

**Universidad de Salamanca**  
**Facultad de Ciencias**

Grado en Física



**VNiVERSiDAD**  
**DSALAMANCA**

CAMPUS OF INTERNATIONAL EXCELLENCE

**Trabajo de fin de Grado**

*Ecuaciones del grupo de renormalización*

*Renormalization group equations*

Tutor: Vicent Mateu Barreda

**Óscar Dueñas Sánchez**

Curso académico 2020-21

## Resumen:

Los métodos del grupo de renormalización nos permiten afrontar las divergencias ultravioletas e infrarrojas en QED y QCD, asociadas a la aparición de escalas energéticas muy dispares. Están basados en el principio de invarianza bajo el grupo de renormalización, que afirma que los observables físicos son independientes de la escala y el esquema de renormalización utilizados en los cálculos teóricos.

A partir de la aplicación de dicho principio sobre un observable físico cualquiera  $\mathcal{R}$  en QCD, se definen las ecuaciones del grupo de renormalización

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_{\text{QCD}}(\alpha_s) := \mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = -2\alpha_s(\mu) \sum_{n=1} \beta_{n-1} \left[ \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \right]^n & \text{función } \beta, \\ \gamma(\alpha_s) := \frac{1}{2\bar{m}} \mu \frac{d\bar{m}}{d\mu} = 2\bar{m}(\mu) \sum_{n=1} \gamma_{n-1} \left[ \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \right]^n & \text{dimensión anómala de la masa.} \end{array} \right.$$

Resolviendo estas, obtenemos la dependencia con la energía  $\mu$  (o evolución) de la constante  $\alpha_s$  y las masas de los quarks pesados  $\bar{m}$  pues, al conocer un número finito de coeficientes  $\beta_{n-1}$  y  $\gamma_{n-1}$ , estos desarrollos son válidos únicamente en el régimen perturbativo de QCD ( $\mu > \Lambda_{\text{QCD}} \sim 700 \text{ MeV}$ ).

Las soluciones de dichas ecuaciones diferenciales dependen del esquema de renormalización (nosotros utilizaremos el esquema  $\overline{\text{MS}}$ ) y del número de sabores activos  $n_f$ . La conexión entre las soluciones para  $n_f$  y  $n_f - 1$  viene dada por las denominadas relaciones de matching, que también dependen del esquema de renormalización, siendo no triviales las empleadas en este TFG.

En lo que sigue, resolveremos las ecuaciones del grupo de renormalización, tanto para la función  $\beta$  como para la dimensión anómala de la masa, y aplicaremos las relaciones de matching, con objetivo de obtener de  $\alpha_s(\mu)$  y  $\bar{m}(\mu)$  para los quarks pesados en el régimen perturbativo de QCD. Una vez hecho esto, implementaremos nuestras soluciones en un código **Mathematica** y lo utilizaremos para estudiar dichas soluciones y estudiar cómo se modifican al variar la escala de energía umbral  $\mu_{th}$  entre  $n_f$  y  $n_f - 1$ .

**Palabras clave:** QCD, grupo de renormalización, quarks pesados.

## Abstract:

Renormalisation group methods allow us to deal with the ultraviolet and infrared divergences in QED and QCD, related to the appearance of largely separated energy scales. They are based on the principle of invariance under the renormalization group, which states that physical observables are independent of the scale and renormalisation scheme used in theoretical calculations.

From the application of this principle to any physical observable  $\mathcal{R}$  in QCD, renormalisation group equations are defined as

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_{\text{QCD}}(\alpha_s) := \mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = -2\alpha_s(\mu) \sum_{n=1} \beta_{n-1} \left[ \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \right]^n & \beta\text{-function,} \\ \gamma(\alpha_s) := \frac{1}{2\bar{m}} \mu \frac{d\bar{m}}{d\mu} = 2\bar{m}(\mu) \sum_{n=1} \gamma_{n-1} \left[ \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \right]^n & \text{mass anomalous dimension.} \end{array} \right.$$

By solving these equations, we obtain the energy dependence (or running) of the strong coupling  $\alpha_s$  and the heavy quark masses  $\bar{m}$ , since knowing a finite number of coefficients  $\beta_{n-1}$  and  $\gamma_{n-1}$  makes these expansions valid only in the QCD perturbative region ( $\mu > \Lambda_{\text{QCD}} \sim 700 \text{ MeV}$ ).

Solutions of such differential equations depend on the renormalisation scheme (we will use the  $\overline{\text{MS}}$  scheme) and on the number of active flavours  $n_f$ . Connection between the solutions for  $n_f$  and  $n_f - 1$  is given by the so-called matching relations, which also depend on the renormalisation scheme, being non-trivial the ones used in this bachelor thesis.

In what follows, we will solve the renormalization group equations, both for the  $\beta$ -function and for the mass anomalous dimension, and we will apply the matching relations, in order to get  $\alpha_s(\mu)$  and  $\bar{m}$  for heavy quarks in the QCD perturbative region. Once this is done, we will implement our solutions in a `Mathematica` code and we will use them to study these solutions and how they are modified when we change the threshold energy scale  $\mu_{th}$  between  $n_f$  y  $n_l$ .

**Keywords:** QCD, renormalization group, heavy quarks.

# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción a QCD</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Conceptos básicos . . . . .   | 1         |
| 1.2. Grupo de renormalización . . . . .  | 1         |
| <b>2. Resolución de las RGEs</b>   | <b>3</b>  |
| 2.1. Evolución de la constante de acoplamiento $\alpha_s$ . . . . .                      | 3         |
| 2.2. Evolución de la masa quark $\bar{m}$ . . . . .                                      | 6         |
| <b>3. Relaciones de matching</b>   | <b>7</b>  |
| 3.1. Matching de la constante de acoplamiento $\alpha_s$ . . . . .                       | 8         |
| 3.1.1. Cálculo aproximado de $\Lambda_{\text{QCD}}$ . . . . .                            | 10        |
| 3.2. Matching de la masa quark $\bar{m}$ . . . . .                                       | 11        |
| <b>4. Resultados y discusión</b>   | <b>11</b> |
| 4.1. Cálculo de la evolución de $\alpha_s$ . . . . .                                     | 12        |
| 4.2. Cálculo de la evolución de $\bar{m}$ . . . . .                                      | 13        |
| 4.2.1. Evolución para el quark charm . . . . .   | 14        |
| 4.2.2. Evolución para el quark bottom . . . . .  | 14        |
| 4.2.3. Evolución para el quark top . . . . .   | 15        |
| 4.3. Efectos de la variación del valor de $\mu_{th}$ . . . . .                           | 17        |
| 4.3.1. Efectos de la variación de $\mu_{th}$ sobre la evolución de $\alpha_s$ . . . . .  | 17        |
| 4.3.2. Efectos de la variación de $\mu_{th}$ sobre la evolución de $\bar{m}_c$ . . . . . | 20        |
| <b>5. Conclusiones</b>   | <b>22</b> |
| <b>6. Conclusions</b>  | <b>23</b> |
| <b>Referencias</b>   | <b>24</b> |

# 1. Introducción a QCD

## 1.1. Conceptos básicos

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría de campos gauge que describe las interacciones fuertes. Su Lagrangiano se construye de forma que se mantenga la transformación gauge de la simetría  $SU(3)$  local de color. Este describe los espinores libres de Dirac (quarks) y el campo gauge no Abelianiano (gluones), junto con su interacción mutua y las autointeracciones entre gluones. Tal autointeracción es la responsable de que no observemos ni quarks ni gluones libres, pues hace que la constante de acoplamiento  $\alpha_s$  sea muy grande a bajas energías; esto es, es responsable del confinamiento y la libertad asintótica (Refs. [4, 5]) característicos de QCD.

Dicho Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_q \bar{\psi}_{q,a} (i\gamma^\mu \delta_{ab} \partial_\mu - g_s \gamma^\mu t_{ab}^C A_\mu^C - m_q \delta_{ab}) \psi_{q,b} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}, \quad (1)$$

donde los índices repetidos se suman.  $\psi_{q,a}$  son los espinores de los campos de materia (quarks) para sabor  $q$ , con índice de color  $a$  (desde 1 hasta  $N_c = 3$ ).  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac.  $A_\mu^C$  son los campos de gluones (con  $C$  desde 1 hasta  $N_c^2 - 1 = 8$ ).  $t_{ab}^C$  son ocho matrices  $3 \times 3$ , generadores del álgebra asociada al grupo  $SU(3)$ .  $g_s$  es la constante de acoplamiento fuerte ( $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ ), que es, junto con las masas de los quarks, el único parámetro fundamental en QCD y cuantifica la intensidad de la interacción fuerte. Por último, el tensor  $F_{\mu\nu}^A$ , viene dado por

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - g_s f_{ABC} A_\mu^B A_\nu^C, \quad (2)$$

donde  $f_{ABC}$  son las constantes de estructura del grupo  $SU(3)$ , que vienen determinadas por

$$[t^A, t^B] = i f_{ABC} t^C. \quad (3)$$

En este TFG nos centraremos en los aspectos perturbativos de QCD, es decir, en escalas de energía en centro de masas ( $\sqrt{s} = \mu$ ) mayores que  $\Lambda_{QCD}$ .

## 1.2. Grupo de renormalización

El método del grupo de renormalización fue introducido por primera vez por Stückelberg y Petermann en 1952 (publicado en 1953, Ref. [6]) y por Gell-Mann y Low en 1954 (Ref. [7]), para lidiar con los fallos de la teoría de perturbaciones para muy altas energías (divergencias ultravioleta) en electrodinámica cuántica (QED). Estos problemas aparecen también para muy bajas energías (divergencias infrarrojas) y en QCD. Su origen radica en la gran diferencia entre las escalas de energía utilizadas: las masas  $m$  de las partículas y el momento transferido  $q$ ; pues en teoría de perturbaciones, la contribución a  $n$ -loops tiene un factor  $\alpha_s^n$  (en el caso de QCD) y hasta  $n$  factores  $\ln(q^2/m^2)$ , de manera que tendremos mala convergencia cuando  $\alpha_s |\ln(q^2/m^2)|$  sea de orden 1, aunque  $\alpha_s$  sea pequeña. Los métodos del grupo de renormalización nos darán una forma de afrontar problemas en los que tenemos escalas de energía muy diferentes.

Estos métodos se basan en el principio de invarianza bajo el grupo de renormalización, que afirma que los observables físicos deben ser independientes de la escala y el esquema de

renormalización utilizados en los cálculos teóricos. Estrictamente hablando, no tiene estructura de grupo, ya que la ley de composición interna se cumple solo para escalas adyacentes.

La escala de renormalización  $\mu$  aparece cuando se regularizan las divergencias ultravioletas en regularización dimensional, esto es, cambiando la dimensión del espacio tiempo de 4 a  $4 - 2\epsilon$ . Estas divergencias aparecen como  $1/\epsilon^n$  y se renormalizan multiplicativamente. Así, para una cantidad física cualquiera  $\mathcal{R}$  se cumple

$$\mu \frac{d\mathcal{R}}{d\mu} = 0. \quad (4)$$

Suponiendo que  $\mathcal{R}$  depende de la constante de acoplamiento renormalizada  $\alpha_s$  y la masa quark renormalizada  $\bar{m}$ , podemos utilizar la regla de la cadena para escribir

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{m}} \right] \mathcal{R} = \left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_{QCD}(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + 2\bar{m}\gamma(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \bar{m}} \right] \mathcal{R} = 0, \quad (5)$$

donde hemos definido las ecuaciones del grupo de renormalización

$$\begin{cases} \beta_{QCD}(\alpha_s) := \mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} & \text{función } \beta, \\ \gamma(\alpha_s) := \frac{1}{2\bar{m}} \mu \frac{d\bar{m}}{d\mu} & \text{dimensión anómala de la masa.} \end{cases} \quad (6)$$

La ecuación consecuencia de la invarianza bajo renormalización se denomina “ecuación del grupo de renormalización” (RGE).

Podemos escribir la función  $\beta$  y la dimensión anómala de la masa para una determinada escala como

$$\begin{cases} \beta_{QCD}^{(n_f)} \left[ \alpha_s^{(n_f)}(\mu) \right] = \mu \frac{d}{d\mu} \alpha_s^{(n_f)}(\mu) = -2\alpha_s^{(n_f)}(\mu) \sum_{n=1} \beta_{n-1}^{(n_f)} \left[ \frac{\alpha_s^{(n_f)}(\mu)}{4\pi} \right]^n, \\ 2\bar{m}^{(n_f)} \gamma \left[ \alpha_s^{(n_f)}(\mu) \right] = \mu \frac{d}{d\mu} \bar{m}^{(n_f)}(\mu) = 2\bar{m}^{(n_f)}(\mu) \sum_{n=1} \gamma_{n-1}^{(n_f)} \left[ \frac{\alpha_s^{(n_f)}(\mu)}{4\pi} \right]^n, \end{cases} \quad (7)$$

donde  $n_f$  hace referencia al número de sabores activos, es decir, al número de quarks cuya escala de masa invariante (escala de energía a la cual  $\bar{m}(\mu) = \mu$ ) se encuentra por debajo de la escala de energía  $\mu$  considerada.

Los dos desarrollos en serie que acabamos de escribir nos dan dos ecuaciones diferenciales, estando la segunda acoplada a la primera. Al resolverlas, obtenemos la evolución de la constante de acoplamiento  $\alpha_s$  y de la masa quark  $\bar{m}$  con la escala de energía  $\mu$ . Estas soluciones dependen del esquema de renormalización empleado, siendo el de mínima sustracción modificado ( $\overline{\text{MS}}$ ) el utilizado en este TFG.

