VNiVERSiDAD D SALAMANCA

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

EL FORMALISMO POLISIMPLÉCTICO DE GÜNTHER

Autor/a: Eduvigis del Pino Pérez Ramos

Tutor: Ricardo J. Alonso Blanco

Salamanca, Septiembre de 2021

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

EL FORMALISMO POLISIMPLÉCTICO DE GÜNTHER

Autor/a: Eduvigis del Pino Pérez Ramos

Tutor: Ricardo J. Alonso Blanco

Salamanca, Septiembre de 2021

Firma Autor/a:

Firma Tutor: Firmado por ALONSO BLANCO RICARDO JOSE - 11934332T el día 06/09/2021 con un certificado emitido por AC FNMT Usuarios

Índice general

Capítulo 1. Introducción

Motivación y objetivos

El estudio del movimiento de los cuerpos se lleva a cabo mediante la mecánica clásica, lo que la convierte en una de las materias más antiguas y extensas en la ciencia.

Se suele reconocer a la mecánica newtoniana (S. XVII) como el primer desarrollo de mecánica clásica. Posteriormente, se desarrollaron métodos que dieron lugar a las reformulaciones de la mecánica clásica conocidas, como la mecánica lagrangiana y la mecánica hamiltoniana. De hecho, a grosso modo, los sistemas hamiltonianos aparecen como una reescritura de las ecuaciones del movimiento de Newton. Si consideramos una partícula de masa m moviéndose por el espacio $\mathbb{R}^3$ con potencial $V(q)$, con $q \in \mathbb{R}^3$, la segunda ley de Newton establece $m\ddot{q} = -\nabla V$, donde ∇V es el gradiente de V. Si $p_i = m\dot{q}_i$ es el momento de la partícula y

$$H(q,p) = \frac{m}{2}||p^2|| + V(q)$$

es la energía total del sistema, entonces las ecuaciones de Newton serán:

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

que son las ecuaciones de Hamilton.

Christian Günther quiso extender el formalismo hamiltoniano para problemas variacionales definidos por integrales múltiples y teorías de campo. Este formalismo está basado en la noción de forma polisimpléctica:

$$\Omega = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} dq_i \wedge dp_{i,\alpha} \otimes e_\alpha,$$

tomando $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$.

El formalismo polisimpléctico descrito por Günther es usado para dar una descripción geométrica de ciertos tipos de teoría de campos localmente. En la actualidad se intenta globalizar dicho formalismo.

El objetivo de este trabajo es ofrecer una introducción a las variedades simplécticas, su relación con la mecánica hamiltoniana y las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden para, por último, realizar una generalización basándonos en el formalismo polisimpléctico de Günther. Para ello, desarrollaremos las propiedades y resultados fundamentales de las variedades simplécticas. Además, estudiaremos algunos aspectos del formalismo lagrangiano y cómo se relaciona con la mecánica hamiltoniana y la geometría simpléctica. Para finalizar, estudiaremos una generalización del espacio de velocidades de la mecánica clásica y su sistema hamiltoniano mediante el formalismo polisimpléctico de Günther.

Estructura del trabajo

El presente Trabajo de Fin de Grado consta de tres partes: este primer texto introductorio, un capítulo de preliminares y el desarrollo teórico que da título a este trabajo.

Para facilitar la lectura de este trabajo hemos incluido una capítulo de preliminares el cual está dividido en dos secciones. En la primera sección definimos el concepto de fibrado y estudiamos los fibrados vectoriales. Además, desarrollamos los fibrados tangente y cotangente. En la segunda sección, estudiamos algunos conceptos básicos de geometría diferencial.

La tercera parte del presente trabajo está dividida en cuatro capítulos. En el primer capítulo definimos el concepto de forma simpléctica en un espacio vectorial, extendiendo la noción de área orientada en $\mathbb{R}^2$, y dando una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios vectoriales de dimensión par mediante el concepto de simplectormorfismo.

En el capítulo cuatro, introducimos las formas simplécticas, el concepto de morfismo entre variedades simplécticas (esto es, los simplectomorfismos), definimos la forma simpléctica en fibrados cotangentes, estudiamos los sistemas hamiltonianos, el corchete de Poisson, los sistemas integrables y las subvariedades de una variedad simpléctica. El desarrollo de este capítulo nos conduce al estudio de las aplicaciones del formalismo simpléctico ordinario, las cuales vemos en el capítulo cinco del trabajo. En dicho capítulo, comenzamos definiendo las ecuaciones de Euler-Lagrange para posteriormente estudiar las ecuaciones de Hamilton y la mecánica clásica, donde vemos la relación entre las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Hamilton. Además, exponemos la existencia de integrales completas en sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Por último, estudiamos la generalización polisimpléctica de Günther. En este capítulo definimos los jets y cojets homogéneos, desarrollamos las estructuras polisimplécticas (pues, en la generalización polisimpléctica, la forma simpléctica va a ser reemplazada por una forma vector-valorada) y estudiamos las ecuaciones canónicas, esto es, obtenemos la expresión del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de Hamilton asociado a una función hamiltoniana. Al término de este capítulo, damos algunos ejemplos de dichos sistemas.

Capítulo 2. Preliminares

En este capítulo haremos una pequeña introducción sobre notación, campos de vectores y formas diferenciables, y fibrados, los cuales usaremos a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

Notación

La notación sigue el artículo de Günther [6] y el libro de Lee [7]. En particular, denotaremos por $V, Q, E, \ldots$ a las variedades diferenciables, las funciones $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ serán funciones diferenciables (cuando sean infinitamente diferenciables las denominaremos suaves) y al conjunto de dichas funciones lo denotaremos por $C^\infty(Q)$ (para más detalle [7], pág. 32). La definición de funciones suaves se generaliza fácilmente a aplicaciones entre variedades. Sean Q, V dos variedades, $q \in Q$ un punto de Q y (U, φ) , (W, ψ) sus respectivas cartas. Diremos que $F : Q \longrightarrow V$ es diferenciable si y sólo si $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable ([7], pág. 34).

Ahora bien, sea $q \in Q$ con Q una variedad diferenciable, denotaremos por $T_qQ = \{v : C^\infty(Q) \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, v \text{ es una derivación}\}$ al espacio tangente de Q en el q, y nos referimos a sus elementos como los vectores tangentes en q. Otro modo de definir los vectores tangentes en un punto es a través de curvas diferenciables, las cuales denotamos por $\sigma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow Q$, con I interavalo abierto. De esta forma, el vector tangente a σ en $t_0 \in I$ para toda $f \in C^\infty(\sigma(t_0))$ y para $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta de Q, viene dado por $\sigma'(t_0) = \sum_{i=1}^n \sigma'(t_0)(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial (x_i \circ \sigma)}{\partial t}\Big|_{t=t_0}$.

Nos referiremos por TQ a la unión disjunta de espacios tangentes en todos los puntos q de Q, esto es, $TQ = \cup_{q \in Q} T_qQ$.

Denotaremos por X un campo vectorial sobre Q, el cual es una aplicación continua $X : Q \longrightarrow TQ$ definida por $q \longrightarrow X_q$, con $X_q \in T_qQ$. Tomando $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta de Q, escribiremos dichos campos de la siguiente forma:

$$X_q = \sum_{i=1}^n X_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q,$$

donde $X_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que un campo X de Q es diferenciable si lo son las aplicaciones X_i. Denotaremos por $\mathscr{X}(Q)$ al conjunto de campos diferenciables (ver, por ejemplo, [7] págs. 54 y 174).

Sea $F : Q \longrightarrow V$ una aplicación entre variedades diferenciables, $T_qF : T_qQ \longrightarrow T_{F(q)}V$ será su aplicación tangente en el punto $q \in Q$.

Sea Q una variedad diferenciable, para cada $q \in Q$ aludiremos al espacio cotangente de Q en q por T_q^*Q, el cual es el dual del espacio T_qQ, es decir, $T_q^*Q = (T_qQ)^*$. Los elementos de T_q^*Q son los llamados covectores o formas en q, los cuales escribiremos de forma usual por ω. A la unión disjunta de espacios cotangentes en todos los puntos $q \in Q$ la denotamos por T^*Q, o también Q^*.

Si tomamos $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta de Q con $q \in U$ podemos escribir las formas del siguiente modo:

$$\omega_q = \sum_{i=1}^{n} \omega_q\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) d_q x_i.$$

(Para más detalle ver [7] pág. 27).

Sea $F : Q \longrightarrow V$ una aplicación entre variedades diferenciables, denotaremos la aplicación cotangente de F en el punto $q \in Q$ por $T^*_{F(q)}F : T^*_{F(q)}V \longrightarrow T^*_q Q$, también la podremos escribir por $F^*_{F(q)} : V^*_{F(q)} \longrightarrow Q^*_q$.

2.1. Fibrados

Ahora sabiendo cómo se define una variedad Q, nos podemos preguntar: ¿qué pasa si a cada punto de Q le asociamos otro espacio que denotaremos por F?Los fibrados son una construcción matemática de gran riqueza y utilidad tanto en matemática fundamental como en física. Para el desarrollo de esta sección hemos seguido [2] y [7].

Un **fibrado** $\xi = (E, Q, F, \tau)$ consiste en tres espacios topológicos E, Q y F y una aplicación continua $\tau : E \longrightarrow Q$, la cual denominaremos proyección, tal que satisface la siguiente condición: para cada punto $q \in Q$ tenemos un entorno U de q y un homeomorfismo $\psi : \tau^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\tau"] & \supseteq & \tau^{-1}(U) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\tau"] & U \times F \arrow[d, "\pi_1"] \\ Q & \supseteq & U \arrow[r] & U \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

es conmutativo. De esto se deduce que: $\psi^{-1}(\{q\} \times F) \subset \tau^{-1}(q)$ donde $\tau^{-1}(q)$ es la denominada **fibra de q**.

El espacio E es el llamado espacio total o espacio del fibrado, Q es el espacio base y F es la fibra tipo.

Decimos que un **fibrado** es **diferenciable** si E, Q y F son variedades diferenciables y $\tau : E \longrightarrow Q$ es una aplicación diferenciable donde ψ es un difeomorfismo. Luego, $U \times F \simeq \tau^{-1}(U)$ y así, $F \simeq \tau^{-1}(q)$. Este es el caso que vamos a usar a lo largo del trabajo.

Denominaremos **sección** a cada aplicación $s : U \longrightarrow E$ (siendo U un abierto de Q) tal que $\tau \circ s = Id$.

Ejemplo 2.1 (Fibrado trivial)**.** *El fibrado trivial viene dado por $\xi_t = (Q \times F, Q, F, \tau)$ donde $\tau : Q \times F \longrightarrow Q$ es la proyección en el primer factor.*

En este caso las fibras son $\{q\} \times F$ para todo $q \in Q$.

Por la definición de fibrado podemos decir entonces que todo fibrado es localmente trivial.

2.1.1. Fibrados vectoriales

Antes de definir el fibrado vectorial daremos un nuevo fibrado el cual necesitaremos en dicha definición.

Sean Q, E dos variedades C^∞ y $\tau : E \longrightarrow Q$ un fibrado (2.1), tenemos la aplicación

$$E \underset{Q}{\times} E \xrightarrow{\bar{\tau}} Q \tag{2.2}$$

donde $E \underset{Q}{\times} E = \{(e_1, e_2) \in E \times E \,/\, \tau(e_1) = \tau(e_2)\}$, definida por $\bar{\tau}(e_1, e_2) := \tau(e_1) = \tau(e_2)$.

Veamos que, efectivamente, se trata de un fibrado. Para ello recubrimos Q con fibrados trivializantes U como en (2.1) tomamos un recubrimiento de Q como en el fibrado anterior, de este modo, siguiendo con la notación usada en el fibrado trivial,

$$\bar{\tau}^{-1}(U) = \{(e_1, e_2) \,/\, \tau(e_1) = \tau(e_2) \in U\} \xrightarrow{\quad\bar{\varphi}\quad} U \times F \times F \tag{2.3}$$

$$(e_1, e_2) \longrightarrow (\bar{\tau}(e_1, e_2), \varphi_2(e_1), \varphi_2(e_2)).$$

Luego, usando el fibrado trivial hemos deducido que es un fibrado y que, en este caso, Q tiene fibra tipo $F \times F$.

Una vez definido este fibrado, podemos estudiar el fibrado vectorial el cual, a grosso modo, es un fibrado dotado de dos operaciones: la suma y el producto por escalares . Sea $\tau : E \longrightarrow Q$ un fibrado, las operaciones suma y producto por escalar $\mu \in \mathbb{R}$ son aplicaciones diferenciables las cuales se definen, respectivamente: $\sigma : E \underset{Q}{\times} E \longrightarrow E$, $\cdot\mu : E \longrightarrow E$ donde $e_1 + e_2 := \sigma(e_1, e_2)$ y $\mu \cdot e_1 := \mu \cdot (e_1)$ donde $e_1, e_2 \in E$, cumpliendo los axiomas de espacios vectoriales (propiedad distributiva: $\sigma(\lambda e_1 + \mu e_2, e_3) = \lambda e_1 + e_3 + \mu e_2 + e_3$, producto por escalares: $\lambda\sigma(e_1, e_2) = \lambda(e_1 + e_2)$, elemento neutro: existe $e \in E$ tal que $\sigma(e_1, e) = \sigma(e, e_1) = 0 \; \forall e_1 \in E$, etc.), pues por la definición de fibrado dada anteriormente serán sumas y productos en F. Esto es, en el caso trivial, $E = Q \times F$ y $E \underset{Q}{\times} E = Q \times F \times F$.

A continuación, veremos los fibrados tangente y cotangente, los cuales son fibrados vectoriales. Estos dos fibrados van a estar presente a lo largo del trabajo y serán de vital importancia.

Fibrado tangente

Sea Q una variedad, llamamos a $TQ = \bigcup_{q \in Q} T_q Q$ y $\tau_Q : TQ \longrightarrow Q$ la aplicación dada por $\tau_Q(v_q) = q$, es la proyección del fibrado tangente de Q.

$$\begin{array}{rrcl} \tau_Q : & TQ = \bigcup_{q \in Q} T_q Q & \longrightarrow & Q \\ & v_q & \longrightarrow & q \end{array} \tag{2.4}$$

Veamos que, efectivamente, se trata de un fibrado vectorial. Para ello tomamos $\{(U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ atlas de nuestra variedad Q, donde

$$\begin{array}{rrcl} \psi_\alpha : & U_\alpha & \longrightarrow & V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \\ & q & \longrightarrow & \psi_\alpha(q) = (x_{1_\alpha}(q), \ldots, x_{n_\alpha}(q)) = (q_1, \ldots, q_n) \end{array} \tag{2.5}$$

Tomemos ahora el siguiente conjunto: $\bigcup\limits_{q\in U_\alpha} T_qQ = \bigcup\limits_{q\in U_\alpha} T_qU_\alpha = \hat{U}_\alpha$ el cual es el conjunto de vectores tangentes en puntos de U_α. Definamos ahora la siguiente aplicación sabiendo que si $v_q \in T_qQ$ entonces, $v_q = \sum_i \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$, donde $\lambda_i = v_q(x_{i_\alpha})$.

$$\begin{array}{rccl} \hat{\psi}_\alpha : & \hat{U}_\alpha & \longrightarrow & V_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ & v_q & \longrightarrow & (\psi_\alpha(q), v_q(x_{1_\alpha}), \ldots, v_q(x_{n_\alpha})) \underset{not}{=} (q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n). \end{array} \tag{2.6}$$

Dicha aplicación es biyectiva. Por lo tanto, por la compatibilidad de cartas por $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ carta de Q y V_α abierto de $\mathbb{R}^n$, hemos dotado de estructura diferenciable a TQ, esto es, $\{(\hat{U}_\alpha, \hat{\psi}_\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ atlas de TQ. Luego, TQ es variedad diferenciable. Veamos ahora que es un fibrado.

Por la proyección τ_Q podemos escribir (usando la definición de fibrado),

$$\begin{tikzcd} TQ \arrow[d, "\tau_Q"] & \supseteq & \tau_Q^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\tau_Q"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ Q & \supseteq & U_\alpha \arrow[r] & U_\alpha \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

donde $\varphi_\alpha(v_q) := (q, v_q(x_1), \ldots, v_q(x_n))$. Luego, TQ es un fibrado. Estudiemos ahora si se trata de un fibrado vectorial.

Para ver que se trata de un fibrado vectorial únicamente tenemos que definir las operaciones suma y producto por escalares, y ver que cumplen los axiomas de espacios vectoriales. Sea el elemento neutro de la suma 0_q en T_qQ,

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & TQ \underset{Q}{\times} TQ & \longrightarrow & TQ \\ & (v_q, \bar{v}_q) & \longrightarrow & v_q + \bar{v}_q \\ & & & \\ \mu\cdot : & TQ & \longrightarrow & TQ \\ & v_q & \longrightarrow & \mu \cdot v_q \end{array} \tag{2.8}$$

son las aplicaciones suma y producto por un escalar en cada T_qQ, respectivamente. Luego, pasando a coordenadas (2.7) vemos que q quedará invariante y simplemente sumaremos y multiplicaremos por un escalar a las $\dot{q}$, respectivamente, las cuales están en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, se verifican los axiomas de espacio vectorial y llegamos así a que TQ es un fibrado.

Observación 2.2. *Sean $Q, \bar{Q}$ dos variedades, si $f : Q \longrightarrow \bar{Q}$ es un difeomorfismo entonces, $Tf : TQ \longrightarrow T\bar{Q}$ es una biyección. Por lo tanto, el siguiente esquema es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} TQ \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\tau_Q"'] & T\bar{Q} \arrow[d, "\tau_{\bar{Q}}"] \\ Q \arrow[r, "f"] & \bar{Q} \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

En general, una sección del fibrado $TQ \longrightarrow Q$ equivale a tener un campo tangente definido en algún abierto V de Q.

De modo similar construimos el fibrado cotangente.

Fibrado cotangente

Sea Q una variedad diferenciable de dimensión n, a una 1-forma en T_qQ la denominamos **covector de Q en q**. Y el conjunto de todos estos covectores forma un espacio vectorial $n-$dimensional que es dual al espacio tangente T_qQ. A este espacio vectorial formado por covectores lo vamos a denotar por T_q^*Q, y lo llamamos **espacio cotangente** de Q en q.

Definición 2.3. *A la unión de los espacios cotangentes de la variedad diferenciable Q en todos sus puntos la vamos a denominar* **fibrado cotangente** *de Q, y lo denotamos por T^*Q, $\left(T^*Q = \bigcup_{q\in Q} T_q^*Q\right)$.*

Sea

$$\begin{array}{rrcl} \tau_Q^* : & T^*Q = \bigcup_{q\in Q} T_q^*Q & \longrightarrow & Q \\ & \omega & \longrightarrow & q \end{array} \tag{2.10}$$

una aplicación. Veamos que, efectivamente, se trata de un fibrado vectorial. Para ello tomamos $\{(U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ atlas de nuestra variedad Q como antes (2.5).

Tomemos ahora el siguiente conjunto: $\bigcup_{q\in U_\alpha} T_q^*Q = \bigcup_{q\in U_\alpha} T_q^*U_\alpha = \bar{U}_\alpha$ el cual es el conjunto de covectores o formas en puntos de U_α. Definamos ahora la siguiente aplicación biyectiva sabiendo que si $\omega_q \in T_q^*Q$ entonces, $\omega_q = \sum_i \lambda_i d_q x_i$, donde $\lambda_i = \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_{i_\alpha}})$.

$$\begin{array}{rccl} \bar{\psi}_\alpha : & \bar{U}_\alpha & \longrightarrow & V_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ & \omega_q & \longrightarrow & (\psi_\alpha(q), \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_{1_\alpha}}), \ldots, \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_{n_\alpha}})) \underset{not}{=} (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n). \end{array} \tag{2.11}$$

Por lo tanto, hemos dotado de estructura diferenciable a T^*Q. Luego, T^*Q es variedad diferenciable. Veamos ahora que es un fibrado.

Por la proyección τ_Q^* podemos escribir,

$$\begin{tikzcd} T^*Q \arrow[d, "\tau_Q^*"] & \supseteq & (\tau_Q^*)^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\tau_Q^*"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ Q & \supseteq & U_\alpha \arrow[r] & U_\alpha \end{tikzcd} \tag{2.12}$$

donde $\varphi_\alpha(\omega_q) := (q, \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_1}), \ldots, \omega_q(\frac{\partial}{\partial x_n}))$. Luego, T^*Q es un fibrado. Estudiemos ahora si se trata de un fibrado vectorial.

