polinomios de grado 1. Resulta

$$p_i(a_j) = (\hat{\lambda}_i \circ F^{-1})(a_j) = \hat{\lambda}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}$$

Por lo tanto $p_i = \lambda_i$ para $i = 1, 2, 3$. Tenemos pues que $\lambda_i(x) = \hat{\lambda}_i(\hat{x})$ donde $x = F(\hat{x})$. Es decir $T = F(\hat{T})$ y los puntos medios de las aristas van a parar a los puntos medios de las aristas. Es inmediato ver que $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ y la familia (T, P, Σ) compuesta por T , triángulos, P , polinomios de grado 2 en T y Σ la unión de vértices y puntos medios de las aristas son afín-equivalentes.

Ejemplo 2: Familias equivalentes a elementos finitos paralelótopos

Consideremos el cubo unidad $\hat{T} = [-1, +1]^d$. Construiremos elementos finitos sobre \hat{T} , $(\hat{T}, \hat{Q}, \hat{\Sigma})$. Un elemento finito paralelótopo será un elemento finito afín-equivalente a $(\hat{T}, \hat{Q}, \hat{\Sigma})$.

Ejemplo 2.1

$$\hat{T} = [-1, +1]^2$$

$$\hat{Q} = \{\hat{p} : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) = a + b\hat{x} + c\hat{y} + d\hat{x}\hat{y}\}$$

$\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^4$, los cuatro vértices de \hat{T} .

Veamos cuáles son las funciones de la base de \hat{Q} (dual de $\hat{\Sigma}$):

Tenemos $\dim(\hat{Q}) = \text{card}(\hat{\Sigma}) = 4$. Observando que la ecuación de la recta $\hat{a}_3\hat{a}_4$ es $\hat{y} = -1$ y de la recta $\hat{a}_3\hat{a}_2$ es $\hat{x} = -1$ resulta,

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y})$$

y análogamente

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 + \hat{y})$$

$$\hat{p}_3 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y})$$

$$\hat{p}_4 = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 - \hat{y})$$

Ejemplo 2.2

$$\hat{T} = [-1, +1]^2$$

$$\hat{Q} = \hat{Q}_2 =$$

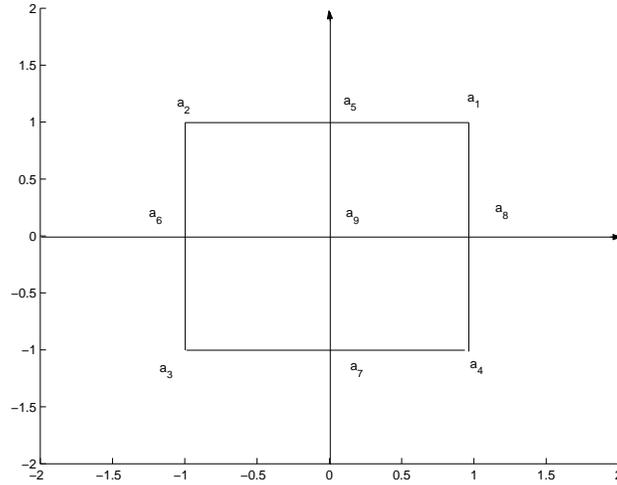
$$\{\hat{p} : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) = a + b\hat{x} + c\hat{y} + d\hat{x}\hat{y} + e\hat{x}^2 + f\hat{y}^2 + g\hat{x}^2\hat{y} + h\hat{x}\hat{y}^2 + k\hat{x}^2\hat{y}^2\}$$

$\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^9$, donde $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_4$ son los cuatro vértices de \hat{T} y $\hat{a}_5, \dots, \hat{a}_8$ son los puntos medios de los lados, y \hat{a}_9 es el centro del cuadrado. Tenemos pues que $\hat{P}_2 \subset \hat{Q}_2 \subset \hat{P}_4$

La base será:

- $\hat{p}_1 = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y})\hat{x}\hat{y}$
- $\hat{p}_2 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 + \hat{y})\hat{x}\hat{y}$
- $\hat{p}_3 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y})\hat{x}\hat{y}$
- $\hat{p}_4 = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 - \hat{y})\hat{x}\hat{y}$
- $\hat{p}_5 = \frac{1}{2}(1 + \hat{x})(1 - \hat{x})(1 + \hat{y})\hat{y}$
- $\hat{p}_6 = \frac{1}{2}(1 - \hat{x})(1 + \hat{x})(1 + \hat{y})\hat{x}$
- $\hat{p}_7 = \frac{1}{2}(1 - \hat{x})(1 + \hat{x})(1 - \hat{y})\hat{y}$
- $\hat{p}_8 = \frac{1}{2}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y})(1 - \hat{y})\hat{x}$

$$\blacksquare \hat{p}_9 = (1 + \hat{x})(1 - \hat{x})(1 + \hat{y})(1 - \hat{y})$$



3.3.5. Construcción de subespacios de H^1

En primer lugar veremos como se pueden construir funciones de $H^1(\Omega)$ a partir de funciones definidas a trozos sobre subconjuntos de Ω .

Teorema 3.7 Sea $\bar{\Omega} = \bigcup_{r=1}^N \bar{\Omega}_r$ una descomposición de $\bar{\Omega}$ tal que

1. Ω_r es un abierto de \mathbb{R}^d contenido en Ω de frontera $\Gamma_r \in C^1$ a trozos para todo $r = 1, \dots, N$.
2. $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$ para $r \neq s$

Sea v una función continua en $\bar{\Omega}$ tal que la restricción $v|_{\Omega_r}$ pertenece a $H^1(\Omega_r)$, para todo $r = 1, \dots, N$. Entonces $v \in H^1(\Omega)$.

Demostración:

Sea v continua en $\bar{\Omega}$ tal que $v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r)$; Evidentemente $v \in L^2(\Omega)$. Hemos de ver que $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ para $i = 1, \dots, d$

Para ello veamos que $\frac{\partial v}{\partial x_i} = v_i \in L^2(\Omega)$ donde $v_i|_{\Omega_r} = \frac{\partial(v|_{\Omega_r})}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_r)$. En efecto, para toda función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tendremos

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} =$$

$$\begin{aligned}
-\sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \sum_{r=1}^N \left(\int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi - \int_{\partial \Omega_r} v \varphi \nu_i \right) = \\
&= \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi - \sum_{r=1}^N \int_{\partial \Omega_r} v \varphi \nu_i = \\
\sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi &= \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} \nu_i \varphi = \langle \nu_i, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

pues v es continua. ■

Vamos ahora a construir subespacios de $H^1(\Omega)$ de dimensión finita.

Sea Ω un abierto poliédrico (para simplificar) de \mathbb{R}^d .

$\bar{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$, siendo \mathcal{T}_h una triangulación de Ω

Suponemos además que cada poliedro T de \mathcal{T}_h está asociado a un elemento finito de Lagrange (T, P_T, Σ_T) tal que $P_T \subset H^1(T)$

Definimos el espacio de dimensión finita

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad v|_T \in P_T\}$$

Así en virtud del teorema anterior V_h es un subespacio de $H^1(\Omega)$.

Sin hipótesis suplementarias sobre los elementos finitos (T, P_T, Σ_T) no es en modo alguno evidente la determinación de una base de V_h (pues V_h es isomorfo a un subespacio propio de $\prod_{T \in \mathcal{T}_h} P_T$). Por otra parte resulta natural introducir el operador de interpolación Π_h que a toda función continua definida en $\bar{\Omega}$ le hace corresponder la función $\Pi_h v$ de $L^2(\Omega)$ definida por

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \forall x \in T \quad \Pi_h v(x) = \Pi_T v(x)$$

donde Π_T es el operador de P_T -interpolación sobre Σ_T . En general sin hipótesis suplementarias sobre el elemento finito (T, P_T, Σ_T) , la función $\Pi_h v$ no es en general continua sobre $\bar{\Omega}$ y no pertenece a V_h . Para evitar esta situación se introduce una *hipótesis de compatibilidad* entre dos elementos finitos:

Supondremos que para todo par $\{T_1, T_2\}$ de poliedros adyacentes de \mathcal{T}_h , de cara común $T' = T_1 \cap T_2$, tenemos

1. $P_{T_1}|_{T'} = P_{T_2}|_{T'}$
2. $\Sigma_{T_1} \cap T' = \Sigma_{T_2} \cap T'$

Además necesitaremos la definición siguiente:

Definición 3.6 Sea T un poliedro de \mathbb{R}^d ; Un elemento finito (T, P, Σ) se llama de clase C^0 si las dos condiciones siguientes se satisfacen:

1. $P \subset C^0(T)$
2. Para toda cara T' de T , el conjunto $\Sigma' = \Sigma \cap T'$ es P' -unisolvante donde $P' = \{p|_{T'}; \quad p \in P\}$.

Teorema 3.8 Sea \mathcal{T}_h una triangulación de $\bar{\Omega}$ y sea $(T, P_T, \Sigma_T)_{T \in \mathcal{T}_h}$ una familia de elementos finitos asociada. Suponemos que las condiciones de compatibilidad (1) y (2) anteriores se satisfacen y que para todo $T \in \mathcal{T}_h$, (T, P_T, Σ_T) es un elemento finito de clase C^0 y P_T es un subespacio de $H^1(T)$. Entonces el operador de interpolación Π_h , definido por

$$\Pi_h v(x) = \Pi_T v(x) \quad \forall x \in \mathring{T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

de C^0 en $L^2(\Omega)$ tiene su imagen en $C^0(\bar{\Omega})$. Dicho de otro modo y de manera más precisa

$$V_h = \{\Pi_h v; \quad v \in C^0(\bar{\Omega})\}$$

Demostración:

Sea v una función continua definida en $\bar{\Omega}$; la restricción a un elemento cualquiera T de \mathcal{T}_h de la función $\Pi_h v$ pertenece al espacio P_T , subespacio de $C^0(T)$. Para demostrar que $\Pi_h v$ pertenece a V_h basta verificar que $\Pi_h v$ es continua sobre toda cara T' común a dos elementos adyacentes T_1 y T_2 de \mathcal{T}_h , es decir, que tenemos

$$\Pi_{T_1} v|_{T'} = \Pi_{T_2} v|_{T'}$$

Como la función $w = \Pi_{T_1} v|_{T'} - \Pi_{T_2} v|_{T'}$ es una función del espacio $P' = P_{T_1}|_{T'} = P_{T_2}|_{T'}$ tal que $\forall a \in \Sigma' \quad w(a) = 0$ donde $\Sigma' = \Sigma_{T_1 \cap T_2} = \Sigma_{T_2 \cap T_1}$, los elementos finitos son de clase C^0 y Σ' es P' -unisolvante, deducimos $w = 0$. En consecuencia $\Pi_h v$ es continua sobre $\bar{\Omega}$, es decir $\{\Pi_h v; \quad v \in C^0(\bar{\Omega})\} \subset V_h$.

Recíprocamente, sea $v \in V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); \quad v|_T \in P_T\}$, tenemos $v|_T \in P_T$, entonces $v|_T = \Pi_T v$ así pues $v = \Pi_h v$ y v es continua pues $v \in V_h$. ■

Construcción de una base de V_h

Introduzcamos el conjunto de nodos de los elementos finitos

$$\Sigma_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} \Sigma_T = \{a_i\}_{1 \leq i \leq I} \quad \text{card}(\Sigma_h) = I$$

Para todo entero $i \quad 1 \leq i \leq I$, designamos φ_i la función de V_h tal que

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq I$$

Si v es una función continua sobre $\bar{\Omega}$, tenemos evidentemente

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^I v(a_i) \varphi_i$$

Corolario 3.2 Con las hipótesis anteriores el conjunto de funciones $\{\varphi_i\}_{i=1}^I$ constituyen una base de V_h y toda función v de V_h se escribe

$$v = \sum_{i=1}^I v(a_i) \varphi_i$$

Definición 3.7 *Los escalares $\{v(a_i)\}_{i=1}^I$ se llaman grados de libertad de una función v de V_h .*

Observemos que las funciones φ_i tienen pequeño soporte. Más precisamente, el soporte de φ_i es el conjunto de elementos T de \mathcal{T}_h que contienen al nodo a_i . Además la restricción de φ_i a cada uno de estos elementos T es una función de la base del elemento finito (T, P_T, Σ_T) .

Ejemplos

1. \mathcal{T}_h , triangulación de $\bar{\Omega}$ construida mediante d -simplex. Dado un entero $k \geq 1$, se asocia a todo T de \mathcal{T}_h el d -simplex de tipo (k) , (T, P_k, Σ_k) . P_k es el espacio de polinomios de grado k en T . Entonces todo (T, P_k, Σ_k) es de clase C^0 y se verifican las condiciones de compatibilidad siendo aplicable el teorema anterior.
2. Análogo al anterior construyendo \mathcal{T}_h mediante paralelótopos y elementos finitos del tipo (T, Q_k, Σ_k) , siendo Q_k el espacio de polinomios de grado k obtenido mediante producto tensorial del espacio de polinomios de grado k en cada variable.
3. Mezclando los dos anteriores de manera que en una cara común a un triángulo y a un paralelótopo se cumplan las condiciones de compatibilidad.

Capítulo 4

Análisis numérico del Método de Elementos Finitos

Resumen Este capítulo veremos algunos resultados generales de aproximación en espacios de Sobolev y su aplicación al análisis numérico del Método de Elementos Finitos en problemas elípticos lineales.

Situémonos de nuevo en el problema, en un marco variacional abstracto, donde V es un espacio de Hilbert con su norma $\|\cdot\|$, $a(\cdot, \cdot)$ es una aplicación lineal, continua y elíptica sobre V , y $L(\cdot)$ una forma lineal continua sobre V . Denotamos M a la constante de continuidad de la aplicación bilineal, y α a la constante de la elipticidad. El problema variacional continuo es:

$$(P) \quad \text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

Sea V_h un subespacio de dimensión finita de V , el correspondiente problema aproximado es:

$$(P_h) \quad \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

El lema de Céa nos asegura que

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

En particular, si V_h es un espacio de elementos finitos como los descritos en el Capítulo 3, y Π_h el correspondiente operador de interpolación, tenemos que $\Pi_h u \in V_h$, por tanto $\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h u\|$. Conviene pues acotar $\|u - \Pi_h u\|$, es decir, estudiar el error de interpolación. Para los problemas elípticos de orden 2, estamos interesados en mayorar este error en la norma H^1 y para ello necesitamos una serie de resultados generales de aproximación en espacios de Sobolev.

4.1. Resultados generales de aproximación en espacios de Sobolev

Si (T, P, Σ) es un elemento finito de Lagrange, a toda función v definida en T , le hemos asociado una función Πv , función P -interpolada de Lagrange de v sobre Σ . Vamos a estudiar en este apartado el error de interpolación $v - \Pi v$. Como hemos dicho, para los problemas elípticos de orden 2, estaremos especialmente interesados en una mayoración de este error en la norma de $H^1(T)$, $\|v - \Pi v\|_{1,T}$.

Empezamos por dar algunos resultados generales de aproximación en los espacios de Sobolev. Sea T una parte compacta de \mathbb{R}^d , conexa y de interior no vacía. Para simplificar denotamos $H^m(T)$ al espacio $H^m(\dot{T})$, donde \dot{T} es el interior de T . Si E es un subespacio de $H^m(T)$, el espacio cociente $H^m(T)/E$ es el conjunto de clases de equivalencia \dot{v} de funciones de $H^m(T)$ módulo la relación de equivalencia

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in E$$

Cuando E es un subespacio cerrado de $H^m(T)$, el espacio $H^m(T)/E$ provisto de la norma cociente

$$\|\dot{v}\|_{H^m(T)/E} = \inf_{v \in \dot{v}} \|v\|_{m,T}$$

es un espacio de Hilbert (Dem: ejercicio). En particular, para todo entero, $k \geq 0$, el espacio P_k de los polinomios de grado menor o igual que k sobre T es un subespacio de dimensión finita de $H^{k+1}(T)$, de manera que podemos introducir el espacio cociente $H^{k+1}(T)/P_k$; vamos a dotar a este espacio de una norma más manejable que la norma cociente. Para ello, habrá que suponer además que la inyección canónica de $H^1(T)$ en $L^2(T)$ es compacta; puesto que T es un acotado de \mathbb{R}^d , esta propiedad se verifica siempre que la frontera ∂T es de clase C^1 a trozos.

Teorema 4.1 : Sea T una parte compacta de \mathbb{R}^d , de frontera C^1 a trozos. Entonces para todo entero $k \geq 0$ la aplicación

$$\dot{v} \rightarrow |\dot{v}|_{k+1,T} = |v|_{k+1,T} = \left(\sum_{|\alpha|=k+1} \int_T |\partial^\alpha v|^2 \right)^{1/2}$$

donde v es un representante cualquiera de la clase \dot{v} en $H^{k+1}(T)$, es una norma sobre $H^{k+1}(T)/P_k$ equivalente a la norma cociente.

Demostración:

- Sea \dot{v} una clase de equivalencia de $H^{k+1}(T)/P_k$ y sea $v \in \dot{v}$. El valor de $|\dot{v}|_{k+1,T}$ no depende del representante elegido. En efecto,

$$\forall p \in P_k \quad |v|_{k+1,T} = |v + p|_{k+1,T}$$

- Tenemos evidentemente

$$|\dot{v}|_{k+1,T} \leq \|\dot{v}\|_{H^{k+1}(T)/P_k}$$

en efecto, para todo $v \in \dot{v}$

$$|\dot{v}|_{k+1,T} = |v|_{k+1,T} \leq \|v\|_{k+1,T}$$

y tomando el ínf para todo $v \in \dot{v}$ obtenemos el resultado.

- Para obtener la equivalencia de normas resta establecer la existencia de una constante C tal que

$$\|\dot{v}\|_{H^{k+1}(T)/P_k} \leq C|\dot{v}|_{k+1,T}$$

para todo elemento \dot{v} de $H^{k+1}(T)/P_k$. Empezamos por demostrar la existencia de una constante C tal que

$$\|v\|_{k+1,T} \leq C\{|v|_{k+1,T}^2 + \sum_{|\alpha| \leq k} (\int_T \partial^\alpha v dx)^2\}^{1/2}$$

para toda función $v \in H^{k+1}(T)$. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que para todo entero positivo n existe una función \tilde{v}_n tal que

$$|\tilde{v}_n|_{k+1,T}^2 + \sum_{|\alpha| \leq k} (\int_T \partial^\alpha \tilde{v}_n dx)^2 < \frac{1}{n^2} \|\tilde{v}_n\|_{k+1,T}^2$$

poniendo

$$v_n = \frac{\tilde{v}_n}{\|\tilde{v}_n\|_{k+1,T}}$$

obtenemos una sucesión $\{v_n\}$ verificando

$$\|v_n\|_{k+1,T} = 1 \tag{4.1}$$

$$|v_n|_{k+1,T}^2 + \sum_{|\alpha| \leq k} (\int_T \partial^\alpha v_n)^2 < \frac{1}{n^2} \tag{4.2}$$

Si la inyección de $H^1(T)$ en L^2 es compacta, también la inyección de $H^{k+1}(T)$ en $H^k(T)$ es compacta. Entonces de (4.1), deducimos la existencia de una subsecuación v_μ convergente en $H^k(T)$. Por una parte de (4.2) resulta

$$|v_\mu|_{k+1,T} < \frac{1}{\mu}$$

de modo que

$$v_\mu \rightarrow v \quad \text{en } H^k(T)$$

$$\forall \alpha, \quad |\alpha| = k+1 \quad \partial^\alpha v_\mu \rightarrow 0 \quad \text{en } L^2(T)$$

por la continuidad de la derivación en el sentido de las distribuciones también

$$\partial^\alpha v_\mu \rightarrow \partial^\alpha v$$

para todo α , $|\alpha| = k + 1$. De modo que $\partial^\alpha v = 0$ para $|\alpha| = k + 1$ y $v \in H^{k+1}(T)$.
Por otra parte

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad |\alpha| \leq k \quad \left| \int_T \partial^\alpha v_\mu \right| < \frac{1}{\mu}$$

pasando al límite cuando $\mu \rightarrow \infty$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad |\alpha| \leq k \quad \int_T \partial^\alpha v = 0$$

como T es una parte conexa de \mathbb{R}^d , las relaciones

$$\partial^\alpha v = 0 \quad \forall \alpha \quad |\alpha| = k + 1$$

implican que v es un polinomio de grado k sobre T . Y de las relaciones

$$\int_T \partial^\alpha v = 0 \quad \forall \alpha \quad |\alpha| \leq k$$

deducimos $v = 0$. Pero esto contardice la elección $\|v_n\|_{k+1,T} = 1$.

Finalmente consideremos $\dot{v} \in H^{k+1}(T)/P_k$ y sea \bar{v} un representante cualquiera de \dot{v} en $H^{k+1}(T)$. A esta función \bar{v} le podemos asociar el polinomio $p \in P_k$ definido de manera única por las relaciones

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \quad |\alpha| \leq k, \quad \int_T \partial^\alpha p = - \int_T \partial^\alpha \bar{v}$$

Entonces $v = \bar{v} + p$ es el representante de \dot{v} tal que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \quad |\alpha| \leq k \quad \int_T \partial^\alpha v = 0$$

Para este v tendremos

$$\|v\|_{k+1,T} \leq C \left\{ \|v\|_{k+1,T}^2 + \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_T \partial^\alpha v \right)^2 \right\}^{1/2} = C \|v\|_{k+1,T}$$

y deducimos

$$\|\dot{v}\|_{H^{k+1}(T)/P_k} \leq \|v\|_{k+1,T} \leq C \|v\|_{k+1,T} = C \|\dot{v}\|_{k+1,T}$$

lo que termina la demostración. ■

A partir del teorema anterior obtenemos el siguiente teorema general de aproximación en los espacios de Sobolev.

