

---

## Memoria Final

# Incorporación de TIC basados en Wolfram Mathematica a las asignaturas de Matemáticas del primer curso de las titulaciones de Economía y Empresa

Proyecto ID2019/145

---

M. AURORA MANRIQUE, [amg@usal.es](mailto:amg@usal.es)

M. DOLORES GARCÍA, [dgarcia@usal.es](mailto:dgarcia@usal.es)

GUSTAVO SANTOS, [santos@usal.es](mailto:santos@usal.es)

J. MANUEL CASCÓN, [casbar@usal.es](mailto:casbar@usal.es)

BERNARDO GARCÍA-BERNALT, [bgarcia@usal.es](mailto:bgarcia@usal.es)

Dpto. Economía e Historia Económica  
Facultad de Economía y Empresa  
Edificio FES  
Campus Miguel de Unamuno, Salamanca

## Índice

|   |    |
|---|----|
| 1. Introducción   | 2  |
| 2. Información del proyecto y miembros del equipo de trabajo    | 2  |
| 3. Objetivos del proyecto                                       | 2  |
| 4. Experiencias de innovación docente previas del grupo docente | 3  |
| 5. Material desarrollado  | 4  |
| 6. Difusión de resultados                                       | 6  |
| 7. Conclusiones y trabajo futuro                                | 10 |

## 1. Introducción

Este documento constituye la memoria final de un proyecto de innovación y mejora docente correspondiente a la Convocatoria de Ayudas de la Universidad de Salamanca a Proyectos de Innovación y Mejora Docente Curso 2019-2020 de la Universidad de Salamanca.

## 2. Información del proyecto y miembros del equipo de trabajo

A continuación se incluye información específica sobre el proyecto.

|                    |  |
|--------------------|--|
| Título:            | Incorporación de TIC basadas en <i>Wolfram Mathematica</i> a las asignaturas de Matemáticas del primer curso de las titulaciones de Economía y Empresa   |
| Referencia:        | ID2019/145   |
| Tipo de acción:    | 1. Innovación en metodologías docentes para el desarrollo de competencias generales o específicas  |
| Financiación :     | 0 €  |
| Coordinador:       | M. Aurora Manrique García ( <a href="mailto:amg@usal.es">amg@usal.es</a> , Tlf 663005847)  |
| Equipo de trabajo: | J. Manuel Cascón Barbero ( <a href="mailto:casbar@usal.es">casbar@usal.es</a> , Tlf 663184903)<br>M. Dolores García Sanz ( <a href="mailto:dgarcia@usal.es">dgarcia@usal.es</a> , Tlf 670801096)<br>Bernardo García-Bernalt Alonso ( <a href="mailto:bgarcia@usal.es">bgarcia@usal.es</a> , Tlf 663184595)<br>Gustavo Santos García ( <a href="mailto:santos@usal.es">santos@usal.es</a> , Tlf 663183587)<br>M. José Muñoz Torrecillas ( <a href="mailto:mjtorre@usal.es">mjtorre@usal.es</a> , Tlf 950214035) |

## 3. Objetivos del proyecto

El equipo de trabajo está formado por profesores de Matemáticas del Departamento de Economía e Historia Económica con amplia experiencia en la docencia y elaboración de materiales docentes.

Las Matemáticas, disciplina instrumental en las titulaciones de la Facultad, no pueden servir solo como mera herramienta de cálculo para nuestros estudiantes sino que deben fomentar en ellos capacidades de análisis y razonamiento que serán fundamentales en su trayectoria académica y profesional. Por lo tanto, en el proceso de enseñanza-aprendizaje

es preciso utilizar métodos adecuados que mejoren la formación global de los estudiantes y no se centren solo en la transmisión de contenidos y conocimientos.

Aprovechando los recursos de la Universidad, en este proyecto pretendemos elaborar un material complementario para la resolución de ejercicios y problemas de las asignaturas de Matemáticas de primer curso de nuestras titulaciones con el software *Wolfram Mathematica*.

Además de introducir a nuestros estudiantes en el uso de la aplicación *Mathematica*, nuestros principales objetivos son facilitar la comprensión y el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de habilidades de análisis y razonamiento así como fomentar la participación activa de los alumnos y mejorar su rendimiento académico.