Para ver que se trata de un fibrado vectorial únicamente tenemos que definir las operaciones suma y producto por escalares sobre T^*Q, y ver que cumplen los axiomas de espacios vectoriales siendo 0_q el elemento neutro de la suma en T_q^*Q,

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & T^*Q \underset{Q}{\times} T^*Q & \longrightarrow & T^*Q \\ & (\omega_q, \bar{\omega}_q) & \longrightarrow & \omega_q + \bar{\omega}_q \\ \\ \mu\cdot : & T^*Q & \longrightarrow & T^*Q \\ & \omega_q & \longrightarrow & \mu \cdot \omega_q \end{array} \tag{2.13}$$

son las aplicaciones suma y producto por un escalar, respectivamente. Luego, pasando a coordenadas (2.12) vemos que q quedará invariante y simplemente sumaremos y multiplicaremos por un escalar a las p, respectivamente, las cuales están en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, se verifican los axiomas de espacio vectorial y llegamos así a que T^*Q es un fibrado.

Observación 2.4. *Sean $Q, \bar{Q}$ dos variedades, si $f : Q \longrightarrow \bar{Q}$ es un difeomorfismo entonces, $T^*f : T^*\bar{Q} \longrightarrow T^*Q$ es una biyección. Por lo tanto, el siguiente esquema es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} T^*\bar{Q} \arrow[r, "T^*f"] \arrow[d, "\tau_Q"'] & T^*Q \arrow[d, "\tau_Q"] \\ \bar{Q} & Q \arrow[l, "f"] \end{tikzcd} \tag{2.14}$$

Homomorfismo entre fibrados

Seguiremos con la notación que hemos usado en el apartado de fibrado vectorial.

Sean $\tau_1 : E \longrightarrow Q$ y $\tau_2 : E' \longrightarrow Q$ fibrados vectoriales sobre Q, y q punto de Q. Un homomorfismo de fibrados de E en E' es una función suave $f : E \longrightarrow E'$ que manda $\tau_1^{-1}(q)$ linealmente en $\tau_2^{-1}(q)$, con $\tau_1^{-1}(q)$, $\tau_2^{-1}(q)$ fibras de q en E y E', respectivamente.

Si f es un difeomorfismo entonces se dice que los fibrados son isomorfos, y lo denotaremos por $E \cong E'$. En este caso, la restricción $f_q : \tau_1^{-1}(q) \longrightarrow \tau_2^{-1}(q)$ de f a la fibra $\tau_1^{-1}(q)$ es un isomorfismo para cada $q \in Q$.

El conjunto de homomorfismos de fibrados $E \longrightarrow E'$ se notará $Hom(E, E')$, que resulta ser también un fibrado vectorial (para más detalle ver, por ejemplo, [7], pág. 261).

Producto tensorial de fibrados

Siguiendo con la notación del apartado anterior: Sean E, E' fibrados vectoriales sobre Q con trivializaciones φ_i, φ_i', respectivamentes. Considerando el conjunto $E \otimes E' = \sum_{q\in Q} \tau_1^{-1}(q) \otimes \tau_2^{-1}(q)$ con la proyección usual. Para este caso, las trivializaciones locales son: $\bar{\varphi}_i : (E \otimes E')\big|_{U_i} \longrightarrow U_i \times (F \otimes F')$.

(Para más detalle ver [8]).

Subfibrados

Sea $\tau_E : E \longrightarrow Q$ un fibrado vectorial, un **subfibrado** de E es un fibrado vectorial $\tau_D : D \longrightarrow Q$ en el cual D es un subespacio de E y τ_D es la restricción de τ_E a D tal que, para cada $q \in Q$, el subconjunto $\tau_D(q) = D \cap \tau_E(q)$ es un subespacio lineal de $\tau_E(q)$, y la estructura del espacio vectorial sobre $\tau_D(q)$ es la dada por $\tau_E(q)$ (para más detalle ver, por ejemplo, [7] pág. 264).

2.2. Campos de vectores y formas diferenciables

Una vez hemos estudiado los fibrados tangente y cotangente podemos introducir algunos conceptos y operadores como curva integral, corchete de Lie, diferencial exterior,...([7]) los cuales se definen a través de campos de vectores y covectores.

Curva integral

Definición 2.5. *Sean Q una variedad diferenciable y $X \in \mathscr{X}(Q)$. Una curva diferenciable $\sigma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow Q$, con I intervalo abierto, es una* **curva integral** *de X si $\forall t \in I$*

$$\sigma'(t) = X_{\sigma(t)} \in T_{\sigma(t)}Q$$

Flujo de un campo

El concepto flujo de un campo viene dado por el siguiente teorema: ([7], pág. 210)

Teorema 2.6. *Sea Q una variedad diferenciable y $X \in \mathscr{X}(Q)$, $\forall p \in Q$ existe $I_p \subset I$ intervalo abierto con $0 \in I_p$ y $U_p \subset Q$ con $p \in U_p$ tal que*

$$\begin{array}{rccl} \psi_p : & I_p \times U_p & \longrightarrow & Q \\ & (t,q) & \longrightarrow & \psi_p(t,q) = \sigma_q(t) \end{array}$$

es diferenciable, donde $\sigma_q(t)$ es una curva integral de X que pasa por q en $t = 0$.

Además, si existe $\phi_p : J_p \times U_p \longrightarrow Q$ con la misma propiedad entonces, $\phi_p(t,q) = \psi_p(t,q)$, $\forall (t,q) \in (I_p \times U_p) \cap (J_p \times U_p)$.

Grupo uniparamétrico de transformaciones de un campo. Generador infinitesimal

Teorema 2.7. *Sean Q una variedad diferenciable y X un campo de vectores de Q. Para todo $t \in \mathbb{R}$ definimos:*

$$D_t = \{p \in Q \,/\; t \text{ pertenece al dominio de definición de } \sigma_p \text{ curva integral}$$

$$\text{de } X \text{ que pasa por } p \text{ en } t = 0\} \subset Q.$$

Entonces,

1. *D_t abierto y $\cup_{t>0} D_t = Q$.*
2. *Si $\tau_t : D_t \longrightarrow Q$, con $p \longrightarrow \tau_t(p) = \sigma_p(t)$, entonces τ_t es diferenciable.*
3. *$\tau_t(D_t) = D_{-t}$*
4. *Para $t = 0$ tenemos: $\tau_0 : D_0 = Q \longrightarrow Q$ es la aplicación identidad.*

5. *$Dom(\tau_t \circ \tau_s) \subset Dom(\tau_{t+s})$. Además, si t y s tienen el mismo signo, $\tau_t \circ \tau_s = \tau_{t+s}$.*

6. *$(\tau_t)^{-1} = \tau_{-t}$.*

(Ver demostración en [7] págs. 213 - 214).

Ahora bien, si la familia de aplicaciones $\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ cumple que en $t = 0$ es la identidad (4), $Dom(\tau_t \circ \tau_s) \subset Dom(\tau_{t+s})$ o $\tau_t \circ \tau_s = \tau_{t+s}$ (5) y es difeomorfismo sobre su inversa $(\tau_t)^{-1} = \tau_{-t}$ (6) entonces, $\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ determina un **generador infinitesimal** que es el campo

$$X_p = \left.\frac{d\tau_t(p)}{dt}\right|_{t=0} \in \mathscr{X}(Q).$$

Decimos que el flujo sobre Q es global cuando una aplicación continua $\tau : \mathbb{R}\times Q \longrightarrow Q$ satisface para $p \in Q$ las siguientes propiedades: $\tau(t(\tau(s,p)) = \tau(t+s,p)$ y $\tau(0,p) = p$ para todo $s,t \in \mathbb{R}$. Dado τ un flujo global sobre Q, definimos el **grupo uniparamétrico de transformaciones** de X como la familia $\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ que lo ha definido.

Producto interior

Sea Q una variedad diferenciable, $p \in Q$. Denotamos por T_pQ al espacio tangente de Q en p, que es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.

El **conjunto de los tensores** $r-$**covariantes y** $s-$**covariantes** (tensor de tipo (r,s)), con $r,s \in \mathbb{N}$, sobre T_pQ viene dado por:

$$T^r_s(T_pQ) = \{\text{aplicaciones multilineales } T_pQ \times \overset{s}{\cdots} \times T_pQ \times T^*_pQ \times \overset{r}{\cdots} \times T^*_pQ \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

Al conjunto de los tensores $s-$covariantes antisimétricos ($T(v_1,\dots,v_s) = sgn(\sigma)T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(s)})$ donde $sgn(\sigma)$ es el signo de la permutación σ) lo denotaremos por $\Lambda^s(T_pQ)$. (Notar que los tensores de este tipo son secciones del fibrado cotangente anteriormente definido).

Definición 2.8. *Sean $T \in T^r_s(T_pQ)$, $w \in T^*_pQ$ y $v \in T_pQ$. Llamamos* **producto interior** *de T con v al tensor de tipo $(r,s-1)$ dado por la aplicación lineal:*

$$i_v : \; T^r_s(T_pQ) \;\longrightarrow\; T^r_{s-1}(T_pQ),$$

determinada por la expresión:

$$(i_vT)(v_1,\dots,v_{s-1},w_1,\dots,w_r) = T(v,v_1,\dots,v_{s-1},w_1,\dots,w_r)$$

Producto exterior

El producto exterior de vectores es una construcción algebraica utilizada en geometría para estudiar áreas, volúmenes y sus análogos en dimensiones superiores. Antes de estudiar su definición, veamos cómo se define una $k-$forma, la cual aparece tanto en el cálculo multivariable como en el tensorial como ya hemos visto.

Definición 2.9. *Una $k-$**forma** α en una variedad Q es una función que asigna a cada punto $p \in Q$ una aplicación antisimétrica $k-$multilineal en el espacio tangente a Q en p*

$$\alpha(p) : T_pQ \times \overset{k}{\ldots} \times T_pQ \longrightarrow \mathbb{R}$$

Definición 2.10. *Sean α y β unas $k-$forma y $l-$forma en Q, respectivamente. Entonces, el* **producto exterior** *es un operador, $\wedge$, que asigna a (α, β) una $(k+l)-$forma en Q la cual viene dada por:*

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_p} sgn(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}),$$

donde S_p es el grupo de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, k+l\}$ y $sgn(\sigma)$ es el signo de la permutación σ.

Veamos ahora algunas propiedades el producto exterior.

Proposición 2.11. *Tomando α y β como en la definición anterior, el producto exterior satisface las siguientes propiedades:*

- *$\alpha \wedge \beta$ es bilineal.*
- *$\alpha \wedge \beta$ es asociativo.*
- *$\alpha \wedge \beta$ es antisimétrico, esto es,*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

Sea Q una variedad diferenciable y $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta de Q con $U \subset Q$ abierto entonces, la base dual viene dada por $\{dx_i\}_{i=1}^n$. Luego, toda $k-$forma puede escribirse localmente como:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \ldots, i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Decimos que α es diferenciable si $\alpha_{i_1, \ldots, i_k}$ es diferenciable.

Pull-back de campos tensoriales covariantes

Antes de definir el pull-back, veamos a qué nos referimos con campos de tensores en variedades diferenciables.

Definición 2.12. *Sea Q una variedad diferenciable y $U \subset Q$ un abierto. Un* **campo tensorial de tipo r-contravariante s-covariante** *en U es una asignación para cada $p \in U$ de un tensor de $T_s^r(T_pQ)$. Se dice que un campo es* **diferenciable** *si su expresión en coordenadas locales tiene como coeficientes funciones diferenciables.*

Definición 2.13. *Sea $f : Q \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables y $\mathbf{T} \in T_s^0(N)$ un campo tensorial $s-$covariante en N. Llamamos* **pull-back** *de $\mathbf{T}$, $f^*\mathbf{T}$, al campo tensorial $s-$covariante de Q dado por la expresión*

$$(f^*\mathbf{T})_p(X_1, \ldots, X_s) = \mathbf{T}_{f(p)}(T_pf(X_1), \ldots, T_pf(X_s)) \in T_s^0Q,$$

con $p \in Q$ y $X_i \in \mathscr{X}(Q)$, $i = 1, \ldots, s$.

Derivada de Lie

Una derivada de Lie es una derivación en el álgebra de funciones diferenciables sobre una variedad diferenciable Q. El corchete de Lie de dos campos constituye un caso particular de esta derivación.

Definición 2.14. *Sea Q una variedad diferenciable, $U \subset Q$, $X, Y \in \mathscr{X}(U)$. Se llama* **corchete o paréntesis de Lie**, *$[X,Y]$, al operador dado por*

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

El corchete de Lie va a cumplir las propiedades dadas por la siguiente proposición:

Proposición 2.15. *Sean Q una variedad diferenciable, $X, Y, Z \in \mathscr{X}(Q)$ y $f, g \in C^\infty(Q)$, se verifica:*

1. *Antisimetría:* $[X,Y] = -[Y,X]$.
2. $\mathbb{R}-$*linealidad:* $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X,Z] + \mu[Y,Z]$ *con* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.
4. *Identidad de Jacobi:* $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

Una vez hemos definido el corchete de Lie, veamos el caso general, esto es, cómo se define la derivada de Lie.

Definición 2.16. *Sean Q una variedad diferenciable, $X \in \mathscr{X}(Q)$ campo de vectores y $T \in T^r_s(Q)$ un campo tensorial. Llamamos* **derivada de Lie** *de T en la dirección de X, $\mathcal{L}_X T$, al campo de tensores de tipo (r,s) dado por:*

1. $f \in C^\infty(Q)$, $\mathcal{L}_X f = Xf \in C^\infty(Q)$
2. $Y \in \mathscr{X}(Q)$, $\mathcal{L}_X Y = [X,Y] \in \mathscr{X}(Q)$
3. $\omega \in \Omega_1(Q)$, $(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = \mathcal{L}_X(\omega(Y)) - \omega(\mathcal{L}_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y])$, *con* $Y \in \mathscr{X}(Q)$
4. $T \in T^r_s(Q)$,

$$\begin{array}{rcl}(\mathcal{L}_X T)(X_1,\ldots,X_s,\omega_1,\ldots,\omega_r) & = & X(T(X_1,\ldots,X_s,\omega_1,\ldots,\omega_r) \\ & - & \sum_{i=1}^s T(X_1,\ldots,\mathcal{L}_X X_i,\ldots,X_s,\omega_1,\ldots,\omega_r) \\ & - & \sum_{j=1}^r T(X_1,\ldots,X_s,\omega_1,\ldots,\mathcal{L}_X\omega_j,\ldots,\omega_r),\end{array}$$

con $X_i \in \mathscr{X}(Q)$ *y* $\omega_j \in \Omega_1(Q)$.

Diferencial exterior

Definición 2.17. *Dada una $k-$forma ω, la* **diferencial exterior** *viene dada por:*

$$\begin{array}{rcl} d\omega(X_0,\ldots,X_k) & = & \sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i(\omega(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_k)) \\ & + & \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_k). \end{array} \tag{2.15}$$

La **diferencial exterior** es una aplicación única que va de las $k-$formas en Q a las $(k+1)-$formas en Q verificando:

1. Si $f \in C^\infty(Q)$ entonces df es la diferencial de f.
2. $d\omega$ es lineal en ω.
3. $d\omega$ satisface la regla del producto, $d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge d\alpha$, donde ω es un $k-$forma y α una $l-$forma.
4. $d^2 = 0$, es decir, $d(d\omega) = 0$ para toda $k-$forma ω.

Se dice que una $k-$forma ω es **cerrada** si $d\omega = 0$ y **exacta** si existe una $(k-1)-$forma α tal que $\omega = d\alpha$.

Veamos ahora algunas relaciones de la derivada de Lie con el producto interior y con la diferencial exterior.

Estudiemos ahora la fórmula de Cartan, la cual define una dualidad entre el producto interior y la diferencial exterior.

Teorema 2.18 (Fórmula de Cartan)**.** *Sea X un campo de vectores y ω una $k-$forma en una variedad Q entonces,*

$$\mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_X d\omega.$$

(Podemos encontrar la demostración de dicho teorema, por ejemplo, en la pág. 373 de [7]).

Corolario 2.19. *Si ω es un $k-$forma y X, Y son campos de vectores,*

$$i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X i_Y\omega - i_Y\mathcal{L}_X\omega.$$

Haces

Un concepto que nos será útil y que encontraremos al estudiar los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden es el concepto de haz ([10], pág. 67).

Definición 2.20. *Sea V un espacio topológico. Un* **haz de anillos de funciones** *o* **haz de anillos** *de V es toda ley A que asigna a cada abierto U de V un anillo $A(U)$ de funciones en U, $A : U \subset V \longrightarrow A(U)$, de modo que se cumpla:*

- *Si $f \in A(U)$, para todo abierto $W \subset U$, la restricción de f a W está en $A(W)$.*

- *Recíprocamente, si* $\{W_\alpha\}$ *es una colección de abiertos tal que* $U = \cup_\alpha W_\alpha$ *y* f *es una función en* U *cuya restricción a cada* W_α *está en* $A(W_\alpha)$ *entonces,* $f \in A(U)$.

A los elementos del anillo $A(U)$ *los llamamos* **secciones del haz** A *sobre el abierto* U.

Definición 2.21. *Dado un punto* p *en* V*, con* V *espacio topológico, definimos la relación de equivalencia al conjunto de ciertos campos, funciones,... cuyos dominios contienen a* p*, por* $(f, U) \sim (g, W)$*, con* U, W *abiertos de* V*, si* $f \equiv g$ *en un entorno de* p.

La clase de equivalencia de un campo, una función, ... (f, U) *es el denominado* **germen**. *Esto es, llamamos germen de un campo, función,... sobre un espacio topológico a la clase de equivalencia de ese campo, función, ... con otros del mismo tipo que comparten propiedades localmente.*

Definición 2.22. *Para cada* $p \in V$*, los gérmenes en* p *de las secciones de* A *en todos los entornos de* p *forman un anillo* (A_p) *que llamaremos* **fibra del haz** A *en el punto* p.

Veamos algunos ejemplos de haces:

Ejemplo 2.23.

1. *El haz constante* $\mathbb{R}$ *cuyas secciones sobre cada abierto conexo* U *son las funciones constantes en* U *con valores reales.*

2. *Si* V *es una variedad diferenciable, podemos considerar los haces* $C^m, m = 0, 1, 2, \ldots$ *de los gérmenes de funciones de clase* m*, siendo* $C^m(U)$ *el anillo de las funciones reales en* U *que son* m *veces diferenciables con continuidad.*

3. *Denotaremos por* E *al " haz de gérmenes de funciones reales de clase* C^∞ *" en la variedad* V*. Para cada abierto* U*,* $E(U) = C^\infty(U)$ *anillo de las funciones reales infinitamente diferenciables en* U.

4. *Sean* V *una variedad diferenciable y* $\{X_j\}$ *una colección cualquiera de campos tangentes en abiertos de* V*, estando cada* X_j *definido en un abierto* U_j *de* V*. Llamaremos* $A(U)$ *al anillo de todas las funciones* f *reales infinitamente diferenciables tales que* $X_j f = 0$ *en* $U \cap U_j$*,* $\forall j$*. La ley que asigna a cada abierto* U *de* V *el anillo* $A(U)$ *así definido, es un haz de anillos, llamado* **haz de integrales primeras** *de* $\{X_j\}$*, el cual nos será útil para demostrar la existencia de integrales completas.*

Dos resultados importantes, que mencionaremos en el capítulo de aplicaciones de las variedades simplécticas son el teorema de Fröbenius y el teorema de Cartan, los cuales enunciaremos a continuación (para más detalle págs. 74 y 88 de [10], respectivamente). Para ello ampliamos la noción de haz a módulos:

Sean $A \subset E$ un haz de anillos y M un haz de campos tensoriales. Diremos que M es un haz de $A-$módulos cuando para cada $p \in V$, M_p sea un módulo sobre A_p para la operación natural de multiplicación, esto es, cuando para cada abierto U de V, $M(U)$ sea estable para la multiplicación por funciones pertenecientes a $A(U)$.

Teorema 2.24 (Teorema de Fröbenius)**.** *Sea* L *un haz de campos tangentes regular de rango* r *en la variedad* V*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *L es totalmente integrable.*

2. *L es involutivo.*

3. *Cada $p \in V$ tiene un entorno U coordenado por funciones $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_r$ tales que $\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_r\}$ son un sistema de generadores del haz de campos EL en U.*

4. *El haz A de integrales primeras de L es un haz de anillos regulares de dimensión $m = n - r$.*

Definiendo ahora un **sistema diferencial exterior** como un haz M de formas exteriores en una variedad el cual es homogéneo y tal que EM (haz de gérmenes de 1-formas incidentes en las secciones de $M^{\perp}$) es localmente finito-generado (para cada punto de la variedad tiene un entorno en el que hay una colección finita de secciones generadoras de EM en el entorno) ([10], pág. 73).