Teorema 4.2 (Teorema de Aproximación I) *Sea T una parte compacta y conexa de \mathbb{R}^d de interior no vacío de frontera C^1 a trozos y sea Π un operador lineal continuo de $H^{k+1}(T)$ en $H^m(T)$, $0 \leq m \leq k + 1$, tal que*

$$\forall p \in P_k, \quad \Pi p = p$$

Entonces existe una constante $c = c(T, \Pi)$ tal que

$$\forall v \in H^{k+1}(T) \quad \|v - \Pi v\|_{m,T} \leq c|v|_{k+1,T}$$

Demostración:

Sea $v \in H^{k+1}(T)$, de la hipótesis hecha sobre Π , para todo $p \in P_k$

$$v - \Pi v = v + p - \Pi p - \Pi v = (I - \Pi)(v + p)$$

de donde

$$\|v - \Pi v\|_{m,T} \leq \|I - \Pi\|_* \|v + p\|_{k+1,T}$$

donde $\|\cdot\|_*$ designa la norma en el espacio $\mathcal{L}(H^{k+1}(T), H^m(T))$. Resulta

$$\|v - \Pi v\|_{m,T} \leq C_1 \inf_{p \in P_k} \|v + p\|_{k+1,T} = C_1 \|\hat{v}\|_{H^{k+1}(T)/P_k}$$

con $C_1 = \|I - \Pi\|_*$. Finalmente gracias al teorema anterior

$$\|v - \Pi v\|_{m,T} \leq C_1 C |v|_{k+1,T} \quad \forall v \in H^{k+1}(T)$$

El teorema queda demostrado tomando $c = C_1 C$. ■

El siguiente paso consiste en poner en forma explícita la dependencia de la constante c en función de las características geométricas de T . Para ello vamos a introducir una parte compacta \hat{T} de \mathbb{R}^d , conexa y de frontera C^1 a trozos, que nos va a servir de dominio de referencia. Suponemos que existe una transformación afín invertible

$$x = F(\hat{x}) = \mathbf{B}\hat{x} + \mathbf{b}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{B}, \text{ matriz } d \times d$$

tal que $T = F(\hat{T})$.

Adoptamos las siguientes definiciones:

- A toda función v definida sobre T , le asociamos biunívocamente la función \hat{v} definida sobre \hat{T} por las relaciones

$$\hat{v}(\hat{x}) = v(x) \quad \forall \hat{x} \in \hat{T}$$

es decir, $\hat{v} = v \circ F$.

- Introducimos las siguientes características geométricas
 - h_T = diámetro de T (resp. \hat{h} = diámetro de \hat{T}).
 - ρ_T = diámetro máximo de las esferas (círculos si $d = 2$) contenidas en T (resp. $\hat{\rho}$ diámetro máximo de las esferas contenidas en \hat{T}).

Podemos estimar las normas espectrales $\|\mathbf{B}\|$ y $\|\mathbf{B}^{-1}\|$ en función de las características geométricas de T y \hat{T} ; recordemos que la norma de una matriz B está definida por

$$\|\mathbf{B}\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d, \xi \neq 0} \frac{|\mathbf{B}\xi|}{|\xi|} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d, \xi \leq 1} |\mathbf{B}\xi| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi|=1} |\mathbf{B}\xi|$$

donde $|\xi|$ designa la norma euclídea del vector ξ de \mathbb{R}^d .

Lema 4.1 *Se verifican las siguientes mayoraciones*

- $\|\mathbf{B}\| \leq \frac{h_T}{\hat{\rho}}$
- $\|\mathbf{B}^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\hat{\rho}_T}$

Demostración:

Podemos escribir

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{|\xi|=\hat{\rho}} |\mathbf{B}\xi|$$

Sea ξ un vector de \mathbb{R}^d tal que $|\xi| = \hat{\rho}$; por definición de $\hat{\rho}$, diámetro máximo de las esferas contenidas en \hat{T} , existen dos puntos \hat{y} y \hat{z} de \hat{T} tales que $\xi = \hat{y} - \hat{z}$. Entonces

$$\mathbf{B}\xi = \mathbf{B}\hat{y} - \mathbf{B}\hat{z} = F(\hat{y}) - F(\hat{z}) = y - z$$

donde los puntos y y z pertenecen a T ; por definición de h_T resulta

$$|\mathbf{B}\xi| = |y - z| \leq h_T$$

Esta desigualdad es válida para todo ξ con $|\xi| = \hat{\rho}$, por tanto, tomando el supremo y dividiendo por $\hat{\rho}$

$$\|\mathbf{B}\| \leq \frac{h_T}{\hat{\rho}}$$

Lo que prueba la primera desigualdad. Intercambiando los papeles de T y \hat{T} se obtiene la otra desigualdad. ■

Teorema 4.3 (Teorema de Aproximación II) *Sea \hat{T} una parte compacta y conexa de \mathbb{R}^d de frontera C^1 a trozos y sea $\hat{\Pi}$ un operador lineal continuo de $H^{k+1}(\hat{T})$ en $H^m(\hat{T})$, $0 \leq m \leq k+1$ tal que*

$$\forall \hat{p} \in P_k \quad \hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p}$$

Si T es una parte de \mathbb{R}^d tal que existe una transformación afín invertible F de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^d para la cual $T = F(\hat{T})$ y el operador Π está definido por

$$\forall v \in H^{k+1}(T) \quad \widehat{\Pi}v = \hat{\Pi}\hat{v}$$

Entonces existe una constante C independiente de F tal que

$$\forall v \in H^{k+1}(T) \quad |v - \Pi v|_{m,T} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T}$$

La constante C depende de \hat{T} y por tanto de d , de $\hat{\Pi}$ y por tanto de k y de m ; la novedad reside en que la constante C es independiente de F y por tanto de las características geométricas de T . Para la demostración será útil utilizar la noción de

diferencial de Fréchet de una función.

Recordemos, si v es una función definida en un entorno de un punto $x \in \mathbb{R}^d$ y diferenciable (en sentido clásico) l veces, se denota $D^l v(x)$ a su diferencial de orden l que es una forma l -multilineal simétrica sobre \mathbb{R}^d

$$D^l v(x) : \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$D^l v(x)(\xi_1, \dots, \xi_l) \in \mathbb{R} \quad \xi_i \in \mathbb{R}^d \quad i = 1, \dots, l$$

$$\|D^l v(x)\| = \sup_{\xi_1, \dots, \xi_l \in \mathbb{R}^d, \xi_1, \dots, \xi_l \neq 0} \frac{|D^l v(x)(\xi_1, \dots, \xi_l)|}{|\xi_1| \dots |\xi_l|}$$

donde $|\xi|$ designa la norma euclídea de $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Por otra parte recordemos la notación $l = |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, y

$$\partial^\alpha v(x) = D^l v(x)(e_1, \dots, e_1, \dots, e_d, \dots, e_d)$$

donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^d .

Mostraremos primeramente el siguiente lema, para después completar la demostración del Teorema de Aproximación II.

Lema 4.2 *Existen dos constantes $\gamma_1 = \gamma_1(l, d)$ y $\gamma_2 = \gamma_2(l, d)$ mayores que cero tales que*

$$\forall v \in \mathcal{D}(T) \quad \gamma_1 |v|_{l,T} \leq \left(\int_T \|D^l v(x)\|^2 dx \right)^{1/2} \leq \gamma_2 |v|_{l,T}$$

Demostración:

Sea α un multientero y $|\alpha| = l$, se tiene

$$|\partial^\alpha v(x)| \leq \|D^l v(x)\| |e_1|^{\alpha_1} \dots |e_d|^{\alpha_d} = \|D^l v(x)\|$$

de modo que

$$\left(\sum_{|\alpha|=l} \int_T |\partial^\alpha v(x)|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{|\alpha|=l} \int_T \|D^l v(x)\|^2 \right)^{1/2}$$

de donde

$$\left(\sum_{|\alpha|=l} \int_T |\partial^\alpha v(x)|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\int_T \|D^l v(x)\|^2 \right)^{1/2}$$

donde $C = \sqrt{\text{card}\{\alpha; |\alpha|=l\}}$ y $\gamma_l = \frac{1}{C}$. Por otra parte

$$\|D^l v(x)\| = \sup_{\xi_1, \dots, \xi_l \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\xi_1|=\dots=|\xi_l|=1} |D^l v(x)(\xi_1, \dots, \xi_l)|$$

poniendo $\xi_i = \sum_{k=1}^d \xi_i^k e_k \quad i = 1, \dots, l$

$$D^l v(x)(\xi_1, \dots, \xi_l) = \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l} D^l v(x)(e_{k_1}, \dots, e_{k_l}) = \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l} \partial^\alpha v(x)$$

donde $\partial^\alpha v(x)$ designa una de las derivadas parciales de v de orden $|\alpha| = l$.

$$|D^l v(x)(\xi_1, \dots, \xi_l)| = \left| \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l} \partial^\alpha v(x) \right| \leq \left| \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l} \right| \max_{|\alpha|=l} |\partial^\alpha v(x)|$$

ahora bien, como los vectores $\xi_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^d) \in \mathbb{R}^d \quad i = 1, \dots, l$ son de norma unidad, es decir, $\sum_{k=1}^d (\xi_i^k)^2 = 1$ resulta $|\xi_i^k| \leq 1$ para $k = 1, \dots, d$ e $i = 1, \dots, l$, de modo que

$$\left| \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l} \right| \leq \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d |\xi_1^{k_1} \dots \xi_l^{k_l}| \leq \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d 1 = \gamma_2(l, d) = d^l$$

así pues:

$$\|D^l v(x)\| \leq \gamma_2(l, d) \max_{|\alpha|=l} |\partial^\alpha v(x)|$$

de donde

$$\left(\int_T \|D^l v(x)\|^2 \right)^{1/2} \leq \gamma_2(l, d) \left(\int_T (\max_{|\alpha|=l} |\partial^\alpha v(x)|)^2 \right)^{1/2} \leq \gamma_2(l, d) \left(\sum_{|\alpha|=l} \int_T |\partial^\alpha v(x)|^2 \right)^{1/2}$$

■

Demostración:

Para demostrar el Teorema de Aproximación II, sea $v \in \mathcal{D}(T)$ y $\hat{v} = v \circ F$ donde F es una aplicación afín invertible, es decir, $x = F(\hat{x}) = \mathbf{B}\hat{x} + \mathbf{b}$, siendo \mathbf{B} una matriz invertible de orden $d \times d$. Aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned} D^l \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \dots, \xi_l) &= D^l (v \circ F)(\hat{x})(\xi_1, \dots, \xi_l) \\ &= D^l (v(F(\hat{x}))) (\mathbf{B}\xi_1, \dots, \mathbf{B}\xi_l) = D^l v(x)(\mathbf{B}\xi_1, \dots, \mathbf{B}\xi_l) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \|D^l \hat{v}(\hat{x})\| &= \sup_{|\xi_1|=\dots=|\xi_l|=1} |D^l \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \dots, \xi_l)| = \sup_{|\xi_1|=\dots=|\xi_l|=1} |D^l v(x)(\mathbf{B}\xi_1, \dots, \mathbf{B}\xi_l)| \\ &\leq \|D^l v(x)\| \|\mathbf{B}\|^l \end{aligned}$$

y finalmente

$$\int_{\hat{T}} \|D^l \hat{v}(\hat{x})\|^2 d\hat{x} \leq \|\mathbf{B}\|^{2l} \int_{\hat{T}} \|D^l (v \circ F)(\hat{x})\|^2 d\hat{x}$$

utilizando la fórmula del cambio de variable bajo el signo integral

$$\int_{\hat{T}} \|D^l \hat{v}(\hat{x})\|^2 d\hat{x} \leq \|\mathbf{B}\|^{2l} |\det \mathbf{B}|^{-1} \int_T \|D^l v(x)\|^2 dx$$

Obtenemos así, aplicando el lema anterior

$$\forall v \in \mathcal{D}(T) \quad |\hat{v}|_{l, \hat{T}} \leq \gamma \|\mathbf{B}\|^l |\det \mathbf{B}|^{-1/2} |v|_{l, T}$$

donde $\gamma = \frac{\gamma_l}{\gamma_1} > 0$, $\gamma = \gamma(l, d)$.

Como $\mathcal{D}(T)$ es denso en $H^l(T)$, deducimos

$$\forall v \in H^l(T) \quad |\hat{v}|_{l, \hat{T}} \leq \gamma \|\mathbf{B}\|^l |\det \mathbf{B}|^{-1/2} |v|_{l, T}$$

intercambiando los papeles de T y de \hat{T} , obtenemos análogamente

$$\forall \hat{v} \in H^l(\hat{T}) \quad |v|_{l, T} \leq \gamma \|\mathbf{B}^{-1}\|^l |\det \mathbf{B}|^{1/2} |\hat{v}|_{l, \hat{T}}$$

Sea finalmente una función $v \in H^{k+1}(T)$, aplicando el último resultado a $v - \Pi v$

$$|v - \Pi v|_{m, T} \leq \gamma(m, d) \|\mathbf{B}^{-1}\|^m |\det \mathbf{B}|^{1/2} |\hat{v} - \widehat{\Pi} v|_{m, \hat{T}}$$

por el teorema de aproximación y como $\widehat{\Pi} v = \hat{\Pi} \hat{v}$

$$|\hat{v} - \widehat{\Pi} v|_{m, \hat{T}} = |\hat{v} - \hat{\Pi} \hat{v}|_{m, \hat{T}} \leq C |\hat{v}|_{k+1, \hat{T}}$$

donde $C = C(\hat{\Pi}, \hat{T})$. Como

$$|\hat{v}|_{k+1, \hat{T}} \leq \gamma(k+1, d) \|\mathbf{B}\|^{k+1} |\det \mathbf{B}|^{-1/2} |v|_{k+1, T}$$

resulta

$$|v - \Pi v|_{m, T} \leq C(\hat{\Pi}, \hat{T}) \gamma(m, d) \gamma(k+1, d) \|\mathbf{B}^{-1}\|^m \|\mathbf{B}\|^{k+1} |v|_{k+1, T}$$

y como $\|\mathbf{B}\| \leq \frac{h_T}{\rho_T}$, $\|\mathbf{B}^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_T}$

$$|v - \Pi v|_{m, T} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1, T}$$

donde $C = C(\hat{\Pi}, \hat{T})\gamma(m, d)\gamma(k+1, d)\frac{\hat{h}^m}{\hat{\rho}^{k+1}}$. ■

Corolario 4.1 Consideremos ahora todos los valores l , $0 \leq l \leq m$ y los operadores $\Pi_l = I \circ \Pi$ definidos por

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_l : H^{k+1}(T) & \longrightarrow & H^m(T) & \longrightarrow & H^l(T) \\ v & \longrightarrow & \Pi v & \longrightarrow & \Pi v \end{array}$$

entonces

$$\|v - \Pi v\|_{m,T} \leq C_* \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T}$$

Demostración:

Del teorma de Aproximación II se tiene que,

$$|v - \Pi v|_{l,T} = |v - \Pi_l v|_{l,T} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^l} |v|_{k+1,T} \quad \forall v \in H^{k+1}(T) \quad \forall l, \quad 0 \leq l \leq m$$

de donde para

$$\begin{array}{ll} l = 0 & |v - \Pi v|_{0,T} \leq C_0 \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^0} |v|_{k+1,T} \\ l = 1 & |v - \Pi v|_{1,T} \leq C_1 \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T} |v|_{k+1,T} \\ & \dots \\ l = m & |v - \Pi v|_{m,T} \leq C_m \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T} \end{array}$$

elevando al cuadrado, sumando y sacando la raíz cuadrada

$$\|v - \Pi v\|_{m,T} \leq C_* \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T}$$

donde $C_* = (\sum_{l=0}^m C_l^2 \rho_T^{2(m-l)})^{1/2}$. La constante C_* se puede mayorar por una constante independiente de las características geométricas de T, si consideramos solo elementos T suficientemente pequeños, por ejemplo de diámetro inferior a 1, para los cuales evidentemente el diámetro de la circunferencia inscrita será menor que 1. ■

4.2. Aplicación al análisis numérico del M.E.F. en problemas elípticos de segundo orden

Consideraremos el caso de Ω un abierto poliédrico de \mathbb{R}^d .

- $\{\mathcal{T}_h\}$, triangulaciones de Ω , según se ha definido en el Capítulo 3 subsección 3.3.1.
- $(T, P_T, \Sigma_T)_{T \in \mathcal{T}_h}$ una familia de elementos finitos asociada a cada \mathcal{T}_h , afín equivalentes a un elemento finito de referencia $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$.
- $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ para cada \mathcal{T}_h .
- $\{\mathcal{T}_h\}$ será una familia regular de triangulaciones, es decir, existe una constante $\sigma \geq 1$ tal que

$$\forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\} \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma$$

Observación 1 En dimensión $d = 2$ si \hat{T} es un triángulo la última propiedad es equivalente a la existencia de un ángulo $\theta_0 > 0$ tal que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \quad \theta_T \geq \theta_0$$

donde θ_T es el ángulo menor del elemento T .

Observación 2 El operador $\hat{\Pi}$ de \hat{P} -interpolación sobre $\hat{\Sigma}$ es lineal continuo de $H^{k+1}(\hat{T})$ en $H^m(\hat{T})$ si $k \geq 1$, $d \leq 3$, $m \leq k + 1$ y $\hat{P} \subset H^m(\hat{T})$. En efecto, si $d \leq 3$ la aplicación

$$\begin{aligned} H^{k+1}(\hat{T}) &\longrightarrow C^0(\hat{T}) \\ v &\longrightarrow v \end{aligned}$$

es continua y $\|v\|_{0,\infty,\hat{T}} \leq C\|v\|_{k+1,\hat{T}}$. Además para todo $v \in H^{k+1}(\hat{T})$ tenemos $\hat{\Pi}v \in \hat{P} \subset H^m(\hat{T})$. En consecuencia

$$\|\hat{\Pi}v\|_{m,\hat{T}} = \left\| \sum v(a_i)\varphi_i \right\|_{m,\hat{T}} \leq \sum |v(a_i)| \cdot \|\varphi_i\|_{m,\hat{T}} \leq C\|v\|_{0,\infty,\hat{T}} \leq C\|v\|_{k+1,\hat{T}}$$

Observemos que si \hat{P} es un espacio de polinomios se verifica que $\hat{P} \subset H^m(\hat{T})$.

Consideremos un problema modelo \mathcal{P} de la forma

$$\begin{aligned} a(u, v) &= L(v) \quad \forall v \in V \\ u &\in V \end{aligned}$$

donde supondremos que $V = H^1(\Omega)$ ó $V = H_0^1(\Omega)$ o un espacio intermedio entre los dos. Con las hipótesis sobre $a(\cdot, \cdot)$ y $L(\cdot)$ del teorema de Lax-Milgram. El problema aproximado \mathcal{P}_h será

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h &\in V_h \end{aligned}$$

donde

$$V_h = X_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); \quad v|_T \in P_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

o bien

$$V_h = X_h \cap H_0^1(\Omega)$$

o bien

$$V_h = X_h \cap V$$

en caso de que V sea un espacio intermedio entre $H^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

El objetivo es estimar el error $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$. Sabemos $\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}$. Como $\Pi_h u \in V_h$ tenemos

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}$$

donde Π_h es el operador de interpolación definido sobre $\Sigma = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} \Sigma_T$. Esto es factible si podemos construir $\Pi_h u$. Para ello necesitamos cierta regularidad de u .

Teorema 4.4 *sea Ω un abierto poliédrico de \mathbb{R}^d , $d \leq 3$. Sea $\{\mathcal{T}_h\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$ asociada a un elemento finito de referencia $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ de clase C^0 . Supongamos que existe un entero $k \geq 1$ para el cual tenemos*

$$P_k \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{T})$$

Entonces el Método de Elementos Finitos es convergente, es decir, la solución u_h del problema aproximado converge hacia la solución u del problema (\mathcal{P}) en la norma de $H^1(\Omega)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0$$

Además, si la solución u de (\mathcal{P}) pertenece al espacio de Sobolev $H^{k+1}(\Omega)$ tenemos

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}$$

Se dice entonces que el método es de orden k .