## 4. Experiencias de innovación docente previas del grupo docente

El grupo de trabajo ha participado en numerosos proyectos de Innovación y Mejora Docente. Los más significativos, dirigidos al diseño y elaboración de materiales para un Curso Cero de Matemáticas que se pretende implantar en modalidad semipresencial en los próximos años, son los siguientes:

En el proyecto ID2016/034 “*Elaboración de materiales didácticos virtuales para un Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa*”, desarrollamos materiales de apoyo para los estudiantes de primer curso de las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa (enlace a material en Gredos <http://hdl.handle.net/10366/133328>).

En el proyecto ID2017/114 “*Estudio de adecuación e idoneidad de materiales didácticos virtuales para un Curso Cero de Matemáticas para las Titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa*”, llevamos a cabo un estudio en el que participaron estudiantes de primer curso de la Facultad y profesores de Enseñanza Secundaria con el fin de intentar adecuar y depurar el material adaptándolo a las necesidades reales de los alumnos.

El proyecto ID2018/128 “*Introducción al lenguaje formal y técnicas de demostración orientados a las Titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa*” (enlace a material en Gredos <https://gredos.usal.es/handle/10366/139614>) surgió para subsanar las principales carencias detectadas entre las que destacan el desconocimiento del lenguaje matemático y de las técnicas de demostración matemática y la falta de temas de Probabilidad y Estadística.

Para dar respuesta a este último aspecto, varios profesores del perfil de Estadística del Departamento de Economía e Historia Económica desarrollaron el Proyecto ID2018/189 “*Curso cero de Estadística y Probabilidad*” para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa (enlace a material en Gredos <https://gredos.usal.es/handle/10366/139613>).

Los resultados de los proyectos mencionados han sido presentados en sucesivas ediciones del Congreso Anual de ASEPUMA (Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economía y la Empresa). En la edición del año 2019, la comunicación

“El lenguaje formal y las demostraciones en Matemáticas para la Facultad de Economía y Empresa” recibió el Premio ASEPUMA a la Innovación Docente (<http://www.asepuma.org/premiadosdocencia.php>).

## 5. Material desarrollado

Siguiendo en la línea de trabajo del equipo sobre innovación docente en torno a las asignaturas de formación matemática básica comunes en las Facultades de Economía y Empresa de nuestro país, en este proyecto hemos abordado la integración en la docencia de herramientas matemáticas de cálculo simbólico. En este caso, hemos utilizado el software *Mathematica*, desarrollado por *Wolfram Alpha*, porque la Universidad de Salamanca posee una licencia de campus, y, por lo tanto, es accesible para todos sus alumnos.

El uso de *Mathematica* nos ha ayudado a transformar la percepción de las matemáticas por parte de nuestros estudiantes. Además, nos ha permitido obviar las dificultades básicas de cálculo que tienen un número importante de alumnos de las titulaciones de nuestra Facultad puesto que nos ha permitido centrarnos en los aspectos conceptuales, en las estrategias de cálculo y demostración y en el análisis de los procedimientos y la sintaxis de los sistemas simbólicos, accediendo de este modo a actividades matemáticas de nivel más avanzado. Asimismo, dado que el programa integra gráficas, cálculo simbólico y programación, *Mathematica* nos ha resultado una herramienta docente especialmente útil para establecer fácilmente conexiones entre distintos modelos matemáticos (por ejemplo, una función puede contemplarse en modo tabular, gráfico y analítico).

El material desarrollado está dirigido a los alumnos de primer curso del Grado en Administración y Dirección de Empresas de la Facultad de Economía y Empresa de la Universidad de Salamanca. En ese curso impartimos dos asignaturas de 6 créditos ECTS cada una, Álgebra, asignatura de formación básica, en el primer cuatrimestre y Análisis Matemático, obligatoria, en el segundo cuatrimestre. El material, que está disponible en la plataforma docente Studium, se ha estructurado en cinco prácticas en formato de notebooks de *Mathematica*, y se ha implementado tanto en las clases magistrales de dichas asignaturas, como en varios seminarios con grupos de unos 30 alumnos con el fin de conseguir una mayor atención por parte de nuestros estudiantes, mayor interacción y aumentar el feed-back.

Mientras que las prácticas 1 y 2 se han trabajado en un seminario de la asignatura de Álgebra, el resto de las prácticas se han desarrollado en tres seminarios de la asignatura de Análisis Matemático. A pesar de que en el programa de Análisis Matemático no hay un tema específico dedicado al estudio de funciones de una variable, hemos incluido una revisión de las mismas antes de abordar las funciones de varias variables, cuyo estudio constituye el grueso de la asignatura.

