



VNiVERSiDAD  
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Grado en Física

# Newtonian Cosmology in theories of modified gravity

---

## Cosmología Newtoniana en teorías de la gravedad modificada

---

*Trabajo de fin de grado*

*Autor* : ROGER ANTONIO PEÑA MARTÍN

*Tutor* : JOSE BELTRÁN JIMÉNEZ

# Declaración

D. José Beltrán Jiménez, profesor del Departamento de Física Fundamental de la Universidad de Salamanca, certifica que el Trabajo de Fin de Grado que se recoge en la presente memoria, titulado *Cosmología Newtoniana en teorías de la gravedad modificada* y presentado por Roger Antonio Peña Martín para optar al título de Grado en Física, ha sido realizado bajo su dirección.

Salamanca, 7 de julio de 2021



## Resumen

En este trabajo se estudia la evolución de un universo que contiene un gas de partículas no relativistas sometidas a la fuerza de la gravedad. Se empieza analizando el problema de una evolución que sigue la ley de gravitación de Newton, en el que se busca una solución tanto analítica como numéricamente. En particular se obtiene de esta manera una evolución comóvil y una ley de Hubble isótropa, lo que se podrá observar en distintas representaciones de evoluciones de distintos parámetros del problema, como radios o factores de escala y de Hubble.

Resuelto el caso Newtoniano se proponen tres cambios distintos en la ley de gravitación de Newton y se obtienen las soluciones de manera numérica. Estos cambios son: introducir masa al gravitón, considerar que la interacción se expande a más dimensiones y considerar otra interacción repulsiva, los cuales llevarán consigo una modificación en la ley de gravitación que da lugar a distintas evoluciones, que dejarán de ser comóviles y tendrán un diagrama de Hubble anisótropo. Con ello se estudia y compara estas soluciones analizando cuales son los detalles importantes que aparecen en cada una.

### Palabras claves

Cosmología newtoniana, ley de Hubble, gravedad modificada.

### Abstract

In this paper we study the evolution of a universe that contain a non-relativistic particle gas which is under the gravitational force. We begin by analyzing the problem of an evolution that follows Newton's gravitational law and we look for a solution both analytically and numerically. Specifically we obtain by this way a comoving evolution and a isotropic Hubble law, which can be observed in representations of evolutions of different parameters of the problem, such as radios or scales and Hubble factors.

When the resolution of the Newtonian case has taken place, we propose three different changes into the Newton's gravitational law to obtain their solutions by a numerical way. These changes are: to introduce a mass to the graviton, to consider that the interaction can be expanded into more dimensions and to consider another repulsive interaction. Each one involve a variation in the gravitational law which result in different evolutions which will cease to be comoving and will have an anisotropic Hubble diagram. We study and compare these solutions by analyzing the most important details in each one.

### Key words

Newtonian cosmology, Hubble law, modified gravity.

# Índice

<b>1. Introducción y antecedentes</b>	<b>1</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>2</b>
<b>3. Evolución Newtoniana</b>	<b>2</b>
3.1. Resolución analítica . . . . .	2
3.2. Resolución numérica . . . . .	6
<b>4. Evolución del universo con un gravitón con masa</b>	<b>12</b>
<b>5. Evolución del universo en el que la interacción se expande en más dimensiones</b>	<b>16</b>
<b>6. Evolución del universo con una interacción además de la gravitatoria</b>	<b>21</b>
<b>7. Resultados y discusión</b>	<b>25</b>

# 1. Introducción y antecedentes

La evolución y dinámica del universo a gran escala está controlada principalmente por la gravedad, al ser esta una fuerza de largo alcance universalmente atractiva, a diferencia de otras fuerzas como la electromagnética. Esta última a pesar de ser de largo alcance deja de ser relevante a grandes escalas pues se considera que las cargas positivas y negativas tienden a neutralizarse en el universo. Por ello es necesario trabajar con una teoría de la gravedad que pueda explicar los sucesos que ocurren. La teoría más extendida a día de hoy en investigaciones es la famosa teoría de la *relatividad general* escrita por Einstein. Sin embargo, para algunos procesos la teoría de la gravitación de Newton puede ser válida y reproducir las observaciones que tenemos. Hay que tener cuidado de qué procesos puedan ser. En concreto siempre que se tengan partículas que no vayan a velocidades próximas a las de la luz y el campo gravitatorio sea débil la aproximación newtoniana será adecuada. Esta teoría será el punto de partida en este trabajo [1]. En particular, se mostrará cómo puede obtenerse la ecuación de Friedman que rige la evolución de la expansión del universo utilizando argumentos puramente Newtonianos.

El principio cosmológico dicta que el universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas y esto está soportado por las observaciones del fondo cósmico de microondas y la distribución de galaxias. Además se tiene la observación de un universo de forma granular a grandes escalas y por ello se trabajará con un gas de partículas con distribución homogénea [2]. Cabe mencionar que estas partículas se refieren en realidad a objetos de grandes dimensiones como galaxias o cúmulos de galaxias, cuya dinámica es la que se quiere estudiar. De estas galaxias o cúmulos se ha visto también que sus velocidades no llegan a ser relativistas, lo cual implica que se estudiará un gas de partículas no relativistas.

A partir de estas valoraciones iniciales se puede añadir diversas modificaciones a la ley con la intención de investigar más allá de una evolución newtoniana clásica. Es razonable preguntarse en algunos contextos diferentes cuestiones como: ¿qué pasaría si la partícula que media la interacción gravitatoria en física de partículas, el gravitón, tuviera masa? ¿Qué pasaría si la dependencia de la ley del radio es de otra manera debido a que la interacción se expanda a más dimensiones? O incluso ¿Qué pasaría si existiera una fuerza repulsiva dependiente de la masa?

## 2. Objetivos

El principal propósito de este trabajo es entender y explicar cómo es la evolución de un universo compuesto por un gas de partículas no relativistas bajo la acción de una interacción gravitatoria que sigue la ley de gravitación universal de Newton y explorar cómo diferentes desviaciones con respecto a la ley de Newton afectan a la evolución cosmológica. Se estudia cada caso por separado.

En primer lugar se tiene el caso Newtoniano, en el que al poderse obtener la solución de manera analítica se quiere corroborar que se pueden recuperar los resultados obtenidos de manera numérica. De esta forma se pretende luego poder utilizar dicha resolución numérica en los otros casos, puesto que no se encontrará solución analítica para las desviaciones que se propondrán. Así, del resto de casos se pretende obtener e interpretar sus posibles evoluciones dadas por este programa numérico y las variaciones producidas en cada uno.

## 3. Evolución Newtoniana

### 3.1. Resolución analítica

Primeramente se analizó la evolución de un universo que contiene un gas de partículas no relativistas sometidas a la fuerza de la gravedad descrita por la ley de Newton. La distribución de estas partículas es de manera homogénea y en capas esféricas pues es conveniente para la isotropía del sistema. Con ello solo es necesario estudiar entonces la evolución de los radios de dichas capas esféricas:

$$\ddot{R} = -G \frac{M(\rho, R)}{R^2} \quad (1)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M$  la masa contenida en el radio  $R$  con densidad  $\rho$  y siendo  $\ddot{R}$  la dos veces derivada temporal del radio  $R$ . Cada capa tendrá un radio que se denotará con un subíndice, y su radio será por tanto  $R_i$ . Dichas capas evolucionarían con una velocidad inicial dada por la ley de Hubble:

$$\dot{R}_i(t_0) = H \cdot R_i(t_0) \quad (2)$$

donde  $H$  es la constante de Hubble,  $\dot{R}_i(t_0)$  la velocidad inicial,  $R_i(t_0)$  la posición inicial y donde se asume también que el estado inicial es comóvil, por lo que  $H$  es igual para todas las capas.

Como se puede ver, la masa depende de la densidad del sistema  $\rho$  y del radio de cada capa esférica que contiene dicha masa y la de las capas que están contenidas en él. Así la evolución depende de manera crucial del perfil de densidad.

La homogeneidad que se ha asumido implica un perfil de densidad constante  $\rho_0$ . Para este caso, que resultará con solución analítica, se podrá obtener la masa contenida dentro del radio  $R_i$  puesto que la densidad es constante para todos los radios. Cabe mencionar que la masa se puede obtener para otros perfiles de densidad y resultar aún así el problema sin solución analítica.

