

Universidad de Salamanca

Facultad de ciencias

Grado en Matemáticas

---

# Conjuntos de dimensión fraccionaria

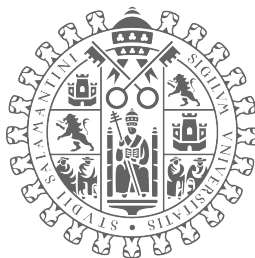
---

Trabajo de fin de grado realizado por:

David González González

Tutor: Luis Manuel Navas Vicente  
(Departamento de Matemáticas)

Salamanca, 1 de julio de 2021



**VNiVERSIDAD  
D SALAMANCA**

---

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

---

# Conjuntos de dimensión fraccionaria

---

A handwritten signature in black ink, reading "David", enclosed within a faint, light-colored rectangular border.

David González González

Luis Manuel Navas Vicente

Salamanca, 1 de julio de 2021

# Índice general

<b>1. Dimensión de los conjuntos fractales</b>	<b>1</b>
1.1. Medida de Hausdorff . . . . .	1
1.2. Dimensión de Hausdorff . . . . .	8
1.3. Dimensión de fractales . . . . .	11
1.4. Dimensión por recuento de cajas . . . . .	12
1.5. Medida de Hausdorff y medida de Lebesgue . . . . .	14
<b>2. Sistemas de funciones iteradas</b>	<b>17</b>
2.1. Nociones previas . . . . .	17
2.2. Distancia de Hausdorff en conjuntos compactos . . . . .	18
2.3. Existencia y unicidad de conjuntos fractales para SFI . . . . .	23
2.4. Fractales autosemejantes . . . . .	25
2.5. Dimensión de fractales generados por SFI . . . . .	28
2.6. Aproximación de imágenes mediante fractales . . . . .	30
2.6.1. Aproximación de imágenes en movimiento . . . . .	31
<b>3. Series fractales</b>	<b>34</b>
3.1. Construcción y propiedades de series fractales . . . . .	36
3.2. Dimensión de series fractales . . . . .	39
<b>4. Conjuntos de Julia y Mandelbrot</b>	<b>44</b>
4.1. Sistemas dinámicos complejos y conjuntos de Julia . . . . .	45
4.2. El conjunto de Mandelbrot . . . . .	46
4.3. Método de Newton . . . . .	48
<b>5. Teoría de Besicovitch</b>	<b>50</b>
5.1. Definiciones previas . . . . .	50
5.2. Aplicación de la teoría de Besicovitch . . . . .	52
<b>A. Ejemplos de fractales</b>	<b>54</b>

# Introducción

En este texto se hablará sobre los diferentes tipos de fractales y sus propiedades más básicas. Lo cuál nos hace plantearnos una pregunta bastante importante. ¿Qué es un fractal?

Un fractal es un objeto matemático, que no tiene una definición unánime. Diferentes autores tienen sendas visiones acerca de lo que caracteriza a los fractales. Quizás algunas de las más utilizadas sea llamar a los fractales «objetos de dimensión fraccionaria» u objetos geométricos que son el resultado de la iteración infinita de un proceso geométrico.

Para explicar mejor esto, pondremos como ejemplo uno de los fractales más famosos, el conjunto de Cantor. El conjunto de Cantor comienza con un segmento, este segmento se divide en tercios conexos de igual longitud, y se elimina el del medio. Con ambos segmentos restantes repetimos el proceso, y así recursivamente tenemos el conjunto de Cantor.



Figura 1: Construcción del conjunto de Cantor obtenida de [6]

Los fractales crean un puente entre la geometría clásica y el análisis moderno, utilizando de este último, la iteración infinita (es decir, la idea de paso al límite), pero aplicados sobre objetos de forma más geométrica, es decir, añadimos una sensación de infinitud a la geometría clásica.

Todo esta rama de las matemáticas salió a principios del siglo XX. En estos años surgió la necesidad de estudiar subconjuntos de la recta que pese a tener medida de Lebesgue nula, eran conjuntos con grandes propiedades geométricas, analíticas y aritméticas sin igual.

Al principio, fueron dejados de lado, pero con el paso de estudios acerca de ellos, se vio no solo la belleza que poseen, sino también la similitud con procesos reales de la naturaleza estudiados en otros campos como son la biología o la física.

Un ejemplo de esto es el experimento que realizó el botánico Robert Brown en 1827. Él se fijó, que al poner partículas de polen en un medio acuático, estas realizaban una compleja danza. Años más tarde, este movimiento dio paso a muchos otros trabajos, e incluso a una estimación bastante acertada del movimiento en sí, por Wiener, al que se llamó el modelo de Wiener.



Figura 2: Representación del modelo de Wiener obtenida de [6].

En 1919, Hausdorff construyó unas herramientas fundamentales para medir los fractales, mediante la base de lo que hoy en día conocemos como la *medida de Hausdorff* y la *dimensión de Hausdorff*, que explicaremos a continuación más en detalle.

Asimismo, durante los años 20, Besicovitch comenzó a experimentar con los conjuntos de dimensión de Hausdorff unitaria, que llevaron a la creación de la rama de la *teoría geométrica de la medida* que, con el paso de los años, pese a ser todavía una teoría joven, fue extendiéndose al estudio de los fractales.

También cabe destacar que durante los años 70, Mandelbrot fue un matemático que inició un poco la parte más real de los fractales, pues fue quien propuso ideas para aplicaciones fractales en los diversos campos de la ciencia, alguno de los cuales, ya hemos mencionado.

Los fractales se utilizan en muchos campos de la ciencia como aproximaciones de objetos reales; realmente no existen fractales en la vida real, de la misma forma que no existen esferas ni rectas; sin embargo, podemos siempre aproximar ciertos datos para que se puedan analizar de manera matemática, con el menor error posible.

Quizás uno de los ejemplos más famosos es la paradoja de la costa. Dada una isla cualquiera, por ejemplo Gran Bretaña, si intentamos medir el perímetro de la isla, es decir la costa, entonces encontramos un problema. Como es normal, no podemos empezar a medir una zona cualquiera grano de arena a grano de arena, porque haría que la longitud tendiese a infinito y además las mareas hacen que la costa siempre esté cambiando.

Por lo tanto, hemos de considerar una forma de medir diferente, y esto nos hace ir a la medida de Hausdorff, uno de los temas del trabajo. La medida de Hausdorff se usa

para medir objetos irregulares como son los fractales, y usando la medida de Hausdorff, podemos ver qué medida es la más correcta para una costa.



Figura 3: Gran Bretaña medida con segmentos de 50 km. Imagen obtenida de [https://en.wikipedia.org/wiki/Coastline\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/Coastline_paradox)

Una vez dicho esto, podemos comenzar con el tema del trabajo en cuestión, que se centrará en el estudio de diferentes fractales y sus características, en particular, daremos una forma de medirlos, varias formas de dar su dimensión, clases de fractales particulares y avanzaremos brevemente en la teoría de Besicovitch de la que hablábamos anteriormente.

# Capítulo 1

## Dimensión de los conjuntos fractales

Como ya dijimos, no existe un convenio universal a la hora de definir lo que es un fractal, y esto es en parte debido a que son conjuntos de lo más dispares respecto de la geometría clásica; las formas que poseen hacen imposible clasificarlos de manera correcta, pues como por ejemplo sucede con el conjunto de Cantor, no hay una forma de construirlo con las herramientas de la geometría clásica, pues se trata de un proceso infinito.

Por esto mismo estamos obligados a escapar de las maneras convencionales de medir y dimensionar el espacio, y comenzar a usar una medida más adecuada, que nos ayuda con los conjuntos fractales: la medida de Hausdorff.

### 1.1. Medida de Hausdorff

Antes de empezar es bueno que recordemos algunos conceptos básicos de la teoría de la medida. Una *sigma-álgebra* sobre  $X$  es una colección no vacía de subconjuntos de  $X$ , llamados *medibles*, que es cerrada bajo complementos y uniones numerables. Una *medida* en  $X$  es una función  $\mu$  definida sobre alguna sigma-álgebra de  $X$  (e imagen en  $[0, +\infty]$ ) tal que  $\mu(\emptyset) = 0$  y que es *numerablemente aditiva*:  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  si  $A_n$  es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos.

Una *medida exterior* sobre un espacio  $X$  es una función  $\mu^*$  sobre todos los subconjuntos de  $X$  tal que  $\mu^*(\emptyset) = 0$  que es *monótona*:  $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ , y *numerablemente subaditiva*:  $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ . Dada una medida exterior, los subconjuntos  $E \subseteq X$  tales que  $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$  para cualquier  $A \subseteq X$  forman una sigma-álgebra cuyos elementos se llaman  $\mu^*$ -medibles, y la restricción  $\mu$  de  $\mu^*$  a esta sigma-álgebra es una medida.

Existe un procedimiento muy general para construir medidas exteriores: sea  $\mathcal{G}$  una colección no vacía de subconjuntos de  $X$  tal que  $\emptyset \in \mathcal{G}$  y existe una sucesión  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}$  tal que  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ .<sup>1</sup> Sea  $\mathbf{v} : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty]$  una función cualquiera tal que  $\mathbf{v}(\emptyset) = 0$ . Entonces

---

<sup>1</sup>Esta condición se puede obtener fácilmente si  $X \in \mathcal{G}$ .

la función  $\mu^* : \wp(X) \rightarrow [0, +\infty]$  definida por

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}(G_n) : \{G_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right\}.$$

es una medida exterior que satisface  $\mu^*(G) \leq \mathbf{v}(G)$  para  $G \in \mathcal{G}$ .<sup>2</sup>

Con este inciso podemos comenzar con la medida de Hausdorff, primero tenemos que dar un proceso de medida, y este nos plantea ciertos problemas, ¿con qué objetos recubrimos el conjunto que queremos medir? y ¿qué valor le damos a dicho recubrimiento?

Por ejemplo, si intentamos medir un segmento a base de cuadrados, se puede recubrir con cuadrados cuya suma de áreas es arbitrariamente pequeña, dándonos que la medida del segmento es nula. Análogamente, si medimos un cubo sólido en  $\mathbb{R}^3$  con cuadrados, nos da que no podemos contenerlo con un número finito ni numerable, por lo tanto siempre tendrá medida igual a  $\infty$ .

Esto es similar a las definiciones que aparecen al comienzo de los *Elementos* de Euclides. «Un punto es lo que no tiene partes.», esto se debe a que medir puntos solo podemos hacerlo con los mismos puntos, «Una línea es una longitud sin anchura.», pues como ya vimos, no obtenemos un buen resultado medirlo con objetos bidimensionales, «Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura.», análogo al caso anterior nos da medida nula al medir objetos bidimensionales con objetos tridimensionales.

Ambos casos anteriores no nos ayudan a diferenciar los objetos con el área, pues tanto puntos con curvas que tienen dimensiones 0 y 1 respectivamente, en la medida utilizada son de medida nula, y los objetos de dimensión mayor que 2 tienen medida infinita, por lo tanto necesitamos una herramienta más precisa para hablar de objetos ya de sí complejos, como son los fractales. Para construirla, definiremos unos conceptos básicos, basándonos en la construcción de una medida exterior:

**Definición 1.1.1.** Dado un espacio métrico  $(X, \rho)$  definimos el diámetro de un subconjunto  $A \subset X$  no vacío como:

$$\text{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) \text{ tales que } x, y \in A\}.$$

**Definición 1.1.2.** Dado un subconjunto  $E \subset X$  y un número real positivo  $\delta$ , diremos que una familia numerable  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos no vacíos de  $X$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $E$  si cumple que:

1.  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .
2.  $\text{diam}(A_i) \leq \delta$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

---

<sup>2</sup>La igualdad se alcanza si por ejemplo  $\mathcal{G}$  es un álgebra de conjuntos y  $\mathbf{v}$  es subaditiva numerable y aditiva finita sobre  $\mathcal{G}$ ; entonces los conjuntos de  $\mathcal{G}$  son  $\mu^*$ -medibles y  $\mu^* = \mathbf{v}$  sobre  $\mathcal{G}$ . No diremos más sobre los detalles técnicos relacionados con estos conceptos, que por otra parte se estudian en algunas asignaturas del Grado.

**Definición 1.1.3.** Dado un conjunto  $E \subset X$ , un número real positivo  $s$ , y la función:

$$\mathbf{v}(E) = \begin{cases} \text{diam}(E)^s & \text{si } E \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } E = \emptyset. \end{cases}$$

con esto, fijando  $\delta > 0$ , definimos el  $s$ -tamaño de  $E$  respecto de  $\delta$  como:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{v}(A_i) \text{ tal que } \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } E \right\}.$$

**Observación 1.1.1.** Por esta definición,  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$  es una medida exterior en  $X$ .

Con estas definiciones podemos medir un conjunto cualquiera  $E$ , pero con un ligero error, pues ignoramos irregularidades de tamaño menor que  $\delta$ . Sin embargo, si hacemos  $\delta$  tender a 0, la medida será más precisa, luego tiene sentido definir:

**Definición 1.1.4.** Llamaremos medida  $s$ -dimensional exterior de Hausdorff a

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E),$$

que puede ser un valor finito, o infinito.

Comprobemos que efectivamente dicho límite existe. Para ello usaremos la siguiente definición:

**Definición 1.1.5.** Dado  $(X, \rho)$  un espacio métrico y  $\delta > 0$  consideraremos la colección de subconjuntos  $\mathcal{X}_\delta$  definida de la siguiente manera:

$$\mathcal{X}_\delta = \{A \subseteq X \text{ tales que } \text{diam}(A) \leq \delta\}.$$

**Observación 1.1.2.** Obsérvese que esta definición nos dice que todo  $\delta$ -recubrimiento de un subconjunto de  $X$  está contenido en  $\mathcal{X}_\delta$ .

**Teorema 1.1.1.** El límite  $\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$  existe como elemento de  $[0, \infty]$ .

*Demostración.* Tenemos que si  $0 < \delta < \delta'$  entonces  $\mathcal{X}_\delta \subset \mathcal{X}_{\delta'}$ , porque si  $\text{diam}(A) \leq \delta$  entonces  $\text{diam}(A) < \delta'$ . Por lo tanto, como todo  $\delta$ -recubrimiento es un  $\delta'$ -recubrimiento, tenemos que  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \mathcal{H}_{\delta'}^s(A)$  para todo  $s > 0$  y todo  $A \subset X$ , luego nos queda que:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta \rightarrow 0} \{\mathcal{H}_\delta^s(A)\},$$

para todo  $A \subset X$ , por lo tanto el límite existe. □

**Teorema 1.1.2.** La medida  $\mathcal{H}^s$  es una medida exterior en  $X$ .

*Demostración.* Demostrémoslo por partes:

1.  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$  porque  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$  para todo  $\delta > 0$ .

2. Como  $\mathcal{H}_\delta^s$  es una medida exterior, se tiene que si  $A \subseteq B$  entonces  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}_\delta^s(B)$ , por lo tanto

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(B) = \mathcal{H}^s(B).$$

3. Finalmente si  $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  entonces:

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k).$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k).$$

□

Con estas bases teóricas podemos ahora ver algunas propiedades que tienen las medidas de Hausdorff, que nos ayudarán más adelante con las dimensiones fractales.

**Definición 1.1.6.** Una medida exterior métrica es una medida exterior  $\mu^*$  sobre un espacio métrico  $(X, \rho)$  tal que

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad \text{cuando} \quad \rho(A, B) > 0.$$

Es decir, es aditiva sobre parejas de subconjuntos separados por una distancia positiva.

**Lema 1.1.1.** (Lema de Caratheodory) Sea  $\mu^*$  una medida exterior métrica sobre el espacio métrico  $(X, \rho)$  y sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión no decreciente tal que si  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , se tiene  $\rho(A_n, A - A_{n-1}) > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\mu^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n).$$

*Demostración.* El límite existe como elemento de  $[0, \infty]$  por monotonía. Entonces como  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $\mu^*(A) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$ , de forma que será una igualdad si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) = \infty$ . Supongamos por tanto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) < \infty$  y tomemos  $B_1 = A_1$  y  $B_n = A_n - A_{n-1}$  para todo  $n > 1$ . Entonces si  $m \geq n + 2$  ocurre que  $B_n \subset A_n$  y  $B_m \subset A - A_{m-1} \subset A - A_{n+1}$  y por lo tanto,  $\rho(B_m, B_n) > 0$ . Luego por inducción obtenemos 2 resultados:

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n B_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(B_{2k-1}),$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n B_{2k}\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(B_{2k}).$$

y como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) < \infty$  y  $\bigcup_{k=1}^n B_k = A_n$ , ambas sumas convergen cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

que implica que

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu^*\left(A_n \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) \leq \\ &\mu^*(A_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(B_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(B_k),\end{aligned}$$

de donde resulta que  $\mu^*(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$ .  $\square$

**Teorema 1.1.3.** *Si  $\mu^*$  es una medida exterior métrica de un espacio métrico  $(X, \rho)$  entonces todo conjunto boreliano es  $\mu^*$ -medible.*

*Demostración.* Puesto que la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos de Borel es la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos cerrados, es suficiente probar que  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A - C)$  para todo subconjunto  $A \subset X$  y todo conjunto cerrado  $C \subset X$ .

Sea  $A_n = \left\{x \in A \text{ tales que } \rho(x, C) \geq \frac{1}{n}\right\}$ , entonces  $\rho(A_n, A \cap C) \geq \frac{1}{n}$ , y por tanto:

$$\mu^*(A_n) + \mu^*(A \cap C) = \mu^*(A_n \cup (A \cap C)) \leq \mu^*(A),$$

además  $A - C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  por ser  $C$  cerrado. Luego usando el lema anterior, vamos a probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A - C)$ .

Si  $x \in A - C \cap A_{n+1}$  entonces existe  $z \in C$  con  $\rho(x, z) < \frac{1}{n+1}$ , por lo tanto dado  $y \in A_n$  entonces por la desigualdad triangular tenemos que:

$$\rho(x, y) \geq \rho(y, z) - \rho(x, z) > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

y por lo tanto:

$$\rho(A - (C \cap A_{n+1}), A_n) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Luego tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A - C)$  y usando lo visto anteriormente,

$$\mu^*(A_n) + \mu^*(A \cap C) \leq \mu^*(A - C) + \mu^*(A \cap C) \leq \mu^*(A),$$

que con la otra desigualdad, que vimos antes, hemos acabado.  $\square$

**Proposición 1.1.1.** *La  $\sigma$ -álgebra de conjuntos  $\mathcal{H}^s$ -medibles contiene a la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $(X, \rho)$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 1.1.3 basta con ver que  $\mathcal{H}^s$  es una medida exterior métrica, es decir que se cumple la siguiente condición:

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \text{ si } \rho(A, B) > 0.$$

Para ver esto, consideremos un  $\delta > 0$  tal que  $\rho(A, B) > \delta$  y consideremos un  $\delta$ -recubrimiento  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $A \cup B$ . Cada uno de los  $E_k$  no puede contener a elementos de  $A$  y de  $B$  simultáneamente, porque si fuera así entonces existiría un  $a \in A$  y un  $b \in B$  tales que  $a, b \in E_k$  y por lo tanto  $\rho(A, B) \leq \rho(a, b) \leq \delta$  lo cual sería una contradicción.

Luego podemos obtener dos subrecubrimientos del original,  $\{E_{k_A}\}$  que los componen todos los  $E_k$  tales que  $E_k \cap B = \emptyset$  y  $\{E_{k_B}\}$  que los componen todos los  $E_k$  tales que  $E_k \cap A = \emptyset$ . Por lo tanto, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_k)^s \geq \sum_{E_k \in \{E_{k_A}\}} \text{diam}(E_k)^s + \sum_{E_k \in \{E_{k_B}\}} \text{diam}(E_k)^s \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B).$$

Tomando ínfimos sobre tales recubrimientos entonces tenemos que  $\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B)$ , por lo que tomando supremos respecto de  $\delta$  nos da que  $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ .

