



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

TRABAJO FIN DE GRADO

Integrabilidad de osciladores con nolinealidad cúbica y coeficientes variables

Autor

Manuel Paez Felix

Tutores

Pilar García Estévez
Alberto Rodríguez González

Grado en Física
Facultad de Ciencias

Salamanca, 2021

Dña. Pilar García Estévez y D. Alberto Rodríguez González CERTIFICAN que el presente Trabajo de Fin de Grado, titulado INTEGRABILIDAD DE OSCILADORES CON NOLINEALIDAD CÚBICA Y COEFICIENTES VARIABLES , ha sido realizado bajo su dirección por D. Manuel Paez Felix

En Salamanca, julio 2021

Fdo.: PILAR GARCÍA ESTÉVEZ

Fdo.: AIBERTO RODRÍGUEZ GONZÁLEZ

Índice general

Resumen	1
1. Introducción	5
1.1. Consideraciones generales	5
1.2. Objetivos	5
2. Propiedad de Painlevé	7
2.1. Introducción y antecedentes	7
2.2. Estudio de singularidades	7
2.2.1. Singularidades de una ODE	7
2.3. Sofia Kovalevskaya	9
2.4. Paul Painlevé	10
2.5. Algoritmo ARS	10
2.6. PP para un oscilador de Duffing con coeficientes arbitrarios	12
2.6.1. Término dominante	12
2.6.2. Regla de recurrencia	13
2.6.3. Resonancia	13
2.6.4. Condición en la resonancia	13
3. Reducción a la forma canónica	15
3.1. Introducción	15
3.2. Transformación de escala	15
3.3. Lagrangiano y Hamiltoniano	17
4. Análisis de soluciones	19
4.1. Soluciones analíticas	19
4.1.1. Solución del péndulo forzado y amortiguado	19
4.1.2. Introducción a las funciones de Weierstrass	22
4.1.3. Soluciones en términos de las funciones de Weierstrass	23
4.1.4. Representación de soluciones analíticas	24
4.2. Soluciones numéricas	27
5. Sistemas dinámicos	31
5.1. Atractores	32
5.1.1. Atractor Duffing	33
5.2. Caos	35
5.2.1. Exponente de Lyapunov	35
Conclusiones	37
Bibliografía	41

Lista de abreviaturas

ARS: algoritmo de Ablowitz-Ramani-Segur

ODE: ecuación diferencial ordinaria

ODEs: ecuaciones diferenciales ordinarias

PDE: ecuación diferencial en derivadas parciales

PDEs: ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

PP: propiedad de Painlevé

WTC: algoritmo de Weiss-Tabor-Carnevale

Resumen

La integrabilidad de los sistemas dinámicos constituye sin lugar a dudas una rama de extremo interés en Física y Matemáticas. Esto es debido a la amplia variedad de propiedades que presentan desde ambos puntos de vista. El poder predictivo que se puede aportar gracias a estudios asociados a este tema es sumamente útil. Podemos encontrar dinámica en cualquier campo de la ciencia. Las diversas y numerosas interacciones entre las partes que constituyen un sistema físico constituyen una fuente de no linealidad y complejidad, que añadido a la dependencia sensible a las condiciones iniciales [19], característica del comportamiento caótico, conllevan un cambio de perspectiva de los sistemas dinámicos con importantes consecuencias en la comprensión de la ciencia.

La dinámica no lineal es la disciplina que estudia los sistemas dinámicos no lineales, que son aquellos sistemas que definidos por una o más variables, evolucionan en el tiempo de tal manera que la “salida” no es proporcional a la “entrada”. Como es natural, existen tantos sistemas dinámicos como variables que tienen una evolución temporal, reflejándose la naturaleza interdisciplinar y el alcance de la dinámica no lineal. [26, 25].

Utilizamos el término “no lineal” para contraponerlo evidentemente al término “lineal”. Este último denota propiedades como proporcionalidad (causas cuantitativamente pequeñas provocan efectos cuantitativamente pequeños), aditividad, repetición o replicación (la misma acción en las mismas condiciones produce el mismo resultado), y relaciones claras y relativamente triviales entre causa y efecto. Sin embargo, en la naturaleza encontramos muchas relaciones que no son lineales y nos llevan a situaciones muy diferentes. Una relación de proporcionalidad entre dos variables x e y , donde $y = kx$, indica una relación lineal. Por tanto, toda relación entre dos variables que no responda a una relación de proporcionalidad como la anterior será no lineal. Lo más general es que un sistema dinámico sea no lineal. Luego cuando existen relaciones de no linealidad, puede darse un comportamiento caótico caracterizado por propiedades contrapuestas a las anteriores: ausencia de proporcionalidad (pequeñas causas pueden provocar grandes efectos), no existe la aditividad, y dependencia sensible a las condiciones iniciales, lo que puede generar inestabilidades, discontinuidades e imprevisibilidad.

Es útil estudiar la dinámica no lineal a través de un ejemplo de gran interés como el oscilador de tipo Duffing, ya que modela muchos sistemas físicos realistas y sencillos, tales como un péndulo de doble resorte o un péndulo amortiguado y forzado. Además, a pesar de su engañosa simplicidad con sólo un término cúbico no lineal, las formas de su comportamiento pueden ser muy diversas. Por otra parte,

el sistema es susceptible de tratamiento analítico en determinados casos. Conectado con el oscilador de Duffing está el famoso atractor Duffing, un conjunto invariante que mantiene la misma estructura para diferentes condiciones iniciales en la cuenca de atracción que conducen a trayectorias caóticas.

El esquema de trabajo utilizado para la presentación de la memoria se basa primeramente en la explicación detallada de la propiedad de Painlevé (PP) y las consecuencias de que un sistema la posea. Esta se sitúa dentro del capítulo 2, en el que también explicaremos como implementar el algoritmo ARS (algoritmo utilizado para determinar cuando una ecuación es considerada integrable), además de aplicarlo a un ejemplo como es el del oscilador Duffing. Dentro del capítulo 3, a través del oscilador Duffing, relacionaremos las transformaciones de escala, para pasar a su correspondiente forma canónica, con la propiedad de Painlevé, analizando los resultados y extrayendo conclusiones. Por otra parte, en el capítulo 4 resolvemos analítica y numéricamente la ecuación del péndulo amortiguado forzado comparando las soluciones en una representación. Finalmente definimos el concepto de atractor, su efecto en los sistemas dinámicos y calculamos numéricamente la evolución en el espacio de fases del atractor Duffing. Igualmente, introducimos el tema del caos y una manera de cuantificarlo a través del exponente de Lyapunov, siendo este también calculado para el oscilador tipo Duffing.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Integrabilidad. Propiedad de Painlevé. Oscilador Duffing. Dinámica no lineal. Atractor. Caos. Exponente de Lyapunov.

Abstract

The integrability of dynamical systems is undoubtedly a branch of extreme interest in Physics and Mathematics. This is due to the wide variety of properties that they present from both points of view. The predictive power that can be provided by studies associated with this subject is extremely useful. We can find dynamics in any field of science. The diverse and numerous interactions between the parts that constitute a physical system are a source of nonlinearity and complexity, which, added to the sensitive dependence on initial conditions, characteristic of chaotic behavior, lead to a change in perspective towards dynamical systems with important consequences in the understanding of science.

Nonlinear dynamics is the discipline that studies nonlinear dynamical systems, which are those systems whose "output" state after time evolution is not proportional to the "input". Naturally, there are as many dynamical systems as there are variables that have a time evolution, which makes us wonder about the interdisciplinary nature and scope of nonlinear dynamics.

We use the term "nonlinear" in contradistinction to the term "linear". The latter denotes properties such as proportionality (quantitatively small causes cause quantitatively small effects), additivity, repetition or replication (the same action under the same conditions produces the same result), and clear and relatively trivial relationships between cause and effect. However, in nature we find many relationships that are not linear and lead to very different situations. A proportionality relationship between two variables x and y , where $y = kx$, indicates a linear relationship. Therefore, any relation between two variables that does not respond to such proportionality will be nonlinear. The most general situation is that a dynamical system is nonlinear. When nonlinear relationships exist chaotic behavior can occur, characterized by properties opposed to the previous ones: lack of proportionality (small causes can cause large effects), there is no additivity, and sensitive dependence to initial conditions which can generate instabilities, discontinuities and unpredictability.

It is useful to study nonlinear dynamics through an example of great interest such as the Duffing type oscillator, since it models many realistic and simple physical systems, for example, a double spring pendulum or a damped and forced pendulum. Moreover, despite its deceptive simplicity with only the cubic nonlinear term, its behavior can be very diverse. On the other hand, the system is susceptible of analytical treatment in certain situations. Connected with the Duffing oscillator is the famous Duffing attractor, an invariant set that maintains the same structure for different initial conditions in the basin of attraction leading to chaotic trajectories.

The description of the work presented in this manuscript starts in Chapter 2 by explaining the fundamentals of the Painlevé property (PP) and the consequences for a system that, has it. We will explain how to implement the ARS algorithm, as well

as apply it to an example such as the Duffing oscillator.

In chapter 3, through the Duffing oscillator, we will relate the scale transformations, to reduce its equation of motion to its corresponding canonical form, with the Painlevé property.

In Chapter 4 we solve analytically and numerically the equation of the forced and damped pendulum comparing the solutions in a representation.

Finally, we define the concept of attractor, discuss its effect on dynamical systems and calculate numerically the evolution in the phase space of the Duffing attractor. We introduce the subject of chaos and a way to quantify it through the Lyapunov's exponent, which is also calculated for the Duffing oscillator.

Keywords: Ordinary differential equations. Integrability. Painlevé property. Duffing oscillator. Nonlinear dynamics. Attractor. Chaos. Lyapunov's exponent.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Consideraciones generales

La integrabilidad es una propiedad no genérica de los sistemas dinámicos. En el presente trabajo nos centramos en la dinámica no lineal [25] analizando las soluciones de una clase de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden con un término cúbico en la variable dependiente que se relaciona con el oscilador Duffing, así como con un caso más específico, el péndulo amortiguado forzado. Veremos como este oscilador tiene asociado un atractor extraño conocido como atractor Duffing, que nos manifestará la existencia de caos [26] en el espacio de fases.

1.2. Objetivos

El presente trabajo tiene como objetivo dar una visión global del estudio de la integrabilidad de un sistema físico, mostrándose las condiciones que ha de cumplir para poder ser resuelto y las consecuencias en caso contrario. Más concretamente:

- Encontrar a través del algoritmo ARS las condiciones que deberán cumplir los coeficientes de la ecuación del oscilador Duffing para que sea un sistema integrable.
- Encontrar a través de una reducción de la ecuación del oscilador Duffing a su respectiva forma canónica, las condiciones que deberán cumplir sus correspondientes coeficientes para que el sistema sea integrable.
- Determinar las soluciones exactas tanto para el oscilador Duffing, como más concretamente para el péndulo amortiguado forzado.
- Obtener las soluciones numéricas para el péndulo amortiguado forzado y compararlas con las exactas.
- Dar un punto de vista general sobre la dinámica caótica relacionándola con el oscilador Duffing.

Capítulo 2

Propiedad de Painlevé

2.1. Introducción y antecedentes

Para ponernos brevemente en contexto, además de tratar algunos conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales, añadiremos una escueta introducción histórica. Leibniz [17] fue quien introdujo en el siglo XVII el concepto de integral y realizó numerosas aportaciones a su campo, desde resolver la ecuación diferencial más sencilla a contribuir a la definición de las entidades matemáticas nombradas “infinitesimales” definiendo así sus propiedades algebraicas. Es reconocido por tanto como uno de los creadores del cálculo.

Aprovechando estos avances, se comenzó un intenso estudio de las ecuaciones diferenciales de forma que, a finales del siglo XVIII, una gran parte de los métodos de integración conocidos actualmente estaban asentados ya entonces. Se trataba fundamentalmente de la construcción de soluciones globales de las ecuaciones diferenciales en términos de funciones elementales. Dado que muchas ecuaciones diferenciales no entran en este tipo, el concepto de integración quedaba bastante restringido.

La integrabilidad se puede considerar como una propiedad matemática que puede ser usada para obtener mayor poder predictivo e información cuantitativa en el estudio de la dinámica global de un sistema. Nos da una comprensión de fenómenos físicos tan complicados como los cambios meteorológicos, los terremotos o las arritmias cardíacas, que explicados matemáticamente, tienen una evolución temporal que puede presentar algunas características muy similares a las de los fenómenos originales que podremos relacionar con la existencia de soluciones analíticas, univalueadas de un sistema de ecuaciones dado.

2.2. Estudio de singularidades

Cauchy [6], Picard [24] y otros se centraron en el estudio de las singularidades en el plano complejo de las ecuaciones diferenciales. En el siguiente apartado trataremos estas singularidades describiendo principalmente dos tipos de ellas.