El *teorema de Gauss* dice que solo la masa contenida dentro del radio dará contribución para la interacción debido a la simetría [3] y por eso esta es la masa que interesará calcular. Teniendo esto en cuenta, se calcula la masa contenida en el radio  $R_i$ ,  $M(R_i)$ :

$$M(R_i) = \int_0^{R_i} \rho d^3x.$$

Hay que tener en consideración que al evolucionar el sistema el radio  $R_i(t)$  varía con el tiempo y así mismo podría hacerlo la densidad, puesto que es constante para la posición pero no se sabe la evolución temporal. Por ello para calcular la masa se evalúa en el instante inicial  $t = t_0$ , que será la masa dentro del radio  $R_i(t_0)$ .

Además la masa dentro del radio  $R_i$  se conservará y estará dada por el la masa que se va a calcular, la masa dentro del radio  $R_i(t_0)$ , siempre y cuando no haya cruce de capas y la jerarquía original de estas se mantenga. Si existiese cruce de capas, algunas capas ganarían masa mientras otra la perderían y la masa dentro del radio  $R_i$  variaría.

Se realiza la integral a todo el volumen en esféricas obteniendo un  $4\pi$  de las partes angulares y utilizando que la densidad es constante siendo  $\rho_0$  se obtiene:

$$M(R_i(t_0)) = 4\pi \int_0^{R_i(t_0)} \rho_0 r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R_i^3(t_0).$$

Nótese que en general la densidad se podría escribir como:

$$\rho(r, t) = \frac{\sum_i M(R_i \leq r)}{\frac{4\pi}{3} r^3}.$$



Sustituyendo el resultado obtenido anteriormente de la masa ( $R_i$ ) en la ley de Newton de la Gravitación universal se obtiene:

$$\ddot{R}_i = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} \frac{R_i^3(t_0)}{R_i^2(t)}. \quad (3)$$

Para resolver esta ecuación diferencial se normaliza  $R_i(t)$  definiendo entonces el factor de escala  $a$  como:

$$a_i(t) = \frac{R_i(t)}{R_i(t_0)}.$$

Sustituyendo esto en la ecuación obtenida de la ley de gravitación universal de Newton:

$$\ddot{a}_i R_i(t_0) = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} \frac{R_i^3(t_0)}{a_i^2 R_i^2(t_0)}$$

lo que implica:

$$\ddot{a}_i = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} \frac{1}{a_i^2}. \quad (4)$$

Observando estas ecuaciones vemos que no dependen de las condiciones iniciales y que por tanto la ecuación es la misma para cada capa y radio  $R_i$ , resultando ser entonces una expansión comóvil y se puede dejar de utilizar el subíndice  $i$ :  $a_i(t) = a(t)$ . Se introduce el factor integrante  $\dot{a}$  para resolver la ecuación diferencial [3], teniendo así:

$$\dot{a}\ddot{a} = \frac{1}{2}(\dot{a}^2) = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} \frac{\dot{a}}{a^2} = \frac{4\pi G\rho_0}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G\rho_0}{3a} \right] = 0 \Rightarrow \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G\rho_0}{3a} = E \quad (6)$$

donde  $E$  es una constante. Si se hace uso de la ecuación en la que la velocidad sigue la ley de Hubble se obtendría que

$$H = \frac{\dot{a}}{a}.$$

Despejando la ecuación anterior para obtener una relación entre  $\dot{a}$  y  $a$  se tiene la ecuación de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^3} + \frac{2E}{a^2}. \quad (7)$$

Para la resolución analítica de este caso, se utiliza un cambio de variable, usando la variable  $\eta$ . Este cambio sigue la ecuación  $dt = a d\eta$ . Así, se pueden escribir las ecuaciones como:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= a \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3a^3} + \frac{2E}{a^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{da}{dt} &= \frac{da}{d\eta} \frac{1}{a} = a \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3a^3} + \frac{2E}{a^2}}\end{aligned}$$

Entonces se obtiene:

$$\frac{da}{d\eta} = a^2 \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3a^3} + \frac{2E}{a^2}}, \quad (8)$$

$$\frac{dt}{d\eta} = a. \quad (9)$$

De esta manera se podrían integrar y resolver las ecuaciones diferenciales:

$$\int d\eta = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3a^3} + \frac{2E}{a^2}}}.$$

La resolución de estas integrales depende de si  $E$  es mayor, menor o igual a cero. Los cálculos se realizan con  $E > 0$ , del que se pueden obtener el resto de casos. Para  $E = 0$  se toma el límite cuando  $E$  tiende a cero de la ecuación 10. Para  $E < 0$  simplemente es la misma ecuación 10 teniendo en cuenta que  $\operatorname{arcsinh}(ix) = \operatorname{arcsin}(x)$ .

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{E}} \cdot \operatorname{arcsinh} \left( \frac{\sqrt{a3E/\pi}}{2\sqrt{G\rho_0}} \right). \quad (10)$$

Despejando ahora  $a$  en función de  $\eta$ :

$$a = \frac{4\pi\rho_0}{3E} \cdot \sinh^2 \left( \frac{E\eta}{2} \right). \quad (11)$$

Así también se puede calcular  $t$  en función de  $\eta$ :

$$dt = a(\eta)d\eta.$$

Integrando ambas partes de la la igualdad se puede obtener:

$$\begin{aligned}\int dt &= \int \frac{4\pi\rho_0}{3E} \cdot \sinh^2 \left( \frac{E\eta}{2} \right) d\eta \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \frac{4}{3} G \pi \rho_0 \left( -\frac{\eta}{2} + \frac{\sinh(E\eta)}{2E} \right)\end{aligned} \quad (12)$$

La constante  $E$  se puede identificar con la curvatura de las secciones espaciales de la métrica en la teoría relativista.

### 3.2. Resolución numérica

Se realiza un programa en *Mathematica* que ayude a resolver las diferentes posibles evoluciones del universo según la teoría que estemos utilizando. Se procede de forma similar, discretizando primero el problema y luego resolviendo la ecuación diferencial.

El hecho de discretizar el problema para utilizar un método numérico para su resolución implica que la discretización ha de ser finita [1, 4, 5]. Esto hace que asignarle masa a cada capa no sea trivial si no que ha de ser aquella que conserve un perfil de densidad plano. De nuevo en este caso tenemos simetría esférica y por tanto se puede asumir que no importa la parte del espacio que se considera si el radio es el mismo. Así la masa que ha de tener cada capa ha de ser la correspondiente al volumen de la esfera con su radio  $R_i$  con la densidad plana  $\rho_0$  menos la que tiene el volumen con un radio de la capa inmediatamente inferior  $R_{i-1}$ :

$$m_i = \frac{4\pi\rho_0}{3} (R_i^3 - R_{i-1}^3).$$

La primera capa simplemente será el volumen debido a su radio inicial.

Lo primero que se escribe en el código es el sistema de ecuaciones que se va a tener que resolver. Para comprobar que el código funciona, se introduce primero la ecuación 1 del caso Newtoniano con la intención de recuperar los resultados de la solución analítica. Se establece la configuración elegida en la que se distribuyen un cierto número de capas esféricas de manera logarítmica y además se incorporan las condiciones iniciales para las posiciones de los capas y para sus velocidades según la ley de Hubble en la ecuación 2, suponiendo densidad  $\rho = \rho_0$  constante.

Se define también la masa contenida dentro de un radio  $r$ , sabiendo que es la relevante en cuanto a contribuciones, como la suma de la masa de todas las capas que tengan radio menor que  $r$  en un instante  $t$ :

$$M(t, r) = \sum_{j=1}^n (1 - \theta(R_j(t) - r - 1 \cdot 10^{-10})) m_j$$

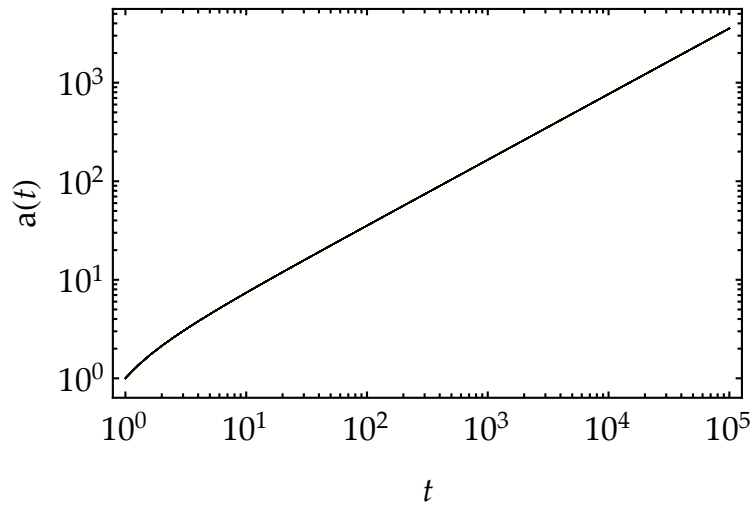
donde  $n$  es el número de capas que hay y  $\theta$  la función de Heaviside.

