



VNiVERSIDAD D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Trabajo Fin de Grado
Facultad de Ciencias de Salamanca
Grado en matemáticas

Aspectos geométricos del flujo magnético en una variedad

Autor: Pablo Gutiérrez Benito

Tutor: Antonio López Almorox

Curso 2020-2021



VNiVERSIDAD
DSALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Aspectos geométricos del flujo magnético en una variedad

Autor:

Pablo Gutiérrez Benito

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'P. Benito'.

Tutor:

Antonio López Almorox

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'A. Almorox'.

Curso 2020-2021

Índice general

Introducción	I
1. Aspectos básicos de Geometría Riemanniana	1
1.1. Conceptos y resultados elementales de geometría riemanniana	1
1.1.1. Conexiones lineales	1
1.1.2. Variedades riemannianas	2
1.1.3. Operadores sobre una variedad riemanniana	3
1.2. Flujo geodésico y aplicación exponencial riemanniana	4
1.3. Campos de Jacobi en variedades riemannianas	5
2. Curvas magnéticas en variedades riemannianas	7
2.1. Motivación física: movimiento de una partícula cargada dentro de un campo magnético estático	7
2.2. Curvas magnéticas en variedades riemannianas	8
2.3. Curvas magnéticas en variedades riemannianas bidimensionales	11
2.3.1. Curvas magnéticas normales en superficies de curvatura seccional constante	14
2.4. Curvas magnéticas en variedades riemannianas tridimensionales	16
2.4.1. Campos Killing magnéticos en variedades tridimensionales	22
3. Aspectos geométricos del flujo magnético	25
3.1. La geometría del fibrado tangente de una variedad riemanniana	25
3.1.1. Descomposición del fibrado tangente en los subfibrados horizontal y vertical	25
3.1.2. Métrica de Sasaki, estructura casi-compleja y estructura simpléctica en el fibrado tangente de una variedad riemanniana	29
3.2. Flujo magnético y aplicación exponencial magnética	32
3.3. Formulación simpléctica del flujo magnético	34
3.4. Campos de Jacobi magnéticos	35
3.4.1. Variaciones de curvas magnéticas	35
3.4.2. La ecuación de Jacobi magnética	37
3.4.3. Campos de Jacobi magnéticos tangenciales y especiales	40
3.4.4. Campos de Jacobi magnéticos para campos magnéticos uniformes	40
3.4.5. Campos de Jacobi magnéticos en superficies de Riemann orientadas	42

4. Variación de la energía magnética de Landau-Hall	45
4.1. Primera variación de la energía magnética	45
4.2. Segunda variación de la energía magnética. Métrica índice magnética . . .	50
5. Anexo	53
Bibliografía	56

Introducción

En los últimos años se han venido estudiando las denominadas curvas magnéticas o geodésicas magnéticas que representan las trayectorias de partículas clásicas cargadas moviéndose bajo la acción de un campo magnético estático que interactúa con la partícula a través de la fuerza de Lorentz ([1], [2], [5], [6], [7], [11], [12], [13], [19]).

En los modelos geométricos, el espacio donde se mueve la partícula es una variedad riemanniana (M, g) y el campo magnético estático viene descrito por una 2-forma F cerrada en dicha variedad. La fuerza de Lorentz no es más que el endomorfismo antisimétrico ϕ asociado a la métrica riemanniana g y al campo magnético F . Con este lenguaje las curvas magnéticas $\gamma(t)$ son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \phi(\dot{\gamma})$ que generaliza las conocidas ecuaciones de Lorentz. Estas soluciones permiten describir un flujo (local) uniparamétrico en el fibrado tangente de la variedad riemanniana, denominado flujo magnético asociado al campo magnético estático. Señalemos que cuando el campo magnético es nulo, este flujo coincide precisamente con el flujo geodésico riemanniano.

Si las curvas geodésicas riemannianas son las curvas críticas del problema variacional definido por la funcional energía de una curva, las curvas magnéticas también pueden ser descritas como soluciones del denominado problema variacional de Landau-Hall en una variedad riemanniana cuando el campo magnético se describe mediante una 2-forma $F = dA$ exacta ([3], [4], [5], [9], [24]).

El trabajo que se presenta es un trabajo de revisión bibliográfica e investigación sobre las curvas magnéticas en variedades riemannianas y sus propiedades. El objetivo fundamental del mismo es analizar los aspectos y propiedades geométricas de dichas curvas desde un punto de vista intrínseco geométrico y del cálculo de variaciones.

La memoria que se presenta está estructurada en cuatro capítulos que pasamos a detallar a continuación.

En el primer capítulo se recogen las nociones básicas de Geometría Riemanniana que serán utilizadas a lo largo de la memoria y que servirán para fijar la notación. Muchos de estos resultados han sido vistos en el grado por lo que no se incluyen demostraciones de los mismos que, por otra parte, pueden encontrarse en los manuales sobre el tema que hemos usado ([8], [16], [17], [18], [21], [22], [23]). Con objeto de comparar posteriormente las propiedades del flujo geodésico con las del flujo magnético, se han incluido en este capítulo algunos resultados elementales sobre el flujo geodésico, la aplicación exponencial riemanniana y los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas.

En el capítulo 2, se introducen los campos magnéticos en una variedad riemanniana (M, g) como las 2-formas diferenciables $F \in \Lambda^2(M)$ cerradas. Resaltamos que en dimen-

sión 3 los campos magnéticos pueden ser descritos de manera equivalente como campos vectoriales de divergencia nula o mediante el producto vectorial riemanniano. La fuerza (generalizada) de Lorentz se define como el campo de endomorfismos antisimétricos $\phi \in T_1^1(M)$ asociado a la métrica riemanniana g y al campo magnético F determinado por la relación $g(X, \phi(Y)) = F(X, Y)$.

Con ello se definen las curvas magnéticas en (M, g) respecto del campo magnético F como las curvas $\gamma(t)$ en M que verifican la ecuación de Lorentz

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \phi(\dot{\gamma}) \Leftrightarrow \frac{d^2q_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt} = \sum_{r=1}^n (\phi_{rk} \circ \gamma) \frac{dq_r}{dt}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Tras estas nociones el resto del capítulo está dedicado a estudiar las propiedades geométricas de las curvas magnéticas en diferentes dimensiones y en la determinación explícita de las mismas asociadas a campos magnéticos uniformes en diferentes variedades riemannianas.

Para la elaboración del capítulo 2 se han empleado las referencias [5], [6], [7], [11], [19], [22].

El tercer capítulo está dedicado completamente al estudio del flujo magnético sobre variedades riemannianas que, por sencillez en la exposición teórica, asumiremos completas. En la primera sección se recoge, con bastante detalle, la geometría del fibrado tangente $\pi : TM \rightarrow M$ de una variedad riemanniana (M, g) , en términos del morfismo $\pi_* : T(TM) \rightarrow \pi^*(TM)$ y del morfismo de conexión de Dombrowski $K : T(TM) \rightarrow \pi^*(TM)$. Mediante los mismos se introduce la métrica de Sasaki en el fibrado tangente así como una estructura simpléctica exacta, dependientes ambas de la estructura riemanniana de (M, g) .

Con ello se llega a uno de los objetivos principales de la memoria, el estudio del flujo magnético de una variedad riemanniana (M, g) completa asociado a un campo magnético F sobre la misma. Este se define como el flujo uniparamétrico de difeomorfismos

$$\begin{aligned} \tau^F : \mathbb{R} \times TM &\longrightarrow TM \\ (t, (p, v)) &\longrightarrow \tau_t^F(p, v) = (\gamma_{p,v}^F(t), \dot{\gamma}_{p,v}^F(t)) \end{aligned}$$

siendo $\gamma_{p,v}^F(t)$ la curva magnética tal que $\gamma_{p,v}^F(0) = p$ y $\dot{\gamma}_{p,v}^F(0) = v$. La expresión local del generador infinitesimal $\xi^F \in \mathfrak{X}(TM)$ del flujo magnético es

$$\xi^F = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k,r=1}^n \left[(\phi_{rk} \circ \pi) \dot{q}_r - \sum_{i,j=1}^n (\Gamma_{ij}^k \circ \pi) \dot{q}_i \dot{q}_j \right] \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$$

Se puede dar una formulación simpléctica del flujo magnético en TM usando la estructura simpléctica modificada $\Omega^F = \Omega - \pi^*F$. Estos hechos conducen a la siguiente definición de la exponencial magnética en un punto $p \in M$ asociada al campo magnético F

$$\begin{aligned} \exp_p^F : T_pM &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \exp_p^F(v) = \begin{cases} \gamma_{(p, \frac{v}{\|v\|})}^F(\|v\|) & \text{si } v \neq 0 \\ p & \text{si } v = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Usando técnicas similares al caso geodésico, se termina el capítulo con el estudio de los campos de Jacobi magnéticos sobre una curva magnética entendidos como los campos

variacionales asociados a variaciones magnéticas $\delta^F : \mathbb{R} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ de dicha curva y que satisfacen la ecuación

$$\frac{D^2 J}{dt^2} = -R_{\nabla}(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} + \phi(\dot{\gamma}^{\nabla} J) + (J^{\nabla} \phi)(\dot{\gamma})$$

y se demuestra que toda solución de esta ecuación es un campo variacional de la curva magnética $\gamma(t)$. Se termina el capítulo determinando explícitamente los campos de Jacobi magnéticos especiales en las superficies de Riemann orientadas simplemente conexas de curvatura seccional constante.

Para la elaboración de este capítulo se han empleado las referencias [1], [2], [12], [13], [14], [20], [10], [25], [26].

El último capítulo está dedicado a la demostración de que precisamente las curvas magnéticas $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ en una variedad riemanniana asociadas a un campo magnético exacto $F = dA$ uniforme son las soluciones críticas del problema variacional definido por la llamada funcional de Landau-Hall dada por

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt + \int_a^b A_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$$

Usando el lenguaje de los campos vectoriales a lo largo de aplicaciones diferenciables entre variedades riemannianas, se demuestra la fórmula de la primera variación de la funcional de Landau-Hall

$$\frac{d\mathcal{E}_{\delta}}{ds}(0) = - \int_a^b g\left(V^{\delta}(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) - \phi(\dot{\gamma}(t))\right) dt$$

siendo V^{δ} el campo variacional de una variación δ . De ello se deduce que $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es crítica si y solo si es una curva magnética.

Finalmente se determina la fórmula de la segunda variación de la funcional de Landau-Hall

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_{\delta}}{ds^2}(0) = \int_a^b g\left(V^{\delta}(t), \frac{D^2 V^{\delta}}{dt^2}(t) - R_{\nabla}(V^{\delta}(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) - \phi\left(\frac{DV^{\delta}}{dt}(t)\right)\right) dt$$

y a través de la forma índice magnética

$$\mathbb{I}nd_{\gamma}(V, W) = \int_a^b \left[\left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DW}{dt} \right\rangle - R(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, W) + F\left(V, \frac{DW}{dt}\right) \right] dt$$

se describe la estabilidad de las curvas magnéticas.

Las referencias empleadas en este último capítulo han sido [5], [6], [7], [8], [12], [17],[24].

Se incluye un anexo donde se detallan los conceptos y resultados usados en la memoria sobre los campos vectoriales diferenciables a lo largo de aplicaciones entre variedades riemannianas. Las demostraciones de los mismos pueden encontrarse en numerosos manuales tales como [21], [28], [29].

Se incluyen también el listado de referencias bibliográficas utilizadas ordenadas alfabéticamente por el nombre del primer autor.

Todas las variedades diferenciables que aparezcan en la memoria serán C^{∞} -diferenciables, Hausdorff, sin bordes y verificando el segundo axioma de numerabilidad. En general, y

mientras no se señale lo contrario, todas las variedades diferenciables se asumirán conexas. En ocasiones, a lo largo del trabajo se denotará a la variedad riemanniana (M, g) como M sin dar específicamente el tensor riemanniano. Igualmente las curvas parametrizadas que aparecen se asumirán C^∞ -diferenciables sin decirlo para no recargar excesivamente la notación.

Capítulo 1

Aspectos básicos de Geometría Riemanniana

1.1. Conceptos y resultados elementales de geometría riemanniana

1.1.1. Conexiones lineales

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y denotemos por $\mathfrak{X}(M)$ al $C^\infty(M)$ -módulo de sus campos vectoriales diferenciables en M .

Definición 1.1.1. Una conexión lineal en la variedad diferenciable M es una aplicación

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (D, D') &\longmapsto D^\nabla D' \end{aligned}$$

tal que $\forall D, D', D_1, D_2 \in \mathfrak{X}(M)$ y $\forall f \in C^\infty(M)$ cumple

- $D^\nabla(D_1 + D_2) = D^\nabla D_1 + D^\nabla D_2$ y $(D_1 + D_2)^\nabla D' = D_1^\nabla D' + D_2^\nabla D'$.
- $D^\nabla(f D') = D(f) D' + f D^\nabla D'$ y $(f D)^\nabla D' = f D^\nabla D'$.

Dados $D, D' \in \mathfrak{X}(X)$ y un abierto $U \subseteq X$, la restricción $(D^\nabla D')|_U$ solo depende de $D|_U$ y de $D'|_U$ por lo que define una conexión lineal en dicho abierto que denotamos de igual manera. Dado un abierto U de M coordinado por $\{q_1, \dots, q_n\}$, la conexión lineal localmente queda determinada por

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \nabla \frac{\partial}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial q_k}$$

siendo $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$, con $1 \leq i, j, k \leq n$, los símbolos de Christoffel de la conexión respecto del sistema de coordenadas empleado. Si $D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $D' = \sum_{j=1}^n f'_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ son campos vectoriales diferenciables en el abierto coordinado U se tiene que

$$D^\nabla D' = \sum_{k=1}^n \left[D(f'_k) + \sum_{i,j=1}^n f_i f'_j \Gamma_{ij}^k \right] \frac{\partial}{\partial q_k}$$

Dado un punto $p \in U$, la expresión anterior muestra que el vector $(D^\nabla D')_p$ solo depende de D_p y del valor de D' a lo largo de una curva diferenciable $\gamma(t)$ arbitraria tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = D_p$.

Dada una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ sobre M denotaremos por $\mathfrak{X}(\gamma(t))$ el $C^\infty(I)$ -módulo de los campos vectoriales diferenciables con soporte dicha curva y por $\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma(t)) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma(t))$ al operador de derivación covariante a lo largo de $\gamma(t)$ inducido por la conexión ∇ y definido por $\frac{DV}{dt} = \dot{\gamma}^\nabla V$ con $V \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$.

Definición 1.1.2. Se llama torsión de una conexión lineal ∇ a la aplicación $C^\infty(M)$ -bilineal y antisimétrica $Tor_\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$Tor_\nabla(D_1, D_2) = D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1 - [D_1, D_2]$$

Una conexión ∇ se dice simétrica si $Tor_\nabla = 0$.

Definición 1.1.3. Se define el endomorfismo curvatura asociado a una conexión lineal ∇ como la aplicación $C^\infty(M)$ -bilineal y antisimétrica

$$\begin{aligned} R_\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \text{End}_{C^\infty(M)} \mathfrak{X}(M) \\ (D_1, D_2) &\longrightarrow R_\nabla(D_1, D_2) := D_1^\nabla D_2^\nabla - D_2^\nabla D_1^\nabla - [D_1, D_2]^\nabla \end{aligned}$$

Dada una conexión lineal ∇ en la variedad diferenciable M , el operador de derivación covariante se extiende a los $C^\infty(M)$ -módulos de los campos tensoriales de tipo (r, s) diferenciables, $T_r^s(M)$, de la variedad M mediante

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times T_r^s(M) &\longrightarrow T_r^s(M) \\ (D, T_r^s) &\longrightarrow D^\nabla T_r^s \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} [D^\nabla T_r^s](D_1, \dots, D_r, \omega_1, \dots, \omega_s) &= D [T_r^s(D_1, \dots, D_r, \omega_1, \dots, \omega_s)] - \\ &- \sum_{i=1}^r T_r^s(D_1, \dots, D^\nabla D_i, \dots, D_r, \omega_1, \dots, \omega_s) - \sum_{j=1}^s T_r^s(D_1, \dots, D_r, \omega_1, \dots, D^\nabla \omega_j, \dots, \omega_s) \end{aligned}$$

Este operador de derivación covariante define la aplicación $\nabla : T_r^s(M) \rightarrow T_{r+1}^s(M)$ donde

$$(\nabla T_r^s)(D, D_1, \dots, D_r, \omega_1, \dots, \omega_s) = (D^\nabla T_r^s)(D_1, \dots, D_r, \omega_1, \dots, \omega_s)$$

1.1.2. Variedades riemannianas

Definición 1.1.4. Una variedad riemanniana (M, g) es una variedad diferenciable M dotada de un campo tensorial $g \in T_2(M)$ simétrico y definido positivo, denominado métrica riemanniana.

Dada una carta local $\{U, (q_1, \dots, q_n)\}$ de M , la métrica riemanniana se escribe $g|_U = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dq_i \otimes dq_j$. El morfismo de polaridad asociado a la métrica riemanniana g establece un isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos $p_g : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$ con $p_g(D) \equiv \omega_D := i_D g$. Podemos orientar la variedad riemanniana (M, g) mediante el elemento de volumen riemanniano $\Omega_g \in \Lambda^n(M)$, caracterizado por el hecho de que para cualquier base ortonormal local de campos vectoriales $\{U_1, \dots, U_n\}$ positivamente orientados se tiene que $\Omega_g(U_1, \dots, U_n) = 1$. En coordenadas $\{q_1, \dots, q_n\}$ se escribe $\Omega_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dq_1 \wedge \dots \wedge dq_n$.

Teorema 1.1.1. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Existe una única conexión lineal ∇ en M , denominada conexión riemanniana o de Levi-Civita, tal que $Tor_{\nabla} = 0$ y $\nabla g = 0$.*

La conexión de Levi-Civita está caracterizada por

$$\begin{aligned} 2g(D_1^{\nabla} D_2, D_3) &= D_1 g(D_2, D_3) + D_2 g(D_3, D_1) - D_3 g(D_1, D_2) - \\ &- g(D_2, [D_1, D_3]) - g(D_1, [D_2, D_3]) - g(D_3, [D_1, D_2]) \end{aligned}$$

de donde se deduce que localmente los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita vienen dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l} \right)$$

Se verifica también que $D^{\nabla} \Omega_g = 0 \quad \forall D \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación 1.1.1. La diferencial exterior de Cartan se puede expresar en términos de la conexión de Levi-Civita de la siguiente manera: si $\Omega \in \Lambda^k(M)$

$$d\Omega(D_1, \dots, D_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} (D_i^{\nabla} \Omega)(D_1, \dots, \hat{D}_i, \dots, D_{k+1})$$

Definición 1.1.5. *Se llama tensor de curvatura de Riemann-Christoffel al campo tensorial $R \in T_4(M)$ definido por $R(D_1, D_2, D_3, D_4) := g(R_{\nabla}(D_1, D_2) D_3, D_4)$.*

1.1.3. Operadores sobre una variedad riemanniana

Definición 1.1.6. *Dada $f \in C^{\infty}(M)$, se define el gradiente riemanniano de f , como el campo vectorial $grad f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $g(grad f, D) = Df$ para todo $D \in \mathfrak{X}(M)$.*

Localmente $grad f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_j}$. Además si $\{U_1, \dots, U_n\}$ es una base ortonormal local de campos vectoriales, $grad f = \sum_{i=1}^n U_i(f) U_i$

Definición 1.1.7. *Se llama divergencia del campo vectorial $D \in \mathfrak{X}(M)$ a la función diferenciable $div D$ definida por $D^L \Omega_g = (div D) \Omega_g$.*

$$\text{Localmente, } div D = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_i} + \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial \sqrt{\det(g_{ij})}}{\partial q_i} f_i \right).$$

Cuando $div D = 0$, entonces el elemento de volumen es invariante bajo la acción del flujo uniparamétrico local definido por D . Así pues, la divergencia del campo D puede considerarse como una medida de la variación del volumen riemanniano a lo largo de las curvas integrales de D .

Observación 1.1.2. Se puede también caracterizar la divergencia de un campo mediante $div D = c_1^1(\nabla D)$ donde $c_1^1 : T_1^1(M) \rightarrow T_0^0(M)$ es el operador de contracción de índices. Esta definición permite demostrar que si $\{U_1, \dots, U_n\}$ es una base ortonormal (local) de campos vectoriales, entonces $div D = \sum_{i=1}^n g(U_i^{\nabla} D, U_i) = \sum_{i=1}^n g([U_i, D], U_i)$

Definición 1.1.8. *Sea (M, g) una variedad riemanniana con $\dim M = 3$. Se llama rotacional de un campo $D \in \mathfrak{X}(M)$ al campo vectorial $rot D \in \mathfrak{X}(M)$ definido mediante $i_{rot D} \Omega_g = d\omega_D$.*

Dado que $(\text{rot}D)^L\Omega_g = d(i_{\text{rot}D}\Omega_g) = d(d\omega_D) = 0$ se verifica que $\text{div}(\text{rot}D) = 0$.

Definición 1.1.9. Sea (M, g) una variedad riemanniana n -dimensional. Para cada $0 \leq k \leq n$, se define el operador estrella de Hodge como el morfismo de $C^\infty(M)$ -módulos

$$\begin{aligned} * : \Lambda^k(M) &\longrightarrow \Lambda^{n-k}(M) \\ \Omega &\longrightarrow *\Omega \end{aligned}$$

donde $\forall \Omega' \in \Lambda^{n-k}(M)$, $\langle \Omega', *\Omega \rangle_{\Omega_g} = \Omega' \wedge \Omega$. Siendo $\langle -, - \rangle$ el producto escalar inducido por la métrica riemanniana en $\Lambda^{n-k}(M)$.

1.2. Flujo geodésico y aplicación exponencial riemanniana

Definición 1.2.1. Se dice que una curva parametrizada $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ en una variedad riemanniana (M, g) es una geodésica riemanniana si $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$.

Por las propiedades del operador $\frac{D}{dt}$ se sigue que si $\gamma(t)$ es una geodésica, $\|\dot{\gamma}(t)\|$ es constante.

En un abierto $U \subseteq M$ con coordenadas $\{q_1, \dots, q_n\}$ una curva $\gamma(t) = (q_1 \circ \gamma(t), \dots, q_n \circ \gamma(t)) \equiv (q_1(t), \dots, q_n(t))$ será geodésica si y solo si

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

Proposición 1.2.1. Dada una variedad riemanniana se cumple:

1. Dados $p \in M$ y $v \in T_p M$, existe una única geodésica maximal a la que denotaremos por $\gamma_{(p,v)}(t)$, definida en un entorno abierto $I_{(p,v)}$ del origen, cumpliendo que $\gamma_{(p,v)}(0) = p$ y $\dot{\gamma}_{(p,v)}(0) = v$.
2. Propiedad de homogeneidad de las geodésicas: Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ no nulo, se cumple $\gamma_{(p,\lambda v)}(t) = \gamma_{(p,v)}(\lambda t)$ para todo $t \in I_{(p,\lambda v)} = \frac{1}{\lambda} I_{(p,v)} = \{ \frac{t}{\lambda} / t \in I_{(p,v)} \}$

Sea M una variedad riemanniana y $\pi : TM \rightarrow M$ el fibrado tangente a M . Dado $(p, v) \in TM$ se define la aplicación $\tau_t(p, v) : I_{(p,v)} \rightarrow TM$ como $\tau_t : (p, v) = (\gamma_{(p,v)}(t), \dot{\gamma}_{(p,v)}(t))$. Claramente $\tau_0(p, v) = (p, v)$ y $\tau_t(\tau_s(p, v)) = \tau_{t+s}(p, v)$ donde tenga sentido.

Proposición 1.2.2. Existe un único campo $\xi^G \in \mathfrak{X}(TM)$, cumpliendo que si $\tilde{\gamma}_{(p,v)}(t)$ es la curva integral de ξ^G que para $t = 0$ pasa por (p, v) , entonces $\gamma_{(p,v)}(t) = \pi \circ \tilde{\gamma}_{(p,v)}(t)$.

Definición 1.2.2. A ξ^G se le llama campo geodésico asociado a la variedad (M, g) y su flujo se denomina flujo geodésico.

En coordenadas fibradas, $\xi^G = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_j (\Gamma_{ij}^k \circ \pi) \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$.

Dado $(p, v) \in TM$, existen $\varepsilon > 0$ y un entorno W de (p, v) tales que la aplicación $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \rightarrow TM$ definida por $(t, (q, w)) \mapsto \tau_t(q, w) = \tilde{\gamma}_{(q,w)}(t)$, es diferenciable, donde $\tilde{\gamma}_{(q,w)} : I_{(q,w)} \rightarrow TM$ es la curva integral maximal de ξ^G con $\tilde{\gamma}_{(q,w)}(0) = (q, w)$. Si denotamos $\mathcal{A}_{t_0} = \{(p, v) \in TM / t_0 \in I_{(p,v)}\}$ se tiene

Definición 1.2.3. Se llama *exponencial riemanniana* de M a la aplicación

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{A}_1 &\longrightarrow M \\ (p, v) &\longmapsto \gamma_{(p,v)}(1) \end{aligned}$$

y para cada $p \in M$, se define $\exp_p : \mathcal{A}_1 \cap T_p M \rightarrow M$, mediante $\exp_p(v) = \exp(p, v)$

Proposición 1.2.3. Para todo punto $p \in M$, $(\exp_p)_{*,0} = Id_{T_p M}$.

De aquí se deduce que para cualquier $p \in M$ existe un entorno abierto, V_0 , de 0 en $T_p M$ y un entorno abierto, U_p , de p en M , de modo que $\exp_p : V_0 \rightarrow U_p$ es difeomorfismo.

Definición 1.2.4. Se dice que la variedad riemanniana (M, g) es *geodésicamente completa* si para cualesquiera $p \in M$ y $v \in T_p M$ la geodésica $\gamma_{(p,v)}(t)$ está definida para todo t , es decir, $I_{(p,v)} = \mathbb{R}$

Teorema 1.2.1 (de Hopf-Rinow). Una variedad riemanniana conexa es geodésicamente completa si y solo si es completa como espacio métrico

1.3. Campos de Jacobi en variedades riemannianas

Para estudiar el efecto de la curvatura cerca de las geodésicas se pueden considerar variaciones por geodésicas y estudiar su campo variacional que denominaremos campo de Jacobi.

