

# TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Física



VNiVERSIDAD  
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

## EFECTO LENTE GRAVITATORIA EN FUENTES EXTENSAS

*Alba Rico Rodríguez*

RICO RODRIGUEZ Firmado digitalmente  
ALBA - por RICO RODRIGUEZ  
70904854V ALBA - 70904854V  
Fecha: 2021.07.06  
01:35:23 +02'00'

Dirigido por *Fernando Atrio Barandela*

Firmado por F. Atrio el  
06/07/2021

*Fernando Atrio*

# TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Física



VNiVERSIDAD  
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

## EFECTO LENTE GRAVITATORIA EN FUENTES EXTENSAS

*Alba Rico Rodríguez*

Dirigido por *Fernando Atrio Barandela*

# RESUMEN

Estrellas que pasan cerca de la línea de visión entre un observador y una fuente amplifican la radiación proveniente de la fuente, actuando como lente. Este efecto se conoce como lente gravitacional y es una herramienta astrofísica de vital importancia.

El estudio de lentes gravitacionales ha supuesto la creación de numerosos programas observacionales dedicados a la detección y observación de estas.

Algunas de las aplicaciones claves de lentes gravitacionales como objeto de investigación resultan, la detección de nuevos exoplanetas, así como la obtención de soluciones analíticas de las curvas de luz que reflejan la magnificación de una estrella que pasa a través de un objeto estelar que actúa como lente, sí, además, la fuente es extensa permite determinar importantes propiedades de la atmósfera de la estrella. Las soluciones analíticas permiten ajustes a la curva de luz en tiempo real, haciendo factible un muestreo denso de la curva de luz con el fin de detectar los parámetros característicos de la atmósfera con una mejor precisión.

En este trabajo obtendremos aproximaciones analíticas a distintos perfiles de luminosidad de fuentes extensas. Este estudio implica conocer los aspectos teóricos de lentes gravitatorias, así como los diferentes métodos utilizados para la obtención de las curvas de luz.

Se empezará con un análisis de lente puntual, primeramente, considerando fuentes puntuales donde se introducirán aspectos claves como el parámetro de impacto. Seguidamente se emplearán métodos de convolución para obtener resultados para estrellas extensas con diferentes perfiles y estudiar su comportamiento.

Debido a que la mayor parte de las estrellas que forman nuestro universo no son un sistema simple, si no que están constituidas por sistemas múltiples, emplearemos lo reflejado anteriormente y haremos un procedimiento análogo para ampliar nuestro conocimiento sobre el efecto lente gravitacional, considerando lentes binarias.

Como objetivo final, se realizará un análisis acerca de la distinción de los diferentes perfiles de una fuente extensa en el caso de tener una lente puntual o binaria.

Palabras clave: Galaxias, Lentes gravitacionales, Fuentes extensas, Magnificación, Curva de luz, Radio de Einstein, Anillos de Einstein, Imágenes múltiples, Curvas críticas, Curvas cáusticas.

# Abstract

Stars that pass close to the line of sight between an observer and a source amplify the radiation coming from the source, acting as a lens. This effect is known as gravitational lensing and is a vitally important astrophysical tool.

The study of gravitational lenses has led to the creation of numerous observational programs dedicated to their detection and observation.

Some of the key applications of gravitational lensing as a research object result, the detection of new exoplanets, as well as the obtaining of analytical solutions of the light curves that reflect the magnification of a star that passes through a stellar object that acts as lens, in addition, the source is extensive allows to determine important properties of the atmosphere of the star. Analytical solutions allow adjustments to the light curve in real time, making a dense sampling of the light curve possible to detect the characteristic parameters of the atmosphere with better accuracy.

In this project we will obtain analytical approximations to different luminosity profiles of extended sources. This study implies knowing the theoretical aspects of gravitational lenses, as well as the different methods used to obtain the light curves.

It will begin with a point lens analysis, first, considering point sources where key aspects such as the impact parameter will be introduced. Then convolution methods will be used to obtain results for extended stars with different profiles and to study their behavior.

Since most of the stars that make up our universe are not a simple system, but are made up of multiple systems, we will use what has been reflected above and we will do an analogous procedure to expand our knowledge of the gravitational lensing effect, considering binary lenses.

As a final objective, an analysis will be carried out about the distinction of the different profiles of an extended source in the case of having a point or binary lens.

Keywords: Galaxies, Gravitational lenses, Extended sources, Magnification, Light curve, Einstein's radius, Einstein's rings, Multiple images, Critical curves, Caustic curves.

# Índice

## CAPÍTULO 0

INTRODUCCIÓN.....	6
-------------------	---

## CAPÍTULO 1

LENTE GRAVITACIONALES SIMPLES .....	12
1.1. Ecuación de la lente .....	12
1.2. Anillos de Einstein .....	16
1.3. Lente puntual: ecuación de la magnificación .....	21
1.4. Lente puntual: curva de luz .....	24
1.5. Curvas críticas y cáusticas .....	27
FUENTES EXTENSAS .....	29
1.6. Magnificación: fuentes extensas.....	29
1.7. Curvas de luz: fuentes extensas .....	33
1.8. Soluciones numéricas .....	34

## CAPÍTULO 2

LENTE BINARIAS .....	41
2.1 Ecuación de la lente binaria. Curvas críticas y cáusticas. ....	41
2.2 Detectando fuentes extensas con lentes puntuales y binarias. ¿Qué configuraciones permiten determinar el carácter extenso de la lente? .....	49
Conclusiones.....	54
Conclusions .....	56
Índice de figuras .....	58
Bibliografía.....	60

# CAPÍTULO 0

## INTRODUCCIÓN

Las galaxias son los bloques de construcción fundamentales del universo. Podemos interpretarlas como las “ciudades cósmicas del universo”, donde se encuentran no sólo grandes cúmulos de estrellas, sino también, gas, polvo, campos magnéticos, rayos cósmicos y mucha más materia que es invisible para nosotros.

Las galaxias pueden formar pequeños o grandes grupos en el espacio. En el centro de muchas galaxias, hay un núcleo compacto que suele ser muy brillante.

La luminosidad de las galaxias normales más brillantes puede corresponder con  $10^{12}$  luminosidades solares, pero la mayoría son mucho más débiles, la más pequeña que se ha descubierto ha sido de unos  $10^5 L_{\odot}$ . Dado que las galaxias no tienen un borde definido, hasta cierto punto, sus masas y radios dependen de cómo estas cantidades han sido definidas (Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen, & Donner, 2018) . Si solo consideremos las partes brillantes centrales, una galaxia gigante puede tener una masa típicamente de unos  $10^{13} M_{\odot}$  y un radio de  $30 \text{ Kpc}$ , y si consideramos el caso de una enana, tenemos una masa de unos  $10^7 M_{\odot}$  y un radio  $0.5 \text{ Kpc}$ .

El descubrimiento de materia oscura en las galaxias fue uno de los hechos importantes que conllevó a la remodelación de las teorías y a la contribución de un modelo consistente con el origen y la evolución de las galaxias. La fracción de masa total correspondiente a la materia oscura varía considerablemente dependiendo de la galaxia. En grandes galaxias existe aproximadamente cinco veces más materia oscura que la visible.



Cuando nos encontramos con galaxias más pequeñas, el límite entre la consideración de ser un grupo de estrellas o una galaxia se hace muy pequeño. Las galaxias más pequeñas son similares a los densos cúmulos de estrellas, por lo tanto, se suele considerar como galaxia, si además de estrellas, existe materia oscura.

Acerca sobre el descubrimiento de las galaxias, una de las fuentes más importantes es debido al efecto lente gravitacional.

### ***Lentes gravitacionales***

Las lentes gravitacionales han abierto muchas puertas al conocimiento de nuestro universo, siendo este efecto geométrico una herramienta útil para la astronomía.

Empecemos por entender la idea de qué es una lente gravitacional, para ello acudimos a la teoría de la relatividad general de Einstein (Wambsganss, 1998), en la cual se describe la distorsión del espacio debido a concentraciones de masa, así los rayos de luz se curvan en un campo gravitacional. En 1919 se respaldó experimentalmente al observar pequeños desplazamientos en las posiciones aparentes de las estrellas que se encontraban cerca del Sol durante el eclipse solar total del 29 de mayo de ese año. La curvatura de los rayos de luz implica una distorsión de la imagen de los objetos ubicados en el fondo de la fuente del campo gravitacional.

En los años setenta, se observaron arcos luminosos, por ejemplo, cerca del centro de cúmulos de galaxias. Estos se han interpretado como las imágenes, muy distorsionadas, de quásares del fondo. Basándonos en esta idea, una lente gravitacional, es aquella que distorsiona y magnifica la luz de objetos o cúmulos de objetos, como, por ejemplo, galaxias distantes que están detrás, pero en la misma línea de visión.

Fue Lodge en 1919 el primero en usar el término *lente* en el contexto de la deflexión gravitacional de la luz. En 1936 Einstein publica sus resultados derivados acerca del efecto de lente producido por una estrella, incluyendo la posibilidad de imágenes múltiples, la formación de una imagen en forma de anillo en el caso en que la fuente y la lente se encuentren alineadas (posteriormente denominado anillo de Einstein) y ecuaciones de magnificación. Sin embargo, en su trabajo concluye que la separación entre las imágenes (del orden del milisegundo de arco) tratándose de estrellas dentro de las galaxias es demasiado pequeña para poder ser observada.

Zwicky en 1937 tuvo una visión más optimista acerca del fenómeno de lente gravitacional en dos artículos visionarios. En lugar de considerar el efecto de lente producido por estrellas dentro de la galaxia, analizó el efecto ocasionado por galaxias, en ese entonces conocidas como “nebulosas extragalácticas”. Considerando galaxias como lentes, él estimó una separación entre las imágenes del orden de los 10". Además, sugirió que las lentes podrían ser utilizadas como telescopios naturales, dado que las mismas causarían la magnificación de objetos lejanos permitiéndonos observar a grandes distancias. Más aún, Zwicky calcula que la probabilidad de observar este fenómeno, concluyendo en que 1 de cada 400 fuentes observadas en las placas fotográficas estaría afectada por el fenómeno de lente.

En términos generales, existen los fenómenos de lentes gravitacionales fuertes, microlentes y lentes gravitacionales débiles. Respecto al primer caso las imágenes múltiples de la lente pueden ser resueltas espacialmente, mientras que para el segundo caso esto no ocurre.

Como ya veremos más adelante, las separaciones entre imágenes son del orden del radio de Einstein, que vendrá determinado por las distancias entre la lente y la fuente respecto al observador, así como de la masa de la lente.

Nos centraremos en el efecto microlente. Paczynski sugiere detectar materia oscura utilizando el efecto lente gravitatoria (Paczynski, 1986).

En los inicios referidos al “microlesing” vino con el descubrimiento de grandes cantidades invisibles de “materia oscura” en galaxias espirales, lo que provocó su investigación, con la sugerencia por parte de Paczynski, que se basaba en que la materia oscura, en forma de objetos compactos en el halo que rodea la Vía Láctea, conduciría a una microlente sobre el fondo de las estrellas que forman la gran Nube de Magallanes. Debido a observaciones se logró demostrar que en los objetos del halo compacto astrofísico masivo (MACHO) se encontraron enanas marrones y una variedad de restos estelares que eran invisibles a grandes distancias.

Entre muchas de las aplicaciones sobre lentes gravitacionales nos encontramos con: conocer las propiedades de la lente, así como su distribución de masa, propiedades de las fuentes, ya que actúa como un telescopio natural magnificando objetos lejanos, la búsqueda de planetas extrasolares (exoplanetas) y la estimación de parámetros cosmológicos.

Uno de los ejemplos en la búsqueda de exoplanetas fue el hallazgo de un planeta como Neptuno a 1600 años luz. El astrónomo Kojima descubrió este planeta al observar el fenómeno de microlente dado por una estrella de 1600 años luz pasó frente a una estrella de 2600 años luz de distancia. Al analizar el cambio de brillo de la lente se pudo determinar que la estrella en primer plano tiene un planeta en órbita. Estudios posteriores en la Universidad de Tokio (A.Fukui et al., 2019), pudieron determinar características tales como la masa de la estrella anfitriona, siendo esta aproximadamente la mitad que la del Sol, y, el exoplaneta que le rodea tendría una órbita similar a la órbita de la Tierra siendo un 20% más pesado que Neptuno.

Otra aplicación interesante mencionada anteriormente relacionada con la estimación de parámetros cosmológicos es la utilidad de las lentes gravitacionales para calcular la expansión del universo.

Los astrónomos han intentado medir uno de los números más importantes en la cosmología, la constante de Hubble, que describe la velocidad a la que se produce esta expansión y la edad del universo.

el universo parece estar expandiéndose más rápido de lo previsto. De confirmarse, este cambio desconcertante obligaría a los astrofísicos a replantearse los fundamentos de nuestro universo, que actualmente no contemplan dicho cambio ni siquiera tras tener en cuenta la energía oscura, una fuerza misteriosa que provoca la aceleración de la expansión del universo.

Un equipo de investigadores ha anunciado una nueva forma de analizar el problema examinando galaxias tan masivas que deforman el espacio-tiempo a su alrededor y curvan la luz lejana como si fueran lentes gigantes.

Los resultados, publicados en la revista *Science*, no desbaratan nada por sí solos. Dentro de los márgenes de error, la última medición coincide con intentos anteriores de hallar este valor cósmico fundamental. Pero como prueba de concepto, el artículo demuestra que este método nuevo y prometedor funciona, algo emocionante porque utiliza menos supuestos sobre la estructura de nuestro universo que otros métodos para determinar la constante de Hubble (Greshko, 2019).

Existen diversos métodos de computación que ofrezcan simulaciones sobre las diferentes curvas luz debidas a lentes gravitacionales sobre determinadas fuentes. Gracias ellos podremos analizar la magnificación de una fuente puntual o extensa debido a una lente gravitacional.

En los años 90 se iniciaron diversos programas de observación para detectar lentes gravitatorias. Podemos citar en particular la experiencia EROS (*Experience pour la Recherche d'Objets Sombres*) entre 1990 y 2003 (Alcock, y otros, 2009), cuyo objetivo es la búsqueda y el estudio de cuerpos estelares oscuros, las llamadas "enanas marrones" o "MACHOs" que pertenecen gravitacionalmente a nuestra galaxia. Además, dicho experimento monitoriza la luminosidad de unos millones de estrellas con la mayor precisión posible. Por otro lado, también es sensible a la aparición de nuevas estrellas y, por lo tanto, está bien adaptado a la búsqueda de supernovas.

Seguimos citando como programas de observación la colaboración MACHO (MACHO Project Overview & Status) entre 1993 y 1999, que, como ya mencionamos anteriormente, se buscaba establecer que una fracción significativa de la materia oscura en el halo de la Vía Láctea está formada por objetos como enanas marrones o planetas. El efecto de estos objetos es la amplificación ocasional de la luz de las estrellas en el bulbo de nuestra galaxia o en la Nube de Magallanes por la influencia de lente gravitacional. La amplificación puede ser grande, pero los eventos son extremadamente raros: es necesario observar fotométricamente varios millones de estrellas durante un período de años para obtener una tasa de detección útil.

El programa de observación MACHOs fue seguido en 2001 por SuperMacho (Aguilera, 2005), se centra en determinar la naturaleza de la misteriosa población de objetos que es responsable de producir en los excesos eventos observados de microlentes en el LMC (Gran Nube de Magallanes).

Finalmente acabamos por mencionar proyecto OGLE (experimento óptico de lentes gravitacionales) que continúa desde el 1992 (Optical Gravitational Lensing Experiment - Wikipedia) y la colaboración MOA desde el 1998.

# CAPÍTULO 1

## LENTES GRAVITACIONALES SIMPLES

Como primer objeto de estudio en este capítulo, consideraremos las características y los efectos de tener una lente y una fuente puntuales. Expondremos la ecuación referida a una lente gravitacional simple, además de las correspondientes curvas de luz, donde se podrá observar el cambio en la magnificación debido al movimiento relativo entre el observador, la lente y la fuente. Posteriormente, pasaremos al estudio sobre fuentes extensas con diferentes perfiles en el que, de forma adicional, presentaremos soluciones analíticas y numéricas.