2.2.1. Singularidades de una ODE

Dada una ODE, sus soluciones pueden presentar singularidades cuya localización puede depender de los parámetros y/o de las condiciones iniciales. Es imprescindible para nuestro trabajo separar estos dos tipos de singularidades: móviles y

fijas, ya que al trabajar con ODEs no lineales podremos encontrar ambas .

- **Singularidades fijas:** Aquellas que quedan determinadas por los coeficientes de la ecuación, de tal manera que su localización no depende de las condiciones iniciales.
- **Singularidades móviles:** Aquellas cuya localización en el plano complejo depende de constantes de integración y, por tanto, de las condiciones iniciales.

Singularidades de las ODEs lineales

Una ODE lineal de orden n se escribe

$$y_x^{(n)} + p_{n-1}(x)y_x^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y_x + p_0(x)y = 0,$$

siendo $y_x^{(j)}$ la derivada j -ésima de y con respecto a la variable independiente x . Las posibles singularidades de las soluciones de esta ecuación son siempre fijas.

Un ejemplo que podemos poner es

$$by = (x - c)y_x, \quad (2.1)$$

cuya solución es

$$y = k_0(x - c)^b, \quad (2.2)$$

donde k_0 es una constante de integración. La posible singularidad estará localizada en $x = c$ y el tipo de la misma dependerá del valor de b . En concreto, tendremos:

- $b \in \mathbb{Z}$ y $b < 0 \rightarrow$ Polo de orden $-b$.
- $b \in \mathbb{Z}$ y $b > 0 \rightarrow$ Solución holomorfa.
- b racional y fraccionario, $b = \frac{p}{q} \rightarrow$ Punto de ramificación.
- b irracional \rightarrow Singularidad transcendental.

Es importante notar que, tanto la localización como el tipo de singularidad, vienen dados por c y b , que son parámetros de la ecuación y no dependen de la constante de integración k_0 . Se trata por tanto de una singularidad fija. Las ODEs lineales solo tienen este tipo de singularidades.

Singularidades de las ODEs no lineales

Por el contrario, las ODEs no lineales pueden presentar ambos tipos de singularidades. Pongamos de ejemplo la siguiente ODE no lineal:

$$byy_{xx} + (1 - b)y_x = 0, \quad (2.3)$$

cuya solución es

$$y = k_0(x - c_0)^b \quad (2.4)$$

donde k_0 y c_0 son constantes de integración. Por consiguiente podemos observar que para $x = c_0$ hay una singularidad móvil cuyo carácter en el plano complejo depende del valor de b . Por tanto la localización de la singularidad de la solución depende de una de las constantes de integración y es, consecuentemente, una singularidad móvil.

Para completar y tener una noción más clara de los conceptos, añadiremos dos clasificaciones más:

- **Singularidad aislada:** Se dice que la función $f(z)$ tiene una singularidad aislada en z_0 si $f(z)$ no es analítica en z_0 pero existe un $R > 0$ de modo que $f(z)$ es analítica en $0 < |z - z_0| < R$.
- **Parte principal de la función:** Si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en z_0 existe un R de modo que $f(z)$ admite una expansión de Laurent en $0 < |z - z_0| < R$. La parte de esta expansión que contiene potencias negativas de $z - z_0$ se denomina parte principal de la función.

También puede ser útil clasificar las singularidades como:

- **Univaluadas:** Si para cada valor de z le corresponde un único valor de $f(z)$.
- **Multivaluada o punto de ramificación.** No le corresponde un único valor de $f(z)$.

Posteriormente veremos que una de las posibles definiciones de integrabilidad de una ODE se basa en que las singularidades móviles estén univaluadas.

2.3. Sofia Kovalevskaya

La matemática rusa Sofia Kovalevskaya, discípula de Weierstrass, planteó que la respuesta a la cuestión sobre la integrabilidad de un sistema de ODEs podría estar relacionada con que sus soluciones carecieran de puntos críticos móviles (siendo puntos críticos singularidades que no son polos). Más en concreto, Kovalevskaya estudió las singularidades de las soluciones en el plano complejo del giro de un sólido rígido con un punto fijo [15]. Este movimiento viene definido por un conjunto de seis ecuaciones, conocidas como ecuaciones de Euler.

En ese momento eran conocidos tres casos particulares donde las ecuaciones de movimiento del sólido rígido eran integrables. Sin embargo, el estudio llevado a cabo por Kovalevskaya pudo probar la existencia de un cuarto caso en el que las ecuaciones de movimiento también eran integrables [14].

Sus contemporáneos no llegaron a entender sus ideas, ya que resultaba extraño que la integrabilidad de un sistema se pudiese explicar a través de su comportamiento en el plano complejo. Sin embargo, la resolución de este cuarto caso, el cual era extremadamente difícil de resolver, llevó a Kovalevskaya a ganar el Premio Bordin.

2.4. Paul Painlevé

A finales del siglo XIX, uno de los dilemas de la física matemática era encontrar una clasificación de las ODEs dependiendo de los tipos de singularidades que sus soluciones podían mostrar. El matemático francés Paul Painlevé fue uno de los que más empeño y tiempo dedicó en sus investigaciones a dicho tema. Continuando el trabajo anterior de Fuchs [10] y Picard [24] sobre la clasificación de ecuaciones de primer orden, Painlevé [23] estudió la clase de ODEs de segundo orden del tipo

$$y_{xx} = F(x, y, y_x) \quad (2.5)$$

donde F es una función analítica en x , y por tanto se puede expresar como una serie de potencias convergente de x y racional en y y y_x .

Observó que ecuaciones no lineales de este tipo podrían tener puntos críticos móviles. Dada la posible existencia de este tipo de singularidades, se planteó dos aspectos: primeramente obtener las condiciones necesarias para que todas las singularidades esenciales fueran fijas, y por otra parte determinar si estas asegurarían que la ecuación es integrable. El resultado de este estudio fue que encontró únicamente 50 tipos cuyas únicas singularidades móviles son polos ordinarios y por tanto las soluciones son univaluadas en las condiciones iniciales, lo que se conoce como **propiedad de Painlevé** (PP). De los 50 tipos encontrados, 44 podían ser resueltos en términos de funciones conocidas. Los seis casos restantes no podían integrarse en cuadraturas. Las correspondientes ODEs determinan nuevas funciones que se conocen como **Transcendentes de Painlevé** [13]. La no existencia de puntos críticos móviles en la solución se debe reflejar en que en un entorno de cada singularidad, la solución se debe poder expresar como una serie de Laurent.

Painlevé de este modo abre la puerta a poder predecir la integrabilidad de una ecuación mediante el análisis de sus singularidades sin necesidad de calcular la solución previamente. Ahora sabemos que sus ideas juegan un papel fundamental en la comprensión de la integrabilidad de los procesos dinámicos. A pesar de haber desaparecido durante gran tiempo de los textos matemáticos, en la actualidad sus resultados son de suma importancia en el análisis de la interpretación moderna de la integrabilidad.

2.5. Algoritmo ARS

Las investigaciones de Painlevé quedaron bastante olvidadas hasta que se empezaron a estudiar ecuaciones no lineales en derivadas parciales (PDE) que tenían un tipo especial de soluciones que se denominaron solitones [1] (una onda solitaria que se propaga sin deformarse en un medio no lineal). Ablowitz, Segur y Ramani [2] observaron que las PDEs que tenían soluciones solitónicas se podían reducir (mediante reducciones de similitud) a ODEs que tenían la propiedad de Painlevé. Este hecho llevó a crear un algoritmo (algoritmo de ARS), similar al que empleó Sofía Kovalevskaya en el problema del sólido rígido, para determinar cuando una ecuación posee la propiedad de Painlevé. Analizando localmente las singularidades, el algoritmo de ARS permite determinar la naturaleza de las singularidades de

las soluciones de una ODE y nos proporciona las condiciones necesarias para que una ODE dada sea de tipo Painlevé.

Esencialmente el algoritmo de ARS requiere que todas las soluciones de una ODE sean expresables mediante un desarrollo de Laurent de la forma

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^{j-\alpha} \quad (2.6)$$

en un entorno de la singularidad móvil $x = x_0$, donde α es un número entero positivo y a_j son coeficientes constantes.

Si toda solución de la ODE es expresable localmente como una serie de este tipo, y por tanto no tiene puntos críticos móviles, se dice que la ecuación posee la PP y por tanto se considera integrable en el sentido de Painlevé.

El algoritmo ARS consta de los siguientes tres pasos:

■ **1) Términos dominantes**

El balance de términos dominantes que proporciona la sustitución de la expansión (2.6) en la ecuación bajo estudio, nos permite determinar tanto el primer coeficiente a_0 de la serie como el orden α del polo. El primer requisito es que α sea entero positivo.

Puede darse el caso de que a_0 y α no sean únicos, en tal circunstancia la ecuación presentaría varias ramas de expansión y los pasos siguientes deberán ser evaluados para cada una de las ramas por separado. La ecuación tiene la PP sólo si se comprueba que la tiene para todas y cada una de las ramas.

■ **2) Determinación de las resonancias**

Al sustituir la posible solución (2.6) en la ODE no lineal obtenemos una **relación de recurrencia** para cada a_j de la forma

$$(j - \beta_1) \cdots (j - \beta_N) a_j = F_j(u_k, (u_k)_x; k < j). \quad (2.7)$$

Esta relación es el resultado de anular por separado los coeficientes en las diferentes potencias de $x - x_0$. De esta forma podremos obtener cada a_j en términos de los a_k ($k < j$) anteriores siempre que $j \neq \beta_i$.

Para aquellos valores de $j = \beta_i$ que sean enteros positivos, el primer miembro de (2.7) se anula de forma que la correspondiente función a_{β_i} es arbitraria. Se dice entonces que hay una **resonancia** en dicho valor de j .

Dado que las soluciones de una ODE de orden n deben depender de n constantes arbitrarias, para que todas las soluciones de una ODE de orden n sean de la forma (2.6), es preciso que $n - 1$ de los coeficientes de la expansión sean arbitrarios (la otra constante arbitraria es x_0). En consecuencia, un segundo requisito para la integrabilidad es que haya $n - 1$ resonancias, es decir n valores enteros positivos k_i tales que $\beta_i = k_i$, $i = 1, \dots, n - 1$.

■ 3) Condiciones en las resonancias

Dado que el primer miembro de (2.7) se anula cuando j es una resonancia, la relación de recurrencia (2.7) no permite determinar a_j en este caso. Por el contrario, hay que comprobar que el segundo miembro F_j se satisface idénticamente. En tal caso el coeficiente a_j correspondiente sería arbitrario.

Al final de estas tres etapas estaremos en condiciones de analizar si se cumplen los requisitos para la existencia de la solución y la integrabilidad de la ecuación (2.5). Si estas condiciones son suficientes es un problema mayor, ya que debería probarse que la serie de Laurent asociada existe y demostrar su convergencia. Nótese que el algoritmo ARS no identifica la posible existencia de singularidades esenciales, y que por esto debe considerarse como un método que provee condiciones necesarias para que una ODE dada sea de tipo Painlevé. Estas singularidades esenciales podrían estar relacionadas con la aparición de resonancias negativas en el desarrollo de Laurent [9].

El algoritmo de ARS se ha extendido con éxito al caso de PDEs mediante el denominado algoritmo WTC (Weiss-Tabor-Carnevale) [29].

2.6. Propiedad de Painlevé para un oscilador de Duffing con coeficientes arbitrarios

Vamos a tratar de aplicar los criterios de integrabilidad de PP a un tipo de oscilador de Duffing [4, 27, 3, 12]. Dicho sistema ha sido estudiado con detalle en la referencia [7] y se describe mediante la siguiente ODE:

$$y_{tt} + ay_t + by^3 + cy + d \cos(\omega t) = 0, \quad (2.8)$$

siendo $y = y(t)$ la variable dependiente. El subíndice t significa derivada con respecto a dicha variable.

En este trabajo, vamos a considerar una generalización del oscilador de Duffing [8] de la forma

$$y_{tt} + F_1(t)y_t + 2F_2(t)^2y^3 + F_3(t)y + F_4(t) = 0, \quad (2.9)$$

donde $F_i = F_i(t)$ son funciones de la variable t . Nuestro propósito es determinar bajo qué condiciones la ecuación (2.9) posee la PP. Para ello vamos a proceder a aplicar el algoritmo de ARS a dicha ecuación.

Vamos pues a considerar para las soluciones una expansión de Laurent generalizada de la forma

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t)\phi(t)^{j-\alpha}, \quad (2.10)$$

donde $\phi(t_0) = 0$ siendo t_0 la singularidad móvil.

Hemos de señalar que los resultados que vamos a enumerar a continuación han sido realizados con el programa MAPLE de cálculo simbólico.