Definición 1.3.1. Dada una geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ en (M, g) se dice que $J \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$ es un campo de Jacobi si satisface la denominada ecuación de Jacobi:

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R_{\nabla}(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$$

Si $\{U_1(t), \dots, U_n(t)\}$ es una referencia ortonormal (local) de campos paralelos a lo largo de $\gamma(t)$ y $J(t) = \sum_i f_i(t)U_i(t)$, $\dot{\gamma}(t) = \sum_j v_j(t)U_j(t)$, entonces la ecuación de Jacobi equivale al sistema de ecuaciones diferenciales

$$f_h(t) + \sum_{i,j,k} f_i(t)v_j(t)v_k(t)R_{ijk}^h(t) = 0 \quad h = 1, \dots, n$$

donde $R_{\nabla}(U_i, U_j)U_k = \sum_h R_{ijk}^h(t)U_h$

Proposición 1.3.1. Dados $v, w \in T_{\gamma(a)}M$, existe un único campo de Jacobi $J \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$ satisfaciendo las condiciones $J(a) = v$ y $\frac{DJ}{dt}(a) = w$.

Corolario 1.3.1. $Jac(\gamma(t)) := \{J \in \mathfrak{X}(\gamma(t)) / J \text{ es de Jacobi}\}$ es un espacio vectorial real de dimensión $2n$.

El subespacio de los campos de Jacobi tangentes a $\gamma(t)$ está generado por los campos $J_1(t) = \dot{\gamma}(t)$ y $J_2(t) = t\dot{\gamma}(t)$.

Definición 1.3.2. Una variación geodésica de una curva geodésica riemanniana $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \delta : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longmapsto \delta(t, s) \equiv \gamma_s(t) \equiv \gamma^t(s) \end{aligned}$$

tal que $\delta(t, 0) = \gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ y, $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, las curvas $\gamma_s(t)$ son también geodésicas. Dado $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la curva $\gamma_s(t)$ se denomina curva principal y dado $t \in [a, b]$, la curva $\gamma^t(s)$ se denomina curva transversal. Además diremos que la variación es propia si $\gamma_s(a) = \gamma(a)$ y $\gamma_s(b) = \gamma(b) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Dada una variación geodésica $\delta : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ de una curva geodésica $\gamma(t)$, se definen los campos vectoriales T y S como los campos de velocidades de las curvas principales, $\gamma_s(t)$, y transversales, $\gamma^t(s)$, respectivamente.

$$T(t, s) = \delta_{*,(t,s)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,s)} \right) = \frac{d\gamma_s(t)}{dt} = \dot{\gamma}_s(t) \quad , \quad S(t, s) = \delta_{*,(t,s)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(t,s)} \right) = \frac{d\gamma^t(s)}{ds} = \dot{\gamma}^t(s)$$

Podemos también calcular la derivada covariante a lo largo de las curvas $\gamma_s(t)$ que denotaremos por $\frac{D}{dt}$ y a lo largo de las curvas $\gamma^t(s)$ que denotaremos por $\frac{D}{ds}$

Lema 1.3.1. Se cumple que $\frac{D}{ds}T = \frac{D}{dt}S$.

Definición 1.3.3. Dada una geodésica $\gamma(t)$ en (M, g) y una variación geodésica de la misma, $\delta : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, llamamos campo variacional de δ al campo $V^\delta \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$ dado por

$$V^\delta(t) = S(t, 0) = \dot{\gamma}^t(0) = \frac{d\gamma^t(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \delta_{*,(t,0)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(t,0)} \right)$$

Teorema 1.3.1. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodésica. Un campo $J \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$ es un campo de Jacobi si y solo si es el campo variacional de una variación geodésica a lo largo de $\gamma(t)$.

Proposición 1.3.2. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodésica con $\dot{\gamma}(a) = v \in T_pM$ y sea $J \in \text{Jac}(\gamma)$ tal que $J(a) = 0$. Entonces, $J(t) = (\exp)_{*,(t-a)v} \left((t-a) \frac{DJ}{dt}(a) \right) \quad \forall t \in [a, b]$.

Definición 1.3.4. Dada la geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, el punto $\gamma(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$, se dice conjugado a $\gamma(a)$ a lo largo de γ si existe $J \in \text{Jac}(\gamma)$ no nulo tal que $J(a) = J(t_0) = 0$.

Proposición 1.3.3. El punto $\gamma(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$, es conjugado de $\gamma(a)$ a lo largo de γ si y solo si $v_0 = (t_0 - a)\dot{\gamma}(a)$ es un punto crítico de $\exp_{\gamma(a)}$.

Proposición 1.3.4. Sean $v \in T_{\gamma(a)}M$, $w \in T_{\gamma(b)}M$. Si $\gamma(b)$ no es conjugado a $\gamma(a)$ existe un único campo de Jacobi J a lo largo de $\gamma(t)$ tal que $J(a) = v$, $J(b) = w$.

Capítulo 2

Curvas magnéticas en variedades riemannianas

2.1. Motivación física: movimiento de una partícula cargada dentro de un campo magnético estático

La descripción del movimiento de una partícula material cargada en el espacio euclídeo tridimensional sometida a la fuerza de Lorentz debida a un campo magnético estático es bien conocida y se encuentra recogida en numerosos libros de Física General. Presentamos como motivación algunos aspectos geométricos de dicha formulación.

Un campo magnético estático B en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ viene descrito por un campo vectorial diferenciable de divergencia nula. En coordenadas cartesianas dicho campo se expresa $B = B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ con $B_x, B_y, B_z \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ y siendo su divergencia $div(B) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$. Si $\Omega_3 = dx \wedge dy \wedge dz$ representa el elemento de volumen euclídeo de \mathbb{R}^3 y \times el producto vectorial euclídeo, la información geométrica del campo magnético B se puede codificar en una 2-forma $F \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$F(X, Y) := \Omega_3(X, Y, B) = \langle X \times Y, B \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$$

cuya expresión en cartesianas es $F = B_z dx \wedge dy - B_y dx \wedge dz + B_x dy \wedge dz$. Nótese que dada la 2-forma F anterior, el campo B queda perfectamente determinado de manera única por la expresión anterior. Teniendo en cuenta que $dF = dF\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$ y que en nuestro caso

$$dF\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

vemos que la condición de divergencia nula del campo magnético B es equivalente a que la 2-forma F sea cerrada. Por ello y generalizando estas ideas, a lo largo de esta memoria introduciremos los campos magnéticos en variedades riemannianas bien como campos vectoriales diferenciables de divergencia nula o bien como 2-formas cerradas.

Al campo magnético $B \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ le podemos asociar un endomorfismo antisimétrico $\phi : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, denominado fuerza de Lorentz definido por $\phi(X) = X \times B$. Si $\frac{D}{dt}$ es

el operador de derivación covariante euclídea a lo largo de una curva parametrizada, la trayectoria $\gamma(t)$ de una partícula de masa m y carga eléctrica q dentro de dicho campo magnético se rige por la conocida ecuación de Lorentz

$$m \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = q (\dot{\gamma}(t) \times B(t)) = q\phi(\dot{\gamma}(t))$$

siendo $\dot{\gamma}(t) = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)$ el campo velocidad de la curva, $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}$ el campo aceleración y $B(t)$ la restricción del campo magnético B a dicha curva. En coordenadas cartesianas, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ debe satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y) \\ m\ddot{y} &= q(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z) \\ m\ddot{z} &= q(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x) \end{aligned}$$

Fijadas las condiciones iniciales $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\dot{\gamma}(0) = (v_x^0, v_y^0, v_z^0)$, en un cierto intervalo este sistema tiene solución única. En la literatura matemática estas soluciones se denominan curvas magnéticas asociadas al campo magnético B .

Ejemplo 2.1.1. Para mostrar algunas de estas afirmaciones determinemos la curva magnética asociada al campo $B = -b\frac{\partial}{\partial z}$ que en $t = 0$ pasa por $\gamma(0) = (x_0, 0, 0)$ con velocidad $\dot{\gamma}(0) = (0, v, 0)$. En este caso las ecuaciones de Lorentz son

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -qby(t) \\ m\ddot{y}(t) &= qbx(t) \\ m\ddot{z}(t) &= 0 \end{aligned}$$

que son fácilmente integrables. Si denotamos por $\omega := \frac{qB}{m}$ a la denominada *frecuencia ciclotrón*, la curva magnética buscada es

$$\gamma(t) = (v \cos(\omega t) + (x_0 - v/\omega), v \sin(\omega t), 0)$$

que claramente corresponde a una circunferencia en el plano XY con velocidad de módulo constante $\|\dot{\gamma}(t)\| = v$.

Si variamos la velocidad inicial $\dot{\gamma}(0)$ de la partícula de manera que ya no sea tangente al plano XY , por ejemplo tomando $\dot{\gamma}(0) = (0, v, w)$, e integrando las ecuaciones anteriores con las nuevas condiciones iniciales resulta la curva magnética $\gamma(t) = (v \cos(\omega t) + (x_0 - v/\omega), v \sin(\omega t), wt)$ que ya no es una circunferencia sino una hélice cilíndrica.

Por último si variamos la velocidad inicial de modo que sea tangente al campo magnético en $\gamma(0)$ (en tal caso, la fuerza de Lorentz en dicho punto es nula), por ejemplo tomando $\dot{\gamma}(0) = (0, 0, v)$, es trivial comprobar que la solución de las ecuaciones es una recta con velocidad constante, $\gamma(t) = (x_0, 0, vt)$, y por tanto una geodésica euclídea.

2.2. Curvas magnéticas en variedades riemannianas

En esta sección pretendemos generalizar la formulación euclídea anterior del campo magnético y de la fuerza de Lorentz a variedades riemannianas arbitrarias. Dado que el producto vectorial solo se puede definir en variedades riemannianas tridimensionales introduciremos la noción de campo magnético a través de 2-formas cerradas.

Definición 2.2.1. Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión $n \geq 2$. Llamaremos campo magnético en dicha variedad a toda 2-forma diferenciable, $F \in \Lambda^2(M)$, cerrada.

Definición 2.2.2. Un campo magnético F sobre (M, g) se dice uniforme si es covariantemente constante, $\nabla F = 0$, o equivalentemente, $D^\nabla F = 0 \quad \forall D \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación 2.2.1. Si ∇ es la conexión de Levi-Civita asociada a la variedad riemanniana (M, g) , la condición de ser cerrada $dF = 0$ es equivalente a

$$0 = dF(X, Y, Z) = (X^\nabla F)(Y, Z) - (Y^\nabla F)(X, Z) + (Z^\nabla F)(X, Y)$$

para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. De donde se deduce que si \bar{F} es una 2-forma arbitraria tal que $\nabla \bar{F} = 0$, entonces \bar{F} es un campo magnético.

Ejemplo 2.2.1. Toda 1-forma diferenciable $A \in \Lambda^1(M)$ define un campo magnético mediante $F = dA$. En tal caso se dice que A es un *potencial magnético o gauge* del campo magnético F . Nótese que dicho potencial no es único, pues para cualquier $f \in C^\infty(M)$, $A' = A + df$ es otro potencial magnético de F .

Ejemplo 2.2.2. Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial en la variedad riemanniana (M, g) y denotemos por $\omega_V = i_V g \in \Lambda^1(M)$ a su transformado por la polaridad riemanniana. Entonces, la 2-forma $d\omega_V$ es un campo magnético denominado *campo magnético rotacional* asociado a V . Se tiene que

$$\begin{aligned} d\omega_V(X, Y) &= X(\omega_V(Y)) - Y(\omega_V(X)) - \omega_V([X, Y]) = \\ &= X \langle V, Y \rangle - Y \langle V, X \rangle - \langle V, X^\nabla Y \rangle + \langle V, Y^\nabla X \rangle = \\ &= \langle X^\nabla V, Y \rangle - \langle Y^\nabla V, X \rangle \end{aligned}$$

ya que la conexión de Levi-Civita ∇ no tiene torsión y deriva el producto riemanniano. En este caso ω_V es un potencial magnético del campo magnético rotacional.

Ejemplo 2.2.3. Sea (M, g) una variedad tridimensional y $V \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial con $\text{div} V = 0$. Entonces la 2-forma $F \in \Lambda^2(M)$ definida por

$$F(X, Y) = \langle X, Y \times V \rangle$$

siendo \times el producto vectorial de campos vectoriales en (M, g) es un campo magnético. En efecto, $F(X, Y) = \langle X, Y \times V \rangle = \Omega_g(X, Y, V) = \Omega_g(V, X, Y) = i_V \Omega_g(X, Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, de donde se sigue que $F = i_V \Omega_g$ y por tanto,

$$dF = d(i_V \Omega_g) = d(i_V \Omega_g) + i_V d\Omega_g = V^L \Omega_g = (\text{div} V) \Omega_g = 0$$

Consideremos ahora el caso particular en el que este campo magnético viene dado por un potencial magnético $A = \omega_D \in \Lambda^1(M)$, esto es, $F = dA = d\omega_D$. De la definición de rotacional es inmediato que $F = d\omega_D = i_{\text{rot} D} \Omega_g$ y por tanto el campo vectorial con divergencia nula V antes considerado es el campo $\text{rot} D$. Es claro entonces que dar un campo vectorial $V = \text{rot} D$ es equivalente a dar un campo magnético $F = d\omega_D$.

Definición 2.2.3. Llamaremos fuerza de Lorentz asociada a un campo magnético F en (M, g) al campo tensorial $\phi \in T_1^1(M)$ definido por

$$\langle X, \phi(Y) \rangle = F(X, Y)$$

Dado que trivialmente $\langle X, \phi(Y) \rangle = F(X, Y) = -F(Y, X) = -\langle Y, \phi(X) \rangle$ se tiene el siguiente resultado

Proposición 2.2.1. El endomorfismo fuerza de Lorentz ϕ es antisimétrico respecto de la métrica riemanniana, esto es,

$$\langle X, \phi(Y) \rangle + \langle Y, \phi(X) \rangle = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

y en particular $\langle X, \phi(X) \rangle = 0$

Observación 2.2.2. El endomorfismo antisimétrico ϕ es el endomorfismo asociado a la pareja de tensores (g, F) . Entonces, dar F es métricamente equivalente a dar ϕ , y como consecuencia podemos considerar ϕ en lugar de F sin pérdida de información.

Dado un abierto $U \subseteq M$ coordinado por $\{q_1, \dots, q_n\}$ tal que localmente $g = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i \otimes dq_j$ y $F = \sum_{r < s} F_{rs} dq_r \wedge dq_s$ es trivial comprobar que

$$\phi = \sum_{r,k=1}^n \phi_{rk} dq_r \otimes \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{r,k,s=1}^n g^{sk} F_{sr} dq_r \otimes \frac{\partial}{\partial q_k}$$

Proposición 2.2.2. F es un campo magnético uniforme en (M, g) si y solo si $\nabla \phi = 0$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} (D^\nabla F)(X, Y) &= D(F(X, Y)) - F(D^\nabla X, Y) - F(X, D^\nabla Y) = \\ &= D \langle X, \phi(Y) \rangle - \langle D^\nabla X, \phi(Y) \rangle - \langle X, \phi(D^\nabla Y) \rangle = \\ &= \langle X, D^\nabla \phi(Y) \rangle + \langle D^\nabla X, \phi(Y) \rangle - \langle D^\nabla X, \phi(Y) \rangle - \\ &\quad - \langle X, \phi(D^\nabla Y) \rangle = \langle X, D^\nabla \phi(Y) - \phi(D^\nabla Y) \rangle = \\ &= \langle X, (D^\nabla \phi)(Y) \rangle \end{aligned}$$

Luego $D^\nabla F = 0$ si y solo si $D^\nabla \phi = 0$ por ser la métrica g no degenerada. \square

Definición 2.2.4. Una curva parametrizada $\gamma(t)$ en M se dice que es una curva magnética con respecto al campo magnético F , si es solución de la ecuación diferencial (ecuación de Lorentz)

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = \phi(\dot{\gamma}(t))$$

con $\dot{\gamma} = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)$ el campo tangente a dicha curva.

En un abierto $U \subseteq M$ con coordenadas $\{q_1, \dots, q_n\}$ una curva $\gamma(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ será magnética si y solo si es solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 q_k(t)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(t) \frac{dq_i(t)}{dt} \frac{dq_j(t)}{dt} = \sum_{r=1}^n \phi_{rk} \frac{dq_r(t)}{dt} \quad k = 1, \dots, n$$

Como consecuencia por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para los sistemas de ecuaciones diferenciales, para cada $p \in M$ y $v \in T_p M$, existe una única curva magnética maximal $\gamma : (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$.

Observación 2.2.3. Es claro que cuando el campo magnético es nulo la fuerza de Lorentz sobre la partícula es nula, esto es $\phi(\dot{\gamma}) = 0$. Entonces, las soluciones de la ecuación $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \phi(\dot{\gamma}) = 0$ corresponden a geodésicas de la variedad riemanniana. En este sentido el flujo magnético representa una generalización del flujo geodésico riemanniano. Sin embargo, hay algunas diferencias importantes entre ambos flujos. Sabemos que el sistema de ecuaciones diferenciales satisfecho por las geodésicas verifica la denominada propiedad de homogeneidad $\gamma_{(p,\lambda v)}(t) = \gamma_{(p,v)}(\lambda t)$. Las curvas magnéticas en general no satisfacen esta propiedad de homogeneidad. Si $\gamma(t)$ es la curva magnética en la variedad (M, g) asociada al campo magnético F , entonces la curva $\beta(t) = \gamma(\lambda t)$ será una curva magnética sobre (M, g) , pero asociada a al campo magnético λF ya que $\frac{D\dot{\beta}}{dt}(t) = \lambda\phi(\dot{\beta}(t))$. Como consecuencia tenemos que si F un campo magnético no trivial en (M, g) , entonces no existe ninguna conexión afín en M cuyas geodésicas sean las curvas magnéticas de (M, g, F) .

Proposición 2.2.3. *Dada una curva magnética $\gamma(t)$ sobre la variedad riemanniana (M, g) asociada a un campo magnético F , se verifica que $\|\dot{\gamma}(t)\| = v = cte$, y por tanto, también es constante su energía en cualquier intervalo cerrado*

Demostración. Como ϕ es un endomorfismo antisimétrico, $\langle \phi(\dot{\gamma}(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$, es decir, $\langle \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$, con lo que $\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$. \square

Definición 2.2.5. *Se dice que una curva magnética es normal si $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$.*

Dados dos puntos $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ de una una curva magnética con $\|\dot{\gamma}(t)\| = v$, se tiene que

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = v(t_2 - t_1)$$

En [5] se pueden encontrar los siguientes resultados, que determinan bajo que condiciones hay completitud.

Proposición 2.2.4. *Sea $\gamma(t)$ una curva magnética maximal de (M, g, F) tal que para cada intervalo finito (a, b) en su dominio, $\gamma(a, b)$ está contenida en un subconjunto compacto de M . Entonces γ es completa.*

Por tanto, si M es compacta toda curva magnética maximal es completa.

Recordemos que una variedad riemanniana (M, g) es completa para la distancia asociada a la métrica g si dados $p \in M$ y $v \in T_p M$, la geodésica $\gamma_{(p,v)}(t)$ está definida en todo \mathbb{R} . En esta situación se tiene

Proposición 2.2.5. *Si la variedad (M, g) es completa entonces las curvas magnéticas de (M, g, F) son completas.*

2.3. Curvas magnéticas en variedades riemannianas bidimensionales

En esta sección vamos a estudiar las curvas magnéticas en una variedad riemanniana orientada bidimensional (S, g) , que puede ser considerada como una superficie de Riemann orientada. En esta situación el campo magnético F será proporcional al elemento

de área riemanniano de la superficie mientras que la fuerza de Lorentz será proporcional a la estructura compleja de la misma.

Sea Ω_g el elemento de área de la variedad riemanniana bidimensional (S, g) y sea $J \in T_1^1(S)$ el endomorfismo antisimétrico definido por

$$\Omega_g(X, Y) = \langle X, J(Y) \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(S)$$

Claramente J es ortogonal para la métrica g pues si $\{D_1, D_2\}$ es una base ortonormal (local) de campos vectoriales tal que $\Omega_g(D_1, D_2) = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} J(D_1) &= \langle D_1, J(D_1) \rangle D_1 + \langle D_2, J(D_1) \rangle D_2 = \Omega_g(D_2, D_1) D_2 = -D_2 \\ J(D_2) &= \langle D_1, J(D_2) \rangle D_1 + \langle D_2, J(D_2) \rangle D_2 = \Omega_g(D_1, D_2) D_1 = D_1 \end{aligned}$$

En forma matricial, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ que representa la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido antihorario en el espacio tangente en cada punto. De hecho, J es la estructura compleja de (S, g) como superficie de Riemann, ya que $J^2 = -Id_S$.

Observación 2.3.1. Supongamos que (S, g) es una superficie regular orientada del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 y sea η el campo vectorial unitario a lo largo de S perpendicular a la misma, nótese que entonces $J(X) = X \times \eta$. además si Ω_3 es el elemento de volumen euclídeo, se tiene que sobre la superficie $\Omega_g(X, Y) = \Omega_3(X, Y, \eta) = \langle X, Y \times \eta \rangle$. En particular, dada una curva parametrizada regular $\gamma(t)$ sobre la superficie, si $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}$ es la aceleración de la curva como curva de S y $\ddot{\gamma}$ denota la aceleración de la curva como curva de \mathbb{R}^3 , teniendo en cuenta la fórmula de Gauss $\ddot{\gamma}(t) = \frac{D\dot{\gamma}}{dt} + \langle \ddot{\gamma}, \eta \rangle \eta$, se cumple

$$\Omega_3(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}, \eta) = \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \times \eta \rangle = \langle \frac{D\dot{\gamma}}{dt} + \langle \ddot{\gamma}, \eta \rangle \eta, \dot{\gamma} \times \eta \rangle = \langle \frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma} \times \eta \rangle = \Omega_g\left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma}\right)$$

Al estar en una variedad bidimensional toda 2-forma $F \in \Lambda^2(S)$ es cerrada y por tanto un campo magnético. Además se cumple que $F = f\Omega_g$ para alguna $f \in C^\infty(S)$ que denominaremos *intensidad del campo magnético*. La fuerza de Lorentz asociada a F será entonces $\phi = f \cdot J$ pues $F(X, Y) = \langle X, fJ(Y) \rangle = \langle X, \phi(Y) \rangle$. Los campos uniformes serán aquellos para los que $f = \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ pues $D^\nabla(\mu\Omega) = 0, \forall D \in \mathfrak{X}(S)$

Definición 2.3.1. Una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow S$ se dice magnética si verifica la ecuación de Lorentz

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = f(t)J(\dot{\gamma}(t))$$

El siguiente resultado nos da una caracterización de dichas curvas.

Teorema 2.3.1. Una curva parametrizada $\gamma(t)$ es una curva magnética asociada al campo $F = f\Omega_g$ si y solo si $\|\dot{\gamma}\|^2 = c^2$ y $\Omega_g\left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma}\right) = fc^2$ con $c \neq 0$.

Demostración. Supongamos que γ es magnética, es decir, $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = fJ(\dot{\gamma})$ y $\|\dot{\gamma}\| = c$. Entonces,

$$\Omega_g\left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma}\right) = \langle fJ(\dot{\gamma}), J(\dot{\gamma}) \rangle = f \langle J(\dot{\gamma}), J(\dot{\gamma}) \rangle = f \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = f \|\dot{\gamma}\|^2 = fc^2$$

donde en el tercer paso hemos usado que J es una rotación.

Probemos el recíproco. Supongamos que $\|\dot{\gamma}\|^2 = c^2$, entonces $\langle \dot{\gamma}, \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \rangle = 0$. Luego $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = aJ(\dot{\gamma})$ y se tiene que

$$fc^2 = \Omega_g(aJ(\dot{\gamma}), \dot{\gamma}) = a \langle J(\dot{\gamma}), J(\dot{\gamma}) \rangle = a \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = ac^2$$

Por tanto, $a = f$ y $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = fJ(\dot{\gamma})$, de donde resulta que γ es magnética. \square

Sea X un campo vectorial unitario sobre S , es obvio que $\{X, JX\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{X}(S)$. Por tanto, dada una curva magnética $\gamma(s)$ parametrizada por la longitud de arco, su diedro de Frenet vendrá dado por $\{T(s) = \dot{\gamma}(s), N(s) = J(\dot{\gamma}(s))\}$ y sus ecuaciones de Frenet son $\frac{DT}{ds} = \kappa N$ y $\frac{DN}{ds} = -\kappa T$ con $\kappa = \langle \frac{DT}{ds}, N \rangle$ la curvatura de $\gamma(s)$. Por la ecuación de Lorentz $\frac{D\dot{\gamma}}{ds} = \phi(\dot{\gamma}) = \phi(T) = fJ(T)$ y por otro lado, $\frac{D\dot{\gamma}}{ds} = \frac{DT}{ds} = \kappa N = \kappa J(T)$ de donde se deduce que la curvatura κ coincide con la intensidad del campo magnético a lo largo de las curvas normales. Por tanto, la fuerza de Lorentz sobre dicha curva vendrá dada por $\phi \equiv \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}$.

Proposición 2.3.1. *La curvatura de las trayectorias magnéticas en (S, g) viene dada por $\kappa(t) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} f(\gamma(t))$. Por tanto, la curvatura de las curvas magnéticas normales determina por completo la fuerza de Lorentz, siendo $f = \kappa$ a lo largo de dichas curvas.*

Demostración. Se realizan los mismos pasos que antes, pero teniendo en cuenta que el diedro de Frenet ahora es $\{T = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|}\dot{\gamma}, N = JT\}$ y que las ecuaciones de Frenet son $\frac{DT}{ds} = \|\dot{\gamma}\| \kappa N$ y $\frac{DN}{ds} = -\|\dot{\gamma}\| \kappa T$. \square

Corolario 2.3.1. *Sea $F = \mu\Omega_g$ un campo magnético uniforme en (S, g) . Una curva parametrizada $\gamma(t)$ en S es una curva magnética normal de F si y solo si $\kappa = \mu$.*

Ejemplo 2.3.1. Superficie de revolución

Sea S la superficie de revolución definida por la parametrización $\varphi(u, v)$ dada por

$$\begin{cases} x(u, v) = f(u) \cos v \\ y(u, v) = f(u) \sen v \\ z(u, v) = g(u) \end{cases}$$

con $f(u), g(u)$ funciones diferenciables y con $f > 0$. Los símbolos de Christoffel de la conexión son

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -f(u)f'(u), \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{f'(u)}{f(u)}$$

y toda curva $\beta(t) = \varphi(u(t), v(t)) \in S$ verifica

$$\frac{D\dot{\beta}}{dt} = (u'' - f(u)f'(u)(v')^2) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + (v'' + 2\frac{f'(u)}{f(u)}u'v') \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

Sea $\sigma(t) = \varphi(u_0, v(t))$ un paralelo de S , se tiene que $\frac{D\dot{\sigma}}{dt}(t) = -f(u_0)f'(u_0)v'(t)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t)$. Si además $\sigma(t)$ es normal, $1 = \langle \dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t) \rangle = f(u_0)^2 v'(t)^2$, llegando a que

$$\frac{D\dot{\sigma}}{dt}(t) = -\frac{f'(u_0)}{f(u_0)} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t)$$

Con lo que el paralelo σ tiene curvatura constante $\kappa^2(u_0) = \|\frac{D\dot{\sigma}}{dt}\|^2 = \frac{f'(u_0)^2}{f(u_0)^2}$. Por tanto, $\sigma(t)$ es una curva magnética de S respecto del campo magnético uniforme $F = \kappa(u_0)\Omega_g$.