### 1.1. Ecuación de la lente

Para obtener la ecuación de la lente, utilizaremos lo que se llama aproximación de lente delgada. En dicha aproximación se considera la trayectoria de un rayo de luz, en presencia de una lente, como una línea recta desde la fuente hasta un punto en el plano de la lente, seguido por una segunda línea recta desde ese punto al observador.

Teniendo en cuenta dicha aproximación, el ángulo de deflexión para un determinado perfil de densidad tridimensional, adopta la siguiente forma en coordenadas cilíndricas (B.Congdon & R.Keeton, 2018),

$$\hat{\alpha}(R, \phi) = \frac{4G}{c^2} \frac{M(R)}{R} e_R(\phi) \quad (1.1)$$

donde

$$M(R) = \int_0^R 2\pi R' \Sigma(R') dR' , \quad (1.2)$$

siendo  $\Sigma(R)$  la densidad de masa superficial, que en términos de la densidad de masa volumétrica  $\rho(r)$  y  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ .

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r) dz . \quad (1.3)$$

Conocida la expresión para el ángulo de deflexión de una lente axisimétrica, nos interesa determinar donde se formarán las imágenes de la lente para una posición de fuente determinada. Este resultado será la ecuación de la lente.

Empezamos reescribiendo la ecuación del ángulo de deflexión (1.1), teniendo en cuenta que estamos considerando lentes simétricas, por lo tanto, el ángulo de deflexión  $\hat{\alpha}$ , tal que  $\hat{\alpha} > 0$  cuando  $\theta > 0$ , y  $\hat{\alpha} < 0$  cuando  $\theta < 0$ , siendo  $\theta$  el ángulo relativo en el cielo a la lente donde las imágenes se forman

$$\hat{\alpha}(x) = \frac{4G}{c^2} \frac{M(|x|)}{x} , \quad (1.4)$$

donde  $x = D_l \theta$ .

Debemos notar que  $\hat{\alpha} \neq |\hat{\alpha}|$ , ya que  $\hat{\alpha}(-x) = -\hat{\alpha}(x)$ .

La diferencia entre las expresiones (1.1) y (1.4) viene de suprimir la dependencia azimutal en la primera expresión mencionada, dando una falsa impresión de que el efecto de lente dado por una distribución de masa axisimétrica ocurre en una línea, en lugar de en un plano.

A continuación, nos preguntamos a qué valores de  $\theta$  se forman las imágenes, dado un ángulo de deflexión  $\hat{\alpha}$  y una posición angular de la fuente  $\beta$ .

De la *figura 1* se puede sacar la siguiente relación

$$D_s \tan \beta = D_s \tan \theta - D_{ls} \tan \hat{\alpha} . \quad (1.5)$$

Utilizando la aproximación para ángulos pequeños, la anterior expresión (1.5) se transforma en

$$D_s \beta = D_s \theta - D_{ls} \hat{\alpha} . \quad (1.6)$$

Finalmente, llegamos a la definición del ángulo de deflexión reducido

$$\alpha(\theta) \equiv \frac{D_{ls}}{D_s} \hat{\alpha}(D_l \theta) . \quad (1.7)$$

Los términos  $D_{ls}, D_l, D_s$  hacen referencia a las distancias lente-fuente y lente, fuente respecto al observador respectivamente.

Concluimos por deducir la ecuación para la lente utilizando las anteriores igualdades

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) . \quad (1.8)$$

Las imágenes son observadas en las posiciones  $\theta$ , que resuelven la ecuación de la lente para una fuente en una posición  $\beta$ . Cabe destacar que podrá haber múltiples soluciones, lo que implica la existencia de más de una imagen teniendo solo la misma fuente.

Podemos expresar la anterior ecuación (1.8) de una forma alternativa definiendo un perfil de masa adimensional

$$m(\theta) = \frac{4G}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_l D_s} M(D_l |\theta|) . \quad (1.9)$$



Entonces

$$\alpha(\theta) = \frac{m(\theta)}{\theta}, \quad (1.10)$$

y la expresión (1.8) se convierte en

$$\beta = \theta - \frac{m(\theta)}{\theta}. \quad (1.11)$$

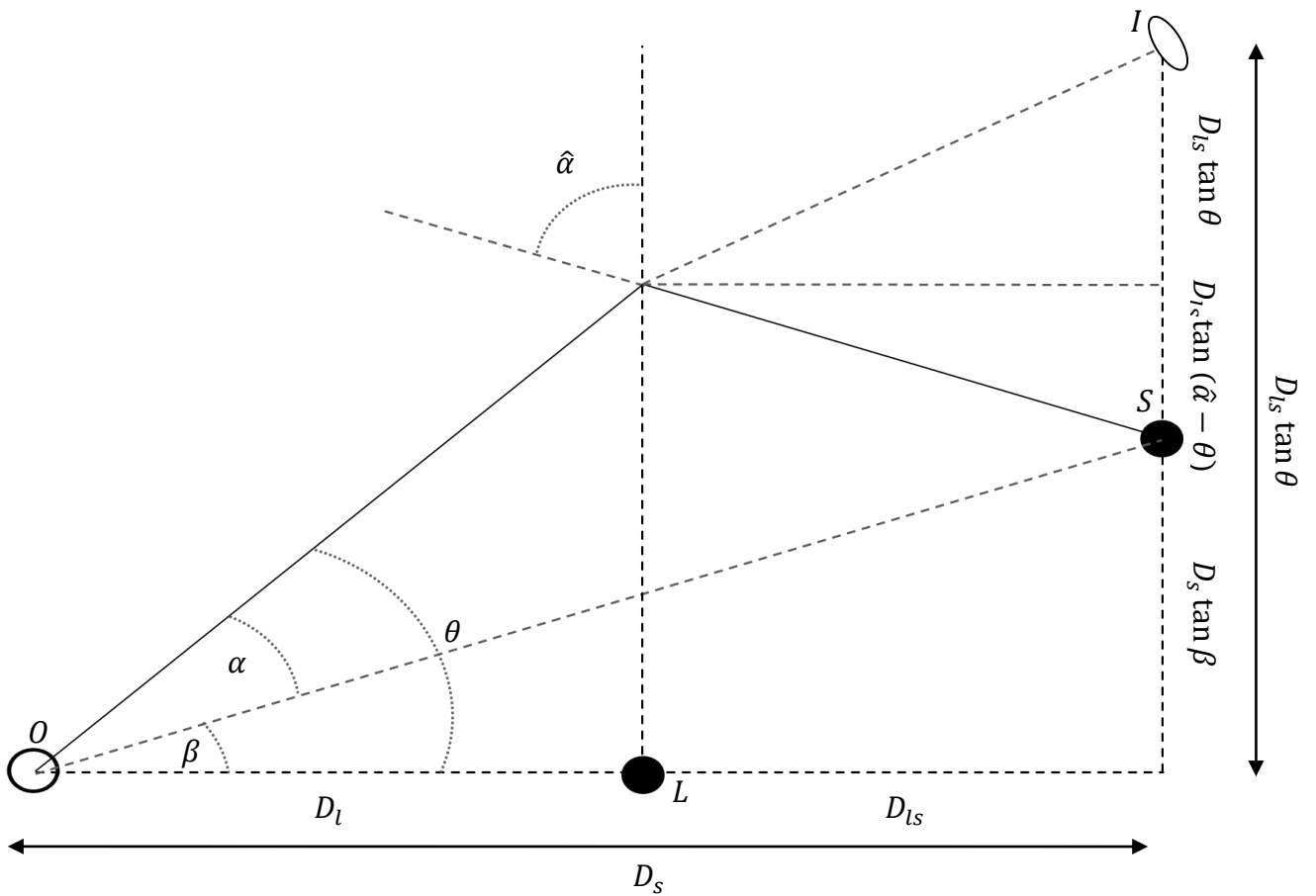


FIGURA 1. Trayectoria de un rayo de luz emitido por una fuente  $S$ , es doblado por una lente  $L$ , produciendo una imagen en  $I$  vista por el observador  $O$ .

## 1.2. Anillos de Einstein

Una de las características de los modelos de lentes gravitacionales es que producen tanto imágenes múltiples como anillos de Einstein para valores de parámetros adecuados. Además, las distancias típicas entre imágenes en las lentes gravitacionales son del orden del radio de Einstein.

La formación de anillos de Einstein tiene lugar cuando la lente, la fuente y el observador están alienados. Vamos a deducir una expresión que indique dicha formación (B.Congdon & R.Keeton, 2018).

Utilizando la ecuación de la lente (1.11) e imponiendo que  $\beta = 0$ , obtendremos la condición para un anillo de Einstein si

$$\frac{m(\theta)}{\theta^2} = 1 . \quad (1.12)$$

Esto se satisface para  $\theta_E > 0$ . El parámetro  $\theta_E$  hace referencia al ángulo de Einstein, el cual mide el tamaño de un anillo de Einstein y viene definido por

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{ls}}{D_l D_s} \frac{4GM}{c^2}} . \quad (1.13)$$

A continuación, intentaremos modificar la condición (1.12) para poder interpretarla de otra forma. Para ello definimos la densidad crítica como

$$\Sigma_{crit} \equiv \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_{ls} D_l} . \quad (1.14)$$

Así mismo la convergencia viene dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{\sum D_l |\theta|}{\Sigma_{crit}} . \quad (1.15)$$

Definiendo como la convergencia media

$$\bar{\kappa}(\theta) \equiv \frac{m(\theta)}{\theta^2} , \quad (1.16)$$

llegamos a que nuestra condición se ha convertido en:

$$\bar{\kappa}(\theta) = 1 . \quad (1.17)$$

Por lo tanto, se producirá la formación de un anillo de Einstein si el ángulo de Einstein  $\theta_E$  encierra un disco con una convergencia media de la unidad.

Los radios de Einstein debidos a microlentes gravitacionales son del orden de mili-arcosegundos. A continuación, mostramos dos gráficas que muestran el radio y el ángulo de Einstein para una fuente (estrella) situada a 8.5 Kpc del observador y una lente que se encuentra a una distancia variable entre nosotros (a distancia 0) y la fuente (a distancia 8.5Kpc).

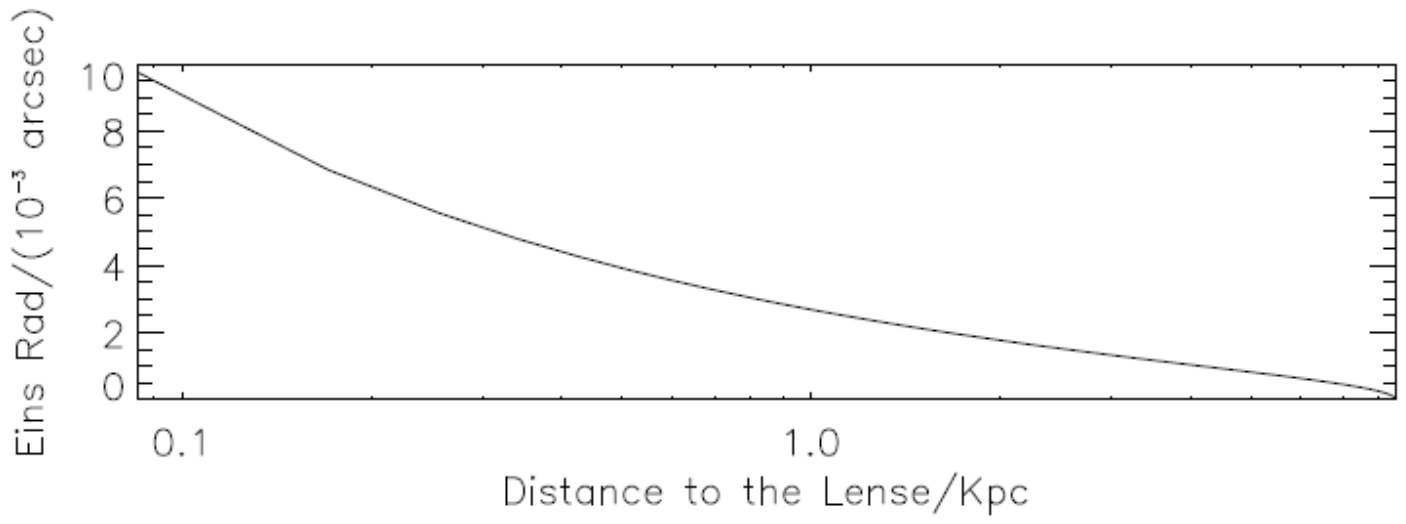


FIGURA 2. Gráfica ángulo de Einstein

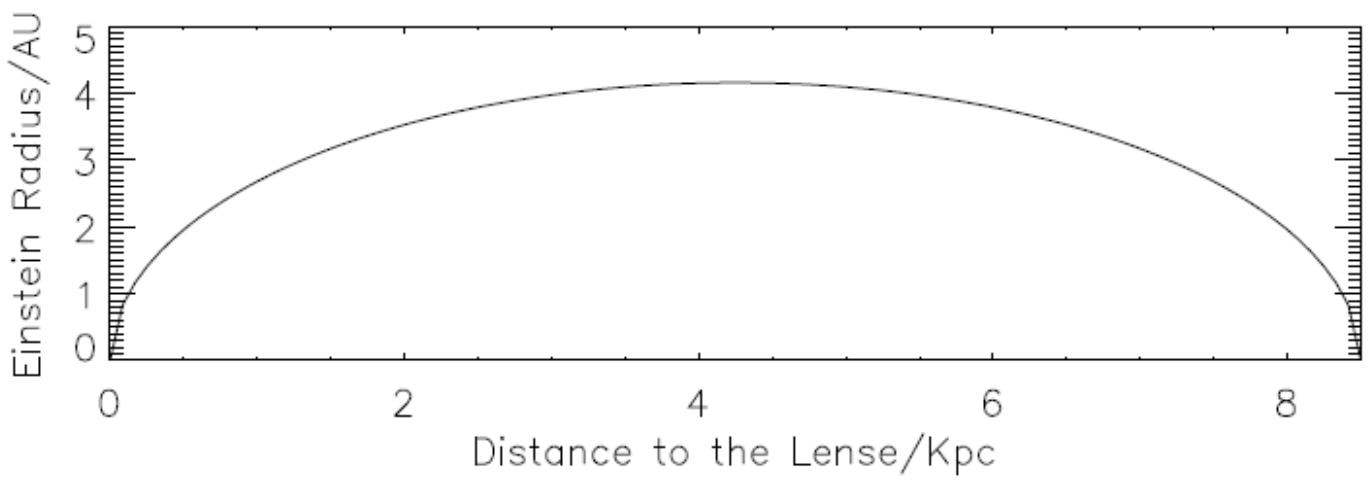


FIGURA 3. Gráfica radio de Einstein

## LENTE GRAVITACIONALES SIMPLES

Los anillos de Einstein son una fuente interesante para poder conocer mejor nuestro universo, pues entre sus aplicaciones se encuentran la detección de nuevas galaxias.

Desde su descubrimiento (*Hewitt, 1988; Langston, 1989*) y el modelado posterior (*Kochanek & Narayan 1992; Kochanek 1995*) de lentes gravitacionales de anillos de Einstein en longitudes de onda de radio, plantearon la posibilidad de obtener información cuantitativa detallada, tanto para las fuentes, como para la forma de la distribución de masa de las galaxias intermediarias como lentes.

Como conclusión de este apartado, mostramos una imagen de los múltiples arcos que se han detectado en el cúmulo de galaxias Abell 370 (*figura 4*) y de otros cúmulos obtenidos con la cámara *Advanced Camera for Surveys* del telescopio Hubble, (NASA), (*figura 5*).



FIGURA 4. Imagen múltiple lente gravitacional.

Cúmulo de galaxias Abell 370. Hubble.

(Hubblesite)

## LENTES GRAVITACIONALES SIMPLES

Las manchas de color rojo y blanco en estas 8 imágenes (*Figura 5*) se corresponden con galaxias elípticas que se encuentran aproximadamente entre dos y cuatros mil millones de años luz.

Se puede observar el efecto de la lente gravitacional en los patrones con color azulado en forma de diana. Dichos patrones son los anillos de Einstein que se han producido al estar en perfecta alineación.