Demostración:

Empezamos demostrando el caso en que $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ entonces $u \in C(\bar{\Omega})$ para $k \geq 1$, $d \leq 3$. Entonces podemos construir el operador de interpolación Π_h . Tenemos

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}$$

con $C_1 = \frac{M}{\alpha}$. Considerando la restricción $\Pi_h u|_T = \Pi_T u$ para todo $T \in \mathcal{T}_h$ tenemos

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - \Pi_T u\|_{1,T}^2 \right)^{1/2}$$

Por el teorema de aproximación II, existen dos constantes C_2 y C_3 que dependen únicamente del elemento de referencia $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ tales que

$$|u - \Pi_T u|_{1,T} \leq C_2 \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T} |u|_{k+1,T}$$

$$\|u - \Pi_T u\|_{0,T} \leq C_3 \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^0} |u|_{k+1,T} = C_3 h_T^{k+1} |u|_{k+1,T}$$

Como la triangulación \mathcal{T}_h es regular $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma$, es decir $\frac{1}{\rho_T} \leq \frac{\sigma}{h_T}$, de donde

$$|u - \Pi_T u|_{1,T} \leq C_2 \sigma h_T^k |u|_{k+1,T}$$

$$\|u - \Pi_T u\|_{0,T} \leq C_3 \text{diam}(\bar{\Omega}) h_T^k |u|_{k+1,T}$$

y

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_T u\|_{1,T}^2 &= |u - \Pi_T u|_{1,T}^2 + \|u - \Pi_T u\|_{0,T}^2 \\ &\leq (C_2^2 \sigma^2 + C_3^2 \text{diam}(\bar{\Omega})^2) h_T^{2k} |u|_{k+1,T}^2 \end{aligned}$$

$$\|u - \Pi_T u\|_{1,T} \leq C_4 h_T^k |u|_{k+1,T}$$

donde $C_4 = (C_2^2 \sigma^2 + C_3^2 \text{diam}(\bar{\Omega})^2)^{1/2}$ Finalmente

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \leq C_4 h^k |u|_{k+1,\Omega}$$

Para demostrar que el método converge aunque la función u no sea regular, tomemos $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ si $V = H^1(\Omega)$ o intermedio entre $H^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$. Tomamos $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\Omega)$ si $V = H_0^1(\Omega)$. Entonces \mathcal{V} es denso en V y Π_h está definido en \mathcal{V} , $\Pi_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$. Tenemos por la primera parte de la demostración

$$\forall v \in \mathcal{V} \quad \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq Ch |v|_{2,\Omega}$$

es decir $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} = 0$. Por otra parte como \mathcal{V} es denso en V , para todo $\varepsilon > 0$ existe un elemento $v \in \mathcal{V}$ tal que

$$\|u - v\|_{1,\Omega} \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

y para este v , existe un número $h(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall h \leq h(\varepsilon) \quad \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq \frac{\varepsilon}{2C}$. Entonces para h suficientemente pequeño

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \|u - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq C (\|u - v\|_{1,\Omega} + \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega}) \leq C \left(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C} \right) = \varepsilon$$

■

Capítulo 5

Aspectos prácticos y programación del M.E.F.

Resumen Este capítulo veremos algunos aspectos prácticos de la implementación del Método de Elemento Finitos a través de un ejemplo sencillo, la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas.

5.1. Un Método de Elementos Finitos para el problema de Poisson

Consideraremos el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega \quad (5.1)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \quad (5.2)$$

donde f es una función dada, definida en Ω .

Un gran número de problemas en física y mecánica se modelan mediante esta ecuación. u puede representar por ejemplo la temperatura de un cuerpo, el potencial electromagnético, el desplazamiento de una membrana elástica fija en su contorno y sometida a una fuerza.

Siguiendo los pasos en el tratamiento del problema modelo unidimensional del Capítulo 1, introduciremos una formulación débil del problema (5.1-5.2). Para ello introducimos un espacio de funciones definidas en Ω y para las cuales tengan sentido las operaciones que vamos a realizar, en este caso, $V = H_0^1(\Omega)$.

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (5.1) por una función $v \in V$ cualquiera e integrando aplicando la fórmula de Green resulta teniendo en cuenta que $v = 0$ en Γ que u es solución del siguiente problema:

Hallar $u \in V$ tal que verifique,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f v \, dx_1 dx_2 \quad (5.3)$$

para toda función $v \in V$

Evidentemente toda solución del problema (5.1-5.2) será solución de (5.3). Recíprocamente si u es solución del problema (5.3) entonces u será solución del problema de partida (5.1-5.2), interpretando las derivadas en el sentido de las distribuciones. Vamos a construir un método numérico para calcular en la práctica una aproximación de la solución de (5.3). Empezamos introduciendo un subespacio de V que sea de dimensión finita y elegiremos una base de este espacio de modo que las funciones del mismo sean fáciles de manejar. Para simplificar supondremos que la frontera Γ del dominio Ω es poligonal. Construyamos una triangulación \mathcal{T}_h de Ω , subdividiendo Ω en un conjunto de triángulos $\mathcal{T}_h = \{T_e\}_{e=1,\dots,E}$ de modo que $\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1,\dots,E} T_e$, que los triángulos no se superpongan, y que las aristas de cada triángulo sea bien la arista de otro triángulo o una parte de la frontera poligonal Γ . Ver un ejemplo en la figura 5.1. A cada mallado o triangulación \mathcal{T}_h le asociamos el parámetro $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T)$, donde $\text{diam}(T) =$ diámetro de $T =$ lado mayor de T .

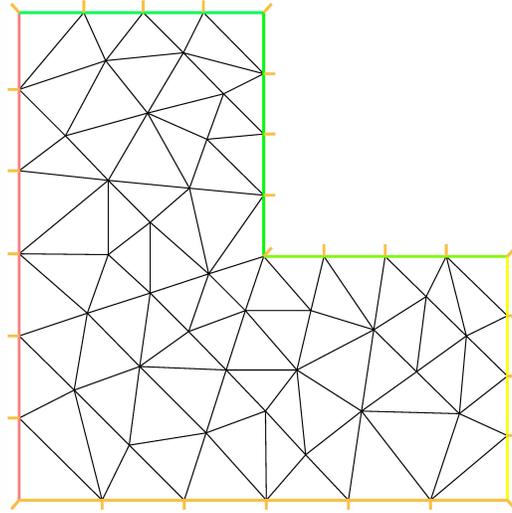


Figura 5.1 Ejemplo de triangulación

Definimos ahora V_h como sigue:

$$V_h = \{v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continuas}; v_h|_T \in P_1(x_1, x_2); v_h = 0 \text{ en } \Gamma\}$$

donde $P_1(x_1, x_2)$ designa el conjunto de polinomios de grado 1 de dos variables. El espacio V_h consiste en todas las funciones continuas que son lineales en cada triángulo de la triangulación \mathcal{T}_h y que se anulan en la frontera Γ . Observemos que $V_h \in V$. Como parámetros para describir una función v_h de V_h elegimos los valores $v_h(p_i)$, $i = 1, \dots, M$ de v_h en los puntos p_i , $i = 1, \dots, M$, vértices de la triangulación

\mathcal{T}_h , excluyendo los vértices situados en la frontera Γ , puesto que $v_h = 0$ sobre Γ . Las correspondientes funciones de la base $\varphi_j \in V_h, j = 1, \dots, M$, están definidas por

$$\varphi_j(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Una función típica de la base se representa en la figura 5.2

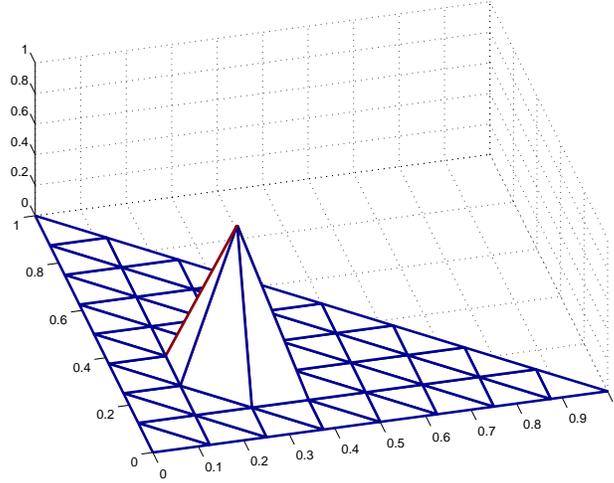


Figura 5.2 Ejemplo de una función base

Estamos en disposición de formular el correspondiente problema aproximado del problema(5.3): Hallar $u_h \in V_h$ tal que verifique,

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h \, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f v_h \, dx_1 dx_2 \quad (5.4)$$

para toda función $v_h \in V_h$.

En la práctica el problema (5.4) se reduce a resolver el siguiente sistema lineal algebraico de ecuaciones:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (5.5)$$

donde $\mathbf{A}_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i \, dx_1 dx_2$, $b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx_1 dx_2$ y el vector solución $\mathbf{u} = (u_j)_{j=1, \dots, M}$, donde $u_j = u_h(p_j)$ son los coeficientes de la combinación lineal de elementos de la base de V_h representando u_h , es decir, $u_h(x_1, x_2) = \sum_{j=1, \dots, M} u_j(p_j) \varphi_j(x_1, x_2)$, siendo $p_j, j = 1, \dots, M$ los vértices de la triangulación que no están en la frontera Γ .

El cálculo de los términos de la matriz \mathbf{A} y del segundo miembro \mathbf{b} se realiza sumando las contribuciones de la integral en cada elemento T de la triangulación, así:

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbf{A}_{ij}^T$$

donde

$$\mathbf{A}_{ij}^T = \int_T \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i \, dx_1 dx_2$$

y

$$\mathbf{b}_i = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbf{b}_i^T$$

donde

$$\mathbf{b}_i^T = \int_T f \varphi_i \, dx_1 dx_2$$

Los pasos a dar en la resolución de un problema mediante el método de elementos finitos con la ayuda de un ordenador son:

1. Entrada de datos f , Ω , etc.
2. Construcción y representación de la triangulación o mallado.
3. Cálculo de las matrices elementales \mathbf{A}^T y de los vectores segundo miembro \mathbf{b}^T
4. Ensamblaje de la matriz global del sistema \mathbf{A} por suma de las matrices elementales \mathbf{A}^T y del vector segundo miembro \mathbf{b} por suma de los vectores elementales \mathbf{b}^T .
5. Resolución del sistema algebraico $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$.
6. Presentación y visualización de resultados.

Vamos a precisar con algo más de detalle el paso 3 y el 4. En primer lugar para calcular las integrales \mathbf{A}_{ij}^T necesitaremos la expresión explícita de las funciones de la base φ_i , o más concretamente, la restricción a T de las funciones φ_i . Observemos primero que sólo un número reducido de las funciones de la base son distintas de cero en cada triángulo T , en efecto, la función φ_i será distinta de cero en el triángulo T si y sólo si p_i es un vértice de T . Para fijar las ideas, consideremos un triángulo genérico T de vértices $a_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ (para no manejar un excesivo número de índices utilizaré aquí la notación (x, y) para designar las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^2). Sólo hay tres funciones de la base de V_h cuya restricción a T sea distinta de cero. Son las funciones λ_i , $i = 1, 2, 3$, polinomios de dos variables de grado 1 en T y que verifican (figuras 5.3, 5.4, 5.5)

$$\lambda_i(a_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

La función $\lambda_1 = a + bx + cy$ se puede determinar resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, a , b , c ,

$$\begin{aligned} a + bx_1 + cy_1 &= 1 \\ a + bx_2 + cy_2 &= 0 \\ a + bx_3 + cy_3 &= 0 \end{aligned}$$

y análogamente para las funciones λ_2 y λ_3 . Observemos que si K es el triángulo de vértices $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (1, 0)$ y $a_3 = (0, 1)$, entonces las funciones λ_i , $i =$

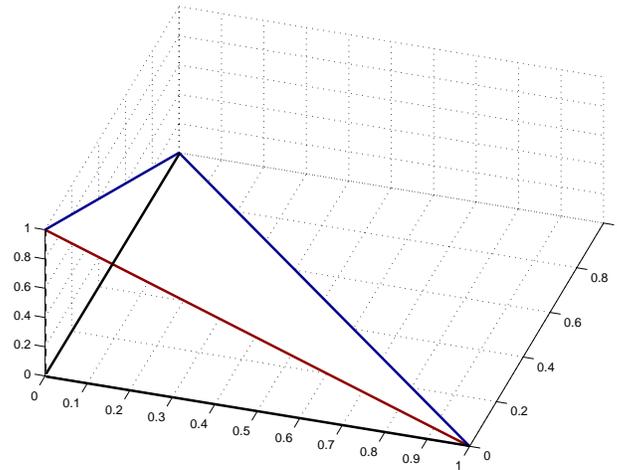


Figura 5.3 función λ_1

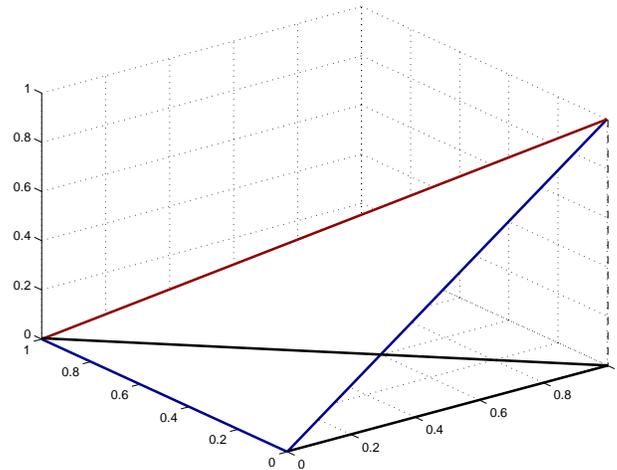


Figura 5.4 función λ_2

1, 2, 3 tienen una expresión muy sencilla, pues, $\lambda_1 = 1 - x - y$, $\lambda_2 = x$ y $\lambda_3 = y$. Las funciones λ_1 , λ_2 , λ_3 asociadas a un triángulo T , se llaman coordenadas baricéntricas y toman valores entre 0 y 1 en los puntos interiores de T y mayores que 1 o menores que 0 en los exteriores, y el valor 0 o 1 en los puntos frontera. Se tiene además $\sum_{i=1,2,3} \lambda_i(x,y) = 1$ en todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

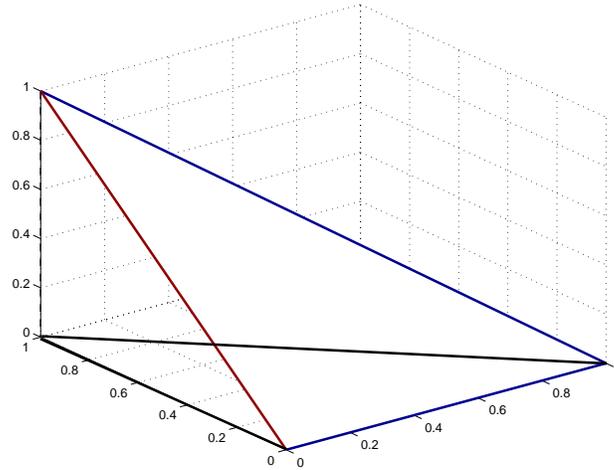


Figura 5.5 función λ_3

5.2. Cálculo de la matriz del sistema de ecuaciones y del segundo miembro: Un ejemplo

Vamos a calcular explícitamente el sistema (5.5) en el caso sencillo correspondiente al problema (5.4) en un dominio cuadrado con la triangulación de la figura 5.6. Calcularemos la i -ésima ecuación del sistema (en las figuras, la ecuación número 41 que es la que corresponde al centro del cuadrado). En la figura 5.7 se han dibujado las curvas de nivel de la correspondiente función base φ_{41} y en la figura 5.8 se ha resaltado el soporte de dicha función. Empecemos calculando los términos de la matriz. La fila 41 de dicha matriz solo tendrá algunos términos no nulos, concretamente y “a priori los términos \mathbf{A}_{ij} correspondientes a los valores de índices $i = 41$ y $j = 32, 33, 40, 41, 42, 49, 50$, pues solo para estos valores de los índices los soportes de las funciones φ_i y φ_j tendrán intersección no vacía (ver la figura 5.9).

Vamos a calcular los términos \mathbf{A}_{ij}^T para cada triángulo T de la figura 5.9. De hecho bastará hacerlo para uno de ellos (por ejemplo el de vértices $a_{41} = (0.5, 0.5)$, $a_{42} = (0.6, 0.5)$, $a_{50} = (0.5, 0.6)$) y por permutación de sus términos obtendremos el resultado para los otros triángulos. De forma algo más general consideremos un triángulo de vértices (y utilizando numeración local para simplificar la escritura, es decir, utilizando valores para los 3 índices 1, 2 y 3, en lugar de 41, 42 y 50) $a_1(x_1, y_1)$, $a_2(x_2 = x_1 + h, y_2)$ $a_3(x_3 = x_1, y_3 = y_1 + h)$, la restricción de las funciones base a este triángulo serán

$$\lambda_1 = 1 - \frac{x - x_1}{h} - \frac{y - y_1}{h},$$

$$\lambda_2 = \frac{x - x_1}{h},$$

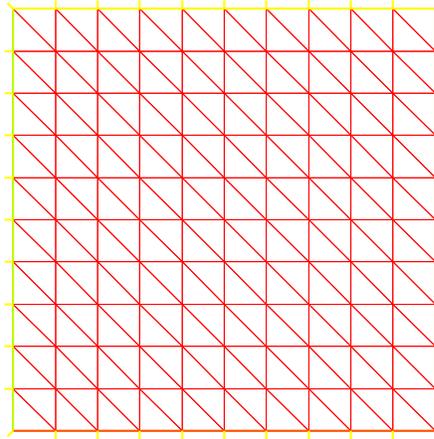


Figura 5.6 Triangulación del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$

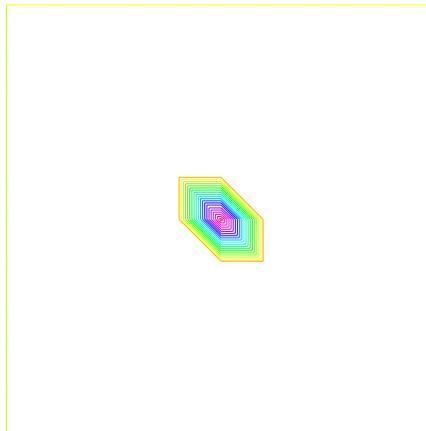


Figura 5.7 Curvas de nivel de la función φ_{41}

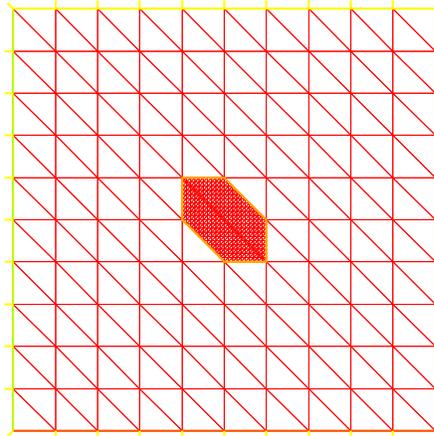


Figura 5.8 Soporte de la función φ_{41}

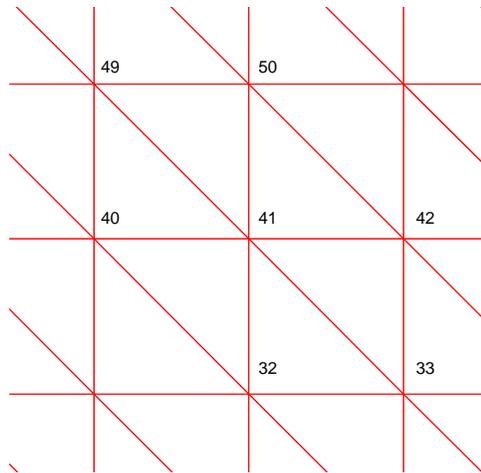


Figura 5.9 Estrella asociada a la ecuación 41

$$\lambda_3 = \frac{y - y_1}{h}.$$

En efecto, las anteriores funciones verifican $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, 2, 3$. Los gradientes respectivos son:

$$\begin{aligned} \nabla\lambda_1 &= [-1/h, -1/h]^t, \\ \nabla\lambda_2 &= [1/h, 0]^t, \\ \nabla\lambda_3 &= [0, 1/h]^t. \end{aligned}$$

De donde, los correspondiente productos:

$$\begin{aligned} \nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_1 &= 2/h^2 & \nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_2 &= -1/h^2 & \nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_3 &= -1/h^2 \\ \nabla\lambda_2 \cdot \nabla\lambda_1 &= -1/h^2 & \nabla\lambda_2 \cdot \nabla\lambda_2 &= 1/h^2 & \nabla\lambda_2 \cdot \nabla\lambda_3 &= 0 \\ \nabla\lambda_3 \cdot \nabla\lambda_1 &= -1/h^2 & \nabla\lambda_3 \cdot \nabla\lambda_2 &= 0 & \nabla\lambda_3 \cdot \nabla\lambda_3 &= 1/h^2 \end{aligned}$$

Integrando en el triángulo T , teniendo en cuenta que son términos constantes y que $\text{área}(T) = h^2/2$ resulta,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

y análogamente para los otros triángulos del soporte de φ_{41} . Para construir la matriz global \mathbf{A} estas contribuciones se han de sumar adecuadamente en la posición fila-columna correspondiente, así el término $\mathbf{A}_{1,1}^T$ irá a sumarse en la posición $\mathbf{A}_{41,41}$ de la matriz global, el término $\mathbf{A}_{1,2}^T$, se sumará en la posición $\mathbf{A}_{41,42}$, el término $\mathbf{A}_{1,3}^T$, se sumará en la posición $\mathbf{A}_{41,50}$ y así sucesivamente. Los términos de \mathbf{A} , distintos de cero, correspondiente a la ecuación número 41 serán (fila 41 de la matriz) :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{41,32} &= \mathbf{A}_{41,40} = \mathbf{A}_{41,42} = \mathbf{A}_{41,50} = -1 \\ \mathbf{A}_{41,33} &= \mathbf{A}_{41,49} = 0 \\ \mathbf{A}_{41,41} &= 4 \end{aligned}$$

Calculemos el segundo miembro. El término de la ecuación 41 es: $b_{41} = \int_{\Omega} f \varphi_{41} dx_1 dx_2$, la integral la calcularemos utilizando integración numérica. La fórmula siguiente de Newton-Cotes que integra exactamente polinomios de grado 1, es suficiente:

$$\int_T f(x,y) dx dy \approx \frac{\text{área}(T)}{3} \sum_{i=1,2,3} f(a_i)$$

donde a_i $i = 1, 2, 3$ son los 3 vértices del triángulo. En nuestro caso, la función a integrar es $f\varphi_{41}$, que vale 1 en el vértice 41 y 0 en los otros. Por tanto,

$$\int_T f \varphi_{41} dx dy \approx \frac{\text{área}(T)}{3} f(a_{41})$$

sumando las contribuciones de los seis triángulos de la estrella (ver la figura 5.9) y teniendo en cuenta que el área de cada triángulo es igual a $h^2/2$, resulta

$$\int_T f \varphi_{41} dx dy \approx h^2 f(a_{41})$$

La ecuación 41 del sistema se escribe:

$$-u_{32} - u_{40} + 4u_{41} - u_{42} - u_{50} = h^2 f(a_{41}) \quad (5.6)$$

que coincide con el método clásico de diferencias finitas. Naturalmente el método de elementos finitos es mucho más general pues se aplica sin dificultad a dominios mucho más generales, con triangulaciones no tan estructuradas como la del ejemplo anterior. Veremos también como se puede, sin grandes dificultades, utilizar polinomios de grado más alto, lo que permite en la práctica mejorar la precisión del método.