2.3.1. Curvas magnéticas normales en superficies de curvatura seccional constante

Nuestro objetivo es analizar las curvas magnéticas normales respecto de campos magnéticos uniformes en superficies riemannianas de curvatura seccional constante $K = K_0$. Veamos antes algunos ejemplos donde parametrizaremos las curvas por la longitud de arco.

Ejemplo 2.3.2. Plano euclídeo. Caso $K_0 = 0$

Sea $S = \mathbb{R}^2$ y $F = \mu\Omega_g = \mu dx \wedge dy$ con $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Probaremos que las curvas magnéticas normales de S son las curvas con curvatura constante igual a $|\mu|$.

Por el teorema (2.3.1), $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ es magnética si y solo si $\|\dot{\gamma}\|^2 = 1$ y $\Omega_g(\frac{D\dot{\gamma}}{ds}, \dot{\gamma}) = \mu$.

Por otro lado, la ecuación de Lorentz $\frac{D\dot{\gamma}}{ds} = \mu J(\dot{\gamma})$ nos da el sistema

$$\ddot{x} = \mu \dot{y} \quad \ddot{y} = -\mu \dot{x}$$

Teniendo en cuenta que $\|\dot{\gamma}\|^2 = 1$, $\dot{\gamma}(s) = (\text{sen}(\theta(s)), \text{cos}(\theta(s)))$. Además,

$$\mu = \Omega_g\left(\frac{D\dot{\gamma}}{ds}, \dot{\gamma}\right) = \Omega_g\left(\dot{\theta} \text{cos}(\theta) \frac{\partial}{\partial x} - \dot{\theta} \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial y}, \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + \text{cos}(\theta) \frac{\partial}{\partial y}\right) = \dot{\theta} \Rightarrow \theta(s) = \mu s + \theta_0$$

con $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Luego $\dot{\gamma}(s) = (\text{cos}(\mu s + \theta_0), \text{sen}(\mu s + \theta_0))$, y por tanto,

$$\gamma(s) = \left(x_0 + \frac{1}{\mu} \text{sen}(\mu s + \theta_0), y_0 - \frac{1}{\mu} \text{cos}(\mu s + \theta_0)\right)$$

Es decir, $\gamma(s)$ es un arco de circunferencia centrada en (x_0, y_0) de radio $\frac{1}{|\mu|}$.

Ejemplo 2.3.3. Esfera. Caso $K_0 > 0$

Sea $S = S^2(R)$ y $F = \mu\Omega_g$. Vamos a probar que las curvas magnéticas de (S, F) son circunferencias de radio $r < R$.

Sea $\gamma(s)$ un paralelo de S parametrizado por la longitud de arco.

$$\gamma(s) = \left(r \text{cos}\left(\frac{s}{r}\right), r \text{sen}\left(\frac{s}{r}\right), h\right)$$

con $h^2 = R^2 - r^2$. El campo unitario normal exterior a S en el punto $\gamma(s)$ es $\eta(s) = \frac{\gamma(s)}{R}$.

Se tiene que $\dot{\gamma}(s) = (-\text{sen}(s/r), \text{cos}(s/r), 0)$ y que $\ddot{\gamma}(s) = \frac{1}{r}(-\text{cos}(s/r), -\text{sen}(s/r), 0)$.

Utilizando de nuevo el teorema (2.3.1)

$$\Omega_g\left(\frac{D\dot{\gamma}}{ds}, \dot{\gamma}\right) = \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \times \eta \rangle = \begin{vmatrix} -\frac{1}{r} \text{cos}(s/r) & -\frac{1}{r} \text{sen}(s/r) & 0 \\ -\text{sen}(s/r) & \text{cos}(s/r) & 0 \\ \frac{r}{R} \text{cos}(s/r) & \frac{r}{R} \text{sen}(s/r) & \frac{h}{R} \end{vmatrix} = \frac{h}{Rr}$$

Por tanto, si $\mu = \frac{h}{Rr} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}$, las curvas magnéticas son circunferencias de radio $r = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \mu^2}}$.

Veamos que no hay más. Sea $\gamma(s)$ una curva magnética de $(S^2, F = \mu\Omega)$ con $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ y sea $\sigma(s)$ el paralelo de S dado por $S \cap \pi$, donde π es el plano paralelo a v que pasa por p . El radio del paralelo σ es $r = R/\sqrt{1 + R^2 \mu^2}$, luego, por lo visto antes, es una curva magnética verificando que $\sigma(0) = p$ y $\dot{\sigma}(0) = v$. Por la unicidad de las curvas magnéticas fijadas las condiciones iniciales se concluye.

Ejemplo 2.3.4. Superficie hiperbólica. Caso $K_0 < 0$

Sea $\mathbb{H}(-c) = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{1+2} / -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -c^2, x_0 > 0\}$ la rama superior de un hiperboloide en \mathbb{R}^3 del espacio hiperbólico $(\mathbb{R}^{1+2}, g_{hip} = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2)$. Existen tres situaciones distintas dependiendo de la intensidad del campo magnético de manera que la curva magnética normal con las condiciones iniciales $\gamma(0) = p \in \mathbb{H}(-c)$, $\dot{\gamma}(0) = v \in T_p\mathbb{H}(-c)$ viene dada por (ver [1])

A) Si $|\mu| < \sqrt{c}$,

$$\gamma(t) = \frac{1}{c-\mu^2}(-\mu^2 + c \operatorname{ch}(\sqrt{c-\mu^2}t))p + \frac{1}{\sqrt{c-\mu^2}} \operatorname{sh}(\sqrt{c-\mu^2}t)v + \frac{\mu}{c-\mu^2}(-1 + \operatorname{ch}(\sqrt{c-\mu^2}t))\phi(v)$$

B) Si $|\mu| = \sqrt{c}$,

$$\gamma(t) = (1 + \frac{c}{2}t^2)p + tv + \frac{\sqrt{c}}{2}t^2\phi(v)$$

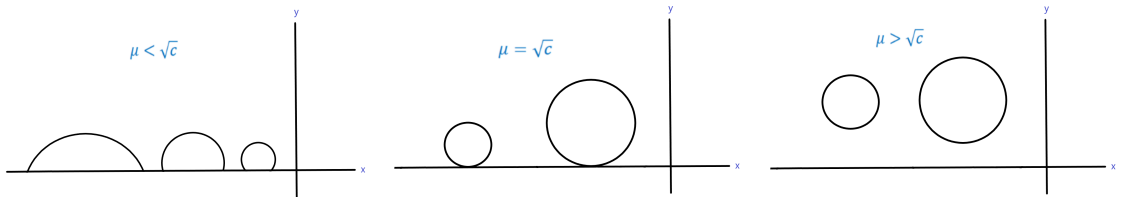
C) Si $|\mu| > \sqrt{c}$,

$$\gamma(t) = \frac{1}{\mu^2-c}(\mu^2 - c \cos(\sqrt{\mu^2-c}t))p + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-c}} \operatorname{sen}(\sqrt{\mu^2-c}t)v + \frac{\mu}{\mu^2-c}(1 - \cos(\sqrt{\mu^2-c}t))\phi(v)$$

En el modelo del plano superior de Poincaré $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ con métrica $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ de curvatura $K_0 = -1$ para el campo magnético uniforme $F = \mu \frac{dx \wedge dy}{y^2}$ se tiene

- A) Si $|\mu| < 1$, las curvas magnéticas son arcos de circunferencia que cortan al eje X con un ángulo distinto de $\frac{\pi}{2}$, ($\pi/2$ para el caso de la curva geodésica), es decir, corta al eje X en 2 puntos. El ángulo de intersección disminuye según aumenta $|\mu|$.
- B) Si $|\mu| = 1$, las curvas magnéticas son circunferencias tangentes al eje horizontal, denominadas *horociclos* (ver [9])
- C) Si $|\mu| > 1$, tenemos circunferencias de radio finito que no cortan al eje X

Figura 2.1: Curvas magnéticas debidas a un campo uniforme en el plano de hiperbólico



Como consecuencia de estos resultados tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.3.2. Sea $F = \mu\Omega_g$, $\mu \neq 0$, un campo magnético uniforme en una superficie completa orientada, simplemente conexa (S, g) con curvatura constante K_0 .

1) Si $K_0 = 0$, (S, g) es isométrica al plano euclídeo \mathbb{R}^2 y las curvas magnéticas de F son circunferencias de radio $\frac{1}{|\mu|}$.

2) Si $K_0 > 0$, (S, g) es isométrica a una 2-esfera, $S^2(R)$, de radio $R = \frac{1}{\sqrt{K_0}}$ y las curvas magnéticas de F son circunferencias geodésicas (planas) de radio $r = \frac{R}{\sqrt{1+R^2\mu^2}} < R$.

Como consecuencia ningún círculo máximo de $S^2(R)$ (que son las geodésicas de $S^2(R)$) puede ser una curva magnética de $F = \mu\Omega_g$

- 3) Si $K_0 < 0$, (S, g) es isométrica al semiplano superior de Poincaré $\mathbb{H}(-c)$, con $c = -K_0$, entonces:
- A) Si $|\mu| > \sqrt{c}$, las trayectorias son circunferencias geodésicas.
- B) Si $|\mu| < \sqrt{c}$, las curvas magnéticas de F son curvas no cerradas que cortan al eje X
- C) Si $|\mu| = \sqrt{c}$, las curvas magnéticas son circunferencias tangentes al eje X .

2.4. Curvas magnéticas en variedades riemannianas tridimensionales

Sea (M, g) una variedad riemanniana tridimensional orientada por el elemento de volumen riemanniano Ω_g . Utilizando el operador estrella de Hodge, a cada 2-forma $F \in \Lambda^2(M)$ le podemos asociar la 1-forma $\omega = *F \in \Lambda^1(M)$. Como la métrica g es no degenerada, existe un único campo V tal que $i_V g = \omega$. Se tiene entonces el isomorfismo de C^∞ -módulos

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Lambda^2(M) \\ V &\longrightarrow *(i_V g) = i_V \Omega_g = F \end{aligned}$$

Observación 2.4.1. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, recordemos que su producto vectorial riemanniano se define como el campo $X \times Y$ tal que $\langle D, X \times Y \rangle = \Omega_g(D, X, Y) \forall D \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, es fácil ver que $F(X, Y) = \Omega_g(V, X, Y) = \Omega_g(X, Y, V) = \langle X, Y \times V \rangle$

Proposición 2.4.1. Dar un campo magnético F en una variedad riemanniana tridimensional (M, g) es equivalente a dar un campo vectorial V sobre la misma con divergencia nula.

Demostración. Como vimos en el ejemplo 2.2.3, $(\operatorname{div} V)\Omega_g = V^L \Omega_g = d(i_V \Omega_g) = dF$. Por tanto, $\operatorname{div} V = 0 \Leftrightarrow dF = 0$. \square

Observación 2.4.2. Dado que $V^L \Omega_g = (\operatorname{div} V)\Omega_g = 0$ es fácil ver que el elemento de volumen Ω_g es siempre invariante por el flujo uniparamétrico del campo V magnético.

Proposición 2.4.2. Un campo magnético $F \in \Lambda^2(M)$ es uniforme si y solo si su campo vectorial asociado V es covariantemente constante.

Demostración. Sea V un campo vectorial con $\nabla V = 0$, y sea $F = i_V \Omega_g$. Dado que la cuestión es local consideremos una base ortonormal (local) positivamente orientada $\{U_1, U_2, U_3\}$.

Dado que en dicho abierto $\operatorname{div}(V) = \sum_{i=1}^3 \langle U_i^\nabla V, U_i \rangle = 0$, por la proposición anterior, se tiene que $dF = 0$. Además para todo campo $D \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica que

$$D^\nabla F = D^\nabla [c_1^1(V \otimes \Omega_g)] = c_1^1[D^\nabla V \otimes \Omega_g + V \otimes D^\nabla \Omega_g] = c_1^1[D^\nabla V \otimes \Omega_g] = 0$$

siendo c_1^1 el operador contracción de índices. Luego F es uniforme.

Si ahora F es un campo magnético uniforme en (M, g) y V su campo vectorial asociado, $F = i_V \Omega_g$, se comprueba que

$$0 = (D^\nabla i_V \Omega_g)(X, Y) = C_1^1[D^\nabla V \otimes \Omega_g](X, Y) = \Omega_g(D^\nabla V, X, Y)$$

para cualesquiera $D, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ por lo que $\nabla V = 0$. \square

Teorema 2.4.1. *Dado un campo magnético F en una variedad riemanniana tridimensional (M, g) , la ecuación de Lorentz puede escribirse*

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = \dot{\gamma}(t) \times V(t)$$

siendo V el campo vectorial asociado a F de divergencia nula

Demostración. La fuerza de Lorentz asociada al campo magnético $F = i_V \Omega$ verifica para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\langle X, \phi(Y) \rangle = F(X, Y) = i_V \Omega_g(X, Y) = \Omega_g(V, X, Y) = \Omega_g(X, Y, V) = \langle X, Y \times V \rangle$$

Luego, $\phi(Y) = Y \times V$, y la ecuación de Lorentz queda $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \phi(\dot{\gamma}) = \dot{\gamma} \times V$. \square

Con las notaciones anteriores

Corolario 2.4.1. *Toda curva integral del campo vectorial V que sea geodésica es una curva magnética asociada al campo magnético $F = i_V \Omega_g$. Y viceversa toda curva magnética de $F = i_V \Omega_g$ cuyo campo velocidad sea proporcional al campo V es una geodésica de M .*

Demostración. Si $\gamma(t)$ es una curva integral de V , entonces $\dot{\gamma}(t) = V(t)$, por lo que $\dot{\gamma}(t) \times V(t) = 0$ y si $\gamma(t)$ es geodésica es obvio que verifica la ecuación de Lorentz. Lo mismo ocurre si $\gamma(t)$ y $V(t)$ son proporcionales. \square

Consideremos ahora un campo vectorial magnético $V \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $\gamma(t)$ una curva magnética regular asociada a V . Denotemos por $\{T(t), N(t), B(t)\}$ a su triedro de Frenet y por $\kappa(t)$ y $\tau(t)$ a su curvatura y torsión respectivamente. Teniendo en cuenta que el módulo de la velocidad $\|\dot{\gamma}(t)\| = v$ es constante, las ecuaciones de Frenet sobre dicha curva magnética son

$$\frac{DT}{dt}(t) = v \kappa(t)N(t) \quad \frac{DN}{dt}(t) = -v \kappa(t)T(t) + v \tau(t)B(t) \quad \frac{DB}{dt}(t) = -v \tau(t)N(t)$$

Proposición 2.4.3. *La fuerza de Lorentz ϕ asociada a V sobre la curva magnética $\gamma(t)$ satisface:*

- 1) $\phi(T(t)) = v \kappa(t)N(t)$
- 2) $\phi(N(t)) = -v \kappa(t)T(t) - v \omega(t)B(t)$
- 3) $\phi(B(t)) = v \omega(t)N(t)$

donde $\omega(t)$ es la función $\omega(t) = \frac{1}{v} \langle V(t), T(t) \rangle$ llamada *quasi-pendiente* de la curva.

Demostración. Se basa en la antisimetría de ϕ y las fórmulas de Frenet. \square

Teorema 2.4.2. *Una curva $\gamma(t)$ de velocidad en módulo constante v , es una curva magnética asociada al campo magnético V si y solo si*

$$V_{|\dot{\gamma}(t)} \equiv V(t) = v(\omega(t)T(t) - \kappa(t)B(t))$$

Como consecuencia $V(t)$ se encuentra en el plano rectificante de $\gamma(t)$.

Demostración. Podemos escribir $V = \langle V, T \rangle T + \langle V, N \rangle N + \langle V, B \rangle B$.

Como $\phi(T) = T \times V$, usando el apartado 1) de la proposición anterior, $v\kappa N = T \times V$.

Entonces $0 = \langle T \times V, V \rangle = v\kappa \langle N, V \rangle$ y como $\kappa > 0$, tiene que ser $\langle N, V \rangle = 0$.

Por otro lado, $v\kappa \langle N, N \rangle = \langle T \times V, N \rangle = - \langle T \times N, V \rangle = - \langle B, V \rangle$.

Obtenemos finalmente $V = \langle V, T \rangle T - v\kappa B$.

En el otro sentido es trivial comprobar que si $\gamma(t)$ es una curva con $\|\dot{\gamma}(t)\| = v$ y $V = v(\omega T - \kappa B)$, entonces $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = v^2\kappa N = (vT) \times [v\omega T - v\kappa B] = \dot{\gamma} \times V$. \square

Ejemplo 2.4.1. Utilizando las fórmulas de Frenet se pueden analizar aspectos de las trayectorias magnéticas debidas a campos uniformes en variedades tridimensionales. Recordemos que la curvatura y torsión de una curva parametrizada vienen dadas por

$$\kappa = \frac{\|\dot{\gamma} \times \frac{D\dot{\gamma}}{dt}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}, \quad \tau = \frac{\langle \dot{\gamma} \times \frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \frac{D^2\dot{\gamma}}{dt^2} \rangle}{\|\dot{\gamma} \times \frac{D\dot{\gamma}}{dt}\|^2}$$

Antes de comenzar el estudio observemos que cuando el campo magnético es uniforme hay ciertas cantidades que se conservan a lo largo de cualquiera de sus curvas magnéticas. Sea $V(t)$ la restricción del campo uniforme V sobre una curva magnética $\gamma(t)$. Por ser V uniforme, $\frac{DV}{dt} = 0$, y como consecuencia $\|V\| = cte$. También se cumple que $\|\dot{\gamma}\| = cte$ por ser γ una curva magnética.

Por otro lado, la función $f(t) := \langle \dot{\gamma}(t), V(t) \rangle$ que es el módulo de la proyección ortogonal de la velocidad $\dot{\gamma}(t)$ sobre el campo $V(t)$ es también constante a lo largo de la trayectoria magnética. En efecto,

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, V \rangle = \langle \frac{D\dot{\gamma}}{dt}, V \rangle + \langle \dot{\gamma}, \frac{DV}{dt} \rangle = \langle \dot{\gamma} \times V, V \rangle = 0$$

De donde se deduce que $\|\dot{\gamma}\| \|V\| \cos(\alpha(t)) = cte \Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0$ es constante por serlo $\|\dot{\gamma}\|$ y $\|V\|$, es decir el ángulo que forman V y $\dot{\gamma}$ no varía. Por último veamos que $\|\frac{D^2\dot{\gamma}}{dt^2}\|$ también se conserva

$$\begin{aligned} \frac{D^2\dot{\gamma}}{dt^2} &= \frac{D}{dt}(\dot{\gamma} \times V) = \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \times V + \dot{\gamma} \times \frac{DV}{dt} = \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \times V = (\dot{\gamma} \times V) \times V = \\ &= -V \times (\dot{\gamma} \times V) = - \langle V, V \rangle \dot{\gamma} + \langle V, \dot{\gamma} \rangle V = - \|V\|^2 \dot{\gamma} + fV \end{aligned}$$

Donde hemos usado que $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$. Entonces,

$$\frac{d}{dt} \left\| \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \right\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \rangle = 2 \langle \frac{D^2\dot{\gamma}}{dt^2}, \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \rangle = 2 \langle - \|V\|^2 \dot{\gamma} + fV, \dot{\gamma} \times V \rangle = 0$$

Además usando que $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2$

$$\left\| \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \right\|^2 = \|\dot{\gamma} \times V\|^2 = \|\dot{\gamma}\|^2 \|V\|^2 - \langle \dot{\gamma}, V \rangle^2 = \|\dot{\gamma}\|^2 \|V\|^2 - f^2$$

Ahora ya estamos en disposición de estudiar la curvatura y la torsión de las diferentes trayectorias

- Si $\dot{\gamma} \times V = 0 \Rightarrow \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0 \Rightarrow \gamma$ es una geodésica de la variedad

- Supongamos que $\gamma \times V \neq 0$ y $f(t) \neq 0$. Entonces

$$\dot{\gamma} \times \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \dot{\gamma} \times (\dot{\gamma} \times V) = \langle \dot{\gamma}, V \rangle \dot{\gamma} - \|\dot{\gamma}\|^2 V = f\dot{\gamma} - \|\dot{\gamma}\|^2 V$$

De donde se deduce que $\langle \dot{\gamma} \times \frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \frac{D^2\dot{\gamma}}{dt^2} \rangle = -f \left\| \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \right\|^2$. Por otra parte,

$$\left\| \dot{\gamma} \times \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \right\| = \|\dot{\gamma}\| \left\| \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \right\| = \|\dot{\gamma}\| \sqrt{\|\dot{\gamma}\|^2 \|V\|^2 - f^2}$$

Con estas expresiones la curvatura y la torsión de las curvas magnéticas son constantes

$$\kappa = \frac{\sqrt{\|\dot{\gamma}\|^2 \|V\|^2 - f^2}}{\|\dot{\gamma}\|^2} \quad ; \quad \tau = \frac{-f}{\|\dot{\gamma}\|^2}$$

Por tanto, $\frac{\kappa}{\tau} = -\frac{\sqrt{\|\dot{\gamma}\|^2 \|V\|^2 - f^2}}{f}$ es constante. En el caso euclídeo, $\gamma(t)$ es una hélice cilíndrica.

- Supongamos que $\gamma \times V \neq 0$ y $f(t) = 0$. Entonces, $\frac{D^2\dot{\gamma}}{dt^2}$ es proporcional a $\dot{\gamma}$, por lo que la torsión $\tau = 0$ y la curvatura es constante y vale $\kappa = \frac{\|V\|}{\|\dot{\gamma}\|}$. Luego, en el caso euclídeo γ es una circunferencia de radio $R = \frac{\|\dot{\gamma}\|}{\|V\|}$.

Ejemplo 2.4.2. Usando las herramientas antes vistas vamos a calcular las trayectorias magnéticas en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 asociadas a un campo vectorial paralelo al eje Z , es decir, de la forma $V(x, y, z) = f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$, con la condición adicional de que $f(x, y, z) > 0$. Como la divergencia de V es $\frac{\partial f}{\partial z}$, V es magnético si y solo si $f = f(x, y)$. Vamos a estudiar las posibles trayectorias magnéticas producidas por $V = f(x, y) \frac{\partial}{\partial z}$. Sin pérdida de generalidad nos centraremos solo en la determinación de las curvas magnéticas normales.

La fuerza de Lorentz determinada por V verifica

$$\phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = -f \frac{\partial}{\partial y} \quad \phi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = f \frac{\partial}{\partial x} \quad \phi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0$$

Por tanto, si $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ es una curva magnética normal y escribimos $f(x(s), y(s)) = f(s)$, entonces utilizando las referencias cartesianas a lo largo de la curva

$$\phi(\dot{\gamma}(s)) = (f(s) \dot{y}(s), -f(s) \dot{x}(s), 0)$$

La ecuación de Lorentz $\frac{D}{ds} \dot{\gamma} = \phi(\dot{\gamma})$, es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\ddot{x} = f\dot{y} \quad \ddot{y} = -f\dot{x} \quad \ddot{z} = 0$$

Fijemos las condiciones iniciales $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$ y $\dot{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0)$. Dado que $\gamma(s)$ es normal, $\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 1 \quad \forall s \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1 = u_0^2 + v_0^2 + w_0^2$. Por otro lado, de la ecuación $\ddot{z} = 0$ se deduce que $\dot{z} = w_0$.

Se tiene pues que $\left\| \frac{D\dot{\gamma}}{ds} \right\|^2 = f^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = f^2(1 - \dot{z}^2) = f^2(1 - w_0^2)$. Observemos que

si $w_0 = \pm 1$, entonces $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ y la curva magnética resultante es una geodésica euclídea (segmento de recta). Nótese que en esta situación la velocidad inicial $\dot{\gamma}(0)$ es paralela al campo magnético y por tanto la fuerza de Lorentz es nula.

A partir de ahora supondremos que $w_0^2 < 1$, y con ello la curvatura es

$$\kappa(s) = \left\| \frac{D\dot{\gamma}}{ds}(s) \right\| = f(s) \sqrt{1 - w_0^2} > 0$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} \times \frac{D\dot{\gamma}}{ds} &= (\dot{x}, \dot{y}, w_0) \times (f\dot{y}, -f\dot{x}, 0) = f(\dot{x} w_0, \dot{y} w_0, w_0^2 - 1) \\ \left\| \dot{\gamma} \times \frac{D\dot{\gamma}}{ds} \right\|^2 &= f^2(w_0^2(1 - w_0^2) + w_0^4 - 2w_0^2 + 1) = f^2(1 - w_0^2) = \kappa^2(s) \end{aligned}$$

El campo binormal de la curva es

$$B = \frac{1}{\kappa} \left(\dot{\gamma} \times \frac{D\dot{\gamma}}{ds} \right) = \frac{f}{\kappa} (\dot{x} w_0, \dot{y} w_0, w_0^2 - 1) = \frac{1}{\sqrt{1 - w_0^2}} (\dot{x} w_0, \dot{y} w_0, w_0^2 - 1)$$

de donde se sigue que

$$\frac{DB}{ds} = \frac{f}{\kappa} (w_0 \ddot{x}, w_0 \ddot{y}, 0) = \frac{f w_0}{\kappa} \frac{D\dot{\gamma}}{ds} = f w_0 N$$

Entonces, la torsión de la curva es $\tau(s) = -f(s)w_0$ y teniendo en cuenta que la función $\omega(s)$ es $\langle T, V \rangle = \langle \dot{\gamma}, f \frac{\partial}{\partial z} \rangle = f\dot{z} = f w_0$, llegamos a que $\tau(s) = -\omega(s)$. Por el teorema (2.4.2), $V(s) = \omega(s)T(s) - \kappa(s)B(s) = -\tau(s)T(s) - \kappa(s)B(s)$.

- Si $w_0 = 0 \Rightarrow$ la curva magnética es una curva plana, pues $\tau(s) = 0$, con curvatura $\kappa(s) = f(s)$
- Si $w_0 \neq 0 \Rightarrow$ la curvatura y torsión son funciones no nulas, pero $\frac{\tau}{\kappa} = \pm \frac{w_0}{\sqrt{1 - w_0^2}}$ es constante. Por tanto, la curva magnética es una hélice cilíndrica

Ejemplo 2.4.3. Estudiemos las curvas magnéticas normales en el grupo de Heisenberg tridimensional, H_3 , que es la variedad \mathbb{R}^3 provista de la métrica $g = dx^2 + dy^2 + \eta \otimes \eta$, siendo η la forma de contacto $\eta = dz + \frac{\lambda}{2}(ydx - xdy)$ con λ un real no nulo.