Esto se hace puesto que aunque en el caso Newtoniano no es así, no se puede asegurar que no se produzca un cruce de capas en la evolución y una

capa adelante a otra, y de esta forma se podrá utilizar en las modificaciones posteriores. Se le dan valores numéricos a las constantes y parámetros del sistema, en algunos casos para favorecer la simplicidad de la resolución como por ejemplo  $\rho = \frac{3}{4\pi}$  y  $G = 1$  y en otros casos porque las observaciones parecen indicar que el universo real es así como que  $E = 0$  de manera que  $H = \sqrt{8\pi\rho G/3}$ .

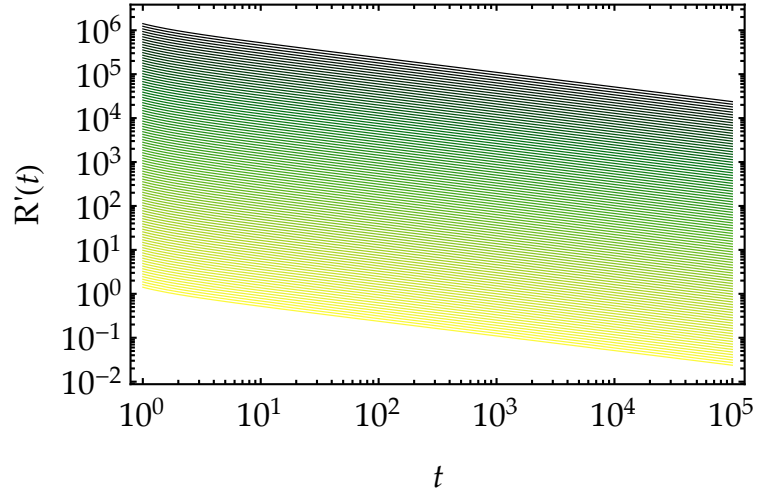
Se resuelve entonces el sistema de ecuaciones diferenciales, escribiendo en vectores las diferentes soluciones de radios, factores de escala, sus velocidades y los Hubble. Seguidamente se representa gráficamente la evolución de estos parámetros en el tiempo. Así se obtiene una evolución comóvil en el caso Newtoniano, recuperando uno de los resultados analíticos. De esta manera se observa en la figura 1 cómo la evolución del factor de escala  $a$  que se definió en el apartado anterior es igual para todas las capas.

Figura 1: Evolución del factor de escala



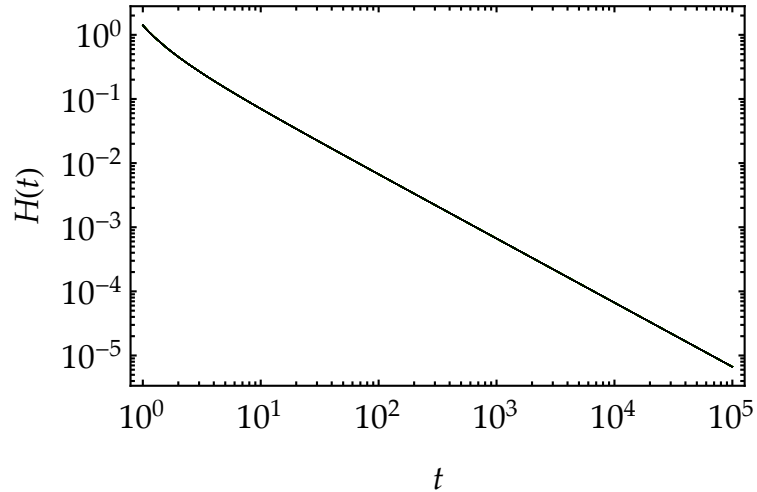
También se puede apreciar cómo la velocidad evoluciona de la misma manera para las distintas capas viéndolo en la Figura 2 en la que se representa la velocidad de cada capa en función del tiempo y cada capa tendrá asignado un color. Además se aprecia cómo esta velocidad disminuye pues el efecto gravitatorio tiene una aceleración negativa, frenando así la expansión. La derivada temporal se indica en las figuras, con el caso por ejemplo de  $R$ , como  $R'$ , en vez de como  $\dot{R}$ .

Figura 2: Evolución de la velocidad



Es interesante comentar también cómo evoluciona el factor de Hubble en el tiempo, puesto que así se aprecia también cómo va disminuyendo la velocidad a la vez que el radio de cada capa va aumentando con la expansión.

Figura 3: Evolución del factor de Hubble



Así mismo se puede obtener y observar el *diagrama de Hubble* en el que se ve la evolución del factor de Hubble (velocidad de recesión dividido por

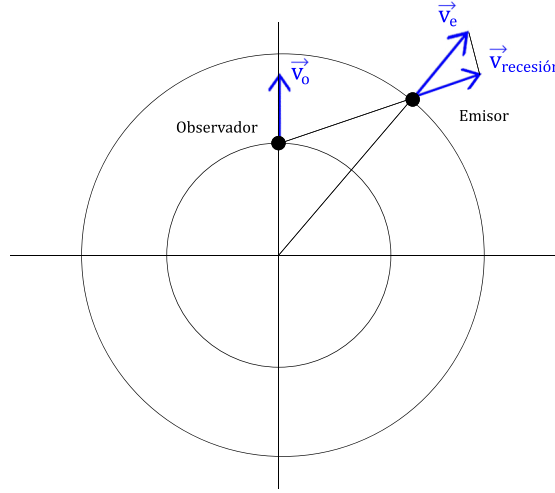
distancia) de una capa respecto de un observador situado en una capa anterior viendo además si este depende del ángulo con el que el observador mida la velocidad de cada una. Esto se hace en el código de manera que el observador lo situamos en uno de las capas, por ejemplo en la capa  $j$ -ésima y en el ángulo  $\theta = 0$ , teniendo así su posición con el vector  $\mathbf{r}_o$  y su velocidad con  $\mathbf{v}_o$  en cada instante de tiempo:

$$\mathbf{r}_o = R_j(t) \cdot (0, 0, 1),$$

$$\mathbf{v}_o = \dot{\mathbf{r}}_o$$

Se expresan las posiciones de los posibles emisores  $\mathbf{r}_e$  y sus velocidades  $\mathbf{v}_e$  y se calculan la distancia del emisor al observador  $d$  y la velocidad de recesión  $v$ , que es la velocidad del emisor con respecto al observador proyectada en la dirección de visión. Se explica un poco algunos de estos parámetros en un dibujo y se presentan las ecuaciones.

Figura 4: Velocidad de recesión



$$\mathbf{r}_{e_i}(t, \theta) = R_i \cdot (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)),$$

$$\mathbf{v}_{e_i}(t, \theta) = \dot{R}_i \cdot (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)),$$

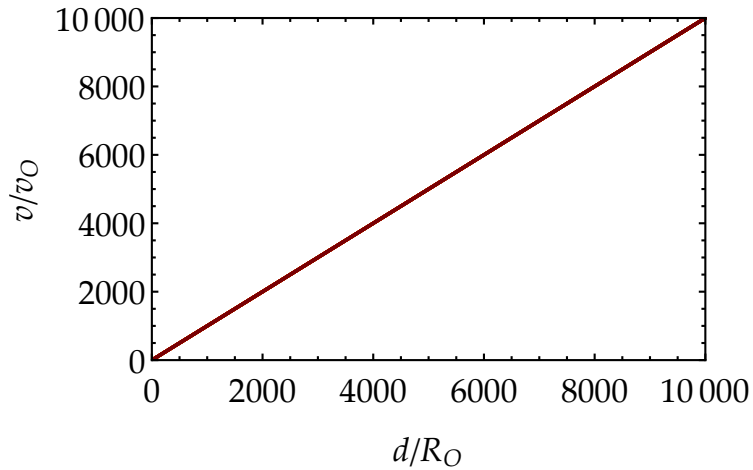
$$d_i(t, \theta) = \sqrt{(\mathbf{r}_{e_i}(t, \theta) - \mathbf{r}_o(t)) \cdot (\mathbf{r}_{e_i}(t, \theta) - \mathbf{r}_o(t))},$$

$$v_i(t, \theta) = \frac{(\mathbf{v}_{e_i}(t, \theta) - \mathbf{v}_0(t)) \cdot (\mathbf{r}_{e_i}(t, \theta) - \mathbf{r}_0(t))}{d_i(t, \theta)}.$$

Se normaliza la distancia y la velocidad con respecto a las del observador y se define y representa el *diagrama de Hubble*.