2.6.1. Término dominante

El término dominante de (2.9) es

$$y \approx \frac{a_0}{\phi}. \quad (2.11)$$

Substituyendo (2.11) en (2.9) y tomando las potencias dominantes en ϕ obtenemos

$$-\alpha - 2 = -3\alpha \rightarrow \alpha = 1, \quad (2.12)$$

$$a_0 = \frac{\phi_t}{F_2}. \quad (2.13)$$

2.6.2. Regla de recurrencia

La substitución de (2.10) en (2.9) proporcionará un polinomio en potencias de ϕ de la forma

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j \phi^{j-3} = 0, \quad (2.14)$$

donde cada A_j debe anularse de forma independiente, dado que ϕ ha de ser arbitraria. Ello nos proporciona una regla de recurrencia que, excepto en el caso de una resonancia, permite determinar cada uno de los coeficientes a_j como veremos más adelante.

2.6.3. Resonancia

Para encontrar las resonancias, hemos de tener en cuenta que para determinar el coeficiente que acompaña a cada a_j basta considerar los siguientes términos de la expansión (2.9),

$$y \approx \frac{a_0}{\phi} + a_j \phi^{j-1}. \quad (2.15)$$

Substituyendo en (2.9) y buscando el coeficiente que acompaña a a_j , obtenemos que dicho coeficiente es

$$(j - 4)(j + 1). \quad (2.16)$$

Puesto que j solo puede tomar valores positivos, podemos concluir que hay una resonancia en $j = 4$.

2.6.4. Condición en la resonancia

Para comprobar si se satisface la condición en la resonancia $j = 4$, basta con considerar la expansión hasta ese orden, es decir,

$$y(t) = \frac{1}{F_2} \frac{\phi_t}{\phi} + a_1 + a_2 \phi + a_3 \phi^2 + a_4 \phi^3 + \dots \quad (2.17)$$

Considerando (2.14), obtenemos

$$A_1 = 0 \implies a_1 = \frac{1}{6 a_0 F_2^2} (\phi_t F_1 + \phi_{tt}), \quad (2.18a)$$

$$A_2 = 0 \implies a_2 = -\frac{a_1^2}{a_0} - \frac{1}{6} \frac{F_3}{6 F_2^2 a_0}, \quad (2.18b)$$

$$A_3 = 0 \implies a_3 = -\frac{1}{3 F_2^2 a_0^2 + \phi_t^2} (F_2^2 a_1^3 + 6 F_2^2 a_0 a_1 a_2 + \frac{1}{2} F_1 a_2 \phi_t + \frac{1}{2} F_1 (a_1)_t + (a_2)_t \phi_t + \frac{1}{2} F_3 a_1 + \frac{1}{2} a_2 \phi_{tt} + \frac{1}{2} (a_1)_{tt}), \quad (2.18c)$$

y finalmente el término correspondiente a la resonancia

$$\begin{aligned} A_4 &= 0 \\ &\Downarrow \\ &F_1 F_4 + i \frac{\frac{19}{18} F_1 F_{1t} F_{2t} - \frac{4}{3} F_1 F_3 F_{2t} - \frac{5}{3} F_{2t} F_{3t} + \frac{7}{27} F_1^3 F_{2t} - \frac{1}{2} F_{1tt} F_{2t} - \frac{1}{3} F_1 F_{2ttt}}{F_2^2} - \\ &- i \frac{\frac{1}{18} F_1^2 F_{2tt} + \frac{2}{3} F_3 F_{2tt} + \frac{1}{6} F_{2ttt}}{F_2^2} - \\ &- i \frac{\frac{5}{9} F_1^2 F_{1t} - \frac{5}{6} F_1 F_{3t} - \frac{1}{3} F_3 (F_{1t} + F_1^2) - i F_{2t} F_4}{F_2} + \\ &+ i \frac{\frac{1}{9} F_{1t}^2 - \frac{2}{27} F_1^4 - \frac{1}{2} F_1 F_{1tt} + \frac{1}{2} F_{3tt} - \frac{1}{6} F_{1ttt}}{F_2} - i \frac{\frac{50}{27} F_1 F_{2t}^3 + \frac{50}{9} F_{2t}^2 F_{2tt}}{F_2^4} + i \frac{100}{27} \frac{F_{2t}^4}{F_2^5} + \\ &+ F_{4t} + i \frac{\frac{5}{6} F_{2tt}^2 + \frac{4}{3} F_{2ttt} F_{2t} + \frac{17}{9} F_1 F_{2tt} F_{2t} + 2 F_3 F_{2t}^2 - F_{2t}^2 (\frac{2}{9} F_{1t} + \frac{1}{18} F_1^2)}{F_2^3} = 0. \end{aligned} \quad (2.18d)$$

Puesto que ϕ es una función arbitraria, la relación (2.18d) se verifica únicamente cuando se satisfacen las siguientes relaciones entre los coeficientes,

$$F_1 = [\ln F_2]_t - [\ln F_4]_t, \quad (2.19a)$$

$$F_3 = -c_0 (F_2 F_4)^{2/3} + \frac{[\ln (F_2^2 / F_4)]_{tt}}{3} - \frac{[\ln (F_2^2 / F_4)]_t [\ln (F_4^2 / F_2)]_t}{9}, \quad (2.19b)$$

donde c_0 es una constante arbitraria. Si las relaciones (2.19) se satisfacen, podemos concluir que a_4 es arbitrario para cualquier valor de ϕ y, por tanto, que **todas las soluciones** de (2.9) se pueden expresar en la forma (2.10) y la ecuación (2.9) tiene la PP cuando sus coeficientes $F_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, satisfacen las condiciones (2.19).

Capítulo 3

Reducción a la forma canónica

3.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos visto como, a partir de la propiedad de Painlevé, podemos estudiar la integrabilidad de muchos sistemas físicos. Nos hemos centrado en ODEs no lineales con coeficientes variables [20, 21] y más concretamente en un oscilador de tipo Duffing determinado por la ecuación (2.9) [28, 7]. En este capítulo intentaremos reducir esta ecuación a una de las formas canónicas de la clasificación de Painlevé a través de una transformación de escala. Como veremos a continuación, para que (2.9) se reduzca a una de las ecuaciones de la clasificación de Painlevé [13], es preciso que los coeficientes verifiquen una serie de restricciones que son precisamente las mismas que se requieren para que la ecuación tenga la PP tal y como hemos determinado en el capítulo anterior.

3.2. Transformación de escala

Como ya hemos mencionado, en este apartado realizaremos una transformación de escala tanto para las variables dependientes, como para las independientes, con el objetivo de llegar a una de las formas canónicas de la clasificación de Painlevé partiendo desde (2.9). La forma para la transformación de escala será:

$$\lambda(t)dt = dz \quad \implies \quad dt = \frac{dz}{\lambda(t)}, \quad (3.1a)$$

$$\alpha(t)y(t) = w(z) \quad \implies \quad y(t) = \frac{w(z)}{\alpha(t)}, \quad (3.1b)$$

donde las funciones $\lambda(t)$ y $\alpha(t)$ han de determinarse con la condición de que (2.9) se reduzca a alguna de las ecuaciones canónicas de la clasificación de Painlevé. En nuestro caso se trata de las ecuaciones VIII y IX de dicha clasificación (ver página 334 de la referencia [13]).

Para aplicar la transformación (3.1) a (2.9) hemos de calcular las siguientes derivadas:

$$y_t = -\frac{\alpha_t}{\alpha^2}w + \frac{\lambda}{\alpha}w_z, \quad (3.2a)$$

$$y_{tt} = \left(-\frac{\alpha_{tt}}{\alpha^2} + \frac{2\alpha_t^2}{\alpha^3}\right)w + \left(\frac{\lambda_t}{\alpha} - \frac{2\lambda\alpha_t}{\alpha^2}\right)w_z + \frac{\lambda^2}{\alpha}w_{zz}, \quad (3.2b)$$

donde obviamente $y = y(t)$, $w = w(z)$. Sustituyendo la transformación de escala en (2.9) y factorizando términos para una posterior comparación, la ecuación transformada resulta

$$w_{zz} + \frac{F_1\lambda\alpha + \lambda_t\alpha - 2\alpha_t\lambda}{\alpha\lambda^2}w_z + \frac{2F_2^2}{\alpha^2\lambda^2}w^3 + \frac{F_3\alpha^2 - F_1\alpha_t\alpha - \alpha_{tt}\alpha + 2\alpha_t^2}{\alpha^2\lambda^2}w + \frac{\alpha F_4}{\lambda^2} = 0. \quad (3.3)$$

Las ecuaciones canónicas VIII y IX de la clasificación de Painlevé [13] correspondiente a ecuaciones como (2.9) son de la forma

$$w_{zz} + 2w^3 - Q(z)w + 1 = 0. \quad (3.4)$$

El caso $Q(z)$ distinto de constante puede transformarse en el segundo transcendente de Painlevé PII ampliamente estudiado en la literatura [1]. Nosotros nos centraremos en el caso $Q(z) = cte$ que, como veremos, puede resolverse en términos de funciones elípticas. Por consiguiente la ecuación que $w(z)$ debe satisfacer es

$$w_{zz} + 2w^3 - c_0w + 1 = 0 \quad (3.5)$$

con c_0 constante. Ahora debemos comparar (3.3) con (3.5) para obtener expresiones para las funciones de escala $\lambda(t)$ y $\alpha(t)$, además de unas determinadas condiciones que deberán cumplir los coeficientes variables $F_i(t)$:

$$\frac{\alpha F_4}{\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow F_4 = \frac{\lambda^2}{\alpha}, \quad (3.6a)$$

$$\frac{2F_2^2}{\alpha^2\lambda^2} = 2 \quad \Rightarrow F_2 = \lambda\alpha, \quad (3.6b)$$

$$\frac{F_1\lambda\alpha + \lambda_t\alpha - 2\alpha_t\lambda}{\alpha\lambda^2} = 0 \quad \Rightarrow F_1 = 2\frac{\alpha_t}{\alpha} - \frac{\lambda_t}{\lambda}, \quad (3.6c)$$

$$\frac{F_3\alpha^2 - F_1\alpha_t\alpha - \alpha_{tt}\alpha + 2\alpha_t^2}{\alpha^2\lambda^2} = -c_0 \quad \Rightarrow F_3 = -c_0\lambda^2 + \frac{\alpha_{tt}}{\alpha} + \frac{\alpha_t}{\alpha}\frac{\lambda_t}{\lambda}, \quad (3.6d)$$

De esta forma, de (3.6a) y (3.6b) podemos determinar que α y λ han de ser

$$\alpha = \frac{F_2}{(F_2F_4)^{1/3}}, \quad \lambda = (F_2F_4)^{1/3}. \quad (3.7)$$

Sustituyendo (3.7) en (3.6c) y (3.6d) encontramos las siguientes relaciones entre las funciones $F_i(t)$:

$$F_1 = [\ln(F_2/F_4)]_t, \quad (3.8a)$$

$$F_3 = -c_0(F_2F_4)^{2/3} + \frac{1}{3} \left([\ln(F_2^2/F_4)]_{tt} - \frac{[\ln(F_2^2/F_4)]_t [\ln(F_4^2/F_2)]_t}{3} \right), \quad (3.8b)$$

que, como puede verse, coinciden con las condiciones (2.19) que se requieren para que la ecuación tenga la PP.

Podemos concluir diciendo que la ecuación (2.9) puede transformarse en la forma canónica (3.5) mediante la transformación de escala (3.1) si y sólo si las funciones $F_1(t)$ y $F_3(t)$ satisfacen las condiciones (3.8). De esta manera observamos que las condiciones para que se de esta transformación son las mismas que se requieren para que la ecuación tenga la propiedad de Painlevé, es decir, que las restricciones impuestas en el cumplimiento de la PP coinciden con las obtenidas en este apartado.

3.3. Lagrangiano y Hamiltoniano

A continuación determinaremos el Lagrangiano y el Hamiltoniano tanto para la ecuación diferencial original (2.9), como su forma canónica (3.5), además de una constante de movimiento relevante para su estudio.