5.3. Un método general para el cálculo de matrices y vectores elementales

Vamos a desarrollar un método de cálculo de las matrices y vectores elementales que se pueda aplicar a situaciones más generales que la correspondiente al caso anterior. Por ejemplo en mallados más generales de dominios cualesquiera, con elementos finitos de orden mayor que 1, y en problemas elípticos más generales como los que veremos en el capítulo siguiente. Desarrollaremos con detalle el ejemplo correspondiente al cálculo de términos:

$$A_{ij}^T = \sum_{kl} \int_T D_{kl} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_1 \dots dx_d \quad (5.7)$$

donde D_{kl} $k, l = 1, \dots, d$ son funciones reales definidas en Ω . Con notación matricial se escribe:

$$A_{ij}^T = \int_T \nabla^t \varphi_i D \nabla \varphi_j dx_1 \dots dx_d \quad (5.8)$$

El cálculo de estos términos se hace generalmente pasando a un elemento de referencia y utilizando integración numérica. Supongamos para fijar las ideas que $\Omega \in \mathbb{R}^2$, es decir $d = 2$ y consideremos un triángulo genérico T de vértices $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$ y $a_3 = (x_3, y_3)$ definido en un plano ordinario de ejes $x - y$. Introducimos ahora una transformación afín cuya imagen del triángulo \hat{T} de vértices $\hat{a}_1 = (0, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 0)$ y $\hat{a}_3 = (0, 1)$ en el plano de ejes $\xi - \eta$ sea precisamente el triángulo dado T . Dicha transformación afín es fácil de encontrar, en efecto, utilizando las coordenadas baricéntricas del triángulo \hat{T} ,

$$\hat{\lambda}_1 = 1 - \xi - \eta$$

$$\hat{\lambda}_2 = \xi$$

$$\hat{\lambda}_3 = \eta$$

la imagen $[x, y]^t$ de un punto $[\xi, \eta]^t$ viene dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} (1 - \xi - \eta) + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \eta$$

o bien

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

donde

$$x_{21} = x_2 - x_1, \quad x_{31} = x_3 - x_1,$$

$$y_{21} = y_2 - y_1, \quad y_{31} = y_3 - y_1$$

o bien llamando

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

resulta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F(\xi, \eta) = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \mathbf{c}$$

La transformación de coordenadas F induce una transformación de funciones, así, una función φ definida en el plano $x - y$ induce una función $\hat{\varphi}$ en el plano $\xi - \eta$ mediante la composición de funciones

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta) = (\varphi \circ F)(\xi, \eta) = \varphi(F(\xi, \eta)) = \varphi(x, y)$$

Por otra parte las derivadas se transformarán según la regla de la cadena:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

o bien, observando que

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

con notación matricial,

$$\nabla \hat{\varphi} = \mathbf{B}' \nabla \varphi$$

de donde,

$$\nabla \varphi = \mathbf{B}^{-t} \nabla \hat{\varphi}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \begin{bmatrix} y_{31} & -x_{31} \\ -y_{21} & x_{21} \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$\mathbf{B}^{-t} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

aplicando el teorema del cambio de variable bajo el signo integral

$$\begin{aligned} A_{ij}^T &= \int_T \nabla^t \varphi_i D \nabla \varphi_j \, dx dy \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{B}} \int_{\hat{T}} \nabla^t \hat{\varphi}_i \begin{bmatrix} y_{31} & -x_{31} \\ -y_{21} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \nabla \hat{\varphi}_j \, d\xi d\eta \end{aligned}$$

En el caso en que los términos de la matriz \mathbf{D} sea funciones constantes por elemento, introduciendo la matriz

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_{31} & -x_{31} \\ -y_{21} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

el cálculo de \mathbf{A}_{ij}^T se simplifica. En efecto, con la notación

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

la matriz \mathbf{A}^T se escribe

$$\mathbf{A}_{ij}^T = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \int_{\hat{T}} \nabla^t \hat{\varphi}_i \mathbf{C} \nabla \hat{\varphi}_j \, d\xi d\eta = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \sum_{k,l=1}^2 c_{kl} \int_{\hat{T}} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi_k} \, d\xi_1 d\xi_2$$

donde hemos utilizado la notación $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$ para poder expresar apropiadamente la suma. La última integral se calcula una sola vez, pues es una integral en el elemento de referencia, que se calcula habitualmente mediante integración exacta o integración numérica exacta para los polinomios correspondientes. Si los términos de la matriz \mathbf{D} no son constantes, entonces los términos c_{kl} no pueden salir de la integral, se utiliza entonces integración numérica para calcular la integral intermedia de la expresión anterior.

Capítulo 6

El Método Multimalla

6.1. Introducción

Consideremos un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

con matriz \mathbf{A} simétrica definida positiva y que proviene de la discretización mediante elementos finitos, diferencias finitas o volúmenes finitos de un problema en derivadas parciales (se puede también pensar en un sistema multimalla algebraico).

Si consideramos un método iterativo estándar (p.e. Jacobi, Gauss-Seidel, Gradiente Conjugado) se observa una convergencia rápida en las primeras iteraciones y después una ralentización de la misma. La explicación es sencilla. Veámoslo en el caso de un método iterativo lineal asociado a una matriz auxiliar \mathbf{B}

$$\mathbf{B}\mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{B}\mathbf{U}^{(i)} + (\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{U}^{(i)})$$

donde \mathbf{B} viene dada, por ejemplo

- En el método de Jacobi: $\mathbf{B} = \text{Diag}(\mathbf{A})$
- En el método de Richardson: $\frac{\omega}{\Lambda}\mathbf{I}$ siendo Λ el mayor valor propio de \mathbf{A}

tendremos para los errores $\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i)} - \mathbf{U}$

$$\mathbf{B}\mathbf{E}^{(i+1)} = \mathbf{B}\mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{A}\mathbf{E}^{(i)}$$

o bien

$$\mathbf{E}^{(i+1)} = \mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}^{(i)} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{E}^{(i)}$$

Si consideramos ahora los valores propios y los vectores propios de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ que supondremos siempre $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n < 1$ y siendo $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ una base de vectores propios, escribiendo

$$\mathbf{E}^{(0)} = \sum_{l=1}^n v_l \psi_l$$

resulta

$$\mathbf{E}^{(i)} = \sum_{l=1}^n (1 - \lambda_l)^i v_l \psi_l$$

es decir las componentes v_l correspondientes a un valor de l grande ($\lambda_l \approx 1$) se amortiguan rápidamente.

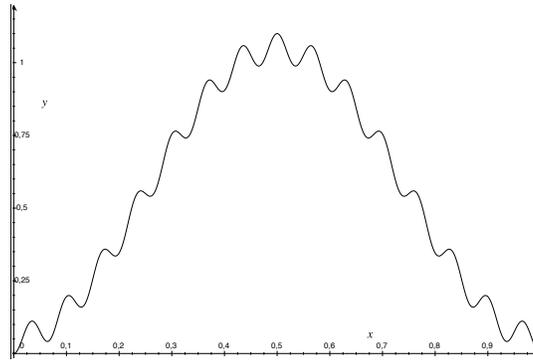


Figura 6.1 Error inicial $\mathbf{E}^{(0)}$

después de algunas pocas iteraciones v el error $\mathbf{E}^{(v)}$ tiene la forma

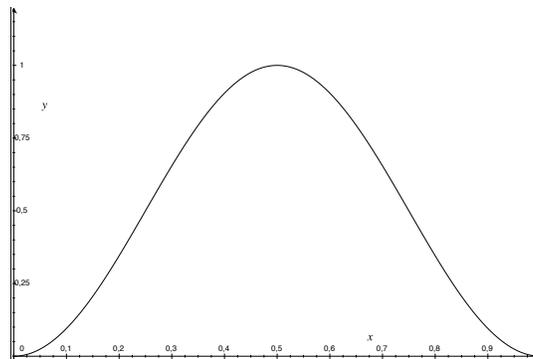


Figura 6.2 Error $\mathbf{E}^{(v)}$ después v iteraciones

este error se puede corregir en mallas menos finas.

En este capítulo se ha desarrollado fundamentalmente a partir del artículo [10] y complementado por los artículos [11], [12], [13], [14], [15].

6.2. Definiciones y Algoritmo Multimalla

6.2.1. Descripción del problema

Se va a desarrollar la teoría general para sistemas simétricos y definido positivos. Consideraremos el marco de Elementos Finitos conformes:

- Un espacio de Hilbert \mathcal{H} .
- Una conjunto de subespacios de \mathcal{H} de dimensión finita

$$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{M}_k \subseteq \dots \subseteq \mathcal{H}$$

- $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua, elíptica y simétrica. Con estas propiedades $a(\cdot, \cdot)$ es un producto escalar en \mathcal{H} . Denotamos $\|\cdot\|$ la norma asociada, es decir $\|v\|^2 = a(v, v)$ que es una norma equivalente a la norma en \mathcal{H} .
- $g(\cdot) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua.

El problema a resolver es: Hallar $u \in \mathcal{H}$ tal que

$$a(u, v) = g(v) \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (6.1)$$

En la práctica queremos encontrar una solución aproximada en un subespacio \mathcal{M}_K de dimensión finita, es decir, la solución $u_K \in \mathcal{M}_K$ de

$$a(u_K, v_K) = g(v_K) \quad \forall v_K \in \mathcal{M}_K \quad (6.2)$$

6.2.2. Descripción del algoritmo multimalla

Para distintos valores de $k = 0, 1, \dots, K$ consideraremos problemas del tipo

$$a(u_k, v_k) = g_k(v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k \quad (6.3)$$

donde g_k será definido en la propia descripción del algoritmo.

Para cada entero k introducimos una forma bilineal auxiliar

$$b_k(\cdot, \cdot) : \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\max_{v_k \in \mathcal{M}_k} \frac{a(v_k, v_k)}{b(v_k, v_k)} \leq 1 \quad (6.4)$$

Se denota $MG(k, v_1, v_2, \gamma, p, u_{k,0}, u_{k,p})$ al algoritmo correspondiente a la resolución el nivel k , con v_1 iteraciones de pre-suavizado, v_2 iteraciones de post-suavizado, γ es el número de llamadas al algoritmo multimalla de nivel $k-1$, p

indica el número de iteraciones realizadas en este nivel k , $u_{k,0}$ es el valor inicial, $u_{k,p}$ es el valor obtenido después de p iteraciones.

Vamos a describir una iteración del anterior algoritmo, es decir, $MG(k, v_1, v_2, \gamma, 1, u_{k,0}, u_{k,1})$

1. Si $k = 0$ se resuelve el problema (6.3) de forma exacta
2. Si $k \geq 1$, entonces

a) Pre-suavizado: Sea $u_k^{(0)} = u_{k,0}$. Se realizan v_1 iteraciones de

$$b_k(u_k^{(i)} - u_k^{(i-1)}, v_k) = g_k(v_k) - a(u_k^{(i-1)}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k$$

y se obtiene $u_k^{(v_1)}$

b) Corrección: \mathcal{M}_{k-1} :

- $g_{k-1}(v_{k-1}) = g(v_{k-1}) - a(u_k^{(v_1)}, v_{k-1})$
- $u_{k-1,0} = 0$
- $MG(k-1, v_1, v_2, \gamma, \gamma, 0, u_{k,\gamma})$
- $u_k^{v_1,c} = u_k^{v_1} + u_{k-1,\gamma}$

c) Post-suavizado: $v_k^{(v_1,c,0)} = u_k^{(v_1,c)}$ y realizamos v_2 iteraciones de

$$b_k(u_k^{(v_1,c,i+1)} - u_k^{(i)}, v_k) = g_k(v_k) - a(u_k^{(v_1,c,i)}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k$$

y se obtiene $u_{k,1} = u_k^{(v_1,c,v_2)}$

En el análisis de las secciones siguientes consideraremos el problema generalizado de valores y vectores propios

$$a(\psi_j, v_k) = \lambda_j b_k(\psi_j, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k \quad (6.5)$$

Bajo la hipótesis (6.4) resulta

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq 1$$

y se puede elegir una base $(\psi_j)_j$ de funciones propias tal que

$$b_k(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} \quad (6.6)$$

$$a(\psi_i, \psi_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad (6.7)$$

Utilizaremos la siguiente escala de normas $\|v\|_\theta$: Dada $v \in \mathcal{M}_k$, que se puede escribir en función de la base de vectores propios $v = \sum v_i \psi_i$, definimos:

$$\|v\|_\theta^2 = \sum \lambda_i^\theta v_i^2$$

En particular

$$\|v\|_1^2 = \|v\|^2 = a(v, v) \quad \forall v$$

y

$$\|v\|_0^2 = b_k(v, v) \quad \forall v$$

En lo que sigue utilizaremos para la norma $|||v|||_1$ indistintamente las notaciones $|||v|||$ y $||v||$.

Ejemplos:

Consideremos un problema elíptico de segundo orden definido en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{d=1,2,3}$ donde el espacio \mathcal{H} es $H^1(\Omega)$ o un subespacio del mismo y sea (\cdot, \cdot) el producto escalar en el espacio $L^2(\Omega)$, esto es $(u, v) = \int_{\Omega} uv$ y la norma correspondiente $||v||_{0,\Omega} = (v, v)$. Por otra parte designamos $||\cdot||_{1,\Omega}$ la norma habitual en $H^1(\Omega)$

El ejemplo más sencillo de algoritmos de suavizado cumpliendo la condición (6.4) es el método de Richardson:

Sea $\Lambda = \max_{v \in \mathcal{M}_k} \frac{a(v,v)}{(v,v)}$, elegimos

$$b_k(u, v) = \Lambda_k(u, v)$$

$$\Lambda_k(u_k^{(v_1, c, i+1)} - u_k^{(i)}, v_k) = g_k(v_k) - a(u_k^{(v_1, c, i)}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{M}_k \quad (6.8)$$

Recordemos también que típicamente en problemas elípticos de segundo orden donde \mathcal{M}_k representan subespacios de elementos finitos, caracterizados por un tamaño de elementos h_k se tiene

$$\Lambda_k \leq Ch_k^{-2} \quad \forall k \quad (6.9)$$

Tendremos las siguientes relaciones entre normas:

Existe una constante C independiente de k tal que

$$C^{-1} |||v|||_1 \leq ||v||_{1,\Omega} \leq C |||v|||_1 \quad (6.10)$$

$$C^{-1} h_k |||v|||_0 \leq ||v||_{0,\Omega} \leq Ch_k |||v|||_0 \quad (6.11)$$

y en general consideraremos que

$$C^{-1} h_k^{1-\theta} |||v|||_{\theta}^2 \leq ||v||_{\theta,\Omega} \leq Ch_k^{1-\theta} |||v|||_{\theta} \quad \forall k \quad (6.12)$$

6.2.3. Interpretación Matricial

En esta subsección nos restringimos al marco del Método de Elementos Finitos.

Sea $(\phi_i^{(k)})_i$ $i = 1, \dots, N_k$ la base de \mathcal{M}_k asociada al Método de Elementos Finitos correspondiente. La matriz asociada a la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ vendrá dada por $\mathbf{A}^{(k)} = (A_{ij}^{(k)})$, con $A_{ij}^{(k)} = a(\phi_j^{(k)}, \phi_i^{(k)})$. Respectivamente la matriz asociada a la forma bilineal $b_k(\cdot, \cdot)$ es $\mathbf{B}^{(k)} = (B_{ij}^{(k)}) = b_k(\phi_j^{(k)}, \phi_i^{(k)})$. Naturalmente $\mathbf{A}^{(k)}$ y $\mathbf{B}^{(k)}$ dependen de k . Cuando no sea necesario omitiremos el índice k para aligerar la notación.

Con notación matricial el problema (6.3) se escribe

$$\mathbf{AU} = \mathbf{G}$$

donde $\mathbf{U} = (U_i) \in \mathbb{R}^{N_k}$ siendo los términos U_i los coeficientes del desarrollo de $u_k \in \mathcal{M}_k$, $u_k = \sum U_i \phi_i$ y $\mathbf{G} = (G_i) \in \mathbb{R}^{N_k}$, con $G_i = g(\phi_i)$

Suavizado:

La iteración de suavizado para un vector de partida $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_k}$ se escribirá

$$\mathbf{B}(\bar{\mathbf{W}} - \mathbf{W}) = \mathbf{G} - \mathbf{AW}$$

Si $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N_k}$ es la solución de $\mathbf{AU} = \mathbf{G}$ y denotamos los errores antes y después de la iteración $\mathbf{E} = \mathbf{W} - \mathbf{U}$ y $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{W}} - \mathbf{U}$ respectivamente, tendremos $\mathbf{B}\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B}\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{E}$, o bien $\bar{\mathbf{E}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{E}$.

Corrección:

Para un valor aproximado $w_k = \sum W_i \phi_i \in \mathcal{M}_k$ del correspondiente problema (6.3) y $\mathbf{W} = (W_i) \in \mathbb{R}^{N_k}$ el correspondiente vector asociado. La corrección en \mathcal{M}_{k-1} se escribe

Hallar $\delta \in \mathcal{M}_{k-1}$ tal que

$$a(\delta, \phi_i^{(k-1)}) = g(\phi_i^{(k-1)}) - a(w_k, \phi_i^{(k-1)}) \quad \forall i = 1, \dots, N_k$$

expresando las funciones de la base $(\phi_i^{(k-1)})$ de \mathcal{M}_{k-1} como combinación lineal de las funciones de la base de \mathcal{M}_k

$$\phi_i^{(k-1)} = \sum_{j=1, \dots, N_k} R_{i,j} \phi_j^{(k)} \quad \forall i = 1, \dots, N_{k-1}$$

tenemos $\mathbf{G}^{(k-1)} = (G_i^{(k-1)}) \in \mathbb{R}^{N_{k-1}}$ con

$$G_i^{(k-1)} = g(\phi_i^{(k-1)}) = \sum_j R_{i,j} g(\phi_j^{(k)}) = \sum_j R_{i,j} G_j^{(k)}$$

denotando $\mathbf{R} = (R_{i,j})_{i=1, \dots, N_{k-1}; j=1, \dots, N_k}$

$$\mathbf{G}^{(k-1)} = \mathbf{R}\mathbf{G}^{(k)}$$

Por otra parte, para $\mathbf{A}^{(k-1)} = (A_{i,j}^{(k-1)})_{i,j=1, \dots, N_{k-1}}$

$$\begin{aligned} A_{i,j}^{(k-1)} &= a(\phi_j^{(k-1)}, \phi_i^{(k-1)}) \\ &= \sum_s \sum_l R_{j,s} R_{i,l} a(\phi_s^{(k)}, \phi_l^{(k)}) \\ &= \sum_s \sum_l R_{j,s} R_{i,l} A_{ls}^{(k)} \\ &= \sum_s \sum_l R_{i,l} A_{ls}^{(k)} R_{s,j} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{(k-1)} = \mathbf{R}\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{R}'$$

Finalmente denotando $\Delta = (\delta_i) \in \mathbb{R}^{N_{k-1}}$ definido por $\delta = \sum_i \delta_i \phi_i^{(k-1)}$ la corrección se escribe con notación matricial

$$\mathbf{A}^{(k-1)}\Delta = (\mathbf{R}\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{R}')\Delta = \mathbf{R}(\mathbf{G}^{(k)} - \mathbf{A}^{(k)}\mathbf{W})$$

\mathbf{R} es la matriz asociada al operador de restricción y \mathbf{R}' su matriz transpuesta es la matriz asociada al operador de prolongación. Finalmente el valor corregido en \mathbb{R}^{N_k} se escribe

$$\mathbf{W} + \mathbf{R}'\Delta$$

Ejemplo: Para ilustrar los operadores de Prolongación y Restricción consideraremos ahora un ejemplo sencillo en dimensión 1 que ilustra suficientemente el problema. En la figura (6.3) se representan las tres funciones de la base de una malla formada por tres elementos finitos de tipo (T, P, Σ) donde T es el triángulo, P es el espacio de polinomios de grado 1 y Σ es un intervalo. En la figura (6.4) se representan las 5 funciones de la base de una malla formada por 4 elementos finitos. La malla se obtiene de la malla gruesa anterior por refinamiento de los intervalos en dos subintervalos iguales.

