Tesis Doctoral

ESTUDIO SOBRE LAS VARIANTES DE LA MATRIZ TETRAVALUADA DE BRADY QUE VERIFICAN LA LÓGICA BÁSICA DE ROUTLEY Y MEYER

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

DOCTORADO EN FILOSOFÍA

FACUTAD DE FILOSOFÍA

Departamento de Filosofía, Lógica y Estética

Director

José Manuel Méndez Rodríguez

Autora

Sandra María López Velasco

Resumen

En la presente tesis doctoral se desarrollan y estudian en profundidad seis nuevas lógicas tetravaluadas de interés en el contexto de las lógicas no clásicas y, en particular, de las lógicas de la familia de la relevancia. Dichas lógicas están construidas a partir de las variantes implicativas de la matriz tetravaluada de Brady MBN4 que verifican la lógica básica B de Routley y Meyer.

Por un lado, la lógica B de Routley y Meyer (1982) es un sistema esencial entre las lógicas de la relevancia débiles pues ha servido tradicionalmente como punto de partida para desarrollar una de las semánticas más característica de las lógicas de la relevancia: la semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer. Por otro lado, Brady (1982) desarrolló un sistema central entre las lógicas multivaluadas y las lógicas de la relevancia: la lógica determinada por la matriz tetravaluada MBN4. Dicha lógica ha sido considerada como la más adecuada en el contexto relevante para tratar información inconsistente e incompleta. Además, Brady escogió para su sistema el rótulo BN4 justamente porque contiene la lógica básica B de Routley y Meyer e incorpora el valor *neither* como uno de sus cuatro valores de verdad característicos.

Robles y Méndez (2016) desarrollaron la lógica E4 como compañera del sistema BN4 a partir de una variación en la matriz de este último. De acuerdo con ellos, E4 puede entenderse como la lógica tetravaluada de la implicación relevante (*entailment*) mientras que BN4 puede considerarse como la lógica tetravaluada del condicional relevante (*relevant implication*). En ese mismo artículo, proponen otras seis tablas que constituyen variantes implicativas de las tablas características de MBN4 y ME4. También afirman que son las únicas que verifican la lógica B y que sería, por tanto, de gran interés desarrollar una investigación profunda sobre las mismas y las lógicas a las que determinan que nos permita concluir si alguna de ellas puede llegar a ser una compañera de interés para E4, o incluso BN4.

La aportación esencial de este trabajo consiste en resolver el problema propuesto en el artículo de Robles y Méndez (2016), esto es, demostrar que las matrices caracterizadas por esas seis tablas son las únicas variantes implicativas de MBN4 y ME4 que verifican la lógica básica B de Routley y Meyer y desarrollar las lógicas determinadas por dichas matrices mediante sistemas axiomáticos tipo Hilbert. Se demuestra también que las lógicas aquí desarrolladas son correctas y completas respecto de diferentes tipos de semánticas características de las lógicas de la relevancia: (1) semántica bivalente tipo Belnap-Dunn; (2) semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer con modelos reducidos; (3) semántica relacional ternaria con dos *set-ups*. Con el fin de ampliar el estudio de los sistemas considerados, se exponen también diferentes expansiones modales y se adapta la semántica Belnap-Dunn previamente desarrollada a los sistemas resultantes. Por último, se demuestra que todos estos sistemas tienen abundantes propiedades de interés características de ciertas lógicas no clásicas.

De lo anterior puede concluirse que esta investigación constituye un proyecto original y novedoso que da respuesta a una problemática surgida en investigaciones recientes en el contexto donde confluyen la lógica multivaluada y la lógica

de la relevancia.

Abstract

In this dissertation, six new 4-valued logics of interest within the context of non-classical logics and in particular, logics in the family of relevance logic, are developed and studied in depth. These logics are built upon implicative variants of Brady's 4-valued matrix MBN4 which verify Routley and Meyer's basic logic B.

On the one hand, Routley and Meyer's (1982) logic B is an essential system among weak relevance logics due to the fact that it has traditionally served as a starting point to develop one of the most characteristic semantics of relevance logics: Routley-Meyer ternary relational semantics. On the other hand, Brady (1982) developed a central system among many-valued and relevance logics: the logic determined by the 4-valued matrix MBN4. This logic has been considered as the most suitable for relevant contexts involving inconsistent and incomplete information. As a matter of fact, Brady chose the label BN4 for his system because it contains Routley and Meyer's basic logic B and has *neither* as one of its four characteristic truth-values.

Robles and Méndez (2016) developed the logic E4 as a companion to the system BN4 by leaning upon a variation in the characteristic matrix of the latter. According to them, E4 can be understood as the 4-valued logic of entailment whereas BN4 can be considered the 4-valued logic of relevant implication. In the same paper, they proposed other six different truth-tables as the only possible implicative variants of MBN4 and ME4 verifying Routley and Meyer's basic logic B. They also stated that a detailed research on these matrices and the logics determined by them would be of great interest to resolve whether any of them can be a companion to E4 or even BN4.

The main contribution of this study is to solve the problem suggested in Robles and Méndez's (2016) article, this is, to demonstrate that the matrices characterised by those six tables are the only variants of MBN4 and ME4 which verify Routley and Meyer's basic logic B and to provide axiomatizations à la Hilbert for the logics determined by them. Strong soundness and completeness theorems are also displayed for this range of logics with respect to different types of semantics which are well-known to be characteristic of relevance logics: (1) bivalent Belnap-Dunn type semantics; (2) Routley-Meyer ternary relational semantics with reduced models; (3) 2 set-up ternary relational semantics. In order to delve into the study of these systems, different modal expansions are provided and the previously given Belnap-Dunn semantics is also adjusted to them. Lastly, it is shown that all these systems have a good number of appealing properties which are characteristic of certain non-classical logics.

From the previous paragraphs, we can conclude that this research is an original project which responds to several problems appearing in the recent literature, particularly in the context where many-valued logic meets relevance logic.

Índice general

Prólogo

Reconocimientos

En primer lugar, quiero agradecer sinceramente el apoyo y la confianza de mi director, José Manuel Méndez Rodríguez, catedrático de Lógica de la Universidad de Salamanca, sin quien la realización de este proyecto no hubiera sido posible. A él, primero como profesor y después, como director, le debo no solamente la mayor parte de mis conocimientos sobre lógica, sino también la manera de comunicarlos y enseñarlos. Han sido su constante ayuda y dedicación las que han allanado este arduo camino que he recorrido desde que era una mera estudiante de grado hasta el culmen de este proyecto doctoral.

Junto a mi director, debo mi agradecimiento también al resto de miembros del Grupo de investigación en Lógica Filosófica (GLF) y, en especial, a la doctora Gemma Robles Vázquez, por la amable ayuda que me ha brindado en numerosas ocasiones a lo largo de estos años y, sin la cual, mi estancia internacional en la Universidad de Connecticut no hubiera podido realizarse. En relación con la misma, no quisiera dejar de mencionar la sincera amabilidad y acogida que recibí por parte del que fue mi director durante dicho periodo, el doctor Jc Beall, con quien tuve el privilegio de discutir algunos puntos de los temas que se tratan en esta tesis.

El presente proyecto y mi completa dedicación al mismo han sido posibles gracias a la financiación del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España –actual Ministerio de Universidades–, bajo el marco del programa de Formación de Profesorado Universitario (referencia: FPU15/02651). Asimismo, debo también a este mismo organismo el amparo económico recibido para realizar la mencionada estancia en los Estados Unidos, en el marco de las ayudas para financiar estancias breves (referencia: EST17/00244).

También me gustaría agradecer a la Universidad de Salamanca por todos aquellos recursos y herramientas institucionales que han sido de ayuda en esta investigación y que han dado lugar a una mejora de mi formación investigadora y docente, como sus programas de formación docente del profesorado universitario o las ayudas para asistencia a congresos que he disfrutado en repetidas ocasiones a lo largo de estos años. En la misma línea, me gustaría mostrar mi agradecimiento a aquellos miembros de la Facultad de Filosofía y del Departamento de Filosofía, Lógica y Estética que me han ayudado o apoyado de una u otra manera en el transcurso de estos años, con especial mención a la doctora Rosa Benéitez Andrés y su diestra labor como secretaria académica.

Tampoco quisiera dejar de transmitir mi más sincero agradecimiento a los doctores que conforman el tribunal evaluador de esta tesis doctoral por su tiempo y participación; y, en general, a todo aquel que decida dedicar parte de su tiempo a realizar el esfuerzo intelectual que implica leer esta tesis.

Finalmente, quisiera agradecer a mi familia, a mis amigos y a mis compañeros doctorandos, toda la paciencia, ayuda y escucha que me hayan podido brindar a lo largo de este tiempo. En especial, a mi madre, por respetar siempre mis decisiones y mis planes de futuro; y a mi padre, por mantenerme siempre con la mayor eficacia con los pies en la tierra. Por último pero no menos importante, quisiera agradecer a mi pareja su invaluable ayuda, tanto en el terreno académico como en el cotidiano, así como la escucha y empatía incondicional que muestra cada día y que me alientan a seguir y confiar en mis momentos de mayor desánimo.

Salamanca, mayo de 2021

Introducción

A lo largo de la presente investigación se desarrollarán ocho lógicas tetravaluadas paraconsistentes y paracompletas pertenecientes a la familia de las lógicas de la relevancia. El propósito de la introducción es proporcionar el contexto de la investigación y exponer los objetivos principales así como la metodología con la que se llevarán a cabo.

En primer lugar, desarrollaré algunas nociones básicas sobre las lógicas de la relevancia, así como sobre las semánticas que se van a emplear, para explicitar el mencionado contexto histórico-teórico en torno al cual se desarrolla esta investigación. Además, dado que la quinta parte de esta disertación se dedica a la modelización de los sistemas previamente desarrollados, proporcionaremos también una justificación sobre los operadores modales empleados y la tradición de la que provienen. Por último, se detallarán los objetivos y el interés de la investigación y se explicará la metodología empleada en las diferentes partes de este estudio y la estructura del mismo. A este respecto, el lector puede encontrar en el Anexo III un índice detallado que incluye la paginación de cada definición, lema, proposición, teorema, etc., expuesto a lo largo del trabajo.

Es preciso apuntar que, por motivos prácticos, utilizaré algunas expresiones –fórmulas– del lenguaje formal habitual de la lógica simbólica a lo largo de la presente introducción. Si bien la simbología empleada es del todo convencional, el lector puede revisar el conjunto de definiciones generales situadas al comienzo del cuerpo principal de la investigación (sección 1, parte 1), entre las cuales se encuentra la referente al lenguaje formal utilizado y otras relacionadas. Asimismo, quisiera aclarar que utilizaré con asiduidad autorreferencias del tipo "véase la sección X o cf. Definición Y" donde corresponda con el fin de facilitar la lectura del presente trabajo todo lo posible.

0.1 Sobre las lógicas de la relevancia

(0.1.a) Origen y motivación

Las lógicas de la relevancia surgieron en la segunda mitad del pasado siglo con el fin de dar solución a algunos problemas suscitados por la lógica clásica[1]. Podemos entender la lógica, *grosso modo*, como aquella disciplina filosófica encargada de estudiar sistemáticamente las inferencias (deductivas), formalizarlas y determinar su validez. En este sentido, la noción de implicación lógicamente válida constituye el corazón de la lógica. El hecho de que, para los defensores de la lógica clásica, la validez de una proposición radique únicamente en la verdad (entendida en un sentido bivalente) de la misma, conlleva que bajo el paradigma clásico las proposiciones lógicamente verdaderas puedan estar impli-

[1] Cabe hacer aquí una interesante apreciación: parece que hay antecedentes claros de la lógica de la relevancia en los años veinte. En particular, en un artículo escrito por Ivan Efimovich Orlov en 1928, figuraría por vez primera el sistema de la relevancia R. Véase (Došen, 1992).

cadas por cualquier otra proposición y que aquellas lógicamente falsas puedan implicar cualquier proposición (siendo el resultado en ambos casos una fórmula válida). Por este motivo, en la práctica nos encontramos con implicaciones[2] válidas en las que algunas premisas (i.e., antecedentes) parecen tener poco o nada que ver con la conclusión (i.e., consecuente); en definitiva, implicaciones cuya validez no resulta en absoluto intuitiva. Dichas fórmulas se conocen como "paradojas del condicional material[3]" o "falacias de la relevancia". Algunas de las más características son las siguientes: $A \to (B \to A)$, $\neg A \to (A \to B)$, $\neg(A \to B) \to (A \to \neg B)$, $\neg(A \to B) \to (B \to A)$. Estas fórmulas son claros ejemplos de que el condicional material de la lógica clásica no expresa formalmente lo que intuitivamente se entiende por implicación.

En contraste con la idea de validez propia de la lógica clásica, los defensores de la lógica de la relevancia sostendrán que la verdad no es un criterio suficiente para determinar la validez de un condicional[4]; es preciso tener también en cuenta si existe alguna relación semántica entre antecedente y consecuente. Dicho de otro modo, para que un condicional pueda considerarse verdadero es preciso que su antecedente sea relevante para la deducción del consecuente. En palabras de Anderson y Belnap (1975):

> "[...] a necessary condition for the validity of an inference from A to B is that A be relevant to B" (p. 17).

De acuerdo con estas observaciones, la investigación sobre lógicas de la relevancia situó en el centro la necesidad de implementar herramientas que les permitiesen encontrar sistemas lógicos que reflejen la noción de implicación deseada.

(0.1.b) Desarrollo y características

Los primeros intentos por desarrollar un condicional adecuado al lenguaje natural vinieron de la mano del lógico Clarence Irving Lewis durante la primera mitad del siglo XX[5]. Su propósito era capturar una teoría de la implicación lógica dado que, como hemos visto, la implicación material no resultaba satisfactoria. No

[2] Es preciso apuntar que en términos generales utilizaré indistintamente los términos "condicional" e "implicación" a lo largo de esta investigación. A pesar de que en el contexto de las lógicas de la relevancia la distinción (terminológica) entre *conditional*, *implication* y *entailment* es claramente fundamental, en este caso y bajo una motivación pragmática, utilizaré en general los términos (en español) "condicional" e "implicación" como sinónimos, siguiendo el uso habitual en la tradición polaca. [Véase, por ejemplo, (Rasiowa, 1974) o (Wójcicki, 1988)]. Por otro lado, cuando se haga necesario hacer una distinción semejante a la utilizada por los relevantistas, emplearé los términos "condicional relevante" (*relevant conditional*) e "implicación relevante" (*entailment*).

[3] Entendiendo aquí por "condicional material" el característico de la lógica clásica y, por "paradoja" (παράδοξα), su sentido etimológico, lo que se aparta del sentido o la opinión común.

[4] En muchos casos, defendiendo que es justamente la lógica clásica y la mencionada noción de validez quienes tienen la principal responsabilidad en la creciente separación entre lógica y filosofía (Routley *et al.*, 1982, p. *xi* de la introducción).

[5] Otras investigaciones sobre la implicación que podemos interpretar como los inicios del proyecto relevante son (Nelson, 1930), (Duncan-Jones, 1935), (Strawson, 1948), (Bennet, 1954) y (Church, 1951).

obstante, para dar con alguna solución, Lewis puso el énfasis en la existencia de una relación de necesidad entre antecedente y consecuente de un condicional; en consecuencia, el resultado de su investigación, aunque alejado de su motivación inicial, fue el desarrollo de la lógica modal. El culmen de dicha investigación tuvo lugar en la obra "Symbolic Logic" (Lewis y Langford, 1932), donde se presentan los principales sistemas modales, denominados S1-S5. Aunque Lewis fue capaz de eliminar gran parte de las paradojas de las que adolecía la implicación material, hubo otras que él consideró ineludibles pues, a su juicio, eliminarlas conllevaría eliminar también algunas tesis implicativas esenciales. Esta última clase de paradojas pasarían a conocerse como "paradojas de la implicación estricta". Entre ellas se encuentran las siguientes[6]: $A \to (B \to B)$, $A \to (B \vee \neg B)$, $(A \wedge \neg A) \to B$.

Si bien los orígenes inmediatos de la lógica de la relevancia se encuentran en el artículo fundacional de Ackermann (1956)[7]: "Begründung einer strengen Implikation" ("Fundamentación de una implicación fuerte (rigurosa)"[8]), su desarrollo y sistematización se deben a Alan Ross Anderson y Nuel Dinsmore Belnap[9] –y a algunos colaboradores de estos últimos– y han quedado en esencia recogidos en el primer volumen de la obra "Entailment: the logic of relevance and necessity" (Anderson y Belnap, 1975). En ella, Anderson y Belnap sugieren que el corazón de la lógica es el análisis de la noción de implicación lógica y critican la implicación material propia de la lógica clásica, como se adelantó en la subsección previa. La estrategia seguida por estos autores para determinar lo que después sería uno de los sistemas principales de la lógica de la relevancia –la lógica R– es tomar como punto de partida el cálculo de deducción natural con el fin de motivar la elección de las reglas formales para el condicional[10]. Partiendo de las reglas clásicas, las modificaciones suscitadas por consideraciones sobre la relevancia, les llevan hasta la lógica de la relevancia R; de manera semejante, cuando a estas consideraciones, les añaden aquellas basadas en la noción de necesidad, desarrollan el sistema E (Entailment), la lógica de la relevancia y la necesidad[11]. Mediante el desarrollo de estos dos sistemas, Anderson y Belnap demostraron que sí era posible eliminar las paradojas de la implicación en su totalidad, tanto las del condicional material como las de la implicación estricta.

La crítica fundamental de la lógica de la relevancia es la falta de conexión o dependencia entre antecedente y consecuente en muchas de las tesis válidas características de la implicación material. Los defensores de la lógica clásica, por

[6] En estos ejemplos, la conectiva $\to$ representa la implicación estricta.

[7] Es también destacable otro de sus artículos (Ackermann, 1958), que abarca la naturaleza de la relación entre la implicación estricta y la implicación fuerte (rigurosa). Para más información sobre sus sistemas, puede verse también (Urquhart, 1984).

[8] Traducción de J.M. Méndez (cf. Méndez, 1991, p. 75) quien, a su vez, se basa en traducciones al inglés de Anderson y Belnap (1958, 1959).

[9] Las primeras obras fundamentales de estos autores sobre la lógica de la relevancia son (Anderson, 1960), (Belnap, 1960) y (Anderson & Belnap, 1958, 1959, 1962).

[10] Anderson y Belnap (1975) estructuran los principios de su cálculo siguiendo las propuestas generales de Fitch (1952) sobre cálculo de deducción natural.

[11] Sobre los sistemas R, E y sus posibles axiomatizaciones, véase el apartado (1.c) de esta introducción.

su parte, consideraban que aquella noción de conexión o dependencia a la que pretendían apelar los relevantistas era muy vaga para ser un concepto formal en lógica[12] y, de manera retórica, se preguntaban cómo se podría caracterizar una noción tan oscura como la de dependencia lógica (Anderson y Belnap, 1975, p. 30). La respuesta relevantista fue establecer dos condiciones formales: la propiedad de compartir variables (*variable-sharing property*) y la técnica de los subíndices (*subscripting technique*).

Desde el punto de vista semántico, la respuesta formal a la intuición relevantista sobre la necesidad de una conexión de significado entre antecedente y consecuente de un condicional es la *variable-sharing property* (VSP). Es esta una condición necesaria (pero no suficiente) que podríamos expresar como sigue:

> "Si $A \rightarrow B$ es demostrable en la lógica L, entonces A y B comparten al menos una variable proposicional"[13]

En definitiva, la conexión de significado entre antecedente y consecuente quedaría garantizada cuando existe un contenido semántico común, es decir, cuando antecedente y consecuente comparten alguna variable proposicional (puesto que en lógica proposicional clásica las variables proposicionales representan el contenido semántico).

Desde el punto de vista sintáctico, el análisis formal de la idea intuitiva de que A debe ser relevante para B se basa en la idea de utilidad en la derivación, es decir, debe ser posible utilizar A en una deducción de B a partir de A[14]. Este método, denominado *subscripting technique*, es utilizado por Anderson y Belnap para desarrollar los principales sistemas de la relevancia (R y E) y, en la práctica, consiste en una técnica eficaz para, mediante subíndices, seguir el rastro de cada premisa utilizada en la derivación de una fórmula mediante el cálculo de deducción natural (Anderson y Belnap, 1975, pp. 30 y ss.). La motivación de esta técnica es, en esencia, evitar la validez de aquellas fórmulas en las que el antecedente no juega ningún papel en la derivación del consecuente. De acuerdo con ellos, esta condición proporciona un trato plausible y sistemático de la relevancia en el sentido de dependencia lógica entre antecedente y consecuente de un condicional; siendo, además, a su juicio, una condición tanto necesaria como suficiente[15].

[12] "...the notion of connection or dependence being appealed to here is too vague to be a formal concept of logic" (Suppes, 1957). Citado en (Anderson y Belnap, 1975, p. 30).

[13] Anderson y Belnap enuncian el teorema para la lógica E (en particular, para el fragmento implicativo de la misma): "If $A \rightarrow B$ is provable in $E_{\rightarrow}$, then A and B share a variable" (Anderson y Belnap, 1975, p. 33). No obstante, el mismo teorema puede extrapolarse a cualquier sistema que cumpla la VSP. Sobre la relación entre la VSP (y otras propiedades de semejante índole) y las lógicas clave en la presente investigación, véase la sección 20, parte 6, de la misma.

[14] Anderson y Belnap (1975) afirman: "The subscripting technique as applied in $FR_{\rightarrow}$ or $FE_{\rightarrow}$ may be constructed as a formal analysis of the intuitive idea that for A to be relevant to B it must be possible to use A in a deduction of B from A" (p. 30).

[15] Sobre la suficiencia y la necesidad de estas técnicas, Anderson y Belnap (1975) afirman: "we [...] take the question at face value and offer two formal conditions, the first as necessary and sufficient, the second as necessary only" (p. 30). La primera de las condiciones a las que refiere ese parágrafo es la *subscripting technique* y la segunda es la VSP.

(0.1.c) Algunos sistemas esenciales

En el presente apartado, presentaremos algunos sistemas esenciales de la relevancia que tienen un especial interés en esta investigación. En particular, se expondrán los sistemas R y E que, como se mencionó en los párrafos anteriores, fueron esenciales en el proyecto relevantista; y los sistemas FDE y B, de particular interés en la presente investigación por su relación con las lógicas que aquí se van a desarrollar. En lo que sigue, se presentan estas lógicas y se proporcionan las axiomatizaciones más características de las mismas, propuestas por Anderson, Belnap y Dunn (1992, §R2).

(i) La lógica de la relevancia R

Como se adelantaba en la sección previa, el estricto cumplimiento de la caracterización sintáctica de la relevancia resultó en el sistema de la lógica de la relevancia R ("the system of relevant implication R")[16]. No obstante, este sistema cumple también el requisito semántico señalado, la VSP.

Axiomas:

R1 $A \to A$

R2 $(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$

R3 $A \to [(A \to B) \to B]$

R4 $[A \to (A \to B)] \to (A \to B)$

R5 $(A \wedge B) \to A$

R6 $(A \wedge B) \to B$

R7 $[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$

R8 $A \to (A \vee B)$

R9 $B \to (A \vee B)$

R10 $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$

R11 $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee C]$

R12 $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

R13 $\neg\neg A \to A$.

Reglas de derivación:

Modus Ponens (MP) $A, A \to B \Rightarrow B$

Adjunción (Adj) $A, B \Rightarrow A \wedge B$.

(ii) La lógica de la implicación relevante E

La lógica de la implicación relevante E es, según Anderson y Belnap, el sistema que surge al asumir que las inferencias válidas deben cumplir dos requisitos:

[16] Anderson y Belnap proporcionan varias axiomatizaciones del sistema. Como la estrategia que siguen es el cumplimiento de la condición sintáctica de la relevancia, en un primer momento proponen axiomatizaciones puramente implicativas (Anderson y Belnap, 1975, pp. 20 y 79). Dado que las lógicas protagonistas en esta investigación se definen mediante el conjunto habitual de conectivas básicas (i.e., $\{\to, \wedge, \vee, \neg\}$), la axiomatización de R que aquí se expone es aquella que incorpora dicho conjunto y es, además, de acuerdo con Anderson y Belnap, un conjunto económico de axiomas ("a separate economical set of axioms for R"; cf. (Anderson y Belnap, 1975, pp. 340 y s.)).

relevancia y necesidad (cf. Anderson y Belnap, 1975, p. 23)[17]. De acuerdo con ellos, cualquier implicación digna de ese nombre debe poseer un carácter modal[18].

Axiomas:

E1 $[(A \to A) \to B] \to B$
E2 $(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$
E3 $[A \to (A \to B)] \to (A \to B)$
E4 $(A \wedge B) \to A$
E5 $(A \wedge B) \to B$
E6 $[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$
E7 $(\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$ $\qquad [\Box A =_{df} (A \to A) \to A]$
E8 $A \to (A \vee B)$
E9 $B \to (A \vee B)$
E10 $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$
E11 $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee C]$
E12 $(A \to \neg A) \to \neg A$
E13 $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
E14 $\neg\neg A \to A$.

Reglas de derivación: MP y Adj.

(iii) El sistema *First Degree Entailment* (FD o FDE)

El sistema FDE constituye el fragmento implicativo de primer grado de la lógica E. De hecho, la etiqueta FDE refiere justamente al concepto de *first degree entailment fragment of the calculus E.* De nuevo, podemos encontrar su primera formulación axiomática en la obra de Anderson y Belnap (1975, p. 158)[19].

La axiomatización original excluye el axioma FD1 expuesto a continuación, que no es independiente[20]. No obstante, FD1 es un axioma que suele incluirse al exponer el sistema FDE y, por ello, se incluye aquí.

Axiomas:

FD1 $A \to A$
FD2 $(A \wedge B) \to A$

[17] Como ocurría con el sistema R, a lo largo de la obra "Entailment", Anderson y Belnap consideran diferentes axiomatizaciones de E. Comienzan exponiendo aquellas puramente implicativas (Anderson y Belnap, 1975, pp. 24, 77 y ss.) para después ir añadiendo, una a una, el conjunto habitual de conectivas. Aquí se expone aquel conjunto de axiomas preferido por ellos para representar la lógica E (Anderson, Belnap y Dunn, 1992, §R2).

[18] Entrar en el fondo de esta cuestión nos alejaría del propósito meramente introductorio de esta sección. Para nuestro objetivo, basta con mencionar que el carácter modal del sistema E puede entenderse de acuerdo con la definición $\Box A =_{df} (A \to A) \to A$, donde $\Box A$ expresa la necesidad de A. Sobre esta cuestión, véase (Anderson y Belnap, 1975, pp. 35 y ss.).

[19] Es preciso apuntar aquí que, en realidad, el sistema FDE no suele exponerse con un sistema axiomático tipo Hilbert sino, más bien, en otro tipo de cálculo; en particular, en un cálculo á la Gentzen, cálculo de deducción natural o mediante *tableaux*. En el artículo de Omori y Wansing (2017) se exponen algunos de los principales cálculos en teoría de la prueba para FDE.

[20] Anderson y Belnap aclaran que a partir de la regla transitividad (en sus términos, *Entailment Rule*) y los axiomas de la doble negación, consiguen FD1 $(A \to A)$. Cf. (Anderson y Belnap, 1975, p. 159).

FD3 $(A \wedge B) \rightarrow B$
FD4 $A \rightarrow (A \vee B)$
FD5 $B \rightarrow (A \vee B)$
FD6 $[A \wedge (B \vee C)] \rightarrow [(A \wedge B) \vee C]$
FD7 $A \rightarrow \neg\neg A$
FD8 $\neg\neg A \rightarrow A$.

Reglas:

Transitividad (TRAN) $A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$
Introducción (condicionada) de la conjunción (IC$\wedge$)
$A \rightarrow B,\ A \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \wedge C)$
Eliminación de la disyunción (E$\vee$) $A \rightarrow C,\ B \rightarrow C \Rightarrow (A \vee B) \rightarrow C$
Contraposición (CON) $A \rightarrow B \Rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$.

FDE es una lógica caracterizada (determinada) por la matriz de Smiley MSm4[21] (Anderson y Belnap, 1975, pp. 161-162), que es, a su vez, una simplificación de la matriz octovaluada de Belnap M_0 (Belnap, 1960) de considerable importancia en el desarrollo de las lógicas de la relevancia (Routley *et al.*, 1982 pp. 176-179). Es sobradamente conocido que el sistema FDE es central tanto entre lógicas de la relevancia como multivaluadas[22].

(iv) La lógica básica de Routley y Meyer B

La lógica básica B de Routley y Meyer es también un sistema central en la familia de las lógicas de la relevancia pues es, en términos generales, el sistema mínimo al que se le puede dotar de una semántica relacional ternaria tipo

[21]Esta matriz fue comunicada por correspondencia a Anderson y Belnap y quedó plasmada en su obra de 1975. No obstante, ahí no se emplea la etiqueta "MSm4" que, por motivos prácticos, yo sí utilizaré para referirme a dicha matriz conforme a lo que hacen Méndez y Robles (2016b). Es importante apuntar aquí que dicha matriz solamente "determina" la lógica FDE en un sentido un poco vago, como Méndez y Robles explican en el mencionado artículo. En particular, si bien MSm4 se define mediante las conectivas $\{\rightarrow, \wedge, \vee, \neg\}$, solamente las tablas de verdad de $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ son esenciales en la prueba. Respecto a $\rightarrow$, Anderson y Belnap (1975) apuntan: "Notice that this arrow matrix is used only once, and then only at the end of the procedure; it shed no light at all when we come to consider nested entailments" (p. 162). Méndez y Robles (2016b) sugieren que el condicional de MSm4 es solamente una posibilidad entre muchas otras que podrían ser tratadas de manera similar. Pues bien, justamente entre esas posibilidades se encontrarían tanto el condicional de MBN4 como el del resto de lógicas que se van a desarrollar en esta investigación puesto que, por un lado, todas estas matrices comparten las mismas tablas de verdad que tiene MSm4 para el resto de conectivas y, por otro, todas verifican FDE.

[22]Tanto es así que en 2017, aproximadamente 40 años después de su aparición en la escena de la lógica de la relevancia, se publicó un monográfico dedicado en exclusiva al estudio de resultados relacionados con el mismo: "Special Issue: 40 years of FDE, *Studia Logica*, vol. 105, Issue 6, edited by Hitoshi Omori and Heinrich Wansing". Estos mismos editores son también responsables de un reciente compendio que incluye tanto artículos clásicos como estudios actuales alrededor de esta lógica y su importancia en relación tanto con la filosofía como con la informática (Omori y Wansing, 2019).

Routley-Meyer[23][24]. Routley *et al.* (1982) caracterizan este sistema de la manera siguiente:

> "B is a natural minimal system among systems with a normal negation in terms of the relational semantics given for the class of systems and the methods used for establishing completeness" (p. 285).

Este sistema, tal y como se axiomatiza a continuación, se presentó en la obra "Relevant logics and their rivals I" (Routley *et al.*, 1982, p. 287)[25].
Axiomas:

B1 $A \to A$
B2 $(A \wedge B) \to A$
B3 $(A \wedge B) \to B$
B4 $[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$
B5 $A \to (A \vee B)$
B6 $B \to (A \vee B)$
B7 $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$
B8 $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$
B9 $\neg\neg A \to A$.

Reglas:

Adjunción (Adj) $A, B \Rightarrow A \wedge B$
Modus Ponens (MP) $A, A \to B \Rightarrow B$
Prefijación (Pref) $A \to B \Rightarrow (C \to A) \to (C \to B)$
Sufijación (Suf) $A \to B \Rightarrow (B \to C) \to (A \to C)$
Contraposición (Con) $A \to \neg B \Rightarrow B \to \neg A$.

(0.1.d) Las lógicas BN4 y E4

La investigación aquí desarrollada tiene como punto de partida el sistema BN4 pues, como su propio nombre indica, se estarán investigando las variantes implicativas de la matriz tetravaluada de Brady (i.e., de MBN4) que verifican la lógica básica de Routley y Meyer. Por otro lado, la lógica E4 fue en realidad la primera variante implicativa de BN4, como se explicará a continuación. En lo que sigue, me propongo exponer brevemente el origen de estas lógicas y su interés.

[23]En particular, la versión positiva de B, esto es, la lógica B+, sería realmente la lógica mínima interpretable mediante la semántica Routley-Meyer. Una obra que permite al lector acceder de manera realmente asequible a esta lógica es (Robles, 2006). Asimismo, si realmente queremos hablar de la lógica mínima (no positiva), nos referiremos a la lógica BM de Sylvan y Plumwood (esto es, el resultado de añadir una negación mínima tipo De Morgan a la lógica B+) como el sistema mínimo que puede modelizarse con este tipo de semántica (cf. Robles y Méndez, 2018, p. xvii de la introducción).

[24]Sobre este tipo de semántica, véase la subsección 0.2.2 de esta Introducción.

[25]Hasta donde yo sé, la primera vez que se menciona el sistema B es en el artículo "Classical Relevant logics I" (Meyer y Routley, 1973), donde se destaca su interés por ser la lógica de la relevancia más débil.

(i) La lógica BN4

Brady (1982) definió el sistema BN4 en base a la matriz MBN4[26] como sigue.
Axiomas:

BN4.1 $A \to A$
BN4.2 $(A \wedge B) \to A$
BN4.3 $(A \wedge B) \to B$
BN4.4 $[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$
BN4.5 $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$
BN4.6 $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
BN4.7 $\neg\neg A \to A$
BN4.8 $(\neg A \wedge B) \to (A \to B)$
BN4.9 $\neg A \to [A \vee (A \to B)]$
BN4.10 $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$
BN4.11 $A \to [(A \to \neg A) \to \neg A]$
BN4.12 $A \vee [\neg A \to (A \to B)]$.

Reglas:

Adjunción (Adj) $A, B \Rightarrow A \wedge B$
Modus Ponens (MP) $A, A \to B \Rightarrow B$
Afijación (Af) $A \to B, C \to D \Rightarrow (B \to C) \to (A \to D)$
Modus Ponens disyuntivo(dMP) $C \vee A, C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee B$.

Este sistema está íntimamente relacionado tanto con la lógica B4 de Belnap y Dunn[27] (Belnap, 1977a, 1977b; Dunn, 1976, 2000) como con la lógica B de Routley y Meyer. Por un lado, la lógica BN4 puede considerarse como un fortalecimiento de B4 –un sistema equivalente al ya mencionado FDE– obtenido al expandir implicativamente esta última. Por otro, como el propio Brady apuntó, BN4 fue desarrollada por vez primera tomando como punto de partida la axiomatización de B. Por lo tanto, BN4 puede también verse como una extensión tetravaluada de la lógica básica de Routley y Meyer B. De hecho, si bien es tentador interpretar el nombre BN4 como "lógica tetravaluada que incorpora los valores B(oth) y N(either)", lo cierto es que Brady escogió la etiqueta BN4 para reflejar que se trata justamente de una extensión tetravaluada de B que incorpora el valor N(either). Así lo refleja la siguiente cita extraída del artículo fundacional del sistema BN4 (Brady, 1992):

> "the system contains the basic system B of Routley *et al.* 1982, Chapter 4, and has a characteristic 4-valued matrix set, one of the values being 'n', representing neither truth nor falsity" (p. 32, nota 1).

[26]MBN4 es, a su vez, una modificación de la matriz MSm4 de Smiley mencionada en el apartado 0.1.c de esta introducción. Sobre MSm4, cf. (Anderson y Belnap, 1975, pp. 161-162). Por otro lado, la matriz MBN4 se expone en la Definición 3.1 (sección 3, parte 1).

[27]Sobre esta lógica y el significado intuitivo de sus cuatro valores de verdad, véase la subsección 0.2.1 de esta misma introducción.

La lógica BN4 puede entenderse entonces como una extensión tetravaluada de B de gran interés. En esta línea, R. K. Meyer, S. Giambrone y R. T. Brady (1984) afirmaron:

> "BN4 is the correct logic for the 4-valued situation where the extra values are to be interpreted in the both and neither senses" (p. 253).

Además, de acuerdo con J. Slaney (2005, p. 289), el sistema BN4 tiene la implicación funcional de verdad más naturalmente asociada con la lógica FDE (a la que nos hemos referido en el apartado 0.1.c de esta introducción y que es, al mismo tiempo, equivalente a la lógica B4). Más aún, BN4 es una lógica no clásica de esencial importancia no solamente por su relación con la familia de las lógicas de la relevancia sino también por su posición entre otros sistemas multivaluados. En particular, cabe destacar que la implicación fuerte (*strong implication*) de la lógica bi-reticular $\text{GLB}_{\supset}$ (*the bilattice logic* $\text{GLB}_{\supset}$; cf. (Arieli y Avron, 1996, 1998)), de considerable importancia en el campo de la inteligencia artificial, es justamente el condicional de BN4, como demostraron Méndez y Robles (2016a, Apéndice).

(ii) La lógica E4

La lógica E4 es un sistema desarrollado por G. Robles y J. M. Méndez (2016) como compañero de BN4 que amerita consideración. De hecho, ellos construyen E4 a partir de una modificación de la matriz MBN4 de Brady y sostienen que la relación entre E4 y BN4 puede entenderse de manera pareja a la de las lógicas de la relevancia E y R:

> [...] "the logic E4, which is related to BN4 in a similar way to which Anderson and Belnap's logic of Entailment E is related to their logic R [...]: while BN4 can be considered as the '4-valued logic of relevant conditional', E4 can be viewed as the '4-valued logic of (relevant) entailment'." (Robles y Méndez, 2016, pp. 838-839).

En consonancia con lo anterior, podríamos describir intuitivamente a BN4 como una extensión tetravaluada de la lógica RW, es decir, de la lógica R menos el axioma de contracción ($[A \to (A \to B)] \to (A \to B)]$, i.e., R4); asimismo, podemos entender la lógica E4 como una extensión tetravaluada de la lógica E menos el axioma de reductio ($(A \to \neg A) \to \neg A$, i.e., E12).

Para evidenciar la relación entre E y E4, además de la axiomatización original propuesta para este último, Robles y Méndez (2016, Definición 7.11 y Proposición 7.12) proporcionan una axiomatización alternativa del sistema basada justamente en la lógica E sin el axioma de reductio y demuestran que dicha axiomatización es deductivamente equivalente a su axiomatización original de E4. Esta axiomatización alternativa que refleja de forma clara la relación entre E y E4 se expone a continuación.

Axiomas:

E4.1 $A \to A$

E4.2 $(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$

E4.3 $[A \to (A \to B)] \to (A \to B)$
E4.4 $[[(A \to A) \wedge (B \to B)] \to C] \to C$
E4.5 $(A \wedge B) \to A$ / $(A \wedge B) \to B$
E4.6 $[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$
E4.7 $A \to (A \vee B)$ / $B \to (A \vee B)$
E4.8 $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$
E4.9 $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$
E4.10 $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
E4.11 $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$
E4.12 $\neg A \to [A \vee (A \to B)]$
E4.13 $[\neg(A \to B) \wedge (\neg A \wedge B)] \to (A \to B)$
E4.14 $[(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)] \to \neg(A \to B)$
E4.15 $(A \to B) \vee \neg(A \to B)$.
Reglas: Adj y MP.

De acuerdo con Robles y Méndez, el hecho de que el sistema E4 pueda entenderse como la lógica tetravaluada de la implicación relevante (entailment) se debe, en esencia, a dos de sus propiedades. En primer lugar, E4 posee la propiedad de la cuasi-relevancia (quasi-relevance property; QRP) que es característica de lógicas tales como R-mingle[28]. Esta propiedad reza como sigue: si $A \to B$ es un teorema, entonces o bien las fórmulas A y B comparten una variable proposicional o bien tanto $\neg A$ como B son teoremas[29]. En segundo lugar, Robles y Méndez afirman que, al igual que ocurre con la lógica E de Anderson y Belnap, E4 encierra una teoría de la necesidad lógica cuando el operador de necesidad se define como sigue: $\Box A =_{df} (A \to A) \to A$. Entendiendo así el operador de necesidad, las siguientes fórmulas modales, entre otras, son teoremas de E4 (y de E): $(B \to C) \to [[(B \to C) \to A] \to \Box A]$, $[(A \to A) \to B] \to \Box B$, $(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$, $\Box A \to [(A \to B) \to \Box B]$, $(A \to B) \to \Box(A \to B)$, $[(A \to B) \to C] \to [(A \to B) \to \Box C]$, $\Box B \to [[A \to (B \to C)] \to (A \to C)]$, $\Box A \to \Box\Box A$.

(0.1.e) Sobre las reglas disyuntivas en lógicas de la relevancia

Las reglas disyuntivas tienen un papel esencial en la mayoría de las lógicas que se investigan a lo largo de este trabajo. Vale la pena, por tanto, dedicar algunos párrafos a exponer la importancia y el papel que juegan en algunas lógicas de la familia de la relevancia y, por qué, en muchos casos, son esenciales en las pruebas de completud de estas lógicas.

[28]R-mingle es una lógica fundamental en la familia de las lógicas de la relevancia. Sobre la misma, cf. (Anderson y Belnap, 1975). El hecho de que R-mingle posee la QRP está probado en la página 417 (§29.3.3) de esta última obra. Por otro lado, Robles y Méndez (2016) prueban que, en efecto, E4 posee esta misma propiedad en la Proposición 8.5.

[29]Es de interés mencionar en este punto que esta propiedad, la QRP, también caracteriza a todas las lógicas sobre las cuales trata la presente investigación. Sobre la QRP (así como otras propiedades de semejante índole) y su relación con las lógicas centrales en esta investigación, puede verse la Subsección 20.1, Parte 6.

En primer lugar, expongo brevemente a qué nos estamos refiriendo cuando hablamos de reglas disyuntivas. En general, siguiendo a Routley *et al.* (1975, Capítulo 4), utilizaremos el término "regla disyuntiva" para referirnos a aquellas variantes disyuntivas de las reglas de un sistema. Por ejemplo, el Modus Ponens disyuntivo (MPd) $A \vee C$, $(A \rightarrow B) \vee C \Rightarrow B \vee C$ es la variante disyuntiva correspondiente a la regla Modus Ponens (MP) A, $A \rightarrow B \Rightarrow B$.

Routley *et al.* (1975) resumen el rol de las reglas disyuntivas en las lógicas de la relevancia de la manera siguiente:

> "What Disjunctive Rules do, among other things, is to validate material implication principles, which may not however hold in weaker systems. [...] Such rules typically replace corresponding nondisjunctive forms" (p. 336).
>
> "Soundness is proved for these JL systems in the usual way. [...] Completeness requires some new twists, primarily complication of the definition of regularity to ensure closure under Disjunctive Rules of the system, and derivatively adjustment of the Extension and Priming Lemmas." (pp. 336 y 337).

El uso de las reglas disyuntivas sirve, por tanto, para posibilitar las pruebas de completud cuando ciertas tesis no son válidas en una lógica en cuestión pero su correspondiente regla sí lo es. Veámoslo, pues, en el contexto del trabajo que aquí nos ocupa.

En la presente investigación, las pruebas de completud están esencialmente basadas en las técnicas desarrolladas en (Routley *et al.*, 1975, Capítulo 4) tal y como se aplican en (Brady, 1982). La noción clave en la prueba de completud desarrollada por Routley *et al.* es la de "interpetación canónica". Sea L la lógica en cuestión, las interpretaciones canónicas serán funciones construidas a partir de teorías primas normales y no triviales de la lógica L[30]. No obstante, encontramos un problema cuando aplicamos este método a lógicas débiles[31]. Por ejemplo, la lógica BN4[32] es una lógica que valida la regla Modus Ponens pero carece del axioma correspondiente. Entonces, no es posible aplicar la metodología recientemente mencionada para construir teorías-BN4 cerradas por MP en general. Sin embargo, en Routley *et al.* (1975) se muestra que, a pesar de la ausencia de un axioma correspondiente a la regla r en una lógica L, las teorías-L primas pueden construirse si, además de estar cerrada por r, L está también cerrada por la versión disyuntiva de r. Siguiendo con el ejemplo de BN4, las teorías-BN4 primas podrían construirse si cerramos la lógica BN4 por MPd (además de cerrarla por MP), como demostró Brady (1982).

[30]Las definiciones de teoría prima y teoría no trivial se detallan en la Definición 6.2.2 (sección 6, parte 1).

[31]Sobre la aplicación de estas y otras técnicas en lógicas de la relevancia débiles, véase (Brady, 1980, 1983, 2006) junto con (Meyer y Mortensen, 1984). Asimismo, sobre el papel de las reglas disyuntivas en las lógicas de la relevancia, consúltese también (Brady, 1993, 1994).

[32]Sobre la lógica BN4 y su axiomatización, véase el anterior apartado (0.1.d) de esta introducción.

En conclusión, una prueba del teorema de completud fuerte –basada en la metodología de Routley *et al.* (1975)– puede darse para una lógica débil L siempre que o bien las tesis correspondientes a las reglas primitivas o bien las versiones disyuntivas de las reglas primitivas de inferencia de L sean añadidas a su axiomatización. Por tanto, podemos decir que el uso de reglas disyuntivas será una estrategia clave en la obtención de las pruebas de completud de las lógicas objeto de esta investigación[33].

0.2 Semánticas para las lógicas de la relevancia

En este apartado, desarrollaré una breve introducción teórica sobre las distintas semánticas que se utilizarán a lo largo de esta investigación[34]. En particular, siguiendo la corriente americana, dotaremos a los sistemas de una semántica bivalente tipo Belnap-Dunn (*bivalent Belnap-Dunn type semantics*); siguiendo la corriente australiana, proporcionaremos semánticas relacionales tipo Routley-Meyer a los sistemas. En concreto, acerca de estas últimas, emplearemos en primer lugar una semántica general tipo Routley-Meyer con modelos reducidos (*reduced general Routley-Meyer semantics*) y, en segundo lugar, una semántica Routley-Meyer con dos mundos posibles (*2 set-up Routley-Meyer semantics*). El objeto de la presente subsección es, por tanto, explicar las características esenciales de estas semánticas.

0.2.1 Corriente americana: Semántica bivalente tipo Belnap-Dunn.

(a) Características generales

La semántica bivalente tipo Belnap-Dunn (en adelante, semántica B-D) fue originalmente introducida por Nuel D. Belnap y J. Michael Dunn mediante la conocida lógica B4 para tratar información inconsistente e incompleta (Belnap 1977a, 1977b; Dunn 1976, 2000). Sean T y F los valores clásicos que representan la verdad y la falsedad, de acuerdo con esta semántica, contamos con cuatro posibilidades de asignación a una fórmula: t (solo T), f (solo F), ambos b (T y F) o ninguno n (ni T ni F). Bajo esta interpretación se supone, claro está, que t (del inglés, *truth*) representa lo verdadero y f, lo falso (*false*); además,

[33] Las particularidades referentes a las reglas disyuntivas de cada una de las lógicas consideradas en esta investigación están reflejadas en la sección 19, parte 6.

[34] Las semánticas empleadas en este trabajo son algunas de las más características para lógicas de la relevancia. No obstante, hay muchas otras que también se han utilizado en la literatura para modelar lógicas de la relevancia sobre las que ni entraremos a tratar en esta introducción ni, en general, serán utilizadas a lo largo de la presente investigación. Por ejemplo, en el trabajo de Blok y Pigozzi (1989) se investiga qué cualidades necesita una lógica para tener una semántica algebraica y entre las lógicas estudiadas se incluyen lógicas de la relevancia. Para otros ejemplos de semánticas para lógicas de la relevancia, véase también (Brady, 1992), (Fine, 1974), (Urquhart, 1972) y (Maksimowa, 1973, 1970, 1971). Por otro lado, por citar algunas referencias donde se compendian varios tipos de semánticas fundamentales para estas lógicas, dirijo al lector a (Dunn y Restall, 2002) y (Dunn, 1986).

utilizaremos b para abreviar ambos (en inglés, *both*) y n para ninguno (*neither*). Utilizamos el término bivalente para referirnos a este tipo de semántica puesto que, en realidad, solo tratamos con dos valores de verdad (T y F) y la posibilidad de asignar uno de ellos, ambos o ninguno a una fórmula. En términos de subconjuntos tenemos, por tanto, cuatro posibilidades de asignación a una fórmula: $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$, $\emptyset$. En términos valorativos, asumimos intuitivamente que n y b son valores intermedios, preferibles a f, aunque no tan deseables como t[35].

De acuerdo con Belnap (1977a, 1977b), esta selección de valores de verdad responde a cómo debería pensar un ordenador (*how a computer should think*). Si entendemos este procesador artificial de información como un sofisticado sistema de pregunta-respuesta, la necesidad de un cierto "razonamiento lógico" por parte del mismo es clara. En particular, necesitamos que la información que nos proporcione a partir de su base de datos no se fundamente únicamente en el contenido de la misma propiamente dicho sino también en toda aquella información extraída mediante cualquier inferencia fruto de este contenido inicial. De acuerdo con la semántica B-D, cada ítem en la base de datos tendría una etiqueta valorativa correspondiente a uno de los cuatro posibles valores de la semántica. En su artículo "How a computer should think", Belnap (1977a) defiende la necesidad pragmática de incluir los valores n y b. Por un lado, existe una posibilidad clara de que el procesador no contenga información sobre un determinado ítem por el que se le pregunte: he ahí la necesidad de incluir el valor n. De manera semejante y puesto que no es posible que haya una única e infalible fuente de información de la que extraiga su contenido, existe una alta probabilidad de encontrar inconsistencias en el sistema, bien porque parte de la información inicial era inconsistente, bien porque se han obtenido inconsistencias como resultado de las inferencias desarrolladas por el ordenador durante el procesamiento de la información. En consecuencia, admitir la posibilidad de que exista tanto un exceso de información como una ausencia de información sobre un determinado ítem es una necesidad pragmática motivada por la falibilidad humana. Consecuentemente, encontramos en esta visión una lectura claramente epistémica de los valores de verdad[36]. Los cuatro valores de verdad presentados son entonces una solución óptima que garantiza el buen funcionamiento de la máquina.

Es importante señalar también que la semántica B-D fue originalmente pensada para un lenguaje carente de $\rightarrow$ (condicional), es decir, para operar solamente mediante $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción) y $\neg$ (negación). Procedo ahora a explicar brevemente las pautas básicas de funcionamiento que proporciona Belnap (Anderson *et al.*, 1992, p. 513 y ss.) para cada una de ellas. En primer

[35]Es importante señalar aquí que estos valores intermedios (n y b) no guardan relación alguna entre sí, por tanto, no puede establecerse una relación de orden entre ellos sino solamente con respecto a los otros dos valores (t y f). Véase la estructura que representa este orden en la subsección 2.1 (Definición 2.1.1).

[36]Conviene apuntar que, aunque la interpretación inicial de estos cuatro valores es epistémica, hay quienes los entienden de un modo ontológico, defendiendo, por ejemplo, la existencia de contradicciones verdaderas. Cf. (Priest, 2011, 2014, 2016).

lugar, la negación funciona de manera semejante a la clásica cuando una fórmula recibe el valor t o f, esto es, si una fórmula está marcada como verdadera (t), su negación estará marcada con f, y viceversa. Es claro que lo distintivo de esta semántica son los valores b y n. En lo que refiere a la negación, estos valores se mantienen constantes, es decir, si una fórmula recibe el valor n, su negación también; y lo mismo para aquellas que reciben b. De acuerdo con Belnap (Anderson *et al.*, 1992, p. 517), intuitivamente, si no sabes nada sobre sobre una fórmula A, tampoco sobre la negación de la misma, $\neg A$; de manera semejante, si tienes un exceso de información sobre A, también lo tendrás sobre $\neg A$. En lo que refiere a conjunción y disyunción, marcaríamos una conjunción $A \wedge B$ como (al menos) T solo en caso de que ambos componentes sean marcados como tal; del mismo modo, la marcaremos como (al menos) F en caso de que cualquiera de ellos tenga esa asignación; por su parte, como es habitual, la disyunción funciona de manera inversa, esto es, marcaremos la disyunción $A \vee B$ como (al menos) T cuando alguno de los componentes reciba ese valor y, por el contrario, se marcará como (al menos) F cuando ambos reciban este valor. Siguiendo estas indicaciones es posible esbozar fácilmente las tablas de verdad de estas tres conectivas [37].

La semántica bivalente tipo Belnap-Dunn consta, por tanto, de cuatro valores de verdad con los que se interpretan las tres conectivas de la lógica B4. No obstante, se puede definir una relación de consecuencia para B4 que cumpla con la siguiente exigencia mínima: preservar tanto la verdad de una fórmula como la no falsedad (Anderson *et al.*, 1992). Esto implica que para que una inferencia $A \rightarrow B$ fuese válida sería necesario que: (i) siempre que A esté marcada como (al menos) T, B también lo esté; (ii) siempre que B esté marcada como (al menos) F, A también lo esté[38]. Belnap expresó también esta condición como sigue (Anderson *et al.*, 1992):

> "A *entails* or *implies* B just in case for each assigment of one of the four values to the variables, the value of A does not exceed (is less-than-or-equal-to) the value of B" (p. 519).

Basta con los elementos que se acaban de explicar brevemente para recrear una mínima imagen del "estado informacional" del *computer*, que estaría formado por una serie de reglas que regulan las conectivas, cuyo fundamento son justamente las directrices anteriores, y un conjunto de estados epistémicos, conformados a

[37] De hecho, la explicación de Belnap es considerablemente más compleja: primero se basa en un enfoque puramente teórico basado en estructuras reticulares de aproximación (*aproximation lattices*) para llegar a las tablas de verdad y, después, comprueba que, en efecto, es posible llegar a estas mismas tablas de verdad de forma intuitiva mediante estas sencillas pautas aquí expresadas. Cf. (Anderson *et al.*, 1992, pp. 513-518). No obstante, dado que mi intención aquí se reduce a proporcionar una breve introducción histórica y filosófica de la semántica B-D, no ahondaremos más en esta cuestión.

[38] En realidad, en Anderson *et al.* (1992, §81.2.3) se muestra que bastaría con mencionar la preservación de la verdad, pues siempre que una inferencia falla en preservar la no falsedad también falla en preservar la verdad. No obstante, dado que tanto la verdad como la falsedad forman parte de los cuatro valores, consideran que es más natural establecer la validez de una inferencia de un modo neutral con respecto a ambos valores.

su vez por set-ups. Podemos entender los set-ups como mapeos que asignan uno de los cuatro valores a cada enunciado atómico (proposición).

Los párrafos anteriores muestran, en esencia, el propósito inicial y las caracterísiticas principales de la semántica bivalente tipo Belnap-Dunn, que constituirá una herramienta fundamental en el transcurso de la presente investigación. Por supuesto, la imagen mental final del funcionamiento del *computer* proporcionada por Belnap es mucho más compleja, pero una explicación pormenorizada de la misma excedería el propósito de esta introducción.

En lo que sigue, nos centraremos en mostrar el interés de B4.

(b) La importancia de B4

Es esencial destacar en este punto que la lógica B4 es equivalente al sistema FDE de Anderson y Belnap comentado previamente en esta introducción y cuya importancia entre las lógicas de la relevancia ha sido ya puesta de manifiesto[39].

La importancia de B4 se debe también a su posición entre las lógicas multivaluadas y, en particular, a su relación con la lógica birreticular. Ginsberg (1986, 1988) propuso estructuras algebraicas denominadas "estructuras birreticulares" (o birretículos –*bilattices*–) que generalizan de manera natural B4. Una estructura birreticular está compuesta, al menos, de un conjunto no vacío y dos estructuras reticulares (*lattices*) completas: $< B, L_1, L_2 >$. La finalidad última de una estructura reticular es presentar un orden de la información en base al grado de verdad de la misma ($\leq_t$). En el caso de las estructuras birreticulares, se disponen dos órdenes parciales, siendo cada uno de estos correspondiente a un retículo. Intuitivamente, uno de estos dos órdenes representa el grado de verdad de una fórmula ($\leq_t$) y, el otro, el grado de conocimiento (en el sentido de cantidad de información) de la fórmula ($\leq_k$). Sea el primero de los órdenes mencionados ($\leq_t$) el que corresponde a L_1 y, el segundo ($\leq_k$), aquel correspondiente a L_2: la valoración más alta que puede adquirir una fórmula en L_1 es t y, la más baja, f; por el contrario, en L_2 la valoración más alta sería b y la más baja n. Pues bien, estas estructuras birreticulares han demostrado ser útiles en diversas áreas de la informática[40]; no obstante, cabe anotar que la motivación original de Ginsberg era proveer de una aproximación unitaria a una amplia diversidad de aplicaciones en inteligencia artificial (en adelante, AI –*Artificial Intelligence*).

Sobre la relación entre B4 y la lógica birreticular, es necesario destacar que la estructura birreticular mínima, de cuatro elementos, es FOUR (Ginsberg, 1986; Arieli y Avron, 1998) y equivale justamente a la matriz de la lógica B4 de Belnap[41]. FOUR proporciona un marco útil para capturar tanto el razonamiento clásico como otros métodos no-monotónicos y técnicas paraconsistentes, ya que

[39] Un par de referencias donde la importancia y transcendencia histórica de este sistema queda bien esclarecida son (Omori y Wansing, 2017, 2019).

[40] Sobre su aplicabilidad en el razonamiento computacional o, de manera general, en razonamientos que involucran información inconsistente, véase (Arieli & Avron, 1997).

[41] La matriz MB4 figura en la subsección 2.1, Definición 2.1.1.

nos permite incorporar la posibilidad del desconocimiento o carencia de información (n) y la sobreinformación o inconsistencia (b). A este respecto, Arieli y Avron vindican la tesis de Belnap sobre la importancia fundamental de los cuatro valores básicos para el razonamiento computacional. En su artículo (Arieli y Avron, 1998), se muestra que el empleo de cuatro valores es preferible al uso de tres, incluso en aquellos casos para los que es suficiente con tres, pues todo lo que puede hacerse con tres valores, puede también hacerse con cuatro, incluso de modo más efectivo, pero no a la inversa. En la misma línea, Fitting (1994) afirma que, cuando nuestro propósito está relacionado con bases de datos, es conveniente pasar de una lógica trivaluada a una tetravaluada, justamente para incorporar la posibilidad de que dicha base de datos contenga inconsistencias[42]. En este sentido, afirma también Fitting que las estructuras birreticulares son las herramientas abstractas adecuadas para tratar con información que contenga huecos y excesos (*gaps and gluts*), algo que sucede con frecuencia cuando obtenemos información de diferentes fuentes. Por esta razón, las estructuras birreticulares son también útiles en el desarrollo de semánticas para programas lógicos, como él muestra (Fitting, 1991).

Contar con una herramienta teórica que nos permita evaluar la información con estos cuatro valores puede también ser beneficioso en el terreno de la Filosofía de la Lógica. Así, por ejemplo, obtener herramientas lógicas que nos permitan evaluar razonamientos mediante estos cuatro valores ha supuesto, a juicio de algunos renombrados Filósofos de la Lógica, una posible solución al planteamiento de problemas filosóficos clásicos tales como los futuros contingentes o algunas de las paradojas lógicas clásicas, entre otros. Me remito aquí a señalar brevemente esta cuestión, que se retomará al abordar el interés filosófico del proyecto (en la sección 0.4 de esta introducción).

0.2.2 Corriente australiana: Semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer.

(a) Características generales

La semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer (en adelante, semántica R-M) fue desarrollada por Richard Routley y Robert K. Meyer (1972a, 1972b, 1973) a comienzos de los años setenta del siglo XX. Si bien este tipo de semántica fue originariamente pensada para interpretar lógicas de la relevancia, se ha comprobado que es un instrumento de gran versatilidad que permite interpretar otros tipos de lógicas no clásicas muy distintas entre sí (Brady, 2003; Routley *et al.*, 1982). La lógica mínima interpretable con este tipo de semántica es la lógica básica positiva B_+. Por su parte, la negación se interpreta mediante el conocido "asterisco de Routley" ($*$), un operador adecuado para modelizar negaciones tipo De Morgan y posibles extensiones[43]. Haciendo uso de este operador,

[42]Hay diversas investigaciones en lógicas paraconsistentes sobre su posible uso en bases de datos. Véase, por ejemplo, (Carnielli, Marcos y Amo, 2000).

[43]Sobre la interpretación filosófica de este operador, véase el clásico y llamativo artículo titulado "How I Stopped Worrying and Learned to Love the Routley Star" (Restall, 1999).

el sistema mínimo que puede modelarse es BM, que es el resultado de retirar los axiomas de la doble negación de la lógica básica de Routley y Meyer B[44]. Las obras fundamentales sobre esta semántica son (Routley *et al.*, 1982) y (Brady, 2003); sobre todo, el capítulo cuarto de (Routley *et al.*, 1982), en el que se basarán gran parte de las pruebas que refieren a la semántica R-M contenidas en esta investigación. En esta línea, son también dignas de mención (Routley, 1984) y (Routley y Meyer, 1983).

La semántica R-M es una semántica de tipo relacional con características relativamente semejantes a las de la semántica de mundos posibles de Kripke para lógica modal[45]. En particular, los componentes mínimos de un modelo positivo en cada una de ellas son semejantes: un conjunto de mundos posibles K, una relación de accesibilidad entre mundos R, y una relación de evaluación $\vDash$. Existe un cuarto elemento opcional: un subconjunto de K sobre el cual se decide la validez de las fórmulas, el conjunto de puntos (mundos) designados O.

Por otro lado, encontramos, al menos, dos diferencias fundamentales entre ambas semánticas. En primer lugar, como su propio nombre indica, la semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer se fundamenta en una relación ternaria de accesibilidad[46]; diferenciándose, así, de la relación de accesibilidad característica de la semántica tipo Kripke estándar, que es binaria. La segunda distinción principal gira entorno al tratamiento de la negación. Como ya se adelantó, en la semántica R-M las fórmulas negativas se modelan mediante el operador monario de Routley en cada mundo posible con respecto a su "mundo imagen-asterico" ("mundo imagen-$*$") (Routley *et al.*, 1982; Routley y Routley, 1972). Por el contrario, en la semántica estándar tipo Kripke las fórmulas negativas se interpretan en función del valor que tenga el argumento de la fórmula negada en ese mismo mundo posible. Es importante destacar que tanto la relación ternaria como el operador Routley son instrumentos necesarios de esta semántica sin

[44]Sobre esta cuestión, véase el punto dedicado a la lógica B en el apartado (0.1.c) de esta introducción.

[45]Sobre semántica de mundos posibles y su desarrollo histórico, cf. (Copeland, 2002) y las referencias que allí se incluyen.

[46]A pesar de que hasta el momento estamos empleando la expresión común "mundos posibles" para referir a los elementos del conjunto K, es decir, a los posibles componentes de la relación de accesibilidad, dichos componentes son relativos las distintas interpretaciones de estas semánticas relacionales. Si bien en la semántica de Kripke han sido consensuadamente entendidos como mundos posibles, en el caso de la semántica R-M bien podríamos hablar de puntos, situaciones, set-ups, etc., según la interpretación bajo la que nos posicionemos. Conviene apuntar que no es esta una cuestión meramente lingüística sino que, por poner un ejemplo, en contraste con las características convencionalmente clásicas de los mundos posibles, el término set-ups, frecuentemente empleado en las lógicas de la relevancia, refiere a elementos que no necesariamente mantienen las propiedades de consistencia y completud clásicas, es decir, estos set-ups pueden ser inconsistentes (i.e., contener alguna f.b.f. y la negación de la misma) e incompletos (i.e., no contener alguna f.b.f. ni la negación de la misma). Sobre diferentes interpretaciones posibles de la semántica relacional ternaria, remito al lector a (Beall *et al.*, 2012), (Dunn, 2015) y los capítulos 2 y 3 de (Mares, 2004). En este caso, cabe apuntar que el uso de la expresión "mundos posibles" en la presente introducción obedece sencillamente a la generalidad de la misma, dado que estamos tratando diferentes semánticas relacionales; no obstante, únicamente se pretende aquí con dicha expresión referir de manera general a los elementos del conjunto K.

los cuales encontraríamos fórmulas paradójicas (en el sentido relevante) entre aquellas pertenecientes al conjunto de fórmulas válidas (Robles y Méndez, 2018, Introducción).

(b) Tipos de semántica R-M

En un primer nivel de diferenciación, encontramos que los modelos de la semántica relacional tipo R-M pueden incluir (o no) un subconjunto de puntos designados (mundos posibles, set-ups, etc.) con respecto al que se decida la validez de las fórmulas: el conjunto O. Diferenciamos, entonces, dos tipos de semántica R-M: con un conjunto de puntos designados y sin conjunto de puntos designados. Siguiendo a Brady (1994, p. 6), nos referiremos a la primera de ellas –caracterizada por un modelo general *(general model structure)*– como *semántica general tipo R-M.* Como ya se adelantó, la semántica R-M es un instrumento altamente maleable, capaz de modelar diversos tipos de lógicas. No obstante, si, como ocurre en la presente investigación, nos proponemos utilizarla para modelar lógicas de (la familia de) la relevancia, el conjunto de puntos designados O se vuelve un componente necesario de los modelos; pues, si lo excluimos, se validarían fuertes paradojas de la relevancia[47]. En consecuencia, en la presente investigación solo se considerará la semántica general tipo R-M, es decir, aquella con un conjunto de puntos designados.

En lo que sigue, explicaré brevemente las dos clases de semántica R-M que se utilizarán en este trabajo.

Semántica general reducida tipo Routley-Meyer (*reduced general Routley-Meyer semantics*). Lo que diferencia esta semántica de la general no reducida es justamente la reducción del conjunto de puntos designados a un único elemento, esto es, $O = \{T\}$. En este caso, T es el único set-up normal. De este modo, ya no estamos en presencia de un conjunto de puntos designados sobre el cual se define a su vez el conjunto de fórmulas válidas, sino que este último depende de un único elemento, el set-up designado T (Brady, 1994, p. 6; Slaney, 1987). Los modelos reducidos, propios de esta semántica, parecen claramente preferibles a los característicos de la semántica no reducida, como se defiende en (Routley *et al.*, 1982) y (Brady, 2006). Es preciso destacar que una semántica general reducida no siempre es definible; de hecho, la mayoría de las lógicas investigadas aquí presentan algunas dificultades cuando las dotamos de esta clase de semántica. En particular, una condición necesaria para definir una semántica reducida tipo R-M para una lógica L es la posibilidad de construir teorías normales y primas cerradas por las reglas primitivas de inferencia de L. Sin embargo, esta condición no siempre puede darse en el caso de lógicas débiles. La solución adoptada en este trabajo conlleva aplicar la metodología propuesta en (Routley *et al.*, 1982), (Brady, 2003, 2006) y se

[47]Por poner un ejemplo, en modelos sin el conjunto O, se valida la regla *Verum e quodlibet* (Veq; i.e., "de lo verdadero derívese lo que se quiera"): $A \Rightarrow B \rightarrow A$. Véase (Robles y Méndez, 2018, p. xiv).

basa en la adición de las correspondientes reglas disyuntivas como reglas primitivas de L[48]. En general, en lo que refiere a esta semántica, seguiré la metodología utilizada en (Robles *et al.*, 2016a) como punto de partida, donde se desarrolla una semántica general reducida para las lógicas BN4 y E4[49].

Semántica Routley-Meyer con dos set-ups (*2-set-up Routley-Meyer semantics*). En esta semántica se reducen los elementos del conjunto K a dos: un set-up y su complementario (O y O^*). Brady definió en su artículo de 1982 este tipo de semántica para las lógicas RM3 y BN4. En su artículo, afirma que el método de prueba es bastante general y espera que las pruebas puedan ser modificadas para permitir la axiomatización de otros conjuntos de matrices[50]. Por otro lado, la lógica E4 también ha sido ya dotada de esta semántica (Robles *et al.*, 2016b).

0.3 Modalidad

En la quinta parte de la presente investigación, se definirán expansiones modales que supondrán un fortalecimiento de los sistemas previamente desarrollados. El objeto de la presente subsección es detallar la motivación y el contexto de los operadores modales que constituirán el fundamento de dichas expansiones.

Con el fin de fortalecer los sistemas a través del desarrollo de operadores modales de posibilidad y necesidad, tomaré como punto de referencia el enfoque modal del conocido lógico polaco Jan Łukasiewicz (Lwow, 1878 – Dublin, 1956)[51]. Si bien Łukasiewicz es generalmente considerado uno de los "padres" de la lógica multivaluada, su trabajo estuvo también muy relacionado con la lógica modal justamente debido a que su principal motivación para desarrollar lógicas multivaluadas era el estudio de las nociones modales en conjunción con su estudio crítico de la lógica aristotélica.

[48]Sobre el papel de las reglas disyuntivas en las lógicas de la relevancia, véase el apartado (0.1.e) de esta introducción.

[49]Sobre las lógicas BN4 y E4 y su papel en este proyecto, véase el apartado (0.1.d) de esta introducción.

[50]En el original: "the method of proof is fairly general and it is hoped that the proof can be modified to enable axiomatizations of other matrix sets to be obtained" (Brady, 1982, p. 9).

[51]De acuerdo con Bull y Segerberg (1984), podemos diferenciar al menos tres tradiciones principales en la lógica modal. En primer lugar, tendríamos la tradición matricial y algebraica, que es la que nosotros tomaremos como punto de partida, fruto del análisis de Łukasiewicz (1951, 1953, 1970) sobre los futuros contingentes de Aristóteles (1972). En realidad, aunque no se hará un acercamiento en esta investigación, en esta primera tradición es pertinente mencionar también a Lemmon (1966a, 1966b) y sus semánticas algebraicas para lógica modal. En segundo lugar, estaría la tradición sintática, cuyos sistemas modales (S1-S5) son fruto de la crítica de Lewis al condicional clásico (Lewis, 1912, 1918). En tercer lugar, habría que destacar también la tradición modelo-teorética, cuyo exponente fundamental es la semántica de Kripke para lógica modal (Kripke, 1959) originada a partir de los estudios previos de Carnap (1942, 1947).

> "I have proved that in addition to true and false propositions there are *possible* propositions, to which objective possibility corresponds as a third in addition to being and non-being. This gave me a system of three-valued logic [...]. That system is as coherent and self-consistent as Aristotle's logic, and much richer in laws and formulae." (Łukasiewicz, 1920, p. 86).

Para Łukasiewicz, la realización de un estudio crítico de la lógica aristotélica conecta directamente con su contundente rechazo de la filosofía determinista. En esta línea, afirmaba lo siguiente (Łukasiewicz, 1920):

> "The indeterministic philosophy [...] is the metaphysical substratum of the new logic" (p. 88).

En particular, el principio de bivalencia propio de la lógica clásica aristotélica sería justamente el origen del *determinismo lógico*; según Łukasiewicz, la forma más sutil del determinismo –véase (Minari, 2002).

Łukasiewicz presentó en sus obras dos tipos de análisis de las nociones modales a partir de lógicas multivaluadas[52]:

1. Una serie de sistemas linealmente ordenados (Ł3,..., Łn,..., Łω) que elaboró desde 1920 (Łukasiewicz, 1970). En estas lógicas, los operadores modales de necesidad (L) y posibilidad (M) pueden entenderse de acuerdo con las siguientes definiciones (propuestas por Tarski cuando todavía era estudiante de Łukasiewicz)[53]:
   (a) $LA =_{df} \neg(A \to \neg A)$
   (b) $MA =_{df} \neg A \to A$
2. La lógica modal tetravaluada Ł que definió en los últimos años de su carrera (Łukasiewicz, 1951, 1953). En la lógica Ł, los operadores modales L y M se definen de acuerdo a tablas de verdad independientes del resto de conectivas[54]. Dichas tablas, cuyo estudio proviene de la tradición de algebristas portugueses encabezados por Monteiro, han sido recientemente investigadas por Font y Rius (2000) y también por Béziau (2011).

Desafortunadamente, estos sistemas fruto de sendos análisis de las nociones modales adolecen de lo que podríamos denominar, siguiendo la terminología propuesta por Méndez, Robles y Salto (2016), "paradojas modales de tipo Łukasiewicz". En particular, las lógicas de Łukasiewicz validan algunas tesis difícilmente aceptables desde un punto de vista intuitivo de acuerdo con las

[52]Tal y como mencionan Méndez, Robles y Salto (2016). Sobre esta cuestión, dirijo también al lector a (McCall, 1967) y (Smiley, 1961).

[53]Los símbolos L y M, utilizados a lo largo de la presente investigación para representar los operadores de necesidad y posibilidad, respectivamente, son de Łukasiewicz. Sobre la notación utilizada por él, cf. (Font y Hajek, 2002, notas 2 y 3).

[54]El lector puede encontrar las referidas tablas de verdad para L y M en la Definición 17.1.1, sección 17, parte 5 del presente trabajo.

nociones estándar de posibilidad y necesidad. Algunas de estas tesis son las siguientes[55]:

P1. $(A \to B) \to (MA \to MB)$

P2. $(A \to B) \to (LA \to LB)$

P3. $(MA \wedge MB) \to M(A \wedge B)$

P4. $L(A \vee B) \to (LA \vee LB)$

P5. $LA \to (B \to LB)$

P6. $LA \to (MB \to B)$

De acuerdo con Font y Hajeck (2002), P5 y P6 son el signo de que la lógica Ł es un "callejón sin salida" (*dead end*) en tanto que lógica modal de la necesidad y la posibilidad. En este sentido, podríamos concluir que ninguno de los sistemas anteriores (ni la serie Ł3,..., Łn,..., Łω ni Ł) pueden entenderse como análisis válidos de las nociones de posibilidad y necesidad generados mediante lógicas multivaluadas. No obstante, Méndez y Robles (2016a) muestran que las dos estrategias seguidas por Łukasiewicz a las que me he referido anteriormente sí funcionan al elaborar extensiones modales de la lógica BN4 de Brady (sobre la que se habló en el punto 0.1.d de esta introducción). Ellos argumentan que las expansiones de BN4 obtenidas al introducir operadores modales siguiendo las estrategias de Łukasiewicz son lógicas modales tetravaluadas genuinas y que las paradojas arriba referidas no son válidas en los sistemas resultantes. En definitiva, es esta la razón por la cual también las expansiones modales de las lógicas investigadas en este trabajo se definirán siguiendo las estrategias de Łukasiewicz[56]. Las expansiones modales de los sistemas investigados en esta tesis constituirán, por tanto, un nuevo parámetro de comparación entre los sistemas iniciales y la lógica BN4. Además, se otorgará a cada una de las lógicas resultantes (i.e., las expansiones modales de los sistemas desarrollados inicialmente) una semántica tipo Belnap-Dunn[57].

0.4 Objetivo, novedad e interés de la investigación

El objetivo de la presente investigación es el estudio de las lógicas caracterizadas por las variantes de la matriz tetravaluada MBN4 de Brady que verifican

[55]En (Méndez, Robles y Salto, 2016) se examinan las causas de la presencia de estas tesis en la lógica Ł de Łukasiewicz. Por otra parte, Méndez y Robles (2015) proponen un sistema alternativo al de Łukasiewicz que carece de las paradojas de este último. Por otro lado, en (Blanco, 2018) se investiga un sistema carente de estas y otras paradojas de tipo Łukasiewicz.

[56]Cabe apuntar aquí que existen otras investigaciones modales en torno a BN4 que pudieran ser de interés. Por ejemplo, las que llevaron a cabo Goble (2006) o Odintsov y Wansing (2010) sobre expansiones modales de BN4. En ellas, estos autores se basan en semánticas de mundos posibles para interpretar los operadores modales. Por el contrario, nuestro enfoque partirá de una semántica bivalente tipo Belnap-Dunn y, en consecuencia, seguiremos el camino trazado por Méndez y Robles (2016a) para definir las expansiones modales de nuestros sistemas.

[57]Sobre las características de esta semántica, véase la sección 0.2.1 de esta introducción.

la lógica básica B de Routley y Meyer. Dichas matrices son ocho, incluyendo la propia MBN4 y la matriz ME4 a las que hemos referido en el apartado 0.1.d de la presente introducción. Mi proyecto incluye no solo el estudio particular de la lógica determinada por cada matriz sino también un despliegue pormenorizado de aquellos elementos fundamentales que permitirán a cualquier lector competente en el área efectuar comparaciones de diversa índole entre los sistemas tratados.

En secciones previas, quedaron introducidas las lógicas BN4 y E4 (cuyas matrices pueden encontrarse en las posteriores secciones 3 y 4) y quedó también detallada su importancia y su lugar dentro de la familia de las lógicas de la relevancia. Como ya se adelantó, Robles y Méndez presentaron el sistema E4 a partir de una modificación de la matriz de BN4 con el objetivo de desarrollar un compañero de BN4 cuya relación con este último fuera pareja a la que mantienen las lógicas de la relevancia R y E. Asimismo, en las conclusiones de (Robles y Méndez, 2016), los autores afirman que E4 podría no ser el único compañero posible para BN4. De hecho, explican que, si partimos de las estructuras matriciales básicas de MBN4 y ME4, solo hay ocho matrices que verifican la lógica básica B de Routley y Meyer. Pues bien, la problemática en que se fundamenta la presente investigación responde a la cuestión planteada por Robles y Méndez *de resultas* de los comentarios de John Slaney a una primera versión de (Robles y Méndez, 2016) y puede enunciarse como sigue: ¿Puede alguna de estas matrices ser una alternativa a ME4 interesante, o incluso a MBN4?

En consecuencia, el propósito de este estudio es desarrollar las seis lógicas fruto de las variantes implicativas de MBN4 y ME4, axiomatizarlas, y dotarlas de diferentes clases de semánticas[58]. Además, se investigarán distintas expansiones modales de las ocho lógicas y se probará que los sistemas mantienen una serie de propiedades interesantes desde el punto de vista de las lógicas de la relevancia así como de otras lógicas no clásicas[59]. Todo lo anterior constituirá la base técnica comparativa a partir de la cual el lector podrá establecer sus propias conclusiones sobre el interés de cada uno de los sistemas considerados. Por lo tanto, no es objeto del presente estudio defender la preeminencia de uno (o varios) de los sistemas analizados sobre los otros[60] sino en realizar una investigación técnica profunda sobre las propiedades de cada una de estas lógicas en sí mismas y en relación con el resto. Por el contrario, sí forma parte del propósito de esta investigación evaluar el interés lógico de estos nuevos sistemas y reafirmarlos como (otros) posibles compañeros de la lógica BN4, o incluso de E4. Con este propósito en mente, el objetivo de mi investigación se concreta y divide en los siguientes.

1. Demostrar que, en efecto, solo hay ocho matrices que, partiendo de la

[58]Entiendo "proporcionar (dotar de) una semántica para (a) una lógica L" como demostrar la corrección y completud fuertes de L con respecto de la semántica del caso.

[59]El lector puede encontrar un resumen de las propiedades esenciales características de las lógicas de la relevancia en (Dunn, 1986).

[60]Tal defensa, por un lado, podría llevarse a cabo (probablemente con resultados dispares) desde muy diversas perspectivas lógicas (y filosóficas) y, por otro, seguramente conllevaría presupuestos lógicos (y filosóficos) de partida muy fuertes.

estructura básica que presentan MBN4 y ME4, verifiquen la lógica B.

2. Axiomatizar las lógicas caracterizadas por estas ocho matrices.

3. Dotar a las ocho lógicas de una semántica bivalente tipo Belnap-Dunn.

4. Desarrollar una semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer para cada unas de estas ocho lógicas.

5. Desarrollar una semántica relacional con dos set-ups para cada una de las mencionadas lógicas.

6. Proporcionar dos clases de expansiones modales diferentes para estas lógicas y extender la semántica Belnap-Dunn previamente desarrollada a los sistemas resultantes.

7. Elaborar un estudio pormenorizado de las características esenciales de las ocho lógicas que permita establecer discusiones comparativas entre ellas.

Dedicaré el presente y el siguiente párrafo a subrayar el estado de la cuestión y la originalidad del proyecto que nos ocupa. Es claro que dos de las lógicas tratadas en este estudio, BN4 y E4, han sido previamente desarrolladas (Brady, 1982; Robles y Méndez, 2016). En el mismo artículo fundacional de BN4, Brady proporciona a BN4 una semántica tipo Belnap-Dunn y una semántica relacional con dos set-ups. Además, BN4 ha sido también provista, junto a la lógica E4, de una semántica relacional ternaria con modelos reducidos (Robles *et al.*, 2016a). Por su parte, E4 fue dotada de una semántica tipo Belnap-Dunn en (Robles y Méndez, 2016) y de una semántica relacional con dos set-ups en (Robles *et al.*, 2016b). En lo que refiere a la modalidad, en otro artículo de Méndez y Robles (2016a) se investigan fortalecimientos de la lógica BN4 mediante operadores modales.

En este proyecto partiremos de las variantes implicativas de MBN4 y ME4 expuestas en (Robles y Méndez, 2016) y compondremos las ocho lógicas referidas axiomatizando las matrices a partir de la semántica Belnap-Dunn que desarrollaremos para ellas. Cabe apuntar aquí varias cuestiones. En primer lugar, incluiremos una base axiomática común a todos los sistemas con el fin de realizar después pruebas conjuntas de los teoremas de corrección y completud de las diferentes semánticas utilizadas. Emplearemos en consecuencia axiomatizaciones de BN4 y E4 diferentes a las propuestas en sus artículos fundacionales y probaremos estos teoremas también para ellas. En segundo lugar, es preciso destacar que una de las matrices incluídas en este estudio (en particular, una de las variantes de ME4) ha sido previamente analizada por J. M. Blanco (2018) en su tesis doctoral. Igual que en el caso de los sistemas BN4 y E4, como nos valdremos de un conjunto mínimo de axiomas comunes a las ocho lógicas, daremos también una nueva axiomatización a esta variante de ME4 que ya ha sido previamente tratada. En último lugar, es preciso apuntar aquí que Petrukhin y

Shangin (2020)[61] definieron recientemente sistemas de deducción natural para extensiones binarias de FDE bajo una perspectiva muy distinta a la aquí propuesta, la del análisis de la correspondencia (*correspondence analysis*)[62]. En particular, en la segunda sección de su artículo, refieren a las ocho matrices señalas por Robles y Méndez. No obstante, su enfoque es, como se acaba de señalar, muy diferente del adoptado en esta investigación. Asimismo, es preciso anotar también que De y Omori construyeron ya una extensión de FDE que verifica B, que es, de hecho, equivalente a la lógica PŁ4 independientemente desarrollada por Méndez y Robles (2016)[63]. Por tanto, a excepción de MBN4, ME4 y la matriz estudiada por Blanco (que denominaremos Mt2 en el presente estudio), es la primera vez que las matrices señaladas por Robles y Méndez se analizan en profundidad y se axiomatizan mediante cálculos á la Hilbert. Esta es entonces una investigación original que toma como punto de partida ciertas hipótesis lógicas expuestas en la literatura reciente. Es por ende destacable que las lógicas determinadas por las señaladas matrices se desarrollan aquí por vez primera y se modelizan mediante tres clases distintas de semánticas que, siguiendo la línea metodológica e investigadora de los trabajos ya publicados sobre BN4 y E4, permitirán poner en relación a las lógicas presentadas con el amplio abanico de sistemas no clásicos que hayan sido interpretados con estas semánticas.

Acerca del posible impacto de la investigación, es claro que el proyecto descrito tiene un interés esencialmente lógico: resolver el problema abierto, planteado por Robles y Méndez y Slaney, en el ámbito donde confluyen la lógica multivaluada, la lógica de la relevancia y la lógica modal. No obstante, los

[61]En este artículo, Petrukhin y Shangin comparan el método de axiomatización utilizado por Avron y sus colaboradores (Avron, Ben-Naim y Konikowska, 2007; Avron, Konikowska y Zamansky, 2013) con el método empleado por Kooi y Tamminga (2012), defendiendo que este último tiene ciertas ventajas sobre el primero. Pues bien, sería demostrable que el método de axiomatización empleado en el presente trabajo –que no es otro que el desarrollado por Brady (1982) según lo aplican Robles y Méndez en sus investigaciones– es equivalente al de Kooi y Tamminga. No obstante, el primero contaría con, al menos, dos ventajas esenciales: (1) el método está apoyado en una semántica de gran interés (la semántica bivalente tipo Belnap-Dunn); (2) al contrario de lo que hacen Robles y Méndez –véase, por ejemplo, (Robles, en vías de publicación)–, Koi y Tamminga no aclaran cómo hallan las reglas del mismo. Además, cabe apuntar que también sería posible desarrollar para las lógicas objeto de esta investigación, por un lado, un cálculo de deducción natural, siguiendo la metodología propuesta por Koi y Tamminga (2012); por otro, un cálculo de secuentes sin la regla de corte (*a cut-free ordinary sequent calculi*) al modo de Avron *et al.* (2007, 2013). En relación con esta cuestión de la completud, cabe por último mencionar el artículo de Omori y Sano (2015) sobre la completud funcional (*functional completeness*) de la lógica de Belnap-Dunn.

[62]En realidad los autores se están refiriendo a la conocida Teoría de la correspondencia (*Correspondence Theory*). Cf. (van Benthem, 2001). Petrukhin y Shangin emplean también este método –en este caso, aplicado a lógicas trivaluadas– en (Petrukhin y Shangin, 2017, 2018).

[63]En (Kamide y Omori, 2017, Sección 1), se especifica que PŁ4 es equivalente a la lógica BD+ de De y Omori (2015), la lógica paraconsistente de Zaitsev FDEP (Zaitsev, 2012) y la lógica modal tetravaluada de Beziau PM4N (Beziau, 2011). PŁ4 es también el mismo sistema que el desarrollado por Avron (2020) y es, asimismo, equivalente a la expansión de la lógica de Belnap-Dunn que desarrollan Sano y Omori (2014).

resultados del mismo pueden también ser de importancia desde, al menos, tres puntos de vista:

(i) Informática. La relación de B4, BN4 (y el resto de lógicas estudiadas en la presente tesis) con la lógica bi-reticular, de esenciales aplicaciones en informática, ha sido puesta de manifiesto anteriormente. Por otra parte, la utilidad de las lógicas trivaluadas y tetravaluadas en informática es a estas alturas de sobra conocida. Véanse, por mencionar unos pocos ejemplos, las referencias clásicas (Belnap, 1977a, 1977b; Arieli y Avron, 1996, 1997, 1998). Además, por remitirme a algunas obras más recientes, el lector puede ver (Osorio, 2007; Osorio y Carballido, 2008), sobre la utilidad de una modificación de la lógica trivaluada G3 de Gödel en la definición de programas lógicos.

(ii) Lógica general. Como se demostrará en la primera parte de la presente investigación, todas las lógicas que se van a desarrollar son extensiones de la lógica básica B de Routley y Meyer; esta última, por su parte, es a su vez una extensión del conocido sistema FDE (presentado en una subsección previa de esta misma introducción). La importancia de este último entre las lógicas no clásicas es bien sabida, en particular, su lugar entre las lógicas de la relevancia y las lógicas multivaluadas es clave. FDE ha sido un sistema ampliamente estudiado desde diferentes perspectivas, como resumen Omori y Wansing (2017) en el reciente artículo "40 years of FDE: An Introductory Overview". En particular, ahí se exponen algunas de las expansiones implicativas de FDE más conocidas, incluyendo la propia lógica BN4. En las conclusiones del artículo, Omori y Wansing mencionan posibles líneas futuras de estudio interesantes, incluyendo como una de estas líneas, el desarrollo de nuevas expansiones de FDE y axiomatizaciones de lógicas de la relevancia que sigan el "plan americano"[64]. Pues bien, los resultados expuestos en esta tesis contribuyen también a las investigaciones previas realizadas sobre FDE; en especial, en lo que refiere a expansiones implicativas del mismo axiomatizadas siguiendo el plan americano. Por otro lado, al dotar también a las lógicas estudiadas de una semántica R-M, las pongo en relación, desde el punto de vista de esta semántica, con cada una de las familias de lógicas que han podido ser modelizadas con la mencionada semántica y, en especial, con aquellas lógicas de la relevancia que no disponen de semántica matricial (ni tipo B-D). Desde una perspectiva lógica general estaría, pues, contribuyendo al cumplimiento del desiderátum de alcanzar un tratamiento unificado de las diversas lógicas no clásicas, expresado en una de las acepciones en las que cabe entender el programa conocido como "Lógica Universal" –*Universal*

[64]Omori y Wansing (y, en general, la tradición académica relevantista) distinguen entre la vertiente americana y la vertiente australiana. La primera (*à la American plan*) se caracteriza por desarrollar semánticas tipo B-D para las lógicas de la relevancia y; la segunda (*à la Australian plan*), semánticas tipo R-M. En lo que refiere a esta cuestión, el lector puede consultar (Routley, 1984). En el presente trabajo, como ya se ha mencionado, utilizaremos ambos enfoques para estudiar las lógicas que nos ocupan. Por otro lado, en la tradición americana normalmente se emplea la expresión "lógicas de la relevancia" (*relevance logics*) mientras que la australiana utiliza "lógicas relevantes" (*relevant logics*) para referirse a esta clase de lógicas.

Logic; véase, por ejemplo, (Brady, 2006).

(iii) Filosofía de la Lógica. El papel de FDE (o, de manera equivalente, de B4) no es importante solamente en lo que a lógica e informática refiere, sino que también lo es desde un punto de vista filosófico. FDE es una lógica base esencial desde una perspectiva no clásica porque incorpora elementos que permiten llevar a cabo razonamientos que involucran huecos y excesos (*gaps and gluts*), dicho de otro modo, permite un razonamiento paraconsistente y paracompleto, lo que ha sido ampliamente utilizado para abordar distintos problemas en Filosofía de la Lógica[65]. Incluso a nivel general, el auge del interés en los razonamientos paraconsistentes y paracompletos en el panorama filosófico (no meramente lógico) actual es también sobradamente conocido. Me remito aquí entonces a señalar algunos artículos en los que conocidos filósofos de la lógica abogan por este tipo de razonamientos y el desarrollo de las lógicas que a ellos subyacen: (Beall, 2017, 2018; Priest, 1984, 2011, 2014, 2016). Pues bien, en relación con esta última cuestión es preciso subrayar que todas las expansiones de FDE que se van a proponer aquí son en efecto lógicas paraconsistentes[66] y paracompletas. Por otro lado, la presente investigación también proporcionará datos a tener en cuenta en la discusión de los conceptos de implicación relevante (*entailment*) y condicional relevante (*relevant conditional*) desde la perspectiva de la lógica tetravaluada[67].

0.5 Estructura de la investigación y metodología

La presente investigación se compone de cinco partes diferentes que, a su vez, se dividen en diversas secciones. En lo que sigue, expondré brevemente la organización de los objetivos retratados en la sección previa.

La parte 1 está compuesta por ocho secciones en total. La primera de ellas se dedicará a la exposición de las nociones esenciales con las trabajaremos a lo largo de toda la investigación. En la sección 2, se exponen la matriz MB4 y algunas axiomatizaciones de sistemas lógicos preliminares que tomaremos como punto de partida. En las secciones 3 y 4, respectivamente, se desarrollan las

[65]Por ejemplo, como posibles formas de abordar (con mayor o menor éxito) ciertas paradojas lógicas, como la paradoja del mentiroso (Beall *et al.*, 2016), la paradoja de Curry (Shapiro y Beall, 2018) o la paradoja de Russell (Irvine y Deutsch, 2020). Todavía mejor conocido es el uso de lógicas sin el principio de tercero excluído (paracompletas) para abordar la problemática sobre los futuros contingentes de Aristóteles y la filosofía determinista (Łukasiewicz, 1961).

[66]De hecho, son lógicas dialeteístas (*dialetheic logics*, *dialetheism*), es decir, no se trata simplemente de que no validen la regla ECQ sino que ni tan siquiera validan el principio de no contradicción. La relación entre estas, y otras propiedades interesantes de las lógicas no clásicas, y las lógicas objeto de esta investigación está desarrollada en la sección 20 del presente trabajo.

[67]En particular, cabría preguntarse cuáles de estos sistemas podrían considerarse lógicas tetravaluadas de la implicación relevante (*entailment*) o, dicho de otro manera, cuáles encierran una teoría de la necesidad lógica al modo en que lo hace la lógica E de Anderson y Belnap. En relación con esta cuestión, se ha desarrollado casi al término de la investigación la Proposición 20.1.5 (sección 20, parte 5).

matrices MBN4 y ME4 y las lógicas determinadas por estas matrices (i.e., BN4 y E4). A continuación, en la sección 5, se demuestra que las variantes de MBN4 y ME4 expuestas en las conclusiones de (Robles y Méndez, 2016) son, en efecto, las únicas que verifican la lógica básica B de Routley y Meyer. La sección 6 es de esencial importancia puesto que en ella se introduce un sistema básico auxiliar, la lógica b4, que recoge la base axiomática común a todas las lógicas que se van a axiomatizar en la sección 7; estas últimas son las lógicas determinadas por las variantes implicativas de MBN4 y ME4 que verifican la lógica B, denominadas aquí lógicas-Lti (por motivos que se expondrán en esta primera parte). Las lógicas desarrolladas en esta última sección serán por tanto extensiones del sistema auxiliar y para referirnos a ellas y, en general, a otras posibles extensiones de b4, utilizaremos la expresión lógicas-Eb4 (i.e., lógicas formadas como extensiones de la lógica auxiliar b4). En la sección 6, además, se habrán introducido también una serie de nociones comunes a todas las lógicas consideradas que serán de gran utilidad a lo largo de la tesis. En la última sección de la parte 1, la sección 8, se probarán una serie de lemas que tendrán un rol esencial en las pruebas de completud de las diferentes semánticas empleadas en este trabajo, los *Lemas de Extensión*. En esencia, en esta primera parte se asientan las bases técnicas de esta investigación y se exponen las lógicas objeto de estudio así como las matrices que las determinan.