Para el caso que se trata el resultado es la independencia con respecto al ángulo del factor de Hubble obtenida por el observador, como se puede ver en la figura 5 del *diagrama de Hubble* a un tiempo dado.

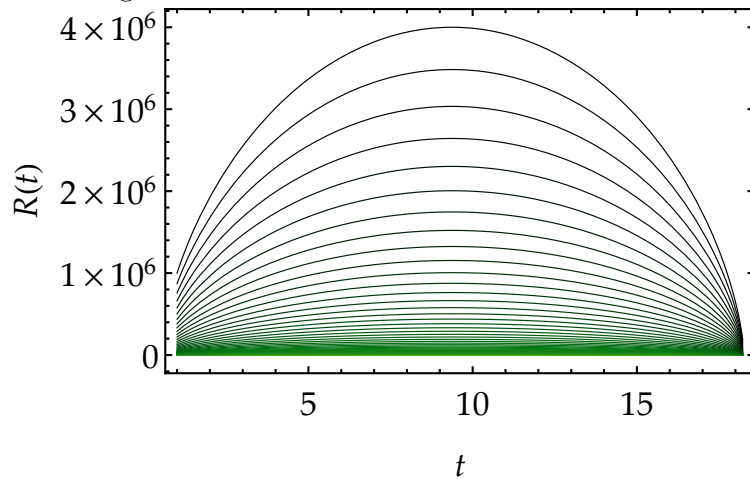
Figura 5: velocidad de recesión en función de la distancia



Así se observa perfectamente además que la relación es lineal.

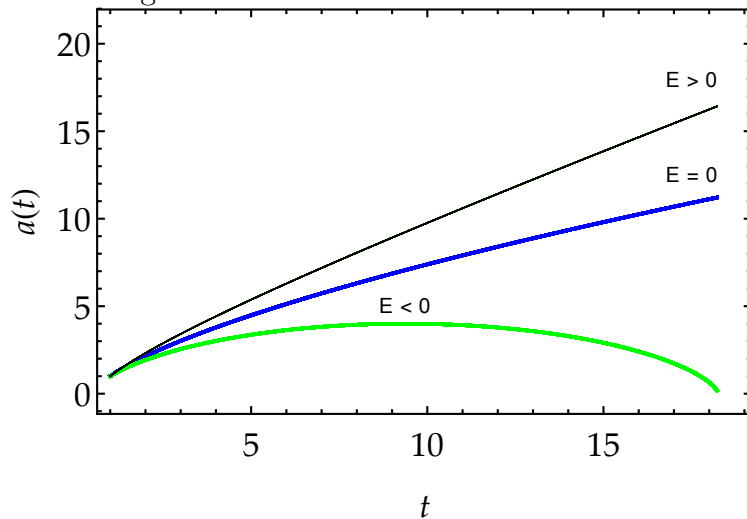
También conviene tener en cuenta resultados en los que la energía  $E$  en vez de ser  $E = 0$  pueda ser menor o mayor. Para el primer caso tendríamos que las capas deberían recolapsar, además lo harán todas a la vez lo que se muestra en la figura 6 donde se aprecia además cómo todos los radios recolapsan en el mismo instante.

Figura 6: Evolución de los diferentes radios



En el otro caso, que es con energía positiva, se obtiene una evolución ligeramente diferente en el diagrama con respecto a la representación de  $E = 0$ , en concreto esta iría proporcional a  $t$  y la expansión con  $E = 0$  es proporcional a  $t^{2/3}$  [3]. Mostrando la evolución de los factores de escala de cada una de las evoluciones según el valor de  $E$  se obtiene la figura 7.

Figura 7: Evolución del factor de escala





Se puede apreciar en esta figura 7 como el caso en el que  $E = 0$  es inestable.

## 4. Evolución del universo con un gravitón con masa

Para la resolución del problema en la que el gravitón, la partícula que tendría que ser responsable de las interacciones gravitatorias en el modelo estándar, tiene masa se tiene en cuenta que en el potencial gravitatorio aparece una contribución del tipo potencial de Yukawa, que acabará neutralizando el efecto gravitatorio. Esta contribución lleva una exponencial en la que existe una constante  $a_0$  que representa esencialmente el inverso de la masa del gravitón  $a_0 = \frac{1}{m}$ . Así la ecuación que habría que tener en cuenta es:

$$\ddot{R} = -G \frac{M(\rho, R) e^{-\frac{R}{a_0}}}{R^2} \quad (13)$$

La exponencial es lo que corresponde a la supresión de Yukawa y por tanto es la consideración de que el gravitón tiene cierta masa. La resolución de esta ecuación diferencial, que igual que en el caso anterior debiera hacerse para cada capa, no es analítica. Por ello se procede a resolver la ecuación de manera numérica con el programa en *Mathematica*. Lo primero que se ha de tener en cuenta es cambiar el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver, utilizando la ecuación 13. También habrá que tener en cuenta el valor de  $a_0$ , que guarda relación con la masa de este gravitón. Para este trabajo se ha utilizado un valor de 100 veces el valor del radio de la última capa que tenemos inicialmente motivado para que inicialmente la evolución sea idéntica a la Newtoniana. Este valor también se puede entender como el valor a partir del cual la exponencial empieza a ser influyente y entonces se empieza a neutralizar el efecto gravitatorio. El resto de valores serán los mismos que se utilizaron en el caso Newtoniano, dejando el caso en el que  $E = 0$  pues es el que interesa teniendo en cuenta las observaciones. También las condiciones iniciales permanecen iguales, con la ecuación 2.

Con el programa en *Mathematica* se obtienen representaciones gráficas que ayudarán a entender cómo es la evolución de las diferentes capas en este caso. En la representación de la evolución temporal del factor de escala en la figura 8 se puede ver cómo el movimiento deja de ser comóvil y se aprecia también cómo las capas más exteriores se expanden antes más rápidamente que las más interiores, es decir las que tienen un radio mayor dejan de sentir

el efecto gravitatorio antes que las que tienen un radio menor.

También podemos observar en la figura 9 cómo las velocidades acaban por hacerse constantes pero cada capa en un tiempo distinto. Esto es así puesto que las velocidades se harán constantes cuando el efecto gravitatorio sea despreciable o nulo, lo cual ocurre a partir de un cierto punto del espacio en el que el radio de la esfera de cada capa sea mayor que  $a_0$ . La expansión va llevando a cada capa a ese punto, llegando primero las capas exteriores y más tarde las interiores. A partir de este punto la expansión se vuelve inhomogénea, puesto que unas capas llegan antes que otras y continúan cada una con la velocidad que tuvieron al llegar a ese punto.

Es importante explicar que el factor  $r$  de las gráficas hace referencia al radio inicial de cada capa, de tal forma que  $R(t, r)$  es el radio de la capa en el instante  $t$  que inicialmente tenía un radio  $r$ .