En el momento de la declaración del Estado de alarma, el proyecto estaba en fase de desarrollo y ha podido concluirse en un escenario de docencia no presencial convocando a los estudiantes a una sala de reuniones o plataforma encuadrada dentro de las aplicaciones concertadas de la Universidad de Salamanca. En concreto, el seminario de Álgebra fue impartido presencialmente en el primer cuatrimestre mientras que los seminarios de

Análisis se han desarrollado por videoconferencia en tiempo real usando *Blackboard Collaborate* y dejando la sesión grabada. Nuestra impresión es que los alumnos interesados han participado de forma activa en ambas modalidades.

Describimos ahora brevemente el contenido de las prácticas.

- La primera práctica es una introducción donde mostramos las características básicas de *Mathematica* y nos centramos en las funcionalidades relacionadas con las asignaturas mencionadas. Como en muchos casos esta es la primera vez que nuestros estudiantes utilizan un lenguaje de cálculo simbólico, nuestras primeras observaciones son muy elementales: hacemos referencia al significado y potencial de estas herramientas, la estructura y formatos de entrada y salida de la información, las reglas de denominación de funciones, operadores y delimitadores, la diferencia entre los operadores de asignación y comparación, los distintos tipos de ayuda, el modo lingüístico, etc. A continuación, detallamos cómo definir variables y funciones, y presentamos animaciones en *Mathematica*. Terminamos con un glosario de los comandos de *Mathematica* utilizados en este material.
- *Mathematica* es una gran herramienta para visualizar y realizar cálculos muy potentes. En particular, la capacidad de este software para las operaciones con matrices, la resolución de sistemas de ecuaciones, el cálculo de valores y vectores propios, etc., permite una docencia de la asignatura de Álgebra Lineal más ágil y centrada en los conceptos, además de atraer la atención de nuestros estudiantes, para los que el Álgebra pasa a ser una asignatura mucho más visual e interactiva. Podemos también poner en práctica todo lo aprendido en clase con un número de datos elevado o con matrices de dimensiones mayores sin que ello ocasione problemas de cálculo.

La práctica 2 está dedicada a abordar todas estas cuestiones: vectores y matrices, operaciones básicas con matrices, resolución de sistemas de ecuaciones, aplicaciones lineales, diagonalización de endomorfismos y formas cuadráticas. Terminamos con un ejemplo ilustrativo del algoritmo *PageRank*, utilizado por Google para ordenar los resultados de la búsqueda. A cada página web se le asigna un número en función de la cantidad de enlaces de otras páginas que la apuntan, el valor de esas páginas y otros criterios no públicos.

- Aunque en la Introducción a la práctica 1 ya mencionamos las características que debe cumplir una variable (estática y dinámica) en *Mathematica* y cómo se definen funciones, en la práctica 3 incluimos algún ejemplo a modo de recordatorio breve antes de introducir las sucesiones, que se definen usando la misma sintaxis, y las series. En esta práctica, además, se revisan los límites de sucesiones y se realiza un estudio detallado de la convergencia de series.
- Aunque los comandos que permiten la representación gráfica de funciones ya han sido introducidos anteriormente, los recordamos en la práctica 4 no solo para que esta sea autocontenida sino fundamentalmente porque, en nuestra opinión, no tiene

sentido aislar el estudio de las funciones de su gráfica. También revisamos las funciones elementales: exponencial, logarítmica y funciones trigonométricas (seno, coseno) y los conceptos sobre simetría y traslación de funciones y presentaremos los comandos que utiliza *Mathematica* para la resolución de ecuaciones algebraicas, tanto de forma exacta como aproximada. El resto de la práctica está dedicada al cálculo diferencial y algunas aplicaciones del mismo y al cálculo integral.

- En la práctica 5 presentamos las herramientas que permiten dibujar funciones de dos variables con valores reales. A continuación, calculamos los límites reiterados y direccionales de funciones de dos variables. Continuaremos con el cálculo diferencial. De nuevo, con el objetivo de hacer esta práctica autocontenida, recordamos los comandos necesarios para el proceso de optimización antes de estudiar la optimización sin restricciones (o en abiertos) y con restricciones de igualdad y desigualdad. Terminamos con el ejemplo ilustrativo, el modelo de cartera de Markowitz, que permite hallar la cartera de inversión óptima para cada inversor en términos de rentabilidad y riesgo eligiendo adecuadamente los activos de dicha cartera.

La estructura de las práctica figura detallada en la tabla de contenidos de la sección 6.