Trabajaremos en la base ortonormal

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\lambda y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \quad U_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\lambda x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \quad U_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

En [15] puede encontrarse la conexión de Levi-Civita respecto de esta base.

$$\begin{aligned} U_1^\nabla U_1 &= 0 & U_1^\nabla U_2 &= \frac{\lambda}{2} U_3 & U_1^\nabla U_3 &= -\frac{\lambda}{2} U_2 \\ U_2^\nabla U_1 &= -\frac{\lambda}{2} U_3 & U_2^\nabla U_2 &= 0 & U_2^\nabla U_3 &= \frac{\lambda}{2} U_1 \\ U_3^\nabla U_1 &= -\frac{\lambda}{2} U_2 & U_3^\nabla U_2 &= \frac{\lambda}{2} U_1 & U_3^\nabla U_3 &= 0 \end{aligned}$$

Además, $[U_1, U_2] = \lambda U_3$, $[U_2, U_3] = [U_3, U_1] = 0$

Nuestro campo magnético será la 2-forma cerrada $F = qd\eta$, con $q \neq 0$, y la fuerza de Lorentz vendrá dada por $\phi = q\varphi$, donde φ es el (1-1)-campo tensorial definido por $\varphi(U_1) = U_2$, $\varphi(U_2) = -U_1$, $\varphi(U_3) = 0$.

Se puede comprobar que $d\eta(X, Y) = \frac{\lambda}{2} \langle X, \varphi(Y) \rangle$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(H_3)$.

Como veremos a continuación una curva $\gamma(s)$ parametrizada por la longitud de arco es una curva magnética asociada al campo magnético F si y solo si se da uno de los siguientes casos:

- 1) $\gamma(s)$ es una geodésica obtenida como curva integral de U_3 .
- 2) $\gamma(s)$ es una circunferencia de curvatura $\kappa = |q| \sin \alpha$, donde $\alpha = \arccos(-\frac{\lambda}{2q})$ es el ángulo entre $\dot{\gamma}$ y U_3 (ángulo de contacto).
- 3) $\gamma(s)$ es una hélice con $\kappa = |q|$ y $\tau = \frac{\lambda}{2}$.
- 4) $\gamma(s)$ es una hélice inclinada con $\kappa = |q| \sin \alpha$ y $\tau = \frac{\lambda}{2} + q \cos \alpha$ donde $\alpha \in (0, \pi)$.

En efecto, sea $\{T(s) = \dot{\gamma}(s), N(s), B(s)\}$ el triedro de Frenet de la curva magnética $\gamma(s)$. Si γ es una geodésica, entonces $\phi(T) = 0$, es decir, $T(s)$ es proporcional a $U_3(s)$. Como ambos son unitarios $T = \pm U_3$ y se llega a 1).

Consideremos el caso general en el que $T(s)$ no sea proporcional a $U_3(s)$. Podemos parametrizar

$$T(s) = \sin \alpha(s) \cos \beta(s) U_1(s) + \sin \alpha(s) \sin \beta(s) U_2(s) + \cos \alpha(s) U_3(s) \quad (2.1)$$

con $\sin \alpha \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{DT}{ds} &= (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta (\dot{\beta} - \lambda \cos \alpha)) U_1(s) + \\ &+ (\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta (\dot{\beta} - \lambda \cos \alpha)) U_2(s) - \dot{\alpha} \sin \alpha U_3(s) \end{aligned}$$

Usando la definición de φ , se comprueba que $\varphi(T) = -\sin \alpha \sin \beta U_1 + \sin \alpha \cos \beta U_2$. Y como γ es una curva magnética, $\frac{DT}{ds} = q\varphi(T)$ obteniendo el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta (\dot{\beta} - \lambda \cos \alpha) &= -q \sin \alpha \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta (\dot{\beta} - \lambda \cos \alpha) &= q \sin \alpha \cos \beta \\ \dot{\alpha} \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

De la última se deduce que $\dot{\alpha} = 0$ y asumamos que $\sin \alpha > 0$, es decir, que $\alpha \in (0, \pi)$. De las otras dos ecuaciones se puede obtener que $\beta(s) = (\lambda \cos \alpha + q)s + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Entonces, $\frac{DT}{ds} = -q \sin \alpha \sin \beta U_1 + q \sin \alpha \cos \beta U_2$. Luego su curvatura es

$$\kappa(s) = \left\| \frac{DT}{ds} \right\| = |q| \sin \alpha$$

que es constante. Por otro lado el campo normal a la curva es

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{DT}{ds} = \text{sig}(q) (-\sin \beta U_1(s) + \cos \beta U_2(s))$$

Se tiene que $\frac{DN}{ds} = \text{sig}(q) [-\cos \beta (\frac{\lambda}{2} \cos \alpha + q) U_1 - \sin \beta (\frac{\lambda}{2} \cos \alpha + q) U_2 + \frac{\lambda}{2} \sin \alpha U_3]$, donde hemos utilizado que $\dot{\beta} = q + \lambda \cos \alpha$. Sabiendo que por definición $U_1 \times U_2 = U_3$, el campo binormal B se expresa

$$B = T \times N = \text{sig}(q) (-\cos \alpha \cos \beta U_1(s) - \cos \alpha \sin \beta U_2(s) + \sin \alpha U_3(s))$$

Como $\frac{DN}{ds} = -\kappa T + \tau B$, llegamos a que la torsión se puede expresar

$$\frac{\lambda}{2} \text{sig}(q) = -|q| \cos \alpha + \text{sig}(q) \tau(s)$$

Si γ es una curva con ángulo de contacto $\frac{\pi}{2}$, (en tal caso se denomina curva de Legendre), entonces es una hélice de curvatura $\kappa = |q|$ y torsión $\tau = \frac{\lambda}{2}$.

Si el ángulo de contacto de γ no es $\frac{\pi}{2}$, entonces es una hélice inclinada con $\kappa = |q| \sin \alpha$ y $\tau = \frac{\lambda}{2} + q \cos \alpha$. Con esto probamos 3) y 4). Para probar 2) basta con considerar el caso bidimensional en el que $\tau = 0$ y por tanto, $\cos \alpha = -\frac{\lambda}{2q}$.

Recíprocamente, si se dan los casos 1), 2), 3) y 4) demostramos que γ es una curva magnética.

Si estamos en las condiciones de 4), entonces T es de la forma (2.1) y se puede probar que $\varphi(T) = \text{sig}(q) \sin \alpha N$ (ver [19] para más detalle). Deduciéndose que $\frac{DT}{ds} = q\varphi(T)$. Tomando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ obtenemos que el caso 3) lo cumple y tomando $\alpha = \arccos(-\frac{\lambda}{2q})$ también el caso 2).

Con esto concluimos la demostración y podemos dar la expresión en coordenadas cartesianas de las curvas magnéticas.

Si $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ es una curva magnética en H_3 , entonces

$$T(s) = \sin \alpha \cos \beta(s) U_1(s) + \sin \alpha \sin \beta(s) U_2(s) + \cos \alpha U_3(s) = \sin \alpha \cos \beta(s) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{\gamma(s)} + \sin \alpha \sin \beta(s) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{\gamma(s)} + \left(\frac{\lambda}{2} x(s) \sin \alpha \sin \beta(s) - \frac{\lambda}{2} y(s) \sin \alpha \cos \beta(s) + \cos \alpha \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_{\gamma(s)}$$

con $\beta(s) = vs + c$ donde $v = \lambda \cos \alpha + q$. Integrando el sistema $\dot{\gamma}(s) = T(s)$ obtenemos (ver [19])

$$A) \begin{cases} x(s) = \frac{1}{v} \sin \alpha \sin(vs + c) + d_1 \\ y(s) = -\frac{1}{v} \sin \alpha \cos(vs + c) + d_2 \\ z(s) = (\cos \alpha + \frac{\lambda}{2v} \sin^2 \alpha) s - \frac{\lambda}{2v} d_1 \sin \alpha \cos(vs + c) - \frac{\lambda}{2v} d_2 \sin \alpha \sin(vs + c) + d_3 \end{cases}$$

donde $v \neq 0$ y $c, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$

$$B) \begin{cases} x(s) = (\sin \alpha \cos c) s + d_4 \\ y(s) = (\sin \alpha \sin c) s + d_5 \\ z(s) = (\frac{-q}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} \sin \alpha (d_4 \sin c - d_5 \cos c)) s + d_6 \end{cases}$$

donde $c, d_4, d_5, d_6 \in \mathbb{R}$ y $v = 0$, es decir, $\alpha = \arccos(-\frac{q}{\lambda})$

2.4.1. Campos Killing magnéticos en variedades tridimensionales

Un campo de Killing K en una variedad riemanniana n -dimensional (M^n, g) es un campo vectorial que genera flujos locales de isometrías, esto es $K^L g = 0$. Se puede comprobar haciendo uso de las propiedades de la derivada de Lie y de la conexión de Levi-Civita que

$$(K^L g)(X, Y) = \langle X^\nabla K, Y \rangle + \langle Y^\nabla K, X \rangle = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

En un abierto U coordinado por $\{q_1, \dots, q_n\}$, K será Killing si y solo si

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial q_i} K, \frac{\partial}{\partial q_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial q_j} K, \frac{\partial}{\partial q_i} \right\rangle = 0 \quad ; \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

Ejemplo 2.4.4. Consideremos el campo magnético $f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$ del ejemplo (2.4.2). Vamos a estudiar como tiene que ser f para que V sea un campo de Killing. Aplicando la condición

(2.2) V será Killing si y solo si

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \left\langle \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = 0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Es decir, V es Killing si y solo si $V = a \frac{\partial}{\partial z}$ con $a \in \mathbb{R}$ no nulo. Sustituyendo $f(x, y) = a$ en el ejemplo (2.4.2) obtenemos como posibles trayectorias magnéticas rectas, circunferencias y hélices con curvatura y torsión constantes.

El siguiente resultado puede encontrarse en numerosos libros de geometría riemanniana.

Proposición 2.4.4. *Un campo Killing K en una variedad riemanniana (M^n, g) tiene módulo constante si y solo si cada curva integral de K es una geodésica en (M^n, g)*

En esta sección nos vamos a centrar en el estudio de los campos Killing magnéticos en variedades tridimensionales.

Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión 3 y sea K un campo de Killing. Observemos que en coordenadas $\{q_1, q_2, q_3\}$, $\text{div}(K) = \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial}{\partial q_i} \nabla K, \frac{\partial}{\partial q_i} \right\rangle = 0$. Luego, todo campo Killing tiene divergencia nula. Como consecuencia, todo campo Killing es magnético. En particular, los campos magnéticos uniformes son de Killing. Todo esto muestra que los campos magnéticos Killing constituyen una familia importante de campos magnéticos.

Teorema 2.4.3. *Un campo magnético V en la variedad (M, g) es Killing si y solo si para cualquier curva magnética $\gamma(t)$ el producto $\langle V(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$ es constante a lo largo de $\gamma(t)$.*

Demostración. Sea V un campo Killing magnético. Entonces, a lo largo de cualquier curva magnética tenemos que $\langle \dot{\gamma}^\nabla V, \dot{\gamma} \rangle = 0$. Por otro lado, $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \dot{\gamma}^\nabla \dot{\gamma} = \phi(\dot{\gamma}) = \dot{\gamma} \times V$. Luego

$$\frac{d}{dt} \langle V, \dot{\gamma} \rangle = \langle \dot{\gamma}^\nabla V, \dot{\gamma} \rangle + \langle V, \dot{\gamma}^\nabla \dot{\gamma} \rangle = 0$$

Probemos el recíproco. Sean $p \in M$ y $v \in T_p M$. Tomemos una curva magnética γ con condiciones iniciales $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$. Tenemos

$$0 = \frac{d}{dt} \langle V, \dot{\gamma} \rangle = \langle \dot{\gamma}^\nabla V, \dot{\gamma} \rangle + \langle V, \dot{\gamma} \times V \rangle = \langle \dot{\gamma}^\nabla V, \dot{\gamma} \rangle$$

Por tanto, $\langle v^\nabla V, v \rangle = 0$ y como $v \in T_p M$ es cualquiera se concluye que V es de Killing \square

Ejemplo 2.4.5. Sabemos que el conjunto de los campos Killing del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , $K(\mathbb{R}^3)$, es una \mathbb{R} -álgebra de dimensión 6 respecto del paréntesis de Lie generada por $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, z\partial_y - y\partial_z, z\partial_x - x\partial_z, -y\partial_x + x\partial_y\}$, (ver [21] p.270), donde los 3 primeros generan las traslaciones a lo largo de los ejes de coordenadas y los 3 últimos generan los giros alrededor de los ejes de coordenadas.

- Utilizando las mismas técnicas que en el ejemplo (2.4.2) es trivial comprobar que las posibles trayectorias magnéticas generadas por los campos $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ son rectas, circunferencias y hélices circulares.
- Para los giros tenemos otras curvas. En concreto en [11] se prueba que las trayectorias debidas al campo $-y\partial_x + x\partial_y$ son:
 - A) Curvas planas situadas en una banda vertical.
 - B) Hélices circulares.
 - C) Curvas parametrizadas por

$$x(t) = \rho(t) \cos(\theta(t)), \quad y(t) = \rho(t) \sin(\theta(t)), \quad z(t) = -1/2 \int_{cte}^t \rho(\zeta) d\zeta$$
 donde ρ y θ satisfacen $(\frac{d\rho}{dt})^2 + P(\rho^2(t)) = 0$ y $\rho(t)^2 \dot{\theta}(t) = cte$ con P un polinomio de grado 3.

Ejemplo 2.4.6. Probaremos que las curvas magnéticas normales $\gamma(s)$ de un campo Killing magnético V unitario en la esfera S^3 euclídea son curvas con curvatura y torsión constantes

$$\kappa(s) = \sqrt{1 - \omega_0^2} \quad \tau(s) = -(1 + \omega_0)$$

donde ω_0 es la cuasi-pendiente, es decir, son hélices con eje las trayectorias (círculos máximos) de V .

Por el teorema (2.4.2), el campo vectorial V puede escribirse $V = \omega T - \kappa B$ en cualquier punto de $\gamma(s)$. Ahora bien, sabemos que $\omega = \omega_0$ es constante por ser V Killing. Como V es un campo vectorial de módulo unidad, se tiene $1 = \langle V, V \rangle = \omega_0^2 + \kappa^2$, y por tanto, $\kappa(s) = \kappa_0 = \sqrt{1 - \omega_0^2}$. Entonces,

$$V(s) = \omega_0 T(s) + \sqrt{1 - \omega_0^2} B(s)$$

a lo largo de $\gamma(s)$. Se puede comprobar (ver [7]) que para todo campo $X \in \mathfrak{X}(S^3)$, se verifica $X^\nabla V = V \times X$. Esto implica que $\dot{\gamma}^\nabla V = V \times \dot{\gamma} = (\omega_0 T - \kappa_0 B) \times T = -\kappa_0 N$. Por otro lado, $\dot{\gamma}^\nabla V = \dot{\gamma}^\nabla (\omega_0 T - \kappa_0 B) = \omega_0 k_0 N - \kappa_0 (-\tau N) = k_0 (\omega_0 + \tau) N$. Despejando, $\tau(s) = -(1 + \omega_0)$, como queríamos demostrar

Capítulo 3

Aspectos geométricos del flujo magnético

3.1. La geometría del fibrado tangente de una variedad riemanniana

Recogemos en esta sección algunos aspectos de la geometría diferencial del fibrado tangente de una variedad riemanniana que nos servirán para formular el denominado flujo magnético asociado a un campo magnético sobre una variedad riemanniana.

3.1.1. Descomposición del fibrado tangente en los subfibrados horizontal y vertical

Sea (M, g) una variedad riemanniana n -dimensional y $\pi : TM \rightarrow M$ su fibrado tangente. En coordenadas fibradas la proyección tangente $\pi_{*,(p,v)} : T_{(p,v)}(TM) \rightarrow T_p M$ viene dada por

$$\pi_{*,(p,v)} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \Big|_{(p,v)} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)_p \quad \pi_{*,(p,v)} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{(p,v)} \right) = 0_p \quad i = 1, \dots, n$$

Para cada $(p, v) \in TM$, se define el subespacio vertical en dicho punto como

$$V_{(p,v)}(TM) := \ker \pi_{*,(p,v)} = \{ \xi_{(p,v)} \in T_{(p,v)}(TM) / \pi_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)}) = 0_p \}$$

$V_{(p,v)}$ es el espacio tangente a la fibra $\pi^{-1}(p) \simeq T_p M \subset TM$ en el punto (p, v) .

Definición 3.1.1. Diremos que un campo vectorial $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ es vertical si $\forall (p, v) \in TM$, se cumple que $\xi_{(p,v)} \in V_{(p,v)}(TM)$.

Es trivial comprobar que localmente, los campos verticales son de la forma $\xi = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$ con $F_i \in C^\infty(M)$

Definición 3.1.2. Una curva $\sigma : I \rightarrow TM$ en el fibrado tangente se dice vertical si su velocidad $\dot{\sigma}(t)$ en cada punto es un vector vertical.

Proposición 3.1.1. El conjunto de campos verticales de TM es un $C^\infty(TM)$ -módulo que define una distribución involutiva de rango n denominada distribución vertical.

Proposición 3.1.2. Sea $V(TM) = \bigsqcup_{(p,v) \in TM} V_{(p,v)}(TM)$. Entonces, $V(TM)$ es un subfibrado vectorial de $T(TM)$ de rango n denominado subfibrado vertical.

Proposición 3.1.3. La siguiente sucesión de fibrados vectoriales sobre la variedad TM

$$0 \longrightarrow V(TM) \longrightarrow T(TM) \xrightarrow{\pi_*} \pi^*(TM) \longrightarrow 0$$

es exacta

A continuación veamos como la conexión de Levi-Civita ∇ de (M, g) permite determinar de manera diferenciable un complementario al subespacio vertical $V_{(p,v)}(TM)$ en cada (p, v) .

Para cada $(p, v) \in TM$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} K_{(p,v)} : T_{(p,v)}(TM) &\longrightarrow T_p M \\ \xi_{(p,v)} &\longmapsto K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}) = (\dot{\gamma}^\nabla Z)(0) \end{aligned}$$

Siendo $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$, con $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), Z(t))$, una curva arbitraria adaptada a $\xi_{(p,v)}$, esto es, verificando que $\bar{\gamma}(0) = (p, v)$ y $\dot{\bar{\gamma}}(0) = \xi_{(p,v)}$.

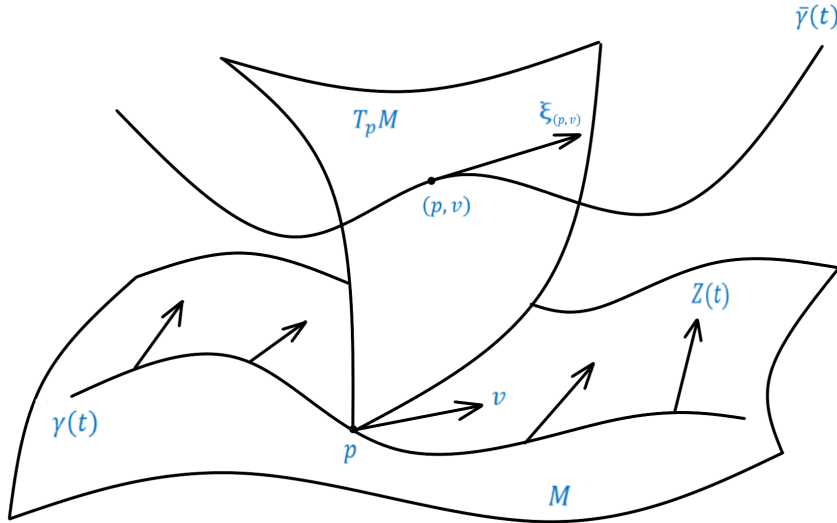


Figura 3.1: Aplicación de conexión

Esta aplicación está bien definida y no depende de la curva $\bar{\gamma}$ elegida. En efecto, utilizando coordenadas locales si $\xi_{(p,v)} = \sum_i \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_{(p,v)} + \beta_i \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right)_{(p,v)}$ y dado que toda curva parametrizada $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), Z(t)) = (q_1(t), \dots, q_n(t), Z_1(t), \dots, Z_n(t))$ en el fibrado tangente define un campo vectorial $Z(t) = \sum_{i=1}^n Z_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_{\gamma(t)} \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$ con soporte la curva $\gamma(t)$, la condición $\bar{\gamma}(0) = (p, v)$ implica que $\gamma(0) = p$ y $Z(0) = v \in T_p M$. Teniendo en cuenta que $\dot{\bar{\gamma}}(t) = \sum_i \dot{q}_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_{\gamma(t)} + \sum_i \frac{d}{dt} Z_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right)_{\bar{\gamma}(t)}$, entonces un cálculo sencillo demuestra que

$$(\dot{\gamma}^\nabla Z)(0) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{dZ_k}{dt}(0) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) Z_i(0) \frac{dq_j}{dt}(0) \right] \left(\frac{\partial}{\partial q_k}\right)_p = \sum_{k=1}^n \left[\beta_k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) v_i \alpha_j \right] \left(\frac{\partial}{\partial q_k}\right)_p$$

con $v = \sum_i v_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_p$. De estas expresiones vemos que $K_{(p,v)}(\xi) = (\dot{\gamma}^\nabla Z)(0)$ no depende mas que del $\xi_{(p,v)}$ tomado y no de la curva $\bar{\gamma}$.

Lema 3.1.1. *Para cada $(p, v) \in TM$, la aplicación $K_{(p,v)} : T_{(p,v)}(TM) \rightarrow T_p M$ es lineal y cumple que $\ker K_{(p,v)} \cap V_{(p,v)}(TM) = \{0\}$.*

Demostración. Las anteriores expresiones de $K_{(p,v)}$ en coordenadas locales demuestran que es lineal. Para ver que la intersección del enunciado es nula solo hay que tener en cuenta que los vectores

$$(E_i)_{(p,v)} := \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)_{(p,v)} - \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) v_j \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right)_{(p,v)} \quad i = 1, \dots, n$$

donde $v = \sum_i v_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)_p$, forman una base de $\ker K_{(p,v)}$. Teniendo en cuenta que son independientes a los vectores $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \right)_{(p,v)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} \right)_{(p,v)} \right\}$, que son base de $V_{(p,v)}(TM)$, se concluye. \square

Definición 3.1.3. *A la aplicación lineal $K_{(p,v)} : T_{(p,v)}(TM) \rightarrow TM$ se le llama aplicación de conexión en el punto (p, v) inducida por la conexión ∇ .*

Proposición 3.1.4. *La aplicación de conexión en cada punto del fibrado tangente induce un morfismo de fibrados vectoriales sobre el fibrado tangente TM*

$$K : T(TM) \rightarrow \pi^*(TM)$$

donde $K(\xi_{(p,v)}) = K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)})$, denominada morfismo de conexión o de Dombrowski asociado a la conexión de Levi-Civita de (M, g) .

Definición 3.1.4. *Se llama subespacio horizontal en el punto $(p, v) \in TM$ al subespacio n -dimensional de $T_{(p,v)}TM$ dado por*

$$H_{(p,v)}(TM) = \ker K_{(p,v)}$$

Definición 3.1.5. *Diremos que un campo vectorial $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ es horizontal si $\forall (p, v) \in TM$, se cumple que $\xi_{(p,v)} \in H_{(p,v)}(TM)$.*

Proposición 3.1.5. *El conjunto de campos horizontales de TM es un $C^\infty(TM)$ -módulo que define una distribución (en general no involutiva) de rango n denominada distribución horizontal.*

Proposición 3.1.6. *Con las notaciones anteriores se verifica que, localmente, los campos $E_j = \frac{\partial}{\partial q_j} - \sum_{k,i} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)^k \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$, con $j = 1, \dots, n$, son base del módulo de los campos horizontales.*

Del lema 3.1.1 es inmediato que

Proposición 3.1.7. *Sea $H(TM) = \bigsqcup_{(p,v) \in TM} H_{(p,v)}$. Entonces, $H(TM)$ es un subfibrado vectorial de $T(TM)$ de rango n denominado subfibrado horizontal asociado a la conexión de Levi-Civita de (M, g)*

Proposición 3.1.8. *La siguiente sucesión de fibrados vectoriales sobre la variedad TM*

$$0 \longrightarrow H(TM) \longrightarrow T(TM) \xrightarrow{K} \pi^*(TM) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Proposición 3.1.9. *Para cada punto $(p, v) \in TM$ se tiene*

$$T_{(p,v)}(TM) = H_{(p,v)}(TM) \oplus V_{(p,v)}(TM)$$

De esta manera, todo $\xi_{(p,v)} \in T_{(p,v)}TM$ descompone de manera única en su parte horizontal y en su parte vertical $\xi_{(p,v)} = \xi_{(p,v)}^H + \xi_{(p,v)}^V$ donde $\xi_{(p,v)}^H = \pi_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)}) \in H_{(p,v)}$ y $\xi_{(p,v)}^V = K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}) \in V_{(p,v)}(TM)$.

Corolario 3.1.1. *La aplicación $j_{(p,v)} : T_{(p,v)}TM \rightarrow T_pM \times T_pM$ definida por $j_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}) = (\pi_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)}), K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}))$ es un isomorfismo lineal.*

Proposición 3.1.10. *La aplicación $(\pi_*, K) : T(TM) \rightarrow \pi^*(TM) \oplus \pi^*(TM)$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales sobre TM .*

Definición 3.1.6. *Llamamos levantamiento vertical a la aplicación*

$$\begin{aligned} L_{vert} : \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(TM) \\ D &\mapsto L_{vert}(D) \equiv D^V \in \mathfrak{X}(TM) \end{aligned}$$

donde D^V es el único campo vertical de TM tal que $\forall f \in C^\infty(M)$, $(D^V \tilde{f}) = (Df) \circ \pi$ siendo $\tilde{f} \in C^\infty(TM)$ la función lineal en fibra definida por $\tilde{f}(p, v) = V_p(f)$ con $V_p = (p, v) \in TM$.

Localmente si $D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ y D^V es de la forma $\sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$, por ser vertical, entonces teniendo en cuenta que $\tilde{q}_i = \dot{q}_i$, se tiene que $F_i = D^V(\dot{q}_i) = D^V \tilde{q}_i = (Dq_i) \circ \pi = f_i \circ \pi$ y como consecuencia

$$D^V = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \pi) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$$

Observando esta expresión en coordenadas es fácil ver que

$$\pi_{*,(p,v)}[(D^V)_{(p,v)}] = 0_p \quad K_{(p,v)}[(D^V)_{(p,v)}] = \sum_{i=1}^n f_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)_p = D_p$$

Definición 3.1.7. *Llamamos levantamiento horizontal a la aplicación*

$$\begin{aligned} L_{hor} : \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(TM) \\ D &\mapsto L_{hor}(D) \equiv D^H \in \mathfrak{X}(TM) \end{aligned}$$

donde para cada $(p, v) \in TM$, $(D^H)_{(p,v)} = \dot{\gamma}(0)$, siendo $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), Z(t))$ una curva en TM definida por.