Tanto para la función  $\beta$  como para la dimensión anómala de masa, conocemos los coeficientes ( $\beta_{n-1}^{(n_f)}$  y  $\gamma_{n-1}^{(n_f)}$ , respectivamente) hasta 5 loops, es decir, hasta  $\beta_4^{(n_f)}$  y  $\gamma_4^{(n_f)}$ .

El objetivo de este TFG es resolver estas dos RGEs, para conocer así la dependencia de  $\alpha_s^{(n_f)}$  y  $\bar{m}^{(n_f)}$  con la escala de energía  $\mu$  (en el régimen perturbativo de QCD). El procedimiento utilizado para resolverlas está basado en el desarrollado en **REvolver** (Ref. [8]).

Una vez resueltas, implementaremos nuestras soluciones en un código **Mathematica** y lo utilizaremos para representar gráficamente tanto  $\alpha_s^{(n_f)}(\mu)$  como  $\bar{m}^{(n_f)}(\mu)$  (esta última para los tres quarks pesados, con  $\mu$  mayor que la escala de masa invariantes asociada a cada uno) y para analizar los efectos que tiene, sobre la evolución de ambas cantidades, variar la escala de energía umbral  $\mu_{th}$  entre  $n_f$  y  $n_f + 1$ .

## 2. Resolución de las RGEs

### 2.1. Evolución de la constante de acoplamiento $\alpha_s$

Vimos en la sección anterior que la RGE en este caso es

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha_s^{(n_f)}(\mu) = -2\alpha_s^{(n_f)}(\mu) \sum_{n=1} \beta_{n-1}^{(n_f)} \left[ \frac{\alpha_s^{(n_f)}(\mu)}{4\pi} \right]^n. \quad (8)$$

Como ya hemos dicho, los coeficientes  $\beta_{n-1}^{(n_f)}$  se conocen hasta  $n=5$  (5 loops) y son (Refs. [11–18])

$$\begin{aligned} \beta_0^{(n_f)} &= 11 - \frac{2}{3}n_f, \\ \beta_1^{(n_f)} &= 102 - \frac{38}{3}n_f, \\ \beta_2^{(n_f)} &= \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}n_f + \frac{325}{54}n_f^2, \\ \beta_3^{(n_f)} &= \left( \frac{149753}{6} + 3564\zeta_3 \right) - \left( \frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\zeta_3 \right) n_f + \\ &\quad + \left( \frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta_3 \right) n_f^2 + \frac{1093}{729}n_f^3, \\ \beta_4^{(n_f)} &= \left( \frac{8157455}{16} + \frac{621885}{2}\zeta_3 - \frac{88209}{2}\zeta_4 - 288090\zeta_5 \right) + \\ &\quad + \left( -\frac{336460813}{1944} - \frac{4811164}{81}\zeta_3 + \frac{33935}{6}\zeta_4 + \frac{1358995}{27}\zeta_5 \right) n_f + \\ &\quad + \left( \frac{25960913}{1944} + \frac{698531}{81}\zeta_3 - \frac{10526}{9}\zeta_4 - \frac{381760}{81}\zeta_5 \right) n_f^2 + \\ &\quad + \left( -\frac{630559}{5832} - \frac{5872}{243}\zeta_3 + \frac{1618}{27}\zeta_4 + \frac{460}{9}\zeta_5 \right) n_f^3 + \left( \frac{1205}{2916} - \frac{152}{81}\zeta_3 \right) n_f^4, \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $\zeta$  es la función zeta de Riemann y los coeficientes  $\beta_2^{(n_f)}$ ,  $\beta_3^{(n_f)}$  y  $\beta_4^{(n_f)}$  dependen del esquema de renormalización utilizado.

Para empezar, resolveremos la RGE a primer orden, pues conocer esta solución nos resultará útil más adelante. Dicho orden se conoce como *Leading Logarithm* (LL) y la ecuación diferencial toma la forma

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha_s^{(n_f)} = -\frac{[\alpha_s^{(n_f)}]^2}{2\pi} \beta_0^{(n_f)}. \quad (10)$$

A partir de ahora, omitiremos el superíndice  $n_f$  para simplificar la notación. Con esto, pasemos a resolver la ecuación diferencial

$$\mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = -\frac{\alpha_s^2}{2\pi} \beta_0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi d\alpha_s}{\beta_0 \alpha_s^2} = \frac{d\mu}{\mu} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\beta_0} \left[ \frac{1}{\alpha_s(\mu)} - \frac{1}{\alpha_s(\mu_0)} \right] = \ln \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right), \quad (11)$$

donde  $\mu_0$  es una escala de energía para la cual conocemos el valor de  $\alpha_s$ . Así llegamos a que la solución a orden LL es

$$\alpha_s^{(LL)}(\mu) = \frac{\alpha_s(\mu_0)}{1 + \frac{\beta_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \alpha_s(\mu_0)}. \quad (12)$$

Vemos en esta expresión que  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_s^{(LL)} = 0$ . Este comportamiento se conoce como “libertad asintótica” y es característico de QCD.

Pasemos ahora a resolver la RGE para a orden  $N^{m-1}LL$ , con  $m > 1$ . Para ello, escribimos dicha ecuación como

$$\mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = -2\alpha_s \sum_{n=1}^m \beta_{n-1} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^n \Rightarrow \frac{d\alpha_s}{-2\alpha_s \sum_{n=1}^m \beta_{n-1} (\alpha_s/4\pi)^n} = d(\ln \mu), \quad (13)$$

donde la serie en el denominador no es más que  $\beta_{QCD}(\alpha_s)$ . Nos interesa, por tanto, escribir el inverso de esta serie como otra serie. Con esto en mente, podemos definir los coeficientes  $b_i := \frac{\beta_i}{\beta_0}$  y escribir

$$\beta_{QCD}(\alpha_s) = -\frac{\alpha_s^2}{2\pi} \beta_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_i \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^i \right]. \quad (14)$$

Ahora definimos los coeficientes de la serie inversa, que llamaremos  $c_j$ , de manera que cumplan

$$\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_i (\alpha_s/4\pi)^i} = 1 + \sum_{j=1} c_j \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^j, \quad (15)$$

teniendo así que

$$\frac{1}{\beta_{QCD}(\alpha_s)} = -\frac{2\pi}{\beta_0} \frac{1}{\alpha_s^2} \left[ 1 + \sum_{j=1} c_j \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^j \right], \quad (16)$$

donde la suma en  $j$  se extiende hasta el orden necesario para alcanzar la precisión deseada en cada caso, en general mayor que  $m$ .

Podemos encontrar una relación recursiva entre los coeficientes  $b_i$  y los  $c_j$ . Para calcular esta relación, pensemos en dos series de potencias que cumplan lo siguiente

$$\frac{1}{\sum_{i=0} a_i x^i} = \sum_{j=0} b_j x^j, \quad (17)$$

con  $a_0 = b_0 = 1$ . Podemos escribir

$$1 = \sum_{i=1} a_i x^i \sum_{j=1} b_j x^j = 1 + \sum_{i=1} x^i \sum_{j=0} a_{i-j} b_j \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1} x^i \sum_{j=0} a_{i-j} b_j. \quad (18)$$

Si queremos que se cumpla para todo valor de  $x$

$$\sum_{j=0}^i a_{i-j} b_j = 0 \Leftrightarrow a_0 b_i + \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-j} b_j = 0 \Leftrightarrow b_i = -\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-j} b_j, \quad (19)$$



o equivalentemente:  $b_{i+1} = -\sum_{j=0}^i a_{i+1-j} b_j$ . Podemos calcular los coeficientes  $b_j$  hasta un orden cualquiera pese a conocer los coeficientes  $a_i$  únicamente hasta orden  $m$ . En este caso, imponiendo que  $a_{i>m} = 0$ , podemos demostrar que las relaciones entre coeficientes son:

$$\begin{cases} b_{i+1} = -\sum_{j=0}^i a_{i+1-j} b_j & i+1 \leq m, \\ b_{i+1} = -\sum_{j=i+1-m}^i a_{i+1-j} b_j & i+1 > m. \end{cases} \quad (20)$$

Así, fácilmente vemos que en el caso que nos ocupa

$$\begin{cases} c_{i+1} = -\sum_{j=0}^i b_{i+1-j} c_j & i+1 \leq m, \\ c_{i+1} = -\sum_{j=i+1-m}^i b_{i+1-j} c_j & i+1 > m. \end{cases} \quad (21)$$

Con esto podemos resolver la RGE, pues tenemos

$$\begin{aligned} & -\frac{2\pi}{\beta_0} \frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2} \left[ 1 + \sum_{i=1} c_i \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^i \right] = d(\ln \mu) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right) &= -\frac{1}{2\beta_0} \left\{ \frac{4\pi}{\alpha_{s,0}} - \frac{4\pi}{\alpha_{s,\mu}} + c_1 \ln \left( \frac{\alpha_{s,\mu}}{\alpha_{s,0}} \right) + \sum_{i=1} \frac{c_{i+1}}{i} \left[ \left( \frac{\alpha_{s,\mu}}{4\pi} \right)^i - \left( \frac{\alpha_{s,0}}{4\pi} \right)^i \right] \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $\alpha_{s,0} := \alpha_s(\mu_0)$  y  $\alpha_{s,\mu} := \alpha_s(\mu)$ . Definimos ahora por comodidad  $l_\mu := \ln(\mu/\mu_0)$  y  $a_s := \alpha_s/4\pi$ , de manera que:

$$\begin{aligned} l_\mu &= -\frac{1}{2\beta_0} \left[ \frac{1}{a_{s,0}} - \frac{1}{a_{s,\mu}} + c_1 \ln \left( \frac{a_{s,\mu}}{a_{s,0}} \right) + \sum_{i=1} \frac{c_{i+1}}{i} (a_{s,\mu}^i - a_{s,0}^i) \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_{s,\mu}} &= \frac{1}{a_{s,0}} + c_1 \ln \left( \frac{a_{s,\mu}}{a_{s,0}} \right) + \sum_{i=1} \frac{c_{i+1}}{i} (a_{s,\mu}^i - a_{s,0}^i) + 2\beta_0 l_\mu. \end{aligned} \quad (23)$$

Usando la ecuación (12) y definiendo  $a_s^{(LL)} := \alpha_s^{(LL)}/(4\pi)$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{s,\mu}} &= \frac{1 + 2\beta_0 l_\mu a_{s,0}}{a_{s,0}} + c_1 \ln \left( \frac{a_{s,\mu}}{a_{s,0}} \right) + \sum_{i=1} \frac{c_{i+1}}{i} (a_{s,\mu}^i - a_{s,0}^i) \\ &= \frac{1}{a_{s,\mu}^{(LL)}} + c_1 \ln \left( \frac{a_{s,\mu}}{a_{s,0}} \right) + \sum_{i=1} \frac{c_{i+1}}{i} (a_{s,\mu}^i - a_{s,0}^i). \end{aligned} \quad (24)$$

Y esto finalmente nos lleva a

$$a_{s,\mu} = \left[ \frac{1}{a_{s,\mu}^{(LL)}} + c_1 \ln \left( \frac{a_{s,\mu}}{a_{s,0}} \right) + \sum_{i=1} \frac{c_{i+1}}{i} (a_{s,\mu}^i - a_{s,0}^i) \right]^{-1}. \quad (25)$$

Este resultado permite obtener una solución iterativa, si escribimos

$$a_{s,\mu}^{(n+1)} = \left\{ \frac{1}{a_{s,\mu}^{(LL)}} + c_1 \ln \left( \frac{a_{s,\mu}^{(n)}}{a_{s,0}} \right) + \sum_{i=1} \frac{c_{i+1}}{i} \left[ (a_{s,\mu}^{(n)})^i - a_{s,0}^i \right] \right\}^{-1}, \quad (26)$$

y usamos como punto de partida la solución a orden LL, es decir  $a_{s,\mu}^{(0)} = a_{s,\mu}^{(LL)}$ .

Podemos calcular la solución con precisión arbitraria, pues sabemos calcular los coeficientes  $c_i$  para un orden cualquiera.

## 2.2. Evolución de la masa quark $\bar{m}$

En este caso la RGE era

$$\mu \frac{d}{d\mu} \bar{m}^{(n_f)}(\mu) = 2\bar{m}^{(n_f)}(\mu) \sum_{n=1} \gamma_{n-1}^{(n_f)} \left[ \frac{\alpha_s^{(n_f)}(\mu)}{4\pi} \right]^n. \quad (27)$$

Los coeficientes conocidos (también hasta 5 loops) en este caso son (Refs. [19–22])

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(n_f)} &= -4, \\ \gamma_1^{(n_f)} &= \frac{20}{9}n_f - \frac{202}{3}, \\ \gamma_2^{(n_f)} &= \frac{140}{81}n_f^2 + \left( \frac{2216}{27} + \frac{160}{3}\zeta_3 \right) n_f - 1249, \\ \gamma_3^{(n_f)} &= \left( \frac{332}{243} - \frac{64}{27}\zeta_3 \right) n_f^3 + \left( -\frac{5242}{243} - \frac{800}{9}\zeta_2 + \frac{160}{3}\zeta_4 \right) n_f^2 + \\ &\quad + \left( \frac{91723}{27} + \frac{34192}{9}\zeta_3 - 880\zeta_4 - \frac{18400}{9}\zeta_5 \right) n_f - \frac{4603055}{162} - \frac{135680}{27}\zeta_3 + 8800\zeta_5, \\ \gamma_4^{(n_f)} &= \left( 325 - \frac{8}{\pi^4} + 400\zeta_3 \right) \frac{4n_f^4}{1215} - \left[ \frac{4032}{\pi^4} + 5(91865 + 231264\zeta_3 - 276480\zeta_5) \right] \frac{n_f^3}{7290} - \\ &\quad - \left[ 4622597 - \frac{174615}{\pi^4} + \frac{9200}{\pi^5} + 84\zeta_3(251353 + 52200\zeta_3) - 8317260\zeta_5 \right] \frac{2n_f^2}{5103} + \\ &\quad + \left\{ -\frac{42813582}{\pi^4} + \frac{3828000}{\pi^6} + 35[150736283 + 576\zeta_3(391813 + 21285\zeta_3)] \right\} \frac{n_f}{51030} + \\ &\quad + (-299257080\zeta_5 + 98280000\zeta_7) \frac{n_f}{1458} + \frac{349063}{405\pi^4} - \frac{48400}{189\pi^6} - 412720\zeta_7 + \frac{1}{51030} + \\ &\quad + \frac{1}{486} [-298536981 - 44\zeta_3(2109203 + 1069200\zeta_3 + 463514320\zeta_5)]. \end{aligned} \quad (28)$$

De nuevo, los coeficientes  $\gamma_2^{(n_f)}$ ,  $\gamma_3^{(n_f)}$  y  $\gamma_4^{(n_f)}$  dependen del esquema de renormalización utilizado.