Además, llamando sistema de Pfaff a todo sistema diferencial exterior de 1-formas, definimos el **sistema característico** del sistema de Pfaff M al haz L de campos tangentes cuya fibra en cada punto p de V está formada por los gérmenes de campos tangentes X que cumplen lo siguiente: para toda $\omega \in M_p$ se verifica que $\omega(X) = i_X\omega = 0$, y $\mathcal{L}_X\omega \in M_p$.([10], pág. 77)

Luego, el teorema de reducción de Cartan se enuncia:

Teorema 2.25 (Teorema de Cartan sobre la reducción de un sistema diferencial exterior)**.** *Sea M un sistema diferencial exterior, L_M su sistema característico, A el haz de integrales primeras de L_M. Sea U el abierto de la variedad V en que L_M es regular. En U, M es reducible al haz de anillos A y no lo es a ningún haz de anillos regulares extrictamente contenido en A.*

Capítulo 3. Geometría Simpléctica Lineal

Antes de estudiar las variedades simplécticas, estudiaremos qué es una forma simpléctica y la estructura de un espacio vectorial simpléctico.

Sea V un espacio vectorial $n-$dimensional sobre $\mathbb{R}$, y sea $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal. Decimos que ω es antisimétrica si $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$, para todo $u, v \in V$.

El siguiente teorema nos da la forma estándar de aplicaciones bilineales antisimétricas, para su demostración nos hemos basado en [3].

Teorema 3.1. *Sea ω una aplicación bilineal antisimétrica sobre el espacio vectorial V. Existe una base $u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ de V tal que:*

$$\begin{array}{ll} \omega(u_i, v) = 0, & \forall i \text{ y } \forall v \in V \\ \omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(f_i, f_j), & \forall i, j \\ \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, & \forall i, j \end{array}$$

Luego la matriz asociada respecto de la base dada es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Demostración. Vamos a realizar la demostración por inducción.
Sean $U := \{u \in V \,/\, \omega(u, v) = 0 \; \forall v \in V\}$ y $u_1, \dots, u_k$ una base de U. Llamamos W a un espacio complementario de U en V, esto es,

$$V = U \oplus W.$$

Tomamos ahora $e_1 \in W$ no nulo. Luego, existe $f_1 \in W / \omega(e_1, f_1) \neq 0$. Podemos suponer que $\omega(e_1, f_1) = 1$.
Sean W_1 el espacio generado por $\{e_1, f_1\}$ y $W_1^{\perp}$ su ortogonal, esto es,

$$W_1^{\perp} = \{x \in W \,/\, \omega(x, v) = 0 \; \forall v \in W_1\}.$$

Tenemos que W_1 y $W_1^{\perp}$ verifican que:

- $W_1 \cap W_1^{\perp} = \{0\}$. Sea $v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^{\perp}$, por la $\mathbb{R}$-binealidad de ω tenemos que:

  $$0 = \omega(v, e_1) = a\omega(e_1, e_1) + b\omega(f_1, e_1) = -b,$$

  pues por la antisimetría de ω sabemos que $\omega(e_1, e_1) = 0$ y hemos supuesto que $\omega(e_1, f_1) = 1$.
  Siguiendo el mismo razonamiento:

  $$0 = \omega(v, f_1) = a\omega(e_1, f_1) + b\omega(f_1, f_1) = a$$

  Luego, $v = 0$. Por tanto, $W_1 \cap W_1^{\perp} = \{0\}$.

- $W = W_1 \oplus W_1^{\perp}$. Supongamos que para $v \in W$ se verifica que $\omega(v, e_1) = c$ y $\omega(v, f_1) = d$ y podemos escribir v como la suma de un elemento de W_1 y otro de $W_1^{\perp}$ del siguiente modo:

$$v = \underbrace{(-cf_1 + de_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(v + cf_1 - de_1)}_{\in W_1^{\perp}}$$

Por tanto, podemos escribir $W = W_1 \oplus W_1^{\perp}$. Haciendo dicho proceso de manera iterativa (sea ahora $e_2 \in W_1^{\perp}$ no nulo. Existe $f_2 \in W_1^{\perp}/\omega(e_2, f_2) \neq 0$. Podemos suponer que $\omega(e_2, f_2) = 1$. Sean W_2 el espacio generado por $\{e_2, f_2\}$ ...), tenemos que $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$. Esta suma de espacios es finita puesto que $dimV < \infty$. De este modo obtenemos:

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

donde todos los sumando son ortogonales respecto de ω, y W_i tienen bases $e_i,\ f_i$ con $\omega(e_i, f_i) = 1$ y $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = \omega(e_i, f_j) = 0$
Veamos ahora que, efectivamente, (3.1) es la matriz asociada a ω.
La dimensión de $U := \{u \in V/\omega(u, v) = 0\ \forall v \in V\}$ es independiente de la elección de bases. Luego, $k := dimU$ es invariante respecto de V, entonces $dimV = 2n + k$. Por tanto, dada la base $u_1, \ldots, u_k, e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$, con $u_1, \ldots, u_k$ base de U, llegamos a la matriz asociada a ω:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

□

Definición 3.2. *Sean V un espacio vectorial real de dimensión n y $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal. La aplicación $\omega^b : V \longrightarrow V^*$ es la aplicación lineal dada por $\omega^b(v)(u) = \omega(v, u)$, esto es,*

$$\begin{array}{rccccl} \omega^b : & V & \longrightarrow & V^* & & \\ & v & \longrightarrow & \omega^b(v) : & V & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & & & u & \longrightarrow \omega^b(v)(u) = \omega(v, u) \end{array}$$

Diremos que ω es **débilmente no degenerada** *si ω^b es inyectiva, esto es, $\omega(v, u) = 0$, $\forall u \in V$ entonces $v = 0$. Y diremos que ω es* **no degenerada** *si ω^b es un isomorfismo, esto es, $U = \{0\}$.*

Definición 3.3. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Decimos que la aplicación $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una* **forma simpléctica** *si verifica :*

- *$\mathbb{R}$-binealidad: $\omega(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda\omega(u_1, v) + \mu\omega(u_2, v)$; $\omega(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda\omega(u, v_1) + \mu\omega(u, v_2)$*
- *Antisimetría: $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$*
- *No degenerada: Si $\omega(u, v) = 0\ \forall v \in V$, entonces $u = 0$.*

Definición 3.4. *Sean V un espacio vectorial real de dimensión n y ω una forma simpléctica. Denominamos* **espacio vectorial simpléctico** *al par (V, ω).*

Veamos ahora algunas propiedades de la estructura simpléctica lineal ω:

1. Dualidad: la aplicación $\omega^b : V \xrightarrow{\sim} V^*$ es biyectiva.

2. Del teorema 3.1 tenemos que $dim\, U = k = 0$, luego $dim\, V = 2n + k = 2n$ (V tiene dimensión par, pues el rango de la matriz asociada a ω, (3.1), va a ser siempre par).

3. Por el teorema 3.1, un espacio vectorial (V, ω) tiene base $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ tal que $w(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$ y $w(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. De modo que, la matriz asociada a la forma simpléctica ω en V es:

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Por tanto, $\forall u, v \in V$

$$\omega(u, v) = \omega\Big(\sum_{i=1}^{n} u^i e_i, \sum_{j=1}^{n} v^j f_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} u^i v^j \omega(e_i, f_j) = (u^1, \ldots, u^n)(\omega(e_i, f_j))(v^1, \ldots, v^n)^t$$

Definición 3.5. *Llamamos* **base simpléctica** *de (V, ω) a la base $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ que verifica la propiedad (3).*

Ejemplo 3.6 (Prototipo de espacio vectorial simpléctico. La forma simpléctica sobre el plano $\mathbb{R}^2$)**.** *Sea $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $(u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)) \longrightarrow \omega(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$, esto es, es la aplicación que calcula el área de un paralelogramo siendo el vector u la base de dicho paralelogramo y v su altura. Se prueba fácilmente que nuestra ω así definida cumple la $\mathbb{R}-$bilinealidad, antisimetría y no es degenerada. Por tanto, será una forma simpléctica.*

El prototipo de espacio vectorial simpléctico es el $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, el cual podemos construir de modo análogo a la forma simpléctica sobre el plano $\mathbb{R}^2$. Basta definir ω_0 tal que:

$$\omega_0(u, v) = \sum_{i=1}^{n} (u_i v_{n+i} - u_{n+i} v_i)$$

para $u = (u_1, \ldots, u_{2n})$ y $v = (v_1, \ldots, v_{2n})$ dos vectores de $\mathbb{R}^{2n}$. Luego una base simpléctica de ω_0 viene dada por: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots, 0)$, $f_1 = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n+1}, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $f_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Y su matriz asociada será:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez hemos definido las variedades simplécticas, vamos a considerar las aplicaciones que preservan estas estructuras.

Definición 3.7. *Un* **simplectomorfismo** *entre espacios vectoriales simplécticos* (V, ω) *y* (V', ω') *es un isomorfismo lineal* $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$ *tal que* $\phi^* \omega' = \omega$.
Si esto ocurre diremos que V *y* V' *son simplectomorfos.*

Observación 3.8. *Tenemos que:* $\forall v_1, v_2 \in V, (f^*\omega')(v_1, v_2) = \omega'(v_1', v_2')$ *con* $v_1', v_2' \in V'$. *Por tanto,* f *es un simplectomorfismo si:* $\omega'(f(v_1), f(v_2)) = \omega(v_1, v_2)$.

Proposición 3.9. *Sean* (V, ω) *y* (V', ω') *espacios vectoriales simplécticos, y* $f : V \longrightarrow V'$ *una aplicación lineal. Entonces,* f *es un simplectomorfismo si y sólo si*

$$f^* \circ (\omega^b)' \circ f = \omega^b.$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{f} & V' & \xrightarrow{(\omega^b)'} & T^*V' & \xrightarrow{\tilde{f}} & T^*V \\ v_1, v_2 & \longrightarrow & f(v_1), f(v_2) & \longrightarrow & \underbrace{(\omega^b)'(f(v_1))(f(v_2))}_{\omega'(f(v_1), f(v_2))} & \longrightarrow & \underbrace{f^*(\omega'(f(v_1), f(v_2)))}_{(f^*\omega')(v_1, v_2)} \end{array}$$

Luego, tenemos que demostrar que se verifica que $f^*\omega' = \omega$.

$$\begin{array}{rlll} f^*\omega' = \omega & \Leftrightarrow \ \omega'(f(v_1), f(v_2)) = \omega(v_1, v_2) & \Leftrightarrow & (f^*((\omega^b)'(f(v_1))))(v_2) = (\omega^b(v_1))(v_2) \\ & \Leftrightarrow \ f^*((\omega^b)'(f(v_1))) = \omega^b(v_1) & \Leftrightarrow & f^* \circ (\omega^b)' \circ f = \omega^b. \end{array}$$

Además, si esto se verifica, f será inyectiva. Sea $v \in ker f$, por la biyectividad de ω^b:

$$\omega^b(v) = (f^* \circ (\omega^b)' \circ f)(v) = f^*((\omega^b)'(f(u))) = 0$$

$\square$

La relación de ser simplectomorfos es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios vectoriales de dimensión par. Además, por el teorema 3.1, todo espacio vectorial simpléctico $2n$-dimensional es simplectomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Esto es,

$$(V, \omega) \cong (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \cong (V', \omega').$$

Capítulo 4. Variedades Simplécticas

Una vez hemos hecho una pequeña introducción sobre Geometría Simpléctica estudiaremos las Variedades Simplécticas y sus aplicaciones a la mecánica Hamiltoniana y a las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Definición 4.1. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Llamamos* **variedad simpléctica** *al par (M, ω_2), donde ω_2 es una 2- forma sobre M (para cada $p \in M$, la aplicación $\omega_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ es antisimétrica en el espacio tangente de M en p) que satisface:*

1. *ω_2 es cerrada: $d\omega_2 = 0$*

2. *ω_2 es no degenerada: para $u, v \in T_pM$ $\omega_2(u, v) = 0, \forall v \in T_pM \Longleftrightarrow u = 0$*

Ejemplo 4.2. *Sea $M = \mathbb{R}^{2n}$ una variedad diferenciable con coordenadas $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. La 2-forma*

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

es simpléctica.

- *ω_0 es cerrada: $d\omega_0 = d\Big(\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i\Big) = \sum_{i=1}^n d(dx_i \wedge dy_i) = \sum_{i=1}^n (ddx_i \wedge dy_i - dx_i \wedge ddy_i) = 0$*

- *ω_0 es no degenerada: Tomando $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p \right\}$ base de $T_p\mathbb{R}^{2n}$, por $\omega_{0,p}$ obtenemos la matriz (3.2). Luego, ω_0 es no degenerada.*

Ejemplo 4.3. *Sea $M = \mathbb{C}^n$ con las coordenadas lineales $z_1, \ldots, z_n$. Se puede comprobar que identificando $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ y tomando $z_k = x_k + iy_k$, la 2-forma*

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k$$

es la vista en el ejemplo anterior (con $\bar{z}_k$ el conjugado de z_k).
Para probar esto basta sustituir $z_k = x_k + iy_k$, $\bar{z}_k = x_k - iy_k$, obteniendo $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$.

Ejemplo 4.4. *Sea $M = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ el conjunto de vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$. Los vectores tangentes a S^2 en el punto p son los vectores ortogonales a p, esto es, $T_pS^2 = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 / pv = xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0\}$. La forma simpléctica estándar en S^2 viene dada por:*

$$\omega_p(u, v) := p \cdot (u \times v)$$

para $u, v \in T_pS^2$. Esta forma es cerrada por ser de grado máximo. Y es no degenerada ya que $p \cdot (u \times v) \neq 0$ cuando $u \neq 0$, por tanto, $v = u \times p$, como u y p no son paralelos entonces $v \neq 0$ y $p \cdot (u \times v) \neq 0$.

4.1. Simplectomorfismos

Definición 4.5. *Sean* (M_1, ω_1) *y* (M_2, ω_2) *dos variedades simplécticas de dimensión* $2n$*, y* $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ *un difeomorfismo. Entonces* ϕ *es un* **simplectomorfismo** *si* $\phi^*\omega_2 = \omega_1$*.*

Ejemplo 4.6. *Retomando el ejemplo 3.6, vimos que una forma simpléctica en una superficie es una forma de área. Por tanto, un simplectomorfismo entre superficies es una aplicación que preserva las áreas.*

Una herramienta útil para una visión local es el teorema de Darboux. Sabemos que cualquier variedad diferenciable n-dimensional es isomorfa a $\mathbb{R}^n$, esto es, existe un isomorfismo. Luego, cualquier variedad simpléctica $2n$-dimensional "se parece" a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Es decir, una variedad simpléctica (M^{2n}, ω) es localmente simplectomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Esto es lo que nos dice el siguiente teorema [3]:

Teorema 4.7 (Teorema de Darboux)**.** *Sean* (M, ω) *una variedad simpléctica* $2n$*-dimensional y* p *un punto cualquiera de* M*. Entonces, tenemos una carta* $(U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ *centrada en* p *tal que en* U

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Demostración. Vamos a suponer $M = \mathbb{R}^{2n}$ y $p = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Sea ω una forma simpléctica en $\mathbb{R}^{2n}$, queremos probar que podemos encontrar una carta diferenciable (U_0, ψ) centrada en $p \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\psi^*\omega_1 = \omega$, con ω_1 otra forma simpléctica cualquiera sobre $\mathbb{R}^{2n}$.

Como $\omega(0)$ es no degenerada (3.6), podemos suponer que existen $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ coordenadas en $\mathbb{R}^{2n}$ tal que $\bar{x}_i(0) = 0 = \bar{y}_i(0)$, $\forall i$, y $\omega(0) = \sum_{i=1}^{n} (d\bar{x}_i \wedge d\bar{y}_i)(0)$.
Definimos $\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} d\bar{x}_i \wedge d\bar{y}_i$ en $\mathbb{R}^{2n}$. Luego tenemos dos formas definidas en $\mathbb{R}^{2n}$ tal que en un entorno U de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$, $\omega(0) = \omega_1(0)$ ($\omega_1(0) = 0$ por definición), entonces $(\omega - \omega_1)(0) = 0$.
Luego, por el lema de Poincaré, existe $U_0 \subset U$ entorno abierto de 0, y α 1-forma definida en U_0 tal que $(\omega - \omega_1)_{U_0} = d\alpha$ y $\alpha(0) = 0$.
Sea $\omega_t = \omega + t(\omega_1 - \omega) = \omega - t d\alpha$ con $t \in [0, 1]$. Como $(\omega - \omega_1)_{U_0} = d\alpha$ y $(\omega - \omega_1)(0) = 0$ entonces $d\alpha(0) = 0$. Por tanto, podemos disminuir U_0 a un entorno $U_1 \subset U_0 / \forall p \in U_1$, donde $(\omega_t)_p$ es simpléctica $\forall t \in [0, 1]$. Pues para $t = 0, \omega_0 = \omega$, para $t = 1$, $\omega_1 = \omega_1$, y $\omega_t(0) = \omega(0) + t(\omega_1(0) - \omega(0)) = \omega(0)$ que no es degenerada para todo t.
Por tanto, como ω_t es no degenerada en U_1 $\forall t$, podemos definir el campo de vectores $X_t \in \mathscr{X}(U_1)$, con $t \in [0, 1]$, del siguiente modo: $i_{X_t}\omega_t = -\alpha$ Como $\alpha(0) = 0$,

$$i_{X_{t_{|0}}} \omega_{t_{|0}} = -\alpha_0, \quad \omega_{t_{|0}}(X_{t_{|0,\cdot}}) = 0.$$

Como ω_t es no degenerada, $X_t(0) = 0$.

Sea $\{\psi_{t,0}\}$ el flujo de X_t, $\forall t \in [0, 1]$. Localmente, $\{\psi_{t,0}\}$ es un difeomorfismo que verifica que $\psi_{0,0} = Id$. Veamos que $\psi_{t,0}$ es un simplectomorfismo verificando $\psi_{t,0}^*\omega_t = \omega_0$.

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}(\psi_{t,0}^*\omega_t) &= \tfrac{d}{dt}(\psi_{t,0}^*(\omega + t(\omega_1 - \omega))) = \tfrac{d}{dt}(\psi_{t,0}^*\omega_t) + \tfrac{d}{dt}(t\psi_{t,0}^*(\omega_1 - \omega) \\
&= \psi_{t,0}^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega) + \psi_{t,0}^*(\omega_1 - \omega) + t\tfrac{d}{dt}(\psi_{t,0}^*(\omega_1 - \omega)) \\
&= \psi_{t,0}^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega) + \psi_{t,0}^*(d\alpha) + t\psi_{t,0}^*(\mathcal{L}_{X_t}(\omega_1 - \omega)) \\
&= \psi_{t,0}^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) + \psi_{t,0}^*(d\alpha) = \psi_{t,0}^*(d i_{X_t}\omega_t) + \psi_{t,0}^*(d\alpha) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi_{t,0}^*\omega_t$ es constante $\forall t \in [0,1]$. Pero,

$$\omega = \psi_{0,0}^*\omega_0 = \psi_{1,0}^*\omega_1 = \psi_{1,0}^*\left(\sum_{i=1}^{n} d\bar{x}_i \wedge d\bar{y}_i\right)$$

con lo que concluimos. $\square$

Definición 4.8. *Denominamos* **carta de Darboux** *a la carta* $(U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ *definida en el teorema anterior.*

4.2. Forma simpléctica en fibrados cotangentes

En el capítulo 2, ya definimos lo que es un fibrado cotangente (2.10). A continuación, vamos a tomar cartas en nuestra variedad para obtener así la forma simpléctica en dicho fibrado.

Sea ahora una carta $(U, x_1, \ldots, x_n)$ de V, con $x_i : V \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones coordenadas. Luego, sea $p \in U$, $(d_p x_1, \ldots, d_p x_n)$ es una base de T_p^*V. Si $v \in V$ entonces $v = \sum_{i=1}^n v_i(p) d_p x_i$, con $v_i : V \longrightarrow \mathbb{R}$. De este modo tenemos la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} T^*U & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ (x,v) & \longrightarrow & (x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n) \end{array} \tag{4.1}$$

Obteniendo así una carta coordenada para T^*V, $(U, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$.

Hasta ahora hemos visto qué es un fibrado cotangente y hemos obtenido una carta coordenada para el mismo. Estudiemos a continuación cómo se construye una forma simpléctica en fibrados cotangentes.
Sean V una variedad $n-$dimensional, T^*V su fibrado cotangente y $\tau_V^* : T^*V \longrightarrow V$ la proyección natural.
Definimos en T^*V la 1-forma canónica ω_1 del siguiente modo:

$$\begin{array}{cccccccc} \omega_1 : & T^*V & \longrightarrow & T^*(T^*V) & & & \\ & \alpha_p & \longrightarrow & \omega_p(\alpha_p) : & T_{\alpha_p}(T^*V) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & v & \longrightarrow & \omega_1(\alpha_p)(v) = \alpha_p(f'(v)) \end{array} \tag{4.2}$$

donde $T\tau_V^* : T_{\alpha_p}(T^*V) \longrightarrow T_pV$ es la aplicación lineal tangente de la proyección natural.
Si T^*V es un abierto de V coordenado por $x_1, \ldots, x_n$, y sea $U = (\tau_V^*)^{-1}(T^*V)$ con coordenadas $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, entonces en U:

$$\omega_1 = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n.$$

Por tanto, en U, la forma $\omega_2 = d\omega_1$ toma la expresión:

$$\omega_2 = dp_1 \wedge dx_1 + \ldots + dp_n \wedge dx_n.$$

Luego, ω_2 es una forma simpléctica en T^*V (pues del ejemplo 3.6 podemos ver que es no degenerada y, además, es cerrada, pues $d\omega_2 = d^2\omega_1 = 0$) la cual llamamos **2-forma canónica**, y ω_1 es la llamada **1-forma de Liouville**.