La parte 2 de la investigación se dedica a dotar de una semántica bivalente tipo Belnap-Dunn a las lógicas-Lti. Se divide a su vez en dos secciones: en la sección 9 se prueba la corrección fuerte de estas lógicas con respecto a esta semántica; en la sección 10 se demuestra el teorema de completud fuerte con respecto a la misma.

La parte 3 está dedicada a la semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer con modelos reducidos y en ella diferenciamos cuatro secciones. En las tres primeras (Secciones 11–13) se prueban los teoremas de corrección y completud fuertes para la lógica b4. Más específicamente, en la sección 11 se desarrollan modelos semánticos tipo R-M para lógicas-Eb4; en la 12, se prueba un conjunto de lemas que serán de utilidad para las pruebas de completud de esta semántica y, en la sección 13, se prueba la corrección fuerte de b4. En la última sección perteneciente a esta tercera parte (sección 14), se prueba la completud de las lógicas objeto de esta investigación con respecto a la semántica R-M.

La parte 4 sigue una estructura semejante a la de la parte 2: en la sección 15 se definen modelos relacionales con dos set-ups para las lógicas-Lti y se prueba la corrección fuerte de las mismas; asimismo, en la sección 16 se prueba la completud fuerte respecto de la semántica con dos set-ups.

En la parte 5, se proponen expansiones modales de las lógicas-Lti siguiendo la metodología empleada previamente en la parte 2, esto es, se extiende la semántica B-D ahí desarrollada. Por un lado, en la sección 17, los operadores modales serán definidos mediante tablas de verdad de manera independiente del resto de conectivas; por el contrario, en la sección 18, las expansiones modales se fundamentan en las definiciones de Tarski para los operadores modales que sí varían en función de las demás conectivas de estas lógicas.

Por último pero no menos importante, en la parte 6 nos ocuparemos de señalar los rasgos distintivos de las diferentes lógicas-Lti. En particular, en la primera sección de esta sexta parte (sección 19), propondremos simplificaciones de los Lemas de Extensión (probados en la parte 1, sección 8) mediante adaptaciones de la versión conjunta de estos lemas a cada una de las lógicas-Lti. En la sección final de esta parte 6 (sección 20) se prueba una amplia lista de propiedades tanto de las lógicas-Lti como de sus distintas expansiones modales. Se investigará, por ejemplo, la relación existente entre algunas propiedades clave de las lógicas de la relevancia y las lógicas-Lti (subsección 20.1); también se probará aquí que todos los sistemas considerados son paraconsistentes y paracompletos (subsección 20.2), por mencionar solamente algunas de las más notables. También incluyo en esta última sección una lista de fórmulas de posible interés (desde una perspectiva tanto proposicional como modal) y la relación de las mismas con las lógicas investigadas en el presente estudio.

Se dedicará un último epígrafe a la exposición final de los resultados del estudio bajo el clásico rótulo "conclusiones". Como es habitual, la investigación concluye con la lista de las referencias citadas a lo largo de este trabajo. Adicionalmente, se incluyen cuatro anexos. El primero contiene el conjunto de teoremas de la lógica B de Routley y Meyer (junto a sus respectivas pruebas) que se emplean a lo largo de la investigación. En el segundo se expone la lista de todos los axiomas, teoremas y reglas que se utilizan en diferentes pruebas a lo largo de este trabajo. El tercero muestra un índice ampliado con todos y cada uno de los *ítems* (definiciones, lemas, proposiciones, observaciones y teoremas) enunciados y el lugar donde están situados. Por último, en el cuarto anexo, el lector puede encontrar la traducción al inglés de las conclusiones finales de esta tesis doctoral.

Las pruebas desarrolladas a lo largo de esta tesis se basan en diferentes metodologías desarrolladas en la literatura. En primer lugar, la demostración de que solo hay ocho matrices (con la estructura de MBN4 o ME4) que verifican la lógica básica B de Routley y Meyer seguirá líneas semejantes a las desarrolladas en (Robles y López, 2020). Por otro lado, en la axiomatización de las matrices mediante la aplicación de una semántica B-D seguiré la metodología utilizada por Brady (1982) tal y como ha sido adaptada en (Robles y Méndez, 2013, 2016, 2019a, 2019b; Robles, Salto, Méndez, 2014, 2019; Méndez y Robles, 2015). Además, me basaré en las axiomatizaciones obtenidas en la parte 1 y obtendré una semántica R-M para interpretar estas lógicas siguiendo las técnicas del capítulo cuarto de (Routley *et al.*, 1982) según se aplican en (Robles, 2013) y (Robles y Méndez, 2014) a lógicas trivaluadas, y en (Robles *et al.*, 2016a) a tetravaluadas. Respecto a la semántica con dos set-ups, seguiré las técnicas desarrolladas por Brady (1982) en el artículo fundacional de BN4 de la manera en que se aplican en (Robles *et al.*, 2016b). Por último, las técnicas con que se obtendrá el fortalecimiento modal de los sistemas en la parte 5 se basan en (Méndez y Robles, 2016a). A nivel general cabe esclarecer que utilizaremos pruebas de completud de tipo Henkin (1949). Por último, es pertinente señalar que el estudio que nos ocupa tiene una clara preeminencia semántica –no en vano vamos a tratar con tres semánticas diferentes de gran interés entre las lógicas de la relevancia– y, en este sentido, no forma parte de los objetivos del mismo proporcionar axiomatizaciones exhaustivas (i.e., mínimas) de los sistemas que se van a desarrollar[68]. Por el contrario, el foco de interés estará puesto en aquellas axiomatizaciones que permitan desarrollar con mayor comodidad las distintas semánticas con que se caracterizarán los sistemas. Si bien un estudio predominantemente sintáctico podría también ser de interés y, de hecho, sería seguramente posible desarrollar también un cálculo de deducción natural para nuestros sistemas así como un cálculo de secuentes –conforme a la metodología propuesta en (Koi y Tamminga, 2012) y (Avron *et al.*, 2007, 2013), respectivamente–, tales propósitos, entre otros, quedan pendientes como posibles líneas de investigación futuras.

[68]Incluso aquellos considerados como los mayores expertos dentro de las líneas de investigación que sigue esta tesis prescinden en muchos casos de tales axiomatizaciones mínimas en sus artículos. Véase (Dunn, 2000).

Parte 1: Presentación de las lógicas consideradas en esta investigación

1 Definiciones generales

En lo que sigue, expondré una serie de definiciones fundamentales que serán de absoluta utilidad a lo largo de esta investigación.

Definición 1.1: Lenguajes. Un lenguaje proposicional se compone de un conjunto enumerable de variables proposicionales (p_0, p_1, ..., p_n, ...) y todas o algunas de las siguientes conectivas: $\rightarrow$ (condicional), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\neg$ (negación). El bicondicional ($\leftrightarrow$) y el conjunto de fórmulas bien formadas se definen del modo normal. A, B, etc. son variables metalingüísticas. Con $\mathcal{P}$ y $\mathcal{F}$ nos referimos, respectivamente, al conjunto de todas las variables proposicionales y al conjunto de todas las fórmulas bien formadas (f.b.f.).

Definición 1.2: Lógicas. Una lógica L es una estructura $(\mathcal{L}, \vdash_L)$ donde $\mathcal{L}$ es un lenguaje proposicional y $\vdash_L$ es una relación de consecuencia definida en $\mathcal{L}$ mediante un conjunto de axiomas y un conjunto de reglas de derivación.

Definición 1.3: Extensiones y expansiones de L. Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos lenguajes proposicionales. $\mathcal{L}'$ es un fortalecimiento de $\mathcal{L}$ si el conjunto de f.b.f. de $\mathcal{L}$ es un subconjunto propio del conjunto de f.b.f. de $\mathcal{L}'$. Por otro lado, sean L y L' dos lógicas construidas sobre los lenguajes proposicionales $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, respectivamente. Supóngase también que todos los axiomas de L son teoremas de L' y todas las reglas primitivas de derivación de L son demostrables en L'. Entonces, L' es una extensión de L si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son el mismo lenguaje proposicional; y L' es una expansión de L si $\mathcal{L}'$ es un fortalecimiento de $\mathcal{L}$. Además, una extensión L' de una lógica L es propia si L no es una extensión de L'. Mediante el rótulo EL nos referiremos de modo general a una extensión (o expansión, según el caso) de la lógica L.

Definición 1.4: Prueba en L. $\Gamma \vdash_L A$ (A es derivable a partir de Γ en L) si y solo si (en adelante, syss) hay $< B_1, ..., B_n >$ tal que B_n es A y cada B_i ($1 \leq i \leq n$) pertenece a una de las siguientes categorías: (a) una fórmula de Γ; (b) un axioma de L; (c) el resultado de aplicar alguna de las reglas a una o más fórmulas previas en la secuencia.

Definición 1.5: Teorema de L. $\vdash_L A$ syss hay $< B_1, ..., B_n >$ tal que B_n es A y cada B_i ($1 \leq i \leq n$) pertenece a una de las siguientes categorías: (a) un axioma de L; (b) el resultado de aplicar alguna de las reglas a una o más fórmulas previas en la secuencia.

Definición 1.6: Matriz lógica. Una matriz (lógica) es una estructura $\langle\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$, $F\rangle$ donde (1) $\mathcal{V}$ es un conjunto (ordenado) de valores (de verdad); (2) $\mathcal{D}$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{V}$ (el conjunto de los valores designados); y (3) F es el conjunto de funciones en $\mathcal{V}$ tal que para cada conectiva c (del lenguaje proposicional en cuestión), hay una función $f_c \in F$ tal que $\mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}$.

Definición 1.7: M-interpretaciones, M-consecuencia, M-validez. Sea M una matriz para (un lenguaje proposicional) $\mathcal{L}$. Una M-interpretación I es una función de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{V}$ de acuerdo con las funciones en F. Por otro lado, para cualquier conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, A es M-consecuencia de Γ (A es consecuencia semántica de Γ de acuerdo con M, $\Gamma \vDash_M A$[69]) syss $I(A) \in \mathcal{D}$ cuandoquiera que $I(\Gamma) \in \mathcal{D}$[70] para toda M-interpretación I. A es M-válida (A es válida en la matriz M, $\vDash_M A$) syss $I(A) \in D$ para toda M-interpretación I.

Definición 1.8: Lógica determinada por una matriz. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, M una matriz para $\mathcal{L}$ y $\vdash_L$ una relación de consecuencia sintáctica definida sobre $\mathcal{L}$. Entonces, una lógica L está determinada por M syss para cada conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, $\Gamma \vdash_L A$ syss $\Gamma \vDash_M A$. En particular, la lógica L (entendiendo "lógica" como el conjunto de sus teoremas) está determinada por M syss para cada f.b.f. A, $\vdash_L A$ syss $\vDash_M A$.

Definición 1.9: El conjunto de consecuencias de Γ en L ($Cn\Gamma[L]$). Sea L una lógica definida sobre el lenguaje formal $\mathcal{L}$ y Γ un conjunto de f.b.f. de $\mathcal{L}$, el conjunto de consecuencias de Γ en L se define como sigue: $Cn\Gamma[L] = \{A \mid \Gamma \vdash_L A\}$. Entonces, $Cn\Gamma[L]$ está cerrado por las reglas de L y contiene todos los teoremas de L (pues contiene todos sus axiomas)[71].

[69] Mediante $\vDash_M$ me referiré a la relación de consecuencia definida en M.
[70] $I(\Gamma) \in \mathcal{D}$ syss $I(B) \in \mathcal{D}$ para todo $B \in \Gamma$.
[71] Cf. Definiciones 1.2 y 1.4.

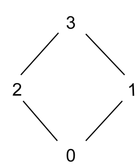
2 Algunos sistemas preliminares

En la presente sección se exponen algunos sistemas que constituyen los antecedentes históricos de aquellos que son objeto de este estudio. Cabe anotar que, si bien los sistemas FDE y B fueron ya comentados al inicio de esta investigación, dado que constituyen dos lógicas básicas esenciales en el presente estudio, reiteramos aquí su exposición.

2.1 La matriz MB4 y la lógica determinada por ella

Presento aquí la matriz MB4 de Belnap que determinará la lógica expuesta en la siguiente subsección.

Definición 2.1.1: La matriz MB4 de Belnap[72]. El lenguaje proposicional se compone de las conectivas $\wedge$, $\vee$, $\neg$. La matriz MB4 de Belnap es la estructura $(\mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{F})$ donde (1) $\mathcal{V} = \{0, 1, 2, 3\}$ cuyo orden se muestra en el siguiente diagrama



(2) $\mathcal{D} = \{2, 3\}$; (3) $\mathcal{F} = \{ f_\wedge, f_\vee, f_\neg\}$ donde $f_\wedge$ y $f_\vee$ se definen como glb (*greatest lower bound* o mayor límite inferior) y lub (*least upper bound* o menor límite superior), respectivamente. $f_\neg$ es una operación involutiva tal que $f_\neg(0) = 3$, $f_\neg(3) = 0$, $f_\neg(1) = 1$ y $f_\neg(2) = 2$.

Las tablas de verdad para $\wedge$, $\vee$, $\neg$ son las siguientes:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
*2	0	0	2	2
*3	0	1	2	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
*2	2	3	2	3
*3	3	3	3	3

$\neg$	
0	3
1	1
*2	2
*3	0

Por otro lado, las nociones de MB4-interpretación, MB4-consecuencia y MB4-validez se entienden de acuerdo con la Definición 1.7.

Observación 2.1.1: Sobre el significado intuitivo de los cuatro valores. Los cuatro valores de verdad presentes en MB4 pueden interpretarse intuitiva-

[72]Sigo a Méndez y Robles (2016a) en la denominación MB4 para la matriz de Belnap. No obstante, es preciso apuntar aquí que, en realidad, Belnap (1977a, 1977b) denomina a esta estructura L4. Asimismo, los valores de verdad utilizados originalmente por Belnap son F, N, B y T. Por el contrario, para describir las matrices tetravaluadas, se utilizarán durante esta investigación los siguientes valores correlativos a los de Belnap, respectivamente: 0, 1, 2 y 3. (Cf. Observación 2.1.1)

mente como sigue. Sean T, F símbolos lógicos que representan la verdad y la falsedad, respectivamente. Entonces, $0 = F$, $1 = N$, $2 = B$ y $3 = T$[73]. Podríamos también efectuar una lectura de estos cuatro valores en términos de subconjuntos de $\{T, F\}$, en cuyo caso tendríamos: $0 = \{F\}$, $1 = \emptyset$, $2 = \{T, F\}$ y $3 = \{T\}$. En este sentido, se suele utilizar el término "semántica bivalente" para referirse a la semántica tipo Belnap-Dunn dado que solo se consideran dos valores de verdad y la posibilidad de asignar ambos o ninguno a una f.b.f.

2.2 La lógica FDE

Definición 2.2.1: La lógica *First Degree Entailment.* La lógica FDE puede ser axiomatizada como sigue:
AXIOMAS

A1$_{FDE}$ $A \to A$

A2$_{FDE}$ $(A \wedge B) \to A$ / $(A \wedge B) \to B$

A3$_{FDE}$ $A \to (A \vee B)$ / $B \to (A \vee B)$

A4$_{FDE}$ $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

A5$_{FDE}$ $\neg\neg A \to A$

A6$_{FDE}$ $A \to \neg\neg A$

REGLAS

Adjunción (Adj) $A, B \Rightarrow A \wedge B$

Modus Ponens (MP) $A, A \to B \Rightarrow B$

Transitividad (Trans) $A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C$

Introducción condicionada de la conjunción (CI$\wedge$) $A \to B, A \to C \Rightarrow A \to (B \wedge C)$

Eliminación de la disyunción (E$\vee$) $A \to C, B \to C \Rightarrow (A \vee B) \to C$

Contraposición (Con) $A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$

Observación 2.2.1: Sobre la axiomatización de FDE. FDE es clásicamente axiomatizada mediante los axiomas A2-A6 y las reglas Trans, I$\wedge$, E$\vee$ y Con[74]. Asimismo, como su propio nombre indica, solo se aplica a fórmulas condicionales de primer grado. La anterior axiomatización del sistema FDE se fundamenta en aquella aportada por Slaney (1995), aunque introducen aquí

[73] Cabe aclarar aquí que el uso de estos símbolos se debe a las iniciales de los vocablos ingleses correspondientes: T(ruth), F(alse), N(either) y B(oth).

[74] Nótese que A1 es derivable mediante A2-A6 y las citadas reglas. Cf. (Anderson y Belnap, 1975, pp. 158 y 159).

algunos cambios. En particular, se eliminan las constantes T, F y t, así como la conectiva $\circ$. También se prescinde de las reglas que establecen la asimetría de $\rightarrow$. Por otro lado, la diferencia esencial entre la axiomatización clásica de FDE y la reflejada en la Definición 2.2.1 es la adición de las reglas Adj y MP. La motivación de esta distinción es extender FDE mediante axiomas que presenten condicionales anidados. Cabe también mencionar que el fragmento positivo de FDE, FDE+, puede axiomatizarse con A1-A4, Adj, MP, Trans, I$\wedge$, E$\vee$.

Proposición 2.2.1: FDE es la lógica determinada por MB4. La lógica *First Degree Entailment* está determinada por la matriz MB4 de Belnap.

Prueba. Véase (Dunn, 2000), (Anderson y Belnap, 1975, p. 161). ■

2.3 La lógica B de Routley y Meyer

La lógica B de Routley y Meyer es un sistema clave en este trabajo dado que está incluido en todos los sistemas que se van a considerar en la investigación.

Definición 2.3.1: La lógica B. La lógica B puede axiomatizarse como sigue:
AXIOMAS

A1$_B$ $A \rightarrow A$

A2$_B$ $(A \wedge B) \rightarrow A$ / $(A \wedge B) \rightarrow B$

A3$_B$ $[(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \wedge C)]$

A4$_B$ $A \rightarrow (A \vee B)$ / $B \rightarrow (A \vee B)$

A5$_B$ $[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow C]$

A6$_B$ $[A \wedge (B \vee C)] \rightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

A7$_B$ $\neg\neg A \rightarrow A$

A8$_B$ $A \rightarrow \neg\neg A$

REGLAS

Adjunción (Adj) $A, B \Rightarrow A \wedge B$

Modus Ponens (MP) $A, A \rightarrow B \Rightarrow B$

Prefijación (Pref) $A \rightarrow B \Rightarrow (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$

Sufijación (Suf) $A \rightarrow B \Rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

Contraposición (Con) $A \rightarrow B \Rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

Observación 2.3.1: Sobre la axiomatización de B. La axiomatización de B presentada en la Definición. 2.3.1 tiene un sustrato común con la establecida por Routley y Meyer (1982, capítulo 4). No obstante, podemos distinguir un par de diferencias. Por un lado, tal y como ellos mismos proponen, se ha sustituido de manera equivalente la regla afijación ($A \to B, C \to D \Rightarrow (B \to C) \to (A \to D)$) por la suma de las reglas prefijación y sufijación. Por otro, de manera igualmente equivalente, se ha añadido el axioma A8 y cambiado la versión de la regla contraposición, cuya formulación en la axiomatización de Routley y Meyer es la siguiente: $A \to \neg B \Rightarrow B \to \neg A$. Asimismo, cabe también apuntar que el fragmento positivo de B, B+, se axiomatiza con A1-A6, Adj, MP, Pref y Suf.

3 La matriz MBN4 y la lógica determinada por ella

En esta sección se presenta la matriz MBN4 y la lógica determinada por ella. En particular, la lógica BN4 fue desarrollada por Ross T. Brady (1982) y puede entenderse como la lógica tetravaluada del condicional relevante. En este sentido, BN4 tendría una estrecha relación con la lógica de la relevancia R de Anderson y Belnap (1975). De hecho, podemos entender BN4 como una extensión de la lógica RW, esto es, de la lógica R sin el axioma de contracción (i.e., $[A \to (A \to B)] \to (A \to B)$, denominado R4 en la subsección 0.1.c). La lógica BN4 es, además, una expansión implicativa de la lógica B4 de Belnap que fue expuesta en la sección 2.1. Como se verá posteriormente, su matriz implicativa proporciona la estructura base del condicional de la mitad de los sistemas objeto de esta investigación (cf. Sección 5).

Definición 3.1: La matriz de Brady MBN4. El lenguaje proposicional se compone de las conectivas $\to$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$. La matriz de MBN4 es la estructura ($\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$, F) donde $\mathcal{V}$ y $\mathcal{D}$ se definen como en MB4 (Definición 2.1) y F ={ $f_\wedge$, $f_\vee$, $f_\neg$, $f_\to$} donde $f_\wedge$, $f_\vee$, $f_\neg$ se definen igual que en MB4 y $f_\to$ está definida de acuerdo con la siguiente tabla de verdad:

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1	3	1	3
*2	0	1	2	3
*3	0	1	0	3

Por otro lado, las nociones de MBN4-interpretación, MBN4-consecuencia y MBN4-validez se entienden de acuerdo con la Definición 1.7.

Observación 3.1: Sobre la matriz MBN4. Al definir la matriz MBN4, Brady (1982, p. 10) utiliza los símbolos f, n, b y t en lugar de 0, 1, 2 y 3, respectivamente.

Definición 3.2: La lógica BN4. La lógica BN4 puede axiomatizarse como sigue:
AXIOMAS

A1$_{BN4}$ $A \to A$

A2$_{BN4}$ $(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$

A3$_{BN4}$ $A \to [(A \to B) \to B]$

A4$_{BN4}$ $(A \wedge B) \to A$ / $(A \wedge B) \to B$

A5$_{BN4}$ $[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$

A6$_{BN4}$ $A \to (A \vee B)$ / $B \to (A \vee B)$

A7$_{BN4}$ $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$

A8$_{BN4}$ $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

A9$_{BN4}$ $\neg\neg A \to A$

A10$_{BN4}$ $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

A11$_{BN4}$ $(\neg A \wedge B) \to (A \to B)$

A12$_{BN4}$ $\neg A \to [A \vee (A \to B)]$

A13$_{BN4}$ $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$

A14$_{BN4}$ $A \vee [\neg(A \to B) \to A]$

REGLAS

Modus Ponens (MP) A, $A \to B \Rightarrow B$

Adjunción (Adj) A, $B \Rightarrow A \wedge B$

Modus Ponens disyuntivo(dMP) $C \vee A$, $C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee B$

Observación 3.1: Sobre la axiomatización de BN4. La anterior axiomatización de BN4 fue proporcionada por Méndez y Robles (2016a) y ha sido expuesta aquí como presentación de este sistema porque refleja con claridad la relación entre la lógica de la relevancia R de Anderson y Belnap y el sistema BN4. No obstante, es crucial subrayar que fue Ross T. Brady quien propuso la primera axiomatización de BN4 en su artículo de 1982 donde, además, probó que dicha lógica –bajo la axiomatización propuesta por él– era el sistema determinado por la matriz MBN4. Dicha axiomatización puede encontrarse en la introducción de este trabajo (subsección 0.1.d). La axiomatización presentada en la Definición 3.2 es equivalente a la proporcionada originalmente por Brady, como prueban Méndez y Robles (2016a, Proposition 6.1) en su artículo.

4 La lógica E4

En esta sección, se presenta el sistema E4 definido por Robles y Méndez (2016), el segundo de los sistemas que determinan la base de la estructura condicional que compartirán el resto de sistemas considerados en esta investigación. E4 puede entenderse como la lógica tetravaluada de la implicación relevante. De manera paralela a lo que sucedía con BN4 y la lógica de la relevancia R, esta característica pone a E4 en relación con el sistema E de Anderson y Belnap (1975). De hecho, podemos entender el sistema E4 como una extensión de la lógica E sin el axioma de reductio (i.e., $(A \to \neg A) \to \neg A$, denominado E12 en la subsección 0.1.c). No obstante, la axiomatización que se presenta a continuación no es la que mejor refleja el mencionado hecho –que, por otro lado, se expuso ya en la introducción, subsección 0.1.d– sino aquella con la que Robles y Méndez definieron el sistema en primer lugar.

Definición 4.1: La matriz ME4. El lenguaje proposicional se compone de las conectivas $\to$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$. La matriz de ME4 es la estructura ($\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$, F) donde $\mathcal{V}$ y $\mathcal{D}$ se definen como en MB4 (Definición 2.1) y F ={ $f_\wedge$, $f_\vee$, $f_\neg$, $f_\to$} donde $f_\wedge$, $f_\vee$, $f_\neg$ se definen igual que en MB4 y $f_\to$ está definida de acuerdo con la siguiente tabla de verdad:

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	0	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

Por otro lado, las nociones de ME4-interpretación, ME4-consecuencia y ME4-validez se entienden de acuerdo con la Definición 1.7.

Definición 4.2: La lógica E4. Robles y Méndez (2016, *Definition* 3.4) axiomatizan la lógica E4 como sigue:
AXIOMAS

A1$_{E4}$ $A \to A$

A2$_{E4}$ $(A \wedge B) \to A$ / $(A \wedge B) \to B$

A3$_{E4}$ $A \to (A \vee B)$ / $B \to (A \vee B)$

A4$_{E4}$ $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

A5$_{E4}$ $\neg\neg A \to A$

A6$_{E4}$ $A \to \neg\neg A$

A7$_{E4}$ $[(A \to B) \wedge A] \to B$

A8$_{E4}$ $[(A \to B) \wedge \neg B] \to \neg A$

A9$_{E4}$ $\neg A \to [A \vee (A \to B)]$

A10$_{E4}$ $B \to [\neg B \vee (A \to B)]$

A11$_{E4}$ $[\neg(A \to B) \wedge (\neg A \wedge B)] \to (A \to B)$

A12$_{E4}$ $[(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)] \to \neg(A \to B)$

A13$_{E4}$ $(A \to B) \vee \neg(A \to B)$

REGLAS

(Adj) $A, B \Rightarrow A \wedge B$

(MP) $A, A \to B \Rightarrow B$

(dTrans) $D \vee (A \to B), D \vee (B \to C) \Rightarrow D \vee (A \to C)$

(dCI$\wedge$) $D \vee (A \to B), D \vee (A \to C) \Rightarrow D \vee [A \to (B \wedge C)]$

(dE$\vee$) $D \vee (A \to C), D \vee (B \to C) \Rightarrow D \vee [(A \vee B) \to C]$

(dCon) $D \vee (A \to B) \Rightarrow D \vee (\neg B \to \neg A)$

Observación 4.1: Sobre la axiomatización de E4. E4 axiomatizada de acuerdo con la Definición 4.2, es el resultado de añadir los axiomas A7$_{E4}$-A13$_{E4}$ a la lógica FDE (cf. Definición 2.2.1) y cambiar las reglas de esta última (excepto Adj y MP) por sus versiones disyuntivas.

5 Variantes implicativas de MBN4 y ME4 que verifican la lógica básica de Routley y Meyer

En esta sección justificaré que solo hay ocho matrices que, partiendo de la estructura matricial de MBN4 y ME4, verifican B. Las ocho matrices a que me refiero –incluyendo a las propias MBN4 y ME4– comparten las tablas de verdad para $\neg$, $\wedge$, $\vee$ así como la misma estructura matricial del condicional y constituirán el objeto de estudio de esta investigación. En relación con esta cuestión, Robles y Méndez (2016, Conclusión) afirmaron lo siguiente: "Supóngase que los valores reflejados para $\rightarrow$ en las tablas (a) y (b) son fijos y los espacios pueden rellenarse con cualquier valor de verdad (siendo 2 y 3 valores designados)

Tabla (a)

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1		3		3
*2			2	3
*3				3

Tabla (b)

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1		2		3
*2			2	3
*3				3

Entonces, las siguientes tablas condicionales (además de las características de BN4 y E4) son las únicas que satisfacen los axiomas y reglas de la lógica básica B de Routley y Meyer:"

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	3	0	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1	3	1	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	3	0	3
*2	0	1	2	3
*3	0	1	0	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	0	3
*2	0	1	2	3
*3	0	0	0	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	1	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	1	3
*2	0	1	2	3
*3	0	0	0	3

Es claro que las tres primeras tablas presentadas siguen la estructura expuesta en la tabla (a) y son, por tanto, las variantes implicativas de MBN4 (cf. Sección 3). Asimismo, las variantes implicativas de ME4 (cf. Sección 4) son las caracterizadas por las tres últimas tablas presentadas y siguen la estructura de la tabla (b). En las siguientes subsecciones analizaremos por separado unas y otras variantes para probar que son las únicas que verifican B.

El objeto de la presente sección será, por tanto, demostrar que estas ocho tablas condicionales –las seis arriba expuestas en conjunto con aquellas características de las lógicas BN4 y E4 (cf. Sección 3 y sección 4) – son las únicas que verifican la lógica básica de Routley y Meyer. Posteriormente, en la sección 7, se mostrará cuáles son las ocho lógicas determinadas por las extensiones implicativas que se originan al expandir MB4 (cf. Subsección 2.1) mediante cada una de estas tablas condicionales.

5.1 Matrices con estructura condicional tipo MBN4

Como ya se mencionó, las matrices con estructura condicional tipo MBN4 son aquellas variantes de BN4 cuya estructura se basa en la tabla (a) mostrada en la introducción de esta sección. El objetivo es ahora justificar que, partiendo de esa estructura base, solo cuatro matrices verifican la lógica B –las caracterizadas por las tres primeras tablas condicionales y la propia MBN4. Con este fin en mente, hemos de determinar qué valores de verdad de $\mathcal{V}$ (cf. Definición 2.1.1) deben añadirse en los huecos libres, para que las matrices determinadas por las tablas condicionales resultantes verifiquen B.

Observación 5.1.1: Matrices que verifican la lógica B. Para verificar la lógica B, comenzaremos haciendo que las matrices en cuestión verifiquen las reglas primitivas (MP, CON, SUF, PREF) para después comprobar también que se verifiquen todos los axiomas de B. Para verificar todas estas reglas comprobaremos que no se da ningún caso en el que las hipótesis de la regla sean verdaderas (reciban un valor designado) y la conclusión falsa (no reciba un valor designado). Para verificar los axiomas de B, simplemente comprobaremos que sean válidos en la matriz en cuestión.

Con el fin de llevar a cabo esta tarea, procederé primero eliminando aquellas opciones que falsarían las citadas reglas. Las opciones que finalmente no sean desestimadas, son las que verificarán esta serie de reglas (lo que puede comprobarse fácilmente en las matrices; cf. (González, 2012)) permitiéndonos, por tanto, dar un primer paso en la determinación de las matrices que verifican B. Para culminar el proceso, desestimaremos también aquellas opciones que no verifiquen los axiomas de B.

5.1.1 Opciones que falsarían MP

Los siguientes casos harían que se verificasen las premisas y se falsara la conclusión del MP:

1. $f_{\rightarrow}(2, 0) \in \mathcal{D}$;

2. $f_{\rightarrow}(3, 0) \in \mathcal{D}$;

3. $f_{\rightarrow}(2, 1) \in \mathcal{D}$;

4. $f_{\rightarrow}(3, 1) \in \mathcal{D}$.

A continuación compruebo que, efectivamente, de asumir estos valores en la matriz, habría ocho casos para los que se falsaría la regla MP.

Caso	A	B	A	,	$A \rightarrow B$	$\Rightarrow$	B
1.a	2	0	2		3		0
1.b	2	0	2		2		0
2.a	3	0	3		3		0
2.b	3	0	3		2		0

Caso	A	B	A	,	$A \to B$	$\Rightarrow$	B
3.a	2	1	2		3		1
3.b	2	1	2		2		1
4.a	3	1	3		3		1
4.b	3	1	3		2		1

En consecuencia, deberíamos reducir las posibilidades conforme a lo anterior: $f_{\to}(2, 0) \notin \mathcal{D}$; $f_{\to}(3, 0) \notin \mathcal{D}$; $f_{\to}(2, 1) \notin \mathcal{D}$; $f_{\to}(3, 1) \notin \mathcal{D}$. De proceder así, tendríamos delimitados los posibles valores de la estructura base como refleja el siguiente bosquejo:

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1		3		3
*2	1/0	1/0	2	3
*3	1/0	1/0		3

5.1.2 Opciones que falsarían CON

Los siguientes casos harían que se verificase la premisa y se falsara la conclusión de CON:

5. $f_{\to}(3, 2) \in \mathcal{D}$;

6. $f_{\to}(1, 2) \in \mathcal{D}$;

7. $f_{\to}(1, 0) \in \mathcal{D}$.

Nuevamente, compruebo que, en efecto, de asumir estos valores en la matriz, se falsaría en seis casos la regla CON[75].

Caso	A	B	$A \to B$	$\Rightarrow$	$\neg B$	$\to$	$\neg A$
5.a	3	2	3		2	1/0	0
5.b	3	2	2		2	1/0	0
6.a	1	2	3		2	1/0	1
6.b	1	2	2		2	1/0	1
7.a	1	0	3		3	1/0	1
7.b	1	0	2		3	1/0	1

En consecuencia, deberíamos reducir de nuevo las posibilidades en la estructura base ($f_{\to}(3, 2) \notin \mathcal{D}$, $f_{\to}(1, 2) \notin \mathcal{D}$, $f_{\to}(1, 0) \notin \mathcal{D}$) como se refleja en la siguiente tabla:

[75] En estos casos, ya asumo las limitaciones de valores que acabo de concluir más arriba con el fin de preservar el MP, dado que el caso 5, depende del caso 1 anteriormente expuesto; el 6, del 3, y el 7, del 4.

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1/0	3	1/0	3
*2	1/0	1/0	2	3
*3	1/0	1/0	1/0	3

Asumiendo esta estructura base, independientemente de si finalmente determinamos una u otra posibilidad, esto es, asignar 1 ó 0[76] en los huecos que todavía no están completamente determinados, las matrices resultantes verificarán MP y CON. No habrá, por tanto, ninguna asignación de valores de verdad tal que haga verdaderas las premisas de estas reglas y false sus respectivas conclusiones. Así, las siguientes tablas reflejan todas aquellas posibilidades que podrían falsar dichas reglas[77].

A	B	A	,	$A \to B$	$\Rightarrow$	B
3	3	3		3		3
2	2	2		2		2
2	3	2		3		3

A	B	$A \to B$	$\Rightarrow$	$\neg B$	$\to$	$\neg A$
	3	3		0	3	
0		3			3	3
1	1	3			3	
2	2	2			2	

Estas serían, por tanto, siguiendo la estructura anterior de la futura matriz, las únicas asignaciones de valores de verdad que hacen verdaderas las hipótesis y, como se requería, también validan la conclusión.

[76] Haré en este punto un pequeño inciso para indicar que, en contra de lo aconsejado por la RAE, tildaré aquellas disyunciones del lenguaje natural –i.e., "o"– que se sitúen entre fórmulas porque creo firmemente que eso facilitará la lectura de las mismas en muchos casos. Véanse, por ejemplo, tanto los postulados semánticos como las pruebas de los mismos en las semánticas relacionales que se utilizarán en las partes 3 y 4 de este trabajo. En consecuencia y con el fin de primar la homogeneidad, tildaré también los casos en los que la vocal "o" se sitúe entre cifras, como el que ha dado lugar a este inciso.

[77] El hecho de que el valor de alguna de las variables se deje sin especificar indica que, independientemente de cuál fuera este, no habría cambios en los valores que reciben las premisas y la conclusión de la regla.

5.1.3 Opción que falsaría PREF

El siguiente caso haría que se verificase la premisa y se falsara la conclusión de PREF:

8. $f_{\rightarrow}(2,\,0) = 1$.

A continuación compruebo que, efectivamente, de asumir este valor en la matriz, se falsaría la regla PREF.

Caso	A	B	C	$(B \rightarrow C)$	$\Rightarrow$	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(A \rightarrow C)$
8.	2	0	2	3		2 1 0	1/0	2

Por el contrario, si asumiéramos en la matriz $f_{\rightarrow}(2,\,0) = 0$, el caso 8 no falsaría PREF. En consecuencia, deberíamos reducir las posibilidades en la estructura base del modo siguiente:

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1/0	3	1/0	3
*2	0	1/0	2	3
*3	1/0	1/0	1/0	3

5.1.4 Opción que falsaría SUF

El siguiente caso haría que se verificase la premisa y se falsara la conclusión de SUF:

9. $f_{\rightarrow}(3,\,2) = 1$.

De nuevo compruebo que, en efecto, de asumir esta nueva restricción en la matriz, se falsaría la regla SUF.

Caso	A	B	C	$(C \rightarrow A)$	$\Rightarrow$	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(C \rightarrow B)$
9.	3	2	2	3		3 1 2	1/0	2

Por el contrario, si asumiéramos en la matriz $f_{\rightarrow}(3,\,2) = 0$, el caso 9 no falsaría SUF. En consecuencia, deberíamos reducir las posibilidades en la estructura base del modo siguiente:

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1/0	3	1/0	3
*2	0	1/0	2	3
*3	1/0	1/0	0	3

5.1.5 Opción que falsaría PREF y SUF

Teniendo en cuenta las determinaciones de valores más recientes, deberemos reducir aún más las posibilidades en la matriz. El siguiente caso falsaría tanto PREF como SUF:

10. $f_{\rightarrow}(3, 0) = 1$.

Podemos nuevamente comprobar que, de asumir este valor en la matriz, se falsarían tanto la regla PREF como la regla SUF.

Caso	A	B	C	$(B \rightarrow C)$	$\Rightarrow$	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(A \rightarrow C)$
10a.	3	0	2	3		3 1 0	1/0	0

Caso	A	B	C	$(C \rightarrow A)$	$\Rightarrow$	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(C \rightarrow B)$
10b.	3	0	2	3		3 1 0	1/0	0

Por el contrario, si asumiéramos en la matriz $f_{\rightarrow}(3, 2) = 0$, el caso 10 no falsaría PREF ni SUF. Consecuentemente, tras incluir este último caso, la estructura base quedaría restringida como se muestra a continuación:

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1/0	3	1/0	3
*2	0	1/0	2	3
*3	0	1/0	0	3

5.1.6 Otras opciones que falsarían reglas y/o axiomas de B

Los valores que quedan por determinar en la matriz condicional están ligados de modo que, si un determinado condicional recibe el valor 1, entonces hay otro que también debe recibir ese mismo valor a fin de que no se falsen axiomas ni reglas de B. En particular, tomando en cuenta todas las necesarias restricciones mencionadas hasta el momento, los siguientes casos harían que se falsaran algunas reglas y axiomas de B:

11. $f_{\rightarrow}(1, 0) \neq f_{\rightarrow}(1, 2)$.

Esto nos rentringe las posibilidades en la matriz del modo siguiente:

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1	3	1	3
*2	0	1/0	2	3
*3	0	1/0	0	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	3	0	3
*2	0	1/0	2	3
*3	0	1/0	0	3

De lo contrario, se falsarían algunas reglas y algunos axiomas de B, como se muestra a continuación:

11a. Si $f_{\rightarrow}(1, 0) = 1$ y $f_{\rightarrow}(1, 2) = 0$, se falsaría la regla PREF.

Caso	A	B	C	$(B \rightarrow C)$	$\Rightarrow$	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(A \rightarrow C)$
11a.	1	0	2	3		1 1 0	1	1 0 2

11b. Si $f_{\rightarrow}(1, 0) = 0$ y $f_{\rightarrow}(1, 2) = 1$, se falsaría A3$_B$.

Caso	A	B	C	$[(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)]$	$\rightarrow$	$[(A \rightarrow (B \wedge C)]$
11bi.	1	2	1	1 1 3	0	1 0 0
11bii.	1	1	2	3 1 1	0	1 0 0

Por el contrario, si asumimos los valores reflejados en las anteriores matrices, el caso 11 no falsaría PREF ni A3$_B$.

12. $f_{\rightarrow}(3, 1) \neq f_{\rightarrow}(2, 1)$.

De nuevo, esto rentringe las posibilidades en la matriz del modo siguiente (habiendo asumido las conclusiones derivadas hasta el punto 10):

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1/0	3	1/0	3
*2	0	1	2	3
*3	0	1	0	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1/0	3	1/0	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

De lo contrario, se falsarían algunas reglas y algunos axiomas de B, como se muestra a continuación:

12a. Si $f_{\rightarrow}(3, 1) = 1$ y $f_{\rightarrow}(2, 1) = 0$, se falsaría la regla SUF.

Caso	A	B	C	$(C \rightarrow A)$	$\Rightarrow$	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(C \rightarrow B)$
12a.	3	1	2	3		3 1 1	1/0	0

12b. Si $f_{\rightarrow}(3, 1) = 0$ y $f_{\rightarrow}(2, 1) = 1$, se falsaría A5$_B$.

Caso	A	B	C	$[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)]$	$\rightarrow$	$[(A \vee B) \rightarrow C]$
12bi.	2	1	1	1 1 3	1/0	3 0 1
12bii.	1	2	1	3 1 1	1/0	3 0 1

Por el contrario, si asumimos los valores reflejados en las anteriores matrices, el caso 12 no falsaría SUF ni tampoco A5.

5.1.7 Conclusiones sobre la estructura tipo MBN4

Partiendo de la estructura base que figura al comienzo de esta sección, hay solamente cuatro matrices que verifican la lógica B de Routley y Meyer. Estas matrices, se especifican a continuación y verifican, por tanto, MP, CON, PREF y SUF, así como todos los axiomas de B.

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1	3	1	3
*2	0	1	2	3
*3	0	1	0	3

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	3	0	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1	3	1	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	3	0	3
*2	0	1	2	3
*3	0	1	0	3

Ya se ha comprobado que, en efecto, estas cuatro matrices verifican MP y CON. Comprobaré ahora que también verifican PREF y SUF, es decir, que no hay ninguna asignación de valores de verdad tal que verifique la premisa y false la conclusión de estas reglas.

- Prefijación (PREF)

Revisaremos todos aquellos casos que verifican la premisa de la regla PREF para comprobar que también verifiquen su conclusión.

a) Cuando el consecuente de la premisa recibe el valor 3, la regla siempre se verifica, sin importar los valores asignados al resto de variables.

A	B	C	$(B$	$\to$	$C)$	$\Rightarrow$	$(A$	$\to$	$B)$	$\to$	$(A$	$\to$	$C)$
		3		3	3					3		3	3

b) Cuando el antecedente de la premisa recibe el valor 0, distinguimos dos subcasos.

i. Si el valor de la fórmula añadida (en este caso, A) es 0, 2 o 3, se verifica la regla (independientemente del valor de C, el consecuente de la premisa).

A	B	C	$(B$	$\to$	$C)$	$\Rightarrow$	$(A$	$\to$	$B)$	$\to$	$(A$	$\to$	$C)$
0	0		0	3			0	3	0	3	0	3	
2	0		0	3			2	0	0	3			
3	0		0	3			3	0	0	3			

ii. Si el valor de la fórmula añadida (A) es 1, también se verifica la regla (para cualquier asignación de C). En este punto, entran en juego las variaciones de valores en las cuatro matrices y las determinaciones de valores establecidas en el punto 6.

A	B	C	$(B \to C)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(A \to C)$
1	0	0	0 3		1 1/0 0	3	1 1/0 0
1	0	1	0 3		1 1/0 0	3	1 3 1
1	0	2	0 3		1 1/0 0	3	1 1/0 2

Es preciso aclarar aquí que el condicional $f_{\to}(1, 0)$ recibe el valor 1 ó 0 dependiendo de la matriz en cuestión, y lo mismo ocurre con $f_{\to}(1, 2)$. En cualquier caso, dadas las delimitaciones de valores establecidas en las matrices, si $f_{\to}(1, 0) = 1$, entonces $f_{\to}(1, 2) = 1$ y, del mismo modo, si $f_{\to}(1, 0) = 0$, entonces $f_{\to}(1, 2) = 0$. Por tanto, en todo caso se verifica PREF.

c) Cuando antecedente y consecuente de la premisa reciben el mismo valor, la regla se verifica para cualquier asignación de la fórmula añadida (en este caso, A).

Ya hemos comprobado que la regla se verifica cuando el antecedente de la premisa recibe el valor 0 y el consecuente el valor 3. Me limitaré ahora a probar los casos restantes para los que se verifica la premisa de la regla, esto es, cuando los dos componentes del condicional reciben el valor 1 o el valor 2. (En el siguiente ejemplo, x e y representan alguno de los cuatro valores considerados.)

A	B	C	$(B \to C)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(A \to C)$
	1	1	1 3 1		x 1	3	x 1
	2	2	2 2 2		y 2	2/3	y 2

Teniendo en cuenta que siempre que antecedente y consecuente de un condicional reciben el mismo valor se verifica el condicional, cualquiera que sea el valor de A en la tabla anterior, la regla siempre se verifica.

- Sufijación (SUF)

Revisaremos todos los aquellos casos que verifican la premisa de SUF para comprobar que también verifican la conclusión.

a) Cuando el antecedente de la premisa (i.e., C) recibe el valor 0, la regla siempre se verifica, sin importar los valores asignados al resto de variables.

A	B	C	$(C \to A)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(C \to B)$
		0	0 3			3	0 3

b) Cuando el consecuente de la premisa (i.e., A) recibe el valor 3, distinguimos dos subcasos:

i. Si la fórmula añadida (en este caso, B) recibe el valor 0, 2 ó 3, se verifica la regla (independientemente del valor de C, el antecedente de la premisa).

A	B	C	$(C \to A)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(C \to B)$
3	0		3 3		3 0 0	3	
3	2		3 3		3 0 2	3	
3	3		3 3		3 3 3	3	3 3

ii. Si la fórmula añadida (B) recibe el valor 1, se verifica la regla para cualquier asignación del antecedente de la premisa (C). Como ocurría en el caso anterior, aquí entran en juego las variaciones de valores en las cuatro matrices y las determinaciones de valores establecidas en el punto 12.

A	B	C	$(C \to A)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(C \to B)$
3	1	1	3 3		3 1/0 1	3	1 3 1
3	1	2	3 3		3 1/0 1	3	2 1/0 1
3	1	3	3 3		3 1/0 1	3	3 1/0 1

Nuevamente, hay que aclarar aquí que el condicional $f_{\to}(3,\, 1)$ recibe 1 ó 0 dependiendo de la matriz en cuestión, y lo mismo ocurre con $f_{\to}(2,\, 1)$. No obstante, dadas las delimitaciones de valores establecidas en las matrices, si $f_{\to}(3,\, 1),{=}1$ entonces $f_{\to}(2,\, 1) = 1$ y, del mismo modo, si $f_{\to}(3,\, 1) = 0$, entonces $f_{\to}(2,\, 1) = 0$. Por tanto, en todo caso se verifica la regla SUF.

c) Cuando antecedente y consecuente de la premisa reciben el mismo valor, la regla se verifica para cualquier asignación de B.

Como ya hemos comprobado que la regla se verifica tanto en aquellos casos en los que el antecedente de la premisa recibe el valor 0 como en los que el consecuente recibe el valor 3, me limitaré ahora a probar los casos en los que antecedente y consecuente tienen el mismo valor (siendo este distinto al de los casos mencionados). (En la siguiente tabla, x e y representan nuevamente alguno de los cuatro valores considerados.)

A	B	C	$(C \to A)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(C \to B)$
1		1	1 3 1		1 x	3	1 x
2		2	2 2 2		2 y	2/3	2 y

Teniendo en cuenta que siempre que antecedente y consecuente de un condicional reciben el mismo valor se verifica el condicional, cualquiera que sea el valor de B en la tabla anterior, la regla siempre se verifica.

Hemos cubierto todos los casos en que se verifica la premisa de PREF y SUF y hemos comprobado que, para todos ellos, también se verifica la conclusión. Por otro lado, ya habíamos probado previamente que las matrices verificaban MP y CON. Faltaría entonces probar que verifican adjunción (Adj) y todos los axiomas de B para demostrar que las matrices determinadas verifican la lógica

B.

(i) Es claro que los sistemas establecidos a partir de estos condicionales verificarán Adj ($A \& B \Rightarrow A \wedge B$), pues la matriz de la conjunción es siempre la propia de BN4, sistema que verifica B.

(ii) Que estas matrices verifican todos los axiomas de B puede comprobarse sin dificultad.[78].

Así, queda demostrado que las cuatro matrices verifican la lógica básica de Routley y Meyer B.

5.2 Matrices con estructura condicional tipo ME4

Las matrices con estructura condicional tipo ME4 son aquellas variantes de E4 cuya estructura se basa en la tabla (b) mostrada en la introducción de esta sección. Igual que en la sección anterior, el objetivo es justificar que, partiendo de esa estructura base, solo cuatro matrices verifican la lógica B –las caracterizadas por las tres primeras tablas condicionales y la propia ME4. Seguiremos el mismo procedimiento de la subsección previa, esto es, determinar qué valores de verdad de $\mathcal{V}$ (cf. Definición 2.1.1) deben añadirse en los huecos libres de la estructura base, para que las matrices determinadas por las tablas condicionales resultantes verifiquen B (cf. Definición 2.3.1). Como en el caso de las variantes de BN4, procederé eliminando todas aquellas opciones que falsen las reglas o los axiomas de B. Las opciones que finalmente no sean desestimadas son las que verificarán la lógica B.

5.2.1 Opciones que falsarían MP y CON

Las opciones que falsarían las reglas MP y CON (para cualquier variante de ME4 cuya estructura implicativa sea la reflejada en la tabla (b) que se muestra en la introducción de la sección) son las mismas que las expuestas para las variantes de MBN4. Omitiré aquí, por tanto, el proceso de reducción de alternativas en la estructura inicial puesto que ya quedó reflejado en la sección previa (casos 1-7). Entonces, siguiendo un procedimiento en todo semejante, llegaríamos a delimitar las posibilidades de la estructura base tal y como se refleja a continuación:

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1/0	2	1/0	3
*2	1/0	1/0	2	3
*3	1/0	1/0	1/0	3

Como ocurría en la sección anterior, asumiendo esta estructura base, con independencia de si al final determinamos asignar el valor 1 o el valor 0 en los huecos que faltan por especificar, las matrices resultantes verificarán MP y CON.

[78]Con este fin, remito al lector a (González, 2012).

5.2.2 Opciones que falsarían PREF

Los siguientes casos harían que se verificase la premisa y se falsara la conclusión de PREF:

8. $f_{\rightarrow}(1,\, 0) = 1$;

9. $f_{\rightarrow}(2,\, 0) = 1$.

A continuación compruebo que, efectivamente, de asumir estos valores en la matriz, se falsaría en esos dos casos la regla PREF.

Caso	B	C	A	$(B \rightarrow C)$	$\Rightarrow$	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(A \rightarrow C)$
8.	0	1	1	3		1 1 0	1/0	2
9.	0	2	2	3		2 1 0	1/0	2

Por el contrario, si asumiéramos $f_{\rightarrow}(1,\, 0) = 0$ y $f_{\rightarrow}(2,\, 0) = 0$, los casos 8 y 9 no falsarían PREF. En consecuencia, deberíamos reducir las posibilidades en la estructura base del modo siguiente:

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	1/0	3
*2	0	1/0	2	3
*3	1/0	1/0	1/0	3

5.2.3 Opciones que falsarían SUF

Los siguientes casos harían que se verificase la premisa y se falsara la conclusión de SUF:

10. $f_{\rightarrow}(3,\, 1) = 1$;

11. $f_{\rightarrow}(3,\, 2) = 1$.

A continuación compruebo nuevamente que, de asumir estos valores en la matriz, se falsaría en esos dos casos la regla SUF.

Caso	C	A	B	$(C \rightarrow A)$	$\Rightarrow$	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(C \rightarrow B)$
10.	1	3	1	3		3 1 1	1/0	2
11.	2	3	2	3		3 1 2	1/0	2

Por el contrario, si asumiéramos en la matriz $f_{\rightarrow}(3,\, 1) = 0$ y $f_{\rightarrow}(3,\, 2) = 0$, los casos 10 y 11 no falsarían SUF. En consecuencia, deberíamos reducir de nuevo las posibilidades en la estructura base:

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	1/0	3
*2	0	1/0	2	3
*3	1/0	0	0	3

Hemos delimitado todavía más los valores de la estructura base para que las matrices validen también PREF y SUF. Sin embargo, para conseguir preservar estas dos últimas reglas, queda aún una posibilidad que debemos evitar.

5.2.4 Opción que falsaría PREF y SUF

Dada la última delimitación de valores asumida, el siguiente caso haría que fallasen tanto PREF como SUF. Expondré ahora el caso y comprobaré después que, efectivamente, de no evitarse este, habría diversas asignaciones de verdad que falsarían PREF y SUF.

12. $f_{\to}(3,\,0) = 1$.

Compruebo ahora que, efectivamente, de asumir este valor en la matriz, se falsaría PREF.

Caso	B	C	A	$(B \to C)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(A \to C)$
12a.	0	1	3	3		3 1 0	0	0
12b.	0	2	3	3		3 1 0	0	0

Compruebo ahora que, a su vez, de asumir ese valor en la matriz, se falsaría también SUF.

Caso	C	A	B	$(C \to A)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(C \to B)$
12c.	1	3	0	3		3 1 0	1/0	0
12d.	2	3	0	3		3 1 0	1/0	0

Por el contrario, si asumiéramos en la matriz $f_{\to}(3,\,0) = 0$, el caso 12 no falsaría PREF ni SUF. Por tanto, reducimos nuevamente las posibilidades en la estructura base del modo siguiente:

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	1/0	3
*2	0	1/0	2	3
*3	0	0	0	3

5.2.5 Conclusiones sobre la estructura tipo ME4

Partiendo de una de las posibles estructuras base que figuran al comienzo de esta sección (la tabla (b)), hay solamente cuatro matrices que verifican la lógica B de Routley y Meyer. Estas matrices, se especifican a continuación y verifican, por tanto, MP, CON, PREF y SUF.

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	0	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	1	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	0	3
*2	0	1	2	3
*3	0	0	0	3

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	1	3
*2	0	1	2	3
*3	0	0	0	3

Ya se ha comprobado que, en efecto, estas cuatro matrices verifican MP y CON. Comprobaré ahora que también verifican PREF y SUF, es decir, que no hay ninguna asignación de valores de verdad tal que verifique la premisa y false la conclusión de estas reglas.

- Prefijación (PREF)

Revisaremos todos los aquellos casos que verifican la premisa de PREF para comprobar que también verifican la conclusión.

a) Cuando el consecuente de la premisa (i.e., C) recibe el valor 3, la regla siempre se verifica, sin importar cuáles sean los valores asignados al resto de variables.

A	B	C	$(B \rightarrow C)$	$\Rightarrow$	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(A \rightarrow C)$
		3	3 3			3	3 3

b) Cuando el antecedente de la premisa (i.e., B) recibe el valor 0, cualquiera que sea el valor de la fórmula añadida (en este caso, de A) e independientemente del valor del consecuente de la premisa (i.e., C), se verifica la regla.

A	B	C	$(B \rightarrow C)$	$\Rightarrow$	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(A \rightarrow C)$
0	0		0 3		0 3 0	3	0 3
1	0		0 3		1 0 0	3	
2	0		0 3		2 0 0	3	
3	0		0 3		3 0 0	3	

c) Cuando antecedente y consecuente reciben el mismo valor, la regla se verifica.

Como ya hemos comprobado que la regla se verifica siempre que el antecedente del condicional de la premisa valga 0 o que el consecuente valga 3, me limitaré ahora a probar los casos restantes (cuando ambos valen 1 ó 2). (De nuevo, x e y representan en la siguiente tabla alguno de los cuatro valores considerados.)

A	B	C	$(B \to C)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(A \to C)$
	1	1	1 2 1		x 1	2/3	x 1
	2	2	2 2 2		y 2	2/3	y 2

Para cualquiera de las cuatro tablas del condicional que estamos considerando, siempre que antecedente y consecuente reciben el mismo valor, se verifica el condicional; en particular, cualquiera que sea el valor de A en la tabla anterior, la regla siempre se verifica, dado que los dos componentes del condicional en la conclusión de la regla reciben siempre el mismo valor.

- Sufijación (SUF)

Revisaremos todos los aquellos casos que verifican la premisa de SUF para comprobar que también verifican su conclusión.

a) Cuando el antecedente de la premisa (i.e., C) recibe el valor 0, la regla siempre se verifica, sin importar los valores asignados al resto de variables.

A	B	C	$(C \to A)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(C \to B)$
		0	0 3			3	0 3

b) Cuando el consecuente de la premisa (i.e., A) recibe el valor 3, cualquiera que sea el valor de la fórmula añadida (en este caso B) e independientemente del valor del antecedente de la premisa (i.e., C), se verifica la regla.

A	B	C	$(C \to A)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(C \to B)$
3	0		3 3		3 0 0	3	
3	1		3 3		3 0 1	3	
3	2		3 3		3 0 2	3	
3	3		3 3		3 3 3	3	3 3

c) Cuando antecedente y consecuente reciben el mismo valor, la regla se verifica.

Dadas las comprobaciones efectuadas en los subcasos (a) y (b), me limitaré ahora a comprobar los casos en que antecedente y consecuente del condicional de la premisa valen 1 ó 2.

A	B	C	$(C \to A)$	$\Rightarrow$	$(A \to B)$	$\to$	$(C \to B)$
1		1	1 2 1		1 x	2/3	1 x
2		2	2 2 2		2 y	2/3	2 y

Como también ocurría en el caso de la regla PREF, es claro que cualquiera que sea el valor de la fórmula añadida, esto es, de B, SUF siempre se verifica.

Hemos cubierto así todos los casos en que se verifica la premisa de las reglas PREF y SUF y hemos comprobado que, para todos ellos, también se verifica la conclusión. Además, ya habíamos determinado que las matrices verificaban MP y CON. Para demostrar que las matrices caracterizadas por estas tablas condicionales verifican el sistema B, quedaría solamente probar que verifican adjunción (ADJ) y todos los axiomas de B. Ambos casos se prueban del mismo modo que se expuso para las variantes de BN4 (cf. Subsubsección 5.1.7).

Queda, por tanto, demostrado que las cuatro matrices verifican la lógica básica B de Routley y Meyer.

5.3 Conclusión: hay ocho matrices que verifican B

Dados los resultados de las subsecciones 5.1 y 5.2 podemos concluir que, dadas las estructuras implicativas mostradas en las tablas (a) y (b) solo hay ocho matrices que verifiquen la lógica B de Routley y Meyer. Todas ellas se han formado como expansiones implicativas de MB4 –pues se ha mostrado que MBN4 fue pensada por Brady como tal y que el resto de matrices pueden entenderse como variantes implicativas de esta última que comparten las características del resto de las conectivas propias del lenguaje de BN4– y, por lo tanto, comparten los rasgos de dicha matriz en lo que refiere a la negación, la conjunción y la disyunción.

Con el fin de facilitar futuras referencias a cada una de estas matrices, introduzco la siguiente proposición:

Proposición 5.3.1: Expansiones de MB4 que verifican B. Hay únicamente ocho expansiones de MB4 (Mt1, ..., Mt8) que verifican B (cf. Definición 2.3.1) y son variantes implicativas de MBN4 o ME4. Dichas expansiones se definen como sigue: cada Mti ($1 \leq i \leq 8$) es la estructura ($\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$, F) donde $\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$, $f_\wedge$, $f_\vee$ y $f_\neg$ se definen como en MB4 (cf. Definición 2.1.1), mientras que $f_\to$ se define de acuerdo con la tabla ti ($1 \leq i \leq 8$) correspondiente. Las tablas t1, ..., t8 se exponen a continuación.

Prueba. Inmediata dadas las subsecciones 5.1 y 5.2. ■

t1

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1	3	1	3
*2	0	1	2	3
*3	0	1	0	3

t2

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	3	0	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

t3

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	1	3	1	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

t4

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	3	0	3
*2	0	1	2	3
*3	0	1	0	3

t5

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	0	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

t6

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	0	3
*2	0	1	2	3
*3	0	0	0	3

t7

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	1	3
*2	0	0	2	3
*3	0	0	0	3

t8

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	1	3
*2	0	1	2	3
*3	0	0	0	3

Las nociones de Mti-interpretación, Mti-consecuencia y Mti-validez se definen de acuerdo con la Definición 1.7.

Observación 5.3.1: Sobre las M$\mathbf{t}i$ determinadas por cada $\mathbf{t}i$ ($1 \leq i \leq 8$). Las ocho tablas reflejadas en la Proposición 5.3.1 son las únicas expansiones implicativas de MB4 con una matriz cuya estructura implicativa es variante de MBN4 o ME4 que verifican la lógica básica de Routley y Meyer. En particular, t1 y t5 son las tablas propias de las lógicas BN4 y E4, respectivamente. Además, t2-t4 son las tablas características de las variantes de MBN4 y, del mismo modo, t6-t8 son aquellas que caracterizan a las variantes de ME4. Por supuesto, puede haber otras tablas condicionales que, partiendo de una estructura base diferente a MBN4 y ME4, también verifiquen B; pero estas quedarían fuera del espectro de esta investigación[79].

[79] Otra matriz de similar interés cuya estructura condicional bien podría funcionar también como un buen punto de partida es la matriz de Smiley (Anderson y Belnap, 1975, p. 161 y 162) a la que nos hemos referido en la introducción de esta investigación bajo el rótulo MSm4, siguiendo el uso de Méndez y Robles (2016b).

6 La lógica básica b4 y sus propiedades

En esta sección se definirá la lógica base b4 y se probarán algunas de sus propiedades. La lógica base b4 es un sistema introducido en este trabajo con fines meramente instrumentales: reflejar las tesis compartidas por todos los sistemas evaluados en este proyecto y servir de base para las pruebas de corrección y completud respecto de las distintas semánticas que se aplicarán a estos sistemas.

6.1 El sistema b4

Definición 6.1.1: La lógica base b4. La lógica base b4 puede axiomatizarse mediantes los siguientes axiomas y reglas de inferencia.
AXIOMAS

A1 $A \to A$

A2 $(A \wedge B) \to A \ / \ (A \wedge B) \to B$

A3 $[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$

A4 $A \to (A \vee B) \ / \ B \to (A \vee B)$

A5 $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$

A6 $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

A7 $\neg\neg A \to A$

A8 $A \to \neg\neg A$

A9 $\neg A \to [A \vee (A \to B)]$

A10 $B \to [\neg B \vee (A \to B)]$

A11 $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$

A12 $(A \to B) \vee [(\neg A \wedge B) \to (A \to B)]$

REGLAS

ADJ $A, B \Rightarrow A \wedge B$

MP $A, A \to B \Rightarrow B$

MPd $C \vee A, C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee B$

PREFd $D \vee (A \to B) \Rightarrow D \vee [(C \to A) \to (C \to B)]$

SUFd $D \vee (A \to B) \Rightarrow D \vee [(B \to C) \to (A \to C)]$

CONd $C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee (\neg B \to \neg A)$

CTEd $C \vee (A \wedge \neg B) \Rightarrow C \vee \neg(A \to B)$

DEFINICIONES

$A \leftrightarrow B =_{df} (A \to B) \wedge (B \to A)$

Observación 6.1.1: Sobre la lógica base b4. La lógica base b4 es un sistema definido sintácticamente con el fin de proporcionar un fundamento común a todos los sistemas de la tesis –las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$), cf. Sección 7. La lógica b4 es una extensión de Bd, donde Bd es, a su vez, la versión disyuntiva de la lógica básica de Routley y Meyer B. Partimos del sistema B de Routley y Meyer y le añadimos las correspondientes variantes disyuntivas de sus reglas (MPd, MTd, CONd, PREFd, SUFd). Además, se añaden, por un lado, aquellos axiomas condicionales compartidos por todos los sistemas de la tesis (A9-A12) y, por otro, la regla Contraejemplo disyuntivo (CTEd). En particular, los axiomas A1-A8 forman parte de B (cf. Subsección 2.3), los axiomas A9-A12 son aquellos axiomas esenciales compartidos por toda lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$). En conclusión, podríamos entender esta lógica base b4 como el sistema B disyuntivo (Bd) más A9-A12 y CTEd. En términos generales, por tanto, podemos entender b4 como una extensión de Bd.

Observación 6.1.2: Un axioma instrumental para la lógica base b4. El siguiente es un axioma instrumental de la lógica base b4.

A12' $A \to \boldsymbol{.} B \to \{[(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)] \vee (A \to B)\}$[80]

Este axioma, compartido por toda lógica-Lti, no es estrictamente necesario para definir la lógica b4, sino que jugará un papel meramente instrumental en esta investigación[81]. De hecho, su función queda restringida a lo siguiente: en el contexto de la semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer con modelos reducidos (parte 3), será útil para probar que las teorías del modelo canónico no son vacías (cf. Lema 12.1). Por tanto, dada su reducida función, no se incluye en la axiomatización de b4 general mostrada en la Definición 6.1.1. No obstante, como sí se utilizará en la sección 12 (parte 3) de la investigación, se proporcionará también su postulado correspondiente en la semántica R-M, al igual que haremos con el resto de axiomas de b4.

Proposición 6.1.1: Teoremas y reglas de b4. A continuación expongo una lista de teoremas y reglas derivadas de b4 que será de utilidad a lo largo de

[80]Con el fin de facilitar la lectura de f.b.f. complejas, ocasionalmente utilizaré un punto (**.**) para separar el antecedente y el consecuente principal de una f.b.f.; también podrá utilizarse para separar el antecedente y el consecuente de una fórmula subordinada si alguno de estos va entre paréntesis (o corchetes, o llaves).

[81]Como se apuntó en la Introducción de esta investigación, no forma parte del interés ni del propósito de esta investigación definir axiomatizaciones exhaustivas de los sistemas presentados. Por el contrario, más bien podríamos caracterizarla como una investigación de corte esencialmente semántico. Por otro lado, es claro que un sistema puede presentarse bajo diferentes axiomatizaciones. En este sentido, en lo que refiere a la semántica Belnap-Dunn y a la semántica con dos set-ups desarrolladas respectivamente en las partes 2 y 4, utilizaremos la axiomatización expuesta en la Definición 6.1.1 como base para nuestras lógicas. Asimismo, en lo que refiera a la semántica general Routley-Meyer, añadiremos a esa base axiomática el axioma A12'. Es preciso aclarar, además, que la etiqueta A12' es aleatoria, es decir, dicha etiqueta no debe interpretarse como una pretensión de sustituir el axioma A12 de la Definición 6.1.1 por el aquí presentado; ambos axiomas (A12 y A12') forman parte de la axiomatización de las lógicas en lo que respecta a la parte 3, la referida a la semántica general tipo Routley-Meyer.

esta investigación:

REGLAS DERIVADAS

R1 Prefijación (PREF) $A \to B \Rightarrow (C \to A) \to (C \to B)$

R2 Sufijación (SUF) $A \to B \Rightarrow (B \to C) \to (A \to C)$

R3 Contraposición (CON) $A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$

R4 Contraejemplo (CTE) $A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \to B)$

R5 Introducción de la conjunción (I$\wedge$) $A \to B,\ A \to C \Rightarrow A \to (B \wedge C)$

R6 Eliminación de la disyunción (E$\vee$) $A \to C,\ B \to C \Rightarrow (A \vee B) \to C$

R7 *Modus Tollens* (MT) $A \to B,\ \neg B \Rightarrow \neg A$

R8 Transitividad (TRANS) $A \to B,\ B \to C \Rightarrow A \to C$

R9 *Summation*[82] (SUM) $A \to B \Rightarrow (C \vee A) \to (C \vee B)$

R10 Distribución fuerte[83] (DF) $A \to (B \vee C),\ (A \wedge C) \to B \Rightarrow A \to B$

TEOREMAS

T1 $A \leftrightarrow (A \vee A)$

T2 $[A \vee (B \vee C)] \leftrightarrow [(A \vee B) \vee C]$

T3 $[(A \vee (B \wedge C)] \leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$

T4 $[(A \vee B) \wedge (C \wedge D)] \to [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$

T5 $(A \to B) \to [A \to (B \vee C)]$

T6 $(A \to B) \to [(A \wedge C) \to (B \vee D)]$

T7 $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to [(A \wedge B) \to (C \wedge D)]$

T8 $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to [(A \vee B) \to (C \vee D)]$

T9 $[(A \to C) \vee (B \to D)] \to [(A \wedge B) \to (C \vee D)]$

T10 $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

T11 $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

T12 $A \to [\neg A \vee (\neg A \to B)]$

T13 $\neg A \to \{B \vee [(A \wedge B) \to C]\}$

Prueba. Las reglas R5-R10 son derivables en la lógica B (cf. Definición 2.3.1), igual que los teoremas T1-T11[84]. Quedaría probar, entonces, por un lado, que las variantes no disyuntivas de las reglas de b4 (R1-R4) son, en efecto, reglas derivadas de b4 y, por otro, los teoremas T12 y T13. Todas las variantes no disyuntivas de las reglas de b4 se prueban de manera semejante. Probaré CTE como ejemplo. En todas las pruebas que siguen, omitiré el subíndice $\vdash_{b4}$ dado que no hay posibilidad de confusión.

R4 (CTE) $A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \to B)$

1.	$A \wedge \neg B$	Hip.
2.	$\vdash (A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \vee \neg(A \to B)]$	A4

[82] En español esta regla suele denominarse como "ley de la suma lógica", como contrapartida de la "ley del producto lógico": $A \to B \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge C)$.

[83] Anderson y Belnap (1975, p. 341) denominan esta regla como *Strong Distribution* (o *cut rule*). En (Routley *et al.*, 1982, p. 345) incluyen esta regla como *cut principle* y la denominan de la misma manera que Anderson y Belnap. Yo utilizo aquí la traducción al español más directa, ya que las siglas de la regla en inglés –i.e., SD– podrían inducir confusión al lector por ser generalmente empleadas para referir al silogismo disyuntivo.

[84] Las reglas derivadas y teoremas de la lógica B son ya de sobra conocidos (Routley *et al.*, 1982). En cualquier caso, en el Anexo I puede verse desarrollada una prueba de los mismos.

3. $(A \wedge \neg B) \vee \neg(A \to B)$ MP; 1, 2
4. $\neg(A \to B) \vee \neg(A \to B)$ CTEd; 3
5. $\vdash [\neg(A \to B) \vee \neg(A \to B)] \leftrightarrow \neg(A \to B)$ T1
6. $\neg(A \to B)$ MP; 4, 5

Basta, ahora, con probar los teoremas T12 y T13. Como todas las líneas de las siguientes pruebas son axiomas (o el resultado de aplicar reglas de b4 a los mismos), no hay posibilidad de confusión, así que omitiré directamente el símbolo $\vdash$.

T12 $A \to [\neg A \vee (\neg A \to B)]$

1. $\neg\neg A \to [\neg A \vee (\neg A \to B)]$ A9
2. $A \to \neg\neg A$ A8
3. $A \to [\neg A \vee (\neg A \to B)]$ TRANS; 1, 2

T13 $\neg A \to \{B \vee [(A \wedge B) \to C]\}$

1. $\neg(A \wedge B) \to \{(A \wedge B) \vee [(A \wedge B) \to C]\}$ A9
2. $(A \wedge B) \to A$ A2
3. $\neg A \to \neg(A \wedge B)$ CON; 2
4. $\neg A \to \{(A \wedge B) \vee [(A \wedge B) \to C]\}$ TRANS; 1, 3
5. $(A \wedge B) \to B$ A2
6. $\{(A \wedge B) \vee [(A \wedge B) \to C]\} \to \{B \vee [(A \wedge B) \to C]\}$ SUM; 5
7. T13 TRANS; 4, 6

■

6.2 Clases de teorías y propiedades de las mismas

En lo que sigue, probaré algunas propiedades de b4 y de sus extensiones. Empezaré definiendo la noción de teoría-Eb4 (Definición 6.2.1) y estableciendo las clases de teorías-Eb4 de interés para esta investigación. Recuérdese que mediante el rótulo Eb4 nos referiremos a extensiones de la lógica base b4 (cf. Definición 1.3).

Definición 6.2.1: Teoría-Eb4. Sea L una lógica-Eb4, esto es, una extensión de b4. Una L-teoría $\mathcal{T}$ es un conjunto de f.b.f. cerrado por adjunción (&) e implicación demostrable en L ($\to$). Dicho de otro modo, $\mathcal{T}$ es una L-teoría syss

(1) **$\mathcal{T}$ está cerrada por adjunción** (&), esto es, syss para cualesquiera A, $B \in \mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{T}$ y $B \in \mathcal{T}$, entonces $A \wedge B \in \mathcal{T}$;

(2) **$\mathcal{T}$ está cerrada por implicación demostrable en L** ($\to$), esto es, syss para cualesquiera A, $B \in \mathcal{F}$, si $\vdash_L A \to B$ y $A \in \mathcal{T}$, entonces $B \in \mathcal{T}$.

Definición 6.2.2: Clases de teorías. Sea $\mathcal{T}$ una L-teoría y L una lógica-Eb4, establecemos entonces que

(1) $\mathcal{T}$ es **prima** syss, para cualesquiera A, $B \in \mathcal{F}$, si $A \vee B \in \mathcal{T}$, entonces $A \in \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$.

(2) $\mathcal{T}$ es **normal** syss, si $\vdash_L A$, entonces $A \in \mathcal{T}$. Esto es, $\mathcal{T}$ contiene todos los teoremas de Eb4.

(3) $\mathcal{T}$ es **trivial** syss, para cualquier $A \in \mathcal{F}$, $A \in \mathcal{T}$. Esto es, $\mathcal{T}$ contiene cualquier f.b.f.

(4) $\mathcal{T}$ es **a-consistente** (consistente en sentido absoluto) syss no es trivial. Esto es, hay algún $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \notin \mathcal{T}$.

(5) $\mathcal{T}$ es **vacía** syss, para cualquier $A \in \mathcal{F}$, $A \notin \mathcal{T}$. Esto es, $\mathcal{T}$ no contiene ninguna f.b.f.

En las pruebas de los lemas siguientes me referiré a los axiomas de la lógica básica b4, expuestos en la Definición 6.1.1. Asimismo, los teoremas utilizados refieren a los expuestos en la Proposición 6.1.1. Omitiré, dado que no hay lugar a confusión, los subíndices en los teoremas y axiomas empleados en las pruebas del resto de la sección (i.e., $\vdash_L$ donde L refiere a una lógica-Eb4).

Lema 6.2.1: Teorías y doble negación. Sea L una lógica-Eb4 y $\mathcal{T}$ una L-teoría. Para toda $A \in \mathcal{F}$, $A \in \mathcal{T}$ syss $\neg\neg A \in \mathcal{T}$.

Prueba. De derecha a izquierda.

1. $A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash A \to \neg\neg A$	A8
3. $\neg\neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2

De izquierda a derecha.

1. $\neg\neg A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash \neg\neg A \to A$	A7
3. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2

■

Probaré ahora algunas propiedades de las teorías primas así como de las teorías a-consistentes y/o normales y primas.

Lema 6.2.2: La conjunción y la disyunción en las teorías primas. Sea L una lógica-Eb4, $\mathcal{T}$ una L-teoría prima y A, $B \in \mathcal{F}$. Entonces, (1a) $A \wedge B \in \mathcal{T}$ syss $A \in \mathcal{T}$ y $B \in \mathcal{T}$; (1b) $\neg(A \wedge B) \in \mathcal{T}$ syss $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \in \mathcal{T}$; (2a) $A \vee B \in \mathcal{T}$ syss $A \in \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$; (2b) $\neg(A \vee B) \in \mathcal{T}$ syss $\neg A \in \mathcal{T}$ y $\neg B \in \mathcal{T}$.

Prueba. **Caso (1a)**. De izquierda a derecha.

1. $A \wedge B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \wedge B) \to A$	A2
3. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2

4. $\vdash (A \wedge B) \to B$	A2
5. $B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 4

De derecha a izquierda.

1. $A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \in \mathcal{T}$	Hip.
3. $A \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2

Caso (1b). De izquierda a derecha.

1. $\neg(A \wedge B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$	T10
3. $\neg A \vee \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 3

De derecha a izquierda.

1. $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg A \in \mathcal{T}$	Hip.
3. $\vdash \neg A \to (\neg A \vee \neg B)$	A4
4. $\neg A \vee \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 2, 3
5. $\neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
6. $\vdash \neg B \to (\neg A \vee \neg B)$	A4
7. $\neg A \vee \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 5, 6
8. $\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$	T10
9. $\neg(A \wedge B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 4 ó 7, 8

Caso (2a). De izquierda a derecha.

1. $A \vee B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \in \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 1

De derecha a izquierda.

1. $A \in \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \in \mathcal{T}$	Hip.
3. $\vdash A \to (A \vee B)$	A4
4. $A \vee B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 2, 3
5. $B \in \mathcal{T}$	Hip.
6. $\vdash B \to (A \vee B)$	A4
7. $A \vee B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 5, 6

Caso (2b). De izquierda a derecha.

1. $\neg(A \vee B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$	T11
3. $\neg A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \to \neg A$	A2
5. $\neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4
6. $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \to \neg B$	A2
7. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 6

De derecha a izquierda.

1. $\neg A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
3. $\neg A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
4. $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$	T11
5. $\neg(A \vee B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

■

Proposición 6.2.1: Las teorías-Eb4 están cerradas por Introducción de la conjunción ($I\wedge$). Sea L una lógica-Eb4, $\mathcal{T}$ una L-teoría, y sean A, B, $C \in \mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{T}$ está cerrada por $I\wedge$, esto es, si $A \to B \in \mathcal{T}$ y $A \to C \in \mathcal{T}$, entonces $A \to (B \wedge C) \in \mathcal{T}$.

Prueba.

1. $A \to B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \to C \in \mathcal{T}$	Hip.
3. $(A \to B) \wedge (A \to C) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
4. $\vdash [(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$	A3
5. $A \to (B \wedge C) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

■

Proposición 6.2.2: Las teorías-Eb4 están cerradas por Eliminación de la disyunción ($E\vee$). Sea L una lógica-Eb4, $\mathcal{T}$ una L-teoría, y sean A, B, $C \in \mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{T}$ está cerrada por $E\vee$, esto es, si $A \to C \in \mathcal{T}$ y $B \to C \in \mathcal{T}$, entonces $(A \vee B) \to C \in \mathcal{T}$.

Prueba.

1. $A \to C \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \to C \in \mathcal{T}$	Hip.
3. $(A \to C) \wedge (B \to C) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
4. $\vdash [(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$	A5
5. $(A \vee B) \to C \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

■

Definición 6.2.3: Normalidad completa. Sea L una lógica-Eb4 y $\mathcal{T}$ una L-teoría, $\mathcal{T}$ es completamente normal syss es normal y está cerrada por las reglas siguientes (cf. Definiciones 6.2.4-6.2.13): Modus Ponens (MP), Modus Ponens disyuntivo (MPd), Contraposición disyuntiva (CON), Prefijación disyuntiva (PREFd), Sufijación disyuntiva (SUFd) y Contraejemplo disyuntivo (CTEd)[85].

Definición 6.2.4: Conjunto de f.b.f. cerrado por alguna regla del cálculo. Para cualesquiera A, B, C, $D \in \mathcal{F}$, Γ es un conjunto de f.b.f. cerrado por:

- MP syss, si $A \to B \in \Gamma$ y $A \in \Gamma$, entonces $B \in \Gamma$;
- MPd syss, si $C \vee (A \to B) \in \Gamma$ y $C \vee A \in \Gamma$, entonces $C \vee B \in \Gamma$;
- CONd syss, si $(A \to B) \vee C \in \Gamma$, entonces $(\neg B \to \neg A) \vee C \in \Gamma$;
- PREFd syss, si $(A \to B) \vee D \in \Gamma$, entonces $[(C \to A) \to (C \to B)] \vee D \in \Gamma$;
- SUFd syss, si $(A \to B) \vee D \in \Gamma$, entonces $[(B \to C) \to (A \to C)] \vee D \in \Gamma$;
- CTEd syss, si $(A \wedge \neg B) \vee C \in \Gamma$, entonces $\neg(A \to B) \vee C \in \Gamma$.

Proposición 6.2.3: Reglas derivadas por las que están cerradas las teorías-Eb4 completamente normales. Sea L una lógica-Eb4, $\mathcal{T}$ una L-teoría completamente normal y sean A, B, $C \in \mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{T}$ está cerrada por

(1) Contraposición (CON): si $A \to B \in \mathcal{T}$, entonces $\neg B \to \neg A \in \mathcal{T}$;

(2) Prefijación (PREF): si $A \to B \in \mathcal{T}$, entonces $(C \to A) \to (C \to B) \in \mathcal{T}$;

(3) Sufijación (SUF): si $A \to B \in \mathcal{T}$, entonces $(B \to C) \to (A \to C) \in \mathcal{T}$;

(4) Contraejemplo (CTE): si $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$, entonces $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$;

(5) Modus Tollens (MT): si $A \to B \in \mathcal{T}$ y $\neg B \in \mathcal{T}$, entonces $\neg A \in \mathcal{T}$;

[85]Es importante subrayar la posibilidad de modificar el concepto de normalidad completa para adaptarlo a lógicas con un número menor de reglas. En concreto, el concepto de normalidad completa será de utilidad para probar los lemas de extensión (cf. Sección 8). No obstante, estos lemas podrían aplicarse también a una lógica que esté axiomatizada mediante un subconjunto del conjunto de reglas requerido en la noción de normalidad completa (Definición 6.2.3); por el contrario, no sería posible aplicar los lemas de extensión probados en la sección 8 a una lógica cuyo conjunto de reglas primitivas sea una extensión del conjunto de reglas especificado en la definición de normalidad completa. Por lo tanto, los lemas de extensión probados en la sección 8 solo pueden aplicarse a lógicas cuyas reglas primitivas sean las que figuran en esta definición o un subconjuntos de las mismas. Para aplicar los lemas de extensión a lógicas con otras reglas primitivas sería preciso realizar algunos cambios en estos lemas, así como en la propia noción de normalidad completa. Esta cuestión está relacionada con el apartado 0.1.e de la Introducción y se abordará con mayor profundidad en le sección 19.

(6) Transitividad (TRANS): si $A \to B \in \mathcal{T}$ y $B \to C \in \mathcal{T}$, entonces $A \to C \in \mathcal{T}$.

Prueba.

(1) $\mathcal{T}$ está cerrada por CON.

1. $A \to B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \to B) \to [(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)]$	A4
3. $(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $(\neg B \to \neg A) \vee (\neg B \to \neg A) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada CONd; 3
5. $\vdash [(\neg B \to \neg A) \vee (\neg B \to \neg A)] \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	T1
6. $\neg B \to \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 4, 5

(2) $\mathcal{T}$ está cerrada por PREF.

1. $A \to B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \to B) \to \{(A \to B) \vee [(C \to A) \to (C \to B)]\}$	A4
3. $(A \to B) \vee [(C \to A) \to (C \to B)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $[(C \to A) \to (C \to B)] \vee [(C \to A) \to (C \to B)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada PREFd; 3
5. $\vdash \{[(C \to A) \to (C \to B)] \vee [(C \to A) \to (C \to B)]\}$ $\leftrightarrow [(C \to A) \to (C \to B)]$	T1
6. $(C \to A) \to (C \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 4, 5

(3) $\mathcal{T}$ está cerrada por SUF.

1. $A \to B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \to B) \to \{(A \to B) \vee [(B \to C) \to (A \to C)]\}$	A4
3. $(A \to B) \vee [(B \to C) \to (A \to C)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $[(B \to C) \to (A \to C)] \vee [(B \to C) \to (A \to C)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada SUFd; 3
5. $\vdash \{[(B \to C) \to (A \to C)] \vee [(B \to C) \to (A \to C)]\}$ $\leftrightarrow [(B \to C) \to (A \to C)]$	T1
6. $(B \to C) \to (A \to C) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 4, 5

(4) $\mathcal{T}$ está cerrada por CTE.

1. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \vee \neg(A \to B)]$	A4
3. $(A \wedge \neg B) \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $\neg(A \to B) \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada CTEd; 3
5. $\vdash [\neg(A \to B) \vee \neg(A \to B)] \leftrightarrow \neg(A \to B)$	T1
6. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 4, 5

(5) $\mathcal{T}$ está cerrada por MT.

1. $A \to B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
3. $\neg B \to \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada CON; 1
4. $\neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 2, 3

(6) $\mathcal{T}$ está cerrada por TRANS.

1. $A \to B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \to C \in \mathcal{T}$	Hip.
3. $(B \to C) \to (A \to C) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada SUF; 1
4. $A \to C \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 2, 3

■

En lo que sigue, probaré un lema sobre el comportamiento del condicional, válido para todas las lógicas involucradas en esta investigación que, además, puede valer también para otras extensiones de b4 con unas características mínimamente semejantes a las de las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Lema 6.2.3: El condicional en las teorías primas normales. Sea L una lógica-Eb4, $\mathcal{T}$ una L-teoría normal, prima y cerrada por MP y CONd[86], y sean A, $B \in \mathcal{F}$. Entonces, $A \to B \in \mathcal{T}$ syss ($A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$) & ($\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T}$).

Prueba. **Caso (a).** $A \to B \in \mathcal{T} \Rightarrow (A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T})$ & $(\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T})$

1. $A \to B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. ($A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$) ó ($\neg A \notin \mathcal{T}$ & $\neg B \in \mathcal{T}$)	Hip. reductio
3. $A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$	Hip.
4. $B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 1, 3

Pero 3 y 4 se contradicen. Suponemos entonces

5. $\neg A \notin \mathcal{T}$ & $\neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
6. $\neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MT; 1, 5

Pero 5 y 6 se contradicen. Queda, por tanto, demostrado que si $A \to B \in \mathcal{T}$, entonces ($A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$) & ($\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T}$).

Caso (b). $(A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T})$ & $(\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T}) \Rightarrow A \to B \in \mathcal{T}$
Suponemos ($A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$) & ($\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T}$). Tenemos que considerar

[86] Recuérdese que, si una teoría-Eb4 está cerrada por MP y CONd, estará también cerrada por CON y, en consecuencia, también por MT. Cf. Proposición 6.2.3.

entonces cuatro alternativas y demostrar $A \to B \in \mathcal{T}$ a partir de cada una de ellas.

$1^{\underline{a}}$ alternativa: $A \notin \mathcal{T}$ & $\neg A \in \mathcal{T}$

1. $A \notin \mathcal{T}$ & $\neg A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash \neg A \to [A \vee (A \to B)]$	A9
3. $A \vee (A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $A \in \mathcal{T}$ ó $A \to B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 3
5. $A \to B \in \mathcal{T}$	1, 4

$2^{\underline{a}}$ alternativa: $B \in \mathcal{T}$ & $\neg B \notin \mathcal{T}$

1. $B \in \mathcal{T}$ & $\neg B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash B \to [\neg B \vee (A \to B)]$	A10
3. $\neg B \vee (A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $\neg B \in \mathcal{T}$ ó $A \to B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 3
5. $A \to B \in \mathcal{T}$	1, 4

$3^{\underline{a}}$ alternativa: $A \notin \mathcal{T}$ & $\neg B \notin \mathcal{T}$

1. $A \notin \mathcal{T}$ & $\neg B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \vee \neg B) \vee (A \to B)$	A11
3. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 2
4. $A \vee \neg B \in \mathcal{T}$ ó $A \to B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $A \vee \neg B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 1
6. $A \to B \in \mathcal{T}$	4, 5

$4^{\underline{a}}$ alternativa: $B \in \mathcal{T}$ & $\neg A \in \mathcal{T}$

1. $B \in \mathcal{T}$ & $\neg A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \to B \notin \mathcal{T}$	Hip. red.
3. $\vdash (A \to B) \vee [(\neg A \wedge B) \to (A \to B)]$	A12
4. $(A \to B) \vee [(\neg A \wedge B) \to (A \to B)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 3
5. $(A \to B) \in \mathcal{T}$ ó $(\neg A \wedge B) \to (A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 4
6. $(\neg A \wedge B) \to (A \to B) \in \mathcal{T}$	2, 5
7. $\neg A \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1
8. $A \to B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 6, 7

Pero 2 y 8 se contradicen. ■

7 Extensiones de la lógica básica: las lógicas-Lti

En la presente sección se expondrán las extensiones de b4 consideradas en esta investigación, esto es, aquellas lógicas determinadas por las ocho matrices descritas en la sección 5. De manera general, nos referiremos a ellas mediante la expresión lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$), haciendo así referencia al hecho de que son lógicas caracterizadas por las tablas condicionales expuestas en la sección 5 (i.e., t1-t8). Cabe recordar en este punto que por medio de los rótulos t1 y t5 nos referíamos a las tablas condicionales características de MBN4 y ME4. Por tanto, como es lógico, mediante los rótulos Lt1 y Lt5 nos referiremos a las lógicas BN4 y E4, respectivamente. Las lógicas-Lti serán definidas como extensiones del sistema b4 y se axiomatizan añadiendo a este último un subconjunto de axiomas dentro los pertenecientes a la siguiente lista:

A13. $(A \wedge \neg B) \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$

A14. $A \vee [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A]$

A15. $\neg B \vee [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B]$

A16. $[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$

A17. $[(A \rightarrow B) \wedge \neg B] \rightarrow \neg A$

A18. $A \rightarrow [B \vee \neg(A \rightarrow B)]$

A19. $\neg B \rightarrow [\neg A \vee \neg(A \rightarrow B)]$

A20. $[\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow A$

A21. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee \neg B)$

A22. $[\neg(A \rightarrow B) \wedge B] \rightarrow \neg B$

A23. $B \rightarrow \{[B \wedge \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow A\}$

A24. $(A \rightarrow B) \vee \neg(A \rightarrow B)$

A25. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \rightarrow B)$

A26. $[(A \rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)] \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

A27. $\neg(A \rightarrow B) \vee [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$

A28. $\{[\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow \neg B\} \vee \neg B$

A29. $\{[\neg(A \rightarrow B) \wedge B] \rightarrow A\} \vee A$

Es preciso subrayar en este punto que a la hora de axiomatizar las extensiones de b4 determinadas por Mt1-Mt8 (cf. Sección 5) priorizaré el criterio de homogeneidad sobre el de simplicidad, es decir, axiomatizaré los sistemas de manera que contengan una base común tan amplia como sea posible a expensas de agregar cierto grado de dificultad a las pruebas de completud y corrección de algunos de los sistemas considerados. En particular, la lógica base b4 fue pensada para albergar todas aquellas tesis que fueran comunes a las ocho lógicas objeto de este trabajo. No obstante, partir de la estructura básica más completa posible, esto es, de b4, conlleva el coste de asumir un alto número de reglas disyuntivas que dificultan en cierta medida las pruebas de completud de estos sistemas (cf. Sección 8). Sin embargo, estas dificultades añadidas a ciertos sistemas dentro de los considerados serán posteriormente señaladas y analizadas con el fin de realizar comparaciones entre los sistemas (cf. Sección 19, parte 6).

Definición 7.1: Las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$). Las ocho extensiones de b4 que se tendrán en consideración son Lt1, Lt2, Lt3, Lt4, Lt5, Lt6, Lt7 y Lt8, esto es, aquellas lógicas caracterizadas por t1-t8 (cf. Subsección 5.3). Estas ocho extensiones pueden axiomatizarse añadiendo a A1-A12 de b4 los siguientes axiomas:

Lt1 (BN4):

A13. $(A \wedge \neg B) \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$
A14. $A \vee [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A]$
A15. $\neg B \vee [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B]$

Lt2:

A16. $[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$
A17. $[(A \rightarrow B) \wedge \neg B] \rightarrow \neg A$
A18. $A \rightarrow [B \vee \neg(A \rightarrow B)]$
A19. $\neg B \rightarrow [\neg A \vee \neg(A \rightarrow B)]$
A20. $[\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow A$
A21. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee \neg B)$
A22. $[\neg(A \rightarrow B) \wedge B] \rightarrow \neg B$

Lt3:

A13. $(A \wedge \neg B) \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$
A14. $A \vee [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A]$
A17. $[(A \rightarrow B) \wedge \neg B] \rightarrow \neg A$
A18. $A \rightarrow [B \vee \neg(A \rightarrow B)]$
A21. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee \neg B)$
A22. $[\neg(A \rightarrow B) \wedge B] \rightarrow \neg B$
A23. $B \rightarrow \{[B \wedge \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow A\}$

Lt4:

A15. $\neg B \vee [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B]$
A16. $[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$
A19. $\neg B \rightarrow [\neg A \vee \neg(A \rightarrow B)]$
A20. $[\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow A$
A21. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee \neg B)$

Lt5 (E4):

A16. $[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$
A17. $[(A \rightarrow B) \wedge \neg B] \rightarrow \neg A$
A18. $A \rightarrow [B \vee \neg(A \rightarrow B)]$
A19. $\neg B \rightarrow [\neg A \vee \neg(A \rightarrow B)]$

A20. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$
A22. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$
A24. $(A \to B) \vee \neg(A \to B)$
A25. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$
A26. $[(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)] \to \neg(A \to B)$

Lt6:

A16. $[(A \to B) \wedge A] \to B$
A19. $\neg B \to [\neg A \vee \neg(A \to B)]$
A20. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$
A22. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$
A25. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$
A27. $\neg(A \to B) \vee [(A \wedge \neg B)] \to \neg(A \to B)]$
A28. $\{[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\} \vee \neg B$

Lt7:

A13. $(A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$
A17. $[(A \to B) \wedge \neg B] \to \neg A$
A18. $A \to [B \vee \neg(A \to B)]$
A20. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$
A22. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$
A25. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$
A29. $\{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$

Lt8:

A13. $(A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$
A20. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$
A22. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$
A25. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$
A28. $\{[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\} \vee \neg B$
A29. $\{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$

En posteriores secciones (cf. Secciones 9 y 10), se probará que las lógicas-Lti están determinadas por las respectivas matrices Mti $(1 \leq i \leq 8)$. Por otro lado, las nociones de "derivación" y "teorema" se entienden de acuerdo con las Definiciones 1.4 y 1.5 (cf. Sección 1).