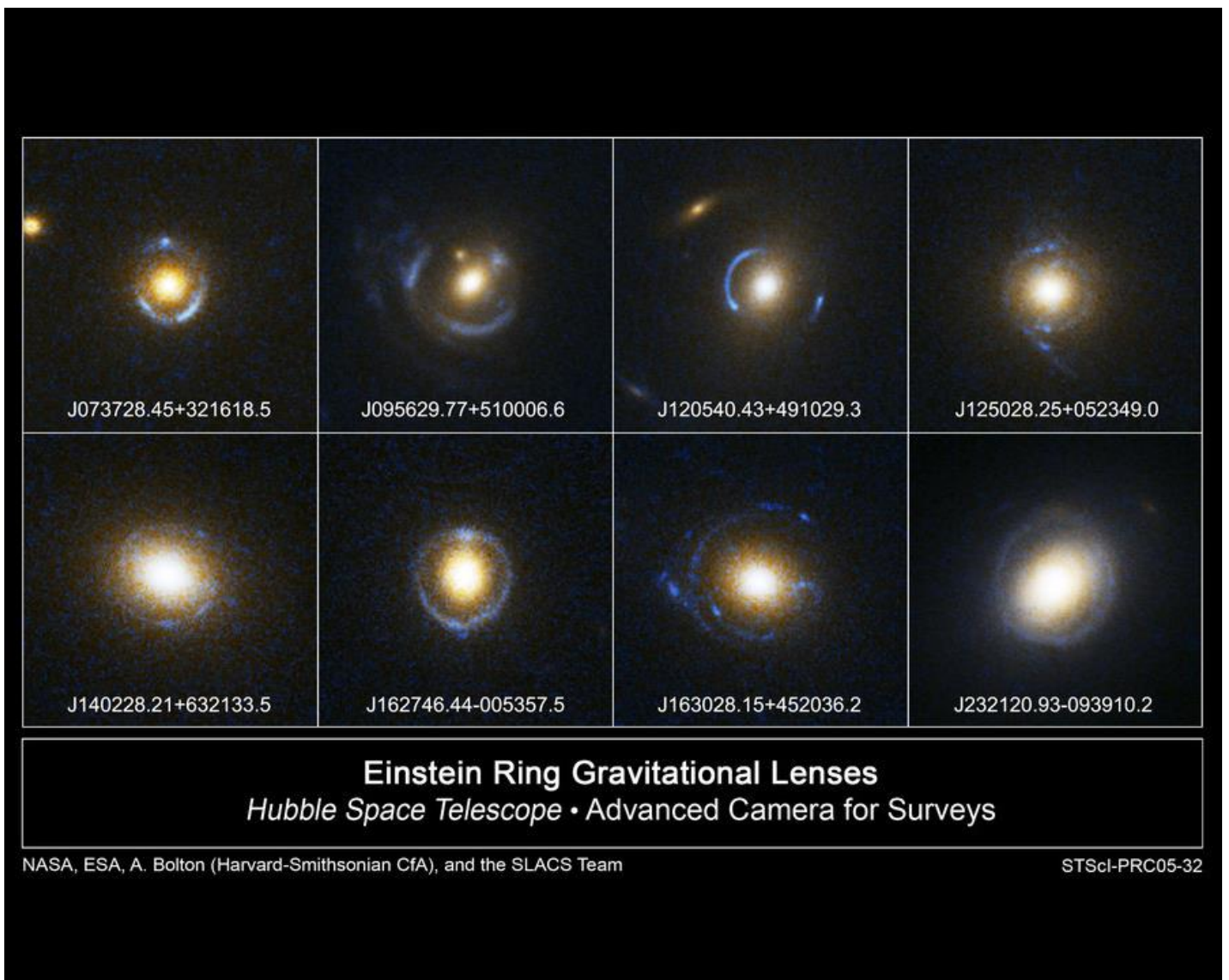


FIGURA 5. Anillos de Einstein. Hubble

### 1.3. Lente puntual: ecuación de la magnificación

El ángulo de deflexión para una masa puntual viene dado por

$$\alpha = \frac{D_{ls}}{D_l D_s} \frac{4GM}{c^2 \theta}. \quad (1.18)$$

En unidades del radio de Einstein la ecuación de la lente toma la forma

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}. \quad (1.19)$$

Resolviendo la anterior ecuación para una posición angular de la fuente  $\beta$  determinada, obtenemos

$$\theta_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}. \quad (1.20)$$

Podemos observar que para  $\beta > 0$ , se tiene que  $\theta_+ > 0, \theta_- > 0$ . Esto significa que se formará una imagen en el mismo lado de la lente que la fuente, y otra en el lado opuesto de la lente. Esto ocurrirá de igual manera en el caso  $\beta < 0$  (B.Congdon & R.Keeton, 2018).

Para saber qué imagen es la asociada a cada solución de  $\theta$ , sin saber exactamente la posición de la fuente, utilizamos la magnificación, que para una lente puntual viene dada por:

$$\mu^{-1}(\theta) = \left(1 - \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\right) \left(1 + \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\right) = \left(1 - \frac{\theta_E^4}{\theta^4}\right). \quad (1.21)$$

Las soluciones se corresponden con  $|\theta_-| < \theta_E$  y  $|\theta_+| > \theta_E$ . Esto implica que  $\mu_- \equiv \mu(\theta_-) < 0$  y  $\mu_+ \equiv \mu(\theta_+) > 0$  para  $\beta > 0$ .

Lo anterior se refleja en que la imagen en  $\theta_+$  tiene paridad positiva y la imagen en  $\theta_-$  paridad negativa.

Interesa conocer la magnificación total que producen ambas imágenes, pues es lo que observaremos posteriormente reflejado en las curvas de luz.

Escribimos la ecuación de la magnificación en términos de la posición de las imágenes en unidades del radio de Einstein

$$\mu(x) = \frac{x^4}{x^4 - 1}, \quad (1.22)$$

siendo  $x = \theta/\theta_E$ .

La magnificación total se corresponde con

$$\mu_{tot} \equiv |\mu_+| + |\mu_-| = \frac{x_+^4}{x_+^4 - 1} - \frac{x_-^4}{x_-^4 - 1}. \quad (1.23)$$

En términos de la posición de la fuente la amplificación de una lente puntual que focaliza a una fuente puntual en unidades del radio de Einstein  $\theta_E$  viene dada por la siguiente expresión:

$$\mu(u) = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}, \quad (1.24)$$

donde  $u = \beta/\theta_E$  hace referencia a la distancia fuente-lente en unidades del ángulo de Einstein.

Hay que tener en cuenta que la magnificación total cambia debido al movimiento relativo entre la lente y la fuente.



## LENTES GRAVITACIONALES SIMPLES

Un evento de microlente ocurre cuando  $u < 1$ , o equivalentemente cuando  $\mu > \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.34$ . Esto implica que la magnificación cambia a medida que  $u$  cambia con el tiempo, esto se verá más clarificado en las curvas de luz.

Si considerásemos el caso en el que ocurriría el fenómeno del anillo de Einstein, tendríamos que  $\beta = 0$ ,  $\theta_{\pm} = \pm\theta_E$  y  $\mu_{\pm} \rightarrow \infty$ .

#### 1.4. Lente puntual: curva de luz

En lo respectivo a las observaciones del fenómeno de microlente, se mide el flujo de una fuente en función del tiempo, es decir, la curva de luz. Considerando en unidades del flujo sin lente  $F_0$ , la curva de luz da la variación de la magnificación a lo largo del tiempo. Cabe destacar que  $F_0$  no puede medirse exactamente ya que eso implicaría observar la fuente en  $u \rightarrow \infty$ .

En los que nos concierna consideraremos  $F_0$  conocido.

Para construir una curva de luz, teóricamente debemos especificar una trayectoria para la fuente. La más simple que se utiliza es aquella que realiza un movimiento uniforme, llamada “*Paczynski light curve*” (B.Congdon & R.Keeton, 2018).

Para conseguir la fórmula matemática, utilizando  $\xi$ , la distancia transversal entre la fuente y la lente en un determinado tiempo  $t$

$$\xi = \sqrt{\xi_{min}^2 + v_{\perp}^2 t^2}, \quad (1.25)$$

donde  $\xi_{min}$  se corresponde con la mínima separación entre la lente-fuente,  $v_{\perp}$  la velocidad relativa en la línea de visión observador-lente.

Considerando una fuente a una distancia  $D_s$  respecto del observador, la posición lente-fuente  $\xi$  se corresponde con una separación angular de  $\beta = \xi/D_s$ . Realizando el siguiente cambio  $u = \beta/\theta_E$  en la ecuación (1.18) llegamos a:

$$u(t) = \sqrt{u_{min}^2 + \left(\frac{t}{t_E}\right)^2}, \quad (1.26)$$

donde  $t_E = \frac{D_s \theta_E}{v_{\perp}}$  es el tiempo de Einstein, tiempo requerido en recorrer una distancia de un radio de Einstein, y  $u_{min}$  hace referencia al parámetro de impacto.

A continuación, se muestra una gráfica referida la magnificación de una fuente puntual que pasa cerca de una lente puntual.

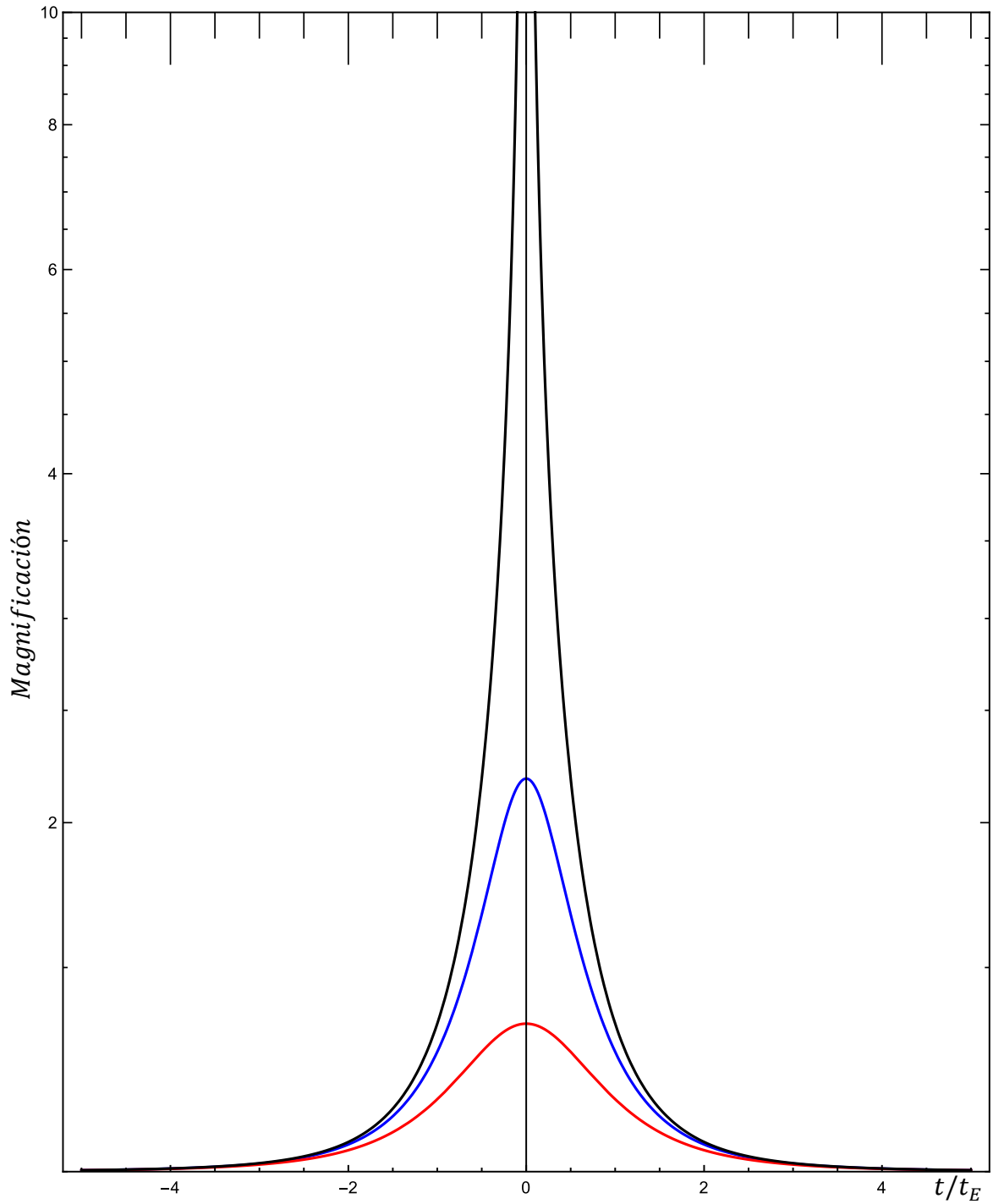


FIGURA 6. Curvas de luz de una fuente puntual pasando cerca de una lente puntual para diferentes parámetros de impacto.

Identificamos las curvas de luz del anterior gráfico, siendo la línea negra la curva de luz referida a un parámetro de impacto  $u_{min} = 0$ , la línea azul  $u_{min} = 0.5$  y la roja  $u_{min} = 1$ .

Cabe destacar que las curvas se van haciendo más altas a medida que el parámetro de impacto decrece, lo que es lógico ya que cuanto menor sea el parámetro de impacto, mayor será el acercamiento fuente-lente, y, por lo tanto, aumentará la magnificación.

Las curvas, además, son simétricas en  $t = 0$ , debido a la dependencia del tiempo de  $u$ , como se puede observar en la ecuación (1.26).

Cuando el parámetro de impacto es cero, la fuente pasa directamente detrás de la lente haciendo que la magnificación diverja.

Podemos definir la amplificación en términos de magnitudes, utilizando la magnitud aparente  $m$ ,

$$m = -2.5 \log \frac{F}{F_0} , \quad (1.27)$$

siendo  $F$  la densidad de flujo de una estrella.

Además, la diferencia entre magnitudes aparentes puede ser de utilidad, como en el caso de tener diferentes perfiles para una determinada fuente extensa.

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{\mu_{\lambda_1}}{\mu_{\lambda_2}} \quad (1.28)$$

La anterior ecuación se satisface siempre y cuando se tenga la misma intensidad en las longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

## 1.5. Curvas críticas y cáusticas

La magnificación también puede expresarse en términos del Jacobiano,

$$\mu = \left| \det \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right|^{-1}. \quad (1.29)$$

Las regiones en el plano de la lente donde el Jacobiano presenta un signo opuesto están separadas por curvas en las que este desaparece. Estas curvas se denominan curvas críticas (Schneider, Ehlers, & Falco, 1992).

En estas curvas la magnificación diverge. Esto no significa que la imagen de una fuente sea infinitamente brillante, ya que hay que tener dos aspectos relevantes. El primero es que las fuentes reales son extensas, esto conduce a tener magnificaciones finitas. En segundo lugar, si consideramos la fuente como puntual, la amplificación tampoco divergiría pues hasta ahora hemos tratado la propagación de la luz en la aproximación de la óptica geométrica. Es decir, incluso en el hipotético caso de fuente puntual la magnificación es finita.

Las curvas críticas de un mapeo de deflexión son de gran importancia para una comprensión cualitativa de sus propiedades. Considerando las imágenes de las curvas críticas bajo el mapeo de la ecuación de la lente (1.8); estas curvas en el plano de la lente son las denominadas curvas cáusticas.

Dadas las posiciones de un observador y la lente, el número de imágenes varía con la posición de la fuente. En el caso de la fuente cruce un punto cáustico, el número de imágenes cambia en dos.

Dependiendo de la dirección de cruce, dos imágenes con paridad opuesta se fusionan en una curva crítica y luego desaparecen, o viceversa. Poco antes de su fusión (o posteriormente a su creación), las imágenes son muy brillantes ya que se encuentran en las proximidades de la curva crítica en el plano de la lente.

## LENTES GRAVITACIONALES SIMPLES

Si se conocen la ubicación de las cáusticas, es fácil determinar la dependencia del número de imágenes con la posición de la lente.

Finalmente, cabe destacar que el anillo de Einstein es la curva crítica para una fuente puntual pues habíamos visto que este fenómeno ocurría cuando  $\beta = 0$ , y por lo tanto el Jacobiano se anula.

# FUENTES EXTENSAS

En el anterior capítulo hicimos un tratamiento acerca del fenómeno de lente gravitacional en el caso de una fuente puntual. Ahora, seguiremos avanzando en nuestro estudio considerando, que, aunque la lente siga siendo puntual, la fuente se convertirá en un objeto extenso.