Hemos visto la relación entre la 1-forma de Liouville y la 2-forma canónica de una variedad simpléctica. Veamos ahora que esta relación nos permite establecer un simplectomorfismo entre fibrados cotangentes de dos variedades simplécticas.

Sean $V, \bar{V}$ dos variedades de dimensión n arbitrarias cuyos fibrados cotangentes son T^*V , $T^*\bar{V}$ y sus 1-formas de Liouville $\omega_1, \bar{\omega}_1$, respectivamente, tales que $\omega_2 = d\omega_1$ y $\bar{\omega_2} = d\bar{\omega_1}$ de modo que (V, ω_2) y $(\bar{V}, \bar{\omega}_2)$ son variedades simplécticas.

Supongamos que $\phi : V \longrightarrow \bar{V}$ es un difeomorfismo. Definimos:

$$
\begin{array}{rcllcl}
\Phi = T^*\phi : & T^*\bar{V} & \longrightarrow & T^*V & & \\
& \alpha_p \in T^*_p\bar{V} & \longrightarrow & \Phi(\alpha_p): & T_{\phi^{-1}(p)}V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& & & & v & \longrightarrow & \alpha_p(T_{\phi^{-1}(p)}\phi(v)) = \Phi(\alpha_p)(v)
\end{array}
$$

Si escribimos:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] & \bar{V} \\
T^*V \arrow[u, "\tau_V^*"] & T^*\bar{V} \arrow[l, "\Phi=T^*\phi"] \arrow[u, "\tau_{\bar{V}}^*"']
\end{tikzcd} \tag{4.3}
$$

Vemos que $\tau_V^* \circ \Phi = \phi^{-1} \circ \tau_{\bar{V}}^*$, luego el diagrama conmuta.

Demostremos que Φ es un simplectomorfismo. Como $\omega_2 = d\omega_1$ y $\bar{\omega}_2 = d\bar{\omega}_1$, y $d \circ \Phi^* = \Phi^* \circ d$. Nos basta ver que $\Phi^*\omega_1 = \bar{\omega}_1$.

Sean $\alpha_p \in T^*\bar{V}$ y $v \in T_{\alpha_p}(T^*\bar{V})$. Usando (4.2) y cómo hemos definido Φ, tenemos:

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*\omega_1)(\alpha_p)(v) &= \omega_1(\Phi(\alpha_p))(\Phi'(v)) = \Phi(\alpha_p)(T(\omega_1 \circ \Phi)(v)) \\
&= T^*\phi(\alpha_p)(T(\omega_1 \circ T^*\phi)(v)) = \alpha_p(\phi'((\phi')^{-1}(T\bar{\omega}_1(v)))) \\
&= \bar{\omega}_1(\alpha_p)(v).
\end{aligned}
$$

con ϕ' y Φ' las aplicaciones tangentes de ϕ, Φ, respectivamente. Por tanto,

$$\bar{\omega}_2 = \Phi^*\omega_2.$$

4.3. Sistemas hamiltonianos

Definición 4.9. *Llamamos* **transformación canónica infinitesimal o campo vectorial simpléctico**, *t.c.i., en la variedad simpléctica V, a todo campo tangente X tal que $\mathcal{L}_X\omega_2 = 0$.*

Observación 4.10. *Del teorema 2.18 sabemos que $\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$, luego $\mathcal{L}_X\omega_2 = i_X(d\omega_2) + d(i_X\omega_2) = d(iX\omega_2)$, pues $d\omega_2 = 0$ por ser ω_2 cerrada. Por tanto, X es una transformación canónica infinitesimal si $d(iX\omega_2) = 0$.*

Definición 4.11. *Sea (V, ω_2) una variedad simpléctica y $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en V. Un campo tangente X en V tal que $i_X\omega_2$ es diferencial exacta, esto es, $i_X\omega_2 = dH$, se llama* **campo hamiltoniano** *el cual denotaremos por X_H, y la función H verificando esto se denomina* **hamiltoniano de** *X.*

A la terna (V, ω_2, X_H) la denominamos **sistema hamiltoniano**.

Definición 4.12. *Sea $X \in \mathscr{X}(V)$ un campo de vectores en una variedad simpléctica (V, ω_2). Decimos que X es* **localmente hamiltoniano** *si $\forall p \in V$, existe un entorno abierto $U \subset V$ de p tal que $X_{|U}$ es hamiltoniano.*

Observación 4.13.

- *Notación: A un campo hamiltoniano X cuyo hamiltoniano es H lo denotamos X_H.*
- *Se cumple que*

$$\begin{array}{lcl} X \text{ es simpléctico} & \Longleftrightarrow & i_X\omega_2 \quad \text{es cerrada} \quad (d(i_X\omega_2) = 0) \\ X \text{es hamiltoniano} & \Longleftrightarrow & i_X\omega_2 \ \text{ es exacta } \ (i_X\omega_2 = dH). \end{array} \tag{4.4}$$

- *Como toda 1-forma es localmente exacta, las t.c.i. las llamamos también campos localmente hamiltonianos.*

Sea $\{\psi_t\}$ un grupo uniparamétrico de automorfismos diferenciable de V generado por un campo de vectores X (o lo que es los mismo, $\{\psi_t\}$ el flujo de X). Entonces, la condición necesaria y suficiente para que ψ_t sea simplectomorfismo $\forall t$, es que dejen invariante a ω_2, es decir, $\mathcal{L}_X\omega_2 = 0$ o $\psi_t^*\omega_2 = \omega_2$. Esto es lo que demostramos en la siguiente proposición:

Proposición 4.14. *Sea (V, ω_2, X_H) un sistema hamiltoniano y $\{\psi_t\}$ el flujo de X_H. Entonces, $\psi_t^*\omega_2 = \omega_2$ $\forall t$, esto es, X_H es un campo simpléctico.*

Demostración. Por lo visto en la observación 4.10 y usando cómo se define un campo hamiltoniano, es fácil ver:

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega_2 = d(iX_H\omega_2) = d^2H = 0.$$

Por lo tanto, concluimos que, efectivamente, $\psi_t^*\omega_2$ es constante e igual a $\psi_0^*\omega_2 = \omega_2$; esto es, ψ_t es un simplectomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Sea X_H un campo hamiltoniano, entonces: $\mathcal{L}_{X_H}H = i_{X_H}dH$. Sabemos que $dH = i_{X_H}\omega_2$ luego, $\mathcal{L}_{X_H}H = i_{X_H}dH = i_{X_H}i_{X_H}\omega_2 = 0$.

Además, se verifica: $H(x) = (\psi_t^*H)(x) = H(\psi_t(x)), \forall t$, esto es, los campos vectoriales hamiltonianos preservan sus funciones hamiltonianas.

Proposición 4.15. *Un campo de vectores X es localmente hamiltoniano si y sólo si es simpléctico.*

4.4. Álgebras de Lie. Corchete de Poisson

En este apartado del capítulo veremos qué es un álgebra de Lie, sabiendo que el corchete de Lie se define como en (2.14), y definiremos corchete de Poisson.

Definición 4.16. *Un* **álgebra de Lie** *es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ que junto con una operación bilineal antisimétrica $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, denominada paréntesis o corchete de Lie (2.14), satisface la identidad de Jacobi*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

para todo $x, y, z \in \eth$.

Ejemplo 4.17 (Espacio vectorial euclídeo con multiplicación vectorial)**.** *Sean* $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ *y* $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ *tres vectores en* $\mathbb{R}^3$. *Sabemos que el producto vectorial verifica:*

1. *es bineal:* $(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$; $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

2. *es antisimétrico:* $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

Para que, en efecto, sea un álgebra de Lie tiene que satisfacer la identidad de Jacobi. Veamos que esto es así:

$$\begin{aligned}(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \;&=\; [(x_3y_1 - y_3x_1)z_3 - z_2(x_1y_2 - y_1x_2)]\vec{i}+ \\ &\quad +[(x_1y_2 - y_1x_2)z_1 - z_3(x_2y_3 - y_2x_3)]\vec{j}+ \\ &\quad +[(x_2y_3 - y_2x_3)z_2 - z_1(x_3y_1 - y_3x_1)]\vec{k}\end{aligned}$$

Del mismo modo calculamos $(\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x}, (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y}$, *y sumando obtenemos:* $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} = 0$.

Luego, satisface la identidad de Jacobi. Por tanto, concluimos que el espacio vectorial euclídeo es un álgebra de Lie con la multiplicación vectorial.

Definición 4.18. *Sea* (V, ω_2) *una variedad simpléctica. El* **corchete de Poisson** *se define de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned}\{\cdot,\cdot\} : \quad C^\infty(V) \times C^\infty(V) \;&\longrightarrow\; C^\infty(V) \\ (f, g) \;&\longrightarrow\; \{f, g\} = X_g(f) = \omega_2(X_f, X_g)\end{aligned} \tag{4.5}$$

Observación 4.19. *Tomando la variedad de la definición, dada una función* $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$, *a esta le corresponde un grupo uniparamétrico de transformaciones canónicas de* V, $\psi_t^H : V \longrightarrow V$. *Sea además,* $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *otra función en* V.

Si usamos un isomorfismo Γ *entre 1-formas y campos vectoriales en la variedad simpléctica, tenemos que el vector velocidad de* ψ_t^H *es* $\Gamma(dH)$. *De esto surje la definición de corchete de Poisson:*

- *El corchete de Poisson de las funciones* f, H *es igual al valor de la 1-forma* df *en el vector velocidad* $\Gamma(dH)$ *del flujo de fase con función hamiltoniana* H*:*

$$\{f, H\} = df(\Gamma(dH)) = X_H(f).$$

- *El corchete de Poisson de las funciones* f, H *es igual al "producto escalar antisimétrico"de los vectores de velocidad de los flujos de fase con funciones hamiltonianas* H *y* f*:*

$$\{f, H\} = \omega_2(\Gamma(dH), \Gamma(df) = \omega_2(X_f, X_H).$$

De (4.5) podemos ver que el paréntesis de Poisson es una ley de composición interna $\mathbb{R}$-bilineal y antisimétrica en $C^\infty(V)$. Por lo tanto, si verifica la identidad de Jacobi, $C^\infty(V)$ dotado del paréntesis de Poisson sería un álgebra de Lie. En el siguiente teorema vamos a ver que esto se verifica:

Teorema 4.20. *Sea (V, ω_2) una variedad simpléctica. El corchete de Poisson satisface, para $f, g, h \in C^\infty(V)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:*

1. *$\{\cdot,\cdot\}$ es $\mathbb{R}$-lineal:*
$$\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\}$$

2. *$\{\cdot,\cdot\}$ es antisimétrico:*
$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

3. *$\{\cdot,\cdot\}$ verifica la identidad de Jacobi:*
$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

4. *$\{\cdot,\cdot\}$ satisface la regla de Leibniz:*
$$\{f, gh\} = h\{f, g\} + g\{f, h\}$$

Demostración. A lo largo de la demostración vamos a suponer $f, g, h \in C^\infty(V)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$-linealidad:
$$\{\lambda f + \mu g, h\} = X_h(\lambda f + \mu g) = \lambda X_h(f) + \mu X_h(g) = \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\}.$$

2. Antisimetría:
$$\{f, g\} = \omega_2(X_f, X_g) = -\omega_2(X_g, X_f) = -\{g, f\}\,, \text{ por la antisimetría de } \omega_2.$$

3. Identidad de Jacobi: Como ω_2 es cerrada podemos escribir $d\omega_2(X_f, X_g, X_h) = 0$. Luego, usando la definición de la diferencial exterior de una forma (2.15), tenemos que:
$$\begin{array}{rcl} 0 = d\omega_2(X_f, X_g, X_h) & = & X_f(\omega_2(X_g, X_h)) - X_g(\omega_2(X_f, X_h)) + X_h(\omega_2(X_f, X_g)) \\ & & -\omega_2([X_f, X_g], X_h) + \omega_2([X_f, X_h], X_g) - \omega_2([X_g, X_h], X_f) \\ & = & \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ & & -i_{[X_f, X_g]}\omega_2(X_h) + i_{[X_f, X_h]}\omega_2(X_g) - i_{[X_g, X_h]}\omega_2(X_f) \\ & = & \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ & & -(\mathcal{L}_{X_f} i_{X_g}\omega_2)(X_h) + (\mathcal{L}_{X_f} i_{X_h}\omega_2)(X_g) - (\mathcal{L}_{X_g} i_{X_h}\omega_2)(X_f) \\ & = & \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ & & -(\mathcal{L}_{X_f} dg)(X_h) + (\mathcal{L}_{X_f} dh)(X_g) - (\mathcal{L}_{X_g} dh)(X_f) \\ & = & \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ & & -(d\{g, f\})(X_h) + (d\{h, f\})(X_g) - (d\{h, g\})(X_f) \\ & = & \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ & & -\{h, \{g, f\}\} + \{g, \{h, f\}\} - \{f, \{h, g\}\} \end{array}$$
Usando la antisimetría del corchete de Poisson demostrada en el apartado anterior tenemos:
$$0 = 2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\})$$
Luego, efectivamente, la identidad de Jacobi es verificada. Y con ello queda demostrado también que $C^\infty(V)$, dotado del paréntesis de Poisson, es un álgebra de Lie.

4. Regla de Leibniz:

$$\{f, gh\} = -\{gh, f\} = -X_f(gh) = -gX_f(h) - hX_f(g) = g\{f, h\} + h\{f, g\}$$

□

Proposición 4.21. *Sean X un campo de vectores en V y $f, g \in C^\infty(V)$. Entonces, se verifica:*

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}} \quad , \text{ con } [\cdot, \cdot] \text{ el corchete de Lie.}$$

Demostración. Tomando $h \in C^\infty(V)$, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} [X_f, X_g](h) & = & X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = -\{h, \{f, g\}\} \\ & = & -X_{\{f,g\}}(h). \end{array}$$

□

Proposición 4.22. *Sean $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ funciones diferenciables en un abierto U de la variedad simpléctica V. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\omega_2 = \sum_{i=1}^m dx_i \wedge dy_i$
2. *Para cualesquiera $f, g \in C^\infty(U)$*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i}$$

3. *Para cualquier $f \in C^\infty(U)$:*

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_i} dx_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} dy_i$$

4. *Cuando $m = n$ estas condiciones son equivalentes a:*

$$\{x_i, x_j\} = 0 = \{y_i, y_j\} \ , \ \{x_i, y_j\} = \delta_{ij} \text{ con } i, j = 1, \ldots, n$$

(Demostración desarrollada en [10] pág 138).

Luego, de la equivalencia de 1 y 4 de la proposición para $m = n$ se sigue la siguiente proposición.

Proposición 4.23. *Sean (V, ω_2) y $(\bar{V}, \bar{\omega}_2)$ dos variedades simplécticas de dimensión $2n$. Si $\psi : V \longrightarrow \bar{V}$ es un simplectomorfismo, entonces*

$$\psi^*\{f, g\} = \{\psi^* f, \psi^* g\}, \ \forall \ f, g \in C^\infty(\bar{V})$$

Demostración. Sea $p \in V$,

$$\begin{array}{rcl} \Big(\psi^*\{f, g\}\Big)(p) & = & \{f, g\}(\psi(p)) = X_g f(\psi(p)) = X_g(\psi(p))(f) \\ & = & \Big((T_g\psi)(X_{\psi^* g})(p)\Big)(f) = (X_{\psi^* g}(p))(\psi^* f) \\ & = & \{\psi^* f, \psi^* g\}(p). \end{array}$$

□

Ejemplo 4.24. *En* $\mathbb{R}^{2n}$*, con coordenadas* $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ *y con forma simpléctica* $\omega_2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ *vista en el ejemplo 3.6. Tenemos que el corchete de Poisson para dos funciones* $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ *viene dado por:*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i}$$

4.5. Sistemas Integrables

Una vez hemos estudiado qué es un sistema hamiltoniano y el paréntesis de Poisson, estamos listos para ver los sistemas integrables.

Definición 4.25. *Sean* $f, g \in C^\infty(V)$ *dos funciones. Decimos que* f *y* g **están en involución** *respecto de la estructura simpléctica de* V *si* $\{f, g\} = 0$.

Teorema 4.26. *Una función* f *es una* **integral primera**, *o* **integral de movimiento**, *o* **constante de movimiento** *con función hamiltoniana* H *(esto es,* f *es constante a lo largo de las curvas integrales de* X_H*) si y sólo* $\{f, H\} = 0$.

Demostración. Sea $\{\phi_t\}$ el flujo del campo hamiltoniano X_H. Sabemos que f es integral primera del campo X si $X(f) = 0$. Luego, usando (2.14) y (4.5) tenemos:

$$X_{\phi_t}(f) = \tfrac{d}{dt}(f \circ \phi_t) = \phi_t^* \mathcal{L}_H f = \phi_t^* i_{X_H} df = \phi_t^* i_{X_H} i_{X_f} \omega_2 = \phi_t^* \omega_2(X_H, X_f) = \phi_t^* \{f, H\}.$$

□

En general, los sistemas hamiltonianos no admiten integrales primeras independientes de la función hamiltoniana. Sean $f_1, \ldots, f_n$ funciones en V, éstas son independientes si $df_1, \ldots, df_n$ son linealmente independientes en todo punto de algún subconjunto denso de V.

Definición 4.27. *Decimos que un sistema hamiltoniano es* **completamente integrable** *si tiene* $n = 1/2dim(V)$ *integrales de movimiento,* $f_1 = H, f_2, \ldots, f_n$*, las cuales verifican* $\{f_i, f_j\} = 0$.

Corolario 4.28. *El corchete de Poisson de dos integrales primeras de un sistema con función hamiltoniana* H *es una integral primera.*

Demostración. Sean f_1, f_2 las dos integrales primeras del enunciado. Sabemos que si f_i, con $i = 1, 2$ es integral primera de un sistema con función hamiltoniana H, entonces verifica: $\{f_i, H\} = 0$. Luego, usando la identidad de Jacobi,

$$\{\{f_1, f_2\}, H\} = \{\{f_2, H\}, f_1\} + \{\{H, f_1\}, f_2\} = 0 + 0 = 0.$$

□

Corolario 4.29. *Sean* X, Y *dos campos hamiltonianos con funciones hamiltonianas* f, g*, respectivamente. Entonces,* $[X, Y]$ *es un campo hamiltoniano con función hamiltoniana* $\{f, g\}$.

4.6. Subvariedades de una variedad simpléctica

A continuación, vamos a estudiar tipos especiales de subvariedades de una variedad simpléctica (V, ω_2).

Definición 4.30. *Llamamos a la subvariedad X de la variedad simpléctica V* **isótropa** *cuando la especialización a X de la 2-forma simpléctica ω_2 es nula, esto es, $(i^*\omega_2) = \omega_2 \mid_X = 0$.*

La dimensión de la subvariedad isótropa X va a ser siempre $\leq n$ ($dim(V) = 2n$).

Definición 4.31. *Decimos que una subvariedad X de V es una* **subvariedad lagrangiana** *si es una subvariedad isótropa de dimensión n. Es decir, si $i : X \hookrightarrow V$ es la aplicación inclusión antes vista, entonces X es lagrangiana si y sólo si $i^*\omega_2 = 0$ y $dim(X) = (1/2)\, dim(V)$.*

Ejemplo 4.32 (Sección cero)**.** *Sea V una variedad de dimensión n, con $U \subset V$ coordenado por $x_1, \ldots, x_n$. Entonces, por lo que hemos visto, sea el fibrado cotangente TV de V, el fibrado TU está coordenado por $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Luego, la 1-forma de Liouville en TV viene dada por:*

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$$

y la 2-forma canónica:

$$\omega_2 = -d\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

La sección cero de TV viene dada por:

$$X_0 = \{(x, y) \in TV / y = 0 \ \ en T_x V\}.$$

Luego, es una subvariedad de dimensión n y cuya intersección con TU viene dada por $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Por tanto, considerando la inclusión $i : X_0 \hookrightarrow TV$ tenemos que $i^*\omega_2 = -i^*d\omega_1 = -di^*\omega_1 = 0$ ya que $\omega_1 = 0$ en $X_0 \cap TU$. Concluimos que X_0 es una subvariedad lagrangiana del fibrado cotangente.