Resolvamos la RGE para a orden  $N^{m-1}LL$ , con  $m > 1$ . Con esto en mente, utilizamos la regla de la cadena para escribir

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\bar{m}}{d\mu} &= 2\bar{m} \sum_{n=1}^m \gamma_{n-1} \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \Leftrightarrow \beta_{QCD} \frac{d\bar{m}}{d\alpha_s} = 2\bar{m} \sum_{n=1}^m \gamma_{n-1} \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d\bar{m}}{\bar{m}} = -\frac{\sum_{n=1}^m \gamma_{n-1} (\alpha_s/4\pi)^n}{\alpha_s \sum_{j=1}^m \beta_{j-1} (\alpha_s/4\pi)^j} d\alpha_s. \end{aligned} \quad (29)$$

Lo que nos lleva a

$$\bar{m}(\mu) = \bar{m}(\mu_0) \exp \left[ \int_{\alpha_s(\mu_0)}^{\alpha_s(\mu)} 2 \frac{\gamma(\alpha_s)}{\beta_{QCD}(\alpha_s)} d\alpha_s \right]. \quad (30)$$

Para realizar la integral, invertimos  $\beta_{QCD}$  al igual que hicimos al calcular la solución de

la RGE para  $\alpha_s$ . El integrando así nos queda

$$\begin{aligned}
2 \frac{\gamma(\alpha_s)}{\beta_{QCD}(\alpha_s)} &= \frac{2 \sum_{n=1}^m \gamma_{n-1} (\alpha_s/4\pi)^n}{-(\alpha_s^2/2\pi) \beta_0 \sum_{j=1}^m b_i (\alpha_s/4\pi)^j} = -\frac{4\pi}{\alpha_s^2 \beta_0} \sum_{n=1}^m \gamma_{n-1} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^n \sum_{i=1}^m c_i \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^i \\
&= -\frac{1}{\alpha_s \beta_0} \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_n \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^n \sum_{i=0}^m c_i \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^i = -\frac{1}{\alpha_s \beta_0} \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_n \sum_{i=0}^m c_i \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^{n+i} \quad (31) \\
&= -\frac{1}{\alpha_s \beta_0} \sum_{j=0}^m \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^j \sum_{k=1}^j c_k \gamma_{j-k} = -\frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{\gamma_0}{\alpha_s} + \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_s^{j-1}}{(4\pi)^j} \sum_{k=0}^j c_k \gamma_{j-k} \right].
\end{aligned}$$

Si ahora integramos

$$\int_{\alpha_s(\mu_0)}^{\alpha_s(\mu)} 2 \frac{\gamma(\alpha_s)}{\beta_{QCD}} d\alpha_s = -\frac{1}{\beta_0} \left\{ \gamma_0 \ln \left[ \frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(\mu_0)} \right] + \sum_{j=1}^m \frac{d_j}{j} \left[ \left( \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \right)^j - \left( \frac{\alpha_s(\mu_0)}{4\pi} \right)^j \right] \right\}, \quad (32)$$

donde hemos definido los coeficientes  $d_j := \sum_{k=0}^j c_k \gamma_{j-k}$ , con  $j > 0$ . Podemos calcularlos para orden mayor que  $m-1$ . Las relaciones en este caso serían

$$\begin{cases} d_j = \sum_{k=0}^j c_k \gamma_{j-k} = \sum_{k=0}^n c_{j-k} \gamma_k & j \leq m-1, \\ d_j = \sum_{k=0}^{m-1} c_{j-k} \gamma_k & j > m-1. \end{cases} \quad (33)$$

Con lo anterior, llegamos finalmente a que la solución de la RGE para  $\bar{m}$  es

$$\bar{m}(\mu) = \bar{m}(\mu_0) \exp \left\{ -\frac{1}{\beta_0} \left[ \gamma_0 \ln \left[ \frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(\mu_0)} \right] + \sum_{j=1}^m \frac{d_j}{j} \left[ \left( \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \right)^j - \left( \frac{\alpha_s(\mu_0)}{4\pi} \right)^j \right] \right] \right\}. \quad (34)$$

De nuevo, la suma en  $j$  se extiende hasta el orden necesario para alcanzar la precisión deseada, siendo este, en general, mayor que  $m-1$ .

Debemos tener en cuenta que, al considerar únicamente el régimen perturbativo de QCD, tan solo podemos utilizar la expresión que acabamos de escribir para calcular la evolución de  $\bar{m}$  en el caso de los quarks pesados (charm, bottom y top). Esto se debe a que, como veremos más adelante (Sección 3.1.1), la escala  $\Lambda_{QCD}$  se encuentra entre la escala de masa invariante el quark strange y la del charm.

Como podemos ver, el argumento de la exponencial de la ecuación (34) es el mismo (para un  $n_f$  dado), independientemente del quark pesado que estemos considerando. Así, la diferencia entre la evolución de sus masas radica, únicamente, en la escala de masa invariante asociada a cada uno.

### 3. Relaciones de matching

Como ya hemos dicho, las soluciones de ambas RGEs dependen, no solo del esquema de renormalización, si no también del número de sabores activos  $n_f$ . Esto se debe a que utilizamos distintas teorías efectivas para distintas escalas de energía.

Para relacionar  $\alpha_s$  distintas, necesitamos incorporar los efectos de umbral de los quarks pesados presentes en estas y que son debidos al cambio en la teoría efectiva utilizada al cruzar

dicha frontera. Esto se consigue por medio de las relaciones de matching, conocidas con precisión de 4 loops y que, obviamente, dependen del esquema de renormalización utilizado.

En los esquemas tipo MS las relaciones de matching no son triviales, en general, para cantidades que no representan observables físicos como son la función  $\beta$  y la dimensión anómala de masa. Para obtener las relaciones de matching, se considera la situación idealizada en la que tenemos QCD con  $n_l = n_f - 1$  quarks cuya masa se considera nula y un quark pesado  $h$  con masa  $\bar{m}_h \gg \mu$ . Posteriormente, se construye una teoría efectiva con  $n_l$  sabores activos imponiendo consistencia con la teoría con  $n_f$  sabores activos en la escala de energía umbral  $\mu_{th} \sim \bar{m}_h$ . Este procedimiento nos da las relaciones buscadas entre las dos teorías.

A orden LL y NLL (*Next to Leading Logarithm*), las relaciones de matching para la constante de acoplamiento  $\alpha_s$  y para la masa quark  $\bar{m}$  son triviales, siempre que establezcamos el umbral en  $\mu = \bar{m}_h$ . Esto es

$$\alpha_s^{(n_l)}(\bar{m}_h) = \alpha_s^{(n_f)}(\bar{m}_h), \quad \bar{m}^{(n_l)}(\bar{m}_h) = \bar{m}^{(n_f)}(\bar{m}_h). \quad (35)$$

Para órdenes mayores, estas relaciones no son ciertas, en general, para el esquema  $\overline{\text{MS}}$  y tanto  $\alpha_s$  como  $\bar{m}$  presentan discontinuidades en los umbrales como consecuencia del matching no trivial.

Debemos tener en cuenta que si las evoluciones de  $\alpha_s$  y  $\bar{m}$  se realizan a  $N + 1$  loops (es decir, siendo los coeficientes de mayor orden en las RGEs  $\beta_N$  y  $\gamma_N$ ) entonces, por consistencia, las relaciones de matching aplicadas deben corresponderse a  $N$  loops. Con esto en cuenta, podemos pasar a estudiar ambos casos por separado.

### 3.1. Matching de la constante de acoplamiento $\alpha_s$

La conexión entre  $\alpha_s$  en la teoría con  $n_l$  sabores activos y la correspondiente a  $n_f$  sabores activos es

$$\alpha_s^{(n_l)}(\mu) = \zeta_g^2 \alpha_s^{(n_f)}(\mu). \quad (36)$$

Como ya hemos dicho, conocemos  $\zeta_g^2$  hasta 4 loops. Su valor es (Refs. [23–26])

$$\begin{aligned} \zeta_g^2 = & 1 - \frac{\alpha_s^{(n_f)}(\mu)}{6\pi} \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \left[ \frac{\alpha_s^{(n_f)}(\mu)}{\pi} \right]^2 \left( \frac{11}{72} - \frac{11}{24} \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \frac{1}{36} \ln^2 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} \right) + \\ & + \left[ \frac{\alpha_s^{(n_f)}(\mu)}{\pi} \right]^3 \left[ \frac{564731}{124416} - \frac{82043}{27648} \zeta_3 - \frac{955}{576} \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \frac{53}{576} \ln^2 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} - \frac{1}{216} \ln^3 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \right. \\ & + n_l \left( -\frac{2633}{31104} + \frac{67}{576} \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} - \frac{1}{36} \ln^2 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} \right) \left. \right] + \left[ \frac{\alpha_s^{(n_f)}(\mu)}{\pi} \right]^4 \left[ \frac{291716893}{6123600} + \right. \\ & + \frac{3031309}{1306368} \ln^4 2 - \frac{121}{4320} \ln^5 2 - \frac{3031309}{217728} \zeta_2 \ln^3 2 - \frac{2362581983}{87091200} \zeta_3 - \\ & - \frac{76940219}{2177280} \zeta_4 + \frac{2057}{576} \zeta_4 \ln 2 + \frac{1389}{256} \zeta_5 + \frac{3031309}{54432} a_4 + \frac{121}{36} a_5 - \frac{2362581983}{87091200} X_0 + \\ & + \left. \left( \frac{7391699}{746496} - \frac{2529743}{165888} \zeta_3 \right) \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \frac{2177}{3456} \ln^2 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} - \frac{1883}{10368} \ln^3 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \frac{1}{1296} \ln^4 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{7391699}{746496} - \frac{2529743}{165888} \zeta_3 \right) \ln \frac{\mu^2}{m_h^2} + \frac{2177}{3456} \ln^2 \frac{\mu^2}{m_h^2} - \frac{1883}{10368} \ln^3 \frac{\mu^2}{m_h^2} + \frac{1}{1296} \ln^4 \frac{\mu^2}{m_h^2} + \\
& + n_l \left( -\frac{4770941}{2239488} + \frac{685}{124416} \ln^4 2 - \frac{685}{20736} \zeta_2 \ln^2 2 + \frac{3645913}{995328} \zeta_3 - \right. \\
& - \frac{541549}{165888} \zeta_4 + \frac{115}{576} \zeta_5 + \frac{685}{5184} a_4 + \left. \left( -\frac{110341}{373248} + \frac{110779}{82944} \zeta_3 \right) \ln \frac{\mu^2}{m_h^2} - \right. \\
& - \frac{1483}{10368} \ln^2 \frac{\mu^2}{m_h^2} - \frac{127}{5184} \ln^3 \frac{\mu^2}{m_h^2} \left. \right) + n_l^2 \left( -\frac{271883}{4478976} + \frac{167}{5184} \zeta_3 + \frac{6865}{186624} \ln \frac{\mu^2}{m_h^2} - \right. \\
& \left. - \frac{77}{20736} \ln \frac{\mu^2}{m_h^2} + \frac{1}{324} \ln^3 \frac{\mu^2}{m_h^2} \right) \left. \right], \tag{37}
\end{aligned}$$

donde  $a_n = Li_n(1/2) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/(2^k k^n)$  y  $X_0$  se conoce solo numéricamente

$$X_0 = 1,808879546208334741426364595086952090. \tag{38}$$

Podemos invertir esta relación y saber así cómo cruzar el umbral en sentido inverso. Esto se consigue re-expandingo y sustituyendo recursivamente, obteniendo (Ref. [24])