- 1) $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ es una curva parametrizada tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = D_p$
- 2) $Z(t)$ es el transporte paralelo de $v \in T_pM$ a lo largo de $\gamma(t)$.

Utilizando argumentos similares a los utilizados en la definición del morfismo de conexión es fácil ver que esta definición no depende de la curva γ utilizada y que si $D = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, su expresión en coordenadas viene dada por

$$D^H = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial q_j} - \sum_{k,i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{q}_i f_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^n f_j E_j$$

Con $E_j = \frac{\partial}{\partial q_j} - \sum_{k,i} \Gamma_{ij}^k \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$. Observando la expresión en coordenadas de $D_{(p,v)}^H$ se comprueba que

$$\pi_{*,(p,v)}[(D^H)_{(p,v)}] = D_p \quad K_{(p,v)}[(D^H)_{(p,v)}] = 0_p$$

Corolario 3.1.2. *Las aplicaciones $\pi_{*,(p,v)} : H_{(p,v)}(TM) \rightarrow T_p M$ y $K_{(p,v)} : V_{(p,v)}(TM) \rightarrow T_p M$ son isomorfismos lineales cuyos inversos son los levantamientos horizontal y vertical respectivamente.*

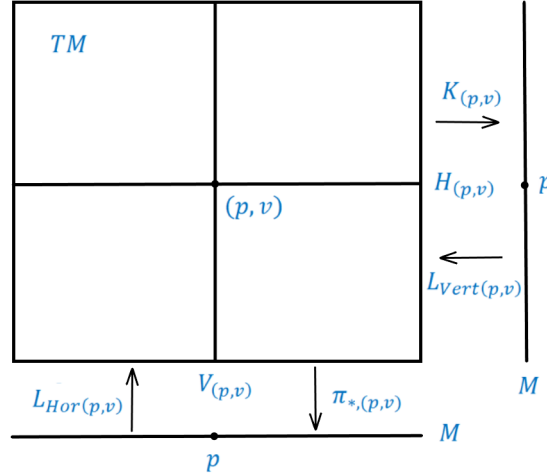


Figura 3.2: Descomposición del fibrado tangente en los subfibrados horizontal y vertical

Corolario 3.1.3. *Los levantamientos vertical y horizontal definen isomorfismos de fibrados vectoriales sobre TM*

$$L_{hor} : \pi^*(TM) \rightarrow H(TM) \quad L_{vert} : \pi^*(TM) \rightarrow V(TM)$$

y con ello se da sucesión exacta de fibrados vectoriales

$$0 \longrightarrow T(TM) \xrightarrow{(\pi_*, K)} \pi^*(TM) \oplus \pi^*(TM) \xrightarrow{(L_{hor}, L_{vert})} H(TM) \oplus V(TM) \longrightarrow 0$$

Dado cualquier campo $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, los isomorfismos anteriores nos permitirán identificar en lo que sigue los siguientes campos vectoriales

$$\xi \equiv (\pi_*(\xi), K(\xi)) \equiv (L_{hor}(\pi_*(\xi)), L_{vert}(K(\xi))) = (\xi^H, \xi^V)$$

Observación 3.1.1. Se tiene que $L_{hor}(v) = \dot{\gamma}_{(p,v)}(0) = \xi_{(p,v)}^G$. De este hecho se deduce que el campo geodésico $\xi^G \in TM$ es el único campo horizontal verificando que $\pi_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)}^G) = v \in T_p M \quad \forall (p, v) \in TM$.

Análogamente el campo de Liouville, $\xi^{Liouv} \in \mathfrak{X}(TM)$ se define como el único campo vertical verificando que $K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}^{Liouv}) = v \quad \forall (p, v) \in TM$. Entonces, para todo $(p, v) \in TM$ es $\xi_{(p,v)}^{Liouv} = L_V(v) = \sum_i v_i (\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i})_{(p,v)}$ y con ello $\xi^{Liouv} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$.

3.1.2. Métrica de Sasaki, estructura casi-compleja y estructura simpléctica en el fibrado tangente de una variedad riemanniana

Definición 3.1.8. *La métrica de Sasaki, \hat{g} , en el fibrado tangente TM , es la métrica riemanniana definida por*

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle := \langle \pi_*(\xi), \pi_*(\eta) \rangle + \langle K(\xi), K(\eta) \rangle \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{X}(TM)$$

Teniendo en cuenta que $H(TM) = \ker K$ y $V(TM) = \ker \pi_*$, es trivial comprobar que los campos verticales y horizontales son ortogonales respecto de la métrica de Sasaki. Veamos su expresión en las coordenadas locales que venimos utilizando. Si $\{E_i, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\}$ es la base local de $\mathfrak{X}(TM)$ vista antes y $\{\theta_i = d\dot{q}_i + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{q}_k dq_j, d\dot{q}_i\}$ su base dual.

$$\begin{aligned} \langle\langle E_i, E_j \rangle\rangle &= \langle \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right), \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right) \rangle = g_{ij} \\ \langle\langle \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right), \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\right) \rangle\rangle &= \langle \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right), \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right) \rangle = g_{ij} \\ \langle\langle E_i, \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\right) \rangle\rangle &= 0 \end{aligned}$$

De lo que se deduce que localmente $\hat{g} = \sum_{i,j=1}^n [g_{ij} dq_i \otimes dq_j + g_{ij} \theta_i \otimes \theta_j]$.

A partir de la identificación $T(TM) \simeq H(TM) \oplus V(TM)$ podemos introducir una estructura casi compleja (en general no integrable, véase [10]) en TM . Dado $(p, v) \in TM$ definimos $J \in T_1^1(TM)$ mediante

$$\begin{aligned} J_{(p,v)} : T_{(p,v)}TM &\longrightarrow T_{(p,v)}TM \\ \xi_{(p,v)} = (\xi_{(p,v)}^H, \xi_{(p,v)}^V) &\longmapsto (-\xi_{(p,v)}^V, \xi_{(p,v)}^H) \end{aligned}$$

Observemos que $J_{(p,v)}$ rota el espacio horizontal al vertical y viceversa. En particular, $J_{(p,v)}$ es una isometría para la métrica de Sasaki y además $J_{(p,v)}^2 = -Id_{T_{(p,v)}TM}$. Equivalentemente, se tiene

$$J(\xi) = J(\xi^H, \xi^V) = J(L_{hor}(\pi_*(\xi)), L_{vert}(K(\xi))) = (-L_{vert}(K(\xi)), L_{hor}(\pi_*(\xi))) = (-\xi^V, \xi^H)$$

Con las notaciones precedentes es trivial comprobar que

Proposición 3.1.11. $J(E_i) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$ y $J(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}) = -E_i$.

Haciendo uso de la métrica de Sasaki y de la estructura quasi-compleja J , podemos dotar a TM de una estructura simpléctica $\Omega \in \Lambda^2(TM)$ definida por

$$\Omega(\xi, \eta) := \langle\langle J(\xi), \eta \rangle\rangle = \langle \pi_*(\xi), K(\eta) \rangle - \langle K(\xi), \pi_*(\eta) \rangle \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{X}(TM)$$

Es fácil comprobar que Ω es antisimétrica y no degenerada. A continuación veremos que Ω es exacta y con ello cerrada, concluyendo así que es una forma simpléctica.

Definición 3.1.9. Llamamos 1-forma de Poincaré a la 1-forma Θ del fibrado tangente TM definida por

$$\Theta(\xi) := \langle\langle \xi, \xi^G \rangle\rangle$$

Esto es, $\forall (p, v) \in TM$, $\Theta_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}) = \langle\langle \xi_{(p,v)}, \xi_{(p,v)}^G \rangle\rangle_{(p,v)} = \langle \pi_{*(p,v)}(\xi_{(p,v)}), v \rangle_p$

Localmente $\Theta = \sum_{i,j} g_{ij} \dot{q}_i dq_j$. Observemos también que $\Theta_{(p,v)}$ anula $V_{(p,v)}(TM)$. La 1-forma de Poincaré y la 2-forma simpléctica en TM están relacionadas por

Proposición 3.1.12. $\Omega = -d\Theta$

Demostración. Probaremos que sus respectivas expresiones en coordenadas coinciden. Teniendo en cuenta que $J(E_i) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$ y $J(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}) = -E_i$, tenemos

$$\begin{aligned}\Omega(E_i, E_j) &= \langle\langle \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}, E_j \rangle\rangle = 0 \\ \Omega(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}) &= \langle\langle -E_i, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \rangle\rangle = 0 \\ \Omega(E_i, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}) &= \langle\langle \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \rangle\rangle = g_{ij}\end{aligned}$$

Luego, $\Omega = -\sum_{i,j} g_{ij} \theta_i \wedge dq_j = -\sum_{i,j} g_{ij} d\dot{q}_i \wedge dq_j - \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i dq_k \wedge dq_j$

Dado que $\Theta = \sum_{i,j} g_{ij} \dot{q}_i dq_j$ se tiene que $d\Theta = \sum_{i,j} g_{ij} d\dot{q}_i \wedge dq_j + \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i dq_k \wedge dq_j$ \square

El siguiente resultado muestra que el campo geodésico, ξ^G , es el campo vectorial hamiltoniano para la función de energía cinética $H \in C^\infty(TM)$ definida por, $H(p, v) = \frac{1}{2} \|v\|^2$, con respecto a la forma simpléctica Ω anterior.

Lema 3.1.2. $dH = i_{\xi^G} \Omega$

Demostración. Sea $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), Z(t))$ una curva adaptada a $\xi_{(p,v)} \in T_{(p,v)}TM$. Entonces se tiene que $d_{(p,v)}H(\xi_{(p,v)}) = \frac{d}{dt}|_{t=0} H(\bar{\gamma}(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}|_{t=0} \langle Z(t), Z(t) \rangle = \langle \dot{\gamma}^\nabla Z(0), Z(0) \rangle = \langle K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}), v \rangle$.

Por otro lado, $\Omega_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}, \xi_{(p,v)}) = \langle \pi_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)}), K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}) \rangle = \langle v, K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}) \rangle$ \square

Corolario 3.1.4. *El flujo geodésico conserva la forma simpléctica Ω de TM .*

Demostración. Por la fórmula de Cartan, $(\xi^G)^L \Omega = i_{\xi^G} d\Omega + di_{\xi^G} \Omega = d(dH) = 0$ y por tanto, Ω es invariante por el flujo geodésico. \square

Observación 3.1.2. Hemos visto que el fibrado tangente de una variedad riemanniana, TM , tiene una estructura simpléctica. Sin embargo, esta depende de la métrica riemanniana de M . Es bien conocido que el fibrado cotangente $\bar{\pi} : T^*M \rightarrow M$ de cualquier variedad (riemanniana o no) posee una estructura simpléctica canónica Ω^{canon} definida como $\Omega^{canon} = -d\Theta^{canon}$ donde Θ^{canon} es la 1-forma canónica dada por

$$\Theta_{(p,\omega)}^{canon}(\xi_{(p,\omega)}) := \Theta(\bar{\pi}_{*,(p,\omega)}(\xi_{(p,\omega)}))$$

donde $(p, \omega) \in T^*M$ y $\xi_{(p,\omega)} \in T_{(p,\omega)}(T^*M)$.

Si $p_g : TM \simeq T^*M$ es el difeomorfismo de polaridad riemanniana, se dan las relaciones $\Theta = p_g^*(\Theta^{canon})$ y $\Omega = p_g^*(\Omega^{canon})$. Luego, p_g es un simplectomorfismo entre las variedades simplécticas (TM, Ω) y (T^*M, Ω^{canon}) (véase [20] para los detalles)

3.2. Flujo magnético y aplicación exponencial magnética

Sea (M, g) una variedad riemanniana completa n -dimensional. Dado un campo magnético F en M , denotaremos por $\gamma_{(p,v)}^F(t)$ a la única curva magnética con respecto a F que en $t = 0$ pasa por $p \in M$ con velocidad $v \in T_p M$. La condición de completitud de M garantiza que dicha curva está definida en todo \mathbb{R} .

Definición 3.2.1. *El flujo magnético asociado a F en una variedad riemanniana completa (M, g) es la familia uniparamétrica de difeomorfismos $\{\tau_t^F\}_{t \in \mathbb{R}}$ definida por*

$$\begin{aligned} \tau_t^F : TM &\longrightarrow TM \\ (p, v) &\longmapsto \tau_t^F(p, v) = (\gamma_{(p,v)}^F(t), \dot{\gamma}_{(p,v)}^F(t)) \end{aligned}$$

Determinemos el campo que genera este flujo. Sea $\{q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n\}$ un sistema de coordenadas fibradas en el abierto $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$. La curva $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = (q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t))$, donde $q_k(t) \equiv q_k \circ \tau_t^F$ y $\dot{q}_k(t) = \dot{q}_k \circ \tau_t^F$, será una curva magnética en TM si satisface las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dq_k}{dt}(t) = \dot{q}_k(t) \\ \frac{d\dot{q}_k}{dt}(t) = - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(t) \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) + \sum_{r=1}^n \phi_{rk}(t) \dot{q}_r(t) \end{cases}$$

donde ϕ es la fuerza de Lorentz asociada a F . El generador infinitesimal ξ^F del flujo magnético, definido por $\xi_{(p,v)}^F = \left. \frac{d\tau_t^F(p,v)}{dt} \right|_{t=0}$, se expresa en $\pi^{-1}(U)$ por

$$\xi^F = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k,i,j,r=1}^n (\phi_{rk} \dot{q}_r - \Gamma_{ij}^k \dot{q}_i \dot{q}_j) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \quad (3.1)$$

Al ser (M, g) completa, este campo globaliza a todo TM .

Observación 3.2.1. La curva integral del campo ξ^F que para $t = 0$ pasa por el punto (p, v) es $\tilde{\gamma}_{(p,v)}^F(t) = (\gamma_{(p,v)}^F(t), \dot{\gamma}_{(p,v)}^F(t))$, es decir, $\dot{\tilde{\gamma}}_{(p,v)}^F(t) = \xi_{(p,v)}^F$. Utilizando los conocidos resultados sobre el flujo (global) de campos vectoriales de una variedad diferenciable completa garantizan la condición uniparamétrica, $\tau_{t+s}^F = \tau_t^F \circ \tau_s^F$, del flujo magnético.

Proposición 3.2.1. *El flujo magnético τ^F deja invariante el fibrado tangente esférico $S_r M = \{(p, v) \in TM \mid \|v\| = r^2\}$*

Demostración. $\forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall (p, v) \in S_r M$, $\tau_t^F(p, v) = (\gamma_{(p,v)}^F(t), \dot{\gamma}_{(p,v)}^F(t))$ con $\|\dot{\gamma}_{(p,v)}^F(t)\| = \|v\| = r^2 \Rightarrow \tau_t^F(p, v) \in S_r M$ \square

Observación 3.2.2. Existen muchas similitudes entre el flujo geodésico τ^G y el magnético τ^F en una variedad riemanniana. Una de las principales diferencias radica en la propiedad

de homegeneidad que ya vimos que es satisfecha por las curvas geodésicas, pero no por las curvas magnéticas. Así para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el flujo geodésico satisface la identidad

$$\tau_t^G(p, \lambda v) = (\gamma_{(p, \lambda v)}(t), \dot{\gamma}_{(p, \lambda v)}(t)) = (\gamma_{(p, v)}(\lambda t), \lambda \dot{\gamma}_{(p, v)}(\lambda t)) = \lambda \tau_{\lambda t}^G(p, v)$$

siendo $\gamma_{(p, v)}(t)$ la geodésica que para $t = 0$ pasa por $p \in M$, con velocidad $v \in T_p M$. Este no es el caso para las curvas magnéticas pues si $\gamma(t)$ es una curva magnética asociada a un campo F , $\gamma(\lambda t)$ no será la curva magnética asociada al campo F sino al campo λF . Así se tiene la identidad.

$$\tau_t^{\lambda F}(p, \lambda v) = (\gamma_{(p, \lambda v)}^{\lambda F}(t), \dot{\gamma}_{(p, \lambda v)}^{\lambda F}(t)) = (\gamma_{(p, v)}^F(\lambda t), \dot{\gamma}_{(p, v)}^F(\lambda t)) = \lambda \tau_{\lambda t}^F(p, v)$$

Se tiene así que si $\|v\| \neq 0$, $\gamma_{(p, v)}^F(t) = \gamma_{(p, \frac{v}{\|v\|}}^F(\|v\| t))$. Luego, modificando el campo magnético siempre podemos restringirnos al estudio de las curvas magnéticas normales.

Definición 3.2.2. *Llamaremos aplicación exponencial magnética en el punto $p \in M$ asociada al campo magnético F a la aplicación*

$$\begin{aligned} \exp_p^F : T_p M &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \exp_p^F(v) = \begin{cases} \gamma_{(p, \frac{v}{\|v\|}}^F(\|v\|) & \text{si } v \neq 0 \\ p & \text{si } v = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Observación 3.2.3. Mientras que la exponencial riemanniana usual verifica $\exp_p(v) = \gamma_{(p, v)}(1)$, la exponencial magnética, en general, $\exp_p^F(v) \neq \gamma_{(p, v)}^F(1) = \gamma_{(p, \frac{v}{\|v\|}}^F(\|v\|)$

Definición 3.2.3. *La aplicación exponencial magnética asociada al campo magnético F es la aplicación*

$$\begin{aligned} \exp^F : TM &\longrightarrow M \\ (p, v) &\longmapsto \exp_p^F(v) \end{aligned}$$

Observación 3.2.4. La exponencial magnética para todo $p \in M$ también se puede escribir

$$\exp_p^F(v) = \begin{cases} \pi \circ \tau_{\|v\|}^F(p, \frac{v}{\|v\|}) & \text{si } v \neq 0 \\ p & \text{si } v = 0 \end{cases}$$

con lo cual \exp_p^F es \mathcal{C}^∞ -diferenciable en $T_p M \setminus \{0\}$.

Proposición 3.2.2. *Dado $p \in M$, el morfismo tangente a la aplicación \exp_p^F en el vector $0 \in T_p M$ es la identidad.*

Demostración. Sea $v \in T_0(T_p M)$ no nulo

$$(\exp_p^F)_{*,0}(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp_p^F(tv)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_{(p, \frac{v}{\|v\|}}^F(t \|v\|)) = \|v\| \dot{\gamma}_{(p, \frac{v}{\|v\|}}^F(0)) = \|v\| \frac{v}{\|v\|} = v \quad \square$$

De aquí se deduce, por el teorema de la función inversa, que

Corolario 3.2.1. *Existe un $\varepsilon > 0$, tal que la aplicación \exp_p^F establece un difeomorfismo entre la bola $B(0, \varepsilon) \subseteq T_p M$ y un entorno U_p del punto $p \in M$.*

De modo similar considerando la aplicación $\varphi : TM \rightarrow M \times M$ definida por $\varphi(p, v) = (p, \exp_p^F(v))$ y viendo que $\varphi_{*,(p,0)} : T_{(p,0)}(TM) \rightarrow T_p M \oplus T_p M$ es no singular $\forall p \in M$ se puede demostrar el siguiente resultado siguiendo ideas similares al caso del flujo geodésico (ver [13]):

Proposición 3.2.3. *Dado un punto $p_0 \in M$, podemos encontrar un entorno suyo, U_{p_0} , y un $\varepsilon > 0$ de modo que se satisfagan:*

- 1) *Para cualesquiera $p, q \in U_{p_0}$ distintos, existe una única curva magnética normal γ_{pq}^F y un $t_{pq} \in (0, \varepsilon)$ tales que $\gamma_{pq}^F(0) = p$ y $\gamma_{pq}^F(t_{pq}) = q$. Además t_{pq} depende diferenciablemente de p y q .*
- 2) *Para cada $p \in U_{p_0}$, la aplicación $\exp_{p|B(0,\varepsilon)}^F$ es un difeomorfismo en algún abierto conteniendo a U_{p_0} .*

Observación 3.2.5. El teorema de Hopf-Rinow garantiza que en una variedad riemanniana completa existe una geodésica uniendo dos puntos distintos dados. Sin embargo, para curvas magnéticas este tipo de resultados no son ciertos en general (ver [2]).

Ejemplo 3.2.1. En el plano euclídeo \mathbb{R}^2 vimos que las curvas magnéticas producidas por un campo magnético uniforme $F = \mu\Omega_2$ venían dadas por

$$\gamma_{(p,v)}^F(t) = p + \frac{\|v\|}{\mu} (\text{sen}(\mu t + \theta_0), -\text{cos}(\mu t + \theta_0))$$

con $\theta_0 = \text{cte}$. Luego la exponencial magnética será

$$\exp_p^F(v) = \gamma_{(p, \frac{v}{\|v\|})}^F(\|v\|) = p + \frac{1}{\mu} (\text{sen}(\mu \|v\| + \theta_0), -\text{cos}(\mu \|v\| + \theta_0))$$

Analicemos los puntos críticos de la exponencial. Un vector $v \in T_p\mathbb{R}^2$ no nulo es un punto crítico de la exponencial magnética si existe un $w \in T_v(T_p\mathbb{R}^2) \simeq T_p\mathbb{R}^2$ tal que $(\exp_p^F)_{*,v}(w) = 0$.

$$\begin{aligned} (\exp_p^F)_{*,v}(w) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_p^F(v + tw) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_{(p, \frac{v+tw}{\|v+tw\|})}^F(\|v+tw\|) = \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[p + \frac{1}{\mu} (\text{sen}(\mu \|v+tw\| + \theta_0), -\text{cos}(\mu \|v+tw\| + \theta_0)) \right] = \\ &= \frac{1}{\mu} (\text{cos}(\mu \|v\| + \theta_0) \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|}, \text{sen}(\mu \|v\| + \theta_0) \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|}) \end{aligned}$$

Se tiene que $\ker(\exp_p^F)_{*,v} = \{w \in T_p\mathbb{R}^2 / \langle v, w \rangle = 0\}$ y por tanto cualquier $v \neq 0$ es un punto crítico.

3.3. Formulación simpléctica del flujo magnético

Sea F un campo magnético en una variedad riemanniana (M, g) . Vamos a ver que modificando la estructura simpléctica Ω del fibrado tangente TM vista en este capítulo

mediante el campo magnético F podemos describir el flujo magnético a través de un campo hamiltoniano asociado a la nueva estructura simpléctica.

Si Θ es la 1-forma de Poincaré y $\Omega = -d\Theta$ es la 2-forma simpléctica en TM , entonces podemos definir la 2-forma del fibrado tangente asociada a F como

$$\Omega^F = \Omega - \pi^*(F)$$

Es fácil ver que Ω^F es no degenerada, por serlo Ω . Además es cerrada por serlo Ω y F . Se tiene así que Ω^F es una forma simpléctica en TM .

En particular se tiene que $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}(TM)$,

$$\Omega^F(\xi_1, \xi_2) = \langle \pi_*(\xi_1), K(\xi_2) \rangle - \langle K(\xi_1), \pi_*(\xi_2) \rangle - F(\pi_*(\xi_1), \pi_*(\xi_2))$$

A diferencia del operador del flujo geodésico, ξ^G , el generador del flujo magnético ξ^F no es horizontal para la descomposición del fibrado tangente en los subfibrados horizontal y vertical asociados a la conexión de Levi-Civita. En efecto, en un abierto con coordenadas $\{q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n\}$

$$(\xi^F)^H = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} - \sum_{k,i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{q}_i \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \quad ; \quad (\xi^F)^V = \sum_{r,k=1}^n \phi_{rk} \dot{q}_r \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$$

Además es fácil ver que $(\xi^F)^H = \xi^G$ y que $(\xi^F)^V = \phi(\xi^{Liouv})$

El siguiente resultado muestra que el flujo magnético asociado a F es el campo hamiltoniano para la función de energía cinética, $H(p, v) = \frac{1}{2} \|v\|^2$, con respecto a la estructura simpléctica Ω^F .

Proposición 3.3.1. $i_{\xi^F} \Omega^F = dH$

Demostración. Sean $(p, v) \in TM$ y $\xi_{(p,v)} \in T_{(p,v)}TM$. Sabemos que $d_{(p,v)}H(\xi_{(p,v)}) = \langle K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)}), v \rangle = \langle \xi_{(p,v)}^V, v \rangle$. Por otro lado, dado $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$

$$\Omega^F(\xi^F, \xi) = \langle (\xi^F)^H, \xi^V \rangle - \langle (\xi^F)^V, \xi^H \rangle - \langle (\xi^F)^H, \phi(\xi^H) \rangle$$

Sabiendo que $(\xi^F)^H_{(p,v)} = \xi_{(p,v)}^G = v$ y que $(\xi^F)^V_{(p,v)} = \phi(v)$ se sigue que

$$\Omega_{(p,v)}^F(\xi_{(p,v)}^F, \xi_{(p,v)}) = \langle v, \xi_{(p,v)}^V \rangle - \langle \phi(v), \xi_{(p,v)}^H \rangle - \langle v, \phi(\xi_{(p,v)}^H) \rangle = \langle v, \xi_{(p,v)}^V \rangle$$

□

Corolario 3.3.1. *El flujo magnético conserva la forma simpléctica Ω^F , es decir,*

$$(\tau_t^F)^* \Omega^F = \Omega^F$$

3.4. Campos de Jacobi magnéticos

3.4.1. Variaciones de curvas magnéticas

Sea (M, g) una variedad riemanniana completa n -dimensional y fijemos un campo magnético F sobre la misma.

Definición 3.4.1. Una variación de una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longmapsto \delta(t, s) \end{aligned}$$

tal que $\delta(t, 0) = \gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Para cada $s_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, las curvas $\gamma_{s_0}(t) \equiv \delta(t, s_0)$ se denominan curvas principales y para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ las curvas $\gamma^{t_0}(s) \equiv \delta(t_0, s)$ se llaman curvas transversales.

Definición 3.4.2. Una variación de una curva magnética $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ para F

$$\begin{aligned} \delta^F : \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longmapsto \delta^F(t, s) \equiv \gamma_s(t) \end{aligned}$$

se dice magnética si además $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ las curvas $\gamma_s(t)$ son también curvas magnéticas para F , esto es, $\frac{D\dot{\gamma}_s(t)}{dt} = \phi(\gamma_s(t))$

Sea una variación magnética $\delta^F : \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ de una curva magnética $\gamma(t)$. Denotaremos por T y S a los campos de velocidades de las curvas principales y transversales respectivamente. Ambos son campos vectoriales a lo largo del morfismo δ^F definidos mediante

$$T(t, s) = \delta_{*,(t,s)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,s)} \right) = \frac{d\gamma_s(t)}{dt} = \dot{\gamma}_s(t) \quad , \quad S(t, s) = \delta_{*,(t,s)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(t,s)} \right) = \frac{d\gamma^t(s)}{ds} = \dot{\gamma}^t(s)$$

Localmente, si $\delta^F(t, s) = (q_1(t, s), \dots, q_n(t, s))$, se tiene que

$$T(t, s) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial t}(t, s) \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \right)_{\delta^F(t,s)} \quad , \quad S(t, s) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial s}(t, s) \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \right)_{\delta^F(t,s)}$$

Observación 3.4.1. En lo que sigue y teniendo en cuenta el Anexo denotaremos también por ∇ al operador de derivación covariante de los campos vectoriales a lo largo del morfismo δ^F sobre la variedad riemanniana (M, g) inducido por la conexión de Levi-Civita ∇ . Por comodidad denotaremos las derivadas covariantes con respecto de los campos T y S indistintamente por $T^\nabla = \frac{D}{dt}$ y $S^\nabla = \frac{D}{ds}$.