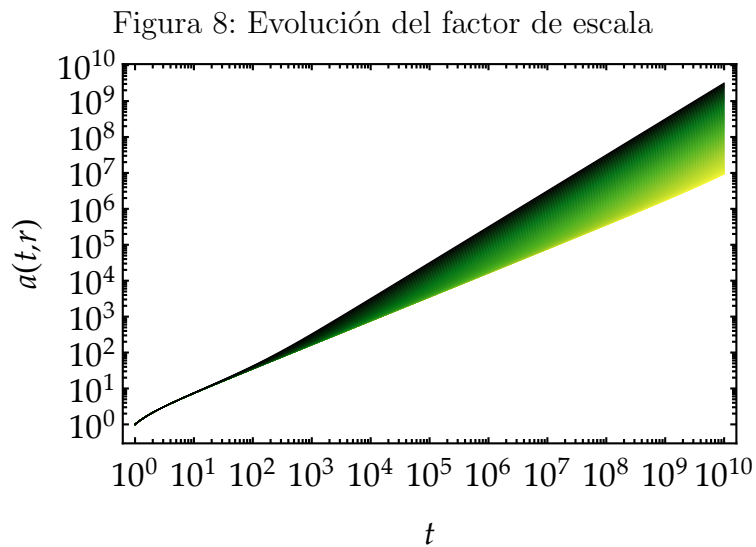
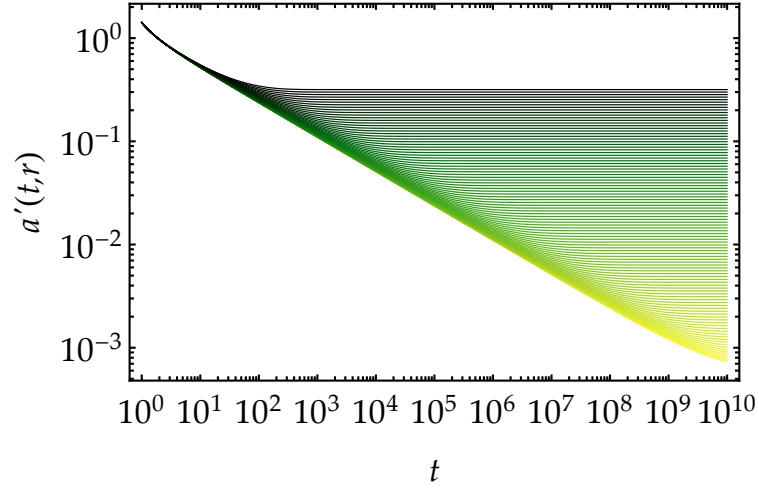
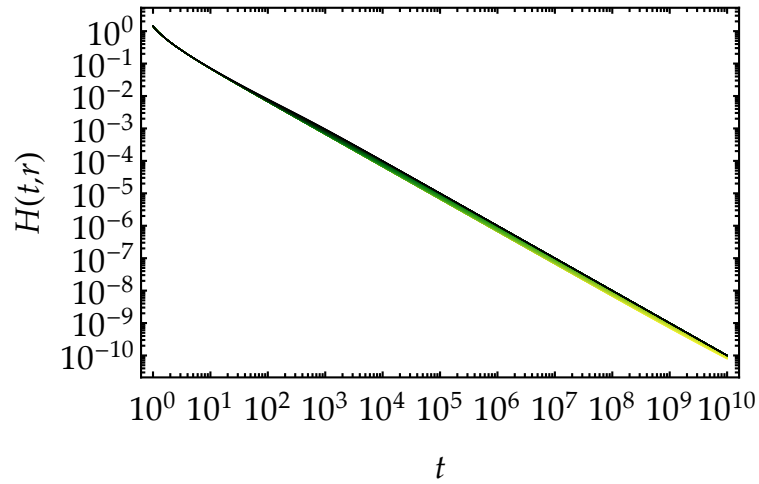


Figura 9: Evolución de la velocidad del factor de escala



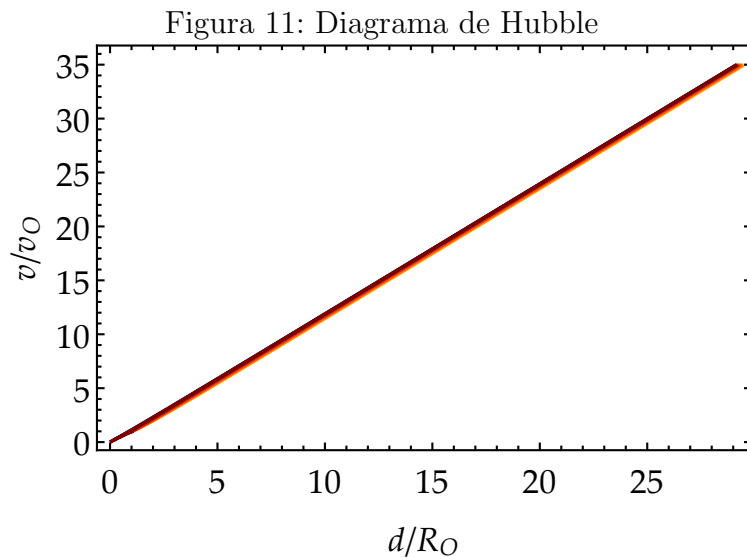
Se obtiene también la evolución en el tiempo del factor de Hubble. En la figura 10 se puede ver como esta evolución difiere entre unas capas y otras.

Figura 10: Evolución del factor de Hubble



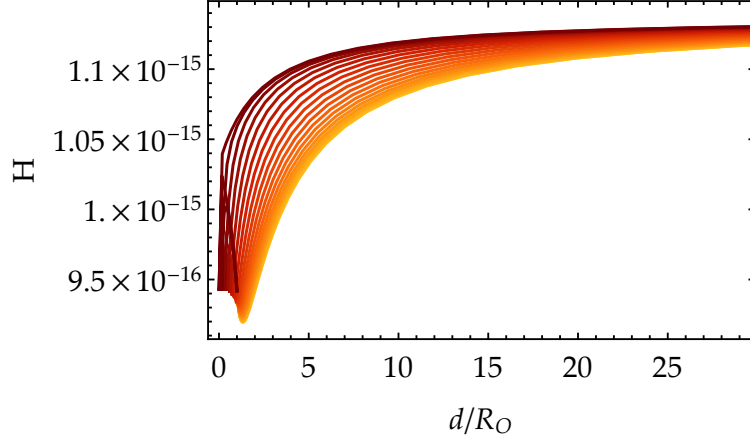
Además se puede representar gráficamente el diagrama de Hubble que también se representó para el caso Newtoniano. En este caso, a un tiempo

dato, se puede observar cómo existe una variación en el diagrama en función del ángulo con el que el observador mida la velocidad de recesión. Esto se muestra en la figura 11.



A su vez se puede obtener también la representación del factor de Hubble en función de la distancia a un tiempo dado y ver como también varía con el ángulo con el que se mida la velocidad de recesión respecto al observador, cómo se muestra en la figura 12. Se puede explicar que a grandes escalas sea mayor al principio puesto que las capas con mayor radio llegan antes al punto donde la interacción gravitatoria se hace despreciable y por ellos ya no tienen esa aceleración negativa y se expanden más rápido que las capas interiores que aún sienten la interacción.

Figura 12: Factor de Hubble frente a distancia



## 5. Evolución del universo en el que la interacción se expande en más dimensiones

La modificación esencial de que la interacción gravitatoria se expanda a más dimensiones es que se añade un factor  $\alpha$  sumado al exponente dos de la fuerza que se podrá variar para encontrar diferentes soluciones, aunque primero se utilizará  $\alpha = 1$ . En tres dimensiones la fuerza se expresa proporcional a  $r^{-2}$  lo que se puede extender a  $d$  dimensiones en las que la fuerza se expresará proporcional a  $r^{-(d-1)}$ . Así la ecuación diferencial que se utilizará es:

$$\ddot{R} = -G \frac{M(\rho, R)}{R^{2+\alpha}} \quad (14)$$

Se utiliza el programa en *Mathematica*, pues no hay solución analítica. Las condiciones iniciales permanecen iguales a las otras evoluciones y se cambiará el sistema de ecuaciones diferenciales al correspondiente con la ecuación 14. Además habrá que incluir en los valores de los parámetros el valor que se le concede a  $\alpha$ , que en primer lugar será  $\alpha = 1$ .

La evolución que se obtiene con estas ecuaciones no es comóvil como se muestra en la evolución del factor de escala en la figura 13 pues se ve cómo difiere según la capa que sea y no es el mismo factor de escala para todas las capas.

Destacando cómo evoluciona la velocidad del factor de escala en cada capa, se ve que esta velocidad va disminuyendo al principio hasta que el radio de las capas es lo suficientemente grande como para que el factor al cubo del radio en el denominador haga que el efecto gravitatorio sea despreciable. Además es importante mencionar como la velocidad varía diferente para cada capa, puesto que según vaya expandiéndose cada capa se notará de forma diferente la interacción gravitatoria en este caso. A partir de este punto la velocidad se hace constante. Esto se puede apreciar en la figura 14. Esto quiere decir que el potencial tiene un cierto alcance, la interacción deja de tener un largo alcance y este alcance es el que introduce una escala en el problema y da lugar a la aparición de inhomogeneidades.