Trataremos diferentes modelos de fuentes extensas como fuentes de intensidad constante, oscurecimiento hacia al borde y perfiles parabólicos.

## 1.6. Magnificación: fuentes extensas

Empezamos por escribir de nuevo la ecuación de la lente en términos de cantidades complejas. Consideramos de la posición (compleja) de la fuente en el plano de la fuente  $(\xi, \eta)$  como  $\zeta = \xi + i\eta$ , siendo  $z_i = x_i + iy_i$  las posiciones de un campo de  $n$  masas puntuales en el plano deflector  $(x, y)$  y  $m_i$  sus masas en unidades de la masa solar  $m_i = M_i/M_\odot$ .

$$\zeta = z + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\bar{z}_i - \bar{z}} \quad (1.30)$$

Cuyas soluciones son la posición de las imágenes  $z$  para cada posición de la fuente  $\zeta$ .

Al considerar fuentes extensas podemos determinar los radios típicos de estrellas en el sistema lente-fuente en unidades del radio de Einstein. Atendiendo a la ecuación del ángulo de Einstein  $z_E$  dada por (1.13), tomando la masa del Sol, tenemos que el radio de Einstein se corresponde con

$$\zeta_E = \frac{D_s}{D_l} z_E. \quad (1.31)$$

Una estrella en el bulbo con radio físico  $R$  tendrá un radio  $r_s$  en el plano de la fuente de

$$\frac{r_s}{\zeta_E} \simeq 0.29 \left( \frac{R}{400R_\odot} \right) \left[ \left( \frac{D_l}{5Kpc} \right) \left( \frac{5Kpc}{D_{ls}} \right) \left( \frac{10Kpc}{D_s} \right) \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (1.32)$$

Considerando una estimación de  $R \approx 400R_\odot$ , donde se corresponde con el radio típico de una estrella gigante (C-Rich), por lo tanto, el radio típico de las estrellas en el bulbo estará en un rango de  $r_s \simeq 10^{-3}\zeta_E - 0.3\zeta_E$ .

Un campo de  $n$  lentes puntuales podrán producir  $k$  imágenes dada una posición de la fuente de la lente  $\zeta$  como vimos anteriormente.

La magnificación de una imagen localizada en  $z_j$  viene dada por:

$$\mu_j = \frac{1}{\det J} = \left( 1 - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} \right)^{-1} \Bigg|_{z=z_j} . \quad (1.33)$$

Siendo la magnificación total la suma de la magnificación absoluta de cada imagen.

$$\mu_{tot} = \sum_{j=1}^k |\mu_j(\xi, \eta)| = \sum_{j=1}^k \left| \mu_j(x_j(\xi, \eta), y_j(\xi, \eta)) \right| . \quad (1.34)$$

Las imágenes y la magnificación se pueden determinar para cada fuente  $(\xi, \eta)$ , por lo que el movimiento relativo de la lente-fuente producirá un patrón de magnificación sobre todo el plano de la fuente.

Se puede seguir que la anterior ecuación (1.34) refleja que la magnitud de un número arbitrario de fuentes por los mismos conjuntos de lentes es aditiva.



Una vez conocida la magnificación de una fuente puntual  $\mu(\xi, \eta)$ , el patrón de magnificación de una fuente extensa puede obtenerse convolucionando el patrón puntual con el perfil de fuente extensa (WITT & Atrio-Barandela, 2019).

Considerando una estrella de radio  $r_s$  localizada en  $(\xi_0, \eta_0)$ , la magnificación resulta

$$\mu_{ext}(\xi_0, \eta_0) = \int_{-r_s}^{r_s} \int_{-r_s}^{r_s} \mu(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) s(\xi, \eta) d\xi d\eta , \quad (1.35)$$

donde  $s(\xi, \eta)$  hace referencia al perfil de la fuente.

Considerando ahora  $r_0$ , el cual podemos identificar como el parámetro  $u$  en la expresión (1.24), siendo  $r_0 = (\xi_0^2 + \eta_0^2)^{1/2}$  la separación del centro de la fuente a la posición proyectada de la lente en el plano de la fuente. Suponiendo la lente en el origen de coordenadas y  $r_0 = (\xi_0, \eta_0)$ ,  $r = (\xi, \eta)$ , las coordenadas del centro de la fuente y un punto arbitrario de su superficie, podemos escribir la ecuación de la magnificación (1.35) en coordenadas polares

$$\mu_{ext}(r_s, r_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_s} s(r, \varphi) \mu(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) r dr d\varphi . \quad (1.36)$$

De nuevo  $s(r, \varphi)$  hace referencia a los distintos perfiles de la estrella que discutiremos posteriormente.

Cuando tenemos perfiles con simetría esférica la anterior expresión puede integrarse en la parte angular y expresarla en función de integrales elípticas,

$$\mu_{ext}(r_s, r_0) = \int_0^{r_s} k \sqrt{\frac{r}{r_0}} [(r - r_0)^2 \Pi(n, k) + 2K(k)] s(r) dr , \quad (1.37)$$

con

$$n = \frac{4r_0 r}{(r_0 + r)^2} \quad k = \sqrt{\frac{4n}{4 + (r_0 - r)^2}} . \quad (1.38)$$

Los términos  $K(k)$ ,  $\Pi(n, k)$  denotan la integral elíptica completa de primer y tercer tipo respectivamente.

Nos centraremos en estudiar con tres perfiles de fuente extensa con simetría esférica.

Uno de ellos se refiere al perfil de una fuente extensa con intensidad constante al que llamaremos  $s_{disk}$

$$s_{disk}(r) = \frac{1}{\pi r_s^2} . \quad (1.39)$$

Un perfil interesante es el referido como oscurecimiento hacia el borde definida como una disminución gradual de la estrella observada desde su centro hasta su borde o extremidad

$$s_{limb}(r) = \frac{3}{2\pi r_s^2} \left( \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_s^2}} \right) . \quad (1.40)$$

Por último, consideraremos un perfil parabólico

$$s_{para}(r) = \frac{2}{\pi r_s^2} \left( 1 - \frac{r^2}{r_s^2} \right) . \quad (1.41)$$

## 1.7. Curvas de luz: fuentes extensas

En este apartado se presentará una solución ilustrativa de las curvas de luz de los diferentes perfiles extensos junto con el puntual. Estos resultados se han obtenido tras la programación de un programa en *Fortran*.

Se ha representado en una misma gráfica los tres perfiles de fuentes y el caso de fuente puntual. Cada gráfica se corresponde con un valor de radio de la estrella y parámetro de impacto diferente, por lo tanto, la magnificación será mayor o menor en cada caso.

Podemos observar que el perfil de estrella parabólico es el que más puede asemejarse en comparación al modelo de fuente puntual, siendo por el contrario el perfil de intensidad constante el que más se diferencia.

El eje  $x$  de las gráficas se corresponde con  $\frac{v_s t}{z_E}$ , siendo  $v_s$  la velocidad relativa de la fuente y la lente, y  $t$  el tiempo de observación, en unidades del radio de Einstein. De igual manera que como definimos  $u$  en el apartado de curva de luz para una fuente puntual,  $r_0$  se corresponde con  $r_0 = [(v_s t)^2 + b^2]^{1/2}$ , donde  $b$  hace referencia al parámetro de impacto.

Los radios de las estrellas están en unidades del radio de Einstein.

Es lógico que a medida que el parámetro de impacto aumenta, la distinción entre perfiles extensos y puntuales disminuye. Esto se traduce en que cuando la lente esté dentro de la superficie proyectada de la estrella la distinción puede ser clara, en cambio, cuando se encuentra fuera, la magnificación disminuye y los efectos de la fuente extensa se diluyen coincidiendo así con la magnificación de una fuente puntual, como se puede observar en las *figura 8* y *figura 9*.

## 1.8. Soluciones numéricas

Podemos obtener soluciones exactas para determinadas configuraciones resolviendo la ecuación diferencial asociada a la expresión (1.36)

$$\frac{d_{\mu}(r, r_0)}{d_r} = k \sqrt{\frac{r}{r_0}} [(r - r_0)^2 \Pi(n, k) + 2K(k)] s(r) . \quad (1.42)$$

Se ha podido determinar que la anterior ecuación diferencial ha podido resolverse de forma exacta para el perfil de intensidad constante.

La solución resultante viene dada en términos de las funciones elípticas como

$$\mu_{disk}(r, r_0) = a_1(r)K(k) + a_2(r)E(k) + a_3\Pi(n, k) \quad (1.43)$$

con

$$\begin{aligned} a_1(r_s) &= \frac{k(r_s)}{\sqrt{r_0 r_s}} \frac{r_s^2 - r_0^2}{\pi r_s^2} p(r_s) ; & a_2(r_s) &= \frac{\sqrt{r_0 r_s}}{k(r_s)} \frac{q(r_s)}{\pi r_s^2} ; \\ a_3(r_s) &= \frac{k(r_s)}{\sqrt{r_0 r_s}} \frac{(r_0 - r_s)^2 (r_s^2 + 1)}{2\pi r_s^2} \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde

$$p(r) = \frac{1}{8} (8 + r_0^2 - r^2) \quad q(r) = 2 . \quad (1.45)$$

Se ha derivado un método rápido para obtener resultados pues no hay que resolver ninguna integral.

Se puede comprobar que se recupera la expresión de la magnificación de una fuente puntual cuando tomamos el límite en el que el radio de la estrella tiende a cero.

$$\lim_{r_s \rightarrow 0} \mu_{ext}(r_s, r_0) = \frac{2 + r_0^2}{r_0 \sqrt{4 + r_0^2}} . \quad (1.46)$$

En el anterior caso para el perfil de intensidad constante, los coeficientes  $a_i$  se han sacado a través de resolver un sistema de tres ecuaciones diferencias acopladas.

Al considerar un nuevo perfil deben volver a resolverse el anterior sistema que generalmente es muy complejo. Para el caso del perfil oscurecimiento hacia el borde y parabólico solamente se ha podido encontrar soluciones para dos configuraciones específicas. Una de ellas es cuando la fuente y la estrella están perfectamente alienadas  $r_0 = 0$ , y la otra, cuando la lente está en el borde de la superficie de la estrella,  $r_0 = r_s$ .

Considerando la primera configuración la ecuación (1.37) se convierte en

$$\lim_{r_s \rightarrow 0} \mu_{ext}(r_s, r_0) = \frac{\pi}{2} (a_1(r_s) + a_2(r_s) + a_3(r_s)) . \quad (1.47)$$

Si  $r_0 = 0$  o  $r_0 = r_s$ , las integrales elípticas se simplifican bastante y se derivan expansiones en series simples que convergen rápidamente si  $r_s \ll 1$ .

En el de  $r \rightarrow r_0$  tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow r_0} (r - r_0)K(k) &= 0 & \lim_{r \rightarrow r_0} E(k) &= E(1) = 1 \\ \lim_{r \rightarrow r_0} (r - r_0)^2 \Pi(n, k) &= 4r_0 \arctan(r_0) . \end{aligned} \quad (1.48)$$

Para  $r_0 \ll 1$  se tiene que  $k \approx \sqrt{n}$  y

$$\Pi(n, \sqrt{n}) = \frac{(r_0 + r)^2}{(r_0 - r)^2} E(\sqrt{n}) . \quad (1.49)$$

Conspirando entonces  $r_s \ll 1, k \approx \sqrt{n} \approx 0$  podemos aplicar la anterior aproximación teniendo en cuenta que  $K(0) = E(0) = \pi/2$

$$\mu_{ext}(r_s, 0) = 2\pi \int_0^{r_s} \frac{4s(r)}{\sqrt{4+r^2}} dr . \quad (1.50)$$

Para el perfil de intensidad constante encontramos

$$\mu_{disk}(r_s, 0) = \frac{2}{r_s^2} \int_0^{r_s} \frac{r^2 + 2}{\sqrt{4+r^2}} dr = \frac{\sqrt{4+r_s^2}}{r_s} \approx \frac{2}{r_s} + \frac{r_s}{4} - \frac{r_s^2}{64} + \dots \quad (1.51)$$

En cuanto a la magnificación total se obtiene, teniendo en cuenta los coeficientes  $a_i$  eq(1.44) en nuestra aproximación  $r_s, r_0 \ll 1$

$$\begin{aligned} \mu_{disk}(r_s, r_0) &= \frac{2(r_s - r_0)}{\pi r_s} K(\sqrt{n}) + \frac{2(r_s + r_0)}{\pi r_s^2} E(\sqrt{n}) = \\ &= \frac{2(1-f)}{\pi r_s} K\left(\frac{2\sqrt{f}}{1+f}\right) + \frac{2(1+f)}{\pi r_s} E\left(\frac{2\sqrt{f}}{1+f}\right) \end{aligned} \quad (1.52)$$

con  $f = \frac{r_0}{r_s}$ .

Los efectos de las estrellas extensas tienen importancia cuando la posición proyectada de la lente intercepta la fuente ( $r_0 \approx r_s$ ). En este caso usando las relaciones (1.48) se tiene

$$\mu_{disk}(r_s, r_s) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{r_s} + \frac{1+r_s^2}{r_s^2} \arctan(r_s) \right] \approx \frac{4}{\pi r_s} + \frac{4}{3\pi} r_s - \frac{4}{15\pi} r_s^2 + \dots \quad (1.53)$$

En lo que respecta al perfil oscurecimiento hacia el borde para el caso en el que la lente y la fuente están perfectamente alineadas se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_{limb}(r_s, 0) &= \frac{3}{r_s^2} \int_0^{r_s} \frac{r^2 + 2}{\sqrt{4 + r^2}} \sqrt{\frac{1 - r^2}{r_s^2}} dr = \frac{2}{k_2 r_s^2} \left[ \left(1 + \frac{r_s^2}{2}\right) E(k_2) - K(k_2) \right] \approx \\ &\frac{3\pi}{4r_s} + \frac{9\pi}{128} r_s + \frac{15\pi}{4096} r_s^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.54)$$

con  $k_2 = r_s / \sqrt{4 + r_s^2}$ .

Utilizando las propiedades que simplificaban las integrales elípticas  $eq(1.48)$  para

$r_0 = r_s$

$$\mu_{limb}(r_s, r_s) \approx \frac{3\pi}{8r_s} + \frac{135}{1024} r_s - \frac{1575}{2^{16}} r_s^3 + \dots \quad (1.55)$$

Finalmente, para el perfil parabólico realizando el mismo tratamiento que anteriormente llegamos a

$$\begin{aligned} \mu_{para}(r_s, 0) &= \frac{4}{r_s^2} \int_0^{r_s} \frac{r^2 + 2}{\sqrt{4 + r^2}} \left(1 - \frac{r^2}{r_s^2}\right) dr = \\ &\frac{(2 + r_s^2)\sqrt{4 + r_s^2}}{r_s^3} - \frac{8}{r_s^4} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{r_s}{2}\right) \approx \\ &\frac{8}{3r_s} + \frac{1}{5} r_s - \frac{1}{112} r_s^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\mu_{para}(r_s, r_s) \approx \frac{32}{9\pi r_s} + \frac{32}{25\pi} r_s - \frac{32}{147\pi} r_s^3 + \dots \quad (1.57)$$

Cabe destacar que para los diferentes perfiles las series convergen rápidamente cuando  $r_s \ll 1$ .

Tanto el proceso de obtención de los coeficientes  $a_i$ , como el procedimiento detallado acerca de la obtención de las expresiones anteriores se puede encontrar explícitamente en el artículo, apéndice B y D (WITT & Atrio-Barandela, 2019).