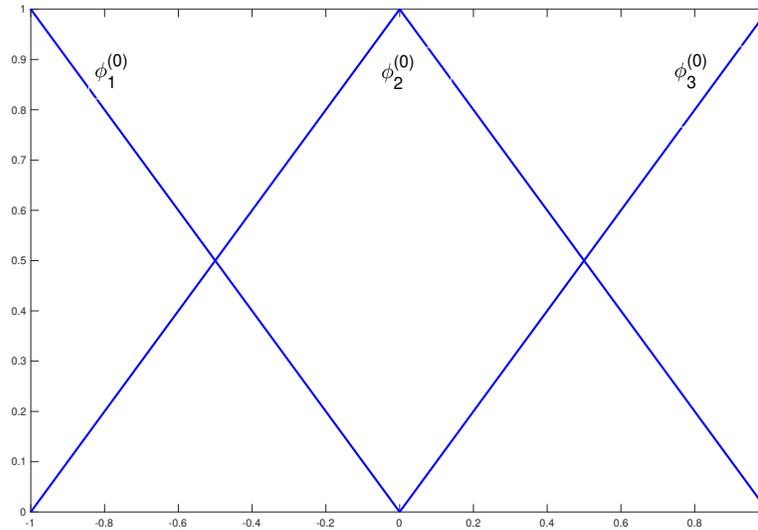


Figura 6.3 Funciones de la base de \mathcal{M}_0

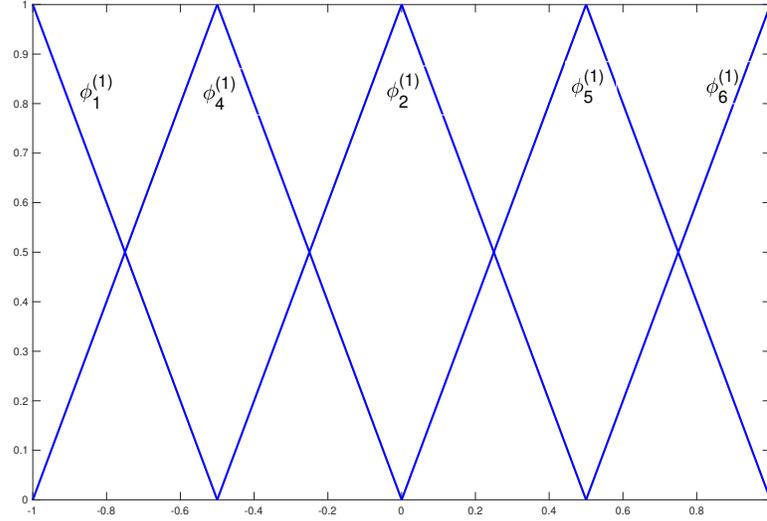


Figura 6.4 Funciones de la base de \mathcal{M}_1

Para construir los operadores de Prolongación y de Restricción basta expresar las funciones de la base de \mathcal{M}_0 en función de las funciones de la base de \mathcal{M}_1 . Tendremos,

$$\phi_1^{(0)} = \phi_1^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_4^{(1)} \quad (6.13)$$

$$\phi_2^{(0)} = \phi_2^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_4^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_5^{(1)} \quad (6.14)$$

$$\phi_3^{(0)} = \phi_3^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_5^{(1)} \quad (6.15)$$

Sea ahora una función $v \in \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1$,

$$v = v_1^{(0)}\phi_1^{(0)} + v_2^{(0)}\phi_2^{(0)} + v_3^{(0)}\phi_3^{(0)}$$

que se representada por un vector de \mathbb{R}^3 , $\mathbf{V}^{(0)} = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)})^t$. Sustituyendo en la expresión de v anterior las funciones $\phi_i^{(0)}$ $i = 1, 2, 3$, en función de la base de \mathcal{M}_1 utilizando (6.13), (6.14), (6.15), resulta

$$v = v_1^{(0)}\phi_1^{(1)} + v_2^{(0)}\phi_2^{(1)} + v_3^{(0)}\phi_3^{(1)} + \frac{v_1^{(0)} + v_2^{(0)}}{2}\phi_4^{(1)} + \frac{v_2^{(0)} + v_3^{(0)}}{2}\phi_5^{(1)}$$

de modo que las componentes de v en la base de \mathcal{M}_1 son

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= v_1^{(0)} \\ v_2^{(1)} &= v_2^{(0)} \\ v_3^{(1)} &= v_3^{(0)} \\ v_4^{(1)} &= \frac{v_1^{(0)} + v_2^{(0)}}{2} \\ v_5^{(1)} &= \frac{v_2^{(0)} + v_3^{(0)}}{2} \end{aligned}$$

que se representa como un vector de \mathbb{R}^5 , $\mathbf{V}^{(1)} = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}, v_4^{(1)}, v_5^{(1)})^t$. El operador de restricción \mathbf{R} es entonces

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

y el operador de prolongación es \mathbf{R}^t .

6.3. Análisis numérico del método multimalla

Primeramente analizaremos el método de 2 mallas y a continuación el método multimalla como una perturbación del método de dos mallas. En lo que sigue haremos uso de algunos resultados previos.

Lema 6.1 En \mathcal{M}_k se tiene la siguiente desigualdad para valores de $0 \leq \alpha \leq 1$

$$a(u, v) \leq \|u\|_{1+\alpha} \|v\|_{1-\alpha} \quad \forall u, v \in \mathcal{M}_k \quad (6.16)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_i \sum_j u_i v_j a(\psi_i, \psi_j) = \sum_i u_i v_i \lambda_i \\ &= \sum_i u_i \lambda_i^{(1+\alpha)/2} v_i \lambda_i^{(1-\alpha)/2} \\ &= \sqrt{\sum_i (u_i)^2 \lambda_i^{(1+\alpha)}} \sqrt{\sum_i v_i^2 \lambda_i^{(1-\alpha)}} \\ &= \|u\|_{1+\alpha} \|v\|_{1-\alpha} \end{aligned}$$

Observar que la propiedad anterior es una propiedad algebraica. ■

Lema 6.2 Sean $p, \alpha, \beta > 0$ entonces,

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(\alpha, \beta) &= \sup_{x \in [0,1]} x^\alpha (1-x)^\beta = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^\beta \\ \text{(b)} \quad f(\alpha, \beta)^p &= f(p\alpha, p\beta) \\ \text{(c)} \quad f(\alpha, \beta) &= f(\beta, \alpha) \end{aligned}$$

Demostración:

Demostremos (a). Pongamos $y = x^\alpha (1-x)^\beta$; derivando

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} (1-x)^\beta - x^\alpha \beta (1-x)^{\beta-1} = 0$$

$$x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} (\alpha(1-x) - \beta x) = 0$$

de donde $\alpha(1-x) - \beta x = 0$ y el máximo se obtiene para el valor de $x = x_{max} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.
y el valor del máximo y_{max} viene dado por

$$y_{max} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^\beta \quad (6.17)$$

Las demostraciones de (b) y (c) son inmediatas. ■

Lema 6.3 Si existen dos constantes $\kappa \geq 1$ y $\alpha > 0$ tales que para $u \in \mathcal{M}_\kappa$

$$\| \|u\| \|_{1-\alpha} \leq \kappa^{\alpha/2} \| \|u\| \|$$

entonces

$$\| \|u\| \|_{1-\beta} \leq \kappa^{\beta/2} \| \|u\| \| \quad \forall \beta \quad 0 \leq \beta \leq \alpha$$

Demostración:

Utilizar la desigualdad de interpolación (6.58) demostrada en la sección (6.5)

$$\| \|u\| \|_{1-\beta} \leq \| \|u\| \|_{1-\alpha}^{\beta/\alpha} \| \|u\| \|^{1-\beta/\alpha}$$

■

6.3.1. Método de dos mallas

Sea e el error inicial. Podemos representar una iteración del algoritmo de dos mallas de la siguiente manera

$$\mathcal{S}^{(v_2)}\left(\mathcal{C}\left(\mathcal{S}^{(v_1)}(e)\right)\right)$$

donde

- \mathcal{S} representa una iteración del algoritmo suavizado.
- \mathcal{C} representa la corrección

Elegiremos para simplificar $v_1 = v_2 = v/2$ y queremos estimar ξ tal que

$$\|\|\mathcal{S}^{(v/2)}\left(\mathcal{C}\left(\mathcal{S}^{(v/2)}(e)\right)\right)\|\| \leq \xi \|\|e\|\|$$

Observar que al reiterar las iteraciones la secuencia del algoritmo es

$$\mathcal{S}^{(v/2)}\mathcal{C}\dots\mathcal{S}^{(v)}\mathcal{C}\mathcal{S}^{(v)}\mathcal{C}\mathcal{S}^{(v)}\dots\mathcal{C}\mathcal{S}^{(v/2)}$$

de modo que $v = 1$ tiene sentido salvo en la primer pre-suavizado y en el último post-suavizado.

Suavizado, $\mathcal{S}^{(v/2)}(e)$:

Sea $e = \sum v_i \psi_i$ un error de partida y $\mathcal{S}(e) = \sum s^i \psi_i$ el error después de realizar una iteración del algoritmo de suavizado tomando como valor inicial el correspondiente a e y que viene definido por

$$b(\mathcal{S}(e), \psi_j) = b(e, \psi_j) - a(e, \psi_j) \quad \forall j \quad (6.18)$$

sustituyendo la expresión de e y de $\mathcal{S}(e)$ en (6.18). Gracias a las propiedades de ortogonalidad (6.6) y (6.7) de la base de funciones propias $(\psi_i)_i$ resulta

$$s^j = (1 - \lambda_j)v^j \quad \forall j$$

Tenemos las siguientes propiedades de la iteración de suavizado:

Lema 6.4 Para todo $\theta \in \mathbb{R}$

$$\|\|\mathcal{S}(e)\|\|_{\theta} \leq \|\|e\|\|_{\theta} \quad (6.19)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} |||\mathcal{S}(e)|||_{\theta}^2 &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^2 \lambda_i^{\theta} \\ &\leq \sum v_i^2 \lambda_i^{\theta} = |||e|||_{\theta}^2 \end{aligned}$$

■

Lema 6.5 Para $\alpha > 0$ tendremos:

$$|||S^{(\nu/2)}(e)|||_{1+\alpha} \leq f(\nu/2, \alpha/2) |||e||| \quad (6.20)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} |||S^{(\nu/2)}(e)|||_{1+\alpha}^2 &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^{\nu} \lambda_i^{1+\alpha} \\ &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^{\nu} \lambda_i^{\alpha} \lambda_i \\ &\leq f(\nu, \alpha) |||e|||^2 \end{aligned}$$

de donde finalmente se obtiene (6.20) ■

Lema 6.6 Para $\alpha > 0$ tendremos:

$$|||S^{(\nu/2)}(e)||| \leq f(\nu/2, \alpha/2) |||e|||_{1-\alpha}^2 \quad (6.21)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} |||S^{(\nu/2)}(e)|||^2 &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^{\nu} \lambda_i \\ &= \sum v_i^2 (1 - \lambda_i)^{\nu} \lambda_i^{\alpha} \lambda_i^{1-\alpha} \\ &\leq f(\nu, \alpha) |||e|||_{1-\alpha}^2 \end{aligned}$$

de donde finalmente se obtiene (6.21) ■

Observación:

Observemos ahora que si denotamos la norma en $L^2(\Omega)$ mediante $\|v\|_{0,\Omega} = (v, v)^{1/2}$ tendremos

$$\|v\|_0^2 = b_k(v, v) = \Lambda_k \|v\|_{0,\Omega}^2 \quad (6.22)$$

En un problema elíptico de segundo orden utilizando (6.9) y la relación (6.11), de la estimación (6.21) con $\alpha = 1$ resulta para la iteración de Richardson

$$|||S^{(\nu/2)}(e)||| \leq \frac{C}{\sqrt{1+\nu}} h_k^{-1} \|e\|_{0,\Omega}$$

donde C es una constante independiente de k . Vemos que el factor de reducción del error depende de h_k^{-1} que es un valor en general muy grande para las mallas más finas por lo que en general se necesitarían muchas iteraciones del algoritmo de suavizado para reducir significativamente el error si permanecemos en el nivel k . La idea que subyace en el método multimalla es ir a corregir el error en mallas menos finas donde el valor de h_k es más grande.

Corrección en la malla inferior, $\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(v/2)}(e))$:

Sea u_k la solución exacta en el \mathcal{M}_k y e un error inicial correspondiente a una solución aproximada de partida. Sea $u_k^{(v/2)}$ la aproximación obtenida después de realizar $v/2$ iteraciones de suavizado en la malla k . Sea $\mathcal{S}^{(v/2)}(e) = e_k^{(v/2)} = u_k - u_k^{(v/2)}$ el error correspondiente a esta aproximación. La corrección (corrección exacta en el método de 2 mallas) en el nivel $k-1$ consiste en resolver el siguiente problema: Hallar $\delta \in \mathcal{M}_{k-1}$ tal que

$$a(\delta, v_{k-1}) = g(v_{k-1}) - a(u_k^{(v/2)}, v_{k-1}) = a(u_k - u_k^{(v/2)}, v_{k-1}) \quad \forall v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$$

o bien,

$$a(\delta, v_{k-1}) = a(u_k - u_k^{(v/2)}, v_{k-1}) \quad \forall v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$$

es decir,

$$a(\delta - e_k^{(v/2)}, v_{k-1}) = 0 \quad \forall v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$$

δ es la proyección ortogonal del error $e_k^{(v/2)}$ en el subespacio \mathcal{M}_{k-1} donde la ortogonalidad es en el sentido del producto escalar $a(\cdot, \cdot)$. El valor corregido es $u_k^{(v/2, c)} = u_k^{(v/2)} + \delta$, por lo tanto el error después del presuavizado y la corrección es

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(v/2)}(e)) = \mathcal{C}(e_k^{(v/2)}) = u_k - u_k^{(v/2, c)} = u_k - (u_k^{(v/2)} + \delta) = e_k^{(v/2)} - \delta \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$$

Podemos considerar que los elementos de \mathcal{M}_{k-1}^\perp son de variación lenta y los de \mathcal{M}_{k-1} son de variación rápida. Tenemos ahora que estimar

$$|||e_k^{(v/2)} - \delta||| = |||\mathcal{C}(e_k^{(v/2)})|||$$

Teorema 6.1 *Supongamos que existe constantes $\kappa \geq 1$ y $\alpha > 0$ tales que para todo $v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp \cap \mathcal{M}_k$*

$$|||v|||_{1-\alpha} \leq \kappa^{\alpha/2} |||v||| \quad (6.23)$$

entonces

$$|||\mathcal{S}^{(v/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(v/2)}(e)))||| \leq \xi |||e||| \quad \forall e \in \mathcal{M}_k \quad (6.24)$$

donde

$$\xi = \begin{cases} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)^v & \text{si } v \leq \frac{\kappa-1}{\alpha} \\ \kappa^\alpha f(v, \alpha) & \text{si } v > \frac{\kappa-1}{\alpha} \end{cases}$$

Comentario:

Puesto que δ es la proyección ortogonal de $e_k^{(v/2)}$,

$$\|e_k^{(v/2)} - \delta\| = \inf_{v \in \mathcal{M}_{k-1}} \|e_k^{(v/2)} - v\|$$

Tenemos para todo $v \in \mathcal{H}$, $\|v\|^2 = a(v, v)$. En problemas elípticos de segundo orden donde \mathcal{H} es H^1 o un subespacio del mismo la norma $\|\cdot\|$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ de H^1 con constantes de equivalencia independientes de k . La dificultad que tenemos a la hora de encontrar una estimación de $\|e_k^{(v/2)} - \delta\|$ es que $e_k^{(v/2)}$ no es en general suficientemente regular para poder utilizar una estimación del tipo $\|e_k^{(v/2)} - v_{k-1}\|_1 \leq Ch_{k-1} \|e_k^{(v/2)}\|_2$ para todo $v_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}$ puesto que en general $e_k^{(v/2)} \notin H^2$

Demostración:

Presuavizado y corrección:

Tenemos gracias a la ortogonalidad entre $\mathcal{C}(e_k^{(v/2)})$ y $\mathcal{C}(e_k^{(v/2)}) - e_k^{(v/2)}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}(e_k^{(v/2)})\|^2 &= a(\mathcal{C}(e_k^{(v/2)}), \mathcal{C}(e_k^{(v/2)})) \\ &= a(\mathcal{C}(e_k^{(v/2)}), e_k^{(v/2)}) \\ &\leq \|\mathcal{C}(e_k^{(v/2)})\|_{1-\alpha} \|e_k^{(v/2)}\|_{1+\alpha} \\ &\leq \kappa^{\alpha/2} \|\mathcal{C}(e_k^{(v/2)})\| \cdot \|e_k^{(v/2)}\|_{1+\alpha} \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la hipótesis (6.23). Simplificando y utilizando la estimación (6.20)

$$\|\mathcal{C}(e_k^{(v/2)})\| \leq \kappa^{\alpha/2} f(v/2, \alpha/2) \|e\| \quad (6.25)$$

Postsuavizado:

Después del postsuavizado, utilizando (6.21), resulta

$$\|S^{(v/2)}(\mathcal{C}(e_k^{(v/2)}))\| \leq f(v/2, \alpha/2) \|\mathcal{C}(e_k^{(v/2)})\|_{1-\alpha}$$

utilizando de nuevo (6.23), la estimación anterior (6.25) y las propiedades de la función $f(\cdot, \cdot)$ se obtiene

$$\|S^{(v/2)}(\mathcal{C}(e_k^{(v/2)}))\| \leq \kappa^\alpha f(v, \alpha) \|e\| \quad (6.26)$$

Finalmente sustituimos α por β con $0 \leq \beta \leq \alpha$ y minimizamos respecto a β

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (\kappa^\beta f(v, \beta)) = \log\left(\frac{\kappa\beta}{v+\beta}\right) \kappa^\beta f(v, \beta) = 0$$

de donde

$$\frac{\kappa\beta}{v+\beta} = 1$$

lo que implica

$$\beta = \frac{v}{\kappa-1}$$

Tenemos dos casos si $\frac{v}{\kappa-1} > \alpha$ entonces el mínimo se alcanza en el extremo $\beta = \alpha$ y

$$\xi = \kappa^\alpha f(v, \alpha)$$

En el caso $\frac{v}{\kappa-1} \leq \alpha$ entonces el mínimo se alcanza para $\beta = \frac{v}{\kappa-1}$ y después de algunas operaciones elementales resulta

$$\xi = \left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)^v$$

■

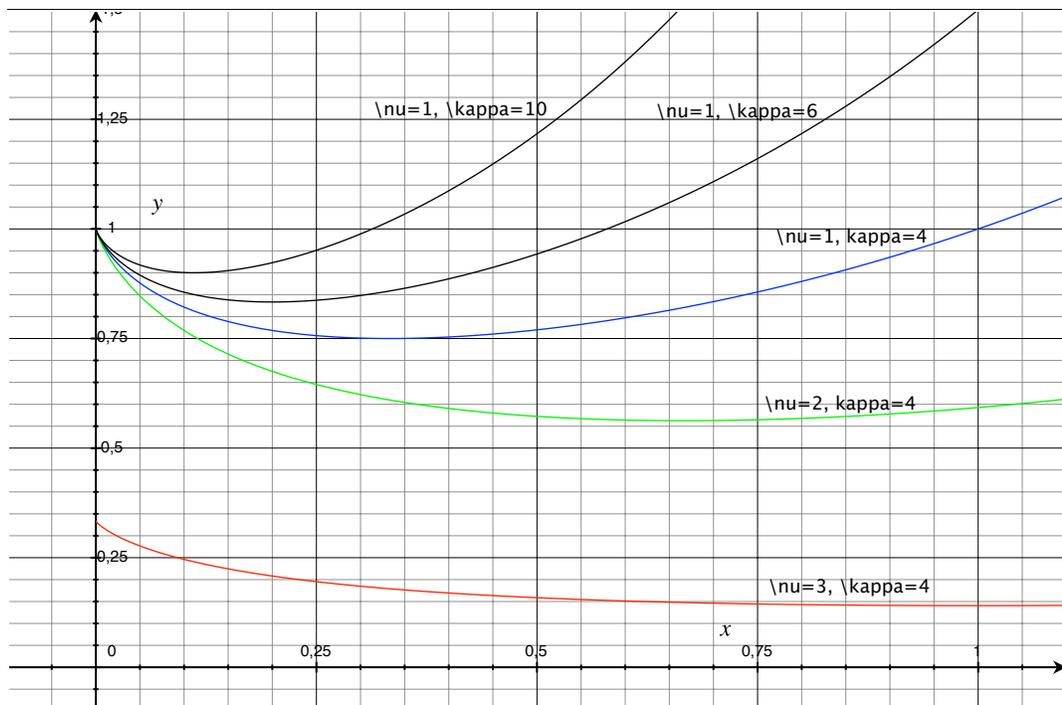


Figura 6.5 Gráfica $\kappa^\alpha f(v, \alpha)$ vs α después ν iteraciones

Comentario:

Hasta aquí la teoría es puramente algebraica pues en la obtención de la estimación (6.24) no se hace uso del problema variacional en dimensión infinita de partida del que provienen el sistema de ecuaciones algebraico. El punto clave está en la hipótesis (6.23). Si el parámetro κ no depende del nivel k el factor de reducción del error es independiente de dicho nivel. También la estimación de ξ será mejor cuanto más pequeño sea el valor de κ

Veamos en un problema elíptico de segundo orden como se puede estimar un valor de κ independiente del parámetro de la malla h_k .