El Lagrangiano correspondiente a la ecuación canónica (3.5) es obviamente de la forma

$$L(w, w_z, z) = \frac{w_z^2}{2} + \frac{-w^4 + c_0 w^2 - 2w}{2}. \quad (3.9)$$

Su respectivo Hamiltoniano se obtiene mediante la correspondiente transformada de Legendre [11]:

$$H(w, P^{[w]}, z) = P^{[w]} w_z - L(w, w_z, z), \quad (3.10)$$

donde hemos utilizado $P^{[w]}$ para denotar el momento canónico conjugado de la variable z , y por tanto definido como

$$P^{[w]} = \frac{\partial L(w, w_z, z)}{\partial w_z} = w_z, \quad (3.11)$$

y en consecuencia

$$H(w, P^{[w]}, z) = \frac{(P^{[w]})^2}{2} + \frac{w^4 - c_0 w^2 + 2w}{2}. \quad (3.12)$$

Dado que el Hamiltoniano (3.12) no depende explícitamente de z , se verifica $\frac{dH}{dz} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0$, y por tanto podemos concluir que H es una constante del movimiento

$$E = \frac{(P^{[w]})^2}{2} + \frac{w^4 - c_0 w^2 + 2w}{2} = \frac{w_z^2 + w^4 - c_0 w^2 + 2w}{2}. \quad (3.13)$$

Para encontrar la formulación canónica de la ecuación (2.9) en las variables originales, hemos de tener en cuenta que la acción ha de ser la misma tanto en $\{y, t\}$ como en sus transformadas de escala $\{w, z\}$. Por tanto

$$\int L(w, w_z, z) dz = \int \hat{L}(y, y_t, t) dt \implies \hat{L}(y, y_t, t) = \lambda(t) L(w, w_z, z). \quad (3.14)$$

Empleando (3.1) y (3.2) para revertir el cambio de escala, el Lagrangiano resultante es

$$\hat{L}(y, y_t, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha^2}{\lambda} (y_t + y[\ln \alpha]_t)^2 - \alpha^4 \lambda y^4 + c_0 \lambda \alpha^2 y^2 - 2\alpha \lambda y \right\}, \quad (3.15)$$

de forma que el momento canónico $P^{[y]}$, conjugado de la variable y es

$$P^{[y]} = \frac{\partial \hat{L}(y, y_t, t)}{\partial y_t} = \frac{\alpha^2}{\lambda} (y_t + y [\ln \alpha]_t). \quad (3.16)$$

La correspondiente transformada de Legendre nos proporciona el Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \hat{H}(y, P^{[y]}, t) &= y_t P^{[y]} - \hat{L}(y, y_t, t) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{\alpha^2} (P^{[y]})^2 - 2P^{[y]} [\ln \alpha]_t y + \alpha^4 \lambda y^4 - c_0 \lambda \alpha^2 y^2 + 2\alpha \lambda y \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Como se puede observar $\hat{H}(y, P^{[y]}, t)$ contiene a $\alpha(t)$ y $\lambda(t)$, por tanto $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \neq 0$. En consecuencia \hat{H} no es una constante del movimiento. No obstante, la constante del movimiento (3.13) puede expresarse en el espacio de fases $\{y, P^{[y]}\}$. Para ello, hemos de reescribir la transformación de escala como una transformación canónica de la siguiente forma,

$$w(z) = \alpha(t)y(t) \implies w_z = \frac{\alpha}{\lambda} \left(y_t + \frac{\alpha_t}{\alpha} y \right), \quad (3.18a)$$

$$P^{[z]} = \frac{P^{[y]}}{\alpha(t)}, \quad (3.18b)$$

de tal manera que la constante del movimiento obtenida en (3.13) se puede escribir como

$$E = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{P^{[y]}}{\alpha} \right)^2 + \alpha^4 y^4 - \alpha^2 y^2 c_0 + 2y\alpha \right\}. \quad (3.19)$$

Es fácil comprobar que aunque E depende explícitamente de t a través de la dependencia en t de α y λ , es una constante del movimiento ya que satisface la expresión canónica

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + [E, H(y, y_t, t)] = 0. \quad (3.20)$$

Por otra parte, utilizando (3.16) en (3.19) se tiene

$$E^{[y]} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\lambda} \right)^2 \left(y_t + y \frac{\alpha_t}{\alpha} \right)^2 + \alpha^4 y^4 - \alpha^2 y^2 c_0 + 2y\alpha \right\}, \quad (3.21)$$

que es una integral primera de la ecuación (2.9) si y solo si se satisfacen las condiciones de integrabilidad (3.7) y (3.8).

Capítulo 4

Análisis de soluciones

4.1. Soluciones analíticas

4.1.1. Solución del péndulo forzado y amortiguado

El ejemplo más sencillo de un sistema oscilatorio no lineal [21, 20], es el de las oscilaciones libres de un péndulo, cuya ecuación diferencial en ausencia de rozamiento y oscilando libremente es

$$ml^2\theta_{tt} + mgl \sin \theta = 0. \quad (4.1)$$

En el ejemplo que vamos a considerar, al ser de un oscilador tipo Duffing [8], no podemos asumir esta situación ideal donde la fricción es nula. Además suponemos que sobre el péndulo actúa una fuerza exterior dependiente del tiempo. Por tanto añadiremos a la ecuación (4.1) un término de disipación de energía debida a las fricciones que frenan el movimiento y una fuerza de excitación:

$$ml^2\theta_{tt} + mgl \sin \theta + \gamma(t)\theta_t = F(t), \quad (4.2)$$

conocida como la ecuación de movimiento del **péndulo amortiguado y forzado** (de longitud l y masa m) donde $\gamma(t)$ será el coeficiente de amortiguamiento viscoso, y $F(t)$ la fuerza externa dependiente del tiempo.

Como se puede observar es una ecuación no lineal debido a la presencia de la función trigonométrica $\sin(\theta)$. En caso de pequeñas oscilaciones podemos utilizar el desarrollo en serie de $\sin(\theta)$, teniéndose

$$ml^2\theta_{tt} + mgl \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots \right) + \gamma(t)\theta_t = F(t), \quad (4.3)$$

de la cuál aproximando a los dos primeros términos de la serie obtenemos

$$\theta_{tt} + \frac{g}{l}\theta - \frac{g}{6l}\theta^3 + \frac{\gamma(t)}{ml^2}\theta_t - \frac{F(t)}{ml^2} = 0. \quad (4.4)$$

Comparando con la forma genérica de la ecuación cúbica no lineal (2.9) mostrada en el capítulo 2 del trabajo, podemos obtener los coeficientes $F_j(t)$ y por consiguiente, las funciones $\lambda(t)$ y $\alpha(t)$ que habíamos definido explícitamente en (3.7) en función de estos. De modo que

$$F_1 = \frac{\gamma(t)}{ml^2}, \quad F_2 = i\sqrt{\frac{g}{12l}}, \quad F_3 = \frac{g}{l}, \quad F_4 = -\frac{F(t)}{ml^2}, \quad (4.5)$$

siendo $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria y

$$\alpha(t) = \left(\frac{mgl}{12F(t)}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \lambda(t) = \left(\frac{g}{12l}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{F(t)}{ml^2}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.6)$$

Por otra parte, como vimos en el capítulo 3, la integrabilidad de la ecuación original (2.9) queda determinada por medio de una transformación de escala a través de la cuál podíamos llegar a su respectiva forma canónica (3.5) si se cumplían determinadas condiciones, (3.8a) y (3.8b). Dando por supuestas estas condiciones, pudimos comprobar fácilmente que la ecuación original (2.9) podía reescribirse como

$$y_{tt} + \left(2\frac{\alpha_t}{\alpha} - \frac{\lambda_t}{\lambda}\right)y_t + 2\alpha^2\lambda^2y^3 + \left(\frac{\alpha_{tt}}{\alpha} - \frac{\alpha_t}{\alpha}\frac{\lambda_t}{\lambda} - c_0\lambda^2\right)y + \frac{\lambda^2}{\alpha} = 0. \quad (4.7)$$

Resulta sencillo comparar nuestra ecuación original (2.9) y la de su forma reescrita (4.7), con la del péndulo amortiguado y forzado (4.4), puesto que el estudio expuesto en los capítulos anteriores se basa en las ODEs cúbicas no lineales, a las cuales (4.4) pertenece evidentemente, y por tanto puede evaluarse con el mismo tratamiento. Comparando consiguientemente los términos de estas ecuaciones podemos obtener las siguientes relaciones:

$$F_1 = \left(2\frac{\alpha_t}{\alpha} - \frac{\lambda_t}{\lambda}\right) = \frac{\gamma(t)}{ml^2} \implies \frac{F_t}{F} = \frac{\gamma(t)}{ml^2},$$

$$F_3 = \left(\frac{\alpha_{tt}}{\alpha} - \frac{\alpha_t}{\alpha}\frac{\lambda_t}{\lambda} - c_0\lambda^2\right) = \frac{g}{l} \implies -\frac{1}{3}\frac{F_{tt}}{F} + \frac{1}{9}\frac{F_t^2}{F^2} + c_0\left(\frac{g}{12l}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{F(t)}{ml^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{g}{l}. \quad (4.8)$$

A partir de estas relaciones y de (4.6) obtenemos que

$$\gamma(t) = -ml^2\frac{F_t}{F}, \quad (4.9a)$$

$$(\alpha^2)_{tt} + \frac{c_0g}{6l} - \frac{2g(\alpha)^2}{l} = 0, \quad (4.9b)$$

de las cuáles, esta última tiene como solución

$$\alpha(t) = \sqrt{\frac{c_0}{6}} \cosh \left[\sqrt{\frac{g}{2l}}(t + t_0) \right]. \quad (4.10)$$

Para poder integrar nuestro sistema necesitaremos conocer las expresiones de la

fuerza externa y del coeficiente de amortiguamiento. A fin de obtener $F(t)$ igualamos (4.10) con la expresión de $\alpha(t)$ dada en (4.6), de manera que

$$\left(\frac{mgl}{12F(t)}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{c_0}{6}} \cosh \left[\sqrt{\frac{g}{2l}}(t + t_0) \right] \Rightarrow F(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{mgl}{\sqrt{c_0^3}} \left(\cosh \left[\sqrt{\frac{g}{2l}}(t + t_0) \right] \right)^{-3}. \quad (4.11)$$

Para obtener el coeficiente de amortiguamiento $\gamma(t)$ sólo hará falta sustituir en (4.9a) tanto $F(t)$ (4.11) como $F_t(t)$ cuya expresión es

$$F_t(t) = -3\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{mgl}{\sqrt{c_0^3}} \left(\frac{\tanh \left[\sqrt{\frac{g}{2l}}(t + t_0) \right]}{\cosh \left[\sqrt{\frac{g}{2l}}(t + t_0) \right]^3} \right) \sqrt{\frac{g}{2l}}, \quad (4.12)$$

obteniéndose

$$\gamma(t) = 3ml^2 \sqrt{\frac{g}{2l}} \tanh \left[\sqrt{\frac{g}{2l}}(t + t_0) \right]. \quad (4.13)$$

Ahora estamos en condiciones de reescribir las transformaciones de escala (3.1), pues tenemos la expresión explícita de $\alpha(t)$ (4.10), y la correspondiente a $\lambda(t)$ se puede obtener sustituyendo (4.11) en (4.6) de modo que

$$\lambda(t) = i\sqrt{\frac{g}{2lc_0}} \frac{1}{\cosh \left[\sqrt{\frac{g}{2l}}(t + t_0) \right]}. \quad (4.14)$$

Por tanto las transformaciones de escala pueden reescribirse como:

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{6}{c_0}} \frac{1}{\cosh \sqrt{\frac{g}{2l}}(t + t_0)} w(z), \quad (4.15)$$

$$dt = -i\sqrt{\frac{2lc_0}{g}} \cosh \left[\sqrt{\frac{g}{2l}}(t + t_0) \right] dz. \quad (4.16)$$

La integración de (4.16) resulta en

$$z = i\frac{2}{\sqrt{c_0}} \arctan \left\{ \tanh \left[\frac{\sqrt{g}(t + t_0)}{\sqrt{8l}} \right] \right\}. \quad (4.17)$$

Dado que la tangente hiperbólica es una función que toma valores entre -1 y 1 ($-1 < \tanh x < 1$), y puesto que la imagen de la función arcotangente ocupa valores entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ ($-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$), podemos concluir que el rango de valores que toma la variable z es

$$-i\frac{\pi}{\sqrt{c_0}} < z < i\frac{\pi}{\sqrt{c_0}}. \quad (4.18)$$

Dado que z toma valores puramente imaginarios, conviene expresar la ecuación canónica, y concretamente la de su invariante E , en términos de una nueva variable \bar{z} definida como $z = i\bar{z} \Rightarrow \bar{z} = -iz$:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} (\bar{w}_z^2 - \bar{w}^4 + c_0\bar{w}^2 - 2\bar{w}) = -E. \quad (4.19)$$

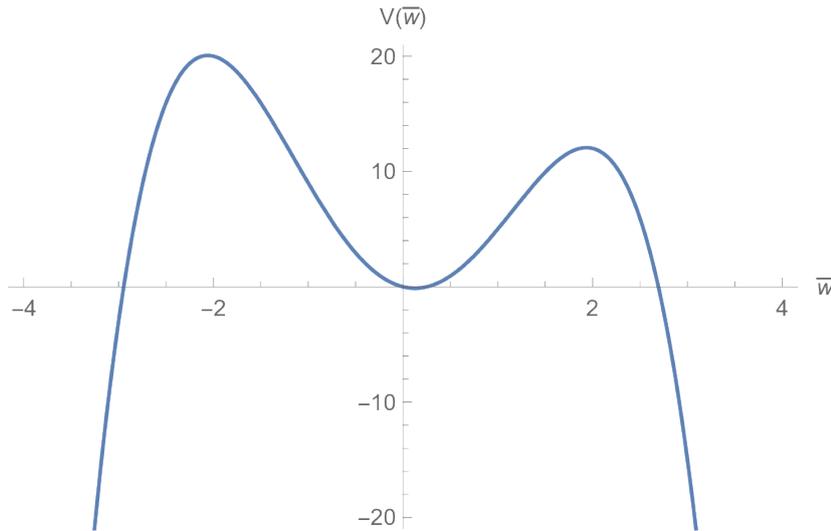


FIGURA 4.1: Pozo de potencial $V(\bar{w})$ asociado a la ecuación (4.20) con $c_0 = 8$

Hemos utilizado la notación \bar{w} para expresar la dependencia respecto a \bar{z} de forma que $\bar{w}(\bar{z}) = w(z = i\bar{z})$. En los siguientes apartados presentaremos las soluciones en base a esta ecuación en términos de las funciones de Weierstrass. Es fácil ver que la ecuación (4.19) puede interpretarse como una partícula de energía \bar{E} cuya posición es $\bar{w}(\bar{z})$ y que se mueve bajo la acción del siguiente potencial

$$\bar{V}(\bar{w}) = \frac{1}{2} (-\bar{w}^4 + c_0 \bar{w}^2 - 2\bar{w}), \quad (4.20)$$

correspondiente a un doble pozo invertido como puede verse en la Figura 4.1.