Es preciso aclarar que, dado que las lógicas-Lti $(1 \leq i \leq 8)$ son extensiones de la lógica b4, son también lógicas-Eb4. En consecuencia, todo lo que se demuestre para lógicas-Eb4 en general, es válido para las lógicas-Lti.

En lo que sigue, probaré un lema que constituirá la contrapartida del Lema 6.2.3 sobre el condicional. Cabe resaltar que el siguiente es un nuevo resultado no descrito en la literatura reciente sobre el tópico. En este caso, el lema trata el comportamiento de los condicionales negados y se compone de casos específicos para cada lógica-Lti $(1 \leq i \leq 8)$ considerada. Entenderemos, de manera general, que al probar el caso de cada lógica-Lti particular utilizaremos los axiomas propios de la misma (cf. Definición 7.1) o, de ser necesario, aquellos axiomas, teoremas y reglas comúnes a todas las lógicas-Eb4 (cf. Definición 6.1.1 y Proposición 6.1.1). En consecuencia, omitiré el subíndice Lti $(1 \leq i \leq 8)$

en las siguientes pruebas (i.e., omitiré $\vdash_{Lti}$). De hecho, del mismo modo que era posible enunciar los lemas de la sección previa para lógicas-Eb4, en este caso, podemos enunciar el siguiente lema para extensiones de las lógicas-Lti (i.e., lógicas-ELti).

Lema 7.1: Condicionales negados las lógicas-Lti. Sea L una lógica-ELti ($1 \leq i \leq 8$) y sea $\mathcal{T}$ una L-teoría normal, prima y cerrada, al menos, por MP y CTEd tenemos:

Lógicas-ELt1 (BN4): $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ syss $A \in \mathcal{T}$ & $\neg B \in \mathcal{T}$.

Lógicas-ELt2: $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ syss $(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$.

Lógicas-ELt3: $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ syss $(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$.

Lógicas-ELt4: $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ syss $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$.

Lógicas-ELt5 (E4): $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ syss $(A \in \mathcal{T}$ ó $\neg A \notin \mathcal{T})$ & $(B \notin \mathcal{T}$ ó $\neg B \in \mathcal{T})$.

Lógicas-ELt6: $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ syss $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$.

Lógicas-ELt7: $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ syss $(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$.

Lógicas-ELt8: $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ syss $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$.

<u>Prueba</u>.

Caso 1. Lógicas-ELt1 (BN4):

(a) $\neg(A \to B) \in \mathcal{T} \Rightarrow A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \notin \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $A \notin \mathcal{T}$	Hip.
4. $\vdash A \vee [\neg(A \to B) \to A]$	A14
5. $A \vee [\neg(A \to B) \to A] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 4
6. $A \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \to A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 5
7. $\neg(A \to B) \to A \in \mathcal{T}$	2, 6
8. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 1, 7

Pero 3 y 8 se contradicen. Supongo entonces

9. $\neg B \notin \mathcal{T}$	Hip.

10. $\vdash \neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B]$	A15
11. $\neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 10
12. $\neg B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \to \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 11
13. $\neg(A \to B) \to \neg B \in \mathcal{T}$	9, 12
14. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 1, 13

Pero 9 y 14 se contradicen.

(b) $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T} \Rightarrow \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$

1. $A \in \mathcal{T}$ & $\neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$	A13
3. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1
4. $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 2, 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 3, 4

Caso 2. Lógicas-ELt2:

(a) $\neg(A \to B) \in \mathcal{T} \Rightarrow [(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})]$

Supondremos $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ y derivamos $[(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})]$. Procedemos por reductio, esto es, suponemos $[(A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T})$ & $(\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T})$ & $(A \notin \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T})]$ y derivamos una contradicción. Encontramos ocho alternativas diferentes. Por tanto, para probar el condicional de este caso, debemos derivar una contradicción para cada una de las ocho alternativas.

1ª alternativa: $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$	A20
4. $\neg(A \to B) \wedge \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

2ª alternativa: $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash \neg(A \to B) \to (A \vee \neg B)$	A21
4. $A \vee \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 3
5. $A \vee \neg B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 2

Pero 4 y 5 se contradicen.

Las alternativas 3ª ($A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$) y 4ª ($A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$) se resuelven con A21, de manera semejante a la alternativa anterior. La 5ª alternativa ($B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$) se resuelve mediante A20 de manera semejante a la primera alternativa.

6ª alternativa: $B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$	A22
4. $\neg(A \to B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

La 7ª alternativa ($B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$) puede resolverse con A21 o con A22 y la 8ª ($B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$) también con A22, de manera semejante a la 6ª.

(b) $(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}) \Rightarrow \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$

Suponemos entonces $(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ y demostramos $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$. Debemos considerar en este caso tres alternativas y derivar a partir de cada una de ellas $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$.

1ª alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash A \to [B \vee \neg(A \to B)]$	A18
3. $B \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	1, 4

2ª alternativa: $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$

1. $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash \neg B \to [\neg A \vee \neg(A \to B)]$	A19
3. $\neg A \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	1, 4

3ª alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1

3. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada CTE[87]; 2

Caso 3. Lógicas-ELt3:

(a) $\neg(A \to B) \in \mathcal{T} \Rightarrow (A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})\,\text{ó}\,(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$

Supondremos $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ y derivaremos $(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})\,\text{ó}\,(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$. Procedemos por reductio: asumimos $[(A \notin \mathcal{T}\,\text{ó}\,B \in \mathcal{T}) \,\&\, (A \notin \mathcal{T}\,\text{ó}\,\neg B \notin \mathcal{T})]$. Hay que tener en cuenta cuatro alternativas.

1ª alternativa: $A \notin \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \notin \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash A \vee [\neg(A \to B) \to A]$	A14
4. $A \vee [\neg(A \to B) \to A] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 3
5. $\neg(A \to B) \to A \in \mathcal{T}$ ó $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 4
6.$\neg(A \to B) \to A \in \mathcal{T}$	2, 5
7. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 1, 6

Pero 2 y 7 se contradicen.

2ª alternativa: $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash \neg(A \to B) \to (A \vee \neg B)$	A21
4. $A \vee \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 3
5. $A \vee \neg B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 2

Pero 4 y 5 se contradicen.

3ª alternativa: $B \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash B \to \{[B \wedge \neg(A \to B)] \to A\}$	A23
4. $[B \wedge \neg(A \to B)] \to A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 2, 3
5. $B \wedge \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
6. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 4, 5

Pero 2 y 6 se contradicen.

4ª alternativa: $B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio

[87] Dado que $\mathcal{T}$ es completamente normal, está cerrada por CTEd (cf. Definición 6.2.3) y, por tanto, tamién por CTE (cf. Proposición 6.2.6).

3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$	A22
4. $\neg(A \to B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

(b) $(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}) \Rightarrow \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$

En este caso, debemos considerar dos alternativas.
1ª alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash A \to [B \vee \neg(A \to B)]$	A18
3. $B \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	1, 4

2ª alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$	A13
3. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1
4. $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 2, 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Caso 4. Lógicas-ELt4:

(a) $\neg(A \to B) \in \mathcal{T} \Rightarrow [(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})]$

Por reductio, asumimos $[(\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T})$ & $(A \notin \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T})]$ y derivamos una contradicción. Debemos considerar cuatro alternativas.
1ª alternativa: $\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$	A20
4. $\neg(A \to B) \wedge \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.
2ª alternativa: $\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash \neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B]$	A15
4. $\neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 3
5. $\neg(A \to B) \to \neg B \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 4

6. $\neg(A \to B) \to \neg B \in \mathcal{T}$ — 2, 5
7. $\neg B \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada MP; 1, 6

Pero 2 y 7 se contradicen.
3ª alternativa: $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — Hip.
2. $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$ — Hip. reductio
3. $\vdash \neg(A \to B) \to (A \vee \neg B)$ — A21
4. $A \vee \neg B \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 3
5. $A \vee \neg B \notin \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ es prima; 2

Pero 4 y 5 se contradicen.

La 4ª alternativa ($\neg B \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$) puede resolverse con A15, de manera semejante a la segunda alternativa.

(b) $[(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})] \Rightarrow \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$

Suponemos entonces $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ y demostramos $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$. Debemos considerar dos alternativas.
1ª alternativa: $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$

1. $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$ — Hip.
2. $\vdash \neg B \to [\neg A \vee \neg(A \to B)]$ — A19
3. $\neg A \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — 1, 4

2ª alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$ — Hip.
2. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada &; 1
3. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada CTE; 2

Caso 5. Lógicas-ELt5 (E4):

(a) $\neg(A \to B) \in \mathcal{T} \Rightarrow [(A \in \mathcal{T}$ ó $\neg A \notin \mathcal{T})$ & $(B \notin \mathcal{T}$ ó $\neg B \in \mathcal{T})]$

Procedemos por reductio, esto es, suponemos $[(A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T})$ ó $(B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T})]$. Encontramos dos alternativas diferentes.
1ª alternativa: $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — Hip.
2. $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T}$ — Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$ — A20
4. $\neg(A \to B) \wedge \neg A \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2

5. $A \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada $\rightarrow$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

$2^{\underline{a}}$ alternativa: $B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \rightarrow B) \wedge B] \rightarrow \neg B$	A22
4. $\neg(A \rightarrow B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\rightarrow$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

(b) $(A \in \mathcal{T} \text{ ó } \neg A \notin \mathcal{T}) \,\&\, (B \notin \mathcal{T} \text{ ó } \neg B \in \mathcal{T}) \Rightarrow \neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$

Suponemos entonces $(A \in \mathcal{T} \text{ ó } \neg A \notin \mathcal{T}) \,\&\, (B \notin \mathcal{T} \text{ ó } \neg B \in \mathcal{T})$ y demostramos $\neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$. Debemos considerar en este caso cuatro alternativas.

$1^{\underline{a}}$ alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash A \rightarrow [B \vee \neg(A \rightarrow B)]$	A18
3. $B \vee \neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\rightarrow$; 1, 2
4. $B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	1, 4

$2^{\underline{a}}$ alternativa: $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (\neg A \vee B) \vee \neg(A \rightarrow B)$	A25
3. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 2
4. $\neg A \vee B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg A \vee B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 1
6. $\neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	4, 5

$3^{\underline{a}}$ alternativa: $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$

1. $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash \neg B \rightarrow [\neg A \vee \neg(A \rightarrow B)]$	A19
3. $\neg A \vee \neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\rightarrow$; 1, 2
4. $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg(A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	1, 4

$4^{\underline{a}}$ alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$. Procederé por reductio, esto es, supondré $\neg(A \rightarrow B) \notin \mathcal{T}$ y derivaré una contradicción.

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.

2. $\neg(A \to B) \notin \mathcal{T}$ — Hip. red.
3. $\vdash (A \to B) \vee \neg(A \to B)$ — A24
4. $(A \to B) \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ es normal; 3
5. $A \to B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ es prima; 4
6. $A \to B \in \mathcal{T}$ — 2, 5
7. $\vdash [(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)] \to \neg(A \to B)$ — A26
8. $(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B) \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 6
9. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ está cerrada $\to$; 7, 8

Pero 2 y 9 se contradicen. Así, queda probado $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$.

Caso 6. Lógicas-ELt6:

(a) $\neg(A \to B) \in \mathcal{T} \Rightarrow [(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})\,$ó$\,(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})\,$ó$\,(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})]$

Como en las casos previos, procedemos por reductio, asumimos $(\neg A \in \mathcal{T}\,$ó$\,B \in \mathcal{T}) \,\&\, (A \notin \mathcal{T}\,$ó$\,\neg B \notin \mathcal{T}) \,\&\, (\neg A \in \mathcal{T}\,$ó$\,\neg B \notin \mathcal{T})$ y encontramos ocho alternativas diferentes.

1ª alternativa: $\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — Hip.
2. $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T}$ — Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$ — A20
4. $\neg(A \to B) \wedge \neg A \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $A \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

2ª alternativa: $\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ — Hip.
2. $\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$ — Hip. reductio
3. $\vdash \{[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\} \vee \neg B$ — A28
4. $\{[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\} \vee \neg B \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ es normal; 3
5. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ es prima; 4
6. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to B \in \mathcal{T}$ — 2, 5
7. $\neg(A \to B) \wedge \neg A \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
8. $B \in \mathcal{T}$ — $\mathcal{T}$ cerrada MP; 6, 7

Pero 2 y 8 se contradicen.

Las alternativas 3ª $(\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T})$ y 5ª $(B \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T})$ se pueden resolver mediante A20, como la primera alternativa. Por otro lado, la 4ª alternativa $(\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T})$ se resuelve con A28, como la alternativa anterior.

$6^{\underline{a}}$ alternativa: $B \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$	A22
4. $\neg(A \to B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

Las alternativas $7^{\underline{a}}$ $(B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T})$ y $8^{\underline{a}}$ $(B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T})$ pueden resolverse también mediante A22.

(b) $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$ ó $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}) \Rightarrow \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$

Debemos considerar en este caso tres alternativas y derivar a partir de cada una de ellas $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$.

$1^{\underline{a}}$ alternativa: $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$	A25
3. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 2
4. $\neg A \vee B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg A \vee B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 1
6. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	4, 5

$2^{\underline{a}}$ alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$. Procederé por reductio, esto es, supondré $\neg(A \to B) \notin \mathcal{T}$ y derivaré una contradicción.

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg(A \to B) \notin \mathcal{T}$	Hip. red.
3. $\vdash \neg(A \to B) \vee [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$	A27
4. $\neg(A \to B) \vee [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ ó $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 4
6. $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	2, 5
7. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1
8. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 6, 7

Pero 2 y 8 se contradicen. Así, queda probado $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$.

$3^{\underline{a}}$ alternativa: $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$

1. $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash \neg B \to [\neg A \vee \neg(A \to B)]$	A19
3. $\neg A \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3

5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ 1, 4

Caso 7. Lógicas-ELt7:

(a) $\neg(A \to B) \in \mathcal{T} \Rightarrow [(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})]$

Procedemos por reductio, esto es, asumimos $(A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T})$ & $(\neg A \in \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T})$ & $(A \notin \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T})$ y derivamos una contradicción. Hay que considerar ocho alternativas.

1ª alternativa: $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$	A20
4. $\neg(A \to B) \wedge \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

2ª alternativa: $A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash \{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$	A29
4. $\{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 3
5. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to A \in \mathcal{T}$ ó $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 4
6. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to A \in \mathcal{T}$	2, 5
7. $\neg(A \to B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
8. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 6, 7

Pero 2 y 8 se contradicen.

Las alternativas 3ª $(A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T})$ y 5ª $(B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T})$ se pueden resolver mediante A20, de manera semejante a la primera alternativa. Por otro lado, las alternativas 4ª $(A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T})$ y 6ª $(B \in \mathcal{T} \,\&\, B \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T})$ pueden resolverse con A29, como la segunda alternativa.

7ª alternativa: $B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$	A22
4. $\neg(A \to B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

La 8ª alternativa ($B \in \mathcal{T} \,\&\, B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$) puede resolverse también con A22.

(b) $(A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}) \Rightarrow \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$

Debemos considerar tres alternativas.

1ª alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash A \to [B \vee \neg(A \to B)]$	A18
3. $B \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	1, 4

2ª alternativa: $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$	A25
3. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 2
4. $\neg A \vee B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg A \vee B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 1
6. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	4, 5

3ª alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$	A13
3. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1
4. $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 2, 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 3, 4

Caso 8. Lógicas-ELt8:

(a) $\neg(A \to B) \in \mathcal{T} \Rightarrow [(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})]$

Suponemos $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ y derivamos $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T})$ ó $(A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T})$. Procedemos por reductio, negamos el consecuente: $(\neg A \in \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T})$ & $(A \notin \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T})$. Encontramos cuatro alternativas diferentes.

1ª alternativa: $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \notin \mathcal{T} \,\&\, \neg A \in \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$	A20
4. $\neg(A \to B) \wedge \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

2ª alternativa: $\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash \{[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\} \vee \neg B$	A28
4. $\{[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\} \vee \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 3
5. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 4
6. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B \in \mathcal{T}$	2, 5
7. $\neg(A \to B) \wedge \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
8. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 6, 7

Pero 2 y 8 se contradicen.

3ª alternativa: $B \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \in \mathcal{T} \,\&\, A \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash \{[(\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$	A29
4. $\{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 3
5. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to A \in \mathcal{T}$ ó $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 4
6. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to A \in \mathcal{T}$	2, 5
7. $\neg(A \to B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
8. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 6, 7

Pero 2 y 8 se contradicen.

4ª alternativa: $B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \notin \mathcal{T}$	Hip. reductio
3. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$	A22
4. $\neg(A \to B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
5. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 2 y 5 se contradicen.

(b) $(\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}) \, o \, (A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}) \Rightarrow \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$

Debemos considerar en este caso dos alternativas y derivar a partir de cada una de ellas $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$.

1ª alternativa: $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$

1. $\neg A \notin \mathcal{T} \,\&\, B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$	A25
3. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 2
4. $\neg A \vee B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 3
5. $\neg A \vee B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es prima; 1
6. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	4, 5

$2^{\underline{a}}$ alternativa: $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$

1. $A \in \mathcal{T} \,\&\, \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$	A13
3. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1
4. $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 2, 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 3, 4

■

8 Lemas de extensión

En esta sección se prueba el lema de *extensión a conjuntos maximales* (Lema 8.2) y el lema sobre *teorías primas completamente normales* (Lema 8.3). Estos lemas son de gran utilidad cuando se quiere proporcionar pruebas de completud. A su vez, será necesario explicitar algunas nociones fundamentales tales como la de *conjuntos maximales* (Definición 8.2) y la de *derivabilidad disyuntiva* (Definición 8.1) así como probar un lema auxiliar (Lema 8.1) que será crucial, a su vez, para probar el lema de extensión anteriormente mencionado.

Es preciso apuntar que si bien las definiciones propuestas a lo largo de la presente sección pueden aplicarse de manera general a cualquier extensión (o expansión) de la lógica básica b4[88], esto es, a cualquier lógica-Eb4, por el contrario, los lemas de esta sección (i.e., Lemas 8.1, 8.2 y 8.3) deben ser restringidos a extensiones (o expansiones[89]) de b4 que no estén cerradas por ninguna otra regla primitiva diferente de las que componen el sistema b4 (cf. Definición 6.1.1). De lo contrario, podríamos encontrar alguna lógica-Eb4 para la que dichos lemas de extensión no funcionen.

Con el fin de probar el lema de extensión, establezco la siguiente definición previa.

Definición 8.1: Derivabilidad disyuntiva en Eb4. Sea L una lógica-Eb4. Para cualesquiera conjuntos no vacíos de f.b.f. Γ y Θ, Θ es derivable disyuntivamente en L a partir de Γ (en símbolos, $\Gamma \vdash_L^d \Theta$) syss $A_1 \wedge ... \wedge A_n \vdash_L B_1 \vee ... \vee B_n$ para algunas f.b.f. $A_1, ..., A_n \in \Gamma$ y $B_1, ..., B_n \in \Theta$.

Pruebo ahora un lema que es esencial para probar el lema de extensión a conjuntos maximales.

Lema 8.1: Lema auxiliar principal. Sea L una lógica-Eb4 que no esté cerrada por ninguna otra regla primitiva diferente a las del sistema b4. Para

[88] De manera semejante a lo que sucedía con el conjunto de pruebas y definiciones de la sección 6, que eran válidas para cualquier extensión (o expansión) de la lógica b4.

[89] Hay que aclarar que los lemas de extensión aquí propuestos son válidos no solo para extensiones de b4 sino también para expansiones de la lógica b4, siempre que estas no estén formuladas con alguna regla primitiva que no forme parte de las reglas (primitivas) de b4. El lector puede encontrar un claro ejemplo de esta cuestión en la propia tesis. En particular, en la parte 5 se desarrollarán dos clases de expansiones modales para los sistemas considerados, es decir, proporcionaremos a cada una de las lógicas estudiadas dos expansiones modales distintas (que denominaremos lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti y lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti). Pues bien, el lector puede comprobar como los lemas de extensión que se van a desarrollar en la presente sección son también válidos para las expansiones generadas para las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti en la sección 17, pues dichas expansiones se desarrollan añadiendo axiomas, no reglas, a las lógicas-Lti. No obstante, nos encontramos justamente con el caso contrario en las expansiones modales desarrolladas en la sección 18 (i.e., las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti). Dado que para axiomatizar las expansiones modales de la sección 18 utilizaremos, además de un conjunto de axiomas modales, la regla necesitación (NEC), será necesario incluir algunas modificaciones en los lemas de extensión que se prueban aquí, en la sección 8. (Cf. Subsección 18.3.)

cualesquiera f.b.f. A, B_1,..., B_n, si $\{B_1, ..., B_n\} \vdash_L A$, entonces, para cualquier f.b.f. C, $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_L C \vee A$[90].

Prueba. Seguiré la metodología propuesta por Brady (1982, p. 27). Procedemos por inducción sobre la prueba de A a partir de $\{B_1, ..., B_n\}$.

(1) $A \in \{B_1, ..., B_n\}$. Utilizaré la regla SUM (R9; i.e., $A \to B \Rightarrow (C \vee A) \to (C \vee B)$) para probar este caso. Sea A algún B_i tal que $1 \leq i \leq n$,

1. $\vdash (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \to B_i$	Propiedades elementales de $\wedge$
2. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee B_i)$	Por SUM; 1

(2) A es un axioma.

1. $\vdash A$	Hip.
2. $\vdash A \to (C \vee A)$	A4
3. $\vdash C \vee A$	MP; 1, 2
4. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee A)$	3

(3) A es por ADJ. Entonces, A es $D \wedge E$ para algunas f.b.f. D y E. Utilizaré T3 ($[(A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]]$) para probar este caso.

1. $\{B_1, ..., B_n\} \vdash D$	Hip.
2. $\{B_1, ..., B_n\} \vdash E$	Hip.
3. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee D$	H.I.
4. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee E$	H.I.
5. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \wedge (C \vee E)$	ADJ; 3, 4
6. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee (D \wedge E)$	Por T3; 5

(4) A es por MP. Para alguna f.b.f. D,

1. $\{B_1, ..., B_n\} \vdash D \to A$	Hip.
2. $\{B_1, ..., B_n\} \vdash D$	Hip.
3. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee (D \to A)$	H.I.
4. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee D$	H.I.
5. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee A$	MPd; 3, 4

A lo largo de las siguientes pruebas, utilizaré T2 ($[A \vee (B \vee C)] \leftrightarrow [(A \vee B) \vee C]$).

[90]Dado que no hay riesgo de confusión, omitiré a lo largo de esta y las siguientes pruebas el subíndice L en $\vdash_L$.

(5) A es por MPd. Entonces, A es $D \vee E$ para algunas f.b.f. D y E. Para alguna f.b.f. F,

1. $\{B_1, ..., B_n\} \vdash D \vee (F \to E)$	Hip.
2. $\{B_1, ..., B_n\} \vdash D \vee F$	Hip.
3. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee [D \vee (F \to E)]$	H.I.
4. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee (D \vee F)$	H.I.
5. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee (F \to E)$	Por T2; 3
6. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee F$	Por T2; 4
7. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee E$	MPd; 5, 6
8. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee (D \vee E)$	Por T2; 7

(7) A es por CONd. Entonces, A es $D \vee (\neg E \to \neg F)$ para algunas f.b.f. D, F y E.

1. $\{B_1, ..., B_n\} \vdash D \vee (F \to E)$	Hip.
2. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee [D \vee (F \to E)]$	H.I.
3. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee (F \to E)$	Por T2; 2
4. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee (\neg E \to \neg F)$	CONd; 3
5. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee [D \vee (\neg E \to \neg F)]$	Por T2; 4

(8) A es por PREFd. Entonces, A es $D \vee [(F \to G) \to (F \to E)]$ para algunas f.b.f. D, F, G y E.

1. $\{B_1, ..., B_n\} \vdash D \vee (G \to E)$	Hip.
2. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee [D \vee (G \to E)]$	H.I.
3. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee (G \to E)$	Por T2; 2
4. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee [(F \to G) \to (F \to E)]$	PREFd; 3
5. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee [D \vee [(F \to G) \to (F \to E)]$	Por T2; 4

(9) A es por SUFd. Entonces, A es $D \vee [(E \to F) \to (G \to F)]$ para algunas f.b.f. D, F, G y E.

1. $\{B_1, ..., B_n\} \vdash D \vee (G \to E)$	Hip.
2. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee [D \vee (G \to E)]$	H.I.
3. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee (G \to E)$	Por T2; 2
4. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee [(E \to F) \to (G \to F)]$	SUFd; 3
5. $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee [D \vee [(E \to F) \to (G \to F)]$	Por T2; 4

(10) A es por CTEd. Entonces, A es $D \vee \neg(F \to E)$ para algunas f.b.f. D, F y E.

1.	$\{B_1, ..., B_n\} \vdash D \vee (F \wedge \neg E)$	Hip.
2.	$C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee [D \vee (F \wedge \neg E)]$	H.I.
3.	$C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee (F \wedge \neg E)$	Por T2; 2
4.	$C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash (C \vee D) \vee \neg(F \rightarrow E)$	CTEd; 3
5.	$C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash C \vee [D \vee \neg(F \rightarrow E)]$	Por T2; 4

■

Definición 8.2: Conjuntos maximales. Sea L una lógica-Eb4, Γ es un conjunto maximal de f.b.f. syss $\Gamma \nvdash_L^d \overline{\Gamma}$ ($\overline{\Gamma}$ es el complementario de Γ).

Observación 8.1: Los conjuntos maximales contienen todos los teoremas de L. Sea L una lógica-Eb4, es claro que si Γ es un conjunto maximal de f.b.f. (i.e. $\Gamma \nvdash_L^d \overline{\Gamma}$), entonces Γ debe contener todos los teoremas de L. De lo contrario, habría algún A tal que $\vdash_L A$ y $A \notin \Gamma$. No obstante, dado que Γ es maximal y $A \notin \Gamma$, tendríamos $A \in \overline{\Gamma}$; lo cual contradice la maximalidad de Γ dado que, si A es un teorema de L, tendremos $\Gamma \vdash_L A$ y, con ello, $\Gamma \vdash_L^d \overline{\Gamma}$.

A continuación desarrollo un lema de extensión a conjuntos maximales que será válido para toda lógica-Eb4 cuyo conjunto de reglas primitivas sea o bien justamente el dispuesto para la lógica b4 o bien un subconjunto del mismo (cf. Definición 6.1.1).

Lema 8.2: Extensión a conjuntos maximales. Sea L una lógica-Eb4 que no esté cerrada por ninguna otra regla primitiva diferente a las del sistema b4. Sean, además, Γ y Θ conjuntos de f.b.f. tales que $\Gamma \nvdash_L^d \Theta$. Entonces, hay conjuntos de f.b.f. Γ' y Θ' tales que $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Theta \subseteq \Theta'$, $\Theta' = \overline{\Gamma}'$ y $\Gamma' \nvdash_L^d \Theta'$ (esto es, Γ' es un conjunto maximal tal que $\Gamma' \nvdash_L^d \Theta'$).

Prueba. Sea $A_1, ..., A_n, ...$, una enumeración de f.b.f. Los conjuntos Γ' y Θ'se definen como sigue: $\Gamma' = \bigcup \Gamma_k$ y $\Theta' = \bigcup \Theta_k$ (siendo $k \in \mathbb{N}$) donde $\Gamma_0 = \Gamma$ y $\Theta_0 = \Theta$. Asimismo, los conjuntos Γ'_{k+1} y Θ'_{k+1} se definen como sigue:

(i) si $\Gamma_k \cup \{A_{k+1}\} \vdash^d \Theta_k$, entonces $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k$ y $\Theta_{k+1} = \Theta_k \cup \{A_{k+1}\}$;

(ii) si $\Gamma_k \cup \{A_{k+1}\} \nvdash^d \Theta_k$, entonces $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k \cup \{A_{k+1}\}$ y $\Theta_{k+1} = \Theta_k$.

Nótese que $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Theta \subseteq \Theta'$ y que $\Gamma' \cup \Theta' = \mathcal{F}$. Entonces, probaremos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se da

I. $\quad \Gamma_k \nvdash^d \Theta_k$.

Procederemos por *reductio ad absurdum*, esto es, supondremos que, para algún $i \in \mathbb{N}$, se da

II. $\quad \Gamma_i \nvdash^d \Theta_i$ pero $\Gamma_{i+1} \vdash^d \Theta_{i+1}$.

Consideremos ahora las dos posibilidades anteriores (i) y (ii), de acuerdo con las cuales se definen Γ_{i+1} y Θ_{i+1}, con el fin de derivar una contradicción a partir de cada una de ellas. Consideramos primero la posibilidad (ii):

(a) $\quad\quad\quad \Gamma_i \cup \{A_{i+1}\} \nvdash^d \Theta_i$.

(1) Aplicando la definición (ii) al caso (a), tenemos: $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{A_{i+1}\}$ y $\Theta_{i+1} = \Theta_i$.

(2) Sustituimos ahora Γ_{k+1} y Θ_{k+1} (tal y como se definen en el paso 1) en la hipótesis de reductio: $\Gamma_i \cup \{A_{i+1}\} \vdash^d \Theta_i$.

(3) El paso 2 se contradice con la hipótesis del caso: $\Gamma_i \cup \{A_{i+1}\} \nvdash^d \Theta_i$.

Consideramos ahora la posibilidad (i):

(b) $\quad\quad\quad \Gamma_i \cup \{A_{i+1}\} \vdash^d \Theta_i$.

(1) Aplicando la definición (i) al caso (b), tenemos: $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$ y $\Theta_{i+1} = \Theta_i \cup \{A_{i+1}\}$.

(2) Sustituimos ahora Γ_{k+1} y Θ_{k+1} (tal y como se definen en el paso 1) en la hipótesis de reductio: $\Gamma_i \vdash^d \Theta_i \cup \{A_{i+1}\}$.

(3) Sean las fórmulas de los conjuntos Γ_i y Θ_i en esta derivación $B_1, ..., B_m$ y $C_1, ..., C_n$, respectivamente. Nos referiremos con B a la conjunción de todas las fórmulas de Γ_i en esta derivación y con C a la disyunción de todas las fórmulas de Θ_i en esta derivación:

$$B = B_1 \wedge ... \wedge B_m$$
$$C = C_1 \vee ... \vee C_n$$

(4) Siguiendo las definiciones dadas en el paso 3, reformulamos el paso 2: $B \vdash C \vee A_{i+1}$.

Procedo ahora a derivar una contradicción:

1. $\Gamma_i \vdash^d \Theta_i \cup \{A_{i+1}\}$	hip. reductio; dados (1) y (2)
2. $B \vdash C \vee A_{i+1}$	reformulación de 1; dados (3) y (4)

Por otro lado, dado el caso (b), hay alguna conjunción $B\acute{}$ de elementos de Γ_i y alguna disyunción $C\acute{}$ de elementos de Θ_i tal que

3. $B\acute{} \wedge A_{i+1} \vdash C\acute{}$	Hip. del caso (b)

Utilizaremos ahora $B\acute{}\acute{}$ para referirnos a la conjunción de B y $B\acute{}$ ($B\acute{}\acute{} = B \wedge B\acute{}$); y, del mismo modo, $C\acute{}\acute{}$ para la disyunción entre C y $C\acute{}$ ($C\acute{}\acute{} = C \vee C\acute{}$). Mostraremos

III. $\quad\quad\quad B\acute{}\acute{} \vdash C\acute{}\acute{}$, esto es, $\Gamma_i \vdash^d \Theta_i$.

Dado que III contradice la hipótesis de reductio, quedará demostrado (I) $\Gamma_k \nvdash^d \Theta_k$, como se requería.

4. $B´´ \wedge A_{i+1} \vdash C´´$	por propiedades de $\wedge$ y $\vee$; dado 3
5. $B´´ \vdash C´´ \vee A_{i+1}$	por propiedades de $\wedge$ y $\vee$; dado 2
6. $B´´ \vdash C´´ \vee (B´´ \wedge A_{i+1})$	dado 5, A4 y T3
7. $C´´ \vee (B´´ \wedge A_{i+1}) \vdash C´´ \vee C´´$	dado 4 y el lema 8.1
8. $A \leftrightarrow (A \vee A)$	T1
9. $C´´ \vee (B´´ \wedge A_{i+1}) \vdash C´´$	dados 7 y 8
10. $B´´ \vdash C´´$	dados 6 y 9
11. $\Gamma_i \vdash^d \Theta_i$	dado 10 y definiciones de $B´´$ y $C´´$

Hemos demostrado $\Gamma_i \vdash^d \Theta_i$ (III). Dado que III se contradice con la hipótesis de reductio (II), hemos derivado una contradicción, como se requería. En consecuencia, queda probado I: para todo $k \in \mathbb{N}$, se da $\Gamma_k \nvdash^d \Theta_k$. Esto es, hay conjuntos de f.b.f. $\Gamma´$ y $\Theta´$ tales que $\Gamma \subseteq \Gamma´$, $\Theta \subseteq \Theta´$, $\Theta´ = \overline{\Gamma}´$ (dado que $\Gamma´ \cap \Theta´ = \emptyset$ –de no ser así, para algún $i \in \mathbb{N}$, se daría $\Gamma_i \vdash^d \Theta_i$– y $\Gamma´ \cup \Theta´ = \mathcal{F}$) y $\Gamma´ \nvdash^d \Theta´$ (ya que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_k \nvdash^d \Theta_k$), como se requería. Nótese finalmente que $\Gamma´$ es maximal, dado que $\Gamma´ \nvdash^d \overline{\Gamma}´$. ■

Es preciso anotar el rol esencial que juega el lema 8.1 en la prueba del lema de extensión (lema 8.2) que se acaba de ofrecer. El elemento esencial en la demostración es el lema 8.1, porque el resto de movimientos sintácticos que forman parte de la demostración se basan simplemente en el fragmento positivo del sistema First Degree Entailment FDE de Anderson y Belnap.

Lema 8.3: Teorías primas completamente normales. Sea L una lógica-Eb4 que no esté cerrada por ninguna otra regla primitiva diferente a las del sistema b4. Si Γ es un conjunto maximal, entonces es una teoría-L prima completamente normal.

Prueba. Para demostrar este lema, me basaré también en el desarrollado por Brady (1982, *Lemma* 8).

(1) Γ es una teoría-L. Para probar que Γ es una teoría-L debo probar que es un conjunto de f.b.f. cerrado por $\rightarrow$, &. Sea Γ un conjunto maximal y sean A y B cualesquiera f.b.f,

(i) Γ está cerrado por $\rightarrow$:

1. $\vdash A \rightarrow B$	Hip.
2. $A \in \Gamma$	Hip.
3. $B \notin \Gamma$	Hip. red.
4. $A \vdash B$	1

Pero, dados 2 y 3, 4 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \vdash^d \bar{\Gamma}$).

(ii) Γ está cerrada por &:

1. $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$	Hip.
2. $A \wedge B \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $\vdash (A \wedge B) \to (A \wedge B)$	A1
4. $A \wedge B \vdash A \wedge B$	3

Pero, dados 1 y 2, 4 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \vdash^d \bar{\Gamma}$).

(2) Γ es prima.

1. $A \vee B \in \Gamma$	Hip.
2. $A \notin \Gamma$ y $B \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $\vdash (A \vee B) \to (A \vee B)$	A1
4. $(A \vee B) \vdash (A \vee B)$	3

Pero, dados 1 y 2, 4 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \vdash^d \bar{\Gamma}$).

(3) Γ es normal. Está claro que Γ es normal pues contiene todos los teoremas de L (Observación 8.1).

(4) Γ es completamente normal. Para probar que Γ es completamente normal debo probar que está cerrado por MP, MPd, CONd, PREFd, SUFd y CTEd. Sea Γ un conjunto maximal y sean A, B, C y D cualesquiera f.b.f,

(i) Γ está cerrada por MP:

1. $A \to B \in \Gamma$, $A \in \Gamma$	Hip.
2. $B \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $\vdash [A \wedge (A \to B)] \to A$	A2
4. $\vdash [A \wedge (A \to B)] \to (A \to B)$	A2
5. $A \wedge (A \to B) \vdash A$	3
6. $A \wedge (A \to B) \vdash A \to B$	4
7. $A \wedge (A \to B) \vdash B$	MP; 5, 6

Pero, dados 1 y 2, 7 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \vdash^d \bar{\Gamma}$).

(ii) Γ está cerrada por MPd:

1. $C \vee (A \to B) \in \Gamma$, $C \vee A \in \Gamma$	Hip.
2. $C \vee B \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $\vdash [(C \vee A) \wedge (C \vee (A \to B))] \to (C \vee A)$	A2
4. $\vdash [(C \vee A) \wedge (C \vee (A \to B))] \to [C \vee (A \to B)]$	A2
5. $(C \vee A) \wedge [C \vee (A \to B)] \vdash C \vee A$	3
6. $(C \vee A) \wedge [C \vee (A \to B)] \vdash C \vee (A \to B)$	4
7. $(C \vee A) \wedge [C \vee (A \to B)] \vdash C \vee B$	MPd; 5, 6

Pero, dados 1 y 2, 7 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \vdash^d \bar{\Gamma}$).

(iii) Γ está cerrada por CONd:

1. $C \vee (A \to B) \in \Gamma$	Hip.
2. $C \vee (\neg B \to \neg A) \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $\vdash [C \vee (A \to B)] \to [C \vee (A \to B)]$	A1
4. $C \vee (A \to B) \vdash C \vee (A \to B)$	3
5. $C \vee (A \to B) \vdash C \vee (\neg B \to \neg A)$	CONd; 4

Pero, dados 1 y 2, 5 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \vdash^d \bar{\Gamma}$).

(iv) Γ está cerrada por PREFd:

1. $C \vee (A \to B) \in \Gamma$	Hip.
2. $C \vee [(D \to A) \to (D \to B)] \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $\vdash [C \vee (A \to B)] \to [C \vee (A \to B)]$	A1
4. $C \vee (A \to B) \vdash C \vee (A \to B)$	3
5. $C \vee (A \to B) \vdash C \vee [(D \to A) \to (D \to B)]$	PREFd; 4

Pero, dados 1 y 2, 5 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \vdash^d \bar{\Gamma}$).

(v) Γ está cerrada por SUFd:

1. $C \vee (A \to B) \in \Gamma$	Hip.
2. $C \vee [(B \to D) \to (A \to D)] \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $\vdash [C \vee (A \to B)] \to [C \vee (A \to B)]$	A1
4. $C \vee (A \to B) \vdash C \vee (A \to B)$	3
5. $C \vee (A \to B) \vdash C \vee [(B \to D) \to (A \to D)]$	SUFd; 4

Pero, dados 1 y 2, 5 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \vdash^d \bar{\Gamma}$).

(vi) Γ está cerrada por CTEd:

1. $C \vee (A \wedge \neg B) \in \Gamma$	Hip.
2. $C \vee \neg(A \to B) \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $\vdash [C \vee (A \wedge \neg B)] \to [C \vee (A \wedge \neg B)]$	A1
4. $C \vee (A \wedge \neg B) \vdash C \vee (A \wedge \neg B)$	3
5. $C \vee (A \wedge \neg B) \vdash C \vee \neg(A \to B)$	CTEd; 4

Pero, dados 1 y 2, 5 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \vdash^d \bar{\Gamma}$).
■

Parte 2: Semántica bivalente tipo Belnap-Dunn

9 Semántica bivalente tipo Belnap-Dunn para las lógicas-Lti

En esta sección se dotará a aquellas extensiones de b4 consideradas en este trabajo de una semántica bivalente tipo Belnap-Dunn y se probará la corrección de los sistemas respecto de esta semántica. Primero se definirán los modelos-Lti ($1 \leq i \leq 8$) y las nociones de consecuencia-Lti y validez-Lti.

Definición 9.1: Modelos-Lt*i*. Un modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$) M es una estructura $(K4, I)$ donde (i) $K4 = \{\{T\}, \{F\}, \{T, F\}, \emptyset\}$; (ii) I es una interpretación-Lti de $\mathcal{F}$ a $K4$ definida de acuerdo con el siguiente conjunto de condiciones: para todo $p \in \mathcal{P}$ y A, $B \in \mathcal{F}$,

(1) $I(p) \in K4$;
(2a) $T \in I(\neg A)$ syss $F \in I(A)$;
(2b) $F \in I(\neg A)$ syss $T \in I(A)$;
(3a) $T \in I(A \wedge B)$ syss $T \in I(A)$ y $T \in I(B)$;
(3b) $F \in I(A \wedge B)$ syss $F \in I(A)$ ó $F \in I(B)$;
(4a) $T \in I(A \vee B)$ syss $T \in I(A)$ ó $T \in I(B)$;
(4b) $F \in I(A \vee B)$ syss $F \in I(A)$ y $F \in I(B)$;
(5a) $T \in I(A \to B)$ syss ($T \notin I(A)$ ó $T \in I(B)$) y ($F \in I(A)$ ó $F \notin I(B)$).

La cláusula (5b) es diferente en cada modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$):

- Modelos-Lt1: (5b) $F \in I(A \to B)$ syss $T \in I(A)$ y $F \in I(B)$.
- Modelos-Lt2: (5b) $F \in I(A \to B)$ syss ($T \in I(A)$ y $T \notin I(B)$) ó ($F \notin I(A)$ y $F \in I(B)$) ó ($T \in I(A)$ y $F \in I(B)$).
- Modelos-Lt3: (5b) $F \in I(A \to B)$ syss ($T \in I(A)$ y $T \notin I(B)$) ó ($T \in I(A)$ y $F \in I(B)$).
- Modelos-Lt4: (5b) $F \in I(A \to B)$ syss ($F \notin I(A)$ y $F \in I(B)$) ó ($T \in I(A)$ y $F \in I(B)$).
- Modelos-Lt5: (5b) $F \in I(A \to B)$ syss ($T \in I(A)$ ó $F \notin I(A)$) y ($T \notin I(B)$ ó $F \in I(B)$).
- Modelos-Lt6: (5b) $F \in I(A \to B)$ syss ($F \notin I(A)$ y $T \notin I(B)$) ó ($T \in I(A)$ y $F \in I(B)$) ó ($F \notin I(A)$ y $F \in I(B)$).
- Modelos-Lt7: (5b) $F \in I(A \to B)$ syss ($T \in I(A)$ y $T \notin I(B)$) ó ($F \notin I(A)$ y $T \notin I(B)$) ó ($T \in I(A)$ y $F \in I(B)$).

- Modelos-Lt8: (5b) $F \in I(A \to B)$ syss ($F \notin I(A)$ y $T \notin I(B)$) ó ($T \in I(A)$ y $F \in I(B)$).

Teniendo en cuenta lo anterior, consideramos ocho tipos de modelos-Lti que se distinguen entre sí por la cláusula de falsedad del condicional y son semejantes en el resto de condiciones y características. Obviamente, cada uno de estos ocho tipos corresponde a cada una de las ocho lógicas consideradas a lo largo de la investigación.

A continuación, se definen las nociones de consecuencia-Lti y validez-Lti.

Definición 9.2: Consecuencia-Lti y validez-Lti. Sea M un modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$), para cualquier conjunto de f.b.f. Γ y cualquier $A \in \mathcal{F}$, $\Gamma \vDash_{\mathsf{M}} A$ (A es consecuencia de Γ en el modelo-Lti M) syss $T \in I(A)$ si $T \in I(\Gamma)$ [$T \in I(\Gamma)$ syss $\forall B \in \Gamma(T \in I(B))$; $F \in I(\Gamma)$ syss $\exists B \in \Gamma(F \in I(B))$]. En particular, $\vDash_{\mathsf{M}} A$ (A es verdadera en M) syss $T \in I(A)$. Entonces, $\Gamma \vDash_{Lti} A$ (A es consecuencia de Γ en la semántica-Lti) syss $\Gamma \vDash_{\mathsf{M}} A$ para todo modelo-Lti M. En particular, $\vDash_{Lti} A$ (A es válida en la semántica-Lti) syss $\vDash_{\mathsf{M}} A$ para todo modelo-Lti M (i.e., syss $T \in I(A)$ para todo modelo-Lti M)[91].

En lo que sigue, probaré que la relación de consecuencia $\models_{Mti}$ (Definición 1.7 y Proposición 5.3.1) y la relación $\models_{Lti}$ de la definición anterior son coextensivas. De dicha prueba se seguirá la corrección de cada lógica-Lti con respecto de ambas relaciones de consecuencia. En primer lugar, desarrollaré una definición y dos proposiciones que constituirán el principal fundamento para demostrar la coextensividad de ambas relaciones.

Definición 9.3: Interpretación correspondiente. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), dada una interpretación-Mti I, es posible definir una interpretación-Lti I' correspondiente y viceversa.

Sea I una interpretación-Mti, definimos una interpretación-Lti I' correspondiente como sigue: para cada variable proposicional p,

1. $I'(p) = \{T\}$ syss $I(p) = 3$;
2. $I'(p) = \{T, F\}$ syss $I(p) = 2$;
3. $I'(p) = \emptyset$ syss $I(p) = 1$;
4. $I'(p) = \{F\}$ syss $I(p) = 0$.

A la inversa, sea I una interpretación-Lti, es posible definir una interpretación-Mti I' correspondiente de manera semejante.

[91] Mediante $\vDash_{Lti}$ me referiré justamente a la relación definida.

Las siguientes proposiciones se ocuparán de extender la definición anterior a todas las f.b.f. (Proposición 9.1) y a cualquier conjunto de fórmulas bien formadas (Proposición 9.2).

Proposición 9.1: Extensión de la interpretación correspondiente a todas las f.b.f. Dada una interpretación-Mti ($1 \leq i \leq 8$) y la interpretación-Lti I' correspondiente a I, tenemos que probar para cualquier f.b.f. A:

1. $T \in I'(A)$ & $F \notin I'(A)$ syss $I(A) = 3$;
2. $T \in I'(A)$ & $F \in I'(A)$ syss $I(A) = 2$;
3. $T \notin I'(A)$ & $F \notin I'(A)$ syss $I(A) = 1$;
4. $T \notin I'(A)$ & $F \in I'(A)$ syss $I(A) = 0$.

Prueba. Obviamente, I' interpreta fórmulas complejas de acuerdo con las cláusulas (2a), (2b), (3a), (3b), (4a), (5a) y (5b) (cf. Definición 9.1). Procederé por inducción; utilizaré H.I. justamente para referir a la hipótesis de inducción. Hay que contemplar dos casos:

- A es una variable proposicional. Dada la Definición 9.3, esto es trivial.
- A es una f.b.f compleja. Debemos diferenciar cuatro casos: (i) A es una fórmula negada: $\neg B$; (ii) A es de la forma $B \wedge C$; (iii) A es de la forma $B \vee C$; (iv) A es de la forma $B \rightarrow C$. Los casos (i), (ii) y (iii) son iguales para toda lógica-Lti, pues todas ellas son expansiones de la matriz MB4 (cf. Definición 2.1.1). En las pruebas de estos tres casos, cuando quiera referir a la Definición 2.1.1 para justificar algún paso de la prueba, escribiré sencillamente MB4, esto es, me referiré directamente a la matriz expuesta en esa definición. Por otro lado, el caso (iv) será diferente en cada lógica-Lti, dado que las condiciones de verdad del condicional son diferentes en cada modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Caso (i): A es $\neg B$.

1. $T \in I'(\neg B)$ & $F \notin I'(\neg B)$ syss $I(\neg B) = 3$

(a) $T \in I'(\neg B) \,\&\, F \notin I'(\neg B) \Rightarrow I(\neg B) = 3$

1. $T \in I'(\neg B) \,\&\, F \notin I'(\neg B)$	Hip.
2. $F \in I'(B)$ & $T \notin I'(B)$	Def. 9.1; 1
3. $I(B) = 0$	H.I.; 2
4. $I(\neg B) = 3$	MB4; 3

(b) $I(\neg B) = 3 \Rightarrow T \in I'(\neg B) \,\&\, F \notin I'(\neg B)$

1.	$I(\neg B) = 3$	Hip.
2.	$I(B) = 0$	MB4; 1
3.	$F \in I'(B)$ & $T \notin I'(B)$	H.I.; 2
4.	$T \in I'(\neg B)$ & $F \notin I'(\neg B)$	Def. 9.1; 3

2. $T \in I'(\neg B)$ & $F \in I'(\neg B)$ syss $I(\neg B) = 2$

(a) $T \in I'(\neg B) \,\&\, F \in I'(\neg B) \Rightarrow I(\neg B) = 2$

1.	$T \in I'(\neg B)$ & $F \in I'(\neg B)$	Hip.
2.	$F \in I'(B)$ & $T \in I'(B)$	Def. 9.1; 1
3.	$I(B) = 2$	H.I.; 2
4.	$I(\neg B) = 2$	MB4; 3

(b) $I(\neg B) = 2 \Rightarrow T \in I'(\neg B) \,\&\, F \in I'(\neg B)$

1.	$I(\neg B) = 2$	Hip.
2.	$I(B) = 2$	MB4; 1
3.	$F \in I'(B)$ & $T \in I'(B)$	H.I.; 2
4.	$T \in I'(\neg B)$ & $F \in I'(\neg B)$	Def. 9.1; 3

3. $T \notin I'(\neg B)$ & $F \notin I'(\neg B)$ syss $I(\neg B) = 1$

(a) $T \notin I'(\neg B) \,\&\, F \notin I'(\neg B) \Rightarrow I(\neg B) = 1$

1.	$T \notin I'(\neg B)$ & $F \notin I'(\neg B)$	Hip.
2.	$F \notin I'(B)$ & $T \notin I'(B)$	Def. 9.1; 1
3.	$I(B) = 1$	H.I.; 2
4.	$I(\neg B) = 1$	MB4; 3

(b) $I(\neg B) = 1 \Rightarrow T \notin I'(\neg B) \,\&\, F \notin I'(\neg B)$

1.	$I(\neg B) = 1$	Hip.
2.	$I(B) = 1$	MB4; 1
3.	$F \notin I'(B)$ & $T \notin I'(B)$	H.I.; 2
4.	$T \notin I'(\neg B)$ & $F \notin I'(\neg B)$	Def. 9.1; 3

4. $T \notin I'(\neg B)$ & $F \in I'(\neg B)$ syss $I(\neg B) = 0$

(a) $T \notin I'(\neg B) \,\&\, F \in I'(\neg B) \Rightarrow I(\neg B) = 0$

1.	$T \notin I'(\neg B)$ & $F \in I'(\neg B)$	Hip.
2.	$F \notin I'(B)$ & $T \in I'(B)$	Def. 9.1; 1

3. $I(B) = 3$ H.I.; 2
4. $I(\neg B) = 0$ MB4; 3

(b) $I(\neg B) = 0 \Rightarrow T \notin I'(\neg B) \,\&\, F \in I'(\neg B)$

1. $I(\neg B) = 0$ Hip.
2. $I(B) = 3$ MB4; 1
3. $F \notin I'(B)$ & $T \in I'(B)$ H.I.; 2
4. $T \notin I'(\neg B) \,\&\, F \in I'(\neg B)$ Def. 9.1; 3

Caso (ii): A **es** $B \wedge C$**.**

1. $T \in I'(B \wedge C)$ & $F \notin I'(B \wedge C)$ syss $I(B \wedge C) = 3$

(a) $T \in I'(B \wedge C) \,\&\, F \notin I'(B \wedge C) \Rightarrow I(B \wedge C) = 3$

1. $T \in I'(B \wedge C) \,\&\, F \notin I'(B \wedge C)$ Hip.
2. $T \in I'(B)$ & $T \in I'(C)$ & $F \notin I'(B)$ & $F \notin I'(C)$ Def. 9.1; 1
3. $I(B) = I(C) = 3$ H.I.; 2
4. $I(B \wedge C) = 3$ MB4; 3

(b) $I(B \wedge C) = 3 \Rightarrow T \in I'(B \wedge C) \,\&\, F \notin I'(B \wedge C)$

1. $I(B \wedge C) = 3$ Hip.
2. $I(B) = I(C) = 3$ MB4; 1
3. $T \in I'(B)$ & $T \in I'(C)$ & $F \notin I'(B)$ & $F \notin I'(C)$ H.I.; 2
4. $T \in I'(B \wedge C) \,\&\, F \notin I'(B \wedge C)$ Def. 9.1; 3

2. $T \in I'(B \wedge C)$ & $F \in I'(B \wedge C)$ syss $I(B \wedge C) = 2$

(a) $T \in I'(B \wedge C) \,\&\, F \in I'(B \wedge C) \Rightarrow I(B \wedge C) = 2$

1. $T \in I'(B \wedge C) \,\&\, F \in I'(B \wedge C)$ Hip.
2. [$T \in I'(B)$ & $T \in I'(C)$] & [$F \in I'(B)$ ó $F \in I'(C)$] Def. 9.1; 1
3. [$T \in I'(B)$ & $T \in I'(C)$& $F \in I'(B)$] ó
   [$T \in I'(B)$ & $T \in I'(C)$ & $F \in I'(C)$] Dado 2
4. [$I(B) = 2$ & $I(C) = 2$ ó 3] ó
   [$I(C) = 2$ & $I(B) = 2$ ó 3] H.I.; 3
5. $I(B \wedge C) = 3$ MB4; 4

(b) $I(B \wedge C) = 2 \Rightarrow T \in I'(B \wedge C) \,\&\, F \in I'(B \wedge C)$

1. $I(B \wedge C) = 2$ Hip.
2. $[I(B) = I(C) = 2]$ ó $[I(B) = 2 \;\&\; I(C) = 3]$ ó $[I(B) = 3 \;\&\; I(C) = 2]$ MB4; 1
3. $[T \in I'(B) \;\&\; T \in I'(C) \;\&\; F \in I'(B) \;\&\; F \in I'(C)]$ ó $[T \in I'(B) \;\&\; F \in I'(B) \;\&\; T \in I'(C) \;\&\; F \notin I'(C)]$ ó $[T \in I'(B) \;\&\; F \notin I'(B) \;\&\; T \in I'(C) \& \; F \in I'(C)]$ H.I.; 2
4. $T \in I(B \wedge C) \,\&\, F \in I(B \wedge C)$ Def. 9.1; 3

3. $T \notin I'(B \wedge C) \;\&\; F \notin I'(B \wedge C)$ syss $I(B \wedge C) = 1$

(a) $T \notin I'(B \wedge C) \,\&\, F \notin I'(B \wedge C) \Rightarrow I(B \wedge C) = 1$

1. $T \notin I'(B \wedge C) \,\&\, F \notin I'(B \wedge C)$ Hip.
2. $[T \notin I'(B)$ ó $T \notin I'(C)] \;\&\; [F \notin I'(B) \;\&\; F \notin I'(C)]$ Def. 9.1; 1
3. $[T \notin I'(B) \;\&\; F \notin I'(B) \& \; F \notin I'(C)]$ ó $[T \notin I'(C) \;\&\; F \notin I'(B) \;\&\; F \notin I'(C)]$ Dado 2
4. $[I(B) = 1 \;\&\; I(C) = 1$ ó $3]$ ó $[I(C) = 1 \;\&\; I(B) = 1$ ó $3]$ H.I.; 3
5. $I(B \wedge C) = 1$ MB4; 4

(b) $I(B \wedge C) = 1 \Rightarrow T \notin I'(B \wedge C) \,\&\, F \notin I'(B \wedge C)$

1. $I(B \wedge C) = 1$ Hip.
2. $[I(B) = I(C) = 1]$ ó $[I(B) = 1 \;\&\; I(C) = 3]$ ó $[I(B) = 3 \;\&\; I(C) = 1]$ MB4; 1
3. $[T \notin I'(B) \;\&\; T \notin I'(C) \;\&\; F \notin I'(B) \;\&\; F \notin I'(C)]$ ó $[T \notin I'(B) \;\&\; T \in I'(C) \;\&\; F \notin I'(B) \;\&\; F \notin I'(C)]$ ó $[T \in I'(B) \;\&\; T \notin I'(C) \;\&\; F \notin I'(B) \;\&\; F \notin I'(C)]$ H.I.; 2
4. $T \notin I'(B \wedge C) \,\&\, F \notin I'(B \wedge C)$ Def. 9.1; 3

4. $T \notin I'(B \wedge C) \;\&\; F \in I'(B \wedge C)$ syss $I(B \wedge C) = 0$

(a) $T \notin I'(B \wedge C) \,\&\, F \in I'(B \wedge C) \Rightarrow I(B \wedge C) = 0$

1. $T \notin I'(B \wedge C) \,\&\, F \in I'(B \wedge C)$ Hip.
2. $[T \notin I'(B)$ ó $T \notin I'(C)] \;\&\; [F \in I'(B)$ ó $F \in I'(C)]$ Def. 9.1; 1
3. $[T \notin I'(B) \;\&\; F \in I'(B)]$ ó $[T \notin I'(B) \;\&\; F \in I'(C)]$ ó $[T \notin I'(C) \;\&\; F \in I'(B)]$ ó $[T \notin I'(C) \;\&\; F \in I'(C)]$ Dado 2
4. $I(B) = 0$ ó $[I(B) = 0$ ó $1 \;\&\; I(C) = 0$ ó $2]$ ó $[I(C) = 0$ ó $1 \;\&\; I(B) = 0$ ó $2]$ ó $I(C) = 0$ H.I.; 3
5. $I(B \wedge C) = 0$ MB4; 4

(b) $I(B \wedge C) = 0 \Rightarrow T \notin I'(B \wedge C) \,\&\, F \in I'(B \wedge C)$

1. $I(B \wedge C) = 0$ — Hip.
2. $I(B) = 0$ ó $[I(B) = 1$ & $I(C) = 2]$ ó $[I(C) = 1$ & $I(B) = 2]$ ó $I(C) = 0$ — MB4; 1
3. $[T \notin I'(B)$ & $F \in I'(B)]$ ó $[T \notin I'(C)$ & $F \in I'(C)]$ ó $[T \notin I'(B)$ & $F \notin I'(B)$ & $T \in I'(C)$ & $F \in I'(C)]$ ó $[T \in I'(B)$ & $F \in I'(B)$ & $T \notin I'(C)$ & $F \notin I'(C)]$ — H.I.; 2
4. $T \notin I'(B \wedge C)$ & $F \in I'(B \wedge C)$ — Def. 9.1; 3

Caso (iii): A **es** $B \vee C$**.**

1. $T \in I'(B \vee C)$ & $F \notin I'(B \vee C)$ syss $I(B \vee C) = 3$

(a) $T \in I'(B \vee C)$ & $F \notin I'(B \vee C) \Rightarrow I(B \vee C) = 3$

1. $T \in I'(B \vee C)$ & $F \notin I'(B \vee C)$ — Hip.
2. $[T \in I'(B)$ ó $T \in I'(C)]$ & $[F \notin I'(B)$ ó $F \notin I'(C)]$ — Def. 9.1; 1
3. $[T \in I'(B)$ & $F \notin I'(B)]$ ó $[T \in I'(B)$ & $F \notin I'(C)]$ ó $[T \in I'(C)$ & $F \notin I'(B)]$ ó $[T \in I'(C)$ & $F \notin I'(C)]$ — Dado 2
4. $I(B) = 3$ ó $[I(B) = 3$ ó 2 & $I(C) = 3$ ó $1]$ ó $[I(C) = 3$ ó 2 & $I(B) = 3$ ó $1]$ ó $I(C) = 3$ — H.I.; 3
5. $I(B \vee C) = 3$ — MB4; 4

(b) $I(B \vee C) = 3 \Rightarrow T \in I'(B \vee C)$ & $F \notin I'(B \vee C)$

1. $I(B \vee C) = 3$ — Hip.
2. $I(B) = 3$ ó $[I(B) = 1$ & $I(C) = 2]$ ó $[I(C) = 1$ & $I(B) = 2]$ ó $I(C) = 3$ — MB4; 1
3. $[T \in I'(B)$ & $F \notin I'(B)]$ ó $[T \in I'(C)$ & $F \notin I'(C)]$ ó $[T \notin I'(B)$ & $F \notin I'(B)$ & $T \in I'(C)$ & $F \in I'(C)]$ ó $[T \in I'(B)$ & $F \in I'(B)$ & $T \notin I'(C)$ & $F \notin I'(C)]$ — H.I.; 2
4. $T \in I'(B \vee C)$ & $F \notin I'(B \vee C)$ — Def. 9.1; 3

2. $T \in I'(B \vee C)$ & $F \in I'(B \vee C)$ syss $I(B \vee C) = 2$

(a) $T \in I'(B \vee C)$ & $F \in I'(B \vee C) \Rightarrow I(B \vee C) = 2$

1. $T \in I'(B \vee C)$ & $F \in I'(B \vee C)$ — Hip.
2. $[T \in I'(B)$ ó $T \in I'(C)]$ & $[F \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ — Def. 9.1; 1
3. $[T \in I'(B)$ & $F \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ ó $[T \in I'(C)$ & $F \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ — Dado 2
4. $[I(B) = 2$ & $I(C) = 2$ ó $0]$ ó $[I(C) = 2$ & $I(B) = 2$ ó $0]$ — H.I.; 3
5. $I(B \vee C) = 2$ — MB4; 4

(b) $I(B \vee C) = 2 \Rightarrow T \in I'(B \vee C)$ & $F \in I'(B \vee C)$

1. $I(B \vee C) = 2$ Hip.
2. $[\ I(B) = I(C) = 2]$ ó $[I(B) = 2\ \&\ I(C) = 0]$ ó $[I(B) = 0\ \&\ I(C) = 2]$ MB4; 1
3. $[T \in I'(B)\ \&\ T \in I'(C)\ \&\ F \in I'(B)\ \&\ F \in I'(C)]$ ó $[T \in I'(B)\ \&\ F \in I'(B)\ \&\ T \notin I'(C)\ \&\ F \in I'(C)]$ ó $[T \notin I'(B)\ \&\ F \in I'(B)\ \&\ T \in I'(C)\ \&\ F \in I'(C)]$ H.I.; 2
4. $T \in I'(B \vee C)\,\&\,F \in I'(B \vee C)$ Def. 9.1; 3

3. $T \notin I'(B \vee C)\ \&\ F \notin I'(B \vee C)$ syss $I(B \vee C) = 1$

(a) $T \notin I'(B \vee C)\,\&\,F \notin I'(B \vee C) \Rightarrow I(B \vee C) = 1$

1. $T \notin I'(B \vee C)\,\&\,F \notin I'(B \vee C)$ Hip.
2. $[T \notin I'(B)\ \&\ T \notin I'(C)]\ \&\ [F \notin I'(B)$ ó $F \notin I'(C)]$ Def. 9.1; 1
3. $[T \notin I'(B)\ \&\ T \notin I'(C)\ \&\ F \notin I'(B)]$ ó $[T \notin I'(B)\ \&\ T \notin I'(C)\ \&\ F \notin I'(C)]$ Dado 2
4. $[I(B) = 1\ \&\ I(C) = 1$ ó $0]$ ó $[I(C) = 1\ \&\ I(B) = 1$ ó $0]$ H.I.; 3
5. $I(B \vee C) = 1$ MB4; 4

(b) $I(B \vee C) = 1 \Rightarrow T \notin I'(B \vee C)\,\&\,F \notin I'(B \vee C)$

1. $I(B \vee C) = 1$ Hip.
2. $[I(B) = I(C) = 1]$ ó $[I(B) = 0\ \&\ I(C) = 1]$ ó $[I(B) = 1\ \&\ I(C) = 0]$ MB4; 1
3. $[T \notin I'(B)\ \&\ T \notin I'(C)\ \&\ F \notin I'(B)\ \&\ F \notin I'(C)]$ ó $[T \notin I'(B)\ \&\ F \in I'(B)\ \&\ T \notin I'(C)\ \&\ F \notin I'(C)]$ ó $[T \notin I'(B)\ \&\ F \notin I'(B)\ \&\ T \notin I'(C)\ \&\ F \in I'(C)]$ H.I.; 2
4. $T \notin I'(B \vee C)\,\&\,F \notin I'(B \vee C)$ Def. 9.1; 3

4. $T \notin I'(B \vee C)\ \&\ F \in I'(B \vee C)$ syss $I(B \vee C) = 0$

(a) $T \notin I'(B \vee C)\,\&\,F \in I'(B \vee C) \Rightarrow I(B \vee C) = 0$

1. $T \notin I'(B \vee C)\,\&\,F \in I'(B \vee C)$ Hip.
2. $T \notin I'(B)\ \&\ T \notin I'(C)\ \&\ F \in I'(B)\ \&\ F \in I'(C)$ Def. 9.1; 1
3. $I(B) = I(C) = 0$ H.I.; 2
4. $I(B \vee C) = 0$ MB4; 3

(b) $I(B \vee C) = 0 \Rightarrow T \notin I'(B \vee C)\,\&\,F \in I'(B \vee C)$

1. $I(B \vee C) = 0$ Hip.
2. $I(B) = I(C) = 0$ MB4; 1

3. $T \notin I'(B)$ & $T \notin I'(C)$ & $F \in I'(B)$ & $F \in I'(C)$ H.I.; 2
4. $T \notin I'(B \vee C)$ & $F \in I'(B \vee C)$ Def. 9.1; 3

Hasta este punto, la prueba es común a toda lógica-Lti. No obstante, para probar el último caso que debemos considerar, (iv) A es de la forma $B \to C$, tenemos que tener en cuenta que cada extensión del sistema base tiene una condición de falsedad diferente para el condicional. Por lo tanto, es preciso adaptar la prueba a cada uno de los modelos-Lti ($1 \leq i \leq 8$) considerados en la Definición 9.1. Pruebo ahora el caso (iv) para los modelos-Lt1 (i.e, modelos-BN4). La prueba para el resto de modelos-Lti (Lt2-Lt8) se realiza de manera semejante. En este caso, para referir a la Definición 3.1, donde se refleja la matriz MBN4 (i.e, Mt1), escribiré simplemente MBN4.

Caso (iv): A es de la forma $B \to C$.

1. $T \in I'(B \to C)$ & $F \notin I'(B \to C)$ syss $I(B \to C) = 3$

(a) $T \in I'(B \to C)$ & $F \notin I'(B \to C) \Rightarrow I'(B \to C) = 3$

1. $T \in I'(B \to C)$ & $F \notin I'(B \to C)$ Hip.
2. $[T \notin I'(B)$ ó $T \in I'(C)]$ & $[F \in I'(B)$ ó $F \notin I'(C)]$ & $[T \notin I'(B)$ ó $F \notin I'(C)]$ Def. 9.1; 1
3. $[T \notin I'(B)$ & $F \in I'(B)$ & $T \notin I'(B)]$ ó
$[T \notin I'(B)$ & $F \notin I'(C)$ & $T \notin I'(B)]$ ó
$[T \notin I'(B)$ & $F \in I'(B)$ & $F \notin I'(C)]$ ó
$[T \notin I'(B)$ & $F \notin I'(C)$ & $F \notin I'(C)]$ ó
$[T \in I'(C)$ & $F \in I'(B)$ & $T \notin I'(B)]$ ó
$[T \in I'(C)$ & $F \notin I'(C)$ & $T \notin I'(B)]$ ó
$[T \in I'(C)$ & $F \in I'(B)$ & $F \notin I'(C)]$ ó
$[T \in I'(C)$ & $F \notin I'(C)$ & $F \notin I'(C)]$ Dado 2
4. $I(B) = 0$ ó
$[I(B) = 0$ ó 1 & $I(C) = 3$ ó $1]$ ó
$[I(B) = 0$ & $I(C) = 3$ ó $1]$ ó
$[I(B) = 0$ ó 1 & $I(C) = 3$ ó $1]$ ó
$[I(B) = 0$ & $I(C) = 3$ ó $2]$ ó
$[I(B) = 0$ ó 1 & $I(C) = 3]$ ó
$[I(B) = 0$ ó 2 & $I(C) = 3]$ ó
$I(C) = 3$ H.I.; 3
5. $I(B \to C) = 3$ MBN4; 4

(b) $I(B \to C) = 3 \Rightarrow T \in I'(B \to C)$ & $F \notin I'(B \to C)$

1. $I(B \to C) = 3$ Hip.
2. $I(B) = 3$ ó $I(B) = I(C) = 1$ ó $I(C) = 3$ MBN4; 1
3. $[T \notin I'(B)$ & $F \in I'(B)]$ ó $[T \notin I'(B)$ & $F \notin I'(B)$ & $T \notin I'(C)$ & $F \notin I'(C)]$ ó $[T \in I'(C)$ & $F \notin I'(C)]$ H.I.; 2

4. $T \in I'(B \to C) \,\&\, F \notin I'(B \to C)$ Def. 9.1; 3

2. $T \in I'(B \to C)$ & $F \in I'(B \to C)$ syss $I(B \to C) = 2$

(a) $T \in I'(B \to C) \,\&\, F \in I'(B \to C) \Rightarrow I(B \to C) = 2$

1. $T \in I'(B \to C) \,\&\, F \in I'(B \to C)$	Hip.
2. $[T \notin I'(B)$ ó $T \in I'(C)]$ & $[F \in I'(B)$ ó $F \notin I'(C)]$ & $[T \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$	Def. 9.1; 1
3. $[T \notin I'(B)$ & $F \in I'(B)$ & $T \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ ó $[T \notin I'(B)$ & $F \notin I'(C)$ & $T \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ ó $[T \in I'(C)$ & $F \in I'(B)$ & $T \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ ó $[T \in I'(C)$ & $F \notin I'(C)$ & $T \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$	Dado 2

De las opciones en 3, todas incluyen una contradicción excepto una. Por lo tanto, realizamos la hipótesis de inducción solamente sobre la opción que no alberga contradicción (i.e., $T \in I'(C)$ & $F \in I'(B)$ & $T \in I'(B)$ & $F \in I'(C)$):

4. $I(B) = I(C) = 2$	H.I.; 3
5. $I(B \to C) = 2$	MBN4; 4

(b) $I(B \to C) = 2 \Rightarrow T \in I'(B \to C) \,\&\, F \in I'(B \to C)$

1. $I(B \to C) = 2$	Hip.
2. $I(B) = I(C) = 2$	MBN4; 1
3. $T \in I'(B)$ & $F \in I'(B)$ & $T \in I'(C)$ & $F \in I'(C)$	H.I.; 2
4. $T \in I'(B \to C) \,\&\, F \in I'(B \to C)$	Def. 9.1; 3

3. $T \notin I'(B \to C)$ & $F \notin I'(B \to C)$ syss $I(B \to C) = 1$

(a) $T \notin I'(B \to C) \,\&\, F \notin I'(B \to C) \Rightarrow I(B \to C) = 1$

1. $T \notin I'(B \to C) \,\&\, F \notin I'(B \to C)$	Hip.
2. $\{[T \in I'(B)$ & $T \notin I'(C)]$ ó $[F \notin I'(B)$ & $F \in I'(C)]\}$ & $[T \notin I'(B)$ ó $F \notin I'(C)]$	Def. 9.1; 1
3. $[T \in I'(B)$ & $T \notin I'(C)$ & $T \notin I'(B)]$ ó $[T \in I'(B)$ & $T \notin I'(C)$ & $F \notin I'(C)]$ ó $[F \notin I'(B)$ & $F \in I'(C)$ & $T \notin I'(B)]$ ó $[F \notin I'(B)$ & $F \in I'(C)$ & $F \notin I'(C)]$	Dado 2

Como en el caso anterior, realizamos la hipótesis de inducción solamente sobre las opciones que no albergan contradicción:

4. $[I(B) = 3 \text{ ó } 2$ & $I(C) = 1]$ ó $[\ I(B) = 1$ & $I(C) = 0 \text{ ó } 2]$ H.I.; 3
5. $I(B \to C) = 1$ MBN4; 4

(b) $I(B \to C) = 1 \Rightarrow T \notin I'(B \to C)\,\&\, F \notin I'(B \to C)$

1. $I(B \to C) = 1$ Hip.
2. $[I(B) = 1$ & $I(C) = 0 \text{ ó } 2]$ ó $[I(B) = 2 \text{ ó } 3$ & $I(C) = 1]$ MBN4; 1
3. $[T \notin I'(B)$ & $F \notin I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ ó $[T \in I'(B)$ & $F \notin I'(C)$ & $T \notin I'(C)]$ H.I.; 2
4. $T \notin I'(B \to C)\,\&\, F \notin I'(B \to C)$ Def. 9.1; 3

4. $T \notin I'(B \to C)$ & $F \in I'(B \to C)$ syss $I(B \to C) = 0$

(a) $T \notin I'(B \to C)\,\&\, F \in I'(B \to C) \Rightarrow I'(B \to C) = 0$

1. $T \notin I'(B \to C)\,\&\, F \in I'(B \to C)$ Hip.
2. $([T \in I'(B)$ & $T \notin I'(C)]$ ó $[F \notin I'(B)$ & $F \in I'(C)])$ & $[T \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ Def. 9.1; 1
3. $[T \in I'(B)$ & $T \notin I'(C)$ & $T \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ ó $[F \notin I'(B)$ & $F \in I'(C)$ & $T \in I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ Dado 2
4. $[I(B) = 2 \text{ ó } 3$ & $I(C) = 0]$ ó $[I(B) = 3$ & $I(C) = 0 \text{ ó } 2]$ H.I.; 3
5. $I(B \to C) = 0$ MBN4; 4

(b) $I(B \to C) = 0 \Rightarrow T \notin I'(B \to C)\,\&\, F \in I'(B \to C)$

1. $I(B \to C) = 0$ Hip.
2. $[I(B) = 2 \text{ ó } 3$ & $I(C) = 0]$ ó $[I(B) = 3$ & $I(C) = 0 \text{ ó } 2]$ MBN4; 1
3. $[T \in I'(B)$ & $T \notin I'(C)$ & $F \in I'(C)]$ ó $[T \in I'(B)$ & $F \notin I'(B)$ & $F \in I'(C)]$ H.I.; 2
4. $T \notin I'(B \to C)\,\&\, F \in I'(B \to C)$ Def. 9.1; 3

Por otro lado, dada una interpretación-Lti I, defínase una interpretación-Mti correspondiente I' de acuerdo con la Definición 9.3. Entonces, la interpretación-Mti correspondiente I' puede extenderse a fórmulas complejas de manera semejante. ■

Una vez probada la Proposición 9.1, la siguiente proposición es trivial.

Proposición 9.2: Extensión de la interpretación correspondiente a cualquier conjunto de f.b.f. Dada una interpretación-Mti $(1 \leq i \leq 8)$ y la interpretación-Lti I' correspondiente a I, tenemos que probar para cualquier conjunto de f.b.f. Γ:

1. $T \in I'(\Gamma)$ & $F \notin I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 3$;

2. $T \in I'(\Gamma)$ & $F \in I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 2$;

3. $T \notin I'(\Gamma)$ & $F \notin I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 1$;

4. $T \notin I'(\Gamma)$ & $F \in I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 0$.

Prueba. La prueba de la Proposición 9.2 es semejante a la de la Proposición 9.1.

Por otro lado, dada una interpretación-Lti I y definida la interpretación-Mti I' correspondiente, podemos extender la interpretación-Mti correspondiente I' a cualquier conjunto de f.b.f. Γ de modo semejante. ■

Establecido lo anterior, es sencillo probar la coextensividad entre ambas relaciones, esto es, $\Gamma \vDash_{Mti} A$ syss $\Gamma \vDash_{Lti} A$.

Proposición 9.3: Coextensividad de $\models_{Mti}$ y $\models_{Lti}$. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, $\Gamma \vDash_{Mti} A$ syss $\Gamma \vDash_{Lti} A$. En particular, $\vDash_{Mti} A$ syss $\vDash_{Lti} A$.

Prueba. Hay que probar $\Gamma \vDash_{Mti} A$ syss $\Gamma \vDash_{Lti} A$. Para ello, debemos tener en cuenta los dos casos siguientes:

1. $\Gamma = \emptyset$. En este caso, lo que habría que probar es $\vDash_{Mti} A$ syss $\vDash_{Lti} A$, esto es, para cualesquiera interpretación-Mti I e interpretación-Lti I', $I(A) = 2$ ó 3 syss $T \in I(A)$. Pues bien, esto quedó ya demostrado en la Proposición 9.1.

2. $\Gamma \neq \emptyset$. En este caso, lo que hay que probar es $\Gamma \vDash_{Mti} A$ syss $\Gamma \vDash_{Lti} A$. Lo dividiremos, a su vez, en dos subcasos.

(i) De izquierda a derecha. $\Gamma \vDash_{Mti} A \Rightarrow \Gamma \vDash_{Lti} A$.

Supóngase (1) $\Gamma \vDash_{Mti} A$. Supóngase también que I es una interpretación-Lti tal que (2) $T \in I(\Gamma)$. Hemos de probar $T \in I(A)$. Sea I' la interpretación-Mti correspondiente a I, si $T \in I(\Gamma)$, tengo entonces (3) $I'(\Gamma) = 3$ ó 2 (cf. Proposición 9.2). Dados (1) y (3), se sigue (4) $I'(A) = 3$ ó 2 (cf. Definición 1.7). Aplico ahora a (4) la Proposición 9.1 y obtengo (5) $T \in I(A)$, como necesitaba demostrar.

(ii) De derecha a izquierda. $\Gamma \vDash_{Lti} A \Rightarrow \Gamma \vDash_{Mti} A$.

Supóngase (1) $\Gamma \vDash_{Lti} A$. Supóngase también que I es una interpretación-Mti tal que (2) $I(\Gamma) = 3$ ó 2. Debemos probar $I(A) = 3$ ó 2. Sea I' la interpretación-Mti correspondiente a I, si $I(\Gamma) = 3$ ó 2, tengo (3) $T \in I'(\Gamma)$ (cf. Proposición 9.2). De lo que se sigue (4) $T \in I'(A)$, dados (1), (3) y la Definición 9.2. Tengo entonces (5) $I(A) = 3$ ó 2, aplicando en (4) la Proposición 9.1. ■

Por último, probaré ahora la corrección de cada lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$). El siguiente teorema expresa que si una fórmula A es derivable a partir de Γ en alguna lógica-Lti, entonces, para cualquier interpretación-Mti I, si $I(\Gamma) = 2$ ó 3, entonces $I(A) = 2$ ó 3.

Teorema 9.1: Corrección de las lógicas-Lti con respecto de $\vDash_{Mti}$. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, si $\Gamma \vdash_{Lti} A$, entonces $\Gamma \vDash_{Mti} A$.

Prueba. Por inducción. Distinguimos tres casos: (i) $A \in \Gamma$; (ii) A es un axioma de las lógicas-Lti; (iii) A es el resultado de aplicar alguna de las reglas de las lógicas-Lti.

(i) $A \in \Gamma$. Este caso es trivial, pues $\{B_1, ..., B_n\} \vdash_{Lti} A$ donde $\{B_1, ..., B_n\} \in \Gamma$ y $A \in \{B_1, ..., B_n\}$, es decir, A es una de las fórmulas pertenecientes al conjunto Γ.

(ii) A es un axioma de Lti ($\vdash_{Lti} A$). Puede comprobarse fácilmente que todos los teoremas de las lógicas-Lti son válidos en Mti ($\vdash_{Lti} A \Rightarrow \vDash_{Mti} A$)[92].

(iii) A es el resultado de aplicar alguna de las reglas de las lógicas-Lti. Distinguimos varios subcasos, uno para cada una de las reglas del cálculo.

(1) A es por adjunción, entonces A es $B \wedge C$. Supondré, entonces, $\Gamma \vdash_{Lti} B$ y $\Gamma \vdash_{Lti} C$ y probaré $\Gamma \vDash_{Mti} B \wedge C$. Para probar $\Gamma \vDash_{Mti} B \wedge C$, supondré $I(\Gamma) = 2 \text{ ó } 3$, y demostraré $I(B \wedge C) = 2 \text{ ó } 3$. (En los siguientes casos seguiré un procedimiento semejante.)

1. $\Gamma \vdash_{Lti} B$ y $\Gamma \vdash_{Lti} C$	Hip.
2. $I(\Gamma) = 2 \text{ ó } 3$	Hip.
3. $\Gamma \vDash_{Mti} B$ y $\Gamma \vDash_{Mti} C$	H.I.; 1
4. $I(B) = 2 \text{ ó } 3$ y $I(C) = 2 \text{ ó } 3$	Def. 1.7; 2, 3
5. $I(B \wedge C) = 2 \text{ ó } 3$	Mti; 7

He asumido $I(\Gamma) = 3 \text{ ó } 2$ y he derivado $I(B \wedge C) = 3 \text{ ó } 2$. Queda, por tanto, demostrado $\Gamma \vDash_{Mti} B \wedge C$.

(2) A es por MP, entonces A es C.

1. $\Gamma \vdash_{Lti} B \to C$ y $\Gamma \vdash_{Lti} B$	Hip.
2. $I(\Gamma) = 2 \text{ ó } 3$	Hip.
3. $\Gamma \vDash_{Mti} B \to C$ y $\Gamma \vDash_{Mti} B$	H.I.; 1
4. $I(B \to C) = 2 \text{ ó } 3$ y $I(B) = 2 \text{ ó } 3$	Def. 1.7; 2, 3
5. $I(C) = 2 \text{ ó } 3$	Mti[93]; 4

Al asumir $I(\Gamma) = 3 \text{ ó } 2$ y derivar consecuentemente $I(C) = 3 \text{ ó } 2$, queda demostrado $\Gamma \vDash_{Mti} C$.

(3) A es por MPd, entonces A es $C \vee D$.

1. $\Gamma \vdash_{Lti} (B \to C) \vee D$ y $\Gamma \vdash_{Lti} B \vee D$	Hip.
2. $I(\Gamma) = 2 \text{ ó } 3$	Hip.
3. $\Gamma \vDash_{Mti} (B \to C) \vee D$ y $\Gamma \vDash_{Mti} B \vee D$	H.I.; 1
4. $I((B \to C) \vee D) = 2 \text{ ó } 3$ y $I(B \vee D) = 2 \text{ ó } 3$	Def. 1.7; 2, 3
5. $I(C \vee D) = 2 \text{ ó } 3$	Mti; 4

[92] El lector puede comprobarlo fácilmente con ayuda del programa MaTest (Gónzalez, 2012).

[93] Basta revisar las matrices para comprobar que dado el paso 4, tengo 5 en cada Mti ($1 \leq i \leq 8$).

Queda, por tanto, demostrado $\Gamma \vDash_{Mti} C \vee D$.

(4) A es por PREFd, entonces A es $[(E \to B) \to (E \to C)] \vee D$. Supondré, entonces, $I(\Gamma) = 2$ ó 3 y derivaré $I([(E \to B) \to (E \to C)] \vee D) = 2$ ó 3.

1. $\Gamma \vdash_{Lti} (B \to C) \vee D$	Hip.
2. $I(\Gamma) = 2$ ó 3	Hip.
3. $\Gamma \vDash_{Mti} (B \to C) \vee D$	H.I.; 1
4. $I((B \to C) \vee D) = 2$ ó 3	Def. 1.7; 2, 3
5. $I([(E \to B) \to (E \to C)] \vee D) = 2$ ó 3	Mti; 4

He asumido $I(\Gamma) = 3$ ó 2 y he derivado $I([(E \to B) \to (E \to C)] \vee D) = 3$ ó 2. Quedando, así, demostrado $\Gamma \vDash_{Mti} [(E \to B) \to (E \to C)] \vee D$.

(5) A es por SUFd, entonces A es $[(C \to E) \to (B \to E)] \vee D$. Procedo ahora como en los anteriores casos:

1. $\Gamma \vdash_{Lti} (B \to C) \vee D$	Hip.
2. $I(\Gamma) = 2$ ó 3	Hip.
3. $\Gamma \vDash_{Mti} (B \to C) \vee D$	H.I.; 1
4. $I((B \to C) \vee D) = 2$ ó 3	Def. 1.7; 2, 3
5. $I([(C \to E) \to (B \to E)] \vee D) = 2$ ó 3	Mti; 4

Así queda demostrado $\Gamma \vDash_{Mti} [(C \to E) \to (B \to E)] \vee D$.

(6) A es por CONd, entonces A es $(\neg C \to \neg B) \vee D$. Supondré $I(\Gamma) = 2$ ó 3 y derivaré $I((\neg C \to \neg B) \vee D) = 2$ ó 3.

1. $\Gamma \vdash_{Lti} (B \to C) \vee D$	Hip.
2. $I(\Gamma) = 2$ ó 3	Hip.
3. $\Gamma \vDash_{Mti} (B \to C) \vee D$	H.I.; 1
4. $I((B \to C) \vee D) = 2$ ó 3	Def. 1.7; 2, 3
5. $I((\neg C \to \neg B) \vee D) = 2$ ó 3	Mti; 4

Queda, por tanto, demostrado $\Gamma \vDash_{Mti} (\neg C \to \neg B) \vee D$.

(7) A es por CTEd, entonces A es $\neg(B \to C) \vee D$.

1. $\Gamma \vdash_{Lti} (B \wedge \neg C) \vee D$	Hip.
2. $I(\Gamma) = 2$ ó 3	Hip.
3. $\Gamma \vDash_{Mti} (B \wedge \neg C) \vee D$	H.I.; 1
4. $I((B \wedge \neg C) \vee D) = 2$ ó 3	Def. 1.7; 2, 3
5. $I(\neg(B \to C) \vee D) = 2$ ó 3	Mti; 4

He asumido $I(\Gamma) = 3 \text{ ó } 2$ y he derivado $I(\neg(B \to C) \vee D) = 3 \text{ ó } 2$, quedando, así, demostrado $\Gamma \vDash_{Mti} \neg(B \to C) \vee D$.

Queda así probado, por inducción sobre la complejidad de A, que si $\Gamma \vdash_{Lti} A$, entonces $\Gamma \vDash_{Mti} A$. ■

Teorema 9.2: Corrección de las lógicas-Lti con respecto de $\vDash_{Lti}$. Para cualquier conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, si $\Gamma \vdash_{Lti} A$, entonces $\Gamma \vDash_{Lti} A$. Este teorema expresa que si una fórmula A es derivable a partir de Γ en la lógica-Lti $(1 \leq i \leq 8)$, entonces, para toda interpretación-Lti I, $T \in I(A)$ cuandoquiera que $T \in I(\Gamma)$.

Prueba. Inmediata por la Proposición 9.3 y el Teorema 9.1. ■

10 Completud de las lógicas-Lti en la semántica B-D

En esta sección definimos la noción de modelo-Lti canónico y probamos que toda f.b.f. que no sea un teorema de la lógica-Lti se falsa en algún modelo-Lti canónico. El concepto de modelo-Lti canónico se basa en la noción de $\mathcal{T}$-interpretación.

Definición 10.1: $\mathcal{T}$-interpretación. Sea $K4$ el conjunto $\{\{\mathrm{T}\}, \{\mathrm{F}\}, \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}, \emptyset\}$, como en la Definición 9.1, sea L una lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) y sea $\mathcal{T}$ una L-teoría prima y completamente normal. Entonces, defino una función I tal que I asigna a cada miembro de $\mathcal{F}$ un elemento del conjunto $K4$. Para cada $p \in \mathcal{P}$, se establece que: (a) $T \in I(p)$ syss $p \in \mathcal{T}$; (b) $F \in I(p)$ syss $\neg p \in \mathcal{T}$. Además, se asigna un miembro del conjunto $K4$ a cada $A \in \mathcal{F}$ de acuerdo con las condiciones (2)-(5) de la Definición 9.1. Entonces, se dice que I es una $\mathcal{T}$-interpretación. (Como en la Definición 9.2, $T \in I(\Gamma)$ syss $\forall B \in \Gamma(T \in I(B))$; $F \in I(\Gamma)$ syss $\exists B \in \Gamma(F \in I(B))$.)

Definición 10.2: Modelos-Lti canónicos. Sea L una lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$), un modelo-L canónico es una estructura $(K4, I_{\mathcal{T}})$ donde $K4$ se entiende como en la Definición 9.1 (o como en la Definición 10.1) e $I_{\mathcal{T}}$ es una $\mathcal{T}$-interpretación construída sobre una L-teoría prima y completamente normal $\mathcal{T}$ (cf. Definiciones 6.2.1 y 6.2.2).

Definición 10.3: La relación canónica $\vDash_{\mathcal{T}}$. Sea L una lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) y sea $(K4, I_{\mathcal{T}})$ un modelo-L canónico, la relación canónica $\vDash_{\mathcal{T}}$ se define como sigue: para todo conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, $\Gamma \vDash_{\mathcal{T}} A$ syss $T \in I(A)$ si $T \in I(\Gamma)$. En particular, $\vDash_{\mathcal{T}} A$ (A es verdadera en el modelo-L canónico $(K4, I_{\mathcal{T}})$) syss $T \in I_{\mathcal{T}}(A)$.

A continuación se demuestra que, dadas las Definiciones 9.1 y 10.2, si L es una lógica-Lti, cualquier modelo-L canónico es un modelo-L.

Proposición 10.1: Cualquier modelo-L canónico es un modelo-L. Sea L una lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$), sea $\mathcal{T}$ una L-teoría, y sea $M = (K4, I_{\mathcal{T}})$ un modelo-L canónico. Entonces, M es, de hecho, un modelo-Lti.

Prueba. La proposición se sigue inmediatamente de las Definiciones 9.1 y 10.2. Nótese, además, que a toda variable proposicional y, del mismo modo, a toda f.b.f., se le puede asignar $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$ o $\emptyset$, ya que se requiere que $\mathcal{T}$ sea a-consistente pero no se le requiere que sea completa ni consistente en sentido clásico. ■

Lema 10.1: $\mathcal{T}$-interpretación del conjunto de f.b.f. $\mathcal{F}$. Sea L una lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) y $\mathcal{T}$ una L-teoría prima y completamente normal. Más aún, sea

I una $\mathcal{T}$-interpretación definida tomando como base la L-teoría $\mathcal{T}$. Para cada $A \in \mathcal{F}$, tenemos: (1) $T \in I(A)$ syss $A \in \mathcal{T}$; (2) $F \in I(A)$ syss $\neg A \in \mathcal{T}$.

Prueba. La prueba se realiza por inducción sobre la complejidad de A.[94] Los casos que deben demostrarse son: (a) A es una variable proposicional; (b) A es una fórmula negada; (c) A es una conjunción; (d) A es una disyunción; (eI) A es un condicional al que I le asigna el valor T, y (eII) A es un condicional al que I le asigna el valor F. Para el caso (eII), distinguiré ocho subcasos diferentes correspondientes a cada lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$).

(a) A es una variable proposicional. Esto es trivial dadas las cláusulas (a) y (b) de la Definición 10.1: (a) $T \in I(p)$ syss $p \in \mathcal{T}$; (b) $F \in I(p)$ syss $\neg p \in \mathcal{T}$.

(b) A es de la forma $\neg B$:
(I) $T \in I(\neg B)$ syss (cláusula 2a) $F \in I(B)$ syss (H.I) $\neg B \in \mathcal{T}$.
(II) $F \in I(\neg B)$ syss (cláusula 2b) $T \in I(B)$ syss (H.I) $B \in \mathcal{T}$ syss (Lema 6.2.1) $\neg\neg B \in \mathcal{T}$.

(c) A es de la forma $B \wedge C$:
(I) $T \in I(B \wedge C)$ syss (cláusula 3a) $T \in I(B)$ y $T \in I(C)$ syss (H.I) $B \in \mathcal{T}$ y $C \in \mathcal{T}$ syss (Lema 6.2.2) $B \wedge C \in \mathcal{T}$.
(II) $F \in I(B \wedge C)$ syss (cláusula 3b) $F \in I(B)$ ó $F \in I(C)$ syss (H.I) $\neg B \in \mathcal{T}$ ó $\neg C \in \mathcal{T}$ syss (Lema 6.2.2) $\neg(B \wedge C) \in \mathcal{T}$.

(d) A es de la forma $B \vee C$:
(I) $T \in I(B \vee C)$ syss (cláusula 4a) $T \in I(B)$ ó $T \in I(C)$ syss (H.I) $B \in \mathcal{T}$ ó $C \in \mathcal{T}$ syss (Lema 6.2.2) $B \vee C \in \mathcal{T}$.
(II) $F \in I(B \vee C)$ syss (cláusula 4b) $F \in I(B)$ y $F \in I(C)$ syss (H.I) $\neg B \in \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$ syss (Lema 6.2.2) $\neg(B \vee C) \in \mathcal{T}$.