Teniendo en cuenta que cada $\gamma_s(t)$ es una curva magnética se tiene que $T^\nabla T = \phi(T)$ a lo largo del morfismo δ^F .

Lema 3.4.1. Se verifica que $\frac{DT}{ds} = \frac{DS}{dt}$ y como consecuencia $[S, T] = 0$.

Demostración. Basta demostrar la igualdad localmente. Si tomamos un abierto donde $\delta^F(t, s)$ viene descrita por las funciones $q_k(t, s)$, $1 \leq k \leq n$, tenemos

$$\frac{DS}{dt} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^2 q_k}{\partial t \partial s} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{\partial q_j}{\partial s} (\Gamma_{ij}^k \circ \delta^F) \right] \frac{\partial}{\partial q_k} \quad ; \quad \frac{DT}{ds} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^2 q_k}{\partial t \partial s} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{\partial q_j}{\partial s} (\Gamma_{ji}^k \circ \delta^F) \right] \frac{\partial}{\partial q_k}$$

que son iguales por ser ∇ una conexión simétrica. Además, como ∇ no tiene torsión, $0 = \text{Tor}_\nabla(T, S) = T^\nabla S - S^\nabla T - [T, S] = -[T, S]$. \square

Lema 3.4.2. Se da la igualdad $\frac{D^2 S}{dt^2} = R_\nabla(T, S)T + \frac{D}{ds}(\phi(T))$ siendo R_∇ el endomorfismo de curvatura de la conexión ∇ .

Demostración. $R_{\nabla}(T, S)T = T^{\nabla}S^{\nabla}T - S^{\nabla}T^{\nabla}T = T^{\nabla}T^{\nabla}S - S^{\nabla}\phi(T) = \frac{D^2}{dt^2}S - \frac{D}{ds}(\phi(T))$. \square

Definición 3.4.3. Dada una curva magnética $\gamma(t)$ para F en (M, g) y una variación magnética de la misma, $\delta^F : \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, llamamos campo variacional o variación infinitesimal de δ^F al campo V^{δ^F} con soporte la curva $\gamma(t)$ dado por

$$V^{\delta^F}(t) = S(t, 0) = \dot{\gamma}^t(0) = \left. \frac{d\gamma^t(s)}{ds} \right|_{s=0} = \delta_{*,(t,0)} \left(\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{(t,0)} \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

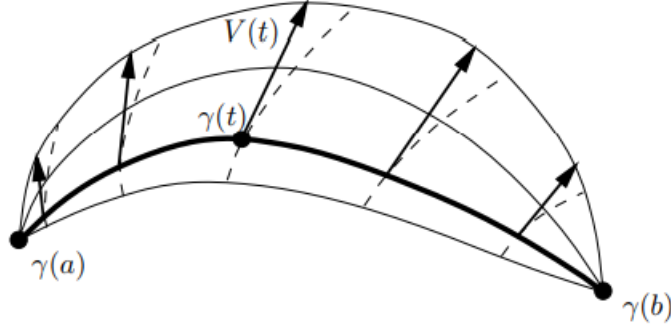


Figura 3.3: Campo variacional de una variación propia

Observación 3.4.2. Por sencillez denotaremos al campo V^{δ^F} también por V .

Definición 3.4.4. Si V^{δ^F} es el campo variacional de una variación magnética δ^F de una curva magnética $\gamma(t)$, escribiremos $V^{\nabla}\dot{\gamma} = (S^{\nabla}T)(t, 0)$.

Observación 3.4.3. Como $S^{\nabla}T = T^{\nabla}S$, se verifica que $V^{\nabla}\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^{\nabla}V$. De manera análoga si se define $[\dot{\gamma}, V] = [T, S](t, 0)$, entonces $[\dot{\gamma}, V] = 0$ ya que $[T, S] = 0$.

Ejemplo 3.4.1. En el espacio euclídeo \mathbb{R}^2 sabemos que las trayectorias magnéticas de un campo magnético uniforme $F = \mu\Omega_g$ vienen dadas por $\gamma(t) = (x_0 + \frac{1}{\mu}\sin(\mu t + \theta_0), y_0 - \frac{1}{\mu}\cos(\mu t + \theta_0))$. Una posible variación magnética de $\gamma(t)$ es

$$\delta^F(t, s) = (x_0 + \frac{1}{\mu}(1 - \mu s)\sin(\mu t + \theta_0), y_0 - \frac{1}{\mu}(1 - \mu s)\cos(\mu t + \theta_0))$$

cuyo campo variacional es $V^{\delta^F}(t) = \sin(\mu t + \theta_0)(\frac{\partial}{\partial x})_{\gamma(t)} + \cos(\mu t + \theta_0)(\frac{\partial}{\partial y})_{\gamma(t)}$.

3.4.2. La ecuación de Jacobi magnética

Proposición 3.4.1. Sea V una variación magnética infinitesimal de una curva magnética $\gamma(t)$. Entonces, V verifica la ecuación

$$\frac{D^2V}{dt^2} = (V^{\nabla}\phi)(\dot{\gamma}) + \phi(\dot{\gamma}^{\nabla}V) + R_{\nabla}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}$$

siendo R_{∇} el endomorfismo de curvatura de la conexión de Levi-Civita ∇ de (M, g) .

Demostración. Dado que $\dot{\gamma}(t) = T(t, 0)$ y que $V(t) = S(t, 0)$, por el lema (3.4.2), se tiene que $\frac{D^2V}{dt^2} = R_{\nabla}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma} + V^{\nabla}(\phi(\dot{\gamma})) = (V^{\nabla}\phi)(\dot{\gamma}) + \phi(V^{\nabla}\dot{\gamma}) + R_{\nabla}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}$ y como $V^{\nabla}\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^{\nabla}V$ se concluye. \square

Definición 3.4.5. Dada una curva magnética $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ asociada al campo magnético F , llamaremos campo de Jacobi magnético a lo largo de $\gamma(t)$ a cualquier campo vectorial con soporte dicha curva, $J \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$, que satisfaga la ecuación

$$\frac{D^2J}{dt^2} = J^{\nabla}(\phi(\dot{\gamma})) + R_{\nabla}(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = (J^{\nabla}\phi)(\dot{\gamma}) + \phi(J^{\nabla}\dot{\gamma}) + R_{\nabla}(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}$$

llamada ecuación de Jacobi magnética asociada a F . Al conjunto de dichos campos lo denotaremos $Jac(\gamma(t), F)$.

Como la ecuación de Jacobi magnética es una ecuación de segundo orden \mathbb{R} -lineal, toda solución quedará determinada por su valor y el de su derivada (covariante) en un punto de la curva. Es decir, se cumple:

Lema 3.4.3. Dos campos de Jacobi magnéticos, J_1, J_2 , sobre la curva magnética $\gamma(t)$ son iguales si y solo si existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $J_1(t_0) = J_2(t_0)$ y $\frac{DJ_1}{dt}(t_0) = \frac{DJ_2}{dt}(t_0)$ y se tiene que $Jac(\gamma, F)$, es un espacio vectorial de dimensión $2n$.

Observación 3.4.4. Un campo de Jacobi $J \in Jac(\gamma(t), F)$ puede ser entendido como una curva en el fibrado tangente $\mathcal{J} : \mathbb{R} \rightarrow TM$, $\mathcal{J}(t) = (\gamma(t), J(t))$.

Sea $\xi_{(p,v)} \in T_{(p,v)}TM$ y sea $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$, $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), Z(t))$, una curva en el fibrado tangente adaptada a $\xi_{(p,v)}$. Entonces la aplicación

$$\delta_{\xi_{(p,v)}}^F(t, s) = \pi \circ \tau_t^F(\bar{\gamma}(s))$$

da lugar a una variación magnética de $\gamma(t) = \pi(\tau_t^F(p, v))$ pues para cada $s_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la curva $\gamma_{s_0}(t) = \pi \circ \tau_t^F(\bar{\gamma}(s_0))$ es magnética por construcción. Entonces, si denotamos a su campo variacional por $J_{\xi_{(p,v)}}(t)$, se tiene que

$$J_{\xi_{(p,v)}}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \pi \circ \tau_t^F(\bar{\gamma}(s))$$

En particular,

$$J_{\xi_{(p,v)}}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} (\pi \circ \tau_t^F)(\bar{\gamma}(s)) = (\pi \circ \tau_t^F)_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)}) = \pi_{*,\tau_t^F(p,v)} \circ (\tau_t^F)_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)})$$

con lo que $J_{\xi_{(p,v)}}(0) = \pi_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)})$. Por otro lado, su derivada covariante verifica

$$\begin{aligned} \frac{DJ_{\xi_{(p,v)}}}{dt}(t) &= \frac{D}{dt} \left(\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} (\pi \circ \tau_t^F)(\bar{\gamma}(s)) \right) = \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\pi \circ \tau_t^F)(\bar{\gamma}(s)) \right) = \\ &= \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} \tau_t^F(\bar{\gamma}(s)) = K_{\tau_t^F(p,v)} \circ (\tau_t^F)_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)}) \end{aligned}$$

y por tanto, $\frac{DJ_{\xi_{(p,v)}}}{dt}(0) = K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)})$.

Entonces, teniendo en cuenta el isomorfismo $(\pi_*, K) : T(TM) \simeq \pi^*(TM) \oplus \pi^*(TM)$ se tiene que

Lema 3.4.4. $(\tau_t^F)_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)}) = (J_{\xi_{(p,v)}}(t), \frac{D}{dt}J_{\xi_{(p,v)}}(t))$ para cada $\xi_{(p,v)} \in T_{(p,v)}(TM)$.

Estos hechos y que la dimensión del espacio de los campos de Jacobi coincide con la de TM , demuestran el siguiente

Teorema 3.4.1. Sea $\gamma(t)$ la curva magnética para F que para $t = 0$ pasa por $p \in M$ con velocidad $v \in T_pM$. Entonces, se tiene el isomorfismo lineal

$$\begin{aligned} T_{(p,v)}TM &\longrightarrow \text{Jac}(\gamma, F) \\ \xi_{(p,v)} &\longmapsto J_{\xi_{(p,v)}} \end{aligned}$$

definido anteriormente, y cuya inversa viene determinada por

$$\xi_{(p,v)} = (\pi_{*,(p,v)}(\xi_{(p,v)}), K_{(p,v)}(\xi_{(p,v)})) = (J(0), \frac{DJ}{dt}(0))$$

Teorema 3.4.2. Todo campo de Jacobi magnético, J , sobre una curva magnética $\gamma(t)$ para F es el campo variacional de una variación magnética de dicha curva.

Demostración. Vamos a construir una variación magnética δ^F de $\gamma(t)$ a partir de J siguiendo las ideas de [27].

Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ tomemos la única geodésica $\sigma^{t_0}(s)$ de M tal que $\sigma^{t_0}(0) = \gamma(t_0)$ y $\dot{\sigma}^{t_0}(0) = J(t_0)$. Consideremos ahora los campos vectoriales $V_{t_0}(s)$ y $W_{t_0}(s)$ con soporte la curva $\sigma^{t_0}(s)$ definidos mediante el traslado paralelo desde el punto $\gamma(t_0)$ al punto $\gamma(s)$ de los vectores $\dot{\gamma}(t_0)$ y $\frac{DJ}{dt}(t_0)$ respectivamente. Por tanto, $(\dot{\sigma}^{t_0 \nabla} V_{t_0})(s) = 0$, $V_{t_0}(0) = \dot{\gamma}(t_0)$ y también $(\dot{\sigma}^{t_0 \nabla} W_{t_0})(s) = 0$, $W_{t_0}(0) = \frac{DJ}{dt}(t_0)$. Definimos entonces el campo vectorial $H_{t_0}(s)$ con soporte la curva $\sigma^{t_0}(s)$, mediante

$$H_{t_0}(s) = V_{t_0}(s) + sW_{t_0}(s)$$

Este campo cumple que $H_{t_0}(0) = V_{t_0}(0) = \dot{\gamma}(t_0)$ y que $(\dot{\sigma}^{t_0 \nabla} H_{t_0})(s) = W_{t_0}(0) = \frac{DJ}{dt}(t_0)$. Finalmente, definimos la variación $\delta^F(t, s) := \gamma_s(t)$, donde las curvas $\gamma_s(t)$ son magnéticas para F con condiciones iniciales $\gamma_s(t_0) = \sigma^{t_0}(s)$, $\dot{\gamma}_s(t_0) = H_{t_0}(s)$.

Por construcción δ^F es una variación magnética de γ , solo queda comprobar que su campo variacional, $V^{\delta^F}(t) = S(t, 0)$, coincide con J , para ello utilizaremos el lema (3.4.3). Observemos que $T(t_0, s) = H_{t_0}(s)$ y que $S(t_0, s) = \dot{\sigma}^{t_0}(s)$. Entonces, $V^{\delta^F}(t_0) = S(t_0, 0) = \dot{\sigma}^{t_0}(0) = J(t_0)$ y $\frac{DV^{\delta^F}}{dt}(t_0) = \frac{DS}{dt}(t_0, 0) = \frac{DT}{ds}(t_0, 0) = (\dot{\sigma}^{t_0 \nabla} H_{t_0})(0) = \frac{DJ}{dt}(t_0)$ con lo que se concluye. \square

Observación 3.4.5. En el estudio del flujo geodésico de una variedad riemanniana la existencia de una pareja de puntos conjugados a lo largo de geodésicas es equivalente a la existencia de valores singulares de la aplicación exponencial (ver [8] p. 68). En el caso magnético esta equivalencia no se da, surgiendo dos conceptos de puntos conjugados: uno asociado a los campos de Jacobi magnéticos y otro a la exponencial magnética (ver [13]).

Definición 3.4.6. Sean $p = \gamma(a)$ y $q = \gamma(b)$ dos puntos distintos de una curva magnética γ para F . Se dice que p y q son conjugados bajo F a lo largo de γ si existe un campo de Jacobi magnético asociado a F a lo largo γ que se anula en $t = a$ y $t = b$

3.4.3. Campos de Jacobi magnéticos tangenciales y especiales

Recordemos que el conjunto de los campos de Jacobi geodésicos tangentes a una geodésica $\gamma(t)$ riemanniana es un espacio vectorial de dimensión 2 y generado por $\dot{\gamma}(t)$ y $t\dot{\gamma}(t)$ (ver [23] p. 58). En el caso de los campos de Jacobi magnéticos este espacio es unidimensional.

Lema 3.4.5. *Para cada $a \in \mathbb{R}$, el campo vectorial $V(t) = a\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$ sobre una curva magnética $\gamma(t)$ es un campo de Jacobi magnético que se obtiene a partir de la variación magnética $\delta^F(t, s) = \gamma(t + as)$.*

Demostración. $\frac{D^2}{dt^2}V = a\frac{D^2}{dt^2}\dot{\gamma} = a(\dot{\gamma}^\nabla \phi(\dot{\gamma})) = V^\nabla \phi(\dot{\gamma})$. Teniendo en cuenta que $R_\nabla(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma} = aR_\nabla(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$, vemos que $V(t)$ verifica la ecuación de Jacobi. Además, por la regla de la cadena, $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\gamma(t + as) = a\dot{\gamma}(t)$. \square

Observación 3.4.6. El campo vectorial $V(t) = t\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$ no es de Jacobi magnético. Veamos que no satisface la ecuación de Jacobi magnética.

Por un lado, $\frac{D^2}{dt^2}(t\dot{\gamma}) = 2\phi(\dot{\gamma}) + t\dot{\gamma}^\nabla(\phi(\dot{\gamma}))$ y por otro, $V^\nabla(\phi(\dot{\gamma})) + R_\nabla(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma} = t\dot{\gamma}^\nabla\phi(\dot{\gamma})$. Vemos que no se da la igualdad salvo que $\phi = 0$ (caso geodésico). Esto es debido a que el flujo magnético para F no es invariante bajo reparametrizaciones del tipo $\delta^F(t, s) = \gamma(e^st)$.

Proposición 3.4.2. *Sea $\gamma(t)$ una curva magnética para F y sea $J \in \text{Jac}(\gamma, F)$ un campo de Jacobi magnético, entonces la función $\langle \frac{DJ}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$ es constante a lo largo de $\gamma(t)$.*

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \frac{DJ}{dt}, \dot{\gamma} \rangle &= \langle \frac{D^2J}{dt^2}, \dot{\gamma} \rangle + \langle \frac{DJ}{dt}, \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \rangle = \langle \frac{D^2J}{dt^2}, \dot{\gamma} \rangle + \langle \frac{DJ}{dt}, \phi(\dot{\gamma}) \rangle = \\ &= \langle \frac{D^2J}{dt^2}, \dot{\gamma} \rangle - \langle \phi(\frac{DJ}{dt}), \dot{\gamma} \rangle = \langle \frac{D^2J}{dt^2} - \phi(\frac{DJ}{dt}), \dot{\gamma} \rangle = \\ &= \langle (J^\nabla \phi)(\dot{\gamma}) + \phi(J^\nabla \dot{\gamma}) + R_\nabla(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} - \phi(\dot{\gamma}^\nabla J), \dot{\gamma} \rangle = \\ &= \langle (J^\nabla \phi)(\dot{\gamma}) + R_\nabla(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $J^\nabla \dot{\gamma} = \dot{\gamma}^\nabla J$ y la última igualdad se sigue de lo siguiente

$\langle (J^\nabla \phi)(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle = \langle J^\nabla \phi(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle - \langle \phi(J^\nabla \dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle = \langle J^\nabla \phi(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle + \langle J^\nabla \dot{\gamma}, \phi(\dot{\gamma}) \rangle = J^\nabla \langle \phi(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle = 0$ y también $\langle R_\nabla(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = R(\dot{\gamma}, J, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ por las propiedades de hemisimetría del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel. \square

Definición 3.4.7. *Un campo de Jacobi magnético a lo largo de una curva magnética $\gamma(t)$ se dice especial si $\langle \frac{DJ}{dt}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$*

3.4.4. Campos de Jacobi magnéticos para campos magnéticos uniformes

Sea F un campo magnético uniforme, es decir, con $\nabla F = 0$, y sea $\gamma(t)$ una curva magnética suya. La ecuación de Jacobi magnética asociada a γ y F será entonces

$$\frac{D^2J}{dt^2} = R_\nabla(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} + \phi(\dot{\gamma}^\nabla J)$$

Consideremos una base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ de $T_{\gamma(0)}M$ donde elegimos $u_1 = \frac{\dot{\gamma}(0)}{v}$ con $v = \|\dot{\gamma}(0)\|$. Definimos los campos vectoriales $\{V_1(t), \dots, V_n(t)\}$ con soporte la curva $\gamma(t)$ como los únicos campos vectoriales que verifican

$$\begin{cases} \frac{DV_i}{dt} = \phi(V_i) \\ V_i(0) = u_i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$$

Lema 3.4.6. *Los campos $\{V_1(t), \dots, V_n(t)\}$ anteriormente definidos son una referencia móvil ortonormal de $\gamma(t)$, es decir, $\langle V_i(t), V_j(t) \rangle = \delta_{ij}$ con $1 \leq i, j \leq n$. Además las funciones $\phi_{ij}(t) = \langle \phi(V_i(t)), V_j(t) \rangle$ son constantes y cumplen que $\phi_{ij} = -\phi_{ji}$ por ser ϕ antisimétrico.*

Demostración. $\frac{d}{dt} \langle V_i, V_j \rangle = \langle \frac{DV_i}{dt}, V_j \rangle + \langle V_i, \frac{DV_j}{dt} \rangle = \langle \phi(V_i), V_j \rangle + \langle V_i, \phi(V_j) \rangle = 0$ y como $\langle V_i(0), V_j(0) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$, llegamos a que $\langle V_i(t), V_j(t) \rangle = \delta_{ij}$.

Que las funciones $\phi_{ij}(t)$ son constantes se deduce de la uniformidad de F . En efecto, como $0 = (D^\nabla \phi)(D') = D^\nabla \phi(D') - \phi(D^\nabla D')$ para todo $D, D' \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene que $D^\nabla \phi(D') = \phi(D^\nabla D')$. Entonces, $\frac{d}{dt} \phi_{ij}(t) = \frac{d}{dt} \langle \phi(V_i), V_j \rangle = \langle \frac{D}{dt} \phi(V_i), V_j \rangle + \langle \phi(V_i), \frac{DV_j}{dt} \rangle = \langle \phi(\frac{DV_i}{dt}), V_j \rangle + \langle \phi(V_i), \phi(V_j) \rangle = \langle \phi^2(V_i), V_j \rangle - \langle \phi^2(V_i), V_j \rangle = 0$ \square

Si $J(t)$ es un campo de Jacobi a lo largo de $\gamma(t)$, respecto de la referencia ortonormal $\{V_1(t), \dots, V_n(t)\}$, este se escribirá,

$$J(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) V_i(t)$$

donde $f_1(t)V_1(t)$ es la parte tangencial a la curva $\gamma(t)$ y $\sum_{i=2}^n f_i(t)V_i(t)$ la parte normal. Vamos a expresar la ecuación de Jacobi magnética en términos de esta referencia.

Se tiene que $\frac{DJ}{dt}(t) = \sum_k \dot{f}_k(t)V_k(t) + f_k(t)\frac{DV_k}{dt}(t) = \sum_k \dot{f}_k(t)V_k(t) + f_k(t)\phi(V_k(t))$ y como $\phi(V_k(t)) = \sum_r \langle \phi(V_k(t), V_r(t)) \rangle V_r(t) = \sum_r \phi_{kr} V_r(t)$, sustituyendo resulta

$$\frac{DJ}{dt}(t) = \sum_{k=1}^n \dot{f}_k(t)V_k(t) + \sum_{k,r=1}^n f_k(t)\phi_{kr}V_r(t) = \sum_{r=1}^n [f_r(t) + \sum_{s=1}^n f_s(t)\phi_{sr}]V_r(t)$$

Unos cálculos sencillos muestran que

$$\begin{aligned} \frac{D^2J}{dt^2}(t) &= \sum_{k=1}^n [\ddot{f}_k(t) + \sum_{s=1}^n \dot{f}_s(t)\phi_{sk} + \sum_{r=1}^n \dot{f}_r(t)\phi_{rk} + \sum_{r,s=1}^n f_s(t)\phi_{sr}]V_k(t) \\ \phi\left(\frac{DJ}{dt}(t)\right) &= \sum_{k=1}^n \left[\sum_{r=1}^n \dot{f}_r(t)\phi_{rk} + \sum_{s,r=1}^n f_s(t)\phi_{sr}\phi_{rk} \right]V_k(t) \\ R_\nabla(\dot{\gamma}(t), J(t))\dot{\gamma}(t) &= \sum_{k,s=1}^n f_s(t)R_{sk}(t)V_k(t) \end{aligned}$$

donde $R_{sk}(t) := \langle R_\nabla(\dot{\gamma}(t), V_s(t)), V_k(t) \rangle$. Como $\phi_{rk} = -\phi_{kr}$, la ecuación de Jacobi magnética conduce al sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\ddot{f}_k(t) + \sum_{s=1}^n \dot{f}_s(t)\phi_{sk} - \sum_{s=1}^n f_s(t)R_{sk}(t) = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

Denotemos por M a la matriz antisimétrica $(\phi_{sk})^t$, por $R(t)$ a la matriz simétrica $(-R_{sk}(t))^t$ y por $X(t)$ al vector columna $(f_k(t))$. Entonces, la ecuación de Jacobi magnética se escribe en forma matricial

$$\ddot{X}(t) + M\dot{X}(t) + R(t)X(t) = 0$$

Si hacemos el cambio de variable $Y(t) = e^{\frac{t}{2}M}X(t)$, Resulta la ecuación de Ricatti $\ddot{Y}(t) + U(t)Y(t) = 0$, donde $U(t) = e^{\frac{t}{2}M}(R(t) + \frac{1}{4}M^tM)e^{-\frac{t}{2}M}$. Finalmente, definiendo $A(t)$ mediante $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ llegamos a la ecuación

$$\dot{A}(t) + A(t)^2 + U(t) = 0$$

Observación 3.4.7. Si el campo no fuera uniforme, entonces $\nabla\phi \neq 0$ y la ecuación de Jacobi magnética se escribiría (ver [12])

$$\sum_{i=1}^n \ddot{f}_i V_i + \sum_{i=1}^n \ddot{f}_i \phi(V_i) + \sum_{i=1}^n f_i [-R_{\nabla}(\dot{\gamma}, V_i)\dot{\gamma} + (\dot{\gamma}^{\nabla}\phi)(V_i) - (V_i^{\nabla}\phi)(\dot{\gamma})] = 0$$

Observación 3.4.8. Otra forma de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales anterior es estudiando independientemente las componentes tangencial y normal del campo de Jacobi magnético. Para la componente tangencial tenemos la ecuación

$$0 = \ddot{f}_1(t) + \sum_{s=1}^n \dot{f}_s(t)\phi_{s1} - \sum_{s=1}^n f_s(t)R_{s1}(t)$$

Ahora bien, como $R_{s1} = vR(\dot{\gamma}, V_s, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0 \quad \forall s$, la ecuación queda

$\ddot{f}_1(t) + \sum_{s=1}^n \dot{f}_s(t)\phi_{s1} = 0$ y por tanto, $\dot{f}_1(t) + \sum_{s=1}^n f_s(t)\phi_{s1} = c \in \mathbb{R}$.

Además, $\sum_{s=1}^n f_s(t)\phi_{s1} = \sum_{s=1}^n f_s(t) \langle \phi(V_s(t)), V_1(t) \rangle = \langle \phi(J(t)), \frac{1}{v}\dot{\gamma}(t) \rangle$, por lo que dicha ecuación se expresa,

$$\dot{f}_1(t) = c - \frac{1}{v} \langle \phi(J(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

pero dado que, $f_1 = \langle J, \frac{1}{v}\dot{\gamma} \rangle$, entonces $\dot{f}_1 = \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \langle J, \dot{\gamma} \rangle = \frac{1}{v} [\langle \frac{DJ}{dt}, \dot{\gamma} \rangle - \langle \phi(J), \dot{\gamma} \rangle]$ y se tiene $c = \frac{1}{v} \langle \frac{DJ}{dt}, \dot{\gamma} \rangle$.