La desigualdad contraria  $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ , viene como consecuencia de la subaditividad.  $\square$

**Proposición 1.1.2.** *La medida  $\mathcal{H}^s$  cumple las siguientes propiedades geométricas:*

1. **Invariancia por isometrías.** *Dados dos espacios métricos  $(X, \rho)$  y  $(X', \rho')$  con  $\varphi : (X, \rho) \rightarrow (X', \rho')$  una isometría, entonces  $\mathcal{H}^s(\varphi(A)) = \mathcal{H}^s(A)$  para todo  $A \subset X$ .*
2. **Cambio de escala.** *Dado un espacio real normado  $(X, \|\cdot\|)$  y  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$  entonces  $\mathcal{H}^s(\lambda A) = |\lambda|^s \mathcal{H}^s(A)$ .*

*Demostración.*

1. Si  $\varphi$  es una isometría, entonces conserva los diámetros y por lo tanto  $\mathcal{X}'_\delta = \varphi(\mathcal{X}_\delta)$ , luego si  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $A$  entonces  $\{\varphi(E_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $\varphi(A)$ , y por lo tanto:

$$\mathcal{H}_\delta^s(\varphi(A)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{diam}(\varphi(E_n))^s = \sum_{n=1}^{\infty} \text{diam}(E_n)^s.$$

Tomando ínfimos nos da la desigualdad  $\mathcal{H}_\delta^s(\varphi(A)) \leq \mathcal{H}_\delta^s(A)$ , que tomando supremos respecto de  $\delta$  nos queda  $\mathcal{H}^s(\varphi(A)) \leq \mathcal{H}^s(A)$ .

La desigualdad contraria se obtiene de la misma forma, solo que considerando el subconjunto  $\varphi(A) \subset X'$  y su antiimagen por  $\varphi$ .

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(\varphi^{-1}(\varphi(A))) \leq \mathcal{H}^s(\varphi(A)).$$

2. Como  $\|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\|$ , entonces  $\text{diam}(\lambda A) = |\lambda| \text{diam}(A)$ .

Por lo tanto,  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $A$  si y solo si  $\{\lambda E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un  $\lambda\delta$ -

recubrimiento de  $\lambda A$ , y por lo tanto:

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{diam}(\lambda E_n)^s = |\lambda|^s \sum_{n=1}^{\infty} \text{diam}(E_n)^s.$$

Que tomando el ínfimo sobre los  $\delta$ -recubrimientos  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  queda que

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda A) \leq |\lambda|^s \mathcal{H}_{\delta}^s(A),$$

y haciendo  $\delta \rightarrow 0$  nos da que

$$\mathcal{H}^s(\lambda A) \leq |\lambda|^s \mathcal{H}^s(A).$$

Análogamente al caso anterior, la desigualdad contraria se obtiene cambiando  $\lambda$  por  $\lambda^{-1}$  y  $A$  por  $\lambda A$  lo que nos da

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(\lambda^{-1}\lambda A) \leq |\lambda|^{-s} \mathcal{H}^s(\lambda A).$$

Que multiplicando en ambos lados por  $|\lambda|^s$  nos da el resultado que queremos

$$|\lambda|^s \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(\lambda A).$$

□

Un caso particular de esta demostración es el siguiente corolario.

**Corolario 1.1.1.** *En un espacio normado de dimensión finita, por ejemplo  $(\mathbb{R}^n, d_U)$ , la medida de Hausdorff es invariante por traslaciones y transformaciones ortogonales.*

*Demostración.* No hace falta demostrar nada, pues como sabemos las traslaciones y transformaciones ortogonales son ambas isometrías. □

**Proposición 1.1.3.** *Si  $0 < p \leq q$  entonces para todo  $A \subset X$  y todo  $\delta > 0$  se tiene que*

$$\mathcal{H}_{\delta}^q(A) \leq \delta^{q-p} \mathcal{H}_{\delta}^p(A).$$

*En particular  $\mathcal{H}^p(A)$  es decreciente respecto de  $p$ , ya que si  $\delta \leq 1$  entonces  $\delta^{q-p} \leq 1$ .*

*Demostración.* Sea  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $A$  entonces sabemos que

$$\frac{\text{diam}(A)}{\delta} \leq 1.$$

Por lo tanto si  $0 < p \leq q$  entonces  $\left(\frac{\text{diam}(E_n)}{\delta}\right)^q \leq \left(\frac{\text{diam}(E_n)}{\delta}\right)^p$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Luego  $(\text{diam}(E_n))^q \leq \delta^{q-p}(\text{diam}(E_n))^p$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que tomando ínfimos por la parte izquierda, nos da que  $\mathcal{H}_{\delta}^q(E_n) \leq \delta^{q-p}(\text{diam}(E_n))^p$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Finalmente, tomando ínfimos obtenemos  $\mathcal{H}_\delta^q(E_n) \leq \delta^{q-p}\mathcal{H}_\delta^p(E_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 1.2. Dimensión de Hausdorff

Con las medidas de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$  hemos conseguido un buen sistema de medidas para la variedad de subconjuntos de un espacio métrico cualquiera  $(X, \rho)$ , sin embargo, poseen un problema, escoger un valor de  $s$  apropiado. Como dijimos antes, medir con objetos de dimensión equivocados, lleva a que la medida sea ineficaz, y que solo lleve a darnos dos valores, 0 o  $\infty$ , lo cual no nos ayuda a clasificar los subconjuntos. Por ello, definiremos la dimensión de Hausdorff de un conjunto, la cual usaremos para determinar la  $s$  concreta.

**Definición 1.2.1.** *Llamaremos dimensión de Hausdorff de un subconjunto  $A \subset X$  a*

$$\dim_H(A) = \sup_{p \geq 0} \{\mathcal{H}^p(A) = \infty\}.$$

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $0 < p < q$  y  $A \subset X$ , entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. Si  $\mathcal{H}^p(A) < \infty$  entonces  $\mathcal{H}^q(A) = 0$ .
2. Si  $\mathcal{H}^q(A) > 0$  entonces  $\mathcal{H}^p(A) = \infty$ .
3.  $\dim_H(A) = \inf_{s \geq 0} \{\mathcal{H}^s(A) = 0\}$ .

*Demostración.* Se cumple que 1.  $\Leftrightarrow$  2. por lo tanto, solo hace falta demostrar que 1. es cierta.

Si  $\mathcal{H}^p(A) < \infty$  y  $0 < p < q$  entonces  $\mathcal{H}_\delta^q(A) \leq \delta^{q-p}\mathcal{H}_\delta^p(A) \leq \delta^{q-p}\mathcal{H}^p(A)$ , por lo tanto, tomando el límite cuando  $\delta$  tiende a 0, nos da que:

$$\mathcal{H}^q(A) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{q-p}\mathcal{H}_\delta^p(A) = 0,$$

luego  $\mathcal{H}^q(A) = 0$ .

Ahora veamos 3. como ya vimos  $\mathcal{H}^s(A)$  es decreciente, por lo tanto los conjuntos definidos  $I = \{s \geq 0 \text{ tales que } \mathcal{H}^s(A) = 0\}$  y  $J = \{s \geq 0 \text{ tales que } \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$  son dos intervalos, y además  $\sup(I) \leq \inf(J)$ .

Sea entonces  $d = \sup(I)$ ,  $q > d$  y sea  $0 < p$  tal que  $q > p > d$ , por lo tanto ocurre que:

1. Por ser  $p > d$  entonces  $p \notin I$  y por lo tanto  $\mathcal{H}^p(A) < \infty$ .
2. Por ser  $q > p$  entonces como  $\mathcal{H}^p(A) < \infty$  y por lo que acabmos de demostrar se deduce que  $\mathcal{H}^q(A) = 0$ .

Por lo que deducimos que  $\mathcal{H}^q(A) = 0$  para todo  $q > d$ , por lo que la función  $\mathcal{H}^p(A)$  nos

queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}^p(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } p < d, \\ 0 & \text{si } p > d. \end{cases}$$

Lo que nos dice que  $\sup(I) = d = \inf(J)$ . □

Este resultado es muy importante, porque nos dice que para cada  $A \subset X$  tal que existe  $p, q > 0$  con  $\mathcal{H}^p(A) = 0$  y  $\mathcal{H}^q(A) = \infty$  entonces existe un único valor  $q \leq d \leq p$  que será el valor determinante para medir objetos de dimensión fractal.

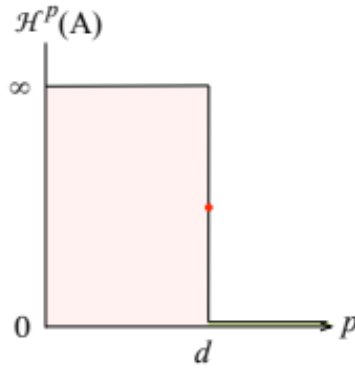


Figura 1.1: Gráfica de la dimensión. Imagen obtenida de [6]

Sin embargo, no todos los subconjuntos poseen un valor  $d$  tal que  $0 < \mathcal{H}^d(A) < \infty$ .

**Definición 1.2.2.** Diremos que  $A \subseteq X$  es Ahlfors regular si existe un  $d > 0$  tal que  $0 < \mathcal{H}^d(A) < \infty$ .

**Observación 1.2.1.** Si un conjunto es Ahlfors regular, es obvio que  $\dim_H(A) = d$ , sin embargo el recíproco no siempre es cierto, puede ocurrir que  $\mathcal{H}^d(E) = 0$  o  $\mathcal{H}^d(E) = \infty$ .

**Proposición 1.2.2.** Dado un espacio métrico  $X$ , la dimensión de Hausdorff cumple las siguientes propiedades:

- **(Monotonía)** Si  $A \subseteq B$  entonces  $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$ .
- **(Estabilidad)** Si  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  entonces  $\dim_H(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\dim_H(A_n)\}$ .

*Demostración.* Veamos primero la monotonía y después la estabilidad.

- **(Monotonía)** Si  $A \subseteq B$  entonces para todo  $p > 0$  se cumple que  $\mathcal{H}^p(A) \leq \mathcal{H}^p(B)$ , por lo tanto:

$$\{p \geq 0 : \mathcal{H}^p(B) = 0\} \subseteq \{p \geq 0 : \mathcal{H}^p(A) = 0\}.$$

Entonces, como ya sabemos

$$\dim_H(B) = \inf_{p \geq 0} \{p : \mathcal{H}^p(B) = 0\} \geq \inf_{p \geq 0} \{p : \mathcal{H}^p(A) = 0\} = \dim_H(A).$$

- **(Estabilidad)** Sea  $s = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\dim_H(A_n)\}$ . Como  $A_n \subseteq A$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces como vimos antes  $\dim_H(A_n) \leq \dim_H(A)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo tanto  $s \leq \dim_H(A)$ .

Si  $s = \infty$  hemos terminado, si no es así, como  $s \geq \dim_H(A_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego se tiene que si  $s < p < \infty$ , entonces  $\mathcal{H}^p(A_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y por subaditividad  $\mathcal{H}^p(A) = 0 < \infty$ . Por lo tanto,  $\dim_H(A) \leq s$ .

□

**Corolario 1.2.1.** *Si  $d < \dim_H(X)$  entonces  $\mathcal{H}^d$  no es una medida  $\sigma$ -finita.*

*Demostración.* Si  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$  con  $\mathcal{H}^d(X_n) < \infty$ , ocurriría que  $\dim_H(X_n) \leq d$  y por la propiedad de estabilidad que vimos antes,  $\dim_H(X) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\dim_H(X_n)\} \leq d$  con lo que llegamos a contradicción. □

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación tal que existen constantes  $L, M \geq 0$  que verifican*

$$L\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|,$$

*para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Entonces si  $E \subset \mathbb{R}^n$  se tiene que*

$$L^s \mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(f(E)) \leq M^s \mathcal{H}^s(E).$$

*Demostración.* Sea  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $E$  con  $\delta > 0$ , entonces como

$$\text{diam}(f(A_i)) \leq M \text{diam}(A_i),$$

ocurre que  $\{f(A_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un  $M\delta$ -recubrimiento de  $f(E)$  y

$$\sum_{i \in I} \text{diam}(f(A_i))^s \leq M^s \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(A_i)^s,$$

por lo que

$$\mathcal{H}_{M\delta}^s(f(E)) \leq M^s \mathcal{H}_\delta^s(E),$$

y tomando el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$  obtenemos

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq M^s \mathcal{H}^s(E).$$

De forma análoga, usando los mismos pasos, se demuestra que

$$L^s \mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(f(E)),$$

y juntando ambas desigualdades concluimos. □

### 1.3. Dimensión de fractales

Con estas bases teóricas podemos dar las dimensiones de conjuntos fractales. Sin embargo, como veremos a continuación nuestra manera de medir las dimensiones es de lo más ineficaz, pues depende en parte de dar un resultado que se espera, sea la dimensión.

**Teorema 1.3.1.** *La dimensión del conjunto de Cantor es  $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ .*

*Demostración.* Llamaremos  $E$  al conjunto de Cantor, ahora dado  $\delta > 0$ , si  $3^{-k} < \delta$ , la familia de intervalos  $\{E_{kj}\}$  que componen  $E$  y que cada uno de ellos posee longitud  $3^{-k}$ . Además por construcción del conjunto de Cantor, hay  $2^k$  (este resultado se puede deducir por inducción sobre  $k$ ). Por lo tanto,  $\{E_{kj}\}_{j=1}^{2^k}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $E$  que verifica

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \sum_{j=1}^{2^k} \text{diam}(E_{kj})^s = 2^k (3^{-k})^s.$$

Entonces si hacemos  $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$  tenemos el resultado que

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq 1,$$

por lo que haciendo  $\delta \rightarrow 0$  nos da que  $\mathcal{H}^s(E) \leq 1$ , y por lo tanto  $\dim_H(E) \leq s$ . Veamos ahora que

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq 1.$$

Sea  $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  un recubrimiento de  $E$  que podemos suponer que está formado por intervalos abiertos. Puesto que  $E$  es compacto<sup>3</sup>, podemos suponer que el recubrimiento es finito, y como  $\mathbb{R} - E$  es abierto, podemos, alargando si fuese necesario los intervalos  $I_j$  suponer que los extremos de los  $I_j$  están fuera de  $E$ , esto aunque afecte a la medida de los intervalos, es algo despreciable, lo cual no afectará al resultado final.

Entonces existe  $\delta > 0$  tal que la distancia de los extremos a  $E$  es menor que  $\delta$ . Podemos seleccionar entonces un entero  $k$  tal que  $3^{-k} < \delta$  con lo que queda asegurado que los intervalos  $E_{ki}$  con  $i = 2^k$  están contenidos en algún  $I_j$ , por lo tanto nos da que

$$\text{diam}(I_j)^s \geq \sum_{E_{ki} \subset I_j} \text{diam}(E_{ki})^s,$$

que por lo tanto

$$\sum_{j=1}^m \text{diam}(I_j)^s \geq \sum_{j=1}^m \sum_{E_{ki} \subset I_j} \text{diam}(E_{ki})^s = \sum_{j=1}^{2^k} \text{diam}(E_{kj})^s = 2^k (3^{-k})^s = 1.$$

Con lo que concluimos que  $\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq 1$  luego, usando lo visto anteriormente  $\mathcal{H}_\delta^s(E) = 1$  y concluimos que  $\dim_H(E) = s$ .  $\square$

<sup>3</sup>Es compacto pues es acotado e intersección infinita de intervalos cerrados, por lo tanto, cerrado.

Visto todo esto, uno se puede dar cuenta que pese a que se puede generalizar a cualquier conjunto imaginable, tenemos un gran problema respecto a la dimensión. Parte de nuestra demostración se basaba en que teníamos una idea de cuál podía ser el valor que buscamos, y demostramos que, en efecto, dicho valor es la dimensión. De no haber tenido este dato la demostración sería mucho más larga, pues también sería necesario estimar el posible valor de dimensión.

Para hallar los valores de la dimensión veremos ahora otra forma de calcular dimensiones que es más fácilmente computable. Asimismo, en los siguientes capítulos hablaremos de diferentes clases de fractales, así como maneras de hallar sus dimensiones, que, como veremos, serán más fáciles de computar.

## 1.4. Dimensión por recuento de cajas

Aunque para medir las dimensiones fractales normalmente se utiliza la dimensión de Hausdorff, existen otras definiciones de dimensión, más fáciles de usar y computar y que además en muchos casos coinciden con el valor de Hausdorff. El más usado de estos, y el que utilizaremos será la dimensión por recuento de cajas. Esta parte del texto proviene de [6].

La idea de este concepto de dimensión sigue siendo la misma que la definición de dimensión de Hausdorff, esto es, dado un  $\delta > 0$  idear una medida que ignora irregularidades de tamaño menor que  $\delta$  y estudiar como varía a medida que  $\delta \rightarrow 0$ .

Para ver mejor este concepto daremos un ejemplo con una curva  $E \subset \mathbb{R}^2$ , entonces dividiendo al plano con cuadrados de lado  $\delta$ , podemos definir la « $\delta$ -longitud de  $E$ » como la suma de las longitudes de los cuadrados del mallado que cortan a  $E$ , luego si necesitamos  $N_\delta(E)$  cuadrados para recubrir a  $E$ , entonces

$$L_\delta(E) = N_\delta(E)\delta.$$

**Observación 1.4.1.** *Si la curva es rectificable entonces cuando  $\delta \rightarrow 0$  ocurre que  $L_\delta(E)$  tiende a la longitud de la curva.*

El problema entonces recae, en una curva tal que a cualquier escala posea irregularidades. Una curva así hará que cuando  $\delta \rightarrow 0$  entonces  $L_\delta(E) \rightarrow \infty$ , es decir, que existe un  $s > 0$  tal que

$$L_\delta(E) \sim K\delta^{-s},$$

con  $K \in \mathbb{R}^*$  una constante.

Con esto, tomando logaritmos nos da la definición de  $s$

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(L_\delta(E)) - \text{Log}(K)}{-\text{Log}(\delta)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(L_\delta(E))}{-\text{Log}(\delta)},$$

ya que el numerador y el denominador tienden a infinito y  $\text{Log}(K)$  es constante.

Con esto podemos dar una nueva definición de dimensión:

**Definición 1.4.1.** En  $\mathbb{R}^n$ , llamaremos  $\delta$ -malla, a la colección de cubos de la forma:

$$\left\{ \left[ m_1\delta, (m_1 + 1)\delta \right] \times \dots \times \left[ m_n\delta, (m_n + 1)\delta \right] \right\}_{m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}}.$$

**Definición 1.4.2.** Dado un subconjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  llamaremos dimensión por recuento de cajas de  $E$  a

$$\dim_B(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(N_\delta(E))}{-\text{Log}(\delta)},$$

siendo  $N_\delta(E)$  el número de cubos de la  $\delta$ -malla que corta a  $E$ .

**Observación 1.4.2.** No hay garantías de que dicho límite exista, por lo tanto, si no existe hablamos de dimensión superior y dimensión inferior de  $E$ , que las denotaremos por  $\overline{\dim}_B(E)$  y  $\underline{\dim}_B(E)$  respectivamente, y serán definidas de la misma manera cambiando el límite por límite superior y límite inferior respectivamente.

**Observación 1.4.3.** Sin embargo, en los casos más importantes el límite anterior suele existir y se puede simplificar el cálculo tomando  $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ , luego la fórmula de la dimensión queda

$$\dim_B(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}(N_k(E))}{\text{Log}(2^k)}.$$

**Observación 1.4.4.** La definición de  $N_\delta(E)$  nos da que es asintóticamente igual a  $\delta^{-s}$  siendo  $s = \dim_B(E)$ , por lo tanto

$$N_\delta(E)\delta^{-s} \rightarrow \infty \text{ si } s < \dim_B(E),$$

$$N_\delta(E)\delta^{-s} \rightarrow 0 \text{ si } s > \dim_B(E).$$

Por lo tanto,

$$N_\delta(E)\delta^s = \inf \left\{ \sum_i \delta^s : \{A_i\} \text{ es } \delta\text{-recubrimiento finito de } E \right\}.$$

Y nuestra definición de medida de Hausdorff era:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(A_i)^s : \{A_i\} \text{ es } \delta\text{-recubrimiento finito de } E \right\},$$

por lo tanto, en general  $\dim_H(E) \neq \dim_B(E)$ .