(e) A es de la forma $B \to C$:
(I) $T \in I(B \to C)$ syss (cláusula 5a) ($T \notin I(B)$ ó $T \in I(C)$) y ($F \in I(B)$ ó $F \notin I(C)$) syss (H.I) ($B \notin \mathcal{T}$ ó $C \in \mathcal{T}$) y ($\neg B \in \mathcal{T}$ ó $\neg C \notin \mathcal{T}$) syss (Lema 6.2.3) $B \to C \in \mathcal{T}$.
(II) A es un condicional al que I le asigna F. Debemos distinguir ocho cláusulas acordes a cada lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$):

Lt1 (BN4) $F \in I(B \to C)$ syss (cláusula 5b) $T \in I(B)$ y $F \in I(C)$ syss (H.I) $B \in \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$ syss (Lema 7.1) $\neg(B \to C) \in \mathcal{T}$;

Lt2 $F \in I(B \to C)$ syss (cláusula 5b) ($T \in I(B)$ y $T \notin I(C)$) ó ($F \notin I(B)$ y $F \in I(C)$) ó ($T \in I(B)$ y $F \in I(C)$) syss (H.I) ($B \in \mathcal{T}$ y $C \notin \mathcal{T}$) ó ($\neg B \notin \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$) ó ($B \in \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$) syss (Lema 7.1) $\neg(B \to C) \in \mathcal{T}$;

Lt3 $F \in I(B \to C)$ syss (cláusula 5b) ($T \in I(B)$ y $T \notin I(C)$) ó ($T \in I(B)$ y $F \in I(C)$) syss (H.I) ($B \in \mathcal{T}$ y $C \notin \mathcal{T}$) ó ($B \in \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$) syss (Lema 7.1) $\neg(B \to C) \in \mathcal{T}$;

[94] Las cláusulas citadas en los puntos (b), (c), (d) y (e) de la siguiente demostración refieren a las cláusulas reflejadas en la Definición 9.1.

Lt4 $F \in I(B \to C)$ syss (cláusula 5b) ($F \notin I(B)$ y $F \in I(C)$) ó ($T \in I(B)$ y $F \in I(C)$) syss (H.I) ($\neg B \notin \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$) ó ($B \in \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$) syss (Lema 7.1) $\neg(B \to C) \in \mathcal{T}$;

Lt5 (E4) $F \in I(B \to C)$ syss (cláusula 5b) ($T \in I(B)$ ó $F \notin I(B)$) y ($T \notin I(C)$ ó $F \in I(C)$) syss (H.I) ($B \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \notin \mathcal{T}$) y ($C \notin \mathcal{T}$ ó $\neg C \in \mathcal{T}$) syss (Lema 7.1) $\neg(B \to C) \in \mathcal{T}$;

Lt6 $F \in I(B \to C)$ syss (cláusula 5b) ($F \notin I(B)$ y $T \notin I(C)$) ó ($T \in I(B)$ y $F \in I(C)$) ó ($F \notin I(B)$ y $F \in I(C)$) syss (H.I) ($\neg B \notin \mathcal{T}$ y $C \notin \mathcal{T}$) ó ($B \in \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$) ó ($\neg B \notin \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$) syss (Lema 7.1) $\neg(B \to C) \in \mathcal{T}$;

Lt7 $F \in I(B \to C)$ syss (cláusula 5b) ($T \in I(B)$ y $T \notin I(C)$) ó ($F \notin I(B)$ y $T \notin I(C)$) ó ($T \in I(B)$ y $F \in I(C)$) syss (H.I) ($B \in \mathcal{T}$ y $C \notin \mathcal{T}$) ó ($\neg B \notin \mathcal{T}$ y $C \notin \mathcal{T}$) ó ($B \in \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$) syss (Lema 7.1) $\neg(B \to C) \in \mathcal{T}$;

Lt8 $F \in I(B \to C)$ syss (cláusula 5b) ($F \notin I(B)$ y $T \notin I(C)$) ó ($T \in I(B)$ y $F \in I(C)$) syss (H.I) ($\neg B \notin \mathcal{T}$ y $C \notin \mathcal{T}$) ó ($B \in \mathcal{T}$ y $\neg C \in \mathcal{T}$) syss (Lema 7.1) $\neg(B \to C) \in \mathcal{T}$.

■

Probaremos ahora la completud de las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Observación 10.1: El conjunto de consecuencias de Γ en L es una teoría completamente normal. Sea L una lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$). Para cualquier conjunto de f.b.f. Γ, el conjunto de consecuencias de Γ en L (en símbolos, $Cn\Gamma[L]$) es una teoría completamente normal. Por un lado, $Cn\Gamma[L]$ está cerrado por las reglas de L y contiene todos sus teoremas (cf. Definición 1.9) y, consecuentemente, está cerrado por implicación-L (dado que está cerrado por MP); como, además, está cerrado por adjunción, es claro que $Cn\Gamma[L]$ es una teoría completamente normal.

Teorema 10.1: Completud de las lógicas-Lti. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, (1) si $\Gamma \vDash_{Lti} A$, entonces $\Gamma \vdash_{Lti} A$; (2) si $\Gamma \vDash_{Mti} A$, entonces $\Gamma \vdash_{Lti} A$.

Prueba. (1) Para algún conjunto de f.b.f. Γ y alguna f.b.f. A, supóngase $\Gamma \nvdash_{Lti} A$. Probaremos $\Gamma \nvDash_{Lti} A$. Si $\Gamma \nvdash_{Lti} A$, entonces $A \notin Cn\Gamma[Lti]$ (cf. Definición 1.9, parte 1). Esto es, $Cn\Gamma[Lti] \nvdash^{d}_{Lti} \{A\}$; pues, de no ser así, $B_1 \wedge ... \wedge B_n \vdash_{Lti} A$ para algunas $B_1 \wedge ... \wedge B_n \in Cn\Gamma[Lti]$ y, por lo tanto, A estaría en $Cn\Gamma[Lti]$. Entonces, por el Lema 8.2, hay un conjunto maximal $\mathcal{T}$ tal que $Cn\Gamma[Lti] \subseteq \mathcal{T}$. Por tanto, $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ (ya que $\Gamma \subseteq Cn\Gamma[Lti]$) y $A \notin \mathcal{T}$. Por el Lema 8.3, $\mathcal{T}$ es una teoría prima; más aún, $\mathcal{T}$ es completamente normal dado que $Cn\Gamma[Lti]$ es completamente normal (Observación 10.1)[95], y es a-consistente ya que $A \notin \mathcal{T}$. Por otro lado, $\mathcal{T}$ genera una $\mathcal{T}-$*interpretación* $I_{\mathcal{T}}$ tal que, por

[95] Además, sabemos que todo conjunto maximal es ya de por sí completamente normal (cf. Observación 8.1 y Lema 8.3).

el Lema 10.1, $T \in I_{\mathcal{T}}(\mathit{\Gamma})$ (dado que $T \in I_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$) pero $T \notin I_{\mathcal{T}}(A)$. Entonces, por la Definición 10.3 y la Proposición 10.1, $\mathit{\Gamma} \not\models_{I_{\mathcal{T}}} A$. Finalmente, $\mathit{\Gamma} \not\models_{Lti} A$ por la Definición 9.2. (2) La completud respecto de $\models_{Mti}$ es inmediata dada la prueba de (1) y la Proposición 9.3. ■

Parte 3: Semántica relacional ternaria tipo Routley y Meyer con modelos reducidos

En esta parte, se desarrollará una semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer con modelos reducidos para cada uno de los sistemas considerados. Comenzaré proporcionando este tipo de semántica al sistema base b4 compartido por toda lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$). Como se verá, las pruebas proporcionadas son genéricas y bastará con unos pocos ajustes posteriores para conseguir la corrección y completud de cada lógica-Lti respecto de esta semántica.

11 Semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer para lógicas-Eb4

En esta sección se desarrollarán los fundamentos para dotar a lógicas-Eb4 de una semántica tipo Routley-Meyer con modelos reducidos. Además, se probará la corrección del sistema b4 respecto de esta semántica. Las pruebas de la presente sección son desarrolladas de manera genérica, con el fin de que los resultados obtenidos puedan también utilizarse posteriormente en otras pruebas de corrección para diferentes lógicas-Eb4 (en particular, para toda lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$)). En primer lugar, se definirán las nociones de modelos-Eb4, consecuencia-Eb4 y validez-Eb4. Como se explicó en la Introducción (cf. Subsección 0.2.2(b)), los modelos reducidos se distinguen (de los no reducidos) porque la validez de las fórmulas en la semántica R-M se define con respecto a un solo elemento, el set-up designado T.

Definición 11.1a: Modelos-Eb4. Un modelo-Eb4 es una estructura de tipo $< T, K, R, *, \vDash >$ donde (1) K es un conjunto no-vacío, (2) $T \in K$, (3) R es una relación ternaria definida en K y (4) $*$ es un operador monario definido en K. Los elementos (3) y (4) están sujetos (al menos) a las siguientes definiciones y los siguientes postulados para todo a, b, c, $d \in K$:

d1. $a \leq b =_{df} RTab$

d2. $a = b =_{df} a \leq b \ \& \ b \leq a$

d3. $R^2abcd =_{df} (\exists x \in K) \ (Rabx \ \& \ Rxcd)$

p1. $a \leq a$

p2. $(a \leq b \ \& \ Rbcd) \Rightarrow Racd$

p3. $R^2Tabc \Rightarrow (\exists x \in K) \ (RTbx \ \& \ Raxc)$

p4. $R^2Tabc \Rightarrow (\exists x \in K) \ (Rabx \ \& \ RTxc)$

p5. $a^{**} \leq a$

p6. $a \leq a^{**}$

p7. $RTab \Rightarrow RTb^*a^*$

p8. RT^*TT^*

p9. $Rabc \Rightarrow (b \leq a^*$ ó $b \leq a)$

p10. $Rabc \Rightarrow (a \leq c$ ó $a^* \leq c)$

p11. $RTab \Rightarrow (T^* \leq b$ ó $a \leq T)$

p12. $(RTab\,\&\,R^2Tcde) \Rightarrow (a \leq c^*$ ó $d \leq c^*$ ó $c \leq b$ ó $c \leq e)$

Finalmente, $\vDash$ es una relación de K a las fórmulas del lenguaje proposicional tal que las siguientes condiciones son satisfechas por toda variable proposicional p, f.b.f. A, B y a, $b \in K$:

1. $(a \leq b$ & $a \vDash p) \Rightarrow b \vDash p$
2. $a \vDash A \wedge B$ syss $a \vDash A$ & $a \vDash B$
3. $a \vDash A \vee B$ syss $a \vDash A$ ó $a \vDash B$
4. $a \vDash A \rightarrow B$ syss para todo b, $c \in K$, $(Rabc$ & $b \vDash A) \Rightarrow c \vDash B$
5. $a \vDash \neg A$ syss $a^* \nvDash A$

Una estructura de tipo $< T,\ K,\ R,\ *,\ \vDash>$ como la anterior constituirá la más básica dentro de las consideradas en esta investigación, la propia de los modelos-b4, esto es, modelos definidos para la lógica b4 (cf. Definición 6.1.1). Por otro lado, la introducción de postulados adicionales a los ya enumerados (p1-p12) determinará modelos para extensiones de la lógica b4[96].

Definición 11.1b: Modelos-b4. Un modelo-b4 es un modelo-Eb4 sin postulados adicionales añadidos.

[96]Por ejemplo, podemos determinar así modelos para aquellas extensiones de b4 que son el objeto de investigación en este trabajo, esto es, las lógicas Lt1-Lt8, cuya semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer se desarrolla en la sección 14. En resumen, los modelos para extensiones de la lógica base pueden definirse simplemente añadiendo a la lista anterior de postulados (p1-p12) aquellos postulados semánticos correspondientes a cada nuevo axioma de alguna lógica-Eb4. Mientras que las nociones de *verdad en un modelo*, *validez* y *consecuencia semántica* se definirán de acuerdo con las Definiciones 11.2, 11.3 y 11.4, respectivamente. Se definirá de este modo una semántica reducida para los distintos sistemas considerados en este trabajo, como puede verse en la sección 14.

Observación 11.1: Un postulado adicional para la lógica b4. El siguiente es un postulado instrumental de la lógica base b4.

p12'. $(Rabc \,\&\, Rcde) \Rightarrow (a \leq c \text{ ó } b \leq c \text{ ó } c^* \leq c \text{ ó } d \leq c \text{ ó } b \leq e)$

Este es el postulado correspondiente al axioma instrumental A12' expuesto en la Observación 6.1.2 (parte 1). Como allí se adelantó, el axioma A12' tiene únicamente por función probar que las teorías del modelo canónico no son vacías en la presente semántica (cf. Lema 12.1). En esta observación presentamos entonces su postulado correspondiente. Asimismo, en la posterior Proposición 11.1 nos valdremos de p12' para demostrar que el axioma A12' es válido en esta semántica y, posteriormente, en la Proposición 13.2, quedará demostrado que p12' es válido en el modelo canónico.

Se desarrollan ahora las nociones de *verdad en un modelo*, *validez* y *consecuencia semántica* en una clase de modelos-Eb4.

Definición 11.2: Verdad en una clase de modelos-Eb4. Sea $\mathfrak{M}$ una clase de modelos-Eb4, $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$ y $A \in \mathcal{F}$. Entonces, una fórmula A es verdadera en M syss $T \vDash A$ en ese modelo.

Definición 11.3: Validez en una clase de modelos-Eb4. Sea $\mathfrak{M}$ una clase de modelos-Eb4. Una fórmula A es válida en $\mathfrak{M}$ (en símbolos, $\vDash_{\mathfrak{M}} A$) syss es verdadera en todo modelo perteneciente a esa clase de modelos-Eb4 (i.e., $T \vDash A$ en todo $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$). Por lo tanto, para que una fórmula A no sea válida solo se necesita demostrar que hay algún $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$ donde $T \nvDash A$.

Definición 11.4: Consecuencia semántica en modelos-Eb4. Sea $\mathfrak{M}$ una clase de modelos-Eb4. Entonces, para todo $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$ y para cualquier conjunto de f.b.f. Γ y $A \in \mathcal{F}$: $\Gamma \vDash_{\mathsf{M}} A$ (A se sigue semánticamente a partir de Γ en el modelo M) syss $T \vDash A$ si $T \vDash \Gamma$ ($T \vDash \Gamma$ syss $T \vDash B$ para todo $B \in \Gamma$). Entonces, $\Gamma \vDash_{\mathfrak{M}} A$ (A es consecuencia-$\mathfrak{M}$ de Γ) syss $\Gamma \vDash_{\mathsf{M}} A$ para todo $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$.

Como se mencionó con anterioridad, entenderemos que una clase de modelos junto con una definición de validez determinará una semántica.

Definición 11.5: Semántica Routley-Meyer para lógicas-Eb4. Sea L una lógica-Eb4. $\Sigma = \{\mathfrak{M}, \vDash\}$ es una semántica para L syss L es correcta y completa respecto de Σ. En este sentido, decimos que los modelos-L (i.e., $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$) junto con la definición de validez-L (i.e., $\vDash$) constituyen una semántica R-M para L. Por ejemplo, más adelante se mostrará que la semántica-b4 es una semántica R-M para la lógica b4.

A continuación, se prueba que la lógica base b4 es correcta con respecto a la semántica que acabamos de definir. Con este propósito, se prueban dos lemas que serán de gran utilidad en la corrección del sistema. El primero de ellos, expuesto a continuación, prueba que la verdad es hereditaria con respecto a la relación binaria introducida mediante d1 (cf. Definición 11.1a).

Lema 11.1: Condición hereditaria (C.H.). Sea $\mathfrak{M}$ una clase de modelos-Eb4. Para cualquier $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$, a, $b \in K$ y f.b.f. A: $(a \leq b \,\&\, a \vDash A) \Rightarrow b \vDash A$.

Se prueba que si a es menor o igual que b y A es verdadera en a, entonces también es verdadera en b.

Prueba. Por inducción sobre la complejidad de A[97]. Se distinguen dos casos:

I. A es una variable proposicional.

Si A es una variable proposicional p, hay que probar $(a \leq b \;\&\; a \vDash p) \Rightarrow b \vDash p$. La prueba es inmediata dada la Definición 11.1a[98].

II. A es una fórmula compleja.

A partir de este segundo caso surgen cuatro subcasos: (i) A es $B \vee C$; (ii) A es $B \wedge C$; (iii) A es $B \to C$; (iv) A es $\neg B$. Demuestro que en todos se sigue $b \vDash A$.

(i) A es $B \vee C$

1. $a \leq b$, $a \vDash B \vee C$	Hip.
2. $a \vDash B$ ó $a \vDash C$	Def. 11.1; 1
3. $b \vDash B$ ó $b \vDash C$	H.I.; 2
4. $b \vDash B \vee C$	Def. 11.1; 3

(ii) A es $B \wedge C$

1. $a \leq b$, $a \vDash B \wedge C$	Hip.
2. $a \vDash B$ & $a \vDash C$	Def. 11.1; 1
3. $b \vDash B$ & $b \vDash C$	H.I.; 2
4. $b \vDash B \wedge C$	Def. 11.1; 3

(iii) A es $B \to C$

1. $a \leq b$, $a \vDash B \to C$	Hip.

Hay que probar $b \vDash B \to C$, esto es, para cualesquiera c, $d \in K$, $(Rbcd \;\&\; c \vDash B) \Rightarrow d \vDash C$. Hay que suponer entonces:

[97] Como ya se hizo en pruebas anteriores, utilizaré H.I. para referirme a "hipótesis de inducción".

[98] En esta y en las siguientes pruebas, utilizaré la expresión "Def. 11.1" como justificación en la línea de la prueba para referirme a alguna de las cláusulas (2)-(5) expuestas en la Definición 11.1a.

2. $Rbcd$, $c \vDash B$	Hip.
3. $Racd$	p2; 1, 2
4. $d \vDash C$	Def. 11.1; 1, 2, 3

(iv) A es $\neg B$

1. $a \leq b$ & $a \vDash \neg B$	Hip.
2. $RTab \Rightarrow RTb^*a^*$	p7
3. $a \leq b \Rightarrow b^* \leq a^*$	d1; 2
4. $b^* \leq a^*$	1, 3
5. $a^* \nvDash B$	Def. 11.1; 1
6. $b^* \nvDash B$	H.I.; 4, 5
7. $b \vDash \neg B$	Def. 11.1; 6

■

Mediante el siguiente lema quedará probado que un condicional es válido en una clase de modelos-Eb4 syss, en cualquier modelo de esa clase de modelos, el consecuente es verdadero en un set-up cuandoquiera que el antecedente también sea verdadero en ese mismo set-up.

Lema 11.2: Lema de la implicación (L.I.). Sea $\mathfrak{M}$ una clase de modelos-Eb4. Para cualquier $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$ y cualesquiera f.b.f. A, B, $\vDash_{\mathfrak{M}} A \to B$ syss $a \vDash A \Rightarrow a \vDash B$ para todo $a \in K$ en todo $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$.

Prueba.

- De izquierda a derecha: si $\vDash_{\mathfrak{M}} A \to B$, entonces $a \vDash A \Rightarrow a \vDash B$ para todo $a \in K$ de todo $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$.

Sea $a \in K$ en cualquier $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$,

1. $\vDash_{\mathfrak{M}} A \to B$	Hip.
2. $a \vDash A$	Hip.
3. $a \leq a$	p1
4. $RTaa$	d1; 3
5. $T \vDash A \to B$	Def. 11.3; 1
6. $a \vDash B$	Def. 11.1; 2, 4, 5

- De derecha a izquierda: si para todo $a \in K$ de todo $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$ $a \vDash A \Rightarrow a \vDash B$, entonces $\vDash_{\mathfrak{M}} A \to B$.

En este caso hay que probar $\vDash_{\mathfrak{M}} A \to B$, esto es, para cualesquiera b, $c \in K$ de cualquier $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$, si $RTbc$ & $b \vDash A$, entonces $c \vDash B$. Por tanto, supondré $RTbc$ & $b \vDash A$ y demostraré $c \vDash B$.

1. Para todo $a \in K$ de todo $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$, $a \vDash A \Rightarrow a \vDash B$	Hip.
2. Sean cualesquiera b, $c \in K$, $RTbc$ & $b \vDash A$	Hip.

3. $b \leq c$	d1; 2
4. $b \vDash A \Rightarrow b \vDash B$	1
5. $b \vDash B$	2, 4
6. $c \vDash B$	C.H.; 3, 5

■

Proposición 11.1: $\Gamma \vdash_{b4} A \Rightarrow \Gamma \vDash_{\mathsf{M}} A$**.** Sea $\mathfrak{M}$ una clase de modelos-Eb4. Para cualquier conjunto de f.b.f. Γ, $A \in \mathcal{F}$ y $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$, si $\Gamma \vdash_{b4} A$, entonces $\Gamma \vDash_{\mathsf{M}} A$.

Prueba. La proposición expresa que si A es derivable en b4 a partir del conjunto Γ, entonces A es consecuencia de Γ en cualquier $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$. Distinguimos tres casos: (i) $A \in \Gamma$; (ii) A es un axioma de la lógica base; (ii) A es el resultado de aplicar alguna de las reglas de la lógica base.

(i) $A \in \Gamma$. La prueba es trivial.

(ii) A es un axioma de la lógica base.

En el caso de los axiomas condicionales, utilizaré el lema de la implicación (Lema 11.2) como método de prueba, esto es, probaré que para toda $a \in K$ de todo modelo en la lógica base se da $a \vDash A \Rightarrow a \vDash B$. Por tanto, supondré $a \vDash A$ y derivaré $a \vDash B$, directamente o mediante reducción al absurdo. En el caso de axiomas no condicionales, utilizaré el método de reducción al absurdo: supondré que el axioma en cuestión no es válido en la lógica base y derivaré una contradicción. Por otro lado, utilizaré las siglas C.H. para referir a la condición hereditaria (i.e., Lema 11.1) previamente demostrada.

A1 $A \rightarrow A$

Por reductio, si $A \rightarrow A$ no fuera válido tendríamos $a \vDash A$ y $a \nvDash A$ para algún $a \in K$ de algún modelo. Dado que obtendríamos una contradicción, A1 ha de ser válido.

A2 $(A \wedge B) \rightarrow A$ / $(A \wedge B) \rightarrow B$

1. $a \vDash A \wedge B$	Hip.
2. $a \vDash A$ & $a \vDash B$	Def. 11.1; 1

A3 $[(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \wedge C)]$

1. $a \vDash (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$	Hip.
2. Sean b, $c \in K$, $Rabc$ & $b \vDash A$	Hip.
(hay que demostrar $c \vDash B \wedge C$)	
3. $a \vDash A \rightarrow B$	Def. 11.1; 1
4. $a \vDash A \rightarrow C$	Def. 11.1; 1

5. $c \vDash B$ Def. 11.1; 2, 3
6. $c \vDash C$ Def. 11.1; 2, 4
7. $c \vDash B \wedge C$ Def. 11.1; 5, 6

A4 $A \to (A \vee B)$ / $B \to (A \vee B)$

Pruebo el primer caso. El segundo se prueba de modo semejante.

1. $a \vDash A$ Hip.
2. $a \vDash A \vee B$ Def. 11.1; 1

A5 $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$

1. $a \vDash (A \to C) \wedge (B \to C)$ Hip.
2. Sean b, $c \in K$, $Rabc$ & $b \vDash A \vee B$ Hip.
   (hemos de demostrar $c \vDash C$)
3. $a \vDash A \to C$ Def. 11.1; 1
4. $a \vDash B \to C$ Def. 11.1; 1
5. $b \vDash A$ ó $b \vDash B$ Def. 11.1; 2

Tomamos como hipótesis la primera alternativa,

6. $b \vDash A$ Hip.
7. $c \vDash C$ Def. 11.1; 2, 3, 6

A partir de la primera alternativa, se llega a derivar $c \vDash C$. Suponemos ahora la segunda alternativa para acabar derivando $c \vDash C$ nuevamente,

8. $b \vDash B$ Hip.
9. $c \vDash C$ Def. 11.1; 2, 4, 8

A6 $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

1. $a \vDash A \wedge (B \vee C)$ Hip.
2. $a \vDash A$ Def. 11.1; 1
3. $a \vDash B \vee C$ Def. 11.1; 1
4. $a \vDash B$ ó $a \vDash C$ Def. 11.1; 3

Tomamos la primera alternativa y derivamos $a \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

5. $a \vDash B$ Hip.
6. $a \vDash A \wedge B$ Def. 11.1; 2, 5
7. $a \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ Def. 11.1; 6

Tomamos la segunda alternativa demostrando que se llega al mismo resultado,

8. $a \vDash C$	Hip.
9. $a \vDash A \wedge C$	Def. 11.1; 2, 8
10. $a \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Def. 11.1; 9

A7 $\neg\neg A \rightarrow A$

1. $a \vDash \neg\neg A$	Hip.
2. $a^* \nvDash \neg A$	Def. 11.1; 1
3. $a^{**} \vDash A$	Def. 11.1; 2
4. $a^{**} \leq a$	p5
5. $a \vDash A$	C.H.; 3, 4

A8 $A \rightarrow \neg\neg A$

1. $a \vDash A$	Hip.
2. $a \leq a^{**}$	p6
3. $a^{**} \vDash A$	C.H.; 1, 2
4. $a^* \nvDash \neg A$	Def. 11.1; 3
5. $a \vDash \neg\neg A$	Def. 11.1; 4

A9 $\neg A \rightarrow [A \vee (A \rightarrow B)]$

1. $a \vDash \neg A$	Hip.
2. $a \nvDash A \vee (A \rightarrow B)$	Hip. reductio
3. $a \nvDash A$ & $a \nvDash A \rightarrow B$	Def. 11.1; 2
4. Hay b, $c \in K$, $Rabc$ & $b \vDash A$ & $c \nvDash B$	Def. 11.1; 3
5. $Rabc \Rightarrow (b \leq a^*$ ó $b \leq a)$	p9
6. $b \leq a^*$ ó $b \leq a$	4, 5
7. $b \leq a^*$	Hip.
8. $a^* \vDash A$	C.H.; 4, 7
9. $a^* \nvDash A$	Def. 11.1; 1
10. $b \leq a$	Hip.
11. $a \vDash A$	C.H.; 4, 10

Pero 3 se contradice con 11 y 8 con 9. Por lo tanto, queda demostrada la validez de A9.

A10 $B \rightarrow [\neg B \vee (A \rightarrow B)]$

1. $a \vDash B$	Hip.
2. $a \nvDash \neg B \vee (A \to B)$	Hip. red.
3. $a \nvDash \neg B \,\&\, a \nvDash A \to B$	Def. 11.1; 2
4. Hay b, $c \in K$, $Rabc$ & $b \vDash A$ & $c \nvDash B$	Def. 11.1; 3
5. $a^* \vDash B$	Def. 11.1; 3
6. $Rabc \Rightarrow (a \leq c \,\text{ó}\, a^* \leq c)$	p10
7. $a \leq c \,\text{ó}\, a^* \leq c$	4, 6
8. $a \leq c$	Hip.
9. $c \vDash B$	C.H.; 1, 8

Pero 4 se contradice con 9. Por tanto,

10. $a^* \leq c$	Hip.
11. $c \vDash B$	C.H.; 5, 10

Pero 4 y 11 se contradicen. Queda, así, demostrada la validez de A10.

A11 $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$

1. $T \nvDash (A \vee \neg B) \vee (A \to B)$	Hip. red.
2. $T \nvDash A \vee \neg B$ & $T \nvDash A \to B$	Def. 11.1; 1
3. Hay a, $b \in K$, $RTab$ & $a \vDash A$ & $b \nvDash B$	Def. 11.1; 2
4. $T \nvDash A$ & $T \nvDash \neg B$	Def. 11.1; 2
5. $RTab \Rightarrow (T^* \leq b \,\text{ó}\, a \leq T)$	p11
6. $T^* \leq b \,\text{ó}\, a \leq T$	3, 5
7. $T^* \leq b$	Hip.
8. $T^* \vDash B$	Def. 11.1; 4
9. $b \vDash B$	C.H.; 7, 8

Pero 3 y 9 se contradicen. Por tanto,

9. $a \leq T$	Hip.
10. $T \vDash A$	C.H.; 3, 9

Pero 4 y 10 se contradicen. Queda, así, demostrada la validez de A11.

A12 $(A \to B) \vee [(\neg A \wedge B) \to (A \to B)]$

1. $T \nvDash (A \to B) \vee [(\neg A \wedge B) \to (A \to B)]$	Hip. red.
2. $T \nvDash A \to B$ & $T \nvDash (\neg A \wedge B) \to (A \to B)$	Def. 11.1; 1
3. Para a, $b \in K$, $RTab$ & $a \vDash A$ & $b \nvDash B$	Def. 11.1; 2
4. Para c, $x \in K$, $RTcx$ & $c \vDash \neg A \wedge B$ & $x \nvDash A \to B$	Def. 11.1; 2
5. Para d, $e \in K$, $Rxde$ & $d \vDash A$ & $e \nvDash B$	Def. 11.1; 4
6. $c \vDash \neg A$ & $c \vDash B$	Def. 11.1; 4
7. $c^* \nvDash A$	Def. 11.1; 6

8. $(RTab \,\&\, R^2Tcde) \Rightarrow (a \leq c^* \text{ ó } d \leq c^* \text{ ó } c \leq b \text{ ó } c \leq e)$	p12
9. $a \leq c^* \text{ ó } d \leq c^* \text{ ó } c \leq b \text{ ó } c \leq e$	d3; 3, 4, 5, 8
10. $a \leq c^*$	Hip.
11. $c^* \vDash A$	C.H.; 3, 10

Pero 7 y 11 se contradicen. Por tanto,

12. $d \leq c^*$	Hip.
13. $c^* \vDash A$	C.H.; 5, 12

Pero 7 y 13 se contradicen. Por tanto,

14. $c \leq b$	Hip.
15. $b \vDash B$	C.H.; 6, 14

Pero 3 y 15 se contradicen. Por tanto,

16. $c \leq e$	Hip.
17. $e \vDash B$	C.H.; 6, 16

Pero 5 y 17 se contradicen. Queda, por tanto, demostrada la validez de A12.

A12' $A \rightarrow .B \rightarrow \{[(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)] \vee (A \rightarrow B)\}$

1. $a \vDash A$	Hip.
2. $a \nvDash B \rightarrow \{[(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)] \vee (A \rightarrow B)\}$	Hip. red.
3. Hay b, $c \in K$, $Rabc$ & $b \vDash B$ & $c \nvDash [(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)] \vee (A \rightarrow B)$	Def. 11.1; 2
4. $c \nvDash (A \vee B) \vee \neg(A \vee B)$ & $c \nvDash (A \rightarrow B)$	Def. 11.1; 3
5. Hay d, $e \in K$, $Rcde$ & $d \vDash A$ & $e \nvDash B$	Def. 11.1; 4
6. $c \nvDash A \vee B$ & $c \nvDash \neg(A \vee B)$	Def. 11.1; 4
7. $c^* \vDash A \vee B$	Def. 11.1; 6
8. $c \nvDash A$ & $c \nvDash B$	Def. 11.1; 6
9. $(Rabc \,\&\, Rcde) \Rightarrow (a \leq c \text{ ó } b \leq c \text{ ó } c^* \leq c \text{ ó } d \leq c \text{ ó } b \leq e)$	p12'
10. $a \leq c \text{ ó } b \leq c \text{ ó } c^* \leq c \text{ ó } d \leq c \text{ ó } b \leq e$	3, 5, 9
11. $a \leq c$	Hip.
12. $c \vDash A$	C.H.; 1, 11

Pero 8 y 12 se contradicen. De la misma manera, tanto la siguiente línea 14 como la 18 se contradicen con 8; la línea 6 se contradice con 16, y la línea 20, con 5, como se muestra a continuación. Quedando, así, demostrada la validez de A12'.

13. $b \leq c$	Hip.
14. $c \vDash B$	C.H.; 3, 13
15. $c^* \leq c$	Hip.

16. $c \models A \vee B$	C.H.; 7, 14
17. $d \leq c$	Hip.
18. $c \models A$	C.H.; 5, 17
19. $b \leq e$	Hip.
20. $e \models B$	C.H.; 3, 19

(iii) A es el resultado de aplicar alguna de las reglas de la lógica base.

(1) A es el resultado de aplicar ADJ: si $\Gamma \vdash_{b4} B$ & $\Gamma \vdash_{b4} C$, entonces $\Gamma \vdash_{b4} B \wedge C$. A es entonces $B \wedge C$.

Supondré $\Gamma \models B$ & $\Gamma \models C$; más aún, $T \models \Gamma$. Y derivaré $T \models B \wedge C$.

1. $\Gamma \models B$	Hip.
2. $\Gamma \models C$	Hip.
3. $T \models \Gamma$	Hip.
4. $T \models B$	Def. 11.4; 1, 3
5. $T \models C$	Def. 11.4; 2, 3
6. $T \models B \wedge C$	Def. 11.1; 4, 5

Procederé ahora con el resto de reglas de igual modo.

(2) A es el resultado de aplicar MP: si $\vdash_{b4} B$ & $\vdash_{b4} B \to A$, entonces $\vdash_{b4} A$.

1. $\Gamma \models B$	Hip.
2. $\Gamma \models B \to A$	Hip.
3. $T \models \Gamma$	Hip.
4. $T \models B$	Def. 11.4; 1, 3
5. $T \models A \to B$	Def. 11.4; 2, 3
6. $RTTT$	p1, d1
7. $T \models A$	Def. 11.1; 4, 5, 6

(3) A es el resultado de aplicar MPd: si $\vdash_{b4} D \vee B$ & $\vdash_{b4} D \vee (B \to C)$, entonces $\vdash_{b4} D \vee C$. A es entonces $D \vee C$.

1. $\Gamma \models D \vee B$	Hip.
2. $\Gamma \models D \vee (B \to C)$	Hip.
3. $T \models \Gamma$	Hip.
4. $T \models D \vee B$	Def. 11.4; 1, 3
5. $T \models D \vee (B \to C)$	Def. 11.4; 2, 3
6. $RTTT$	p1, d1
7. $T \models D$ ó $T \models B$	Def. 11.1; 4
8. $T \models D$	Hip.
9. $T \models D \vee C$	Def. 11.1; 8
10. $T \models B$	Hip.

11. $T \vDash D$ ó $T \vDash D \vee (B \to C)$ Def. 11.1; 5
12. $T \vDash D$ Hip.
13. $T \vDash D \vee C$ Def. 11.1; 12
14. $T \vDash B \to C$ Hip.
15. $T \vDash C$ Def. 11.1; 6, 10, 14
16. $T \vDash D \vee C$ Def. 11.1; 16

En los casos que siguen, procederé por reductio.

(4) A es el resultado de aplicar CONd: si $\vdash_{b4} D \vee (B \to C)$, entonces $\vdash_{b4} D \vee (\neg C \to \neg B)$. A es entonces $D \vee (\neg C \to \neg B)$.

Por reductio, supondré $T \nvDash D \vee (\neg C \to \neg B)$ y derivaré una contradicción.

1. $\Gamma \vDash D \vee (B \to C)$ Hip.
2. $T \vDash \Gamma$ Hip.
3. $T \nvDash D \vee (\neg C \to \neg B)$ Hip. red.
4. $T \vDash D \vee (B \to C)$ Def. 11.4; 1, 2
5. $T \nvDash D$ & $T \nvDash \neg C \to \neg B$ Def. 11.1; 3
6. $T \vDash D$ ó $T \vDash B \to C$ Def. 11.1; 4
7. $T \vDash B \to C$ 5, 6
8. Hay a, $b \in K$ tales que $RTab$ & $a \vDash \neg C$ & $b \nvDash \neg B$ Def. 11.1; 5
9. $RTab \Rightarrow RTb^*a^*$ p7
10. RTb^*a^* 8, 9
11. $b^* \vDash B$ Def. 11.1; 8
12. $a^* \vDash C$ Def. 11.1; 7, 10, 11
13. $a^* \nvDash C$ Def. 11.1; 8

Pero 12 y 13 se contradicen.

(5) A es el resultado de aplicar SUFd: si $\vdash_{b4} E \vee (B \to C)$, entonces $\vdash_{b4} E \vee [(C \to D) \to (B \to D)]$. A es entonces $E \vee [(C \to D) \to (B \to D)]$.

1. $\Gamma \vDash E \vee (B \to C)$ Hip.
2. $T \vDash \Gamma$ Hip.
3. $T \nvDash E \vee [(C \to D) \to (B \to D)]$ Hip. red.
4. $T \vDash E \vee (B \to C)$ Def. 11.4; 1, 2
5. $T \nvDash E$ & $T \nvDash (C \to D) \to (B \to D)$ Def. 11.1; 3
6. $T \vDash E$ ó $T \vDash B \to C$ Def. 11.1; 4
7. $T \vDash B \to C$ 5, 6
8. Hay a, $x \in K$ tales que $RTax$ & $a \vDash C \to D$ & $x \nvDash B \to D$ Def. 11.1; 5
9. Hay b, c tales que $Rxbc$ & $b \vDash B$ & $c \nvDash D$ Def. 11.1; 8
10. $R^2Tabc \Rightarrow (\exists x \in K)\ (RTbx$ & $Raxc)$ p3
11. $RTbx$ & $Raxc$ d3; 8, 9, 10
12. $x \vDash C$ Def. 11.1; 7, 9, 11
13. $c \vDash D$ Def. 11.1; 8, 11, 12

Pero 9 y 13 se contradicen.

(6) A es el resultado de aplicar PREFd: si $\vdash_{b4}$ $E \vee (B \rightarrow C)$, entonces $\vdash_{b4}$ $E \vee [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]$. A es entonces $E \vee [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]$.

1. $\Gamma \vDash E \vee (B \rightarrow C)$	Hip.
2. $T \vDash \Gamma$	Hip.
3. $T \nvDash E \vee [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]$	Hip. red.
4. $T \vDash E \vee (B \rightarrow C)$	Def. 11.4; 1, 2
5. $T \nvDash E$ & $T \nvDash (D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)$	Def. 11.1; 3
6. $T \vDash E$ ó $T \vDash B \rightarrow C$	Def. 11.1; 4
7. $T \vDash B \rightarrow C$	5, 6
8. Hay a, $x \in K$ tales que $RTax$ & $a \vDash D \rightarrow B$ & $x \nvDash D \rightarrow C$	Def. 11.1; 5
9. Hay b, c tales que $Rxbc$ & $b \vDash D$ & $c \nvDash C$	Def. 11.1; 8
10. $R^2Tabc \Rightarrow (\exists x \in K)$ $(Rabx$ & $RTxc)$	p4
11. $Rabx$ & $RTxc$	d3; 8, 9, 10
12. $x \vDash B$	Def. 11.1; 8, 9, 11
13. $c \vDash C$	Def. 11.1; 7, 11, 12

Pero 9 y 13 se contradicen.

(7) A es el resultado de aplicar CTEd: si $\vdash_{b4}$ $D \vee (B \wedge \neg C)$, entonces $\vdash_{b4}$ $D \vee \neg(B \rightarrow C)$. A es entonces $D \vee \neg(B \rightarrow C)$.

1. $\Gamma \vDash D \vee (B \wedge \neg C)$	Hip.
2. $T \vDash \Gamma$	Hip.
3. $T \nvDash D \vee \neg(B \rightarrow C)$	Hip. red.
4. $T \vDash D \vee (B \wedge \neg C)$	Def. 11.4; 1, 2
5. $T \nvDash D$ & $T \nvDash \neg(B \rightarrow C)$	Def. 11.1; 3
6. $T \vDash D$ ó $T \vDash B \wedge \neg C$	Def. 11.1; 4
7. $T \vDash B \wedge \neg C$	5, 6
8. $T \vDash B$ & $T \vDash \neg C$	Def. 11.1; 7
9. $T^* \vDash B \rightarrow C$	Def. 11.1; 5
10. RT^*TT^*	p8
11. $T^* \vDash C$	Def. 11.1; 8, 9, 10
12. $T^* \nvDash C$	Def. 11.1; 8

Pero 11 y 12 se contradicen.
■

Teorema 11.1: Corrección de b4. Para cualquier conjunto de f.b.f. Γ y $A \in \mathcal{F}$: si $\Gamma \vdash_{b4} A$, entonces $\Gamma \vDash_{b4} A$.

Prueba. La prueba es trivial dada la Proposición 11.1. ■

12 Preliminares al teorema de completud

En esta sección se probarán una serie de lemas que serán de gran utilidad tanto en la prueba del teorema de completud de b4 como en la de sus extensiones (tanto las aquí consideradas, las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$), como otras que pudieran definirse). Las pruebas de completud se basarán en la construcción de un modelo canónico (cf. Definición 12.5). Seguiré la metodología de Routley *et. al* (1982, Capítulo 4). Comenzaré la sección definiendo el concepto de teoría-$\mathcal{T}$, que será fundamental a lo largo de toda la sección.

Definición 12.1: Teorías-$\mathcal{T}$. Sea L una lógica-Eb4 y $\mathcal{T}$ una teoría-L completamente normal y prima (cf. Definiciones 6.2.1 y 6.2.2)[99]. Una teoría-$\mathcal{T}$ es un conjunto de fórmulas cerrado por adjunción (&) y $\mathcal{T}$-implicación ($\mathcal{T}_{\rightarrow}$). Esto es, a es una teoría-$\mathcal{T}$ cuando quiera que se dé:

(i) si A, $B \in a$, entonces $A \wedge B \in a$;

(ii) si $A \rightarrow B \in \mathcal{T}$ y $A \in a$, entonces $B \in a$.

Nótese que cualquier teoría-$\mathcal{T}$ es una teoría-L: dado que $\mathcal{T}$ es normal, si $\vdash_L A \rightarrow B$, entonces $A \rightarrow B \in \mathcal{T}$. Por lo tanto, si $\vdash_L A \rightarrow B$ y $A \in a$, entonces $B \in a$, dado que a está cerrada por $\mathcal{T}$-implicación. En conclusión, si a está cerrada por $\mathcal{T}$-implicación, está cerrada por implicación demostrable en L (cf. Definición 6.2.1).

Ahora definiré algunas relaciones sobre los conjuntos de teorías-$\mathcal{T}$.

Definición 12.2: Los conjuntos K^T, K^C. Sea L una lógica-Eb4 y $\mathcal{T}$ una teoría-L completamente normal y prima. K^T es el conjunto de todas las teorías-$\mathcal{T}$ y K^C es el conjunto de todas las teorías-$\mathcal{T}$ primas, no-vacías y a-consistentes (cf. Definición 6.2.2).

Definición 12.3: Las relaciones R^T, R^Cy $\vDash^C$. Sea L una lógica-Eb4 y $\mathcal{T}$ una teoría-L completamente normal y prima. Sean K^T y K^C definidos como en la Definición 12.2. R^T se define en K^T como sigue: para todo a, b, $c \in K^T$, $R^T abc$ syss para cualesquiera f.b.f. A y B, $(A \rightarrow B \in a \,\&\, A \in b) \Rightarrow B \in c$. Asimismo, R^C es una restricción de R^Ta K^C. Por otro lado, $\vDash^C$ se define como sigue: para cualquier $a \in K^C$ y f.b.f. A, $a \vDash^C A$ syss $A \in a$.

Finalmente, se define un operador monario en K^C.

Definición 12.4: La operación $*^C$. El operador monario $*^C$ se define en K^C como sigue: para cada $a \in K^C$, $a^* = \{A \mid \neg A \notin a\}$.

Sea L una lógica-Eb4, utilizaremos el *Lema de Extensión* (cf. Lema 8.3) para construir una teoría-L completamente normal y prima $\mathcal{T}$ (cf. Proposición

[99] Ocasionalmente, utilizaré el término teoría-Eb4 para referirme a una teoría-L (siendo L una lógica-Eb4).

13.1) y definiremos sobre $\mathcal{T}$ las nociones de K^C, R^C, $*^C$ y $\vDash^C$ tal y como se han expresado en las definiciones anteriores. De este modo, tendremos la siguiente definición de modelo-L canónico.

Definición 12.5 : Modelo-Eb4 canónico. Sea L una lógica-Eb4, un modelo-L canónico es la estructura $< \mathcal{T}, K^C, R^C, *^C, \vDash^C >$, cuyos componentes se entienden de acuerdo con las Definiciones 12.1-12.4.

Siendo L una lógica-Eb4, el modelo-L canónico nos permitirá falsar aquellas fórmulas que no sean teoremas de L, lo que constituye un punto clave en la prueba del teorema de completud.

En lo que resta de la sección, se probarán una serie de lemas que se utilizarán también en la prueba de completud. Suponemos que, siendo L una lógica-Eb4, hay una teoría-L $\mathcal{T}$ completamente normal sobre la cual se definen K^T, K^C, R^C, $*^C$ y $\vDash^C$ como en las Definiciones 12.2-12.4. Dicha teoría-L $\mathcal{T}$ se construirá posteriormente, en la Proposición 13.1. Empezaremos probando algunas propiedades de R^Ty R^C. En dichas pruebas, utilizaremos las propiedades de las teorías-L así como los teoremas y axiomas de la lógica base b4[100].

Lema 12.1: Definición de x para a y b en R^T. Sean a y b teorías-$\mathcal{T}$ no-vacías. El conjunto $x = \{B \mid \exists A[A \to B \in a,\ A \in b]\}$ es una teoría-$\mathcal{T}$ no-vacía tal que $R^T abx$.

Prueba.

Será necesario probar que (1) x es una teoría-$\mathcal{T}$, es decir, está cerrada por adjunción (&) y $\mathcal{T}$-implicación ($\mathcal{T}_\to$), (2) se da la relación $Rabx$, y (3) x es no-vacía.

(1) x es teoría-$\mathcal{T}$.

- x está cerrada por $\mathcal{T}_\to$.

Para cualesquiera f.b.f. A, B,

1. $A \to B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \in x$	Hip.
3. Hay C tal que $C \to A \in a$, $C \in b$	Def. x; 2
4. $(C \to A) \to (C \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada PREF; 1
5. $C \to B \in a$	a cerrada $\mathcal{T}_\to$; 3, 4
6. $B \in x$	Def. x; 3, 5

- x está cerrada por &.

Para cualesquiera f.b.f. A, B,

[100] Omitiré el subíndice b4 bajo $\vdash$, pues no hay posibilidad de confusión. Los teoremas y axiomas a los que referiré son los presentados respectivamente en la Proposición y Definición 6.1.1. Claramente, como son teoremas de b4, lo serán también de cualquier lógica-Eb4.

1. $A \in x$	Hip.
2. $B \in x$	Hip.
3. Hay C tal que $C \to A \in a$, $C \in b$	Def. x; 1
4. Hay C' tal que $C\acute{} \to B \in a$, $C\acute{} \in b$	Def. x; 2
5. $(C \to A) \wedge (C\acute{} \to B) \in a$	a cerrada &; 3, 4
6. $\vdash [(C \to A) \wedge (C\acute{} \to B)] \to [(C \wedge C\acute{}) \to (A \wedge B)]$	T7
7. $(C \wedge C\acute{}) \to (A \wedge B) \in a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\to}$; 5, 6
8. $A \wedge B \in x$	Def. x; 3, 4, 7 (b cerrada &)

- x es teoría-$\mathcal{T}$. La prueba es inmediata aplicando la definición de teoría-$\mathcal{T}$.

(2) Se da la relación $R^T abx$.

1. a, $b \in K^T$	Hip.
2. $x \in K^T$	Hip. (dado (1))
3. $R^T abx$ syss $(A \to B \in a$ & $A \in b) \Rightarrow B \in x$	Def. 12.3
4. $(A \to B \in a$ & $A \in b) \Rightarrow B \in x$	Def. x
5. $R^T abx$	3, 4

(3) x es no-vacía.

1. Hay algunas f.b.f. A y B tales que $A \in a$, $B \in b$	Hip. (dado que a y b son no-vacías)
2. $\vdash A \to .B \to \{[(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)] \vee (A \to B)\}$	A12'
3. $B \to \{[(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)] \vee (A \to B)\} \in a$	a cerrada $\to$; 1, 2
4. $[(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)] \vee (A \to B) \in x$	Def. 12.3; 1, 3 (dado (2), $R^T abx$)

■

Lema 12.2: Extensión de b en $R^T abc$ a un miembro en K^C. Sean a, b y c teorías-$\mathcal{T}$ tales que $R^T abc$. Más aún, sea a una teoría prima, no-vacía y a-consistente, sea c a-consistente y prima, y sea b no-vacía. Entonces, hay una teoría-$\mathcal{T}$ prima, no-vacía y a-consistente x tal que $b \subseteq x$ y $R^T axc$.

Prueba. Debo probar: (a) existe un x tal que $b \subseteq x$ y $R^T axc$, donde $x \in K^T$; (b) x es una teoría-$\mathcal{T}$ prima; (c) x es no-vacía; (d) x es a-consistente.

(a) Defino el conjunto: $y = \{Y \mid y \in K^T$ & $b \subseteq y$ & $R^T ayc\}$.

Por el lema de Zorn (1935), este conjunto tiene un elemento maximal x tal que $x \in K^T$, $b \subseteq x$, $R^T axc$.

(b) Pruebo que x es prima. Esta prueba se compone de los subsiguientes pasos (I)-(V). Procedo por reductio:

I.	$A \vee B \in x$, $A \notin x$, $B \notin x$	Hip. reductio
II.	Defino los siguientes conjuntos de fórmulas: $[x, A] = \{C \mid \exists D\ [D \in x\ \&\ (A \wedge D) \rightarrow C \in \mathcal{T}]\}$ $[x, B] = \{C \mid \exists D\ [D \in x\ \&\ (B \wedge D) \rightarrow C \in \mathcal{T}]\}$	

Mostraré que son teorías-$\mathcal{T}$ que incluyen estrictamente a x.

III. Demuestro que $[x, B]$ y $[x, C]$ son teorías-$\mathcal{T}$.

Pruebo que $[x, B]$ es una teoría-$\mathcal{T}$. La prueba de que $[x, C]$ también lo es se realiza de manera semejante.

- $[x, B]$ está cerrada por $\mathcal{T}_{\rightarrow}$.

1. Sean D, E f.b.f. tales que $D \rightarrow E \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $D \in [x, B]$	Hip.
3. $\vdash (B \wedge G) \rightarrow D$, $G \in x$	Def. $[x, B]$; 2
4. $(B \wedge G) \rightarrow D \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es normal; 3
5. $(B \wedge G) \rightarrow E \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 1, 4
6. $E \in [x, B]$	Def. $[x, B]$; 3, 4

- $[x, B]$ está cerrada por &.

1. $D \in [x, B]$	Hip.
2. $E \in [x, B]$	Hip.
3. $(B \wedge G) \rightarrow D \in \mathcal{T}$, $G \in x$	Def. $[x, B]$; 1
4. $(B \wedge G') \rightarrow E \in \mathcal{T}$, $G' \in x$	Def. $[x, B]$; 2
5. $\vdash [B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow B$	A2
6. $\vdash [B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow (G \wedge G')$	A2
7. $\vdash (G \wedge G') \rightarrow G$	A2
8. $\vdash [B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow G$	TRANS; 6, 7
9. $\vdash [B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow (B \wedge G)$	I$\wedge$; 5, 8
10. $\vdash (G \wedge G') \rightarrow G'$	A2
11. $\vdash [B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow G'$	TRANS; 6, 10
12. $\vdash [B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow (B \wedge G')$	I$\wedge$; 5, 11
13. $[B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow (B \wedge G) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 9
14. $[B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow D \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 3, 13
15. $[B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow (B \wedge G') \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 12
16. $[B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow E \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 4, 15
17. $G \wedge G' \in x$	x cerrada &; 3, 4
18. $[B \wedge (G \wedge G')] \rightarrow (D \wedge E) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada I$\wedge$; 14, 16
19. $D \wedge E \in [x, B]$	Def. $[x, B]$; 17, 18

- $[x, B]$ y $[x, C]$ son teorías-$\mathcal{T}$. La prueba es inmediata aplicando la definición de teoría-$\mathcal{T}$.

IV. Demuestro que $[x, B]$ y $[x, C]$ incluyen estrictamente a x.

Pruebo que x está incluida en $[x, B]$. La prueba de que también está incluida en $[x, C]$ es semejante.

- $x \subseteq [x, B]$ (si $D \in x$, entonces $D \in [x, B]$).

1. $D \in x$	Hip.
2. $\vdash (B \wedge D) \rightarrow D$	A2
3. $(B \wedge D) \rightarrow D \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 2
4. $D \in [x, B]$	Def. $[x, B]$; 1, 3

- $x \subseteq [x, B]$ y hay al menos una f.b.f. D tal que $D \in [x, B]$ y $D \notin x$. La f.b.f. a la que se está aludiendo es obviamente B (véase la hipótesis de reductio en I). En cualquier caso, sea $D \in x$, entonces:

1. $(B \wedge D) \rightarrow B \in \mathcal{T}$	A2; $\mathcal{T}$ normal
2. $B \in [x, B]$	Def. $[x, B]$; 1

V. Como x es la teoría-$\mathcal{T}$ maximal tal que $b \subseteq x$ y $R^T axc$, tenemos:

1. No- $R^T a[x,A]c$	Hip.
2. No- $R^T a[x,B]c$	Hip.

Entonces hay f.b.f. C, D, C', D' tales que

3. $C \rightarrow D \in a$	Def. 12.3; 1
4. $C \in [x, A]$	Def. 12.3; 1
5. $D \notin c$	Def. 12.3; 1
6. $C' \rightarrow D' \in a$	Def. 12.3; 2
7. $C' \in [x, B]$	Def. 12.3; 2
8. $D' \notin c$	Def. 12.3; 2
9. $(A \wedge E) \rightarrow C \in \mathcal{T}$, $E \in x$	Def. $[x, A]$; 4
10. $(B \wedge E') \rightarrow C' \in \mathcal{T}$, $E' \in x$	Def. $[x, B]$; 5
11. $C \rightarrow (C \vee C') \in \mathcal{T}$	A4; $\mathcal{T}$ normal
12. $C' \rightarrow (C \vee C') \in \mathcal{T}$	A4; $\mathcal{T}$ normal
13. $(A \wedge E) \rightarrow (C \vee C') \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 9, 11
14. $(B \wedge E') \rightarrow (C \vee C') \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 10, 12
15. $[(A \wedge E) \vee (B \wedge E')] \rightarrow (C \vee C') \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada E$\vee$; 13, 14
16. $[(A \vee B) \wedge (E \wedge E')] \rightarrow$ $[(A \wedge E) \vee (B \wedge E')] \in \mathcal{T}$	T4; $\mathcal{T}$ normal
17. $[(A \vee B) \wedge (E \wedge E')] \rightarrow (C \vee C') \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 15, 16
18. $(A \vee B) \wedge (E \wedge E') \in x$	9, 10; x cerrada &; $A \vee B \in x$ por Hip. I

19. $C \vee C' \in x$	17, 18; x cerrada $\mathcal{T}_{\rightarrow}$
20. $(C \rightarrow D) \wedge (C' \rightarrow D') \in a$	3, 6; a cerrada &
21. $[(C \rightarrow D) \wedge (C' \rightarrow D')] \rightarrow$ $[(C \vee C') \rightarrow (D \vee D')] \in \mathcal{T}$	T8; $\mathcal{T}$ normal
22. $(C \vee C') \rightarrow (D \vee D') \in a$	20, 21; a cerrada $\mathcal{T}_{\rightarrow}$
23. $D \vee D' \in c$	19, 22; $R^T axc$ (dado (a))
24. $D \in c$ ó $D' \in c$	23; $c \in K^C$

Pero 24 se contradice con 5 y 8.

Queda así demostrado que x es prima, pues al suponer que no lo es hemos llegado a una contradicción.

(c) x es no-vacía.

Esto es obvio dado que $b \subseteq x$ y b es no-vacía.

(d) x es a-consistente.

Procedo por reductio: asumiré que x es trivial y derivaré una contradicción.

1. $R^T axc$	Demostrado en (a)
2. Sea A una f.b.f. tal que $A \in a$	Hip. (a es no-vacía)
3. Sea B una f.b.f. tal que $B \notin a$	Hip. (a es a-consist.)
4. Sea C una f.b.f. tal que $C \notin c$	Hip. (c es a-consist.)
5. Para toda f.b.f. D, $D \in x$	Hip. red. (x es trivial)
6. $A \rightarrow [\neg A \vee (\neg A \rightarrow C)] \in \mathcal{T}$	T12; $\mathcal{T}$ normal
7. $\neg A \vee (\neg A \rightarrow C) \in a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\rightarrow}$; 2, 6
8. $\neg A \in a$ ó $\neg A \rightarrow C \in a$	a prima; 7
9. $\neg A \rightarrow C \in a$	Hip.
10. $\neg A \notin x$	Def. 12.3; 1, 4, 9

Pero 10 se contradice con el hecho de que b es trivial (hipótesis de reductio; 5).

11. $\neg A \in a$	Hip.
12. $\neg A \rightarrow [B \vee [(A \wedge B) \rightarrow C]] \in \mathcal{T}$	T13; $\mathcal{T}$ normal
13. $B \vee [(A \wedge B) \rightarrow C] \in a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\rightarrow}$; 11, 12
14. $B \in a$ ó $(A \wedge B) \rightarrow C \in a$	a prima; 13
15. $(A \wedge B) \rightarrow C \in a$	3, 14
16. $A \wedge B \notin x$	Def. 12.3; 1, 4, 15

Pero 16 se contradice con el hecho de que x es trivial (hipótesis de reductio; 5). ■

Lema 12.3: Extensión de a en $R^T abc$ a un miembro de K^C. Sean a y b teorías-$\mathcal{T}$ no-vacías y sea c una teoría$\mathcal{T}$ a-consistente y prima tal que $R^T abc$. Entonces, hay una teoría-$\mathcal{T}$ a-consistente, prima y no-vacía x tal que $a \subseteq x$ y

$R^T xbc$[101].

Prueba. De modo semejante al Lema 12.2, debo probar que: (a) existe un x tal que $a \subseteq x$ y $R^T xbc$, donde $x \in K^T$; (b) x es una teoría-$\mathcal{T}$ prima; (c) x es no-vacía; (d) x es a-consistente.

(a) Defino el conjunto: $y = \{Y \mid y \in K^T \ \& \ a \subseteq y \ \& \ R^T ybc\}$.

Por el lema de Zorn (1935), este conjunto tiene un elemento maximal x tal que $x \in K^T$, $a \subseteq x$, $R^T xbc$.

(b) Pruebo que la teoría x es prima. Esta prueba se compone de los subsiguientes pasos (I)-(V).

Procedo por reducción al absurdo, es decir, asumiré que x no es prima y derivaré una contradicción. Con ello quedará demostrado que x es prima.

I. $A \vee B \in x$, $A \notin x$, $B \notin x$ — Hip. reductio

II. Considérense los conjuntos:
$[x, A] = \{C \mid \exists D \ [D \in x \ \& \ (A \wedge D) \to C \in \mathcal{T}]\}$
$[x, B] = \{C \mid \exists D \ [D \in x \ \& \ (B \wedge D) \to C \in \mathcal{T}]\}$

Estos conjuntos son teorías-$\mathcal{T}$ que incluyen estrictamente a x.

III. Demuestro que $[x, B]$ y $[x, A]$ son teorías-$\mathcal{T}$.

La prueba es semejante a la desarrollada en el Lema 12.2.

IV. Pruebo que incluyen estrictamente a x.

La prueba es semejante a la desarrollada en el Lema 12.2.

V. Como x es la teoría maximal tal que $a \subseteq x$ y $R^T xbc$, entonces:

1. No-$R^T[x, A]bc$ — Hip.
2. No-$R^T[x, B]bc$ — Hip.

De estas hipótesis se sigue una contradicción:

Hay f.b.f. C, D, C' y D' tales que

[101] Si bien el Lema 12.3 aquí enunciado no es estrictamente necesario para probar la completud de las lógicas-Lti respecto de la semántica relacional con modelos reducidos, es un lema importante y de gran utilidad a nivel general en la semántica relacional tipo Routley-Meyer, motivo por el que se incluye y se demuestra en esta investigación. En particular, suele utilizarse para probar la coextensividad entre las relaciones $\leq^C$ y $\subseteq$ en este tipo de semántica (sin modelos reducidos). También puede ser de utilidad para la prueba de diferentes postulados semánticos, si bien no es el caso de los que aquí nos ocupan. Para ejemplos de postulados cuyas pruebas requieren de este lema, véase (Robles, 2006).

3. $C \to D \in [x,\, A]$	Def. 12.3; 1
4. $C \in b$	Def. 12.3; 1
5. $D \notin c$	Def. 12.3; 1
6. $C' \to D' \in [x,\, B]$	Def. 12.3; 2
7. $C' \in b$	Def. 12.3; 2
8. $D' \notin c$	Def. 12.3; 2
9. $(A \wedge E) \to (C \to D) \in \mathcal{T},\ E \in x$	Def. $[x,\, A]$; 3
10. $(B \wedge E') \to (C' \to D') \in \mathcal{T},\ E' \in x$	Def. $[x,\, A]$; 6
11. $(C \to D) \to [(C \to D) \vee (C' \to D')] \in \mathcal{T}$	A4; $\mathcal{T}$ normal
12. $(C' \to D') \to [(C \to D) \vee (C' \to D')] \in \mathcal{T}$	A4; $\mathcal{T}$ normal
13. $(A \wedge E) \to [(C \to D) \vee (C' \to D')] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 9, 11
14. $(B \wedge E') \to [(C \to D) \vee (C' \to D')] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 10, 12
15. $[(A \wedge E) \vee (B \wedge E')] \to$ $[(C \to D) \vee (C' \to D')] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada E$\vee$; 13, 14
16. $[(A \vee B) \wedge (E \wedge E')] \to$ $[(A \wedge E) \vee (B \wedge E')] \in \mathcal{T}$	T4; $\mathcal{T}$ normal
17. $[(A \vee B) \wedge (E \wedge E')] \to$ $[(C \to D) \vee (C' \to D')] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 15, 16
18. $(A \vee B) \wedge (E \wedge E') \in x$	9, 10; x cerrada por &; $A \vee B \in x$ por Hip. I
19. $(C \to D) \vee (C' \to D') \in x$	17, 18; x cerrada $\mathcal{T}_{\to}$
20. $[(C \to D) \vee (C' \to D')] \to$ $[(C \wedge C') \to (D \vee D')] \in \mathcal{T}$	T9; $\mathcal{T}$ normal
21. $(C \wedge C') \to (D \vee D') \in x$	19, 20; x cerrada $\mathcal{T}_{\to}$
22. $D \vee D' \in c$	4, 7, 21; dado $R^T xbc$
23. $D \in c$ ó $D' \in c$	22; c es prima

Pero 23 se contradice con 5 y con 8.

Hemos supuesto que x no es prima y derivado una contradicción. Por lo tanto, x es una teoría prima.

(c) La teoría x es no-vacía.

Esto es obvio dado que $a \subseteq x$ y a es no-vacía.

(d) La teoría x es a-consistente.

Procedo por reductio: asumiré que x es trivial y derivaré una contradicción.

1. $R^T xbc$	Demostrado en (a)
2. Hay alguna f.b.f. A tal que $A \in b$	Hip. (b es no-vacía)
3. Hay alguna f.b.f. B tal que $B \notin c$	Hip. (c es a-consist.)
4. Para toda f.b.f. D, $D \in x$	Hip. red. (x es trivial)
5. $A \to B \in x$	4
6. $B \in c$	Def. 12.3; 1, 2, 5

Pero 3 y 6 se contradicen. ∎

Definición 12.6: La relación $\leq^C$. Para cualesquiera a, $b \in K^C$: $a \leq^C b$ syss $R^C\mathcal{T}ab$.

El lema 12.4 mostrará que la relación así definida es sencillamente una relación de inclusión entre teorías-$\mathcal{T}$ primas, a-consistentes y no-vacías. Probaré previamente una proposición auxiliar que será de utilidad para agilizar la prueba de este lema.

Proposición 12.1: Si $a \in K^T$, entonces $R^T\mathcal{T}aa$. Prueba. Por un lado, $R^T\mathcal{T}aa$ syss para cualesquiera f.b.f. A, B, $(A \to B \in \mathcal{T}$ & $A \in a) \Rightarrow B \in a$ (cf. Definición 12.3). Por otro lado, a es una teoría-$\mathcal{T}$, dado $a \in K^T$ (cf. Definición 12.2). Entonces, a está cerrada por $\mathcal{T}$-implicación ($\mathcal{T}_\to$), es decir, $(A \to B \in \mathcal{T}$ & $A \in a) \Rightarrow B \in a$. Por lo tanto, $R^T\mathcal{T}aa$. ■

Lema 12.4: $\leq^c$ y $\subseteq$ son coextensivas. Para cualesquiera a, $b \in K^C$, $a \leq^C b$ syss $a \subseteq b$.

Prueba. (i) Si $a \leq^C b$, entonces $a \subseteq b$.

Demostraré que si una f.b.f. A pertenece a a ($A \in a$), entonces también pertenece a b (i.e., $a \subseteq b$).

1. $a \leq^C b$	Hip.
2. $A \in a$	Hip.
3. $R\mathcal{T}ab$	d1; 1
4. $A \to A \in \mathcal{T}$	A1; $\mathcal{T}$ normal
5. $A \in b$	Def. 12.3; 2, 3, 4

(ii) Si $a \subseteq b$, entonces $a \leq^C b$.

1. $a \subseteq b$	Hip.
2. $R^T\mathcal{T}aa$	Proposición 12.1; $a \in K^T$

Como a está incluida en b, si los consecuentes de los teoremas condicionales están en a, entonces estarán igualmente en b. Por lo tanto,

3. $R^T\mathcal{T}ab$	1, 2
4. $a \leq^C b$	Definición 12.6; 3 (a, $b \in K^C$)

■

Lema 12.5: Extensión de teorías-$\mathcal{T}$ a-consistentes a teorías-$\mathcal{T}$ primas. Sea a una teoría-$\mathcal{T}$ no-vacía y A una f.b.f. tal que $A \notin a$. Entonces, hay una teoría-$\mathcal{T}$ prima x tal que $a \subseteq x$ y $A \notin x$.

Prueba.

Probaré entonces que hay una teoría-$\mathcal{T}$ x tal que: (a) $a \subseteq x$ y $A \notin x$; (b) es una teoría prima; (c) es no-vacía, y (d) es a-consistente.

(a) Defino el siguiente conjunto: $Y = \{y \mid y \in K^T,\ a \subseteq y,\ A \notin y\}$.

Por el lema de Zorn (1935), hay un elemento maximal x tal que $x \in K^T$, $a \subseteq x$ y $A \notin x$.

(b) x es prima.

Se ha construido ya una teoría-$\mathcal{T}$ x tal que $x \in K^T$, $a \subseteq x$ y $A \notin x$. Ahora, por reductio, supondremos que x no es prima. Se concluirá $A \in x$, lo cual se contradice con la hipótesis de partida. Tendremos entonces una teoría-$\mathcal{T}$ prima x tal que $a \subseteq x$ y $A \notin x$. Esta prueba se compone de los subsiguientes pasos (I)-(VI).

I. $B \vee C \in x$, $B \notin x$, $C \notin x$ Hip. reductio

II. Consideremos los siguientes conjuntos de fórmulas:
$[x, B] = \{E \mid \exists D\ [D \in x\ \&\ (B \wedge D) \rightarrow E \in \mathcal{T}]\}$
$[x, C] = \{E \mid \exists D\ [D \in x\ \&\ (C \wedge D) \rightarrow E \in \mathcal{T}]\}$

Demuestro ahora que $[x, B]$ y $[x, C]$ son teorías-$\mathcal{T}$ que incluyen estrictamente a x.

III. Demuestro que $[x, B]$ y $[x, C]$ son teorías.

La prueba es semejante a la desarrollada en el lema 12.2.

IV. Demuestro que $[x, B]$ y $[x, C]$ incluyen estrictamente a x.

La prueba es semejante a la desarrollada en el lema 12.2.

V. $A \in [x, B]$ y $A \in [x, C]$.

Así se llega a demostrar $A \in x$.

1. $A \in [x, B]$	Hip.
2. $A \in [x, C]$	Hip.
3. $(B \wedge D) \rightarrow A \in \mathcal{T}$, $D \in x$	Def. $[x, B]$; 1
4. $(C \wedge D') \rightarrow A \in \mathcal{T}$, $D' \in x$	Def. $[x, C]$; 2
5. $[(B \wedge D) \vee (C \wedge D')] \rightarrow A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada E$\vee$; 3, 4
6. $[(B \vee C) \wedge (D \wedge D')] \rightarrow [(B \wedge D) \vee (C \wedge D')] \in \mathcal{T}$	T4; $\mathcal{T}$ normal
7. $[(B \vee C) \wedge (D \wedge D')] \rightarrow A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 5, 6
8. $D \wedge D' \in x$	x cerrada &; 3, 4
9. $(B \vee C) \wedge (D \wedge D') \in x$	8; Hip. $B \vee C \in x$; x cerrada &
10. $A \in x$	7, 9; x cerrada $\mathcal{T}_{\rightarrow}$

VI. Al suponer que x no es prima, hemos derivado una contradicción

$[A \in x$ y $A \notin x]$. Por lo tanto, x es prima.

(c) Pruebo que x es no-vacía.

Esto es claro al haber construido una teoría tal que $a \subseteq x$ y $A \notin x$. La teoría a está contenida en x y es no-vacía. Por ello, x no puede ser vacía.

(d) Pruebo que x es a-consistente.

x ha sido construida como la teoría maximal tal que $A \notin x$. Por ello, x no puede ser trivial, pues hay al menos una fórmula (dicha fórmula es obviamente A) que no contiene.

■

En lo que sigue, se investigará la operación $*^C$.

Lema 12.6: Las imágenes-$*$ son teorías-$\mathcal{T}$ primas. Sea a una teoría-$\mathcal{T}$ prima. Entonces, (a) a^* es también una teoría-$\mathcal{T}$ prima. Más aún, (b) para cualquier f.b.f. A, $\neg A \in a^*$ syss $A \notin a$.

Prueba.

(a) a^* es también una teoría-$\mathcal{T}$ prima.

- a^* está cerrada por $\mathcal{T}_{\rightarrow}$.

Para cualesquiera f.b.f. A, B,

1. $A \rightarrow B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \in a^*$	Hip.
3. $\neg A \notin a$	Def. 12.4; 2
4. $\neg B \rightarrow \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada CON; 1
5. $\neg B \notin a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\rightarrow}$; 3, 4
6. $B \in a^*$	Def. 12.4; 5

- a^* está cerrada por &.

Para cualesquiera f.b.f. A, B,

1. $A \in a^*$	Hip.
2. $B \in a^*$	Hip.
3. $\neg A \notin a$	Def. 12.4; 1
4. $\neg B \notin a$	Def. 12.4; 2
5. $\neg A \vee \neg B \notin a$	a es prima; 3, 4
6. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B) \in \mathcal{T}$	T10; $\mathcal{T}$ normal
7. $\neg(A \wedge B) \notin a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\rightarrow}$; 5, 6
8. $A \wedge B \in a^*$	Def. 12.4; 7

- a^* es una teoría-$\mathcal{T}$. La prueba es inmediata aplicando la definición de teoría-$\mathcal{T}$.

- a^* es prima.

Para cualesquiera f.b.f. A, B,

1. $A \vee B \in a^*$	Hip.
2. $\neg(A \vee B) \notin a$	Def. 12.4; 1
3. $(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B) \in \mathcal{T}$	T11; $\mathcal{T}$ normal
4. $\neg A \wedge \neg B \notin a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\to}$; 2, 3
5. $\neg A \notin a$ ó $\neg B \notin a$	a cerrada &; 4
6. $A \in a^*$ ó $B \in a^*$	Def. 12.4; 5

Queda demostrado que si a es una teoría prima, entonces a^* también lo es.

(b) Para cualquier f.b.f. A, $\neg A \in a^*$ syss $A \notin a$.

- De izquierda a derecha: $\neg A \in a^* \Rightarrow A \notin a$.

1. $\neg A \in a^*$	Hip.
2. $\neg\neg A \notin a$	Def. 12.4; 1
3. $A \to \neg\neg A \in \mathcal{T}$	A8; $\mathcal{T}$ normal
4. $A \notin a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\to}$; 2, 3

- De derecha a izquierda: $A \notin a \Rightarrow \neg A \in a^*$.

1. $A \notin a$	Hip.
2. $\neg\neg A \to A \in \mathcal{T}$	A7; $\mathcal{T}$ normal
3. $\neg\neg A \notin a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\to}$; 1, 2
4. $\neg A \in a^*$	Def. 12.4; 3

■

Lema 12.7: $*^C$ es una operación en K^C. Sea a una teoría-$\mathcal{T}$ prima, no-vacía y a-consistente. Entonces, a^* es también una teoría-$\mathcal{T}$ prima, no-vacía y a-consistente.

Prueba. Por el Lema 12.6, a^* es una $teoría - \mathcal{T}$ prima. Mostraré ahora que a^* es (a) a-consistente y (b) no-vacía.

(a) a^* es a-consistente.

- Si a es no-vacía, entonces a^*es a-consistente.

Supondré que a contiene alguna f.b.f. y mostraré que hay al menos una f.b.f que a^* no contiene.

1. Para alguna f.b.f. A, $A \in a$	Hip. (a es no-vacía)
2. $\neg A \notin a^*$	Lema 12.6; 1

Queda claro entonces que siempre que a sea no-vacía, su $*$-imagen a^* es a-consistente.

(b) a^*es no-vacía.

- Si a es a-consistente, entonces a^*es no vacía.

Supondré que hay alguna f.b.f. que a no contiene y mostraré que hay al menos una f.b.f. contenida en a^*.

1. Para alguna f.b.f. A, $A \notin a$	Hip. (a es a-consistente)
2. $\neg A \in a^*$	Lema 12.6; 1

Queda claro entonces que siempre que a sea a-consistente, su $*$-imagen a^* no puede ser vacía.

■

Finalmente, probaré que la relación $\vDash^C$ cumple con las condiciones que debe mantener toda relación de evaluación de acuerdo con la definición de modelo-Eb4 (Definición 11.1a).

Lema 12.8: La relación $\vDash^C$. Sea L una lógica-Eb4. $\vDash^C$es una función de evaluación canónica tal que $a \vDash^C A$ syss $A \in a$ (cf. Definición 12.3).

Prueba. Para demostrarlo es necesario probar que $\vDash^C$ cumple con las condiciones 1-5 de la Definición 11.1a que debe satisfacer toda función de evaluación $\vDash$.

Para cualesquiera f.b.f. A, B y a, b, $c \in K^C$,

1) $(a \vDash^C p \text{ y } a \leq^C b) \Rightarrow b \vDash^C p$

Por el Lema 12.4 tenemos: $(p \in a \ \&\ a \subseteq b) \Rightarrow p \in b$. Esto es trivial.

2) $a \vDash^C A \wedge B$ syss $a \vDash^C A$ y $a \vDash^C B$

- De izquierda a derecha: Si $A \wedge B \in a$, entonces $A \in a$ y $B \in a$.

1. $A \wedge B \in a$	Hip.
2. $(A \wedge B) \to A \in \mathcal{T}$	A2; $\mathcal{T}$ normal
3. $A \in a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\to}$; 1, 2
4. $(A \wedge B) \to B \in \mathcal{T}$	A2; $\mathcal{T}$ normal
5. $B \in a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\to}$; 1, 4

- De derecha a izquierda: Si $A \in a$ y $B \in a$, entonces $A \wedge B \in a$. Esto es obvio dado que a es teoría-$\mathcal{T}$ y, por ello, está cerrada por & (cf. Definición

12.1).

3) $a \vDash^C A \vee B$ syss $a \vDash^C A$ ó $a \vDash^C B$

- De izquierda a derecha: Si $A \vee B \in a$, entonces $A \in a$ ó $B \in a$. Esto es obvio dado que a es prima (cf. Definición 12.3).

- De derecha a izquierda: Si $A \in a$ ó $B \in a$, entonces $A \vee B \in a$.

1. $A \in a$	Hip.
2. $A \to (A \vee B) \in \mathcal{T}$	A4; $\mathcal{T}$ normal
3. $A \vee B \in a$	a cerrada $\mathcal{T}_{\to}$; 1, 2

La prueba para $B \in a$ es semejante.

4) $a \vDash^C A \to B$, syss $(R^C abc$ & $b \vDash^C A) \Rightarrow c \vDash^C B$

- De izquierda a derecha. Dada la Definición 12.3, tenemos $R^C abc$ syss $(A \to B \in a$ & $A \in b) \Rightarrow B \in c$. Por tanto, debemos demostrar: si $A \to B \in a$, entonces $\{[(A \to B \in a$ & $A \in b) \Rightarrow B \in c]$ & $A \in b\} \Rightarrow B \in c$.

1. $A \to B \in a$	Hip.
2. $(A \to B \in a$ & $A \in b) \Rightarrow B \in c$	Hip.
3. $A \in b$	Hip.
4. $B \in c$	1, 2, 3

- De derecha a izquierda: Si $(Rabc$ y $b \vDash^C A) \Rightarrow c \vDash^C B$, entonces $a \vDash^C A \to B$.

Mediante contraposición tenemos: si $a \nvDash^C A \to B$, entonces para algunas x, $y \in K^C$, $R^C axy$ & $x \vDash^C A$ & $y \nvDash^C B$. Esto es, si $A \to B \notin a$, entonces hay algunas x, $y \in K^C$ tales que $R^C axy$, $A \in x$ y $B \notin y$.

I. Se definen los conjuntos de fórmulas z, u.

Se demostrará que son teorías-$\mathcal{T}$ y después se extenderán a teorías-$\mathcal{T}$ primas con las propiedades requeridas.

$z = \{C \mid A \to C \in \mathcal{T}\}$

$u = \{C \mid \exists D\,[D \to C \in a,\ D \in z]\}$

z es el conjunto de todas las fórmulas que sean el consecuente de un condicional en $\mathcal{T}$ cuyo antecedente es A.

u es el conjunto de todas las fórmulas que sean el consecuente de un condicional en a cuyo antecedente está en z.

(i) z es una teoría-$\mathcal{T}$.

- z está cerrada por $\mathcal{T}_{\rightarrow}$.

Para cualesquiera f.b.f. C, D,

1. $C \rightarrow D \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $C \in z$	Hip.
3. $A \rightarrow C \in \mathcal{T}$	Def. z; 2
4. $A \rightarrow D \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada TRANS; 1, 3
5. $D \in z$	Def. z; 4

- z está cerrada por &.

Para cualesquiera f.b.f. C, D,

1. $C \in z$	Hip.
2. $D \in z$	Hip.
3. $A \rightarrow C \in \mathcal{T}$	Def. z; 1
4. $A \rightarrow D \in \mathcal{T}$	Def. z; 2
5. $A \rightarrow (C \wedge D) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada I$\wedge$; 3, 4
6. $C \wedge D \in z$	Def. z; 5

Entonces, z es una teoría-$\mathcal{T}$ dado que está cerrada por $\mathcal{T}_{\rightarrow}$ y &.

(ii) u es una teoría-$\mathcal{T}$.

Para probarlo se utiliza el Lema 12.1: sean a y z elementos no-vacíos en K^T. El conjunto u =$\{C \mid \exists D[D \rightarrow C \in a,\ D \in z]\}$ es una teoría-$\mathcal{T}$ no-vacía tal que $R^T azu$.

En este caso, tomamos las teorías-$\mathcal{T}$ no vacías a y z. Por un lado, la propia cláusula 4 necesita utilizar teorías no vacías para poder enunciarse, por lo tanto, a es no-vacía. Por otro lado, dado el axioma de (auto-)identidad, z no puede ser vacía porque contiene todas las fórmulas condicionales pertenecientes a $\mathcal{T}$ cuyo antecedente es A.

1. $A \rightarrow A \in \mathcal{T}$	A1; $\mathcal{T}$ normal
2. $A \in z$	Def. z; 1

Tenemos así teorías-$\mathcal{T}$ no-vacías z, u tales que $R^T azu$.

(iii) z y u son teorías-$\mathcal{T}$ tales que $A \in z$ y $B \notin u$.

Ya quedó claro por A1 y la definición de z que $A \in z$. Pruebo ahora que $B \notin u$.

1. $B \in u$	Hip. reductio
2. $C \rightarrow B \in a$, $C \in z$	Def. u, 1
3. $A \rightarrow C \in \mathcal{T}$	Def. z; 2
4. $(C \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada SUF.; 3

5. $A \to B \in a$ $\qquad\qquad$ a cerrada por $\mathcal{T}_{\to}$; 2, 4

Pero 5 se contradice con la hipótesis inicial de la contraposición: $A \to B \notin a \Rightarrow (Raxy \,\&\, A \in x \,\&\, B \notin y)$. Por lo tanto, $B \notin u$.

(iv) Tengo unas teorías-$\mathcal{T}$ z, u tales que $A \in z$, $B \notin u$, $R^T azu$. Necesito extenderlas a teorías primas x, y con los siguientes requisitos: $A \in x$, $B \notin y$, $R^C axy$.

- u es una teoría-$\mathcal{T}$ no-vacía y B una f.b.f. tal que $B \notin u$. Entonces, por el Lema 12.5, hay una teoría prima no-vacía y a-consistente y tal que $u \subseteq y$ & $B \notin y$. Tenemos así $R^T azu$ y $u \subseteq y$. Como u está incluida en y, si los consecuentes de los teoremas condicionales cuyos antecedentes están en u, están también en u, entonces estarán igualmente en y. Por lo tanto, tenemos $R^T azy$.
- Siendo $z \in K^T$, a, $y \in K^C$ y $R^T azy$, entonces, por el Lema 12.2, hay algún $x \in K^C$ tal que $z \subseteq x$ & $R^C axy$.

Tenemos entonces x, $y \in K^C$, tales que $R^C axy$ (dado que $a \in K^C$), $A \in x$ y $B \notin y$. Queda así probada la cláusula 4 de derecha a izquierda, pues al suponer $A \to B \notin a$, hemos demostrado $R^C axy$ & $A \in x$ & $B \notin y$.

5) $\qquad$ $a \models^C \neg A \, syss \, a^* \not\models^C A$

Lo que hay que demostrar sería entonces: $\neg A \in a$ syss $A \notin a^*$. Esto es trivial dada la Definición 12.4. ■

En la siguiente sección se probará el teorema de completud de b4.

13 Completud de b4 en la semántica R-M

En esta sección se probará la completud fuerte de b4 con respecto a la semántica definida en la sección 11. En primer lugar, recuerdo el concepto estándar de "conjunto de consecuencias de un conjunto de f.b.f. en una lógica" para aplicarlo a la lógica b4.

Observación 13.1: El conjunto $Cn\Gamma[b4]$ es una teoría-b4 completamente normal. Como se expuso en la Definición 1.9 (cf. Sección 1), el conjunto de consecuencias en b4 de un conjunto de f.b.f. Γ (en símbolos, $Cn\Gamma[b4]$) se define como sigue: $Cn\Gamma[b4] := \{A \mid \Gamma \vdash_{b4} A\}$. Es obvio que, para cualquier conjunto Γ, el conjunto $Cn\Gamma[b4]$ es una teoría-b4 completamente normal dado que es un conjunto cerrado por Adj y MP y, en consecuencia, también por $\rightarrow$. Además, el conjunto $Cn\Gamma[b4]$ contiene todos los teoremas de $b4$.

Proposición 13.1: La construcción de $\mathcal{T}$. Sea Γ un conjunto de f.b.f. y A una f.b.f. tal que $\Gamma \nvdash_{b4} A$. Entonces, hay una teoría-b4 completamente normal, a-consistente y prima $\mathcal{T}$ tal que $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ y $A \notin \mathcal{T}$.

Prueba.

1. $\Gamma \nvdash_{b4} A$	Hip.
2. $A \notin Cn\Gamma[b4]$	Obs. 13.1; 1
3. $Cn\Gamma[b4] \nvdash^{d}_{b4} \{A\}$	Def. 8.1; 2

Nota: Dada la Definición 8.1, de 2 se deriva 3 pues, de no ser así, tendríamos $(B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{b4} A$, para algunas f.b.f. $B_1, ..., B_n \in \Gamma$. Por lo tanto, tendríamos $A \in Cn\Gamma[b4]$.

Por último:

4. Hay un conjunto maximal $\mathcal{T}$ tal que $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ (pues $\Gamma \subseteq Cn\Gamma[b4]$) y $A \notin \mathcal{T}$	Lema 8.2; 3
5. $\mathcal{T}$ es una teoría-b4 prima completamente normal	Lema 8.3; 4

En conclusión, dado $\Gamma \nvdash_{b4} A$, existe una teoría-b4 completamente normal y prima (y a-consistente) $\mathcal{T}$ tal que $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ y $A \notin \mathcal{T}$. ■

En base a esta teoría $\mathcal{T}$ se define el modelo-b4 canónico (cf. Definición 13.1) y se prueba $\Gamma \nvDash_{b4} A$. El modelo canónico b4 es el modelo-Eb4 canónico básico en el mismo sentido en que los modelos-b4 son los modelos-Eb4 básicos.

Definición 13.1: El modelo-b4 canónico. El modelo-b4 canónico es la estructura $< \mathcal{T}, K^C, R^C, *^C, \vDash^C >$, donde K^C, R^C, $*^C$, y $\vDash^C$ se definen sobre la teoría-b4 $\mathcal{T}$ como se indicó en las Definiciones 12.2-12.4.

Probaré a continuación que el modelo-b4 canónico (Definición 13.1) es efectivamente un modelo-b4 y utilizaré la Proposición 13.1 para demostrar que A no es consecuencia semántica de Γ en b4, esto es, $\Gamma \not\models^C A$. Con este fin, empezaré mostrando que los postulados son válidos en el modelo canónico.

Proposición 13.2: Los postulados son válidos en el modelo canónico. Sea L una lógica-Eb4. Los postulados semánticos (p1-p11) son válidos en el modelo-L canónico.

Prueba. Las pruebas de los postulados p1-p6 aquí expuestas son semejantes a las proporcionadas en (Routley *et al.*, 1982, capítulo 4). En lo que sigue, omitiré el superíndice C en la relaciones canónicas R^C y $\leq^C$, pues no hay lugar a confusión ya que, en todos los casos, tenemos a, b, $c \in K^C$, esto es, los postulados se prueban para teorías-$\mathcal{T}$ no-vacías, a-consistentes y primas. Además, omitiré el subíndice L en $\vdash_L$. Como con L nos estamos refiriendo a lógicas-Eb4, es claro que los axiomas empleados en estas pruebas son los propios de b4.

p1. $a \leq a$

Por el lema 12.4, p1 equivale a $a \subseteq a$, lo cual es obvio.

p2. ($a \leq b$ y $Rbcd$)$\Rightarrow$$Racd$

1. $a \leq b$ & $Rbcd$	Hip.
2. $A \to B \in a$	Hip.
3. $A \in c$	Hip.
4. $a \subseteq b$	Lema 12.4; 1
5. $A \to B \in b$	2, 4
6. $B \in d$	Def. 12.3; 1, 3, 5
7. $Racd$	Def. 12.3; 3, 4, 6

p3. $R^2\mathcal{T}abc \Rightarrow (\exists x \in K)$ $(R\mathcal{T}bx$ & $Raxc)$

Asumiré $R^2\mathcal{T}abc$ y demostraré que existe un x tal que $R\mathcal{T}bx$ & $Raxc$. Para a, b, $c \in K^C$, considérese el siguiente conjunto:

$$y = \{B \mid A \to B \in \mathcal{T},\ A \in b\}$$

Por el lema 12.1, y es una teoría no-vacía tal que $R\mathcal{T}by$. Pruebo ahora que se da la relación $Rayc$.

1. $R^2\mathcal{T}abc$	Hip.
2. Hay A, $B \in \mathcal{F}$ tales que $A \to B \in a$, $A \in y$	Hip.
3. $\exists y \in K$ $(R\mathcal{T}ay$ & $Rybc)$	d2; 1
4. Hay alguna $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \to A \in \mathcal{T}$, $C \in b$	Def. y; 2
5. $(A \to B) \to (C \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada SUF; 4
6. $C \to B \in y$	Def. 12.3; 1, 2, 4
7. $B \in c$	Def. 12.3; 4, 3, 6

Por lo tanto, tenemos una teoría no-vacía y tal que $R\mathcal{T}by$ y $Rayc$. Por el lema 12.2 y se extiende a una teoría prima, no-vacía y a-consistente x tal que $y \subseteq x$ y $Raxc$. Obviamente se da entonces también $R\mathcal{T}bx$. Finalmente, tenemos $x \in K^C$ tal que $Racx$ y $Rbxd$, como había que demostrar.

p4. $R^2\mathcal{T}abc \Rightarrow \exists x[Rabx \,\&\, R\mathcal{T}xc]$

Asumiré $R^2\mathcal{T}abc$ y demostraré que existe un x tal que $Rabx \,\&\, R\mathcal{T}xc$. Para a, b, $c \in K^C$, considérese el siguiente conjunto:

$$y = \{B \mid A \to B \in a,\ A \in b\}$$

Por el Lema 12.1, y es una teoría no-vacía tal que $Raby$. Pruebo ahora que se da la relación $R\mathcal{T}yc$.

1. $R^2\mathcal{T}abc$	Hip.
2. Hay A, $B \in \mathcal{F}$ tales que $A \to B \in \mathcal{T}$, $A \in y$	Hip.
3. $\exists y \in K$ ($R\mathcal{T}ay$ & $Rybc$)	d2; 1
4. Hay alguna $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \to A \in a$, $C \in b$	Def. y; 2
5. $(C \to A) \to (C \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada PREF; 2
6. $C \to B \in y$	Def. 12.3; 3, 4, 5
7. $B \in c$	Def. 12.3; 3, 4, 6

Por lo tanto, tenemos una teoría no-vacía y tal que $Raby$ y $R\mathcal{T}yc$. Por el Lema 12.2, y se extiende a una teoría prima, no-vacía y a-consistente x tal que $y \subseteq x$ y $R\mathcal{T}xc$. Obviamente se da entonces también $Rabx$. Finalmente, tenemos $x \in K^C$ tal que $Rabx$ y $R\mathcal{T}xc$, como había que demostrar.

p5. $a^{**} \leq a$

Por el Lema 12.4, $\subseteq$ y $\leq^C$ son coextensivas. Hay que probar entonces, $a \subseteq a^{**}$. Por lo tanto, asumiré $A \in a$ y derivaré $A \in a^{**}$.

1. $A \in a$	Hip.
2. $\vdash A \to \neg\neg A$	A8
3. $\neg\neg A \in a$	a cerrada $\to$; 1, 2
4. $\neg A \notin a^*$	Def. 12.4; 3
5. $A \in a^{**}$	Def. 12.4; 4

p6. $a \leq a^{**}$

Dado que $\subseteq$ y $\leq^C$ son coextensivas (Lema 12.4), hay que probar $a^{**} \subseteq a$. Para ello, asumiré $A \in a^{**}$ y derivaré $A \in a$.

1. $A \in a^{**}$	Hip.
2. $\vdash \neg\neg A \to A$	A7
3. $\neg A \notin a^*$	Def. 12.4; 1
4. $\neg\neg A \in a$	Def. 12.4; 3

5. $A \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 2, 3

p7. $R\mathcal{T}ab \Rightarrow R\mathcal{T}b^*a^*$

Supondré $R\mathcal{T}ab$ y demostraré $R\mathcal{T}b^*a^*$, esto es, a su vez, suponer que para algunas f.b.f. A, B, se da $A \rightarrow B \in \mathcal{T}$, $A \in b^*$ y demostrar $B \in a^*$.

1. $R\mathcal{T}ab$	Hip.
2. $A \rightarrow B \in \mathcal{T}$, $A \in b^*$	Hip.
3. $\neg B \rightarrow \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada CON; 2
4. $\neg A \notin b$	Def. 12.4; 2
5. $\neg B \notin a$	Def. 12.3; 1, 3, 4
6. $B \in a^*$	Def. 12.4; 5

p8. $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$

Supondré que si hay algunas f.b.f. A, B tales que $A \rightarrow B \in T^*$y $A \in T$, entonces $B \in T^*$.

1. $A \rightarrow B \in \mathcal{T}^*$, $A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg(A \rightarrow B) \notin \mathcal{T}$	Def. 12.4; 1
3. $A \wedge \neg B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada CTE; 2
4. $A \notin T$ ó $\neg B \notin T$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 3
5. $\neg B \notin \mathcal{T}$	1, 4
6. $B \in \mathcal{T}^*$	Def. 12.4; 5

p9. $Rabc \Rightarrow (b \leq a \text{ ó } b \leq a^*)$

Asumiré $Rabc$ como hipótesis y, procederé por reductio, es decir, asumiré $b \nleq a$ y $b \nleq a^*$ (i.e., hay f.b.f. A, B tales que $A \in b$, $A \notin a$, $B \in b$ y $B \notin a^*$) y derivaré una contradicción.

1. $Rabc$	Hip.
2. $A \in b$ & $A \notin a$ & $B \in b$ & $B \notin a^*$	Hip. red.
3. Sea $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \notin c$	Supuesto [c a-cons.]
4. $\neg B \in a$	Def. 12.4; 2
5. $\vdash \neg B \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$	A4
6. $\neg A \vee \neg B \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 4, 5
7. $\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$	T10
8. $\neg(A \wedge B) \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 6, 7
9. $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \{(A \wedge B) \vee [(A \wedge B) \rightarrow C]\}$	A9
10. $(A \wedge B) \vee [(A \wedge B) \rightarrow C] \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 8, 9
11. $A \wedge B \in a$ ó $(A \wedge B) \rightarrow C \in a$	a prima; 10
12. $A \wedge B \in a$	Hip.
13. $A \in a$ & $B \in a$	a cerrada &; 12

Pero 2 ($A \notin a$) y 13 se contradicen. Por tanto,

14. $(A \wedge B) \rightarrow C \in a$	Hip.
15. $A \wedge B \in b$	b cerrada &; 2
16. $C \in c$	Def. 12.3; 1, 14, 15

Pero 3 y 16 se contradicen.