Figura 13: Evolución del factor de escala

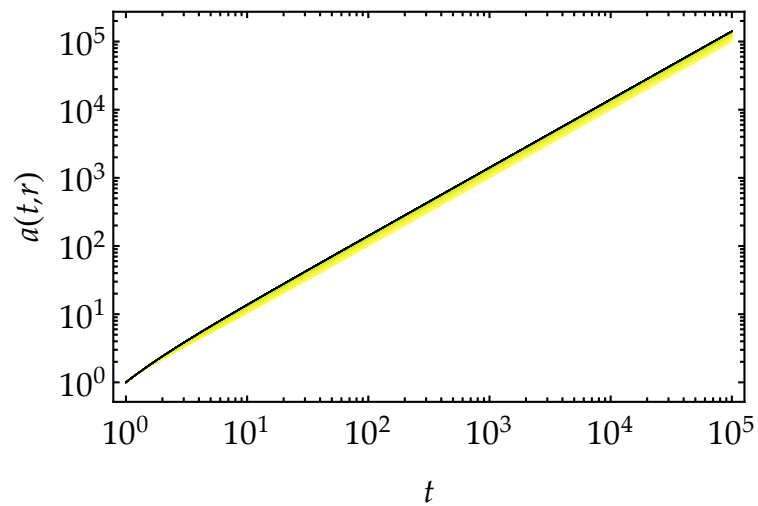
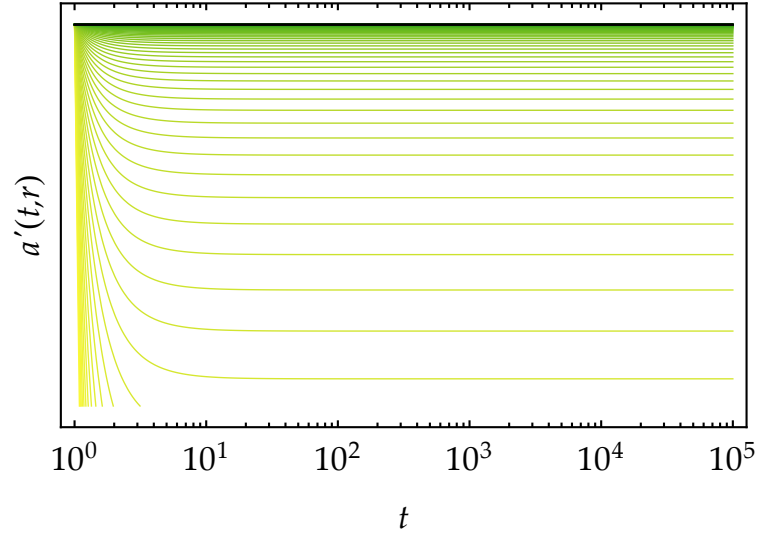
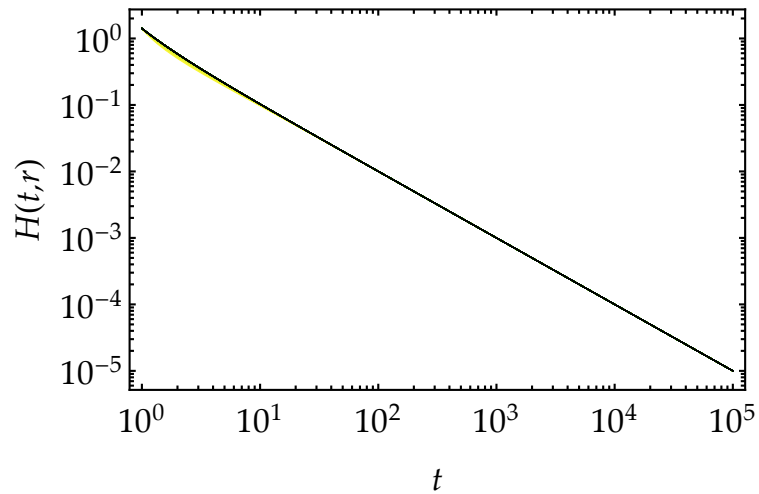


Figura 14: Evolución de la velocidad del factor de escala

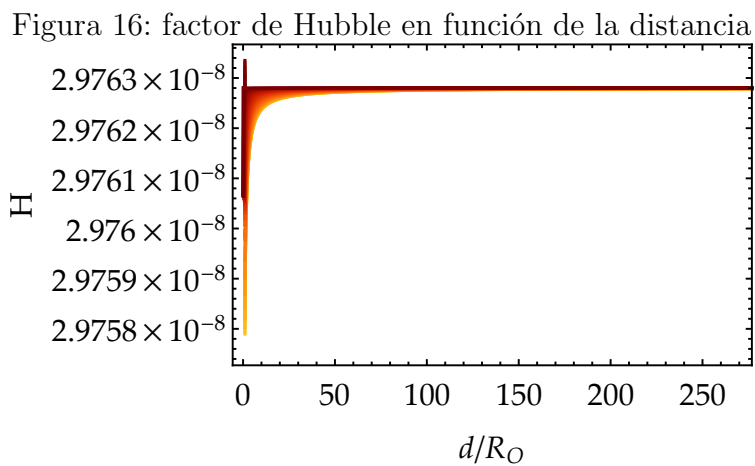


La evolución temporal del factor de Hubble también depende de la capa en un principio, siendo al final independiente de estas al dejar de sentir la interacción gravitatoria todas las capas, como se ve en la figura 15. Cabe mencionar que la representación es logarítmica y la dependencia del factor de Hubble respecto de las capas al principio es significativa.

Figura 15: Evolución del factor de Hubble



Con la obtención del *diagrama de Hubble* no se aprecia lo suficiente como para ver que no sea lineal o que dependa del ángulo con el que el observador mide la velocidad de recesión. Es por eso que la representación elegida para apreciar el efecto de esta constante es la del propio factor de Hubble en función de la distancia en un tiempo suficientemente temprano como para que el efecto de la interacción gravitatoria que estamos utilizando sea notable y además se coloca al observador en una capa alejada del centro para notar más esta dependencia angular. Con estas condiciones se representa la figura 16.



Al estar el observador colocado en una capa media es más fácil ver cómo la dependencia angular desaparece cuando las capas dejan de sentir el efecto gravitatorio, por ello solo al principio se nota esta dependencia angular y después el valor de el factor de Hubble se hace constante para las diferentes capas y prácticamente el mismo.

Si variamos el valor de  $\alpha$  los resultados son parecidos, variando cuando las velocidades puedan hacerse constantes en cada capa. Si la variación es menor, por ejemplo con  $\alpha = 0,5$  se pueden representar las siguientes gráficas:



Figura 17: Evolución del factor de escala

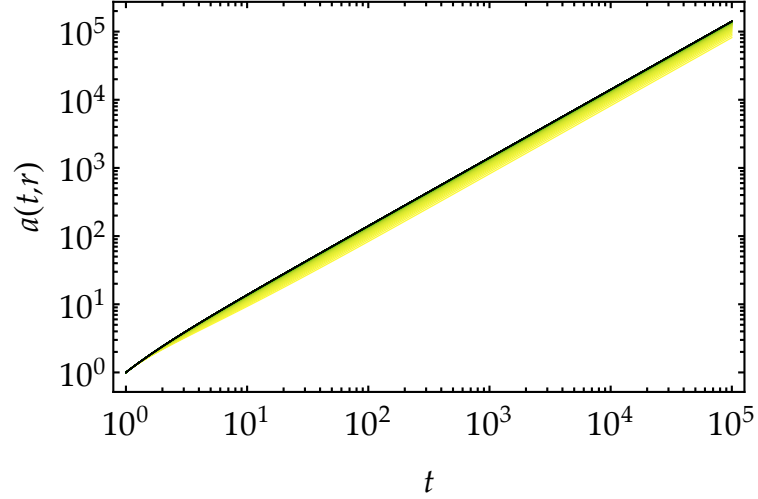
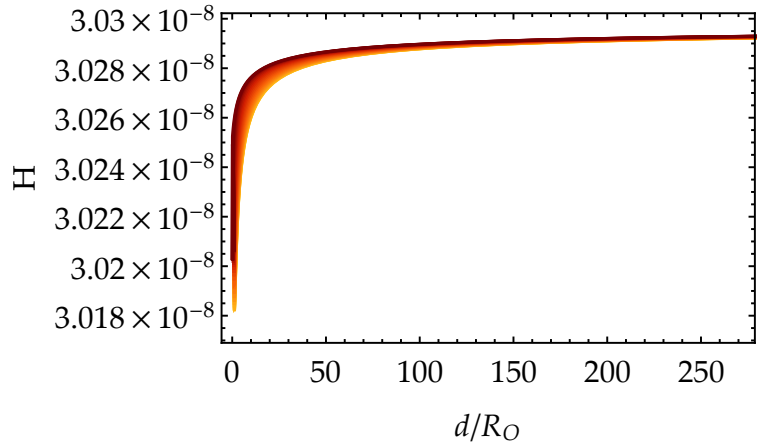