4.1.2. Introducción a las funciones de Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass fue un matemático alemán que hizo grandes avances en varios campos del análisis matemático, conocido como el padre del análisis moderno, dio definiciones rigurosas que se siguen utilizando hoy en día y realizó la demostración completa de numerosos teoremas, algunos de los cuales llevan su nombre. Parte de su vida la dedicó en sus estudios de las funciones elípticas. Actualmente se utiliza la notación creada por Karl Weierstrass basada en la función elíptica \wp [30]. Esta notación es cómoda y más sencilla que la de Jacobi y permite, además, expresar cualquier función elíptica a partir de \wp .

Una de las definiciones que se atribuye a la función de Weierstrass es la de una función doblemente periódica en términos de la variable compleja z y un par de periodos fundamentales τ_1 y τ_2 . Se puede expresar como

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in \Omega} \left[\frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right], \quad (4.21)$$

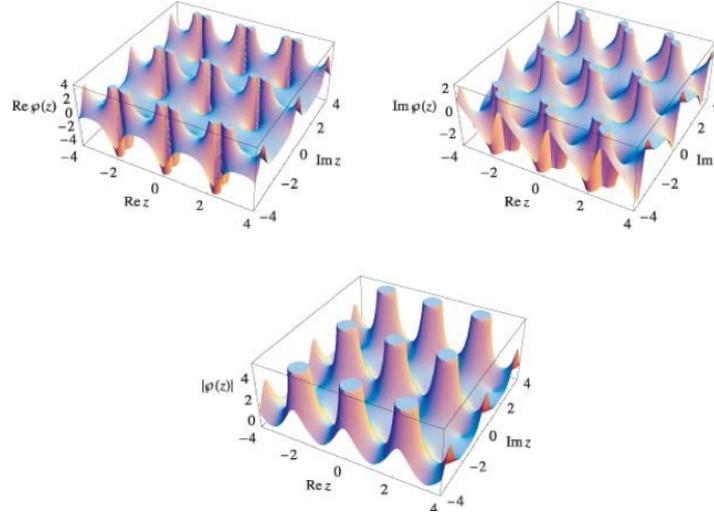


FIGURA 4.2: Función de Weierstrass $\wp(z; \tau_1, \tau_2)$ para $\tau_1 = 5, \tau_2 = 2$

donde al ser una función elíptica el conjunto de sus periodos fundamentales Ω depende de τ_1 y τ_2 ($\Omega = \{\tau \in \mathbb{C} : m\tau_1 + n\tau_2\}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$), por tanto podremos denotar $\wp(z)$ alternativamente como $\wp(z; \Omega) = \wp(z; \tau_1, \tau_2)$. Con esto expresamos $\wp(z; \tau_1, \tau_2)$ del siguiente modo:

$$\wp(z; \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left[\frac{1}{(z - m\tau_1 - n\tau_2)^2} - \frac{1}{(m\tau_1 + n\tau_2)^2} \right], \quad (4.22)$$

donde el sumatorio se ejecuta sobre todos los valores naturales de m y n , excepto cuando ambos se anulan simultáneamente. Se muestra la forma de la función de Weierstrass para unos determinados valores de τ_1 y τ_2 en la Figura 4.2.

4.1.3. Soluciones en términos de las funciones de Weierstrass

Dada la pequeña introducción a las funciones elípticas de Weierstrass [30], en este apartado intentaremos resolver el sistema obteniendo las soluciones de la ecuación canónica (2.5) en términos de estas. Para ello rescataremos la ecuación de movimiento (3.13) del capítulo anterior, sólo que ahora la reescribiremos de tal manera que a un lado de la igualdad aparezca la parte diferencial, es decir w_z , y en el otro lado los demás términos en forma polinómica, a los que llamaremos $P(w)$. Así

$$w_z^2 = -w^4 + c_0 w^2 - 2w + 2E \equiv P(w). \quad (4.23)$$

Ahora, ayudándonos de los resultados descritos en los libros [5] y [31] podremos expresar la solución buscada en términos de la función de Weierstrass de la siguiente manera:

$$w(z) = q_i + \frac{6 - 6c_0 q_i + 12q_i^3}{c_0 - 6q_i^2 - 12\wp(z + z_0; \tau_1, \tau_2)}, \quad (4.24)$$

donde q_i con $i = 1, 2, 3, 4$ son las raíces del polinomio $P(w)$ que de acuerdo a la referencia [5] deberán satisfacer

$$\begin{aligned}(q_1 + q_2)(q_2 + q_3)(q_1 + q_3) &= 2, \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 &= 0, \\ c_0 &= q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \\ E &= -\frac{1}{2}q_1q_2q_3q_4,\end{aligned}\tag{4.25}$$

y donde τ_1 y τ_2 que dependen de las constantes c_0 y E son

$$\tau_1 = \frac{c_0^2}{12} - 2E, \quad \tau_2 = -\frac{c_0^3}{216} - \frac{c_0E}{3} + \frac{1}{4}.\tag{4.26}$$

Utilizando las transformaciones de escala

$$dz = \int \lambda(t)dt,\tag{4.27a}$$

$$y(t) = \frac{w(z)}{\alpha(t)},\tag{4.27b}$$

podemos expresar las soluciones de (4.7) con la variable original y de forma que:

$$y(t) = \frac{1}{\alpha(t)} \left(q_i + \frac{6 - 6c_0q_i + 12q_i^3}{c_0 - 6q_i^2 - 12\wp(z(t) + z_0; \tau_1, \tau_2)} \right),\tag{4.28}$$

obteniendo así las soluciones físicas de (4.4) que tendrán diferente carácter según el valor que tengan las constantes mencionadas anteriormente.

4.1.4. Representación de soluciones analíticas

De las secciones anteriores podemos concluir que la solución exacta para el péndulo forzado amortiguado en condiciones de integrabilidad es

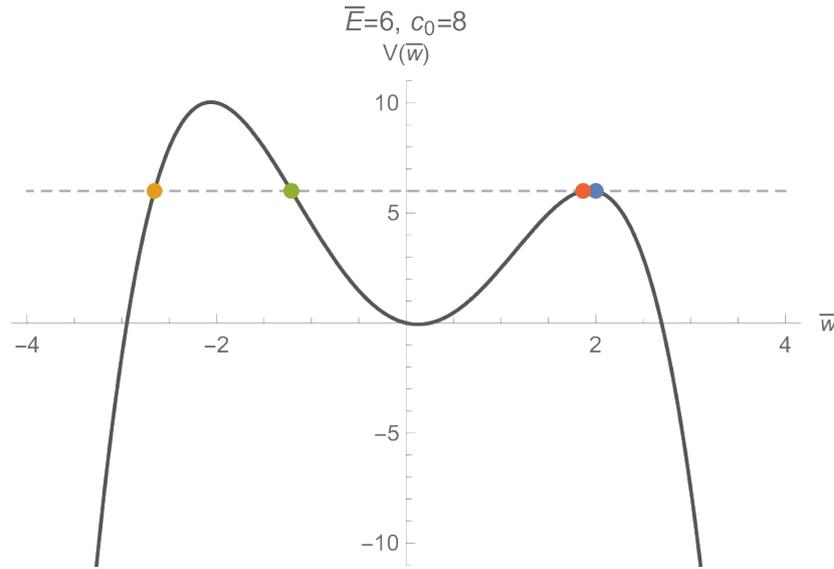
$$\theta(t) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{c_0} \cosh \sqrt{\frac{g}{2l}}(t + t_0)} \left(q_i + \frac{6 - 6c_0q_i + 12q_i^3}{c_0 - 6q_i^2 - 12\wp \left(i\frac{2}{\sqrt{c_0}} \arctan \left\{ \tanh \left[\frac{\sqrt{g}(t+t_0)}{\sqrt{8l}} \right] \right\}; \tau_1, \tau_2 \right)} \right),\tag{4.29}$$

donde q_i son las raíces del polinomio $P(\bar{w})$:

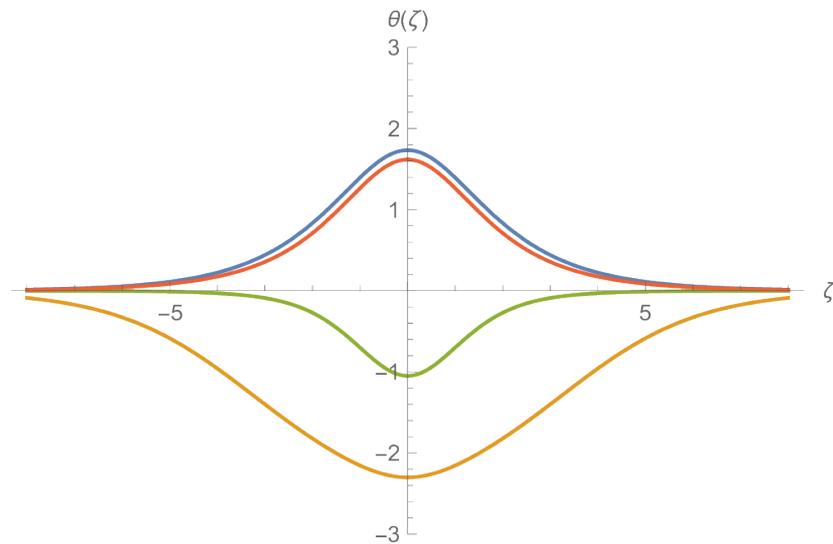
$$P(\bar{w}) = -\bar{w}^4 + c_0\bar{w}^2 - 2\bar{w} - 2\bar{E}.\tag{4.30}$$

Con el fin de facilitar los cálculos numéricos para la representación de las soluciones del péndulo amortiguado y forzado redefinimos la variable temporal como $\zeta = \sqrt{\frac{g}{l}}t$. De esta manera la ecuación (4.4) tiene la forma

$$\theta_{\zeta\zeta} + \Gamma(\zeta)\theta_{\zeta} - \frac{\theta^3}{6} + \theta - \chi(\zeta) = 0,\tag{4.31}$$



(a) Potencial efectivo



(b) Soluciones analíticas

FIGURA 4.3: La figura (a) representa el potencial efectivo $V(\bar{w})$ que se muestra cortado por el valor de la constante de movimiento $\bar{E} = 6$ para $c_0 = 8$. Cada corte aparece en un color diferente asociado a cada una de las soluciones expuestas en la figura (b) para el péndulo amortiguado forzado con ecuación (4.31).

donde

$$\Gamma(\zeta) = \frac{\gamma(t)}{ml^2} \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \chi(\zeta) = \frac{F(t)}{mgl}. \quad (4.32)$$

La solución correspondiente es

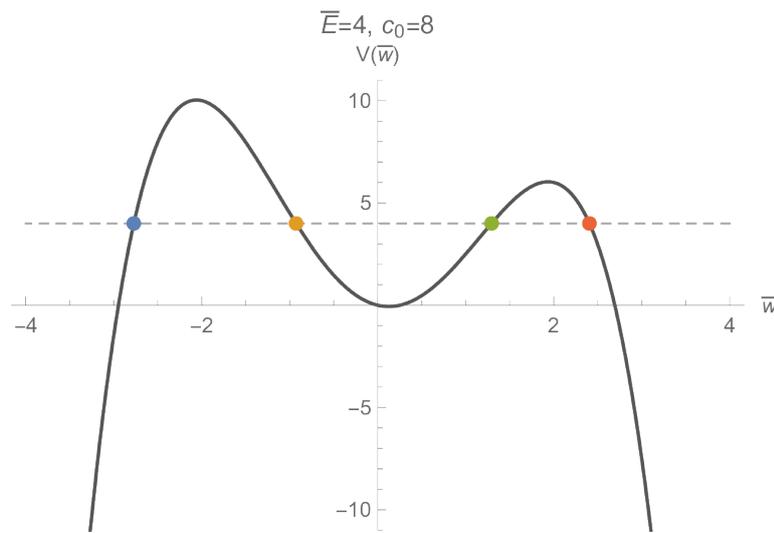
$$\theta(\zeta) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{c_0} \cosh \frac{\zeta}{\sqrt{2}}} \left(q_i + \frac{6 - 6c_0 q_i + 12q_i^3}{c_0 - 6q_i^2 - 12\wp\left(i\frac{2}{\sqrt{c_0}} \arctan \left\{ \tanh \left[\frac{\zeta}{2\sqrt{2}} \right] \right\}; \tau_1, \tau_2\right)} \right) \quad (4.33)$$

dato que la transformación de escala en términos de la nueva variable temporal está dada por las funciones $\beta(\zeta) = \alpha(t)$ y $\Lambda(\zeta) = \sqrt{\frac{l}{g}}\lambda(t)$. Por simplicidad hemos tomado $t_0 = 0$.