Consideremos un problema elíptico de segundo orden,

$$-\nabla(a\nabla u) + bu = f \quad \text{in } \Omega \quad (6.27)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (6.28)$$

donde Ω es un dominio acotado y poliédrico de $\mathbb{R}^{d=1,2,3}$ y Γ su frontera que supondremos suficientemente regular. Suponemos $f \in L^2(\Omega)$ y las funciones $a \in C^1(\bar{\Omega})$ y $b \in C^0(\bar{\Omega})$ verificando

$$0 < a_{\min} \leq a(x) \leq a_{\max} \quad \text{y} \quad 0 \leq b_{\min} \leq b(x) \leq b_{\max}$$

En este caso tomaremos como espacio $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$. La formulación débil del problema es hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a\nabla u \nabla v + buv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (6.29)$$

Consideraremos la aproximación del problema en una secuencia de espacios de elementos finitos construidos sobre un conjunto de mallas encajadas formadas mediante triangulaciones regulares \mathcal{T}_k de Ω y $\mathcal{M}_k = \{v_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continuas}, v_k|_{T_j} \in P_1(T_j)\}$. Si designamos h_k el tamaño característico de la malla asociada al nivel k supondremos la relación $h_{k-1} = 2h_k$. Consideraremos en primer lugar el caso más sencillo en el que se tienen las hipótesis de regularidad y aproximación habituales.

Teorema 6.2 *Supongamos que se verifican las siguientes:*

1. *Hipótesis de regularidad.*

Supongamos que la solución u de (6.29) verifica:

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C_2 \|f\|_{0,\Omega} \quad (6.30)$$

donde $C_2 = C_2(a, b, \Omega)$

2. *Hipótesis de aproximación.*

Los espacios \mathcal{M}_k satisfacen la siguiente propiedad de aproximación: para $v \in H^2(\Omega)$

$$\inf_{\chi \in \mathcal{M}_k} \|v - \chi\|_{1,\Omega} \leq C_3 h_k \|v\|_{2,\Omega} \quad (6.31)$$

donde $C_3 = C_3(\Omega, \mathcal{T}_k)$

Entonces para todo $v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$ existe una constante $\kappa > 0$ tal que

$$\|v\|_0 \leq \kappa^{1/2} \|v\|_1 \quad (6.32)$$

Demostración:

Observemos que la relación (6.11) da

$$\|v\|_0 \leq C_4 h_k^{-1} \|v\|_{0,\Omega} \quad (6.33)$$

Y tenemos también la equivalencia de normas

$$C_0 \|v\| \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|v\| \quad (6.34)$$

Para estimar $\|v\|_{0,\Omega}$ utilizaremos un argumento de dualidad estándar. Sea $\mu \in L^2(\Omega)$ y sea $z \in \mathcal{H}$ la solución de

$$a(z, w) = (\mu, w) \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Elegimos $w = v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$. Para todo $\chi \in \mathcal{M}_{k-1}$ tendremos

$$\begin{aligned} (\mu, v) &= a(z, v) = a(z - \chi, v) \leq \|z - \chi\|_{1,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_3 h_{k-1} \|z\|_{2,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_2 C_3 h_{k-1} \|\mu\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{(\mu, v)}{\|\mu\|_{0,\Omega}} &\leq C_2 C_3 h_{k-1} \|v\|_{1,\Omega} \\ \|v\|_{0,\Omega} &= \sup_{\mu \in L^2(\Omega)} \frac{(\mu, v)}{\|\mu\|_{0,\Omega}} \leq C_2 C_3 h_{k-1} \|v\|_{1,\Omega} = 2C_2 C_3 h_k \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

y utilizando (6.33) y (6.34)

$$\|v\|_0 \leq 2C_2 C_3 C_4 \|v\|_{1,\Omega} \leq 2C_1 C_2 C_3 C_4 \|v\| \quad (6.35)$$

de donde $\kappa^{1/2} = 2C_1 C_2 C_3 C_4$. ■

Consideraremos ahora el caso más general con hipótesis de regularidad más débiles.

Teorema 6.3 Sean $\mathcal{H}^s = H^s(\Omega)$ los espacios de Sobolev con las normas correspondientes $\|\cdot\|_{s,\Omega}$, $\mathcal{H}^0 = L^2(\Omega)$ y $\mathcal{H}^1 = H_0^1(\Omega)$. También $\mathcal{H}^{-s} = H^{-s}(\Omega)$ es el espacio dual de $\mathcal{H}^s = H^s(\Omega)$ y designamos mediante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto de dualidad correspondiente.

1. Hipótesis de regularidad.

Supongamos que la solución u de (6.29) verifica: Para $0 < \alpha \leq 1$

$$\|u\|_{1+\alpha,\Omega} \leq C_2 \|f\|_{\alpha-1,\Omega} \quad (6.36)$$

donde $C_2 = C_2(a, b, \Omega)$

2. Hipótesis de aproximación.

Los espacios \mathcal{M}_k satisfacen la siguiente propiedad de aproximación: para $v \in \mathcal{H}^{1+\alpha}$ y $0 < \alpha \leq 1$

$$\inf_{\chi \in \mathcal{M}_k} \|v - \chi\|_{1,\Omega} \leq C_3 h_k^\alpha \|v\|_{1+\alpha,\Omega} \quad (6.37)$$

donde $C_3 = C_3(\Omega, \mathcal{T}_1)$

Queremos demostrar que para todo $v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$ existe una constante $\kappa > 0$ tal que

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq \kappa^{\alpha/2} \|v\| \quad (6.38)$$

Demostración:

Observemos que la relación (6.12) da

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq C_4 h_k^{-\alpha} \|v\|_{1-\alpha,\Omega} \quad (6.39)$$

Y tenemos también la equivalencia de normas

$$C_0 \|v\| \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|v\| \quad (6.40)$$

Para estimar $\|v\|_{1-\alpha,\Omega}$ utilizaremos un argumento de dualidad. Sea $\mu \in \mathcal{H}^{\alpha-1}$ y sea $z \in \mathcal{H}$ la solución de

$$a(z, w) = \langle \mu, w \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Elegimos $w = v \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$, para todo $\chi \in \mathcal{M}_{k-1}$ tendremos

$$\begin{aligned} \langle \mu, v \rangle &= a(z, v) = a(z - \chi, v) \leq \|z - \chi\|_{1,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_3 h_{k-1}^\alpha \|z\|_{1+\alpha,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_2 C_3 h_{k-1}^\alpha \|\mu\|_{1-\alpha,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mu, v \rangle}{\|\mu\|_{1-\alpha,\Omega}} &\leq C_2 C_3 h_{k-1}^\alpha \|v\|_{1,\Omega} \\ \|v\|_{1-\alpha,\Omega} &= \sup_{\mu \in \mathcal{H}^{\alpha-1}} \frac{\langle \mu, v \rangle}{\|\mu\|_{1-\alpha,\Omega}} \leq C_2 C_3 h_{k-1}^\alpha \|v\|_{1,\Omega} = 2^\alpha C_2 C_3 h_k^\alpha \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

y utilizando (6.39) y (6.40)

$$\|v\|_{1-\alpha} \leq 2^\alpha C_2 C_3 C_4 \|v\|_{1,\Omega} \leq 2^\alpha C_1 C_2 C_3 C_4 \|v\| \quad (6.41)$$

de donde $\kappa^{\alpha/2} = 2^\alpha C_1 C_2 C_3 C_4$. ■

6.3.2. Convergencia del Método multimalla, ciclo W ($\gamma = 2$)

Vamos a considerar el Método multimalla como una perturbación del método de dos mallas, concretamente el llamado ciclo W que corresponde a un número de llamadas $\gamma = 2$ del algoritmo multimalla de nivel inferior. En el ciclo W el error e inicial se transformará en

$$\mathcal{J}^{(v/2)}(\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{J}^{(v/2)}(e)))$$

con $\tilde{\mathcal{C}}$ en lugar de \mathcal{C} . Aquí $\tilde{\mathcal{C}}$ representa 2 llamadas al algoritmo multimalla de nivel inferior \mathcal{M}_{k-1} . Queremos calcular $\tilde{\xi}$ tal que

$$\|\mathcal{J}^{(v/2)}(\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{J}^{(v/2)}(e)))\| \leq \tilde{\xi} \|e\|$$

Teorema 6.4 *Supongamos*

$$\|\mathcal{J}^{(v/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{J}^{(v/2)}(e)))\| \leq \xi \|e\| \quad \forall e \in \mathcal{M}_k$$

donde ξ está definida en el teorema (6.1). Entonces existe $0 < \tilde{\xi} < 1$ independiente de k tal que

$$\|\mathcal{J}^{(v/2)}(\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{J}^{(v/2)}(e)))\| \leq \tilde{\xi} \|e\| \quad \forall e \in \mathcal{M}_k \quad (6.42)$$

Demostración:

Procederemos por inducción. El teorema es cierto para un método de dos mallas, $k = 2$. En efecto, en este caso $\tilde{\mathcal{C}}$ es la solución exacta en la malla inferior $k = 1$, $\tilde{\xi} = \xi$ y (6.42) es cierto como consecuencia del teorema (6.1).

Supongamos ahora que el teorema es cierto para $k - 1$ mallas. Sea $\bar{e} = \mathcal{J}^{(v/2)}(e)$ el error en \mathcal{M}_k después del presuavizado y sea δ la corrección exacta en \mathcal{M}_{k-1} , es decir, δ es la proyección ortogonal de \bar{e} sobre \mathcal{M}_{k-1} en el sentido del producto escalar $a(\cdot, \cdot)$. Sea $\tilde{\delta}$ la corrección obtenida después de aplicar dos veces el algoritmo multimalla (con $\gamma = 2$) en \mathcal{M}_{k-1} . Con las mismas notaciones que en el teorema (6.1), $\bar{e} = \delta + \mathcal{C}(\bar{e})$ y de forma correspondiente $\tilde{e} = \tilde{\delta} + \tilde{\mathcal{C}}(\tilde{e})$. Tendremos por la hipótesis de inducción

$$\|\delta - \tilde{\delta}\| \leq \tilde{\xi}^2 \|\delta\|$$

es decir,

$$\|\bar{e} - \mathcal{C}(\bar{e}) - (\bar{e} - \tilde{\mathcal{C}}(\tilde{e}))\| = \|\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{e}) - \mathcal{C}(\bar{e})\| \leq \tilde{\xi}^2 \|\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{e}) - \bar{e}\|$$

Tenemos $\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e}) \in \mathcal{M}_{k-1}$ y $\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \bar{e} \in \mathcal{M}_{k-1}$ y también $\mathcal{C}(\bar{e}) \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$. Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} & \|\|\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e}) + \tilde{\xi}^2 \mathcal{C}(\bar{e})\|\|^2 = \\ & \|\|\tilde{\mathcal{C}}(\bar{e}) - \mathcal{C}(\bar{e})\|\|^2 + \tilde{\xi}^4 \|\|\mathcal{C}(\bar{e})\|\|^2 \leq \\ & \tilde{\xi}^4 (\|\|\mathcal{C}(\bar{e}) - \bar{e}\|\|^2 + \|\|\mathcal{C}(\bar{e})\|\|^2) = \tilde{\xi}^4 \|\|\bar{e}\|\|^2 \end{aligned}$$

Tomemos ahora en cuenta el presuavizado y el postsuavizado. Teniendo en cuenta la propiedad (6.19) para $\theta = 1$

$$\begin{aligned} & \|\|\mathcal{S}^{(v/2)} \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{(v/2)}(e))\|\| = \|\|(1 - \tilde{\xi}^2) \mathcal{S}^{(v/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(v/2)}(e))) + \mathcal{S}^{(v/2)}(\tilde{\mathcal{C}} - \mathcal{C} + \tilde{\xi}^2 \mathcal{C})(\mathcal{S}^{(v/2)}(e))\|\| \\ & \leq (1 - \tilde{\xi}^2) \|\|\mathcal{S}^{(v/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(v/2)}(e)))\|\| + \|\|\mathcal{S}^{(v/2)}(\tilde{\mathcal{C}} - \mathcal{C} + \tilde{\xi}^2 \mathcal{C})(\mathcal{S}^{(v/2)}(e))\|\| \\ & \leq ((1 - \tilde{\xi}^2)\xi + \tilde{\xi}^2) \|\|e\|\| = \tilde{\xi} \|\|e\|\| \end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta siempre que

$$\tilde{\xi} = (1 - \tilde{\xi}^2)\xi + \tilde{\xi}^2 = \xi - \xi\tilde{\xi}^2 + \tilde{\xi}^2$$

o bien

$$(1 - \xi)\tilde{\xi}^2 - \tilde{\xi} + \xi = 0$$

Despejando $\tilde{\xi}$,

$$\tilde{\xi} = \frac{1 \pm (2\xi - 1)}{2(1 - \xi)}$$

de las dos soluciones únicamente la solución

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi}{1 - \xi}$$

da un valor de $\tilde{\xi} \geq 0$ para valores de $\xi > 0$. Para obtener valores de $\tilde{\xi} < 1$ necesitamos tener $\xi < 0.5$, pero siempre podemos elegir v de manera que $\xi < 0.5$. ■

6.3.3. Convergencia del Método multimalla, ciclo V ($\gamma = 1$)

Consideramos en esta subsección la convergencia del método multimalla con una sola llamada al algoritmo de multimalla de nivel inferior, es decir, el llamado ciclo V que corresponde a $\gamma = 1$.

El análisis de la convergencia del ciclo V necesita dos resultados previos acerca del suavizado.

Lema 6.7 Sea $u \in \mathcal{M}_k$ y $0 < \alpha \leq 1$. Entonces

$$\|\|\mathcal{S}^{(v/2)}(u)\|\|/\|\|u\|\| \leq (\|\|\mathcal{S}^{((v+1)/2)}(u)\|\|^2/\|\|\mathcal{S}^{(v/2)}(u)\|\|^2)^{v/2} \quad (6.43)$$

$$\|u\|_{1+\alpha} \|u\| \leq (1 - \|\mathcal{S}^{1/2}(u)\|^2 / \|u\|^2)^{\alpha/2} \quad (6.44)$$

Demostración:

Para demostrar (6.43) veamos primero que

$$\|\mathcal{S}^{(v/2)}(u)\| \leq \|\mathcal{S}^{((v+1)/2)}(u)\|^{v/(v+1)} \|u\|^{1/(v+1)} \quad (6.45)$$

En efecto, mediante inducción sobre v , (6.45) es cierta para $v = 1$, pues

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2 &= a(\mathcal{S}^{(1/2)}(u), \mathcal{S}^{(1/2)}(u)) = a(\mathcal{S}(u), u) \leq \|\mathcal{S}(u)\| \cdot \|u\| \\ \|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\| &\leq \|\mathcal{S}(u)\|^{1/2} \cdot \|u\|^{1/2} \end{aligned}$$

Supongamos ahora cierta la desigualdad (6.45) para $v - 1$ y veamos que entonces es cierta para v ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(v/2)}(u)\|^2 &= a(\mathcal{S}^{(v/2)}(u), \mathcal{S}^{(v/2)}(u)) = a(\mathcal{S}^{((v+1)/2)}(u), \mathcal{S}^{((v-1)/2)}(u)) \\ &\leq \|\mathcal{S}^{((v+1)/2)}(u)\| \cdot \|\mathcal{S}^{((v-1)/2)}(u)\| \end{aligned}$$

Utilizando ahora la hipótesis de inducción en el segundo factor del último producto

$$\|\mathcal{S}^{(v/2)}(u)\|^2 \leq \|\mathcal{S}^{(v+1)/2}(u)\| \cdot \|\mathcal{S}^{(v/2)}(u)\|^{(v-1)/v} \cdot \|u\|^{1/v}$$

y como $2 - (v - 1)/v = (v + 1)/v$ resulta simplificando y extrayendo la raíz $(v + 1)/v$ en los dos miembros de la desigualdad obtenemos (6.45). Finalmente (6.43) se obtiene de (6.45) elevando los dos miembros a la potencia $v + 1$ y reordenando,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(v/2)}(u)\|^{v+1} &\leq \|\mathcal{S}^{((v+1)/2)}(u)\|^v \cdot \|u\| \\ \|\mathcal{S}^{(v/2)}(u)\| &\leq \frac{\|\mathcal{S}^{((v+1)/2)}(u)\|^v}{\|\mathcal{S}^{(v/2)}(u)\|^v} \cdot \|u\| \end{aligned}$$

dividiendo por $\|u\|$ se obtiene (6.43).

Para demostrar (6.44) observemos primero

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2 &= \sum_i u_i^2 (1 - \lambda_i) \lambda_i \\ &= \sum_i u_i^2 \lambda_i - \sum_i u_i^2 \lambda_i^2 = \|u\|^2 - \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\|u\|_2^2 = \|u\|^2 - \|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2 \quad (6.46)$$

Ahora utilizando la desigualdad de interpolación (6.59) y la observación (6.46) tenemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{1+\alpha} &\leq \|u\|^{1-\alpha} (\|u\|^2 - \|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2)^{\alpha/2} \\
&= \|u\|^{1-\alpha} (\|u\|^2 (1 - \frac{\|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2}{\|u\|^2}))^{\alpha/2} \\
&= \|u\| \cdot (1 - \frac{\|\mathcal{S}^{(1/2)}(u)\|^2}{\|u\|^2})^{\alpha/2}
\end{aligned}$$

Dividiendo por $\|u\|$ obtenemos (6.44). ■

Teorema 6.5 *Supongamos que existe una constante $\kappa \geq 1$ independiente del nivel k tal que para todo $u \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp \cap \mathcal{M}_k$ tal que*

$$\|u\|_0 \leq \kappa^{1/2} \|u\| \quad (6.47)$$

Supongamos además que para todo $v \in \mathcal{M}_k$ se verifica la siguiente hipótesis de inducción

$$\|\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v)\| \leq \hat{\xi} \|\mathcal{C}(v) - v\| \quad (6.48)$$

donde $\hat{\xi} = \frac{\kappa}{\kappa+v}$. Entonces

$$\|\mathcal{S}^{(v/2)}(\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{v/2}(v)))\| \leq \hat{\xi} \|v\| \quad (6.49)$$

Demostración:

Procederemos por inducción. Observemos primero que al igual que en el ciclo W la hipótesis (6.48) es la hipótesis de inducción correspondiente a una única llamada al algoritmo multimalla de nivel inferior. El teorema es cierto para un método de dos mallas, $k = 2$. En efecto, en este caso $\hat{\mathcal{C}}$ es la solución exacta en la malla inferior $k = 1$

Supongamos ahora que el teorema es cierto para $k - 1$ niveles, es decir, se verifica (6.48). Tenemos por una parte, para todo $v \in \mathcal{M}_k$, razonando como en el teorema (6.4) $\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v) \in \mathcal{M}_{k-1}$ y $\hat{\mathcal{C}}(v) - v \in \mathcal{M}_{k-1}$ y también $\mathcal{C}(v) \in \mathcal{M}_{k-1}^\perp$. Tenemos entonces las siguientes propiedades:

- Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}
\|\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v) + \hat{\xi} \mathcal{C}(v)\|^2 &= \\
\|\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v)\|^2 + \hat{\xi}^2 \|\mathcal{C}(v)\|^2 &\leq \\
\hat{\xi}^2 (\|\mathcal{C}(v) - v\|^2 + \|\mathcal{C}(v)\|^2) &= \hat{\xi}^2 \|v\|^2
\end{aligned}$$

y extrayendo la raíz cuadrada

$$\|\hat{\mathcal{C}}(v) - \mathcal{C}(v) + \hat{\xi} \mathcal{C}(v)\| \leq \hat{\xi} \|v\|$$

- Sea ahora para $v \in \mathcal{M}_k$

$$y(v) = 1 - \|\mathcal{S}^{((v+1)/2)}(v)\|^2 / \|\mathcal{S}^{(v/2)}(v)\|^2$$

y denotemos $\bar{v} = \mathcal{S}^{(v/2)}(v)$. Entonces tendremos utilizando (6.43) con $u = v$

$$\begin{aligned} \|\bar{v}\| &= \|\mathcal{S}^{(v/2)}(v)\| = \frac{\|\mathcal{S}^{(v/2)}(v)\|}{\|v\|} \|v\| \\ &\leq \left(\frac{\|\mathcal{S}^{((v+1)/2)}(v)\|^2}{\|\mathcal{S}^{(v/2)}(v)\|^2} \right)^{v/2} \|v\| = (1 - y(v))^{v/2} \|v\| \end{aligned}$$

- Aplicando (6.16) y la ortogonalidad entre $\mathcal{C}(v)$ y $v - \mathcal{C}(v)$ para todo $v \in \mathcal{M}_k$

$$\|\mathcal{C}(v)\|^2 = a(\mathcal{C}(v), \mathcal{C}(v)) = a(\mathcal{C}(v), v) \leq \|\mathcal{C}(v)\|_0 \|v\|_2$$

teniendo en cuenta la hipótesis (6.47) y simplificando

$$\|\mathcal{C}(v)\| \leq \kappa^{1/2} \|v\|_2$$

- Utilizando (6.44) con $\alpha = 1$ y $u = \bar{v}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}(\bar{v})\| &\leq \kappa^{1/2} \|\bar{v}\|_2 \\ &\leq \kappa^{1/2} \left(1 - \frac{\|\mathcal{S}^{1/2}(\bar{v})\|}{\|\bar{v}\|}\right)^{1/2} \|\bar{v}\| \\ &\leq \kappa^{1/2} y^{1/2}(v) \|\bar{v}\| \end{aligned}$$

Ahora, denotemos $w \in \mathcal{M}_k$ y $\bar{w} = \mathcal{S}^{(v/2)}(w)$. Como $\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}$, se tiene

$$a(\mathcal{C}(\bar{v}), \bar{w}) = a(\mathcal{C}^2(\bar{v}), \bar{w}) = a(\mathcal{C}(\bar{v}), \mathcal{C}(\bar{w}))$$

de donde

$$\begin{aligned} a(\mathcal{S}^{(v/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(v/2)}(v))), w) &= a(\mathcal{C}(\bar{v}), \bar{w}) \\ &= (1 - \hat{\xi}) a(\mathcal{C}(\bar{v}), \mathcal{C}(\bar{w})) + a((\mathcal{C} - \mathcal{C} + \hat{\xi} \mathcal{C})(\bar{v}), \bar{w}) \\ &\leq ((1 - \hat{\xi}) \kappa^{1/2} y^{1/2}(v) \kappa^{1/2} y^{1/2}(w) + \hat{\xi}) \|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\| \\ &\leq ((1 - \hat{\xi}) \kappa y^{1/2}(v) y^{1/2}(w) + \hat{\xi}) ((1 - y(v))(1 - y(w)))^{v/2} \|v\| \cdot \|w\| \end{aligned}$$

y finalmente observando que $0 \leq y(v) \leq 1$ para todo $v \in \mathcal{M}_k$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(v/2)}(\mathcal{C}(\mathcal{S}^{(v/2)}(v)))\| &\leq \sup_{x \in [0,1]} ((1 - \hat{\xi}) \kappa x + \hat{\xi}) (1 - x)^v \|v\| \\ &\leq \frac{\kappa}{\kappa + v} \sup_{x \in [0,1]} (vx + 1)(1 - x)^v \|v\| \\ &\leq \frac{\kappa}{\kappa + v} \|v\| \end{aligned}$$

donde hemos sustituido el valor de $\hat{\xi}$ por $\hat{\xi} = \frac{\kappa}{\kappa + v}$ ■

Observación: En el anterior teorema se ha utilizado la condición de regularidad determinada por $\alpha = 1$.