Ejemplo 4.33 (Fibrados conormales)**.** *En este ejemplo veremos que el fibrado conormal de cualquier subvariedad X de una variedad V será una subvariedad lagrangiana de T^*V, con T^*V simpléctica.*

El **espacio conormal** *de una subvariedad m-dimensional de la variedad V de dimensión n en el punto $p \in X$ viene dado por: $N_p^*X = \{y \in T_p^*V \,/\, y(v) = 0 \,\forall\, v \in T_pX\}$. Y su fibrado conormal es: $N^*X = \{(p, y) \in TV \,/\, p \in X \,,\, y \in N_p^*X\}$.*

Para probar que el fibrado conormal de una subvariedad X es una subvariedad lagrangiana de T^*V, basta considerar la inclusión $i : N^*X \hookrightarrow T^*V$ y ω_1 la 1-forma de Liouville. Tenemos que comprobar que $i^*\omega_1 = 0$.

Sea $(U, x_1, \ldots, x_n)$ una carta coordenada de V centrada en $p \in X$ de modo que, $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$. Entonces, la carta coordenada asociada al espacio cotangente viene dada por $(T^*U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Luego, la subvariedad $N^*X \cap T^*U$, por definición, está dada por:

$$x_{k+1} = \ldots = x_n = 0 \ y \ y_1 = \ldots = y_n = 0.$$

Luego, de este modo, para $\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$*,* $(i^*\omega_1)_p = 0 \ \forall p \in N^*X$*.*

Concluyendo así que, efectivamente, para cualquier subvariedad X *en* V*, el fibrado conormal de ésta es una subvariedad lagrangiana de* T^*V*.*

Definición 4.34. *Una subvariedad* X *de* V *es* **involutiva** *cuando para cada* $p \in X$*, el subespacio* T_pV *incidente con* T_pX *respecto de* ω_2*, está contenido en* T_pX*.*

La dimensión de la subvariedad involutiva X *va a ser* $\geq n$*.*

A base de estas definiciones podemos ver fácilmente la siguiente proposición:

Proposición 4.35. *Una subvariedad* X *de* V *es lagrangiana si y sólo si es involutiva e isótropa.*

Un concepto que usaremos posteriormente para desarrollar la aplicación de variedades simplécticas en sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden es el de fibración lagrangiana, el cual viene dado por:

Definición 4.36. *Llamamos* **fibración lagrangiana** *de una subvariedad* X *de* V *de dimensión* $n + r$*, a toda descomposición de* X *en un haz* r*-paramétrico de subvariedades lagrangianas, esto es, a toda descomposición* $\pi : X \longrightarrow P$*, donde* P *es una variedad de dimensión* r*. Las fibras de* π *son las variedades del haz.*

4.6.1. Aplicación a simplectomorfismos

A continuación, estudiaremos la relación entre simplectomorfismos y subvariedades lagrangianas.

Definición 4.37. *Sean* $(V, \omega_2), (\bar{V}, \bar{\omega_2})$ *dos variedades simplécticas de dimensión* $2n$*. Dotando a la variedad producto* $V \times \bar{V}$ *de la estructura simpléctica* $\omega_2 - \bar{\omega_2}$*, llamamos* **correspondencia canónica** *entre* V *y* $\bar{V}$ *a toda subvariedad lagrangiana de* $V \times \bar{V}$*.*

Sean $(V, \omega_2), (\bar{V}, \bar{\omega_2})$ dos variedades simplécticas de dimensión $2n$, la variedad producto $V \times \bar{V}$ está dotada de la estructura simpléctica $\omega_2 - \bar{\omega_2}$ mediante las proyecciones naturales.

$$\pi_1 : V \times \bar{V} \longrightarrow V \quad , \quad \pi_2 : V \times \bar{V} \longrightarrow \bar{V}$$

Sea $\omega = (\pi_1)^*(\omega_2) + (\pi_2)^*(\bar{\omega_2})$ una 2-forma en $V \times \bar{V}$, vemos fácilmente que es cerrada, pues

$$d\omega = (\pi_1)^* d(\omega_2) + (\pi_2)^* d(\bar{\omega_2}) = 0$$

por ser ω_2 y $\bar{\omega_2}$ estructuras simplécticas (cerradas y no degeneradas). Y es simpléctica ya que

$$\omega^{2n} = \binom{2n}{n} \Big((\pi_1)^* \omega_2 \Big)^n \wedge \Big((\pi_2)^* \bar{\omega_2} \Big)^n \neq 0.$$

Generalizando, $\omega = \lambda(\pi_1)^*(\omega_2) + \mu(\pi_2)^*(\bar{\omega_2})$. Luego, tomando $\lambda = 1$, $\mu = -1$, tenemos la forma de la variedad producto.

Sea $\phi : V \longrightarrow \bar{V}$ un difeomorfismo y W su gráfica en $V \times \bar{V}$. Luego, si ϕ es una transformación canónica, la 2-forma $\omega_2 - \bar{\omega_2}$ en W será nula, y recíprocamente (si $\omega_2 - \bar{\omega_2}$ es nula en W, ϕ es transformación canónica). De este modo llegamos a la siguiente proposición:

Proposición 4.38. *Sean V, $\bar{V}$ dos variedades simplécticas, $\phi : V \longrightarrow \bar{V}$ un difeomorfismo y W su gráfica en $V \times \bar{V}$, esto es, $W := Im\phi = \{(p, \phi(p)) \,/\, p \in V\}$. Un difeomorfismo $\psi : V \longrightarrow V \times \bar{V}$ definido por $p \mapsto \psi(p) := (p, \phi(p))$ es un simplectomorfismo si y sólo si W es una subvariedad lagrangiana de $V \times \bar{V}$.*

Demostración. W es una subvariedad lagrangiana si y sólo $\phi^*\omega = 0$. Luego,

$$\psi^*\omega \quad = \quad \psi^*\pi_1^*\omega_2 - \psi^*\pi_2^*\bar{\omega_2} = (\pi_1 \circ \psi)^*\omega_2 - (\pi_2 \circ \psi)^*\bar{\omega_2} \tag{4.6}$$

Ahora bien, $\pi_1 \circ \psi$ es la apliación identidad en V y $\pi_2 \circ \psi = \phi$. Por tanto,

$$\psi^*\omega = \omega_2 - \phi^*\bar{\omega_2} = 0 \Leftrightarrow \phi^*\bar{\omega_2} = \omega_2.$$

□

Capítulo 5. Aplicaciones del formalismo simpléctico ordinario

En esta sección vamos a ver dos aplicaciones del formalismo simpléctico ordinario, comenzaremos con la aplicación a la mecánica Hamiltoniana, y finalizaremos estudiando su aplicación a los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Antes de introducir la mecánica Hamiltoniana estudiaremos algunos conceptos como las ecuaciones de Euler- Lagrange y las transformaciones de Legendre [1].

5.1. Principios variacionales

Sea Q un espacio $n-$dimensional coordenado. El cálculo de variaciones está relacionado con los extremos de funciones cuyo dominio es el espacio de curvas, esto es, un espacio infinito. A dichas funciones las denominaremos funcionales. En general, un funcional es una aplicación cuyo origen es el espacio de curvas y su destino es $\mathbb{R}$.

5.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Sea V una variedada $n-$dimensional, su fibrado tangente TV es una variedad $2n-$dimensional (2.4). Sea $L : TV \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Veamos cómo se definen las ecuaciones de Euler-Lagrange. Para ello, necesitaremos los siguientes conceptos ([3], págs. 113-118).

Definición 5.1. *Sea $\alpha : [t_0, t_1] \longrightarrow V$ una curva diferenciable en V, definimos la* **subida de α a TV** *como la aplicación*

$$\begin{array}{rccl} \bar{\alpha}: & [t_0, t_1] & \longrightarrow & TV \\ & t & \longrightarrow & (\alpha(t), \dot{\alpha}(t)), \end{array}$$

donde $\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$.

Definición 5.2. *Sean V una variedad diferenciable y TV su fibrado tangente. Denominamos* **función lagrangiana** *a la función dada por $L : TV \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Definición 5.3. *Llamaremos* **acción asociada a la función lagrangiana** *L a la aplicación definida por:*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}: & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longrightarrow & \mathcal{A}(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} (\bar{\alpha}^* L)(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))\, dt, \end{array}$$

donde $(\bar{\alpha}^*)$ es la subida de α a TV, $\dot{\alpha}$ es la tangente de α a TV, y $\mathcal{M} = \{\alpha : [t_0, t_1] \longrightarrow V,\ \alpha \in C^\infty([t_0, t_1])$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha(t_1) = q\}$.

Ahora bien, los puntos críticos de $\mathcal{A}$ se obtienen haciendo $d\int_{t_0}^{t_1} L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))dt$. Luego, tomando $(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ coordenados del fibrado tangente TV, tenemos que:

$$\begin{aligned} d\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t))dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h} \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} h \right) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) h \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) h dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h \right]_{t_0}^{t_1} = 0, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la regla de la cadena y la integración por partes en la segunda igualdad. Además, como al comienzo de la sección, h es una variación infinitesimal, al igual que $\dot{h} = dh/dt$.

Ahora bien, tenemos que $\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h \right]_{t_0}^{t_1} = 0$ ya que $h(t_0) = h(t_1) = 0$, pues los puntos de la frontera de variación son fijos. De este modo, la curva α es un extremo de $\mathcal{A}$ si se verifican las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \tag{5.1}$$

a lo largo de α. Dichas ecuaciones son las denominadas **ecuaciones de Euler-Lagrange**.

Notamos que se trata de un sistema de n ecuaciones de segundo orden cuya solución depende de 2n constantes arbitrarias, las cuales hallamos usando las condiciones $\alpha(t_0) = p$, $\alpha(t_1) = q$ (según hemos definido la curva al comienzo de la sección).

Observación 5.4. *La condición de que una curva α sea extremo de $\mathcal{A}$ no depende del sistema de coordenadas elegido.*

5.1.2. Transformaciones de Legendre

A continuación, estudiaremos la transformación de Legendre en variedades diferenciables siguiendo [3] y [12].

Definición 5.5. *Sea V una variedad diferenciable coordenada por $q = (q_1, \ldots, q_n)$ y TV su fibrado tangente. Dada una función lagrangiana $L : TV \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $(q, \dot{q}) \longrightarrow L(q, \dot{q})$, llamamos* **transformada de Legendre** *a la aplicación dada por:*

$$\begin{array}{rcccccl} \mathbb{F}L: & TV & \longrightarrow & T^*V & & & \\ & v & \longrightarrow & \mathbb{F}L(v): & TV & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & w & \longrightarrow & \mathbb{F}L(v)(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L(v + tw) \end{array} \tag{5.2}$$

con $v, w \in T_qV$.

Desarrollemos el concepto de derivada de Legendre usando coordenadas. Sea V una variedad coordenada por $(q_1, \ldots, q_n)$ entonces, su fibrado tangente TV está coordenado por $(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ (2.4).

Sea L la función lagrangiana previamente definida entonces,

$$dL = \left(\frac{\partial L}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial q_n}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Definiremos la **derivada vertical** de L como

$$d^y L := \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right).$$

Sean ahora $\phi = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, $\psi = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ dos elementos de TV, tenemos que $\mathbb{F}L(\phi)(\psi) = d^y_\phi L \cdot \psi = \sum_i \alpha_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)_\phi$. De este modo tenemos que $\mathbb{F}L(q_i, \dot{q}_i) = \left(q_i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$. Luego, $\mathbb{F}L(\phi) = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i\right)$.

Sea $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ las coordenadas de T^*V (2.10), de $\mathbb{F}L(q_i, \dot{q}_i) = \left(q_i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ vemos que $\mathbb{F}L$ está dada por $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Si calculamos la diferencial vertical de $d^y L$ en $v \in V$ se obtiene que su matriz en las coordenadas inducidas coincide con la matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ en v. Imponiendo la **condición de Legendre**: $det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0$, tenemos que dicha matriz es regular. Obtenemos así una condición suficiente para que $\mathbb{F}L$ sea localmente invertible (para más detalle ver [12], págs. 106-107).

Ejemplo 5.6. *En mecánica clásica, la función lagrangiana L vendrá dada por $L(q, \dot{q}, t) = T - U$, donde T es la energía cinética y U la energía potencial, q_i son las coordenadas generalizadas y $\dot{q}_i$ son las velocidades generalizadas. Si tomamos $L = \frac{1}{2}m(\dot{q_1}^2, \dots, \dot{q_n}^2) + U(q_1, \dots, q_n)$ entonces,*

$$\mathbb{F}L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i = m\dot{q}_i dq_i.$$

Luego, $\mathbb{F}L(q_i, \dot{q}_i) = (q_i, p_i = m\dot{q}_i)$, que es trivialmente invertible.

A las p_i las denominaremos momentos.

5.2. Ecuaciones de Hamilton y Mecánica Clásica

En el capítulo anterior definimos los sistemas hamiltonianos. En esta sección vamos a estudiar la mecánica desde el formalismo hamiltoniano el cual se fundamenta en estructuras simplécticas y de Poisson.

A continuación, estudiaremos las ecuaciones diferenciales de las curva integrales de un campo hamiltoniano y su relación las ecuaciones lagrangianas vistas anteriormente ([1], pág. 65).

Sea (V, ω_2, X_H) un sistema hamiltoniano con coordenadas canónicas. Dada H una función de energía y $\omega_2 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$, el campo hamiltoniano tiene la forma:

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Veamos que, en efecto, se verifica $i_{X_h}\omega_2 = dH$:

$$\begin{array}{rcl} i_{X_H}\omega_2 & = & \sum_{j=1}^n i_{X_H}(dq_j \wedge dp_j) \\ & = & \sum_{j=1}^n (i_{X_H}dq_j) \wedge dp_j - dq_j \wedge (i_{X_H}dp_j) \\ & = & \sum_{j=1}^n (dq_j(X_H))dp_j - dq_j(dp_j(X_H)) \\ & = & \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \right) dp_j - dq_j \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\ & = & \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j - \frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j \right) = dH. \end{array} \tag{5.3}$$

Por tanto,

$$X_H(q_i) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad X_H(p_i) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{5.4}$$

Consideremos ahora las ecuaciones de Lagrange (5.1) $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$, donde $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, donde $L : TV \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lagrangiana.

Teorema 5.7. *El sistema de ecuaciones de Lagrange es equivalente al sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{p} & = & -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} & = & \frac{\partial H}{\partial p}, \end{array} \right. \qquad \textbf{\textit{Ecuaciones de Hamilton}} \tag{5.5}$$

donde $H(p,q) = p\dot{q} - L(q,\dot{q})$ es la transformación de Legendre de la función lagrangiana $L : TV \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $(q,\dot{q}) \mapsto L(q,\dot{q})$.

Demostración. Sabemos que

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial q}dq$$

Luego, hacemos la diferencial de H como transformada de Legendre de L e igualamos las expresiones:

$$dH = \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q}dq$$

De este modo

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad -\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q} \tag{5.6}$$

Ahora bien, como $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{p} & = & -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} & = & \frac{\partial H}{\partial p}, \end{array} \right. \tag{5.7}$$

Ahora es fácil ver la equivalencia de los sotemas de Lagrange y Hamilton. □

Observación 5.8. *Este teorema se aplica a todos los problemas variacionales. Luego, $\alpha(t) = (q_i(t), p_i(t))$ es curva integral de X_H si y sólo si se cumplen las ecuaciones de Hamilton.*

Ejemplo 5.9. *Veamos ahora que el campo hamiltoniano dado por la función de energía equivale a las ecuaciones de Euler-Lagrange del ejemplo 5.6 .*

Tomamos $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_2, X_H)$ *un sistema hamiltoniano coordenado por* $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$. *Si* H *es la función energía, esto es,* $H = T + U$ *, la suma de energía cinética y energía potencial,*

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{n} (p_i)^2 + U(q_1, \ldots, q_n)$$

Entonces el campo hamiltoniano X_H *viene dado por la expresión:*

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{m} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Si $\alpha(t) = (q_i(t), p_i(t))$ *es curva integral del campo* X_H *(definición 2.5), tenemos*

$$\begin{cases} \dot{p}_i & = & -\frac{\partial U}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i & = & \frac{p_i}{m}, \end{cases}$$

De este modo, $p_i = m\dot{q}_i$ *al igual que en el ejemplo anterior. Además, tomando* $F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$ *obtenemos la segunda ley de Newton* $F_i = m\ddot{q}_i$. *Por tanto, podemos decir que la segunda ley de Newton en* $\mathbb{R}^n$ *es equivalente a las ecuaciones de Hamilton en* $\mathbb{R}^{2n}$.

Ejemplo 5.10. *Considérese una partícula de masa* m *que se mueve en un plano vertical cartesiano* (q_1, q_2) *bajo la acción de la gravedad. Tomando como* q_1 *la coordenada espacial horizontal y como* q_2 *la vertical. La hamiltoniana de la partícula es:*

$$H(q_1, q_2, p_1, p_1) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + mgq_2.$$

De este modo, las ecuaciones de Hamilton son:

$$\tfrac{\partial p_1}{\partial x_i} = 0, \quad \tfrac{\partial p_2}{\partial x_i} = -mg \quad , \tfrac{\partial q}{\partial x_i} = \tfrac{p_i}{m}. \tag{5.8}$$

Corolario 5.11 (Conservación de la energía)**.** *Para un sistema cuya función hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo* $(\partial H/\partial t = 0)$, *se verifica que* $H(p(t), q(t)) = cte.$

Demostración. Consideramos la variación en H a lo largo de la trayectoria, esto es, $H(p(t), q(t))$ y usando las ecuaciones de Hamilton (5.5) obtenemos:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\Big(-\frac{\partial H}{\partial q}\Big) + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

□

5.3. Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

Esta sección sigue el desarrollo dado por Muñoz Díaz [10]. Estudiaremos que un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden es en realidad una subvariedad de una variedad simpléctica como las que hemos estudiado en el capítulo anterior, que la solución de dicho sistema es una subvariedad lagrangiana y demostraremos como ejemplo del formalismo un teorema de existencia de integrales completas.

Clásicamente, cuando hablamos de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, nos referimos a sistemas del tipo

$$F_j\Big(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\Big) = 0 \ \text{, con } j = 1, \dots, m. \tag{5.9}$$

El problema consiste en encontrar funciones $f(x_1, \dots, x_n)$ tales que al sustituir z por f se cumpla (5.9) idénticamente.

Interpretando el espacio $\mathbb{R}^{2n}$ de las variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ como el fibrado cotangente (2.10) de $\mathbb{R}^n$ de las variables $x_1, \dots, x_n$, veamos cuál es la expresión en coordenadas de una sección s. Se sigue que para U abierto de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} & T^*\mathbb{R}^n \arrow[d, "\tau^*"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \tag{5.10}$$

donde $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \supseteq \mathrm{F} = \{F_j(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0,\ j = 1, \dots, m\}$ y $dim(\mathrm{F}) = 2n - m$. Luego, la imagen de la sección en las coordenadas dadas es una subvariedad de $\mathbb{R}^{2n}$ es de la forma

$$s(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Denotando por S a la imagen de dicha sección, estudiaremos cómo vienen dadas las soluciones del sistema (5.9). Supongamos que S es subvariedad $n-$dimensional de F y que además, es lagrangiana.

1. Supongamos $S \subset \mathrm{F}$: como S es subvariedad de F si y sólo si

   $$F_j(x_1, \dots, x_n, p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, \dots, x_n)) = 0,$$

   con $j = 1, \dots, m$, lo cual se verifica por definición de F.

2. Supongamos ahora que S es lagrangiana: Tomando la forma simpléctica $\omega_2 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i$ de $\mathbb{R}^{2n}$ y restringiendo a S: $(\omega_2)\Big|_S = \Big(\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i\Big)\Big|_S = 0$ por ser S subvariedad lagrangiana.

   Ahora bien, como $\omega_2 = -d\omega_1 = -d\Big(\sum_{i=1}^n p_i dx_i\Big)$ y $(\omega_2)_S = 0$ entonces, $-d\Big(\sum_{i=1}^n p_i dx_i\Big) = 0$ si y sólo si, localmente, $\Big(\sum_{i=1}^n p_i dx_i\Big) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n p_i(x_1, \dots, x_n) dx_i \overset{(2)}{=} df(x_1, \dots, x_n) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} dx_i$ donde hemos usado que la restricción a una subvariedad conmuta con la diferencial, y f es una función de $C^\infty(U)$, con U abierto de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, existe una función $f(x_1, \dots, x_n) \in C^\infty(U)$ tal que por (2) y (3)

   $$p_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}\ , \ \text{ con } i = 1, \dots, n.$$

De este modo, S viene dada por $\left\{\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right\}_{j=1,\ldots,m}$, y como $S\subset \mathrm{F}$, tenemos que las ecuaciones que definen F se anulan en S, esto es,

$$F_j\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=0 \ \text{, con } j=1,\ldots,m.$$

Por lo tanto, $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ es solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales (5.9), y cada solución de este tipo define una subvariedad $n-$dimensional S de F parametrizada por $x_1,\ldots,x_n$ mediante las ecuaciones $p_i=\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}$, con $i=1,\ldots,n$, en la cual la 1-forma canónica o 1-forma de Liouville ω_1 de $\mathbb{R}^{2n}$ se especializa como df, luego la 2-forma simpléctica ω_2 se especializa como 0 ($\omega_2=-d\omega_1=-d^2f=0$). De este modo, cada solución de (5.9) es una subvariedad lagrangiana de $\mathbb{R}^{2n}$ contenida en F.