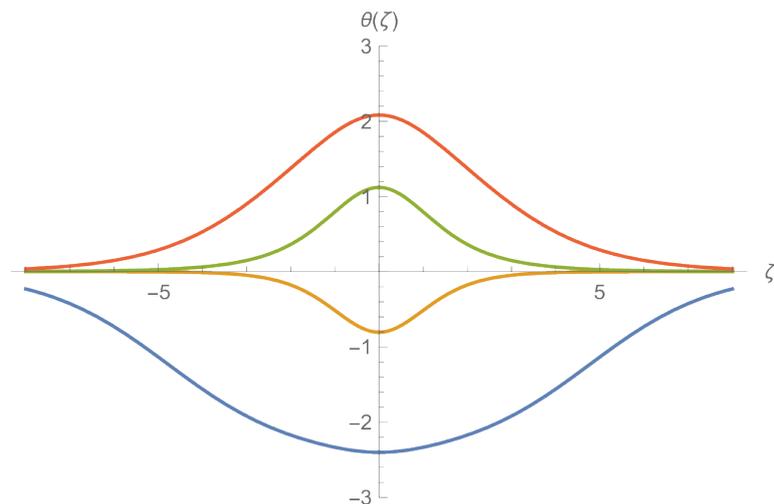
Ahora respresentaremos las soluciones analíticas numéricamente en función de la constante de movimiento, a la cuál daremos dos valores diferentes.

En la Figura 4.3 se muestran las soluciones analíticas para la constante de movimiento $\bar{E} = 6,0$. Las 4 soluciones pintadas se deben a las raíces del polinomio $P(\bar{w})$ cuyo potencial efectivo asociado aparece también representado.

El segundo ejemplo está representado en la Figura 4.4, donde esta vez el valor de la constante de movimiento es $\bar{E} = 4,0$.



(a) Potencial efectivo



(b) Soluciones analíticas

FIGURA 4.4: La figura (a) representa el potencial efectivo $V(\bar{w})$ que se muestra cortado por el valor de la constante de movimiento $\bar{E} = 4$ para $c_0 = 8$. Cada corte aparece en un color diferente asociado a cada una de las soluciones expuestas en la figura (b) para el péndulo amortiguado forzado con ecuación (4.31).

4.2. Soluciones numéricas

En esta sección mostramos la representación de las soluciones numéricas del péndulo amortiguado forzado con ecuación (4.31) realizadas a través del programa Mathematica para dos condiciones iniciales diferentes.

Dado que el objetivo de este apartado es la comprobación de que las soluciones analíticas coinciden con las numéricas, debemos relacionar los valores de la constante de movimiento de la sección anterior con las condiciones iniciales correspondientes. Por tanto a partir de la constante de movimiento

$$E = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\beta}{\Lambda} \right)^2 \left(\theta_{\zeta} + \theta \frac{\beta_{\zeta}}{\beta} \right)^2 + \beta^4 \theta^4 - \beta^2 \theta^2 c_0 + 2\theta\beta \right\}, \quad (4.34)$$

podemos relacionar dichos valores. Imponiendo además que la velocidad inicial en todas las posibles soluciones de ambos casos sea 0, es decir, $\theta_{\zeta} = 0$ obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \bar{E} = 6 &\longrightarrow \theta = 1,73205, & \theta = -2,29968, & \theta = -1,04855, & \theta = 1,61618, \\ \bar{E} = 4 &\longrightarrow \theta = -2,4, & \theta = -0,803428, & \theta = 1,12031, & \theta = 2,08312. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Dicho esto, estamos en condiciones de mostrar la representación de las soluciones numéricas tanto para el caso asociado a $\bar{E} = 6$ en la Figura 4.5 como para el asociado a $\bar{E} = 4$ en la Figura 4.6.

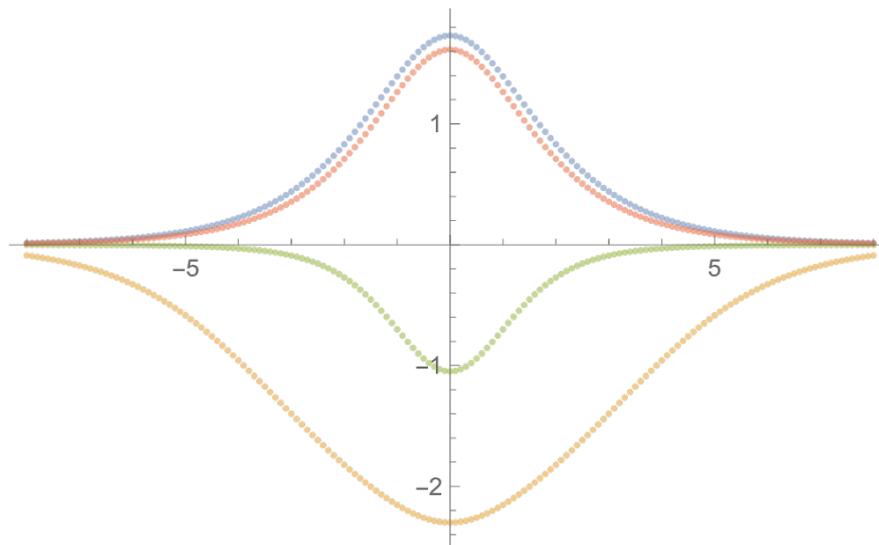


FIGURA 4.5: Soluciones numéricas del péndulo amortiguado forzado con ecuación (4.31) para $\bar{E} = 6$, $c_0 = 8$. Cada color se asocia a cada solución siguiendo el mismo criterio que en la Figura 4.3.

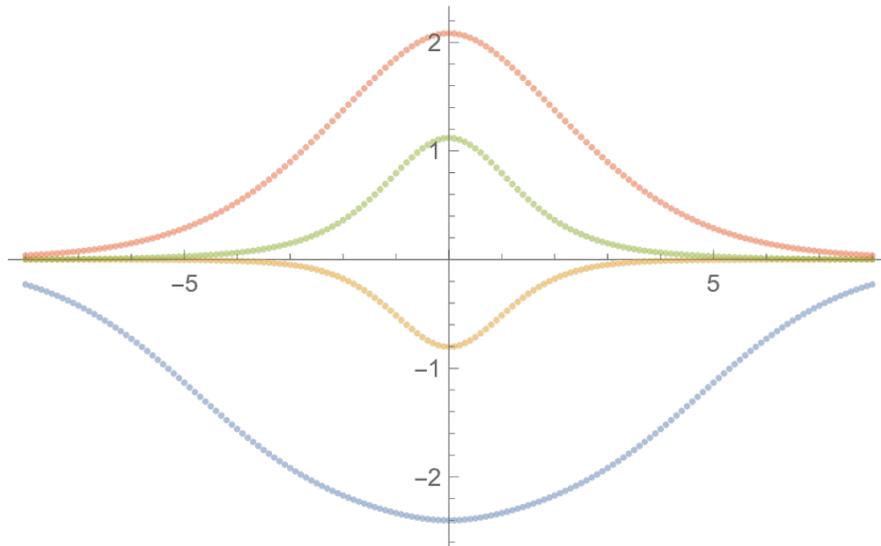


FIGURA 4.6: Soluciones numéricas del péndulo amortiguado forzado con ecuación (4.31) para $\bar{E} = 4$, $c_0 = 8$. Cada color se asocia a cada solución siguiendo el mismo criterio que en la Figura 4.4.

En las Figuras 4.7 y 4.8 se muestran conjuntamente las curvas analíticas y las soluciones numéricas. Observamos por tanto, una comparación gráfica de ambas soluciones que coinciden totalmente, reflejando que el tratamiento seguido para expresar las soluciones en términos de la función de Weierstrass es correcto.

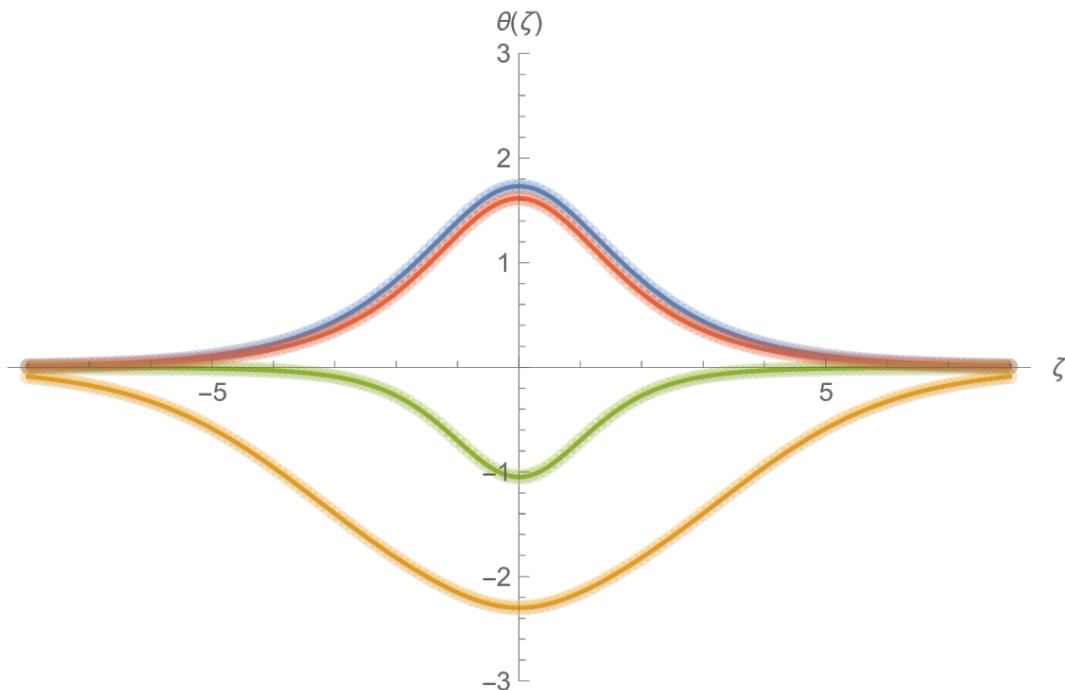


FIGURA 4.7: Superposición de soluciones numéricas y analíticas del péndulo amortiguado forzado con ecuación (4.31). Soluciones analíticas representadas con las líneas curvas y soluciones numéricas representadas con puntos diáfanos para $\bar{E}=6$

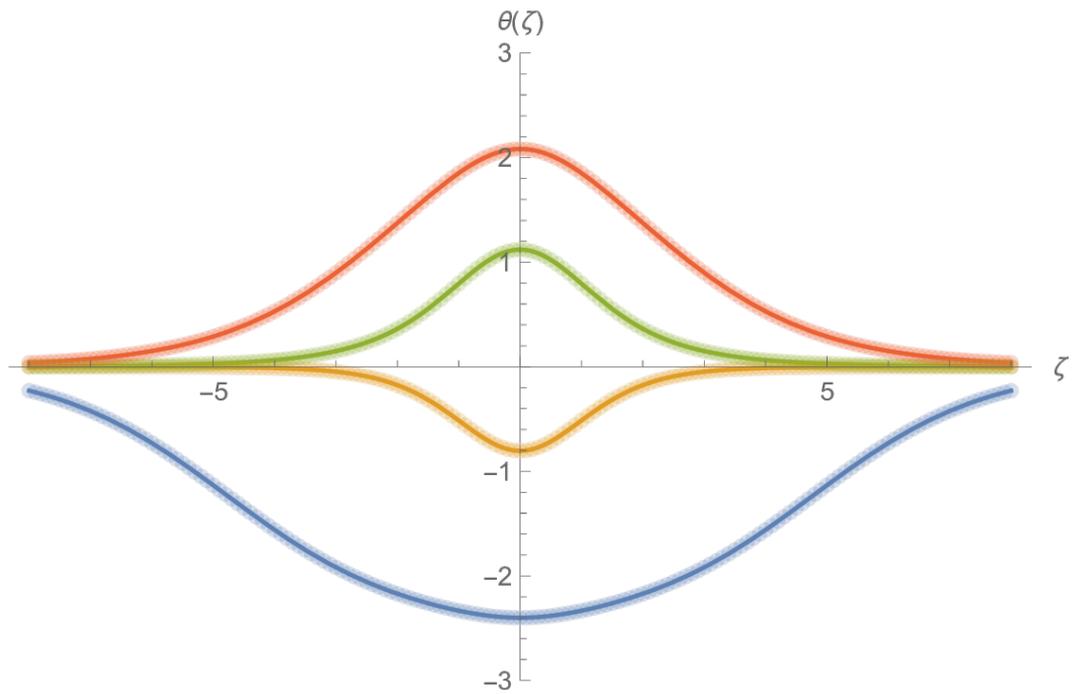


FIGURA 4.8: Superposición de soluciones numéricas y analíticas del péndulo amortiguado forzado con ecuación (4.31). Soluciones analíticas representadas con las líneas curvas y soluciones numéricas representadas con puntos diáfanos para $\bar{E}=4$

Capítulo 5

Sistemas dinámicos

Poincaré concebía un sistema dinámico, como un campo de vectores en el espacio de fases y una solución como una curva tangente en cada punto a los vectores de dicho campo. Actualmente un sistema dinámico se considera un grupo $\{T, X, A, S\}$ [16] donde T representa el conjunto sobre el que se mide el tiempo, X es un espacio métrico que representa los diferentes estados o movimientos del sistema, el espacio de fases de Poincaré, A es un subconjunto de X que contiene el conjunto de condiciones iniciales y S representa el conjunto de posibles movimientos. Otra definición mas ilustrativa es la de un sistema que describe todo el recorrido en la evolución del tiempo de todos los puntos de un espacio determinado, un proceso donde cada estado depende de los estados anteriores.