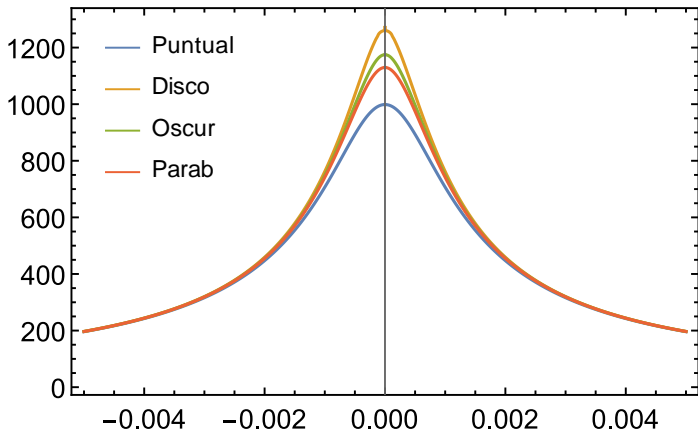


FIGURA 7. Curva de luz  $r_s = 0.001$   $b = 0.001$

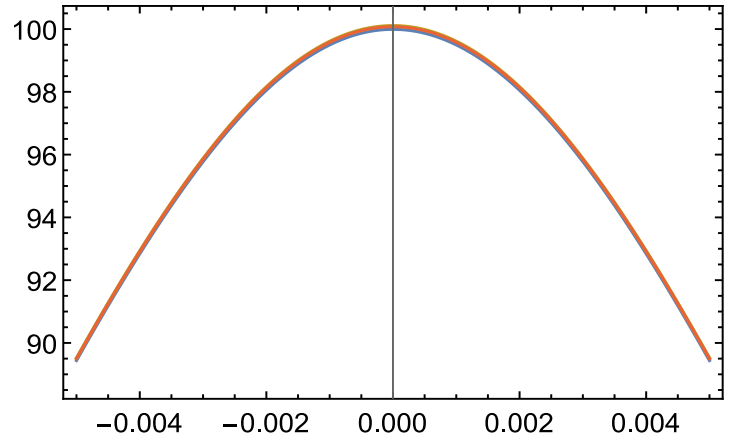


FIGURA 8. Curva de luz  $r_s = 0.001$   $b = 0.01$

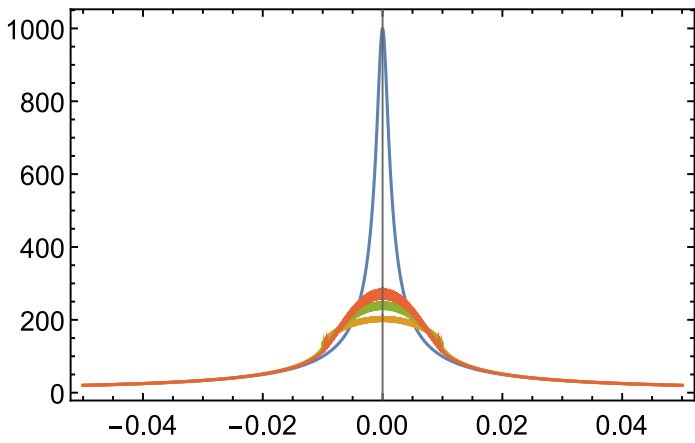


FIGURA 9. Curva de luz  $r_s = 0.01$   $b = 0.001$

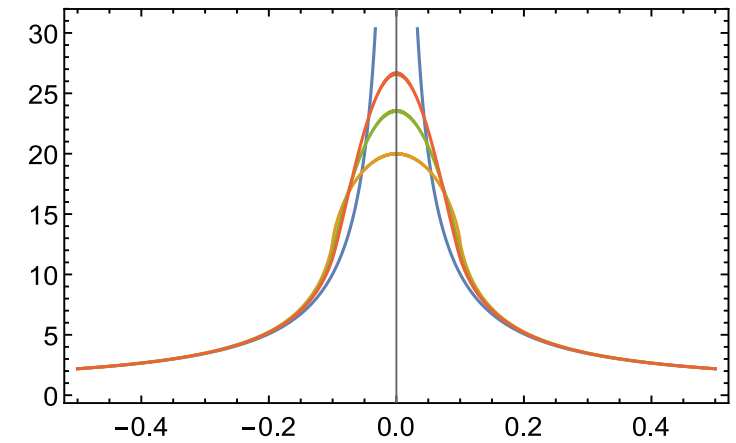


FIGURA 10. Curva de luz  $r_s = 0.1$   $b = 0.001$

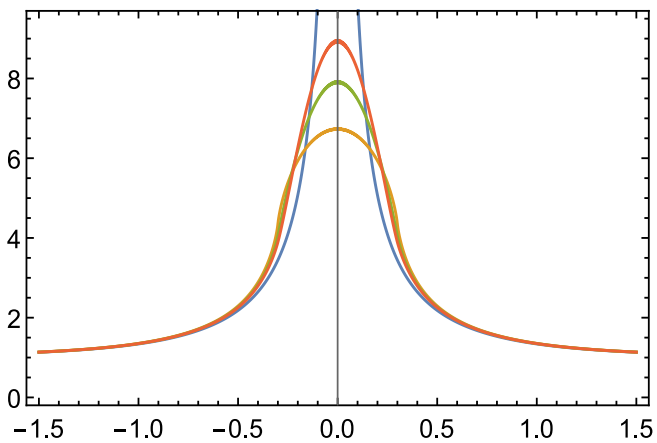


FIGURA 11. Curva de luz  $r_s = 0.3$   $b = 0.001$

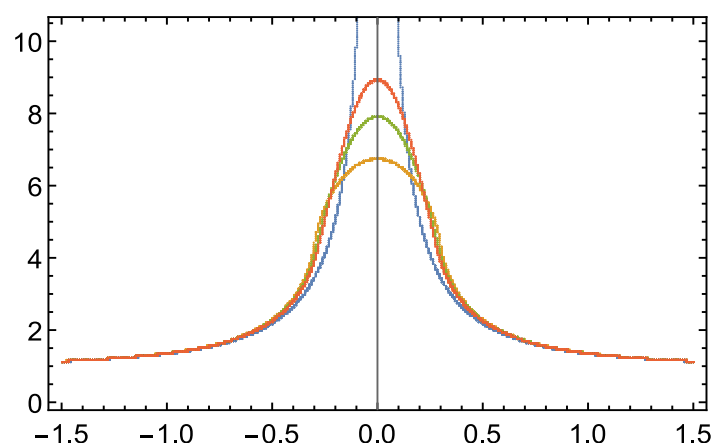


FIGURA 12. Curva de luz  $r_s = 0.3$   $b = 0.01$

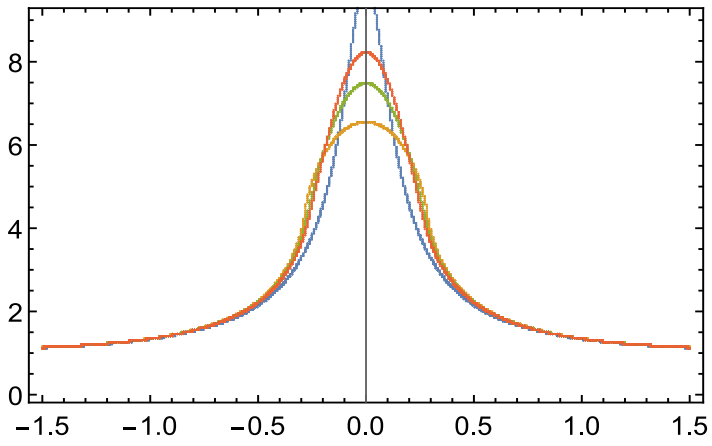


FIGURA 13. Curva de luz  $r_s = 0.3$   $b = 0.1$

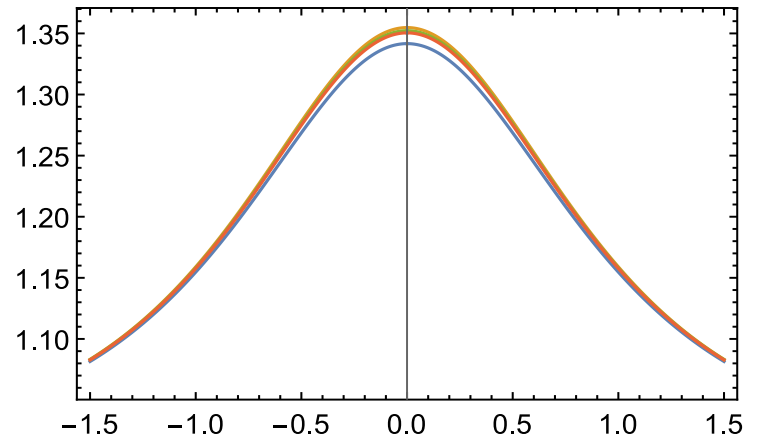


FIGURA 14. Curva de luz  $r_s = 0.3$   $b = 1$

# CAPÍTULO 2

## LENTES BINARIAS

Muchas de las estrellas que forman parte de nuestro universo son binarias, menos de la mitad de todas las estrellas son individuales como el Sol, así que parece adecuado estudiar el efecto lente gravitacional ocurrido por un sistema binario.

La separación relativa típica entre estrellas binarias debe ser del orden del radio de Einstein o mayores, esto es debido a que las estrellas que actúan como lentes son estrellas poco brillantes y masivas, que son las más abundantes.

Una binaria con una separación menor son estrellas que al encontrarse demasiado cerca están interactuando, tienen transferencia de materia, brillan mucho en rayos X y son menos abundantes.

### 2.1 Ecuación de la lente binaria. Curvas críticas y cáusticas.

Para el estudio de las lentes binarias utilizaremos el tratamiento utilizado para las fuentes extensas. Atendiendo a la ecuación (1.30), la ecuación de la lente para un sistema binario se corresponde con  $n = 2$  y, por lo tanto,

$$\zeta = z - \frac{m_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} - \frac{m_2}{\bar{z} - \bar{z}_2}. \quad (1.58)$$

El ángulo de deflexión resulta entonces,

$$\alpha(z) = \frac{m_1}{z - z_1} + \frac{m_2}{z - z_2} \quad (1.59)$$

Hay que tener en cuenta que  $\alpha(z)$  es analítico para todos los puntos excepto para  $z_j$  donde existen polos.

La ecuación (1.30) tiene  $5n - 5$  soluciones para  $n > 1$  (Kavinshon & Neumann, 2006, Theorem 1), cuya interpretación física se basa en que un sistema de  $n$  puntos producen un máximo de  $5n - 5$  imágenes (B.Congdon & R.Keeton, 2018). En nuestro caso obtendríamos 5 imágenes.

Una fuente lejos de una masa puntual aparece como dos imágenes, la primera se acerca asintóticamente a la posición real de la fuente con una magnificación correspondiente a la unidad, mientras que la segunda imagen se acerca a la posición de la lente con una magnificación que va desapareciendo.

Para el caso de una binaria, tendremos como imagen primaria con magnificación unidad y dos imágenes secundarias referentes a la lente.

La magnificación total de nuestro sistema de lente binario viene ilustrada en las ecuaciones (1.33) & (1.34). De forma análoga al caso de una lente puntual, ilustraremos esto en forma de las curvas de luz referidas a diferentes perfiles de estrellas y con diferentes configuraciones, como pueden ser el parámetro de impacto, como hemos visto anteriormente, así como la separación relativa entre las estrellas que forman el sistema binario  $D$ , la masa relativa entre ellas  $q$  y el ángulo respecto al eje  $x$  de la trayectoria  $\theta$ .

En lo referente a las curvas de luz se han determinado a través de un proyecto en Fortran, para su posterior representación utilizando el programa *Mathematica*.

Un caso interesante de estudio es cuando el determinante del Jacobiano es cero.

En las posiciones donde la fuente se mueve detrás de la binaria y resulta que el jacobiano se anula se forma la llamada curva crítica, como habíamos visto en el anterior capítulo para una lente puntual. Cuando la fuente cruza una curva crítica la amplificación se vuelve infinita.

De igual forma para lentes binarias, aplicando la ecuación de la lente, las posiciones de la curva crítica en el plano de la fuente se pueden mapear en el plano geométrico de la lente, lo que da como resultado curvas generalmente puntiagudas, conocidas como curvas cóusticas.

Recordemos que, en estas regiones, para el caso de una fuente puntual, la magnificación formalmente diverge. Debido a ello la aproximación de óptica geométrica deja de ser válida y es necesario realizar consideraciones acerca del carácter ondulatorio de la luz.

El patrón de difracción resultante predice valores de magnificaciones muy altos pero finitos (Ohanian, 1983).

Una fuente que se localice cerca de una cóustica producirá imágenes altamente magnificadas cerca de las correspondientes curvas críticas en el plano de la lente (Gonzalez, 2017).

El cambio de la posición de la lente no conduce a la creación de nuevas imágenes mientras no se cruce una cóustica. Cuando se cruza la cóustica un par de imágenes cercanas a la curva crítica correspondiente son creadas o destruidas dependiendo de la dirección en la cual se mueve la fuente.

Fuera de la curva cóustica hay tres imágenes, una fuera de la curva crítica y dos dentro de ella, generalmente cercana a una de las masas. Cuando se encuentra en ella, existen dos imágenes más, una dentro y otra fuera de la curva crítica.

Mientras que las curvas cóusticas dividen el plano de la fuente en regiones en las cuales el número de imágenes es constante, las curvas críticas dividen el plano de la imagen en regiones de paridad positiva  $\mu > 0$  y negativa  $\mu < 0$ .

Cabe destacar que las curvas críticas y cóusticas dependerán de la configuración del sistema binario, de la separación y masas relativas. Además, pueden ayudarnos al estudio de un objeto extenso teniendo en cuenta la distinción entre diferentes perfiles.

Una de las características de las curvas de luz dadas por una lente binaria es que aparecen desplazadas respecto del centro, a diferencia de las curvas de luz mostradas anteriormente debidas a lentes puntuales. Esto se puede observar en cada una de las figuras que se encuentran posteriormente.

Vemos que en determinadas configuraciones los diferentes perfiles extensos se solapan. En otros casos, como en las *figuras 25, 27, 28 & 29*, hay una clara distinción si la estrella es extensa con perfil constante, de oscurecimiento hacia al borde o parabólico.

Respecto a las *figuras 25 & 26*, el perfil de fuente puntual se desvía mucho más que los perfiles extensos con una configuración donde las masas de las estrellas que forman parte de la lente binaria son iguales.

En las *figuras 27 & 28*, debido a las configuraciones correspondientes hacen que la magnificación de una fuente con perfil puntual apenas sufra magnificación,

Finalmente, en lo respectivo a la *figura 29*, al tener una lente binaria en la cual la estrella 1 es menos masiva que la estrella 2, además de estar bastante separadas, se produce una curva de luz en la cual aparecen dos picos, siendo el de la izquierda, con menor magnificación, correspondiente a la estrella 2, y, el de mayor magnificación es el referido a la estrella 2.

Cabe destacar que las figuras referentes a las curvas de luz al eje  $y$  le corresponde el valor de la magnificación  $\mu$ , siendo el eje  $x$  el referido a  $vt/d_E$ .

Todas las configuraciones se han empleado en unidades del radio de Einstein como hemos ido haciendo anteriormente.

La línea azul hace referencia a la magnificación asociada a una lente binaria que amplifica una fuente puntual, la naranja una fuente extensa con perfil constante, la verde una fuente extensa con perfil oscurecimiento hacia al borde, y, la roja una fuente extensa con perfil parabólico.

Como finalización de este apartado, se mostrará una ilustración de curvas críticas con sus correspondientes cáusticas.