Uno de los casos más comunes en donde ocurre esto es  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ . Del cual hallaremos sus dimensiones por ambos métodos.

**Proposición 1.4.1.** Dado el conjunto  $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ , entonces tenemos que  $\dim_H(E) = 0$  y  $\dim_B(E) = 1$ .

*Demostración.*

1.  $\boxed{\dim_H(E) = 0}$  Como sabemos el conjunto  $E$  es numerable, entonces lo podemos poner como una sucesión creciente de racionales en  $[0, 1]$ ,  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ , luego, como vimos en el teorema 1.1.2, tenemos que

$$0 \leq \mathcal{H}^s(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(\{x_k\}).$$

Por lo tanto, como esta última igualdad es 0 para todo valor de  $s$ , salvo  $s = 0$ ,<sup>4</sup> entonces tenemos que  $\dim_E = 0$

2.  $\boxed{\dim_B(E) = 1}$  También sabemos que el conjunto  $E$  es denso en  $[0, 1]$ , por lo tanto,  $\dim_B(E) = \dim_B([0, 1])$ , y como sabemos  $\dim_B([0, 1]) = 1$ , pues se debe a la fórmula de la observación 1.4.3, y a que para todo  $k \in \mathbb{N}$  se cumple que  $N_k(E) = 2^k$ ,<sup>5</sup> luego como el numerador y el denominador son iguales, nos da dimensión 1. Luego concluimos.

□

Pese a esto, la dimensión por recuento de cajas es útil, entre otras cosas porque es computable, y porque además ambas dimensiones coinciden en un conjunto de fractales, denominados fractales autosemejantes, que veremos más adelante. Este resultado viene dado por el siguiente teorema.

**Teorema 1.4.1.** Sean  $T_1, \dots, T_m$  aplicaciones contractivas lineales en  $\mathbb{R}^n$  y sean  $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n$  unos ciertos vectores, entonces si un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  satisface que

$$E = \bigcup_{i=1}^m (T_i(E) + y_i),$$

verifica que  $\dim_H(E) = \dim_B(E)$ .

El teorema anterior viene enunciado y demostrado en [3] en la página 143.

En el capítulo que viene a continuación daremos las nociones que se requieren para poder aplicar este teorema, así como una clase de fractales, llamados fractales de sistemas de funciones iteradas.

## 1.5. Medida de Hausdorff y medida de Lebesgue

Una vez vista la medida de Hausdorff, uno se pregunta, ¿cómo actúa sobre conjuntos más "normales"? Por ejemplo, ¿cuánto vale  $\mathcal{H}^2(\mathbb{B}(0, 1))$ ? Para responder estas preguntas definiremos la medida de Lebesgue y después la compararemos con la medida de Hausdorff. Esta parte del texto proviene de [4], capítulo 1, sección 1.4.

<sup>4</sup>pues  $\{x_k\}$  es un punto, y sabemos que la dimensión de Hausdorff del punto es 0

<sup>5</sup>Es una cuenta sencilla de comprobar

Por las restricciones en la longitud del trabajo, se supondrá conocida la medida de Lebesgue, así como sus propiedades, las cuales vienen nombradas en [6].

**Definición 1.5.1.** *Sea  $(X, \rho)$  un espacio métrico. Diremos que una colección de conjuntos  $\mathfrak{V}$  es una clase de Vitali de  $E$ , si para todo  $x \in E$  y  $\delta > 0$  existe un  $U \in \mathfrak{V}$  tal que  $x \in U$  y además  $0 < \text{diam}(U) \leq \delta$*

**Teorema 1.5.1** (Teorema de recubrimiento de Vitali). *Sea  $E$  un conjunto  $\mathcal{H}^s$ -medible de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathfrak{V}$  una clase de Vitali de  $E$  solo conformada por conjuntos cerrados, entonces podemos obtener una sucesión  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  de  $\mathfrak{V}$  tales que los conjuntos sean disjuntos dos a dos y además se cumple una y solo una de las dos siguientes condiciones:*

1.  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s = \infty$ ,
2.  $\mathcal{H}^s(E - (\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i)) = 0$ .

*Demostración.* Fijando  $\rho > 0$  podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\text{diam}(U) \leq \rho$  para todo  $U \in \mathfrak{V}$  considerado. Entonces escojamos la sucesión por recurrencia. Sea  $U_1$  un elemento cualquiera de  $\mathfrak{V}$ , entonces tenemos el siguiente valor:

$$d_1 = \sup\{\text{diam}(U) \text{ tales que } U \in \mathfrak{V} \text{ y } U \cap U_1 = \emptyset\}.$$

Si  $d_1 = 0$  entonces  $E \subset U_1$  y se cumple 1., con lo que acabamos. Si no cojemos  $U_2 \in \mathfrak{V}$  de tal forma que  $U_2 \cap U_1 = \emptyset$  y  $\text{diam}(U_2) \geq \frac{d_1}{2}$  y repetimos el proceso por recurrencia.

Supongamos entonces que el proceso continúa indefinidamente, y además que  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s < \infty$ . En ese caso, para cada  $i \in \mathbb{N}$  definimos  $B_i$  una bola abierta con centro en  $U_i$  y de radio  $3 \text{diam}(U_i)$ , por lo tanto, para todo  $k > 1$  ocurre que

$$E - \left( \bigcup_{i=1}^k U_i \right) \subset \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i,$$

porque si  $x \in E - \left( \bigcup_{i=1}^k U_i \right)$  entonces existe un  $U \in \mathfrak{V}$  disjunto con  $U_1, \dots, U_k$  con  $x \in U$  por construcción. Que además como  $\text{diam}(U_i) \rightarrow 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$  existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq n_0$  entonces  $\text{diam}(U) > 2 \text{diam}(U_m)$ . Asimismo, por la forma de selección de  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  tenemos que existe un  $k < j < m$  para el cual  $U \cap U_j \neq \emptyset$  y además  $\text{diam}(U) \leq 2 \text{diam}(U_j)$ , y por lo tanto  $U \subset B_j$ , en particular  $x \in B_j$ .

Entonces escogiendo  $\delta > 0$ , se cumple que

$$\mathcal{H}_{\delta}^s \left( E - \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s \left( E - \bigcup_{i=1}^k U_i \right) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \text{diam}(B_i)^s = \sum_{i=k+1}^{\infty} 6^s \text{diam}(U_i)^s,$$

siempre que  $k > 0$  sea suficientemente grande como para que  $\text{diam}(B_i) \leq \delta$  para todo  $i > k$ .

Si esto se cumple, entonces por las propiedades vistas de la medida de Hausdorff, tenemos

que

$$\mathcal{H}_\delta^s \left( E - \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right) = 0 \text{ para todo } \delta > 0,$$

luego  $\mathcal{H}^s \left( E - \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right) = 0$ , lo que prueba 2., y con esto terminamos.  $\square$

**Teorema 1.5.2.** *El volumen  $n$ -dimensional de un conjunto convexo y cerrado  $E$  con  $\text{diam}(E) = d$  es menor o igual que  $\frac{\pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{d}{2}\right)^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$ .*

**Observación 1.5.1.** *El valor  $\frac{\pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{d}{2}\right)^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$  es el ratio entre el volumen de una bola  $n$ -dimensional y su diametro  $d$ .*

**Teorema 1.5.3.** *Si  $E \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathcal{L}^n(E) = c_n \mathcal{H}^n(E)$  con  $c_n$  una constante que solo depende de la dimensión  $n$ .*

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ , podemos cubrir  $E$  con una colección de conjuntos convexos y cerrados  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tales que  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^n < \mathcal{H}^n(E) + \epsilon$ .

Por el teorema anterior, sabemos que  $\mathcal{L}^n(U_i) \leq c_n \text{diam}(U_i)^n$ , por lo tanto, tenemos que

$$\mathcal{L}^n(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n(U_i) \leq c_n \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^n < c_n (\mathcal{H}^n(E) + \epsilon) \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

con lo que deducimos que  $\mathcal{L}^n(E) \leq c_n \mathcal{H}^n(E)$ .

Falta ver la desigualdad contraria. Para ello sea  $\epsilon > 0$  y consideremos una colección de conjuntos coordenados de  $\mathbb{R}^n$   $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  que cubran  $E$  y además  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{vol}(C_i) < \mathcal{L}^n(E) + \epsilon$ .

Dado  $\delta > 0$  y cogiendo todos los  $i \in I$  tal que  $\text{diam}(C_i) \leq 2\delta$ , construimos una clase de Vitali  $\mathfrak{V}$ . Por el Teorema 1.5.1, tenemos que para cada  $i \in I$  existen bolas  $\{B_{ij}\}_{j \in \mathbb{N}}$  contenidas en  $C_i$ , con  $\text{diam}(B_{ij}) \leq \delta$  y  $\mathcal{H}^n(C_i - \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{ij}) = 0$ , en particular tenemos,  $\mathcal{H}_\delta^n(C_i - \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{ij}) = 0$ . Entonces como  $\mathcal{L}^n$  es una medida de Borel, se cumple que,  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n(B_{ij}) = \mathcal{L}^n(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{ij}) \leq \mathcal{L}^n(C_i)$ , y entonces

$$\mathcal{H}_\delta^n(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^n(C_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^n(B_{ij}) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^n \left( C_i - \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{ij} \right) \leq$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_{ij})^n = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} c_n^{-1} \mathcal{L}^n(B_{ij}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} c_n^{-1} \mathcal{L}^n(C_i) < c_n^{-1} (\mathcal{L}^n(E) + \epsilon),$$

con lo que tenemos que  $c_n \mathcal{H}_\delta^n(E) < \mathcal{L}^n(E) + \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ , por lo tanto  $c_n \mathcal{H}_\delta^n(E) \leq \mathcal{L}^n(E)$  para todo  $\delta > 0$ . Luego  $c_n \mathcal{H}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(E)$ . Juntando ambas desigualdades, nos da que  $c_n \mathcal{H}^n(E) = \mathcal{L}^n(E)$  con lo que acabamos.  $\square$

Este resultado es muy fuerte, pues nos demuestra que salvo una constante, la medida de Hausdorff es igual a la medida de Lebesgue.

# Capítulo 2

## Sistemas de funciones iteradas

### 2.1. Nociones previas

Como ya comentamos en la introducción, podemos considerar fractal como el resultado de la iteración infinita de un proceso geométrico. Esto nos proporciona una forma de construir fractales a partir de funciones, y nos darán fractales de sistemas de funciones iteradas.

**Definición 2.1.1.** *Llamaremos sistema de funciones iteradas (para abreviar SFI) en un espacio métrico  $(X, \rho)$  a cualquier familia finita  $\{f_i\}_{i=1}^n$  de aplicaciones contractivas en  $X$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .*

**Observación 2.1.1.** *Como las  $f_i$  son aplicaciones contractivas en  $(X, \rho)$  entonces existe  $0 \leq r_i < 1$  tal que  $\rho(f_i(x_1), f_i(x_2)) \leq r_i \rho(x_1, x_2)$  para todo  $x_1, x_2 \in X$ . En particular, también sabemos que toda aplicación contractiva es una aplicación continua.*

**Definición 2.1.2.** *Llamaremos razón de contractividad de un SFI  $\{f_i\}_{i=1}^n$  a*

$$r = \text{máx}\{r_1, \dots, r_n\},$$

*siendo  $r_i$  la razón de contractividad de  $f_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .*

**Observación 2.1.2.** *La razón de contractividad de todo SFI cumple que  $0 \leq r < 1$*

**Definición 2.1.3.** *Dado un SFI  $\{f_i\}_{i=1}^n$  y  $A \subset X$  definimos la aplicación  $F : X \rightarrow X$  tal que:*

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A).$$

**Definición 2.1.4.** *Dado un subconjunto  $A$  de un espacio métrico completo  $(X, \rho)$  definimos su cuerpo  $\lambda$ -paralelo  $CP(A, \lambda)$  como el conjunto de puntos cuya distancia a  $A$  es menor o igual a  $\lambda$ , es decir,*

$$CP(A, \lambda) = \{x \in X \text{ tales que } \rho(x, A) \leq \lambda\}.$$

**Observación 2.1.3.** Si  $A$  es compacto, entonces

$$CP(A, \lambda) = \bigcup_{a \in A} \overline{\mathbb{B}}(a, \lambda).$$

Definidos estos conceptos, es natural plantearse algunas dudas ¿existirá un subconjunto  $A \subset X$  tal que  $A = F(A)$ ? Y en caso de existir, ¿será único? ¿Cómo se obtendrá?

## 2.2. Distancia de Hausdorff en conjuntos compactos

Para responder a todas estas preguntas primero tenemos que hacer un inciso acerca de la distancia de Hausdorff en conjuntos compactos. Esta parte está en gran parte obtenida de [9], aunque cambiaremos la notación utilizada.

**Definición 2.2.1.** Dado un espacio métrico  $(X, \rho)$ , definimos

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}(X) = \{A \subset X : A \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

**Definición 2.2.2.** Dados compactos no vacíos  $K, L \in \mathbb{K}$ , definimos la distancia de Hausdorff entre  $K$  y  $L$  como:

$$\rho_H(K, L) = \inf_{\alpha \geq 0} \{K \subset CP(L, \alpha) \text{ y } L \subset CP(K, \alpha)\}.$$

**Proposición 2.2.1.** El ínfimo anterior es un mínimo.

*Demostración.* Sea  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión decreciente con límite  $\alpha \in [0, \infty)$ , cumpliendo que  $K \subset CP(L, \alpha_k)$  y  $L \subset CP(K, \alpha_k)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Veamos que  $K \subset CP(L, \alpha)$  y  $L \subset CP(K, \alpha)$ .

Por reducción al absurdo, supongamos que  $K \not\subset CP(L, \alpha) = \{p \in X : \rho(p, L) \leq \alpha\}$ , por lo tanto, existe un  $x \in K$  tal que  $\rho(x, L) > \alpha$ , entonces existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $k \geq k_0$  ocurre que  $\rho(x, L) > \alpha_k$ , lo que contradice la hipótesis inicial, y por lo tanto llegamos a contradicción. Lo que demuestra que  $K \subset CP(L, \alpha)$ .

El caso  $L \not\subset CP(K, \alpha)$  posee una demostración análoga por reducción al absurdo, con lo que acabamos.  $\square$

**Observación 2.2.1.** Si  $K = \{p\}$  y  $L = \{q\}$ , entonces  $\rho_H(K, L) = \rho(p, q)$ .

**Lema 2.2.1.** Dados  $K, L \in \mathbb{K}$ , entonces se tiene:

$$\rho_H(K, L) = \max \left\{ \sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in L} \{\rho(x, y)\} \right\}, \sup_{y \in L} \left\{ \inf_{x \in K} \{\rho(x, y)\} \right\} \right\}.$$

*Demostración.* Llamaremos  $\sigma = \max \left\{ \sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in L} \{\rho(x, y)\} \right\}, \sup_{y \in L} \left\{ \inf_{x \in K} \{\rho(x, y)\} \right\} \right\}$ .

Entonces veamos las siguientes desigualdades:

- $\boxed{\rho_H(K, L) \geq \sigma}$  Sean  $x \in K$  e  $y \in L$ , por la proposición anterior y lo que conocemos de  $\rho_H(K, L)$  tenemos que  $L \subset \text{CP}(K, \rho_H(K, L)) = \{p \in X : \rho(p, K) \leq \rho_H(K, L)\}$ , por lo tanto:

$$\rho(y, K) \leq \rho_H(K, L) \text{ para todo } y \in L,$$

y por definición de  $\rho(y, K)$  tenemos que:

$$\inf_{x \in K} \{\rho(y, x)\} \leq \rho_H(K, L).$$

Luego tomando supremos en  $L$  nos da que

$$\sup_{y \in L} \left\{ \inf_{x \in K} \{\rho(x, y)\} \right\} \leq \rho_H(K, L).$$

Cambiando los papeles de  $x$  e  $y$  obtenemos la otra desigualdad:

$$\sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in L} \{\rho(x, y)\} \right\} \leq \rho_H(K, L).$$

Juntando ambas nos da que  $\sigma$  que es el máximo de los dos valores anteriores sigue siendo  $\leq \rho_H(K, L)$ .

- $\boxed{\sigma \geq \rho_H(K, L)}$  Si  $\rho_H(K, L) = 0$ , no hay nada que demostrar. Entonces sea  $\rho_H(K, L) > 0$  y sea  $0 < \lambda < \rho_H(K, L)$ . Por definición de  $\rho_H(K, L)$  ocurre uno de estos casos, o bien  $K \not\subset \text{CP}(L, \lambda)$ , o bien  $L \not\subset \text{CP}(K, \lambda)$ , supondremos  $K \not\subset \text{CP}(L, \lambda)$ , porque el otro caso es análogo.

Entonces existe  $x_0 \in K$  tal que  $x_0 \notin \text{CP}(L, \lambda)$ , luego  $\rho(x_0, L) > \lambda$ , luego por definición de  $\rho(x_0, L)$  tenemos que

$$\inf_{y \in L} \{\rho(x_0, y)\} > \lambda$$

Y por lo tanto nos da que  $\sigma > \lambda$  pues

$$\sigma \geq \sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in L} \{\rho(x, y)\} \right\} \geq \inf_{y \in L} \{\rho(x_0, y)\} > \lambda,$$

luego como esto se cumple para todo  $0 < \lambda < \rho_H(K, L)$  por lo tanto  $\sigma \geq \rho_H(K, L) = \sup\{\lambda : 0 < \lambda < \rho_H(K, L)\}$ .

Con lo que concluimos. □

**Lema 2.2.2.** *La función  $\rho_H : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow [0, \infty)$  definida como en la definición 2.2.2 es una distancia.*

*Demostración.* Lo veremos demostrando las 3 propiedades de una distancia:

1. Si  $K = L \in \mathbb{K}$  entonces  $K \subset \text{CP}(L, \alpha)$  y  $L \subset \text{CP}(K, \alpha)$  para todo  $\alpha \geq 0$ , por lo tanto  $\rho_H(K, L) = 0$ .

Veamos el recíproco, sean  $K, L \in \mathbb{K}$  tales que  $\rho_H(K, L) = 0$ , entonces

$$K \subset \{p \in X : \rho(p, L) \leq \alpha\}, L \subset \{q \in X : \rho(q, K) \leq \alpha\}, \text{ para todo } \alpha \geq 0$$

Dado  $x \in K$ , nos dice que  $\rho(x, L) = 0$ , luego  $x \in \bar{L} = L$ , y por lo tanto  $K \subset L$ , análogamente vemos que  $L \subset K$  y concluimos que  $K = L$

2. Usando el lema anterior vemos que  $\rho_H(K, L) = \rho_H(L, K)$ .
3. Sean  $K, L, M \in \mathbb{K}$ , entonces como  $K \subset \text{CP}(M, \rho_H(K, M))$  y  $M \subset \text{CP}(L, \rho_H(M, L))$ , entonces nos da que

$$K \subset \text{CP}[\text{CP}(L, \rho_H(M, L)), \rho_H(K, M)] = \text{CP}(L, [\rho_H(M, L) + \rho_H(K, M)]).$$

Finalmente por definición de  $\rho_H(K, L)$  deducimos que  $\rho_H(K, L) \leq \rho_H(M, L) + \rho_H(K, M)$ .

□

**Definición 2.2.3.** Diremos que  $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}$  es Hausdorff acotado si es acotado con la métrica  $\rho_H$ , y lo denotaremos  $\rho_H$ -acotado.

**Lema 2.2.3.** Un subconjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}$  es  $\rho_H$ -acotado si y solo si  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  es acotado en  $(X, \rho)$ .

*Demostración.* Si  $\mathcal{A}$  es  $\rho_H$ -acotado existen  $K \in \mathbb{K}$  y  $R > 0$  tales que  $\rho_H(A, K) < R$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ , por lo tanto,  $A \subset \text{CP}(K, R)$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ , luego

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset \text{CP}(K, R).$$

Que es acotado en  $(X, \rho)$ .