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta_g^2} = & 1 + \frac{\alpha_s^{(n_l)}}{6\pi} \ln \frac{\mu^2}{m_h^2} + \left[ \frac{\alpha_s^{(n_l)}}{\pi} \right]^2 \left( -\frac{11}{72} + \frac{19}{24} \ln^2 \frac{\mu^2}{m_h^2} + \frac{1}{36} \ln \frac{\mu^2}{m_h^2} \right) + \left[ \frac{\alpha_s^{(n_l)}}{\pi} \right]^3 \left[ -\frac{564731}{124416} + \right. \\
& + \frac{511}{576} \ln^2 \frac{\mu^2}{m_h^2} + \frac{1}{216} \ln^3 \frac{\mu^2}{m_h^2} + \frac{2633}{31104} n_l + \ln \frac{\mu^2}{m_h^2} \left( \frac{8557}{1728} + n_l \left( -\frac{409}{1728} + \frac{2}{27\pi} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{31}{27} \right) + \frac{82043}{27648} \zeta_3 \left. \right] + \left[ \frac{\alpha_s^{(n_l)}}{\pi} \right]^4 \left[ -\frac{1165152397}{24494400} + \frac{1}{1296} \ln^4 \frac{\mu^2}{m_h^2} + \right. \\
& + \ln^3 \frac{\mu^2}{m_h^2} \left( \frac{14149}{10368} - \frac{107}{1728} n_l \right) + \ln^2 \frac{\mu^2}{m_h^2} \left( \frac{46783}{3456} + n_l^2 \left( \frac{493}{20736} - \frac{1}{81\pi^2} \right) + \right. \\
& + n_l \left( -\frac{9115}{10368} + \frac{31}{81\pi^2} + \frac{4}{81\pi} \right) - \frac{961}{324\pi^2} - \frac{62}{81\pi} \left. \right) + \frac{76940219\pi^4}{195955200} + \frac{151369}{2177280} X_0 - \\
& - \frac{2057\pi^4}{51840} \ln 2 + \frac{3031309\pi^2}{1306368} \ln^2 2 - \frac{121\pi^2}{2592} \ln^3 2 - \frac{3031309}{1306368} \ln^4 2 + \frac{121}{4320} \ln^5 2 \\
& - \frac{3031309}{54432} a_4 - \frac{121}{36} a_5 + n_l^2 \left( \frac{271883}{4478976} - \frac{167}{5184} \zeta_3 \right) + \frac{2362581983}{87091200} \zeta_3 + \\
& + \ln \frac{\mu^2}{m_h^2} \left( \frac{15583339}{746496} - \frac{67}{27\pi^2} - \frac{105989}{5184\pi} - \frac{31\pi}{54} + \frac{31\pi^2}{54} + n_l^2 \left( \frac{1679}{186624} - \frac{71}{1296\pi} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\pi}{162} + \frac{\pi^2}{162} \right) - \frac{31\pi}{162} \ln 2 + \frac{31\pi^2}{162} \ln 2 + \frac{2928305}{165888} \zeta_3 + \frac{31}{108\pi} \zeta_3 + n_l \left( -\frac{1099295}{373248} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{19}{54\pi^2} + \frac{1405}{648\pi} + \frac{43\pi}{324} - \frac{43\pi^2}{324} + \frac{\pi}{81} \ln 2 - \frac{\pi^2}{324} \ln 16 - \frac{132283}{82944} \zeta_3 - \frac{1}{54\pi} \right) \right) + \\
& + n_l \left( \frac{4770941}{2239488} + \frac{541549\pi^4}{14929920} + \frac{685\pi^2}{124416} \ln^2 2 - \frac{685}{124416} \ln^4 2 - \frac{685}{5184} a_4 - \frac{3645913}{995328} \zeta_3 - \right. \\
& \left. - \frac{115}{576} \zeta_5 \right) - \frac{1389}{256} \zeta_5 \left. \right]. \tag{39}
\end{aligned}$$

Ahora vamos a utilizar que a LL el matching de  $\alpha_s$  es trivial para calcular  $\Lambda_{\text{QCD}}$  de forma aproximada.

### 3.1.1. Cálculo aproximado de $\Lambda_{\text{QCD}}$

El valor que se suele tomar como referencia para  $\alpha_s^{(n_f)}(\mu)$  se corresponde con la escala de energía de la masa del bosón  $Z$ , es decir

$$\alpha_s^{(n_f)}(\mu_0) = \alpha_s^{(5)}(m_Z) = 0,1181, \quad (40)$$

donde  $m_Z = 91,8176$  GeV y hemos omitido las incertidumbres. La escala de energía a la que  $\alpha_s^{(n_f)}(\mu)$  diverge (es decir, la escala  $\Lambda_{\text{QCD}}$ ) tiene  $n_f = 3$ . Así, debemos evolucionar  $\alpha_s^{(n_f)}(\mu)$  desde  $\mu = m_Z$ , utilizando tanto la ecuación (12) como la relación de matching a orden LL, hasta llegar a una expresión para  $\alpha_s^{(3)}(\mu)$  y, una vez conocida dicha expresión, calcular cuando diverge.

Para comenzar, utilizamos la ecuación (12) y  $\alpha_s^{(5)}(m_Z)$  para obtener

$$\alpha_s^{(5)}(m_b) = \frac{\alpha_s^{(5)}(m_Z)}{\frac{\beta_0^{(5)}}{2\pi} \ln\left(\frac{m_b}{m_Z}\right) \alpha_s^{(5)}(m_Z) + 1} = 0,2122 \quad (41)$$

donde  $m_b = 4,18$  GeV es la escala de masa invariante del quark bottom, valor que consideramos umbral entre 4 y 5 sabores activos (es decir,  $\bar{m}_h = m_b$  para  $n_f = 5$  y  $n_l = 4$ ) y omitimos el superíndice LL en esta parte para simplificar la notación.

Por las relaciones de matching a orden LL, sabemos que

$$\alpha_s^{(4)}(m_b) = \alpha_s^{(5)}(m_b). \quad (42)$$

De esta forma, podemos tomar  $\alpha_s^{(4)}(m_b)$  como valor de referencia para  $n_f = 4$  y calcular

$$\alpha_s^{(4)}(m_c) = \frac{\alpha_s^{(4)}(m_b)}{\frac{\beta_0^{(4)}}{2\pi} \ln\left(\frac{m_c}{m_b}\right) \alpha_s^{(4)}(m_b) + 1} = 0,3167, \quad (43)$$

donde  $m_c = 1,27$  GeV es la escala de masa invariante del quark charm y tiene la misma función en el umbral entre 3 y 4 sabores activos que tenía  $m_b$  en el umbral entre 4 y 5.

De nuevo, utilizamos las relaciones de matching a orden LL para obtener  $\alpha_s^{(3)}(m_c)$  a partir de  $\alpha_s^{(4)}(m_c)$  y utilizamos este nuevo valor como referencia para  $n_f = 3$ . Con esto llegamos a

$$\alpha_s^{(3)}(\mu) = \frac{\alpha_s^{(3)}(m_c)}{\frac{\beta_0^{(3)}}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu}{m_c}\right) \alpha_s^{(3)}(m_c) + 1}. \quad (44)$$

Ahora ya podemos obtener el valor de  $\Lambda_{\text{QCD}}$  fácilmente, calculando el valor de  $\mu$  para el cual el denominador de la expresión anterior se anula. Esto es

$$\frac{\beta_0^{(3)}}{2\pi} \ln\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_c}\right) \alpha_s^{(3)}(m_c) = 0 \Leftrightarrow \Lambda_{\text{QCD}} = m_c \exp\left[-\frac{2\pi}{\beta_0^{(3)} \alpha_s^{(3)}(m_c)}\right]. \quad (45)$$

De manera que  $\Lambda_{\text{QCD}} = 0,1434$  GeV.

### 3.2. Matching de la masa quark $\bar{m}$

De forma análoga al caso de  $\alpha_s$ , la conexión entre  $\bar{m}$  en la teoría con  $n_l$  sabores activos y la correspondiente a  $n_f$  sabores activos es

$$\bar{m}^{(n_l)}(\mu) = \zeta_m^2 \bar{m}^{(n_f)}(\mu). \quad (46)$$

También conocemos  $\zeta_m^2$  hasta 4 loops, siendo su valor (Refs. [23, 27])

$$\begin{aligned} \zeta_m^2 = & 1 + \left[ \frac{\alpha_s^{n_f}}{\pi} \right]^2 \left( \frac{89}{432} - \frac{5}{36} \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \frac{1}{12} \ln^2 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} \right) + \left[ \frac{\alpha_s^{n_f}}{\pi} \right]^3 \left[ \frac{2951}{2916} + \frac{1}{9} \zeta_2 \ln^2 2 - \right. \\ & - \frac{1}{54} \ln^4 2 - \frac{407}{864} \zeta_3 + \frac{103}{72} \zeta_4 - \frac{4}{9} a_4 - \left( \frac{311}{2592} + \frac{5}{6} \zeta_3 \right) \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \frac{175}{432} \ln^2 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \\ & + \left. \frac{29}{216} \ln^3 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + n_l \left( \frac{1327}{11664} - \frac{2}{27} \zeta_3 - \frac{53}{432} \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} - \frac{1}{108} \ln^3 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} \right) \right] + \\ & + \left[ \frac{\alpha_s^{n_f}}{\pi} \right]^4 \left[ \frac{131968227029}{3292047360} - \frac{1924649}{4354560} \ln^4 2 + \frac{59}{1620} \ln^5 2 + \frac{1924649}{725760} \zeta_2 \ln^2 2 - \right. \\ & - \frac{59}{162} \zeta_2 \ln^3 2 - \frac{353193131}{40642560} \zeta_3 + \frac{1061}{576} \zeta_3^2 + \frac{16187201}{580608} \zeta_4 - \frac{725}{108} \zeta_4 \ln 2 - \\ & - \frac{59015}{1728} \zeta_5 - \frac{3935}{432} \zeta_6 - \frac{1924649}{181440} a_4 - \frac{118}{27} a_5 + \left( -\frac{2810855}{373248} - \frac{31}{216} \ln^4 2 + \right. \\ & + \left. \frac{31}{36} \zeta_2 \ln^2 2 - \frac{373261}{27648} \zeta_3 + \frac{4123}{288} \zeta_4 + \frac{575}{72} \zeta_5 - \frac{31}{9} a_4 \right) \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \\ & + \left( \frac{51163}{10368} - \frac{155}{48} \zeta_3 \right) \ln^2 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \frac{301}{324} \ln^3 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \frac{305}{1152} \ln^4 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \\ & + n_l \left( -\frac{2261435}{746496} + \frac{49}{2592} \ln^4 2 - \frac{1}{270} \ln^5 2 - \frac{49}{432} \zeta_2 \ln^2 2 + \frac{1}{27} \zeta_2 \ln^3 2 - \right. \\ & - \frac{1075}{1728} \zeta_3 - \frac{1225}{3456} \zeta_4 + \frac{49}{72} \zeta_4 \ln 2 + \frac{497}{288} \zeta_5 + \frac{49}{108} a_4 + \frac{4}{9} a_5 + \\ & + \left( \frac{16669}{31104} + \frac{1}{108} \ln^4 2 - \frac{1}{18} \zeta_2 \ln^2 2 + \frac{221}{576} \zeta_3 - \frac{163}{144} \zeta_4 + \frac{2}{9} a_4 \right) \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} - \\ & - \left. \frac{7825}{10368} \ln^2 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} - \frac{23}{288} \ln^3 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} - \frac{5}{144} \ln^4 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} \right) + n_l^2 \left( \frac{17671}{124416} - \frac{5}{864} \zeta_3 - \right. \\ & - \left. \frac{7}{96} \zeta_4 + \left( -\frac{3401}{46656} + \frac{7}{108} \zeta_3 \right) \ln \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \frac{31}{1296} \ln^2 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} + \frac{1}{864} \ln^4 \frac{\mu^2}{\bar{m}_h^2} \right) \Big]. \quad (47) \end{aligned}$$

A diferencia del caso de  $\alpha_s$ , ahora no escribiremos  $1/\zeta_m^2$ , pues utilizar el esquema  $\overline{\text{MS}}$  al cruzar en sentido decreciente en energías conlleva (para  $\bar{m}$ ) complicaciones asociadas a la construcción del esquema de renormalización y que no vamos a considerar por no aportar nada conceptualmente relevante para el tema tratado en este TFG.

## 4. Resultados y discusión

En esta sección, calcularemos la evolución de  $\alpha_s$  y  $\bar{m}$  (esta última para los tres quarks pesados) y analizaremos las consecuencias que tiene, sobre la evolución de ambas cantidades,

variar ligeramente la escala de energía  $\mu_{th}$  a la que se realiza el matching.

#### 4.1. Cálculo de la evolución de $\alpha_s$

Para calcular la evolución de  $\alpha_s$  utilizaremos el método iterativo que escribimos en la ecuación (26) utilizando, como ya dijimos, la solución a orden LL como punto de partida  $a_{s,\mu}^{(0)} = a_{s,\mu}^{(LL)}$ . Como criterio de convergencia, impondremos que la máxima diferencia entre  $a_{s,\mu}^{(n+1)}$  y  $a_{s,\mu}^{(n)}$  sea menor que la precisión buscada  $\delta$  (en nuestro caso  $\delta = 10^{-20}$ ). Para escoger el orden  $\rho$  hasta el que calculamos los coeficientes  $c_i$ , imponemos la condición

$$\frac{\frac{c_{\rho+1}}{\rho} \left[ \left( a_{s,\mu}^{(n)} \right)^\rho - a_{s,0}^\rho \right]}{c_1 \ln \left( \frac{a_{s,\mu}^{(n)}}{a_{s,0}} \right) + \sum_{i=1}^{\rho} \frac{c_{i+1}}{i} \left[ \left( a_{s,\mu}^{(n)} \right)^i - a_{s,0}^i \right]} < \delta, \quad (48)$$

exigiendo así que la aportación relativa, a la serie integrada, del último coeficiente considerado, sea menor que la precisión buscada.