Introduciendo la ecuación de la parte tangencial en las restantes ecuaciones y operando obtenemos las ecuaciones que determinan la parte ortogonal de los campos de Jacobi magnéticos

$$0 = \ddot{f}_i \delta_{ij} + \sum_{i=2}^n \dot{f}_i \langle \phi(V_i), V_j \rangle - \sum_{i=2}^n f_i \langle \hat{R}(V_i), V_j \rangle + \frac{c}{v^2} \langle \phi(\dot{\gamma}), V_j \rangle \quad j \geq 2$$

con $\hat{R}(V_i) = R_{\nabla}(\dot{\gamma}, V_i)\dot{\gamma} + \frac{1}{v^2} \langle \phi(\dot{\gamma}), V_i \rangle \phi(\dot{\gamma})$.

3.4.5. Campos de Jacobi magnéticos en superficies de Riemann orientadas

Sea (M, g) una variedad riemanniana bidimensional orientada y sea Ω_g su elemento de área. Denotaremos por φ al campo tensorial de tipo $(1, 1)$ definido por $\Omega_g(X, Y) = \langle X, \varphi(Y) \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, que induce una rotación de $\frac{\pi}{2}$ en sentido antihorario en el espacio tangente de M . Sea $F = \mu\Omega_g$, con $\mu \neq 0$, un campo magnético uniforme, entonces $\phi = \mu\varphi$. Queremos calcular los campos de Jacobi magnéticos asociados a (M, g, F) sobre

una curva magnética arbitraria.

Dada una curva magnética $\gamma(t)$ para F , consideremos la referencia móvil ortonormal

$$V_1(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{v} \quad V_2(t) = \frac{\varphi(\dot{\gamma}(t))}{v}$$

donde $v = \|\dot{\gamma}(t)\| = cte$. Observemos que estamos en las hipótesis anteriores pues el campo F es uniforme y esta referencia ortonormal cumple:

$$\begin{aligned} \frac{DV_1}{dt} &= \frac{1}{v} \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \frac{1}{v} \phi(\dot{\gamma}) = \phi(V_1) \\ \frac{DV_2}{dt} &= \frac{1}{v} \frac{D}{dt}(\varphi(\dot{\gamma})) = \frac{1}{v} \varphi\left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}\right) = \frac{1}{v} \varphi(\mu \varphi(\dot{\gamma})) = \mu \varphi\left(\frac{\varphi(\dot{\gamma})}{v}\right) = \phi(V_2) \end{aligned}$$

Donde hemos usado que $\nabla\phi = 0$. Además como ϕ es una rotación se cumple que

$$\frac{DV_1}{dt} = \mu V_2 \quad \frac{DV_2}{dt} = -\mu V_1$$

Consideremos el campo $J(t) = f_1(t)V_1(t) + f_2(t)V_2(t) \in \mathfrak{X}\gamma(t)$, busquemos las condiciones que deben satisfacer $f_1(t)$ y $f_2(t)$ para que $J \in Jac(\gamma, F)$.

Calculemos previamente los coeficientes ϕ_{ij} y las funciones $R_{ij}(t)$ explicadas en el apartado anterior

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \langle \phi(V_1), V_1 \rangle = \langle \mu V_2, V_1 \rangle = 0 & R_{11}(t) &= v^2 R(V_1, V_1, V_1, V_1) = 0 \\ \phi_{12} &= \langle \phi(V_1), V_2 \rangle = \langle \mu V_2, V_2 \rangle = \mu = -\phi_{21} & R_{12}(t) &= v^2 R(V_1, V_1, V_1, V_2) = 0 = R_{21} \\ \phi_{22} &= \langle \phi(V_2), V_2 \rangle = \langle -\mu V_2, V_2 \rangle = 0 & R_{22}(t) &= v^2 R(V_1, V_2, V_1, V_2) = v^2(-K(t)) \end{aligned}$$

donde $K(t) = \frac{R(V_1, V_2, V_2, V_1)}{\|V_1 \times V_2\|^2}$ es la curvatura seccional de la variedad en el punto $\gamma(t)$.

Entonces $J(t)$ es un campo de Jacobi magnético si se satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$0 = \begin{pmatrix} \ddot{f}_1 \\ \ddot{f}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v^2 \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \ddot{f}_1(t) - \mu \dot{f}_2(t) \\ 0 = \ddot{f}_2(t) + \mu \dot{f}_1(t) + v^2 K(t) f_2(t) \end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce que $\dot{f}_1(t) - \mu f_2(t) = c \in \mathbb{R}$ y por tanto,

$$\dot{f}_1(t) = c + \mu f_2(t)$$

donde, como vimos antes, $c = \langle \frac{D}{dt} J, \dot{\gamma} \rangle$. Sustituyendo en la segunda obtenemos la ecuación $\ddot{f}_2(t) + \mu(c + \mu f_2(t)) + v^2 \kappa(t) f_2(t) = 0$ y por tanto,

$$\ddot{f}_2(t) = \mu c - (\mu^2 + v^2 K(t)) f_2(t)$$

A continuación determinaremos las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales en los tres ejemplos básicos de superficies orientadas simplemente conexas de curvatura seccional constante. Además por sencillez nos limitaremos al caso en el que $c = \langle \frac{D}{dt} J, \dot{\gamma} \rangle = 0$, esto es determinaremos solo los denominados campos de Jacobi magnéticos especiales.

Ejemplo 3.4.2. El plano euclídeo ($K = 0$)

Las ecuaciones de los campos de Jacobi especiales son

$$\begin{cases} 0 = \ddot{f}_1 - \mu \dot{f}_2 \\ 0 = \ddot{f}_2 + \mu^2 \dot{f}_1 \end{cases}$$

cuya solución general es

$$J(t) = [c_1 \sin(\mu t) - c_2 \cos(\mu t) + a]V_1(t) + [c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t)]V_2(t) \quad \forall a, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.4.3. La esfera ($K > 0$)

Las ecuaciones de los campos de Jacobi especiales son

$$\begin{cases} 0 = \ddot{f}_1 - \mu \dot{f}_2 \\ 0 = \ddot{f}_2 + (\mu^2 + K) \dot{f}_1 \end{cases}$$

La solución general es

$$J(t) = \left[\frac{K c_1}{\sqrt{\mu^2 + K}} \sin(\sqrt{\mu^2 + K} t) - \frac{K c_2}{\sqrt{\mu^2 + K}} \cos(\sqrt{\mu^2 + K} t) + a \right] V_1(t) + \\ + \left[c_1 \cos(\sqrt{\mu^2 + K} t) + c_2 \sin(\sqrt{\mu^2 + K} t) \right] V_2(t) \quad \forall a, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.4.4. El plano hiperbólico ($K < 0$)

Las ecuaciones de los campos de Jacobi son las formalmente las mismas que en la esfera.

Sin embargo, ahora existen tres casos según el signo de $\mu^2 + K$

A) Si $\mu^2 + K > 0$

$$J(t) = \left[\frac{K c_1}{\sqrt{\mu^2 + K}} \sin(\sqrt{\mu^2 + K} t) - \frac{K c_2}{\sqrt{\mu^2 + K}} \cos(\sqrt{\mu^2 + K} t) + a \right] V_1(t) + \\ + \left[c_1 \cos(\sqrt{\mu^2 + K} t) + c_2 \sin(\sqrt{\mu^2 + K} t) \right] V_2(t) \quad \forall a, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

B) Si $\mu^2 + K = 0$

$$J(t) = \left[\frac{K c_1}{2} t^2 + K c_2 t + a \right] V_1(t) + [c_1 t + c_2] V_2(t) \quad \forall a, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

C) Si $\mu^2 + K < 0$

$$J(t) = \left[\frac{K c_1}{\sqrt{|\mu^2 + K|}} \operatorname{sh}(\sqrt{|\mu^2 + K|} t) + \frac{K c_2}{\sqrt{|\mu^2 + K|}} \operatorname{ch}(\sqrt{|\mu^2 + K|} t) + a \right] V_1(t) + \\ + \left[c_1 \operatorname{ch}(\sqrt{|\mu^2 + K|} t) + c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{|\mu^2 + K|} t) \right] V_2(t) \quad \forall a, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Capítulo 4

Variación de la energía magnética de Landau-Hall

4.1. Primera variación de la energía magnética

Sea (M, g) una variedad riemanniana con conexión de Levi-Civita asociada ∇ . La energía de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ se define como la funcional $\frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$. Es bien conocido, que las curvas de energía mínima en dicho intervalo son las curvas geodésicas (ver [17]). Una cuestión que se podría plantear es si existe una funcional análoga a la energía de manera que las curvas que la minimicen sean las curvas magnéticas. Como veremos a continuación cuando el campo magnético es exacto y uniforme dicha funcional existe y se denomina energía de Landau-Hall, en la literatura física, ya que ha sido utilizada en el estudio de las corrientes eléctricas Hall bajo la acción de campos magnéticos uniformes.

En esta sección asumiremos que el campo magnético F es exacto $F = dA \in \Lambda^2(M)$ y uniforme $\nabla F = 0$.

Lema 4.1.1. *Se tiene que $F = dA$, $F(D_1, D_2) = (D_1^\nabla A)(D_2) - (D_2^\nabla A)(D_1)$.*

Demostración. Trivial ya que $(d\omega)(D_1, D_2) = (D_1^\nabla \omega)(D_2) - (D_2^\nabla \omega)(D_1)$, $\forall \omega \in \Lambda^1(M)$. \square

Definición 4.1.1. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, una curva arbitraria (no necesariamente magnética) en (M, g) . Se denomina energía magnética o de Landau-Hall de la curva $\gamma(t)$ debida al campo magnético $F = dA$, al número real*

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt + \int_a^b A_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$$

Recordemos que una variación de la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \delta : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longmapsto \delta^F(t, s) \equiv \gamma_s(t) \end{aligned}$$

tal que $\delta(t, 0) \equiv \gamma_0(t) = \gamma(t) \quad \forall t \in [a, b]$ y que la variación δ se decía propia si dejaba fijos los extremos, es decir, $\gamma_s(a) = \gamma(a)$ y $\gamma_s(b) = \gamma(b)$, $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Dada una variación $\delta : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, de la curva $\gamma(t) = \gamma_0(t)$ podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \mathcal{E}_\delta(s) = \mathcal{E}(\gamma_s) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 dt + \int_a^b A_{\gamma_s(t)}(\dot{\gamma}_s(t)) dt \end{aligned}$$

que asocia a cada curva de la variación su energía de Landau-Hall.

Definición 4.1.2. *La curva $\gamma(t)$ es un punto crítico (curva crítica) de la energía de Landau-Hall si para toda variación propia δ se verifica*

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_\delta(s)}{ds} \right|_{s=0} = \int_a^b \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left[\frac{1}{2} \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 + A_{\gamma_s(t)}(\dot{\gamma}_s(t)) \right] dt = 0$$

La denominada fórmula de la primera variación de la energía de Landau-Hall mostrará que estos puntos críticos son las curvas magnéticas para $F = dA$. Para demostrar esta afirmación haremos uso de la teoría de campos vectoriales diferenciales a lo largo de un morfismo de variedades riemannianas incluida en el Anexo.

Dada la variación $\delta : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ de la curva $\gamma(t)$, los campos vectoriales a lo largo de dicho morfismo son las secciones, V , del fibrado vectorial

$$p_1 : \delta^{-1}(TM) \rightarrow [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

donde $\delta^{-1}(M) = \{((t, s), V_{\delta(t,s)}) \in ([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \times TM\}$ es el pull-back del fibrado tangente TM por el morfismo δ y p_1 es la proyección $p_1((t, s), V_{\delta(t,s)}) = (t, s)$.

En particular, si $Z \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial en la variedad M , se puede definir un campo vectorial a lo largo de la variación δ mediante la composición $Z \circ \delta$ considerando Z como sección del fibrado TM .

$$\begin{array}{ccc} \delta^{-1}(TM) & \xrightarrow{p_2} & TM \\ \left. \begin{array}{c} \updownarrow \\ p_1 \end{array} \right\} V & \nearrow Z \circ \delta & \left. \begin{array}{c} \updownarrow \\ \pi \end{array} \right\} Z \\ [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) & \xrightarrow{\delta} & M \end{array}$$

Otro ejemplo importante son los campos vectoriales $\delta_* D$ a lo largo de la variación, definidos a partir de campos $D \in \mathfrak{X}([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ mediante $(\delta_* D)(t, s) = \delta_{*,(t,s)}(D_{(t,s)})$. De manera similar a lo desarrollado en el capítulo anterior, dados los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}$ en $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, se definen los campos vectoriales T y S a lo largo de la variación δ con soporte la curva $\gamma(t)$ de la siguiente forma

$$T = \delta_* \frac{\partial}{\partial t} \qquad S = \delta_* \frac{\partial}{\partial s}$$

Nótese que $T(t, s) = \dot{\gamma}_s(t)$ y $S(t, s) = \dot{\gamma}^t(s)$. Por tanto, el campo variacional V^δ asociado a δ , viene dado por

$$V^\delta(t) = S(t, 0) = \delta_{*,(t,0)} \left(\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{(t,0)} \right) = \dot{\gamma}^t(0)$$

La métrica riemanniana g induce un producto escalar en el módulo de los campos vectoriales a lo largo de la variación δ (véase Anexo) que denotaremos por \bar{g} . En particular, $\forall D, D' \in \mathfrak{X}([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ se tiene que

$$[\bar{g}(\delta_* D, \delta_* D')](t, s) = g_{\delta(t,s)}(\delta_{*,(t,s)} D_{(t,s)}, \delta_{*,(t,s)} D'_{(t,s)})$$

La conexión de Levi-Civita ∇ induce una ley de derivación covariante que denotaremos por $\bar{\nabla}$ en el fibrado $\delta^{-1}TM$ que es compatible con la métrica \bar{g} . En particular, se tiene para cualesquiera $D, D_1, D_2 \in \mathfrak{X}([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ que (ver Anexo)

$$D[\bar{g}(\delta_* D_1, \delta_* D_2)] = \bar{g}(D^{\bar{\nabla}}(\delta_* D_1), \delta_* D_2) + \bar{g}(\delta_* D_1, D^{\bar{\nabla}}(\delta_* D_2))$$

Con un cierto abuso de notación es tradicional escribir

$$\frac{\partial}{\partial t}{}^{\bar{\nabla}}(\delta_* D) = T^{\bar{\nabla}} D \quad , \quad \frac{\partial}{\partial s}{}^{\bar{\nabla}}(\delta_* D) = S^{\bar{\nabla}} D$$

Además $\bar{\nabla}$ no tiene torsión, es decir,

$$D_1^{\bar{\nabla}}(\delta_* D_2) - D_2^{\bar{\nabla}}(\delta_* D_1) - \delta_*[D_1, D_2] = 0$$

En particular, teniendo en cuenta que $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}] = 0$, se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial t}{}^{\bar{\nabla}}\left(\delta_* \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}{}^{\bar{\nabla}}\left(\delta_* \frac{\partial}{\partial t}\right) \text{ o equivalentemente } T^{\bar{\nabla}} S = S^{\bar{\nabla}} T$$

Lema 4.1.2. *Con las propiedades y notaciones anteriores se verifica que*

$$\frac{\partial}{\partial s}[\bar{g}(T, T)] = 2\bar{g}(S^{\bar{\nabla}} T, T) = 2\bar{g}(T^{\bar{\nabla}} S, T) = 2\frac{\partial}{\partial t}[\bar{g}(S, T)] - 2\bar{g}(S, T^{\bar{\nabla}} T)$$

De modo análogo podemos definir el módulo de 1-formas diferenciables a lo largo de la variación δ como las secciones del fibrado $p_1 : \delta^{-1}(T^*M) \rightarrow [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ donde $\delta^{-1}(T^*M) = \{(t, s), \omega_{\delta(t,s)} \in ([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \times T^*M\}$ es el pull-back del fibrado cotangente de (M, g) por el morfismo δ . En particular, el pull-back por la aplicación diferenciable δ de una 1-forma ω es la 1-forma $\delta^*\omega = \omega \circ \delta$ donde ω es considerada como una sección del fibrado cotangente.

$$\begin{array}{ccc} \delta^{-1}(T^*M) & \xrightarrow{p_2} & T^*M \\ p_1 \downarrow & \nearrow \omega \circ \delta & \downarrow \pi \\ [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) & \xrightarrow{\delta} & M \end{array}$$

La ley de derivación covariante $\bar{\nabla}$ sobre el fibrado $\delta^{-1}(TM)$ induce, de manera natural, una ley de derivación covariante en el fibrado $\delta^{-1}(T^*M)$ que seguiremos denotando por $\bar{\nabla}$. En particular, dados $D, D' \in \mathfrak{X}([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ y $\omega \in \Lambda^1(M)$ se verifica

$$[D^{\bar{\nabla}}(\omega \circ \delta)](\delta_* D') = D[(\omega \circ \delta)(\delta_* D')] - (\omega \circ \delta)[D^{\bar{\nabla}}(\delta_* D')]$$

Con las notaciones anteriores es trivial comprobar que

Lema 4.1.3. *Para todo $\omega \in \Lambda^1(M)$, se cumple que*

$$\frac{\partial}{\partial s}[(\omega \circ \delta)(T)] = [S^{\bar{\nabla}}(\omega \circ \delta)](\delta_* T) + (\omega \circ \delta)[T^{\bar{\nabla}} S]$$

Teorema 4.1.1 (Fórmula de la primera variación de la energía de Landau-Hall). *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, una curva diferenciable arbitraria en la variedad riemanniana (M, g) y sea $F = dA$ un campo magnético uniforme, entonces para cualquier variación propia δ de $\gamma(t)$ se verifica que*

$$\frac{d\mathcal{E}_\delta}{ds}(0) = - \int_a^b g\left(V^\delta(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) - \phi(\dot{\gamma}(t))\right) dt$$

Demostración. Dado que

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_\delta(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{2} \int_a^b \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 dt + \int_a^b \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} [A_{\gamma_s(t)}(\dot{\gamma}_s(t))] dt$$

vamos a calcular cada término por separado.

1) Usando el lema (4.1.2)

$$\frac{d}{ds} \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 = \frac{d}{ds} \left[g\left((\gamma_s)_* \frac{d}{dt}, (\gamma_s)_* \frac{d}{dt}\right) \right] = \frac{\partial}{\partial s} [\bar{g}(T, T)] = 2 \frac{\partial}{\partial t} [\bar{g}(S, T)] - 2\bar{g}(S, T^{\bar{\nabla}} T)$$

Tomando $s = 0$ y teniendo en cuenta que $S(t, 0) = V^\delta(t)$ y $T(t, 0) = \dot{\gamma}(t)$ llegamos a que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 = 2 \frac{d}{dt} g(V^\delta(t), \dot{\gamma}(t)) - 2g\left(V^\delta(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t)\right)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^b \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 dt &= \int_a^b \frac{d}{dt} g(V^\delta(t), \dot{\gamma}(t)) dt - \int_a^b g\left(V^\delta(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t)\right) dt = \\ &= g(V^\delta(b), \dot{\gamma}(b)) - g(V^\delta(a), \dot{\gamma}(a)) - \int_a^b g\left(V^\delta(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t)\right) dt = \\ &= - \int_a^b g\left(V^\delta(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t)\right) dt \end{aligned}$$

ya que $V^\delta(b) = 0, V^\delta(a) = 0$, pues la variación es propia.

2) Tenemos que $A_{\gamma_s(t)}(\dot{\gamma}_s(t)) = A_{\delta(t,s)}\left(\delta_* \frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,s)} = (A \circ \delta)_{(t,s)} T(t, s)$ y por el lema anterior

$$\frac{d}{ds} [A_{\gamma_s(t)}(\dot{\gamma}_s(t))] = \frac{\partial}{\partial s} [(A \circ \delta)(T)] = [S^{\bar{\nabla}}(A \circ \delta)](T) + (A \circ \delta)(T^{\bar{\nabla}} S)$$

Pero como $F = dA$, se tiene que

$$(\delta^* F)\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = (F \circ \delta)(T, S) = (dA \circ \delta)(T, S) = [T^{\bar{\nabla}}(A \circ \delta)](S) - [S^{\bar{\nabla}}(A \circ \delta)](T)$$

por el lema 4.1.1. Se sigue entonces que

$$[S^{\bar{\nabla}}(A \circ \delta)](T) = [T^{\bar{\nabla}}(A \circ \delta)](S) - (F \circ \delta)(T, S)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [A_{\gamma_s(t)}(\dot{\gamma}_s(t))] &= [T^{\bar{\nabla}}(A \circ \delta)](S) - (F \circ \delta)(T, S) + (A \circ \delta)(T^{\bar{\nabla}} S) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [(A \circ \delta)(S)] - (F \circ \delta)(T, S) \end{aligned}$$

Entonces, tomando $s = 0$ y teniendo de nuevo en cuenta que $S(t, 0) = V^\delta(t)$ y $T(t, 0) = \dot{\gamma}(t)$ llegamos a que,

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} [A_{\gamma_s(t)}(\dot{\gamma}_s(t))] = \frac{d}{dt} [A_{\gamma(t)}(V^\delta(t))] - F_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), V^\delta(t))$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta de nuevo que la variación es propia

$$\begin{aligned} \int_a^b \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} [A_{\gamma_s(t)}(\dot{\gamma}_s(t))] dt &= \int_a^b \frac{d}{dt} [A_{\gamma(t)}(V^\delta(t))] dt - \int_a^b g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \phi(V^\delta(t))) dt = \\ &= A_{\gamma(b)}(V^\delta(b)) - A_{\gamma(a)}(V^\delta(a)) + \int_a^b g_{\gamma(t)}(V^\delta(t), \phi(\dot{\gamma}(t))) dt = \\ &= \int_a^b g_{\gamma(t)}(V^\delta(t), \phi(\dot{\gamma}(t))) dt \end{aligned}$$

Con los dos términos ya calculados podemos concluir finalmente que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{E}_\delta(s) = - \int_a^b g(V^\delta(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t)) dt + \int_a^b g(V^\delta(t), \phi(\dot{\gamma}(t))) dt$$

□

Corolario 4.1.1. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable en (M, g) . Entonces $\gamma(t)$ es un punto crítico de la energía de Landau-Hall si y solo si $\gamma(t)$ es una curva magnética respecto del campo magnético uniforme $F = dA$.*

Demostración. Es obvio que si $\gamma(t)$ es una curva magnética para $F = dA$, entonces $\left. \frac{d\mathcal{E}_\delta}{ds} \right|_{s=0} = 0$.

Supongamos que $\gamma(t)$ es un punto crítico para la energía de Landau-Hall, entonces dada una variación propia, δ , de γ es $\left. \frac{d\mathcal{E}_\delta(s)}{ds} \right|_{s=0} = - \int_a^b g(V^\delta(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) - \phi(\dot{\gamma}(t))) dt$. Consideremos en particular el campo vectorial diferenciable a lo largo de $\gamma(t)$

$$V(t) = f(t) \left[\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) - \phi(\dot{\gamma}(t)) \right]$$

con $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable verificando que $f(a) = f(b) = 0$ y que $f(t) > 0$ para $t \in (a, b)$. Nótese que $V(a) = V(b) = 0$. Entonces, la aplicación $\delta(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(sV(t))$ es una variación propia cuyo campo variacional es $V(t)$. Además,

$$g(V(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) - \phi(\dot{\gamma}(t))) = f(t) \left\| \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) - \phi(\dot{\gamma}(t)) \right\|^2 \geq 0$$

Luego, dado que $\gamma(t)$ es una curva crítica, ha de ser

$$0 = \int_a^b g(V^\delta(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) - \phi(\dot{\gamma}(t))) dt = \int_a^b f(t) \left\| \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) - \phi(\dot{\gamma}(t)) \right\|^2 dt$$

y como $f > 0$ en (a, b) tiene que ser que $\left\| \frac{D\dot{\gamma}}{dt} - \phi(\dot{\gamma}) \right\| = 0$ en $[a, b]$ de donde se sigue que γ es una curva magnética. □

4.2. Segunda variación de la energía magnética. Métrica índice magnética

Como es tradicional, una vez hallados los puntos críticos de la función de la energía de Landau-Hall pasaremos a estudiar su estabilidad, ello dará información acerca de si la curva magnética está maximizando o minimizando esta energía con respecto a las curvas principales de la variación. En el caso de las geodésicas la denominada segunda fórmula de variación de la energía se relaciona con los campos de Jacobi a través de la forma del índice, veremos que en el caso magnético se derivan resultados análogos considerando ahora los campos de Jacobi magnéticos.

Sea $F = dA$ un campo magnético uniforme en la variedad riemanniana (M, g) y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva magnética para F .

Teorema 4.2.1 (Fórmula de la segunda variación de la energía de Landau-Hall). *Para cualquier variación propia $\delta : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ de $\gamma(t)$ se cumple*

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_\delta}{ds^2}(0) = - \int_a^b g \left(V^\delta(t), \frac{D^2 V^\delta}{dt^2}(t) + R_{\nabla}(V^\delta(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) - \phi \left(\frac{DV^\delta}{dt}(t) \right) \right) dt$$

Demostración. $\frac{d^2 \mathcal{E}_\delta}{ds^2} \Big|_{s=0} = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 dt + \int_a^b \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} [A_{\gamma_s(t)}(\dot{\gamma}_s(t))] dt$

De nuevo calcularemos cada término por separado.