Dependerá de T que los sistemas dinámicos sean discretos, si T está en los números naturales [$x_{n+1} = f(x_n)$ a partir de un x_0 conocido], o continuos, si T está en los reales positivos que veremos mas detalladamente (sistemas de ecuaciones diferenciales).

Un ejemplo de sistema dinámico continuo es un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de primer orden:

$$\begin{aligned}
 dx^{(1)}/dt &= F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\
 dx^{(2)}/dt &= F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 dx^{(N)}/dt &= F_N(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}),
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

siendo x un vector de N dimensiones. Podemos asociar a este ejemplo la ecuación (4.4) del péndulo amortiguado y forzado con $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ de manera que puesta en forma autónoma de primer orden

$$\begin{aligned}
 dx^{(1)}/dt &= x^{(2)}, \\
 dx^{(2)}/dt &= -\frac{\gamma}{ml^2}x^{(2)} - \frac{g}{6l}(x^{(1)})^3 + \frac{g}{l}x^{(1)} + \frac{F_0 \cos x^{(3)}}{ml^2}, \\
 dx^{(3)}/dt &= \omega,
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

donde

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= \theta, \\x^{(2)} &= \theta_t, \\x^{(3)} &= \omega t.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Se trata de un sistema dinámico puesto que para cualquier estado inicial del sistema podemos en principio resolver las ecuaciones para obtener el estado futuro del sistema $\theta(t)$ para $t > 0$.

La dimensionalidad del sistema está relacionada con la complejidad de la posible estructura de órbitas, siendo esta mayor para sistemas de mayor dimensionalidad. Es conocido [22] que para el caso de N ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de primer orden, el caos puede surgir a partir de $N \geq 3$. En este ejemplo $N = 3$, por tanto no se descarta el caos.

5.1. Atractores

Previamente a definir que es un atractor introduciremos los conceptos de sistema conservador y disipativo.

Dentro de los sistemas hamiltonianos existen elecciones de las variables del espacio de fases tales que los volúmenes del espacio de fase se conservan bajo la evolución del tiempo.

Supongamos que elegimos una superficie inicial cerrada $(N - 1)$ -dimensional en el espacio de fases N -dimensional, a la que llamaremos S_0 . A continuación evolucionamos cada punto de S_0 hacia adelante en el tiempo usándolos como condiciones iniciales en la ecuación (5.1), formando así una superficie cerrada S_t en algún tiempo posterior. En este contexto diremos que el sistema es conservador del volumen si los volúmenes N -dimensionales $V(0)$ de la región encerrada por S_0 y $V(t)$ de la región encerrada por S_t son iguales. Por otro lado, si el flujo no preserva los volúmenes entonces diremos que el sistema es no conservador.

Acudiendo al teorema de la divergencia, tenemos

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{S_t} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x) d^N x,\tag{5.4}$$

donde la integral se hace sobre el volumen interior de la superficie S_t , siendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \equiv \sum_{i=1}^N \partial F_i(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) / \partial x^{(i)}$. Un sistema será disipativo si $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$ en alguna región del espacio de fases. Aplicado a nuestro ejemplo del péndulo amortiguado forzado con ecuación de la forma (5.2), $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -\frac{\gamma}{ml^2} = -v$, la cual es independiente de la posición x en el espacio de fases. Integrando (5.4) obtenemos $dV(t)/dt = -vV(t)$ que se corresponde con $V = V_0 \exp(-vt)$. De este modo se puede apreciar como V decrecerá exponencialmente a lo largo del tiempo.

Un concepto importante en dinámica es que los sistemas disipativos se caracterizan típicamente por la presencia de atractores en el espacio de fase, siendo los sistemas conservadores los que carecen de su presencia.

El concepto de atractor puede interpretarse como un conjunto que “atrae” al flujo del sistema. Más concretamente, un atractor es un conjunto de puntos del espacio de fases hacia los que tiende a evolucionar un sistema, para una amplia variedad de condiciones iniciales. Si los valores del sistema están lo suficientemente cerca a los valores del atractor, permanecen cercanos incluso si se alteran ligeramente.

De acuerdo a su forma geométrica, los atractores pueden estar clasificados como:

- **Atractor de punto fijo:** Es el más simple. El estado final hacia el que evoluciona un sistema dinámico con un atractor de este tipo corresponde a un punto fijo de atracción de evolución en el espacio de fases. Por ejemplo un péndulo, el cual tiende al punto en el que el ángulo es nulo respecto a la vertical, debido al rozamiento con el aire.
- **Atractor de ciclo límite:** Esta clase de atractor es una órbita periódica de un sistema dinámico continuo que está aislado. El estado final tiende a mantenerse en un periodo igual constantemente. Un ejemplo sería un péndulo forzado para contrarrestar la fuerza de rozamiento que oscile indefinidamente.
- **Atractor extraño:** Este tipo tiene una estructura geométrica mucho más intrincada en el espacio de fases que los anteriores. Reconoceremos a un atractor como extraño si tiene una estructura fractal. La dinámica caótica de un sistema disipativo [26], de la cuál hablaremos mas detalladamente en los siguientes apartados, suele tener asociada un atractor extraño , aunque su presencia no obliga a que en su evolución se genere caos. Es decir, el caos describe la dinámica del atractor, mientras que el término “extraño” se refiere a la geometría del atractor. Es posible que un atractor caótico no sea extraño y viceversa.

5.1.1. Atractor Duffing

El oscilador Duffing está descrito por la ecuación

$$y_{tt} + ay_t + by^3 + cy + d \cos(\omega t) = 0, \quad (5.5)$$

que presenta únicamente un término no lineal, y^3 , como ya presentamos en la sección 2.6. Íntimamente relacionado con el oscilador de Duffing está el conocido atractor de Duffing, visible en una superficie de sección de Poincaré que hemos representado numéricamente y representamos en la Figura 5.1. La sección de Poincaré es un método sencillo para detectar la existencia de caos en un sistema dinámico [22].

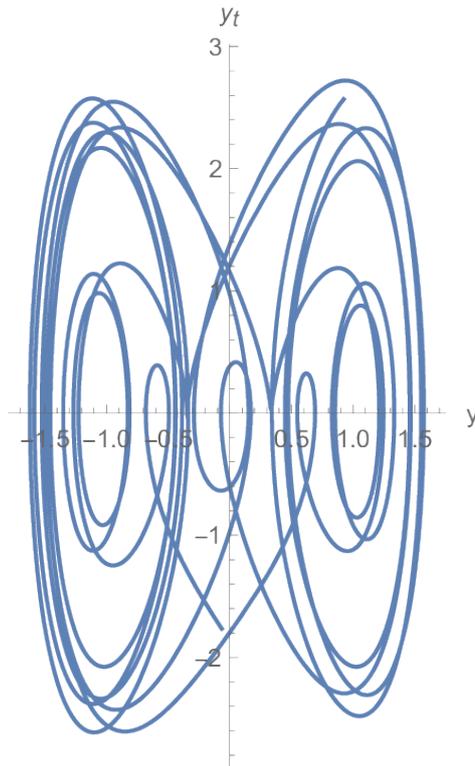


FIGURA 5.1: Superficie de sección del atractor Duffing con parámetros $a = 0,02, b = 5, c = 1, d = -8, \omega = 0,5$ en la ecuación (5.5).

El atractor de Duffing es un ejemplo bastante representativo de un atractor extraño. El sistema dinámico (5.1) asociado a la ecuación (5.5) es disipativo y un conjunto de condiciones iniciales evolucionado en el tiempo convergerá asintóticamente a los valores numéricos que definen la geometría del atractor. La figura Figura 5.2 es una representación numérica de este atractor realizada en el programa Mathematica.

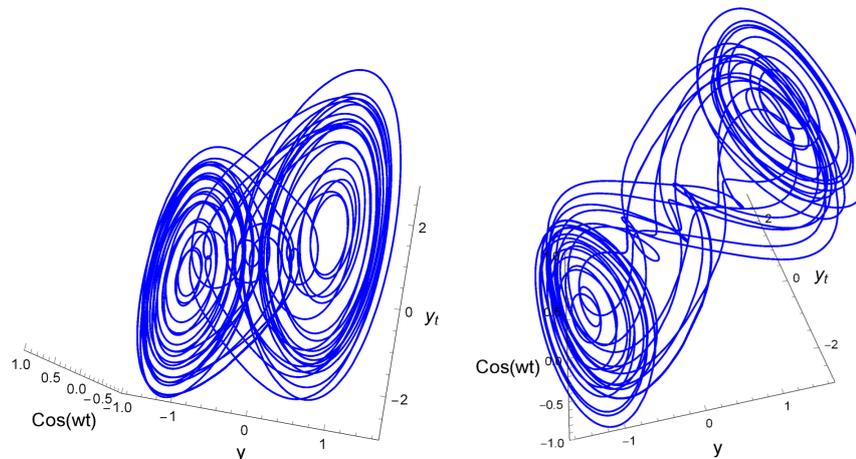


FIGURA 5.2: Atractor Duffing correspondiente a los parámetros $a = 0,02, b = 5, c = 1, d = -8, \omega = 0,5$ en la ecuación (5.5).

5.2. Caos

Acorde a Jean Jeacques [25], en los sistemas lineales estables pequeñas diferencias en las condiciones iniciales de entrada causarán diferencias pequeñas de salida. Sin embargo, en sistemas no lineales se puede presentar un fenómeno llamado caos (sistemas caóticos). El caos es un comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinístico que presenta una sensibilidad extrema a condiciones iniciales [19]. Suele llevar consigo, aunque no sea obligatoria su presencia, un atractor extraño, el cual hace que la trayectoria del estado del sistema no se estabilice en puntos fijos o ciclos límite ni diverja a infinito, manteniéndose de forma aperiódica conforme transcurre el tiempo. Un ejemplo de sistema caótico podría ser el péndulo amortiguado forzado, por el que las variables del espacio de fases $x^{(3)}$ y $x^{(1)}$ definidas en (5.3) están necesariamente acotadas y oscilan entre los valores de 0 y 2π , ya que $x^{(3)}$ la podemos considerar un ángulo puesto que sólo aparece en el argumento de un coseno, y $x^{(1)} = \theta$.

En un sistema caótico se hace prácticamente imposible la predicción a largo plazo del estado del sistema dado que la incertidumbre omnipresente en la determinación de su estado inicial crece exponencialmente en el tiempo dada la sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales. Por tanto, podemos entender que sistemas cuyas diferencias no podemos resolver inicialmente se comportarán pronto de forma muy diferente, o visto de otro modo, tomando dos puntos iniciales arbitrariamente cercanos en el atractor se empezarán a alejar exponencialmente.

5.2.1. Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov es una manera de cuantificar el caos [18]. Más concretamente los exponentes de Lyapunov miden las tasas de convergencia y divergencia de las trayectorias cercanas. En cada punto de una órbita caótica, hay otros puntos arbitrariamente cercanos que se alejarán exponencialmente de ella. Es este comportamiento el que se caracteriza con los exponentes de Lyapunov. El caos y la divergencia están caracterizados por un exponente de Lyapunov mayor que cero, sin embargo un exponente de Lyapunov λ negativo indicará convergencia.

Desde un punto de vista físico, el exponente de Lyapunov es una medida de la velocidad de convergencia o divergencia de trayectorias cercanas: Si dos trayectorias cualesquiera están originalmente distanciadas $|\Delta r_0|$, entonces después de un tiempo t estarán separadas en promedio $\Delta r(r_0, t) = e^{\lambda t} |\Delta r_0|$. Por lo general el término de exponente de Lyapunov se refiere al más grande de los exponentes de Lyapunov ya que el máximo exponente es más sencillo de calcular en una serie de tiempo numérica. Sin embargo, para un espacio N -dimensional existen N exponentes de Lyapunov, los cuales forman el espectro de Lyapunov que corresponde a las velocidades de expansión o contracción de los principales ejes del espacio de fases.