Generalizando lo anterior para una variedad simpléctica (V,ω_2) cualquiera, tenemos que:

Definición 5.12. *Llamaremos* **sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden** *a toda subvariedad* F *de* V*. Una* **solución** *del sistema* F *es una subvariedad lagrangiana* S *de* F*.*

A continuación, los resultados que veamos serán dados de forma local. Denotaremos por $\bar{X},\bar{\omega}_2,\bar{L},\ldots$ a las restricciones a F de $X,\omega_2,L,\ldots$ de V. Además, usaremos la definición de haz dada en (2.20).

Sea (V,ω_2) una variedad simpléctica, F una subvariedad de V y U un abierto de V.

Definición 5.13. *Llamaremos* **sistema característico** *de* F *al haz* $\bar{L}$ *en* F *cuyas secciones sobre cada abierto* $\mathrm{F}_U=\mathrm{F}\cap U$ *son los campos tangentes* $\bar{X}$ *en* F_U *verificando* $i_{\bar{X}}\bar{\omega}_2=0$.

Definición 5.14. *Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden* F *es* **involutivo** *cuando* F *entendido como subvariedad es involutiva (4.34).*

Sea F un sistema involutivo, su haz de ideales como subvariedad de V son las funciones nulas en F, esto es, $J(U)=\{f\in C^\infty(U)\,/\,f\big|_{\mathrm{F}\cap U}=0\}$, con U abierto de V.

Por construcción, las funciones F_j con $j=1,\ldots,m$ pertenecen al ideal $J(U)$.

Sean $\bar{L}$ sistema característico de F y $a\in F$, $\bar{L}_a$ es el conjunto de gérmenes de $\bar{X}_f$ con $f\in J_a$.

Veamos que efectivamente, $\bar{L}_a$ se define de ese modo. Para ello demostraremos la siguiente proposición:

Proposición 5.15. *Sean* F *un sistema involutivo,* J *su haz de ideales como subvariedad de* V *y* $\bar{L}$ *el sistema característico de* F*. Para cada punto* $a\in\mathrm{F}$*, la fibra* $\bar{L}_a$ *es el* $\bar{E}_a-$*módulo generado por los gérmenes de campos* $\bar{X}_f$ *cuando* f *recorre la fibra* J_a *(donde* $\bar{E}$ *es el haz de gérmenes de funciones diferenciables sobre* F*).*

Demostración. Sea $a\in\mathrm{F}$, si $f,g\in J_a$ entonces, $X_f(g)=\{f,g\}\in J_a$ puesto que F es involutivo y la condición suficiente y necesaria para que esto suceda es que J_a sea estable para el corchete de Poisson. Luego, X_f es tangente a F. Además, $i_{\bar{X}_f}\bar{\omega}_2 = \overline{i_{X_f}\omega_2} = \bar{df} = 0$ por ser $f \in J_a$, luego $\bar{X}_f \in \bar{L}_a$.

Recíprocamente, sea F de dimensión $2n - m$ y $f_1, \dots, f_m$ generadores de J en un entorno U de a. Reduciendo U si es necesario, podemos suponer que $df_1, \dots, df_m$ son linealmente independientes en todo punto de U, por ser $f_1, \dots, f_m$ funcionalmente independientes (por ser generadores). Entonces, los campos $X_{f_1}, \dots, X_{f_m}$ tienen valores linealmente independientes en todo punto de U. Si $b \in \mathrm{F}_U$, los $(X_{f_i})_b$ son incidentes respecto de ω_2 con $T_b\mathrm{F}$, y como este espacio es de dimensión $2n - m$, todo vector incidente con él es combinación lineal de los $(X_{f_i})_b$. Por lo tanto, todo germen en $\bar{L}_a$ está en el E_a-módulo generado por $\bar{X}_{f_1}, \dots, \bar{X}_{f_m}$. □

Definición 5.16. *Sea* $\mathrm{F} \subset V$ *un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Llamamos* **integral completa** *de* F *a toda fibración lagrangiana (4.36) de un abierto* F_U *de* F*.*

Estudiemos la existencia de dichas integrales a partir del siguiente teorema:

Teorema 5.17 (de existencia de integrales completas)**.** *Sea* $\mathrm{F} \subset V$ *un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Si* F *es involutivo entonces, cada punto de* F *tiene un entorno* F_U *descompuesto en variedades-solución por una integral completa.*

Demostración. Vamos a usar la misma notación dada anteriormente.

Usando la definición de sistema característico y por ser $\bar{\omega}_2$ cerrada (pues $d\bar{\omega}_2 = \overline{d\omega_2} = \bar{0} = 0$), veamos que $[X_1, X_2] \in \bar{L}$ para $X_1, X_2 \in \bar{L}$.

Por la demostración de la proposición anterior (5.3) sabemos que $i_{X_1}\bar{\omega}_2 = 0$, $i_{X_2}\bar{\omega}_2 = 0$. Luego, por (2.19),

$$i_{[X_1,X_2]}\bar{\omega}_2 = \mathcal{L}_{X_1}(i_{X_2}\bar{\omega}_2) - i_{X_2}(\mathcal{L}_{X_1}\bar{\omega}_2) = 0 - i_{X_2}(i_{X_1}d\bar{\omega}_2 + d i_{X_1}\bar{\omega}_2) = 0.$$

De este modo deducimos que $\bar{L}$ es estable para el paréntesis de Lie.

Ahora bien, sabemos que el rango de $\bar{L}$ es m, pues $\bar{L} =< X_{F_1}, \dots, X_{F_m} >$ entonces, tenemos $2n - m - m = 2(n - m) = r$ integrales primeras independientes de $\bar{L}$, donde $2n - m$ es la dimensión de F y m el rango de $\bar{L}$. Luego, por el teorema de Fröbenius (2.24), el haz $\bar{A}$ de integrales primeras de $\bar{L}$ en F_U es un haz de anillos regulares de dimensión r, es decir, $\bar{A}$ viene dado localmente por $\{t_1, \dots, t_r\}$, con t_i, $i = 1, \dots, r$ funciones. Y por el teorema de reducción de Cartan (2.25), en un entorno F_U de a en F, existe una $2-$forma $\bar{\alpha}_2$ de modo que $\bar{\omega}_2$ es reducible a $t_1, \dots, t_r$; es decir, $< \bar{\omega}_2 >=< \bar{\alpha}_2 >$ con $\bar{\alpha}_2$ expresable sólo mediante funciones $t_1, \dots, t_r \in \bar{A}(\mathrm{F}_U)$. Para alguna función $\bar{g}$ perteneciente al haz de gérmenes de funciones diferenciables en F_U, $\bar{\omega}_2 = \bar{g}\bar{\alpha}_2$ en F_U.

Distinguimos ahora dos casos según la dimensión:

1. Si $m = n$ entonces, $dim(\mathrm{F}) = 2n - n = n$ y además, tenemos $2(n - n) = r = 0$ integrales primeras independientes de $\bar{L}$. Luego, $\bar{\alpha}_2 = 0$, pues $\bar{\alpha}_2$ es expresable sólo mediante funciones de $\bar{A}(\mathrm{F}_U)$; entonces, $\bar{\omega}_2 = 0$ y esto implica que F es subvariedad lagrangiana.

2. Si $m < n$, definiendo por $Rad_a\bar{\omega}_2 = \{X_a \in T_a\mathrm{F} \,/\, i_{X_a}\bar{\omega}_2 = 0\}$ el radical de $\bar{\omega}_2$ en cada punto a de F_U (para todo $X'_a \in T_a\mathrm{F}$, $\bar{\omega}_2(X_a, X'_a) = 0$), vemos que dicho radical es de dimensión $m < 2n - m$, pues por la definición de $\bar{L}_a$ y por hipótesis, $m = dim(Rad_a\bar{\omega}_2) < 2n - m$. Luego, $\bar{\omega}_2$ no tiene ceros en F_U y por ello, tampoco $\bar{g}$ ni $\bar{\alpha}_2$ los tienen.

   Por expresarse $\bar{\alpha}_2$ mediante funciones pertenecientes a $\bar{A}(\mathrm{F}_U)$ (esto es, se expresa mediante integrales primeras de $\bar{L} =< \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_m >$, con $X_i = X_{F_i}, i = 1, \ldots, m$) y sus diferenciales tenemos que, para h, λ, v integrales primeras de $\bar{L}$ podemos escribir $\bar{\alpha}_2 = \sum_{k,l=1}^{n-m} \lambda_{k,l} dh_k \wedge dv_l$. De este modo:

$$i_{\bar{X}_j}\bar{\alpha}_2 = i_{\bar{X}_j}\Big(\sum_{k,l=1}^{n-m} \lambda_{k,l} dh_k \wedge dv_l\Big) = \sum_{k,l=1}^{n-m} \lambda_{k,l}\Big[(\bar{X}_j h_k) dv_l - \bar{X}_j(v_l) dh_k)\Big] = 0,$$

   pues $\bar{X}_j(h_k) = 0$, $\bar{X}_j(v_l) = 0$ por ser h_k y v_l integrales primeras de $\bar{L}$.

   De modo similar tenemos que $i_{\bar{X}_j} d\bar{\alpha}_2 = 0$. De $i_{\bar{X}_j}\bar{\alpha}_2 = 0$, $i_{\bar{X}_j} d\bar{\alpha}_2 = 0$, $d\bar{\omega}_2 = 0$, $\bar{\omega}_2 = \bar{g}\bar{\alpha}_2$, se deduce que: $\bar{X}_j\bar{g} = 0$ con $j = 1, \ldots, m$, pues sabemos que $0 = d\bar{\omega}_2 = d\bar{g} \wedge \bar{\alpha}_2 + \bar{g} d\bar{\alpha}_2$, haciendo la contracción:

$$0 = i_{\bar{X}_j} d\bar{\omega}_2 = \bar{X}_j(\bar{g})\bar{\alpha}_2 - \bar{g} i_{\bar{X}_j}\bar{\alpha}_2 + \bar{g} i_{\bar{X}_j} d\bar{\alpha}_2 = \bar{X}_j(\bar{g})\bar{\alpha}_2 \Leftrightarrow \bar{X}_j(\bar{g}) = 0,$$

   para todo $j = 1, \ldots, m$, pues $\bar{\alpha}_2$ no tiene ceros en F_U. Esto implica que $\bar{g}$ es integral primera de $\bar{L}$, esto es, pertenece a $\bar{A}(\mathrm{F}_U)$.

Ahora bien, como $\bar{\alpha}_2$ se escribe en términos de integrales primeras y $\bar{g}$ es integral primera entonces, la propia $\bar{\omega}_2$ es expresable mediante funciones pertenecientes a $\bar{A}(\mathrm{F}_U)$ y sus diferenciales. Esto significa que para F subvariedad simpléctica con $\bar{L} =< \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_m >$ sistema característico involutivo y completamente integrable (por th. de Fröbenius), dotada de $\bar{\omega}_2 = (\omega_2)\big|_{\mathrm{F}}$ y de dimensión $2n - m$, tenemos una partición dada por las soluciones de $\bar{L}$, esto es, sea $(\mathrm{F}_U)_a$ abierto de F en a, $\pi_1 : (\mathrm{F}_U)_a \simeq D \times D' \longrightarrow D$ con $D \subset \mathbb{R}^{2(n-m)}, D' \subset \mathbb{R}^m$ abiertos en F, donde las fibras de π_1 son las soluciones de $\bar{L}$, pues las funciones de D son las funciones constantes en $(\mathrm{F}_U)_a$ en las fibras de π_1 y las funciones constantes en las soluciones son las integrales primeras de $\bar{L}$ en $(\mathrm{F}_U)_a$.

Luego, existe β_2 dos-forma en $D \subset \mathbb{R}^{2(n-m)}$ tal que $\bar{\omega}_2 = \pi_1^*\beta_2$, pues $\bar{\omega}_2$ está expresada en integrales primeras de $\bar{L}$ en $(\mathrm{F}_U)_a$ que son funciones de D por lo que acabamos de ver.

Como π_1^* es inyectiva y conmuta con d, $0 = d\bar{\omega}_2 = \pi_1^* d\beta_2 \Leftrightarrow d\beta_2 = 0$. Como el radical de $\bar{\omega}_2$ en cada punto $a \in \mathrm{F}_U$ es el espacio tangente en a a la fibra de π_1, la forma β_2 es de radical nulo en todo punto $\pi_1(a) \in D$, pues de no ser así $dim(Rad_a\bar{\omega}_2) > m$. Luego, (D, β_2) es una variedad simpléctica.

Descompongamos ahora F_U en variedades lagrangianas.

Achicando U si es necesario (y con ello D), elegimos coordenadas de Darboux en D luego, podemos expresar β_2 en D como $\beta_2 = \sum_{j=1}^{n-m} dq_j \wedge dy_j$ con $q_j, y_j \in C^\infty(D)$.

Para obtener subvariedades lagrangianas usamos un teorema que nos dice que las variedades lagrangianas de la fibración son las subvariedades de la variedad simpléctica cuyas ecuaciones son las que resultan de igualar ciertas coordenadas a constantes arbitrarias (teorema 3, pág. 146, [10]). Por lo tanto, mantenemos constantes, por ejemplo, las

y_j, $j = 1, \dots, n-m$. Tenemos así, $S'_{b_1,\dots,b_{n-m}} = \{y_1 = b_1, \dots, y_{n-m} = b_{n-m}\}$ subvariedades lagrangianas para β_2 en D.

Llamando $S_{b_1,\dots,b_{n-m}} = \pi_1^{-1}(S'_{b_1,\dots,b_{n-m}})$ (S fibra de S'), tenemos que S también va a ser lagrangiana, pues $(\omega_2)\Big|_S = (\bar{\omega}_2)\Big|_S = \pi_1^*\beta_2\Big|_S = 0$ por ser $\beta_2\Big|_{S'} = 0$ (pues S' es subvariedad lagrangiana en D, esto implica que S' es de dimensión $n-m$ y $\beta_2 = 0$ en S').

Por lo tanto, efectivamente, S es lagrangiana, pues $dim(S) = dim(S') + m = n - m + m = n$, donde m es la dimensión del "camino de la fibra", y $\bar{\omega}_2 = 0$ en S.

Luego, para cada punto de F tenemos una solución (subvariedad lagrangiana), es decir, las variedades que resultan de igualar $y_1, \dots, y_{n-m}$ a constantes arbitrarias son lagrangianas y su conjunto constituye una fibración lagrangiana de F_U, esto es, una integral completa.

$\square$

Capítulo 6. Generalización polisimpléctica de Günther

En los capítulos anteriores hemos estudiado las variedades simplécticas y las aplicaciones a la mecánica Hamiltoniana y a los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Luego, una vez vistos estos temas y algunos de sus resultados, podemos generalizar a variedades polisimplécticas.

El formalismo polisimpléctico está basado en la noción de forma polisimpléctica. A partir de esta noción, entre otras, estudiaremos las estructuras polisimplécticas y las ecuaciones canónicas.

Para estudiar este tema nos centraremos en desarrollar el artículo de Christian Günther [6] donde se introdujo este formalismo. Podemos encontrar diferentes enfoques del tema, como por ejemplo en [4], [5] y [11].

A lo largo de este capítulo vamos a seguir la misma notación que hemos seguido en capítulos anteriores (capítulo 2), denotaremos por $\Lambda(Q)$ a las secciones del fibrado cotangente de la variedad Q y los fibrados serán denotados en cursiva. Notaremos por $Hom(E, F)$ al fibrado de aplicaciones lineales de fibra entre dos fibrados E y F sobre la misma base (2.1.1).

Tomamos $U \subset \mathbb{R}^n$ un entorno abierto del origen, donde U es el espacio de parámetros, y Q una variedad en la cual los campos toman su valor.

Los campos serán considerados como secciones en el fibrado trivial (2.1).

En este capítulo asumiremos que q es un punto de la variedad Q y que dicha variedad tiene dimensión k.

6.1. Jets y cojets homogéneos

A una variedad diferenciable Q le podemos asociar su fibrado tangente TQ el cual a su vez es una variedad diferenciable cuyos puntos codifican la información de un punto en Q junto con una dirección tangente. Generalizando la construcción del fibrado tangente podemos obtener espacios adaptados a estructuras diferenciables más complejas.

Definición 6.1. *Sobre el conjunto de aplicaciones suaves $\varphi : U \longrightarrow Q$ está definida la siguiente* **relación de equivalencia***:*

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow T_0\varphi_1 = T_0\varphi_2, \tag{6.1}$$

donde $T_0\varphi$ hace referencia a la aplicación tangente de φ en el origen $O \in U \subset \mathbb{R}^n$.

Las equivalencias de clases $[\varphi]$ son, por definición, los **1-jets** *de las aplicaciones suaves $U \longrightarrow Q$.*

A lo largo del capítulo, denotaremos por I^nQ a la colección de las clases de equivalencia descritas anteriormente.

Definición 6.2. *I^nQ es un fibrado vectorial sobre Q, con la fibra $Hom(Q \times \mathbb{R}^n, T_qQ)$ en cada punto $q \in Q$. I^nQ es denominado* **fibrado homogéneo 1-jet**, *y por construcción:*

$$I^nQ \cong Hom(Q \times \mathbb{R}^n, TQ) \simeq TQ \otimes (\mathbb{R}^n)^*, \tag{6.2}$$

donde $Hom(Q \times \mathbb{R}^n, TQ)$ denota el fibrado de aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a los espacios tangentes de Q, esto es, a cada colección de n números le asocia un vector tangente.

Denotaremos por

$$\tau_Q^n : I^nQ \longrightarrow Q$$

a la **proyección natural**.

Si tomamos $e_1, \ldots, e_n$ una base de $\mathbb{R}^n$, entonces hay un isomorfismo $I^nQ \simeq \bigoplus_1^n TQ$. Luego, los elementos de I^nQ pueden ser interpretados como $n-$vectores tangentes de Q, es decir, una sección S de I^nQ es en realidad una colección de n campos vectoriales tangentes.

De modo similar al capítulo de 'Preliminares' (2.1.1) obtenemos el **fibrado de I^nQ sobre Q.**

$$\begin{array}{ccc} I^nQ \cong Hom(Q \times \mathbb{R}^n, TQ) \simeq TQ \otimes (\mathbb{R}^n)^*; & & (q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1^1, \ldots, \dot{q}_k^1, \ldots, \dot{q}_1^n, \ldots, \dot{q}_k^n) \\ \Big\downarrow \tau_Q^n & & \Big\downarrow \\ Q & & (q_1, \ldots, q_k) \end{array} \tag{6.3}$$

Cuyas secciones locales $S : Q \longrightarrow I^nQ$ vienen dadas en coordenadas por:

$$S(q_1, \ldots, q_k) = (q_1, \ldots, q_k, A_1^1(q_1, \ldots, q_k), \ldots, A_k^n(q_1, \ldots, q_k)), \tag{6.4}$$

con $A_i^\alpha(q_1, \ldots, q_k) = \dot{q}_i^\alpha(S(q_1, \ldots, q_k))$, donde $i = 1, \ldots, k$, $\alpha = 1, \ldots, n$.

Para cualquier aplicación suave $\varphi : U \longrightarrow Q$, $T\varphi : TU \longrightarrow TQ$ es una sección de $U \longrightarrow I^nQ$ a lo largo de φ y $T_u\varphi \in Hom(Q \times \mathbb{R}^n, T_{\varphi(u)}Q)$ con $u \in U$. Además, las secciones $X : Q \longrightarrow I^nQ$ son consideradas como operadores derivadas parciales por

$$X(f)(q) = df \circ X_q \in \mathbb{R}^{n*},$$

con f función diferenciable en I^nQ.