Recíprocamente si  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  es acotado en  $(X, \rho)$  entonces existe  $R > 0$  tal que  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset \bar{\mathbb{B}}(0, R)$ , luego para cada  $A \in \mathcal{A}$  nos queda que:

$$A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset \bar{\mathbb{B}}(0, R) \subset \text{CP}(\bar{\mathbb{B}}(0, R), 2R).$$

Por otro lado si  $x \in \bar{\mathbb{B}}(0, R)$  e  $y \in A$ , luego por la desigualdad triangular  $\rho(x, y) \leq 2R$ , moviendo  $x \in \bar{\mathbb{B}}(0, R)$  tenemos que

$$\bar{\mathbb{B}}(0, R) \subset \text{CP}(\{y\}, 2R) \subset \text{CP}(A, 2R).$$

De estas dos fórmulas deducimos que  $\rho_H(A, \bar{\mathbb{B}}(0, R)) \leq 2R$  para todo  $A \in \mathcal{A}$  luego  $\mathcal{A}$  es acotado. □

**Lema 2.2.4.** Sea  $X$  un espacio topológico, entonces  $X$  es compacto si para toda familia  $\mathcal{F}$  de cerrados de  $X$  que cumpla que cualquier subfamilia finita de  $\mathcal{F}$  es no vacía, se tiene  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Dada una familia de cerrados  $\mathcal{F}$ , se considera la familia de abiertos complementarios  $\mathcal{A} = \{X - C : C \in \mathcal{F}\}$ . Por lo tanto,  $\bigcap_{C \in \mathcal{F}} C = \emptyset$  es equivalente a que  $\mathcal{A}$  sea un recubrimiento de  $X$ , y si de  $\mathcal{F}$  no se puede extraer una subfamilia finita que sea vacía, significa que de  $\mathcal{A}$  no puede extraerse un subrecubrimiento finito. Por lo tanto, si esto ocurre  $X$  no puede ser compacto, con lo que acabamos.  $\square$

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  no creciente, con  $K_n$  no vacío para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  es su límite en  $(\mathbb{K}, \rho_H)$*

*Demostración.* Veamos primero que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ . Como  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es no creciente y  $K_n \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de compactos en el espacio topológico  $K_1$ , con la topología heredada de  $(X, \rho)$ , y además  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  cumple que cualquier subfamilia finita  $\{K_{n_s}\}_{s=1}^m$  es no vacía. Luego por la compacidad de  $K_1$  esto implica que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ .

Además  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  es un cerrado dentro del compacto  $K_1$ , por lo tanto, es compacto. Entonces  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \in \mathbb{K}$ . Luego para comprobar que  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  en la distancia de Hausdorff, debemos comprobar lo siguiente: Dado  $\epsilon > 0$  tenemos que comprobar que existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\rho_H(K_m, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n) < \epsilon$  para todo  $m \geq m_0$ , o equivalentemente, dado  $\epsilon > 0$ , ¿existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq m_0$  entonces

$$K_m \subset \text{CP}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n, \epsilon\right),$$

y

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset \text{CP}(K_m, \epsilon) ?$$

La segunda parte es trivial, entonces demostremos la primera, por reducción al absurdo supongamos que exista  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $m_0 \in \mathbb{N}$  existe  $m \geq m_0$  cumpliendo que:

$$K_m \not\subset \text{CP}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n, \epsilon\right),$$

luego consideremos el compacto

$$C_m = K_m - \text{intr}\left[\text{CP}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n, \epsilon\right)\right] \neq \emptyset.$$

Entonces la sucesión  $\{C_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  es no creciente, y por lo tanto, por el lema anterior tiene intersección no vacía, es decir

$$\emptyset \neq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left\{ K_m - \text{intr}\left[\text{CP}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n, \epsilon\right)\right] \right\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m - \text{intr}\left[\text{CP}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n, \epsilon\right)\right],$$

si comprobamos ahora que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset \text{intr} \left[ \text{CP} \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n, \epsilon \right) \right],$$

entonces llegaremos a contradicción, porque entonces  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m = \emptyset$ .

Para demostrar esto, lo haremos en un caso más general. Sea  $A \subset X$  no vacío, entonces veamos que  $A \subset \text{intr}(\text{CP}(A, \epsilon))$  para todo  $\epsilon > 0$ . Tomando  $a \in A$  entonces para todo  $\epsilon > 0$  tenemos que

$$\mathbb{B} \left( a, \frac{\epsilon}{2} \right) \subset \{x \in X : \rho(x, A) \leq \epsilon\} = \text{CP}(A, \epsilon),$$

por lo tanto  $a \in \text{intr}(\text{CP}(A, \epsilon))$ , luego como esto vale para todo  $a \in A$  se deduce que  $A \subset \text{intr}(\text{CP}(A, \epsilon))$ , con lo que concluimos.  $\square$

**Teorema 2.2.1.** *El espacio  $(\mathbb{K}, \rho_H)$  es completo.*

*Demostración.* Sea  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  una sucesión de Cauchy. Veamos primero que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  es acotado en  $(X, \rho)$ . Por ser la sucesión de Cauchy, para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $\rho_H(K_n, K_{n_0}) < \epsilon$  luego  $K_n \subset \text{CP}(K_{n_0}, \epsilon)$  y por lo tanto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset [K_1 \cup \dots \cup K_{n_0-1}] \cup \text{CP}(K_{n_0}, \epsilon),$$

que es acotado en  $(X, \rho)$  por ser  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ . Ahora definimos  $A_i = \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} K_j}$  que es compacto en  $X$  por lo visto anteriormente. Luego  $A_i \in \mathbb{K}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Por construcción, la sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es no creciente en  $(\mathbb{K}, \rho_H)$ , por lo tanto, por la proposición anterior  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  en  $(\mathbb{K}, \rho_H)$ , luego solo nos queda comprobar que  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge también a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  en  $(\mathbb{K}, \rho_H)$  habremos terminado.

Sea otro  $\epsilon > 0$ , como  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  en  $(\mathbb{K}, \rho_H)$  entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq n_0$  ocurre que  $\rho_H(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m, A_n) < \epsilon$ . En particular

$$K_j \subset \overline{K_j} \subset \overline{\bigcup_{h=j}^{\infty} K_h} = A_j \subset \text{CP} \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n, \epsilon \right).$$

Por otro lado, por ser  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  sucesión de Cauchy para el  $\epsilon$  anterior existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, l \geq m_0$  entonces  $\rho_H(K_m, K_l) < \epsilon$ , en particular

$$K_m \subset \text{CP}(K_l, \epsilon),$$

fijando un  $p \geq m_0$  nos queda que

$$\bigcup_{s \geq p} K_s \subset \bigcup_{s \geq p} \text{CP}(K_p, \epsilon) = \text{CP}(K_p, \epsilon).$$

Tomando cerrados nos queda que

$$A_p = \overline{\bigcup_{s \geq p} K_s} \subset \overline{\text{CP}(K_s, \epsilon)} = \text{CP}(K_p, \epsilon)$$

En particular

$$\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h \subset A_p \subset \text{CP}(K_s, \epsilon)$$

Luego finalmente tomando  $r = \max\{n_0, m_0\}^1$ , nos da que dado  $\epsilon > 0$  entonces

$$\rho_H \left( \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h, K_r \right) < \epsilon$$

□

## 2.3. Existencia y unicidad de conjuntos fractales para SFI

Una vez concluido el inciso podemos empezar a demostrar los teoremas que nos dirán los conjuntos que buscamos para los sistemas de funciones iteradas. Por lo tanto, dado un espacio métrico completo  $(X, \rho)$ , definimos el subespacio métrico  $(\mathbb{K}, \rho_H)$ , y enunciamos la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.1.** *Si  $f : X \rightarrow X$  es contractiva de razón  $k$ , entonces la aplicación inducida  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  es contractiva de razón  $r$  en  $(\mathbb{K}, \rho_H)$*

*Demostración.* Para comprobar esto hay que comprobar que la aplicación contractiva  $f$  contrae los cuerpos  $\lambda$ -paralelos con una razón contractiva  $r$ , es decir que

$$f(\text{CP}(A, \lambda)) \subseteq \text{CP}(f(A), r\lambda).$$

En efecto, si  $y \in f(\text{CP}(A, \lambda))$ , entonces para algún  $x \in \text{CP}(A, \lambda)$  es  $y = f(x)$ , para dicho  $x$  ocurre que  $\rho(x, A) \leq \lambda$ , por lo que para algún  $z \in A$  es  $\rho(z, y) \leq \nu$  donde  $\rho(f(z), x) < r\lambda$  con  $f(z) \in f(A)$ , por lo que  $x \in \text{CP}(f(A), r\nu)$ .

Ahora bien, si  $\rho_H(A, B) = \lambda$  entonces  $A \subseteq \text{CP}(B, \lambda)$ , por lo tanto:

$$f(A) \subseteq f(\text{CP}(B, \nu)) \subseteq \text{CP}(f(B), r\nu),$$

y de la misma forma, cambiando los papeles de  $A$  y  $B$ , entonces:

$$f(B) \subseteq \text{CP}(f(A), r\lambda).$$

Luego se demuestra que  $\rho_H(f(A), f(B)) \leq r\nu$ , como queríamos demostrar. □

<sup>1</sup>Ambos valores definidos antes durante la demostración.

**Corolario 2.3.1.** *Sea  $\{f_1, \dots, f_n\}$  un sistema de funciones iteradas en  $X$  de razones contractivas  $0 \leq r_i < 1$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Entonces la aplicación  $F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$  de la Definición 2.1.3 es una contracción del espacio  $(\mathbb{K}, \rho_H)$  con razón  $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$ , definida como la razón del SFI (Definición 2.1.2).*

*Demostración.* Por la proposición anterior, dado  $A \in \mathbb{K}$  entonces para todo  $1 \leq i \leq n$  se tiene que:

$$f_i(\text{CP}(A, \lambda)) \subseteq \text{CP}(f_i(A), r\lambda),$$

por lo que

$$F(\text{CP}(A, \lambda)) = \bigcup_{i=1}^n f_i(\text{CP}(A, \lambda)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \text{CP}(f_i(A), r\lambda),$$

pero como el cuerpo  $\lambda$ -paralelo de la unión de una familia de conjuntos es la unión de la familia de cuerpos  $\lambda$ -paralelos de los conjuntos, por lo que:

$$F(\text{CP}(A, \lambda)) \subseteq \text{CP}\left(\bigcup_{i=1}^n f_i(A), r\lambda\right) = \text{CP}(F(A), r\lambda).$$

Razonando igual que la demostración de la proposición anterior con la aplicación  $f$ , concluimos.  $\square$

Antes de dar el teorema principal de los SFI, es necesario mencionar el teorema del punto fijo de Banach.

**Teorema 2.3.1** (Teorema del punto fijo de Banach). *Sea  $(X, \rho)$  un espacio métrico completo, y sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva, entonces existe un único  $x \in X$  tal que  $f(x) = x$  al que llamaremos punto fijo de  $f$ .*

Además dicho punto fijo verifica que para todo  $y \in X$ :

1.  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y)$ ,
2.  $\rho(x, y) \leq \frac{\rho(y, f(y))}{1 - r}$ .

Ahora con todo esto podemos dar el teorema principal de esta parte, que nos determina que hay un fractal asociado a cada SFI, y además dicho fractal es único.

**Teorema 2.3.2** (Teorema de existencia y unicidad). *Sea  $\{f_1, \dots, f_n\}$  un sistema de funciones iteradas en  $X$  de razones contractivas  $0 \leq r_i < 1$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Entonces existe un único elemento  $A \in \mathbb{K}$  tal que  $F(A) = A$ . Además para todo  $B \in \mathbb{K}$  se cumple que:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^k(B) = A,$$

En el espacio métrico completo  $(\mathbb{K}, \rho_H)$ .

*Demostración.* Como acabamos de ver,  $F$  es una aplicación contractiva de razón  $r$  en el espacio métrico completo  $(\mathbb{K}, \rho_H)$ , por lo tanto por el teorema del punto fijo de Banach,

existe un único  $A \in \mathbb{K}$  tal que  $F(A) = A$  y además para todo  $B \in \mathbb{K}$  se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^k(B) = A.$$

□

Este resultado es bastante importante, hemos demostrado no solo que dado un sistema de funciones iteradas existe un único fractal ligado a dicho sistema, si no que además, dicho fractal es compacto.

Pese a que no todos los fractales son compactos, algunos de los más conocidos sí lo son: El ya comentado conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, y muchos otros más. De hecho a continuación escribiremos un algoritmo para determinar los fractales que determinan un cierto SFI.

**Algoritmo 2.3.1.** *Dado un SFI  $\{f_1, \dots, f_n\}$  de razones  $0 \leq r_i < 1$  y fijando un  $M \geq 1$  entonces el algoritmo que determina su fractal es el siguiente:*

1. Elegir un compacto cualquiera  $B \in \mathbb{K}$ .
2. Hacer  $Z = B$ .
3. Hacer desde  $i = 1$  hasta  $M$ :
  - a) Hallar  $F(Z)$ .
  - b) Hacer  $Z = F(Z)$ .
4. Representar  $Z$ .

Este algoritmo, aunque no es posible llevar a que haga infinitos pasos, con un  $M$  suficientemente grande, la aproximación podemos decir que es «suficientemente buena».

## 2.4. Fractales autosemejantes

Esta parte del trabajo viene principalmente de [6], aunque las notaciones han sido alteradas para coincidir con las notaciones previas de SFI.

Dentro de los fractales, existe un conjunto particular que son los fractales autosemejantes, dichos fractales, como su propio nombre indica, son fractales cuyo total es semejante a una de sus partes. Aunque esta definición es poco precisa, por lo daremos una más matemática.

**Definición 2.4.1.** *Dado  $(X, \rho)$  un espacio métrico diremos que un subconjunto  $E \subseteq X$  es autosemejante si existe un SFI  $\{f_1, \dots, f_n\}$  de  $X$  con respectivas razones contractivas  $r_i$  tales que:*

1.  $E = \bigcup_{i=1}^n f_i(E)$ .
2. Para cierto  $s \in \mathbb{R}$  ocurre que  $\mathcal{H}^s(E) > 0$  y  $\mathcal{H}^s(f_i(E) \cap f_j(E)) = 0$  si  $i \neq j$ .

**Observación 2.4.1.** *Las condiciones que hemos puesto son que  $E$  se obtiene como unión de los  $f_i(E)$ , a las que denominaremos piezas de  $E$ , y la condición más significativa, que*

dice que las intersecciones  $f_i(E) \cap f_j(E)$  para todo  $1 \leq i \neq j \leq n$  a las que denominaremos el solapamiento de las piezas de  $E$ , sean de medida nula respecto de la medida de  $E$ .

Un caso particular de esto es si las intersecciones son vacías como es, por ejemplo el caso del conjunto de Cantor.

**Definición 2.4.2.** Diremos que un SFI,  $S = \{f_1, \dots, f_n\}$  en  $(X, \rho)$  cumple la condición de abierto si existe un conjunto acotado y abierto  $V \subset X$  tal que:

1.  $F(V) = \bigcup_{i=1}^n f_i(V) \subset V$ ,
2.  $f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset$  para todo  $1 \leq i \neq j \leq n$ .

**Definición 2.4.3.** Con las notaciones anteriores, denotaremos por  $V_{i_1, \dots, i_r}$  al conjunto  $f_{i_1}(f_{i_2}(\dots(f_{i_r}(V))\dots))$ .

**Teorema 2.4.1.** Sea  $S = \{f_1, \dots, f_n\}$  un SFI de  $X$  con razones  $0 \leq r_i < 1$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , que verifica la condición de abierto. Entonces, el conjunto  $E \subseteq X$  que es autosemejante por  $S$ , cumple que existe un único  $s \geq 0$  tal que:

$$\sum_{i=1}^n (r_i)^s = 1,$$

y además

$$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty,$$

Por lo tanto,  $s = \dim_H(E)$ .

*Demostración.* La existencia de  $s$  depende de la expresión en  $\sum_{i=1}^n (r_i)^s = 1$ , que decrece monótonamente al crecer  $s$ , y cuyo máximo es  $s = 0$  donde vale  $n$ , luego existe un único valor  $s$  que verifica la igualdad anterior.

Veamos ahora que dado dicho  $s$ , ocurre que si  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ , entonces:

$$\mathcal{H}^s(f_i(E) \cap f_j(E)) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Como ya sabemos  $f_i$  es una semejanza de razón  $r_i$  por lo tanto, usando el Teorema 1.2.1 se cumple que:

$$\mathcal{H}^s(f_i(E)) \leq r_i^s \mathcal{H}^s(E),$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{H}^s(f_i(E)) \leq \mathcal{H}^s(E) \sum_{i=1}^n r_i^s = \mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^n f_i(E)\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^s(f_i(E)),$$

donde la última desigualdad se obtiene por la subaditividad de  $\mathcal{H}^s$ . Es decir, que  $E$  se descompone en los trozos  $\{f_i(E)\}_{i=1}^n$  de forma que la  $\mathcal{H}^s$  medida de  $E$  es la suma de las  $\mathcal{H}^s$  medidas de los trozos, por lo tanto la medida de dichos trozos debe de ser nula.

Ahora comprobemos que  $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$

Sea  $V$  un conjunto que determina la condición del abierto para  $\{f_1, \dots, f_n\}$  y llamemos  $\bar{V}$

a su conjunto de puntos de adherencia. Y con él, consideramos los recubrimientos  $F^k(\bar{V})$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , dichos recubrimientos nos dan la siguiente estimación de la medida de Hausdorff de  $E$ .

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \in A_k} \text{diam}(\bar{V}_{i_1, \dots, i_k})^s = \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \in A_k} (r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k})^s \text{diam}(\bar{V})^s,$$

denotando  $A_k = \left\{ \{i_1, \dots, i_k\} \subset \mathbb{N} \text{ tales que } 1 \leq i_j \leq n \right\}$ .

Ahora si elevamos a  $k$  la expresión  $\sum_{i=1}^n (r_i)^s = 1$ , nos da

$$1^k = \left( \sum_{i=1}^n (r_i)^s \right)^k = \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \in A_k} (r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k})^s$$

de donde finalmente obtenemos

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \in A_k} \text{diam}(\bar{V}_{i_1, \dots, i_k})^s = \text{diam}(\bar{V})^s.$$

Es decir que la suma de los diámetros de las piezas que forman el recubrimiento de  $F^k(\bar{V})$  elevados a  $s$  es igual al diámetro de  $\bar{V}$  elevado a  $s$ . Ahora bien, dado  $\delta > 0$ , tomando  $k$  suficientemente grande podemos conseguir que  $F^k(\bar{V})$  sea un  $\delta$ -recubrimiento de  $E$  para el que la suma de sus partes

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \in A_k} \text{diam}(\bar{V}_{i_1, \dots, i_k})^s = \text{diam}(\bar{V})^s$$

por lo que usando la definición de  $\mathcal{H}_\delta^s$  nos da que

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \text{diam}(\bar{V})^s < \infty$$

y haciendo tender  $\delta \rightarrow 0$  nos da que  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ .

Finalmente solo nos queda probar que  $\mathcal{H}^s(E) > 0$ . Consideremos una pieza cualquiera  $W$  del recubrimiento  $F^k(\bar{V})$ , que será de la forma  $W = f_{i_1}(\dots(f_{i_k}(\bar{V})))$ , entonces  $W$  contiene piezas de los recubrimientos  $F^r(\bar{V})$  si  $r > k$ , por lo tanto

$$\sum \text{diam}(\bar{V}_{i_1, \dots, i_r})^s = \text{diam}(W)^s,$$

donde el sumatorio se extiende por las piezas de  $F^r(\bar{V})$  contenidas en  $W$ .

Por lo tanto, acabamos de ver que, siendo  $W$  una copia a escala de  $\bar{V}$ , repite el mismo resultado. Por lo tanto, dado  $\epsilon > 0$  y cogiendo  $k$  suficientemente grande podemos hacer que dado una bola  $\mathbb{B}$  de radio  $\epsilon$  entonces todas las piezas de  $F^r(\bar{V})$  que están contenidas

en  $W$  y cortan a  $\mathbb{B}$  cumplen que

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_r\} \in A_r} \text{diam}(\bar{V}_{i_1, \dots, i_r})^s = \text{diam}(W)^s \leq q\epsilon^s,^2$$

siendo  $q > 0$  una constante arbitraria de  $k$  y  $\epsilon$ .