Al igual que hicimos en la Sección 3.1.1, nuestro valor de referencia inicial será  $\alpha_s^{(5)}(m_Z) = 0,1181$ , de forma que  $a_{s,0} := a_{s,m_Z} = \alpha_s(m_Z)/4\pi$ . A partir de este y utilizando el método que acabamos de escribir, calculamos los valores de  $\alpha_s$  en los dos umbrales posibles para  $n_f = 5$  (escala de masa invariante del quark bottom  $m_b = 4,18$  GeV y top  $m_t = 173$  GeV). Con esto y las relaciones de matching, obtenemos ambos valores umbrales, pero para el número de sabores activos correspondiente a cruzar cada uno de los umbrales:  $\alpha_s^{(4)}(m_b)$  y  $\alpha_s^{(6)}(m_t)$ ; siendo estos los valores de referencia para  $n_f = 4$  y 6, respectivamente. Al hacer esto obtenemos

$$\alpha_s^{(5)}(m_b) = 0,225009 \rightarrow \alpha_s^{(4)}(m_b) = 0,225242, \quad (49)$$

$$\alpha_s^{(5)}(m_t) = 0,107689 \rightarrow \alpha_s^{(6)}(m_t) = 0,107668. \quad (50)$$

Para poder cubrir toda el régimen perturbativo de QCD, necesitamos un valor de referencia para  $n_f = 3$ . Con esto en mente, de forma análoga al apartado anterior, pero con  $n_f = 4$ , calculamos el valor en el umbral correspondiente a la escala de masa invariante del quark charm ( $m_c = 1,27$  GeV) y, con las relaciones de matching, calculamos dicho valor para  $n_f = 3$ , obteniendo así el valor de referencia buscado. De esta manera, obtenemos

$$\alpha_s^{(4)}(m_c) = 0,389427 \rightarrow \alpha_s^{(3)}(m_c) = 0,391052. \quad (51)$$

Como podemos observar, cuanto menor es  $\mu$ , mayor es la discontinuidad que aparece en  $\alpha_s$  al cruzar un umbral. Esto era perfectamente esperable, pues el número de términos que estamos utilizando en el desarrollo en serie de la función  $\beta$  y en las relaciones de matching es fijo; mientras que al disminuir  $\mu$ , la aproximación perturbativa empleada necesita más términos para mantener la misma precisión en la convergencia, dado que  $\alpha_s$  aumenta.

Con estos valores ya disponemos de todo lo necesario para calcular la evolución de  $\alpha_s$  en el régimen perturbativo de QCD. Podemos realizar una representación gráfica de la misma, utilizando la ecuación (26), con el valor de referencia correspondiente a cada región, y los criterios de convergencia escritos más arriba. Con este fin, calcularemos  $\alpha_s$  para distintos



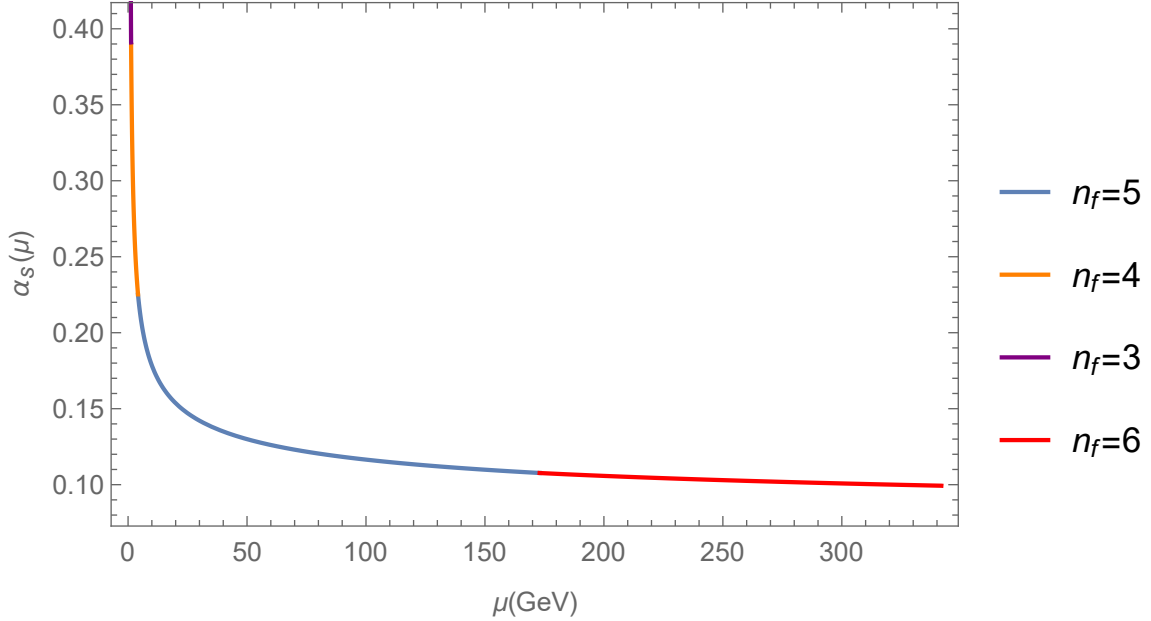


Figura 1: Evolución de  $\alpha_s(\mu)$  en el régimen perturbativo de QCD

valores de  $\mu$  e interpolaremos por splines los resultados obtenidos, utilizando *Mathematica*. Esta representación se muestra en la Figura 1. Vemos que, si consideramos  $\mu \sim 1$  GeV o menor, no podremos seguir utilizando teoría de perturbaciones debido al elevado valor de  $\alpha_s$ . También podemos observar en esta Figura, la libertad asintótica característica de QCD.

En la Figura 1 no podemos observar la discontinuidad en los umbrales debida a la relación de matching no trivial, pues la escala de representación es demasiado grande. Esto no supone ningún problema, pues dicha discontinuidad no es el tema que nos ocupa ahora. En la Sección 4.3 veremos dicha discontinuidad, como varía con valor  $\mu_{th}$  y el efecto de esta variación sobre la evolución de  $\alpha_s$ .

## 4.2. Cálculo de la evolución de $\bar{m}$

En esta Sección vamos a utilizar la ecuación (34) y la relación de matching de la ecuación (47) para calcular la evolución de la masa de los tres quarks pesados (charm, bottom y top). De manera análoga al caso del cálculo iterativo de  $\alpha_s$ , para conocer el orden  $\rho$  hasta el que calculamos los coeficientes  $d_j$  presentes en la ecuación (34), imponemos la condición

$$\frac{\frac{d_\rho}{\rho} (a_{s,\mu}^\rho - a_{s,\mu_0}^\rho)}{\sum_{j=1}^{\rho} \frac{d_j}{j} (a_{s,\mu}^j - a_{s,\mu_0}^j)} < \delta, \quad (52)$$

exigiendo así que la aportación relativa, a la serie integrada, del último coeficiente considerado, sea menor que la precisión buscada.

Con esto y la evolución de  $\alpha_s$  obtenida en la Sección 4.1, podemos calcular la evolución de la masa de los tres quarks pesados. Debemos tener en cuenta que, como ya dijimos al final de la Sección 3.2, únicamente calcularemos dicha evolución para valores de  $\mu$  mayores que la escala de masa invariante del quark considerado en cada caso.

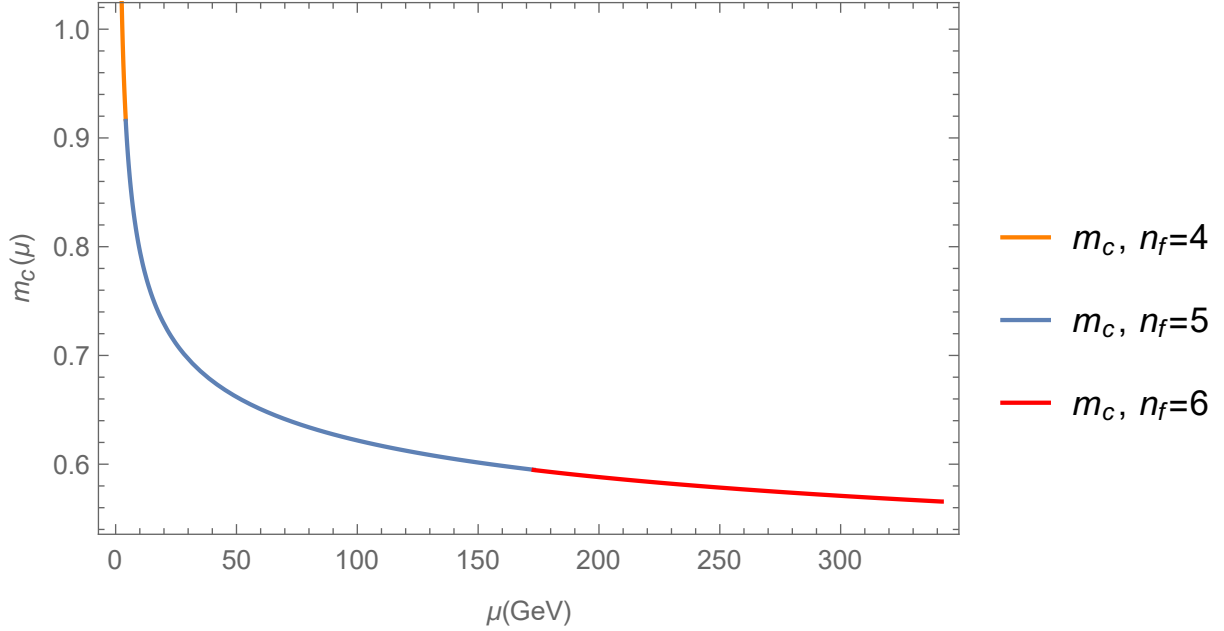


Figura 2: Evolución de  $\overline{m}_c(\mu)$  para  $\mu$  mayores que  $m_c$

#### 4.2.1. Evolución para el quark charm

Para calcular la evolución de la masa para el quark charm en la región deseada ( $\mu$  mayores que su escala de masa invariante  $m_c = 1,27$  GeV), vamos a necesitar conocer antes su valor en dos umbrales (escala de masa invariante del quark bottom  $m_b = 4,18$  GeV y la del quark top  $m_t = 173$  GeV). El valor que tomamos como referencia para la masa de c es  $m_c$  con  $n_f = 4$ . Partiendo de este y utilizando la ecuación (34), calculamos fácilmente  $\overline{m}_c^{(4)}(m_b)$ . Una vez hecho esto, aplicamos la relación de matching de la ecuación (47) y obtenemos

$$\overline{m}_c^{(4)}(m_b) = 0,917266 \text{ GeV} \rightarrow \overline{m}_c^{(5)}(m_b) = 0,915594 \text{ GeV}. \quad (53)$$

Ahora tomamos  $\overline{m}_c^{(5)}(m_b)$  como valor de referencia para la región con  $n_f = 5$ , repetimos el procedimiento anterior para el umbral correspondiente a  $\mu_{th} = m_t$  y obtenemos

$$\overline{m}_c^{(5)}(m_t) = 0,594853 \text{ GeV} \rightarrow \overline{m}_c^{(6)}(m_t) = 0,594661 \text{ GeV}. \quad (54)$$

Al igual que para  $\alpha_s$ , observamos que al disminuir  $\mu$ , aumenta la discontinuidad en  $\overline{m}_c$  al cruzar un umbral, debido a la menor precisión de la teoría de perturbaciones.

Podemos realizar una representación gráfica de la evolución de  $\overline{m}_c$  de forma análoga a como realizamos la correspondiente a  $\alpha_s$ . Esta se muestra en la Figura 2. De nuevo, en la Figura 2 no podemos observar las discontinuidades de  $\overline{m}_c$  (al cruzar un umbral) debidas a la relación de matching, pues la escala representada es demasiado grande. Como ya dijimos, estas discontinuidades serán tratadas en la Sección 4.3.

#### 4.2.2. Evolución para el quark bottom

En este caso, queremos calcular la evolución de la masa del quark bottom para  $\mu$  mayores que  $m_b$ . Así, en este caso necesitamos conocer previamente el valor de  $\overline{m}_b$  en un umbral

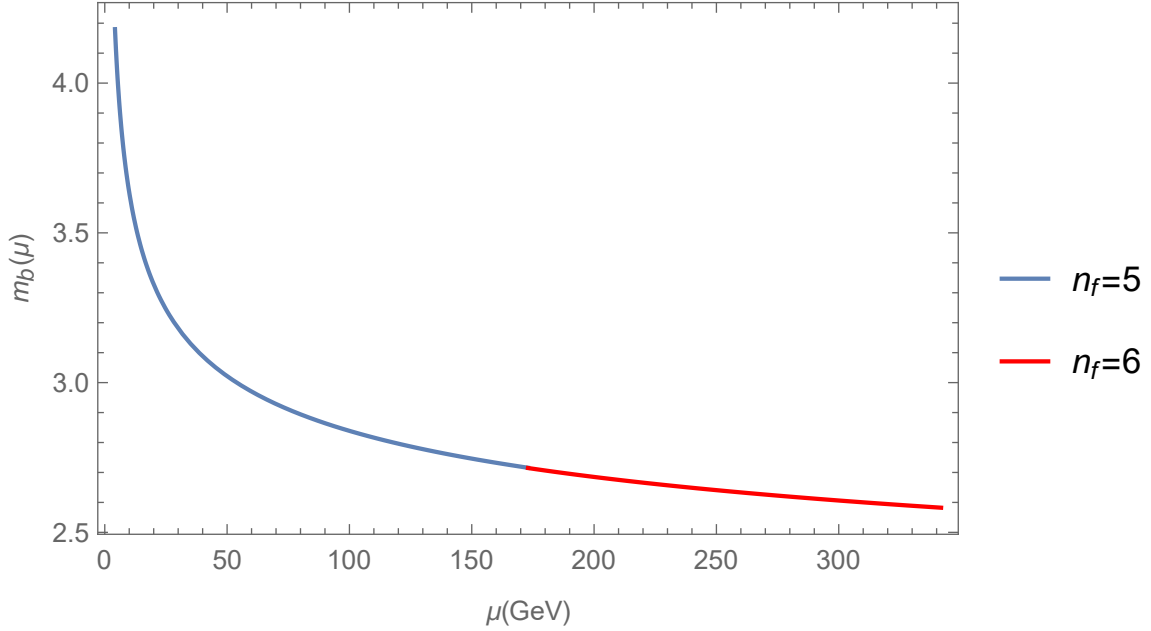


Figura 3: Evolución de  $\overline{m}_b(\mu)$  para  $\mu$  mayores que  $m_b$

( $\mu_{th} = m_t$ ). Del mismo modo que en la sección anterior, partiendo ahora de la masa de referencia  $m_c$  para  $n_f = 5$ , fácilmente calculamos

$$\overline{m}_b^{(5)}(m_t) = 2,715706 \text{ GeV} \rightarrow \overline{m}_b^{(6)}(m_t) = 2,714830 \text{ GeV}. \quad (55)$$

Con estos valores, podemos calcular la evolución de  $\overline{m}_b$  en el régimen deseado. Mostramos la representación gráfica de esta evolución en la Figura 3. Sin poder distinguir en la Figura 3 (al igual que ocurría en las Figuras 1 y 2 para  $\alpha_s$  y  $\overline{m}_c$ , respectivamente) la discontinuidad de  $\overline{m}_b$ , al cruzar el umbral  $\mu_{th} = m_t$ , debida a la relación de matching no trivial.