## 6. Difusión de resultados

Para aportar visibilidad a los resultados del proyecto, en la solicitud del proyecto manifestamos nuestra intención de presentar dichos resultados en el Congreso Anual de ASEPUMA (Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economía y la Empresa)”.

Debido al estado de alarma, las XXVIII Jornadas Asepuma - XVI Encuentro Internacional, organizadas por el Departamento de Teoría Económica y Economía Matemática y la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), que se iban a celebrar en Madrid los días 18 y 19 de junio de 2020, han tenido que ser canceladas. La Junta Directiva acordó aplazar la celebración de dichas Jornadas al mes de junio de 2021 y dar la posibilidad a los autores de que las comunicaciones aceptadas figuren publicadas en la revista ANALES DE ASEPUMA de 2020. En el momento de redactar esta memoria, la comunicación titulada *Recursos con Mathematica para la docencia de Álgebra y Análisis en las titulaciones de Economía y Empresa* está en proceso de revisión para su publicación en dicha revista.

Por otro lado, el material desarrollado está a disposición de la comunidad universitaria a través del repositorio Gredos.

A continuación figura la ficha de este material en Gredos:

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Título:               | Prácticas con <i>Mathematica</i> para las asignaturas de Álgebra y Análisis de FEyE  |
| Autores:              | M.A. Manrique García<br>J. Manuel Cascón Barbero<br>M. Dolores García Sanz<br>Bernardo García-Bernalt Alonso<br>Gustavo Santos García  |
| Fecha de publicación: | 2020   |
| Editor:               | Universidad de Salamanca (España)  |
| URL:                  | <a href="http://hdl.handle.net/10366/143533">http://hdl.handle.net/10366/143533</a>  |
| Descripción:          | Este material es un manual básico de <i>Mathematica</i> orientado a las asignaturas de Álgebra y Análisis de las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa.  |
| Tabla de contenidos:  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Introducción a <i>Mathematica</i> y glosario de comandos. <ol style="list-style-type: none"> <li>1.1. Introducción</li> <li>1.2. Variables <ol style="list-style-type: none"> <li>1.2.1. Definición</li> <li>1.2.2. Borrar el contenido de una variable</li> <li>1.2.3. Variable %</li> <li>1.2.4. Asignación estática y dinámica</li> </ol> </li> <li>1.3. Funciones <ol style="list-style-type: none"> <li>1.3.1. Definición y representación gráfica</li> </ol> </li> <li>1.4. Animaciones en <i>Mathematica</i></li> <li>1.5. Glosario de comandos en <i>Mathematica</i></li> </ol> </li> <li>2. Álgebra Lineal con <i>Mathematica</i> <ol style="list-style-type: none"> <li>2.1. Introducción</li> <li>2.2. Vectores y matrices</li> <li>2.3. Operaciones básicas con matrices</li> <li>2.4. Resolución de sistemas de ecuaciones</li> <li>2.5. Aplicaciones lineales</li> <li>2.6. Diagonalización</li> </ol> </li> </ol> |

- 2.7. Formas cuadráticas
- 2.8. Ejemplo. Búsqueda en la red. Algoritmo *PageRank*
  - 2.8.1. Bibliografía
- 3. Sucesiones y series de números reales con *Mathematica*
  - 3.1. Introducción
  - 3.2. Sucesiones
    - 3.2.1. Definición
    - 3.2.2. Gráficas
    - 3.2.3. Límites
    - 3.2.4. Ejercicios
  - 3.3. Series
    - 3.3.1. Sumas parciales y formales
    - 3.3.2. Sumas infinitas
    - 3.3.3. Convergencia
    - 3.3.4. Ejercicios
- 4. Funciones reales de variable real: representación gráfica, derivación e integración con *Mathematica*
  - 4.1. Introducción
  - 4.2. Representación gráfica
    - 4.2.1. Funciones en forma explícita
    - 4.2.2. Funciones en forma implícita
    - 4.2.3. Funciones en forma paramétrica
    - 4.2.4. Funciones elementales: Exponencial, Logaritmo, Seno, Coseno
    - 4.2.5. Simetrías y traslaciones
  - 4.3. Resolución de ecuaciones
    - 4.3.1. Resolución analítica
    - 4.3.2. Resolución numérica
  - 4.4. Cálculo diferencial
    - 4.4.1. Cálculo de derivadas
    - 4.4.2. Cálculo de máximos, mínimos y puntos de inflexión
    - 4.4.3. Desarrollo de Taylor
  - 4.5. Integración