Por lo tanto cogiendo un recubrimiento de  $E$  por bolas abiertas  $E \subset \bigcup_{i=1}^p B_i$ , y tomando  $k$  suficientemente grande y  $\epsilon = \frac{\text{diam}(B_i)}{2}$  y obtenemos

$$\sum_{i=1}^p \text{diam}(B_i)^s \geq \frac{2^s}{q} \sum_{i=1}^p \left( \sum \text{diam}(\bar{V}_{i_1, \dots, i_k})^s \right),$$

donde el sumatorio del paréntesis se extiende por todas las piezas de  $F^k(\bar{V})$  que cortan a cada de las bolas  $B_i$ . Pero como vimos antes esto es lo mismo que

$$\sum_{i=1}^p \text{diam}(B_i)^s \geq \frac{2^s}{q} \text{diam}(\bar{V})^s.$$

Tomando ahora un recubrimiento finito de  $\bar{V}$  por abiertos<sup>3</sup>  $\{U_i\}_{i=1}^m$  y lo podemos encerrar en bolas  $B_i$  de doble de diámetro de  $U_i$ , por lo tanto nos da la desigualdad

$$\sum_{i=1}^m \text{diam}(U_i)^s = \sum_{i=1}^p \left( \frac{\text{diam}(B_i)}{2} \right)^s \geq \frac{\text{diam}(\bar{V})^s}{q},$$

y esta desigualdad nos da que  $\mathcal{H}^s(E) > \frac{\text{diam}(\bar{V})^s}{q} > 0$ , con lo que concluimos.  $\square$

**Observación 2.4.2.** *Este teorema además nos dice que todo conjunto autosemejante es Ahlfors regular. Y más importante, acabamos de encontrar una forma de calcular la dimensión de ciertos conjuntos fractales.*

## 2.5. Dimensión de fractales generados por SFI

Ahora podemos escribir algunas SFI de fractales ya conocidos, y con ellos podemos hallar sus dimensiones de manera eficaz. Usaremos un ejemplo sencillo de calcular, con el cual ya hemos tratado en este trabajo, el conjunto de Cantor.

**Proposición 2.5.1.** *El SFI del conjunto de Cantor es:*

$$\left\{ f_1(x) = \frac{x}{3}, f_2(x) = \frac{x+2}{3} \right\}$$

<sup>2</sup>Esto se demuestra en [6] en la página 115-116

<sup>3</sup>Esto se puede hacer porque  $V$  cumple la condición de abierto

*Demostración.* Por construcción, el conjunto de Cantor (al que denotaremos  $E$ ) son los reales contenidos en  $[0, 1]$ , cuya expresión en base 3 solo consta de  $\{0, 2\}$ , por lo tanto, a cualquier  $x \in E$ , cumple que  $f_1(x) \in E$  y  $f_2(x) \in E$ , pues la expresión de  $f_1(x)$  en base 3 es la expresión en base 3 de  $x$ , solo añadiendo un 0 al principio, y análogo para  $f_2(x)$ , solo añadiendo un 2 al principio, por lo tanto  $F(E) \subseteq E$ .

De manera similar podemos ver la inclusión contraria, por la definición de  $E$ , todo elemento de  $[0, 1]$  cuya expresión en base 3 solo posea 0 y 2, será del conjunto de Cantor. Entonces, dado un  $x \in E$  ocurre que el primer término en su expresión en base 3 o bien es 0 o bien es 2, y por lo tanto existe un  $x' \in E$ , tal que  $f_1(x') = x$  si el primer término es 0, o bien  $f_2(x') = x$  si el primer término es 2, luego  $E \subseteq F(E)$

Uniendo ambas tenemos la igualdad, con lo que terminamos.  $\square$

**Proposición 2.5.2.** *El conjunto de Cantor tiene dimensión  $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$*

*Demostración.* Las dos aplicaciones contractivas que definen al conjunto de Cantor son las siguientes

$$\left\{ f_1(x) = \frac{x}{3}, f_2(x) = \frac{x+2}{3} \right\}.$$

Ambas tienen una razón contractiva de  $\frac{1}{3}$  por lo tanto la fórmula nos da que

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s$$

Es decir que

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^s$$

Resolviendo nos da que  $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$   $\square$

Ahora sabiendo esto veremos como calcular el punto fijo de los SFI, y para ello daremos una acotación suficientemente buena del punto fijo. Para calcular esta cota daremos la siguiente fórmula.

**Lema 2.5.1.** *Dado un SFI  $\{f_1, \dots, f_n\}$  de razón contractiva  $0 \leq r < 1$ , A su punto fijo asociado y un conjunto compacto no vacío  $B$  entonces*

$$\rho_H(F^k(B), A) \leq \frac{r^k}{1-r} \rho_H(B, F(B)).$$

*Demostración.* Como  $F : X \rightarrow X$  es una aplicación contractiva de razón  $r$ , se cumple que

$$\rho(F(B), F(B')) \leq r \rho(B, B'),$$

que por inducción nos da que

$$\rho(F^n(B), F^n(B')) \leq r^n \rho(B, B').$$

Luego, si hacemos  $B' = F(B)$  nos queda

$$\rho(F^n(B), F^{n+1}(B)) \leq r^n \rho(B, F(B)).$$

Ahora, sea  $m > n$ , entonces, como  $\rho$  es una distancia, cumple la desigualdad triangular, y por lo tanto

$$\rho(F^n(B), F^m(B)) \leq \rho(F^n(B), F^{n+1}(B)) + \dots + \rho(F^{m-1}(B), F^m(B)) \leq$$

$$(r^n + \dots + r^{m-1})\rho(B, F(B)) = r^n(1 + r + r^2 + \dots + r^{m-1-n})\rho(B, F(B)) \leq \frac{r^n \rho(B, F(B))}{1 - r}.$$

Esto nos demuestra que  $\{F^n(B)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. Además,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B) = A$  es un punto fijo, pues

$$F(A) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(B)) = A.$$

Y es único, pues si suponemos por reducción al absurdo que hubiera otro punto fijo  $A'$  con  $\rho(A, A') > 0$  entonces  $\rho(A, A') = \rho(F(A), F(A')) \leq r\rho(A, A')$  y como  $0 < r < 1$  es una contradicción.

Por lo tanto haciendo  $m \rightarrow \infty$  en la desigualdad anterior nos queda que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(F^n(B), F^m(B)) = \rho(F^n(B), A) \leq \frac{r^n \rho(B, F(B))}{1 - r}.$$

□

Esto nos permite hallar una aproximación del punto fijo asociado de un SFI cualquiera, lo cual nos será muy útil en el tema a continuación.

## 2.6. Aproximación de imágenes mediante fractales

Es claro que, pese a que no haya fractales en la naturaleza, muchas estructuras son más fácilmente aproximables por fractales que por los objetos de la geometría clásica (rectas, puntos, esferas,...). Por ello, hacemos la pregunta: *¿Se puede representar cualquier imagen mediante fractales? Y de ser así, ¿cómo se hace?* Este es el tema que trataremos a continuación.

**Teorema 2.6.1.** *Sea  $(X, \rho)$  un espacio métrico y sea  $E \subset X$  un conjunto compacto, entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe un SFI  $\{f_1, \dots, f_n\}$  con punto fijo  $A$  de tal forma que  $\rho_H(E, A) < \epsilon$ .*

*Demostración.* Sea  $B_1, \dots, B_m$  una colección de bolas abiertas cuyos centros están en  $E$ , y con radios  $\leq \frac{\epsilon}{4}$ , entonces  $E \subset \bigcup_{i=1}^m B_i \subset \text{CP}(E, \frac{\epsilon}{4})$ .

Entonces definimos  $f_i : E \rightarrow B_i$  una aplicación contractiva de razón  $< \frac{1}{2}$  para todo  $1 \leq i \leq m$ , luego  $f_i(E) \subset B_i \subset \text{CP}(f_i(E), \frac{\epsilon}{2})$  para todo  $1 \leq i \leq m$ . Por lo tanto,  $\bigcup_{i=1}^m f_i(E) = F(E) \subset \text{CP}(E, \frac{\epsilon}{4})$  y además  $E \subset \bigcup_{i=1}^m \text{CP}(f_i(E), \frac{\epsilon}{2})$ , luego por definición de la métrica de Hausdorff, obtenemos que

$$\rho_H(E, F(E)) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Que por el Lema 2.5.1, obtenemos que  $\rho_H(E, A) < \epsilon$ .  $\square$

Esto es muy práctico por varios motivos, la primera, y más obvia es que podemos guardar imágenes en cualquier ordenador, no como una imagen, sino como un SFI, pues como ya vimos durante el tema, a cualquier imagen se le puede asociar un SFI con un error mínimo.

Sin embargo, este teorema no nos da una manera de obtener los SFI requeridos, solo nos garantiza su existencia. De todas formas, existen formas de hallarlas, como propone Falconer en [3] en la página 147, después del corolario 9.14. Podemos generar un punto fijo señalando el contorno (una curva, que denotaremos por  $C$ ) de una imagen  $I$ , y generar la imagen  $I$  por la unión del contorno original  $C$  y de sus imágenes por transformaciones afines contractivas. Estas copias nos determinan el SFI que buscamos, pues al hacer una transformación afín esta nos determina una aplicación contractiva que será parte del SFI.

### 2.6.1. Aproximación de imágenes en movimiento

Otro tema que nos interesa tratar con el mismo fin es el estudio de movimiento en los fractales, ya que si un SFI, puede determinar una imagen, entonces el movimiento de los fractales, puede darnos un vídeo. Luego, con una pequeña cantidad de datos, podemos crear un vídeo. Ahora veremos como:

**Lema 2.6.1.** *Para cada  $p \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  consideramos  $\{f_1(p), \dots, f_n(p)\}$  un SFI de razón  $0 \leq r(p) \leq r < 1$  con punto fijo  $A(p) \in \mathbb{K}$ . Supongamos que, para cada  $x \in X$  la función  $(f_i(p))(x) = f_i(p, x)$  es continua respecto de  $p$  en  $[\alpha, \beta]$ . Entonces para cada  $B \in \mathbb{K}$  la función  $F_B : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{K}$ , definida por*

$$F_B(p) = F_p(B) = \bigcup_{i=1}^n (f_i(p))(B) \text{ para todo } p \in [\alpha, \beta],$$

*es continua.*

*Demostración.* Sean  $B \in \mathbb{K}$ ,  $p \in [\alpha, \beta]$  y  $\epsilon > 0$  fijos y arbitrarios. Entonces para cualquier  $q \in [\alpha, \beta]$  se tiene que

$$\rho_H(F_B(p), F_B(q)) = \rho_H\left(\bigcup_{i=1}^n (f_i(p))(B), \bigcup_{i=1}^n (f_i(q))(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \rho_H\left((f_i(p))(B), (f_i(q))(B)\right) \right\},$$

donde en la desigualdad hemos usado una propiedad de la distancia de Hausdorff. Que

dice que, dadas dos familias  $\{A_i\}_{i=1}^n$  y  $\{B_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{K}$ , entonces:

$$\rho_H\left(\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcup_{i=1}^n B_i\right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \rho_H(A_i, B_i) \right\},^4$$

luego para cada  $1 \leq i \leq n$  y  $x, y \in B$  se tiene que

$$\rho(f_i(p, x), f_i(q, y)) \leq \rho(f_i(p, x), f_i(p, y)) + \rho(f_i(p, y), f_i(q, y)).$$

Por lo tanto, ya que  $[\alpha, \beta] \times B$  es compacto,  $f_i$  es continua para todo  $1 \leq i \leq n$  se tiene que  $f_i$  es uniformemente continua en  $[\alpha, \beta] \times B$  y por lo tanto existirá  $\delta_i > 0$  tal que si  $|p - q| < \delta_i$  entonces

$$\rho(f_i(p, y), f_i(q, y)) \leq \epsilon \text{ para todo } y \in B,$$

por lo tanto

$$\rho(f_i(p, x), f_i(q, y)) \leq \rho(f_i(p, x), f_i(p, y)) + \epsilon \text{ para todo } x, y \in B,$$

entonces ocurre que

$$\rho(f_i(p, x), f_i(q, B)) = \min_{y \in B} \{ \rho(f_i(p, x), f_i(q, y)) \} \leq \min_{y \in B} \{ \rho(f_i(p, x), f_i(p, y)) + \epsilon \} = \epsilon,$$

para todo  $x \in B$ . Entonces para todo  $x, y \in B$  si  $|p - q| < \delta_i$  ocurre que

$$\rho_H(f_i(p, B), f_i(q, B)) \leq \epsilon,$$

por lo tanto si  $|p - q| < \min_{1 \leq i \leq n} \{ \delta_i \}$  entonces

$$\rho_H(F_B(p), F_B(q)) \leq \epsilon,$$

con lo que concluimos que  $F_B$  es continua.  $\square$

**Teorema 2.6.2.** *Para cada  $p \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  consideramos  $\{f_1(p), \dots, f_n(p)\}$  un SFI de razón  $0 \leq r(p) \leq r < 1$  con punto fijo  $A(p) \in \mathbb{K}^n$ . Supongamos que, para cada  $x \in X$  la función  $(f_i(p))(x) = f_i(p, x)$  es continua respecto de  $p$  en  $[\alpha, \beta]$ , entonces el punto fijo  $A(p)$  depende continuamente de  $p \in [\alpha, \beta]$ .*

*Demostración.* Sea  $p \in [\alpha, \beta]$  y  $\epsilon > 0$  entonces para todo  $q \in [\alpha, \beta]$  se cumple que

$$\begin{aligned} \rho_H(A(p), A(q)) &= \rho_H(F_p(A(p)), F_q(A(q))) \leq \rho_H(F_p(A(p)), F_q(A(p))) + \rho_H(F_q(A(p)), F_q(A(q))) \leq \\ &\leq \rho_H(F_p(A(p)), F_q(A(p))) + r(q)\rho_H(A(p), A(q)), \end{aligned}$$

por la contractividad de  $F_q$ . Luego

$$\rho_H(A(p), A(q)) \leq \frac{1}{1 - r(q)} \rho_H(F_p(A(p)), F_q(A(p))) \leq \frac{1}{1 - r} \rho_H(F_{A(p)}(p), F_{A(p)}(q)),$$

---

<sup>4</sup>Ver [9] Proposición 2.3.2

y aplicando el lema existirá  $\delta > 0$  tal que si  $|p - q| \leq \delta$  entonces

$$\rho_H(F_{A(p)}(p), F_{A(p)}(q)) \leq \epsilon(1 - r),$$

de donde obtenemos que

$$\rho_H(A(p), A(q)) \leq \epsilon.$$

Como queríamos demostrar. □

Con estos resultados podemos ahora ver que dada una imagen cualquiera  $I$ , entonces tenemos que el movimiento que dé el parámetro  $p$ , será un movimiento continuo, por lo tanto podemos obtener casos como la siguiente hoja.

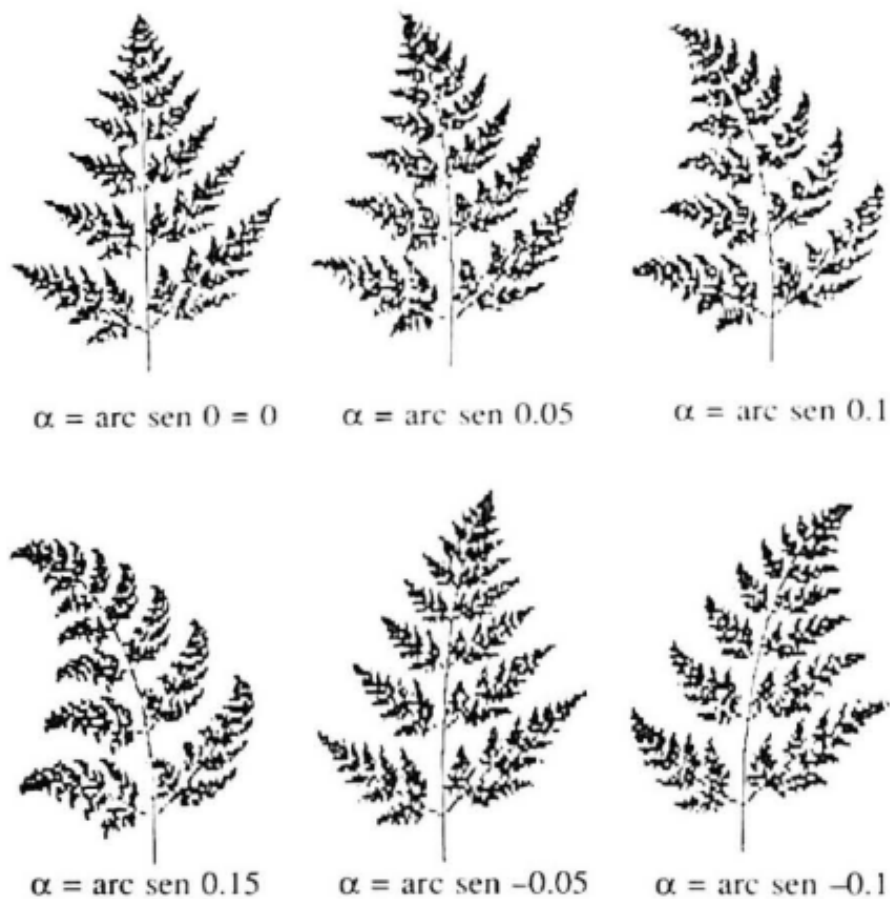


Figura 2.1: Imagen de una hoja moviéndose en función del parámetro  $\alpha$ , obtenida de [6]

# Capítulo 3

## Series fractales

Este capítulo se basa en una clase de fractales específica descubierta en 1988 por M. Morán, basada en la construcción de fractales a partir de series, y está basada en el trabajo de Morán [8] y además en el libro [6] en las páginas 125-134.

**Definición 3.0.1.** Sea  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  una serie absolutamente convergente de elementos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces llamamos conjunto asociado a la serie, al conjunto de las sumas de todas sus subseries, es decir

$$E = \left\{ \sum_{i \in I} a_i : I \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

**Observación 3.0.1.** La convergencia absoluta de la serie, nos garantiza que todas las subseries  $\sum_{i \in I} a_i$  también convergen absolutamente y por lo tanto el conjunto  $E$  está bien definido.

Además cabe destacar, que el valor de la suma no depende del orden en que se pongan los elementos de  $I$ .

**Definición 3.0.2.** Diremos que una serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  es fractal si su conjunto asociado  $E$  es tal que  $\#(E) = \aleph_1$  y su medida de Lebesgue es nula, es decir,  $\mathcal{L}^m(E) = 0$ , siendo  $0 \leq m \leq n$  el menor valor tal que todos los  $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ , salvo a lo mucho un número finito, están en un subespacio  $V \subset \mathbb{R}^n$ , con  $\dim_{\mathbb{R}}(V) = m$

Para entender mejor esto último, consideremos la serie absolutamente convergente en  $\mathbb{R}^2$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} \right).$$

Podemos ver que  $E = \{(x, x) \text{ tales que } x \in [0, 1]\}$ , que es un segmento, y por lo tanto  $\mathcal{L}^2(E) = 0$ . Sin embargo, como todos los términos de la sucesión están en la diagonal  $(x, x)$ , están en un subespacio de dimensión 1, y por lo tanto tenemos que calcular  $\mathcal{L}^1(E)$ , que esto nos da  $\mathcal{L}^1(E) = \sqrt{2} \neq 0$ , por lo tanto la serie no es fractal.

**Observación 3.0.2.** Aunque las condiciones anteriores parecen arbitrarias, son necesarias para tener un conjunto con una cantidad suficiente de números. Si tiene el cardinal

del continuo, y tiene medida nula en el espacio que contiene a casi todos sus términos entonces tenemos conjuntos buenos donde poder dar resultados.

**Definición 3.0.3.** Definimos el conjunto  $E_k^+$  como el conjunto asociado a la serie  $\sum_{i \geq k} a_i$ , y consecuentemente definimos el conjunto  $E_k^-$  al conjunto asociado a la serie  $\sum_{i < k} a_i$ .