### 4.2.3. Evolución para el quark top

Este caso es el más sencillo, pues no hay umbrales conocidos para  $\mu$  mayores que  $m_t$ . De esta manera, podemos calcular la evolución de  $\overline{m}_t$  a partir de la ecuación (34), sin más que utilizar como masa de referencia  $m_t$  para  $n_f = 6$ .

La representación gráfica de esta evolución se muestra en la Figura 4.

Para finalizar esta sección, podemos representar la diferencia entre la evolución de  $\overline{m}_b$  y la de  $\overline{m}_c$  con  $n_f = 5$  y  $n_f = 6$  (no representamos también la de  $\overline{m}_t$ , pues su orden es mucho mayor que el de las dos anteriores), para así compararlas. Dicha representación se muestra en la Figura 5. En esta Figura podemos ver que esta dicha diferencia disminuye con  $\mu$  y tiende a un valor constante. No representamos también el cociente entre la evolución de ambas masas, pues este es constante y de valor igual al cociente entre las masas de referencia. Esto se debe a que en la ecuación (34), el argumento de la exponencial era independiente del sabor; al igual que las relaciones de matching.

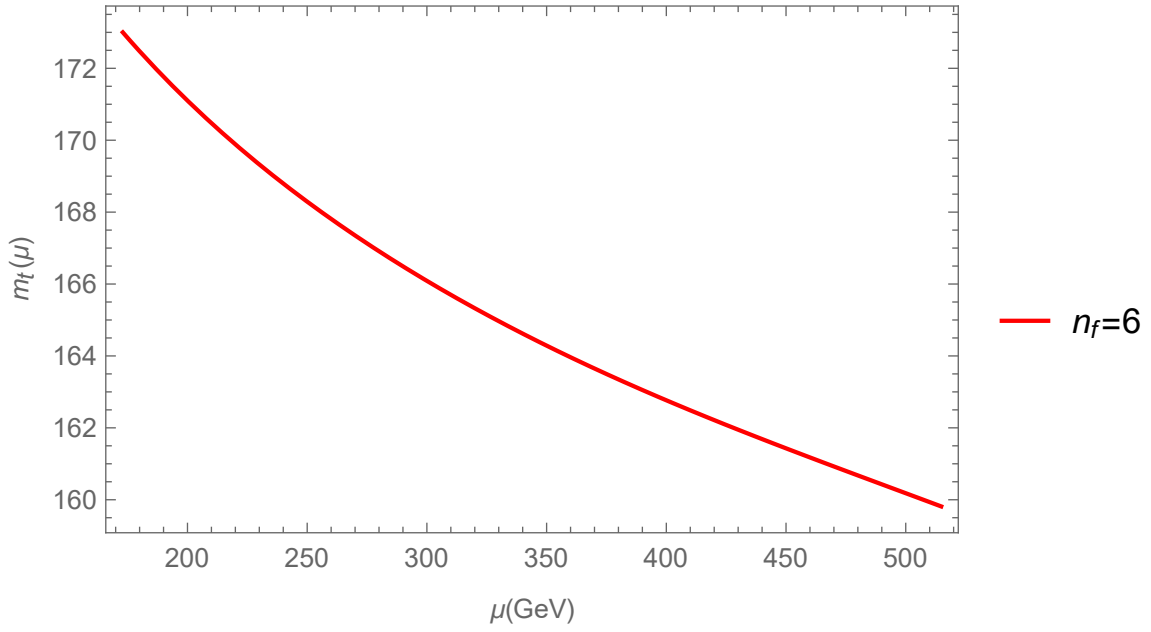


Figura 4: Evolución de  $\overline{m}_t(\mu)$  para  $\mu$  mayores que  $m_t$

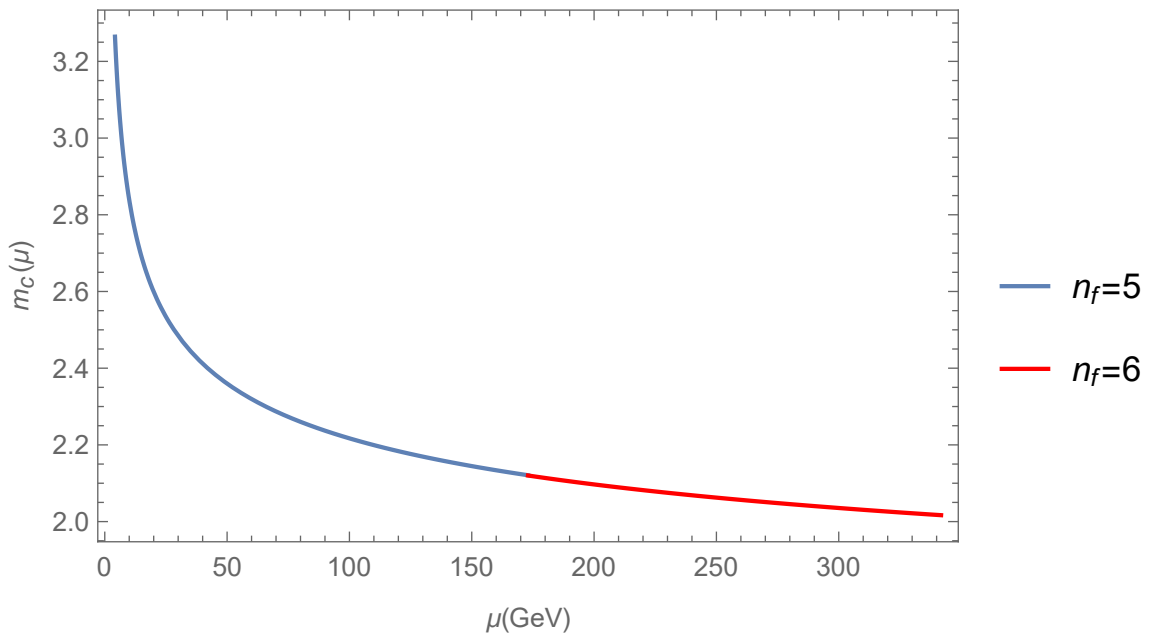


Figura 5: Diferencia entre  $\overline{m}_b(\mu)$  y  $\overline{m}_c(\mu)$  para  $n_f = 5$  y  $n_f = 6$

### 4.3. Efectos de la variación del valor de $\mu_{th}$

Como ya dijimos, en esta sección vamos a analizar las consecuencias de variar ligeramente la escala  $\mu_{th}$  a la que se realiza el matching, es decir, la escala en la que consideramos que se encuentra el umbral entre  $n_l$  y  $n_f$  sabores activos. Lo haremos en los umbrales correspondientes a  $m_b$  ( $n_l = 4$  y  $n_f = 5$ ) y  $m_t$  ( $n_l = 5$  y  $n_f = 6$ ), primero para  $\alpha_s$  y posteriormente para  $\overline{m}_c$ .

#### 4.3.1. Efectos de la variación de $\mu_{th}$ sobre la evolución de $\alpha_s$

Al partir del valor de referencia  $\alpha_s^{(5)}(m_Z) = 0,1181$ , la evolución de  $\alpha_s^{(5)}(\mu)$  será la misma, sean cuales sean las escalas de energía  $\mu_{th}$  en las que establezcamos ambos umbrales. Esto, obviamente, ocurre siempre que comparemos la evolución para  $n_f = 5$ , cuando, para una  $\mu$  dada, el número de sabores activos sea distinto, las evoluciones serán diferentes. Así, nos interesará comparar  $\alpha_s^{(4)}(\mu)$ , al variar la escala umbral correspondiente a  $m_b$ , y  $\alpha_s^{(6)}(\mu)$ , al variar la correspondiente a  $m_t$ . Realizaremos esta comparación calculando la diferencia relativa entre valores de  $\alpha_s$  obtenidos para los distintos  $\mu_{th}$  considerados.

Las distintas escalas umbrales que tendremos en cuenta serán

$$\begin{cases} \mu_{th} = m_b, m_b \pm 0,5 \text{ GeV} & \text{para la escala de masa invariante del bottom,} \\ \mu_{th} = m_t, m_t \pm 0,5 \text{ GeV} & \text{para la escala de masa invariante del top.} \end{cases}$$

Consideremos cada caso por separado:

- En primer lugar, calculamos la evolución de  $\alpha_s^{(4)}(\mu)$  en los tres casos que tenemos en cuenta. Para ello, necesitamos primero el valor de  $\alpha_s^{(5)}(\mu_{th})$  cuando  $\mu_{th} = m_b \pm 0,5 \text{ GeV}$ , pues calculamos el caso con  $\mu_{th} = m_b$  en la ecuación (49). Con estos valores y las relaciones de matching, podemos obtener  $\alpha_s^{(4)}(\mu_{th})$  en ambos casos. Al hacer esto, obtenemos

$$\alpha_s^{(5)}(m_b - 0,5 \text{ GeV}) = 0,234047 \rightarrow \alpha_s^{(4)}(m_b - 0,5) = 0,235449, \quad (56)$$

$$\alpha_s^{(5)}(m_b + 0,5 \text{ GeV}) = 0,217586 \rightarrow \alpha_s^{(4)}(m_b + 0,5) = 0,216953. \quad (57)$$

Como vemos, la discontinuidad es mayor en estos casos que en el escrito en la ecuación (49). Esto es debido a que, al ser en este último  $\mu_{th} = m_h$ , entonces  $\ln(\mu_{th}^2/m_h^2) = 0$  y todos los términos proporcionales a potencias de esta cantidad dan lugar a una suma nula en las relaciones de matching, siendo esta más próxima a la trivial.

Con esto, ya tenemos los valores de referencia para  $n_f = 4$  necesarios en cada caso. Así, podemos realizar una representación gráfica en torno al escala de energía umbral para los dos casos que acabamos de calcular (no representamos también el correspondiente a  $\mu_{th} = m_b$ , pues la representación gráfica tendría demasiada información y no podríamos extraer ninguna conclusión). Esta representación gráfica se muestra en la Figura 6.

Debido al rango de representación en la Figura 6, no podemos apreciar la diferencia entre los valores de  $\alpha_s^{(4)}(\mu)$  representados para las dos escalas umbrales consideradas. No obstante, si calculamos la diferencia relativa (tomando como valor de referencia el

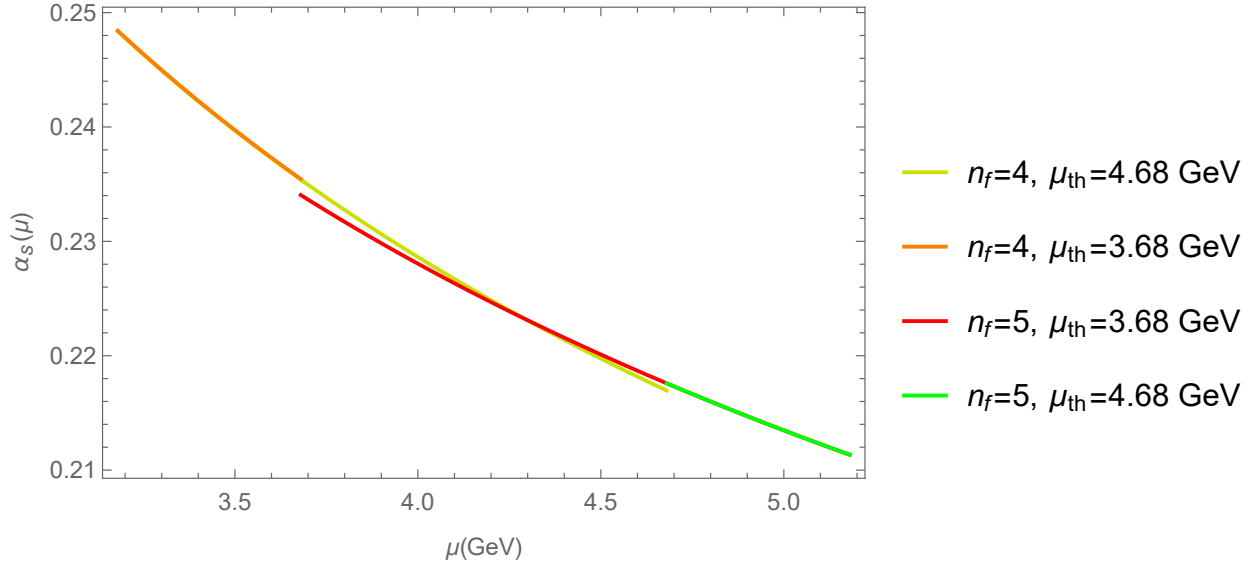


Figura 6: Evolución de  $\alpha_s(\mu)$  en torno al umbral entre  $n_l = 4$  y  $n_f = 5$ , para  $\mu_{th} = m_b \pm 0,5$  GeV

obtenido con  $\mu_{th} = m_b$ ) para, por ejemplo,  $\mu = 3$  GeV, obtenemos

$$\frac{|\alpha_s^{(4,0)}(3 \text{ GeV}) - \alpha_s^{(4,-)}(3 \text{ GeV})|}{\alpha_s^{(4,0)}(3 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 0,013 \%, \quad (58)$$

$$\frac{|\alpha_s^{(4,0)}(3 \text{ GeV}) - \alpha_s^{(4,+)}(3 \text{ GeV})|}{\alpha_s^{(4,0)}(3 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 0,010 \%, \quad (59)$$

$$\frac{|\alpha_s^{(4,+)}(3 \text{ GeV}) - \alpha_s^{(4,-)}(3 \text{ GeV})|}{\alpha_s^{(4,0)}(3 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 0,234 \%, \quad (60)$$

donde los superíndices 0, + y - hacen referencia a que  $\mu_{th} = m_b$ ,  $m_b + 0,5$  GeV y  $m_b - 0,5$  GeV, respectivamente. De esta manera, vemos que sí existe una diferencia en la evolución de  $\alpha_s^{(4)}(\mu)$  al variar la escala de energía umbral, como era de esperar. También era de esperar que la diferencia relativa sea mayor cuanto mayor sea  $|\mu_{th}^{(i)} - \mu_{th}^{(j)}|$ , donde  $j$  e  $i$  representan las dos escalas umbrales consideradas en cada caso, pues mayor es el intervalo de  $\mu$  en el que  $\alpha_s^{(n_f)}(\mu)$  evoluciona con distinto  $n_f$ .