Observación: La demostración anterior también es válida para el ciclo W . En la demostración se sustituye $\hat{\xi}$ por $\hat{\xi}^2$ y se elige $\hat{\xi}^2 = \frac{\kappa}{\kappa+v}$. De modo que en el caso $\alpha = 1$ para el ciclo W tendremos

Corolario 6.1 Con las hipótesis de los teoremas (6.4) y (6.5) para $\alpha = 1$ tendremos para el ciclo W

$$|||\mathcal{S}^{(v/2)}(\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{S}^{v/2}(v)))||| \leq \bar{\xi} |||v||| \quad (6.50)$$

donde $\bar{\xi} = \min\{\tilde{\xi}, \hat{\xi}\}$ donde $\tilde{\xi}$ y $\hat{\xi}$ están definidos como en los teoremas (6.4) y (6.5) respectivamente.

6.4. Complejidad Algorítmica del Método Multimalla

En esta sección estudiaremos la complejidad algorítmica del método multimalla, es decir, el número de operaciones necesario para resolver un sistema de ecuaciones con el método multimalla. Estimemos en primer lugar el número de operaciones necesario para realizar una iteración del algoritmo. Sea n_k el número de incógnitas (ecuaciones) en el nivel k . Supongamos $C_H = \sup_{0 \leq k \leq K} \frac{n_{k-1}}{n_k}$. Llamemos $\theta = C_H \gamma < 1$. Sea v el número de suavizados (presuavizados y postsuavizados) en cada iteración. Para un ciclo γ y para todo nivel k el número de operaciones en cada paso del algoritmo es

- Suavizado, \mathcal{S} : $C_{\mathcal{S}}.n_k$
- Restricción, \mathcal{R} : $C_{\mathcal{R}}.n_k$
- Prolongación, \mathcal{P} : $C_{\mathcal{P}}.n_k$
- Resolución exacta en el nivel $k = 0$: C_0

El número de operaciones Nop en una iteración del algoritmo multimalla del ciclo γ será

$$\begin{aligned} Nop &= (vC_{\mathcal{S}} + C_{\mathcal{R}} + C_{\mathcal{P}})(n_K + \gamma n_{K-1} + \dots + \gamma^{K-1} n_1) + \gamma^{K-1} C_0 \\ &= (vC_{\mathcal{S}} + C_{\mathcal{R}} + C_{\mathcal{P}})(1 + \theta + \dots + \theta^{K-1})n_K + \frac{\theta^{K-1}}{C_H^{K-1}} C_0 \\ &\leq \left(\frac{(vC_{\mathcal{S}} + C_{\mathcal{R}} + C_{\mathcal{P}})}{1 - \theta} + \frac{C_0 \theta^{K-1}}{n_1} \right) n_K \leq C n_K \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta

$$\begin{aligned} n_{K-1} &\leq C_H n_K \\ n_{K-2} &\leq C_H n_{K-1} \leq C_H^2 n_K \\ &\dots \\ n_1 &\leq C_H^{K-1} n_K \end{aligned}$$

Observaciones:

Veamos en que condiciones se cumple la restricción $\theta < 1$ de modo que el número de operaciones de una iteración del algoritmo multimalla de ciclo γ sea proporcional al número de ecuaciones. Llamando h_k al diámetro máximo de los elementos de mallado correspondiente al espacio \mathcal{M}_k , en un refinamiento uniforme tendremos $\frac{h_{k-1}}{h_k} \approx 2$ y en consecuencia $\frac{n_{k-1}}{n_k} = \frac{h_{k-1}^{-d}}{h_k^{-d}} \approx 2^{-d} \approx C_H$. De modo que

$$\theta = C_H \gamma \approx 2^{-d} \gamma < 1$$

lo que implica la condición $\gamma < 2^d$. Por tanto en problemas de dimensión $d = 1$, se necesita $\gamma = 1$. En problemas de dimensión $d = 2$ la condición es $\theta = \gamma C_H = \frac{\gamma}{4} < 1$ que se satisface para $\gamma \leq 3$. En problemas de dimensión $d = 3$ la condición es $\theta = \gamma C_H = \frac{\gamma}{8} < 1$ que se satisface para $\gamma \leq 7$. En un refinamiento adaptativo en problemas en dimensión $d = 2$, tendremos $\frac{n_{k-1}}{n_k} \approx 1/2 = C_H$, necesitamos entonces $\gamma < 2$, es decir $\gamma = 1$. Para el ciclo V tenemos siempre $\theta = C_H < 1$, la condición es $\frac{n_{k-1}}{n_k} < 1$ que se satisface siempre.

Evaluemos ahora el número de operaciones necesarias para obtener una solución aproximada del sistema de ecuaciones con un error inferior a una tolerancia prefijada. Sea $u_K \in \mathcal{M}_K$ la solución exacta en el nivel K . Sea $u_K^{(0)} \in \mathcal{M}_K$ el valor aproximado inicial y $u_K^{(i)} \in \mathcal{M}_k$ el valor obtenido despues de i iteraciones del algoritmo multimalla. Queremos elegir el número de iteraciones i de manera que

$$\|u_K^{(i)} - u_K\| \leq \zeta^i \|u_K^{(0)} - u_K\|, \quad \zeta^i < \varepsilon \quad (6.51)$$

donde $\zeta = \tilde{\xi}$ para $\gamma = 2$ o $\zeta = \hat{\xi}$ para $\gamma = 1$ definido en los teoremas (6.4) y (6.5). La tolerancia ε está fijada de antemano. En la práctica si estamos resolviendo un sistema de ecuaciones que proviene de la aproximación de un problema de ecuaciones en derivadas parciales mediante el Método de Elementos Finitos (o Diferencias Finitas o Volúmenes Finitos) queremos obtener una solución aproximada dentro de los márgenes de error del propio método, es decir, si suponemos que el método es de orden s , el requerimiento será $\zeta^i = C h_K^s$. De modo que si $n_K = h_K^{-d}$, $\zeta^i = C n_K^{-s/d}$ de donde tomando logaritmos

$$i \log(\zeta) = \log(C) - \frac{s}{d} \log(n_K)$$

es decir el número de iteraciones a realizar i es del orden $i = \mathcal{O}(\log n_K)$ y el número total de operaciones para resolver el problema dentro de la precisión prefijada será

$$\mathcal{O}(n_K \log(n_K))$$

Método Multimalla Completo: Iteración Anidada

En el algoritmo multimalla considerado anteriormente el punto de partida es el sistema correspondiente a la malla más fina es decir la correspondiente al espacio \mathcal{M}_K . Consideremos ahora una modificación del algoritmo en la que el punto de partida es el sistema con menor número de ecuaciones, es decir el correspondiente a la malla más gruesa correspondiente al espacio \mathcal{M}_0 . El algoritmo siguiente se conoce como Método Multimalla Completo (en inglés “Full Multigrid Method”) y se basa en la iteración anidada siguiente:

1. $\tilde{u}_0 = u_0$ solución exacta en \mathcal{M}_0
2. Para $k = 1, \dots, K$
 - a) $u_{k,0} = \Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1})$
 - b) $MGM(k, v_1, v_2, \gamma, i, u_{k,0}, u_{k,i})$
 - c) $\tilde{u}_k = u_{k,i}$

donde $\Pi_{k-1,k}$ es el operador de prolongación

$$\begin{aligned} \Pi_{k-1,k} : \mathcal{M}_{k-1} &\rightarrow \mathcal{M}_k \\ v_{k-1} &\rightarrow v_k = v_{k-1} \end{aligned}$$

y además el número de iteraciones i es el mismo para todos los niveles k .

Consideremos ahora la resolución mediante el Método de Elementos Finitos del problema (6.1) con el algoritmo multimalla completo. Podemos enunciar la siguiente estimación del error,

Teorema 6.6 (*Estimación del error para la iteración anidada*) Sean $C_1 \geq 0$, $s > 0$ y h_k verificando

$$\|u_k - u\| \leq C_1 h_k^s \quad \forall k \quad (6.52)$$

y

$$\|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k\| \leq C_1 h_k^s \quad \forall k \quad (6.53)$$

donde $\|v\|$ es la norma de $v \in \mathcal{H}$. Sea $\zeta = \tilde{\xi}$ para $\gamma = 2$ o $\zeta = \hat{\xi}$ para $\gamma = 1$, definido en los teoremas (6.4) y (6.5), entonces

$$\|\tilde{u}_k - u_k\| \leq C_3 C_1 h_k^s \quad (6.54)$$

con

$$C_3(\zeta, i) = \frac{\zeta^i}{1 - C_2 \zeta^i}$$

donde

$$C_2 = \sup_k \left(\frac{h_{k-1}}{h_k} \right)^s$$

Observación: Observemos que la única condición requerida para el valor de i es $C_2 \zeta^i < 1$.

Demostración:

Procederemos por recurrencia: Para $k = 0$ el teorema es cierto. Supongamos cierto el teorema para un nivel $k - 1$, es decir,

$$\|\tilde{u}_{k-1} - u_{k-1}\| \leq C_3 C_1 h_{k-1}^s$$

tendremos para el error en el nivel k

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_k - u_k\| &= \|u_k^{(i)} - u_k\| \leq \zeta^i \|u_k^{(0)} - u_k\| = \zeta^i \|\Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1}) - u_k\| \\ &= \zeta^i \|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k + \Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1}) - \Pi_{k-1,k}(u_{k-1})\| \\ &\leq \zeta^i (\|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k\| + \|\Pi_{k-1,k}\| \cdot \|\tilde{u}_{k-1} - u_{k-1}\|) \\ &\leq \zeta^i (C_1 h_k^s + C_3 C_1 h_{k-1}^s) \leq \zeta^i C_1 h_k^s (1 + C_3 C_2) \\ &= C_3 C_1 h_k^s \end{aligned}$$

donde el último paso es cierto si elegimos $C_3(\zeta, i) = \frac{\zeta^i}{1 - C_2 \zeta^i}$ ■

Comentario: Hemos utilizado la propiedad $\|\Pi_{k-1,k}\| \leq 1$. En efecto si $\Pi_{k-1,k}$ es el operador de prolongación definido por la inyección de \mathcal{M}_{k-1} en \mathcal{M}_k , tenemos $\|\Pi_{k-1,k}\| = 1$.

Comentario: La estimación habitual en una aproximación mediante Elementos Finitos del problema (6.1) es

$$\|u_k - u\| \leq C h_k^s \quad \forall k$$

donde podemos suponer que la constante C es independiente del nivel k . Utilizando $C_2 \geq \left(\frac{h_{k-1}}{h_k}\right)^s$

$$\begin{aligned} \|\Pi_{k-1,k}(u_{k-1}) - u_k\| &= \|u_{k-1} - u_k\| \leq \|u_{k-1} - u\| + \|u_k - u\| \\ &\leq C h_{k-1}^s + C h_k^s \leq C h_k^s (1 + C_2) \end{aligned}$$

Eligiendo ahora $C_1 = (1 + C_2)C$ se obtienen las dos propiedades (6.52) y (6.53) para la misma constante C_1 del enunciado.

Comentario: El teorema asegura que la cota del error en todos los niveles $k = 0, 1, \dots, K$ difiere respecto al error de discretización $C_1 h_k^s$ únicamente por factor $C_3(\zeta, i)$.

Coste de la iteración anidada

Vamos a evaluar el número de operaciones en el nivel k de la iteración anidada. El coste de una iteración del método multimalla en el nivel k , despreciado el coste del término $\frac{\theta^{k-1}}{n_1} \cdot n_k$ correspondiente a la resolución exacta en el nivel $k = 0$, es

$$W_k = \frac{(vC_{\mathcal{J}} + C_{\mathcal{B}} + C_{\mathcal{P}})n_k}{1 - \theta}$$

donde $\theta = C_H \gamma < 1$. Puesto que tenemos $n_{k-1} \leq C_H n_k$ tendremos en cada nivel

- $W_{K-1} \leq C_H W_K$
- $W_{K-2} \leq C_H W_{K-1} \leq C_H^2 W_K$
- ...
- $W_k \leq C_H^{K-k} W_K$

El coste de la iteración anidada será

$$\begin{aligned} & iW_1 + iW_2 + \dots + iW_k + \dots + iW_K \\ & \leq i \sum_{k=1}^K C_H^{K-k} W_K < \frac{i}{1 - C_H} W_K \end{aligned}$$

También hemos despreciado el coste de la prolongación $u_k^{(0)} = \Pi_{k-1,k}(\tilde{u}_{k-1})$.

En consecuencia el número de operaciones para realizar la iteración anidada con i iteraciones en cada nivel es a lo sumo $\frac{1}{1 - C_H}$ veces más que i iteraciones simples en el nivel K .

Corolario 6.2 *En el contexto anterior, el número de operaciones para resolver el sistema de ecuaciones utilizando la iteración anidada es proporcional al número de ecuaciones.*

Demostración:

Basta elegir el número de iteraciones i a realizar en cada nivel verificando $C_2 \zeta^i < 1$. ■

6.5. Anexo: Desigualdades de Hölder

Teorema 6.7 (*Desigualdad de Young*)

Para $1 \leq p, q$ con $1/p + 1/q = 1$

$$a, b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad \forall a \geq 0 \forall b \geq 0 \quad (6.55)$$

Demostración:

La función logaritmo es cóncava sobre $]0, \infty[$,

$$\log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \geq \frac{1}{p} \log(a) + \frac{1}{q} \log(b) = \log(ab)$$

de donde como la función logaritmo es también creciente en $]0, \infty[$ se obtiene (6.55) ■

Teorema 6.8 (*Desigualdad de Hölder*)

Sean $u = (u_1, \dots, u_d)^t, v = (v_1, \dots, v_d)^t \in \mathbb{R}^d$ con producto escalar $(u, v) = \sum_i u_i v_i$ y las normas $\|v\|_p = (\sum_i |u_i|^p)^{1/p}$ para todo $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p$. Tenemos para $p, q \geq 1$ y $1/p + 1/q = 1$

$$|(u, v)| \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q \quad (6.56)$$

Demostración:

Aplicando la desigualdad de Young (6.55) a los productos $|u_i| \cdot |v_i|$,

$$|(u, v)| \leq \sum_i |u_i| \cdot |v_i| \leq \frac{1}{p} \sum_i |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_i |v_i|^q = \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|v\|_q^q \quad (6.57)$$

reemplazando u por λu con $\lambda > 0$

$$\lambda |(u, v)| \leq \frac{\lambda^p}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|v\|_q^q$$

dividiendo por λ

$$|(u, v)| \leq \frac{\lambda^{(p-1)}}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{\lambda q} \|v\|_q^q$$

minimizando el término de la derecha en la anterior desigualdad con respecto a λ , el valor mínimo se alcanza para $\lambda = \lambda_{min} = \|u\|_p^{-1} \cdot \|v\|_q^{q/p}$ y sustituyendo este valor se obtiene (6.56). ■

Corolario 6.3 (*Desigualdad de interpolación 1*)

Para $0 \leq \beta \leq \alpha$ se tiene la siguiente desigualdad de interpolación

$$\|v\|_{1-\beta} \leq \|v\|_{1-\alpha}^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \|v\|^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \quad (6.58)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \|v\|_{1-\beta}^2 &= \sum_i v_i^2 \lambda_i^{(1-\beta)} \\ &= \sum_i v_i^{2\frac{\beta}{\alpha}} \lambda_i^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)} v_i^{2(1-\frac{\beta}{\alpha})} \lambda_i^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \end{aligned}$$

llamemos $a_i = v_i^{2\frac{\beta}{\alpha}} \lambda_i^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)}$ y $b_i = v_i^{2(1-\frac{\beta}{\alpha})} \lambda_i^{1-\frac{\beta}{\alpha}}$ y apliquemos la siguiente desigualdad de Hölder (6.56) para p y q con $1/p + 1/q = 1$

$$\sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_i b_i^q \right)^{1/q}$$

resultando

$$\|v\|_{1-\beta}^2 = \left(\sum_i v_i^{2p\frac{\beta}{\alpha}} \lambda_i^{p\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)} \right)^{1/p} \left(\sum_i v_i^{2q(1-\frac{\beta}{\alpha})} \lambda_i^{q(1-\frac{\beta}{\alpha})} \right)^{1/q}$$

eligiendo p y q tales que $1/p = \beta/\alpha$ y $1/q = 1 - \beta/\alpha$ resulta

$$\|v\|_{1-\beta}^2 \leq \left(\sum_i v_i^2 \lambda_i^{1-\alpha} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \left(\sum_i v_i^2 \lambda_i \right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \|v\|_{1-\alpha}^{2\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \|v\|^{2(1-\frac{\beta}{\alpha})}$$

extrayendo la raíz cuadrada en los dos miembros de la desigualdad se obtiene (6.58).

■

Corolario 6.4 (Desigualdad de interpolación 2)

Para $0 < \alpha \leq 1$ se tiene la siguiente desigualdad de interpolación

$$\|v\|_{1+\alpha} \leq \|v\|^{1-\alpha} \cdot \|v\|_2^\alpha \quad (6.59)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \|v\|_{1+\alpha}^2 &= \sum_i v_i^2 \lambda_i^{(1+\alpha)} \\ &= \sum_i v_i^{2(1-\alpha)} \lambda_i^{(1-\alpha)} v_i^{2\alpha} \lambda_i^{2\alpha} \end{aligned}$$

llamemos $a_i = v_i^{2(1-\alpha)} \lambda_i^{(1-\alpha)}$ y $b_i = v_i^{2\alpha} \lambda_i^{2\alpha}$ y apliquemos la siguiente desigualdad de Hölder (6.56) para p y q con $1/p + 1/q = 1$

$$\sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_i b_i^q \right)^{1/q}$$

resultando

$$\|v\|_{1+\alpha}^2 = \left(\sum_i v_i^{2p(1-\alpha)} \lambda_i^{p(1-\alpha)} \right)^{1/p} \left(\sum_i v_i^{2q\alpha} \lambda_i^{2q\alpha} \right)^{1/q}$$

eligiendo p y q tales que $1/p = 1 - \alpha$ y $1/q = \alpha$ resulta

$$\|v\|_{1+\alpha}^2 \leq \left(\sum_i v_i^2 \lambda_i \right)^{1-\alpha} \left(\sum_i v_i^2 \lambda_i^2 \right)^\alpha = \|v\|^{2(1-\alpha)} \|v\|_2^{2\alpha}$$

extrayendo la raíz cuadrada en los dos miembros de la desigualdad se obtiene (6.59)

■

Capítulo 7

Problemas parabólicos

Resumen Este capítulo abordaremos el estudio de problemas evolutivos, es decir, en los que interviene la variable temporal. Nos centraremos en los problemas de tipo parabólico, como la ecuación del calor, y daremos una formulación matemática precisa de los mismos. Nos limitaremos al caso de problemas parabólicos lineales.