Figura 18: factor de Hubble en función de la distancia



Como se puede apreciar, la evolución no comóvil es muy similar a la del caso con  $\alpha = 1$  así como la variación del factor de Hubble en una gráfica en función de la distancia y su dependencia angular. Ocurre de manera similar en el resto de parámetros al caso con  $\alpha = 1$  solo que los tiempos difieren según sea el exponente mayor o menor. Cuanto mayor sea  $\alpha$  menor es el radio a partir del cual el efecto gravitatorio es despreciable y por tanto la

evolución será a partir de ese punto con velocidad constante. Cuanto mayor es el exponente también más se aprecia la diferencia entre las capas en la velocidad y menos en la dependencia con el ángulo en la representación del factor de Hubble en función de la distancia. Todo esto nos indica que en cuánto  $\alpha$  es distinto de cero, el potencial y por ello la interacción tienen un alcance finito que es el que luego dará lugar a inhomogeneidades en la evolución.

## 6. Evolución del universo con una interacción además de la gravitatoria

En este caso se considerará un universo en el que además de la interacción gravitatoria se tiene una interacción con un potencial tipo Yukawa de largo alcance dependiente también de la masa que dará lugar a una fuerza repulsiva. La ecuación diferencial a utilizar aquí será:

$$\ddot{R} = -GM(\rho, R) \left( \frac{1}{R^2} - \frac{Qe^{-bR_i}}{R_i^2} \right) \quad (15)$$

Si analizamos la ecuación vemos que la interacción de tipo Yukawa contrarresta a la interacción gravitatoria hasta que la exponencial haga que esta interacción deje de ser relevante. Para ver cuándo ocurrirá esto se tendrá en cuenta el parámetro  $b$  que indicará el inverso del radio al cual la exponencial empieza a ser relevante. También habrá que escoger inicialmente el valor del parámetro  $Q$  que dirá si esta interacción es mayor o menor que la gravitatoria.

Utilizando el programa en *Mathematica* para la resolución, se procede a cambiar el sistema de ecuaciones diferenciales por uno con la ecuación 15. Los valores iniciales y condiciones iniciales son los mismos que en el caso Newtoniano y se escoge en primer lugar para los parámetros propios de este problema los valores  $Q = 2$  y  $b$  será el inverso de cien veces el radio inicial de la última capa. A partir de ese valor la exponencial negativa será relevante y la interacción repulsiva empezará a ser despreciable.

La evolución en este caso resulta parecer comóvil, pues el factor de escala es igual y evoluciona de la misma manera para todas las capas. Cuando la interacción de tipo Yukawa deja de hacer efecto lo sigue haciendo la interacción gravitatoria. Esta evolución temporal la vemos en la figura 19. Es una evolución mayor al principio y luego es más lenta.

Resulta más interesante ver la evolución de la velocidad de cada capa en la figura 20, que no cambia de la misma manera en todas las capas. La velocidad aumenta al principio para cada capa, pues la interacción repulsiva domina en un principio acelerando las capas. Cuando estas capas alcanzan un radio suficientemente grande empieza a ser más relevante la interacción gravitatoria, reduciéndose así la velocidad durante algún tiempo. Finalmente la velocidad de capa se hace constante, pues los radios son lo suficientemente grandes como para que cada interacción no sea relevante a esas distancias.

Figura 19: Evolución del factor de escala

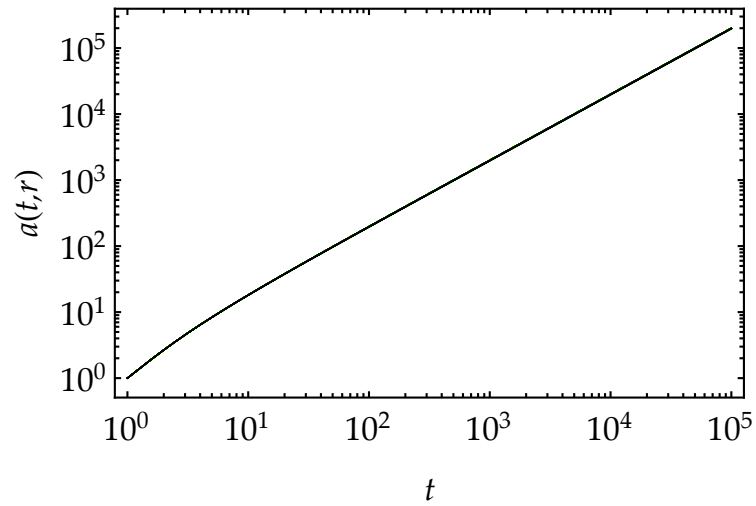
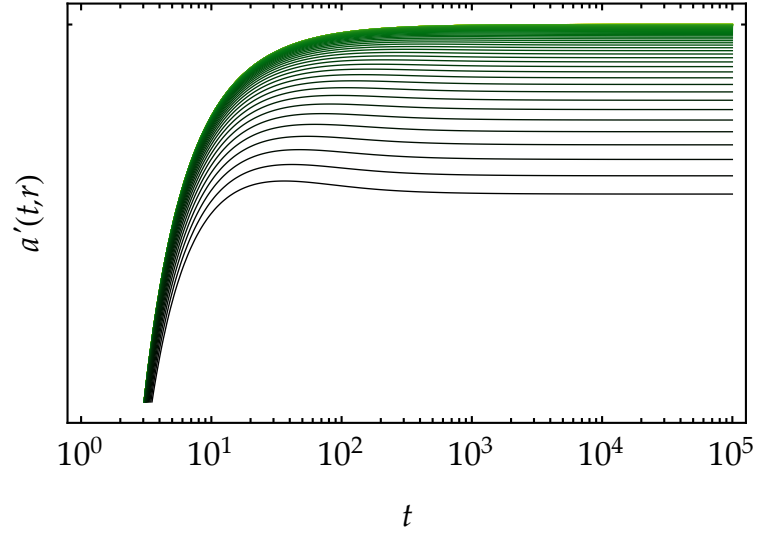
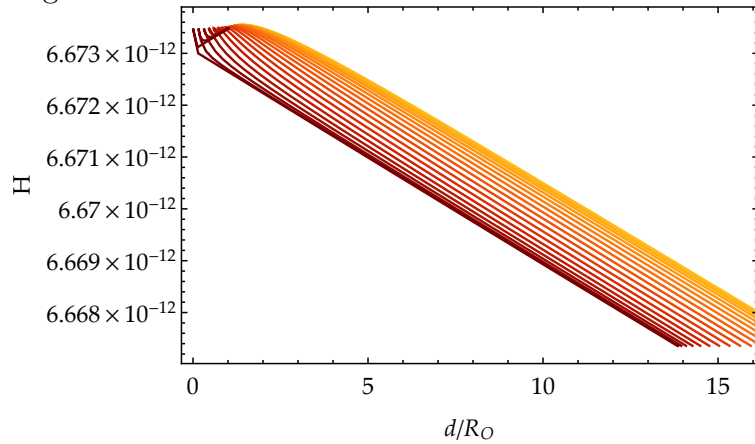


Figura 20: Evolución de la velocidad del factor de escala



También es relevante destacar cómo cambia el factor de Hubble con la distancia para un observador colocado en una de las capas. Si se coloca en una capa suficientemente alta como para estar alejado del centro para notar la dependencia angular y a un tiempo suficientemente temprano como para que ambas interacciones sean notables, se puede representar la figura 21 en la que se ve esta dependencia angular del factor de Hubble.