## LENTES BINARIAS

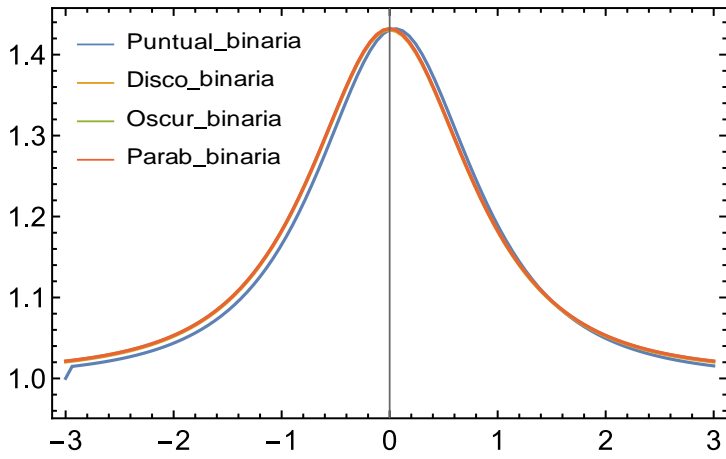


FIGURA 15. Curva de luz binaria 1

$$r_s = 0.03 \quad q = 0.01 \quad D = 0.1 \quad b = -1 \quad \theta = 0^\circ$$

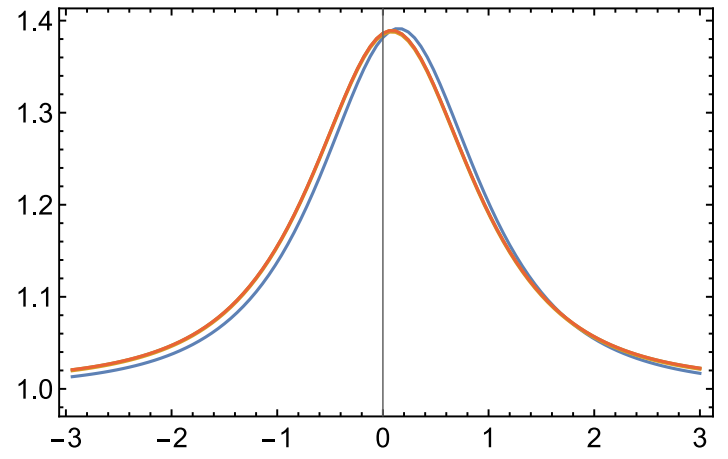


FIGURA 16. Curva de luz binaria 2

$$r_s = 0.03 \quad q = 0.01 \quad D = 0.1 \quad b = -1 \quad \theta = 60^\circ$$

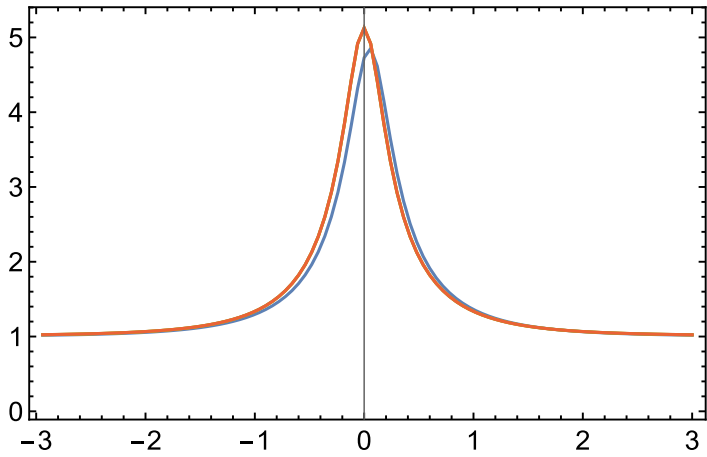


FIGURA 17. Curva de luz binaria 3

$$r_s = 0.03 \quad q = 0.01 \quad D = 0.1 \quad b = 0.1 \quad \theta = 0^\circ$$

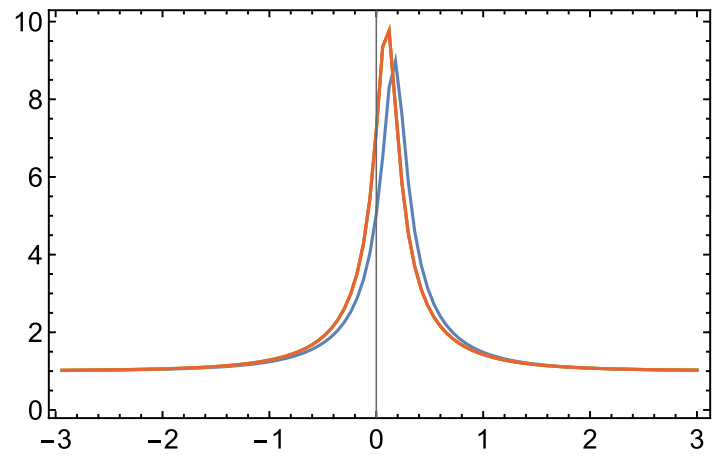


FIGURA 18. Curva de luz binaria 4

$$r_s = 0.03 \quad q = 0.01 \quad D = 0.1 \quad b = 0.1 \quad \theta = 90^\circ$$

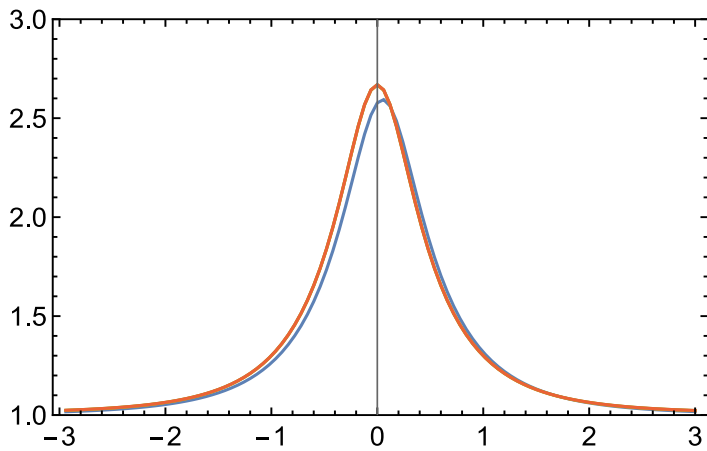


FIGURA 19. Curva de luz binaria 5

$$r_s = 0.03 \quad q = 0.01 \quad D = 0.1 \quad b = 0.3 \quad \theta = 0^\circ$$

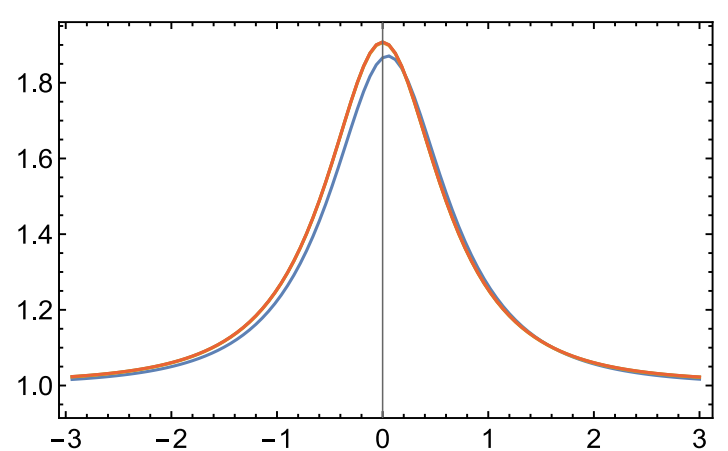


FIGURA 20. Curva de luz binaria 6

$$r_s = 0.03 \quad q = 0.01 \quad D = 1 \quad b = 1 \quad \theta = 90^\circ$$

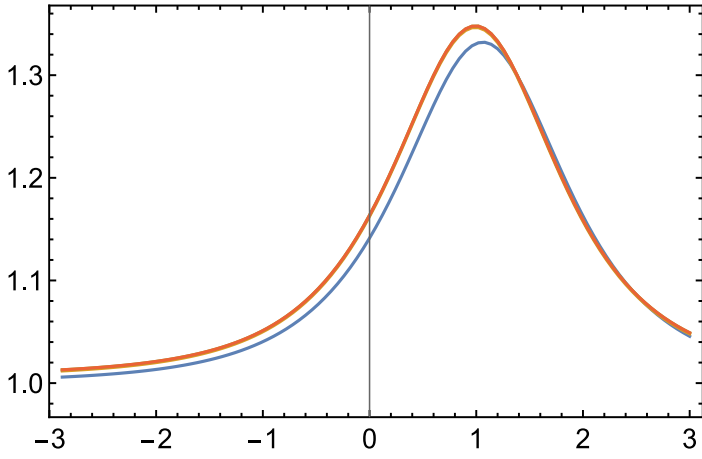


FIGURA 21. Curva de luz binaria 7

$$r_s = 0.03 \quad q = 0.3 \quad D = 1.0 \quad b = 1.0 \quad \theta = 90^\circ$$

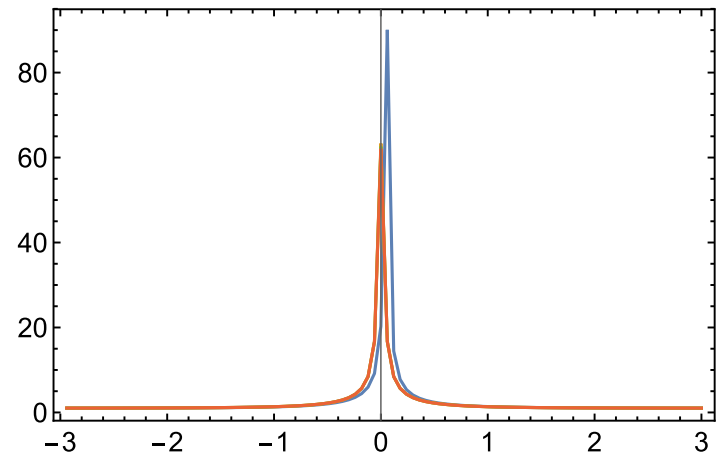


FIGURA 22. Curva de luz binaria 8

$$r_s = 0.03 \quad q = 0.03 \quad D = 0.3 \quad b = -0.3 \quad \theta = 0^\circ$$