- 4.5.1. Integral indefinida
- 4.5.2. Integral definida
- 4.5.3. Integral impropia
- 4.5.4. Integración numérica
- 4.5.5. Aplicaciones geométricas
- 4.6. Ejemplo- Elasticidad de la demanda
- 4.7. Ejercicios
- 5. Funciones de varias variables: cálculo diferencial y optimización con *Mathematica*
  - 5.1. Introducción
  - 5.2. Representación gráfica
  - 5.3. Cálculo de límites
    - 5.3.1. Límites reiterados
    - 5.3.2. Límites direccionales
  - 5.4. Cálculo diferencial
    - 5.4.1. Cálculo de derivadas parciales
    - 5.4.2. Gradiente, jacobiano, diferencial
    - 5.4.3. Derivada direccional
    - 5.4.4. Hessiano
    - 5.4.5. Polinomio de Taylor
  - 5.5. Comandos útiles
  - 5.6. Optimización en abiertos (sin restricciones)
    - 5.6.1. Extremos locales
    - 5.6.2. Extremos globales
  - 5.7. Optimización con restricciones de igualdad
    - 5.7.1. Reducción a un extremo ordinario
    - 5.7.2. Multiplicadores de Lagrange
    - 5.7.3. Extremos globales
  - 5.8. Optimización con restricciones de desigualdad
    - 5.8.1. Extremos locales
    - 5.8.2. Extremos absolutos
  - 5.9. Optimización con *Mathematica*

## 5.10. Ejemplos.

### 5.10.1. Elasticidad de la demanda

#### 5.10.1.1. Cuaderno de *Mathematica*

#### 5.10.1.2. Bibliografía

### 5.10.2. Modelo de cartera de Markowitz

#### 5.10.2.1. Carteras eficientes

#### 5.10.2.2. Riesgo y cartera óptima

#### 5.10.2.1. Cuaderno de *Mathematica*

#### 5.10.2.2. Bibliografía

## 5.11. Ejercicios

Aparece en las colecciones: DEHE. Recursos didácticos del Departamento de Economía e Historia Económica

### Ficheros:

| Nombre                             | Tamaño | Formato |
|------------------------------------|--------|---------|
| practicas_Mathematica_FEyE_pdf.zip | 3.6MB  | zip     |
| practicas_Mathematica_FEyE_nb.zip  | 2.2MB  | zip     |

El material alojado en Gredos está formado por dos archivos comprimidos, uno con los archivos de Adobe (practicas\_Mathematica\_FEyE\_pdf.zip) y otro con los archivos de Mathematica (practicas\_Mathematica\_FEyE\_nb.zip).

## 7. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo hemos presentado el material desarrollado para el uso de *Wolfram Mathematica* en las asignaturas de Matemáticas del primer curso de las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa de la Universidad de Salamanca.

En esta primera etapa hemos trabajado con los alumnos del Grado en Administración y Dirección de Empresas. El material elaborado, además de servirnos de apoyo para complementar las clases, nos ha ayudado en la motivación de nuestros estudiantes, mejorando su aprendizaje y su rendimiento académico.

El uso de este software nos ha permitido mejorar la metodología para la enseñanza así como hacer el proceso de aprendizaje más activo y dinámico, incidiendo en los aspectos conceptuales más que en los operacionales. En este sentido, hemos concebido *Mathematica* como una herramienta didáctica, no como un objeto de estudio en sí mismo. Entre otras cuestiones, su uso ha supuesto un acercamiento al cálculo simbólico, desde la óptica de las nuevas tecnologías, mejorando la comprensión y facilitando el aprendizaje de nuestros estudiantes y desarrollando su capacidad para aplicar sus conocimientos matemáticos. Además, puesto que *Wolfram Mathematica* es un software con amplia difusión en la investigación,

modelización económica, sector bancario y/o mundo empresarial, el hecho de que nuestros alumnos conozcan este tipo de tecnologías enriquece su formación y les proporciona claras ventajas competitivas en el mercado laboral.

En el futuro, en primer lugar nos gustaría incorporar este material en las demás titulaciones de la Facultad (Grado en Economía y Grado en Gestión de Pequeñas y Medianas Empresas). En segundo lugar, es nuestra intención desarrollar en esta línea un material para el resto de asignaturas que impartimos en nuestra Facultad: Decisión y Juegos, obligatoria en el Grado en Economía, y Modelos de Decisión e Informática para Optimización, ambas optativas en el mismo Grado.