**Definición 3.0.4.** Dada una serie  $\sum_{i \geq 0} a_i$  definimos  $R_k$  como  $\sum_{i=k}^{\infty} \|a_i\|$

**Observación 3.0.3.** Si  $x \in E_k^+$  tenemos que  $\|x\| < R_k$ , y por lo tanto  $E_k^+ \subseteq \mathbb{B}(0, R_k)$ , que implica que  $\text{diam}(E_k^+) \leq 2R_k$

**Definición 3.0.5.** Dada una serie  $\sum_{i \geq 0} a_i$  definimos  $\rho_k$  como

$$\rho_k = \#\left\{ \sum_{i \in I} a_i : I \subset \{0, \dots, k-1\} \right\}.$$

**Observación 3.0.4.** Se comprueba que  $\rho_k = \#(E_k^-)$ .

**Definición 3.0.6.** Sea  $\sigma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  la aplicación que a cada subconjunto  $I \subset \mathbb{N}$  le asocia la suma de la subserie  $\sum_{i \in I} a_i$ . Llamaremos  $k$ -recubrimiento estándar de  $E$  a la descomposición

$$E = \bigcup_{I \subseteq \{0, \dots, k-1\}} (\sigma(I) + E_k^+).$$

**Observación 3.0.5.** Por definición diremos que  $\sigma(\emptyset) = 0$ . Y además  $\sigma$  es una medida.

**Definición 3.0.7.** Diremos que la serie  $\sum_{i \geq 0} a_i$  es rápidamente convergente si y solo si para todo  $i \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $\|a_i\| > R_i$ , es decir,  $\|a_i\| > \sum_{k > i} \|a_k\|$ .

**Observación 3.0.6.** Como se puede ver fácilmente si  $E$  es el conjunto asociado a la serie  $\sum_{i \geq 0} a_i$ , entonces  $E = \sigma(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .

**Proposición 3.0.1.** Si la serie  $\sum_{i \geq 0} a_i$ , es rápidamente convergente, entonces la medida  $\sigma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es inyectiva.

*Demostración.* Sean  $I \neq J \subset \mathbb{N}$ , y sea  $i \in \mathbb{N}$  el menor natural del conjunto  $(I \cup J) - (I \cap J)$ , entonces tenemos que  $\|\sigma(I) - \sigma(J)\| \geq \|a_i\| - R_i > 0$ , esta última desigualdad es por ser  $\sum_{i \geq 0} a_i$ , rápidamente convergente. Por lo tanto, al ser  $\sigma(I) \neq \sigma(J)$ , concluimos que  $\sigma$  es inyectiva.  $\square$

Todo esto es necesario para demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 3.0.1.** Una condición suficiente para que una serie  $\sum_{i \geq 0} a_i$  de vectores de  $\mathbb{R}^n$  sea fractal es:

1. Exista a lo mucho un número finito de elementos  $a_i = 0$ .
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k R_k^m = 0$  con  $a_i \in V$  salvo a lo mucho un número finito y  $\dim_{\mathbb{R}}(V) = m$ .

*Demostración.* Como podemos deducir, la condición 1. es necesaria para que  $\#(E) = \aleph_1$  y la condición 2. es necesaria para que  $\mathcal{L}^m(E) = 0$ . Entonces veamos la primera parte. En función de la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  ocurren 2 resultados.

1. Si la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  es rápidamente convergente  $E$  tiene el cardinal del continuo, pues como vimos en el teorema anterior,  $\sigma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es inyectiva, y  $E = \sigma(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .
2. Si la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  no es rápidamente convergente, entonces podemos coger una subserie  $\sum_{j \in I} a_j$ , con  $I \subset \mathbb{N}$  que sí sea rápidamente convergente, y por lo tanto su conjunto asociado tenga el cardinal del continuo.

Solo nos queda comprobar que  $\mathcal{L}^m(E) = 0$ .

Tenemos que

$$\mathcal{L}^m(E) \leq \sum_{I \subset \{0, \dots, k-1\}} \text{vol}(\sigma(I) + E_k^+) \leq c_m 2^m \rho_k R_k^m,$$

donde  $c_m$  es la constante dada como la proporción entre el volumen de una bola en  $m$  dimensiones y su radio<sup>1</sup>. Esta última desigualdad es debida a que  $E_k^+ \subset \mathbb{B}(0, R_k)$  como vimos en 3.0.3, y por lo tanto  $\text{diam}(E_k^+) \leq \text{diam}(\mathbb{B}(0, R_k)) = 2R_k$ , y por lo tanto  $\text{vol}(E_k^+) \leq \text{vol}(\mathbb{B}(0, R_k)) = c_m 2^m R_k^m$  y  $\rho_k$  viene de los  $\sigma(I)$ .

Por lo tanto, si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k R_k^m = 0$  nos da que  $\mathcal{L}^m(E) \leq 0$  por lo tanto como  $\mathcal{L}^m(E) \geq 0$  nos queda que  $\mathcal{L}^m(E) = 0$ .  $\square$

**Observación 3.0.7.** Como  $0 \leq \rho_k \leq 2^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  entonces solo es necesario comprobar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k R_k^m = 0.$$

**Observación 3.0.8.** Si la serie es absolutamente convergente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = 0$ , por lo tanto  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(E_k^+) = 0$ .

### 3.1. Construcción y propiedades de series fractales

Una vez definidas las series fractales, daremos el proceso recursivo que nos permite construirlas, o al menos un número razonable de pasos.

Sea  $\sum_{i \geq 0} a_i$  una serie absolutamente convergente de elementos de  $\mathbb{R}^n$ , como acabamos de ver  $E_k^+ \subseteq \mathbb{B}(0, R_k)$  por lo que, para todo  $1 \leq i < k$  se verifica que

$$a_i + E_k^+ \subseteq \mathbb{B}(a_i, R_k).$$

Usaremos estas bolas para construir  $E$  mediante un proceso de intersección.

Comenzamos con el conjunto  $\mathcal{F}_0 = \mathbb{B}(0, R_0)$  que claramente  $E \subseteq \mathcal{F}_0$ , a continuación consideramos las dos bolas  $\mathbb{B}(0, R_1)$  y  $\mathbb{B}(a_0, R_1)$  contenidas en  $\mathcal{F}_0$ . Que como vimos antes contienen a  $E_1^+$  y a  $a_0 + E_1^+$  respectivamente. Y llamaremos  $\mathcal{F}_1 = \mathbb{B}(0, R_1) \cup \mathbb{B}(a_0, R_1)$ .

<sup>1</sup>Es expresable en términos de la función  $\Gamma$ , pero no necesitamos esto.

Recursivamente obtenemos el conjunto

$$\mathcal{F}_k = \bigcup_{x \in E_k^-} \mathbb{B}(x, R_k),$$

que contiene al  $k$ -recubrimiento estándar de  $E$  y por lo tanto a  $E$ . Además si  $E$  es cerrado, se cumple la siguiente proposición:

**Proposición 3.1.1.** *Dada una serie  $\sum_{i \geq 0} a_i$ , entonces si su conjunto asociado  $E$  es cerrado, ocurre que la familia de recubrimientos  $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $E$ , está compuesta por un número finito de bolas y  $\mathcal{F}_{k+1} \subset \mathcal{F}_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, se cumple que*

$$E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_k.$$

*Demostración.* Como se cumple que  $E \subseteq \mathcal{F}_k$  para todo  $k \geq 0$  entonces se cumple que

$$E \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_k.$$

Además sea  $z \notin E$ , como  $E$  es cerrado existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $\mathbb{B}(z, \epsilon) \cap E = \emptyset$ . Como  $R_k$  tiende a 0 tomando  $k$  suficientemente grande, puede conseguirse que  $R_k < \epsilon$ . Ahora bien, todos los puntos de  $\mathcal{F}_k$  están a una distancia menor que  $\epsilon$  del centro de alguna de las bolas  $\mathbb{B}(x, R_k)$  siendo  $x \in E_k^+ \subset E$ , por lo tanto  $z$  no puede pertenecer a ninguna de ellas, y tampoco a  $\mathcal{F}_k$ . Por esto

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_k \subseteq E,$$

con lo que concluimos que

$$E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_k.$$

□

Con esto acabamos de demostrar que la forma de obtener una serie fractal es mediante la construcción de las bolas cuyos centros son el origen y los elementos de  $E$  y sus radios son los correspondientes  $R_k$ , pero solo si  $E$  es cerrado, ahora demostraremos que  $E$  es cerrado.

**Proposición 3.1.2.** *Dada una serie  $\sum_{i \geq 0} a_i$ , entonces su conjunto asociado  $E$  es compacto.*

*Demostración.* Podemos construir la aplicación

$$\psi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

tal que a toda sucesión  $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$  se le asocia el término  $\sum_{i \geq 0} a_i \cdot \alpha_i$ . Entonces consideramos en  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , la distancia

$$d : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty) \mapsto d(\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty),$$

tal que cumple:

1.  $d(\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\alpha_n\}_{n=0}^\infty) = 0$ .
2.  $d(\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty) = \frac{1}{2^n}$  con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  el primer término tal que  $\alpha_n \neq \beta_n$ .

Con esta distancia  $(\{0, 1\}^\mathbb{N}, d)$  es un espacio compacto, pues dotando a  $\{0, 1\}$  de la topología discreta es un espacio topológico compacto y por el teorema de Tychonoff, el producto directo de espacios topológicos compactos es compacto. Además  $E = \text{Im}(\psi)$ , luego solo hace falta demostrar que con sendas distancias,  $\psi$  es continua.

Sea  $\epsilon > 0$ , y sea  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n \geq M} \|x_n\| < \epsilon$ . Sea  $0 < \delta < \frac{1}{2^M}$ , entonces si  $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \beta = \{\beta_n\}_{n=0}^\infty \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$  cumpliendo  $d(\alpha, \beta) < \delta$ , se verifica que  $d(\alpha, \beta) < \frac{1}{2^M}$  y por lo tanto  $m > M$ , siendo  $m \in \mathbb{N}$  el primer natural tal que  $\alpha_m \neq \beta_m$ .

Con esto tenemos que  $\alpha_n = \beta_n$  para todo  $n \leq M$ , por lo tanto

$$\psi(\beta) - \psi(\alpha) = \sum_{n > M} (\beta_n - \alpha_n) a_n,$$

y como  $\|\beta_n - \alpha_n\| \leq 1$ ,<sup>2</sup> entonces nos queda

$$|\psi(\beta) - \psi(\alpha)| \leq \sum_{n > M} |\beta_n - \alpha_n| \|a_n\| \leq \sum_{n > M} \|a_n\| < \epsilon,$$

por lo que deducimos que  $\psi$  es continua. □

Por lo tanto, como el conjunto  $E$  es compacto en  $\mathbb{R}^n$ , y usando el teorema de Heine-Borel es en particular cerrado, como queríamos ver.

Ahora tomaremos ciertas clases de series y veremos las propiedades necesarias para que sean series fractales.

**Proposición 3.1.3.** *Sea  $\sum_{k \in \mathbb{N}} r^k$  con  $r \in \mathbb{R}$  una serie geométrica, entonces la serie es fractal cuando  $0 < |r| < \frac{1}{2}$*

*Demostración.* Tenemos que

$$R_k = \sum_{i \geq k} \|a_i\| = \sum_{i \geq k} |r|^i = \frac{|r|^k}{1 - |r|}$$

Entonces para que se cumpla la condición vista en el Teorema 3.0.1, tiene que pasar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2|r|)^k}{1 - |r|} = 0$$

---

<sup>2</sup>Porque solo toma valores  $-1, 0, 1$ .

Es decir que

$$2|r| < 1 \text{ por lo tanto } |r| < \frac{1}{2}$$

□

**Proposición 3.1.4.** *Si la serie geométrica es compleja, es decir,  $r \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  entonces es serie fractal si  $0 < |r| < \frac{\sqrt{2}}{2}$*

*Demostración.* Es análogo a la demostración anterior. □

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $\sum_{i \geq 0} a_i(x - x_0)^i$  el desarrollo de potencias de una función analítica no polinómica, en torno a  $x_0$  con radio de convergencia  $\rho$  entonces si  $a_i \in \mathbb{R}$  para todo  $i \geq 0$ , ocurre que para todo  $t \in \mathbb{B}(x_0, \frac{\rho}{2}) - \{x_0\}$ , la serie  $\sum_{i \geq 0} a_i(t - x_0)^i$  es fractal.*

*Demostración.* Sea  $r_0 < \frac{\rho}{2}$  tal que  $|t - x_0| < r_0$ , entonces se cumple que

$$R_k = \sum_{i \geq k} \|a_i\| |t - x_0|^i < \sum_{i \geq k} \|a_i\| r_0^i.$$

Por lo tanto

$$2^k R_k < \sum_{i \geq k} \|a_i\| (2r_0)^i,$$

y como  $2r_0 < \rho$  la expresión tiende a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ , por lo tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k R_k = 0,$$

por lo tanto cumple la condición, luego es serie fractal. □

## 3.2. Dimensión de series fractales

Ahora acabaremos el tema, calculando la dimensión de las series fractales, esta parte viene sobre todo de [8], y es necesario conocer unos resultados previos.

**Teorema 3.2.1** (Teorema de representación de Riesz). <sup>3</sup> *Dado  $X$  un espacio de Hilbert y  $\phi$  es un funcional lineal positivo sobre las funciones continuas con soporte compacto de  $X$  (que denotaremos  $C_c(X)$ ), entonces existe una única medida de Radon  $\mu$  en  $X$  tal que  $\phi(f) = \int f d\mu$  para todo  $f \in C_c(X)$ . Además  $f$  satisface:*

1.  $\mu(U) = \sup\{\phi(f) \text{ tales que } f \prec U\}$ , para todo  $U \subset X$  abierto.
2.  $\mu(K) = \inf\{\phi(f) \text{ tales que } f \geq \chi_K\}$  para todo  $K \subset X$  compacto.

**Definición 3.2.1.** *Denotaremos  $E_{I,j} = \sigma(I) + E_{j+1}^+$  para todo  $I \subset \{0, \dots, j\}$*

**Lema 3.2.1.** *Existe una medida Borel  $\mu$  soportada en  $E$  tal que*

---

<sup>3</sup>Este teorema no se ve durante el grado pero es necesario saberlo para el lema siguiente viene mejor explicado en [5]

- $\mu(E) = 1$ .
- $\mu(E_{I,j}) = \frac{1}{2^{j+1}}$  para todo  $I \subset \{0, \dots, j-1\}$ .

*Demostración.* Consideramos el espacio  $C(E, \mathbb{R})$  (funciones continuas de  $E$  en  $\mathbb{R}$ ) y definimos la función lineal  $\phi : C(E, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m$  siendo

$$\phi_m(f) = \sum_{I \subset \{0, \dots, m-1\}} \frac{f(\sigma(I))}{2^m}$$

Antes de nada hay que comprobar que la definición tiene sentido, primeramente como  $E$  es compacto, y  $f$  es uniformemente continua. Después, consideramos  $\epsilon > 0$ , luego fijando  $p$  tal que la variación de  $f$  sobre  $E_{I,p}$  es  $< \epsilon$ , tomando  $m' > m > p$  y llamando  $r = m' - m$  nos da que

$$\begin{aligned} |\phi_{m'}(f) - \phi_m(f)| &= \left| \sum_{I \subset \{0, \dots, m'-1\}} \frac{f(\sigma(I))}{2^{m'}} - \sum_{J \subset \{0, \dots, m-1\}} \frac{f(\sigma(J))}{2^m} \right| \\ &= \left| \sum_{J \subset \{0, \dots, m-1\}} \frac{[f(\sigma(J \cap \{0, \dots, m'\})) - f(\sigma(J))]}{2^{m'}} \right| < \epsilon, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se cumple porque  $\sigma(J \cap \{0, \dots, m'\})$  y  $\sigma(J)$  pertenecen a  $E_{J \cap \{0, \dots, m'\}}$ . Por lo tanto, el límite existe y  $\phi$  es lineal.

Entonces, por el teorema de representación de Riesz, existe una medida de Borel  $\mu$  en  $\mathbb{R}^n$  soportada en  $E$  tal que

$$\int f d\mu = \phi(f).$$

Por lo tanto, tomando  $f$  como la función característica de  $E_{I,j}$  tenemos que  $\mu(E_{I,j}) = \frac{1}{2^{j+1}}$  y trivialmente deducimos que  $\mu(E) = 1$   $\square$

**Lema 3.2.2.** *Existe un  $q \in \mathbb{R}$  tal que para cualquier bola  $\mathbb{B}(x, r)$ , podemos elegir un  $p \in \mathbb{N}$   $R_p < r$  y por lo tanto el número de elementos de  $E_{I,j}$  que intersecan a la bola  $\mathbb{B}(x, r)$  es menor que el mencionado  $q$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathbb{B}(x, r)$  una bola cualquiera de radio  $r$  y escogemos  $p \in \mathbb{N}$  de tal forma que  $r > R_p$ , entonces la intersección del  $p$ -recubrimiento de  $E$  que intersecan a  $\mathbb{B}(x, r)$  están contenidos en una bola  $\mathbb{B}(x, 3r)$ , ya que para cada  $E_{I,p}$  se tiene que

$$\text{diam}(E_{I,p}) < |2R_p| < \text{diam}(\mathbb{B}(x, r)).$$

Ahora para cada uno de los  $E_{I,p}$  consideramos la bola  $\mathbb{B}(\sigma(I), s)$  siendo

$$s = \min_{I \neq J \subset \{0, \dots, p-1\}} \left\{ \frac{\|\sigma(I) - \sigma(J)\|}{2} \right\}.$$

Luego si suponemos  $s \geq r$  las bolas no pueden intersecarse entre sí, y además cada uno de los  $E_{I,p} \subset \mathbb{B}(\sigma(I), s)$  y por lo tanto  $\mathbb{B}(\sigma(I), s) \subset \mathbb{B}(x, 3r)$  y además la cantidad de

elementos en  $E_{I,p} \cap \mathbb{B}(x, r)$ , que denotaremos  $q_p$ , no puede ser mayor que  $3^n$ , en caso contrario, la suma de volúmenes de las bolas  $\mathbb{B}(\sigma(I), s)$  sería superior al de  $\mathbb{B}(x, 3r)$  lo cual contradiría lo visto hasta ahora. Luego  $q_p$  tiene una cota superior independiente de  $p$ .