7.1. La ecuación del calor

Vamos a utilizar como ejemplo modelo de problema parabólico la ecuación del calor. Pretendemos dar una formulación variacional para los problemas parabólicos lineales análoga a la formulación variacional vista para los problemas elípticos.

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^d , con frontera Γ *suficientemente regular* en el sentido del Teorema de la traza, por ejemplo, de clase C^1 a trozos. Sea $T > 0$, el dominio ahora será:

$$Q_T = \Omega \times (0, T)$$

$$\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$$

Consideremos el siguiente problema:

(PC1) Dadas $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$, hallar $u : (x, t) \in Q_T \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$ solución de,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f && \text{en } Q_T && (\text{ecuación del calor}) \\ u &= 0 && \text{sobre } \Sigma_T && (\text{condición de frontera}) \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{en } \Omega && (\text{condición inicial}) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones representan la evolución en el tiempo de la temperatura u de un medio $\bar{\Omega}$ homogéneo e isotrópico, sometido a una fuente (o sumidero) de calor f tal

que las constantes físicas son igual a 1, la temperatura es nula en la frontera, y la temperatura inicial es u_0 .

Para mantener la precisión matemática, supongamos que la solución u de este problema es suficientemente regular. Multipliquemos la ecuación del calor por una función test $v \in H_0^1(\Omega)$, e integremos en Ω , obteniendo:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx - \int_{\Omega} \Delta u(x,t)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x,t)v(x)dx.$$

Utilizando la fórmula de Green, teniendo en cuenta que $v|_{\Gamma} = 0$, y que,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x,t)v(x)dx$$

tenemos que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, se ha de verificar,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x,t)v(x)dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\Omega} f(x,t)v(x)dx$$

Observemos los distintos papeles que juegan las variables x y t , podemos separarlas del siguiente modo: dada la función

$$u : Q_T = \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathfrak{R} \\ x, t \mapsto u(x, t)$$

introducimos para cada $t \in (0, T)$ la función

$$u(t) : \Omega \rightarrow \mathfrak{R} \\ x \mapsto u(x, t)$$

de modo que esta función se puede identificar con una función $t \mapsto u(t)$ definida sobre $(0, T)$ a valores en un cierto espacio de funciones de Ω en \mathfrak{R} . De la misma forma podemos entender la función f , como una función definida sobre $(0, T)$ a valores en un cierto espacio de funciones de Ω en \mathfrak{R} , otro distinto.

Definamos ahora $\forall \phi, \psi \in L^2(\Omega)$

$$(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi(x)\psi(x)dx$$

y también $\forall \phi, \psi \in H_0^1(\Omega)$

$$a(\phi, \psi) = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)dx$$

de modo que podemos definir una nueva formulación variacional para el problema anterior:

(PC2) Hallar $u : t \in (0, T) \rightarrow u(t) \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) &= (f(t), v) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

donde la derivada $\frac{d}{dt}$ es en el sentido de las distribuciones en $(0, T)$.

Esta nueva formulación de la ecuación del calor queda imprecisa en el sentido de la dependencia con respecto a t de la función $t \mapsto u(t)$. Es conveniente que esta función sea continua en un cierto sentido a fin de que la condición inicial tenga sentido, como veremos en la siguiente sección. La condición de frontera Dirichlet homogénea queda implícita en el hecho de que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$.

7.2. Problemas parabólicos abstractos

Veamos un caso general de problema parabólico lineal que se puede adaptar a múltiples aplicaciones prácticas, mediante una formulación abstracta generalizada:

- Sean dos espacios de Hilbert sobre \mathfrak{K} , V (con su producto escalar (\cdot, \cdot) y norma $|\cdot|$ correspondiente) y H (denotamos $\|\cdot\|$ a su norma), tales que:
 - $V \subset H$ mediante una inyección continua,
 - V es denso en H ,
- y una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ continua sobre $V \times V$

Debemos introducir un espacio de funciones $v : t \mapsto v(t)$ definido sobre $(0, T)$ a valores en V o en H .

De manera general, si X es un espacio de Banach de norma $\|\cdot\|_X$, para todo entero $m \geq 0$, se designa por $C^m(0, T; X)$, para $0 < T < +\infty$, el espacio de funciones m -continuamente diferenciables sobre $(0, T)$ a valores en X , que es un espacio de Banach con la norma

$$\|v\|_{C^m(0, T; X)} = \max_{0 \leq l \leq m} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d^l v}{dt^l}(t) \right\|_X \right)$$

Por otra parte, $\forall p \in \mathfrak{K}$, con $1 \leq p < +\infty$, se designa por $L^p(0, T; X)$ al espacio de funciones $t \mapsto v(t)$ fuertemente medibles sobre $(0, T)$ para la medida dt , es decir, que las funciones escalares $t \mapsto \|v(t)\|_X$ son medibles para la medida dt , y tales que

$$\|v\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < +\infty$$

y con esta norma, el espacio $L^p(0, T; X)$ es un espacio de Banach.

Si X es un espacio de Hilbert de producto escalar $(\cdot, \cdot)_X$, entonces $L^2(0, T; X)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

Observar que si $u : t \mapsto u(t)$ es una función de $L^2(0, T; X)$ y $v \in X$, entonces la función $t \mapsto (u(t), v)_X$, es una función de $L^2(0, T)$.

Con estos espacios así definidos, podemos formular de forma precisa el problema parabólico variacional general:

(PP) Dada $u_0 \in H$ y $f \in L^2(0, T; H)$, hallar $u \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; H)$ tal que $\forall v \in V$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) &= (f(t), v) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

donde la derivada $\frac{d}{dt}$ es el sentido de las distribuciones sobre $(0, T)$.

Observar que si $u \in L^2(0, T; V)$, entonces las funciones $t \mapsto (u(t), v)$ y $t \mapsto a(u(t), v)$ son funciones de $L^2(0, T) \forall v \in V$. Igualmente, si $f \in L^2(0, T; H)$, la función $t \mapsto (f(t), v)$ está en $L^2(0, T) \forall v \in V$. Por tanto, la ecuación de la formulación débil (PP) tiene sentido en el espacio de las distribuciones sobre $(0, T)$, $\mathcal{D}'((0, T))$. Por otra parte, la condición inicial $u(0) = u_0$ tiene sentido por la continuidad de la función u de $(0, T)$ en H , ya que $u \in C^0(0, T; H)$.

En el ejemplo de la ecuación del calor (PC2), tenemos $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ y la aplicación bilineal es

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Se puede identificar $L^2(Q_T) = L^2(\Omega \times (0, T))$ con $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ de modo que si $H = L^2(\Omega)$, la hipótesis $f \in L^2(0, T; H)$ equivale a $f \in L^2(Q_T)$.

Para asegurar que el problema parabólico variacional (PP) tiene solución única debemos imponer que la aplicación bilineal verifique además la hipótesis de tipo coercivo siguiente:

Definición 7.1 Una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ sobre $V \times V$ se dice que verifica la desigualdad de Gårding si existen dos constantes $\alpha > 0$ y $\lambda \in \mathfrak{R}$, tales que

$$a(v, v) + \lambda \|v\|^2 \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V$$

Otras hipótesis no esenciales pero si cómodas para la demostración de la existencia y unicidad de la solución del problema (PP) son, la compacidad de la inyección canónica de V en H , y la simetría de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$. Con estas hipótesis el problema (PP) tiene solución única, los detalles de la demostración se pueden ver en [2].

7.3. Semidiscretización espacial de problemas parabólicos

Sea V_h un subespacio de dimensión finita $I = I(h)$ de V . Consideramos el siguiente problema aproximado:

(PP_h) Dada $u_{0,h} \in V_h$, hallar $u_h : t \in [0, T] \mapsto u_h(t) \in V_h$ solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_h(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) &= (f(t), v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h(0) &= u_{0,h} \end{aligned}$$

Se puede demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema semidiscreto (PP_h) (ver [2]).

En la práctica, introducimos una base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$ del espacio V_h y escribimos u_h de la forma

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^I u_i(t) \varphi_i$$

y de la misma forma,

$$u_{0,h} = \sum_{i=1}^I u_{0,i} \varphi_i$$

de modo que el problema semidiscreto (PP_h) se escribe

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I (\varphi_i, \varphi_j) \frac{du_i(t)}{dt} + \sum_{i=1}^I a(\varphi_i, \varphi_j) u_i(t) &= (f(t), \varphi_j) \quad j = 1, \dots, I \\ u_j(0) &= u_{0,j} \quad j = 1, \dots, I \end{aligned}$$

Denotando la matriz de rigidez $R = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{1 \leq i, j \leq I}$, y la matriz de masa $M = ((\varphi_i, \varphi_j))_{1 \leq i, j \leq I}$, el problema semidiscreto (PP_h) en forma matricial se escribe

$$\begin{aligned} M \frac{dU(t)}{dt} + RU(t) &= F(t) \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

donde $U(t) = (u_1(t), \dots, u_I(t))^t$, $F(t) = ((f(t), \varphi_1), \dots, (f(t), \varphi_I))^t$ y el vector inicial $U_0 = (u_{0,1}, \dots, u_{0,I})^t$.

Queda por resolver numéricamente este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. La matriz M es simétrica, definido positiva y en general bien condicionada, de modo que podemos escribir este sistema de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} + M^{-1}RU(t) &= M^{-1}F(t) \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

que tiene solución única para $t \geq 0$

$$U(t) = e^{-tM^{-1}R}U_0 + e^{-tM^{-1}R} \int_0^t e^{sM^{-1}R}M^{-1}F(s)ds$$

7.4. Discretización total de problemas parabólicos

Dividimos el intervalo $[0, T]$ en subintervalos de longitud Δt , esto es, tomamos una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ donde $t_n = n\Delta t$ para $n = 0, \dots, N$ donde $N = T/\Delta t$. Denotamos $U^n = U(t_n) = (u_1(t_n), \dots, u_I(t_n))^t = (U_1^n, \dots, U_I^n)^t$

Aproximamos la ecuación diferencial por un esquema en diferencias finitas sencillo, concretamente el θ -método, para $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}M(U^{n+1} - U^n) + RU^{n+\theta} &= F^{n+\theta}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ U^0 &= U_0 \end{aligned}$$

donde $U^{n+\theta} = \theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n$ y $F^{n+\theta} = \theta F(t_{n+1}) + (1-\theta)F(t_n)$.

Esto equivale a buscar $\{u_h^n \in V_h\}_{0 \leq n \leq N}$ solución $\forall v_h \in V_h$ de

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + a(u_h^{n+\theta}, v_h) &= (f(t_{n+\theta}), v_h), \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ u_h^0 &= u_{0,h} \end{aligned}$$

donde $u_h^{n+\theta} = \theta u_h^{n+1} + (1-\theta)u_h^n$ y $f(t_{n+\theta}) = \theta f(t_{n+1}) + (1-\theta)f(t_n)$.

Las elecciones más frecuentes del parámetro θ son:

- $\theta = 0$, método de Euler explícito o progresivo, de orden 1, condicionalmente estable.
- $\theta = 1/2$, método de Crank-Nicholson, de orden 2, incondicionalmente estable.
- $\theta = 1$, método de Euler implícito o regresivo, de orden 1, incondicionalmente estable.

La condición de estabilidad para el esquema de Euler explícito viene dada por $\Delta t \leq 2/\lambda_j, \forall j = 1, \dots, I$ donde λ_j son los valores propios de $M^{-1}R$. Estos valores propios dependen la discretización espacial mediante elementos finitos, por lo tanto se establece una condición de estabilidad que relaciona el paso de tiempo Δt con h tamaño de la malla de elementos finitos.

Capítulo 8

Problemas hiperbólicos

Resumen Este capítulo abordaremos el estudio de problemas evolutivos de segundo orden en tiempo, cuyo prototipo es la ecuación de ondas. Daremos una formulación matemática precisa de los mismos sin profundizar en el estudio de la existencia y unicidad de la solución y analizaremos el método de Newmark para la discretización temporal.

8.1. La ecuación de ondas

Vamos a utilizar como ejemplo modelo de problema hiperbólico la ecuación de ondas.

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^d , con frontera Γ *suficientemente regular* en el sentido del Teorema de la traza, por ejemplo, de clase C^1 a trozos. Sea $T > 0$, el dominio ahora será:

$$Q_T = \Omega \times (0, T)$$
$$\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$$

Consideremos el siguiente problema:

(PH1) Dadas $u_0, u_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$, hallar $u : (x, t) \in Q_T \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$ solución de,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= f && \text{en } Q_T && \text{(ecuación de ondas)} \\ u &= 0 && \text{sobre } \Sigma_T && \text{(condición de frontera)} \\ u(\cdot, t) &= u_0 && \text{en } \Omega && \text{(condición inicial)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) &= u_1 && \text{en } \Omega && \text{(condición inicial)} \end{aligned}$$

Cuando $f = 0$, estas ecuaciones describen por ejemplo la propagación en el tiempo de pequeñas perturbaciones u de presión del medio en el que se propaga la onda; también puede ser el desplazamiento, respecto a sus posiciones de equilibrio, de las partículas del gas, líquido o sólido al propagarse la onda. Las condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas implican que las perturbaciones o desplazamientos en la frontera son nulos. La condición inicial u_0 es la perturbación o desplazamiento inicial, y u_1 es la velocidad inicial conocidas.

Para encontrar una formulación matemática precisa de este problema, procederemos como en el capítulo anterior. Supongamos que la solución u es suficientemente regular, multipliquemos la ecuación de ondas por una función test $v \in H_0^1(\Omega)$, e integremos en Ω , obteniendo:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) v(x) dx - \int_{\Omega} \Delta u(x, t) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx.$$

Utilizando la fórmula de Green, teniendo en cuenta que $v|_{\Gamma} = 0$, y que,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(x, t) v(x) dx = \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx$$

tenemos que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, se ha de verificar,

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx$$

Separando las variables x y t , es decir, introduciendo para cada $t \in (0, T)$ la función

$$\begin{aligned} u(t) : \Omega &\rightarrow \mathfrak{R} \\ x &\mapsto u(x, t) \end{aligned}$$

y denotando $\forall \phi, \psi \in L^2(\Omega)$

$$(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi(x) \psi(x) dx$$

y también $\forall \phi, \psi \in H_0^1(\Omega)$

$$a(\phi, \psi) = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) dx$$

podemos definir una nueva formulación variacional para el problema anterior:

(PH2) Hallar $u : t \in (0, T) \rightarrow u(t) \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (u(t), v) + a(u(t), v) &= (f(t), v) \\ u(0) &= u_0 \\ \frac{du}{dt}(0) &= u_1 \end{aligned}$$

donde la derivada $\frac{d^2}{dt^2}$ es en el sentido de las distribuciones en $(0, T)$.

En este caso, lo razonable será exigir que $u \in C^0(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$ para que tengan sentido las condiciones iniciales.

8.2. Semidiscretización espacial de problemas hiperbólicos

Sea V_h un subespacio de dimensión finita $I = I(h)$ de V . Consideramos el siguiente problema aproximado:

(PH_h) Dada $u_{0,h}$ y $u_{1,h} \in V_h$, hallar $u_h : t \in [0, T] \mapsto u_h(t) \in V_h$ solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(u_h(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) &= (f(t), v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h(0) &= u_{0,h} \\ \frac{du_h}{dt}(0) &= u_{1,h} \end{aligned}$$

En la práctica, introducimos una base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$ del espacio V_h y escribimos u_h de la forma

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^I u_i(t) \varphi_i$$

y de la misma forma,

$$u_{0,h} = \sum_{i=1}^I u_{0,i} \varphi_i$$

$$u_{1,h} = \sum_{i=1}^I u_{1,i} \varphi_i$$

de modo que el problema semidiscreto (PH_h) se escribe

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I (\varphi_i, \varphi_j) \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + \sum_{i=1}^I a(\varphi_i, \varphi_j) u_i(t) &= (f(t), \varphi_j) \quad j = 1, \dots, I \\ u_j(0) &= u_{0,j} \quad j = 1, \dots, I \\ \frac{du_j}{dt}(0) &= u_{1,j} \quad j = 1, \dots, I \end{aligned}$$

Denotando la matriz de rigidez $R = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{1 \leq i, j \leq I}$, y la matriz de masa $M = ((\varphi_i, \varphi_j))_{1 \leq i, j \leq I}$, el problema semidiscreto (PH_h) en forma matricial se escribe

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + RU(t) &= F(t) \\ U(0) &= U_0 \\ \frac{dU}{dt}(0) &= U_1 \end{aligned}$$

donde $U(t) = (u_1(t), \dots, u_I(t))^t$, $F(t) = ((f(t), \varphi_1), \dots, (f(t), \varphi_I))^t$ y los vectores iniciales $U_0 = (u_{0,1}, \dots, u_{0,I})^t$, $U_1 = (u_{1,1}, \dots, u_{1,I})^t$.

Queda por resolver numéricamente este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

8.3. Discretización total de problemas hiperbólicos. Método de Newmark.

Para resolver numéricamente este problema, dividimos el intervalo $[0, T]$ en subintervalos de longitud Δt , esto es, tomamos una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ donde $t_n = n\Delta t$ para $n = 0, \dots, N$ donde $N = T/\Delta t$.

Utilizando la notación del problema (PH_h) , conocida la solución en los instantes n y $n+1$, podemos aproximar la solución en el instante $n+2$ mediante un esquema en diferencias finitas centrado:

$$\left(\frac{u_h^{n+2} - 2u_h^{n+1} + u_h^n}{\Delta t^2}, v_h \right) + a(u_h^{n+1}, v_h) = (f^{n+1}, v_h)$$

donde partimos de $u_h^0 = u_{0,h}$, y aproximamos $u_h^1 = u_h^0 + \Delta t u_{1,h}$. Pero este esquema aunque es de orden 2 en t es condicionalmente estable. Sin embargo el siguiente método, llamado de Newmark, para ciertos valores de los parámetros es incondicionalmente estable:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{u_h^{n+2} - 2u_h^{n+1} + u_h^n}{\Delta t^2}, v_h \right) + \\ &+ \beta a(u_h^{n+2}, v_h) + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) a(u_h^{n+1}, v_h) + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma \right) a(u_h^n, v_h) = \\ &= \beta (f^{n+2}, v_h) + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) (f^{n+1}, v_h) + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma \right) (f^n, v_h) \end{aligned}$$

Para $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = 0$ es el método anterior, que es condicionalmente estable. Para $\gamma = \frac{1}{2}$ es un método de orden 2 en t , y para $\gamma \neq \frac{1}{2}$ es un método de orden 1 en t . Para que el método sea incondicionalmente estable necesitamos $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta \geq \frac{1}{4}$. En teoría, la mejor elección es $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$, pero a veces aparecen oscilaciones espúreas y en la práctica se toma β algo mayor.

Referencias

1. Ferragut, L. Asensio, M.I.: Métodos Numéricos para Ecuaciones en Derivadas Parciales. DMAA. Monografías del Departamento de Matemática Aplicada. Repositorio institucional de la Universidad de Salamanca, GREDOS. <https://gredos.usal.es/handle/10366/136968>
2. Raviart, P.A., Thomas, J.M.: Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L. (eds.) Collection Mathématiques appliquées pur la maîtrise, Masson, Paris (1983)
3. Ciarlet, P.G.: The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, New York (1978)
4. Courant, R.: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc. **49-1**, 1–23 (1943)
5. Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., Topp, L.J.: Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journal of Aeronautical Sciences **23-9**, 805–823 (1953)
6. Zienkiewicz, O., Taylor, R.L.: The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Elsevier, Oxford (1967)
7. Strang, G., Fix, G.J.: An Analysis of the Finite Element Method. Wellesley Cambridge Pr (1973)
8. Duvaut, G., Lions, J.L.: Les inequations en mecanique et en physique. Dunod, País (1972)
9. Quarteroni, A.: Numerical Models for Differential Problems. Springer-Verlag, Milan (2012)
10. R.E.Bank, C.C. Douglas, *Sharp estimates for multigrid rates of convergence with general smoothing and acceleration*, Siam J. Numer. Anal., No. 4, 617-633 (1985).
11. S.F. McCormick, *Multigrid methods for variational problems: General theory for the V-cycle*, Siam J. Numer. Anal., No. 4, 634-643 (1985).
12. C.C. Douglas, *Multigrid algorithms with applications to elliptic boundary value problems*, Siam J. Numer. Anal., No. 2, 236-254 (1984).
13. S.F. McCormick, *Multigrid methods for variational problems: Further results*, Siam J. Numer. Anal., No. 2, 255-271 (1984).
14. D. Braess, W. Hackbush, *A new convergence proof for the multigrid method including the V-cycle*, Siam J. Numer. Anal., No. 5, 967-975 (1983).
15. S.F. McCormick, J.W. Ruge, *Multigrid methods for variational problems*, SIAM J. Numer. Anal., No. 5, 924-929 (1982).