- De manera análoga al caso anterior, si queremos calcular la evolución de  $\alpha_s^{(6)}(\mu)$  para los tres umbrales considerados, necesitamos

$$\alpha_s^{(5)}(m_t - 0,5 \text{ GeV}) = 0,107732 \rightarrow \alpha_s^{(6)}(m_t - 0,5) = 0,107706, \quad (61)$$

$$\alpha_s^{(5)}(m_t + 0,5 \text{ GeV}) = 0,107647 \rightarrow \alpha_s^{(6)}(m_t + 0,5) = 0,107629, \quad (62)$$

pues estos valores para el caso con  $\mu_{th} = m_t$ , se muestran en la ecuación (50). De nuevo vemos que la discontinuidad debida al matching es menor que en el caso anterior, pues  $\mu_{th}$  es mayor, lo que hace que la aproximación perturbativa utilizada sea más precisa al ser  $\alpha_s$  menor. Esto también hace que las discontinuidades en los dos casos que

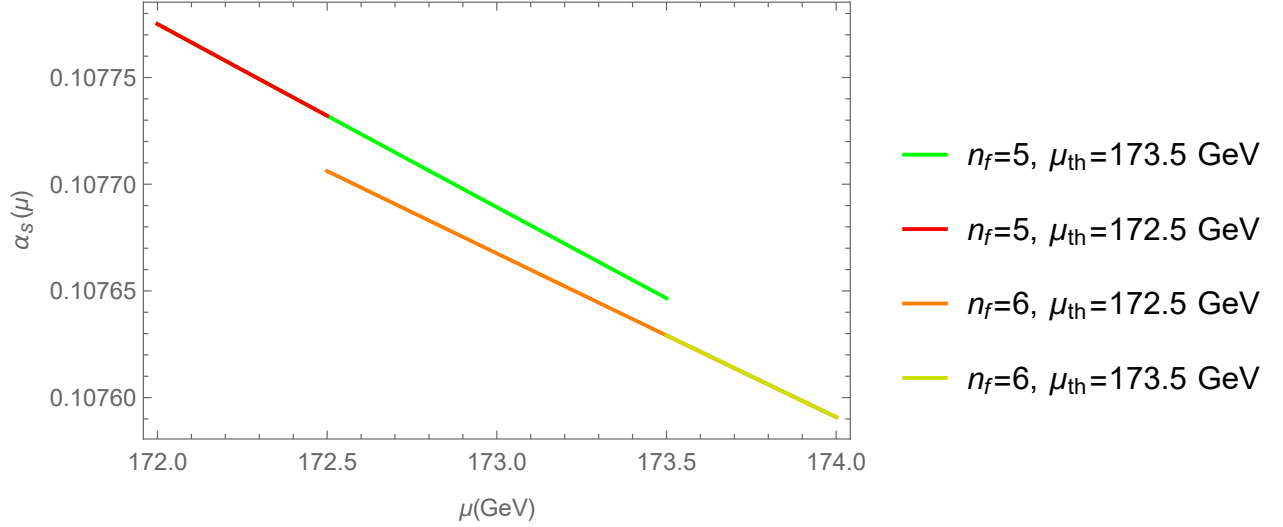


Figura 7: Evolución de  $\alpha_s(\mu)$  en torno al umbral entre  $n_l = 5$  y  $n_f = 6$ , para  $\mu_{th} = m_t \pm 0,5$  GeV

acabamos de escribir sean del mismo orden que la mostrada en la ecuación (50), pues los términos de la relación de matching proporcionales a potencias de  $\ln(\mu_{th}^2/m_h^2)$  tienen menor influencia, al ser también proporcionales a potencias de  $\alpha_s$ .

Realizamos ahora una representación gráfica en torno a la escala de energía umbral para los dos casos que acabamos de calcular, mostrando el resultado en la Figura 7. En esta Figura, podemos observar con mayor claridad las discontinuidades debidas a la relación de matching no trivial, pese a ser menores que las mostradas en la Figura en la Figura 6, pues para esta escala de energía la variación de  $\alpha_s$  con  $\mu$  es menor.

Al igual que en el caso anterior, en la Figura 7 no se puede apreciar la diferencia entre los valores de  $\alpha_s^{(6)}(\mu)$  representados para las dos escalas umbrales consideradas. No obstante, si calculamos la diferencia relativa (tomando como referencia el obtenido con  $\mu_{th} = m_t$ ) para  $\mu = 174$  GeV, obtenemos

$$\frac{|\alpha_s^{(6,0)}(174 \text{ GeV}) - \alpha_s^{(6,-)}(174 \text{ GeV})|}{\alpha_s^{(6,0)}(174 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 1,134 \cdot 10^{-3} \%, \quad (63)$$

$$\frac{|\alpha_s^{(6,0)}(174 \text{ GeV}) - \alpha_s^{(6,+)}(174 \text{ GeV})|}{\alpha_s^{(6,0)}(174 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 1,131 \cdot 10^{-3} \%, \quad (64)$$

$$\frac{|\alpha_s^{(6,+)}(174 \text{ GeV}) - \alpha_s^{(6,-)}(174 \text{ GeV})|}{\alpha_s^{(6,0)}(174 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 2,265 \cdot 10^{-3} \%. \quad (65)$$

Obteniendo, de nuevo, discrepancia en la evolución de  $\alpha_s^{(6)}(\mu)$  al variar  $\mu_{th}$  y que la diferencia relativa es mayor cuanto mayor es  $|\mu_{th}^{(i)} - \mu_{th}^{(j)}|$ . También observamos, una vez más, la mayor precisión de la aproximación perturbativa utilizada, debida al menor valor de  $\alpha_s$  al aumentar  $\mu$ .

Las diferencias en la evolución de  $\alpha_s$  asociadas al cambio en  $\mu_{th}$  que acabamos de ver, son consecuencia directa de no conocer todos los términos en los desarrollos en serie de la

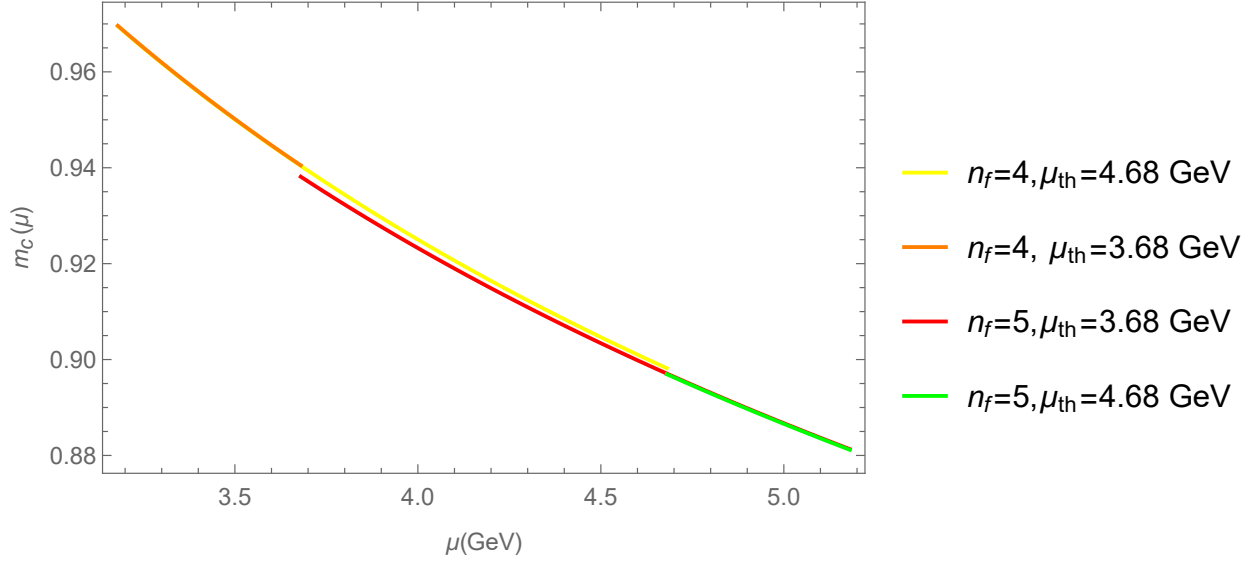


Figura 8: Evolución de  $\bar{m}_c(\mu)$  en torno al umbral entre  $n_l = 4$  y  $n_f = 5$ , para  $\mu_{th} = m_b \pm 0,5$  GeV

función  $\beta$  y el matching. Si conociésemos todos, podríamos calcular esta evolución de forma exacta, obteniendo los mismos valores para un mismo número de  $n_f$ , de forma independiente al  $\mu_{th}$  elegido. Lo mismo ocurre para la evolución de  $\bar{m}$ , como veremos a continuación.

#### 4.3.2. Efectos de la variación de $\mu_{th}$ sobre la evolución de $\bar{m}_c$

En este caso, nuestro valor de referencia es  $\bar{m}_c^{(4)}(m_c) = 1,27$  GeV, de manera que, al igual que ocurría con la evolución de  $\alpha_s^{(5)}(\mu)$  en la sección anterior, la evolución de  $\bar{m}_c^{(4)}(\mu)$  será la misma, sean cuales sean las escalas de energía en las que establezcamos ambos umbrales. Por lo tanto, ahora nos interesará comparar  $\bar{m}_c^{(5)}(\mu)$ , al variar la escala umbral correspondiente a  $m_b$ , y  $\bar{m}_c^{(6)}(\mu)$ , al variar la correspondiente a  $m_t$ . Al variar este último, consideraremos que el correspondiente a la escala de masa invariante del bottom fijo en  $\mu_{th} = m_b$ . La comparación se realizará de forma análoga al caso de  $\alpha_s$  y considerando las mismas escalas umbrales.

Consideremos cada caso por separado:

- Primero calcularemos la evolución de  $\bar{m}_c^{(5)}(\mu)$  en los tres casos que tenemos en cuenta. Para ello, teniendo en cuenta que en la ecuación (53) calculamos el valor de  $\bar{m}_c^{(4)}(\mu_{th})$  y  $\bar{m}_c^{(5)}(\mu_{th})$  para  $\mu_{th} = m_b$ , necesitamos calcular estos valores para  $\mu_{th} = m_b \pm 0,5$  GeV. Estos valores son

$$\bar{m}_c^{(4)}(m_b - 0,5 \text{ GeV}) = 0,940490 \text{ GeV} \rightarrow \bar{m}_c^{(5)}(m_b - 0,5 \text{ GeV}) = 0,938129 \text{ GeV}, \quad (66)$$

$$\bar{m}_c^{(4)}(m_b + 0,5 \text{ GeV}) = 0,898193 \text{ GeV} \rightarrow \bar{m}_c^{(5)}(m_b + 0,5 \text{ GeV}) = 0,894945 \text{ GeV}. \quad (67)$$

Con esto podemos realizar una representación gráfica en torno a la escala de energía umbral para los dos casos que acabamos de calcular. Dicha representación se muestra en la Figura 8. Al igual que en los casos de las Figuras 6 y 7, no podemos apreciar la diferencia entre los valores de  $\bar{m}_c^{(5)}(\mu)$  asociados a cada umbral, debido al rango de representación. De hecho, este rango es mayor en la Figura 8 que en las otras dos,



razón por la cual la discontinuidad asociada a las relaciones de matching parece menor en este caso.

Para observar el efecto de la variación en la escala umbral, vamos a calcular la diferencia relativa (con el valor asociado a  $\mu_{th} = m_b$  como referencia) para  $\mu = 5$  GeV. Al hacer esto, debemos tener en cuenta que el valor de  $\alpha_s^{(5)}(5 \text{ GeV})$  es el mismo para los tres casos. Esto nos lleva a

$$\frac{|\overline{m}_c^{(5,0)}(5 \text{ GeV}) - \overline{m}_c^{(5,-)}(5 \text{ GeV})|}{\overline{m}_c^{(5,0)}(5 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 8,739 \cdot 10^{-3} \%, \quad (68)$$

$$\frac{|\overline{m}_c^{(5,0)}(5 \text{ GeV}) - \overline{m}_c^{(5,+)}(5 \text{ GeV})|}{\overline{m}_c^{(5,0)}(5 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 6,107 \cdot 10^{-3} \%, \quad (69)$$

$$\frac{|\overline{m}_c^{(5,+)}(5 \text{ GeV}) - \overline{m}_c^{(5,-)}(5 \text{ GeV})|}{\overline{m}_c^{(5,0)}(5 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 14,846 \cdot 10^{-3} \%. \quad (70)$$

Obteniendo, de nuevo, que la discrepancia debida a la variación de la escala umbral aumenta con  $|\mu_{th}^{(i)} - \mu_{th}^{(j)}|$ .