1) Sabemos que $\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} [\bar{g}(T, T)] = \bar{g}(T^{\bar{\nabla}} S, T)$, por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 &= \frac{\partial}{\partial s} [\bar{g}(T^{\bar{\nabla}} S, T)] = \bar{g}(S^{\bar{\nabla}} T^{\bar{\nabla}} S, T) + \bar{g}(T^{\bar{\nabla}} S, S^{\bar{\nabla}} T) = \\ &= \bar{g}(S^{\bar{\nabla}} T^{\bar{\nabla}} S, T) + \frac{d}{dt} [\bar{g}(S, S^{\bar{\nabla}} T)] - \bar{g}(S, T^{\bar{\nabla}} T^{\bar{\nabla}} S) = \\ &= \bar{g}(R_{\bar{\nabla}}(S, T)S + T^{\bar{\nabla}} S^{\bar{\nabla}} S, T) + \frac{d}{dt} [\bar{g}(S, S^{\bar{\nabla}} T)] - \bar{g}(S, T^{\bar{\nabla}} T^{\bar{\nabla}} S) = \\ &= \bar{g}(R_{\bar{\nabla}}(S, T)S, T) + \frac{d}{dt} [\bar{g}(S, S^{\bar{\nabla}} T) + \bar{g}(S^{\bar{\nabla}} S, T)] - \bar{g}(S^{\bar{\nabla}} S, T^{\bar{\nabla}} T) \\ &\quad - \bar{g}(S, T^{\bar{\nabla}} T^{\bar{\nabla}} S) = \\ &= \frac{d}{dt} [\bar{g}(S, T^{\bar{\nabla}} S) + \bar{g}(S^{\bar{\nabla}} S, T)] - \bar{g}(S^{\bar{\nabla}} S, T^{\bar{\nabla}} T) - \bar{g}(R_{\bar{\nabla}}(S, T)T + T^{\bar{\nabla}} T^{\bar{\nabla}} S, S) \end{aligned}$$

Tomando $s = 0$ y definiendo $\xi(t) = (S^{\bar{\nabla}} S)(t, 0)$ se obtiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \left[g \left(V^\delta, \frac{DV^\delta}{dt} \right) + g(\xi, \dot{\gamma}) \right] - g \left(\xi, \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \right) - g \left(\frac{D^2 V^\delta}{dt^2} + R_{\nabla}(V^\delta, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, V^\delta \right)$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \|\dot{\gamma}_s(t)\|^2 dt &= g\left(V^\delta(b), \frac{DV^\delta}{dt}(b)\right) - g\left(V^\delta(a), \frac{DV^\delta}{dt}(a)\right) + g(\xi(b), \dot{\gamma}(b)) - \\ &\quad - g(\xi(a), \dot{\gamma}(a)) - \int_a^b g\left(\xi, \frac{D\dot{\gamma}}{dt}\right) dt - \int_a^b g\left(\frac{D^2V^\delta}{dt^2} + R_{\nabla}(V^\delta, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, V^\delta\right) dt = \\ &= - \int_a^b g\left(\xi, \frac{D\dot{\gamma}}{dt}\right) dt - \int_a^b g\left(\frac{D^2V^\delta}{dt^2} + R_{\nabla}(V^\delta, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, V^\delta\right) dt \end{aligned}$$

ya que $V^\delta(a) = 0$, $V^\delta(b) = 0$ por ser la variación propia y por el mismo motivo $\xi(a) = 0$, $\xi(b) = 0$ pues $S(a, s) = 0$, $S(b, s) = 0 \forall s$.

2) Sabemos que $\frac{d}{ds}[A(\dot{\gamma}_s)] = \frac{\partial}{\partial t}[(A \circ \delta)(S)] - (F \circ \delta)(T, S)$. Entonces,

$$\frac{d^2}{ds^2}[A(\dot{\gamma}_s)] = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}[(A \circ \delta)(S)] - \frac{\partial}{\partial s}[(F \circ \delta)(T, S)]$$

Como el campo F es uniforme, $\frac{\partial}{\partial s}[(F \circ \delta)(T, S)] = (F \circ \delta)(S^{\bar{\nabla}}T, S) + (F \circ \delta)(T, S^{\bar{\nabla}}S)$.

Por tanto, $\frac{d^2}{ds^2}[A(\dot{\gamma}_s)] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}[(A \circ \delta)(S)] - (F \circ \delta)(S^{\bar{\nabla}}T, S) - (F \circ \delta)(T, S^{\bar{\nabla}}S)$.

Como $\frac{\partial}{\partial s}[(A \circ \delta)(S)] = \left[\frac{\partial}{\partial s}^{\bar{\nabla}}(A \circ \delta)\right](S) + (A \circ \delta)(S^{\bar{\nabla}}S)$, haciendo $s = 0$ llegamos a que

la 1-forma diferenciable con soporte la curva magnética $\gamma(t)$ definida por $W := \frac{\partial}{\partial s}^{\bar{\nabla}}|_{s=0}(A \circ \delta)$ satisface la igualdad $\frac{\partial}{\partial s}^{\bar{\nabla}}|_{s=0}[(A \circ \delta)(S)] = W(V^\delta) + A(\xi)$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} [A(\dot{\gamma}_s)] dt &= \int_a^b \frac{d}{dt} [W(V^\delta) + A(\xi)] dt - \int_a^b F\left(\frac{DV^\delta}{dt}, V^\delta\right) dt - \int_a^b F(\dot{\gamma}, \xi) dt = \\ &= [W(V^\delta(b)) - W(V^\delta(a))] + [A(\xi(b)) - A(\xi(a))] - \\ &\quad - \int_a^b g\left(\frac{DV^\delta}{dt}, \phi(V^\delta)\right) dt - \int_a^b g(\dot{\gamma}, \phi(\xi)) dt = \\ &= \int_a^b g\left(\phi\left(\frac{DV^\delta}{dt}\right), V^\delta\right) dt + \int_a^b g(\phi(\dot{\gamma}), \xi) dt \end{aligned}$$

Finalmente juntando ambos términos y teniendo en cuenta que $\gamma(t)$ es una curva magnética obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}_\delta}{ds^2}(0) &= - \int_a^b g\left(\xi, \frac{D\dot{\gamma}}{dt} - \phi(\dot{\gamma})\right) dt - \int_a^b g\left(V^\delta, \frac{D^2V^\delta}{dt^2} + R_{\nabla}(V^\delta, \dot{\gamma})\dot{\gamma} - \phi\left(\frac{DV^\delta}{dt}\right)\right) dt = \\ &= - \int_a^b g\left(V^\delta, \frac{D^2V^\delta}{dt^2} + R_{\nabla}(V^\delta, \dot{\gamma})\dot{\gamma} - \phi\left(\frac{DV^\delta}{dt}\right)\right) dt \end{aligned}$$

□

Definición 4.2.1. Dada una curva magnética $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ asociada al campo magnético uniforme $F = dA$, denotemos por

$$\mathcal{V}(\gamma(t)) = \{V \in \mathfrak{X}(\gamma(t)) / V(a) = 0, V(b) = 0\}$$

Claramente $\mathcal{V}(\gamma(t))$ es un submódulo de $\mathfrak{X}(\gamma(t))$.

Definición 4.2.2. Llamamos métrica índice magnética asociada a la curva magnética $\gamma(t)$ a la aplicación $\mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F : \mathcal{V}(\gamma(t)) \times \mathcal{V}(\gamma(t)) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F(V, W) = \int_a^b \left[\left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DW}{dt} \right\rangle - R(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, W) + F\left(V, \frac{DW}{dt}\right) \right] dt$$

Proposición 4.2.1. La métrica índice magnética es una aplicación bilineal y simétrica.

Demostración. El término $\int_a^b \left[\left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DW}{dt} \right\rangle - R(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, W) \right] dt$ es simétrico por las propiedades de simetría del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel.

Dado que F es uniforme, se verifica que $\frac{d}{dt}[F(V, W)] = F\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + F\left(V, \frac{DW}{dt}\right)$, entonces

$$\int_a^b \left[F\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + F\left(V, \frac{DW}{dt}\right) \right] dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[F(V, W)] dt = F(V(b), W(b)) - F(V(a), W(a)) = 0$$

porque $V, W \in \mathcal{V}(\gamma(t))$, de donde se concluye \square

Definición 4.2.3. Se llama operador de Jacobi magnético asociado al campo magnético $F = dA$ a lo largo de una curva magnética $\gamma(t)$ al operador

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\gamma(t)} : \mathcal{V}(\gamma(t)) &\longrightarrow \mathcal{V}(t) \\ V &\longmapsto \mathcal{J}_{\gamma(t)}(V) = \frac{D^2V}{dt^2} + R_{\nabla}(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} - \phi\left(\frac{DV}{dt}\right) \end{aligned}$$

Es claro que $\ker \mathcal{J}_{\gamma(t)} = \text{Jac}(\gamma(t), F) \cap \mathcal{V}(\gamma(t))$ y un sencillo cálculo prueba que

Proposición 4.2.2. $\mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F(V, W) = -\int_a^b \langle V, \mathcal{J}_{\gamma(t)}(W) \rangle dt$.

Corolario 4.2.1. Dada una variación propia δ de una curva magnética asociada a $F = dA$ uniforme con campo variacional V^δ , se tiene que $\mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F(V^\delta, V^\delta) = \frac{d^2 \mathcal{E}_\delta}{ds^2}(0)$.

Corolario 4.2.2. Si la variación propia δ de $\gamma(t)$ es magnética, entonces su campo variacional V^δ es un campo de Jacobi magnético y como consecuencia $\frac{d^2 \mathcal{E}_\delta}{ds^2}(0) = 0$.

Proposición 4.2.3. $\text{Rad}(\mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F) = \text{Jac}(\gamma(t), F) \cap \mathcal{V}(\gamma(t))$.

Demostración. Es claro que si $W \in \ker \mathcal{J}_{\gamma(t)}$, entonces $W \in \text{rad}(\mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F)$. Sea ahora $W \in \text{rad}(\mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F)$, entonces, $0 = \mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F(V, W) = \int_a^b \langle V, \mathcal{J}_{\gamma(t)}(W) \rangle dt$ para cualquier $V \in \mathcal{V}(t)$. Tomando $V = f \cdot \mathcal{J}_{\gamma(t)}(W)$ con $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$ y $f > 0$, se tiene que $0 = \mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F(V, W) = \int_a^b \langle f(t) \mathcal{J}_{\gamma(t)}(W), \mathcal{J}_{\gamma(t)}(W) \rangle dt = \int_a^b f(t) \|\mathcal{J}_{\gamma(t)}(W)\|^2 dt$ de donde se deduce que $\mathcal{J}_{\gamma(t)}(W) = 0$ y por tanto W es un campo de Jacobi magnético. \square

Definición 4.2.4. Se dice que una curva magnética es estable si $\mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F(V, V) \geq 0$ para todo $V \in \mathcal{V}(\gamma(t))$, o equivalentemente si $\frac{d^2 \mathcal{E}_\delta}{ds^2} \geq 0$ para cualquier variación propia de $\gamma(t)$. Se dice que $\gamma(t)$ es inestable si $\mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F(V, V) < 0$ para todo $V \in \mathcal{V}(\gamma(t))$.

Observación 4.2.1. Si existiera un campo $V \in \mathcal{V}(\gamma(t))$ tal que $\mathcal{J}_{\gamma(t)}(V) = \lambda(t)V$ con $\lambda(t) < 0$, entonces $\mathbb{I}nd_{\gamma(t)}^F(V, V) = \int_a^b \langle V, \mathcal{J}_{\gamma(t)}(V) \rangle dt = \int_a^b \lambda(t) \|V\|^2 dt < 0$ y $\gamma(t)$ sería inestable. En particular, si el operador de Jacobi posee autovalores negativos, la curva magnética $\gamma(t)$ es inestable.

Anexo. Campos vectoriales a lo largo de un morfismo de variedades riemannianas

Sean (Y, g) y (M, \hat{g}) dos variedades riemannianas de dimensiones m y n , respectivamente y sea $\varphi : Y \rightarrow M$ una aplicación diferenciable. Consideremos el producto fibrado $\varphi^{-1}(TM) = Y \times_{\varphi} TM = \{(y, D_{\varphi(y)}) \in Y \times TM\}$ que es un fibrado vectorial de rango n sobre Y . Sabemos que las secciones del producto fibrado, $\Gamma(Y, \varphi^{-1}(TM)) = \{\eta : Y \rightarrow Y \times_{\varphi} TM / p_1 \circ \eta = Id_Y\}$, equivalen al $C^{\infty}(Y)$ -módulo de campos diferenciables diferenciables a lo largo de φ . $\mathfrak{X}_{\varphi}(Y, TM) = \{V : Y \rightarrow TM / \pi \circ V = \varphi\}$

$$\begin{array}{ccc}
 Y \times_{\varphi} TM & \xrightarrow{p_2} & TM \\
 \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ p_1 \end{array} \right) \eta & \nearrow V & \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ \pi \end{array} \right) Z \\
 Y & \xrightarrow{\varphi} & M
 \end{array}$$

Tenemos dos tipos de campos vectoriales sobre Y a lo largo de φ :

1. Todo campo vectorial diferenciable $Z \in \mathfrak{X}(M)$, define $\bar{Z} := Z \circ \varphi \in \mathfrak{X}_{\varphi}(Y, TM)$.
2. Todo campo $D \in \mathfrak{X}(Y)$ define, a través del morfismo tangente a φ , $\varphi_* : TY \rightarrow TM$, una sección $\varphi_* D := \varphi_* \circ D \in \mathfrak{X}_{\varphi}(Y, TM)$. Entonces para cualquier $y \in Y$ $[\varphi_* D](y) := (y, \varphi_{*,y}(D_y)) \in Y \times_{\varphi} TM$

Sea $U \subseteq M$ un abierto coordenado por $\{q_1, \dots, q_n\}$ y sea $\varphi^{-1}(U) = W \subseteq Y$ con coordenadas $\{y_1, \dots, y_m\}$. Denotemos $\varphi_i \equiv \varphi \circ q_i$, las secciones locales $\Gamma(W, \varphi^{-1}(TM)) := \mathfrak{X}_{\varphi}(W, TM)$ es un $C^{\infty}(W)$ -módulo libre de rango n generado por $\{(\frac{\partial}{\partial q_1} \circ \varphi), \dots, (\frac{\partial}{\partial q_n} \circ \varphi)\}$. En particular,

1. Si $Z = \sum_{i=1}^n Z_i (\frac{\partial}{\partial q_i}) \Rightarrow \bar{Z} = \sum_{i=1}^n (Z_i \circ \varphi) (\frac{\partial}{\partial q_i} \circ \varphi)$
2. Si $D = \sum_{r=1}^m f_r \cdot \frac{\partial}{\partial y_r} \Rightarrow \varphi_* D = \sum_{i=1}^n [\sum_{r=1}^m f_r \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_r}] (\frac{\partial}{\partial q_i} \circ \varphi)$

Derivación covariante de campos vectoriales diferenciables a lo largo de un morfismo de variedades riemannianas

Consideremos en las variedades (Y, g) , (M, \hat{g}) los abiertos anteriores $U \subseteq M$ y $\varphi^{-1}(U) = W \subseteq Y$ con coordenadas $\{q_1, \dots, q_n\}$, $\{y_1, \dots, y_m\}$ respectivamente. Si ∇ , $\hat{\nabla}$ son las respectivas conexiones de Levi-Civita de Y y M , sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial y_r} \nabla \frac{\partial}{\partial y_s} = \sum_{t=1}^m \Gamma_{rs}^t \frac{\partial}{\partial y_t} \qquad \frac{\partial}{\partial q_i} \hat{\nabla} \frac{\partial}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \hat{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial q_k}$$

Supongamos que $\varphi : Y \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable entre dichas variedades. Dada una curva parametrizada $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$, podemos construir una curva $\beta = \varphi \circ \alpha : I \rightarrow M$, cuyo vector velocidad es $\dot{\beta}(t) = \varphi_{*,\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t))$. Dado un campo vectorial $V \in \mathfrak{X}_\varphi(Y, TM)$, su restricción sobre la curva $\alpha(t)$ es el campo $V(\alpha(t)) = (\alpha(t), \mathcal{V}(t)) \in Y \times_\varphi TM$ donde, $\mathcal{V}(t) \in T_{\varphi(\alpha(t))}M = T_{\beta(t)}M$. De tal forma que $\mathcal{V} = V \circ \alpha$ es un campo diferenciable de M con soporte la curva β . Denotemos por $\frac{\hat{D}}{dt} : \mathfrak{X}(\beta(t)) \rightarrow \mathfrak{X}(\beta(t))$ al operador de derivación covariante a lo largo de $\beta(t)$.

Definición 4.2.5. Una ley de derivación covariante $\bar{\nabla}$ en el fibrado $(\varphi^{-1}TM, p_1, Y)$ será

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} : \mathfrak{X}(Y) \times \mathfrak{X}_\varphi(Y, TM) &\longrightarrow \mathfrak{X}_\varphi(Y, TM) \\ (D, V) &\longrightarrow D^{\bar{\nabla}}V \end{aligned}$$

donde $(D^{\bar{\nabla}}V)(y) = \left. \frac{D\mathcal{V}}{dt} \right|_{t=0}$ con $\mathcal{V} = (V \circ \alpha)$, siendo $\alpha = \alpha(t)$ la curva integral del campo vectorial D que para $t = 0$ pasa por el punto $y \in Y$

Si $D = \sum_{r=1}^m h_r \cdot \frac{\partial}{\partial y_r} \in \mathfrak{X}(W)$ y $V = \sum_{i=1}^n f_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \circ \varphi \right)$, se tiene que

$$D^{\bar{\nabla}}V = \sum_{k=1}^n \left[Df_k + \sum_{r=1}^m \sum_{i,j=1}^n f_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_r} h_r (\hat{\Gamma}_{ji}^k \circ \varphi) \right] \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \circ \varphi \right) \in \mathfrak{X}_\varphi(W, TM)$$

Corolario 4.2.3. Dados $D \in \mathfrak{X}(Y)$ y $Z \in \mathfrak{X}(M)$, se verifica que $D^{\bar{\nabla}}\bar{Z} = [(\varphi_*D)^{\hat{\nabla}}Z] \circ \varphi$.

Localmente la conexión $\bar{\nabla}$ verifica

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y_s} \right)^{\bar{\nabla}} \left(\frac{\partial}{\partial q_t} \circ \varphi \right) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_s} (\hat{\Gamma}_{jt}^k \circ \varphi) \right) \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \circ \varphi \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_s} \right)^{\bar{\nabla}} \left(\varphi_* \frac{\partial}{\partial y_r} \right) &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y_s \partial y_r} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_s} (\hat{\Gamma}_{ji}^k \circ \varphi) \right] \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \circ \varphi \right) \end{aligned}$$

La estructura de fibrado vectorial riemanniano de $(\varphi^{-1}TM, p_1, Y)$

Vamos a introducir un producto escalar en el $C^\infty(Y)$ -módulo $\mathfrak{X}_\varphi(Y, TM)$ utilizando la estructura riemanniana de (M, \hat{g}) .

Definición 4.2.6. Denotaremos \bar{g} al producto escalar $C^\infty(Y)$ -bilineal y simétrico en $\mathfrak{X}_\varphi(Y, TM)$ dado por

$$\begin{aligned} \bar{g} : \mathfrak{X}_\varphi(Y, TM) \times \mathfrak{X}_\varphi(Y, TM) &\longrightarrow C^\infty(Y) \\ (V_1, V_2) &\longrightarrow \bar{g}(V_1, V_2) \end{aligned}$$

donde, $\forall y \in Y$, es $[\bar{g}(V_1, V_2)](y) = \hat{g}_{\varphi(y)}(V_1(y), V_2(y))$.

Proposición 4.2.4. *Dados $Z_1, Z_2, D_1, D_2 \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple*

1. $\bar{g}(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2) = [\hat{g}(Z_1, Z_2)] \circ \varphi$.
2. $\bar{g}(\varphi_* D_1, \varphi_* D_2) = [\varphi^*(\hat{g})](D_1, D_2)$.

Localmente si $\hat{g} = \sum_{i,j=1}^n \hat{g}_{ij} dq_i \otimes dq_j$ se tiene que

$$\bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial q_i} \circ \varphi, \frac{\partial}{\partial q_j} \circ \varphi\right) = \hat{g}_{ij} \circ \varphi \quad ; \quad \bar{g}\left(\varphi_* \frac{\partial}{\partial y_r}, \varphi_* \frac{\partial}{\partial y_s}\right) = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_r}\right) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_s}\right) (\hat{g}_{ij} \circ \varphi)$$

Proposición 4.2.5. *La ley de derivación covariante $\bar{\nabla}$ es compatible con el producto escalar \bar{g} , es decir, $\forall D \in \mathfrak{X}(Y)$ y $\forall V_1, V_2 \in \mathfrak{X}_\varphi(Y, TM)$, se tiene que*

$$D(\bar{g}(V_1, V_2)) = \bar{g}(D^{\bar{\nabla}} V_1, V_2) + \bar{g}(V_1, D^{\bar{\nabla}} V_2)$$

Demostración. Dado $y \in Y$ cualquiera, sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada en Y con $\alpha(0) = y$, $\dot{\alpha}(0) = D_y$

$$\begin{aligned} D[\bar{g}(V_1, V_2)](y) &= D_y[\bar{g}(V_1, V_2)] = \dot{\alpha}(0)[\bar{g}(V_1, V_2)] = \left[\alpha_{*,0}\left(\frac{d}{dt}\right)\right] \bar{g}(V_1, V_2) = \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} [\bar{g}(V_1, V_2) \circ \alpha(t)] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} [\hat{g}_{\varphi(\alpha(t))}(V_1(\alpha(t)), V_2(\alpha(t)))] = \\ &= \hat{g}_{\varphi(\alpha(0))}\left(\frac{\hat{D}}{dt}\Big|_{t=0} V_1(\alpha(t)), V_2(\alpha(t))\right) + \hat{g}_{\varphi(\alpha(0))}\left(V_1(\alpha(t)), \frac{\hat{D}}{dt}\Big|_{t=0} V_2(\alpha(t))\right) = \\ &= \hat{g}_{\varphi(y)}((D^{\bar{\nabla}} V_1)(y), V_2(y)) + \hat{g}_{\varphi(y)}(V_1(y), (D^{\bar{\nabla}} V_2)(y)) = \\ &= \bar{g}(D^{\bar{\nabla}} V_1, V_2)(y) + \bar{g}(V_1, D^{\bar{\nabla}} V_2)(y) \end{aligned}$$

□

Definición 4.2.7. *Se llama morfismo de torsión asociado a la conexión $\bar{\nabla}$ a la aplicación $C^\infty(Y)$ -bilineal y antisimétrica*

$$\begin{aligned} Tor_{\bar{\nabla}} : \mathfrak{X}(Y) \times \mathfrak{X}(Y) &\longrightarrow \mathfrak{X}_\varphi(Y, TM) \\ (D_1, D_2) &\longrightarrow Tor_{\bar{\nabla}}(D_1, D_2) = D_1^{\bar{\nabla}}(\varphi_* D_2) - D_2^{\bar{\nabla}}(\varphi_* D_1) - \varphi_* [D_1, D_2] \end{aligned}$$

Proposición 4.2.6. $\bar{\nabla}$ *no tiene torsión, es decir, $Tor_{\bar{\nabla}}(D_1, D_2) = 0$, $\forall D_1, D_2 \in \mathfrak{X}(Y)$.*

Un fibrado vectorial provisto de una conexión sin torsión y compatible con un producto escalar se denomina *fibrado vectorial riemanniano*.

Por tanto, la terna $\{(\varphi^{-1}TM, p_1, Y), \bar{\nabla}, \bar{g}\}$ tiene estructura de fibrado vectorial riemanniano.

Definición 4.2.8. *Llamamos endomorfismo de curvatura asociado a $\bar{\nabla}$ a la aplicación $C^\infty(Y)$ -bilineal antisimétrica*

$$\begin{aligned} \bar{R} : \mathfrak{X}(Y) \times \mathfrak{X}(Y) &\longrightarrow End_{C^\infty(Y)} \mathfrak{X}_\varphi(Y, TM) \\ (D_1, D_2) &\longrightarrow \bar{R}_{(D_1, D_2)} := D_1^{\bar{\nabla}} D_2^{\bar{\nabla}} - D_2^{\bar{\nabla}} D_1^{\bar{\nabla}} - [D_1, D_2]^{\bar{\nabla}} \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] T. Adachi. Curvature bound and trajectories for magnetic fields on a Hadamard surface. *Tsukuba Journal of Mathematics*, 20(1):225–230, 1996.
- [2] T. Adachi. A comparison theorem on magnetic Jacobi fields. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 40(2):293–308, 1997.
- [3] A. L. Almorox and C. T. Prieto. Infinitesimal symmetries of hall effect on riemann surfaces. *Citeseer*, 1995.
- [4] A. L. Almorox and C. T. Prieto. Geometrical aspects of the landau-hall problem on the hyperbolic plane. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A: Matemáticas*, 95:259–278, 2001.
- [5] M. Barros, A. Romero, J. L. Cabrerizo, and M. Fernández. The Gauss-Landau-Hall problem on riemannian surfaces. *Journal of mathematical physics*, 46(11):112905, 2005.
- [6] M. Barros Díaz, J. L. Cabrerizo Jaraíz, M. Fernández Andrés, and A. Romero Sarabia. Magnetic vortex filament flows. *Journal of Mathematical Physics*, 48 (8), 082904-1-082904-27., 2007.
- [7] J. L. Cabrerizo. Magnetic fields in 2D and 3D sphere. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 20(3):440–450, 2013.
- [8] M. P. d. Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [9] A. Comtet. On the Landau levels on the hyperbolic plane. *Annals of physics*, 173(1):185–209, 1987.
- [10] P. Dombrowski. On the Geometry of the Tangent Bundle. *Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York*, 1962.
- [11] S. L. Druta-Romaniuc and M. I. Munteanu. Magnetic curves corresponding to Killing magnetic fields in E^3 . *arXiv preprint arXiv:1106.3673*, 2011.
- [12] N. Gouda. Magnetic flows of Anosov type. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 49(2):165–183, 1997.
- [13] N. Gouda. The theorem of E. Hopf under uniform magnetic fields. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 50(3):767–779, 1998.

- [14] S. Gudmundsson and E. Kappos. On the geometry of tangent bundles. *Expositiones Mathematicae*, 20(1):1–41, 2002.
- [15] J.-i. Inoguchi. Minimal surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group. *Differ. Geom. Dyn. Syst*, 10:163–169, 2008.
- [16] J. M. Lee. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. *Graduate Texts in Mathematics*, 176, 1997.
- [17] S. Nishikawa. *Variational problems in geometry, Translations of Mathematical Monographs*, volume 205. American Mathematical Society, 2002.
- [18] B. O’neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983.
- [19] C. Özgür. On magnetic curves in the 3-dimensional Heisenberg group. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 43(2), 2017.
- [20] G. P. Paternain. *Geodesic flows*, volume 180. Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] D. Perrone. *Un’introduzione alla Geometria Riemanniana*. Aracne editrice, Roma, 2011.
- [22] D. Perrone. Un’introduzione alla Geometria Differenziale di curve e superfici. *Quaderni di Matematica*, 2017(2), 2017.
- [23] J. Pérez Muñoz. *Geometría riemanniana*. URL: <http://wpd.ugr.es/~jperez/>, 2004.
- [24] T. C. T. Prieto. *Aspectos geométricos del flujo magnético en superficies de Riemann y su aplicación al problema de Landau-Hall*. PhD thesis, Universidad de Salamanca, 2001.
- [25] O. Sarbach and T. Zannias. The geometry of the tangent bundle and the relativistic kinetic theory of gases. *Classical and Quantum Gravity*, 31(8):085013, 2014.
- [26] S. Sasaki. On the differential geometry of tangent bundles of riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 10(3):338–354, 1958.
- [27] T. Tasnádi. The behavior of nearby trajectories in magnetic billiards. *Journal of Mathematical Physics*, 37(11):5577–5598, 1996.
- [28] H. Urakawa. *Calculus of variations and harmonic maps*. American Mathematical Soc., 2013.
- [29] Y. Xin. *Geometry of harmonic maps*, volume 23. Springer Science & Business Media, 2012.