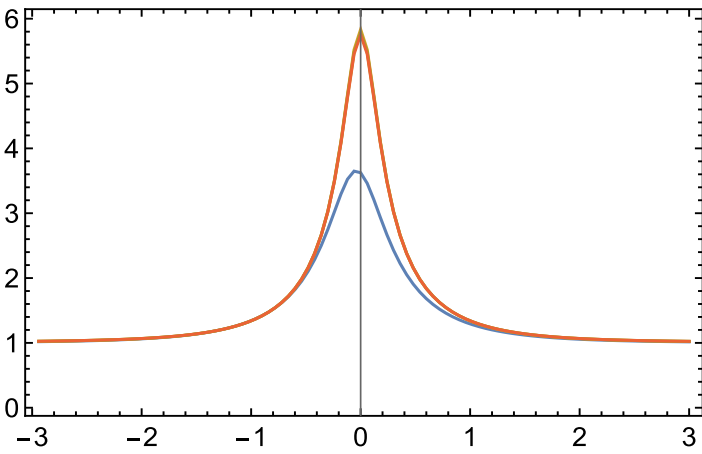


FIGURA 23. Curva de luz binaria 9

$$r_s = 0.1 \quad q = 0.01 \quad D = 0.1 \quad b = 0.1 \quad \theta = 30^\circ$$

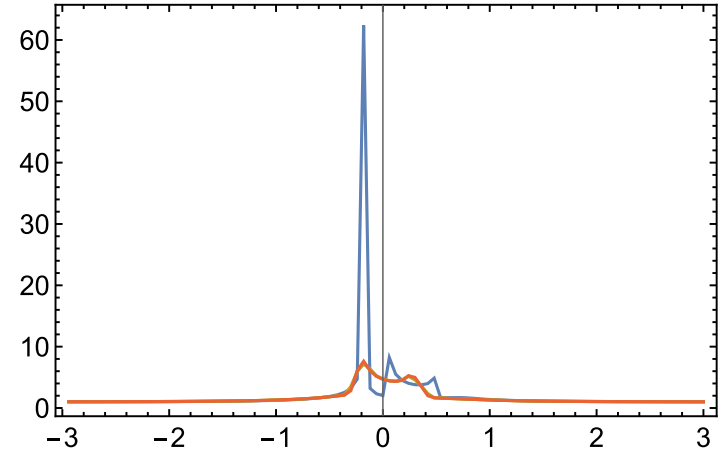


FIGURA 24. Curva de luz binaria 10

$$r_s = 0.1 \quad q = 1.0 \quad D = 0.1 \quad b = 0.1 \quad \theta = 45^\circ$$

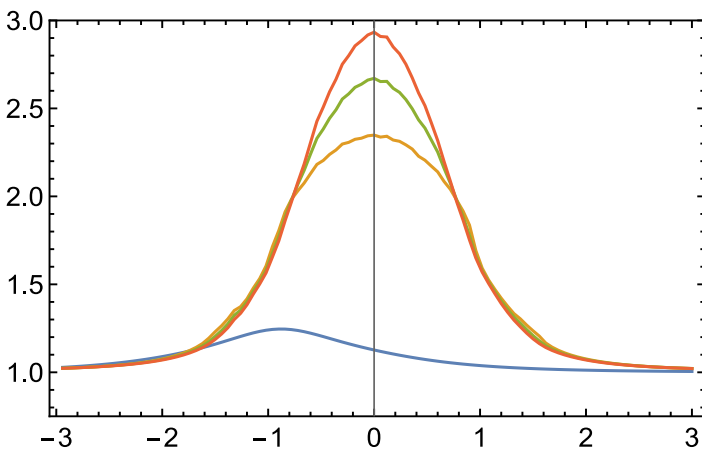


FIGURA 25. Curva de luz binaria 11

$$r_s = 1.0 \quad q = 1.0 \quad D = 1.0 \quad b = 0.1 \quad \theta = 5^\circ$$

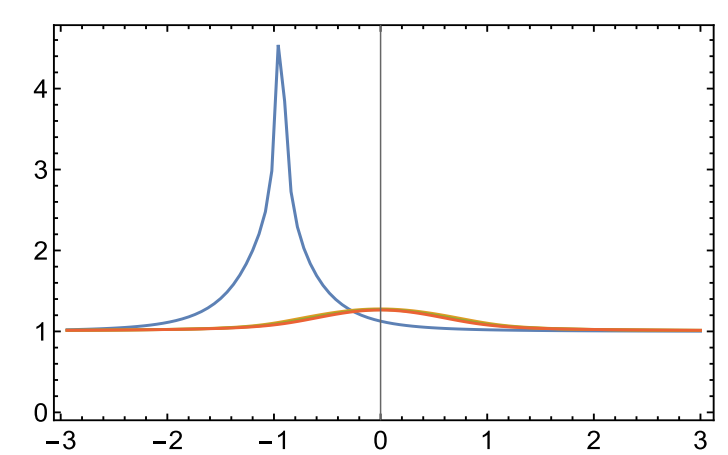


FIGURA 26. Curva de luz binaria 12

$$r_s = 1.0 \quad q = 1.0 \quad D = 3.0 \quad b = 0.01 \quad \theta = 5^\circ$$



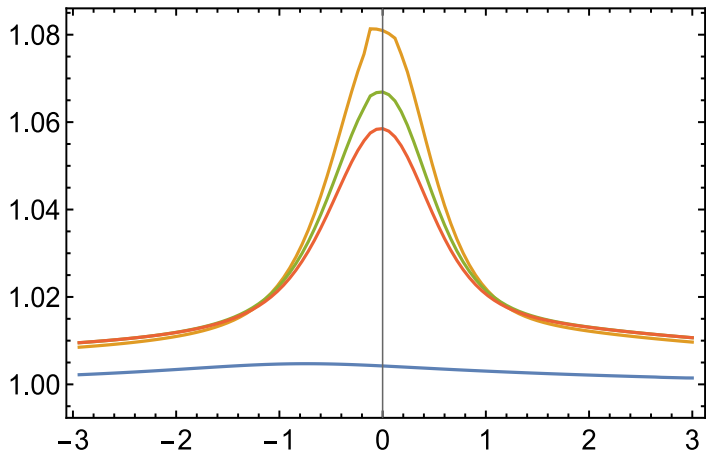


FIGURA 27. Curva de luz binaria 13

$$r_s = 1.0 \quad q = 0.1 \quad D = 3.0 \quad b = 1.0 \quad \theta = 10^\circ$$

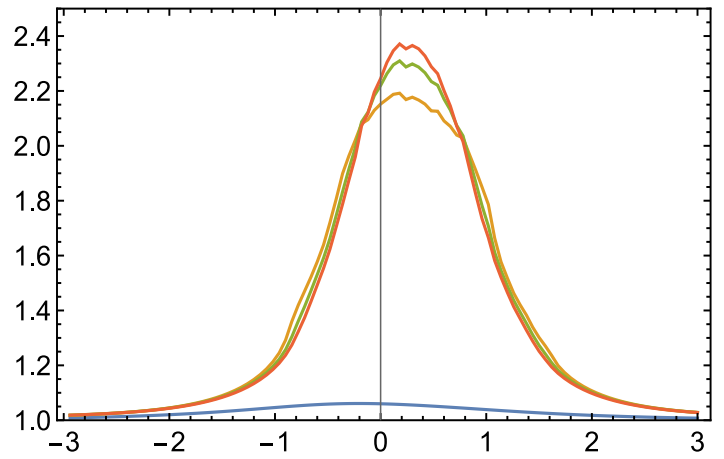


FIGURA 28. Curva de luz binaria 14

$$r_s = 1.0 \quad q = 0.3 \quad D = 1.0 \quad b = 0.1 \quad \theta = 30^\circ$$

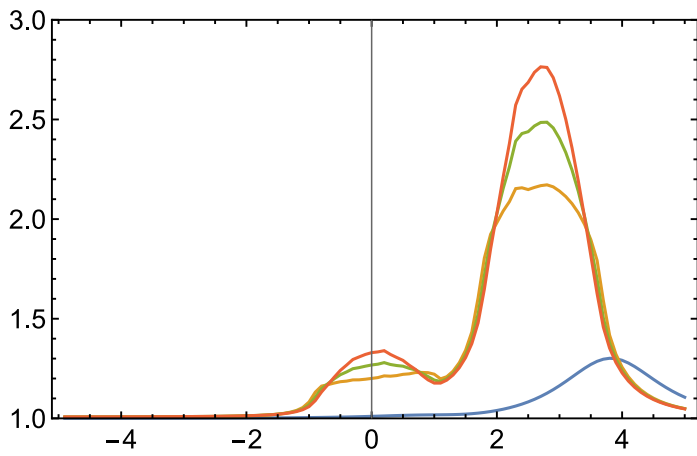


FIGURA 29. Curva de luz binaria 15

$$r_s = 1.0 \quad q = 0.1 \quad D = 3.0 \quad b = 0.01 \quad \theta = 90^\circ$$

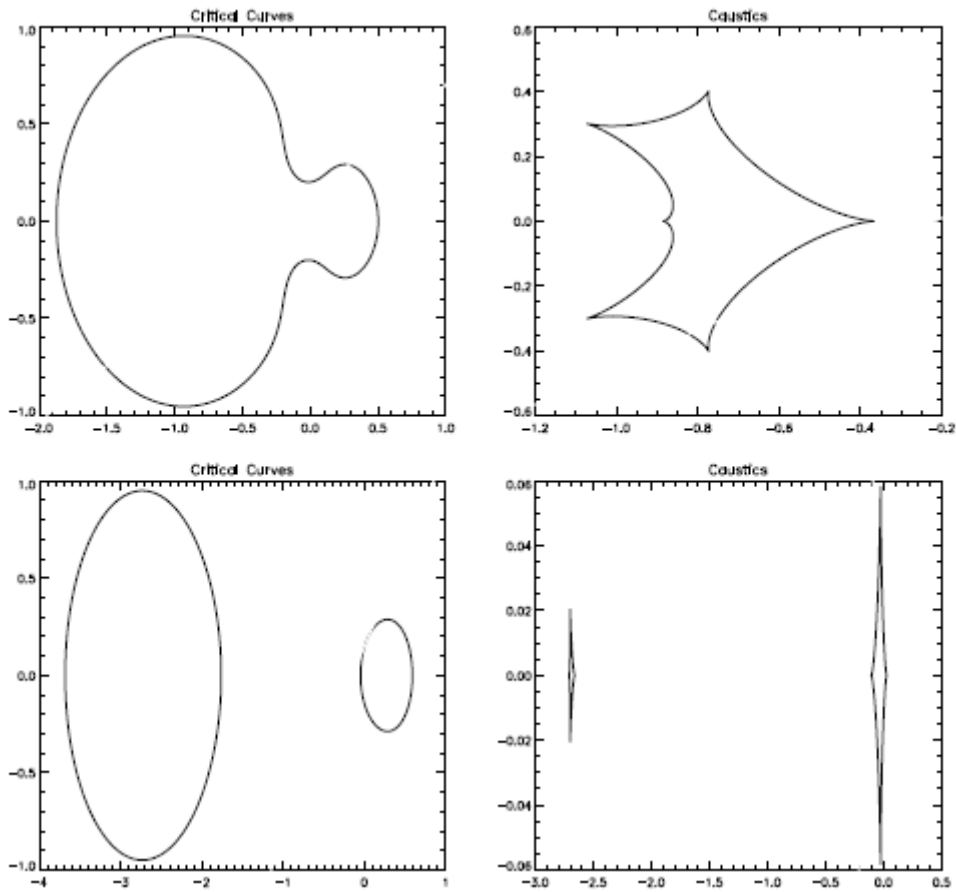


FIGURA 30. Curvas críticas con sus correspondientes curvas cáusticas  $q = 0.1$   $D=1.0$

## 2.2 Detectando fuentes extensas con lentes puntuales y binarias. ¿Qué configuraciones permiten determinar el carácter extenso de la lente?

Un objeto interesante de estudio es el referido a la detección, a través de las curvas de luz, si las lentes binarias consiguen distinguir más claramente los diferentes perfiles, o, por el contrario, son las lentes puntuales las que pueden a llegar a distinguir mejor.

Para realizar este trabajo hemos generado con nuestro programa en Fortran un conjunto de datos que reflejen tantos los diferentes perfiles, ya sean puntuales o extensos, de una lente binaria y una puntual para determinadas configuraciones. A partir de ello, podremos establecer una comparación.

Por analogía con el anterior apartado, donde se han mostrado diferentes configuraciones únicamente para la lente binaria, se realizará la comparación con dichas configuraciones añadiendo lo respectivo a la curva de luz que tendría si la lente fuese una lente puntual. Dichas comparaciones se encuentran en el mismo orden que las figuras para la lente binaria, siendo la *figura* 15 la correspondiente a la comparación dada en la *figura* 30, y así sucesivamente.

Respecto a los ejes de representación siguen siguiendo para el eje  $y$  el valor de la magnificación  $\mu$ , y el eje  $x$  el referido a  $vt/d_E$ .

Las líneas continuas hacen referencia a los diferentes perfiles de fuentes amplificadas por lentes binarias. La línea de color azul continua refleja la magnificación de una fuente puntual (*puntual\_binaria*), la naranja la de una fuente extensa con perfil de intensidad constante (*disco\_binaria*), la verde una fuente

extensa con perfil oscurecimiento hacia el borde (*oscur\_binaria*), y, finalmente la roja la de una fuente extensa con perfil parabólico (*parab\_binaria*).

Las líneas discontinuas hacen referencia a la magnificación de los diferentes perfiles de fuentes amplificadas por una lente puntual. La asignación de los colores es la misma que para el caso de la lente binaria.

Mediante un análisis cualitativo, dependiendo de las diferentes configuraciones, una lente binaria lograría distinguir mejor los diferentes perfiles de fuentes.

Esto puede verse en las curvas de luz expuestas a continuación, donde se diferencian con mayor claridad los perfiles de una fuente extensa cuando es amplificada por una lente binaria que cuando es amplificada por una puntual.