- Por último y de manera análoga al caso anterior, si queremos calcular la evolución de  $\overline{m}_c^{(6)}(\mu)$  para los tres umbrales considerados, necesitamos

$$\overline{m}_c^{(4)}(m_b - 0,5 \text{ GeV}) = 0,594986 \text{ GeV} \rightarrow \overline{m}_c^{(5)}(m_b - 0,5 \text{ GeV}) = 0,594793 \text{ GeV}, \quad (71)$$

$$\overline{m}_c^{(4)}(m_b + 0,5 \text{ GeV}) = 0,594720 \text{ GeV} \rightarrow \overline{m}_c^{(5)}(m_b + 0,5 \text{ GeV}) = 0,594529 \text{ GeV}, \quad (72)$$

pues los correspondientes al caso con  $\mu_{th} = m_t$ , se muestran en la ecuación (54). Volvemos a notar aquí el aumento en la precisión de la aproximación perturbativa utilizada con  $\mu_{th}$ . Debemos recordar que, para este caso, consideramos fijo el umbral correspondiente a la escala de masa invariante del bottom en el valor  $\mu_{th} = m_b$ .

Con estos datos, podemos realizar una representación gráfica de  $\overline{m}_c(\mu)$  en torno a la escala de masa invariante del top para los dos casos que acabamos de calcular. Dicha representación se muestra en la Figura 9. En esta, al igual que en la Figura 7 y  $\alpha_s$ , podemos observar con mayor claridad que en el caso anterior las discontinuidades debidas a la relación de matching, pues la variación de  $\overline{m}_c$  con  $\mu$  para esta escala de energía es menor.

De nuevo, no somos capaces de observar en la Figura 9 la diferencia entre los valores de  $\overline{m}_c^{(6)}(\mu)$  asociados a cada umbral. Por otro lado, al calcular la diferencia relativa (tomando como referencia el obtenido para  $\mu_{th} = m_t$ ) para  $\mu = 174$  GeV, obtenemos

$$\frac{|\overline{m}_c^{(6,0)}(174 \text{ GeV}) - \overline{m}_c^{(6,-)}(174 \text{ GeV})|}{\overline{m}_c^{(6,0)}(174 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 6,915 \cdot 10^{-4} \%, \quad (73)$$

$$\frac{|\overline{m}_c^{(6,0)}(174 \text{ GeV}) - \overline{m}_c^{(6,+)}(174 \text{ GeV})|}{\overline{m}_c^{(6,0)}(174 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 6,893 \cdot 10^{-4} \%, \quad (74)$$

$$\frac{|\overline{m}_c^{(6,+)}(174 \text{ GeV}) - \overline{m}_c^{(6,-)}(174 \text{ GeV})|}{\overline{m}_c^{(6,0)}(174 \text{ GeV})} \cdot 100 \approx 13,809 \cdot 10^{-4} \%. \quad (75)$$

Pudiendo extraer las mismas conclusiones que en los casos anteriores.

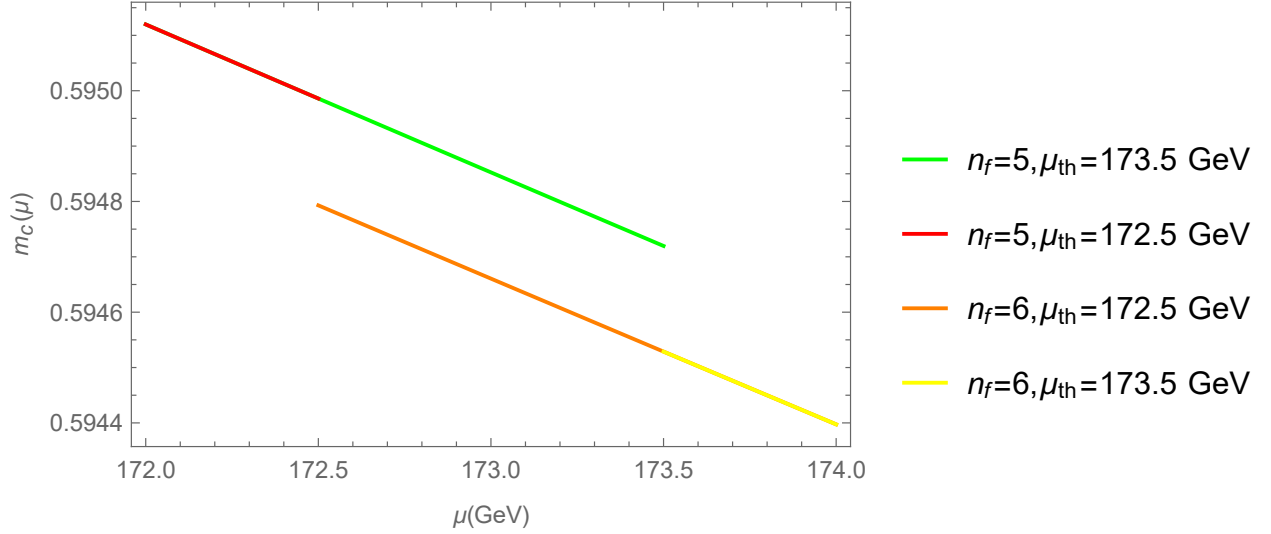


Figura 9: Evolución de  $\bar{m}_c(\mu)$  en torno al umbral entre  $n_l = 5$  y  $n_f = 6$ , para  $\mu_{th} = m_t \pm 0,5$  GeV

## 5. Conclusiones

Hemos resuelto las ecuaciones (8) y (27) lo que, junto con las relaciones de matching de las ecuaciones (37), (39) y (47) y la implementación de todo lo anterior en un código **Mathematica**, nos ha permitido calcular la evolución con la energía  $\mu$  de la constante de acoplamiento  $\alpha_s$  y la masa  $\bar{m}$  de los quarks pesados en el régimen perturbativo de QCD.

Al estudiar la evolución de la constante de acoplamiento utilizando nuestras soluciones, hemos recuperado la libertad asintótica característica de QCD y comprobado que, para  $\mu \sim 1$  GeV,  $\alpha_s$  comienza a ser de orden similar a 1 (Figura 1), por lo que teoría de perturbaciones deja de ser válida.

También hemos comprobado que las discontinuidades asociadas a las relaciones de matching disminuyen (tanto para la constante de acoplamiento como para la masa quark) al aumentar  $\mu$ , como consecuencia de que disminuya  $\alpha_s$ , y la precisión de la aproximación perturbativa utilizada en nuestras soluciones, aumente.

Al estudiar la evolución de  $\bar{m}$  hemos visto que, al igual que ocurre con  $\alpha_s$ , esta disminuye con la energía y, además, depende del sabor únicamente a través del valor que tomamos como referencia  $\bar{m}(\mu_0)$  en cada caso.

Otra característica interesante observada es que, al aumentar la escala de energía  $\mu$ , la dependencia de  $\alpha_s$  y  $\bar{m}$  con esta disminuye.

Por último, al estudiar los efectos de la variación en  $\mu_{th}$  sobre la evolución de la constante de acoplamiento y la masa quark, hemos comprobado que la discontinuidad asociada a las relaciones de matching aumenta al hacer  $\mu_{th} \neq m_h$  (donde  $m_h$  es la escala de masa invariante del quark asociado al umbral en cuestión) debido a que los términos proporcionales a potencias de  $\ln(\mu^2/\bar{m}_h^2)$  tienen una aportación no nula. Además hemos visto que la discrepancia entre la evolución de una magnitud para dos escalas umbrales distintas (con los mismos  $n_l$  y  $n_f$ ) aumenta cuanto mayor sea la separación entre estas dos escalas.

## 6. Conclusions

We have solved equations (8) and (27) which, together with the matching relations written in the equations (37), (39) and (47) and the implementation of all of the above in a `Mathematica` code, allowed us to calculate the running of the coupling constant  $\alpha_s$  and heavy quark mass  $\bar{m}$  in the QCD perturbative region.

When studying the running of the coupling constant using our solutions, we have recovered QCD's asymptotic freedom and we have proven that, for  $\mu \sim 1$  GeV,  $\alpha_s$  begins to be of order similar to 1 (Figure 1), so perturbation theory is no longer valid.

We have also proven that discontinuities associated with matching relations decrease (both for the coupling constant and the quark mass) with increasing  $\mu$ , due to the decreasing of  $\alpha_s$ , and the precision of the perturbative approximation used in our solutions, increases.

When studying the running of  $\bar{m}$  we have seen that, as it happens with  $\alpha_s$ , this magnitude decreases with increasing energy and, besides, it depends on the flavour only through the value  $\bar{m}(\mu_0)$  that we take as reference in each case.

Another interesting feature observed is that, when the energy scale  $\mu$  increases, the dependence of  $\alpha_s$  and  $\bar{m}$  with it decreases.

Lastly, when studying the effects of the variation of  $\mu_{th}$  on the running of the coupling constant and the quark mass, we have proven that the discontinuity associated with the matching relations increases when  $\mu_{th} \neq m_h$  (where  $m_h$  is the scale-invariant mass of the quark linked to the threshold considered) because the proportional terms to  $\ln(\mu^2/\bar{m}_h^2)$  have non-zero contribution. We have also seen that the difference between the running of a magnitude for two different threshold scales (with the same  $n_l$  and  $n_f$ ) increases the greater the distance between these two scales.

## Referencias

- [1] Matthias Neubert. Renormalization Theory and Effective Field Theories. Lectures given at Les Houches Summer School. 2017.
- [2] P.A. Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.
- [3] Matthias Jamin. QCD and Renormalisation Group Methods. Lectures given in Maria Laach Autumn School., 2006.
- [4] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, 1973.
- [5] D. J. Gross and Frank Wilczek. Asymptotically Free Gauge Theories - I. *Phys. Rev. D*, 8:3633–3652, 1973.
- [6] Ernst Carl Gerlach Stueckelberg de Breidenbach and Andreas Petermann. Normalization of constants in the quanta theory. *Helv. Phys. Acta*, 26:499–520, 1953.
- [7] M. Gell-Mann and F. E. Low. Quantum electrodynamics at small distances. *Phys. Rev.*, 95:1300–1312, Sep 1954.
- [8] Andre H. Hoang, Christopher Lepenik, and Vicent Mateu. REvolver: Automated running and matching of couplings and masses in QCD. 2 2021.
- [9] K.G Chetyrkin, J.H Kühn, and M Steinhauser. Rundec: a mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses. *Computer Physics Communications*, 133(1):43–65, Dec 2000.
- [10] Florian Herren and Matthias Steinhauser. Version 3 of RunDec and CRunDec. *Comput. Phys. Commun.*, 224:333–345, 2018.
- [11] O. V. Tarasov, A. A. Vladimirov, and A. Yu. Zharkov. The Gell-Mann-Low Function of QCD in the Three Loop Approximation. *Phys. Lett. B*, 93:429–432, 1980.
- [12] S.A. Larin and J.A.M. Vermaseren. The three-loop qcd  $\beta$ -function and anomalous dimensions. *Physics Letters B*, 303(3-4):334–336, Apr 1993.
- [13] T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, and S.A. Larin. The four-loop  $\beta$ -function in quantum chromodynamics. *Physics Letters B*, 400(3-4):379–384, May 1997.
- [14] M. Czakon. The Four-loop QCD beta-function and anomalous dimensions. *Nucl. Phys. B*, 710:485–498, 2005.
- [15] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, and J. H. Kühn. Five-loop running of the qcd coupling constant. *Physical Review Letters*, 118(8), Feb 2017.
- [16] K. G. Chetyrkin, G. Falcioni, F. Herzog, and J.A.M. Vermaseren. Five-loop renormalisation of qcd in covariant gauges. *Journal of High Energy Physics*, 2017(10), Oct 2017.

- [17] Thomas Luthe, Andreas Maier, Peter Marquard, and York Schröder. The five-loop beta function for a general gauge group and anomalous dimensions beyond feynman gauge. *Journal of High Energy Physics*, 2017(10), Oct 2017.
- [18] F. Herzog, B. Ruijl, T. Ueda, J. A. M. Vermaseren, and A. Vogt. The five-loop beta function of yang-mills theory with fermions. *Journal of High Energy Physics*, 2017(2), Feb 2017.
- [19] J.A.M Vermaseren, S.A Larin, and T van Ritbergen. The 4-loop quark mass anomalous dimension and the invariant quark mass. *Physics Letters B*, 405(3-4):327–333, Jul 1997.
- [20] K.G. Chetyrkin. Quark mass anomalous dimension to  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ . *Physics Letters B*, 404(1-2):161–165, Jul 1997.
- [21] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, and J. H. Kühn. Quark mass and field anomalous dimensions to  $\mathcal{O}(\alpha_s^5)$ . *Journal of High Energy Physics*, 2014(10), Oct 2014.
- [22] Thomas Luthe, Andreas Maier, Peter Marquard, and York Schröder. Five-loop quark mass and field anomalous dimensions for a general gauge group. *Journal of High Energy Physics*, 2017(1), Jan 2017.
- [23] K Chetyrkin. Decoupling relations to  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  and their connection to low-energy theorems. *Nuclear Physics B*, 510(1-2):61–87, Jan 1998.
- [24] K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, and C. Sturm. Qcd decoupling at four loops. *Nuclear Physics B*, 744(1-2):121–135, Jun 2006.
- [25] York Schröder and Matthias Steinhauser. Four-loop decoupling relations for the strong coupling. *Journal of High Energy Physics*, 2006(01):051–051, Jan 2006.
- [26] B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, A. I. Onishchenko, and O. L. Veretin. Strong-coupling constant with flavor thresholds at five loops in the modified minimal-subtraction scheme. *Physical Review Letters*, 97(4), Jul 2006.
- [27] Tao Liu and Matthias Steinhauser. Decoupling of heavy quarks at four loops and effective higgs-fermion coupling. *Physics Letters B*, 746:330–334, Jun 2015.