Definición 6.3. *La aplicación suave $\varphi : U \longrightarrow Q$ es una solución de X sección de I^nQ si y sólo si $T_u\varphi = X(\varphi(u))$ para todo $u \in U$.*

Sabemos que $X(\varphi(u))$ viene dado por la expresión

$$X(\varphi(u)) = \sum_{i,j} A_j^i(\varphi(u))\Big(\frac{\partial}{\partial q_j}\Big),$$

pues X es una sección de I^nQ (6.3). Además, de acuerdo al modo en que se define φ, tenemos que su aplicación tangente viene dada por

$$\begin{array}{rccc} T_u\varphi : & T_uU = \mathbb{R}^n & \longrightarrow & T_{\varphi(u)}Q \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longrightarrow & T_u\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \end{array}$$

donde, como $T_u\varphi \in Hom(Q \times \mathbb{R}^n, T_{\varphi(u)}Q)$, tiene la expresión

$$T_u\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,j} \lambda_i \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_u \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_{\varphi(u)},$$

con $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ matriz jacobiana, y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ coordenadas de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $T_u\varphi = X(\varphi(u))$ si y sólo si

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_u = A^i_j(\varphi(u)), \tag{6.5}$$

con $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, k$.

Recuperando el caso clásico, tomamos en $\mathbb{R}^n$ las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y $X \in \mathscr{X}(U)$ un campo de vectores definido sobre un abierto U de $\mathbb{R}^n$ tal que $X = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, con A_i componentes del campo. Sea I intervalo abierto de $\mathbb{R}$, la condición necesaria y suficiente para que la curva diferenciable $\varphi : I \longrightarrow U$ definida por $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ sea curva integral de X es que las funciones $\varphi_i(t)$, con $i = 1, \ldots, n$, verifiquen el sistema de ecuaciones diferenciables de primer orden $\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = A_i(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $i = 1, \ldots, n$.

Proposición 6.4. *Sea X sección de I^nQ, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ base de $\mathbb{R}^n$, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ inyecciones tal que $x \mapsto (\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$. Por el teorema de Fröbenius, X tiene una solución (es integrable) si y sólo si los campos vectoriales $X \circ \alpha_j$, $X \circ \alpha_l$ sobre Q conmutan para todo $j, l = 1, \ldots, n$. Es otras palabras, X es el morfismo álgebra de Lie $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{X}(Q)$.*

Demostración. Un morfismo de álgebra de Lie es un morfismo tal que $X([\lambda, \mu]) = [X(\lambda), X(\mu)]$, donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Lie (2.14).

Sabemos que X es sección de I^nQ, luego tiene la expresión $X = \sum_{i,\alpha} A_{i,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)$ luego, para $q \in Q$

$$\begin{aligned}
[X(\lambda), X(\mu)](q) &= X(\lambda)(X(\mu)(q)) - X(\mu)(X(\lambda)(q)) \\
&= \left(\textstyle\sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha A_{i,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\right)\left(\textstyle\sum_{i,\alpha} \mu_\alpha A_{i,\alpha}(q)\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_q\right) \\
&= \textstyle\sum_{i,\alpha}(\lambda_\alpha \mu_\alpha - \mu_\alpha \lambda_\alpha)\left(A_{i,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\right)(q) \\
&= X[\lambda, \mu](q).
\end{aligned}$$

□

En el caso de que X tenga una solución local $\varphi : U \times V \longrightarrow Q$, con $V \subset Q$, $T_u\varphi(q) = X(\varphi(u))$, $\varphi_u : V \longrightarrow \varphi_u(V)$ es un difeomorfismo y $\varphi_{u,v}(q) = \varphi_u \circ \varphi_v(q)$.

Teorema 6.5 (Functorialidad de I^n)**.** *Si $f : Q_1 \longrightarrow Q_2$ es una aplicación suave entonces, $I^nf : I^nQ_1 \longrightarrow I^nQ_2$, dada por $I^nf(X_q) = [f \circ \varphi]_{f(q)}$, donde $\varphi : U \longrightarrow Q$ es un representante de X_q, es un morfismo de fibrados vectoriales*

Demostración. Usando que $\varphi : U \longrightarrow Q$ es representante de X_q, podemos usar la relación de equivalencia (6.1).Tenemos $\varphi : U \longrightarrow Q$ tal que $0 \longrightarrow \varphi(0) = q$, luego $T_0\varphi : \mathbb{R}^n \simeq T_0U \longrightarrow T_qQ$. Veamos que $I^nf(X_q) = [f \circ \varphi]_{f(q)}$ está bien definido, para ello basta comprobar que los tangentes de φ_1, φ_2 son iguales usando la relación de equivalencia $\varphi_1 \sim \varphi_2$, con $X_q = [\varphi_1] = [\varphi_2]$. Esto es,

$$[f \circ \varphi_1]_{f(q)} = T_0(f \circ \varphi_1) = T_q f \circ T_0 \varphi_1.$$

$$[f \circ \varphi_2]_{f(q)} = T_0(f \circ \varphi_2) = T_q f \circ T_0 \varphi_2.$$

Por (6.1) $[f \circ \varphi_1]_{f(q)} = [f \circ \varphi_2]_{f(q)}$ luego, $I^n f(X_q) = [f \circ \varphi]_{f(q)}$ está bien definida.

Ya hemos visto que está bien definida, estudiemos ahora la functorialidad. Sean f_1, f_2 aplicaciones suaves de Q_1 en Q_2, probemos que $I^n(f_1 \circ f_2) = I^n(f_1) \circ I^n(f_2)$.

Sea X_q como en el enunciado, tenemos que:

$$(I^n f_1 \circ I^n f_2)(X_q) = [f_1 \circ \varphi] \circ [f_2 \circ \varphi] = [(f_1 \circ f_2) \circ \varphi] = I^n(f_1 \circ f_2)(X_q),$$

que es lo que queríamos probar. □

Definición 6.6. *Denotemos por $\mathbb{S}(I^n Q)$ a las secciones suaves de $I^n Q$. El* **conmutador 'punto a punto'** *dado por*

$$[X, Y](q)(x) := [X(x), Y(x)](q),$$

con $X, Y \in \mathbb{S}(I^n Q)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $q \in Q$, define una estructura de álgebra de Lie sobre $\mathbb{S}(I^n Q)$.

Definición 6.7. *Sea $\alpha \in \Lambda^p Q$ una $p-$forma sobre Q, y $X \in Hom(Q \times \mathbb{R}^n, TQ)$. Definimos el* **producto interior o contracción** *al operador*

$$i_X \alpha \in \Lambda^{p-1}(Q, (\mathbb{R}^n)^*),$$

dado por $(i_X \alpha)(x) = i_{X(x)} \alpha$.

Llamamos **derivada de Lie** *al operador*

$$\mathcal{L}_X \alpha \in \Lambda^p(Q, (\mathbb{R}^n)^*),$$

definido por $\mathcal{L}_X \alpha(x) := \mathcal{L}_{X(x)} \alpha$.

Vemos que las secciones de $I^n Q$ juegan el papel de campos direccionales. Si $n = 1$, estamos en el caso de la mecánica clásica, donde $\mathbb{S}(I^n Q)$ se reduce a los campos vectoriales de la variedad Q.

A continuación, vamos a introducir los covectores, puesto que son necesarios para la formulación de Hamilton.

Definición 6.8. *Denominamos* **el fibrado homogéneo 1-cojet** *al fibrado $Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$ sobre Q, el cual denotaremos por $I^{n*} Q$.*

Observación 6.9. *$Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n) \simeq T^*Q \otimes \mathbb{R}^n$. Respecto a una base de $\mathbb{R}^n$, $Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n) \simeq \oplus T^*Q$.*

Siguiendo la misma notación que hasta el momento, denotaremos por $\mathbb{S}(I^{n*}Q)$ a las secciones de $Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$.

Anteriormente vimos que las secciones de I^nQ juegan el papel de campos direccionales. Luego, en este caso, $Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$ juega el mismo papel que el espacio fase en la mecánica clásica.

Observemos que $Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$ es el dual de $Hom(Q \times \mathbb{R}^n, TQ)$. La siguiente proposición muestra que dicha dualidad viene dada por la traza:

Proposición 6.10. *Existen isomorfismos naturales*

$$\begin{array}{llll} (i)\ Hom(Q \times \mathbb{R}^n, TQ) & \longrightarrow & Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)^*, & X_q \mapsto tr(\cdot \circ X_q), \\ (ii)\ Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & Hom(Q \times \mathbb{R}^n, TQ)^*, & \psi_q \mapsto tr(\psi \circ \cdot), \end{array}$$

donde $\cdot$ *denota la variable en* $Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n), Hom(Q \times \mathbb{R}^n, TQ)$*, respectivamente, y* tr *la traza.*

Demostración. Veamos que dichas aplicaciones están bien definidas y que, efectivamente, son isomorfismos.

1. $Hom(Q \times \mathbb{R}^n, TQ) \longrightarrow Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)^*, \quad X_q \mapsto tr(\cdot \circ X_q)$

   Sea $X_q \in Hom(Q \times \mathbb{R}^n, T_qQ)$ y $h_q \in Hom(T_qQ, Q \times \mathbb{R}^n$, podemos considerar la composición:

   $$\mathbb{R}^n \xrightarrow{X_q} T_qQ \xrightarrow{h_q} \mathbb{R}^n$$

   y le asignaremos un número, la traza:

   $$\sigma_q(h_q) := tr(h_q \circ X_q)$$

   De modo que $\sigma_q(h_q) \in Hom(T_qQ, Q \times \mathbb{R}^n)^*$. Luego, efectivamente, $X_q \longrightarrow tr(\cdot \circ X_q) \in \mathbb{R}$. Vemos por tanto que la aplicación está bien definida.

   Tomemos ahora coordenadas. Cogiendo $e_1, \ldots, e_n$ base de $\mathbb{R}^n$ entonces, sabemos que $Hom(Q \times \mathbb{R}^n, T_qQ) = \bigoplus_1^n T_qQ$ luego, este espacio tiene coordenadas $(q_i, q_{i,\alpha})$ con $i = 1, \ldots, k$ y $\alpha = 1, \ldots, n$. Por lo tanto:

   $$\begin{array}{cccc} X_q : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & T_qQ \\ & \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longrightarrow & X_q(\lambda) = \sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha \dot{q}_{i,\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_q \end{array}$$

   Sea ahora $Hom(T_qQ, Q \times \mathbb{R}^n)$ coordenado por $(q_i, p_{i,\alpha})$ entonces,

   $$\begin{array}{cccc} h_q : & T_qQ & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_q & \longrightarrow & \sum_\alpha h_{i,\alpha} e_\alpha \end{array}$$

   donde $h_q = \sum_{i,\alpha} h_{i,\alpha} d_q q_i \otimes e_\alpha$. Luego,

   $$h_q \circ X_q(\lambda) = \sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha \dot{q}_{i,\alpha} h_{i,\beta} e_\beta = \left(\sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha \dot{q}_{i,\alpha} h_{i,1}, \sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha \dot{q}_{i,\alpha} h_{i,2}, \ldots, \sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha \dot{q}_{i,\alpha} h_{i,n}\right)$$

Por lo tanto, la matriz de la composición es: $\begin{pmatrix} \sum_i \dot{q}_{i,\alpha} h_{i,\beta} \end{pmatrix}_{\alpha,\beta}$ y aplicando la traza (o lo que es lo mismo, $\alpha = \beta$) tenemos que

$$\sigma_q(h_q) = \sum_\alpha \sum_i \dot{q}_{i,\alpha} h_{i,\alpha}.$$

Concluimos entonces, que la aplicación estudiada es un isomorfismo, pues se ve fácilmente que se trata de un morfismo biyectivo.

2. $Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow Hom(Q \times \mathbb{R}^n, TQ)^*, \quad \omega_q \mapsto tr(\psi \circ \cdot)$

Sean $\omega_q \in Hom(T_qQ, Q \times \mathbb{R}^n)$ e $Y_q : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_qQ$, podemos considerar la composición:

$$T_qQ \xrightarrow{\omega_q} \mathbb{R}^n \xrightarrow{Y_q} T_qQ$$

a la que le vamos a asociar un número, la traza: Tomando $\sigma_q \in Hom(Q \times \mathbb{R}^n, T_qQ)^*$, $\sigma_q(Y_q) := tr(Y_q \circ \omega_q)$.

Usando las coordenadas habituales y $e_1, \ldots, e_n$ base de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rlcl} \omega_q : & T_qQ & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & X_q = \sum_{i,\alpha} \dot{q}_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_q & \longrightarrow & \omega_q(X_q) = \sum_{i,\alpha} A_{i,\alpha}(q) \dot{q}_i e_\alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} Y_q : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & T_qQ \\ & \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longrightarrow & Y_q(\lambda) = \sum_{i,\alpha} B_{i,\alpha}(q) \lambda_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_q, \end{array}$$

donde $A_{i,\alpha}$ son las componentes de ω y $B_{i,\alpha}$ hacen referencia a Y_q. Obteniendo de este modo:

$$Y_q \circ \omega_q = \sum_{i,\alpha} A_{i,\alpha}(q) B_{i,\beta}(q) \dot{q}_i e_\beta \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_q.$$

Aplicando la traza tenemos que

$$\sigma_q(Y_q) = \sum_{i,\alpha} A_{i,\alpha}(q) B_{i,\alpha}(q) \dot{q}_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_q.$$

Luego, la aplicación está bien definida y es un isomorfismo.

□

6.2. Estructuras polisimplécticas

Hemos visto que la clave del formalismo Hamiltoniano de la mecánica clásica es la estructura simpléctica en el espacio fase. En la teoría de campo la forma simpléctiva va a ser reemplazada por la denominada forma polisimpléctica, esto es, cierta forma diferencial valuada en espacios vectoriales (forma vector-valuada) que es una generalización de la conocida forma simpléctica.

Sea Q una variedad. Consideremos el siguiente esquema de proyecciones canónicas:

$$\begin{tikzcd} & T(Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n)) \arrow[dl, "\tau_{Hom}"'] \arrow[dr, "T\tau_Q^{*n}"] & \\ Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n) \arrow[dr, "\tau_Q^{*n}"'] & & TQ \arrow[dl, "\tau_Q"] \\ & Q & \end{tikzcd} \tag{6.6}$$

Localmente, vamos a darle las correspondientes coordenadas a cada espacio. Para ello usamos las construcciones de los fibrados tangente (2.4) y contangente (2.10) estudiadas en el segundo capítulo, obteniendo así las coordenadas para el fibrado $\tau_{Hom} : T(Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n)) \longrightarrow Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n)$. De este modo, dado $q \in Q$ un punto de la variedad y $\alpha = 1, \dots, n$,

$$\begin{array}{ccl} Q & \dashrightarrow & (q_1, \dots, q_k) \\ TQ & \dashrightarrow & (q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k) \\ Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n) & \dashrightarrow & (q_1, \dots, q_k, p_{1,\alpha}, \dots, p_{k,\alpha}) \\ T(Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n)) & \dashrightarrow & (q_1, \dots, q_k, p_{1,\alpha}, \dots, p_{k,\alpha}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, \dot{p}_{1,\alpha}, \dots, \dot{p}_{k,\alpha}) \end{array} \tag{6.7}$$

Ahora bien, podemos definir una $1-$forma θ_0 sobre $Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n)$ por

$$\theta_0(W_{m_q}) = m_q \circ T\tau_Q^{*n}(W_{m_q}),$$

donde $W_{m_q} \in T(Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n))$ y $m_q = \tau_{Hom}(W_{m_q}) \in Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n)$.

Estudiemos la expresión de θ_0 usando (6.6) y (6.7). Tenemos que $\theta_0(W_{m_q}) = m_q \circ T\tau_Q^{*n}(W_{m_q})$, donde $W_{m_q} \in T(Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n))$ y $m_q = \tau_{Hom}(W_{m_q}) \in Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n)$. Luego, $T\tau_Q^{*n}(W_{m_q}) \in TQ$, por lo tanto, $m_q \circ T\tau_Q^{*n}(W_{m_q}) \in \mathbb{R}^n$, es decir, $\theta_0(W_{m_q}) \in \mathbb{R}^n$. Ahora bien, tomando coordenadas tenemos que:

$$W_{m_q} = \sum_{i,\alpha} \left(\dot{q}_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)_{m_q} + \dot{p}_{i,\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial p_{i,\alpha}} \right)_{m_q} \right) \otimes e_\alpha,$$

$$T\tau_Q^{*n}(W_{m_q}) = \sum_i \dot{q}_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)_{m_q},$$

$$m_q = \sum_{i,\alpha} p_{i,\alpha} d_{m_q} q_i \otimes e_\alpha$$

Luego, componiendo obtenemos:

$$m_q \circ T\tau_Q^{*n}(W_{m_q}) = \sum_{i,\alpha} p_{i,\alpha} \dot{q}_i \otimes e_\alpha.$$

Así llegamos a que $\theta_0(W_{m_q}) = \sum_{i,\alpha} p_{i,\alpha} \dot{q}_i \otimes e_\alpha$ entonces,

$$\theta_0 = \sum_{i,\alpha} p_{i,\alpha} dq_i \otimes e_\alpha. \tag{6.8}$$

Definición 6.11. *Denominamos a* θ_0 **uno-forma canónica***, y*

$$\Omega_0 = -d\theta_0 = \sum_{i,\alpha} dq_i \wedge dp_{i,\alpha} \otimes e_\alpha \tag{6.9}$$

es la **forma canónica polisimpléctica** *sobre* $Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$*.*

Proposición 6.12. Ω_0 *es cerrada y no degenerada en el sentido de que* $\Omega_0^b : TM \longrightarrow Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$*,* $\Omega_0^b(v)(w) = \Omega_0(v, w)$*, donde* $M = Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$*, es inyectiva.*

Demostración. Vamos a introducir las coordenadas naturales sobre $Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$ las cuales denominaremos por $(q_i, p_{i,\alpha})$, $i = 1, \dots, k$ y $\alpha = 1, \dots, n$.

Tomando la proyección canónica $\tau_Q^* : T_q^*Q \longrightarrow Q$, si (q_i) con $i = 1, \dots, k$ son coordenadas locales de $V \subset Q$, entonces las coordenadas locales introducidas $(q_i, p_{i,\alpha})$ sobre $T^*V = (\tau_Q^*)^{-1}(V)$ están dadas por:

$$q_i(\omega_q) = q_i(q) \quad ; \quad p_{i,\alpha}(\omega_q) = \omega_\alpha(q)\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_q$$

Luego, $(q_i, p_{i,\alpha} : V \times Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow q(V) \times Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$. De forma similar introducimos las coordenadas naturales de TM, $(q_i, p_{i,\alpha}, \dot{q}_i, \dot{p}_{i,\alpha})$. Y en estas coordenadas, por cómo se define θ_0 tenemos que:

$$\theta_0(q_i, p_{i,\alpha}; \dot{q}_i, \dot{p}_{i,\alpha}) = \tau_M(q, p, \dot{q}, \dot{p}) \circ T\tau_Q^{n*}(q, p, \dot{q}, \dot{p}) = (q_i, p_{i,\alpha}) \circ (q_i, \dot{q}_i) = p_{i,\alpha}(\dot{q}_i).$$

Además, $\Omega_0(q_i, p_{i,\alpha})((\dot{q}_i^1, \dot{p}_{i,\alpha}^1)), (\dot{q}_i^2, \dot{p}_{i,\alpha}^2))) = \dot{p}_{i,\alpha}^2(\dot{q}_i^1) - \dot{p}_{i,\alpha}^1(\dot{q}_i^2)$, nos da el resultado deseado. □

Proposición 6.13.

1. θ_0 *es la única uno-forma* $\mathbb{R}^n-$*valorada sobre* $Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$ *tal que* $\beta^*\theta_0 = \beta$ *para cualquier forma vector-valorada* $\beta \in \Lambda^1(Q)$*, donde* $\Lambda^1(Q)$ *denota las secciones del fibrado cotangente de* Q*.*

2. *Si* $f : Q \longrightarrow Q$ *es un difeomorfismo, entonces*

$$I^{n*}f : Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n),$$

donde $I^{n*}f(m_q) = m_q \circ I^n f$*,* $m_q \in \mathrm{Lin}(T_qQ, \mathbb{R}^n) = \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, T_qQ)^*$ *es un difeomorfismo que deja invariantes a* θ_0 *y* Ω_0*, es decir,*

$$(I^{n*}f)^*\theta_0 = \theta_0 \quad , \quad (I^{n*}f)^*\Omega_0 = \Omega_0 \tag{6.10}$$

(Puede ver en, por ejemplo, [9], pág. 1741, la demostración de dicha proposición).

Una vez hemos desarrollado en coordenadas los conceptos de 1-forma canónica y forma canónica polisimpléctica podemos definir los siguientes conceptos.

Definición 6.14. *Una dos-forma* $\mathbb{R}^n-$*valorada, cerrada y no degenerada* Ω *sobre una variedad* M *la denominamos* **forma polisimpléctica***. Y al par* (M, Ω)*,* **variedad polisimpléctica***.*

Ahora bien, las formas (6.8) y (6.9) pueden ser representadas localmente:

Definición 6.15. *Una forma polisimpléctica* Ω *en una variedad* M *decimos que es una* **forma estándar** *si y sólo si* M *tiene un atlas de cartas canónicas para* Ω*, es decir, cartas en las cuales escribimos* Ω *localmente del siguiente modo*

$$\Omega = \sum_{i,\alpha} dq_i \wedge dp_{i,\alpha} \otimes e_\alpha,$$

con $(q, p_\alpha) \in Q \times Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$*.*

En este caso, llamaremos a (M, Ω) **variedad polisimpléctica estándar***.*

Por ser M estándar, localmente tenemos que $M = Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n)$.