Para obtener el valor numérico del exponente de Lyapunov del atractor Duffing, hemos partido concretando dos puntos iniciales sumamente cercanos en el espacio de fases que se situen ya en el atractor. Realizamos la evolución temporal de forma que podamos calcular la norma del vector que une las coordenadas de ambos en

cualquiera de las iteraciones temporales. De este modo, la fórmula implementada para determinar λ es [18]

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\Delta r(idt)}{\Delta r((i-1)dt)}, \quad (5.6)$$

donde dt es el paso temporal y $\Delta r(t)$ la norma del vector separación. El valor obtenido numéricamente para el exponente de Lyapunov de un oscilador Duffing con $a = 0,02, b = 5, c = 1, d = -8, \omega = 0,5$ ha sido

$$\lambda = 0,0579. \quad (5.7)$$

El comportamiento de la distancia entre los puntos en función del tiempo se muestra en la Figura 5.3. Es una representación logarítmica donde la señal azul se asocia a la norma $|\Delta r(t)|$ en función del tiempo, y la recta naranja corresponde a la ecuación

$$\Delta r(t) = \Delta r(t_0)e^{\lambda t} \quad (5.8)$$

utilizando el exponente de Lyapunov calculado.

Podemos observar en ella como la divergencia exponencial se detiene cuando la norma del vector separación es comparable al tamaño del atractor, por lo que las trayectorias no pueden alejarse más. Se tiene un valor de saturación un poco por encima de $|\Delta r| = 1$. Este valor es compatible con las representaciones del atractor mostradas anteriormente.

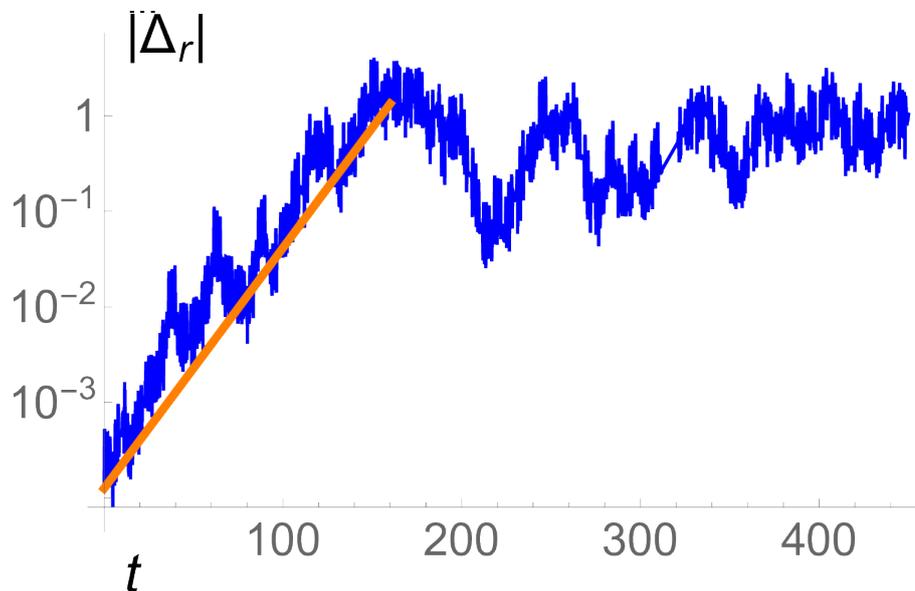


FIGURA 5.3: Evolución temporal de la distribución $\Delta r(t)$ tomando los puntos iniciales con coordenadas $\{y_1 = 1,3714, y_{t1} = 0,5745\}$ y $\{y_2 = 1,3715, y_{t2} = 0,5746\}$ en $t = 502,5$, para un oscilador Duffing de ecuación (5.5) con parámetros $a = 0,02, b = 5, c = 1, d = -8, \omega = 0,5$.

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la dinámica no lineal a través de la ecuación del oscilador Duffing. Con este oscilador presentamos una ODE con no linealidad cúbica y, por tanto, potencialmente no integrable.

Los medios necesarios para el estudio de su integrabilidad así como su resolución se han descrito en el capítulo 2. El concepto de integrabilidad que hemos empleado es el asociado a la existencia de la propiedad de Painlevé, que hemos descrito extensamente, así como el algoritmo de ARS basado en la misma, implementándolo en las ecuaciones del oscilador Duffing. Hemos obtenido que el sistema propuesto será únicamente integrable cuando sus correspondientes coeficientes variables cumplan las condiciones expuestas en este mismo capítulo.

En el capítulo 3 hemos analizado la integrabilidad del oscilador Duffing a través de una reducción de su ecuación a su correspondiente forma canónica, la cual sí cumple las restricciones para ser integrable. Esta reducción se ha llevado a cabo por medio de una transformación de escala de sus respectivas variables dependiente e independiente. Su implementación muestra exactamente las mismas condiciones que en la sección anterior han de cumplir los coeficientes variables para que el sistema se comporte como integrable, y por tanto tenga solución analítica. Gracias a esto, resulta obvia la equivalencia en el estudio de la integrabilidad mediante los dos métodos. Al finalizar el capítulo se han encontrado los lagrangianos y hamiltonianos correspondientes a la ecuación de tipo Duffing, que conducen a una constante de movimiento.

En el capítulo 4, hemos abordado las soluciones de la ecuación del oscilador Duffing. Esta sección la hemos dividido en dos partes. La primera dedicada a las soluciones analíticas, las cuales obtenemos gracias a la relación establecida con la constante de movimiento en el capítulo anterior. Estas han sido expresadas en términos de la función \wp de Weierstrass. Hemos mostrado un ejemplo, junto con algunas soluciones explícitas, donde este tipo de ecuaciones aparecen en un contexto físico, como en el caso del péndulo amortiguado y forzado. En la segunda parte del capítulo, calculamos las soluciones numéricas de este mismo ejemplo, realizadas a través del programa "Mathematica". Finalmente damos una comparación gráfica de los dos tipos de soluciones donde podemos observar la igualdad entre ambas.

Por último explicamos de forma introductoria los sistemas dinámicos conservadores y disipativos, enlazando estos últimos con la presencia de atractores, que clasificamos según su geometría en el espacio fases, prestando especial atención a los atractores extraños que suelen mostrar dinámicas caóticas. Hablamos sobre el conocido atractor Duffing, que pone de manifiesto la dinámica caótica y que está

asociado al oscilador tipo Duffing, realizando su representación numérica en el espacio de fases. Por último y para finalizar el trabajo, hemos expuesto el concepto del caos manifestando su propiedad definitoria: la sensibilidad exponencial en condiciones iniciales. Utilizando como método el cálculo del exponente de Lyapunov, damos una visión cuantitativa del caos, más específicamente calculamos el valor numérico de este para el caso del atractor Duffing.

Conclusions

In this work we have studied the nonlinear dynamics through the Duffing oscillator equation. With this oscillator we present an ODE with cubic nonlinearity and, therefore, potentially non-integrable.

The necessary means for the study of the equation's integrability as well as its resolution have been described in Chapter 2. The concept of integrability that we have used is associated with the existence of the Painlevé property, that we have described extensively, as well as the ARS algorithm based on it, implementing it in the equations of the Duffing oscillator. We have obtained that the proposed system will only be integrable when its corresponding variable coefficients fulfill the conditions obtained in this same chapter.

In Chapter 3 we have analyzed the integrability of the Duffing oscillator through a reduction of its equation to its corresponding canonical form, which does fulfill the restrictions to be integrable. This reduction has been carried out by means of a scaling transformation of its respective dependent and independent variables. Its implementation shows exactly the same conditions that in the previous section must be fulfilled by the variable coefficients for the system to behave as integrable, and therefore to have an analytical solution. Due to this, the equivalence in the study of integrability by means of the two methods is obvious. At the end of the chapter, the Lagrangian and Hamiltonian corresponding to the Duffing type equation, which lead to a constant of motion, have been found.

In Chapter 4, we have dealt with the solutions of the Duffing oscillator equation. We have divided this section into two parts. The first one is devoted to the analytical solutions, which we obtain thanks to the relation established with the constant of motion in the previous chapter. The solutions have been expressed in terms of the Weierstrass function \wp . We have shown an example, together with some explicit solutions, where this type of equations appear in a physical context, as in the case of the damped and forced pendulum. In the second part of the chapter, we calculate the numerical solutions of the same system, using the program Mathematica. We give a graphical comparison of the two types of solutions where we can observe the agreement between them.

Finally we explain in an introductory way the concept of conservative and dissipative dynamical systems, linking the latter with the presence of attractors, which we classify according to their geometry in phase space, paying special attention to strange attractors that usually show chaotic dynamics. We discuss the well-known Duffing type attractor that shows chaotic dynamics and is associated with the Duffing oscillator, realizing its numerical representation in phase space. To conclude we

have explained the concept of chaos and its defining property: the exponential sensitivity on the initial conditions. Via the calculation of the Lyapunov exponent, we give a quantitative view of chaos for the case of the Duffing attractor.

Bibliografía

- [1] M. J. Ablowitz y P. Clarkson. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge University Press, 1991.
- [2] M. J. Ablowitz, A. Ramani y H. Segur. «Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painleve type». *Lettere Al Nuovo Cimento* 23 (1978), págs. 333-338.
- [3] J. Baltanás, J. Trueba y M. Sanjuán. «Energy dissipation in nonlinearly damped Duffing oscillator.» *Physica D* 159 (2001), págs. 22-34.
- [4] M. Borowiec, G. Litak y A. Syta. «Vibration of the Duffing oscillator: effect of fractional damping.» *Shock. Vib.* 14 (2007), págs. 29-36.
- [5] P. Byrd y D. Friedman. *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*. Springer, 1954.
- [6] A. L. Cauchy. *Memoire sur l'intégration des équations différentielles*. Cambridge University Press, 2009.
- [7] P. G. Estévez y col. «Solutions of a Class of Duffing Oscillators with Variable Coefficients». *Int. J. Theor. Phys.* 50 (2011), 2046–2056.
- [8] P. G. Estévez. «The Generalized damped cubic equation-Integrability and General Solution». *J. Phys. A: Math. Gen.* 24 (1991), págs. 4831-4837.
- [9] A. Fordy y A. Pickering. «Analysing negative resonances in the Painlevé test». *University of Leeds* 160 (1991), págs. 347-354.
- [10] R Fuchs. «Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre». *C.R. Acad. Sci. Paris* (1905), págs. 555-558.
- [11] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1950, págs. 215-218.
- [12] P. Holmes y D. Whitley. «On the attracting set for Duffing's equation.» *Physica D* 7 (1983), págs. 111-123.
- [13] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover, New York, 1956.
- [14] S. V. Kovalevskaya. «Mémoire sur un cas particulier de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixes,» *Acta Mathematica* 12 (1889), págs. 177-232.
- [15] S. V. Kovalevskaya. «Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point xe». *Acta Mathematica* 14 (1890), págs. 81-93.
- [16] E. Lacomba. «los sistemas dinámicos, ¿Qué son y para qué sirven?» *Misceláneas Matemáticas* (2000).
- [17] G. W. Leibniz. *Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*. Open Court Publishing Company, 1920, págs. 73-78.

- [18] M. Leigh y A. Troesch. «Use of Lyapunov exponents to predict chaotic vessel motions.» *University of Michigan* (2004), págs. 156-171.
- [19] E. Lorenz. *La esencia del caos*. Prentice Hall, 1994.
- [20] R. Mickens. *An introduction to nonlinear oscillations*. Cambridge University Press, 1981.
- [21] A. Nayfeh y D. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley y Sons, 1979.
- [22] E. Ott. *Chaos in Dynamical systems*. Cambridge University Press, 1990.
- [23] P. Painlevé. «Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme». *Acta Mathematica* 25 (1900), págs. 1-80.
- [24] Picard. «Sur un classe d'équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme». *C.R. Acad. Sci. Paris* (1890), págs. 877-880.
- [25] J. Slotine y L. Weiping. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [26] L. Smith. *Caos: una breve introducción*. Alianza Editorial, 2011.
- [27] Y. Ueda. «Survey of regular an chaotic phenomena in the forced Duffing oscillator.» *Chaos Solitons Fractals* 1 (1991), págs. 199-231.
- [28] R. Villar y M. Celia. *Curvas de resonancia y fenómeno del salto en la ecuación Duffing*. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 1990.
- [29] J. Weiss M. Tabor y G. Carnevale. «The Painlevé property for partial differential equations». *J. Math. Phys* 24 (1983), págs. 522-526.
- [30] E. Weisstein. *Weierstrass elliptic function*. Wolfram MathWorld, 1999.
- [31] E. Whittaker y G. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, 1988.