Figura 21: Factor de Hubble en función de la distancia



Si se quiere ver el caso en el que la interacción gravitatoria es mayor que la repulsiva desde un principio, se habrá de modificar el valor del parámetro  $Q$ . Utilizando un valor  $Q = 0,1$  es mayor la interacción gravitatoria. La principal diferencia entonces es que la velocidad disminuye desde un primer momento hasta que en un punto se hace constante. De nuevo la expansión es más veloz que si no hubiera otra interacción, aunque esta vez no es tan rápida como cuando esta interacción repulsiva es dominante. Se muestra la gráfica de la velocidad en la figura 23, que es donde la diferencia es más significativa. También se representa la gráfica del factor de Hubble en función de la distancia para un observador en una capa en la figura 24, viendo que la dependencia es similar con el anterior valor de  $Q$ . Así mismo se representa la evolución en la figura 22 para ver que al principio no se expande tan rápidamente como con  $Q = 2$ .

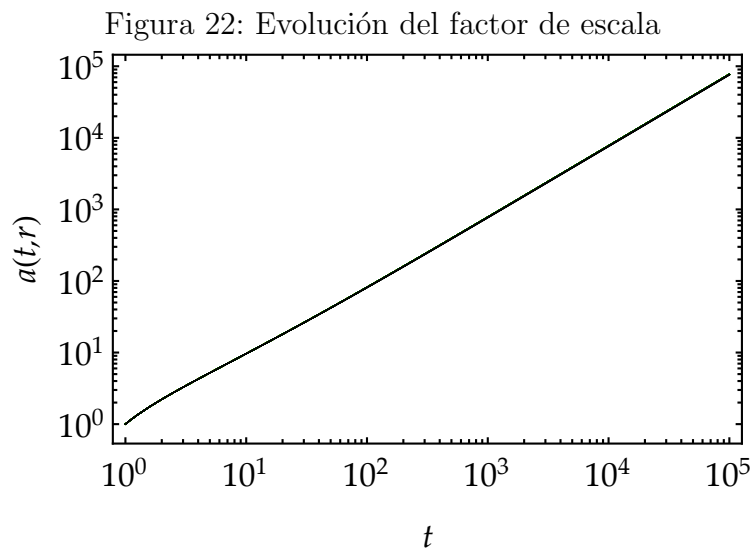


Figura 23: Evolución de la velocidad del factor de escala

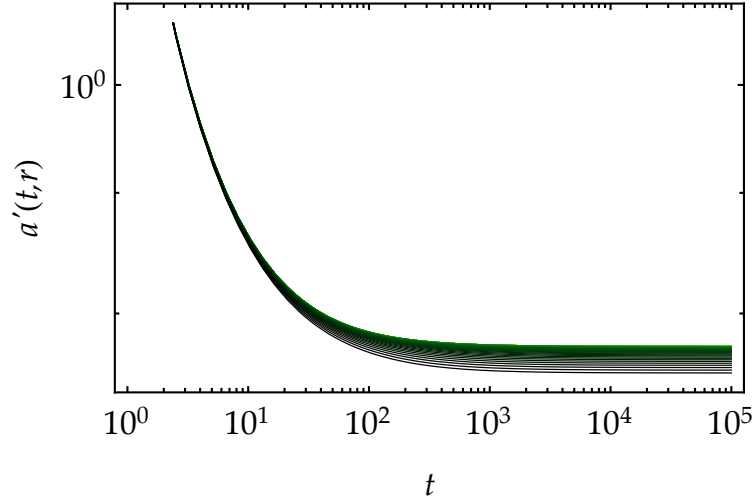
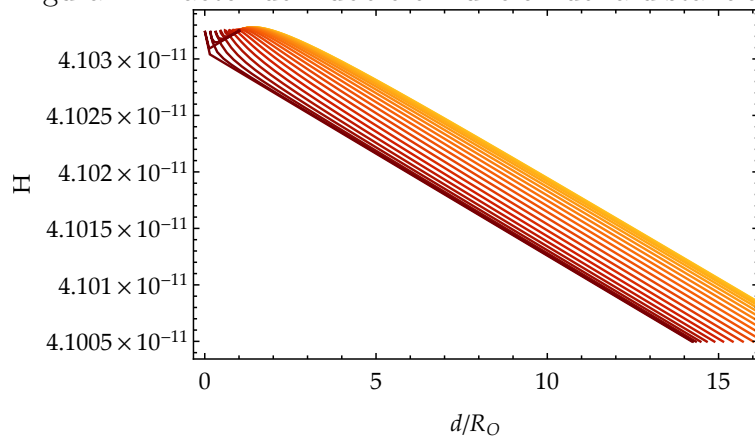


Figura 24: Factor de Hubble en función de la distancia



## 7. Resultados y discusión

En primer lugar se ha presentado la resolución analítica del caso newtoniano, viendo que lleva a una evolución comóvil donde además todas las capas avanzan sin cruzarse. Se obtiene la ecuación de Friedmann y se resuelve la ecuación diferencial mediante un cambio de variable. Estos resultados se

recuperan de manera numérica donde además se representan las evoluciones de parámetros como el factor de escala y se puede corroborar su evolución comóvil. Se modifican algunas condiciones iniciales para ver más posibles evoluciones según sea la energía  $E$  positiva, cero o negativa lo que da lugar a dos tipos de expansiones y un expansión que se frena y vuelve a recolapsar.

Después se obtiene también la evolución para un universo en el que el gravitón tenga masa. Esta evolución tiene como característica principal que es de alcance finito y por tanto la evolución deja de ser comóvil a partir de cierto punto y las velocidades son constantes también a partir de ese radio pues el efecto gravitatorio desaparece. Además el factor de Hubble para un observador depende del ángulo con el que se midiera la velocidad de recesión.

Para un universo en el que se tiene que la interacción se pueda expandir en más dimensiones se tiene una evolución que no es comóvil. Las velocidades disminuyen aunque se hacen constantes bastante pronto. La dependencia del ángulo en el factor de Hubble aparece en un tiempo temprano y distancias cortas. Después este factor de Hubble se hace constante. Siempre que se aumentan las dimensiones la interacción se vuelve de alcance finito.

Por último se tiene un universo en el que existe una fuerza repulsiva de tipo Yukawa además de la gravitatoria. Esto hace que la expansión en algunos casos pueda acelerarse hasta que esta interacción repulsiva se hace despreciable. También puede ser que simplemente contrarreste el efecto gravitatorio. La velocidad llegará a ser constante a un tiempo suficientemente grande. La dependencia del factor de Hubble con el ángulo con el que el observador mida la velocidad de recesión es notable cuando ambas interacción están presentes y más si el observador esta en capas altas.

## Results and discussion

First of all we have revealed the analytical resolution of the newtonian case, knowing that it brings to a comoving evolution where there is not shell crossing. We obtain the Friedmann equation and solve the differential equation using a variable change. We recover these results with the numerical way which also let us represent the evolution of parameters such as the scale factor, which can corroborate the comoving evolution. We modify some initial conditions in order to appreciate more possible evolutions depending on the energy sign which leads into two type of expansions and another one expansion that slows down and recolaps.

Then we also obtain the evolution for a universe with a massive graviton. The principal feature of this evolution is the finite scope and therefore, the evolution stops being comoving from a concrete point and the speed starts to be constant because of the disappearance of the gravitational effect. Moreover the Hubble factor depends on the angle of the recession speed's measure.

For a universe in which we consider that the gravitational interaction can expand into more dimensions, we have a non-comoving evolution. The different speeds slow down until they soon become constant. The angular dependence of the Hubble factor appears early in time and in short distances. Then the Hubble factor becomes constant as well. When we increase the dimensions the gravitational interaction has a finite scope.

Last but not least we have the universe in which it exists a repulsive yukawa type force in addition to the gravitational one. This yukawa force accelerates the expansion in some cases, until the repulsion interaction almost disappears. It also can just compensate the gravitational effect. The speed will become constant with enough time to evolve. The Hubble factor depends on the angle of the observer's recession speeds measurement and it is notable when both interactions are involved and even more if the observer is on a high shell.

## Referencias

- [1] George F R Ellis and Gary W Gibbons. Discrete newtonian cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 31(2):025003, nov 2013.
- [2] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: Wiley, 1972.
- [3] Alan Guth. The dynamics of newtonian cosmology. Lecture notes 3, sep 2018.
- [4] John D Norton. The cosmological woes of newtonian gravitation theory. In Hubert Goenner, Jürgen Renn, Jim Ritter, and Tilman Sauer, editors, *The Expanding Worlds of General Relativity*, volume 7 of *Einstein studies*, pages 217 – 322. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [5] D. B MALAMENT. Is newtonian cosmology really inconsistent ? *Philosophy of science (East Lansing)*, 1995.