En variedades simplécticas definíamos los simplectomorfismos, los cuales nos relacionaban dos variedades simplécticas. Luego, para variedades polisimplécticas estos morfismos se definen del modo natural:

Definición 6.16. *Sean* (M_1, Ω_1) *y* (M_2, Ω_2) *dos variedades polisimplécticas. Una aplicación suave* $f : M_1 \longrightarrow M_2$ *es un* **simplectomorfismo** *si y sólo si*

$$f^*\Omega_2 = \Omega_1. \tag{6.11}$$

Denotamos por $Pspl(M, \Omega)$ *al grupo de difeomorfismos polisimplécticos sobre* (M, Ω)*. En ocasiones, los elementos de* $Pspl(M, \Omega)$ *son llamados* **transformaciones canónicas***.*

Observación 6.17. *Denotando por* $Diff(Q)$ *al conjunto de difeomorfismos de* Q*, esto es, el conjunto de difeomorfismos dado por* $f : Q \longrightarrow Q$ *y sea* $I^{n*} : \mathrm{Diff}(Q) \hookrightarrow Pspl(Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n), \Omega_0)$*. Como* I^{n*} *deja invariantes a* θ_0 *y* Ω_0*, tenemos que* I^{n*} *define un embedding.*

$$\begin{array}{rcccccl} I^{n*}: & \mathrm{Diff}(Q) & \hookrightarrow & Pspl(Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n), \Omega_0) & & & \\ & f & \hookrightarrow & I^{n*}f: & Hom(TQ, Q \times \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \Omega_0 \\ & & & & \Omega_0 & \longrightarrow & (I^{n*}f)\Omega_0 \\ & & & & & & = f^*(\Omega_0) \\ & & & & & & = \Omega_0. \end{array}$$

Lema 6.18. *Las aplicaciones polisimplécticas son inmersiones.*

Demostración. Sea $f : M_1 \longrightarrow M_2$ una aplicación polisimpléctica, esto es, $f^*\Omega_2 = \Omega_1$. Para ver que es inmersión tenemos que demostrar que su tangente, $Tf : TM_1 \longrightarrow TM_2$, es inyectiva.

Supongamos $Tf(v) = 0 \in TM_2$ entonces,

$$f^*\Omega_2(v, w) = \Omega_2(Tf(v), Tf(w)) = \Omega_2(0, Tf(w)) = 0,$$

por ser Ω_2 no degenerada para todo $w \in TM_1$.

Ahora bien, como $f^*\Omega_2(v, w) = \Omega_1(v, w) = 0$ entonces, $v = 0$ por ser Ω_1 no degenerada. Concluimos entonces que, efectivamente, la tangente de una aplicación polisimpléctica f es inyectiva y por lo tanto, f es inmersión. □

A continuación, veremos que gracias a la estructura polisimpléctica, podemos asignarle a una función en M (la función hamiltoniana) sus ecuaciones de Hamilton asociadas, al igual que ocurría en las variedades simplécticas. Ahora bien, para ello necesitamos los denominados **morfismos musicales**:

Definición 6.19. *Sea (M,Ω) una variedad polisimpléctica.*

$$\Omega^b : TM \longrightarrow Hom(TM, M\times\mathbb{R}^n),\ \ \Omega^b(v_m)(w_m) = \Omega(v_m,w_m).$$

$$\Omega^\sharp : Hom(M\times\mathbb{R}^n, TM) \longrightarrow T^*M,\ \ \Omega^\sharp(X_m) = tr(\Omega^b\circ X_m),$$

donde $(tr(\Omega^b\circ X_m))\cdot v_m = -tr(\Omega^b(v_m)\circ X_m)$. Cuyas secciones denotamos por:

$$^b : \mathscr{X}M \longrightarrow \mathbb{S}(TM, M\times\mathbb{R}^n),\ \ v^b(m) = \Omega^b(v_m).$$

$$^\sharp : \mathbb{S}(M\times\mathbb{R}^n, TM) \longrightarrow \Lambda^1 M,\ \ X^\sharp(m) = \Omega^\sharp(X(m)),$$

donde $\Lambda^1 M$ denota las secciones del fibrado cotangente de M

De la definición podemos deducir, por lo visto en la sección anterior, que $\Omega^\sharp$ es la dual de Ω^b.

Estudiemos las expresiones de la Omega bemol Ω^b y la Omega sostenido $\Omega^\sharp$. Comenzaremos con la Omega bemol. La cual se define del siguiente modo: Sea $m\in M$,

$$\begin{array}{rccl} \Omega^b_m: & T_mM & \longrightarrow & Hom(T_mM, M\times\mathbb{R}^n) \\ & v_m & \longrightarrow & \Omega^b_m(v_m): \begin{array}{ccl} T_mM & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ w_m & \longrightarrow & \Omega^b_m(v_m)(w_m) = \Omega(v_m,w_m) \end{array} \end{array} \tag{6.12}$$

Ahora bien, usando las coordenadas usuales (6.7) y sea $e_1,\dots,e_n$ base de $\mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$T_mM = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m, \left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\alpha}}\right)_m \right\rangle.$$

Haciendo las operaciones pertinentes:

- $v_m = \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m$,

$$\begin{array}{rlcl} \Omega^b_m\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m: & T_mM & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & w_m = \left(\frac{\partial}{\partial q_l}\right)_m & \longrightarrow & \Omega^b_m\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m\left(\frac{\partial}{\partial q_l}\right)_m = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial q_j},\frac{\partial}{\partial q_l}\right)_m = 0. \\ & w_m = \left(\frac{\partial}{\partial p_{l,\alpha}}\right)_m & \longrightarrow & \Omega^b_m\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m\left(\frac{\partial}{\partial p_{l,\alpha}}\right)_m = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial q_j},\frac{\partial}{\partial p_{l,\alpha}}\right)_m = \delta_{j,l}e_\beta. \end{array}$$

- $v_m = \left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\alpha}}\right)_m$,

$$\begin{array}{rlcl} \Omega^b_m\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\alpha}}\right)_m: & T_mM & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & w_m = \left(\frac{\partial}{\partial q_l}\right)_m & \longrightarrow & \Omega^b_m\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\alpha}}\right)_m\left(\frac{\partial}{\partial q_l}\right)_m = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\alpha}},\frac{\partial}{\partial q_l}\right)_m = -\delta_{j,l}e_\alpha. \\ & w_m = \left(\frac{\partial}{\partial p_{l,\beta}}\right)_m & \longrightarrow & \Omega^b_m\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\alpha}}\right)_m\left(\frac{\partial}{\partial p_{l,\beta}}\right)_m = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\alpha}},\frac{\partial}{\partial p_{l,\beta}}\right)_m = 0. \end{array}$$

Luego,

$$\Omega^b_m\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m = d_m p_{j,\beta}\otimes e_\beta. \qquad (6.13) \qquad \Omega^b_m\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\alpha}}\right)_m = -d_m q_j\otimes e_\alpha. \qquad (6.14)$$

De este modo obtenemos la expresión de Ω^b dada por:

$$\Omega^b = \sum_{j,\alpha} dq_j\otimes dp_{j,\alpha}\otimes e_\alpha.$$

Ahora, usando las expresiones (6.13) y (6.14), podemos hallar la expresión de $\Omega^\sharp$ sobre un conjunto de campos vectoriales en un punto $m\in M$, lo cual nos va a ayudar posteriormente a hallar el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de Hamilton.

Sea $X_m\in Hom(M\times\mathbb{R}^n, TM)$, usando las coordenadas usuales (6.7) y teniendo en cuenta que $M = Hom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n)$,

$$X_m(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \sum_j\left(\sum_{i,\alpha}\lambda_\alpha A_i(q_j,p_{,\alpha})\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m + \sum_{\beta,\alpha}\lambda_\beta B_{j,\alpha}(q_j,p_{,\beta})\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\beta}}\right)_m\right)$$

Luego, tomando $\dot q_{j,\alpha} = A_i(q_j,p_{,\alpha})$ y $\dot p^\alpha_{j,\beta} = B_{j,\alpha}(q_j,p_{,\beta})$. Llegamos a que:

$$X_m = \sum_\alpha\left(\sum_j \dot q_{j,\alpha}(X_m)\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m + \sum_{\beta,j}\dot p^\alpha_{j,\beta}(X_m)\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\beta}}\right)_m\right)\otimes e^*_\alpha,$$

con $j=1,\dots,k$ y $\alpha,\beta = 1,\dots,n$, donde la β va a hacer referencia a $THom(TQ, Q\times\mathbb{R}^n) = TM$ y la α a $Hom(M\times\mathbb{R}^n, TM)$.

Una vez hemos visto cómo es un elemento en TM, estudiemos la Omega sostenido.

$$\begin{array}{rlcll} \Omega^\sharp_m: & Hom(M\times\mathbb{R}^n, T_mM) & \longrightarrow & T^*_m M & \\ & X_m & \longrightarrow & \Omega^\sharp_m(X_m): & T_mM \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & & & & v_m \longrightarrow \Omega^\sharp_m(X_m)(v_m) \end{array}$$

donde

$$\Omega^\sharp_m(X_m)(v_m) := (tr(\Omega^b_m\circ X_m))\cdot v_m = -tr(\Omega^b(v_m)\circ X_m).$$

Obtendremos primero la expresión de $\Omega^b(v_m)\circ X_m$, luego le aplicaremos la traza $-tr(\Omega^b(v_m)\circ X_m)$ y así tendremos la expresión de $\Omega^\sharp_m(X_m)(v_m)$ a partir de la cual obtendremos $\Omega^\sharp_m(X_m)$. Procedamos con los cálculos:

Por la linealidad de Ω^b , usando (6.13) y (6.14), y tomando $v_m = \sum_j \dot q_j(v_m)\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m + \sum_{\beta,j}\dot p_{j,\beta}(v_m)\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\beta}}\right)_m \in T_mM$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \Omega^b(v_m)\circ X_m &= \left(\textstyle\sum_j \dot q_j(v_m)\Omega^b_m\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m + \sum_{\beta,j}\dot p_{j,\beta}(v_m)\Omega^b_m\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\beta}}\right)_m\right)\circ X_m \\ &= \left(\textstyle\sum_{j,\beta}\dot q_j(v_m)dp_{j,\beta}\otimes e_\beta + \dot p_{j,\beta}(v_m)(-dq_j)\otimes e_\beta\right)\circ X_m \\ &= \left(\textstyle\sum_{j,\beta}\dot q_j(v_m)dp_{j,\beta} + \dot p_{j,\beta}(v_m)(-dq_j)\right)\otimes e_\beta\circ \\ &\circ \ \textstyle\sum_\alpha\left(\sum_{j,\beta}\dot q_{j,\alpha}(X_m)\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_m + \dot p^\alpha_{j,\beta}(X_m)\left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\beta}}\right)_m\right)\otimes e^*_\alpha \\ &= \left(\dot q_j(v_m)\dot p^\alpha_{j\beta}(X_m) - \dot p_{j,\beta}(v_m)\dot q_{j,\alpha}(X_m)\right)\otimes e_\beta\otimes e^*_\alpha. \end{aligned}$$

Aplicando ahora la traza (cuando $\beta = \alpha$),

$$-tr(\Omega^b_m(v_m) \circ X_m) = \sum_{j,\alpha} -\dot{q}_j(v_m)\dot{p}^{\alpha}_{j\alpha}(X_m) + \dot{p}_{j,\alpha}(v_m)\dot{q}_{j,\alpha}(X_m) = \Omega^{\sharp}_m(Xm)(v_m).$$

Luego,

$$\Omega^{\sharp}_m(X_m) = -\dot{p}^{\alpha}_{j\alpha}(X_m)d_m q_j + \dot{q}_{j,\alpha}(X_m)d_m p_{j,\alpha}. \tag{6.15}$$

Observación 6.20. *Definimos las componentes Ω_α de Ω,con $\alpha = 1, \ldots, n$, a las formas simplécticas sobre M definidas por: $\Omega_\alpha = pr_\alpha \circ \Omega$, donde $pr_\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es la $\alpha-$ésima proyección.*

Se ve fácilmente que si tenemos $\Omega = \sum_{i,\alpha} dq_i \wedge dp_{i,\alpha} \otimes e_\alpha$, al aplicar la proyección $\alpha-$ésima lo que hacemos es fijar un α, obteniendo así: $\Omega_\alpha = \sum_i dq_i \wedge dp_{i,\alpha}$ que es una forma simpléctica sobre M.

6.3. Ecuaciones canónicas

En mecánica clásica ya vimos que una forma simpléctica en el espacio de fases asigna a cada función H su campo hamiltoniano ((4.11) $i_X\omega = dH$) y que el flujo de dicho campo está determinado por las ecuaciones hamiltonianas.

En variedades polisimplécticas, lo que hacemos es asignarle a cada función de la variedad polisimpléctica un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Dichas ecuaciones serán las denominadas ecuaciones de Hamilton.

Definición 6.21. *Sean H una función diferenciable en M y $dH \in \Lambda^1 M$ una uno-forma sobre M. Definimos el subfibrado de $Hom(M \times \mathbb{R}^n, TM)$ por:*

$$\Omega^{\sharp -1}(dH) := \{X_m \in Hom(M \times \mathbb{R}^n, TM) \,/\, \Omega^{\sharp}(X_m) = dH(m)\}, \tag{6.16}$$

el cual es un fibrado sobre M. A este subfibrado lo llamamos **sistema de ecuaciones en derivadas parciales de Hamilton asociado a la función hamiltoniana** H.

Además, decimos que una aplicación suave $\varphi : U \longrightarrow M$ con $U = U^0 \subset \mathbb{R}^n$, es una **solución** *de $\Omega^{\sharp -1}(dH)$ si y sólo si $T_u\varphi \in \Omega^{\sharp -1}(dH(\varphi(u)))$ para todo $u \in U$.*

Veamos la expresión de $\Omega^{\sharp}(X_m) = dH(m)$ en coordenadas.

En la sección anterior ya habíamos hallado $\Omega^{\sharp}(X_m)$ (6.15), obteníamos:

$$\Omega^{\sharp}_m(X_m) = -\dot{p}^{\alpha}_{j\alpha}(X_m)d_m q_j + \dot{q}_{j,\alpha}(X_m)d_m p_{j,\alpha}.$$

Ahora bien, como H es una función diferenciable sobre M, podemos escribir

$$dH(m) = \sum_{j,\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)_m d_m q_j + \left(\frac{\partial H}{\partial p_{j,\alpha}}\right)_m d_m p_{j,\alpha},$$

con $j = 1, \ldots, k$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Igualando estas expresiones tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{p}^{\alpha}_{j,\alpha}(X_m) & = & -\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)_m \\ \dot{q}_{j,\alpha}(X_m) & = & \left(\frac{\partial H}{\partial p_{j,\alpha}}\right)_m \end{array} \right. \tag{I}$$

que es el llamado **sistema de ecuaciones en derivadas parciales de Hamilton asociado a la función hamiltoniana** H.

Tomemos ahora $\varphi : U \longrightarrow M$ una aplicación suave, con $U \subset \mathbb{R}^n$, y veamos que es solución del sistema si y sólo si $T_u\varphi \in \Omega^{\sharp-1}(dH(\varphi(u)))$ para todo $u \in U$.

Tomando $e_1, \ldots, e_n$ base de $\mathbb{R}^n$ y $\partial/\partial x_\alpha$ con $\alpha = 1, \ldots, n$, la base del espacio tangente. Definimos la tangente de φ del siguiente modo:

$$T_u\varphi : \mathbb{R}^n \simeq T_uU \longrightarrow T_{\varphi(u)}M$$

Entonces, usando cómo se define nuestra aplicación, $\varphi(u) = (q_j = \varphi_j(u), p_{j,\alpha} = \varphi_{j,\alpha}(u))$. Luego,

$$T_u\varphi = \left(\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\alpha}\right)_u \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_{\varphi(u)} + \left(\frac{\partial \varphi_{j,\beta}}{\partial x_\alpha}\right)_u \left(\frac{\partial}{\partial p_{j,\beta}}\right)_{\varphi(u)}\right) \otimes e^*_\alpha$$

La función será una solución del sistema si y sólo si $\Omega^\sharp(T_u\varphi) = dH(\varphi(u))$. Vemos que $T_u\varphi$ es un elemento de $Hom(M \times \mathbb{R}^n, TM)$, por lo tanto tomar $T_u\varphi$ equivale a tomar el elemento X_m que tomábamos anteriormente. De este modo tenemos que, para $j = 1, \ldots, k$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_{j,\alpha}}{\partial x_\alpha}\right)_u & = & -\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)_{\varphi(u)} \\ \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\alpha}\right)_u & = & \left(\frac{\partial H}{\partial p_{j,\alpha}}\right)_{\varphi(u)} \end{array} \right. \tag{II}$$

Concluimos que, efectivamente, $T_u\varphi \in \Omega^{\sharp-1}(dH(\varphi(u)))$ para todo $u \in U$. Luego, φ es solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de Hamilton asociado a la función hamiltoniana H.

Una vez conocemos los conceptos de sistema de ecuaciones en derivadas parciales de Hamilton y la solución de dicho sistema, veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 6.22. *Sean* $n = 4$, $Q = \mathbb{R}$, *y* $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$ *con coordenadas* (q, p_1, p_2, p_3, p_4). *Sea*

$$H(q, p_1, \ldots, p_4) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} p_i^2 + mq^2,$$

una función hamiltoniana sobre M. *Por lo que hemos estudiado sabemos que la forma polisimpléctica viene dada por*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{4} dq \wedge dp_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i},$$

con $(x_i)_{i=1,\ldots,4}$ *base de* $\mathbb{R}^4$.

Entonces tenemos el campo escalar: $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_4) = (q(x_1, \ldots, x_4), p_1(x_1, \ldots, x_4), \ldots, p_4(x_1, \ldots, x_4))$$

Luego, las ecuaciones de Hamilton para el campo escalar, usando (II), son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = mq \\ \frac{\partial q}{\partial x_i} = p_i. \end{array} \right. \tag{6.17}$$

Si sutituimos la segunda en la primera, obtenemos

$$\Delta q = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2} = mq$$

Ejemplo 6.23. *Sea ahora* $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *el campo escalar que da el potencial eléctrico sobre* $\mathbb{R}^3$*. Entonces,*$n = 3$,$Q = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ *con coordenadas* (q, p_1, p_2, p_3)*. Sea*

$$H(q, p_1, p_2, p_3) = 4\pi r q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} p_i^2 \tag{6.18}$$

una función hamiltoniana sobre M*. Entonces, las ecuaciones de Hamilton para el campo escalar que da el potencial eléctrico son:*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 4\pi r \\ \frac{\partial q}{\partial x_i} = p_i. \end{cases} \tag{6.19}$$

Como en el ejemplo anterior, se deduce también aquí que

$$\Delta q = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2} = 4\pi r,$$

que es una ecuación de Poisson.

Bibliografía

[1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York, 1989.

[2] M.L. Arroyo Flores, *Espacios Fibrados, Clases Características, y el Isomorfismo de Thom*, Pontificia Universidad Católica de Perú, 2013.

[3] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[4] P.L. García, *The Poincaré-Cartan invariant in the calculus of variations*, Sysmpos. Math. 14, 1974.

[5] H. Goldschmidt and S. Sternberg, *The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variation*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 13, 1973.

[6] C. Günther, *The polysimplectic hamiltonian formalism in field theory and calculus of variations I : The local case*, J. Differential Geometry, University of Rochester, 14 April 1986.

[7] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Mainfolds*, Second Edition, Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA, USA, 2003.

[8] J. Marsden, T. Ratiu and R. Abraham, Manifolds, *Tensor Analysis and Applications*, Third edition, Applied Mathematical Sciences, 75. Springer-Verlag, New York, 2002.

[9] F. Munteanu and A. M. Rey and M. Salgado, *The Günther's formalism in classical field theory: momentum map and reduction*, Journal of Mathematical Physics, AIP Publishing, volume 45, number 5, may 2004.

[10] J. Muñoz Díaz, *Ecuaciones Diferenciales: teoremas de existencia, sistemas de Pfaff, ecuaciones en derivadas parciales de primer orden*, Universidad de Salamanca, 1982.

[11] R. Ouzilou, *Expression symplectique des problems variationnels*, Sympos. Math. 14, 1972.

[12] M. Sánchez Caja, J.L. Flores Dorado, *Introducción a la Geometría Diferencial de Variedades. Variedades diferenciables y aplicaciones*, Editorial Académica Española, 2012.

[13] S. Vilariño Fenández, *Nuevas aportaciones al estudio de los formalismos k-simpléctico y k-cosimpléctico*, Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Santiago de Compostela.