En los siguientes postulados procedo de manera semejante a la prueba del postulado anterior.

p10. $Rabc \Rightarrow (a \leq c\, \text{ó}\, a^{*} \leq c)$

1. $Rabc$	Hip.
2. $A \in a$ & $A \notin c$ & $B \in a^{*}$ & $B \notin c$	Hip. red.
3. Sea $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \in b$	Supuesto [b no vacía]
4. $\vdash (A \vee B) \rightarrow \{\neg(A \vee B) \vee [C \rightarrow (A \vee B)]\}$	A10
5. $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$	A4
6. $A \vee B \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 2, 5
7. $\neg(A \vee B) \vee [C \rightarrow (A \vee B)] \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 4, 6
8. $\neg(A \vee B) \in a$ ó $C \rightarrow (A \vee B) \in a$	a prima; 7
9. $C \rightarrow (A \vee B) \in a$	Hip.
10. $A \vee B \in c$	Def. 12.3; 1, 3, 9
11. $A \in c$ ó $B \in c$	c prima; 10

Pero 2 ($A \notin c$ y $B \notin c$) y 11 se contradicen. Por tanto,

12. $\neg(A \vee B) \in a$	Hip.
13. $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	T11
14. $\neg A \wedge \neg B \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 12, 13
15. $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg B$	A2
16. $\neg B \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 14, 15
17. $\neg B \notin a$	Def. 12.4; 2

Pero 16 y 17 se contradicen.

p11. $R\mathcal{T}ab \Rightarrow (\mathcal{T}^{*} \leq b\, \text{ó}\, a \leq \mathcal{T})$

1. $R\mathcal{T}ab$	Hip.
2. $A \in \mathcal{T}^{*}$ & $A \notin b$ & $B \in a$ & $B \notin \mathcal{T}$	Hip. red.
3. $\vdash (B \vee \neg A) \vee (B \rightarrow A)$	A11
4. $(B \vee \neg A) \vee (B \rightarrow A) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 3
5. $(B \vee \neg A) \in \mathcal{T}$ ó $(B \rightarrow A) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 4
6. $\neg A \notin \mathcal{T}$	Def. 12.4; 2
7. $B \vee \neg A \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 2, 6

8. $B \to A \in \mathcal{T}$	5, 7
9. $A \in b$	Def. 12.3; 1, 2, 8

Pero 2 y 9 se contradicen.

p12. $(R\mathcal{T}ab \,\&\, R^2\mathcal{T}cde) \Rightarrow (a \leq c^* \text{ ó } d \leq c^* \text{ ó } c \leq b \text{ ó } c \leq e)$

1. $R\mathcal{T}ab \;\&\; R^2\mathcal{T}cde$	Hip.
2. $A \in a \;\&\; A \notin c^* \& \; B \in d \;\&\; B \notin c^* \;\&$ $C \in c \;\&\; C \notin b \;\&\; D \in c \;\&\; D \notin e$	Hip. red.
3. $\vdash [(A \vee B) \to (C \wedge D)] \vee$ $\{[\neg(A \vee B) \wedge (C \wedge D)] \to [(A \vee B) \to (C \wedge D)]\}$	A12
4. $[(A \vee B) \to (C \wedge D)] \vee \{[\neg(A \vee B) \wedge (C \wedge D)]$ $\to [(A \vee B) \to (C \wedge D)]\} \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 3
5. $(A \vee B) \to (C \wedge D) \in \mathcal{T}$ ó $[\neg(A \vee B) \wedge (C \wedge D)] \to [(A \vee B) \to (C \wedge D)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 4
6. $(A \vee B) \to (C \wedge D) \in \mathcal{T}$	Hip.
7. $\vdash A \to (A \vee B)$	A4
8. $A \vee B \in a$	a cerrada $\to$; 2, 7
9. $C \wedge D \in b$	Def. 12.3; 1, 6, 8
10. $\vdash (C \wedge D) \to C$	A2
11. $C \in b$	b cerrada $\to$; 9, 10

Pero 2 y 11 se contradicen. Por tanto,

12. $[\neg(A \vee B) \wedge (C \wedge D)] \to [(A \vee B) \to (C \wedge D)] \in \mathcal{T}$	Hip.
13. $\exists x \in \mathcal{T}\ (R\mathcal{T}cx \;\&\; Rxde)$	d3; 1
14. $\neg A \in c \;\&\; \neg B \in c$	Def. 12.4; 2
15. $\neg A \wedge \neg B \in c$	c cerrada &; 14
16. $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$	T11
17. $\neg(A \vee B) \in c$	c cerrada $\to$; 15, 16
18. $\neg(A \vee B) \wedge (C \wedge D) \in c$	c cerrada &; 2, 17
19. $(A \vee B) \to (C \wedge D) \in x$	Def. 12.3; 12, 13, 18
20. $\vdash B \to (A \vee B)$	A4
21. $A \vee B \in d$	d cerrada $\to$; 2, 20
22. $C \wedge D \in e$	Def. 12.3; 13, 19, 21
23. $\vdash (C \wedge D) \to D$	A2
24. $D \in e$	e cerrada $\to$; 23

Pero 2 y 24 se contradicen.

p12'. $(Rabc \,\&\, Rcde) \Rightarrow (a \leq c \text{ ó } b \leq c \text{ ó } c^* \leq c \text{ ó } d \leq c \text{ ó } b \leq e)$

Para demostrar p12', utilizaré A12' en la forma: $[(A \vee D) \vee C] \to \boldsymbol{.}(B \wedge E) \to \{[[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \vee \neg[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)]] \vee [((A \vee D) \vee C) \to (B \wedge E)]\}$.

1. $Rabc$ & $Rcde$	Hip.
2. $A \in a$ & $A \notin c$ & $B \in b$ & $B \notin c$ & $C \in c^*$ & $C \notin c$ & $D \in d$ & $D \notin c$ & $E \in b$ & $E \notin e$	Hip. red.
3. $\vdash [(A \vee D) \vee C] \to \textbf{.}(B \wedge E) \to \{[[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \vee \neg[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)]] \vee [((A \vee D) \vee C) \to (B \wedge E)]\}$	A12'
4. $\vdash A \to [A \vee (D \vee C)]$	A4
5. $A \vee (D \vee C) \in a$	a cerrada $\to$; 2, 4
6. $\vdash [A \vee (D \vee C)] \to [(A \vee D) \vee C]$	T2
7. $(A \vee D) \vee C \in a$	a cerrada $\to$; 5, 6
8. $(B \wedge E) \to \{[[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \vee \neg[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)]] \vee [((A \vee D) \vee C) \to (B \wedge E)]\} \in a$	a cerrada $\to$; 3, 7
9. $B \wedge E \in b$	b cerrada &; 2
10. $\{[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \vee \neg[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)]\} \vee [((A \vee D) \vee C) \to (B \wedge E)] \in c$	Def. 12.3; 1, 8, 9
11. $[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \vee \neg[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \in c$ ó $[((A \vee D) \vee C) \to (B \wedge E)] \in c$	c prima; 10
12. $((A \vee D) \vee C) \to (B \wedge E) \in c$	Hip.
13. $\vdash D \to [D \vee (A \vee C)]$	A4
14. $D \vee (A \vee C) \in d$	d cerrada $\to$; 2, 13
15. $\vdash [D \vee (A \vee C)] \to [(A \vee D) \vee C]$	T2
16. $(A \vee D) \vee C \in d$	d cerrada $\to$; 14, 15
17. $B \wedge E \in e$	Def. 12.3; 1, 12, 16
18. $\vdash (B \wedge E) \to E$	A2
19. $E \in e$	e cerrada $\to$; 17, 18

Pero 2 y 19 se contradicen. Por lo tanto,

20. $[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \vee \neg[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \in c$	Hip.
21. $[(A \vee D) \vee C] \vee (B \wedge E) \in c$ ó $\neg[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \in c$	c prima; 20
22. $[(A \vee D) \vee C] \vee (B \wedge E) \in c$	Hip.
23. $[(A \vee D) \vee C] \in c$ ó $(B \wedge E) \in c$	c prima; 22
24. $(A \vee D) \vee C \notin c$	c prima; 2
25. $B \wedge E \in c$	23, 24
26. $\vdash (B \wedge E) \to B$	A2
27. $B \in c$	c cerrada $\to$; 25, 26

Pero 2 y 27 se contradicen. Por lo tanto,

28. $\neg[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \in c$	Hip.

29. $\vdash \neg[((A \vee D) \vee C) \vee (B \wedge E)] \rightarrow$ $[\neg((A \vee D) \vee C) \wedge \neg(B \wedge E)]$	T11
30. $\neg((A \vee D) \vee C) \wedge \neg(B \wedge E) \in c$	c cerrada $\rightarrow$; 28, 29
31. $\vdash [\neg((A \vee D) \vee C) \wedge \neg(B \wedge E)] \rightarrow \neg[(A \vee D) \vee C]$	A2
32. $\neg[(A \vee D) \vee C] \in c$	c cerrada $\rightarrow$; 30, 31
33. $\vdash \neg[(A \vee D) \vee C] \rightarrow [\neg(A \vee D) \wedge \neg C]$	T11
34. $\neg(A \vee D) \wedge \neg C \in c$	c cerrada $\rightarrow$; 32, 33
35. $\vdash [\neg(A \vee D) \wedge \neg C] \rightarrow \neg C$	A2
35. $\neg C \in c$	c cerrada $\rightarrow$; 34, 35
36. $\neg C \notin c$	Def. 12.4; 2

Pero 35 y 36 se contradicen.
■

Proposición 13.3: El modelo-b4 canónico es efectivamente un modelo-b4. Prueba. Dada la Definición 13.1 (El modelo-b4 canónico) y la Proposición 13.1 (La construcción de $\mathcal{T}$), la prueba se sigue de los Lemas 12.7 y 12.8 y la Proposición 13.2. En particular, por el Lema 12.7 tenemos que $*^C$ es una operación en K^C. Además, el Lema 12.8 prueba que las cláusulas se siguen canónicamente y, la Proposición 13.2, que los postulados son válidos en el modelo-L canónico. (Nótese que los mencionados lemas y la proposición se probaron para cualquier lógica-Eb4 y que la lógica base b4 es, en efecto, una lógica-Eb4.) ■

Teorema 13.1: Completud fuerte de b4. Para cualquier conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A: si $\Gamma \vDash_{b4} A$, entonces $\Gamma \vdash_{b4} A$.

Prueba. Por contraposición, supondré que $\Gamma \nvdash_{b4} A$ y probaré $\Gamma \nvDash_{b4} A$. Dada la Proposición 13.1, hay una teoría $\mathcal{T}$ completamente normal, a-consistente y prima tal que $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ y $A \notin \mathcal{T}$. Por otro lado, el modelo-b4 canónico definido sobre $\mathcal{T}$ (Definición 13.1) es efectivamente un modelo-b4 (Proposición 13.3). Por lo tanto, dado que $\mathcal{T} \vDash^C \Gamma$ y $\mathcal{T} \nvDash^C A$, tenemos $\Gamma \nvDash^C A$. Teniendo en cuenta la definición de consecuencia semántica (Definición 11.4), esto quiere decir que $\Gamma \nvDash_{b4} A$. ■

14 Semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer para las lógicas-Lti

En primer lugar, introduzco una observación que detalla el procedimiento necesario para obtener las pruebas de completud para lógicas-Eb4 en semántica R-M.

Observación 14.1: Sobre la prueba de los teoremas de completud en semántica R-M. Sea L una lógica-Eb4. La prueba de que L es completa en la semántica R-M seguirá un patrón semejante a la del Teorema 13.1 (Completud fuerte de b4). En primer lugar, se muestra que el modelo-L canónico es efectivamente un modelo a la manera en que se hizo para la lógica b4 en la Proposición 13.3. Para esto, debemos probar que los postulados semánticos y las cláusulas son canónicamente válidas. En segundo lugar, como punto de partida, tendremos que hay alguna $A \in \mathcal{F}$ tal que $\Gamma \nvdash_L A$ y construiremos una teoría-L completamente normal, a-consistente y prima $\mathcal{T}$ tal que $\Gamma \in \mathcal{T}$ y $A \notin \mathcal{T}$. Por lo tanto, esa fórmula A no será consecuencia de $\mathcal{T}$ en la semántica R-M para L. En general, la completud de una lógica-Eb4 se puede demostrar siguiendo el mencionado procedimiento.

Teniendo en cuenta la anterior observación y partiendo de lo desarrollado en las secciones anteriores, dispondré ahora los cambios necesarios para adaptar las pruebas de completud y corrección respecto de cada lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$). Sea L una lógica-Eb4, dado que una semántica Routley-Meyer para una lógica-L se proporciona al definir modelos-L junto a una noción de validez-L (cf. Definición 11.5) y dado que los modelos-Eb4 se definen al introducir nuevos postulados (cf. Definiciones 11.1a y 11.1b), la idea es justamente proporcionar un postulado semántico correspondiente a cada uno de los axiomas que determinan las extensiones de b4 que estamos considerando (cf. Definición 7.1). En general, diremos que el postulado pj ($13 \leq j \leq 19$) es correspondiente al axioma Aj si: (1) Aj es válido en cualquier modelo-L en el que pj sea uno de los postulados semánticos; y (2) pj es demostrable en el modelo-L canónico con la ayuda de Aj.

A continuación, expongo la lista de postulados correspondientes a los axiomas característicos de Lt1-Lt8. Recuérdese que los referidos axiomas quedaron reflejados en la Definición 7.1.

p13. $Rabc \Rightarrow (Rc^*ab^*$ ó Rc^*ba^* ó Rc^*aa^* ó $Rc^*bb^*)$ [es el postulado correspondiente a A13. $(A \wedge \neg B) \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$]

p14. $(RTab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (c \leq T$ ó $c \leq b)$ [es el postulado correspondiente a A14. $A \vee [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A]$]

p15. $(RTab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (T^* \leq d$ ó $b^* \leq d)$ [es el postulado correspondiente a A15. $\neg B \vee [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B]$]

p16. $Raaa$ [es el postulado correspondiente a A16. $[A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$]

p17. Raa^*a^* [es el postulado correspondiente a A17. $[(A \rightarrow B) \wedge \neg B] \rightarrow \neg A$]

p18. Ra^*aa [es el postulado correspondiente a A18. $A \rightarrow [B \vee \neg(A \rightarrow B)]$]

p19. $Ra^*a^*a^*$ [es el postulado correspondiente a A19. $\neg B \rightarrow [\neg A \vee \neg(A \rightarrow B)]$]

p20. $Ra^*bc \Rightarrow (b \leq a$ ó $b \leq a^*)$ [es el postulado correspondiente a A20. $[\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow A$]

p21. $Ra^*bc \Rightarrow (a^* \leq c$ ó $b \leq a)$ [es el postulado correspondiente a A21. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee \neg B)$]

p22. $Ra^*bc \Rightarrow (a \leq c$ ó $a^* \leq c)$ [es el postulado correspondiente a A22. $[\neg(A \rightarrow B) \wedge B] \rightarrow \neg B$]

p23. $(Rabc \,\&\, Rb^*de) \Rightarrow (a \leq e$ ó $b \leq e$ ó $d \leq c)$ [es el postulado correspondiente a A23. $B \rightarrow \{[B \wedge \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow A\}$]

p24. $RTab \Rightarrow RT^*ab$ [es el postulado correspondiente a A24. $(A \rightarrow B) \vee \neg(A \rightarrow B)$]

p25. RT^*T^*T [es el postulado correspondiente a A25. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \rightarrow B)$]

p26. $Raaa^*$ ó Ra^*aa^* [es el postulado correspondiente a A26. $[(A \rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)] \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$]

p27. $RTab \Rightarrow (RT^*aa^*$ ó $Rb^*aa^*)$ [es el postulado correspondiente a A27. $\neg(A \rightarrow B) \vee [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$]

p28. $(RTab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (T^* \leq d$ ó $b^* \leq d$ ó $c \leq a^*)$ [es el postulado correspondiente a A28. $\{[\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow \neg B\} \vee \neg B$]

p29. $(RTab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (c \leq T$ ó $c \leq b$ ó $a \leq d)$ [es el postulado correspondiente a A29. $\{[\neg(A \rightarrow B) \wedge B] \rightarrow A\} \vee A$]

Introduzco ahora la definición de modelos-Lti (para i tal que $1 \leq i \leq 8$).

Definición 14.1: Modelos-Lti en semántica R-M. Un modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$) es una estructura de tipo $< T, K, R, *, \vDash >$ cuyos elementos se definen de acuerdo con la Definición 11.1b (Modelos-Eb4) con la excepción de que R está también sujeta a algunos de los postulados expuestos en la lista anterior (p13-p29). En particular, cada modelo-Lti se caracteriza por incorporar los siguientes postulados:

- Modelos-Lt1: p13-p15;
- Modelos-Lt2: p16-p22;
- Modelos-Lt3: p13, p14, p17, p18, p21-p23;
- Modelos-Lt4: p15, p16, p19-p21;

- Modelos-Lt5: p16-p20, p22, p24-p26;
- Modelos-Lt6: p16, p19, p20, p22, p25, p27, p28;
- Modelos-Lt7: p13, p17, p18, p20, p22, p25, p29;
- Modelos-Lt8: p13, p20, p22, p25, p28, p29.

Las definiciones de verdad en un modelo-Lti, validez-Lti y consecuencia semántica en modelos-Lti se entienden de acuerdo con las definiciones especificadas para cualquier lógica-Eb4 (cf. Definiciones 11.2-11.4). Asimismo, las pruebas de la condición hereditaria y del lema de la implicación se demostraron para cualquier modelo-L de cualquier lógica-Eb4 (cf. Lemas 11.1 y 11.2). Por otro lado, la prueba de corrección para cada lógica-Lti es análoga a la de la lógica base b4 (cf. Teorema 11.1). Por tanto, para demostrar la corrección de las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$), bastará con probar la validez de aquellos axiomas presentes en cada lógica-Lti de los que la lógica base b4 carece.

Proposición 14.1: Validez de A13-A29 en la semántica R-M. Sea $\mathfrak{M}$ una clase de modelos-Eb4 y $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$. Entonces, para cualquier j ($13 \leq j \leq 29$), Aj es verdadero en M si pj se sostiene en M.

Prueba. Las pruebas de la validez de los axiomas siguen la metodología empleada en la corrección de b4 (cf. Teorema 11.1). Recuérdese que al emplear las siglas C.H. me estaré refiriendo al Lema 11.1 (Condición Hereditaria).

A13. $(A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$

1. $a \vDash A \wedge \neg B$	Hip.
2. $a \nvDash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$	Hip. red.
3. Para $b, c \in K$, $Rabc$ & $b \vDash A \wedge \neg B$ & $c \nvDash \neg(A \to B)$	Def. 11.1; 2
4. $Rabc \Rightarrow (Rc^*ab^*$ ó Rc^*ba^* ó Rc^*aa^* ó $Rc^*bb^*)$	p13
5. Rc^*ab^* ó Rc^*ba^* ó Rc^*aa^* ó Rc^*bb^*	3, 4
6. $a \vDash A$ & $a \vDash \neg B$	Def. 11.1; 1
7. $a^* \nvDash B$	Def. 11.1; 6
8. $b \vDash A$ & $b \vDash \neg B$	Def. 11.1; 3
9. $b^* \nvDash B$	Def. 11.1; 8
10. $c^* \vDash A \to B$	Def. 11.1; 3
11. Rc^*ab^*	Hip.
12. $b^* \vDash B$	Def. 11.1; 6, 10, 11

Pero 9 y 12 se contradicen. Por tanto,

13. Rc^*ba^*	Hip.
14. $a^* \vDash B$	Def. 11.1; 8, 10, 13

Pero 7 y 14 se contradicen. Por tanto,

15. Rc^*aa^*	Hip.
16. $a^* \vDash B$	Def. 11.1; 6, 10, 15

Pero 7 y 16 se contradicen. Por tanto,

17. Rc^*bb^*	Hip.
18. $b^* \vDash B$	Def. 11.1; 8, 10, 17

Pero 9 y 18 se contradicen.

A14. $A \vee [\neg(A \to B) \to A]$

1. $T \nvDash A \vee [\neg(A \to B) \to A]$	Hip. red.
2. $T \nvDash A$ & $T \nvDash \neg(A \to B) \to A$	Def. 11.1; 1
3. Para $a, b \in K$, $RTab$ & $a \vDash \neg(A \to B)$ & $b \nvDash A$	Def. 11.1; 2
4. $a^* \nvDash A \to B$	Def. 11.1; 3
5. Para $c, d \in K$, Ra^*cd & $c \vDash A$ & $d \nvDash B$	Def. 11.1; 4
6. $(RTab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (c \leq T \text{ ó } c \leq b)$	p14
7. $c \leq T$ ó $c \leq b$	3, 5, 6
8. $c \leq T$	Hip.
9. $T \vDash A$	C.H.; 5, 8

Pero 2 se contradice con 9. Por tanto,

9. $c \leq b$	Hip.
10. $b \vDash A$	C.H.; 5, 9

Pero 3 y 11 se contradicen.

A15. $\neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B]$

1. $T \nvDash \neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B]$	Hip. red.
2. $T \nvDash \neg B$ & $T \nvDash \neg(A \to B) \to \neg B$	Def. 11.1; 1
3. Para $a, b \in K$, $RTab$ & $a \vDash \neg(A \to B)$ & $b \nvDash \neg B$	Def. 11.1; 2
4. $a^* \nvDash A \to B$	Def. 11.1; 3
5. Para $c, d \in K$, Ra^*cd & $c \vDash A$ & $d \nvDash B$	Def. 11.1; 4
6. $(RTab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (T^* \leq d \text{ ó } b^* \leq d)$	p15
7. $T^* \leq d$ ó $b^* \leq d$	3, 5, 6
8. $T^* \leq d$	Hip.
9. $T^* \vDash B$	Def. 11.1; 2
10. $d \vDash B$	C.H.; 8, 9

Pero 5 se contradice con 10. Por tanto,

11. $b^* \leq d$	Hip.

12. $b^* \models B$	Def. 11.1; 3
13. $d \models B$	C.H.; 11, 12

Pero 5 y 13 se contradicen.

A16. $[A \wedge (A \to B)] \to B$

1. $a \models A \wedge (A \to B)$	Hip.
2. $Raaa$	p16
3. $a \models A$ & $a \models A \to B$	Def. 11.1; 1
4. $a \models B$	Def. 11.1; 2, 3

A17. $[(A \to B) \wedge \neg B] \to \neg A$

1. $a \models (A \to B) \wedge \neg B$	Hip.
2. Raa^*a^*	p17
3. $a \models A \to B$ & $a \models \neg B$	Def. 11.1; 1
4. $a^* \not\models B$	Def. 11.1; 3
5. $a^* \not\models A$	Def. 11.1; 2, 3, 4
6. $a \models \neg A$	Def. $*$; 5

A18. $A \to [B \vee \neg(A \to B)]$

1. $a \models A$	Hip.
2. $a \not\models B \vee \neg(A \to B)$	Hip. red.
3. $a \not\models B$ & $a \not\models \neg(A \to B)$	Def. 11.1; 2
4. $a^* \models A \to B$	Def. 11.1; 3
5. Ra^*aa	p18
6. $a \models B$	Def. 11.1; 1, 4, 5

Pero 6 se contradice con 3.

A19. $\neg B \to [\neg A \vee \neg(A \to B)]$

1. $a \models \neg B$	Hip.
2. $a \not\models \neg A \vee \neg(A \to B)$	Hip. red.
3. $a \not\models \neg A$ & $a \not\models \neg(A \to B)$	Def. 11.1; 2
4. $a^* \models A \to B$	Def. 11.1; 3
5. $a^* \not\models B$	Def. 11.1; 1
6. $a^* \models A$	Def. 11.1; 3
7. $Ra^*a^*a^*$	p19
8. $a^* \models B$	Def. 11.1; 4, 6, 7

Pero 5 se contradice con 8.

A20. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$

1. $a \vDash \neg(A \to B) \wedge \neg A$	Hip.
2. $a \nvDash A$	Hip. red.
3. $a \vDash \neg(A \to B)$ & $a \vDash \neg A$	Def. 11.1; 2
4. $a^* \nvDash A \to B$	Def. 11.1; 3
5. Para b, $c \in K$, Ra^*bc & $b \vDash A$ & $c \nvDash B$	Def. 11.1; 4
6. $Ra^*bc \Rightarrow (b \leq a$ ó $b \leq a^*)$	p20
7. $b \leq a$ ó $b \leq a^*$	5, 6
8. $b \leq a$	Hip.
9. $a \vDash A$	C.H.; 5, 8

Pero 9 se contradice con 2. Por tanto,

10. $b \leq a^*$	Hip.
11. $a^* \vDash A$	C.H.; 5, 10
12. $a^* \nvDash A$	Def. 11.1; 3

Pero 11 y 12 se contradicen.

A21. $\neg(A \to B) \to (A \vee \neg B)$

1. $a \vDash \neg(A \to B)$	Hip.
2. $a \nvDash A \vee \neg B$	Hip. red.
3. $a \nvDash A$ & $a \nvDash \neg B$	Def. 11.1; 2
4. $a^* \nvDash A \to B$	Def. 11.1; 1
5. Para b, $c \in K$, Ra^*bc & $b \vDash A$ & $c \nvDash B$	Def. 11.1; 4
6. $Ra^*bc \Rightarrow (a^* \leq c$ ó $b \leq a)$	p21
7. $a^* \leq c$ ó $b \leq a$	5, 6
8. $a^* \leq c$	Hip.
9. $a^* \vDash B$	Def. 11.1; 3
10. $c \vDash B$	C.H.; 8, 9

Pero 5 y 10 se contradicen.

11. $b \leq a$	Hip.
12. $a \vDash A$	C.H.; 5, 11

Pero 3 y 12 se contradicen.

A22. $[\neg(A \to B) \wedge \neg B] \to \neg B$

1.	$a \vDash \neg(A \to B) \wedge B$	Hip.
2.	$a \nvDash \neg B$	Hip. red.
3.	$a \vDash \neg(A \to B)$ & $a \vDash B$	Def. 11.1; 1
4.	$a^* \nvDash A \to B$	Def. 11.1; 3
5.	Para b, $c \in K$, Ra^*bc & $b \vDash A$ & $c \nvDash B$	Def. 11.1; 4
6.	$Ra^*bc \Rightarrow (a \leq c$ ó $a^* \leq c)$	p22
7.	$a \leq c$ ó $a^* \leq c$	5, 6
8.	$a \leq c$	Hip.
9.	$c \vDash B$	C.H.; 3, 8

Pero 5 y 9 se contradicen.

10.	$a^* \leq c$	Hip.
11.	$a^* \vDash B$	Def. 11.1; 2
12.	$c \vDash B$	C.H.; 10, 11

Pero 5 y 12 se contradicen.

A23. $B \to \{B \wedge \neg(A \to B)] \to A\}$

1.	$a \vDash B$	Hip.
2.	$a \nvDash [B \wedge \neg(A \to B)] \to A$	Hip. red.
3.	Para b, $c \in K$, $Rabc$ & $b \vDash B \wedge \neg(A \to B)$ & $c \nvDash A$	Def. 11.1; 2
4.	$b \vDash B$ & $b \vDash \neg(A \to B)$	Def. 11.1; 3
5.	$b^* \nvDash A \to B$	Def. 11.1; 4
6.	Para d, $e \in K$, Rb^*de & $d \vDash A$ & $e \nvDash B$	Def. 11.1; 5
7.	$(Rabc$ & $Rb^*de) \Rightarrow (a \leq e$ ó $b \leq e$ ó $d \leq c)$	p23
8.	$a \leq e$ ó $b \leq e$ ó $d \leq c$	3, 6, 7
9.	$b \leq e$	Hip.
10.	$e \vDash B$	C.H.; 4, 9

Pero 6 y 10 se contradicen. Por tanto,

11.	$d \leq c$	Hip.
12.	$c \vDash A$	C.H.; 6, 11

Pero 3 y 12 se contradicen. Por tanto,

13.	$a \leq e$	Hip.
14.	$e \vDash B$	C.H.; 1, 13

Pero 6 y 14 se contradicen.

A24. $(A \to B) \vee \neg(A \to B)$

1.	$T \nvDash (A \to B) \vee \neg(A \to B)$	Hip. red.
2.	$T \nvDash A \to B$ & $T \nvDash \neg(A \to B)$	Def. 11.1; 1
3.	$T^* \vDash A \to B$	Def. 11.1; 2
4.	Para $a, b \in K$, $RTab$ & $a \vDash A$ & $b \nvDash B$	Def. 11.1; 2
5.	$RTab \Rightarrow RT^*ab$	p24
6.	RT^*ab	4, 5
7.	$b \vDash B$	Def. 11.1; 3, 4, 6

Pero 4 y 7 se contradicen.

A25. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$

1.	$T \nvDash (\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$	Hip. red.
2.	$T \nvDash \neg A \vee B$ & $T \nvDash \neg(A \to B)$	Def. 11.1; 1
3.	$T \nvDash \neg A$ & $T \nvDash B$	Def. 11.1; 2
4.	$T^* \vDash A \to B$	Def. 11.1; 2
5.	$T^* \vDash A$	Def. 11.1; 3
6.	RT^*T^*T	p25
7.	$T \vDash B$	Def. 11.1; 4, 5, 6

Pero 3 y 7 se contradicen.

A26. $[(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)] \to \neg(A \to B)$

1.	$a \vDash (A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)$	Hip.
2.	$a \nvDash \neg(A \to B)$	Hip. red.
3.	$a \vDash A \to B$ & $a \vDash A \wedge \neg B$	Def. 11.1; 1
4.	$a \vDash A$ & $a \vDash \neg B$	Def. 11.1; 3
5.	$a^* \vDash A \to B$	Def. 11.1; 2
6.	$a^* \nvDash B$	Def. 11.1; 4
7.	$Raaa^*$ ó Ra^*aa^*	p26
8.	$Raaa^*$	Hip.
9.	$a^* \vDash B$	Def. 11.1; 3, 4, 8

Pero 6 y 9 se contradicen. Por tanto,

10.	Ra^*aa^*	Hip.
11.	$a^* \vDash B$	Def. 11.1; 4, 5, 10

Pero 6 y 11 se contradicen.

A27. $\neg(A \to B) \vee [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$

1.	$T \nvDash \neg(A \to B) \vee [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$	Hip. red.
2.	$T \nvDash \neg(A \to B)$ & $T \nvDash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$	Def. 11.1; 1

3. Para a, $b \in K$, $RTab$ & $a \vDash A \wedge \neg B$ & $b \nvDash \neg(A \to B)$ Def. 11.1; 2
4. $T^* \vDash A \to B$ Def. 11.1; 2
5. $b^* \vDash A \to B$ Def. 11.1; 3
6. $RTab \Rightarrow (RT^*aa^*$ ó $Rb^*aa^*)$ p27
7. RT^*aa^* ó Rb^*aa^* 3, 6
8. $a \vDash A$ & $a \vDash \neg B$ Def. 11.1; 3
9. $a^* \nvDash B$ Def. 11.1; 8
10. RT^*aa^* Hip.
11. $a^* \vDash B$ Def. 11.1; 4, 8, 10

Pero 9 y 11 se contradicen. Por tanto,

12. Rb^*aa^* Hip.
13. $a^* \vDash B$ Def. 11.1; 5, 8, 12

Pero 9 y 13 se contradicen.

A28. $\{[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\} \vee \neg B$

1. $T \nvDash \neg B \vee \{\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\}$ Hip. red.
2. $T \nvDash \neg B$ & $T \nvDash [\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B$ Def. 11.1; 1
3. Para a, $b \in K$, $RTab$ & $a \vDash \neg(A \to B) \wedge \neg A$ & $b \nvDash \neg B$ Def. 11.1; 2
4. $a \vDash \neg(A \to B)$ & $a \vDash \neg A$ Def. 11.1; 3
5. $a^* \nvDash A \to B$ Def. 11.1; 4
6. $T^* \vDash B$ Def. 11.1; 2
7. $b^* \vDash B$ Def. 11.1; 3
8. Hay c, $d \in K$, Ra^*cd & $c \vDash A$ & $d \nvDash B$ Def. 11.1; 5
9. $a^* \nvDash A$ Def. 11.1; 4
10. $(RTab$ & $Ra^*cd) \Rightarrow (T^* \leq d$ ó $b^* \leq d$ ó $c \leq a^*)$ p28
11. $T^* \leq d$ ó $b^* \leq d$ ó $c \leq a^*$ 3, 8, 10
12. $T^* \leq d$ Hip.
13. $d \vDash B$ C.H.; 6, 12

Pero 8 y 13 se contradicen. Por tanto,

14. $b^* \leq d$ Hip.
15. $d \vDash B$ C.H.; 7, 14

Pero 8 y 15 se contradicen.

16. $c \leq a^*$ Hip.
17. $a^* \vDash A$ C.H.; 8, 16

Pero 9 y 17 se contradicen.

A29. $\{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$

1. $T \nvDash \{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$	Hip. red.
2. $T \nvDash [\neg(A \to B) \wedge B] \to A$ & $T \nvDash A$	Def. 11.1; 1
3. Para $a, b \in K$, $RTab$ & $a \vDash \neg(A \to B) \wedge B$ & $b \nvDash A$	Def. 11.1; 2
4. $a \vDash \neg(A \to B)$ & $a \vDash B$	Def. 11.1; 3
5. $a^* \nvDash A \to B$	Def. 11.1; 4
6. Para $c, d \in K$, Ra^*cd & $c \vDash A$ & $d \nvDash B$	Def. 11.1; 5
7. $(RTab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (c \leq T$ ó $c \leq b$ ó $a \leq d)$	p29
8. $c \leq T$ ó $c \leq b$ ó $a \leq d$	3, 6, 7
9. $c \leq T$	Hip.
10. $T \vDash A$	C.H.; 6, 9

Pero 2 y 10 se contradicen. Por tanto,

11. $c \leq b$	Hip.
12. $b \vDash A$	C.H.; 6, 11

Pero 3 y 12 se contradicen. Por tanto,

13. $a \leq d$	Hip.
14. $d \vDash B$	C.H.; 4, 13

Pero 6 y 14 se contradicen.

Con esto queda demostrada la corrección de Lt1-Lt8. ■

Las definiciones, lemas y proposiciones que se probaron como preliminares al teorema de completud en la sección 12 son válidos no solo para la lógica base b4 sino también para toda lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) como, de hecho, se especificó al inicio de esa misma sección. Asimismo, las pruebas de completud de las lógicas-Lti se desarrollan de modo semejante a la de la lógica base (cf. Sección 13). En particular, sea la lógica-Lti una de las ocho extensiones de b4 consideradas, definiríamos el conjunto $Cn\Gamma[Lti]$ como el conjunto de f.b.f. que se siguen de Γ en esa lógica-Lti y observamos que dicho conjunto es una teoría-Lti completamente normal (cf. Observación 13.1). Entonces, de manera semejante a la prueba de completud en la lógica base, construímos $\mathcal{T}$ (cf. Proposición 13.1). Por otro lado, tal y como ocurría en el caso de b4, se define un modelo canónico para cada lógica-Lti sobre la teoría $\mathcal{T}$. Quedaría solamente, entonces, probar que el modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$) canónico es efectivamente un modelo, para lo cual es preciso demostrar que los postulados semánticos (p13-p29) se sostienen canónicamente. Procedo ahora entonces con dicha prueba.

Proposición 14.2: Prueba de p13-p19 en modelos-Eb4 canónicos. Sea L una lógica-Eb4 y, para cualquier j ($13 \leq j \leq 29$), sea $\mathsf{M_C}$ el modelo-L$\cup\{Aj\}$ canónico (cf. Definiciones 11.1a y 12.5), entonces pj es demostrable en $\mathsf{M_C}$.

Prueba. Procederé de manera semejante a la prueba de la Proposición 13.2. Cabe anotar que utilizaremos en algunos casos, además del axioma correspondiente al postulado del caso, otros teoremas, axiomas, y reglas comúnes a todas las lógicas-Eb4 (cf. Definición 6.1.1 y Proposición 6.1.1). Dado que no hay posibilidad de confusión, omitiré cualquier subíndice en las siguientes pruebas (i.e., $\vdash_L$).

p13. $Rabc \Rightarrow (Rc^*ab^*$ ó Rc^*ba^* ó Rc^*aa^* ó $Rc^*bb^*)$

Para probar p13 utilizaré A13 en la forma:

$\vdash [(A\wedge E)\vee(C\wedge G)]\wedge\neg[(D\vee F)\wedge(B\vee H)] \rightarrow\!\centerdot\,\{[(A\wedge E)\vee(C\wedge G)]\wedge\neg[(D\vee F)\wedge(B\vee H)]\} \rightarrow \neg\{[(A\wedge E)\vee(C\wedge G)] \rightarrow [(D\vee F)\wedge(B\vee H)]\}$. Procederé por reductio y derivaré una contradicción.

1.	$Rabc$	Hip.
2.	$A \rightarrow B \in c^*$, $A \in a$, $B \notin b^*$; $C \rightarrow D \in c^*$, $C \in b$, $D \notin a^*$; $E \rightarrow F \in c^*$, $E \in a$, $F \notin a^*$; $G \rightarrow H \in c^*$, $G \in b$, $H \notin b^*$	Hip. red.
3.	$A \wedge E \in a$	a cerrada &; 2
4.	$\vdash (A\wedge E) \rightarrow [(A\wedge E)\vee(C\wedge G)]$	A4
5.	$(A\wedge E)\vee(C\wedge G) \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 3, 4
6.	$D \vee F \notin a^*$	a^* cerrada &; 2
7.	$\neg(D\vee F) \in a$	Def. 12.4; 6
8.	$\vdash \neg(D\vee F) \rightarrow [\neg(D\vee F)\vee\neg(B\vee H)]$	A4
9.	$\neg(D\vee F)\vee\neg(B\vee H) \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 7, 8
10.	$\vdash [\neg(D\vee F)\vee\neg(B\vee H)] \rightarrow \neg[(D\vee F)\wedge(B\vee H)]$	T10
11.	$\neg[(D\vee F)\wedge(B\vee H)] \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 9, 10
12.	$[(A\wedge E)\vee(C\wedge G)]\wedge\neg[(D\vee F)\wedge(B\vee H)] \in a$	a cerrada &; 5, 11
13.	$\vdash [(A\wedge E)\vee(C\wedge G)]\wedge\neg[(D\vee F)\wedge(B\vee H)] \rightarrow\!\centerdot$ $\{[(A\wedge E)\vee(C\wedge G)]\wedge\neg[(D\vee F)\wedge(B\vee H)]\} \rightarrow$ $\neg\{[(A\wedge E)\vee(C\wedge G)] \rightarrow [(D\vee F)\wedge(B\vee H)]\}$	A13
14.	$\{[(A\wedge E)\vee(C\wedge G)]\wedge\neg[(D\vee F)\wedge(B\vee H)]\} \rightarrow$ $\neg\{[(A\wedge E)\vee(C\wedge G)] \rightarrow [(D\vee F)\wedge(B\vee H)]\} \in a$	a cerrada $\rightarrow$; 12, 13
15.	$C \wedge G \in b$	b cerrada &; 2
16.	$\vdash (C\wedge G) \rightarrow [(A\wedge E)\vee(C\wedge G)]$	A4
17.	$(A\wedge E)\vee(C\wedge G) \in b$	b cerrada $\rightarrow$; 15, 16
18.	$B \vee H \notin b^*$	b^* cerrada &; 2
19.	$\neg(B\vee H) \in b$	Def. 12.4; 18
20.	$\vdash \neg(B\vee H) \rightarrow [\neg(D\vee F)\vee\neg(B\vee H)]$	A4
21.	$\neg(D\vee F)\vee\neg(B\vee H) \in b$	b cerrada $\rightarrow$; 19, 20
22.	$\neg[(D\vee F)\wedge(B\vee H)] \in b$	b cerrada $\rightarrow$; 10, 21
23.	$[(A\wedge E)\vee(C\wedge G)]\wedge\neg[(D\vee F)\wedge(B\vee H)] \in b$	b cerrada &; 17, 22
24.	$\neg\{[(A\wedge E)\vee(C\wedge G)] \rightarrow [(D\vee F)\wedge(B\vee H)]\} \in c$	Def. 12.3; 1, 14, 23
25.	$[(A\wedge E)\vee(C\wedge G)] \rightarrow [(D\vee F)\wedge(B\vee H)] \notin c^*$	Def. 12.4; 24
26.	$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (B\vee H)]$	T5
27.	$A \rightarrow (B\vee H) \in c^*$	c^* cerrada $\rightarrow$; 2, 26
28.	$\vdash (E \rightarrow F) \rightarrow [E \rightarrow (D\vee F)]$	T5
29.	$E \rightarrow (D\vee F) \in c^*$	c^* cerrada $\rightarrow$; 2, 28

30.	$\vdash \{[A \to (B \vee H)] \wedge [E \to (D \vee F)]\} \to$ $\{(A \wedge E) \to [(B \vee H) \wedge (D \vee F)]\}$	T7
31.	$[A \to (B \vee H)] \wedge [E \to (D \vee F)] \in c^*$	c^* cerrada &; 27, 29
32.	$(A \wedge E) \to [(B \vee H) \wedge (D \vee F)] \in c^*$	c^* cerrada $\to$; 30, 31
33.	$\vdash (C \to D) \to [C \to (D \vee F)]$	T5
34.	$C \to (D \vee F) \in c^*$	c^*cerrada $\to$; 2, 33
35.	$\vdash (G \to H) \to [G \to (B \vee H)]$	T5
36.	$G \to (B \vee H) \in c^*$	c^* cerrada $\to$; 2, 35
37.	$\vdash \{[G \to (B \vee H)] \wedge [C \to (D \vee F)]\} \to$ $\{(C \wedge G) \to [(B \vee H) \wedge (D \vee F)]\}$	T7
38.	$[G \to (B \vee H)] \wedge [C \to (D \vee F)] \in c^*$	c^* cerrada &; 34, 36
39.	$(C \wedge G) \to [(B \vee H) \wedge (D \vee F)] \in c^*$	c^* cerrada $\to$; 37, 38
40.	$\vdash \{(A \wedge E) \to [(B \vee H) \wedge (D \vee F)]\} \wedge$ $\{(C \wedge G) \to [(B \vee H) \wedge (D \vee F)]\} \to .$ $[(A \wedge E) \vee (C \wedge G)] \to [(D \vee F) \wedge (B \vee H)]$	A5
41.	$\{(A \wedge E) \to [(B \vee H) \wedge (D \vee F)]\} \wedge$ $\{(C \wedge G) \to [(B \vee H) \wedge (D \vee F)]\} \in c^*$	c^*cerrada &; 32, 39
42.	$[(A \wedge E) \vee (C \wedge G)] \to [(D \vee F) \wedge (B \vee H)] \in c^*$	c^* cerrada $\to$; 40, 41

Pero 25 y 42 se contradicen.

p14. $(R\mathcal{T}ab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (c \leq \mathcal{T}$ ó $c \leq b)$

1.	$R\mathcal{T}ab \,\&\, Ra^*cd$	Hip.
2.	$A \in c$ & $A \notin \mathcal{T}$ & $B \in c$ & $B \notin b$	Hip. red.
3.	Sea $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \notin d$	Supuesto [d a-cons.]
4.	$\vdash (A \wedge B) \to A$	A2
5.	$A \wedge B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 2, 4
6.	$\vdash (A \wedge B) \vee [\neg[(A \wedge B) \to C] \to (A \wedge B)]$	A14
7.	$(A \wedge B) \vee [\neg[(A \wedge B) \to C] \to (A \wedge B)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 6
8.	$A \wedge B \in \mathcal{T}$ ó $\neg[(A \wedge B) \to C] \to (A \wedge B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 7
9.	$\neg[(A \wedge B) \to C] \to (A \wedge B) \in \mathcal{T}$	5, 8
10.	$A \wedge B \in c$	c cerrada &; 2
11.	$(A \wedge B) \to C \notin a^*$	Def. 12.3; 1, 3, 10
12.	$\neg[(A \wedge B) \to C] \in a$	Def. 12.4; 11
13.	$A \wedge B \in b$	Def. 12.3; 1, 9, 12
14.	$\vdash (A \wedge B) \to B$	A2
15.	$B \in b$	b cerrada $\to$; 13, 14

Pero 2 y 15 se contradicen.

p15. $(R\mathcal{T}ab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (\mathcal{T}^* \leq d$ ó $b^* \leq d)$

1.	$R\mathcal{T}ab \,\&\, Ra^*cd$	Hip.
2.	$A \in \mathcal{T}^*$ & $A \notin d$ & $B \in b^*$ & $B \notin d$	Hip. red.

3. Sea $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \in c$	Supuesto [c no vacía]
4. $\neg A \notin \mathcal{T}$	Def. 12.4; 2
5. $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \to \neg A$	A2
6. $\neg A \wedge \neg B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 4, 5
7. $\vdash \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$	T11
8. $\neg(A \vee B) \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 6, 7
9. $\vdash \neg(A \vee B) \vee [\neg[C \to (A \vee B)] \to \neg(A \vee B)]$	A15
10. $\neg(A \vee B) \vee [\neg[C \to (A \vee B)] \to \neg(A \vee B)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 9
11. $\neg(A \vee B) \in \mathcal{T}$ ó $\neg[C \to (A \vee B)] \to \neg(A \vee B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 10
12. $\neg[C \to (A \vee B)] \to \neg(A \vee B) \in \mathcal{T}$	8, 11
13. $\neg B \notin b$	Def. 12.4; 2
14. $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \to \neg B$	A2
15. $\neg A \wedge \neg B \notin b$	b cerrada $\to$; 13, 14
16. $\neg(A \vee B) \notin b$	b cerrada $\to$; 7, 15
17. $\neg[C \to (A \vee B)] \notin a$	Def. 12.3; 1, 12, 16
18. $C \to (A \vee B) \in a^*$	Def. 12.4; 17
19. $A \vee B \in d$	Def. 12.3; 1, 3, 18
20. $A \vee B \notin d$	d prima; 2

Pero 19 y 20 se contradicen.

p16. $Raaa$

1. $A \to B \in a$, $A \in a$	Hip.
2. $\vdash [A \wedge (A \to B)] \to B$	A16
3. $A \wedge (A \to B) \in a$	a cerrada &; 1
4. $B \in a$	a cerrrada por $\to$; 2, 3

p17. Raa^*a^*

1. $A \to B \in a$, $A \in a^*$	Hip.
2. $\vdash [(A \to B) \wedge \neg B] \to \neg A$	A17
3. $\neg A \notin a$	Def. 12.4; 1
4. $(A \to B) \wedge \neg B \notin a$	a cerrada $\to$; 2, 3
5. $A \to B \notin a$ ó $\neg B \notin a$	a prima; 4
6. $\neg B \notin a$	1, 5
7. $B \in a^*$	Def. 12.4; 6

p18. Ra^*aa

1. $A \to B \in a^*$ & $A \in a$	Hip.
2. $\vdash A \to [B \vee \neg(A \to B)]$	A18
3. $B \vee \neg(A \to B) \in a$	a cerrada $\to$; 1, 2

4. $B \in a$ ó $\neg(A \to B) \in a$	a prima; 3
5. $\neg(A \to B) \notin a$	Def. 12.4; 1
6. $B \in a$	4, 5

p19. $Ra^*a^*a^*$

1. $A \to B \in a^*$ & $A \in a^*$	Hip.
2. $\vdash \neg B \to [\neg A \vee \neg(A \to B)]$	A19
3. $\neg A \notin a$ & $\neg(A \to B) \notin a$	Def. 12.4; 1
4. $\neg A \vee \neg(A \to B) \notin a$	a prima; 3
5. $\neg B \notin a$	a cerrada $\to$; 2, 4
6. $B \in a^*$	Def. 12.4; 5

p20. $Ra^*bc \Rightarrow (b \leq a \text{ ó } b \leq a^*)$

1. Ra^*bc	Hip.
2. $A \in b$ & $A \notin a$ & $B \in b$ & $B \notin a^*$	Hip. red.
3. Sea $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \notin c$	Supuesto [c a-cons.]
4. $\vdash (A \wedge B) \to A$	A2
5. $A \wedge B \notin a$	a cerrada $\to$; 2, 4
6. $\vdash [\neg[(A \wedge B) \to C] \wedge \neg(A \wedge B)] \to (A \wedge B)$	A20
7. $\neg[(A \wedge B) \to C] \wedge \neg(A \wedge B) \notin a$	a cerrada $\to$; 5, 6
8. $\neg[(A \wedge B) \to C] \notin a$ ó $\neg(A \wedge B) \notin a$	a cerrada &; 7
9. $\neg(A \wedge B) \notin a$	Hip.
10. $A \wedge B \in a^*$	Def. 12.4; 9
11. $\vdash (A \wedge B) \to B$	A2
12. $B \in a^*$	a cerrada $\to$; 10, 11

Pero 2 y 12 se contradicen.

13. $\neg[(A \wedge B) \to C] \notin a$	Hip.
14. $(A \wedge B) \to C \in a^*$	Def. 12.4; 13
15. $A \wedge B \in b$	b cerrada &; 2
16. $C \in c$	Def. 12.3; 1, 14, 15

Pero 3 y 16 se contradicen.

p21. $Ra^*bc \Rightarrow (a^* \leq c \text{ ó } b \leq a)$

1. Ra^*bc	Hip.
2. $B \in a^*$ & $B \notin c$ & $A \in b$ & $A \notin a$	Hip. red.
3. $\neg B \notin a$	Def. 12.4; 2
4. $A \vee \neg B \notin a$	a prima; 2, 3
5. $\vdash \neg(A \to B) \to (A \vee \neg B)$	A21

6. $\neg(A \to B) \notin a$ — a cerrada $\to$; 4, 5
7. $A \to B \in a^*$ — Def. 12.4; 6
8. $B \in c$ — Def. 12.3; 1, 2, 7

Pero 2 y 8 se contradicen.

p22. $Ra^*bc \Rightarrow (a \leq c \text{ ó } a^* \leq c)$

1. Ra^*bc	Hip.
2. $A \in a$ & $A \notin c$ & $B \in a^*$ & $B \notin c$	Hip. red.
3. Sea $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \in b$	Supuesto [b no vacía]
4. $\vdash [\neg[C \to (A \vee B)] \wedge (A \vee B)] \to \neg(A \vee B)$	A22
5. $\neg B \notin a$	Def. 12.4; 2
6. $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \to \neg B$	A2
7. $\neg A \wedge \neg B \notin a$	a cerrada $\to$; 5, 6
8. $\vdash \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$	T11
9. $\neg(A \vee B) \notin a$	a cerrada $\to$; 7, 8
10. $\neg[C \to (A \vee B)] \wedge (A \vee B) \notin a$	a cerrada $\to$; 4, 9
11. $\neg[C \to (A \vee B)] \notin a$ ó $(A \vee B) \notin a$	a cerrada &; 10
12. $\vdash A \to (A \vee B)$	A4
13. $A \vee B \in a$	a cerrada $\to$; 2, 12
14. $\neg[C \to (A \vee B)] \notin a$	11, 13
15. $C \to (A \vee B) \in a^*$	Def. 12.4; 14
16. $A \vee B \in c$	Def. 12.3; 1, 3, 15
17. $A \in c$ ó $B \in c$	c prima; 16

Pero 2 y 16 se contradicen.

p23. $(Rabc \,\&\, Rb^*de) \Rightarrow (a \leq e \text{ ó } b \leq e \text{ ó } d \leq c)$

1. $Rabc$ & Rb^*de	Hip.
2. $A \in a$ & $A \notin e$ & $B \in b$ & $B \notin e$ & $C \in d$ & $C \notin c$	Hip. red.
3. $\vdash (A \vee B) \to .[(A \vee B) \wedge \neg[C \to (A \vee B)]] \to C$	A23
4. $\vdash A \to (A \vee B)$	A4
5. $A \vee B \in a$	a cerrada $\to$; 2, 4
6. $[(A \vee B) \wedge \neg[C \to (A \vee B)]] \to C \in a$	a cerrada $\to$; 3, 5
7. $(A \vee B) \wedge \neg[C \to (A \vee B)] \notin b$	Def. 12.3; 1, 2, 6
8. $A \vee B \notin b$ ó $\neg[C \to (A \vee B)] \notin b$	b cerrada &; 7
9. $A \vee B \notin b$	Hip.
10. $\vdash B \to (A \vee B)$	A4
11. $B \notin b$	b cerrada $\to$; 9, 10

Pero 2 y 11 se contradicen. Por tanto,

12. $\neg[C \to (A \vee B)] \notin b$ — Hip.

13. $C \to (A \lor B) \in b^*$	Def. 12.4; 12
14. $A \lor B \in e$	Def. 12.3; 1, 2, 13
15. $A \in e$ ó $B \in e$	e prima; 14

Pero 2 y 15 se contradicen.

p24. $R\mathcal{T}ab \Rightarrow R\mathcal{T}^*ab$

1. $R\mathcal{T}ab$	Hip.
2. $A \to B \in \mathcal{T}^*$ & $A \in a$ & $B \notin b$	Hip. red.
3. $\vdash (A \to B) \lor \neg(A \to B)$	A24
4. $(A \to B) \lor \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 3
5. $A \to B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 4
6. $\neg(A \to B) \notin \mathcal{T}$	Def. 12.4; 2
7. $A \to B \in \mathcal{T}$	5, 6
8. $B \in b$	Def. 12.3; 1, 2, 7

Pero 2 y 8 se contradicen.

p25. $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$

1. $A \to B \in \mathcal{T}^*$ & $A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}$	Hip. red.
2. $\vdash (\neg A \lor B) \lor \neg(A \to B)$	A25
3. $(\neg A \lor B) \lor \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 2
4. $\neg A \lor B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 3
5. $\neg(A \to B) \notin \mathcal{T}$	Def. 12.4; 1
6. $\neg A \lor B \in \mathcal{T}$	4, 5
7. $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 6
8. $\neg A \in \mathcal{T}$	1, 7
9. $\neg A \notin \mathcal{T}$	Def. 12.4; 1

Pero 8 y 9 se contradicen.

p26. $Raaa^*$ ó Ra^*aa^*

1. $A \to B \in a$ & $A \in a$ & $B \notin a^*$	Hip. red.
2. $C \to D \in a^*$ & $C \in a$ & $D \notin a^*$	Hip. red.
3. $\vdash (A \to B) \to [(A \land C) \to (B \lor D)]$	T6
4. $(A \land C) \to (B \lor D) \in a$	a cerrada $\to$; 1, 3
5. $A \land C \in a$	a cerrada &; 1, 2
6. $\neg B \in a$ & $\neg D \in a$	Def. 12.4; 1, 2
7. $\neg B \land \neg D \in a$	a cerrada &; 6
8. $\vdash (\neg B \land \neg D) \to \neg(B \lor D)$	T11
9. $\neg(B \lor D) \in a$	a cerrada $\to$; 7, 8
10. $(A \land C) \land \neg(B \lor D) \in a$	a cerrada $\to$; 8, 9

11. $[(A \wedge C) \to (B \vee D)] \wedge [(A \wedge C) \wedge \neg(B \vee D)] \in a$	a cerrada &; 4, 10
12. $\vdash [(A \wedge C) \to (B \vee D)] \wedge [(A \wedge C) \wedge \neg(B \vee D)] \to .$ $\neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)]$	A26
13. $\neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)] \in a$	a cerrada $\to$; 11, 12
14. $(A \wedge C) \to (B \vee D) \notin a^*$	Def. 12.4; 13
15. $\vdash (C \to D) \to [(A \wedge C) \to (B \vee D)]$	T6
16. $(A \wedge C) \to (B \vee D) \in a^*$	a^*cerrada $\to$; 2, 15

Pero 14 y 16 se contradicen.

p27. $R\mathcal{T}ab \Rightarrow (R\mathcal{T}^*aa^*$ ó $Rb^*aa^*)$

1. $R\mathcal{T}ab$	Hip.
2. $A \to B \in \mathcal{T}^*$ & $A \in a$ & $B \notin a^*$& $C \to D \in b^*$ & $C \in a$ & $D \notin a^*$	Hip. red.
3. $\vdash (A \to B) \to [(A \wedge C) \to (B \vee D)]$	T6
4. $(A \wedge C) \to (B \vee D) \in \mathcal{T}^*$	$\mathcal{T}^*$ cerrada $\to$; 2, 3
5. $\neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)] \notin \mathcal{T}$	Def. 12.4; 4
6. $\vdash \neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)] \vee$ $\{[(A \wedge C) \wedge \neg(B \vee D)] \to \neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)]\}$	A27
7. $\neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)] \vee$ $\{[(A \wedge C) \wedge \neg(B \vee D)] \to \neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)]\} \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 6
8. $\neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)] \in \mathcal{T}$ ó $[(A \wedge C) \wedge \neg(B \vee D)] \to \neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 7
9. $[(A \wedge C) \wedge \neg(B \vee D)] \to \neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)] \in \mathcal{T}$	5, 8
10. $A \wedge C \in a$	a cerrada &; 2
11. $\neg B \in a$ & $\neg D \in a$	Def. 12.4; 2
12. $\neg B \wedge \neg D \in a$	a cerrada &; 11
13. $\vdash (\neg B \wedge \neg D) \to \neg(B \vee D)$	T11
14. $\neg(B \vee D) \in a$	a cerrada $\to$; 12, 13
15. $(A \wedge C) \wedge \neg(B \vee D) \in a$	a cerrada &; 10, 14
16. $\neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)] \in b$	Def. 12.3; 1, 9, 15
17. $\vdash (C \to D) \to [(A \wedge C) \to (B \vee D)]$	T6
18. $(A \wedge C) \to (B \vee D) \in b^*$	b^*cerrada $\to$; 2, 17
19. $\neg[(A \wedge C) \to (B \vee D)] \notin b$	Def. 12.4; 18

Pero 16 y 19 se contradicen.

p28. $(R\mathcal{T}ab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (\mathcal{T}^* \leq d$ ó $b^* \leq d$ ó $c \leq a^*)$

1. $R\mathcal{T}ab$ & Ra^*cd	Hip.
2. $A \in \mathcal{T}^*$ & $A \notin d$ & $B \in b^*$ & $B \notin d$ & $C \in c$ & $C \notin a^*$	Hip. red.
3. $\vdash \neg(A \vee B) \vee \{[\neg[C \to (A \vee B)] \wedge \neg C] \to \neg(A \vee B)\}$	A28
4. $\neg(A \vee B) \vee \{[\neg[C \to (A \vee B)] \wedge \neg C] \to \neg(A \vee B)\} \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 3

5. $\neg(A \vee B) \in \mathcal{T}$ ó	$\mathcal{T}$ prima; 4
$[\neg[C \to (A \vee B)] \wedge \neg C] \to \neg(A \vee B) \in \mathcal{T}$	
6. $\vdash A \to (A \vee B)$	A4
7. $A \vee B \in \mathcal{T}^*$	$\mathcal{T}^*$ cerrada $\to$; 2, 6
8. $\neg(A \vee B) \notin \mathcal{T}$	Def. 12.4; 7
9. $[\neg[C \to (A \vee B)] \wedge \neg C] \to \neg(A \vee B) \in \mathcal{T}$	5, 8
10. $\vdash B \to (A \vee B)$	A4
11. $A \vee B \in b^*$	b^* cerrada $\to$; 2, 10
12. $\neg(A \vee B) \notin b$	Def. 12.4; 11
13. $\neg[C \to (A \vee B)] \wedge \neg C \notin a$	Def. 12.3; 1, 9, 12
14. $\neg[C \to (A \vee B)] \notin a$ ó $\neg C \notin a$	a cerrada &; 13
15. $\neg C \notin a$	Hip.
16. $C \in a^*$	Def. 12.4; 15

Pero 2 y 16 se contradicen. Por tanto,

17. $\neg[C \to (A \vee B)] \notin a$	Hip.
18. $C \to (A \vee B) \in a^*$	Def. 12.4; 17
19. $A \vee B \in d$	Def. 12.3; 1, 2, 18
20. $A \in d$ ó $B \in d$	d prima; 20

Pero 2 y 18 se contradicen.

p29. $(R\mathcal{T}ab \,\&\, Ra^*cd) \Rightarrow (c \leq \mathcal{T}$ ó $c \leq b$ ó $a \leq d)$

1. $R\mathcal{T}ab$ & Ra^*cd	Hip.
2. $A \in c$ & $A \notin \mathcal{T}$ & $B \in c$ &	Hip. red.
$B \notin b$ & $C \in a$ & $C \notin d$	
3. $\vdash \{[\neg[(A \wedge B) \to C] \wedge C] \to (A \wedge B)\} \vee (A \vee B)$	A29
4. $\{[\neg[(A \wedge B) \to C] \wedge C] \to (A \wedge B)\} \vee (A \vee B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 3
5. $[\neg[(A \wedge B) \to C] \wedge C] \to (A \wedge B) \in \mathcal{T}$ ó $(A \vee B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 4
6. $\vdash (A \wedge B) \to A$	A2
7. $A \wedge B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 2, 6
8. $[\neg[(A \wedge B) \to C] \wedge C] \to (A \wedge B) \in \mathcal{T}$	5, 7
9. $\vdash (A \wedge B) \to B$	A2
10. $A \wedge B \notin b$	b cerrada $\to$; 2, 9
11. $\neg[(A \wedge B) \to C] \wedge C \notin a$	Def. 12.3; 1, 8, 10
12. $\neg[(A \wedge B) \to C] \notin a$ ó $C \notin a$	a cerrada &; 11
13. $\neg[(A \wedge B) \to C] \notin a$	2, 12
14. $(A \wedge B) \to C \in a^*$	Def. 12.4; 13
15. $A \wedge B \in c$	c cerrada &; 2
16. $C \in d$	Def. 12.3; 1, 14, 15

Pero 2 y 16 se contradicen. ■

Una vez demostrado que los postulados son válidos en los modelos-Eb4 canónicos (o, mejor, en cada modelo-Lti canónico, $(1 \leq i \leq 8)$), la prueba de la completud de las lógicas-Lti respecto de la semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer procede de manera semejante a la prueba de completud de b4 (cf. Observación 14.1 y Teorema 13.1).

A lo largo de esta tercera parte se ha otorgado a cada lógica-Lti $(1 \leq i \leq 8)$ una semántica relacional ternaria tipo Routley y Meyer (secciones 11-14). Además, dicha semántica ha sido también desarrollada para la lógica base b4 (sección 13). De hecho, el método de prueba es genérico y podría aplicarse fácilmente a otras lógicas-Eb4 distintas de las aquí consideradas.

Parte 4: Semántica tipo Routley-Meyer con dos set-ups

15 Semántica tipo Routley-Meyer con dos set-ups para las lógicas-Lti

En esta sección, dotaré a las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) de una semántica tipo Routley-Meyer con 2 set-ups. Comienzo definiendo la noción de Modelos-Lti para este tipo de semántica.

Definición 15.1: Modelo-Lti en semántica R-M con dos set-ups. Un modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$) en semántica R-M con dos set-ups es una estructura (K, R, $*$, $\vDash$) donde

- K es un conjunto que únicamente contiene el elemento O y el elemento O^*;
- R es una relación ternaria entre elementos de K definida en cada lógica-Lti de acuerdo con la Definición 15.2.
- $*$ es un operador monario involutivo definido en K tal que para cualquier $x \in K$, $x = x^{**}$;
- $\vDash$ es una relación de evaluación de K a todas las f.b.f. que se rige por las siguientes condiciones (cláusulas) para cada variable proposicional p, f.b.f. A, B y a, $b \in K$:

  (i) $a \vDash p$ ó $a \nvDash p$

  (ii) $a \vDash A \wedge B$ syss $a \vDash A$ & $a \vDash B$

  (iii) $a \vDash A \vee B$ syss $a \vDash A$ ó $a \vDash B$

  (iv) $a \vDash A \to B$ syss para todo b, $c \in K$, ($Rabc$ & $b \vDash A$)$\Rightarrow$ $c \vDash B$

  (v) $a \vDash \neg A$ syss $a^* \nvDash A$

Definición 15.2: Definición de la relación ternaria R en cada lógica-Lti. R es una relación ternaria en K que se define de la manera siguiente para cada modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$):

Para todo a, b, $c \in K$,

modelo-Lt1: $Rabc$ syss ($a = O$ & $b = c$) ó ($a \neq b$ & $c = O^*$)[102];

modelo-Lt2: $Rabc$ syss $b = c$ ó ($a = c = O^*$ & $b = O$);

modelo-Lt3: $Rabc$ syss ($a = O$ & $b = c$) ó ($a = O^*$ & $b = O$);

modelo-Lt4: $Rabc$ syss $a = b = c$ ó ($c = O^*$ & $a \neq b$);

modelo-Lt5: $Rabc$ syss $a = O^*$ ó $b = c$;

modelo-Lt6: $Rabc$ syss $(a = O \ \& \ b = c)$ ó $a = b = c$ ó $(a = O^* \ \& \ b \neq c)$;

modelo-Lt7: $Rabc$ syss $(a = O \ \& \ b = c)$ ó $(b = c = O)$ ó $(a = O^* \ \& \ b \neq c)$;

modelo-Lt8: $Rabc$ syss $(a = O \ \& \ b = c)$ ó $(a \neq O \ \& \ b \neq c)$.

De manera equivalente, podemos definir R en cada modelo-Lti especificando el conjunto de postulados para cada uno de estos sistemas cuando $O \neq O^*$. En particular, R se definirá mediante un subconjunto del siguiente conjunto de postulados $\{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, $RO^*O^*O^*$, RO^*O^*O, $RO^*OO\}$. De acuerdo con la especificación de la relación ternaria que se acaba de mostrar, las siguientes relaciones (conjuntos de postulados) son las únicas posibles en cada modelo-Lti:

modelo-Lt1: $R = \{ROOO$, ROO^*O^*, $RO^*OO^*\}$;

modelo-Lt2: $R = \{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, $RO^*O^*O^*$, $RO^*OO\}$;

modelo-Lt3: $R = \{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, $RO^*OO\}$;

modelo-Lt4: $R = \{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, $RO^*O^*O^*\}$;

modelo-Lt5: $R = \{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, $RO^*O^*O^*$, RO^*O^*O, $RO^*OO\}$;

modelo-Lt6: $R = \{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, $RO^*O^*O^*$, $RO^*O^*O\}$;

modelo-Lt7: $R = \{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, RO^*O^*O, $RO^*OO\}$;

modelo-Lt8: $R = \{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, $RO^*O^*O\}$.

Podemos comprobar que todos los modelos comparten algunos postulados: aquellos que caracterizan los modelos-Lt1. En concreto, todos tienen los mismos postulados cuando el primer elemento es O (i.e., $a = O$), estos son $ROOO$ y ROO^*O^*. Además, cuando el primer elemento de la relación ternaria es O^* (i.e., $a = O^*$), los modelos comparten el postulado RO^*OO^*. Son estos, entonces, los tres únicos postulados comunes a los ocho modelos. Por otro lado, cada modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$) se diferencia de los demás según los postulados que caracterizan a R. En concreto, cabe resaltar que los modelos-Lt5 (definidos para la lógica E4) se caracterizan por mantener la relación R más compleja entre todos los modelos estudiados, dado que R está constituida en los modelos-Lt5 por los tres postulados compartidos por todos los modelos-Lti y otros tres postulados que, junto a los anteriores, constituyen todos los posibles cuando el primer elemento de la relación es O^*.

Definición 15.3: Verdad en modelos-Lti. Sea $\mathfrak{M}$ una clase de modelos-Lti ($1 \leq i \leq 8$), $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$ y $A \in \mathcal{F}$. Una f.b.f. A es verdadera en M syss $O \vDash A$ en ese modelo.

[102] Esta cláusula es equivalente a la cláusula de Brady (1982) para modelos-BN4, esto es, para lo que aquí denominamos modelos-Lt1: $(a \neq O$ ó $b = c)$ & $[a \neq O^*$ ó $(b = O \ \& \ c = O^*)]$.

Definición 15.4: Validez en una clase de modelos-Lti. Sea $\mathfrak{M}$ una clase de modelos-Lti ($1 \leq i \leq 8$). Una fórmula A es válida en $\mathfrak{M}$ (en símbolos, $\vDash A$) syss es verdadera en todo modelo perteneciente a esa clase de modelos-Lti ($O \vDash A$ en todo $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$).

Definición 15.5: Consecuencia semántica en modelos-Lti. Sea $\mathfrak{M}$ una clase de modelos-Lti ($1 \leq i \leq 8$). Entonces, para todo $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$ y para cualquier conjunto de f.b.f. Γ y $A \in \mathcal{F}$: $\Gamma \vDash_M A$ (A se sigue semánticamente a partir de Γ en el modelo M) syss $O \vDash A$ si $O \vDash \Gamma$ ($O \vDash \Gamma$ syss $O \vDash B$ para toda $B \in \Gamma$). Entonces, $\Gamma \vDash_{\mathfrak{M}} A$ (A es consecuencia-$\mathfrak{M}$ de Γ) syss $\Gamma \vDash_{\mathsf{M}} A$ para todo $\mathsf{M} \in \mathfrak{M}$.

Proposición 15.1: $O^* \vDash \neg A$ syss $O \nvDash A$. Para todo modelo-Lti M y f.b.f. A, $O^* \vDash \neg A$ syss $O \nvDash A$.

Prueba. La prueba es inmediata dada la definición de "modelo-Lti en semántica R-M con dos set-ups" (Definición 15.1): $O^* \vDash \neg A$ syss (cláusula v) $O^{**} \nvDash A$ syss ($*$ es una operación involutiva) $O \nvDash A$. ■

Lema 15.1: Lema de la implicación (L.I.). Para cualesquiera f.b.f. A, B, se da $\vDash A \to B$ syss ($a \vDash A \Rightarrow a \vDash B$, para todo $a \in K$) en todo modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Prueba.

I. De izquierda a derecha: si $\vDash A \to B$, entonces $a \vDash A \Rightarrow a \vDash B$ para todo $a \in K$ de todo modelo-Lti.

Debemos probar dos casos: (i) $O \vDash A \Rightarrow O \vDash B$; (ii) $O^* \vDash A \Rightarrow O^* \vDash B$.

Caso (i): $O \vDash A \Rightarrow O \vDash B$

1. $\vDash A \to B$	Hip.
2. $O \vDash A$	Hip.
3. $ROOO$	Def. 15.2
4. $O \vDash A \to B$	Def. 15.4; 1
5. $O \vDash B$	Def. 15.1; 2, 3, 4

Caso (ii): $O^* \vDash A \Rightarrow O^* \vDash B$

Utilizando el postulado ROO^*O^*, se prueba de manera semejante al caso (i).

II. De derecha a izquierda: si para todo $a \in K$ de todo modelo-Lti, $a \vDash A \Rightarrow a \vDash B$, entonces $\vDash A \to B$.

En este caso hay que probar $\vDash A \to B$, esto es, para cualesquiera x, $y \in K$ de un modelo-Lti cualquiera, si $ROxy$ & $x \vDash A$, entonces $y \vDash B$. Asumiré, por tanto, $ROxy$ & $x \vDash A$ y derivaré $y \vDash B$. Dado cómo se define R en los sistemas, solo es necesario considerar dos alternativas: $ROOO$ ó ROO^*O^*. Asumiré cada una de las mismas como hipótesis y derivaré en el primer caso $O \vDash B$ y, en el segundo, $O^* \vDash B$.

1. Para todo $a \in K$ de todo modelo, $a \vDash A \Rightarrow a \vDash B$	Hip.
2. Sean cualesquiera x, $y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash A$	Hip.
3. $ROOO$ ó ROO^*O^*	Def. 15.2; 2
4. $ROOO$ & $O \vDash A$	Hip.
5. $O \vDash A \Rightarrow O \vDash B$	1
6. $O \vDash B$	4, 5
7. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$	Hip.
8. $O^* \vDash A \Rightarrow O^* \vDash B$	1
9. $O^* \vDash B$	7, 8

■

Teorema 15.1: Corrección de las lógicas-Lti. Para cualquier conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, si $\Gamma \vdash_{Lti} A$, entonces $\Gamma \vDash_{Lti} A$.

Este teorema expresa que si A puede derivarse sintácticamente a partir del conjunto Γ en la lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$), entonces A es consecuencia semántica de Γ en la lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$). Demostraré, por tanto, que para cada uno de los sistemas los axiomas son válidos y las reglas preservan la validez.

Prueba.

(I) $A \in \Gamma$. La prueba es trivial.

(II) Las reglas preservan la validez-Lti. Demostraré que para toda lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$), las reglas preservan la validez.

A es el resultado de aplicar alguna de las reglas de la lógica base b4[103]:

(1) A es el resultado de aplicar **ADJ**: si $\Gamma \vdash B$ & $\Gamma \vdash C$, entonces $\Gamma \vdash B \wedge C$. A es entonces $B \wedge C$.

Supondré $\Gamma \vDash B$ & $\Gamma \vDash C$; más aún, $O \vDash \Gamma$. Y derivaré $O \vDash B \wedge C$[104].

1. $\Gamma \vDash B$	Hip.
2. $\Gamma \vDash C$	Hip.
3. $O \vDash \Gamma$	Hip.
4. $O \vDash B$	Def. 15.4; 1, 3
5. $O \vDash C$	Def. 15.4; 2, 3
6. $O \vDash B \wedge C$	Def. 15.1; 4, 5

[103] Las pruebas de las reglas ADJ, MP, MPd, CONd y CTEd son iguales en todos los sistemas considerados. No obstante, hay algunas diferencias entre sistemas para las pruebas de PREFd y SUFd. Probaré que estas dos reglas preservan la validez en aquel sistema con la relación R más compleja: Lt5 (i.e., E4; véase la Definición 15.2). La prueba para el resto de sistemas se sigue de esta: basta con omitir parte de la prueba aportada para E4.

[104] En el resto de reglas que siguen, procederé de modo semejante.

(2) A es el resultado de aplicar **MP**: si $\vdash B$ & $\vdash B \to A$, entonces $\vdash A$.

1. $\Gamma \vDash B$	Hip.
2. $\Gamma \vDash B \to A$	Hip.
3. $O \vDash \Gamma$	Hip.
4. $O \vDash B$	Def. 15.4; 1, 3
5. $O \vDash A \to B$	Def. 15.4; 2, 3
6. $ROOO$	Def. 15.2
7. $O \vDash A$	Def. 15.1; 4, 5, 6

(3) A es el resultado de aplicar **MPd**: si $\vdash D \vee B$ & $\vdash D \vee (B \to C)$, entonces $\vdash D \vee C$. A es entonces $D \vee C$.

1. $\Gamma \vDash D \vee B$	Hip.
2. $\Gamma \vDash D \vee (B \to C)$	Hip.
3. $O \vDash \Gamma$	Hip.
4. $O \vDash D \vee B$	Def. 15.4; 1, 3
5. $O \vDash D \vee (B \to C)$	Def. 15.4; 2, 3
6. $ROOO$	Def. 15.2
7. $O \vDash D$ ó $O \vDash B$	Def. 15.1; 4
8. $O \vDash D$	Hip.
9. $O \vDash D \vee C$	Def. 15.1; 8
10. $O \vDash B$	Hip.
11. $O \vDash D$ ó $O \vDash B \to C$	Def. 15.1; 5
12. $O \vDash D$	Hip.
13. $O \vDash D \vee C$	Def. 15.1; 12
14. $O \vDash B \to C$	Hip.
15. $O \vDash C$	Def. 15.1; 6, 10, 14
16. $O \vDash D \vee C$	Def. 15.1; 15

(4) A es el resultado de aplicar **CONd**: si $\vdash D \vee (B \to C)$, entonces $\vdash D \vee (\neg C \to \neg B)$. A es entonces $D \vee (\neg C \to \neg B)$.

En este caso, procederé por *reductio*, esto es, supondré $O \nvDash D \vee (\neg C \to \neg B)$ y derivaré una contradicción.

1. $\Gamma \vDash D \vee (B \to C)$	Hip.
2. $O \vDash \Gamma$	Hip.
3. $O \nvDash D \vee (\neg C \to \neg B)$	Hip. red.
4. $O \vDash D \vee (B \to C)$	Def. 15.4; 1, 2
5. $O \nvDash D$ & $O \nvDash \neg C \to \neg B$	Def. 15.1; 3
6. $O \vDash D$ ó $O \vDash B \to C$	Def. 15.1; 4
7. $O \vDash B \to C$	5, 6
8. Hay $x, y \in K$ tales que $ROxy$ & $x \vDash \neg C$ & $y \nvDash \neg B$	Def. 15.1; 5

9. $(ROOO \ \& \ O \vDash \neg C \ \& \ O \nvDash \neg B)$ ó $(ROO^*O^* \ \& \ O^* \vDash \neg C \ \& \ O^* \nvDash \neg B)$ — Def. 15.2; 8
10. $ROOO \ \& \ O \vDash \neg C \ \& \ O \nvDash \neg B$ — Hip.
11. $O^* \vDash B$ — Def. 15.1; 10
12. ROO^*O^* — Def. 15.2
13. $O^* \vDash C$ — Def. 15.1; 7, 11, 12
14. $O^* \nvDash C$ — Def. 15.1; 13

Pero 13 y 14 se contradicen. Asumimos entonces

15. $ROO^*O^* \ \& \ O^* \vDash \neg C \ \& \ O^* \nvDash \neg B$ — Hip.
16. $ROOO$ — Def. 15.2
17. $O \vDash B$ — Prop. 15.1; 15
18. $O \vDash C$ — cl. iv; 7, 16, 17
19. $O \nvDash C$ — Prop. 1.6; 15

Pero 18 y 19 se contradicen.

(5) A es el resultado de aplicar **SUFd**: si $\vdash E \vee (B \to C)$, entonces $\vdash E \vee [(C \to D) \to (B \to D)]$. A es entonces $E \vee [(C \to D) \to (B \to D)]$[105].

De nuevo, procedo mediante *reductio*.

1. $\Gamma \vDash E \vee (B \to C)$ — Hip.
2. $O \vDash \Gamma$ — Hip.
3. $O \nvDash E \vee [(C \to D) \to (B \to D)]$ — Hip. red.
4. $O \vDash E \vee (B \to C)$ — Def. 15.4; 1, 2
5. $O \nvDash E \ \& \ O \nvDash (C \to D) \to (B \to D)$ — Def. 15.1; 3
6. $O \vDash E$ ó $O \vDash B \to C$ — Def. 15.1; 4
7. $O \vDash B \to C$ — 5, 6
8. Hay $x, y \in K$ tales que $ROxy \ \& \ x \vDash C \to D \ \& \ y \nvDash B \to D$ — Def. 15.1; 5
9. $(ROOO \ \& \ O \vDash C \to D \ \& \ O \nvDash B \to D)$ ó $(ROO^*O^* \ \& \ O^* \vDash C \to D \ \& \ O^* \nvDash B \to D)$ — Def. 15.2; 8
10. $ROOO \ \& \ O \vDash C \to D \ \& \ O \nvDash B \to D$ — Hip.
11. Hay $z, w \in K$, $ROzw$, $z \vDash B$, $w \nvDash D$ — Def. 15.1; 10
12. $(ROOO \ \& \ O \vDash B \ \& \ O \nvDash D)$ ó $(ROO^*O^* \ \& \ O^* \vDash B \ \& \ O^* \nvDash D)$ — Def. 15.2; 11

[105] La prueba que aquí figura es la que se adapta al sistema Lt5 (E4), cuya relación ternaria R es, de entre todos los sistemas que se consideran, la que se determina mediante un mayor número de casos. En consecuencia, para adaptar la prueba de esta regla a otro sistema con diferentes postulados para R, en particular, un subconjunto de los que se mantienen en E4 $[R = \{ROOO, ROO^*O^*, RO^*OO, RO^*O^*O, RO^*O^*O^*, RO^*OO^*\}]$, lo único que se precisa es omitir la parte de la prueba para E4 que refiere al postulado específico no incluido en la definición de R del sistema en cuestión. En particular, la prueba de SUFd para BN4 finalizaría en el paso 25; para Lt2, en el paso 33, y para Lt3, en el paso 29. Además, para la prueba en Lt4, omitiríamos los pasos 26-29 y 34-36; en Lt6, los pasos 26-29; en Lt7, los pasos 30-33, y en Lt8, los pasos 26-33.

13.	$ROOO$ & $O \vDash B$ & $O \nvDash D$	Hip.
14.	$O \vDash C$	Def. 15.1; 7, 13
15.	$O \vDash D$	Def. 15.1; 10, 14

Pero 13 y 15 se contradicen. Asumimos entonces,

16.	ROO^*O^* & $O^* \vDash B$ & $O^* \nvDash D$	Hip.
17.	$O^* \vDash C$	Def. 15.1; 7, 16
18.	$O^* \vDash D$	Def. 15.1; 10, 16, 17

Pero 16 y 18 se contradicen. Asumimos entonces,

19.	ROO^*O^* & $O^* \vDash C \to D$ & $O^* \nvDash B \to D$	Hip.
20.	Hay $z, w \in K$, RO^*zw, $z \vDash B$, $w \nvDash D$	Def. 15.1; 19
21.	(RO^*OO^* & $O \vDash B$ & $O^* \nvDash D$) ó (RO^*OO & $O \vDash B$ & $O \nvDash D$) ó ($RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash B$ & $O^* \nvDash D$) ó (RO^*O^*O & $O^* \vDash B$ & $O \nvDash D$)	Def. 15.2; 20
22.	RO^*OO^* & $O \vDash B$ & $O^* \nvDash D$	Hip.
23.	$ROOO$	Def. 15.2
24.	$O \vDash C$	Def. 15.1; 7, 22, 23
25.	$O^* \vDash D$	Def. 15.1; 19, 22, 24

Pero 22 y 25 se contradicen. Asumimos entonces,

26.	RO^*OO & $O \vDash B$ & $O \nvDash D$	Hip.
27.	$ROOO$	Def. 15.2
28.	$O \vDash C$	Def. 15.1; 7, 26, 27
29.	$O \vDash D$	Def. 15.1; 19, 26, 28

Pero 26 y 29 se contradicen. Asumimos entonces,

30.	$RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash B$ & $O^* \nvDash D$	Hip.
31.	ROO^*O^*	Def. 15.2
32.	$O^* \vDash C$	Def. 15.1; 7, 30, 31
33.	$O^* \vDash D$	Def. 15.1; 19, 30 , 32

Pero 30 y 33 se contradicen. Asumimos entonces,

34.	RO^*O^*O & $O^* \vDash B$ & $O \nvDash D$	Hip.
35.	$O^* \vDash C$	Def. 15.1; 7, 19, 34
36.	$O \vDash D$	Def. 15.1; 19, 34, 35

Pero 34 y 36 se contradicen.

(6) A es el resultado de aplicar **PREFd**: si $\vdash E \vee (B \to C)$, entonces $\vdash$

$E \vee [(D \to B) \to (D \to C)]$. A es entonces $E \vee [(D \to B) \to (D \to C)]$[106].

1. $\Gamma \vDash E \vee (B \to C)$	Hip.
2. $O \vDash \Gamma$	Hip.
3. $O \nvDash E \vee [(D \to B) \to (D \to C)]$	Hip. red.
4. $O \vDash E \vee (B \to C)$	Def. 15.4; 1, 2
5. $O \nvDash E$ & $O \nvDash (D \to B) \to (D \to C)$	Def. 15.1; 3
6. $O \vDash E$ ó $O \vDash B \to C$	Def. 15.1; 4
7. $O \vDash B \to C$	5, 6
8. Hay $x, y \in K$ tales que $ROxy$ & $x \vDash D \to B$ & $y \nvDash D \to C$	Def. 15.1; 5
9. ($ROOO$ & $O \vDash D \to B$ & $O \nvDash D \to C$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash D \to B$ & $O^* \nvDash D \to C$)	Def. 15.2; 8
10. $ROOO$ & $O \vDash D \to B$ & $O \nvDash D \to C$	Hip.
11. Hay $z, w \in K$, $ROzw$, $z \vDash D$, $w \nvDash C$	Def. 15.1; 10
12. ($ROOO$ & $O \vDash D$ & $O \nvDash C$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash D$ & $O^* \nvDash C$)	Def. 15.2; 11
13. $ROOO$ & $O \vDash D$ & $O \nvDash C$	Hip.
14. $O \vDash B$	Def. 15.1; 10, 13
15. $O \vDash C$	Def. 15.1; 7, 13, 14

Pero 13 y 15 se contradicen. Asumimos entonces,

16. ROO^*O^* & $O^* \vDash D$ & $O^* \nvDash C$	Hip.
17. $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 10, 16
18. $O^* \vDash C$	Def. 15.1; 7, 16, 17

Pero 16 y 18 se contradicen. Asumimos entonces,

19. ROO^*O^* & $O^* \vDash D \to B$ & $O^* \nvDash D \to C$	Hip.
20. Hay $z, w \in K$, RO^*zw, $z \vDash D$, $w \nvDash C$	Def. 15.1; 19
21. (RO^*OO^* & $O \vDash D$ & $O^* \nvDash C$) ó (RO^*OO & $O \vDash D$ & $O \nvDash C$) ó ($RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash D$ & $O^* \nvDash C$) ó (RO^*O^*O & $O^* \vDash D$ & $O \nvDash C$)	Def. 15.2; 20
22. RO^*OO^* & $O \vDash D$ & $O^* \nvDash C$	Hip.
23. $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 19, 22
24. $O^* \vDash C$	Def. 15.1; 7, 19, 23

Pero 22 y 24 se contradicen. Asumimos entonces,

[106]El caso de PREFd es semejante al probado anteriormente para SUFd. Por tanto, por idénticas razones, la prueba que aquí figura es también la que se adapta al sistema E4. (Véase la nota al pie en prueba de la regla SUFd.) En particular, la prueba de PREFd para BN4 finalizaría en el paso 24; para Lt2, en el paso 32, y para Lt3, en el paso 28. Además, para la prueba en Lt4 omitiríamos los pasos 25-28 y 33-36; en Lt6, los pasos 25-28; en Lt7, los pasos 29-32, y en Lt8, los pasos 25-32.

25. RO^*OO & $O \vDash D$ & $O \nvDash C$ Hip.
26. $O \vDash B$ Def. 15.1; 19, 25
27. $ROOO$ Def. 15.2
28. $O \vDash C$ Def. 15.1; 7, 26, 27

Pero 25 y 28 se contradicen. Asumimos entonces,

29. $RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash D$ & $O^* \nvDash C$ Hip.
30. $O^* \vDash B$ Def. 15.1; 19, 29
31. ROO^*O^* Def. 15.2
32. $O^* \vDash C$ Def. 15.1; 7, 30, 31

Pero 29 y 32 se contradicen. Asumimos entonces,

33. RO^*O^*O & $O^* \vDash D$ & $O \nvDash C$ Hip.
34. $O \vDash B$ Def. 15.1; 19, 33
35. $ROOO$ Def. 15.2
36. $O \vDash C$ Def. 15.1; 7, 34, 35

Pero 33 y 36 se contradicen.

(7) A es el resultado de aplicar **CTEd**: si $\vdash D \vee (B \wedge \neg C)$, entonces $\vdash D \vee \neg(B \to C)$. A es entonces $D \vee \neg(B \to C)$.

1. $\Gamma \vDash D \vee (B \wedge \neg C)$ Hip.
2. $O \vDash \Gamma$ Hip.
3. $O \nvDash D \vee \neg(B \to C)$ Hip. red.
4. $O \vDash D \vee (B \wedge \neg C)$ Def. 15.4; 1, 2
5. $O \nvDash D$ & $O \nvDash \neg(B \to C)$ Def. 15.1; 3
6. $O \vDash D$ ó $O \vDash B \wedge \neg C$ Def. 15.1; 4
7. $O \vDash B \wedge \neg C$ 5, 6
8. $O \vDash B$ & $O \vDash \neg C$ Def. 15.1; 7
9. $O^* \vDash B \to C$ Def. 15.1; 5
10. RO^*OO^* Def. 15.2
11. $O^* \vDash C$ Def. 15.1; 8, 9, 10
12. $O^* \nvDash C$ Def. 15.1; 8

Pero 11 y 12 se contradicen.

(III) Los axiomas propios de cada lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) son válidos-Lti.

Primero, probaré que los axiomas comunes a todos los sistemas son válidos-Lti, esto es, válidos en cada extensión de b4 aquí tratada. Después, probaré que los axiomas propios de cada sistema son válidos en el mismo. Con el fin de facilitar la prueba de la validez de los axiomas, utilizaré el Lema de la implicación (cf. Lema 15.1).

Los siguientes axiomas son válidos-Lti.

Demostraré que los siguientes axiomas son válidos tanto en la lógica base como en cada una de las extensiones de dicha lógica consideradas en esta investigación, Lti ($1 \leq i \leq 8$). La mayor parte de las pruebas son iguales en todos los sistemas. No obstante, para aquellas pruebas donde figure alguna diferencia entre sistemas (A3, A5, A9 y A10) procederé de manera semejante a las pruebas anteriores sobre la preservación de validez de las reglas SUFd y PREFd, es decir, expondré la prueba más compleja, en este caso, la de Lt5 (E4). Para obtener la prueba de la validez de estos axiomas para los otros sistemas (incluido b4), basta con omitir una serie de pasos de la prueba dada para Lt5. El conjunto de pasos que se deban omitir depende de cada lógica en cuestión.

A1 $A \to A$

Por reductio, si $A \to A$ no fuera válido, tendríamos o bien (i) $O \vDash A$ y $O \nvDash A$ o bien (ii) $O^* \vDash A$ y $O^* \nvDash A$. Dado que obtendríamos una contradicción, A1 ha de ser válido.

A2 $(A \wedge B) \to A$ / $(A \wedge B) \to B$

Probaré A2 en la forma $(A \wedge B) \to A$. La forma $(A \wedge B) \to B$ se prueba de modo semejante.

Caso (i): $O \vDash A \wedge B \Rightarrow O \vDash A$

1. $O \vDash A \wedge B$	Hip.
2. $O \vDash A$	Def. 15.1; 1

Caso (ii): $O^* \vDash A \wedge B \Rightarrow O^* \vDash A$

1. $O^* \vDash A \wedge B$	Hip.
2. $O^* \vDash A$	Def. 15.1; 1

A3 $[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$

Como ocurría en las pruebas de SUFd y PREFd, la prueba de A3 es mínimamente distinta para cada uno de los sistemas de la tesis. En particular, las modificaciones dependerán de la especificación de R para el conjunto $\{O, O^*\}$ en la semántica 2 set-ups para el sistema en cuestión[107].

[107] De nuevo, la prueba que aquí figura es la que se adapta al sistema E4, cuya relación ternaria R es, de entre todos los sistemas que se consideran, la que contiene el mayor número de casos (postulados) para determinar la relación ternaria. En consecuencia, para adaptar la prueba de este axioma a otro sistema con una relación ternaria definida de manera diferente, en particular, una definida sobre un subconjunto de los postulados que se dan en E4 [R =$\{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO, RO^*O^*O, $RO^*O^*O^*$, $RO^*OO^*\}$], lo único que se pre-

Caso (i): $\quad O \vDash (A \to B) \wedge (A \to C) \Rightarrow O \vDash A \to (B \wedge C)$

1. $O \vDash (A \to B) \wedge (A \to C)$	Hip.
2. Sean x, $y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash A$ (hay que demostrar $y \vDash B \wedge C$)	Hip.
3. $O \vDash A \to B$ & $O \vDash A \to C$	Def. 15.1; 1
4. ($ROOO$ & $O \vDash A$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$)	Def. 15.2; 2
5. $ROOO$ & $O \vDash A$	Hip.
6. $O \vDash C$, $O \vDash B$	Def. 15.1; 3, 5
7. $O \vDash B \wedge C$	Def. 15.1; 6
8. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$	Hip.
9. $O^* \vDash B$, $O^* \vDash C$	Def. 15.1; 3, 8
10. $O^* \vDash B \wedge C$	Def. 15.1; 9

Queda demostrado entonces que, para todo x, y tales que $ROxy$ y $x \vDash A$, se deriva $y \vDash B \wedge C$.

Caso (ii): $\quad O^* \vDash (A \to B) \wedge (A \to C) \Rightarrow O^* \vDash A \to (B \wedge C)$

1. $O^* \vDash (A \to B) \wedge (A \to C)$	Hip.
2. Sean x, $y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A$ (hay que demostrar $y \vDash B \wedge C$)	Hip.
3. $O^* \vDash A \to B$ & $O^* \vDash A \to C$	Def. 15.1; 1
4. (RO^*OO^* & $O \vDash A$) ó (RO^*OO & $O \vDash A$) ó ($RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$) ó (RO^*O^*O & $O^* \vDash A$)	Def. 15.2; 2
5. RO^*OO^* & $O \vDash A$	Hip.
6. $O^* \vDash C$, $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 3, 5
7. $O^* \vDash B \wedge C$	Def. 15.1; 6
8. RO^*OO & $O \vDash A$	Hip.
9. $O \vDash B$, $O \vDash C$	Def. 15.1; 3, 8
10. $O \vDash B \wedge C$	Def. 15.1; 9
11. $RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$	Hip.
12. $O^* \vDash B$, $O^* \vDash C$	Def. 15.1; 3, 11
13. $O^* \vDash B \wedge C$	Def. 15.1; 12
14. RO^*O^*O & $O^* \vDash A$	Hip.
15. $O \vDash B$, $O \vDash C$	Def. 15.1; 3, 14
16. $O^* \vDash B \wedge C$	Def. 15.1; 15

cisa es omitir la parte de la prueba para E4 que refiere al postulado específico no incluido en la relación ternaria del sistema en cuestión. Por ejemplo, la prueba de A3 para BN4 es semejante a la de E4 aquí reflejada. De hecho, el caso (i) es idéntico en ambos sistemas. La diferencia se reduciría simplemente a que, dada la especificación de la relación ternaria en BN4, R ={$ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*}, en el caso (ii) se omitirían todos los pasos a partir del número 9, esto es, la prueba del caso (ii) de A3 en BN4 concluiría en el paso 7. Por tanto, aportaré en esta y posteriores pruebas semejantes la demostración que se adapta al sistema Lt5, pues basta con cotejar la Definición 15.2 para saber qué pasos habría que eliminar de dicha prueba en el caso de las otras lógicas-Lti.