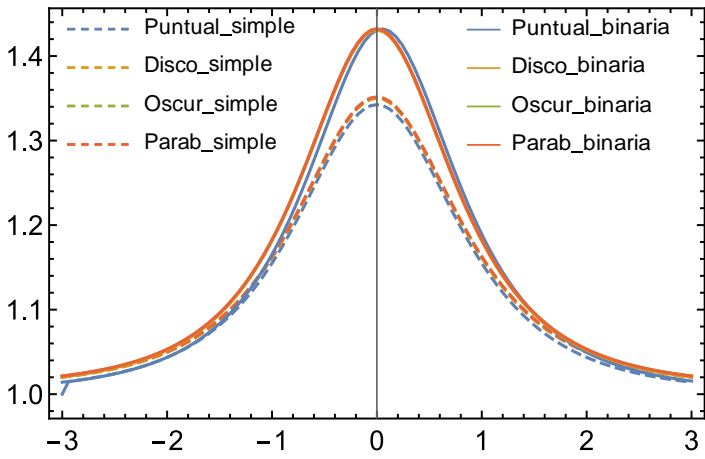


FIGURA 31. Comparación lente binaria y puntual 1

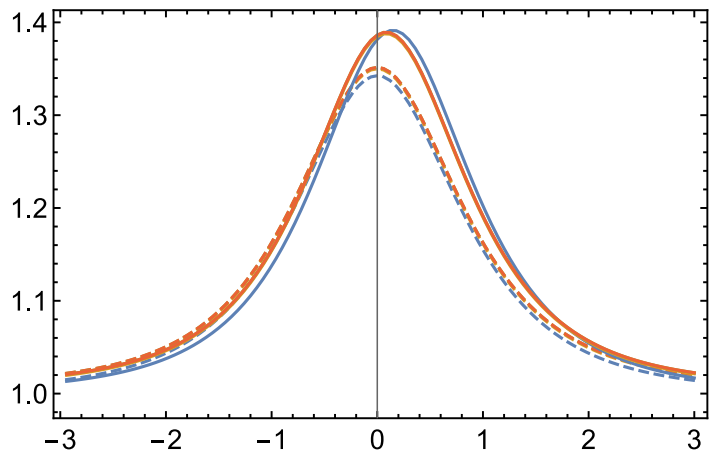


FIGURA 32. Comparación lente binaria y puntual 2

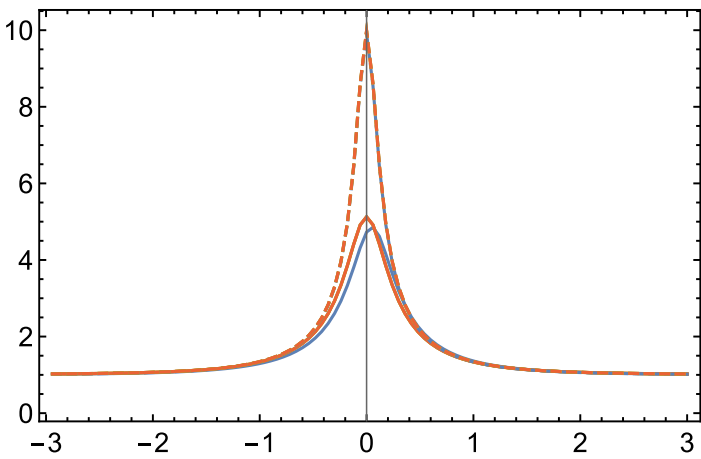


FIGURA 33. Comparación lente binaria y puntual 3

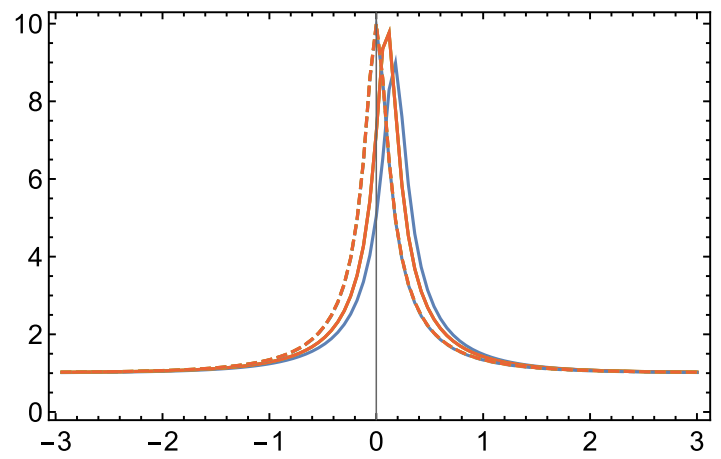


FIGURA 34. Comparación lente binaria y puntual 4

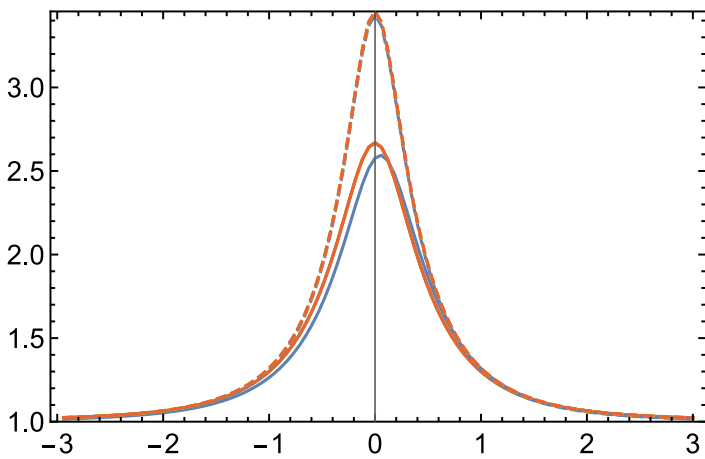


FIGURA 35. Comparación lente binaria y puntual 5

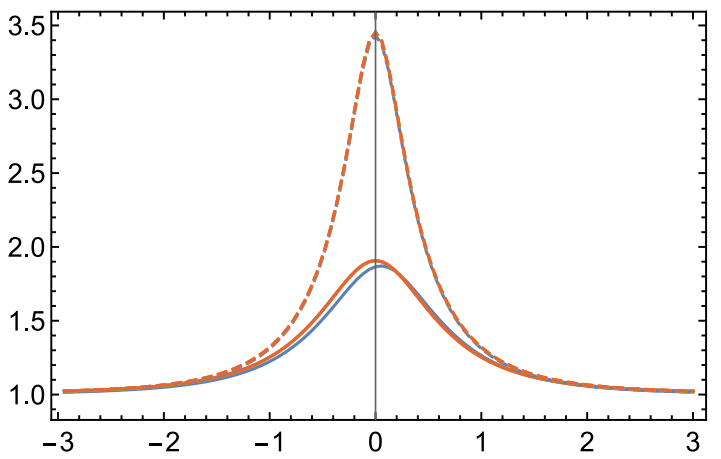


FIGURA 36. Comparación lente binaria y puntual 6

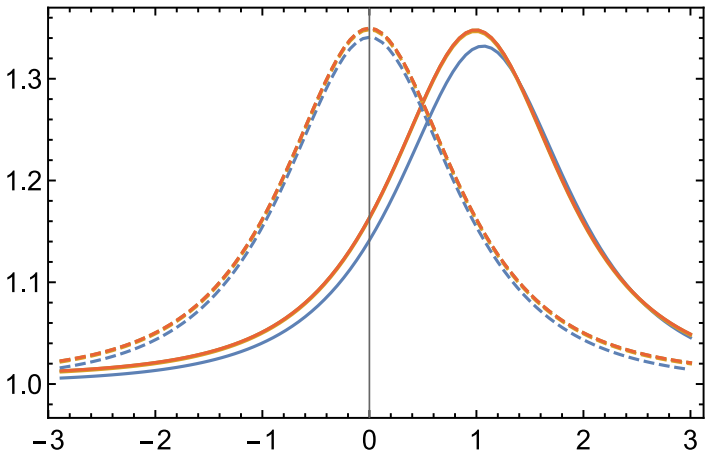


FIGURA 37. Comparación lente binaria y puntual 7

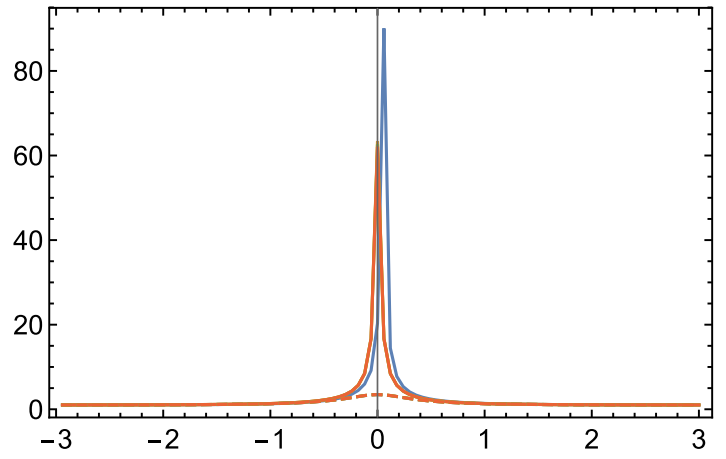


FIGURA 38. Comparación lente binaria y puntual 8

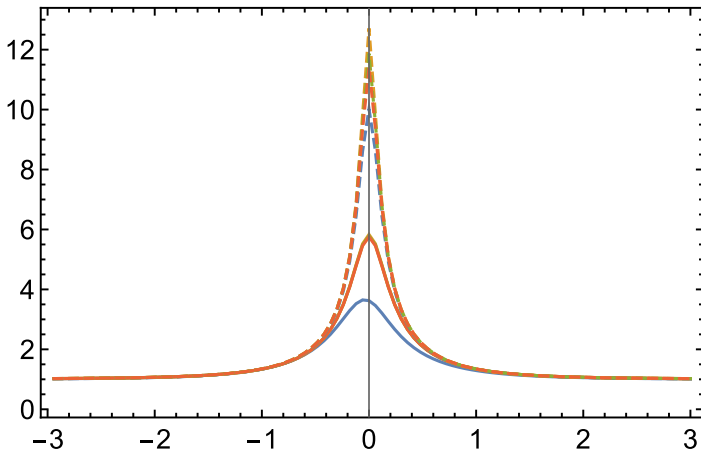


FIGURA 39. Comparación lente binaria y puntual 9

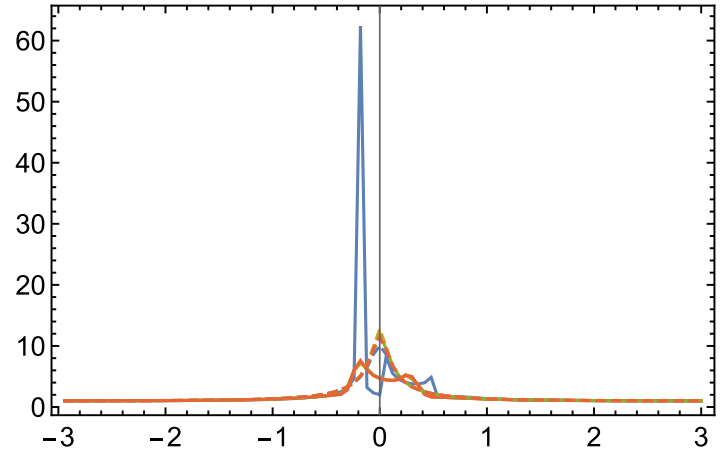


FIGURA 40. Comparación lente binaria y puntual 10

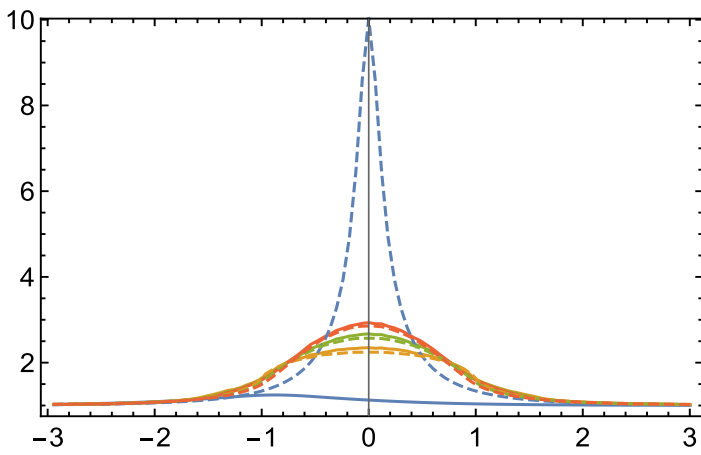


FIGURA 41. Comparación lente binaria y puntual 11

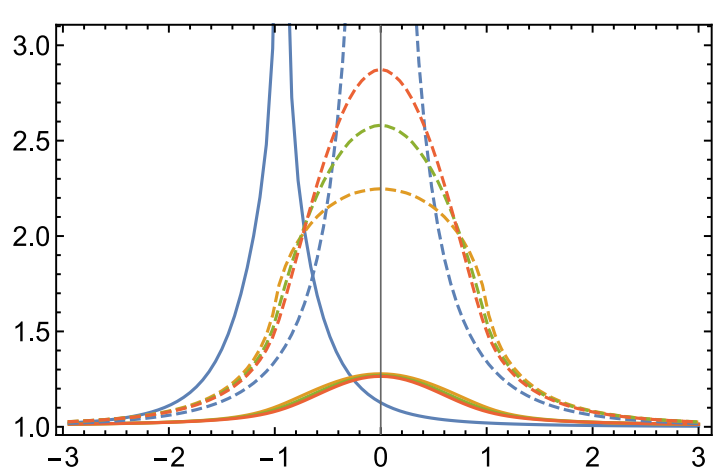


FIGURA 42. Comparación lente binaria y puntual 12

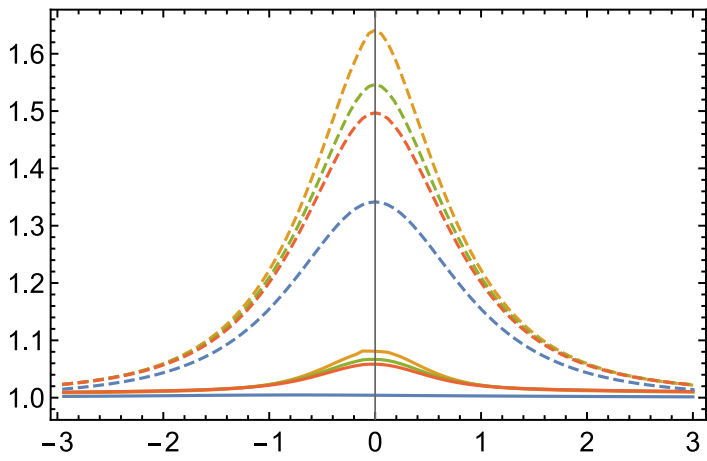


FIGURA 43. Comparación lente binaria y puntual 13

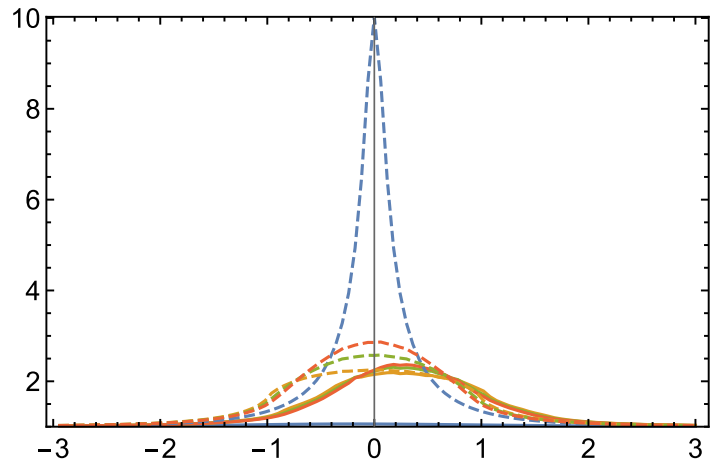


FIGURA 44. Comparación lente binaria y puntual 14

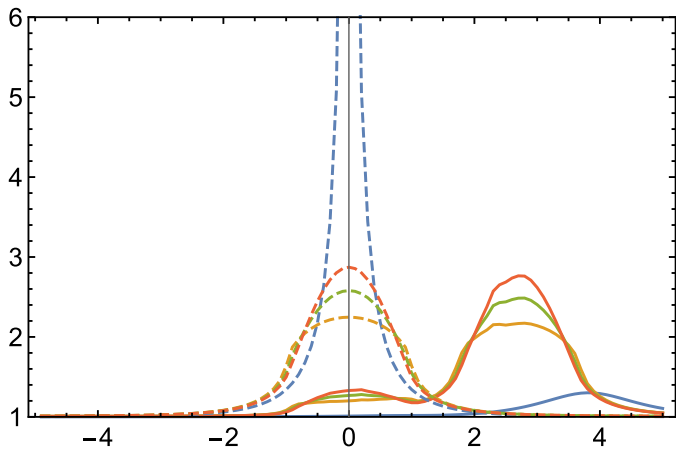


FIGURA 45. Comparación lente binaria y puntual 15

## Conclusiones

En este trabajo llevamos a cabo el estudio de lentes gravitacionales a través del efecto de microlente. Se ha hecho una introducción donde se resumen los aspectos fundamentales de las lentes gravitatorias desde sus inicios, sus numerosas aplicaciones y los diferentes programas observacionales a lo largo de los años.

Tras la obtención de un análisis para una lente puntual considerando fuentes puntuales donde se han expuesto las ecuaciones empleadas para la determinación de las diferentes curvas de luz, así como la ecuación de la lente y la magnificación; se ha logrado desarrollar un formalismo analítico que permite el cálculo de las curvas de luz de fuentes extensas con diferentes perfiles amplificadas por una lente puntual.

Se ha podido escribir la magnificación de una fuente extensa amplificada por una lente puntual en términos de integrales elípticas *ec* (1.37). Además de las soluciones analíticas se han presentado soluciones numéricas para los diferentes perfiles de fuentes extensas que hemos considerado a lo largo del trabajo, también se ha propuesto un método rápido para obtener soluciones exactas en el caso del perfil extenso con intensidad constante *ec* (1.43) a través de las funciones elípticas.

Los resultados obtenidos han sido ilustrados en las diferentes curvas de luz correspondientes a una fuente extensa amplificada por una lente puntual *fig*(7 – 14).

Nuestro siguiente objetivo consiste en realizar un análisis en el caso de tener una amplificación de una determinada fuente por una lente binaria.

Utilizando un procedimiento análogo al utilizado en el cálculo de la magnificación para fuentes extensas se ha podido completar nuestro objetivo ilustrando los resultados en las curvas de luz para diferentes configuraciones *fig*(15 – 29).



Finalmente se ha realizado un estudio, en el cual hemos concluido que una lente binaria permite determinar el carácter extenso de la fuente de una forma más evidente que una lente puntual. Esto se refleja en las diferentes figuras de curvas de luz expuestas al final de dicho apartado *fig(31 – 45)*.

## Conclusions

In this project we carry out the study of gravitational lenses through the microlensing effect. An introduction has been made which summarizes the fundamental aspects of gravitational lensing since its inception, its numerous applications, and the different observational programs over the years.

After obtaining an analysis for a point lens considering point sources where the equations used to determine the different light curves have been exposed, as well as the equation of the lens and the magnification; it has been possible to develop an analytical formalism that allows the calculation of the light curves of extended sources with different profiles amplified by a point lens.

It has been possible to write the magnification of a large source amplified by a point lens in terms of elliptical integrals *eq* (1.37). In addition to the analytical solutions, numerical solutions have been presented for the different profiles of extended sources that we have considered throughout the project, a fast method has also been proposed to obtain exact solutions in the case of the extended profile with constant intensity *eq* (1.43) through elliptic functions.

The results obtained have been illustrated in the different light curves corresponding to an extended source amplified by a point lens *fig* (7 – 14).

Our next objective is to carry out an analysis in the case of having an amplification of a certain source by a binary lens. Using a procedure analogous to the one used in calculating the magnification for extended sources, it was possible to complete our objective by illustrating the results in the light curves for different configurations *fig* (15 – 29).

Finally, a study has been done, in which we have concluded that a binary lens makes it possible to determine the extended nature of the source in a more evident way than a point lens. This is reflected in the different figures of light curves exposed at the end of said section *fig* (31 – 45).

# Índice de figuras

FIGURA 1. Trayectoria de un rayo de luz emitido por una fuente $S$ , es doblado por una lente $L$ , produciendo una imagen en $I$ vista por el observador $O$ .	15
FIGURA 2. Gráfica ángulo de Einstein	15
FIGURA 3. Gráfica radio de Einstein	15
FIGURA 4. Imagen múltiple lente gravitacional.	15
FIGURA 5. Anillos de Einstein. Hubble	18
FIGURA 6. Curvas de luz de una fuente puntual pasando cerca de una lente puntual para diferentes parámetros de impacto.	25
FIGURA 7. Curva de luz $rs = 0.001$ $b = 0.001$	39
FIGURA 8. Curva de luz $rs = 0.001$ $b = 0.01$	39
FIGURA 9. Curva de luz $rs = 0.01$ $b = 0.001$	39
FIGURA 10. Curva de luz $rs = 0.1$ $b = 0.001$	39
FIGURA 11. Curva de luz $rs = 0.3$ $b = 0.001$	39
FIGURA 12. Curva de luz $rs = 0.3$ $b = 0.01$	39
FIGURA 13. Curva de luz $rs = 0.3$ $b = 0.1$	40
FIGURA 14. Curva de luz $rs = 0.3$ $b = 1$	40
FIGURA 15. Curva de luz binaria 1	45
FIGURA 16. Curva de luz binaria 2	45
FIGURA 17. Curva de luz binaria 3	45
FIGURA 18. Curva de luz binaria 4	45
FIGURA 19. Curva de luz binaria 5	45
FIGURA 20. Curva de luz binaria 6	45
FIGURA 21. Curva de luz binaria 7	46
FIGURA 22. Curva de luz binaria 8	46
FIGURA 23. Curva de luz binaria 9	46
FIGURA 24. Curva de luz binaria 10	46
FIGURA 25. Curva de luz binaria 11	46
FIGURA 26. Curva de luz binaria 12	46
FIGURA 27. Curva de luz binaria 13	47
FIGURA 28. Curva de luz binaria 14	47
FIGURA 29. Curva de luz binaria 15	47
FIGURA 30. Curvas críticas y cáusticas	48
FIGURA 31. Comparación lente binaria y puntual 1	51
FIGURA 32. Comparación lente binaria y puntual 2	51
FIGURA 33. Comparación lente binaria y puntual 3	51
FIGURA 34. Comparación lente binaria y puntual 4	51

FIGURA 35. Comparación lente binaria y puntual 5	51
FIGURA 36. Comparación lente binaria y puntual 6	51
FIGURA 37. Comparación lente binaria y puntual 7	52
FIGURA 38. Comparación lente binaria y puntual 8	52
FIGURA 39. Comparación lente binaria y puntual 9	52
FIGURA 40. Comparación lente binaria y puntual 10	52
FIGURA 41. Comparación lente binaria y puntual 11	52
FIGURA 42. Comparación lente binaria y puntual 12	52
FIGURA 43. Comparación lente binaria y puntual 13	53
FIGURA 44. Comparación lente binaria y puntual 14	53
FIGURA 45. Comparación lente binaria y puntual 15	53

## Bibliografía

- A.Fukui et al. (2019). Kojima-1Lb Is a Mildly Cold Neptune around the Brightest Microlensing Host Star. *The Astronomical Journal*, 158(5).  
doi:<https://doi.org/10.3847/1538-3881/ab487f>
- Aguilera, C. (2005, 03). *A Next Generation Microlensing Survey of the LMC*. Retrieved 2021, from  
<https://web.archive.org/web/20060913133433/http://www.ctio.noao.edu/supermacho/>
- Alcock, C., Allsman, R., Alves, D., Ansari, R., Aubourg, E., Axelrod, T., . . . Zylberajch. (2009, 01 16). EROS and MACHO combined limits on planetary-mass dark matter in the Galactic halo. *The Astrophysical Journal Letters*.  
doi:10.1086/311355
- B.Congdon, A., & R.Keeton, C. (2018). Principles of Gravitational Lensing. In A. B.Congdon, & C. R.Keeton. Springer. doi:<https://doi.org/10.1007/978-3-030-02122-1>
- Gonzalez, E. J. (2017). Observación y análisis de sistemas astrofísicos usando fenómenos de lentes gravitacionales. Universidad de Córdoba.
- Greshko, M. (2019, 09 13). La utilidad de las lentes gravitacionales para calcular la expansión del universo. Retrieved from  
<https://www.nationalgeographic.es/espacio/2019/09/lentes-gravitacionales-calculan-expansion-universo-constante-de-hubble>
- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (2018). *Fundamental Astronomy* (6 ed.). Springer. doi:10.1007/978-3-662-53045-0
- MACHO Project Overview & Status*. (n.d.). Retrieved from  
<http://www.macho.anu.edu.au/Project/Overview/status.html>
- NASA. (n.d.). *Hubblesite*. Retrieved from  
<https://hubblesite.org/contents/articles/gravitational-lensing>
- NASA, E. a. (n.d.). *Hubblesite*. Retrieved from  
<https://hubblesite.org/contents/media/images/2005/32/1788-Image.html>

*Optical Gravitational Lensing Experiment - Wikipedia*. (n.d.). Retrieved 2021, from [https://es.vvikipedla.com/wiki/Optical\\_Gravitational\\_Lensing\\_Experiment](https://es.vvikipedla.com/wiki/Optical_Gravitational_Lensing_Experiment)

Paczynski, B. (1986). Gravitational Microlensing by the Galactic Halo. *The Astrophysical Journal*, 304.

Schneider, P., Ehlers, J., & Falco, E. E. (1992). *Gravitational Lenses*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Wambsganss, J. (1998). *Gravitational Lensing in Astronomy*. *Living Rev. Relativ.* 1, 12. doi:<https://doi.org/10.12942/lrr-1998-12>

WITT & Atrio-Barandela. (2019). Fast computational convolution methods for extended source effects in microlensing lightcurves.