Si suponemos ahora que  $s < r$ , entonces las bolas  $\mathbb{B}(\sigma(I), s)$  con  $I \subset \{0, \dots, k-1\}$  tal que  $E_{I,p} \cap \mathbb{B}(\sigma(I), s) \neq \emptyset$ , están contenidas en  $\mathbb{B}(x, 3r)$ , tomando  $q_p$  como antes, nos da que  $q_p s^n < (3r)^n$ . Por la inyectividad de  $\sigma$ ,  $r$  es positivo y  $q_p < \left(\frac{3r}{s}\right)^n$ . Además también se cumple que

$$s \geq \min_{0 \leq i \leq p} \left\{ \frac{\|a_i\| - R_i}{2} \right\} = \frac{\|a_j\| - R_j}{2}$$

Excluyendo el caso  $p = 0$ , que es trivial, la elección de  $p$  nos da que  $r < R_{p-1} = \|a_p\| + R_p = \|a_j\| + R_j$  por lo que nos queda que

$$q_p \leq \left( 6 \frac{\|a_j\| + R_j}{\|a_j\| - R_j} \right)^n = \left( 6 \frac{1 + \frac{R_j}{\|a_j\|}}{1 - \frac{R_j}{\|a_j\|}} \right)^n$$

Y escogiendo  $M > 0$  tal que  $\frac{R_j}{\|a_j\|} < M < 1$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Entonces nos queda que

$$q_p \leq \left( \frac{12}{1-M} \right)^n = q$$

□

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $\sum_{i \geq 0} a_i$  una serie de elementos de  $\mathbb{R}^n$  absolutamente convergente, y sea  $E$  su conjunto asociado, entonces tenemos que:*

1.  $\dim_H(E) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} -\frac{\log(\rho_k)}{\log(R_k)} = k$
2. Si  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{R_k}{\|a_k\|} \right\} < 1$  ocurre que  $\dim_H(E) = k \leq 1$

*Demostración.*

1. Sean  $r > k$  y  $\delta > 0$  e  $i > 0$  tal que el  $i$ -recubrimiento estándar de  $E$  es un  $\delta$ -recubrimiento, y además  $t = -\frac{\log(\rho_i)}{\log(R_i)} < r$  entonces para este recubrimiento

$$\sum_{I \subset \{0, \dots, k-1\}} \text{diam}(\{\sigma(I) + E_{i+1}^+\})^r \leq \rho_i (2R_i)^r < 2^r \rho_i R_i^t = 2^r,$$

y como podemos suponer  $R_i < 1$ , simplemente cogiendo un  $i > 0$  mayor si fuese preciso, nos queda que  $\mathcal{H}_\delta^r(E) < 2^r$  haciendo  $\delta \rightarrow 0$  nos da que  $\mathcal{H}^r(E) \leq 2^r$ , luego como esto se cumple para todo  $r > k$  entonces  $\dim_H(E) \leq k$

2. Para probar esto hay que tomar la medida Borel  $\mu$  de  $E$  tal que

- $\mu(E) = 1$
- $\mu(\sigma(I) + E_{j+1}^+) = \mu(E_{I,j}) = \frac{1}{2^{j+1}}$  para todo  $I \subset \{0, \dots, j\}$

Con esto y usando los dos lemas anteriores y dado un  $s < k$  (diferente al de antes), veamos que  $\mathcal{H}^s(E) > 0$ . Fijamos  $j$  de tal forma que dado  $p > j$  y  $0 < \delta < 1$  entonces

$$s < -\frac{\log(2^{p+1})}{\log(R_p)} \text{ y } \delta < R_j$$

Ahora cogiendo un  $\delta$ -recubrimiento  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de  $E$  tal que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^s < \mathcal{H}^s(E) + \frac{1}{q},$$

siendo  $q$  la cota del lema anterior. Podemos entonces recubrir  $E$  por bolas  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tales que  $\text{diam}(B_i) < 2 \text{diam}(U_i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , de tal forma que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^s \geq 2^{-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_i)^s.$$

Para cada  $B_i$  tenemos que

$$\sigma(B_i) \leq \sum \sigma(E_{I,p}),$$

donde la suma se define sobre todos los  $E_{I,p}$  tales que  $B_i \cap E_{I,p} \neq \emptyset$ , y escogiendo  $p$  como en el lema anterior. Por lo tanto, por los dos lemas previos, tenemos que  $\sigma(B_i) \leq \frac{q}{2^{p+1}}$ . Y como  $p$  es tal que  $2R_p < \text{diam}(B_i) < 2R_j$ , por ser  $p > j$ , nos da el resultado

$$R_p < \frac{\text{diam}(B_i)}{2} \leq \text{diam}(U_i) < \delta < 1.$$

Si llamamos  $s_p = \frac{\log(2^{p+1})}{\log(R_p)}$ , y usando el lema anterior, obtenemos que

$$\sigma(B_i) \leq \frac{q}{2^{p+1}} = qR_p^{s_p} < qR_p^s < q2^{-s} \text{diam}(B_i)^s,$$

entonces como  $\mu(E) = 1$  nos da que

$$1 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) < q2^{-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_i)^s \leq q \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^s < q \left( \mathcal{H}^s(E) + \frac{1}{q} \right).$$

Lo que nos demuestra que  $\mathcal{H}^s(E) > 0$ , finalmente para ver que  $k \leq 1$  usamos que  $\|a_0\| > 2^i R_i$  para todo  $i \geq 0$ , ya que  $\sum_{i \geq 0} a_i$  es rápidamente convergente.

□

Visto esto podemos ahora calcular las dimensiones de una serie fractal cualquiera.

**Proposición 3.2.1.** *La serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  es una serie fractal. Y su conjunto*

asociado tiene dimensión de Hausdorff igual a  $\frac{\log(2)}{\log(3)}$ .

*Demostración.* Dada la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ , tenemos que

$$R_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2 \cdot 3^{k-1}},$$

luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k R_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k-1}}{3^{k-1}} = 0.$$

De esto concluimos que es una serie fractal. Ahora su dimensión. Como ya vimos

$$\dim_H(E) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} -\frac{\log(\rho_k)}{\log(R_k)} = \liminf_{k \rightarrow \infty} -\frac{\log(2^k - 1)}{\log\left(\frac{3^{1-k}}{2}\right)} = \frac{\log(2)}{\log(3)},$$

y como

$$\frac{R_k}{\|a_k\|} = \frac{3}{2} > 1 \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

no podemos concluir que haya igualdad con este método. Sin embargo, podemos construir una biyección entre el conjunto asociado a la serie  $E$  y el conjunto de Cantor (al que denotaremos  $E'$ ), de tal forma que:

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E', \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^n} &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{3^n}. \end{aligned}$$

Porque como ya sabemos el conjunto de Cantor son los términos en  $[0, 1]$  cuya expresión decimal en base 3 no posee ningún término igual a 1, luego cambiando por  $\phi$  todos los 1 por 2 obtenemos el conjunto de Cantor, y por lo tanto  $\dim_H(E) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ .  $\square$

# Capítulo 4

## Conjuntos de Julia y Mandelbrot

A partir de ahora, el texto se volverá más divulgativo, principalmente se omitirán las demostraciones por la limitación de espacio que se exige en el trabajo. Eso sí, se comentarán todos los resultados importantes, aunque todo detalle será citado en la bibliografía. En particular esta parte viene de [2] y [6].

Este capítulo tratará de algunas clases de fractales que aparecen de forma natural en los sistemas dinámicos complejos. Pese a que es un tema bastante nuevo, empezado en el comienzo del siglo XX, y realmente trabajado a partir de mediados del mismo, los sistemas dinámicos son muy útiles y versátiles, y empezaremos hablando de algunos usos que tienen:

En 1976, el biólogo Robert May, publicó un modelo para el estudio de la evolución de ciertas poblaciones de insectos, que tenía la siguiente fórmula

$$P(n+1) = kP(n)(L - P(n)),$$

donde  $P(n)$  es la población del año  $n$ .  $L$  es la población máxima estimada, y  $k$  es una constante que depende únicamente del tipo de población y su ubicación, (es decir, que no depende de  $n$ ). Si en la anterior ecuación dividimos por  $L$  y llamamos  $x_n = \frac{P(n)}{L}$  nos da el sistema dinámico.

$$x_{n+1} = Kx_n(1 - x_n),$$

siendo  $K = k \cdot L$ , además como es lógico  $0 \leq x_n \leq 1$ . Para hallar  $x_{n+1}$  necesitamos que tome un valor aceptable, es decir  $0 \leq x_{n+1} \leq 1$  y para ello debemos limitar el valor de  $K$ , (un cálculo rápido nos determina que  $0 < K \leq 4$ ).

Esta ecuación popularmente se conoce como la *ecuación logística discreta*, ya conocida en el campo de las matemáticas, pero gracias a la publicación de May, fue extendida al campo de la biología y aumentó el interés de los sistemas dinámicos.

Sabiendo esto, ahora definimos  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = Kx(1 - x)$ , luego si estudiamos  $f$  podremos conocer el avance de la población de un año a otro. Ahora comencemos con la parte matemática del tema, y para ello empezaremos definiendo sistema dinámico.

**Definición 4.0.1.** El par  $(X, f)$  con  $X$  un conjunto no vacío y  $f : X \rightarrow X$  es lo que denominaremos como sistema dinámico.

**Definición 4.0.2.** Dado un sistema dinámico  $(X, f)$ , y  $x \in X$ , llamaremos órbita de  $x$  a  $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ .

Con las órbitas, podemos determinar el avance de la población de una manera sencilla desde el punto de vista computacional. Pues es solamente iterar un punto, un número determinado de veces. De esta forma podemos ver como avanzan las poblaciones de insectos y animales, y ver cuándo pueden convertirse en un problema.

**Definición 4.0.3.** En un sistema dinámico  $(X, f)$  un punto  $x_0 \in X$  se llama punto periódico de periodo  $n > 1$  si  $f^n(x_0) = x_0$  y  $f^i(x_0) \neq x_0$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .

**Definición 4.0.4.** Las órbitas de los puntos periódicos las llamaremos órbitas periódicas.

**Definición 4.0.5.** Sea  $(X, \rho)$  un espacio métrico y sea  $|\cdot|$  su norma asociada, entonces si  $(X, f)$  es un sistema dinámico diferenciable, es decir,  $f : X \rightarrow X$  es diferenciable, y dado  $x_0 \in X$  un punto periódico de periodo  $n$ , con  $\lambda = (f^n)'(x_0)$ . Entonces llamaremos al punto  $x_0$  y a su órbita:

- *superatractivo* si  $\lambda = 0$ ,
- *atractivo* si  $0 < |\lambda| < 1$ ,
- *indiferente* si  $|\lambda| = 1$ ,
- *repulsivo* si  $|\lambda| > 1$ .

Toda esta parte está explicada con mayor detalle y profundidad en [2].

## 4.1. Sistemas dinámicos complejos y conjuntos de Julia

A partir de ahora nos centraremos en sistemas dinámicos de la forma  $(\mathbb{C}, f)$  (siendo  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función diferenciable), en sus características y en lo que ahora definiremos como conjuntos de Julia.

**Definición 4.1.1.** Dado un sistema dinámico complejo  $(\mathbb{C}, f)$  se define el conjunto de Julia asociado a  $f$  como

$$J(f) = \overline{\{x \in \mathbb{C} : x \text{ es periódico repulsivo}\}}$$

Aunque la determinación de un conjunto de Julia es un proceso complicado que depende directamente de la  $f$ , hablaremos de la obtención del conjunto de Julia en el caso cuadrático y daremos nociones de como llevarlo al caso general.

**Definición 4.1.2.** Llamaremos sistema dinámico complejo cuadrático a  $(\mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c)$  con  $c \in \mathbb{C}$  fijo y arbitrario

**Observación 4.1.1.** *El proceso de obtener el conjunto de Julia de  $f_c$ , es equivalente a hacer el proceso inverso, es decir, dado  $f_c^{-1}(z) = \pm\sqrt{z-c}$  o su valor negativo, con  $c \in \mathbb{C}$  arbitrario, entonces para todo  $K \subset \mathbb{C}$  se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^{-n}(K) = J(f_c),$$

donde la convergencia se extiende en la métrica de Hausdorff (previamente definida en el capítulo 3 como  $\rho_H$ ). Pero como  $f_c^{-1}(z)$  lo componen dos funciones  $g_1(z) = \sqrt{z-c}$  y  $g_2(z) = -\sqrt{z-c}$ , entonces definimos

$$f_c^{-1}(K) = g_1(K) \cup g_2(K).$$

Luego esto nos dice que el proceso de construcción de este conjunto de Julia es análogo a la construcción del punto fijo de un SFI como vimos en el Algoritmo 2.3.1. Por lo tanto podemos usar un algoritmo similar.

Veamos ahora otro ejemplo de conjunto de Julia. Consideremos el sistema dinámico complejo  $(\mathbb{C}, f_c = ce^z)$  con  $c \in \mathbb{R}$ , para ver como es su conjunto de Julia, podemos expresar  $f_c(z)$  como

$$f_c(z) = ce^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)) + ce^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z)).$$

Por lo tanto para ver los puntos que convergen, podemos dar un número de pasos  $k$ , y dar una cota  $N_k \gg 0$ , como la función  $f_c$  es una exponencial, entonces dado  $z_0 \in \mathbb{C}$  si  $|f_c^k(z_0)| \geq N_k$ , podemos decir que  $z_0 \in J(f_c)$

## 4.2. El conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot es sin lugar a dudas el ejemplo de fractal más conocido, la misma imagen de este conjunto es lo que lleva el interés de mucha gente, su irregularidad, su "auto-semejanza", sus características, es algo muy típico y peculiar de este.

Como ya hemos comentado, no vamos a indagar ni demostrar los resultados mencionados en el texto, por falta de espacio, pero estos se encuentran mencionados en [6] (páginas 221-229) y explicadas y demostradas en [2] (páginas 75-104)

Definimos el sistema dinámico cuadrático  $(\mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c)$  con  $c \in \mathbb{C}$ , y fijando dicho  $c$ , se van obteniendo diferentes conjuntos de Julia. Ahora bien, la duda que planteamos es la siguiente: *¿Se pueden clasificar los conjuntos de Julia según su estructura?* Y es de lo que hablaremos a continuación:

**Proposición 4.2.1.** *En función del parámetro  $c \in \mathbb{C}$  el conjunto de Julia  $J(f_c)$  puede ser de uno de los dos siguientes tipos:*

1. *Conexo, es decir, de una sola pieza.*
2. *Completamente desconexo, es decir, formado por una nube de puntos dispersos, como la estructura que posee el conjunto de Cantor.*

**Definición 4.2.1.** *El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de  $c \in \mathbb{C}$  para los que el conjunto de Julia asociado a  $(\mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c)$  resulta ser conexo.*

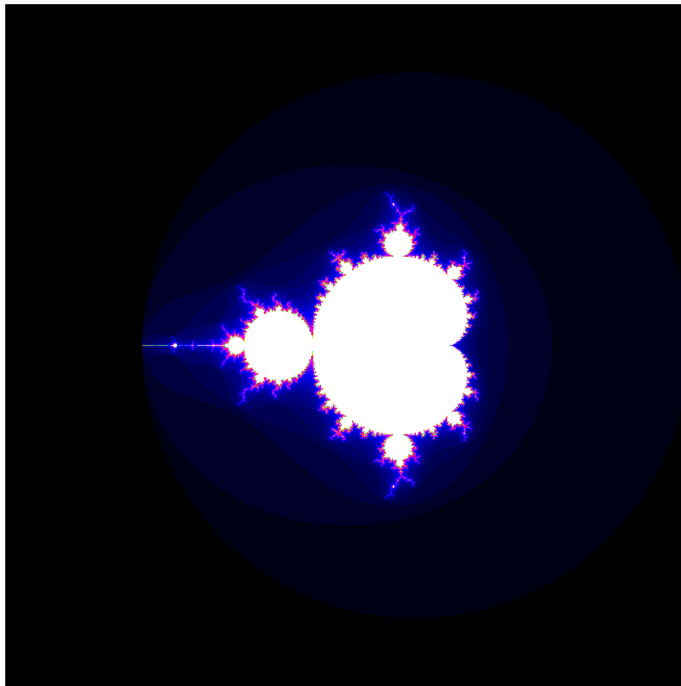


Figura 4.1: Representación del conjunto de Mandelbrot

Aunque parezca muy difícil de probar, pues se trata de comprobar que cada uno de los conjuntos de Julia, de cada punto sea conexo existe una simplificación que nos ayudará el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $(\mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c)$  con  $c \in \mathbb{C}$  un sistema dinámico, y sea  $J(f_c)$  su conjunto de Julia, entonces  $J(f_c)$  es conexo si y solo si la órbita del punto  $z = 0$  converge.*

Aunque esto nos ayuda, todavía nos queda por determinar un detalle, que es determinar cuándo una órbita diverge a infinito. Y por ello enunciamos esta proposición:

**Proposición 4.2.2.** *Sea  $(\mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c)$  con  $c \in \mathbb{C}$  un sistema dinámico entonces la órbita de un punto  $z_0$  diverge si existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_c^n(z_0)| \geq 2$ .*

Ahora sabiendo esto, daremos un algoritmo para determinar el conjunto de Mandelbrot.

**Algoritmo 4.2.1.** *Fijamos un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N > 1$ , definimos el siguiente algoritmo*

1. Elegimos un  $c \in \mathbb{C}$  cualquiera.
2. Hacer  $z = 0$ .
3. Iterar desde  $i = 1$  hasta  $N$ .
  - a) Hallar  $x = z^2 + c$ .
  - b) Hacer  $z = x$ .
  - c) Si  $|z| \geq 2$  terminar.
4. Representar  $c$ .

Ahora, para terminar esta sección, pondremos las dimensiones de conjuntos obtenidos por sistemas dinámicos complejos. Las demostraciones de estos conjuntos no son un proceso sencillo, y de hecho requieren una gran base previa a la que no podemos llegar en este trabajo.

**Teorema 4.2.2.** *Para el conjunto de Mandelbrot  $M$ , cuya frontera denotaremos  $\partial M$ , se tiene  $\dim_H(\partial M) = 2$ .*

**Teorema 4.2.3.** *Con las notaciones de antes, existe un conjunto denso  $\mathcal{R} \subset \partial M$  tal que si  $c \in \mathcal{R}$  entonces  $\dim_H(J(f_c)) = 2$ .*

Estos teoremas se pueden ver en la bibliografía [12]

### 4.3. Método de Newton

Un uso particular que daremos es para el cálculo de raíces de un polinomio en  $\mathbb{C}$ . El método de Newton como ya describiremos es un método iterativo, por lo tanto define un sistema dinámico que podemos estudiar. Además, como ya veremos, no se puede partir de un  $c \in \mathbb{C}$  para cualquier polinomio  $f(z)$ , por lo tanto, los puntos en los que no se pueda aplicar este método, serán aquellos que nos definan  $J(f)$ . Este tema viene explicado en profundidad en [6].

**Algoritmo 4.3.1.** *Sea  $f(z)$  un polinomio de grado  $n$ . El método de Newton posee el siguiente proceso iterativo:*

1. Elegir  $z_0 \in \mathbb{C}$ .
2. Calcular  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  siendo

$$z_k = z_{k-1} - \frac{f(z_{k-1})}{f'(z_{k-1})}.$$

*Para la mayoría de  $z_0 \in \mathbb{C}$  nos da que la sucesión  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  tiene como límite una de las raíces de  $f(z)$ . De hecho, el conjunto de puntos que no converge a una de las raíces del polinomio, es exactamente el conjunto de Julia del sistema dinámico*

$$\left( \mathbb{C}, Nf(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \right).$$

Además ha de añadirse un teorema muy importante que nos ayudará a más fácilmente llegar a resultados concisos usando sistemas dinámicos.

**Teorema 4.3.1.** *Si una función racional  $R(z)$  tiene una órbita periódica atractiva, entonces la órbita de al menos un punto crítico converge a ella.*

Este teorema lo que quiere decir es que calculando las raíces de  $Nf'(z)$  la órbita de al menos 1 de dichas raíces convergerá a una raíz de  $f(z)$ . Por lo tanto, solo quedaría ver si la órbita de los puntos es periódica atractiva, y como vimos antes, solo es necesario calcularlo en  $z = 0$ .

En particular, veremos un algoritmo para calcular raíces de polinomios cúbicos pues se cumple la siguiente proposición

**Proposición 4.3.1.** *Todo polinomio cúbico se puede transformar mediante cambios afines de variable y multiplicación por una constante en un polinomio de la forma*

$$f_A(z) = z^3 + (A - 1)z - A \text{ con } A \in \mathbb{C}.$$

**Observación 4.3.1.**  *$f_A(z)$  siempre tiene una raíz que es  $z = 1$ .*

**Algoritmo 4.3.2.** *Sea  $k \in \mathbb{N}$  y fijemos  $N_k \in \mathbb{R}$  entonces el algoritmo se compone de los siguientes pasos:*

1. *Elegir un punto  $A \in \mathbb{C}$ .*
2. *Hacer  $z = 0$ .*
3. *Hacer desde  $i = 1$  hasta  $k$ .*
  - a) *Hacer  $z = Nf_A(z)$ .*
  - b) *Hallar  $E = |z - 1|$ .*
  - c) *Si  $E < N_k$  pintar el punto  $A$ .*
4. *Terminar.*

# Capítulo 5

## Teoría de Besicovitch

Para acabar el trabajo, hablaremos de la teoría de Besicovitch. Besicovitch, centró su estudio en conjunto del plano de dimensión de Hausdorff 1, que él llamó linealmente medibles. Y muchos de esos estudios y artículos que publicó fueron las bases de lo que hoy conocemos como la teoría geométrica de la medida.