Queda demostrado entonces que, para todo x e y tales que RO^*xy y $x \vDash A$, se deriva $y \vDash B \wedge C$.

A4 $A \to (A \vee B)$ / $B \to (A \vee B)$

Probaré A4 en la forma $A \to (A \vee B)$. La forma $B \to (A \vee B)$ se prueba de modo semejante.

Caso (i): $O \vDash A \Rightarrow O \vDash A \vee B$

1. $O \vDash A$	Hip.
2. $O \vDash A \vee B$	Def. 15.1; 1

Caso (ii): $O^* \vDash A \Rightarrow O^* \vDash A \vee B$

1. $O^* \vDash A$	Hip.
2. $O^* \vDash A \vee B$	Def. 15.1; 1

A5 $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$

Caso (i): $O \vDash (A \to C) \wedge (B \to C) \Rightarrow O \vDash (A \vee B) \to C$

1. $O \vDash (A \to C) \wedge (B \to C)$	Hip.
2. Sean x, $y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash A \vee B$ (hemos de demostrar $y \vDash C$)	Hip.
3. $O \vDash A \to C$ & $O \vDash B \to C$	Def. 15.1; 1
4. ($ROOO$ & $O \vDash A \vee B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A \vee B$)	Def. 15.2; 2
5. $ROOO$ & $O \vDash A \vee B$	Hip.
6. $O \vDash A$ ó $O \vDash B$	Def. 15.1; 5
7. $O \vDash A$	Hip.
8. $O \vDash C$	Def. 15.1; 3, 5, 7
9. $O \vDash B$	Hip.
10. $O \vDash C$	Def. 15.1; 3, 5, 9
11. ROO^*O^* & $O^* \vDash A \vee B$	Hip.
12. $O^* \vDash A$ ó $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 11
13. $O^* \vDash A$	Hip.
14. $O^* \vDash C$	Def. 15.1; 3, 11, 13
15. $O^* \vDash B$	Hip.
16. $O^* \vDash C$	Def. 15.1; 3, 11, 15

La siguiente prueba es también mínimamente diferente en cada sistema considerado. (Véanse las últimas notas al pie.)

Caso (ii): $O^* \vDash (A \to C) \wedge (B \to C) \Rightarrow O^* \vDash (A \vee B) \to C$

1. $O^* \vDash (A \to C) \wedge (B \to C)$	Hip.
2. Sean x, $y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A \vee B$ (hemos de demostrar $y \vDash C$)	Hip.
3. $O^* \vDash A \to C$ & $O^* \vDash B \to C$	Def. 15.1; 1
4. (RO^*OO^* & $O \vDash A \vee B$) ó (RO^*OO & $O \vDash A \vee B$) ó ($RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A \vee B$) ó (RO^*O^*O & $O^* \vDash A \vee B$)	Def. 15.2; 2
5. RO^*OO^* & $O \vDash A \vee B$	Hip.
6. $O \vDash A$ ó $O \vDash B$	Def. 15.1; 5
7. $O \vDash A$	Hip.
8. $O \vDash C$	Def. 15.1; 3, 5, 7
9. $O \vDash B$	Hip.
10. $O \vDash C$	Def. 15.1; 3, 5, 9
11. RO^*OO & $O \vDash A \vee B$	Hip.
12. $O \vDash A$ ó $O \vDash B$	Def. 15.1; 11
13. $O \vDash A$	Hip.
14. $O \vDash C$	Def. 15.1; 3, 11, 13
15. $O \vDash B$	Hip.
16. $O \vDash C$	Def. 15.1; 3, 11, 15
17. $RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A \vee B$	Hip.
18. $O^* \vDash A$ ó $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 17
19. $O^* \vDash A$	Hip.
20. $O^* \vDash C$	Def. 15.1; 3, 17, 19
21. $O^* \vDash B$	Hip.
22. $O^* \vDash C$	Def. 15.1; 3, 17, 21
23. RO^*O^*O & $O^* \vDash A \vee B$	Hip.
24. $O^* \vDash A$ ó $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 23
25. $O^* \vDash A$	Hip.
26. $O \vDash C$	Def. 15.1; 3, 23, 25
27. $O^* \vDash B$	Hip.
28. $O \vDash C$	Def. 15.1; 3, 23, 27

A6 $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

Caso (i): $O \vDash A \wedge (B \vee C) \Rightarrow O \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

1. $O \vDash A \wedge (B \vee C)$	Hip.
2. $O \vDash A$	Def. 15.1; 1

3. $O \vDash B \vee C$	Def. 15.1; 1
4. $O \vDash B$ ó $O \vDash C$	Def. 15.1; 3
5. $O \vDash B$	Hip.
6. $O \vDash A \wedge B$	Def. 15.1; 2, 5
7. $O \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Def. 15.1; 6
8. $O \vDash C$	Hip.
9. $O \vDash A \wedge C$	Def. 15.1; 2, 8
10. $O \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Def. 15.1; 9

Caso (ii): $O^* \vDash A \wedge (B \vee C) \Rightarrow O^* \vDash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Se prueba de modo semejante al caso (i).

A7 $\neg\neg A \to A$

Caso (i): $O \vDash \neg\neg A \Rightarrow O \vDash A$

1. $O \vDash \neg\neg A$	Hip.
2. $O^* \nvDash \neg A$	Def. 15.1; 1
3. $O^{**} \vDash A$	Def. 15.1; 2
4. $O \vDash A$	$*$ es involutiva; 3

Caso (ii): $O^* \vDash \neg\neg A \Rightarrow O^* \vDash A$

1. $O^* \vDash \neg\neg A$	Hip.
2. $O \nvDash \neg A$	Prop. 15.1; 1
3. $O^* \vDash A$	Def. 15.1; 2

A8 $A \to \neg\neg A$

Caso (i): $O \vDash A \Rightarrow O \vDash \neg\neg A$

1. $O \vDash A$	Hip.
2. $O^{**} \vDash A$	$*$ es involutiva; 1
3. $O^* \nvDash \neg A$	Def. 15.1; 2
4. $O \vDash \neg\neg A$	Def. 15.1; 3

Caso (ii): $O^* \vDash A \Rightarrow O^* \vDash \neg\neg A$

1. $O^* \vDash A$	Hip.
2. $O \nvDash \neg A$	Def. 15.1; 1
3. $O^* \vDash \neg\neg A$	Prop. 15.1; 2

A9 $\neg A \rightarrow [A \vee (A \rightarrow B)]$

Caso (i): $O \vDash \neg A \Rightarrow O \vDash A \vee (A \rightarrow B)$

1.	$O \vDash \neg A$ (i.e., $O^* \nvDash A$)	Hip.
2.	$O \nvDash A \vee (A \rightarrow B)$	Hip. red.
3.	$O \nvDash A$ & $O \nvDash A \rightarrow B$	Def. 15.1; 2
4.	Hay $x, y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 3
5.	($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (ROO^*O^*& $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 4
6.	$ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 6 se contradicen. Asumimos entonces,

7.	ROO^*O^*& $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 1 y 7 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg A \Rightarrow O^* \vDash A \vee (A \rightarrow B)$[108]

1.	$O^* \vDash \neg A$ (i.e., $O \nvDash A$)	Hip.
2.	$O^* \nvDash A \vee (A \rightarrow B)$	Hip. red.
3.	$O^* \nvDash A$ & $O^* \nvDash A \rightarrow B$	Def. 15.1; 2
4.	Hay $x, y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 3
5.	($RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$) ó (RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$) ó (RO^*O^*O & $O^* \vDash A$ & $O \nvDash B$)	Def. 15.2; 4
6.	$RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 6 se contradicen. Asumimos entonces,

7.	RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 1 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8.	RO^*OO^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 8 se contradicen. Asumimos entonces,

9.	RO^*O^*O & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 1 y 9 se contradicen.

[108] El caso (ii) de esta prueba es también mínimamente diferente en cada sistema considerado. Véanse las notas al pie de A3, SUFd y PREFd.

A10 $B \to [\neg B \vee (A \to B)]$

Caso (i): $O \vDash B \Rightarrow O \vDash \neg B \vee (A \to B)$

1. $O \vDash B$	Hip.
2. $O \nvDash \neg B \vee (A \to B)$	Hip. red.
3. $O \nvDash \neg B$ (i.e., $O^* \vDash B$) & $O \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 2
4. Hay x, $y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 3
5. ($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 4
6. $ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 1 y 6 se contradicen. Asumimos entonces,

8. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 8 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash B \Rightarrow O^* \vDash \neg B \vee (A \to B)$[109]

1. $O^* \vDash B$	Hip.
2. $O^* \nvDash \neg B \vee (A \to B)$	Hip. red.
3. $O^* \nvDash \neg B$ (i.e., $O \vDash B$) & $O^* \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 2
4. Hay x, $y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 3
5. ($RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$) ó (RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$) ó (RO^*O^*O & $O^* \vDash A$ & $O \nvDash B$)	Def. 15.2; 4
6. $RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 1 y 6 se contradicen. Asumimos entonces,

7. RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 1 y 8 se contradicen. Asumimos entonces,

9. RO^*O^*O & $O^* \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 9 se contradicen.

[109] Como en A3, A5 y A9, el caso (ii) de A10 esta es también mínimamente diferente en cada sistema considerado. Véanse las anteriores notas al pie.

A11 $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)]$

1. $O \nvDash (A \vee \neg B) \vee (A \to B)$	Hip. red.
2. $O \nvDash A \vee \neg B$ & $O \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 1
3. $O \nvDash A$ & $O \nvDash \neg B$ (i.e., $O^* \vDash B$)	Def. 15.1; 2
4. Hay $x, y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 2
5. ($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 4
6. $ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 6 se contradicen. Asumimos entonces,

8. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 8 se contradicen.

A12 $(A \to B) \vee [(\neg A \wedge B) \to (A \to B)]$

1. $O \nvDash (A \to B) \vee [(\neg A \wedge B) \to (A \to B)]$	Hip. red.
2. $O \nvDash A \to B$ & $O \nvDash (\neg A \wedge B) \to (A \to B)$	Def. 15.1; 1
3. Hay $x, y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash \neg A \wedge B$ & $y \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 2
4. ($ROOO$ & $O \vDash \neg A \wedge B$ & $O \nvDash A \to B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg A \wedge B$ & $O^* \nvDash A \to B$)	Def. 15.2; 3
5. $ROOO$ & $O \vDash \neg A \wedge B$ & $O \nvDash A \to B$	Hip.
6. $O \vDash \neg A$ (i.e., $O^* \nvDash A$) & $O \vDash B$	Def. 15.1; 5
7. Hay $z, w \in K$, $ROzw$ & $z \vDash A$ & $w \nvDash B$	Def. 15.1; 5
8. ($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 7
9. $ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 6 y 9 se contradicen. Asumimos entonces,

10. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 6 y 10 se contradicen. Asumimos entonces,

11. ROO^*O^*& $O^* \vDash \neg A \wedge B$ & $O^* \nvDash A \to B$	Hip.
12. $O^* \vDash \neg A$ (i.e., $O \nvDash A$) & $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 11
13. Hay $x, y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 2
14. ($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 13
15. $ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 12 y 15 se contradicen. Asumimos entonces,

16. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$ Hip.

Pero 12 y 16 se contradicen.

Los siguientes axiomas son válidos-Lt1.

Pruebo ahora que los axiomas propios del sistema Lt1 (BN4) son válidos.

A13 $(A \wedge \neg B) \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$

Caso (i): $O \vDash (A \wedge \neg B) \Rightarrow O \vDash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

1. $O \vDash A \wedge \neg B$	Hip.
2. $O \nvDash (A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	Hip. red.
3. $O \vDash A$ & $O \vDash \neg B$	Def. 15.1; 1
4. Hay $x, y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash A \wedge \neg B$ & $y \nvDash \neg(A \rightarrow B)$	Def. 15.1; 2
5. ($ROOO$ & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O \nvDash \neg(A \rightarrow B)$) ó ($ROO^*O^*$ & $O^* \vDash A \wedge \neg B$ & $O^* \nvDash \neg(A \rightarrow B)$)	Def. 15.2; 4
6. $ROOO$ & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O \nvDash \neg(A \rightarrow B)$	Hip.
7. $O \vDash A$ & $O \vDash \neg B$ (i.e., $O^* \nvDash B$)	Def. 15.1; 6
8. $O^* \vDash A \rightarrow B$	Def. 15.1; 6
9. RO^*OO^*	Def. 15.2
10. $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 7, 8, 9

Pero 8 y 11 se contradicen. Asumimos entonces,

11. ROO^*O^* & $O^* \vDash A \wedge \neg B$ & $O^* \nvDash \neg(A \rightarrow B)$	Hip.
12. $O \vDash A \rightarrow B$	Prop. 15.1; 11
13. $ROOO$	Def. 15.2
14. $O \vDash B$	Def. 15.1; 3, 12, 13
15. $O^* \vDash A$ & $O^* \vDash \neg B$ (i.e., $O \nvDash B$)	Def. 15.1; 11

Pero 14 y 15 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash (A \wedge \neg B) \Rightarrow O^* \vDash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

1. $O^* \vDash A \wedge \neg B$	Hip.
2. $O^* \nvDash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	Hip. red.
3. $O^* \vDash A$ & $O^* \vDash \neg B$ (i.e., $O \nvDash B$)	Def. 15.1; 1
4. Hay $x, y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A \wedge \neg B$ & $y \nvDash \neg(A \rightarrow B)$	Def. 15.1; 2
5. RO^*OO^* & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O^* \nvDash \neg(A \rightarrow B)$	Def. 15.2; 4
6. $O \vDash A$, $O \vDash \neg B$	Def. 15.1; 5
7. $O \vDash A \rightarrow B$	Prop. 15.1; 5
8. $ROOO$	Def. 15.2
9. $O \vDash B$	Def. 15.1; 6, 7, 8

Pero 3 y 9 se contradicen.

A14 $A \vee [\neg(A \to B) \to A]$

1. $O \nvDash A \vee [\neg(A \to B) \to A]$	Hip. red.
2. $O \nvDash A$ & $O \nvDash \neg(A \to B) \to A$	Def. 15.1; 1
3. Hay $x, y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash \neg(A \to B)$ & $y \nvDash A$	Def. 15.1; 2
4. ($ROOO$ & $O \vDash \neg(A \to B)$ & $O \nvDash A$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg(A \to B)$ & $O^* \nvDash A$)	Def. 15.2; 3
5. $ROOO$ & $O \vDash \neg(A \to B)$ & $O \nvDash A$	Hip.
6. $O^* \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 5
7. Hay $w, z \in K$, RO^*wz & $w \vDash A$ & $z \nvDash B$	Def. 15.1; 6
8. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Def. 15.2; 7

Pero 5 y 8 se contradicen. Asumimos entonces,

9. ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg(A \to B)$ & $O^* \nvDash A$	Hip.
10. $O \nvDash A \to B$	Prop. 15.1; 9
11. Hay $w, z \in K$, $ROwz$, $w \vDash A$, $z \nvDash B$	Def. 15.1; 10
12. ($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 11
13. $ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 2 y 13 se contradicen. Asumimos entonces,

14. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 9 y 14 se contradicen.

A15 $\neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B]$

1. $O \nvDash \neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B]$	Hip. red.
2. $O \nvDash \neg B$ & $O \nvDash \neg(A \to B) \to \neg B$	Def. 15.1; 1
3. Hay $x, y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash \neg(A \to B)$ & $y \nvDash \neg B$	Def. 15.1; 2
4. ($ROOO$ & $O \vDash \neg(A \to B)$ & $O \nvDash \neg B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg(A \to B)$ & $O^* \nvDash \neg B$)	Def. 15.2; 3
5. $ROOO$ & $O \vDash \neg(A \to B)$ & $O \nvDash \neg B$	Hip.
6. $O^* \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 5
7. Hay $w, z \in K$, RO^*wz, $w \vDash A$, $z \nvDash B$	Def. 15.1; 6
8. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$ (i.e., $O \vDash \neg B$)	Def. 15.2; 7

Pero 5 y 8 se contradicen. Asumimos entonces,

9. ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg(A \to B)$ & $O^* \nvDash \neg B$	Hip.
10. $O \nvDash A \to B$	Prop. 15.1; 9

11.	Hay w, $z \in K$, $ROwz$, $w \vDash A$, $z \nvDash B$	Def. 15.1; 10
12.	$(ROOO \ \& \ O \vDash A \ \& \ O \nvDash B)$ ó $(ROO^{*}O^{*} \ \& \ O^{*} \vDash A \ \& \ O \nvDash B)$	Def. 15.2; 11
13.	$ROOO \ \& \ O \vDash A \ \& \ O \nvDash B$ (i.e., $O^{*} \vDash \neg B$)	Hip.

Pero 9 y 13 se contradicen. Asumimos entonces,

14.	$ROO^{*}O^{*} \ \& \ O^{*} \vDash A \ \& \ O^{*} \nvDash B$ (i.e., $O \vDash \neg B$)	Hip.

Pero 2 y 14 se contradicen.

Los siguientes axiomas son válidos-Lt2.

Pruebo ahora que los axiomas propios del sistema Lt2 son válidos.

A16 $[(A \to B) \wedge A] \to B$

Caso (i): $O \vDash (B \to A) \wedge A \Rightarrow O \vDash B$

1.	$O \vDash (A \to B) \wedge A$	Hip.
2.	$O \vDash A \to B \ \& \ O \vDash A$	Def. 15.1; 1
3.	$ROOO$	Def. 15.2
4.	$O \vDash B$	Def. 15.1; 2

Caso (ii): $O^{*} \vDash (A \to B) \wedge A \Rightarrow O^{*} \vDash B$

1.	$O^{*} \vDash (A \to B) \wedge A$	Hip.
2.	$O^{*} \vDash A \to B \ \& \ O^{*} \vDash A$	Def. 15.1; 1
3.	$RO^{*}O^{*}O^{*}$	Def. 15.2
4.	$O^{*} \vDash B$	Def. 15.1; 2

A17 $[(A \to B) \wedge \neg B] \to \neg A$

Caso (i): $O \vDash (A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow O \vDash \neg A$

1.	$O \vDash (A \to B) \wedge \neg B$	Hip.
2.	$O \vDash A \to B \ \& \ O \vDash \neg B$ (i.e., $O^{*} \nvDash B$)	Def. 15.1; 1
3.	$ROO^{*}O^{*}$	Def. 15.2
4.	$O^{*} \nvDash A$	Def. 15.1; 2, 3
5.	$O \vDash \neg A$	Def. 15.1; 4

Caso (ii): $O^{*} \vDash (A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow O^{*} \vDash \neg A$

1. $O^* \vDash (A \to B) \wedge \neg B$	Hip.
2. $O^* \vDash A \to B$ & $O^* \vDash \neg B$ (i.e., $O \nvDash B$)	Def. 15.1; 1
3. RO^*OO	Def. 15.2
4. $O \nvDash A$ (i.e., $O^* \vDash \neg A$)	Def. 15.1; 2, 3

A18 $A \to [B \vee \neg(A \to B)]$

Caso (i): $O \vDash A \Rightarrow O \vDash B \vee \neg(A \to B)$

1. $O \vDash A$	Hip.
2. $O \nvDash B \vee \neg(A \to B)$	Hip. red.
3. $O \nvDash B$ & $O \nvDash \neg(A \to B)$	Def. 15.1; 2
4. $O^* \vDash A \to B$	Def. 15.1; 3
5. RO^*OO	Def. 15.2
6. $O \vDash B$	Def. 15.1; 1, 4, 5

Pero 3 y 6 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash A \Rightarrow O^* \vDash B \vee \neg(A \to B)$

1. $O^* \vDash A$	Hip.
2. $O^* \nvDash B \vee \neg(A \to B)$	Hip. red.
3. $O^* \nvDash B$ & $O^* \nvDash \neg(A \to B)$	Def. 15.1; 2
4. $O \vDash A \to B$	Prop. 15.1; 3
5. ROO^*O^*	Def. 15.2
6. $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 1, 4, 5

Pero 3 y 6 se contradicen.

A19 $\neg B \to [\neg A \vee \neg(A \to B)]$

Caso (i): $O \vDash \neg B \Rightarrow O \vDash \neg A \vee \neg(A \to B)$

1. $O \vDash \neg B$ (i.e., $O^* \nvDash B$)	Hip.
2. $O \nvDash \neg A \vee \neg(A \to B)$	Hip. red.
3. $O \nvDash \neg A$ (i.e., $O^* \vDash A$) & $O \nvDash \neg(A \to B)$	Def. 15.1; 2
4. $O^* \vDash A \to B$	Def. 15.1; 3
5. $RO^*O^*O^*$	Def. 15.2
6. $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 3, 4, 5

Pero 1 y 6 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg B \Rightarrow O^* \vDash \neg A \vee \neg(A \to B)$

1.	$O^* \vDash \neg B$ (i.e., $O \nvDash B$)	Hip.
2.	$O^* \nvDash \neg A \vee \neg(A \rightarrow B)$	Hip. red.
3.	$O^* \nvDash \neg A$ (i.e., $O \vDash A$) & $O^* \nvDash \neg(A \rightarrow B)$	Def. 15.1; 2
4.	$O \vDash A \rightarrow B$	Prop. 15.1; 3
5.	$ROOO$	Def. 15.2
6.	$O \vDash B$	Def. 15.1; 3, 4, 5

Pero 1 y 6 se contradicen.

A20 $[\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow A$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow O \vDash A$

1.	$O \vDash \neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A$	Hip.
2.	$O \nvDash A$	Hip. red.
3.	$O \vDash \neg(A \rightarrow B)$, $O \vDash \neg A$ (i.e., $O^* \nvDash A$)	Def. 15.1; 1
4.	$O^* \nvDash A \rightarrow B$	Def. 15.1; 3
5.	Hay x, $y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 4
6.	($RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$) ó (RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$) ó (RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$)	Def. 15.2; 5
7.	$RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8.	RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 2 y 8 se contradicen. Asumimos entonces,

9.	RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 2 y 9 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow O^* \vDash A$

1.	$O^* \vDash \neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A$	Hip.
2.	$O^* \nvDash A$	Hip. red.
3.	$O^* \vDash \neg(A \rightarrow B)$ & $O^* \vDash \neg A$ (i.e., $O \nvDash A$)	Def. 15.1; 1
4.	$O \nvDash A \rightarrow B$	Prop. 15.1; 3
5.	Hay x, $y \in K$, $ROxy$, $x \vDash A$, $y \nvDash B$	Def. 15.1; 4
6.	($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 5
7.	$ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8. ROO^*O^* & $O^* \models A$ & $O^* \not\models B$ Hip.

Pero 2 y 8 se contradicen.

A21 $\neg(A \to B) \to (A \vee \neg B)$

Caso (i): $O \models \neg(A \to B) \Rightarrow O \models A \vee \neg B$

1. $O \models \neg(A \to B)$	Hip.
2. $O \not\models A \vee \neg B$	Hip. red.
3. $O \not\models A$ & $O \not\models \neg B$ (i.e., $O^* \models B$)	Def. 15.1; 2
4. $O^* \not\models A \to B$	Def. 15.1; 1
5. Hay x, $y \in K$, RO^*xy, $x \models A$, $y \not\models B$	Def. 15.1; 4
6. ($RO^*O^*O^*$ & $O^* \models A$ & $O^* \not\models B$) ó (RO^*OO^* & $O \models A$ & $O^* \not\models B$) ó (RO^*OO & $O \models A$ & $O \not\models B$)	Def. 15.2; 5
7. $RO^*O^*O^*$ & $O^* \models A$ & $O^* \not\models B$	Hip.

Pero 3 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8. RO^*OO & $O \models A$ & $O \not\models B$ Hip.

Pero 3 y 8 se contradicen. Asumimos entonces,

9. RO^*OO^* & $O \models A$ & $O^* \not\models B$ Hip.

Pero 3 y 9 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \models \neg(A \to B) \Rightarrow O^* \models A \vee \neg B$

1. $O^* \models \neg(A \to B)$	Hip.
2. $O^* \not\models A \vee \neg B$	Hip. red.
3. $O^* \not\models A$ & $O^* \not\models \neg B$ (i.e., $O \models B$)	Def. 15.1; 2
4. $O \not\models A \to B$	Prop. 15.1; 1
5. Hay x, $y \in K$, $ROxy$, $x \models A$, $y \not\models B$	cl. iv; 4
6. ($ROOO$ & $O \models A$ & $O \not\models B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \models A$ & $O^* \not\models B$)	Def. 15.1; 5
7. $ROOO$ & $O \models A$ & $O \not\models B$	Hip.

Pero 3 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8. ROO^*O^* & $O^* \models A$ & $O^* \not\models B$ Hip.

Pero 3 y 8 se contradicen.

A22 $[\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$

Caso (i): $O \models \neg(A \to B) \wedge B \Rightarrow O \models \neg B$

1. $O \models \neg(A \to B) \wedge B$	Hip.
2. $O \not\models \neg B$ (i.e., $O^* \models B$)	Hip. red.
3. $O \models \neg(A \to B)$ & $O \models B$	Def. 15.1; 1
4. $O^* \not\models A \to B$	Def. 15.1; 3
5. Hay $x, y \in K$, RO^*xy, $x \models A$, $y \not\models B$	Def. 15.1; 4
6. ($RO^*O^*O^*$ & $O^* \models A$ & $O^* \not\models B$) ó (RO^*OO^* & $O \models A$ & $O^* \not\models B$) ó (RO^*OO & $O \models A$ & $O \not\models B$)	Def. 15.2; 5
7. $RO^*O^*O^*$ & $O^* \models A$ & $O^* \not\models B$	Hip.

Pero 2 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8. RO^*OO & $O \models A$ & $O \not\models B$	Hip.

Pero 3 y 8 se contradicen. Asumimos entonces,

9. RO^*OO^* & $O^* \models A$ & $O^* \not\models B$	Hip.

Pero 2 y 9 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \models \neg(A \to B) \wedge B \Rightarrow O^* \models \neg B$

1. $O^* \models \neg(A \to B) \wedge B$	Hip.
2. $O^* \not\models \neg B$ (i.e., $O \models B$)	Hip. red.
3. $O^* \models \neg(A \to B)$ & $O^* \models B$	Def. 15.1; 1
4. $O \not\models A \to B$	Prop. 15.1; 3
5. Hay $x, y \in K$, $ROxy$, $x \models A$, $y \not\models B$	Def. 15.1; 4
6. ($ROOO$ & $O \models A$ & $O \not\models B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \models A$ & $O^* \not\models B$)	Def. 15.2; 5
7. $ROOO$ & $O \models A$ & $O \not\models B$	Hip.

Pero 2 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8. ROO^*O^* & $O^* \models A$ & $O^* \not\models B$	Hip.

Pero 3 y 8 se contradicen.

Los siguientes axiomas son válidos-Lt3

Los axiomas A17 y A18 se prueban igual que en Lt2. Queda entonces probar que A13, A14, A21, A22 y A23 son válidos en Lt3.

A13 $(A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$

Caso (i): $O \vDash (A \wedge \neg B) \Rightarrow O \vDash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$

La prueba del caso (i) es idéntica a la ya realizada en el sistema BN4.

Caso (ii): $O^* \vDash (A \wedge \neg B) \Rightarrow O^* \vDash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$

1. $O^* \vDash A \wedge \neg B$	Hip.
2. $O^* \nvDash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$	Hip. red.
3. $O^* \vDash A$ & $O^* \vDash \neg B$ (i.e., $O^* \nvDash \neg B$)	Def. 15.1; 1
4. Hay x, $y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A \wedge \neg B$ & $y \nvDash \neg(A \to B)$	Def. 15.1; 3
5. (RO^*OO^* & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O^* \nvDash \neg(A \to B)$) ó ($RO^*OO$ & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O \nvDash \neg(A \to B)$)	Def. 15.2; 4
6. RO^*OO^* & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O^* \nvDash \neg(A \to B)$	Hip.
7. $O \vDash A$, $O \vDash \neg B$ (i.e., $O^* \nvDash B$)	Def. 15.1; 6
8. $O \vDash A \to B$	Prop. 15.1; 6
9. $ROOO$	Def. 15.2
10. $O \vDash B$	Def. 15.1; 7, 8, 9

Pero 3 y 10 se contradicen. Asumimos entonces,

11. RO^*OO & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O \nvDash \neg(A \to B)$	Hip.
12. $O \vDash A$, $O \vDash \neg B$ (i.e., $O^* \nvDash B$)	Def. 15.1; 11
13. $O^* \vDash A \to B$	Def. 15.1; 11
14. RO^*OO^*	Def. 15.2
15. $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 12, 13, 14

Pero 12 y 15 se contradicen.

A14 $A \vee [\neg(A \to B) \to A]$

1. $O \nvDash A \vee [\neg(A \to B) \to A]$	Hip. red.
2. $O \nvDash A$ & $O \nvDash \neg(A \to B) \to A$	Def. 15.1; 1
3. Hay x, $y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash \neg(A \to B)$ & $y \nvDash A$	Def. 15.1; 2
4. ($ROOO$ & $O \vDash \neg(A \to B)$ & $O \nvDash A$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg(A \to B)$ & $O^* \nvDash A$)	Def. 15.2; 3
5. $ROOO$ & $O \vDash \neg(A \to B)$ & $O \nvDash A$	Hip.
6. $O^* \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 5
7. Hay w, $z \in K$, RO^*wz & $w \vDash A$ & $z \nvDash B$	Def. 15.1; 6
8. (RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$) ó (RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$)	Def. 15.2; 7
9. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 5 y 9 se contradicen. Asumimos entonces,

10.	RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 5 y 10 se contradicen. Asumimos entonces,

11.	ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg(A \to B)$ & $O^* \nvDash A$	Hip.
12.	$O \nvDash A \to B$	Prop. 15.1; 11
13.	Hay x, $y \in K$, $ROxy$, $x \vDash A$, $y \nvDash B$	Def. 15.1; 12
14.	($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 13
15.	$ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 2 y 15 se contradicen. Asumimos entonces,

16.	ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 11 y 16 se contradicen.

A21 $\neg(A \to B) \to (A \vee \neg B)$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \to B) \Rightarrow O \vDash A \vee \neg B$

1.	$O \vDash \neg(A \to B)$	Hip.
2.	$O \nvDash A \vee \neg B$	Hip. red.
3.	$O \nvDash A$ & $O \nvDash \neg B$ (i.e., $O^* \vDash B$)	Def. 15.1; 2
4.	$O^* \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 1
5.	Hay x, $y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 4
6.	(RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 5
7.	RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8.	RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 8 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg(A \to B) \Rightarrow O^* \vDash A \vee \neg B$

La prueba del caso (ii) de A21 es idéntica a la dada anteriormente para Lt2.

A22 $[\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \to B) \wedge B \Rightarrow O \vDash \neg B$

1.	$O \vDash \neg(A \to B) \wedge B$	Hip.
2.	$O \nvDash \neg B$ (i.e., $O^* \vDash B$)	Hip. red.

3. $O \vDash \neg(A \to B)$, $O \vDash B$ Def. 15.1; 1
4. $O^* \nvDash A \to B$ Def. 15.1; 3
5. Hay x, $y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$ Def. 15.1; 4
6. (RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$) ó Def. 15.2; 5
(RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$)
7. RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$ Hip.

Pero 3 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$ Hip.

Pero 2 y 8 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg(A \to B) \wedge B \Rightarrow O^* \vDash \neg B$

La prueba del caso (ii) de A22 es idéntica a la dada anteriormente para Lt2.

A23 $B \to \{[B \wedge \neg(A \to B)] \to A\}$

Caso (i): $O \vDash B \Rightarrow O \vDash [B \wedge \neg(A \to B)] \to A$

1. $O \vDash B$ Hip.
2. $O \nvDash [B \wedge \neg(A \to B)] \to A$ Hip. red.
3. Hay x, $y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash B \wedge \neg(A \to B)$ & $y \nvDash A$ Def. 15.1; 2
4. ($ROOO$ & $O \vDash B \wedge \neg(A \to B)$ & $O \nvDash A$) ó Def. 15.2; 3
(ROO^*O^* & $O^* \vDash B \wedge \neg(A \to B)$ & $O^* \nvDash A$)
5. $ROOO$ & $O \vDash B \wedge \neg(A \to B)$ & $O \nvDash A$ Hip.
6. $O \vDash B$ & $O \vDash \neg(A \to B)$ (i.e., $O^* \nvDash A \to B$) Def. 15.1; 5
7. Hay z, $w \in K$, RO^*zw & $z \vDash A$ & $w \nvDash B$ Def. 15.1; 6
8. (RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó Def. 15.2; 7
(RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)
9. RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$ Hip.

Pero 9 se contradice con 5 y con 6. Asumimos entonces,

10. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$ Hip.

Pero 5 y 10 se contradicen. Asumimos entonces,

11. ROO^*O^*& $O^* \vDash B \wedge \neg(A \to B)$ & $O^* \nvDash A$ Hip.
12. $O^* \vDash B$, $O^* \vDash \neg(A \to B)$ (i.e., $O \nvDash A \to B$) Def. 15.1; 11
13. Hay x, $y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$ Def. 15.1; 12
14. ($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó Def. 15.2; 13
(ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)
15. $ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$ Hip.

Pero 1 y 15 se contradicen. Asumimos entonces,

16. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 61 se contradice con 11 y 12.

Caso (ii): $O^* \vDash B \Rightarrow O^* \vDash [B \wedge \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow A$

1. $O^* \vDash B$	Hip.
2. $O^* \nvDash [B \wedge \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow A$	Hip. red.
3. Hay $x, y \in K$, RO^*xy & $x \vDash B \wedge \neg(A \rightarrow B)$ & $y \nvDash A$	Def. 15.1; 2
4. (RO^*OO & $O \vDash B \wedge \neg(A \rightarrow B)$ & $O \nvDash A$) ó (RO^*OO^* & $O \vDash B \wedge \neg(A \rightarrow B)$ & $O^* \nvDash A$)	Def. 15.2; 3
5. RO^*OO & $O \vDash B \wedge \neg(A \rightarrow B)$ & $O \nvDash A$	Hip.
6. $O \vDash B$ & $O \vDash \neg(A \rightarrow B)$ (i.e., $O^* \nvDash A \rightarrow B$)	Def. 15.1; 5
7. Hay $z, w \in K$, RO^*zw & $z \vDash A$ & $w \nvDash B$	Def. 15.1; 6
8. (RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 7
9. RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 9 se contradice con, 5 y 6. Asumimos entonces,

10. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 10 se contradice con 1 y 5. Asumimos entonces,

11. RO^*OO^* & $O \vDash B \wedge \neg(A \rightarrow B)$ & $O^* \nvDash A$	Hip.
12. $O \vDash B$, $O \vDash \neg(A \rightarrow B)$ (i.e., $O^* \nvDash A \rightarrow B$)	Def. 15.1; 11
13. Hay $z, w \in K$, RO^*zw & $z \vDash A$ & $w \nvDash B$	Def. 15.1; 12
14. (RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 13
15. RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 12 y 15 se contradicen. Asumimos entonces,

16. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 1 y 16 se contradicen.

Los siguientes axiomas son válidos-Lt4

Pruebo ahora que los axiomas propios del sistema Lt4 son válidos.

A15 $\neg B \vee [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B]$

1.	$O \not\vDash \neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B]$	Hip. red.
2.	$O \not\vDash \neg B$ & $O \not\vDash \neg(A \to B) \to \neg B$	Def. 15.1; 1
3.	Hay $x, y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash \neg(A \to B)$ & $y \not\vDash \neg B$	Def. 15.1; 2
4.	($ROOO$ & $O \vDash \neg(A \to B)$ & $O \not\vDash \neg B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg(A \to B)$ & $O^* \not\vDash \neg B$)	Def. 15.2; 3
5.	$ROOO$ & $O \vDash \neg(A \to B)$ & $O \not\vDash \neg B$	Hip.
6.	$O^* \not\vDash A \to B$	Def. 15.1; 5
7.	Hay $w, z \in K$, RO^*wz, $w \vDash A$, $z \not\vDash B$	Def. 15.1; 6
8.	(RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \not\vDash B$) ó ($RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \not\vDash B$)	Def. 15.2; 7
9.	RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \not\vDash B$ (i.e., $O \vDash \neg B$)	Hip.

Pero 5 y 9 se contradicen. Asumimos entonces,

10.	$RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \not\vDash B$ (i.e., $O \vDash \neg B$)	Hip.

Pero 5 y 10 se contradicen. Asumimos entonces,

11.	ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg(A \to B)$ & $O^* \not\vDash \neg B$	Hip.
12.	$O \not\vDash A \to B$	Prop. 15.1; 11
13.	Hay $z, w \in K$, $ROzw$, $z \vDash A$, $w \not\vDash B$	Def. 15.1; 12
14.	($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \not\vDash B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \not\vDash B$)	15.2; 13
15.	$ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \not\vDash B$ (i.e., $O^* \vDash \neg B$)	Hip.

Pero 11 y 15 se contradicen. Asumimos entonces,

16.	ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \not\vDash B$ (i.e., $O \vDash \neg B$)	Hip.

Pero 2 y 16 se contradicen.

Las pruebas de A16, A19, el caso (ii) de A20 y A21 son idénticas a las expuestas anteriormente para Lt2. La prueba del caso (i) de A20 y A21 es mínimamente diferente a la que se llevó a cabo para Lt2[110].

Los siguientes axiomas son válidos-Lt5

Las pruebas correspondientes a los axiomas A16-A19 son semejantes a las de Lt2. Pruebo ahora que los axiomas A20, A22, A24, A25 y A26 son válidos en Lt5 (E4).

A20 $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \to B) \wedge \neg A \Rightarrow O \vDash A$

[110] En el caso (i) de A20, se omitiría el paso 9 de la prueba dado que RO^*OO no está presente en Lt4. Asimismo, en el caso (i) de A21 se omitiría el paso 8. En relación con esta cuestión, véanse las primeras notas al pie de esta sección.

1.	$O \vDash \neg(A \to B) \wedge \neg A$	Hip.
2.	$O \nvDash A$	Hip. red.
3.	$O \vDash \neg(A \to B)$, $O \vDash \neg A$ (i.e., $O^* \nvDash A$)	Def. 15.1; 1
4.	$O^* \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 3
5.	Hay $x, y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 4
6.	$(RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B)$ ó $(RO^*O^*O$ & & $O^* \vDash A$ & $O \nvDash B)$ ó $(RO^*OO^*$ & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B)$ ó $(RO^*OO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B)$	Def. 15.2; 5
7.	$RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 3 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8. RO^*O^*O & & $O^* \vDash A$ & $O \nvDash B$ Hip.

Pero 3 y 8 se contradicen. Asumimos entonces,

9. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$ Hip.

Pero 2 y 9 se contradicen. Asumimos entonces,

10. RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$ Hip.

Pero 2 y 10 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg(A \to B) \wedge \neg A \Rightarrow O^* \vDash A$

La prueba del caso (ii) de A20 es idéntica a la dada anteriormente para Lt2.

A22 $[\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \to B) \wedge B \Rightarrow O \vDash \neg B$

1.	$O \vDash \neg(A \to B) \wedge B$	Hip.
2.	$O \nvDash \neg B$ (i.e., $O^* \vDash B$)	Hip. red.
3.	$O \vDash \neg(A \to B)$, $O \vDash B$	Def. 15.1; 1
4.	$O^* \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 3
5.	Hay $x, y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 4
6.	$(RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B)$ ó $(RO^*O^*O$ & $O^* \vDash A$ & $O \nvDash B)$ ó $(RO^*OO^*$ & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B)$ ó $(RO^*OO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B)$	Def. 15.2; 5
7.	$RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 2 y 7 se contradicen. Asumimos entonces,

8. RO^*O^*O & & $O^* \vDash A$ & $O \nvDash B$ Hip.

Pero 3 y 8 se contradicen. Asumimos entonces,

9. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$ Hip.

Pero 2 y 9 se contradicen. Asumimos entonces,

10. RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$ Hip.

Pero 3 y 10 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg(A \to B) \wedge B \Rightarrow O^* \vDash \neg B$

La prueba del caso (ii) de A22 es idéntica a la dada anteriormente para Lt2.

A24 $(A \to B) \vee \neg(A \to B)$

1. $O \nvDash (A \to B) \vee \neg(A \to B)$	Hip. red.
2. $O \nvDash A \to B$ & $O \nvDash \neg(A \to B)$	Def. 15.1; 1
3. $O^* \vDash A \to B$	Def. 15.1; 2
4. Hay $x, y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash A$ & $y \nvDash B$	Def. 15.1; 3
5. ($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 4
6. $ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.
7. RO^*OO	Def. 15.2
8. $O \vDash B$	Def. 15.1; 3, 6, 7

Pero 6 y 8 se contradicen. Asumimos entonces,

9. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.
10. $RO^*O^*O^*$	Def. 15.2
11. $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 3, 11, 12

Pero 9 y 11 se contradicen.

A25 $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$

1. $O \nvDash (\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$	Hip. red.
2. $O \nvDash \neg A \vee B$ & $O \nvDash \neg(A \to B)$	Def. 15.1; 1
3. $O \nvDash \neg A$ (i.e., $O^* \vDash A$) & $O \nvDash B$	Def. 15.1; 2
4. $O^* \vDash A \to B$	Def. 15.1; 2
5. RO^*O^*O	Def. 15.2
6. $O \vDash B$	Def. 15.1; 3, 4, 5

Pero 3 y 7 se contradicen.

A26 $[(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)] \to \neg(A \to B)$

Caso (i): $O \vDash (A \to B) \wedge (A \wedge \neg B) \Rightarrow O \vDash \neg(A \to B)$

1. $O \vDash (A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)$	Hip.
2. $O \nvDash \neg(A \to B)$	Hip. red.
3. $O \vDash A \to B$ & $O \vDash A$ & $O \vDash \neg B$ (i.e., $O^* \nvDash B$)	Def. 15.1; 1
4. $O^* \vDash A \to B$	Def. 15.1; 2
5. RO^*OO^*	Def. 15.2
6. $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 3, 4, 5

Pero 3 y 6 se contradicen.

Caso (ii): $O^* \vDash (A \to B) \wedge (A \wedge \neg B) \Rightarrow O^* \vDash \neg(A \to B)$

1. $O^* \vDash (A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)$	Hip.
2. $O^* \nvDash \neg(A \to B)$	Hip. red.
3. $O^* \vDash A \to B$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \vDash \neg B$ (i.e., $O \nvDash B$)	Def. 15.1; 1
5. RO^*O^*O	Def. 15.2
6. $O \vDash B$	Def. 15.1; 3, 6

Pero 3 y 6 se contradicen.

Los siguientes axiomas son válidos-Lt6

Las pruebas para A16 y A19 son semejantes a las reflejadas para Lt2; la de A25 es semejante a la de Lt5 (E4). Pruebo ahora que el resto de axiomas propios del sistema Lt6 son válidos.

A20 $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \to B) \wedge \neg A \Rightarrow O \vDash A$

La prueba del caso (i) es semejante a la anteriormente proporcionada para Lt5. La diferencia se reduciría simplemente a que, dado el conjunto de postulados que especifican R en Lt6 –$R = \{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, $RO^*O^*O^*$, $RO^*O^*O\}$– se omitiría el paso 10 de la prueba descrita para Lt5.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg(A \to B) \wedge \neg A \Rightarrow O^* \vDash A$

La prueba del caso (ii) de A20 es idéntica a la dada anteriormente para Lt2.

A22 $[\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \to B) \wedge B \Rightarrow O \vDash \neg B$

Esta prueba, igual que ocurría en la prueba del caso (i) para A20, es semejante a la de E4 (Lt5). La diferencia es que se debe omitir el paso 10 de la prueba descrita para E4.

Caso (ii): $O^* \models \neg(A \to B) \land B \Rightarrow O^* \models \neg B$

La prueba del caso (ii) de A22 es idéntica a la dada anteriormente para Lt2.

A27 $\neg(A \to B) \lor [(A \land \neg B) \to \neg(A \to B)]$

1. $O \not\models \neg(A \to B) \lor [(A \land \neg B) \to \neg(A \to B)]$	Hip. red.
2. $O \not\models \neg(A \to B)$ & $O \not\models (A \land \neg B) \to \neg(A \to B)$	Def. 15.1; 1
3. $O^* \models A \to B$	Def. 15.1; 2
4. Hay x, $y \in K$, $ROxy$ & $x \models A \land \neg B$ & $y \not\models \neg(A \to B)$	Def. 15.1; 2
5. ($ROOO$ & $O \models A \land \neg B$ & $O \not\models \neg(A \to B)$) ó ($ROO^*O^*$ & $O^* \models A \land \neg B$ & $O^* \not\models \neg(A \to B)$)	Def. 15.2; 4
6. $ROOO$ & $O \models A \land \neg B$ & $O \not\models \neg(A \to B)$	Hip.
7. $O \models A$, $O \models \neg B$ (i.e., $O^* \not\models B$)	Def. 15.1; 6
8. $O^* \models A \to B$	Def. 15.1; 6
9. RO^*OO^*	Def. 15.2
10. $O^* \models B$	Def. 15.1; 7, 8, 9

Pero 7 y 10 se contradicen. Asumo entonces,

11. ROO^*O^* & $O^* \models A \land \neg B$ & $O^* \not\models \neg(A \to B)$	Hip.
12. $O^* \models A$, $O^* \models \neg B$ (i.e., $O \not\models B$)	Def. 15.1; 11
13. RO^*O^*O	Def. 15.2
14. $O \models B$	Def. 15.1; 3, 12, 13

Pero 12 y 14 se contradicen.

A28 $\{[\neg(A \to B) \land \neg A] \to \neg B\} \lor \neg B$

1. $O \not\models \{[\neg(A \to B) \land \neg A] \to \neg B\} \lor \neg B$	Hip. red.
2. $O \not\models [\neg(A \to B) \land \neg A] \to \neg B$ & $O \not\models \neg B$ (i.e., $O^* \models B$)	Def. 15.1; 1
3. Hay x, $y \in K$, $ROxy$ & $x \models \neg(A \to B) \land \neg A$ & $y \not\models \neg B$	Def. 15.1; 2
4. ($ROOO$ & $O \models \neg(A \to B) \land \neg A$ & $O \not\models \neg B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \models \neg(A \to B) \land \neg A$ & $O^* \not\models \neg B$)	Def. 15.2; 3
5. $ROOO$ & $O \models \neg(A \to B) \land \neg A$ & $O \not\models \neg B$ (i.e., $O^* \models B$)	Hip.
6. $O \models \neg(A \to B)$, $O \models \neg A$ (i.e., $O^* \not\models A$)	Def. 15.1; 5
7. $O^* \not\models A \to B$	Def. 15.1; 6
8. Hay z, $w \in K$, RO^*zw & $z \models A$ & $w \not\models B$	Def. 15.1; 7
9. (RO^*OO^* & $O \models A$ & $O^* \not\models B$) ó ($RO^*O^*O^*$ & $O^* \models A$, $O^* \not\models B$) ó (RO^*O^*O & $O^* \models A$ & $O \not\models B$)	Def. 15.2; 8
10. RO^*OO^* & $O \models A$ & $O^* \not\models B$	Hip.

Pero 5 y 10 se contradicen. Asumo entonces,

11. $RO^*O^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 11 se contradicen con 5 y 6. Asumo entonces,

12. RO^*O^*O & $O^* \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 6 y 12 se contradicen. Asumo entonces,

13. ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg(A \to B) \wedge \neg A$ & $O^* \nvDash \neg B$ (i.e., $O \vDash B$)	Hip.
14. $O^* \vDash \neg(A \to B)$, $O^* \vDash \neg A$ (i.e., $O \nvDash A$)	Def. 15.1; 13
15. $O \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 14
16. Hay z, $w \in K$, $ROzw$ & $z \vDash A$ & $w \nvDash B$	Def. 15.1; 15
17. ($ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$) ó (ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$)	Def. 15.2; 16
18. $ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 18 se contradice con 13 y 14. Asumo entonces,

19. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 2 y 19 se contradicen.

Los siguientes axiomas son válidos-Lt7

Las pruebas para A17 y A18 son semejantes a las reflejadas para Lt2 y la prueba para A25 es semejante a la de Lt5 (E4). Pruebo ahora que el resto de axiomas propios del sistema Lt7 son válidos.

A13 $(A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$

Caso (i): $O \vDash (A \wedge \neg B) \Rightarrow O \vDash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$

La prueba del caso (i) es idéntica a la dada para BN4 (Lt1).

Caso (ii): $O^* \vDash (A \wedge \neg B) \Rightarrow O^* \vDash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$

1. $O^* \vDash A \wedge \neg B$	Hip.
2. $O^* \nvDash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$	Hip. red.
3. $O^* \vDash A$ & $O^* \vDash \neg B$ (i.e., $O \nvDash B$)	Def. 15.1; 1
4. Hay x, $y \in K$, RO^*xy & $x \vDash A \wedge \neg B$ & $y \nvDash \neg(A \to B)$	Def. 15.1; 3
5. (RO^*OO^* & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O^* \nvDash \neg(A \to B)$) ó ($RO^*OO$ & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O \nvDash \neg(A \to B)$) ó (RO^*O^*O & $O^* \vDash A \wedge \neg B$ & $O \nvDash \neg(A \to B)$)	Def. 15.2; 4

6. RO^*OO^* & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O^* \nvDash \neg(A \to B)$	Hip.
7. $O \vDash A$, $O \vDash \neg B$ (i.e., $O^* \nvDash B$)	Def. 15.1; 6
8. $O \vDash A \to B$	Prop. 15.1; 6
9. $ROOO$	Def. 15.2
10. $O \vDash B$	Def. 15.1; 7, 8, 9

Pero 3 y 10 se contradicen. Asumo entonces,

11. RO^*OO & $O \vDash A \wedge \neg B$ & $O \nvDash \neg(A \to B)$	Hip.
12. $O \vDash A$, $O \vDash \neg B$ (i.e., $O^* \nvDash B$)	Def. 15.1; 11
13. $O^* \vDash A \to B$	Def. 15.1; 11
14. RO^*OO^*	Def. 15.2
15. $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 12, 13, 14

Pero 12 y 15 se contradicen. Asumo entonces,

16. RO^*O^*O & $O^* \vDash A \wedge \neg B$ & $O \nvDash \neg(A \to B)$	Hip.
17. $O^* \vDash A$, $O^* \vDash \neg B$ (i.e., $O \nvDash B$)	Def. 15.1; 16
18. $O^* \vDash A \to B$	Def. 15.1; 16
19. RO^*O^*O	Def. 15.2
20. $O \vDash B$	Def. 15.2; 17, 18, 19

Pero 17 y 20 se contradicen.

A20 $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \to B) \wedge \neg A \Rightarrow O \vDash A$

La prueba del caso (i) es semejante a la anteriormente proporcionada para E4 (Lt5). La diferencia se reduciría simplemente a que, dado el conjunto de postulados que especifican R en Lt7 –$R = \{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, RO^*OO, $RO^*O^*O\}$– se omitiría el paso 7 de la prueba descrita para E4.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg(A \to B) \wedge \neg A \Rightarrow O^* \vDash A$

La prueba del caso (ii) de A20 es idéntica a la dada anteriormente para Lt2.

A22 $[\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \to B) \wedge B \Rightarrow O \vDash \neg B$

Esta prueba, igual que ocurría en la prueba del caso (i) para A20, es semejante a la de E4 (Lt5). La diferencia es que se debe omitir el paso 7 de la prueba descrita para E4.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg(A \to B) \wedge B \Rightarrow O^* \vDash \neg B$

La prueba del caso (ii) de A22 es idéntica a la dada anteriormente para Lt2.

A29 $\{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$

1. $O \nvDash \{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$	Hip. red.
2. $O \nvDash [\neg(A \to B) \wedge B] \to A$ & $O \nvDash A$	Def. 15.1; 1
3. Hay $x, y \in K$, $ROxy$ & $x \vDash \neg(A \to B) \wedge B$ & $y \nvDash A$	Def. 15.1; 2
4. $(ROOO$ & $O \vDash \neg(A \to B) \wedge B$ & $O \nvDash A)$ ó $(ROO^*O^*$ & $O^* \vDash \neg(A \to B) \wedge B$ & $O^* \nvDash A)$	Def. 15.2; 3
5. $ROOO$ & $O \vDash \neg(A \to B) \wedge B$ & $O \nvDash A$	Hip.
6. $O \vDash \neg(A \to B)$ & $O \vDash B$	Def. 15.1; 5
7. $O^* \nvDash A \to B$	Def. 15.1; 6
8. Hay $z, w \in K$, RO^*zw, $z \vDash A$, $w \nvDash B$	Def. 15.1; 7
9. $(RO^*OO^*$ & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B)$ ó $(RO^*O^*O$ & $O^* \vDash A$ & $O \nvDash B)$ ó $(RO^*OO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B)$	Def. 15.2; 9
10. RO^*OO^* & $O \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 5 y 10 se contradicen. Asumimos entonces,

11. RO^*O^*O & $O^* \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 6 y 11 se contradicen. Asumimos entonces,

12. RO^*OO & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 12 se contradice con 5 y 6. Asumimos entonces,

13. ROO^*O^* & $O^* \vDash \neg(A \to B) \wedge B$ & $O^* \nvDash A$	Hip.
14. $O^* \vDash \neg(A \to B)$ & $O^* \vDash B$	Def. 15.1; 13
15. $O \nvDash A \to B$	Prop. 15.1; 14
16. Hay $z, w \in K$, $ROzw$, $z \vDash A$, $w \nvDash B$	Def. 15.1; 15
17. $(ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B)$ ó $(ROO^*O^*$ & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B)$	Def. 15.2; 16
18. $ROOO$ & $O \vDash A$ & $O \nvDash B$	Hip.

Pero 2 y 18 se contradicen. Asumimos entonces,

19. ROO^*O^* & $O^* \vDash A$ & $O^* \nvDash B$	Hip.

Pero 19 se contradice con 13 y 14.

Los siguientes axiomas son válidos-Lt8

Pruebo ahora que los axiomas propios del sistema Lt8 son válidos.

A13 $(A \wedge \neg B) \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$

Caso (i): $O \vDash (A \wedge \neg B) \Rightarrow O \vDash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

La prueba del caso (i) es idéntica a la dada para BN4 (Lt1).

Caso (ii): $O^* \vDash (A \wedge \neg B) \Rightarrow O^* \vDash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

La prueba del caso (ii) es semejante a la propuesta para Lt7. La diferencia es que, dado el conjunto de postulados en Lt8 –R =$\{ROOO$, ROO^*O^*, RO^*OO^*, $RO^*O^*O\}$– , se deben omitir los pasos 11-15 de la mencionada prueba de Lt7.

A20 $[\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow A$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow O \vDash A$

La prueba del caso (i) es semejante a la anteriormente proporcionada para E4 (Lt5). La diferencia se reduciría simplemente a que, dado el conjunto de postulados que determinan R en Lt8, se omitirían los pasos 7 y 10 de la prueba descrita para E4.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow O^* \vDash A$

La prueba del caso (ii) de A20 es idéntica a la dada anteriormente para Lt2.

A22 $[\neg(A \rightarrow B) \wedge B] \rightarrow \neg B$

Caso (i): $O \vDash \neg(A \rightarrow B) \wedge B \Rightarrow O \vDash \neg B$

Esta prueba, igual que ocurría en la prueba del caso (i) de A20, es semejante a la de E4 (Lt5). La diferencia es que se deben omitir los pasos 7 y 10 de la prueba descrita para E4.

Caso (ii): $O^* \vDash \neg(A \rightarrow B) \wedge B \Rightarrow O^* \vDash \neg B$

La prueba del caso (ii) de A22 es idéntica a la dada anteriormente para Lt2.

A25 $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \rightarrow B)$

La prueba de A25 es idéntica a la dada anteriormente para E4 (Lt5).

A28 $\{[\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow \neg B\} \vee \neg B$

La prueba de A28 es semejante a la anteriormente proporcionada para Lt6. La diferencia se reduciría simplemente a que, dado el conjunto de postulados que especifican R en Lt8, se omitiría el paso 11 de la prueba descrita para Lt6.

A29 $\{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$

La prueba de A29 es semejante a la anteriormente proporcionada para Lt7. La diferencia se reduciría simplemente a que, dado el conjunto de postulados que especifican R en Lt8 –$R = \{ROOO, ROO^{*}O^{*}, RO^{*}OO^{*}, RO^{*}O^{*}O\}$– se omitiría el paso 12 de la prueba descrita para Lt7. ■

16 Completud de las lógicas-Lti respecto de la semántica tipo Routley-Meyer con dos set-ups

En esta sección, probaremos la completud de cada uno de las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) en relación con la semántica definida en la sección anterior mediante la construcción de un modelo canónico. Procedemos como sigue: sea Γ un conjunto de f.b.f. y A una f.b.f. tal que $\Gamma \nvdash_{Lti} A$. Entonces, mostraremos que hay una teoría prima completamente normal $\mathcal{T}$ tal que $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ y $A \notin \mathcal{T}$. Esto significa que A no es consecuencia semántica de Γ desde un punto de vista canónico, con lo cual se sigue $\Gamma \nvDash_{Lti} A$.

Comenzamos recordando la noción de teoría y exponiendo las clases de teorías que serán de interés para la semántica tipo Routley-Meyer con dos set-ups.

Definición 16.1: Teorías-Eb4. Sea L una lógica-Eb4. Una teoría-L es un conjunto de f.b.f. cerrado por (1) adjunción (&) y (2) L-implicación ($\rightarrow$). Esto es,

(1) un conjunto de f.b.f. está cerrado por adjunción (&) syss, si A, $B \in a$, entonces $A \wedge B \in a$;

(2) un conjunto de f.b.f. está cerrado por L-implicación ($\rightarrow$) syss, si $A \rightarrow B$ es un teorema de L y $A \in a$, entonces $B \in a$.

Definición 16.2: Clases de teorías-Eb4 de especial interés. Sea a una teoría-Eb4, las siguientes clases de teorías son de especial interés para la semántica con dos set-ups. Establecemos que a puede ser:

1. prima;
2. normal;
3. completamente normal.

Las nociones anteriores quedaron previamente definidas de manera general en las Definiciones 6.2.2 y 6.2.3 (cf. Sección 6).

Definición 16.3: R^P, $*^P$y $\vDash^P$. Sea L una lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$). Sea K^P el conjunto de todas las teorías primas. Entonces, R^P, $*^P$ y $\vDash^P$ se definen como sigue para todo a, b, $c \in K^P$y f.b.f. A, B:

(i) $R^P abc$ syss $(A \rightarrow B \in a \,\&\, A \in b) \Rightarrow B \in c$;
(ii) $a^{*^P} = \{A | \neg A \notin a\}$;
(iii) $a \vDash^P A$ syss $A \in a$.

Proposición 16.1: $*^P$ es una operación en K^P. Sea a una teoría prima. Entonces, (1) a^* es también una teoría prima. Más aún, (2) para toda A, $\neg A \in a^{*^P}$ syss $A \notin a$.

Prueba. La prueba es semejante a la proporcionada para la semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer (cf. Lema 12.6, sección 12).

Definición 16.4: El modelo-Lti canónico. El modelo canónico para las extensiones de la lógica base que se consideran en esta investigación es una estructura $(K^C, *^C, R^C, \vDash^C)$ donde :

- $K^C = \{\mathcal{T}, \mathcal{T}^{*^C}\}$, siendo $\mathcal{T}$ la teoría completamente normal y prima construída en la Proposición 13.1 (cf. Sección 13);
- $*^C$, R^C y $\vDash^C$ son las restricciones de $*^P$, R^P y $\vDash^P$ a K^C.

En lo que sigue, debemos probar que el modelo-Lti canónico $(1 \leq i \leq 8)$ es efectivamente un modelo-Lti. Con este fin, probaremos primero algunos hechos preliminares. Empezaremos probando que $*^P$ es una operación involutiva en K^P. (En adelante, omitiré los superíndices C y P donde no haya posibilidad de confusión).

Proposición 16.2: $a = a^{**}$. Para todo $a \in K^P$, $a = a^{*^P *^P}$.

Prueba. La prueba es inmediata dados los axiomas A7 y A8 y el hecho de que a está cerrada por $\rightarrow$.

Como corolario de esta proposición, tenemos:

Corolario 16.1: $*^C$ es una operación involutiva en K^C. La operación $*^C$ es una operación involutiva en K^C. Esto es, para cualquier $a \in K^C$, $a^{*^C} \in K^C$ y $a = a^{*^C *^C}$.

Prueba. La prueba es inmediata dadas las Proposiciones 16.1 y 16.2.

En lo que sigue, con el fin de probar que el modelo canónico es efectivamente un modelo, probaremos que tanto la relación ternaria R como las cláusulas son válidas en el modelo-Lti canónico $(1 \leq i \leq 8)$.

Lema 16.1: Los postulados son válidos en el modelo-Lti canónico. La interpretación canónica de los postulados de R es válida en el modelo-Lti $(1 \leq i \leq 8)$ canónico.

Debemos considerar 8 casos, uno por cada extensión de b4 considerada, y probar por separado cada uno de ellos dado que la relación ternaria R determina diferentes postulados en cada sistema considerado. Como quedó expresado en la sección 15, R se determina en cada sistema considerado mediante un subconjunto de los siguientes postulados: (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$, (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$, (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$, (d) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$, (e) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}$ y (f) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$. En las siguientes pruebas, utilizaremos algunos de los axiomas catracterísticos de cada lógica-Lti $(1 \leq i \leq 8)$ en el caso que corresponda. Omitiré el subíndice que corresponda en cada caso (i.e., $\vdash_{Lt1}$, $\vdash_{Lt2}$, etc.).

(1) Los postulados son válidos en el modelo-Lt1 canónico (modelo-BN4 canónico): si a, b, $c \in K^C$, entonces $R^C abc$ syss ($a = \mathcal{T}$ & $b = c$) ó ($a \neq b$ & $c = \mathcal{T}^{*^C}$).

Prueba. Dado el Corolario 16.1, bastaría con probar que los siguientes postulados son válidos en el modelo-Lt1 canónico: (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$; (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$.

(a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$

1. $A \to B \in \mathcal{T}$ & $A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 1

(b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$

1. $A \to B \in \mathcal{T}$ & $A \in \mathcal{T}^*$	Hip.
2. $\neg B \to \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada CON; 1
3. $\neg A \notin \mathcal{T}$	Def. 16.3; 1
4. $\neg B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 2, 3
5. $B \in \mathcal{T}^*$	Def. 16.3; 4

(c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$

1. $A \to B \in \mathcal{T}^*$ & $A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $B \notin \mathcal{T}^*$	Hip. red.
3. $\neg B \in \mathcal{T}$	Def. 16.3; 2
4. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada CTE; 4
6. $\neg(A \to B) \notin \mathcal{T}$	Def. 16.3; 1

Pero 5 y 6 se contradicen.
■

(2) Los postulados son válidos en el modelo-Lt2 canónico. Si a, b, $c \in K^C$, entonces $R^C abc$ syss $b = c$ ó ($a = c = \mathcal{T}^{*^C}$ & $b = \mathcal{T}$).

Prueba. Dado el Corolario 16.1, bastaría con probar que los siguientes postulados son válidos en el modelo-Lt2 canónico: (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$; (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$; (d) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (e) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}$.

Las pruebas para (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$, (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ y (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ son en todo semejantes a las presentadas para BN4 (Lt1). Faltaría, entonces, probar que (d) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ y (e) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}$ se dan en Lt2.

(d) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$

1.	$A \to B \in \mathcal{T}^* \;\&\; A \in \mathcal{T}^*$	Hip.
2.	$\neg(A \to B) \notin \mathcal{T} \;\&\; A \notin \mathcal{T}$	Def. 16.3; 1
3.	$\vdash \neg B \to [\neg A \vee \neg(A \to B)]$	A19
4.	$\neg A \vee \neg(A \to B) \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 2
5.	$\neg B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4
6.	$B \in \mathcal{T}^*$	Def. 16.3; 5

(e) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}$

1.	$A \to B \in \mathcal{T}^* \;\&\; A \in \mathcal{T}$	Hip.
2.	$\vdash A \to [B \vee \neg(A \to B)]$	A18
3.	$B \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4.	$B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 3
5.	$\neg(A \to B) \notin \mathcal{T}$	Def. 16.3; 1
6.	$B \in \mathcal{T}$	4, 5

■

(3) Los postulados son válidos en el modelo-Lt3 canónico. Si a, b, $c \in K^C$, entonces $R^C abc$ syss $(a = \mathcal{T} \;\&\; b = c)$ ó $(a = \mathcal{T}^{*^C} \;\&\; b = \mathcal{T})$.

Prueba. Dado el Corolario 16.1, bastaría con probar que los siguientes postulados son válidos en el modelo-Lt3 canónico: (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$; (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$; (e) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}$.

Las pruebas para (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$, (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ y (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ se componen exactamente de los mismo pasos que las presentadas para BN4 (Lt1). Asimismo, la prueba del caso (e) se realiza como la presentada para Lt2. ■

(4) Los postulados son válidos en el modelo-Lt4 canónico. Si a, b, $c \in K^C$, entonces $R^C abc$ syss $a = b = c$ ó $(c = \mathcal{T}^{*^C} \;\&\; a \neq b)$.

Prueba. Dado el Corolario 16.1, bastaría con probar que los siguientes postulados son válidos en el modelo-Lt4 canónico: (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$; (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$; (d) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$.

Las pruebas para (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$, (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ y (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ son en todo semejantes a las presentadas para BN4 (Lt1). Igualmente, la prueba de (d) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ se compone de los mismos pasos que la presentada para Lt2. ■

(5) Los postulados son válidos en el modelo-Lt5 canónico (modelo-E4 canónico). Si a, b, $c \in K^C$, entonces $R^C abc$ syss $a = \mathcal{T}^{*^C}$ ó $b = c$.

Prueba. Dado el Corolario 16.1, bastaría con probar que los siguientes postulados son válidos en el modelo-Lt5 canónico: (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$; (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$; (d) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (e) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}$; (f) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$.

Las pruebas para (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$, (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ y (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$siguen los mismos pasos que las presentadas para BN4 (Lt1); las pruebas de (d) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ y (e) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}$ son en todo semejantes a la presentadas para Lt2. Faltaría, entonces, probar que (f) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$ se da en Lt5.

(f) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$

1. $A \to B \in \mathcal{T}^*$ & $A \in \mathcal{T}^*$	Hip.
2. $\neg(A \to B) \notin \mathcal{T}$, $\neg A \notin \mathcal{T}$	Def. 16.3; 1
3. $\vdash (\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$	A25
4. $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal ; 3
5. $\neg A \vee B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 4
6. $\neg A \vee B \in \mathcal{T}$	2, 5
7. $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 6
8. $B \in \mathcal{T}$	2, 7

■

(6) Los postulados son válidos en el modelo-Lt6 canónico. Si a, b, $c \in K^C$, entonces $R^C abc$ syss ($a = \mathcal{T}$ & $b = c$) ó $a = b = c$ ó ($a = \mathcal{T}^{*^C}$ & $b \neq c$).

Prueba. Dado el corolario 16.1, bastaría con probar que los siguientes postulados son válidos en el modelo-Lt6 canónico: (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$; (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$; (d) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (f) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$.

Por un lado, las pruebas para (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$, (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ y (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ son en todo semejantes a las presentadas para BN4 (Lt1). Por otro, la prueba de (d) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$se realiza exactamente como la presentada para Lt2 y la de (f) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$, como la proporcionada para E4 (Lt5). ■

(7) Los postulados son válidos en el modelo-Lt7 canónico. Si a, b, $c \in K^C$, entonces $R^C abc$ syss ($a = \mathcal{T}$ & $b = c$) ó ($b = c = \mathcal{T}$) ó ($a = \mathcal{T}^{*^C}$ & $b \neq c$).

Prueba. Dado el Corolario 16.1, bastaría con probar que los siguientes postulados son válidos en el modelo-Lt7 canónico: (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$; (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$; (e) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}$; (f) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$.

Las pruebas para (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$, (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ y (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ se componen de los mismos pasos que las presentadas para BN4 (Lt1). De igual modo, la prueba de (e) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}$ es semejante a la presentada para Lt2 y la de (f) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$, a aquella proporcionada para E4 (Lt5). ■

(8) Los postulados son válidos en el modelo-Lt8 canónico. Si a, b, $c \in K^C$, entonces $R^C abc$ syss ($a = \mathcal{T}$ & $b = c$) ó ($a \neq \mathcal{T}$ & $b \neq c$).

Prueba. Dado el Corolario 16.1, bastaría con probar que los siguientes postulados son válidos en el modelo-Lt8 canónico: (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$; (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$; (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$; (f) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$.

Por un lado, las pruebas para (a) $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$, (b) $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ y (c) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ se realizan a semejanza de las presentadas para BN4 (Lt1). Por otro, la prueba de (f) $R\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*\mathcal{T}$ se compone de los mismos pasos que la proporcionada anteriormente para E4 (Lt5). ■

El siguiente lema, demuestra que las cláusulas con canónicamente válidas en cada modelo-Lti canónico. Omitiré el subíndice que corresponda en cada caso (i.e., $\vdash_{Lt1}$, $\vdash_{Lt2}$, etc.) en las respectivas pruebas para cada modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Lema 16.2: Las cláusulas son canónicamente válidas. Las cláusulas (i)-(v) de la Definición 15.1 se satisfacen en el modelo canónico (cf. Definición 16.4).

Prueba. Las cláusulas (i)-(iii), (iv) de izquierda a derecha y (v) se prueban de manera semejante a la desarrollada para la semántica relacional ternaria Routley-Meyer con modelos reducidos (cf. Lema 12.8). En particular, la cláusula (i) es inmediata; (ii) se sigue de A2 y el cierre de $\mathcal{T}$ por &; (iii) se prueba mediante A4 y el hecho de que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}^*$ son primas; la cláusula (iv) de izquierda a derecha es inmediata dada la Definición 16.3; asimismo, (v) es inmediata dada la Definición 16.3 y el Corolario 16.1. Quedaría, por tanto, probar la cláusula (iv) de derecha a izquierda, esto es, probar:

Si para todo b, $c \in K$, ($Rabc$ & $A \in b$)$\Rightarrow B \in c$, entonces $A \to B \in a$.

La prueba se divide en dos casos. Caso (i): a es $\mathcal{T}$; Caso (ii): a es $\mathcal{T}^*$. El caso (i) es idéntico en todos los sistemas considerados. La prueba que se da, por tanto, es en general válida para todos ellos.

Caso (i): para todo b, $c \in K$, si ($R\mathcal{T}bc$ & $A \in b$)$\Rightarrow B \in c$, entonces $A \to B \in \mathcal{T}$.

Por contraposición, supondré $A \to B \notin \mathcal{T}$ y probaré entonces que para algunos b, $c \in K$ tales que $R\mathcal{T}bc$, se da $A \in b$ & $B \notin c$. En particular, dada la definición de la relación ternaria R en estos sistemas[111], lo que debemos probar se reduce a ($R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$ & $A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$) ó ($R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$ & $A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}^*$). Pues bien, procederé por reductio, esto es, supondré lo contrario de lo que se pretende probar y derivaré una contradicción.

1. $A \to B \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$] & No-[$A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}^*$]	Hip. red.

Entonces, dado 2, se optienen las siguientes alternativas:

(a) $A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$ ó (b) $A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*$ ó
(c) $B \in \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$ ó (d) $B \in \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*$

Para cada una de estas alternativas, encontraré una contradicción. Quedando así probado el caso (i) de la cláusula (iv) de derecha a izquierda.

3. (a) $A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$	Hip.
4. $\vdash \neg A \to [A \vee (A \to B)]$	A9

[111] Cuando el primer elemento de la relación ternaria es $\mathcal{T}$, los postulados que debemos considerar son solamente $R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}$ y $R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*$. Esto es igual en todos los sistemas aquí tratados. Cf. Definición 15.2.

5. $\neg A \in \mathcal{T}$	Def. 16.3; 3
6. $A \vee (A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 4, 5
7. $A \in \mathcal{T}$ ó $A \to B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 6
8. $A \to B \in \mathcal{T}$	3, 7

Pero 1 y 8 se contradicen. Asumo entonces,

9. (b) $A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*$	Hip.
10. $\vdash (A \vee \neg B) \vee (A \to B)$	A11
11. $\neg B \notin \mathcal{T}$	Def. 16.3; 9
12. $A \vee \neg B \notin \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 9, 11
13. $(A \vee \neg B) \vee (A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 10
14. $A \vee \neg B \in \mathcal{T}$ ó $A \to B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 13
15. $A \to B \in \mathcal{T}$	12, 14

Pero 1 y 15 se contradicen. Asumo entonces,

16. (c) $B \in \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$	Hip.
17. $\vdash (A \to B) \vee [(\neg A \wedge B) \to (A \to B)]$	A12
18. $(A \to B) \vee [(\neg A \wedge B) \to (A \to B)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 17
19. $A \to B \in \mathcal{T}$ ó $(\neg A \wedge B) \to (A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 18
20. $(\neg A \wedge B) \to (A \to B) \in \mathcal{T}$	1, 19
21. $\neg A \in \mathcal{T}$	Def. 16.3; 16
22. $\neg A \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 16, 21
23. $A \to B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 20, 22

Pero 1 y 23 se contradicen. Asumo entonces,

24) (d) $B \in \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*$	Hip.
25. $\vdash B \to [\neg B \vee (A \to B)]$	A10
26. $\neg B \vee (A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 24, 25
27. $\neg B \in \mathcal{T}$ ó $A \to B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 26
28. $\neg B \notin \mathcal{T}$	Def. 16.3; 24
29. $A \to B \in \mathcal{T}$	27, 28

Pero 1 y 29 se contradicen.

■

La prueba del segundo caso de la cláusula (iv) de derecha a izquierda es diferente en cada uno de los sistemas. Especificaré, por tanto, las pruebas para cada uno de ellos.

Caso (ii): para todo b, $c \in K$, si $(R\mathcal{T}^*bc$ & $A \in b) \Rightarrow B \in c$, entonces $A \to B \in \mathcal{T}^*$.

Por contraposición, supondré $A \to B \notin \mathcal{T}^*$ y probaré entonces que para algunos b, $c \in K$ tales que $R\mathcal{T}^*bc$, se da $A \in b$ & $B \notin c$.

Lt1 (BN4)

Dada la definición de la relación ternaria R en BN4 (i.e., $R = \{R\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}, R\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}^*, R\mathcal{T}^*\mathcal{T}\mathcal{T}^*\}$; cf. Definición 15.2), lo que debemos probar es $A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$. Procederé por reductio.

1. $A \to B \notin \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$)	Hip.
2. No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$]	Hip. red.

Tenemos entonces:

3. (a) $A \notin \mathcal{T}$ ó (b) $B \in \mathcal{T}^*$	2
4. (a) $A \notin \mathcal{T}$	Hip.
5. $\vdash A \vee [\neg(A \to B) \to A]$	A14
6. $A \vee [\neg(A \to B) \to A] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 5
7. $A \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \to A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 6
8. $\neg(A \to B) \to A \in \mathcal{T}$	4, 7
9. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 1, 8

Pero 4 y 9 se contradicen. Asumo entonces

10. (b) $B \in \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg B \notin \mathcal{T}$)	Hip.
11. $\vdash \neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B]$	A15
12. $\neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 11
13. $\neg B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \to \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 12
14. $\neg(A \to B) \to \neg B \in \mathcal{T}$	10, 13
15. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 1, 14

Pero 10 y 15 se contradicen.

Lt2

Dada la definición de la relación ternaria R en Lt2, lo que debemos probar es ($A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$) ó ($A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}^*$) ó ($A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$). Procederé por reductio, esto es, supondré que ninguna de las alternativas anteriores se da y derivaré una contradicción[112].

1. $A \to B \notin \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$)	Hip.
2. No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$] & No-[$A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}^*$] & No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$]	Hip. red.

Dado 2, aplicando las propiedades de la negación junto con la conjunción y disyunción, tenemos:

[112]En lo que sigue, utilizaré esta misma estrategia para probar la dirección derecha-izquierda de la cláusula (iv) de cada uno de los sistemas

3. $(A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}^*)$ & $(A \notin \mathcal{T}^*$ ó $B \in \mathcal{T}^*)$ & $(A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T})$

Dado 3, obtenemos ocho alternativas. El objetivo es entonces derivar una contradicción a partir de cada una de ellas. No obstante, en cada una de estas alternativas tenemos

4. (a) $(A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*)$ ó (b) $(A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*)$ ó (c) $(B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T})$	3

Por lo tanto, bastaría con derivar una contradicción para cada uno de estos casos, pues cada uno de los ocho casos se solucionaría de manera semejante a alguno de los siguientes:

5. (a) $A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg A \in \mathcal{T}$)	Hip.
6. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$	A20
7. $\neg(A \to B) \wedge \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 5
8. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 6, 7

Pero 5 y 8 se contradicen. Asumo entonces

9. (b) $A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg B \notin \mathcal{T}$)	Hip.
10. $\vdash \neg(A \to B) \to (A \vee \neg B)$	A21
11. $A \vee \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 10
12. $A \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 11
13. $\neg B \in \mathcal{T}$	9, 12

Pero 9 y 13 se contradicen. Asumo entonces

14. (c) $B \in \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg B \notin \mathcal{T}$)	Hip.
15. $\vdash [\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$	A22
16. $\neg(A \to B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 14
17. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 15, 16

Pero 14 y 17 se contradicen.

Lt3

En Lt3, lo que debemos probar es $(A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*)$ ó $(A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T})$.

1. $A \to B \notin \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$)	Hip.
2. No-$[A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*]$ & No-$[A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}]$	Hip. red.
3. $(A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}^*)$ & $(A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T})$	2
4. (a) $A \notin \mathcal{T}$ ó (b) $(A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*)$ ó (c) $(B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T})$ (d) $(B \in \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T})$	3

Como sucedía en los otros sistemas (y sucederá en los siguientes), el objetivo es derivar una contradicción a partir de cada una de las anteriores alternativas:

(a) $A \notin \mathcal{T}$. Se soluciona mediante A14, de modo semejante a la prueba del caso (a) para Lt1 (BN4).

(b) $A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*$. Se soluciona mediante A21, como la prueba del caso (b) para Lt2.

(c) $B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T}$. Puede usarse A22, siguiendo los pasos de la prueba del caso (c) para Lt2.

(d) $A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}$. Con A23, como se desarrolla a continuación:

5. (d) $B \in \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}$	Hip.
6. $\vdash B \to \{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\}$	A23
7. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 5, 6
8. $\neg(A \to B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 5
9. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 1, 8

Pero 5 y 9 se contradicen.

Lt4

En Lt4, lo que debemos probar es ($A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$) ó ($A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}^*$).

1. $A \to B \notin \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$)	Hip.
2. No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$] & No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$]	Hip. red.
3. ($A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}^*$) & ($A \notin \mathcal{T}^*$ ó $B \in \mathcal{T}^*$)	2
4. (a) ($A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$) ó (b) ($A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*$) ó (c) ($B \in \mathcal{T}^*$ & $A \notin \mathcal{T}^*$) ó (d) $B \in \mathcal{T}^*$	3

Por un lado, los casos (a) $A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$ y (b) $A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}^*$ se solucionan mediante A20 y A21, respectivamente, de modo semejante a la pruebas de los casos (a) y (b) para Lt2. Por otro lado, los casos (c) $B \in \mathcal{T}^*$ & $A \notin \mathcal{T}^*$ y (d) $B \in \mathcal{T}^*$ pueden solucionarse mediante A15, como la prueba del caso (b) para Lt1 (BN4). Este camino también sería una vía alternativa para probar el anterior caso (b) de Lt4.

Lt5 (E4)

En E4, debemos probar: ($A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$) ó ($A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}^*$) ó ($A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$) ó ($A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}$).

1. $A \to B \notin \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$)	Hip.
2. No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$] & No-[$A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}^*$] & No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$] & No-[$A \in \mathcal{T}^*$& $B \notin \mathcal{T}$]	Hip. red.
3. ($A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}^*$) & ($A \notin \mathcal{T}^*$ ó $B \in \mathcal{T}^*$) & ($A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$) & ($A \notin \mathcal{T}^*$ ó $B \in \mathcal{T}$)	2
4. (a) ($A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$) ó (b) ($B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T}$)	3

El caso (a) $A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$ se soluciona mediante A20 y el caso (b) $B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T}$ mediante A22, de modo semejante a las pruebas de los casos (a) y (c) de Lt2, respectivamente.

Lt6

En Lt6, lo que debemos probar es ($A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$) ó ($A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}^*$) ó ($A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}$).

1. $A \to B \notin \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$)	Hip.
2. No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$] & No-[$A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}^*$] & No-[$A \in \mathcal{T}^*$& $B \notin \mathcal{T}$]	Hip. red.
3. ($A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}^*$) & ($A \notin \mathcal{T}^*$ ó $B \in \mathcal{T}^*$) & ($A \notin \mathcal{T}^*$ ó $B \in \mathcal{T}$)	2
4. (a) ($A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$) ó (b) ($B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T}$) ó (c) ($B \in \mathcal{T}^*$ & $A \notin \mathcal{T}^*$)	3

Los casos (a) $A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$ y (b) $B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T}$ se solucionan mediante A20 y A22, respectivamente, de modo semejante a las pruebas de los casos (a) y (c) de Lt2.

El caso (c) $B \in \mathcal{T}^*$ & $A \notin \mathcal{T}^*$ se soluciona mediante A28 como se muestra a continuación:

5. (c) $B \in \mathcal{T}^*$(i.e., $\neg B \notin \mathcal{T}$) & $A \notin \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg A \in \mathcal{T}$)	Hip.
6. $\vdash \{[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\} \vee \neg B$	A28
7. $\{[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\} \vee \neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 6
8. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B \in \mathcal{T}$ ó $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 7
9. $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B \in \mathcal{T}$	5, 8
10. $\neg(A \to B) \wedge \neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 5
11. $\neg B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 9, 10

Pero 5 y 11 se contradicen.

Lt7

En Lt7, debemos probar: ($A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$) ó ($A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$) ó ($A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}$).

1. $A \to B \notin \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$)	Hip.
2. No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$] & No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}$] & No-[$A \in \mathcal{T}^*$& $B \notin \mathcal{T}$]	Hip. red.
3. ($A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}^*$) & ($A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}$) & ($A \notin \mathcal{T}^*$ ó $B \in \mathcal{T}$)	2
4. (a) ($A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$) ó (b) ($B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T}$) ó (c) ($B \in \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}$)	3

Los casos (a) $A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$ y (b) $B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T}$ se soluciona mediante A20 y A22, como los casos (a) y (c) de Lt2. La prueba del caso (c) $B \in \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}$ se muestra a continuación:

5. (c) $B \in \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}$	Hip.
6. $\vdash \{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$	A29
7. $\{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 6
8. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to A \in \mathcal{T}$ ó $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 7
9. $[\neg(A \to B) \wedge B] \to A \in \mathcal{T}$	5, 8
10. $\neg(A \to B) \wedge B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 5
11. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 9, 10

Pero 5 y 11 se contradicen.

Lt8

En Lt8, lo que debemos probar es ($A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$) ó ($A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}$).

1. $A \to B \notin \mathcal{T}^*$ (i.e., $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$)	Hip.
2. No-[$A \in \mathcal{T}$ & $B \notin \mathcal{T}^*$] & No-[$A \in \mathcal{T}^*$ & $B \notin \mathcal{T}$]	Hip. red.
3. ($A \notin \mathcal{T}$ ó $B \in \mathcal{T}^*$) & ($A \notin \mathcal{T}^*$ ó $B \in \mathcal{T}$)	2
4. (a) ($A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$) ó (b) ($A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}$) ó (c) ($B \in \mathcal{T}^*$ & $A \notin \mathcal{T}^*$) (d) ($B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T}$)	3

Los casos (a) $A \notin \mathcal{T}$ & $A \notin \mathcal{T}^*$ y (d) $B \in \mathcal{T}^*$ & $B \in \mathcal{T}$ se solucionan mediante A20 y A22, de modo semejante a las pruebas de los casos (a) y (c) de Lt2, respectivamente. Para solucionar el caso (b) $A \notin \mathcal{T}$ & $B \in \mathcal{T}$ podemos usar A29, como se hizo en la prueba del caso (c) para Lt7. Por último, para el caso (c) $B \in \mathcal{T}^*$ & $A \notin \mathcal{T}^*$, podemos emplear A28, siguiendo las pautas del caso (c) de Lt6. En conclusión, de todos los casos anteriores se sigue una contradicción. ■

Ahora sí podemos demostrar que el modelo canónico es efectivamente un modelo y proceder a la prueba del teorema de completud.

Lema 16.3: El modelo canónico es efectivamente un modelo. El modelo-Lti canónico es efectivamente un modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Prueba. Por un lado, por el Corolario 16.1, tenemos que $*^C$es una operación involutiva en K^C. Además, por el Lema 16.1, la relación ternaria R^C se sostiene canónicamente. Por último, dado el Lema 16.2, las cláusulas (que constituyen la relación $\vDash^C$) también se sostienen canónicamente. ■

Teorema 16.1: Completud de las lógicas-Lti. Para cualquier conjunto de f.b.f. Γ y cualquier f.b.f. A, si $\Gamma \vDash_{Lti} A$, entonces $\Gamma \vdash_{Lti} A$ (para i tal que $1 \leq i \leq 8$).

Prueba. Supóngase $\Gamma \nvdash_{Lti} A$. Por la Proposición 13.1 (sección 13), hay una teoría prima y completamente normal $\mathcal{T}$ tal que $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ y $A \notin \mathcal{T}$. Entonces, se define a partir de $\mathcal{T}$ el modelo-Lti ($1 \leq i \leq 8$) canónico, como muestra la Definición 16.4. Además, por el Lema 16.3, queda probado que el modelo-Lti canónico es efectivamente un modelo-Lti. Entonces, tenemos $\Gamma \nvDash A$, dado que se da $\mathcal{T} \vDash \Gamma$ y $\mathcal{T} \nvDash A$. Por tanto, dada la definición de consecuencia semántica (cf. Definición 15.5), $\Gamma \nvDash_{Lti} A$. ■

Parte 5: Operadores modales

El objetivo de esta parte es definir expansiones modales de las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) y dotarlas de una semántica tipo Belnap-Dunn. Por lo tanto, se tomará como punto de referencia la semántica Belnap-Dunn definida para las mismas en la parte 2 y se extenderá dicha semántica incluyendo operadores modales, sus correspondientes cláusulas semánticas y cualquier otra modificación necesaria para demostrar los teoremas de corrección y completud correspondientes.

Esta parte se dividirá en dos secciones diferentes: en la primera de ellas, las expansiones modales se fundamentan a partir de las tablas de verdad investigadas por Font y Rius (2000); en la segunda, la modalidad se basará en las definiciones propuestas por Tarski cuando todavía era estudiante de Lukasiewicz (Font y Hajek, 2002). En ambos casos, como se explicó en la introducción, la modalidad desarrollada en esta investigación sigue la línea de las lógicas multivaluadas de Lukasiewicz (cf. Subsección 0.3 de la introducción).

17 Expansiones modales definidas de manera independiente del resto de conectivas

En esta sección definiré expansiones modales para las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) y les otorgaré una semántica Belnap-Dunn basándome en las pruebas proporcionadas en la Parte 2. Partiré, por tanto, de estos ocho sistemas, Lt1-Lt8, y definiré ocho expansiones modales, a las que referiremos mediante el rótulo $\mathcal{M}_1$Lt1-$\mathcal{M}_1$Lt8.

17.1 Presentación de las expansiones modales

Definición 17.1.1: Las matrices M$\mathcal{M}_1$ti . El lenguaje proposicional consiste en las conectivas $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y L. Mediante M$\mathcal{M}_1$ti me refiero a la expansión modal de la matriz determinada por ti ($1 \leq i \leq 8$; cf. Proposición 5.3.1). Estas matrices (modales) de cuatro elementos M$\mathcal{M}_1$ti son estructuras tipo ($\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$) donde $\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{F}$ se definen como en Mti, salvo por la adición de una nueva función monaria, f_L, que se define de acuerdo a la siguiente tabla:

	0	1	2	3
L	0	0	0	3

Por otro lado, las nociones de M$\mathcal{M}_1$ti-interpretación, M$\mathcal{M}_1$ti-consecuencia y M$\mathcal{M}_1$ti-validez se entienden de acuerdo con las definiciones generales (cf. Definición 1.7).

Es importante subrayar que la función del operador de necesidad f_L no puede definirse usando el resto de funciones en las matrices M$\mathcal{M}_1$ti, como se demuestra a continuación.

Proposición 17.1.1: Independencia de f_L. La función f_L no puede definirse mediante el resto de funciones en las matrices M$\mathcal{M}_1$ti ($1 \leq i \leq 8$).

Prueba. Basta con apuntar que, para toda M$\mathcal{M}_1$ti, $f_{\rightarrow}(2, 2) = f_{\wedge}(2, 2) = f_{\vee}(2, 2) = f_{\neg}(2) = 2$ y que a las fórmulas de tipo LA nunca se les puede asignar el valor 2. ■

Defino ahora las lógicas $\mathcal{M}_1$Lti, es decir, las primeras expansiones modales de las lógicas objeto de esta investigación (Lt1-Lt8).

Definición 17.1.2: Las lógicas modales $\mathcal{M}_1$Lti. Las lógicas modales $\mathcal{M}_1$Lti ($1 \leq i \leq 8$) pueden axiomatizarse añadiendo los siguientes axiomas y la siguiente definición a Lt1-Lt8.

A30 $LA \rightarrow A$

A31 $A \rightarrow (\neg A \vee LA)$

A32 $(LA \wedge \neg LA) \rightarrow B$

Df M[113]**:** $MA =_{df} \neg L \neg A$

En lo que sigue, desarrollo una breve observación sobre el operador modal de posibilidad.

Observación 17.1.1: Sobre el operador de posibilidad en las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti. Dada la definición del operador modal de posibilidad que figura en la Definición 17.1.2, podemos establecer a beneficio del lector su correspondiente tabla de verdad.

	0	1	2	3
M	0	3	3	3

Las nociones de derivación y teorema se entienden de acuerdo con las Definiciones 1.4 y 1.5 (cf. Sección 1, Parte 1). Expongo a continuación algunos teoremas modales que serán de utilidad para adaptar las pruebas de corrección y completud a las extensiones modales de las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Proposición 17.1.2: Algunos teoremas de las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti. Sea L una lógica-$\mathcal{M}_1$Lti ($1 \leq i \leq 8$), las siguientes fórmulas son teoremas en L:

T14. $\neg A \rightarrow \neg LA$

T15. $LA \vee \neg LA$

Prueba. Omitiré el símbolo $\vdash$ con el subídice L, pues todas las líneas de las siguientes pruebas son axiomas de L o el resultado de aplicar alguna regla de L a axiomas de L.

T14 $\neg A \rightarrow \neg LA$

[113] M es el operador de posibilidad.

1. $LA \to A$	A30
2. $\neg A \to \neg LA$	CON; 1

T15 $LA \vee \neg LA$

Para probar T15, utilizaré (t*) $(A \vee B) \to (B \vee A)$, la propiedad conmutativa de la disyunción, que se obtiene de modo trivial aplicando la regla E$\vee$ a A4. Además, sea C cualquier teorema común a toda lógica-$\mathcal{M}_1$Lti ($1 \leq i \leq 8$),

1. $(LA \wedge \neg LA) \to \neg C$	A32
2. $\neg\neg C \to \neg(LA \wedge \neg LA)$	CON; 1
3. $C \to \neg\neg C$	A9
4. C	Teorema $\mathcal{M}$Lti
5. $\neg\neg C$	MP; 3, 4
6. $\neg(LA \wedge \neg LA)$	MP; 2, 5
7. $\neg(LA \wedge \neg LA) \to (\neg LA \vee \neg\neg LA)$	T10
8. $\neg LA \vee \neg\neg LA$	MP; 6, 7
9. $(\neg LA \vee \neg\neg LA) \to (\neg\neg LA \vee \neg LA)$	t*
10. $\neg\neg LA \vee \neg LA$	MP; 8, 9
11. $\neg\neg LA \to LA$	A7
12. $(\neg\neg LA \to LA) \to [(\neg\neg LA \to LA) \vee \neg LA]$	A4
13. $(\neg\neg LA \to LA) \vee \neg LA$	MP; 11, 12
14. $LA \vee \neg LA$	MPd; 10, 13

■

17.2 Semántica Belnap-Dunn para las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti

En esta subsección, se aplica una semántica Belnap-Dunn a las expansiones modales de los sistemas objeto de esta investigación (Lt1-Lt8). Con este fin, se amplían las pruebas propuestas en la parte 2 con el fin de adaptarlas a las respectivas versiones modales de los sistemas. Comienzo definiendo los modelos-$\mathcal{M}_1$Lti. Por otro lado, las nociones de consecuencia-$\mathcal{M}_1$Lti y validez-$\mathcal{M}_1$Lti se definen de acuerdo con la Definición 9.2 (cf. Parte 2, sección 9).

Definición 17.2.1: Modelos-$\mathcal{M}_1$Lti. Un modelo-$\mathcal{M}_1$Lti es una estructura (K4, I) donde K4 e I se definen igual que en la Definición 9.1, salvo por la adición de las siguientes condiciones: para toda $p \in \mathcal{P}$ y A, $B \in \mathcal{F}$,
(6a) $T \in I(LA)$ syss $T \in I(A)$ y $F \notin I(A)$;
(6b) $F \in I(LA)$ syss $T \notin I(LA)$[114].

[114] Dado el carácter "clásico" de la necesidad, esto es, como una fómula de tipo LA solo puede recibir alguno de los valores clásicos (no recibe ni *both* ni *neither*), es conveniente establecer la cláusula (6b) como se expone aquí. No obstante, podríamos definirla de forma equivalente como sigue: (6b') $F \in I(LA)$ syss $T \notin I(A)$ ó $F \in I(A)$.

En referencia a las nuevas cláusulas modales expuestas en la definición anterior, es preciso resaltar la siguiente observación.

Observación 17.2.1: Sobre las cláusulas del operador de posibilidad. Dada la definición del operador de posibilidad M (cf. Definición 17.1.2), las cláusulas para M serían:
(7a) $T \in I(MA)$ syss $T \in I(A)$ ó $F \notin I(A)$;
(7b) $F \in I(MA)$ syss $T \notin I(MA)$[115].

Establecido lo anterior y dadas las pruebas desarrolladas en la parte 2, es fácil mostrar que $\vDash_{M\mathcal{M}_1ti}$ (la relación de consecuencia definida en la matriz M$\mathcal{M}_1$ti; cf. Definición 17.1.1) y $\vDash_{\mathcal{M}_1Lti}$ (la relación de consecuencia definida en la semántica tipo Belnap-Dunn para $\mathcal{M}_1$Lti; cf. Definición 17.2.1) son coextensivas. En primer lugar, definimos la noción de interpretación correspondiente para extenderla, primero, a todas las f.b.f. y, después, a cualquier conjunto de f.b.f.

Omitiré la definición de interpretación correspondiente puesto que es semejante a la Definición 9.3 (cf. Sección 9). Pasaré ahora, entonces, a extender la interpretación correspondiente a todas las f.b.f.

Proposición 17.2.1: Extensión de la interpretación correspondiente a todas las f.b.f. Dada una interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti ($1 \leq i \leq 8$) I y la interpretación-$\mathcal{M}_1$Lti I' correspondiente a I, tenemos que probar para cualquier $A \in \mathcal{F}$:

1. $T \in I'(A)$ & $F \notin I'(A)$ syss $I(A) = 3$;
2. $T \in I'(A)$ & $F \in I'(A)$ syss $I(A) = 2$;
3. $T \notin I'(A)$ & $F \notin I'(A)$ syss $I(A) = 1$;
4. $T \notin I'(A)$ & $F \in I'(A)$ syss $I(A) = 0$.

Prueba. Obviamente, I' interpreta fórmulas complejas de acuerdo con las cláusulas (2a), (2b), (3a), (3b), (4a), (5a), (5b), (6a) y (6b) (cf. Definiciones 9.1 y 17.2.1). Procederé por inducción. Hay que contemplar dos casos:

- A es una variable proposicional. Dada la Definición 9.3, esto es trivial.
- A es una f.b.f compleja. Debemos diferenciar cinco casos: (i) A es una fórmula negada: $\neg B$; (ii) A es de la forma $B \wedge C$; (iii) A es de la forma $B \vee C$; (iv) A es de la forma $B \rightarrow C$; (v) A es de la forma LB. La prueba de los casos (i), (ii), (iii) y (iv) es semejante a la proporcionada para los sistemas originales (i.e., no modales; cf. Proposición 9.1). Quedaría por probar, entonces, solamente el caso (v).

[115] Igual que ocurría con la necesidad, también podríamos definir la posibilidad de manera equivalente a (7b) con independencia de M: (7b') $F \in I(MA)$ syss $T \notin I(A)$ y $F \in I(A)$.

Caso (v): A es LB.

Tomando en cuenta la tabla de verdad de este operador modal, la interpretación de una fórmula del tipo LB solo puede ser $I(LB) = 3$ ó $I(LB) = 0$. Por lo tanto, la prueba por inducción queda reducida a dos únicos casos. Como se señaló en anteriores pruebas, utilizaré H.I. para referir a la hipótesis de inducción. Asimismo, cuando quiera referirme a la Definición 17.1.1, donde figura la matriz M$\mathcal{M}_1$ti, escribiré directamente este último rótulo.

1. $T \in I'(LB)$ & $F \notin I'(LB)$ syss $I(LB) = 3$

(a) $T \in I'(LB) \,\&\, F \notin I'(LB) \Rightarrow I(LB) = 3$

1. $T \in I'(LB) \,\&\, F \notin I'(LB)$	Hip.
2. $[T \in I'(B)$ & $F \notin I'(B)]$ & $T \in I'(LB)$	Def. 17.2.1 (6a); 1
3. $T \in I'(B)$ & $F \notin I'(B)$	Def. 17.2.1 (6b); 2
4. $I(B) = 3$	H.I.; 3
5. $I(LB) = 3$	M$\mathcal{M}_1$ti; 4

(b) $I(LB) = 3 \Rightarrow T \in I'(LB) \,\&\, F \notin I'(LB)$

1. $I(LB) = 3$	Hip.
2. $I(B) = 3$	M$\mathcal{M}_1$ti; 1
3. $T \in I'(B)$ & $F \notin I'(B)$	H.I.; 2
4. $T \in I'(LB)$	Def. 17.2.1 (6a); 3
5. $F \notin I'(LB)$	Def. 17.2.1 (6b); 4

2. $T \notin I'(LB)$ & $F \in I'(LB)$ syss $I(LB) = 0$

(a) $T \notin I'(LB) \,\&\, F \in I'(LB) \Rightarrow I(LB) = 0$

1. $T \notin I'(LB) \,\&\, F \in I'(LB)$	Hip.
2. $T \notin I'(LB)$	Def. 17.2.1 (6b); 1
3. $T \notin I'(B)$ & $F \in I'(B)$	Def. 17.2.1 (6a); 2
4. $I(B) = 0$	H.I.; 3
5. $I(LB) = 0$	M$\mathcal{M}_1$ti; 4

(b) $I(LB) = 0 \Rightarrow T \notin I'(LB) \,\&\, F \in I'(LB)$

1. $I(LB) = 0$	Hip.
2. $I(B) = 0$ ó $I(B) = 1$ ó $I(B) = 2$	M$\mathcal{M}_1$ti; 1
3. $[F \in I'(B)$ & $T \notin I'(B)]$ ó $[F \notin I'(B)$ & $T \notin I'(B)]$ ó $[F \in I'(B)$ & $T \in I'(B)]$	H.I.; 2
4. $T \notin I'(LB)$	Def. 17.2.1 (6a); para todo caso en 3
5. $F \in I'(LB)$	Def. 17.2.1 (6b); 4

Por otro lado, dada una interpretación-$\mathcal{M}_1$Lti I, defínase una interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti correspondiente I' de acuerdo con la Definición 9.3. Entonces, la interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti correspondiente I' puede extenderse a fórmulas complejas de manera semejante. ■

Una vez probada la Proposición 17.2.1, la siguiente proposición es trivial.

Proposición 17.2.2: Extensión de la interpretación correspondiente a cualquier conjunto de f.b.f. Dada una interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti ($1 \leq i \leq 8$) y la interpretación-$\mathcal{M}_1$Lti I' correspondiente a I, tenemos que probar para cualquier conjunto de f.b.f. Γ:

1. $T \in I'(\Gamma)$ & $F \notin I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 3$;
2. $T \in I'(\Gamma)$ & $F \in I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 2$;
3. $T \notin I'(\Gamma)$ & $F \notin I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 1$;
4. $T \notin I'(\Gamma)$ & $F \in I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 0$.

Prueba. La prueba de la Proposición 17.2.2 es semejante a la de la Proposición 17.2.1.

Por otro lado, dada una interpretación-$\mathcal{M}_1$Lti I y definida la interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti I' correspondiente, podemos extender la interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti correspondiente I' a cualquier conjunto de f.b.f. Γ de modo semejante. ■

Establecido lo anterior, es sencillo probar la coextensividad entre ambas relaciones, esto es, $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A$ syss $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$.

Proposición 17.2.3: Coextensividad de $\vDash_{M\mathcal{M}_1 ti}$ y $\vDash_{\mathcal{M}_1 Lti}$. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A$ syss $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$. En particular, $\vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A$ syss $\vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$.

Prueba. Hay que probar $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A$ syss $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$. Para ello, debemos tener en cuenta los dos casos siguientes:

1. $\Gamma = \emptyset$. En este caso, lo que habría que probar es $\vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A$ syss $\vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$, esto es, para cualesquiera interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti I e interpretación-$\mathcal{M}_1$Lti I', $I(A) = 2$ ó 3 syss $T \in I(A)$. Pues bien, esto quedó ya demostrado en la Proposición 17.2.1.

2. $\Gamma \neq \emptyset$. En este caso, lo que hay que probar es $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A$ syss $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$. Lo dividiremos, a su vez, en dos subcasos.

(i) De izquierda a derecha. $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A \Rightarrow \Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$.

Supóngase (1) $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A$. Supóngase también que I es una interpretación-$\mathcal{M}_1$Lti tal que (2) $T \in I(\Gamma)$. Hemos de probar $T \in I(A)$. Sea I' la interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti correspondiente a I, si $T \in I(\Gamma)$, tengo entonces (3) $I'(\Gamma) = 3$ ó 2 (Proposición 17.2.2). Dados 1 y 3, se sigue (4) $I'(A) = 3$ ó 2 (cf. Definición 1.7). Aplico ahora a 4 la Proposición 17.2.1 y obtengo (5) $T \in I(A)$, como necesitaba demostrar.

(ii) De derecha a izquierda. $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A \Rightarrow \Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A$.

Supóngase (1) $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$. Supóngase también que I es una interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti tal que (2) $I(\Gamma) = 3$ ó 2. Debemos probar $I(A) = 3$ ó 2. Sea I' la interpretación-$\mathcal{M}_1$Lti correspondiente a I, si $I(\Gamma) = 3$ ó 2, tengo (3) $T \in I'(\Gamma)$ (Proposición 17.2.2). De lo que se sigue (4) $T \in I'(A)$, dados 1 y 3 (cf. Definición 9.2). Tengo entonces (5) $I(A) = 3$ ó 2, aplicando en (4) la Proposición 17.2.1. ■

Probaré ahora la corrección de cada lógica-$\mathcal{M}_1$Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Teorema 17.2.1: Corrección de $\mathcal{M}_1$Lti con respecto de $\vDash_{M\mathcal{M}_1 ti}$. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, si $\Gamma \vdash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$, entonces $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A$.

Este teorema expresa que si una fórmula A es derivable a partir de Γ en la lógica-$\mathcal{M}_1$Lti, entonces, para cualquier interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti I, si $I(\Gamma) = 3$ ó 2, entonces $I(A) = 3$ ó 2.

Prueba. La prueba es idéntica a la proporcionada en la parte 2 para las lógicas-Lti (cf. Teorema 9.1). ■

Corolario 17.2.1: Corrección de $\mathcal{M}_1$Lti con respecto de $\vDash_{\mathcal{M}_1 Lti}$. Para cualquier conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, si $\Gamma \vdash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$, entonces $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$. Este teorema expresa que si una fórmula A es derivable a partir de Γ en la lógica-$\mathcal{M}_1$Lti, entonces, dicha fórmula es consecuencia semántica de Γ en todo modelo-$\mathcal{M}_1$Lti.

Prueba. Inmediata por la Proposición 17.2.3 y el Teorema 17.2.1. ■

Proposición 17.2.4: Inadmisibilidad de NEC en $\mathcal{M}_1$Lti. La regla Necesitación (NEC) $A \Rightarrow LA$ no es admisible[116] en $\mathcal{M}_1$Lti.

Prueba. Sea p_i una variable proposicional. La f.b.f. $L(p_i \rightarrow p_i)$ es falsada por cualquier interpretación-M$\mathcal{M}_1$ti I que asigne el valor 2 a p_i (i.e., $I(p_j) = 2$). Por lo tanto, encontramos casos en los que la premisa de la regla tiene un valor designado y la conclusión no. ■

17.3 Completud de $\mathcal{M}_1$Lti

En esta sección, se probará el teorema de completud para los sistemas modales expuestos en las secciones previas respecto de la semántica Belnap-Dunn (esto es, de la relación $\vDash_{\mathcal{M}_1 Lti}$; cf. Definición 17.2.1). Una vez probado esto, se sigue inmediatamente la completud de los sistemas respecto de la definición de validez aneja a sus respectivas matrices (esto es, de la relación $\vDash_{M\mathcal{M}_1 ti}$; cf. Definición 17.1.1). En la parte 2 de este trabajo ya se proporcionó una semántica Belnap-Dunn para las lógicas-Lti. Por lo tanto, la nueva estrategia consistirá en fundamentar la prueba de completud de las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti en las demostraciones

[116]Sobre las nociones de regla derivada y regla admisible, cf. (Anderson y Belnap, 1975, pp. 53-54).

propuestas anteriormente modificando o ampliando lo que sea necesario con el fin de adaptarlas a las expansiones modales.

17.3.1 Teorías-$\mathcal{M}_1$Eb4

Las definiciones de teoría-$\mathcal{M}_1$Eb4 y de clases de teorías se entienden de acuerdo con las Definiciones 6.2.1 y 6.2.2, respectivamente. Las propiedades de las teorías-$\mathcal{M}_1$Eb4 son las mismas que las de las teorías-Eb4, aquellas mostradas en las secciones 6 y 7 (parte 1); en particular, en los Lemas 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3 y la Proposición 7.1. Además de las propiedades de las teorías-Eb4, expongo ahora una nueva propiedad exclusiva de las teorías de las extensiones modales (teorías-$\mathcal{M}_1$Eb4).

Lema 17.3.1: El operador de necesidad en teorías primas a-consistentes. Sea L una lógica-$\mathcal{M}_1$Eb4 y $\mathcal{T}$ una teoría-L a-consistente y prima. Entonces, para alguna $A \in \mathcal{F}$, (1) $LA \in \mathcal{T}$ syss $A \in \mathcal{T}$ & $\neg A \notin \mathcal{T}$; (2) $\neg LA \in \mathcal{T}$ syss $LA \notin \mathcal{T}$.

Prueba. Como en casos anteriores, omitiré el subíndice L en $\vdash_L$.
Caso (1a): $LA \in \mathcal{T} \Rightarrow (A \in \mathcal{T}$ & $\neg A \notin \mathcal{T})$. Sea B una f.b.f. cualquiera,

1. $LA \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $A \notin \mathcal{T}$ ó $\neg A \in \mathcal{T}$	Hip. red.
3. $\vdash LA \to A$	A30
4. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 3
5. $\neg A \in \mathcal{T}$	2, 4
6. $\vdash \neg A \to \neg LA$	T14
7. $\neg LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 5, 6
8. $LA \wedge \neg LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 8
9. $\vdash (LA \wedge \neg LA) \to B$	A32
10. $B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 8, 9

Pero 10 contradice la a-consistencia de $\mathcal{T}$.
Caso (1b): $(A \in \mathcal{T}$ & $\neg A \notin \mathcal{T}) \Rightarrow LA \in \mathcal{T}$.

1. $A \in \mathcal{T}$ & $\neg A \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash A \to (\neg A \vee LA)$	A31
3. $\neg A \vee LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 3
5. $LA \in \mathcal{T}$	1, 3

Caso (2a): $\neg LA \in \mathcal{T} \Rightarrow LA \notin \mathcal{T}$

1. $\neg LA \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $LA \in \mathcal{T}$	Hip. red.
3. $LA \wedge \neg LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 2
4. $\vdash (LA \wedge \neg LA) \to B$	A32
5. $B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 3, 4

Pero 5 contradice la a-consistencia de $\mathcal{T}$, dado que hay al menos una f.b.f. que no pertenece a $\mathcal{T}$ y B puede ser cualquier f.b.f.
Caso (2b): $LA \notin \mathcal{T} \Rightarrow \neg LA \in \mathcal{T}$

1. $LA \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash LA \vee \neg LA$	T15
3. $LA \vee \neg LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 2
4. $LA \in \mathcal{T}$ ó $\neg LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 3
5. $\neg LA \in \mathcal{T}$	1, 4

■

17.3.2 Modelos canónicos: Completud de las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti

En esta sección probaré que toda f.b.f. que no sea un teorema de la lógica-$\mathcal{M}_1$Lti ($1 \leq i \leq 8$) se falsa en algún modelo canónico. Para ello, es preciso establecer una serie de definiciones –$\mathcal{T}$-interpretación, modelos-$\mathcal{M}_1$Lti canónicos, la relación canónica $\vDash_{\mathcal{T}}$, etc.– y probar que todo modelo-$\mathcal{M}_1$Lti canónico es efectivamente un modelo-$\mathcal{M}_1$Lti. Además, necesitaremos un lema que pruebe que el conjunto $\mathcal{F}$ es $\mathcal{T}$-interpretable por cualquier $\mathcal{T}$-interpretación. Pues bien, dichas definiciones y la prueba de que todo modelo-$\mathcal{M}_1$Lti canónico es efectivamente un modelo-$\mathcal{M}_1$Lti son semejantes a las proporcionadas en la parte 2 de este trabajo (cf. Definiciones 10.1-10.3 y Proposición 10.1). Queda, por lo tanto, establecer un lema que pruebe la $\mathcal{T}$-interpretación del conjunto de f.b.f. $\mathcal{F}$.

Lema 17.3.2: $\mathcal{T}$-interpretación del conjunto de f.b.f. $\mathcal{F}$. Sea L una lógica-$\mathcal{M}_1$Lti ($1 \leq i \leq 8$) y $\mathcal{T}$ una L-teoría prima, a-consistente y completamente normal. Más aún, sea I una $\mathcal{T}$-interpretación definida en la L-teoría $\mathcal{T}$. Para cada $A \in \mathcal{F}$, tenemos: (1) $T \in I(A)$ syss $A \in \mathcal{T}$; (2) $F \in I(A)$ syss $\neg A \in \mathcal{T}$.

Prueba. La prueba se realiza por inducción sobre la complejidad de A. Los casos que deben demostrarse son: (a) A es una variable proposicional; (b) A es una fórmula negada; (c) A es una conjunción; (d) A es una disyunción; (e) A es un condicional, y (f) A es de la forma LB. Los puntos (a), (b), (c), (d) y (e) se demostraron anteriormente (cf. Lema 10.1). Basta, por tanto, con demostrar (f). Las cláusulas citadas en la siguiente demostración refieren a aquellas reflejadas en la Definición 17.2.1. Además, utilizaré H.I. para abreviar "hipótesis de inducción".

(f) A es de la forma LB:
(1) $T \in I(LB)$ syss (cláusula 6a) $T \in I(B)$ y $F \notin I(B)$ syss (H.I) $B \in \mathcal{T}$ y $\neg B \notin \mathcal{T}$ syss (Lema 17.3.1) $LB \in \mathcal{T}$.
(2) $F \in I(LB)$ syss (cláusula 6b) $T \notin I(LB)$ syss $LB \notin \mathcal{T}$, dado lo demostrado en 1, syss (Lema 17.3.1) $\neg LB \in \mathcal{T}$. ■

Probaremos ahora la completud de las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Observación 17.3.1: El conjunto de consecuencias de Γ en las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti es una teoría completamente normal. Sea L cualquier lógica-$\mathcal{M}_1$Lti. Para cualquier conjunto de f.b.f. Γ, $Cn\Gamma[L]$ es una teoría completamente normal. Esto es claro pues $Cn\Gamma[L]$ está cerrado por las reglas de L y contiene todos los teoremas de la misma. Consecuentemente, está cerrado por implicación –pues está cerrado por MP– y por adjunción.

Teorema 17.3.1: Completud de las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, (1) si $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$; (2) si $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_1 ti} A$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$.

Prueba. (1) Para algún conjunto de f.b.f. Γ y alguna f.b.f. A, supóngase $\Gamma \nvdash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$. Probaremos $\Gamma \nvDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$. Si $\Gamma \nvdash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$, entonces $A \notin Cn\Gamma[\mathcal{M}_1 Lti]$. Esto es, $Cn\Gamma[\mathcal{M}_1 Lti] \nvdash^d_{\mathcal{M}_1 Lti} \{A\}$; pues, de no ser así, tendríamos $B \wedge ... \wedge B \vdash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$ para algunas $B_1 \wedge ... \wedge B_n \in Cn\Gamma[\mathcal{M}_1 Lti]$ y, por lo tanto, A estaría en $Cn\Gamma[\mathcal{M}_1 Lti]$. Entonces, por el Lema 8.2, hay un conjunto maximal $\mathcal{T}$ tal que $Cn\Gamma[\mathcal{M}_1 Lti] \subseteq \mathcal{T}$. Por tanto, $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ (ya que $\Gamma \subseteq Cn\Gamma[\mathcal{M}_1 Lti]$) y $A \notin \mathcal{T}$. Por el Lema 8.3, $\mathcal{T}$ es una teoría prima; más aún, $\mathcal{T}$ es completamente normal dado que $Cn\Gamma[\mathcal{M}_1 Lti]$ es completamente normal (Observación 17.3.1), y es a-consistente ya que $A \notin \mathcal{T}$. Por tanto, $\mathcal{T}$ genera una $\mathcal{T}$-interpretación $I_{\mathcal{T}}$ tal que, por el Lema 17.3.2, $T \in I_{\mathcal{T}}(\Gamma)$ (dado que $T \in I_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$) pero $T \notin I_{\mathcal{T}}(A)$. Por lo tanto, $\Gamma \nvDash_{I_{\mathcal{T}}} A$ por la definición de relación canónica (Definición 10.3) y la Proposición 10.1. Finalmente, $\Gamma \nvDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$ por la Definición 9.2. (2) La completud respecto de $\vDash_{M\mathcal{M}_1 ti}$ es inmediata dada la prueba de (1) y la Proposición 17.2.3. ■

18 Expansiones modales determinadas mediante definiciones tarskianas

En la presente sección me ocuparé de definir expansiones modales de Lt1-Lt8 a partir de las definiciones tarskianas para L y M (cf. Def. 18.1.1) y proporcionaré una semántica tipo Belnap-Dunn a los sistemas modales resultantes, incluyendo las pruebas de corrección y completud correspondientes.

18.1 Presentación de las extensiones modales definicionales

En lo que sigue, presentaré los sistemas objeto de investigación en esta sección. En primer lugar, presento las definiciones que Tarski consideró apropiadas para los operadores modales L y M.

Definición 18.1.1: Definiciones tarskianas de L y M. Para cualquier f.b.f. A:

Df L: $LA =_{df} \neg(A \to \neg A)$;

Df M: $MA =_{df} \neg A \to A$.

La siguiente proposición especifica las tablas de verdad determinadas por las definiciones anteriores.

Proposición 18.1.1: Tablas de verdad determinadas por las definiciones tarskianas. Dadas las anteriores definiciones, las tablas de verdad para L y M en Mti ($1 \leq i \leq 8$) son las siguientes:

- Para Mt1-Mt4

	0	1	2	3
L	0	0	2	3

	0	1	2	3
M	0	3	2	3

- Para Mt5-Mt8

	0	1	2	3
L/M	0	2	2	3

Prueba. Dadas las matrices para $\neg$ y $\to$, la prueba es trivial. (En caso de requerirse una comprobación explícita, remíto al lector al programa MaTest (González, 2012).) ■

Observación 18.1.1: Sobre las tablas de L y M para Lt5-Lt8. Dadas las funciones $f_\neg$ y $f_\to$ en los sistemas Lt5-Lt8, podemos comprobar que las definiciones tarskianas determinan la misma tabla de verdad para ambos operadores. Por tanto, podemos afirmar que dichas definiciones de L y M no funcionan en estos sistemas. En particular, no podremos otorgar una semántica tipo Belnap-Dunn basada en la anterior tabla para Mt5-Mt8. Por el contrario, en lo que sigue, veremos cómo sí es posible establecer este tipo de semántica para Lt1-Lt4 partiendo de las tablas de verdad determinadas por las definiciones tarskianas. Aún más, también es posible definir expansiones modales de Mt5-Mt8 en base a las tablas para Lt1-Lt4, como se demostrará a lo largo de la sección.

Observación 18.1.2: M y L son interdefinibles. Dadas las tablas de verdad para Mt1-Mt4 determinadas por las definiciones de L y M, tenemos: $MA \leftrightarrow \neg L \neg A$ y $LA \leftrightarrow \neg M \neg A$.

Teniendo en cuenta la Observación 18.1.1, el propósito de la presente sección será definir expansiones modales de las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) basadas en las tablas de verdad de L y M para Lt1-Lt4 (cf. Proposición 18.1.1), que son el resultado de aplicar las definiciones tarskianas de los operadores modales a Mt1-Mt4.

Definición 18.1.2: La matriz M$\mathcal{M}_2$ti ($1 \leq i \leq 8$). El lenguaje proposicional consiste en las conectivas $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y L. Mediante M$\mathcal{M}$ti me refiero a la expansión modal de la matriz determinada por ti ($1 \leq i \leq 8$; cf. Proposición 5.3.1). Estas matrices (modales) de cuatro elementos M$\mathcal{M}_2$ti son estructuras tipo ($\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$) donde $\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{F}$ se definen como en Mti, salvo por la adición de una nueva función monaria, f_L, que se define de acuerdo a la tabla de verdad para Mt1-Mt4 reflejada en la Proposición 18.1.1.

Por otro lado, las nociones de M$\mathcal{M}_2$ti-interpertación, M$\mathcal{M}_2$ti-consecuencia y M$\mathcal{M}_2$ti-validez se entienden de acuerdo con las definiciones generales (cf. Definición 1.7).

Definición 18.1.3: Las lógicas modales $\mathcal{M}_2$Lti ($1 \leq i \leq 8$). Las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti ($1 \leq i \leq 8$) se axiomatizan añadiendo a las lógicas-Lti los siguientes axiomas modales y la siguiente regla de derivación:

A30 $LA \rightarrow A$

A33 $A \vee \neg LA$

A34 $(LA \wedge \neg LA) \rightarrow \neg A$

Necesitación disyuntiva (NECd) $B \vee A \Rightarrow B \vee LA$

Nuevamente, las nociones de prueba y teorema se entienden de acuerdo con las Definiciones 1.4 y 1.5 (parte 1). Expongo a continuación algunos teoremas modales que serán de utilidad posteriormente.

Proposición 18.1.2: Algunos teoremas de las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti. El siguiente teorema y la siguiente regla derivada de las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti ($1 \leq i \leq 8$) serán útiles en lo sucesivo.

T14 $\neg A \rightarrow \neg LA$

R11 (NEC) $A \Rightarrow LA$

Prueba. La prueba de T14 es igual a la presentada en la Proposición 17.1.2 (cf. Sección 17). Pruebo ahora la regla NEC.

NEC $A \Rightarrow LA$

1. A	Hip.
2. $A \to (A \vee LA)$	A4
3. $A \vee LA$	MP; 1, 2
4. $LA \vee LA$	NECd; 3
5. $(LA \vee LA) \to LA$	T1
6. LA	MP; 4, 5

■

18.2 Semántica Belnap-Dunn para las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti

En lo que sigue, aplicaré una semántica Belnap-Dunn a las expansiones modales de Lt1-Lt8 y probaré la corrección de dichos sistemas respecto de la semántica otorgada. Para ello, adaptaré las pruebas propuestas en la parte 2 a las respectivas versiones modales de los sistemas. Comienzo definiendo los modelos-$\mathcal{M}_2$Lti. Las nociones de consecuencia-$\mathcal{M}_2$Lti y validez-$\mathcal{M}_2$Lti se definen de acuerdo con la Definición 9.2 (cf. Parte 2).

Definición 18.2.1: Modelos-$\mathcal{M}_2$Lti. Un modelo-$\mathcal{M}_2$Lti es una estructura (K4, I) donde K4 e I se definen igual que en la Definición 9.1, salvo por la adición de las siguientes condiciones: para cualesquiera $p \in \mathcal{P}$ y A, $B \in \mathcal{F}$,

(6'a) $T \in I(LA)$ syss $T \in I(A)$;

(6'b) $F \in I(LA)$ syss $F \in I(A)$ ó $T \notin I(A)$.

En referencia a las nuevas cláusulas modales expuestas en la definición anterior, es preciso resaltar la siguiente observación.

Observación 18.2.1: Cláusulas para M. Dada la tabla de verdad del operador de posibilidad M (cf. Proposición 18.1.1), las cláusulas para M serían:

(7'a) $T \in I(MA)$ syss $T \in I(A)$ ó $F \notin I(A)$;

(7'b) $F \in I(MA)$ syss $F \in I(A)$.

Establecido lo anterior y dadas las pruebas desarrolladas en la parte 2, es fácil mostrar que $\vDash_{M\mathcal{M}_2ti}$ –la relación de consecuencia definida en la matriz M$\mathcal{M}_2$ti (cf. Definición 18.1.2)– y $\vDash_{\mathcal{M}_2Lti}$ –la relación de consecuencia definida en la semántica tipo Belnap-Dunn para las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti (cf. Definición 18.2.1)– son coextensivas. Procederé de manera semejante a la anterior sección: omitiré la definición de interpretación correspondiente puesto que es semejante a la Definición 9.3. Pasaré ahora, entonces, a extender la interpretación correspondiente a todas las f.b.f.

Proposición 18.2.1: Extensión de la interpretación correspondiente a todas las f.b.f. Dada una interpretación-M$\mathcal{M}_2$ti ($1 \leq i \leq 8$) y la interpretación-$\mathcal{M}_2$Lti I' correspondiente a I, tenemos que probar para cualquier $A \in \mathcal{F}$:

1. $T \in I'(A)$ & $F \notin I'(A)$ syss $I(A) = 3$;
2. $T \in I'(A)$ & $F \in I'(A)$ syss $I(A) = 2$;
3. $T \notin I'(A)$ & $F \notin I'(A)$ syss $I(A) = 1$;
4. $T \notin I'(A)$ & $F \in I'(A)$ syss $I(A) = 0$.

Prueba. Obviamente, I' interpreta fórmulas complejas de acuerdo con las cláusulas (2a), (2b), (3a), (3b), (4a), (5a), (5b), (6'a) y (6'b) (cf. Definiciones 9.1 y 18.2.1). Procederé por inducción. Hay que contemplar dos casos:

- A es una variable proposicional. Dada la Definición 9.3, esto es trivial.
- A es una f.b.f compleja. Debemos diferenciar cinco casos: (i) A es una fórmula negada: $\neg B$; (ii) A es de la forma $B \wedge C$; (iii) A es de la forma $B \vee C$; (iv) A es de la forma $B \rightarrow C$; A es de la forma LB. La prueba de los casos (i), (ii), (iii) y (iv) es semejante a la proporcionada para los sistemas originales (i.e., no modales; cf. Proposición 9.1). Quedaría por probar, entonces, solamente el caso (v).

Caso (v): A es LB.

Tomando en cuenta la tabla de verdad de este operador modal, la interpretación de una fórmula del tipo LB solo puede ser $I(LB) = 3$, $I(LB) = 2$ ó $I(LB) = 0$. Por lo tanto, la prueba por inducción queda reducida a estos tres casos. Como siempre, utilizaré H.I. para referir a la hipótesis de inducción y el rótulo M$\mathcal{M}_2$ti para referir a la matriz expuesta en la Definición 18.1.2.

1. $T \in I'(LB)$ & $F \notin I'(LB)$ syss $I(LB) = 3$

(a) $T \in I'(LB)\,\&\, F \notin I'(LB) \Rightarrow I(LB) = 3$

1. $T \in I'(LB)$ & $F \notin I'(LB)$	Hip.
2. $T \in I'(B)$ & $F \notin I'(LB)$	Def. 18.2.1 (6'a); 1
3. $T \in I'(B)$ & $[F \notin I'(B)$ & $T \in I'(B)]$	Def. 18.2.1 (6'b); 2
4. $I(B) = 3$	H.I.; 3
5. $I(LB) = 3$	M$\mathcal{M}_2$ti; 4

(b) $I(LB) = 3 \Rightarrow T \in I'(LB)\,\&\, F \notin I'(LB)$

1. $I(LB) = 3$	Hip.
2. $I(B) = 3$	M$\mathcal{M}_2$ti; 1
3. $T \in I'(B)$ & $F \notin I'(B)$	H.I.; 2
4. $T \in I'(LB)$	Def. 18.2.1 (6'a); 3

2. $T \in I'(LB)$ & $F \in I'(LB)$ syss $I(LB) = 2$

(a) $T \in I'(LB) \,\&\, F \in I'(LB) \Rightarrow I(LB) = 2$

1. $T \in I'(LB)$ & $F \in I'(LB)$	Hip.
2. $T \in I'(B)$ & $F \in I'(LB)$	Def. 18.2.1 (6'a); 1
3. $F \in I'(B)$ ó $T \notin I'(B)$	Def. 18.2.1 (6'b); 2
4. $F \in I'(B)$	2, 3
5. $I(B) = 2$	H.I.; 2, 4
6. $I(LB) = 2$	M$\mathcal{M}_2$ti; 5

(b) $I(LB) = 2 \Rightarrow T \in I'(LB) \,\&\, F \in I'(LB)$

1. $I(LB) = 2$	Hip.
2. $I(B) = 2$	M$\mathcal{M}_2$ti; 1
3. $T \in I'(B)$ & $F \in I'(B)$	H.I.; 2
4. $T \in I'(LB)$	Def. 18.2.1 (6'a); 3
5. $F \in I'(LB)$	Def. 18.2.1 (6'b); 3

3. $T \notin I'(LB)$ & $F \in I'(LB)$ syss $I(LB) = 0$

(a) $T \notin I'(LB) \,\&\, F \in I'(LB) \Rightarrow I(LB) = 0$

1. $T \notin I'(LB)$ & $F \in I'(LB)$	Hip.
2. $T \notin I'(B)$ & $F \in I'(LB)$	Def. 18.2.1 (6'a); 1
3. $T \notin I'(B)$ & $[F \in I'(B)$ ó $T \notin I'(B)]$	Def. 18.2.1 (6'b); 2
4. $I(B) = 0$ ó $I(B) = 1$	H.I.; 3
5. $I(LB) = 0$	M$\mathcal{M}_2$ti; 4

(b) $I(LB) = 0 \Rightarrow T \notin I'(LB) \,\&\, F \in I'(LB)$

1. $I(LB) = 0$	Hip.
2. $I(B) = 0$ ó $I(B) = 1$	M$\mathcal{M}_2$ti; 1
3. $[F \in I'(B)$ & $T \notin I'(B)]$ ó $[F \notin I'(B)$ & $T \notin I'(B)]$	H.I.; 2
4. $T \notin I'(LB)$ & $F \in I'(LB)$	Def. 18.2.1 (6'b); 3

Por otro lado, dada una interpretación-$\mathcal{M}_2$Lti I, defínase una interpretación-M$\mathcal{M}_2$ti correspondiente I' de acuerdo con la Definición 9.3. Entonces, la interpretación-M$\mathcal{M}_2$ti correspondiente I' puede extenderse a fórmulas complejas de manera semejante. ■

Una vez probada la Proposición 18.2.1, la siguiente proposición es trivial.

Proposición 18.2.2: Extensión de la interpretación correspondiente a cualquier conjunto de f.b.f. Dada una interpretación-M$\mathcal{M}_2$ti ($1 \leq i \leq 8$) I y la interpretación-$\mathcal{M}_2$Lti I' correspondiente a I, tenemos que probar para cualquier conjunto de f.b.f. Γ:

1. $T \in I'(\Gamma)$ & $F \notin I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 3$;
2. $T \in I'(\Gamma)$ & $F \in I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 2$;
3. $T \notin I'(\Gamma)$ & $F \notin I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 1$;
4. $T \notin I'(\Gamma)$ & $F \in I'(\Gamma)$ syss $I(\Gamma) = 0$.

Prueba. La prueba de la Proposición 18.2.2 es semejante a la de la Proposición 18.2.1. ■

Por otro lado, dada una interpretación-$\mathcal{M}_2$Lti I y estando previamente definida la interpretación-M$\mathcal{M}_2$ti I' correspondiente de manera semejante, podemos extender la interpretación-M$\mathcal{M}_2$ti correspondiente I' a cualquier conjunto de f.b.f. Γ de modo semejante.

Establecido lo anterior, es sencillo probar la coextensividad entre ambas relaciones, esto es, $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A$ syss $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$.

Proposición 18.2.3: Coextensividad de $\vDash_{M\mathcal{M}_2ti}$ y $\vDash_{\mathcal{M}_2Lti}$. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A., $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A$ syss $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$. En particular, $\vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A$ syss $\vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$.

Prueba. Hay que probar $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A$ syss $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$. Para ello, debemos tener en cuenta los dos casos siguientes:

1. $\Gamma = \emptyset$. En este caso, lo que habría que probar es $\vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A$ syss $\vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$, esto es, para cualesquiera interpretación-M$\mathcal{M}_2$ti I e interpretación-$\mathcal{M}_2$Lti I', $I(A) = 2$ ó 3 syss $T \in I(A)$. Pues bien, esto quedó ya demostrado en la Proposición 18.2.1.

2. $\Gamma \neq \emptyset$. En este caso, lo que hay que probar es $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A$ syss $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$. Lo dividiremos, a su vez, en dos subcasos.

(i) De izquierda a derecha. $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A \Rightarrow \Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$.

Supóngase (1) $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A$. Supóngase también que I es una interpretación-$\mathcal{M}_2$Lti tal que (2) $T \in I(\Gamma)$. Hemos de probar $T \in I(A)$. Sea I' la interpretación-M$\mathcal{M}_2$ti correspondiente a I, si $T \in I(\Gamma)$, tengo entonces (3) $I'(\Gamma) = 3$ ó 2 (Proposición 18.2.2). Dados 1 y 3, se sigue (4) $I(A) = 3$ ó 2. Aplico ahora a 4 la Proposición 18.2.1 y obtengo (5) $T \in I'(A)$, como necesitaba demostrar.

(ii) De derecha a izquierda. $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A \Rightarrow \Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A$.

Supóngase (1) $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$. Supóngase también que I es una interpretación-M$\mathcal{M}_2$ti tal que (2) $I(\Gamma) = 3$ ó 2. Debemos probar $I(A) = 3$ ó 2. Sea I' la interpretación-$\mathcal{M}_2$Lti correspondiente a I, si $I(\Gamma) = 3$ ó 2, tengo (3) $T \in I'(\Gamma)$ (Proposición 18.2.2). De lo que se sigue (4) $T \in I(A)$, dados 1 y 3 (cf. Definición 9.2). Tengo entonces (5) $I'(A) = 3$ ó 2, aplicando en 4 la Proposición 18.2.1. ■

Teorema 18.2.1: Corrección de las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti con respecto $\vDash_{M\mathcal{M}_2ti}$ y $\vDash_{\mathcal{M}_2Lti}$. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, (1) si $\Gamma \vdash_{\mathcal{M}_2Lti} A$, entonces $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A$; (2) si $\Gamma \vdash_{\mathcal{M}_2Lti} A$, entonces $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$.

Prueba. Las pruebas son en todo semejantes a las proporcionadas en la sección 10, parte 2 (cf. Teoremas 9.1 y 9.2) y en la sección 17 (cf. Teorema 17.3.1). ■

18.3 Completud de $\mathcal{M}_2$Lti

En esta subsección llevaré a cabo los teoremas de completud de las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti ($1 \leq i \leq 8$). Para ello, será preciso redefinir algunas de las nociones establecidas en la primera parte de este trabajo; en particular, extenderé las propiedades de las teorías completamente normales y, en consecuencia, revisaré los lemas de extensión demostrados en la sección 8. Tras realizar los mencionados cambios, se probará el teorema de completud de las lógicas modales $\mathcal{M}_2$Lt1-$\mathcal{M}_2$Lt8.

18.3.1 Cambios en la definición de teoría y en sus propiedades

Las definiciones de teoría-$\mathcal{M}_2$Lti y de clases de teorías se entienden de acuerdo con las Definiciones 6.2.1 y 6.2.2, respectivamente. Introduzco ahora varias definiciones y una proposición en relación con el operador de necesidad. Es preciso resaltar que la Definición 18.3.1.1 reemplaza en lo que refiere a las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti a la Definición 6.2.3 propuesta en la primera parte de este trabajo.

Definición 18.3.1.1: Teorías-$\mathcal{M}_2$Lti completamente normales. Sea L una lógica-$\mathcal{M}_2$Lti y $\mathcal{T}$ una L-teoría, $\mathcal{T}$ es completamente normal syss es normal y está cerrada por las siguientes reglas (cf. Definiciones 6.2.4-6.2.9 y Definición 18.3.1.2): Modus Ponens (MP), Modus Ponens disyuntivo (MPd), Contraposición disyuntiva (CONd), Prefijación disyuntiva (PREFd), Sufijación disyuntiva (SUFd), Contraejemplo disyuntivo (CTEd) y Necesitación disyuntiva (NECd).

Definición 18.3.1.2: Conjunto de f.b.f. cerrado por Necesitación disyuntiva (NECd). Γ es un conjunto de f.b.f. cerrado por NECd syss, para cualesquiera A, $B \in \mathcal{F}$, si $A \vee B \in \Gamma$, entonces $LA \vee B \in \Gamma$.

En las pruebas que siguen, omitiré el subíndice L en $\vdash_L$ como hice en casos anteriores.

Proposición 18.3.1.1: Las teorías-$\mathcal{M}_2$Lti completamente normales están cerradas por Necesitación (NEC). Sea L una lógica-$\mathcal{M}_2$Lti, $\mathcal{T}$ una L-teoría completamente normal y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{T}$ está cerrada por NEC, esto es, si $A \in \mathcal{T}$, entonces $LA \in \mathcal{T}$.

Prueba.

1. $A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash A \rightarrow (A \vee LA)$	A4
3. $A \vee LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\rightarrow$; 1, 2
4. $LA \vee LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada NECd; 3
5. $\vdash (LA \vee LA) \leftrightarrow LA$	T1
6. $LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\rightarrow$; 4, 5

■

A las propiedades de las teorías-Eb4 expuestas en las secciones 6 y 7 (en particular, en los Lemas 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3 y 7.1) se les añade una nueva que es característica de las teorías-$\mathcal{M}_2$Lti.

Lema 18.3.1.1: El operador de necesidad en las teorías primas completamente normales. Sea L una lógica-$\mathcal{M}_2$Lti y $\mathcal{T}$ una L-teoría completamente normal, a-consistente y prima. Entonces, para algún $A \in \mathcal{F}$, (1) $LA \in \mathcal{T}$ syss $A \in \mathcal{T}$; (2) $\neg LA \in \mathcal{T}$ syss $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $A \in \mathcal{T}$.

Prueba. Caso (1a): $LA \in \mathcal{T} \Rightarrow A \in \mathcal{T}$.

1. $LA \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash LA \rightarrow A$	A30
3. $A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\rightarrow$; 1, 2

Caso (1b): $A \in \mathcal{T} \Rightarrow LA \in \mathcal{T}$.

1. $A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada NEC; 1

Caso (2a): $\neg LA \in \mathcal{T} \Rightarrow \neg A \in \mathcal{T}$ ó $A \notin \mathcal{T}$.

1. $\neg LA \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg A \notin \mathcal{T}$ & $A \in \mathcal{T}$	Hip. red.
3. $LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada NEC; 2
4. $\vdash (LA \wedge \neg LA) \rightarrow \neg A$	A34
5. $LA \wedge \neg LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 3
6. $\neg A \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\rightarrow$; 4, 5

Pero 2 y 6 se contradicen.

Caso (2b): $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $A \notin \mathcal{T} \Rightarrow \neg LA \in \mathcal{T}$.

1. $\neg A \in \mathcal{T}$ ó $A \notin \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg LA \notin \mathcal{T}$	Hip. red.
3. $A \notin \mathcal{T}$	Hip.; 1
4. $\vdash A \vee \neg LA$	A33
5. $A \vee \neg LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 4
6. $A \in \mathcal{T}$ ó $\neg LA \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 5

7. $A \in \mathcal{T}$ 2, 6

Pero 3 y 7 se contradicen.

8. $\neg A \in \mathcal{T}$ Hip.; 1
9. $\vdash \neg A \to \neg LA$ T14
10. $\neg LA \in \mathcal{T}$ $\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 8, 9

Pero 2 y 10 se contradicen.
■

18.3.2 Cambios en los lemas de extensión

Los siguientes lemas modifican y reemplazan los Lemas 8.1 y 8.3, respectivamente. Si bien el Lema 8.1 no se menciona de manera explícita en la prueba del teorema de completud (véanse los Teoremas 10.1 y 18.3.3.1), fue esencial para probar el Lema 8.2, necesario, a su vez, para la demostración de dicho teorema. Una vez adaptado el Lema 8.1 a las expansiones modales, el Lema 8.2 se prueba se deriva sin mayores modificaciones.

Lema 18.3.2.1: Lema auxiliar principal. Sea L una lógica-$\mathcal{M}_2$Lti, para cualesquiera f.b.f. A, B_1,..., $B_n \in \mathcal{F}$, si $\{B_1, ..., B_n\} \vdash_L A$, entonces, para cualquier f.b.f. C, $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_L C \vee A$.

Prueba. Procedemos por inducción sobre la prueba de A a partir de $B_1, ..., B_n$. Hay que probar los siguientes casos: (1) $A \in \{B_1, ..., B_n\}$; (2) A es un axioma; (3) A es por ADJ; (4) A es por MP; (5) A es por MPd; (6) A es por CONd; (7) A es por PREFd; (8) A es por SUFd; (9) A es por CTEd; (10) A es por NECd. Los casos (1)-(9) se prueban como se reflejó en el Lema 8.1. Bastará, entonces, únicamente con probar el caso (10).

(10) A es por NECd. Entonces, A es $D \vee LE$ para algunas f.b.f. D y E. Utilizaré T2 ($[A \vee (B \vee C)] \to [(A \vee B) \vee C]$) a lo largo de la siguiente prueba.

1. $(B_1, ..., B_n) \vdash D \vee E$ Hip.
2. $C \vee (B_1, ..., B_n) \vdash C \vee (D \vee E)$ H.I.
3. $C \vee (B_1, ..., B_n) \vdash (C \vee D) \vee E$ Por T2; 2
4. $C \vee (B_1, ..., B_n) \vdash (C \vee D) \vee LE$ NECd; 3
5. $C \vee (B_1, ..., B_n) \vdash C \vee (D \vee LE)$ Por T2; 4

■

Lema 18.3.2.2: Teorías primas completamente normales. Sea L una lógica-$\mathcal{M}_2$Lti, si Γ es un conjunto maximal, entonces es una teoría prima completamente normal.

Prueba. Hay que probar tres cuestiones principales: (1) Γ es una teoría; (2) Γ es prima; (3) Γ es completamente normal. El punto (3) está dividido a su vez en diferentes apartados, uno por cada una de las reglas por las que Γ ha de estar cerrada para ser completamente normal. Γ ha de estar cerrada por: (i) MP; (ii) MPd; (iii) CONd; (iv) PREFd; (v) SUFd; (vi) CTEd; (vii) NECd. Los puntos (1), (2) y (i)-(vi) quedaron probados en el Lema 8.3. Bastará, por tanto, con probar el subcaso (vii) para que el Lema 18.3.2.2 quede demostrado.

(xii) Γ está cerrada por NECd:

Sea Γ un conjunto de f.b.f. y A, $B \in \mathcal{F}$,

1. $B \vee A \in \Gamma$	Hip.
2. $B \vee LA \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $\vdash (B \vee A) \to (B \vee A)$	A1
4. $B \vee A \vdash B \vee A$	3
5. $C \vee A \vdash B \vee LA$	NECd; 4

Pero, dados 1 y 2, 5 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \vdash^d \bar{\Gamma}$). ■

18.3.3 Modelos canónicos: completud de $\mathcal{M}_2$Lti.

La prueba de completud sigue las misma líneas que la desarrollada en la sección anterior: hay que probar que toda f.b.f. que no sea un teorema de la lógica-$\mathcal{M}_2$Lti ($1 \leq i \leq 8$) se falsa en algún modelo canónico. Dado que la prueba se desarrolla igual que la proporcionada en la sección 9, basta ahora con demostrar aquellos lemas que reflejen alguna diferencia con respecto a las pruebas proporcionadas en la mencionada sección. En particular, es preciso modificar el lema que prueba la $\mathcal{T}$-interpretación del conjunto de f.b.f. $\mathcal{F}$.

Lema 18.3.3.1: $\mathcal{T}$-interpretación del conjunto de f.b.f. Sea L una lógica-$\mathcal{M}_2$Lti y $\mathcal{T}$ una L-teoría. Más aún, sea I una $\mathcal{T}$-interpretación definida en la L-teoría $\mathcal{T}$. Para cada $A \in \mathcal{F}$, tenemos: (1) $T \in I(A)$ syss $A \in \mathcal{T}$; (2) $F \in I(A)$ syss $\neg A \in \mathcal{T}$.

Prueba. La prueba se realiza por inducción sobre el grado de A. Los casos que deben demostrarse son: (a) A es una variable proposicional; (b) A es una fórmula negada; (c) A es una conjunción; (d) A es una disyunción; (e) A es un condicional, y (f) A es de la forma LB. Los puntos (a), (b), (c), (d) y (e) se demostraron anteriormente (cf. Lema 10.1). Basta, por tanto, con demostrar (f). Las cláusulas citadas en la siguiente demostración refieren a aquellas reflejadas en la Definición 18.2.1. De nuevo, utilizaré H.I. para abreviar "hipótesis de inducción".

(f) A es de la forma LB:
(1) $T \in I(LB)$ syss (cláusula 6'a) $T \in I(B)$ syss (H.I) $B \in \mathcal{T}$ syss (Lema 18.3.1.1) $LB \in \mathcal{T}$.

(2) $F \in I(LB)$ syss (cláusula 6'b) $F \in I(B)$ ó $T \notin I(B)$ syss (H.I.) $\neg B \in \mathcal{T}$ ó $B \notin \mathcal{T}$ syss (Lema 18.3.1.1) $\neg LB \in \mathcal{T}$. ■

Observación 18.3.3.1: El conjunto de consecuencias de Γ en las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti es una teoría completamente normal. Sea L cualquier lógica-$\mathcal{M}_2$Lti. Para cualquier conjunto de f.b.f. Γ, $Cn\Gamma[L]$ es una teoría completamente normal. Esto es claro pues $Cn\Gamma[L]$ está cerrado por las reglas de L y contiene todos los teoremas de la misma. Consecuentemente, está cerrado por implicación –pues está cerrado por MP– y por adjunción.

Probaremos ahora la completud de las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Teorema 18.3.3.1: Completud de $\mathcal{M}_2$Lti. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), conjunto de f.b.f. Γ y f.b.f. A, (1) si $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{M}_2Lti} A$; (2) si $\Gamma \vDash_{M\mathcal{M}_2ti} A$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{M}_2Lti} A$.

Prueba. (1) Para algún conjunto de f.b.f. Γ y alguna f.b.f. A, supóngase $\Gamma \nvdash_{\mathcal{M}_2Lti} A$. Probaremos $\Gamma \nvDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$. Si $\Gamma \nvdash_{\mathcal{M}_2Lti} A$, entonces $A \notin Cn\Gamma[\mathcal{M}_2Lti]$. Esto es, $Cn\Gamma[\mathcal{M}_2Lti] \nvdash^d_{\mathcal{M}_2Lti} \{A\}$; pues, de lo contrario, tendríamos $B \wedge ... \wedge B \vdash_{\mathcal{M}_2Lti} A$ para algunas $B_1 \wedge ... \wedge B_n \in Cn\Gamma[\mathcal{M}_2Lti]$ y, por lo tanto, A estaría en $Cn\Gamma[\mathcal{M}_2Lti]$. Entonces, por el Lema 8.2, hay un conjunto maximal $\mathcal{T}$ tal que $Cn\Gamma[\mathcal{M}_2Lti] \subseteq \mathcal{T}$. Por tanto, $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ (ya que $\Gamma \subseteq Cn\Gamma[\mathcal{M}_2Lti]$) y $A \notin \mathcal{T}$. Por el Lema 18.3.2.2, $\mathcal{T}$ es una teoría prima; más aún, $\mathcal{T}$ es completamente normal dado que $Cn\Gamma[\mathcal{M}_2Lti]$ es completamente normal (cf. Observación 18.3.3.1), y es a-consistente ya que $A \notin \mathcal{T}$. Por tanto, $\mathcal{T}$ genera una $\mathcal{T}$-interpretación $I_{\mathcal{T}}$ tal que, por el Lema 18.3.3.1, $T \in I_{\mathcal{T}}(\Gamma)$ (dado que $T \in I_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$) pero $T \notin I_{\mathcal{T}}(A)$. Por lo tanto, $\Gamma \nvDash_{I_{\mathcal{T}}} A$ por la definición de relación canónica (cf. Definición 10.3) y el hecho de que el modelo-$\mathcal{M}_2$Lti canónico es efectivamente un modelo (Proposición 10.1). Finalmente, $\Gamma \nvDash_{\mathcal{M}_2Lti} A$ por la Definición 9.2. (2) La completud respecto de $\vDash_{M\mathcal{M}_2ti}$ es inmediata dada la prueba de (1) y la Proposición 18.2.3. ■

Parte 6: Particularidades de los sistemas

19 Lemas de extensión adaptados a cada sistema

En lo que sigue, utilizaré la expresión *lemas de extensión* para hacer referencia al conjunto, no solo de lemas, sino también de definiciones que se enunciaron en la sección 8 (parte 1) de este trabajo, esto es, las definiciones de *derivabilidad disyuntiva* (Definición 8.1) y de *conjuntos maximales* (Definición 8.2) y los siguientes lemas: *lema auxiliar principal* (Lema 8.1), *extensión a conjuntos maximales* (Lema 8.2) y *teorías primas completamente normales* (Lema 8.3). Este conjunto de lemas y definiciones (en adelante, *lemas de extensión*), expuestos en la sección 8 de manera uniforme para cualquier lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$), constituye un elemento fundamental en la prueba del teorema de completud. El propósito de la presente sección consiste en analizar las posibilidades de simplificación de estos lemas cuando se enuncian para cada lógica-Lti en particular. Dicho de otro modo, se trata de determinar qué conjunto de reglas disyuntivas es necesario para axiomatizar cada lógica-Lti.

El método utilizado para probar los teoremas de completud en las semánticas empleadas en esta investigación se basa en la estrategia desarrollada en (Routley *et al.*, 1982, capítulo 4) tal y como se aplica en (Brady, 1982) y conforme a lo dispuesto en (Robles y Méndez, 2016) y (Robles *et al.*, 2016a). Siguiendo esta metodología para la prueba de completud, la noción clave es la de "interpretación canónica". Sea L la lógica en cuestión a la que nos estamos refiriendo, las interpretaciones canónicas son funciones construidas sobre teorías-L primas, a-consistentes y completamente normales. Los lemas de extensión son fundamentales para la construcción de las mismas. En particular, son esenciales para probar: (1) que dado un conjunto a-consistente Γ, podemos extender el conjunto de consecuencias de Γ en la lógica L ($Cn\Gamma[L]$) a un conjunto maximal (cf. Lema 8.2); (2) que dicho conjunto maximal es una teoría prima completamente normal cerrada por las reglas primitivas de inferencia de L (cf. Lema 8.3). No obstante, hay algunos inconvenientes que se deben tener en cuenta en la prueba de (2) cuando tratamos con lógicas débiles.

Supóngase que L es una lógica cerrada por una regla r de cuyo axioma correspondiente[117] carece. Por ejemplo, supongamos que L es una lógica que está cerrada por la regla Contraposición ($A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$) pero carece del axioma de contraposición ($(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$). En este caso, siguiendo el método previamente señalado, no es posible construir teorías-L cerradas por

[117] Utilizaré la expresión *axioma correspondiente* a una regla para referir a los axiomas (Mp) $[(A \to B) \wedge A] \to B$, (Con) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$, (Pref) $(A \to B) \to [(C \to A) \to (C \to B)]$ y (Suf) $(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$ como correspondientes a las reglas MP, CON, PREF y SUF. En lo que refiere a la regla CTE, a pesar de que su axioma correspondiente es claramente (Cte) $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$, encontraremos otras posibilidades (i.e., otros axiomas) que permiten cerrar las teorías por la regla CTE en algunas lógicas-Lti (véase la Proposición 19.1.2).

CON en general. No obstante, como se ha demostrado en la Sección 8, es posible construir teorías-L primas y completamente normales cuando la lógica L, además de estar cerrada por la regla r, está también cerrada por su versión disyuntiva. En el caso anterior, necesitaremos que la lógica L esté cerrada por la regla dCON ($C \vee (A \rightarrow B) \Rightarrow C \vee (\neg B \rightarrow \neg A)$).

En la sección 6, conforme a la metodología descrita, se ha definido a las teorías completamente normales como aquellas cerradas por MP, MPd, CONd, PREFd, SUFd y CTEd (cf. Definición 6.2.3). La razón es que no toda lógica-Lti valida los axiomas correspondientes a las reglas MP, CON, PREF, SUF y CTE; de hecho, la gran mayoría de las lógicas consideradas carecen al menos de uno de esos axiomas. Ante esta problemática se abrían dos caminos, bien demostrar lemas de extensión específicos para cada lógica-Lti, bien generar una noción conjunta de *normalidad completa*, común a todos los sistemas considerados. Sin embargo, esta segunda opción, que fue la elegida en la presente investigación, supone también incluir bastantes reglas disyuntivas en la base axiomática de los sistemas (en este caso, en la lógica b4). De haber sido elegida la primera opción expuesta, las axiomatizaciones de los sistemas tendrían un número menor de reglas disyuntivas pero un amplio conjunto de pruebas se verían multiplicadas pues tendrían que ser específicamente adaptadas a cada una de las lógicas consideradas. Además, como cada lógica considerada estaría compuesta de algún subconjunto particular de las reglas disyuntivas de la lógica b4, tendríamos que prescindir de esta última, esto es, de un cuerpo axiomático común a las lógicas-Lti que, no obstante, ha sido de gran utilidad a lo largo de la investigación.

La cuestión es, entonces, que no todas las teorías-Lti necesitan estar cerradas por todas esas reglas disyuntivas dado que no es necesario introducir dichas reglas como primitivas en todos sistemas. No obstante, tanto la base axiomática general de las lógicas-Lti (el sistema b4) como los *lemas de extensión* expuestos en la sección 8 están pensados para que prime la homogeneidad en detrimento de la simplicidad en las pruebas para cada sistema. De lo contrario, aunque se simplificasen las pruebas de cada lógica-Lti en particular, necesitaríamos incluir una versión específica de los lemas de extensión por cada lógica-Lti considerada. Pues bien, el objetivo de la presente sección es justamente proponer pruebas específicas de los *lemas de extensión* para cada lógica-Lti con el fin de poner de manifiesto las diferencias entre los distintos sistemas considerados, construyendo así un primer criterio de comparación entre los mismos.

En primer lugar, especificaremos el concepto de *normalidad completa* en cada lógica-Lti en función de las simplificaciones en la base axiomática de cada sistema expuestas a continuación.

19.1 Simplificaciones en las teorías-Lti completamente normales

El primer paso para realizar cambios que faciliten las pruebas de completud para cada lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) será especificar axiomatizaciones alternativas de los sistemas que eliminen las reglas disyuntivas innecesarias. Por otro lado, las nociones de *teoría-Lti* y de *clases de teorías* se entenderán de acuerdo con las Definiciones 6.2.1 y 6.2.2. Por otro lado, se incluirán nuevas proposiciones que sustituyan algunas de las definiciones desarrolladas en la sección 6 y se modifica el concepto de *normalidad completa* (Definición 6.2.3) con el fin de simplificar la prueba del *lema auxiliar principal* (Lema 8.1) y del lema *los conjuntos maximales son teorías primas completamente normales* (Lema 8.3).

En lo que sigue, conforme a lo expresado en la introducción de esta sección, expondré las axiomatizaciones alternativas de las lógicas-Lti especificando las reglas disyuntivas imprescindibles para cada una de estas lógicas. En particular, debido a las particularidades de cada Mti ($1 \leq i \leq 8$), la lógica Lt1 (BN4) necesitará la regla MPd, dado que carece de su axioma correspondiente. De manera semejante, Lt2 precisa únicamente de la regla CTEd. Lt3 requiere MPd, CONd, PREFd y SUFd. Lt4 necesita CONd y CTEd. La lógica E4 (i.e., Lt5) es el único de los sistemas considerados que no requiere ser axiomatizado con reglas disyuntivas. Por su parte, Lt6 y Lt8 precisan de las reglas CONd y CTEd, respectivamente. Por último, Lt7 necesita axiomatizarse con MPd, CONd, PREFd y SUFd como reglas primitivas.

Definición 19.1.1: Axiomatización alternativa de las lógicas-Lti. Las axiomatizaciones alternativas de las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) se componen en primer lugar de los axiomas comunes –i.e., los axiomas de la lógica básica b4 (cf. Definición 6.1.1)– y los axiomas propios de cada sistema (cf. Definición 7.1). Además, hay dos reglas que seguirán formando parte de todos los sistemas: ADJ y MP. El resto de reglas primitivas y axiomas propios de cada lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) se expresa en el siguiente esquema[118]:

	Axiomas	**Reglas**
Lt1 (BN4)	Con, Pref, Suf	MPd
Lt2	Mp, Con, Pref, Suf	CTEd
Lt3	———	MPd, CONd, PREFd, SUFd
Lt4	Mp, Pref, Suf	CONd, CTEd
Lt5 (E4)	Mp, Con, Pref, Suf	
Lt6	Mp, Pref, Suf	CONd
Lt7	———	MPd, CONd, PREFd, SUFd
Lt8	Con, Pref, Suf	MPd

Obsérvese que el elemento distintivo de las axiomatizaciones alternativas son justamente las variaciones de las reglas disyuntivas de cada lógica-Lti. En particular, solo permanecen aquellas reglas disyuntivas que sean imprescindibles para cada lógica-Lti, sustituyéndose las reglas disyuntivas prescindibles por sus axiomas correspondientes (válidos en el sistema en cuestión).

Desarrollaré mediante la siguiente definición una noción alternativa de nor-

[118]Utilizaré minúsculas para referirme a la tesis correspondiente a la regla de b4. Por poner un ejemplo, utilizaré los rótulos Mp y Pref para referirme a las tesis correspondientes a las reglas MP y PREF.

malidad completa que, al contrario de lo expuesto en el cuerpo de este trabajo (Definición 6.2.3), será específica para cada lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) particular, evitando así complejizar el concepto más de lo estrictamente necesario en aquellos sistemas que pueden definirse con menor cantidad de reglas disyuntivas.

Definición 19.1.2: Noción alternativa de normalidad completa en las lógicas-Lti. Sea L una lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$), una teoría-L es completamente normal si es una teoría-L normal (cf. Definiciones 6.2.1 y 6.2.2) que está cerrada por las reglas (alternativas) de la lógica-Lti (cf. Definición 19.1.1).

Por tanto, las teorías-Lti completamente normales, además de estar cerradas por MP, están cerradas por las siguientes reglas:

- Teorías-Lt1 (BN4): MPd.
- Teorías-Lt2: CTEd.
- Teorías-Lt3: MPd, CONd, PREFd, SUFd.
- Teorías-Lt4: CONd, CTEd.
- Teorías-Lt6: CONd.
- Teorías-Lt7: MPd, CONd, PREFd y SUFd.
- Teorías-Lt8: MPd.

Observación 19.1.1: Todas las teorías-Lt5 normales son completamente normales. Es posible demostrar que las teorías-Lt5 están cerradas por las reglas del sistema E4 (axiomatizado de acuerdo con la Definición 19.1.1) sin necesidad de introducir el concepto de *normalidad completa*. La razón es que la lógica E4 valida las tesis correspondientes a sus reglas primitivas (en particular, valida el axioma *Modus Ponens*; cf. la posterior Proposición 19.1.1). Por tanto, podemos prescindir del concepto de normalidad completa para las pruebas de completud de E4 (Lt5). Dicho de otro modo, las teorías-Lt5 normales son siempre completamente normales.

Con la definición 19.1.2, hemos alterado el concepto de normalidad completa para las teorías-Lti ($1 \leq i \leq 8$). En lo que sigue, demostraré que las teorías-L completamente normales –tomando como referencia la anterior definición de *normalidad completa*– están cerradas por un conjunto específico de reglas que varía en función de cada lógica-Lti en cuestión. Para ello, pruebo primero la siguiente proposición general aplicable a extensiones de la lógica b4.

Proposición 19.1.1: Las teorías-L están cerradas por las reglas correspondientes a los axiomas de la lógica L. Sea L una lógica-Eb4, para cualesquiera f.b.f. A y B, si la fórmula $A \to B$ es teorema de L, entonces las teorías-L están cerradas por la regla correspondiente, esto es, si $A \in \mathcal{T}$, entonces $B \in \mathcal{T}$.

Prueba.

1. $A \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash_L A \to B$	Hip. (Teorema de L)
3. $B \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2

■

Proposición 19.1.2: Las teorías-L están cerradas por las reglas correspondientes a sus axiomas. Las teorías-Lti ($1 \leq i \leq 8$) completamente normales están cerradas por el siguiente conjunto de reglas[119]:

- Teorías-Lt1 (BN4): CON, PREF, SUF y CTE.
- Teorías-Lt2: MP, CON, PREF y SUF.
- Teorías-Lt3: CTE.
- Teorías-Lt4: MP, PREF y SUF.
- Teorías-Lt5 (E4): MP, CON, PREF, SUF, CTE.
- Teorías-Lt6: MP, PREF, SUF, CTE.
- Teorías-Lt7: CTE.
- Teorías-Lt8: CON, PREF, SUF, CTE.

Prueba. Las pruebas de que,

(1) para $i \in \{2, 4, 5, 6\}$, las teorías-Lti primas completamente normales están cerradas por MP;

(2) para $i \in \{1, 2, 5, 8\}$, las teorías-Lti primas completamente normales están cerradas por CON;

(3) para $i \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$, las teorías-Lt$i$ primas completamente normales están cerradas por PREF y SUF

son triviales pues, por un lado, dada la Definición 19.1.1, cada Lti ($1 \leq i \leq 8$) tiene como axiomas aquellas tesis correspondientes a las reglas por las que debemos probar que sus teorías están cerradas; y, por otro lado, por la Proposición 19.1.1, queda claro que si una tesis es axioma de una lógica L, entonces las teorías-L están cerradas por la regla correspondiente.

Lo único que quedaría por probar es entonces que, para $i \in \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, las teorías-Lt$i$ primas completamente normales están cerradas por CTE, esto es, si $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$, entonces $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$. Se contemplan tres casos.

[119] En realidad, la normalidad completa (conforme a la Definición 19.1.2) solo sería necesaria para probar que las teorías-Lti tales que $i \in \{1, 3, 7, 8\}$ están cerradas por CTE. Para el resto de los casos, no sería necesario exigir que las teorías-Lti ($1 \leq i \leq 8$) sean completamente normales sino que podemos probar que cualquier teoría-Lti normal está cerrada por el resto de reglas correspondientes a sus axiomas. Más claramente, solo necesitamos exigir teorías-Lti completamente normales en esta proposición para aquellas lógicas-Lti que no validan el axioma modus ponens, i.e., Lt1, Lt3, Lt7 y Lt8.

(i) Sea $i \in \{1, 3, 7, 8\}$.

1. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash (A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$	A13
3. $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 1, 2
4. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 1, 3

(ii) Sea $i = 5$.

1. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\neg(A \to B) \notin \mathcal{T}$	Hip. red.
3. $\vdash (A \to B) \vee \neg(A \to B)$	A24
4. $(A \to B) \vee \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 3
5. $A \to B \in \mathcal{T}$ ó $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 4
6. $A \to B \in \mathcal{T}$	2, 5
7. $(A \wedge \neg B) \wedge (A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada &; 1, 6
8. $\vdash [(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)] \to \neg(A \to B)]$	A26
9. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada $\to$; 7, 8

Pero 2 y 9 se contradicen. Por tanto, $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$, como se requería.

(iii) Sea $i = 6$.

1. $A \wedge \neg B \in \mathcal{T}$	Hip.
2. $\vdash \neg(A \to B) \vee [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$	A27
3. $\neg(A \to B) \vee [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)] \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ normal; 2
4. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$ ó $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ prima; 3
5. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.

De darse 5, habríamos llegado a lo que se quiere demostrar. Pero supongamos en 6 que se da la segunda alternativa de 4.

6. $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	Hip.
7. $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ cerrada MP; 1, 6

De darse 6, también llegamos a lo que se quería demostrar. Por tanto, $\neg(A \to B) \in \mathcal{T}$.

■

19.2 Simplificaciones en los lemas de extensión

(a) Lemas de extensión adaptados a las lógicas-Lti ($i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$)

Las nociones de *derivabilidad disyuntiva* y *conjuntos maximales* se entenderán del mismo modo que en la lógica base (cf. Definiciones 8.1 y 8.2). Desarrollo ahora las alteraciones que sufrirán los lemas de extensión dados los cambios establecidos para las lógicas-Lti en la subsección 19.1. En particular, estableceré las simplificaciones de los lemas de extensión para las lógicas-Lti ($i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$), es decir, para toda lógica-Lti a excepción de Lt5 (E4), que será tratada en el apartado (b) de esta subsección.

Lema 19.2.1: Lema auxiliar principal alternativo para lógicas-Lt*i*. Sea $i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, para cualesquiera A, B_1,..., $B_n \in \mathcal{F}$, si $(B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{Lti} A$, entonces, para cualquier f.b.f. C, $C \vee (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \vdash_{Lti} C \vee A$.

Prueba. La prueba se realiza de manera semejante a la del *Lema auxiliar principal* de la sección 8 (cf. Lema 8.1). No obstante, como el conjunto de reglas primitivas propio de cada lógica-Lti se ha reducido, el número de casos de los que consta esta prueba se verá también reducido. En particular, los casos que permanecen para toda lógica-Lti considerada en este lema (i.e., $i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$) son los siguientes: (1) $A \in \{B_1, ..., B_n\}$, (2) A es un axioma, (3) A es por ADJ y (4) A es por MP[120]. Las pruebas de estos son iguales a las reflejadas en el Lema 8.1. Por otro lado, los casos que se pueden omitir en cada lógica-Lti ($i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$) son los relativos a aquellas reglas disyuntivas cuyas tesis correspondientes se verifican en cada sistema (cf. Definición 19.1.1). En particular, los siguientes casos se omiten en las siguientes lógicas-Lti ($i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$):

- A es por MPd se omitirá en Lt2, Lt4 y Lt6;
- A es por CONd se omitirá en Lt1, Lt2 y Lt8;
- A es por PREFd/SUFd se omitirá en Lt1, Lt2, Lt4, Lt6 y Lt8;
- A es por CTEd se omitirá en Lt1, Lt3, Lt6-Lt8.

Dejando a un lado la omisión de los casos anteriores para cada lógica-Lti ($i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$) correspondiente, el resto de casos se prueban igual que en el Lema 8.1. ■

[120] Es importante observar que, para resolver el caso "A es por MP" en toda aquella lógica-Lti que no tenga MPd como regla primitiva (esto es, Lt2, Lt4 y Lt6) es necesario probar que MPd es una regla derivada de la lógica-Lti en cuestión. No obstante, la prueba es muy sencilla cuando se tiene el axioma *modus ponens* (como es el caso de Lt2, Lt4 y Lt6) y la regla SUM (R9):

1. $\vdash C \vee (A \to B)$	Hip.
2. $\vdash C \vee A$	Hip.
3. $\vdash [(A \to B) \wedge A] \to B$	A16
4. $\vdash [C \vee [(A \to B) \wedge A]] \to (C \vee B)$	SUM; 3
5. $\vdash [[C \vee (A \to B)] \wedge (C \vee A)] \to [C \vee [(A \to B) \wedge A]]$	T3
6. $\vdash [[C \vee (A \to B)] \wedge (C \vee A)] \to (C \vee B)$	TRANS; 4, 5
7. $\vdash [C \vee (A \to B)] \wedge (C \vee A)]$	ADJ; 1, 2
8. $\vdash C \vee B$	MP; 6, 7

Teniendo en cuenta las modificaciones anteriores en el *Lema auxiliar principal*, la prueba del lema de *extensión a conjuntos maximales* es idéntica a la desarrollada en la sección 8 (cf. Lema 8.2). Faltaría solamente probar que los conjuntos maximales son teorías primas completamente normales.

Lema 19.2.2: Los conjuntos maximales son teorías primas completamente normales. Si Γ es un conjunto maximal, entonces es una teoría prima completamente normal.

Prueba. Necesitamos probar que Γ es una teoría (está cerrado por $\rightarrow$ y &) prima completamente normal. Por un lado, la prueba de que Γ es una teoría prima se realiza del mismo modo que los casos (1), (2) del Lema 8.3 (sección 8). Por otro lado, la prueba de que Γ es completamente normal es también semejante: bastaría con omitir aquellos casos que ya no estén presentes según la redefinición de la *normalidad completa* para cada lógica-Lti ($i \in\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$) (cf. Definición 19.1.2).■

(b) Lemas de extensión adaptados a Lt5 (E4)

El propósito de esta subsección es mostrar cómo extender conjuntos maximales a teorías-Lt5 primas usando el lema de extensión basado en la implicabilidad disyuntiva[121]. Este lema sustituiría en el caso de Lt5 (E4) el lema de extensión basado en la derivabilidad disyuntiva que se proporcionó en la sección 8 de manera general para todos los sistemas.

En lo que sigue, presento la definición de implicabilidad disyuntiva y modifico la noción de conjuntos maximales, adaptándola a dicha definición.

Definición 19.2.1: Implicabilidad disyuntiva. Para cualesquiera conjuntos de f.b.f. Γ, Θ, Γ implica disyuntivamente a Θ en E4[122] (en símbolos, $\Gamma \xrightarrow[E4]{d} \Theta$) syss $\vdash_{E4} (A \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee ... \vee B_n)$ para algunas f.b.f. $A_1, ..., A_n \in \Gamma$ y $B_1, ..., B_n \in \Theta$. El símbolo $\Gamma \underset{E4}{\overset{d}{\nrightarrow}} \Theta$ denota que Γ no implica disyuntivamente Θ.

Definición 19.2.2: Conjuntos maximales. Γ es un conjunto maximal de f.b.f. en E4 syss $\Gamma \underset{E4}{\overset{d}{\nrightarrow}} \overline{\Gamma}$ ($\overline{\Gamma}$ es el complementario de Γ).

Lema 19.2.3: Extensión a conjuntos maximales. Sean Γ y Θ conjuntos de f.b.f. tales que $\Gamma \underset{E4}{\overset{d}{\nrightarrow}} \Theta$. Entonces, hay conjuntos de f.b.f. $\Gamma´$ y $\Theta´$ tales que

[121] Seguiré la estructura de la prueba del lema que figura en (Brady, 1982, Lema 3) y (Routley *et al.*, 1982, p. 307 y ss.) según se aplica en (Robles *et al.*, 2016a, Lema 4.5)

[122] En el resto de esta subsección, utilizaré el rótulo E4 para referirme a Lt5 con el fin de resaltar esta lógica y distinguirla específicamente del resto, ya que es el único sistema entre aquellos que se están considerando (las lógicas-Lti, $1 \leq i \leq 8$) para el que se puede aplicar la noción de implicabilidad disyuntiva, dado que es el único que no requiere reglas disyuntivas en su axiomatización.

$\varGamma \subseteq \varGamma´$, $\varTheta \subseteq \varTheta´$, $\varTheta´ = \overline{\varGamma}´$ y $\varGamma´ \underset{E4}{\overset{d}{\nrightarrow}} \varTheta´$ (esto es, $\varGamma´$ es un conjunto maximal tal que $\varGamma´ \underset{E4}{\overset{d}{\nrightarrow}} \varTheta´$).

<u>Prueba</u>. Sea $A_1, ..., A_n, ...,$ una enumeración de f.b.f. Los conjuntos $\varGamma´$ y $\varTheta´$se definen como sigue: $\varGamma´ = \bigcup \varGamma_k$ y $\varTheta´ = \bigcup \varTheta_k$ (siendo $k \in \mathbb{N}$) donde $\varGamma_0 = \varGamma$ y $\varTheta_0 = \varTheta$. Asimismo, los conjuntos $\varGamma´_{k+1}$ y $\varTheta´_{k+1}$ se definen como sigue:

(i) si $\varGamma_k \cup \{A_{k+1}\} \xrightarrow[E4]{d} \varTheta_k$, entonces $\varGamma_{k+1} = \varGamma_k$ y $\varTheta_{k+1} = \varTheta_k \cup \{A_{k+1}\}$;

(ii) si $\varGamma_k \cup \{A_{k+1}\} \underset{E4}{\overset{d}{\nrightarrow}} \varTheta_k$, entonces $\varGamma_{k+1} = \varGamma_k \cup \{A_{k+1}\}$ y $\varTheta_{k+1} = \varTheta_k$.

Nótese que $\varGamma \subseteq \varGamma´$, $\varTheta \subseteq \varTheta´$ y que $\varGamma´ \cup \varTheta´ = \mathcal{F}$. Entonces, probaremos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se da

I. $\qquad \varGamma_k \underset{E4}{\overset{d}{\nrightarrow}} \varTheta_k.$

Procederemos por *reductio ad absurdum*, esto es, supondremos que, para algún $i \in \mathbb{N}$, se da

II. $\qquad \varGamma_i \underset{E4}{\overset{d}{\nrightarrow}} \varTheta_i$ pero $\varGamma_{i+1} \xrightarrow[E4]{d} \varTheta_{i+1}.$

Consideremos ahora las dos posibilidades anteriores (i) y (ii), de acuerdo con las cuales se definen $\varGamma_{i+1}$ y $\varTheta_{i+1}$, con el fin de derivar una contradicción a partir de cada una de ellas. Consideramos primero la posibilidad (ii):

(a) $\qquad \varGamma_i \cup \{A_{i+1}\} \underset{E4}{\overset{d}{\nrightarrow}} \varTheta_i.$

(1) Aplicando la definición (ii) al caso (a), tenemos: $\varGamma_{i+1} = \varGamma_i \cup \{A_{i+1}\}$ y $\varTheta_{i+1} = \varTheta_i$.

(2) Sustituimos ahora $\varGamma_{k+1}$ y $\varTheta_{k+1}$ (tal y como se definen en el paso 1) en la hipótesis de reductio: $\varGamma_i \cup \{A_{i+1}\} \xrightarrow[E4]{d} \varTheta_i$.

(3) El paso 2 se contradice con la hipótesis del caso (a): $\varGamma_i \cup \{A_{i+1}\} \underset{E4}{\overset{d}{\nrightarrow}} \varTheta_i$.

Consideramos ahora la posibilidad (i):

(b) $\qquad \varGamma_i \cup \{A_{i+1}\} \xrightarrow[E4]{d} \varTheta_i.$

(1) Aplicando la definición (i) al caso (b), tenemos: $\varGamma_{i+1} = \varGamma_i$ y $\varTheta_{i+1} = \varTheta_i \cup \{A_{i+1}\}$.

(2) Sustituimos ahora $\varGamma_{k+1}$ y $\varTheta_{k+1}$ (tal y como se definen en el paso 1) en la hipótesis de reductio: $\varGamma_i \xrightarrow[E4]{d} \varTheta_i \cup \{A_{i+1}\}$.

(3) Sean las fórmulas de los conjuntos Γ_i y Θ_i en esta derivación $B_1, ..., B_m$ y $C_1, ..., C_n$, respectivamente. Nos referiremos con B a la conjunción de todas las fórmulas de Γ_i en esta derivación y con C a la disyunción de todas las fórmulas de Θ_i en esta derivación, esto es:

$B = B_1 \wedge ... \wedge B_m$
$C = C_1 \vee ... \vee C_n$

(4) Siguiendo las definiciones dadas en el paso 3, reformulamos el paso 2: $\vdash_{E4} B \rightarrow (C \vee A_{i+1})$.

Resumo ahora lo anterior y procedo a derivar una contradicción:

1. $\Gamma_i \xrightarrow[E4]{d} \Theta_i \cup \{A_{i+1}\}$	hip. reductio; dados (1) y (2)
2. $\vdash_{E4} B \rightarrow (C \vee A_{i+1})$	reformulación de 1; dados (3) y (4)

Por otro lado, dado el caso (b), hay alguna conjunción B' de elementos de Γ_i y alguna disyunción C' de elementos de Θ_i tal que

3. $\vdash_{E4} (B' \wedge A_{i+1}) \rightarrow C'$	Hip. del caso (b)

Utilizaremos ahora B'' para referirnos a la conjunción de B y B' ($B'' = B \wedge B'$); y, del mismo modo, C'' para la disyunción entre C y C' ($C'' = C \vee C'$). Mostraremos

III. $\vdash B'' \rightarrow C''$, esto es, $\Gamma_i \xrightarrow[E4]{d} \Theta_i$.

Dado que III contradice la hipótesis de reductio, quedará demostrado (I) $\Gamma_k \overset{d}{\underset{E4}{\not\rightarrow}} \Theta_k$, como se requería.

4. $\vdash_{E4} (B'' \wedge A_{i+1}) \rightarrow C''$	por propiedades de $\wedge$ y $\vee$; dado 3
5. $\vdash_{E4} B'' \rightarrow (C'' \vee A_{i+1})$	por propiedades de $\wedge$ y $\vee$; dado 2
6. $\vdash_{E4} B'' \rightarrow C''$	R10 (DF); dados 5 y 4
7. $\Gamma_i \xrightarrow[E4]{d} \Theta_i$	dado 6 y definiciones de B'' y C''

Hemos demostrado $\Gamma_i \xrightarrow[E4]{d} \Theta_i$ (III). Y dado que (III) se contradice con la hipótesis de reductio (II), hemos derivado una contradicción, como se requería. En consecuencia, queda probado I: para todo $k \in \mathbb{N}$, se da $\Gamma_k \overset{d}{\underset{E4}{\not\rightarrow}} \Theta_k$. Esto es, hay conjuntos de f.b.f. Γ' y Θ' tales que $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Theta \subseteq \Theta'$,$\Theta' = \overline{\Gamma}'$ (dado que $\Gamma' \cap \Theta' = \emptyset$ –de no ser así, para algún $i \in \mathbb{N}$, se daría $\Gamma_i \xrightarrow[E4]{d} \Theta_i$– y $\Gamma' \cup \Theta' = \mathcal{F}$) y $\Gamma'_k \overset{d}{\underset{E4}{\not\rightarrow}} \Theta'_k$ (ya que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_k \overset{d}{\underset{E4}{\not\rightarrow}} \Theta_k$), como se requería. Nótese finalmente que Γ' es maximal, dado que $\Gamma' \overset{d}{\underset{E4}{\not\rightarrow}} \overline{\Gamma}'$. ■

Lema 19.2.4: Los conjuntos maximales son teorías primas. Si Γ es un conjunto maximal en la lógica E4, entonces es una teoría-E4 prima.

Prueba. Esta prueba sigue la línea del Lema 2 de Brady (1982). Omitiré el rótulo E4 bajo $\vdash$.

(1) Γ es una teoría. Para probar que Γ es una teoría de E4 debo probar que es un conjunto de f.b.f. cerrado por $\rightarrow$, &.

(i) Γ está cerrado por $\rightarrow$:

Sea Γ un conjunto de f.b.f. y sean A y B f.b.f. tales que

1. $\vdash A \rightarrow B$	Hip.
2. $A \in \Gamma$	Hip.
3. $B \notin \Gamma$	Hip. red.
4. $B \in \bar{\Gamma}$	Γ es maximal; 4

Pero, dados 2 y 4, 1 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \xrightarrow[L]{d} \bar{\Gamma}$).

(ii) Γ está cerrada por &:

Sea Γ un conjunto de f.b.f. y sean A y B f.b.f. tales que

1. $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$	Hip.
2. $A \wedge B \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $A \wedge B \in \bar{\Gamma}$	Γ es maximal; 2
4. $\vdash (A \wedge B) \rightarrow (A \wedge B)$	A1

Pero, dados 1 y 2, 4 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \xrightarrow[L]{d} \bar{\Gamma}$).

(2) Γ es prima.

Sean A, B f.b.f. tales que

1. $A \vee B \in \Gamma$	Hip.
2. $A \notin \Gamma$ y $B \notin \Gamma$	Hip. red.
3. $A \in \bar{\Gamma}$ y $B \in \bar{\Gamma}$	Γ es maximal; 3
4. $\vdash (A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$	A1

Pero, dados 1 y 3, 4 contradice la maximalidad de Γ (pues tendríamos $\Gamma \xrightarrow[L]{d} \bar{\Gamma}$). ■

19.3 Conclusiones de la sección

El objetivo de la presente sección era poner de manifiesto las diferencias entre los distintos sistemas considerados en relación con las reglas disyuntivas necesarias para definir las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) y las repercusiones generadas por dichas reglas en los lemas de extensión. Según lo expuesto en esta sección, podemos comparar los sistemas en función de tres criterios correlacionados entre sí:

1. **Axiomatización**
   Si bien la axiomatización principal llevada a cabo en la primera parte de esta investigación se forma mediante un mismo conjunto de reglas disyuntivas para toda lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$), esta sección aclara que, en realidad, dicho conjunto de reglas no es imprescindible para axiomatizar ninguno de los sistemas considerados[123]. Por el contrario, solo un subconjunto de dichas reglas será necesario en cada lógica-Lti particular. En consecuencia, un primer criterio de comparación entre estas lógicas consiste en determinar el subconjunto exacto de reglas disyuntivas necesarias (en función de las pruebas de completud) en cada logica-Lti. Como se refleja en la presente sección, la necesidad de las reglas disyuntivas se debe en esencia a las pruebas de los lemas de extensión y, más específicamente, a la prueba del *Lema auxiliar principal* (Lema 8.1; sin el cual la prueba de *Extensión a conjuntos maximales*, Lema 8.2, no puede darse). En concreto, en la prueba del *Lema auxiliar principal* necesitamos abarcar, como casos del lema, cada regla de la lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) en cuestión. Pues bien, en dicha prueba podemos observar que necesitamos la regla MPd para probar el caso de MP[124]; y lo mismo ocurriría con el resto de reglas (CON, PREF, SUF y CTE) si decidiéramos incluirlas como primitivas en las axiomatizaciones. En consecuencia, para la prueba de estos lemas y, en términos generales, para la prueba de completud, necesitaremos incluir como reglas primitivas las versiones disyuntivas de estas reglas para demostrar, como se hizo en la sección 6, que sus correspondientes versiones no disyuntivas son reglas derivadas de los sistemas. Nos encontramos con un único caso en que necesitamos adoptar como reglas primitivas tanto la regla inicial como su versión disyuntiva: el caso de MP.

Expongo a continuación, a modo de conclusión, una tabla que muestra únicamente qué reglas disyuntivas son necesarias en la axiomatización de cada lógica-Lti.

Lt1 (BN4)	MPd
Lt2	CTEd
Lt3	MPd, CONd, PREFd, SUFd
Lt4	CONd, CTEd

[123] Es claro que un mismo sistema puede presentarse mediante diversas axiomatizaciones. Véase, por ejemplo, algunas posibles axiomatizaciones alternativas para BN4 y E4 (Brady, 1982; Robles y Méndez, 2016; Méndez y Robles, 2016a).

[124] Véase el caso (4) de la prueba del Lema 8.1, sección 8.

Lt5 (E4)	———
Lt6	CONd
Lt7	MPd, CONd, PREFd, SUFd
Lt8	MPd

2. Normalidad completa

Fruto de estas nuevas axiomatizaciones es la redefinición de la noción de *normalidad completa* en las lógicas-Lti. En la sección 6, se expuso una noción común a toda lógica-Lti. Sin embargo, dado que no todos los sistemas realmente requieren el mismo número de reglas disyuntivas, la noción de normalidad completa tampoco tiene que ser idéntica en todos ellos. El caso paradigmático es el del sistema E4. Como se vió en la Definición 19.1.2, para realizar las pruebas de completud en E4 no es preciso definir una noción de *normalidad completa*, ya que todas sus teorías normales son ya *per se* completamente normales (i.e., podemos demostrar que están cerradas por las reglas de E4; cf. Observación 19.1.1). La necesidad de incorporar una noción de normalidad completa viene determinada, por tanto, por las reglas disyuntivas que tenga el sistema; de manera que, cuantas menos reglas disyuntivas haya en un sistema, menos compleja será esta noción y más sencillas las pruebas de completud.

3. Lemas de extensión

Es esencial poner énfasis en el hecho de que, siguiendo el señalado método para probar la completud (Brady, 1982), de todos los sistemas que se están considerando, el único que verdaderamente no requiere de la presencia de reglas disyuntivas es E4. En consecuencia, es el único para el que, dada una axiomatización del mismo sin reglas disyuntivas, es posible emplear *lemas de extensión* basados en la noción de *implicabilidad disyuntiva* (cf. Definición 19.2.1). En el resto de los casos (Lt1-Lt4 y Lt6-Lt8), es preciso utilizar *lemas de extensión* basados en la *derivabilidad disyuntiva* (cf. Definición 8.1). Lo que, a su vez, hace necesario probar el *lema auxiliar principal* (Lema 8.1) para aplicarlo después en el lema de extensión a conjuntos maximales (Lema 8.2).

20 Algunas propiedades de los sistemas

20.1 Relevancia

En esta subsección probaré que, si bien las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) no poseen la propiedad de compartir variables (*variable sharing property*, VSP) tan característica de las principales lógicas de la relevancia, sí poseen la propiedad de la cuasi-relevancia (*quasi-relevance property*, QRP), propia de lógicas comúnmente integradas dentro de la familia de las lógicas de la relevancia, tales como R-Mingle o RM3 (Anderson y Belnap, 1975; Brady, 1982). Además, probaré que las lógicas-Lti mantienen otras propiedades propuestas por Robles y Méndez como propiedades de posible interés en relación con las lógicas de la relevancia[125]. Quedará también demostrado, sin embargo, que las lógicas-Lti carecen de la Propiedad de Ackermann (Ackermann, 1956). Por último, investigaré si alguna de las lógicas-Lti encierra una teoría de la necesidad lógica a la manera de la lógica E (Anderson y Belnap, 1975).

Definición 20.1.1: *Variable-sharing property* (VSP). Una lógica L tiene la propiedad de compartir variables (VSP) si se cumple la siguiente condición: si $A \rightarrow B$ es un teorema de L, entonces A y B comparten al menos una variable proposicional.

Definición 20.1.2: *Quasi-relevance property* (QRP). Una lógica L tiene la propiedad de la cuasi-relevancia (QRP) si se cumple la siguiente condición: si $A \rightarrow B$ es un teorema de L, entonces o bien (1) A y B comparten alguna variable proposicional o bien (2) $\neg A$ y B son teoremas de L.

Proposición 20.1.1: Las lógicas-Lti carecen de la VSP. Las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) carecen de la propiedad de compartir variables (VSP).

Prueba. La prueba es inmediata dado que, para cualesquiera p y q, la f.b.f. $\neg(p \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow q)$ es válida-Lti ($1 \leq i \leq 8$)[126]. Por lo tanto, dado el Teorema 10.1, dicha fórmula es un teorema de las lógicas-Lti. ■

Proposición 20.1.2: Las lógicas-Lti tienen la QRP. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$), si $\vdash_{Lti} A \rightarrow B$, entonces o bien (1) A y B comparten alguna variable proposicional o bien (2) $\neg A$ y B son teoremas de las lógicas-Lti.

Prueba. Procedo por reductio. En esta prueba utilizaré del rótulo Mti para hacer referencia a las ocho matrices que caracterizan las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) que figuran en la sección 5 (Proposición 5.3.1).

1. $\vdash_{Lti} A \rightarrow B$ Hip.

[125] Sobre la metodología de las pruebas de estas propiedades, sigo en parte el artículo de Robles y Méndez (2020). Además, en relación con la VSP y un método general para probar si un sistema axiomático tiene dicha propiedad, dirijo al lector a (Méndez y Robles, 2012).

[126] Cf. (González, 2012).

2. A y B no tienen variables en común y, además, $\nvdash_{Lti} \neg A$ ó $\nvdash_{Lti} B$ — Hip. red.
3. $\nvDash_{Lti} \neg A$ ó $\nvDash_{Lti} B$ — Teorema 10.1; 2
4. Hay interpretaciones-Lti I e I' tales que $I(\neg A) = 0$ ó $I(\neg A) = 1$ ó $I'(B) = 0$ ó $I'(B) = 1$ — Prop. 9.3; 3

Asumiré cada uno de los cuatro casos como hipótesis y derivaré, a partir de cada uno de ellos, una contradicción.

5. $I(\neg A) = 0$ — Hip.
6. $I(A) = 3$ — Mti; 5

Sea I'' una interpretación-Lti exactamente igual a I excepto por el hecho de que para cada variable proposicional p_i en B, $I''(p_i) = 2$, I'' es consistente dado que A y B no comparten variables. Tendríamos, entonces en 7. $I''(A) = 3$ y $I''(B) = 2$, dado que $\{2\}$ está cerrado bajo $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Por tanto,

8. $I''(A \rightarrow B) = 0$ — Mti; 7
9. $\nvdash_{Lti} A \rightarrow B$ — Teorema 9.1; 8
10. $I(\neg A) = 1$ — Hip.
11. $I(A) = 1$ — Mti; 10

Igual que en el caso anterior, sea I'' una interpretación-Lti exactamente igual a I excepto por el hecho de que para cada p_i en B, $I''(p_i) = 2$; I'' es consistente dado que A y B no comparten variables.