En esta parte tampoco daremos demasiados detalles ni demostraciones, por falta de espacio. Toda esta parte está mencionada en [6], y bien explicada en [4].

### 5.1. Definiciones previas

Antes de comenzar con la teoría de Besicovitch, tenemos que asentar una base de definiciones que utilizaremos después para dar resultados. Por simplicidad, daremos todas las definiciones en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 5.1.1.** *Dado un subconjunto fractal  $E \subset \mathbb{R}^2$  de dimensión de Hausdorff  $s$ , entonces definimos la densidad de  $E$  sobre un punto  $x \in \mathbb{R}^2$  como*

$$D^s(E, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(B(x, r) \cap E)}{(2r)^s}.$$

**Observación 5.1.1.** *Este valor nos dice la concentración de puntos de  $E$  en un entorno del punto  $x$ . Además nada nos garantiza de que dicho límite exista, y en caso de ser así consideraríamos las densidades inferior y superior que denotaremos como  $\underline{D}^s(E, x)$  y  $\overline{D}^s(E, x)$  y cuyas definiciones son análogas solo que cambiando el límite por límite inferior y límite superior respectivamente.*

**Observación 5.1.2.** *Se cumple que si  $\underline{D}^s(E, x) = \overline{D}^s(E, x)$ , entonces la densidad y existe y su valor coincide con las densidades inferior y superior.*

**Proposición 5.1.1.** *La densidad inferior cumple las siguientes propiedades*

1.  $\underline{D}^s(E, x) = D^s(E, x) = 0$  para todo  $x \notin E$  salvo a lo sumo un conjunto de medida nula respecto de  $\mathcal{H}^s$ .

2.  $2^{-s} \leq \underline{D}^s(E, x) \leq 1$  para todo  $x \notin E$  salvo a lo sumo un conjunto de medida nula respecto de  $\mathcal{H}^s$ .

**Proposición 5.1.2.** Si  $E$  es un fractal autosemejante, entonces para todo  $x \in E$  se cumple que

$$C_1 r^s \leq \mathcal{H}^s(E \cap B(x, r)) \leq C_2 r^s$$

siendo  $0 < C_1 \leq C_2$  dos ciertas constantes apropiadas.

**Observación 5.1.3.** Con esta proposición obtenemos que  $0 < \underline{D}^s(E, x)$  y  $\overline{D}^s(E, x) \leq 1$  para todo  $x \in E$ .

Otra noción importante es la de tangencia, esta nos habla de la proximidad local de un fractal a rectas o planos.

**Definición 5.1.2.** Dado un fractal  $E \subset \mathbb{R}^2$  de dimensión de Hausdorff  $s$ ,  $x \in E$  y  $l$  una recta que pasa por  $x$ , diremos que  $l$  es la tangente aproximante a  $E$  en  $x$  si  $\underline{D}^s(E, x) > 0$  y para todo  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  ocurre que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap (B(x, r) - S(x, l, \alpha)))}{r^s} = 0,$$

con  $S(x, l, \alpha) = \{ \{a \cdot s + b\}_{s \in \mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2 : \arctan(b/a) < m \pm \alpha \text{ y } x \in \{a \cdot s + b\}_{s \in \mathbb{R}} \}^1$ , siendo  $m$  la pendiente de la recta  $l$ .

**Observación 5.1.4.** Este límite sin embargo no siempre tiene por qué estar definido, y en dicho caso la mejor forma de ver las distribuciones de puntos de  $E$  en las proximidades del mismo consiste en estudiarlo en cada dirección del plano  $\mathcal{V}$ , para lo cual definimos la densidad angular de  $E$  en  $x$  relativa a la dirección  $\mathcal{V}$  y el ángulo  $\alpha$  como

$$D(E, x, \mathcal{V}, \alpha) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x, r) \cap S(x, \mathcal{V}, \alpha))}{r^s},$$

que no siempre existe.

**Definición 5.1.3.** Dado un fractal  $E \subset \mathbb{R}^2$  llamaremos a la proyección de  $E$  sobre una recta  $l$  perpendicular en la dirección  $\sigma$  como  $P_\sigma(E)$ .

**Definición 5.1.4.** Diremos que  $E \subset \mathbb{R}^2$  es un conjunto rectificable, si está contenido en una unión numerable de curvas rectificables. Es decir, si existen aplicaciones lipschitzianas  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $i \geq 1$  tales que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}).$$

**Observación 5.1.5.** Diremos que un conjunto es no rectificable, si no existen dichas aplicaciones lipschitzianas.

De ahora en adelante, se considerarán subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  con dimensión de Hausdorff 1.

**Definición 5.1.5.** Un punto  $x \in E$  se dice regular si  $D^1(E, x) = 1$ .

---

<sup>1</sup>Es trivial ver que  $l \in S(x, l, \alpha)$

**Definición 5.1.6.** *Un punto  $x \in E$  se dice irregular si  $\underline{D}^1(E, x) = 1$ .*

**Definición 5.1.7.** *Si todos los puntos de  $E$  son regulares diremos que  $E$  es un conjunto regular. Análogamente si todos los puntos de  $E$  son irregulares diremos que  $E$  es un conjunto irregular.*

**Observación 5.1.6.** *De esta forma un conjunto  $E$  puede tener un subconjunto regular y otro subconjunto irregular, a las que llamaremos parte regular y parte irregular respectivamente.*

Con esto podemos empezar a dar diferencias entre conjuntos regulares e irregulares.

**Teorema 5.1.1.** *Un conjunto es regular si y solo si es rectificable.*

**Corolario 5.1.1.** *Un conjunto es irregular si y solo si es no rectificable.*

**Teorema 5.1.2.** *Un conjunto regular tiene tangente aproximante en todos sus puntos salvo un subconjunto de medida nula respecto de  $\mathcal{H}^1$  y un conjunto irregular no tiene tangente aproximante en ninguno de sus puntos salvo un subconjunto de medida nula respecto de  $\mathcal{H}^1$ .*

**Teorema 5.1.3.** *Si un conjunto es irregular proyecta en conjuntos de medida nula respecto de  $\mathcal{H}^1$  en todas las direcciones  $\sigma \in [0, 2\pi]$  salvo a lo mucho un conjunto de direcciones de medida de Lebesgue nula en  $[0, 2\pi]$ .*

Estos resultados nos dan una clara diferencia entre conjuntos regulares e irregulares. Los regulares poseen propiedades geométricas análogas a las de curvas suaves ( $C^\infty$  diferenciables) y los irregulares poseen propiedades completamente antagónicas.

## 5.2. Aplicación de la teoría de Besicovitch

Podemos conseguir algunos resultados interesantes con la teoría de Besicovitch, estos resultados los demuestra Falconer en [4] en el Capítulo 3, y nosotros solo los enunciaremos.

**Lema 5.2.1.** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto irregular. Entonces  $\underline{D}^1(X, x) \leq \frac{3}{4}$ , para todo  $x \in X$ .*

**Proposición 5.2.1.** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  compacto y arconexo con  $\mathcal{H}^1(X) < \infty$ , entonces  $X$  posee una unión numerable de curvas rectificables y además dicha unión es de medida  $\mathcal{H}^1$ -nula.*

**Proposición 5.2.2.** *Un subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  de dimensión de Hausdorff 1 irregular es completamente desconexo, es decir, si  $V \subset X$  es una componente conexa de  $X$ , entonces  $V = \{x\}$ .*

# Bibliografía

- [1] BARNSLEY, M. *Fractals everywhere*. Academic Press, Inc. San Diego. California (1988).
- [2] DEVANEY, R.L. *Chaos and Fractals: The mathematics behind the computer graphics*. American Mathematical Society. Rhode Island (1989).
- [3] FALCONER, K.J. *Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications, second edition*. John Wiley and sons, Ltd. England (2003).
- [4] FALCONER, K.J. *The geometry of fractal sets*. Cambridge University Press (1985).
- [5] FOLLAND, GERALD, B. *Modern Techniques and their applications, second edition*. John Wiley and Sons, Ltd. England (1999).
- [6] GUZMÁN, M. DE, MARTÍN, M.A., MORÁN, M. Y REYES, M. *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Editorial Labor, S.A. Barcelona (1993).
- [7] IUDIN D.I. y KOPOSOV, E.V. *Fractals as simple as complex*. Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering (NNGASU) (2013).
- [8] MORÁN, M. *Fractal Series*. *Mathematika*, vol. 36, (1989) pp. 334–348.
- [9] RITORÉ, M. *La métrica de Hausdorff y el Teorema de selección de Blaschke*. en *Geometría de conjuntos convexos* [http://www.ugr.es/~jperez/docencia/GeomConvexos/geometria\\_convexos-v2.pdf](http://www.ugr.es/~jperez/docencia/GeomConvexos/geometria_convexos-v2.pdf) (Consulta: 11 de marzo de 2021).
- [10] RODRIGUEZ-SALINAS PALERO, B. *Teoría de la medida en espacios métricos y topológicos*. Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático, Sección 1, nº 29. Universidad Complutense, Madrid. 243 pp.
- [11] SCHROEDER, M.S. *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an infinite paradise*. W.H. Freeman and Company, New York (1991) .
- [12] SHISHIKURA, M. *The Hausdorff Dimension of the Boundary of the Mandelbrot Set and Julia Sets*. *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 147, No. 2 (1998), pp. 225–267.

# Apéndice A

## Ejemplos de fractales

Una vez establecidas las bases teóricas, así como las diferentes propiedades de los fractales, acabamos este escrito con algunas imágenes de fractales, la mayoría de los cuales hemos fabricado usando el programa Wolfram Mathematica:

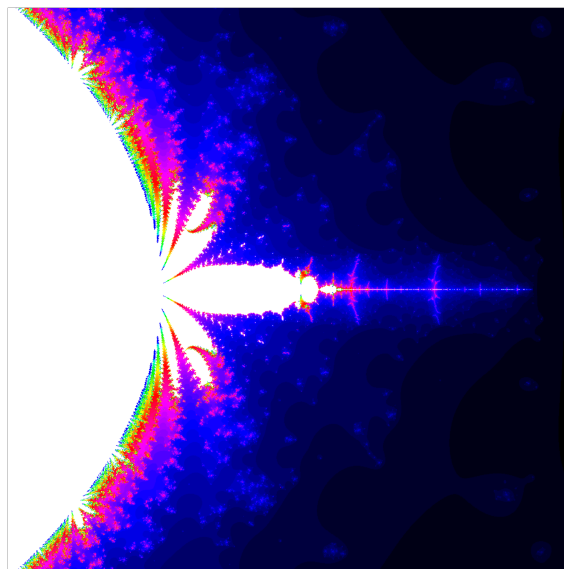


Figura A.1: Conjunto de Mandelbrot del sistema dinámico de función  $z = (z^4 + z^3 - z + c)(c + (c - z)(z^4 + z^2 + c)(z^2 - z + c) + \cosh(z^2 + c)(e^{z^3 - z + c} + c))$ .

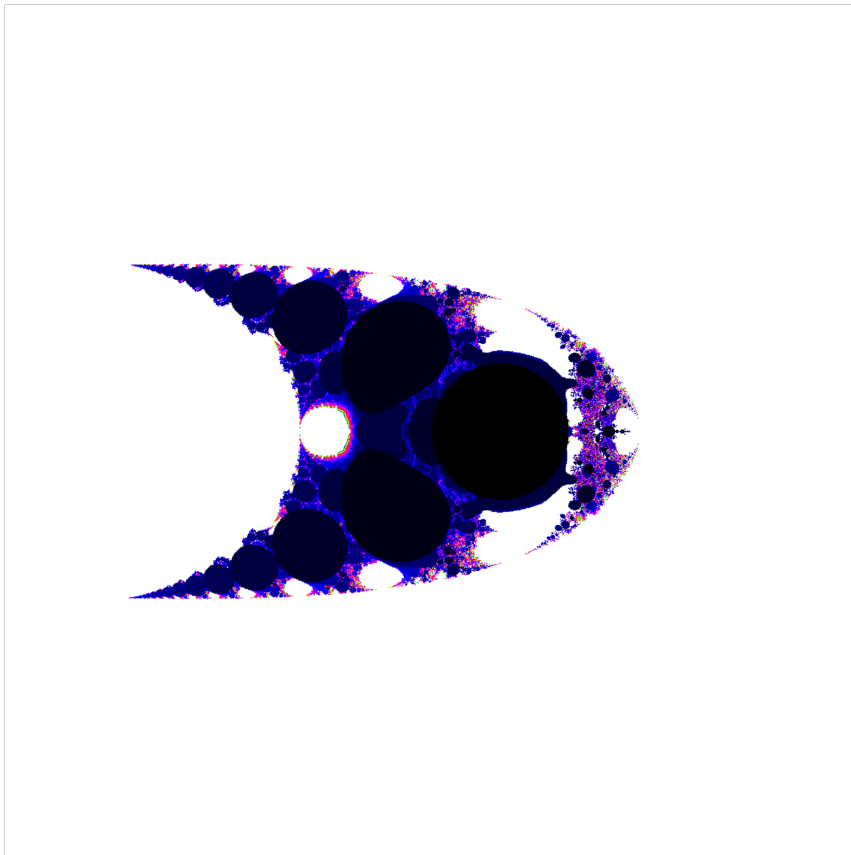


Figura A.2: Conjunto de Mandelbrot del sistema dinámico de función  $z = \frac{z^4 + z^3 - z^2 + z - c}{z^5 + z^4 - 3z^3 - 2z^2 - z - c}$ .

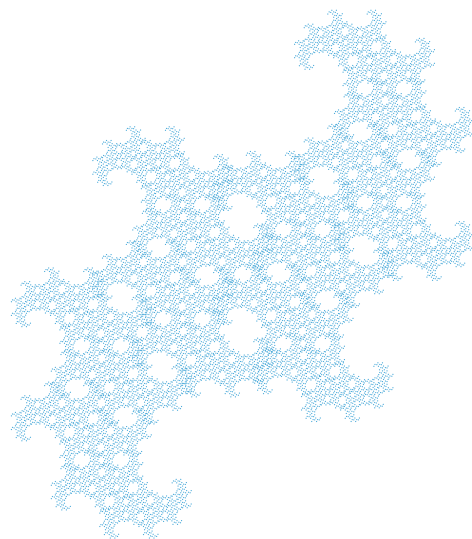


Figura A.3: Serie fractal de suma:  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (0,7e^{\frac{i\pi}{6}})^n$

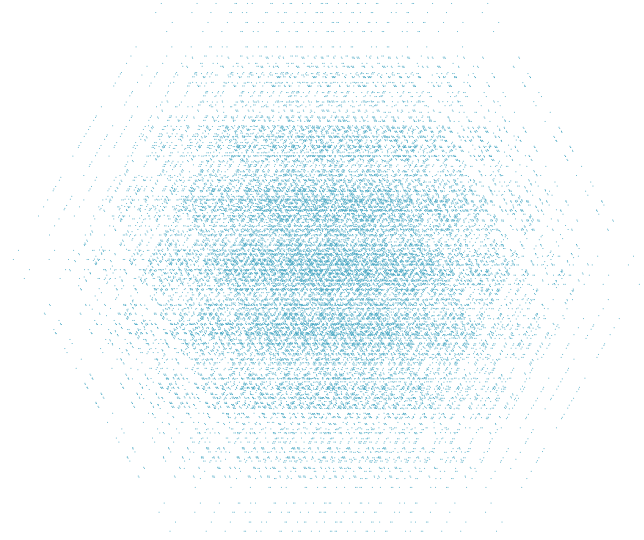


Figura A.4: Serie fractal de suma:  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (0,7e^{\frac{i\pi}{3}})^n$

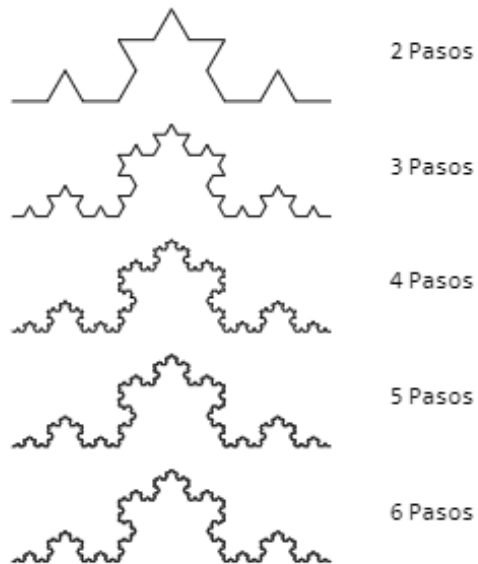


Figura A.5: Curva de Koch

Out - JTableForm

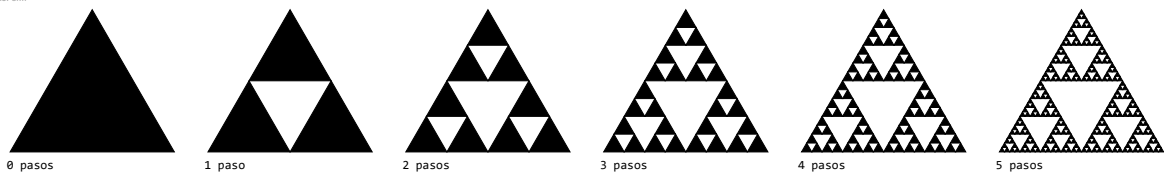


Figura A.6: Triángulo de Sierpinski

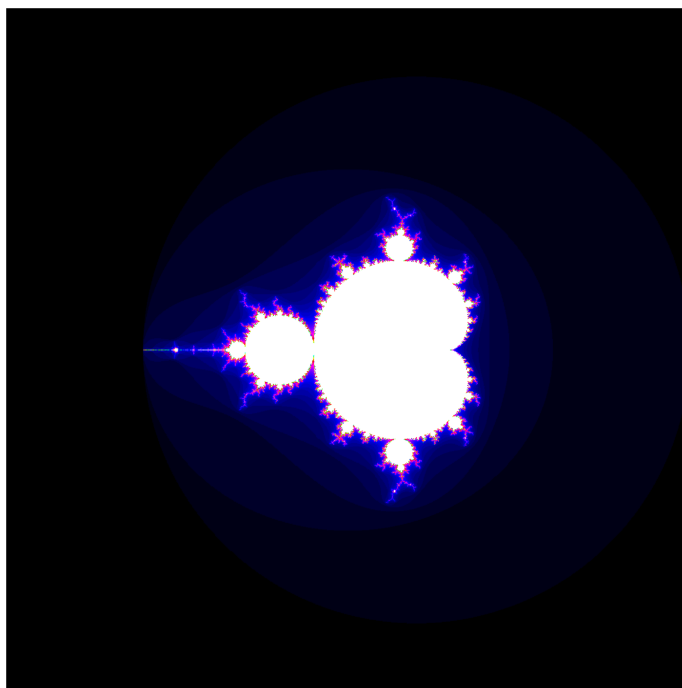


Figura A.7: Representación del conjunto de Mandelbrot

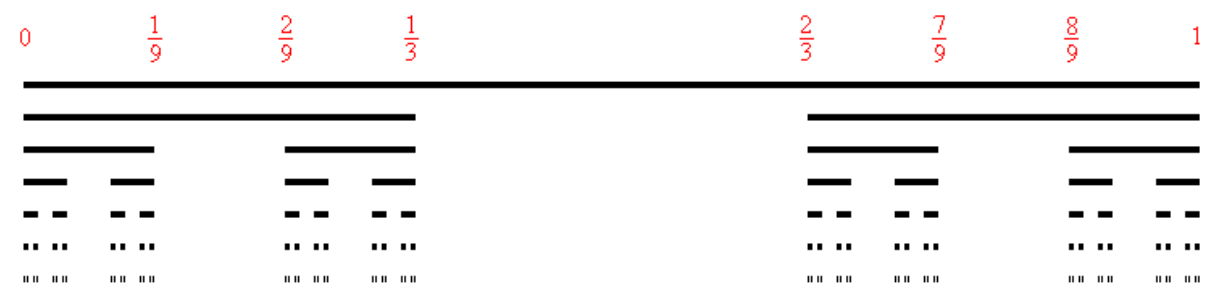


Figura A.8: Construcción del conjunto de Cantor de [6]