12. $I''(A) = 1$ y $I''(B) = 2$ — $\{2\}$ cerrado bajo $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$
13. $I''(A \rightarrow B) = 0$ ó $I''(A \rightarrow B) = 1$ — Mti; 12
14. $\nvdash_{Lti} A \rightarrow B$ — Teorema 9.1; 13
15. $I(B) = 0$ — Hip.
16. Sea I'' exactamente igual a I excepto $I''(p_i) = 2$ para toda p_i en A
17. $I''(A) = 2$ y $I''(B) = 0$ — $\{2\}$ cerrado bajo $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$
18. $I''(A \rightarrow B) = 0$ — Mti; 17
19. $\nvdash_{Lti} A \rightarrow B$ — Teorema 9.1; 18
20. $I(B) = 1$ — Hip.
21. Sea I'' exactamente igual a I excepto $I''(p_i) = 2$ para toda p_i en A
22. $I''(A) = 2$ y $I''(B) = 1$ — $\{2\}$ cerrado bajo $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$
23. $I''(A \rightarrow B) = 0$ ó $I''(A \rightarrow B) = 1$ — Mti; 22
24. $\nvdash_{Lti} A \rightarrow B$ — Teorema 9.1; 23

Podemos ver que, efectivamente, a partir de cada uno de los casos se ha llegado a una contradicción: el paso 1 se contradice con los pasos 9, 14, 19 y 24. ■

En lo que sigue, se enunciarán dos propiedades que, de acuerdo con Robles y Méndez, constituyen nuevas propiedades de interés en relación con la relevancia de los sistemas. Ellos creen que son propiedades dignas de consideración y que, sin embargo, no son validadas por cualquier sistema de la familia de las lógicas de la relevancia; por ejemplo, la lógica RM3 no tiene estas propiedades.

En primer lugar, anotaré una serie de definiciones previas.

Definición 20.1.3: Fórmula implicativa. Una fórmula implicativa es una f.b.f. de tipo $A \to B$, esto es, una f.b.f. cuya conectiva principal es un condicional.

Definición 20.1.4: Fórmula no implicativa. Una fórmula no implicativa es una f.b.f. cuya conectiva principal no es un condicional[127].

Definición 20.1.5: Fórmula estrictamente no implicativa. Una fórmula A es estrictamente no implicativa syss no contiene ningún condicional.

Expongo ahora la primera de estas nuevas propiedades y procedo a probar que es válida en las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$).

Definición 20.1.6: *Restricted variable sharing property* I (RVSP I). Una lógica L tiene la propiedad restringida de compartir variables I (RVSP I) si se cumple la siguiente condición: para cualquier $B \in \mathcal{F}$, si$\vdash_L A \to B$ y A es una fórmula estrictamente no implicativa, entonces A y B comparten alguna variable proposicional.

Proposición 20.1.3: Las lógicas-Lti tienen la RVSPI. Para cualquier i ($1 \leq i \leq 8$) y cualquier $B \in \mathcal{F}$, si $\vdash_{Lti} A \to B$ y A es una fórmula estrictamente no implicativa, entonces A y B comparten alguna variable proposicional.

Prueba. Procedo por reductio.

1. $\vdash_{Lti} A \to B$ y A es estrictamente no implicativa	Hip.
2. A y B no tienen variables en común	Hip. red.
3. $\vDash_{Mti} A \to B$	Teorema 9.1; 1
4. Para toda interpretación-Mti I, $I(A \to B) = 3$ ó 2	Def. 1.7; 3

Sea I' una interpretación-Mti tal que para cada variable proposicional p_i en A, $I'(p_i) = 1$ y para cada variable proposicional p_j en B, $I'(p_j) = 2$. I' es consistente puesto que A y B no comparten variables (dado 2). Tendríamos, entonces, en 5) $I'(B) = 2$, dado que $\{2\}$ está cerrado bajo $\to$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Del mismo modo, tendremos en 6) $I'(A) = 1$, ya que $\{1\}$ está cerrado bajo $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y A es estrictamente no implicativa (por hipótesis). Por tanto[128],

[127] Nótese que puede haber condicionales presentes en la fórmula siempre y cuando ninguno de ellos constituya la conectiva principal de la fórmula.

[128] Dados 5 y 6, habrá al menos una interpretación I' para cada Mti ($1 \leq i \leq 8$) que le otorgue un valor no designado al condicional; en concreto, que I' otorgue 0 ó 1 al condicional dependerá de cada Mti (cf. Sección 5).

7. Hay alguna interpretación-Mti I' tal que $I'(A \to B) = 0$ ó 1 — Mti; 5, 6
8. $\nvDash_{Mti} A \to B$ — Def. 1.7; 7

No obstante, 3 y 8 se contradicen. ■

A continuación, expongo la segunda propiedad y compruebo que también es válida para toda lógica-Lti $(1 \leq i \leq 8)$.

Definición 20.1.7: *Restricted variable sharing property* II (RVSP II). Una lógica L tiene la propiedad restringida de compartir variables II (RVSP II) si se cumple la siguiente condición: para cualquier $A \in \mathcal{F}$, si$\vdash_L A \to B$ y B es una fórmula estrictamente no implicativa, entonces A y B comparten alguna variable proposicional.

Proposición 20.1.4: Las lógicas-Lti tienen la RVSP II. Para cualquier i $(1 \leq i \leq 8)$ y cualesquiera $A, B \in \mathcal{F}$, si $\vdash_{Lti} A \to B$ y B es una fórmula estrictamente no implicativa, entonces A y B comparten alguna variable proposicional.

Prueba. Procedo de modo semejante a la Proposición 20.1.3.

1. $\vdash_{Lti} A \to B$ y B es estrict. no implicativa	Hip.
2. A y B no tienen variables en común	Hip. red.
3. $\vDash_{Mti} A \to B$	Teorema 9.1; 1
4. Para toda interpretación-Mti I, $I(A \to B) = 3$ ó 2	Def. 1.7; 3
5. Sea I' tal que para cada p_i en B, $I'(p_i) = 1$, y para cada p_j en A, $I'(p_j) = 2$	I' es consistente dado 2
6. $I'(A) = 2$	$\{2\}$ cerrado $\to, \wedge, \vee, \neg$; 5
7. $I'(B) = 1$	$\{1\}$ cerrado $\wedge, \vee, \neg$; 1, 2
8. $I'(A \to B) = 0$ ó 1	Mti; 6, 7
9. $\nvDash_{Mti} A \to B$	Def. 1.7; 8

Pero 3 y 9 se contradicen. ■

Observación 20.1.1: RM3 carece de la RVSP I y II. RM3 no tiene las propiedades RVSP I y II dado que, para cualesquiera variables proposicionales p y q, $\vdash_{RM3} (p \wedge \neg p) \to (q \vee \neg q)$. Tenemos, por tanto, un teorema de RM3 donde tanto antecedente como consecuente son fórmulas estrictamente no implicativas y, sin embargo, no comparten variables proposicionales.

En lo que sigue, defino la llamada "Propiedad de Ackermann", una propiedad que Ackermann prueba para sus sistemas II y II' (Ackermann, 1956; Anderson, Belnap y Dunn, 1992, §45) y demuestro que las lógicas-Lti carecen de la misma.

Definición 20.1.8: Propiedad Ackermann (AP). Una lógica L tiene la propiedad Ackermann (*Ackermann property*, AP) si, en todos los teoremas de la forma $A \to (B \to C)$, A contiene al menos un condicional ($\to$).

Proposición 20.1.5: Las lógicas-Lti carecen de la propiedad de la AP. Las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) carecen de la propiedad Ackermann (AP).

Prueba. Dado el teorema de completud para las lógicas-Lti (cf. Teorema 10.1), para mostrar que una lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) carece de la AP es suficiente con encontrar alguna fórmula válida en dicha lógica-Lti de tipo $A \to (B \to C)$ donde A no contenga ningún condicional. La prueba es inmediata dado que, para cualesquiera p, q, r: (1) para $1 \leq i \leq 4$, la f.b.f. $p \to (p \to p)$ es válida-Lti; (2) para $5 \leq i \leq 7$, la f.b.f. $p \to [(p \to (p \to q)) \to q]$ es válida-Lti; (3) la f.b.f. $p \to [[p \to (q \to r)] \to (q \to r)]$ es válida-Lt8. ■

Por último, se tratarán las posibles similitudes entre algunas características de la lógica E de Anderson y Belnap (1975) y algunos de los sistemas aquí tratados.

Observación 20.1.2: Lt2, Lt3, Lt5 y Lt7 encierran una teoría de la necesidad lógica por vía de la definición $\Box A =_{df} (A \to A) \to A$. Anderson y Belnap (1975, p. 27) afirmaron que una teoría de la necesidad lógica se da de manera implícita en el fragmento implicativo de la lógica E (i.e., $E_{\to}$) por medio de la definición $\Box A =_{df} (A \to A) \to A$. Apuntan que, entre otras razones, tesis como las que siguen fundamentan su postura (Anderson y Belnap, 1975, secciones 10–12; Anderson, Belnap y Dunn, 1992, sección 31.4).

f1 $(B \to C) \to [[(B \to C) \to A] \to \Box A]$

f2 $[(A \to A) \to B] \to \Box B$

f3 $(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

f4 $\Box A \to [(A \to B) \to \Box B]$

f5 $(A \to B) \to \Box(A \to B)$

f6 $[(A \to B) \to C] \to [(A \to B) \to \Box C]$

f7 $\Box B \to [[A \to (B \to C)] \to (A \to C)]$

f8 $\Box A \to \Box\Box A$

La pregunta que nos surge es, entonces, ¿encierra también alguna de las lógicas-Lti, en los mismos términos que $E_{\to}$, una teoría de la necesidad lógica? Pues bien, de entre las anteriores, las tesis f2, f3, f4, f7 y f8 son teoremas de toda lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$). Mientras que las tesis f1, f5 y f6 son teoremas de toda lógica-Lti a excepción de Lt3 y Lt7. Cabe apuntar aquí que la validez de las mismas es fácilmente comprobable por medio de (González, 2012) dadas las matrices de las lógicas y los teoremas de completud probados en la parte 1.

Expongo en lo que sigue la tabla de verdad del operador de necesidad $\Box$ para las distintas lógicas-Lti de acuerdo con la definición de Anderson y Belnap.

Mt1, Mt4, Mt6, Mt8

	$\Box$
0	0
1	1
*2	2
*3	3

Mt2, Mt3, Mt5, Mt7

	$\Box$
0	0
1	0
*2	2
*3	3

Dadas estas tablas, es claro que las lógicas-Lti tales que $i \in \{1, 4, 6, 8\}$ no encierran una teoría de la necesidad lógica de acuerdo con la propuesta de Anderson y Belnap puesto que el operador de necesidad es un "operador nulo", es decir, no produce ningún cambio en la fórmula a la que afecta. Dicho de otra manera, deja intacto el valor de la fórmula y, en consecuencia, cualquier aparición del mismo en una fórmula será indiferente pues, para cualquier f.b.f. A, A y $\Box A$ tendrán siempre el mismo valor de verdad en aquellas lógicas caracterizadas por la primera de las tablas expuestas. Por el contrario, la tabla para el operador de necesidad en las lógicas-Lti tales que $i \in \{2, 3, 5, 7\}$ sí resulta interesante. Además, llegamos a conclusiones semejantes para las lógicas-Lti cuando analizamos el operador de posibilidad ($\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A$).

Mt1, Mt4, Mt6, Mt8

	$\Diamond$
0	0
1	1
*2	2
*3	3

Mt2, Mt3, Mt5, Mt7

	$\Diamond$
0	0
1	3
*2	2
*3	3

En consecuencia, a pesar de que validen f1-f10, no tendría sentido decir que alguna de las lógicas-Lti tales que $i \in \{1, 4, 6, 8\}$ encierran una teoría de la necesidad lógica. No obstante, sí cabe preguntarse cuál es la respuesta para los otros cuatro sistemas (i.e., Lt2, Lt3, Lt5 y Lt7) que hemos investigado. Pues bien, Robles y Méndez (2016) afirman que, en efecto, E4 –un sistema que se ha analizado en este estudio bajo el rótulo Lt5– sí tiene una noción implícita de modalidad de acuerdo con la definición de Anderson y Belnap. A conclusiones semejantes llega Blanco (2018) sobre su sistema EF4, equivalente a la lógica Lt2 aquí expuesta. Solo resta, por tanto, cuestionarnos si Lt3 y Lt7 también encierran una noción implícita de modalidad bajo esta definición. Pues bien, a pesar de que tanto Lt3 como Lt7 carecen de f1, f5 y f6 expuestas arriba, sí tienen una serie interesante de teoremas modales que comparten con sus otras dos compañeras (i.e., Lt2 y Lt5), como se expone en la Proposición 20.1.6. Es todavía de mayor importancia anotar que Lt3 y Lt7 (como también Lt2 y Lt5) carecen de una serie de paradojas modales clave. En lo que sigue, me referiré a las fórmulas reflejadas en la Proposición 20.1.7. En particular, es fundamental apuntar, en primer lugar, que carecen de las paradojas F18 y F19, dado que de ser dichas fórmulas válidas en los sistemas, producirían el colapso de los mismos en la lógica clásica. En esta misma línea, se obtendría un efecto semejante si un sistema con características similares a la lógica S5 de Lewis (como es el caso de las lógicas que nos ocupan) validase las fórmulas F20 ó F21. En segundo lugar, es preciso destacar que los sistemas invalidan también tesis contrarias a nuestro concepto intuitivo de modalidad como F23 y F24 (fórmulas que son conversas de teoremas típicos de la lógica modal T), es decir, fórmulas que son contraintuitivas con respecto a las nociones de modalidad estándar. En tercer lugar, estas lógicas tampoco validan F25 y F26, que son paradojas fuertes de tipo Lukasiewicz. En general, si F25 y F26 son válidas en un sistema que tiene fórmulas necesarias (como es el caso de las lógicas que nos interesan, pues verifican la regla necesitación, i.e., $A \Rightarrow LA$), dichas fórmulas producirían nuevamente el colapso del sistema en la lógica clásica. Por último, cabe resaltar que si bien Lt3 y Lt7 no verifican F22, sí validan F17 (Proposición 20.1.6). Asimismo, tanto Lt2 como Lt5 validan ambas F22 y F17. Estas dos fórmulas son también consideradas paradojas modales de tipo Lukasiewicz, claramente problemáticas en caso de estar presentes en lógicas caracterizadas por el condicional clásico. No obstante, este último no es el caso de las lógicas aquí presentes. En conclusión, el hecho de que el condicional que caracteriza nuestras lógicas no sea el clásico, impide que nuestros sistemas colapsen a pesar de validar fórmulas como F17, o incluso como F15 y F16.

Hay que destacar que la observación anterior es de interés en lo que refiere a las diferencias entre unas y otras lógicas estudiadas en relación con la distinción filosófica entre condicional relevante y *entailment* en lógicas tetravaluadas.

Proposición 20.1.6: Algunas tesis modales demostrables en Lt2, Lt3, Lt5 y Lt7. Las siguientes tesis modales son demostrables en Lt2, Lt3, Lt5 y Lt7.

F1 $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$

F2 $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$

F3 $\Box A \rightarrow A$

F4 $\Box A \rightarrow \Box\Box A$

F5 $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

F6 $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$

F7 $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

F8 $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$

F9 $\Diamond(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Diamond B)$

F10 $(\Diamond A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box(A \rightarrow B)$

F11 $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

F12 $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$

F13 $\Diamond(A \wedge B) \rightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B)$

F14 $(\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$

F15 $A \to (\neg A \vee \Box A)$

F16 $(\Diamond A \wedge \neg A) \to A$

F17 $(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Prueba. Dado el teorema de completud probado en la parte 1, basta con comprobar si las fórmulas previas son o no válidas en las matrices que determinan las lógicas-Lti, para lo cual remito nuevamente al lector a (González, 2012). ■

Nótese que las tesis F1-F14 son teoremas del sistema S5 de Lewis cuando reemplazamos $\to$ por el condicional clásico (i.e., si interpretamos $A \to B$ como $A \vee \neg B$). Las tesis F15 y F16 son aquellas que producirían el colapso de S5 en la lógica clásica si se añadiesen al mismo, esto es, obtendríamos $A \to \Box A$; por tanto, A resultaría equivalente a $\Box A$. Por último, F17 es una de las paradojas fuertes de Lukasiewicz a las que nos referimos previamente.

Proposición 20.1.7: Algunas tesis modales no demostrables en Lt2, Lt3, Lt5 y Lt7. Las siguientes fórmulas no son demostrables en alguna de las lógicas-Lti. En particular, F18-F21 y F23-F31 no son derivables en Lt2 ni Lt5 y ninguna de las fórmulas expuestas en dicha lista es derivable en Lt3 ni Lt7.

F18 $A \to \Box A$

F19 $\Diamond A \to A$

F20 $\Box\Diamond A \to A$

F21 $A \to \Diamond\Box A$

F22 $(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$

F23 $(\Diamond A \wedge \Diamond B) \to \Diamond(A \wedge B)$

F24 $\Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Box B)$

F25 $\Box A \to (B \to \Box B)$

F26 $\Box A \to (\Diamond B \to B)$

F27 $(\Box A \to \Diamond B) \to \Diamond(A \to B)$

F28 $(\Diamond A \wedge \Box B) \to \Diamond(A \wedge B)$

F29 $\Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Diamond B)$

F30 $(\Diamond A \to \Diamond B) \to \Diamond(A \to B)$

F31 $(\Box A \wedge \neg A) \to B$

Prueba. Semejante a la de la Proposición 20.1.6. ■

Cabe destacar que entre las fórmulas presentes en la lista anterior se encuentran las paradojas fuertes de tipo Lukasiewicz (F22-F26). Además, F27-F31 son teoremas del sistema T de Feys-von Wright cuando reemplazamos $\rightarrow$ por el condicional clásico, esto es, cuando entendemos $A \rightarrow B$ como $A \vee \neg B$. Por último, F18-F21 producirían el colapso de los sistemas en la lógica clásica.

Para acabar, quiero subrayar que no forma parte del propósito de esta subsección definir expansiones de las lógicas-Lti mediante operadores modales –algo que, por otra parte, se llevó a cabo desde una perspectiva diferente en la parte 5 de este estudio– sino simplemente mostrar que algunas de las lógicas-Lti validan total o parcialmente el conjunto de tesis modales que llevaron, en esencia, a Anderson y Belnap a afirmar que la lógica E de la implicación relevante (*Entailment*) encierra una teoría de la necesidad lógica.

20.2 Paraconsistencia y paracompletud

Demuestro ahora que las lógicas involucradas en esta investigación son tanto paraconsistentes como paracompletas. La noción de paraconsistencia utilizada es estándar. Véanse (Carnielli, Coniglio y Marcos, 2007), (Priest, 2002) y (Karpenko, 1999). Por otro lado, la noción de paracompletud se define aquí como noción pareja a la de paraconsistencia, tomando como referencia el trabajo de Sette y Carnielli (1995). Sobre estas y otras nociones frecuentes de paraconsistencia y paracompletud, remito al lector a (Petrukhin, 2018, pp. 3 y 4).

Definición 20.2.1: Lógicas paraconsistentes. Sea $\Vdash$ una relación de consecuencia (definida de manera sintáctica o semántica). Entonces, una lógica L es paraconsistente syss, para cualesquiera f.b.f. A y B, la regla ECQ (*E contradictione quodlibet*) $A, \neg A \Vdash B$ no se sostiene en L.

Dicho de otra manera, la definición anterior expresa que una lógica L es paraconsistente cuando sus teorías no son necesariamente triviales en presencia de contradicciones. En relación con los sistemas que nos ocupan, probaré ahora que toda lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) es paraconsistente.

Proposición 20.2.1: Las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) son paraconsistentes. Toda lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) es paraconsistente, esto es, la regla ECQ (*E contradictione quodlibet*) $A, \neg A \Rightarrow B$ no se sostiene en ninguna lógica-Lti.

Prueba. Sean p y q variables proposicionales y sea I una interpretación-Lti tal que $I(p) = 2$ y $I(p) = 0$, tendremos $\{p, \neg p\} \nvDash_{Mti} q$. ■

Definición 20.2.2: Lógicas paracompletas. Una lógica L es paracompleta syss el principio de tercero excluido no es teorema de L ($\nvdash_L A \vee \neg A$).

Proposición 20.2.2: Las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) son paracompletas. Toda lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$) es paracompleta, esto es, el principio de tercero excluído $A \vee \neg A$ no se sostiene en ninguna lógica-Lti.

Prueba. Sea p cualquier variable proposicional y sea I una interpretación-Lti tal que $I(p) = 1$, tendremos $\nvDash_{Mti}\ p \vee \neg p$. Entonces, por el teorema de corrección de las lógicas-Lti (cf. Teorema 9.2), $\nvdash_{Lti}\ p \vee \neg p$. ■

20.3 Condicionales naturales

En lo que sigue, introduciré el concepto de condicional natural[129] y mostraré que los condicionales de las lógicas consideradas en esta investigación son naturales.

Definición 20.3.1: Condicionales naturales. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional con $\rightarrow$ entre sus conectivas y sea M una matriz para $\mathcal{L}$ donde los valores x e y representen el mínimo y el máximo (en el sentido clásico) dentro del conjunto $\mathcal{V}$. Entonces, una función-$f_{\rightarrow}$ en $\mathcal{V}$ define un condicional natural si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f_{\rightarrow}$ coincide con el condicional clásico cuando se restringe al subconjunto $\{x, y\}$ de $\mathcal{V}$;

2. $f_{\rightarrow}$ satisface la regla MP, esto es, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{V}$, si $a \rightarrow b \in \mathcal{D}$ y $a \in \mathcal{D}$, entonces $b \in \mathcal{D}$;

3. Para cualesquiera $a, b \in \mathcal{V}$, si $a \leq b$, entonces $a \rightarrow b \in \mathcal{D}$.

Proposición 20.3.1: Condicionales naturales en matrices tetravaluadas. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional y M una matriz tetravaluada para $\mathcal{L}$ donde $\mathcal{V}$ y $\mathcal{D}$ se definen exactamente como en MB4 (cf. Definición 2.1.1). Considérense las 32.768 funciones-$f_{\rightarrow}$ definidas por la siguiente tabla:

$$TI \quad \begin{array}{c|cccc} \rightarrow & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 3 & b_1 & b_2 & 3 \\ 1 & c_1 & b_3 & c_2 & b_4 \\ 2 & a_1 & a_2 & b_5 & b_6 \\ 3 & 0 & a_3 & c_3 & 3 \end{array}$$

donde $a_i (1 \leq i \leq 3) \in \{0, 1\}$, $b_j (1 \leq j \leq 6) \in \mathcal{D}$ y $c_m (1 \leq m \leq 3) \in \mathcal{V}$. El conjunto de funciones que contiene TI es el conjunto de todos los condicionales naturales definibles en M.

Prueba. Demostraré que todas las posibles funciones definibles en TI cumplen con las condiciones expuestas en la Definición 20.3.1.

(1) Toda función-$f_{\rightarrow}$ definible en TI cumple con la primera condición, esto es, es una función que coincide con el condicional clásico cuando se restringe al conjunto $\{x, y\}$ de $\mathcal{V}$. Dicha condición se cumple dado que en TI los siguientes valores son fijos: $f_{\rightarrow}(0, 0) = 3$, $f_{\rightarrow}(0, 3) = 3$, $f_{\rightarrow}(3, 3) = 3$ y $f_{\rightarrow}(3, 0) = 0$.

[129] Tomo la noción de *condicional natural* de Robles y Méndez (2020) –véase también (Méndez y Robles, 2015)–, que parten a su vez del concepto de *implicación natural* desarrollado por N. Tomova (2012).

(2) Para cumplir el segundo requisito, necesitamos que toda función-$f_\to$ en TI verifique el MP. Pues bien, dado que para falsar esta regla necesitaríamos que las premisas tuvieran un valor designado pero la conclusión no, basta con asegurarnos de que $f_\to$ asigna al condicional un valor no designado en los siguientes casos: $f_\to(2, 0)$, $f_\to(2, 1)$, $f_\to(3, 0)$, $f_\to(3, 1)$. Es claro que estos son los únicos casos en los que se podría falsar la regla, por tanto, son los únicos que necesitamos tener en cuenta. No obstante, en (1) ya determinamos $f_\to(3, 0) = 0$. Con lo cual, solo queda asegurar que los otros casos, i.e., $a_i(1 \leq i \leq 3)$, también reciben un valor no designado (bien 0, bien 1). Pues bien, esto queda garantizado cuando asumimos en TI que $a_i(1 \leq i \leq 3) \in \{0, 1\}$.

(3) Por último, necesito comprobar que, efectivamente, (para cualesquiera d, $e \in \mathcal{V}$) si $d \leq e$, tengo $d \to e \in \mathcal{D}$ para cualquier función-$f_\to$ definible en TI. Con lo cual, es claro que necesitaremos $f_\to(0, 0) \in \mathcal{D}$, $f_\to(0, 1) \in \mathcal{D}$, $f_\to(0, 2) \in \mathcal{D}$, $f_\to(0, 3) \in \mathcal{D}$, $f_\to(1, 1) \in \mathcal{D}$, $f_\to(1, 3) \in \mathcal{D}$, $f_\to(2, 2) \in \mathcal{D}$, $f_\to(2, 3) \in \mathcal{D}$, $f_\to(3, 3) \in \mathcal{D}$[130]. Entonces, dada la primera condición, ya tenemos fijados en la matriz los siguientes casos: $f_\to(0, 0) = 3$, $f_\to(0, 3) = 3$ y $f_\to(3, 3) = 3$. El resto de casos quedaría también garantizado dado que $b_j(1 \leq j \leq 6) \in \mathcal{D}$ en TI. Dado que hemos tenido en cuenta todos y cada uno de los casos en los que el valor del antecedente es inferior o igual al del consecuente ($d \leq e$), no cabe duda de que cualquier función-$f_\to$ definible en TI también cumplirá esta tercera condición. ■

Definición 20.3.2: Matrices tetravaluadas con condicionales naturales. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional con la conectiva $\to$ y sea M una matriz tetravaluada donde $\mathcal{V}$ y $\mathcal{D}$ están definidos como en la Definición 2.1.1. Más aún, sea $f_\to$ una de las funciones (que definen alguno de los condicionales) en TI (cf. Proposición 20.3.1). Entonces, M es una matriz tetravaluada con un condicional natural.

Proposición 20.3.2: Mti ($1 \leq i \leq 8$) es una matriz tetravaluada con un condicional natural. Cada Mti ($1 \leq i \leq 8$)[131] es una matriz tetravaluada con un condicional natural.

Prueba. Por un lado, la Proposición 20.3.1 garantiza que toda función-$f_\to$ definible en TI es un condicional natural. Por otro, dada la Definición 20.3.2, es claro que toda Mti ($1 \leq i \leq 8$) posee un condicional natural por dos simples razones: en primer lugar, $\{\mathcal{V}, \mathcal{D}, f_\neg, f_\wedge, f_\vee\}$ se definen en toda Mti ($1 \leq i \leq 8$) de acuerdo con la Definición 2.1.1 (como se exige en la Definición 20.3.2) y, además, basta con observar cada Mti ($1 \leq i \leq 8$) para verificar que la función-$f_\to$ definida en cada una de ellas es justamente una de las 32.768 posibles a las que alude la Proposición 20.3.1. ■

[130] En este punto es clave indicir en la importancia de la estructura reticular de MB4 para entender que no es necesario detenerse a valorar los casos $f_\to(1, 2)$ y $f_\to(2, 1)$ –cf. Definición 2.1.1.

[131] Cf. Proposición 5.3.1.

20.4 Divisibilidad en matrices trivaluadas

En su artículo sobre el sistema E4, Robles y Méndez (2016) observan que, de acuerdo con lo que subrayó John Slaney, la matriz de BN4 puede dividirse en dos matrices trivaluadas que representen la *both part* y la *neither part* de MBN4, respectivamente. Anotan, también, que el resultado de la mencionada división serían dos matrices (trivaluadas) de notable interés: MRM3 y MŁ3[132]. Es interesante apuntar, además, que, al contrario de lo que sucede con MBN4, ME4 no tiene la capacidad de dividirse en matrices trivaluadas. Pues bien, el objetivo de la presente subsección es averiguar cuáles de las matrices que nos ocupan en este trabajo tienen la cualidad de dividirse en dos matrices trivaluadas y, de ser así, cuáles serían estas.

Todas las variantes de MBN4 (i.e., Mt2-Mt4) parecen tener esta cualidad. Por el contrario, las variantes de ME4 (i.e., Mt6-Mt8) no son divisibles en dos matrices trivaluadas cuando con cada pareja de matrices trivaluadas pretendemos representar la *both part* y la *neither part* de sus correspondientes tetravaluadas. En particular, aunque sí es posible encontrar una tabla condicional trivaluada correspondiente a la *both part* de Mti ($5 \leq i \leq 8$) –el condicional de RM3–, no es posible encontrar una tabla condicional trivaluada correspondiente la *neither part*. Para encontrar la *neither part* de estas matrices, bastaría con excluir la posibilidad de que los componentes de un condicional (antecedente y consecuente) reciban el valor *both*. No obstante, para toda Mti ($5 \leq i \leq 8$) se da $f_{\rightarrow}(1,1) = 2$; lo cual nos impide esclarecer cuál debería ser el valor de esa función en un condicional trivaluado donde 2 y 1 representan, respectivamente, los valores *true* y *neither*. En todo caso, la única opción que parece plausible sería estipular que, para las matrices trivaluadas resultantes de esa división, los condicionales cuyos dos componentes reciben el valor *neither* recibirían, a su vez, el valor *true*. Sin embargo, esto no es, en absoluto, lo que están representando sus respectivas "compañeras" tetravaluadas, dado que para Mti ($5 \leq i \leq 8$), el resultado de la función $f_{\rightarrow}(1,1)$ no es *true* sino *both*[133].

Por el contrario, a continuación se detallan las matrices trivaluadas[134] en que se dividirían tanto MBN4 (Mt1) como sus variantes (Mt2-Mt4). Por un lado, MRM3 sería la matriz trivaluada característica de la *both part* para Mti ($1 \leq i \leq 4$):

MRM3

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
*1	0	1	2
*2	0	0	2

Por otro lado, cada Mti ($1 \leq i \leq 4$) daría lugar a una matriz trivaluada

[132] Según Meyer *et al.* (1984), estas dos matrices trivaluadas son más evidentes que la mayoría. En particular, la matriz de Ł3 sería justamente aquella que la mayoría de alumnos con conocimientos absolutamente básicos de lógica escogerían como intuitivamente adecuada para contextos en los que el tercer valor de verdad sea indeterminado. Asimismo, indican que RM3 es la única lógica trivaluada que valida los principios de la implicación relevante (Meyer *et al.*, 1984, nota 1).

[133] Sobre el significado intuitivo de estos valores, véase la Observación 2.1.1 (sección 2).

[134] Los valores designados están marcados con un asterisco.

diferente característica de su *neither part*.

(t1')

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	0
*2	0	1	2

(t2')

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
*2	0	0	2

(t3')

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	2
*2	0	0	2

(t4')

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
*2	0	1	2

La *neither part* de MBN4 (Mt1), presentada en (t1'), es el condicional de la matriz trivaluada de Łukasiewicz MŁ3; a su vez, (t3'), que representa la *neither part* de Mt3, parece también una variante de este mismo condicional. Por su parte, (t2') caracteriza la *neither part* de Mt2 y, curiosamente, valida la extensión trivaluada del fragmento implicativo del sistema S5 de Lewis según la axiomatización de Ian Hacking (1963)[135]. Por último, la *neither part* de Mt4 se presenta en (t4') y es el condicional de la lógica G3 de Gödel.

20.5 Lista de tesis y reglas

En la presente subsección se expondrá una lista de tesis y reglas de posible interés desde la perspectiva de las lógicas de la relevancia (o de otras lógicas no clásicas) y se especificará la relación de cada una de estas tesis respecto de cada lógica-Lti ($1 \leq i \leq 8$), esto es, se determinará la validez de las mismas en cada una de las lógicas consideradas en esta investigación[136]. Entre las fórmulas de la lista que sigue encontramos: paradojas clásicas de la implicación material (por ejemplo, t3-t9); *a strong and natural list of valid entailments* (t28, t37, t39-t47), siguiendo las palabras de Anderson y Belnap (1975, p. 26); fórmulas que, añadidas a la lógica B, forman otros sistemas clásicos de la relevancia (Routley *et al.*, 1982, p. 288 y ss.); así como muchas otras fórmulas interesantes bajo alguna perspectiva no clásica.

Es necesario incidir en que las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) están libres de las paradojas del condicional más dañinas, como son t4, t6, t7 y t8. Esta cuestión no resulta especialmente sorprendente dado que, como ya se ha visto, las lógicas-Lti tienen la QRP (Proposición 20.1.2).

(i) No válidas en ninguna lógica-Lti

t1 $(A \vee \neg A)$ [*tertium non datur*]

t2 $\neg(A \wedge \neg A)$ [*principium contradicionis*]

t3 $\neg A \vee (B \to A)$

t4 $\neg A \to (A \to B)$ [*ex falso quodlibet*, EFQ]

[135] En su artículo, Robles y Méndez (2016) denominan a esta matriz como $\mathrm{MS5}_3^+$.

[136] Para comprobar la validez de estas tesis, remitiré al lector a (González, 2012).

t5 $\neg A \to (B \to \neg A)$ [EFQ]

t6 $A \to (\neg A \to B)$ [EFQ]

t7 $A \to (B \to A)$ [*verum ex quodlibet*, VEQ]

t8 $B \to (A \to A)$ [paradoja positiva (*positive paradox*)]

t9 $(A \to B) \vee (B \to A)$ [axioma de Dummett]

t10 $(A \to \neg A) \to \neg A$ [axioma de *reductio*]

t11 $[(A \to B) \wedge (A \to \neg B)] \to \neg A$ [axioma de *reductio*]

t12 $A \to [B \to (A \wedge B)]$ [ley de adjunción]

t13 $A \to [B \to (C \to A)]$

t14 $[A \to (B \vee C)] \to [(A \to B) \vee (A \to C)]$

t15 $[(A \wedge B) \to C] \to [(A \to C) \vee (B \to C)]$

t16 $(A \to B) \to [C \to (A \to B)]$

t17 $(A \vee B) \to [(A \to B) \to B]$

t18 $A \vee (A \to B)$ [ley de Peirce disyuntiva]

t19 $[(A \wedge B) \to C] \to [A \to (B \to C)]$ [ley de exportación]

t20 $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$

t21 $[\neg(A \to B) \wedge (\neg A \wedge B)] \to C$

t22 $\neg(A \to B) \to \neg B$

t23 $(A \vee B) \to (\neg A \to B)$

t24 $(A \vee \neg B) \to (\neg A \to \neg B)$

t25 $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$

t26 $C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee (\neg A \vee B)$

(ii) Válidas en toda lógica-Lti

t27 $\neg(A \to A) \to (B \to B)$

t28 $[(A \to A) \to B] \to B$ [aserción especial (*specialized assertion*)]

t29 $[((A \to A) \wedge (B \to B)) \to C] \to C$ [axioma característico de la lógica E (*Entailment*)]

t31 $A \Rightarrow (A \to B) \to B$ [regla de aserción]

t32 $C \vee A \Rightarrow C \vee [(A \to B) \to B]$ [regla de aserción disyuntiva]

t33 $C \vee \neg B, C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee \neg A$ [*Modus Tollens* disyuntivo, dMT]

t34 $C \vee A \Rightarrow C \vee \neg(A \to \neg A)$ [regla de *reductio* disyuntiva]

(iii) Válidas en alguna lógica-Lti

t35 $A \to (A \to A)$ [axioma Mingle]

Válida en Lt1-Lt4 (BN4 y sus variantes).

No válida en Lt5-Lt8 (E4 y sus variantes).

t36 $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$

Válida en Lt5-Lt8 (E4 y sus variantes).

No válida en Lt1-Lt4 (BN4 y sus variantes).

t37 $[A \to (A \to B)] \to (A \to B)$ [axioma de contracción]

Válida en Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt3, Lt7, Lt8.

t38 $[(A \to B) \wedge \neg(A \to B)] \to [(C \to D) \vee \neg(C \to D)]$ [axioma implicativo de salvaguarda (*implicative safety axiom*)]

Válida en Lt2, Lt5 (E4).

No válida en Lt1 (BN4), Lt3, Lt4, Lt6, Lt7, Lt8.

t39 $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$ [axioma de autotransitividad (*self-distribution* (*on the major*))]

Válida en Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt3, Lt7, Lt8.

t40 $(A \to B) \to [(A \to (B \to C)) \to (A \to C)]$ [axioma de autotransitividad (*self-distribution* (*on the minor*))]

Válida en Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt3, Lt7, Lt8.

t41 $(D \to B) \to [(A \to (B \to C)) \to (A \to (D \to C))]$ [axioma de reemplazo (*replacement of the middle*)]

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t42 $(C \to D) \to [(A \to (B \to C)) \to (A \to (B \to D))]$ [axioma de reemplazo (*replacement of the third*)]

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t43 $(A \to (B \to C)) \to [A \to ((D \to B) \to (D \to C))]$ [axioma de prefijación del consecuente]

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t44 $(A \to (B \to C)) \to [A \to ((C \to D) \to (B \to D))]$ [axioma de sufijación del consecuente]

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t45 $[A \to ((B \to C) \to D)] \to [(B \to C) \to (A \to D)]$ [axioma de permutación restringida]

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t46 $(B \to C) \to [(A \to ((B \to C) \to D)) \to (A \to D)]$ [axioma de *modus ponens* condicionado restringido]

Válida en Lt1(BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t47 $(A \to B) \to [((A \to B) \to C) \to C]$ [axioma de aserción restringida]

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t48 $[(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$ [axioma de transitividad]

Válida en Lt2, Lt3, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt7.

No válida en Lt1 (BN4), Lt8.

t49 $(B \to C) \to [(A \to B) \to (A \to C)]$ [axioma de prefijación]

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t50 $(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$ [axioma de sufijación]

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t51 $A \to [[A \to (A \to B)] \to B]$

Válida en Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt3, Lt7, Lt8.

t52 $A \to [[A \to (B \to C)] \to (B \to C)]$

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t53 $A \to [(A \to B) \to B]$ [axioma de aserción]

Válida en Lt1 (BN4), Lt4, Lt6, Lt8.

No válida en Lt2, Lt3, Lt5 (E4), Lt7.

t54 $B \to [[A \to (B \to C)] \to (A \to C)]$

Válida en Lt1 (BN4), Lt4, Lt6, Lt8.

No válida en Lt2, Lt3, Lt5 (E4), Lt7.

t55 $A \to [B \to (A \vee B)]$

Válida en Lt1 (BN4)-Lt4.

No válida en Lt5 (E4)-Lt8.

t56 $[A \to (B \to C)] \to [(A \wedge B) \to C]$ [axioma de importación]

Válida en Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt3, Lt7, Lt8.

t57 $[A \to [B \to (C \to D)]] \to [B \to [A \to (C \to D)]]$

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6, Lt8.

No válida en Lt3, Lt7.

t58 $[A \to (B \to C)] \to [B \to (A \to C)]$ [axioma de permutación]

Válida en Lt1 (BN4), Lt4, Lt6, Lt8.

No válida en Lt2, Lt3, Lt5 (E4), Lt7.

t59 $(A \wedge B) \to [[A \to (B \to C)] \to C]$

Válida en Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt3, Lt7, Lt8.

t60 $(A \to B) \to [[A \wedge (B \to C)] \to C]$

Válida en Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt3, Lt7, Lt8.

t61 $[A \wedge (B \to C)] \to [(A \to B) \to C]$

Válida en Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt3, Lt7, Lt8.

t62 $(A \to B) \vee [(A \to B) \to C]$

Válida en Lt2, Lt5 (E4).

No válida en Lt1 (BN4), Lt3, Lt4, Lt6, Lt7, Lt8.

t63 $[(A \to B) \wedge A] \to B$ [axioma de *Modus Ponens*]

Válida en Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt3, Lt7, Lt8.

t64 $[(A \to B) \wedge \neg B] \to \neg A$ [axioma de *Modus Tollens*]

Válida en Lt2, Lt3, Lt5 (E4), Lt7.

No válida en Lt1 (BN4), Lt4, Lt6, Lt8.

t65 $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ [axioma de contraposición]

Válida en Lt1 (BN4), Lt2, Lt5 (E4), Lt8.

No válida en Lt3, Lt4, Lt6, Lt7.

t66 $\neg B \to [\neg A \vee \neg(A \to B)]$

Válida en Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt3, Lt7, Lt8.

t67 $(\neg A \wedge B) \to (A \to B)$

Válida en Lt1-Lt4 (BN4 y sus variantes).

No válida en Lt5-Lt8 (E4 y sus variantes).

t68 $\neg(A \to B) \to (A \vee \neg B)$

Válida en Lt1-Lt4 (BN4 y sus variantes).

No válida en Lt5-Lt8 (E4 y sus variantes).

t69 $\neg(A \to B) \to (B \to A)$

Válida en Lt1 (BN4), Lt8.

No válida en Lt2-Lt4, Lt5 (E4)-Lt7.

t70 $A \to [B \vee \neg(A \to B)]$

Válida en Lt2, Lt3, Lt5 (E4), Lt7.

No válida en Lt1 (BN4), Lt4, Lt6, Lt8.

t71 $C \vee A \Rightarrow C \vee [B \vee \neg(A \to B)]$

Válida en Lt2, Lt3, Lt5 (E4), Lt7.

No válida en Lt1 (BN4), Lt4, Lt6, Lt8.

t72 $C \vee \neg B \Rightarrow C \vee [\neg A \vee \neg(A \to B)]$

Válida en Lt2, Lt4, Lt5 (E4), Lt6.

No válida en Lt1 (BN4), Lt3, Lt7, Lt8.

En la lista anterior quedan reflejados la mayoría de los nombres de las tesis que en ella se incluyen. Todas las restantes se relacionan con algunas de las ya mencionadas. Para no alargar en exceso la presente subsección, me limitaré a comentar en lo que sigue solo unos pocos ejemplos: las fórmulas t13 y t16 están relacionadas con VEQ; t14 y t15 con el axioma de Dummett; t3 es equivalente a t18 en cualquier sistema que tenga los axiomas de doble negación y contraposición.

Teniendo en cuenta las fórmulas anteriores que cada lógica-Lti verifica o falsa, parece haber relaciones de semejanza más estrechas entre ciertas parejas de sistemas dentro de los considerados. En primer lugar, tal relación parece darse entre Lt2 y Lt5. De hecho, podríamos axiomatizar estos sistemas partiendo de la base axiomática de la lógica E de Anderson y Belnap (1992, prefacio) menos el axioma de reductio (t10) más las tesis características de Lt2 y Lt5, en sus respectivos casos. En segundo lugar, tenemos la pareja formada por Lt4 y Lt6, que podrían axiomatizarse (de manera alternativa a la propuesta en esta tesis) añadiendo sus respectivos axiomas característicos a la base axiomática de lógica de la relevancia R de Anderson y Belnap (1992, prefacio) menos el axioma de contraposición (t65). En tercer lugar, la pareja de lógicas formada por Lt1 y Lt8 podrían axiomatizarse alternativamente como extensiones de la lógica R sin el axioma de contracción (t37). Por último, parece que los sistemas Lt3 y Lt7 son los más débiles de entre los aquí considerados[137] y no podrían en principio axiomatizarse de manera alternativa partiendo de la base axiomática de la lógica E (ni de R).

20.6 Propiedades de las expansiones modales

Esta subsección se enfocará en investigar algunas propiedades de las extensiones modales de las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$) que se desarrollaron en las secciones previas (cf. Secciones 17 y 18).

El siguiente corolario prueba que no es posible derivar en las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti ($1 \leq i \leq 8$) ninguna fórmula sin operadores modales que no pueda derivarse en las lógicas-Lti. Puesto que los axiomas modales A30-A32 (Definición 17.1.2) característicos de las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti solamente se usaron en la prueba del Lema 17.3.1 ("el operador de necesidad en las teorías primas") y dicho lema, a su vez, solamente se utilizó para probar el Lema 17.3.2 ("$\mathcal{T}$-interpretación del conjunto de f.b.f. $\mathcal{F}$"), es claro que cada lógica-Lti es correcta y completa con respecto a $\vDash_{Mti}$ [138] y que, por tanto, las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti son extensiones conservativas de las lógicas-Lti.

Corolario 20.6.1: Las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti son extensiones conservativas de las lógicas-Lti. Las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti ($1 \leq i \leq 8$) son extensiones conservativas de las lógicas-Lti. Esto es, si $\vDash_{\mathcal{M}_1 Lti} A$ y el operador L no aparece en A, entonces $\vDash_{Lti} A$.

Prueba. La prueba del presente corolario se sigue de los teoremas de corrección y completud de las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti y las lógicas-Lti (cf. Teoremas 9.2, 10.1, 17.2.1 y 17.3.1). ■

En la parte 5 (Proposición 17.2.4), se comprobó que la regla NEC no es admisible en las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti ($1 \leq i \leq 8$). No obstante, el siguiente *teorema*

[137] Es preciso apuntar que una mayor debilidad no conlleva necesariamente una carencia de interés. Una cuestión curiosa sobre los mismos es el hecho de que, al contrario que algunos de sus compañeros, sí validan el axioma de transitividad (t48).

[138] Como efectivamente se probó en los Teoremas 9.1 y 10.1 (cf. Secciones 9 y 10).

de sustitución sí se sostiene en las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti.

Proposición 20.6.1: Teorema de sustitución. Sea L una lógica-$\mathcal{M}_1$Lti, para cualesquiera A, $B \in \mathcal{F}$, si $\vdash_L A \leftrightarrow B$, entonces $\vdash_L C[A] \leftrightarrow C[A/B]$ ($C[A]$ es una f.b.f. en la que aparece A y $C[A/B]$ es el resultado de cambiar una o más apariciones de A en $C[A]$ por apariciones de B).

Prueba. Por inducción sobre la complejidad de $C[A]$. Hay que contemplar cinco casos. Si $\vdash_L A \leftrightarrow B$, entonces:

(i) $\vdash_L (D \wedge A) \leftrightarrow (D \wedge B)$;
(ii) $\vdash_L (D \vee A) \leftrightarrow (D \vee B)$;
(iii) $\vdash_L \neg A \leftrightarrow \neg B$;
(iv) $\vdash_L (A \leftrightarrow D) \leftrightarrow (B \leftrightarrow D)$;
(v) $\vdash_L (LA \leftrightarrow LB)$.

Las equivalencias citadas en los casos (i)-(v) son demostrables en las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti. Dado el teorema de completud de las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti (Teorema 17.3.1), bastaría probar que (i)-(v) son válidos en las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti (i.e., (i)$\vDash_{\mathcal{M}_1 Lti}$ $(D \wedge A) \leftrightarrow (D \wedge B)$ y lo mismo para (ii)-(v)). El hecho de que, en efecto, estos cuatro casos constituyen reglas válidas en toda lógica-$\mathcal{M}_1$Lti puede comprobarse fácilmente[139]. ■

20.7 Lista de tesis modales

De modo parejo a lo expuesto en la subsección 20.5, se expone en lo que sigue una lista de fórmulas modales de posible interés y se especifica la relación de cada una de estas tesis respecto de las dos clases de expansiones modales de cada lógica-Lti, estas son, las lógicas-$\mathcal{M}_1$Lti y las lógicas-$\mathcal{M}_2$Lti ($1 \leq i \leq 8$)[140].

Sobre esta lista de fórmulas cabe destacar, en primer lugar, que mt1 y mt2 harían colapsar en la lógica clásica a cualquier sistema que contenga T; en segundo lugar y de manera semejante, mt3 y mt4 son fórmulas que producirían también el colapso en la lógica clásica a cualquier sistema que incluya a S5. En segundo lugar, mt5-mt8, mt33 y mt34 son paradojas fuertes de tipo Łukasiewicz (Méndez y Robles, 2015). En todo caso, es preciso apuntar que, si bien algunos de nuestros sistemas validan mt33 y mt34, dichas fórmulas serían esencialmente problemáticas en el caso de tratarse de lógicas caracterizadas por el condicional clásico (pero ese no es el caso). Por otro lado, mt9-mt11, mt15-mt22, mt28-mt32 y mt35 son teoremas de la lógica modal T (y, por tanto, también de S4 y S5). Por su parte, mt12 es teorema en S4 de Lewis y mt13 y mt14 lo son de S5. Las tesis mt23-mt26 no forman parte de S5 y, de hecho, su adición provocaría el colapso de este último en la lógica clásica; algo que en nuestros sistemas no sucede porque el condicional no está definido a la manera clásica (i.e., $A \rightarrow B =_{df} \neg A \vee B$).

[139] Cf. (González, 2012).
[140] Para comprobar la validez de las tesis remitiré nuevamente al lector a (González, 2012).

(i) No válidas en ninguna lógica-$\mathcal{M}_1$Lti ni lógica-$\mathcal{M}_2$Lti ($1 \leq i \leq 8$).

mt1 $A \to LA$

mt2 $MA \to A$

mt3 $LMA \to A$

mt4 $A \to MLA$

mt5 $(MA \wedge MB) \to M(A \wedge B)$

mt6 $L(A \vee B) \to (LA \vee LB)$

mt7 $LA \to (B \to LB)$

mt8 $LA \to (MB \to B)$

(ii) Válidas en toda lógica-$\mathcal{M}_1$Lti y lógica-$\mathcal{M}_2$Lti ($1 \leq i \leq 8$).

mt9 $LA \leftrightarrow \neg M \neg A$

mt10 $MA \leftrightarrow \neg L \neg A$

mt11 $A \to MA$

mt12 $LA \to LLA$

mt13 $MA \to LMA$

mt14 $MLA \to LA$

mt15 $L(A \to B) \to (LA \to LB)$

mt16 $L(A \wedge B) \leftrightarrow (LA \wedge LB)$

mt17 $M(A \vee B) \leftrightarrow (MA \vee MB)$

mt18 $(MA \to LB) \to L(A \to B)$

mt19 $(LA \vee LB) \to L(A \vee B)$

mt20 $M(A \wedge B) \to (MA \wedge MB)$

mt21 $A \vee \neg LA$

mt22 $\neg A \vee MA$

mt23 $A \to (\neg A \vee LA)$

mt24 $(A \wedge \neg LA) \to \neg A$

mt25 $(MA \wedge \neg A) \to A$

mt26 $\neg A \to (A \vee \neg MA)$

(iii) Válidas en alguna lógica-$\mathcal{M}_1$Lti o lógica-$\mathcal{M}_2$Lti ($1 \leq i \leq 8$).

mt27 $B \to (A \vee \neg LA)$

Válida en toda lógica-$\mathcal{M}_1$Lti.

No válida en ninguna lógica-$\mathcal{M}_2$Lti.

mt28 $M(A \to B) \leftrightarrow (LA \to MB)$

Válida en $\mathcal{M}_2$Lt1.

No válida en $\mathcal{M}_1$Lt1-$\mathcal{M}_1$Lt8, $\mathcal{M}_2$Lt2-$\mathcal{M}_2$Lt8.

mt29 $(MA \to MB) \to M(A \to B)$

Válida en $\mathcal{M}_2$Lt1 y $\mathcal{M}_2$Lt4.

No válida en $\mathcal{M}_1$Lt1-$\mathcal{M}_1$Lt8, $\mathcal{M}_2$Lt2, $\mathcal{M}_2$Lt3, $\mathcal{M}_2$Lt5-$\mathcal{M}_2$Lt8.

mt30 $L(A \vee B) \to (LA \vee MB)$

Válida en toda lógica-$\mathcal{M}_1$Lti.

No válida en ninguna lógica-$\mathcal{M}_2$Lti.

mt31 $(MA \wedge LB) \to M(A \wedge B)$

Válida en toda lógica-$\mathcal{M}_1$Lti.

No válida en ninguna lógica-$\mathcal{M}_2$Lti.

mt32 $(LA \wedge \neg LA) \to B$

Válida en toda lógica-$\mathcal{M}_1$Lti.

No válida en ninguna lógica-$\mathcal{M}_2$Lti.

mt33 $(A \to B) \to (LA \to LB)$

Válida en $\mathcal{M}_1$Lt2, $\mathcal{M}_1$Lt3, $\mathcal{M}_1$Lt5-$\mathcal{M}_1$Lt8, $\mathcal{M}_2$Lt2, $\mathcal{M}_2$Lt3, $\mathcal{M}_2$Lt5, $\mathcal{M}_2$Lt7.

No válida en $\mathcal{M}_1$Lt1, $\mathcal{M}_1$Lt4, $\mathcal{M}_2$Lt1,$\mathcal{M}_2$Lt4, $\mathcal{M}_2$Lt6, $\mathcal{M}_2$Lt8.

mt34 $(A \to B) \to (MA \to MB)$

Válida en $\mathcal{M}_1$Lt2, $\mathcal{M}_1$Lt4, $\mathcal{M}_1$Lt5-$\mathcal{M}_1$Lt8, $\mathcal{M}_2$Lt2, $\mathcal{M}_2$Lt4, $\mathcal{M}_2$Lt5, $\mathcal{M}_2$Lt6.

No válida en $\mathcal{M}_1$Lt1, $\mathcal{M}_1$Lt3, $\mathcal{M}_2$Lt1,$\mathcal{M}_2$Lt3, $\mathcal{M}_2$Lt7, $\mathcal{M}_2$Lt8.

mt35 $(LA \to MB) \to M(A \to B)$

Válida en $\mathcal{M}_2$Lt1.

No válida en $\mathcal{M}_1$Lt1-$\mathcal{M}_1$Lt8, $\mathcal{M}_2$Lt2-$\mathcal{M}_2$Lt8.

A modo de conclusión para la presente sección, es necesario incidir en el interés de las expansiones modales desarrolladas para las lógicas-Lti. Como se refleja en la lista de tesis modales, podemos resaltar en primer lugar el hecho de que son sistemas que están libres del colapso en la lógica clásica (no validan mt1-mt4); asimismo, están también libres de las paradojas más dañinas de tipo Lukasiewicz (i.e., mt5-mt8). Por otro lado, la modalidad que presentan está claramente relacionada con (en los alrededores de) la del sistema S5 de Lewis; en particular, contienen tesis que son clave en S5 como, por ejemplo, mt13 y mt14. Además, como se vió en la parte 5, si bien la regla necesitación (i.e., $A \Rightarrow LA$) solo es válida en las expansiones basadas en el segundo tipo de modalidad ($\mathcal{M}_2$), en ambos tipos de modalidad ($\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$) se dan las interdefiniciones entre los operadores modales (cf. Definición 17.1.2 y Observación 18.1.2, respectivamente).

Conclusiones

Como se estableció en la introducción de esta investigación y como su propio nombre indica, el propósito de la misma radica en realizar un estudio de las variantes implicativas de la matriz tetravaluada de Brady (i.e., MBN4 o, como la hemos denominado a lo largo del presente trabajo, Mt1) que verifican la lógica básica de Routley y Meyer. La relevancia –en el sentido común del término– de la lógica BN4 no solo en lo que refiere a la filosofía y la lógica, sino también a la informática, así como su importancia entre las lógicas multivaluadas y las lógicas de la familia de la relevancia quedaron reflejadas al inicio de la presente investigación. Asimismo, la problemática que fundamenta este estudio tiene su origen en la literatura reciente (Robles y Méndez, 2016). En particular, Robles y Méndez desarrollaron lo que se podría considerar como la lógica tetravaluada de la implicación relevante (*entailment*) E4 –denominada Lt5 a lo largo del presente estudio– en el citado artículo como compañera del sistema BN4 de Brady, que puede entenderse, a su vez, como la lógica tetravaluada del condicional relevante (*relevant conditional*). Además, plantean que solo hay seis matrices tetravaluadas tales que, siendo variantes implicativas de MBN4 y ME4, verifican la lógica básica de Routley y Meyer. Sugieren entonces que sería de gran interés investigar las lógicas determinadas por dichas matrices, que no son otras que las presentadas en la primera parte de este estudio –denominadas lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$); véase la Definición 7.1. En este trabajo se ha realizado un estudio pormenorizado de las lógicas determinadas por cada una de esas matrices.

En primer lugar, se han proporcionado axiomatizaciones para cada una de estas lógicas. Dichas axiomatizaciones se caracterizan por presentar una base axiomática común a las ocho lógicas (la lógica básica b4). En las siguientes partes de este trabajo se ha dotado a las lógicas-Lti de tres clases distintas de semánticas: (1) una semántica bivalente tipo Belnap-Dunn; (2) una semántica relacional ternaria tipo Routley-Meyer con modelos reducidos; (3) una semántica Routley-Meyer con dos set-ups. Además, en la parte 5 se proporcionaron dos clases diferentes de expansiones modales paras las lógicas-Lti: la primera de ellas está basada en las tablas de verdad para L y M que proporcionan Font y Rius (2000) –en base a los estudios previos de A. Monteiro– de acuerdo a las nociones modales de Łukasiewicz; la segunda, en las definiciones tarskianas para estos operadores. Por último, pero no menos importante, en la parte 6 se abordaron las características de los sistemas desde diferentes puntos de vista. Este apartado final, además, debe entenderse como una exposición de algunas de las herramientas necesarias para que cualquier lector competente pueda por sí mismo evaluar y comparar las lógicas objeto de esta investigación, cumpliendo de esta manera con el objetivo secundario de la misma: establecer una discusión comparativa entre las ocho lógicas y evaluar si alguno de los sistemas desarrollados aquí puede aventajar las características de E4, o incluso de BN4. En primera instancia, quiero exponer que las posibles respuestas a estas cuestiones dependen en alto grado del criterio de selección. Motivo por el cual considero que es de sumo interés reflejar las propiedades de los sistemas mediante diferentes perspectivas.

En primera instancia, quedaron reflejadas las diferencias relativas a las reglas disyuntivas imprescindibles en cada una de las ocho lógicas para probar los lemas de extensión mediante la metodología de Brady (1982), necesarios, a su vez, para demostrar los teoremas de corrección y completud en las diferentes semánticas desarrolladas (véase la sección 19). Este acercamiento a las particularidades de los sistemas tiene un claro rasgo sintáctico y en tanto que criterio de comparación puede acompañarse con la lista de tesis que valida (o no) cada lógica-Lti (véanse las subsecciones 20.5 y 20.7). De hecho, de acuerdo a la información contenida en la mencionada lista, establecimos ya que, de entre todos los sistemas que nos ocupan, parece haber algunas parejas íntimamente relacionadas entre sí. En particular, Lt1 y Lt8 pueden entenderse como expansiones tetravaluadas de la lógica R sin el axioma de contracción; asimismo, Lt4 y Lt6 pueden también entenderse como expansiones de R, en este caso sin el axioma de contraposición. Por su parte, Lt2 y Lt5 pueden concebirse como extensiones tetravaluadas de E sin el axioma de *reductio*. Por último, Lt3 y Lt7, a pesar de ser los sistemas más débiles entre los aquí considerados[141] –y de requerir el mayor número de reglas disyuntivas (cf. Sección 19)–, tienen otras características comunes de interés; por ejemplo, ambos validan el axioma de transitividad.

En la misma línea, una distinción esencial entre las distintas lógicas-Lti la encontramos en la Observación 20.1.2 (íntimamente relacionada, a su vez, con las Proposiciones 20.1.6 y 20.1.7). En particular, dicha observación puede ser también de utilidad para determinar si cada una de las lógicas estudiadas puede ser entendida como una posible versión tetravaluada bien de la lógica R del condicional relevante (*relevant conditional*) bien de la lógica E de la implicación relevante (*entailment*). Es necesario subrayar que los resultados obtenidos a partir de la Observación 20.1.2 y la Subsección 20.5 son claramente complementarios y, de manera conjunta, nos llevan a concluir que los sistemas principalmente relacionados con la lógica R son Lt1, Lt4, Lt6 y Lt8; asimismo, aquellos más cercanos a la lógica E serían Lt2, Lt3, Lt5 y Lt7. En este sentido, si quisiéramos encontrar entre los sistemas aquí examinados una alternativa a la lógica BN4 (Lt1), deberíamos buscarla entre aquellos relativos a la lógica R. Igualmente, si nuestro objetivo fuera encontrar una alternativa a la lógica E4 (Lt5), deberíamos buscarla entre los sistemas Lt2, Lt3 y Lt7, puesto que son estos últimos los que podríamos llegar a entender como sistemas de la implicación (en el sentido de *entailment*) pues encierran (total o parcialmente) una teoría de la necesidad lógica en el sentido de Anderson y Belnap (como se refleja en la Observación 20.1.2). Estos resultados son también interesantes en el siguiente sentido: uno podría inicialmente pensar en buscar las alternativas a la lógica BN4 (Lt1) entre las lógicas caracterizadas por las variantes implicativas de MBN4 (i.e., Mt2-Mt4) y, del mismo modo, pensar en buscar las alternativas a E4 (Lt5) entre los sistemas Lt6-Lt8, puesto que estos son los que están car-

[141] Que sean los sistemas más débiles no implica que deban carecer de consideración, pues pueden tener otras cualidades de interés. Por ejemplo, en muchas de sus obras, Brady (1996; 2006) desarrolla y defiende el uso de sistemas débiles de la familia de la relevancia; también estudia teorías de conjuntos apoyadas en este tipo de lógicas (Brady, 1980; 1983).

acterizados por las variantes implicativas de ME4. No obstante, a la luz de los resultados que acabamos de comentar, la búsqueda de compañeros para BN4 y E4 no debería efectuarse a partir de las similitudes en la estructura matricial (condicional) característica de unas y otras lógicas, sino más bien en virtud de cualidades tales como las que acabamos de comentar. Urge, por ende, resaltar que dichas cualidades solo pueden conocerse tras el desarrollo axiomático (y, en cierto sentido, semántico) de los sistemas; dicho de otra manera, tras la realización de un estudio pormenorizado de los mismos como el que se ha llevado a cabo en la presente investigación.

Desde el punto de vista semántico, se ha dotado a todos los sistemas de tres tipos diferentes de semánticas que permiten ponerlos en relación con el gran abanico de lógicas de la relevancia –las cuales, aunque no dispongan de semánticas matriciales, sí poseen semánticas relacionales (como es el caso de R o E[142])– así como con otras muchas lógicas trivaluadas y tetravaluadas que, aunque no pertenezcan a la familia anterior, sean objeto de interés en lo que refiere al estudio de lógicas no clásicas. Huelga decir que al ser lógicas determinadas por matrices son, por supuesto, lógicas decidibles. Además, en lo que a las matrices respecta, ha quedado probado que las lógicas-Lti desarrolladas poseen lo que Tomova denomina "condicionales naturales" (véase la subsección 20.3). Por otro lado, sería también posible establecer una discusión comparativa desde el punto de vista de la naturalidad de las matrices que caracterizan a las lógicas-Lti en base a la divisibilidad de estas en pares de matrices trivaluadas (véase la subsección 20.4).

Todas las lógicas investigadas aquí tienen ciertas características de interés desde una perspectiva no clásica. En relación con el punto de vista semántico, todas ellas poseen la *Quasi-relevance Property* (QRP), como se demostró en la Proposición 20.1.2. En la misma línea, aunque las lógicas-Lti no tienen la VSP[143], se probó que sí mantienen otras propiedades de semejante índole, como las denominadas RVSPI y RVSPII (véanse las Proposiciones 20.1.3 y 20.1.4). Téngase en cuenta que, como refleja la Observación 20.1.1, estas interesantes propiedades no son siquiera características de lógicas de la relevancia como RM3. En consecuencia, el hecho de que las lógicas-Lti sí tengan la RVSPI y RVSPII, además de la QRP, hace que, sin duda, debamos considerarlas como pertenecientes a la familia de las lógicas de la relevancia.

Adicionalmente, quedó demostrado que las lógicas-Lti son paraconsistentes y paracompletas en el sentido de las Definiciones 20.2.1 y 20.2.2. Estas propiedades, unidas al hecho de que todas son expansiones de la matriz tetravaluada de Belnap (MB4), las sitúan en un lugar de claro interés entre las lógicas multivaluadas, paraconsistentes y birreticulares.

[142]Sobre la indecibilidad de estos sistemas relevantes, dirijo al lector a (Urquhart, 1984) y (Anderson, Belnap y Dunn, 1992).

[143]Es claro que no basta con que una lógica no tenga la VSP para excluirla de la familia de las lógicas de la relevancia pues hay lógicas de gran interés en la mencionada familia que no mantienen esta propiedad; un buen ejemplo es la lógica R-Mingle (Anderson y Belnap, 1975). Sobre la importancia de R-Mingle y su consideración dentro de la familia de la relevancia, véase (Avron, 2016).

Es preciso recalcar también que muchas de las características que hacen de BN4 una lógica de alto interés filosófico forman también parte del conjunto de propiedades que reflejan el resto de lógicas tratadas en esta investigación. En particular, Meyer *et al.* (1984) enunciaban: "Our view is that BN4 is the correct logic for the 4-valued situation, where the extra values are to be interpreted in the both and the neither senses" (p. 253). En lo que refiere a los motivos que fundamentan dicha aserción, podemos anotar los siguientes.

1. El silogismo disyuntivo no es una regla válida en BN4[144].

2. BN4 posee un modelo fascinante que invalida principios clásicos tales como $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ ó $A \rightarrow (B \vee \neg B)$,[145] que son considerados como casos paradigmáticos de falacias de la relevancia (Anderson y Belnap, 1975, p. 163).

3. MBN4 es divisible en un par de matrices trivaluadas de gran interés que, según su criterio, tienen una mayor "auto-evidencia" que la mayoría de matrices trivaluadas. En palabras de Meyer *et al.* (1984): "Amazingly, BN4 is what one gets when one puts Ł3 and RM3 together in the most straightforward possible way" (p. 253); "[...] Ł3 does seem more self-evident than most. As for RM3, it is the only 3-valued logic which validates the principles of relevant implication" (nota 1).

4. En BN4 se da un tratamiento asimétrico de los dos valores no-clásicos, *B(oth)* y *N(either)*, lo que justamente interpretan como consecuencia de unir dos matrices trivaluadas que tratan estos valores de manera distinta. En particular, el valor B se interpreta como designado y el valor N como no-designado.

5. A pesar de que BN4 reúne todas las características descritas, no se produce ningún tipo de inestabilidad semántica en el sistema, ni es un sistema que carezca de expresividad.

Respecto de las propiedades anteriormente descritas, toda lógica-Lti estudiada comparte con BN4 las características 1, 2, 4 y 5. No obstante, sí podemos encontrar diferencias entre las lógicas-Lti en base a la característica número 3. En particular, como ya se adelantó, no las lógicas-Lti están caracterizadas por matrices que son intuitivamente divisibles en matrices trivaluadas sino solo las variantes de BN4 (Lt2-Lt4).

[144] El hecho de que el SD no sea una regla válida en BN4 y la importancia que le otorgan al mismo están intrínsecamente relacionados con evitar a toda costa que los sistemas relevantes validen ECQ. Esto es algo que, de hecho, como se ha probado, hacen todas las lógicas-Lti pues son lógicas paraconsistentes.

[145] Es preciso subrayar aquí que la estructura básica del modelo al que refieren, que no es otra que la de la matriz tetravaluada de Belnap que caracteriza la lógica FDE (Meyer *et al.*, 1984, p. 251), funciona también como estructura inicial de las lógicas-Lti tanto en lo que refiere a la matriz (nuestras lógicas son expansiones implicativas de la misma desarrolladas a partir de sutiles variaciones de MBN4) como en lo que respecta a la axiomatización (nuestras lógicas se axiomatizaron partiendo de la lógica B que, a su vez, incluye al sistema FDE). De hecho, ninguna de las lógicas-Lti valida estos principios clásicos.

En conclusión, se han desarrollado e investigado seis nuevas lógicas tetravaluadas con propiedades de especial interés en el ámbito de las lógicas no clásicas que podrían describirse como compañeras de los sistemas BN4 y E4 previamente desarrollados en la literatura. Se ha dotado a todos estos sistemas de una base axiomática común para después ampliar cada sistema con los correspondientes axiomas. Las respectivas axiomatizaciones se han llevado a cabo desarrollando una semántica de tipo Belnap-Dunn y, además, se les ha otorgado también semánticas relaciones tipo Routley-Meyer y se han desarrollado diferentes posibilidades de modalidad para cada una de ellas. Esta investigación constituye, por tanto, un estudio técnico pormenorizado de todos estos sistemas que permite al lector establecer comparaciones de manera directa en base a los resultados aquí expuestos.

Bibliografía

Ackermann, W. (1956). Begründung einer strengen Implikation, *Journal of Symbolic Logic*, 21, 113-118. https://doi.org/10.2307/2963653

Ackermann, W. (1958). Über die Beziehung zwischen strikter und strenger Implikation. *Dialectica*, 12(3-4), 213-222. https://doi.org/10.1111/j.1746-8361.1958.tb01459.x

Anderson, A. R. (1960). Completeness Theorems for the Systems E of Entailment and EQ of Entailment with Quantification. *Mathematical Logic Quarterly*, 6, 7-14. https://doi.org/10.1002/malq.19600060709

Anderson, A. R., Belnap, N. D., Jr. (1958). A modification of Ackermann's 'rigorous implication'. *Journal of Symbolic Logic*, 23, 457-458.

Anderson, A. R., Belnap, N. D., Jr. (1959). Modalities in Ackermann's 'rigorous implication'. *Journal of Symbolic Logic*, 24, 107-111.

Anderson, A. R., Belnap, N. D., Jr. (1962). The pure calculus of entailment. *Journal of Symbolic Logic*, 27, 19-52.

Anderson, A. R., Belnap, N. D., Jr. (1975). *Entailment. The logic of relevance and necessity*, vol. I. Princeton University Press.

Anderson, A. R., Belnap, N. D., Dunn, J. M. (1992). *Entailment: The logic of relevance and necessity*, vol. II. Princeton University Press.

Arieli, O., Avron, A. (1996). Reasoning with logical bilattices. *Journal of Logic, Language and Information*, 5, 25-63.

Arieli, O., Avron, A. (1997). Bilattices and Paraconsistency. En D. Batents (Ed.), *Frontiers of paraconsistent logic*. Studies in Logic and Computation, 8.

Arieli, O., Avron, A. (1998). The value of the four values, *Artificial Intelligence*, 102, 97-141.

Aristóteles (1972). *Tratados de lógica: El Organon* (Trad. F. Larroyo). Editorial Porrúa.

Avron A. (2016). RM and its Nice Properties. En K. Bimbó (Ed.), *J. Michael Dunn on Information Based Logics*. Outstanding Contributions to Logic, 8 (pp. 15-43). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-29300-4_2

Avron A. (2020). The normal and Self-extensional Extension of Dunn-Belnap Logic. *Logica Universalis*, 14, 281-296. https://doi.org/10.1007/s11787-020-00254-1

Avron, A., Ben-Naim, J., Konikowska, B. (2007). Cut-free ordinary sequent calculi for logics having generalized finite-valued semantics. *Logica Universalis*, 1(1), 41-70.

Avron, A., Konikowska, B., Zamansky, A. (2013). Cut-free sequent calculi for C-systems with generalized finite-valued semantics. *Journal of Logic and Computation*, 23(3), 517-540.

Beall, Jc. (2017). There is no Logical Negation: True, False, Both and Neither. *Australasian Journal of Logic*, 14(1), 1-29. https://doi.org/10.26686/ajl.v14i1.4025

Beall, Jc. (2018). The simple argument for subclassical logic. *Philosophical Issues: Philosophy of Logic and Inference*, 28(1), 30-54.

Beall, Jc, Brady, R., J., Dunn, J. M., Hazen, A.P., Mares, E., Meyer, R. K., Priest, G., Restall, G., Ripley, D., Slaney, J., Sylvan, R. (2012). On the Ternary Relation and Conditionality. *Journal of Philosophical Logic*, 41(3), 595-612. https://doi.org/10.1007/s10992-011-9191-5

Beall, Jc, Glanzberg, M., Ripley, D. (2016). Liar Paradox. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2020 Edition). https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/liar-paradox/

Belnap, N. D., Jr. (1960). Entailment and relevance, *Journal of Symbolic Logic*, 25(2), 144-146. https://doi.org/10.2307/2964210

Belnap, N. D., Jr. (1977a). A useful four-valued logic. En G. Epstein y J. M. Dunn (Eds.), *Modern Uses of Multiple-Valued Logic* (pp. 8-37). D. Reidel Publishing.

Belnap, N. D., Jr. (1977b). How a computer should think. En G. Ryle (Ed.), *Contemporary Aspects of Philosophy* (pp. 30-35). Oriel Press Ltd.

Bennet, J. F. (1954). Meaning and Implication. *Mind*, 63, 451-463.

Béziau, J. Y. (2011). A new four-valued approach to modal logic. *Logique et Analyse*, 55(213), 109-121.

Blanco, J. M. (2018). *Una expansión implicativa de la matriz tetravaluada de Belnap: una lógica modal tetravaluada carente de las paradojas modales* *fuertes tipo Łukasiewicz* [Tesis doctoral]. Repositorio Gredos – Universidad de Salamanca.

Blok, W. J., Pigozzi, D. (1989). Algebraizable Logics. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 77.

Brady, R.T. (1980). A theory of classes and individuals based on a 3-valued significance logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 21(2), 385-414.

Brady, R.T. (1982). Completeness proofs for the systems RM3 and BN4. *Logique et Analyse*, 25, 9-32.

Brady, R. T. (1983). The Simple Consistency of a Set Theory Based on the Logic CSQ. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(4), 431-449.

Brady, R. T. (1992). Hierarchical Semantics for Relevant Logics. *Journal of Philosophical Logic*, 21(4), 357-374.

Brady, R. T. (1993). Rules in relevant logic – II: Formula representation. *Studia Logica*, 52(4), 565-585.

Brady, R. T. (1994). Rules in relevant logic – I: Semantic classification. *Journal of Philosophical Logic*, 23(2), 111-137. https://doi.org/10.1007/BF01050340

Brady, R. T. (1996). Relevant Implication and the Case for a Weaker Logic. *Journal of Philosophical Logic*, 25, 151-183. https://doi.org/10.1007/BF00247002

Brady, R. T. (Ed.). (2003). *Relevant Logics and Their Rivals*, vol. II. Ashgate.

Brady, R. T. (2006). *Universal Logic.* CSLI.

Bull, R., Segerberg, K. (1984). Basic Modal Logic. En D. Gabbay, F. Guenthner (Eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 3 (pp. 1-81).

Carnap, R. (1942). *Introduction to Semantics.* Harvard University Press.

Carnap, R. (1947). *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic.* The University of Chicago Press.

Carnielli, W., Coniglio, M., Marcos, J. (2007). Logics of Formal Inconsistency. En D. Gabbay and F. Guenthner (Eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 14 (pp. 1-93).

Carnielli, W., Marcos, J., Amo, S. de. (2000). Formal inconsistency and evolutionary databases. *Logic and Logical Philosophy*, 8, 115-152. https://doi.or g/10.12775/LLP.2000.008

Church, A. (1951). The Weak Theory of Implication. *Kontrolliertes Denken: Untersuchungen zum Logikkalkül und der Logik der Einzelwissenschaften*, 22-37.

Copeland, J. (2002). The Genesis of Possible World Semantics. *Journal of Philosophical Logic*, 31(2), 99-137.

De, M., Omori, H. (2015). Classical Negation and Expansions of Belnap-Dunn Logic, *Studia Logica*, 103(4), 825-851. https://doi.org/10.1007/s11225-014-9595-7

Došen, K. (1992). The First Axiomatization of Relevant Logic. *Journal of Philosophical Logic*, 21(4), 339-356.

Duncan-Jones, A. E. (1935). Is strict implication the same as entailment? *Analysis*, 2, 70-78.

Dunn, J. M. (1976). Intuitive semantics for first degree entailments and 'couple trees'. *Philosophical studies*, 29(3), 149-168.

Dunn, J. M. (1986). Relevance Logic and Entailment. En Gabbay, D. y Guenthner, F. (Eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 3 (pp. 117-224). Kluwer Academic Publishers.

Dunn, J. M. (2000). Partiality and its dual. *Studia Logica*, 66(1), 5-40. http://doi.org/10.1023/A:1026740726955

Dunn, J. M. (2015). The Relevance of Relevance to Relevance Logic. *Logic and Its Applications*, 89-23, 11-29.

Dunn, J. M., Restall, G. (2002). Relevance Logic. En Gabbay, D. y Guenthner, F. (Eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 6 (pp. 1-128). Kluwer Academic Publishers.

Fine, K. (1974). Models for entailment. *Journal of Philosophical Logic*, 3(4), 347-372.

Fitch, F. B. (1952). *Symbolic Logic*. Ronald Press.

Fitting, M. (1991). Bilattices and the semantics of logic programming. *Journal of Logic Programming*, 11(2), 91-116.

Fitting, M. (1994). Kleene's Three Valued Logics and Their Children. *Fundamenta Informaticae*, 20, 113-131.

Font, J. M., Hájek, P. (2002). On Łukasiewicz's Four-Valued Modal Logic. *Studia Logica*, 70, 157-182. https://doi.org/10.1023/A:1015111314455

Font, J. M., Rius, M. (2000). An abstract algebraic approach to tetravalent modal logics. *Journal of Symbolic Logic*, 65(2), 481-518.

Ginsberg, M. L. (1986). Multi-valued logics. *Proceedings of the fifth national conference on artificial intelligence*, 243-247. The AAAI Press.

Ginsberg, M. L. (1988). Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence. *Computational Intelligence*, 4(3), 256-316.

Goble, L. (2006). Paraconsistent modal logic. *Logique et Analyse*, 193, 3-29.

González, C. (2012). *MaTest*. (Último acceso 06/05/2021). https://sites.google.com/site/sefusmendez/matest

Hacking, I. (1963). What is Strict Implication? *Journal of Symbolic Logic*, 28(1), 51-71.

Henkin, L. (1949). The completeness of the first order functional calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 14(3), 159-166.

Irvine, A. D., Deutsch, H. (2020). Russell's Paradox. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2020 Edition). https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/russell-paradox/

Kamide, N., Omori, H. (2017). An Extended First-Order Belnap- Dunn Logic with Classical Negation. En A. Baltag, J. Seligman, T. Yamada (Eds.), *Logic, Rationality, and Interaction.* Lecture notes in Computer Science (pp. 79-93). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55665-8_6

Karpenko, A. S. (1999). Jaśkowski's criterion and three-valued paraconsistent logics. *Logic and Logical Philosophy*, 7, 81-86. https://doi.org/10.12775/LLP.1999.006

Kooi, B., Tamminga, A. (2012). Completeness via correspondence for extensions of the logic of paradox. *The Review of Symbolic Logic*, 5(4), 720-730. http://dx.doi.org/10.1017/S1755020312000196

Kripke, S. A. (1959). A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic*, 24(1), 1-14. https://doi.org/10.2307/2964568

Lemmon, E. J. (1966a). Algebraic Semantics for Modal Logics - I. *Journal of Symbolic Logic*, 31(1), 46-65. https://doi.org/10.2307/2270619

Lemmon, E. J. (1966b). Semantics for Modal Logics - II. *Journal of Symbolic Logic*, 31(2), 191-218. https://doi.org/10.2307/2269810

Lewis, C. I. (1912). Implication and the Algebra of Logic. *Mind*, 21, 522-531.

Lewis, C. I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic*. University of California Press.

Lewis, C. I., Langford, C. H. (1932). *Symbolic Logic*. Dover Publications (2a edición), 1959.

Łukasiewicz, J. (1920). On three-valued logic. En L. Borkowski (Ed.), *Selected works*, 1970, Amsterdam: North-Holland Pub. Co.

Łukasiewicz, J. (1951). *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic*. Clarendon Press.

Łukasiewicz, J. (1953). A system of modal logic. *The Journal of Computing Systems*, 1(3), 111-149.

Łukasiewicz, J. (1961). On Determinism. En L. Borkowski (Ed.), *Selected works*, 1970, North-Holland Pub. Co.

Łukasiewicz, J. (1970). *Selected works*. En L. Borkowski (Ed.), North-Holland Pub. Co.

Maksimova, L. L. (1970). E-Theories. *Algebra and Logic*, 9, 320-325. https://doi.org/10.1007/BF02321895

Maksimova, L. L. (1971). An Interpretation and Separation Theorems for the Logical Systems E and R. *Algebra and Logic*, 10, 232-241. https://doi.org/10.1007/BF02219810

Maksimova, L. L. (1973). A Semantics for the Calculus E of Entailment. *Bulletin of the Section of Logic*, 2, 18-21.

Mares, E. D. (2004). *Relevant Logic: A Philosophical Interpretation*. Cambridge University Press.

McCall, S. (1967). *Polish Logic 1920-1939*. Oxford University Press.

Méndez, J. M. (1991). Introducción a los conceptos fundamentales de la lógica de la relevancia. *Arbor*, 520, 75-93.

Méndez, J. M., Robles, G., (2012). A general characterization of the variable sharing property by means of logical matrices. *Notre Dame Journal of*

Formal Logic, 53(2), 223-244.

Méndez, J. M., Robles, G. (2015). A Strong and Rich 4-Valued Modal Logic Without Łukasiewicz-Type Paradoxes. *Logica Universalis*, 9, 501-522. https://doi.org/10.1007/s11787-015-0130-z

Méndez, J. M., Robles, G. (2016a). Strengthening Brady's Paraconsistent 4-Valued Logic BN4 with Truth-Functional Modal Operators. *Journal of Logic, Language and Information*, 25(2), 163-189. https://doi.org/10.1007/s10849-016-9237-8

Méndez, J. M., Robles, G. (2016b). The logic determined by Smiley's matrix for Anderson and Belnap's First-degree entailment logic. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 26(1), 47-68. https://doi.org/10.1080/11663081.2016.1153930

Méndez, J. M., Robles, G., Salto, F. (2016). An interpretation of Łukasiewicz's 4-valued modal logic. *Journal of Philosophical Logic*, 45 (1), 73-87. https://doi.org/10.1007/s10992-015-9362-x

Meyer, R. K., Giambrone, S. and R. T. Brady. (1984). Where Gamma fails. *Studia Logica*, 43, 247-256.

Meyer, R. K., Mortensen, C. (1984). Inconsistent Models for Relevant Arithmetics. *Journal of Symbolic Logic*, 49, 917-929.

Meyer, R. K., Routley, R. (1973). Classical relevant logics I. *Studia Logica*, 32, 51-66. https://doi.org/10.1007/BF02123812

Minari, P. (2002). A note on Łukasiewicz's three-valued logic. *Annali del Dipartimento di Filosofia*, 8, 163-189. http://dx.doi.org/10.13128/Annali_Dip_Filos-1969

Nelson, E. J. (1930). Intensional relations. *Mind*, 39, 440–453.

Odintsov, S. P., Wansing, H. (2010). Modal logics with Belnapian truth values. *Journal of Applied Non-classical Logics*, 20, 279-301.

Omori, H., Sano, K. (2015). Generalizing Functional Completeness in Belnap-Dunn logic. *Studia Logica*, 103(5), 883-917. https://doi.org/10.1007/s11225-014-9597-5

Omori, H., Wanshing, H. (2017). 40 years of FDE: An Introductory Overview. *Studia Logica*, 105, 1021-1049. https://doi.org/10.1007/s11225-017-9748-6

Omori, H., Wanshing, H. (2019). *New Essays on Belnap-Dunn Logic*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-31136-0

Osorio, M. G. (2007). GLukG logic and its application for non-monotonic reasoning. *Proceedings of the LA-NMR07 Workshop*.

Osorio, M. G., Carballido, J. M. (2008). Brief study of G'3 logic. *Journal of Applied Non-classical Logics*, 18(4), 475-499. https://doi.org/10.3166/jancl.18.475-499

Petrukhin, Y. (2018). Generalized Correspondence Analysis for Three-Valued Logics. *Logica Universalis*, 12, 423-460. https://doi.org/10.1007/s11787-018-0212-9

Petrukhin, Y., Shangin, V. (2017). Automated correspondence analysis for the binary extensions of the logic of paradox. *The Review of Symbolic Logic*, 10(4), 756-781. https://doi.org/10.1017/S1755020317000156

Petrukhin, Y., Shangin, V. (2018). Natural three-valued logics characterized by natural deduction. *Logique et Analyse*, 61 (244), 407-427. http://dx.doi.org/10.2143/LEA.244.0.3285348

Petrukhin, Y., Shangin, V. (2020). Correspondence Analysis and Automated Proof-searching for First Degree Entailment, *European Journal of Mathematics*, 6, 1452-1495. https://doi.org/10.1007/s40879-019-00344-5

Priest, G. (1984). Logic of Paradox Revisited. *Journal of Philosophical Logic*, 13, 153-179.

Priest, G. (2002). Paraconsistent logic. En D. Gabbay y F. Guenthner (Eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 6 (pp. 287-393). Kluwer Academic Publishers.

Priest, G. (2011). Realism, Antirealism, and Paraconsistency. En S. Rahman, G. Primiero, M. Marion (Eds.), *The Realism-Antirealism Debate in the Age of Alternative Logics*. Logic, Epistemology, and the Unity of Science, 23, (pp. 181-190). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1923-1_10

Priest, G. (2014). Contradictory Concepts. En: Weber E., Wouters D., Meheus J. (Eds.) *Logic, Reasoning, and Rationality*. Logic, Argumentation & Reasoning, 5 (pp. 197-215). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9011-6_105

Priest, G. (2016). Thinking the Impossible. *Philosophical Studies*, 173, 2649-2662. https://doi.org/10.1007/s11098-016-0668-5

Pynko, A. P. (2020). Four-valued expansions of Dunn-Belnap's logic (I): Basic characterizations. Bulletin of the Section of Logic, 49(4), 401-437. https://doi.org/10.18778/0138-0680.2020.19

Rasiowa, H. (1974). An Algebraic Approach to Non-classical Logics. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 78, North Holland, Amsterdam.

Restall, G. (1999). Negation in Relevant Logics (How I Stopped Worrying and Learned to Love the Routley Star). *Applied Logic Series: What is negation?*, 13, 53-76.

Robles, G. (2006). *Negaciones subintuicionistas para lógicas con la conversa de la propiedad Ackermann* [Tesis doctoral]. Universidad de Salamanca.

Robles, G. (2013). A Routley-Meyer semantics for Gödel 3-valued logic and its paraconsistent counterpart. *Logica Universalis*, 7, 507-532. https://doi.org/10.1007/s11787-013-0088-7

Robles, G. (en vías de publicación). The class of all 3-valued implicative expansions of Kleene´s strong logic containing Anderson ad Belnap's First degree entailment logic, *Journal of Applied Logics*.

Robles, G., Blanco, J. M., López, S. M., Paradela, J. R., Recio, M. M. (2016a). Relational semantics for the 4-valued relevant logics BN4 and E4. *Logic and Logical Philosophy*, 25(2), 173-201. http://dx.doi.org/10.12775/LLP.2016.006

Robles, G., López, S. M. (2020). Selecting the class of all 3-valued implicative expansions of Kleene's strong logic containing Routley and Meyer's logic B. *Logique et Analyse*, 252, 443-464. https://doi.org/10.2143/LEA.252.0.3289034

Robles, G., López, S., Blanco, J., Recio, M., Paradela, J. (2016b). A 2-set-up Routley-Meyer Semantics for the 4-valued Relevant Logic E4. *Bulletin of the Section of Logic*, 45(2), 93-109. https://doi.org/10.18778/0138-0680.45.2.03

Robles, G., Méndez, J.M. (2013). A paraconsistent 3-valued logic related to Gödel logic G3. *Logic Journal of the IGPL*, 22(4), 515-538. https://doi.org/10.1093/jigpal/jzt046

Robles, G., Méndez, J.M. (2014). A Routley-Meyer semantics for truth-preserving and well-determined Łukasiewicz 3-valued logics. *Logic Journal of the IGPL*, 22(1), 1-23. https://doi.org/10.1093/jigpal/jzt017

Robles, G., Méndez, J. M. (2016). A companion to Brady´s 4-valued relevant logic BN4: The 4-valued logic of entailment E4. *Logic Journal of the IGLP*, 24(5), 838-858. https://doi.org/10.1093/jigpal/jzw011

Robles, G., Méndez, J. M. (2018). *Routley-Meyer ternary relational semantics for intuitionistic-type negations*. Elsevier. https://doi.org/10.1016/C2015-0-01638-0

Robles, G., Méndez, J. M. (2019a). Belnap-Dunn semantics for natural implicative expansions of Kleene's strong three-valued matrix with two designated values. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 29 (1), 37-63. https://doi.org/1 0.1080/11663081.2018.1534487

Robles, G., Méndez, J. M. (2019b). Partiality and its dual in natural implicative expansions of Kleene's strong 3-valued matrix with only one designated value. *Logic Journal of the IGPL*, 27(6). https://doi.org/10.1093/jigpal/jz z021

Robles, G., Méndez, J. M. (2020). The Class of all Natural Implicative Expansions of Kleene's Strong Logic Functionally Equivalent to Łukasiewicz's 3-Valued Logic Ł3. *Journal of Logic, Language and Information*, 29, 249-274. https://doi.org/10.1007/s10849-019-09306-2

Robles, G., Salto, F., Méndez, J. M. (2014). Dual Equivalent Two-valued Under- determined and Over-determined Interpretations for Łukasiewicz's 3-valued Logic Ł3. *Journal of Philosophical Logic*, 43(2), 303-332. https://doi.org/10.1007/s10992-012-9264-0

Robles, G., Salto, F., Méndez, J. M. (2019). Belnap-Dunn semantics for natural implicative expansions of Kleene's strong three-valued matrix II. Only one designated value. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 29(3), 307-325, https://doi.org/10.1080/11663081.2019.1644079

Routley, R. (1984). The American plan completed: Alternative classical-style semantics, without stars, for relevant and paraconsistent logics. *Studia Logica*, 43, 131-158.

Routley, R., Meyer, R. K. (1972a). The semantics of entailment II. *Journal of Philosophical Logic*, 1(1), 53-73.

Routley, R., Meyer, R. K. (1972b). The semantics of entailment III. *Journal of Philosophical Logic*, 1(2), 192-208.

Routley, R., Meyer, R. K. (1973). The semantics of entailment I. H. Leblanc ed., *Truth, Syntax and Modality, Proceedings of the Temple University Conference on Alternative Semantics. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Nord-Holland Publishing Company, 68, 199-243.

Routley, R., Meyer, R. K. (1983). Relevant Logics and their semantics Remain Viable and Undamaged by Lewis's Equivocation Charge. *Topoi*, 2, 205-215. https://doi.org/10.1007/BF00142494

Routley, R., Routley, V. (1972). The semantics of First Degree Entailments. *Noûs*, 6(4), 335-359.

Routley, R., Plumwood, V., Meyer, R. K., Brady, R. T. (1982). *Relevant logics and their rivals I.* Ridgeview Publishing Co.

Sano, K., Omori, H. (2014). An expansion of first-order Belnap–Dunn logic. *Logic Journal of IGPL*, 22(3), 458-481. https://doi.org/10.1093/jigpal/jzt044

Sette, A. M., Carnielli, W. A. (1995) Maximal weakly-intuitionistic logics. *Studia Logica*, 55, 181-203. https://doi.org/10.1007/BF01053037

Shapiro, L., Beall, Jc. (2018). Curry's Paradox. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2018 Edition). https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/curry-paradox/

Slaney, J. K. (1987). Reduced Models for Relevant Logics Without WI. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 28(3), 395-407.

Slaney, J. K. (1995). *MaGIC, Matrix Generator for Implicative Connectives.* Australian National University. http://users.cecs.anu.edu.au/~jks/magic.html

Slaney, J. K. (2005). Relevant Logic and Paraconsistency. En L. Bertossi, A. Hunter, T. Schaub (Eds.), *Inconsistency Tolerance.* Lecture Notes in Computer Science, 3300 (pp. 270-293).

Smiley, T. J. (1961). On Łukasiewicz Ł-Modal System. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 2(3), 149-153. http://doi.org/10.1305/ndjfl/1093956874

Strawson, P. F. (1948). Necessary propositions and entailment-statements. *Mind*, 57, 184-200.

Tomova, N. (2012). A Lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics, *Reports on Mathematical Logic*, 47, 173-182. http://doi.org/10.4467/20842589RM.12.008.0689

Urquhart, A. (1972). Semantics for Relevant Logics. *Journal of Symbolic Logic*, 37, 159-169.

Urquhart, A. (1984). The Undecidability of Entailment and Relevant Implication. *Journal of Symbolic Logic*, 49(4), 1059-1073. https://doi.org/10.2307/2274261

Urquhart, A. (2016). The Story of Gamma. En Bimbó K. (Eds.) *J. Michael Dunn on Information Based Logics*. Outstanding Contributions to Logic, 8, 93-105. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-29300-4_6

Van Benthem, J. (2001). Correspondence Theory. En D. Gabbay, F. Guenthner (Eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 3 (pp. 325-408). Kluwer Academic Publishers.

Wójcicki, R. (1988). Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. *Synthese Library*, 199. Springer.

Zaitsev, D. (2012). *Generalized relevant logic and models of reasoning* [Tesis doctoral]. Moscow State Lomonosov University.

Zorn, M. (1935). A remark on method in transfinite algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 41, 667-670.

Anexo I: Pruebas de teoremas de la lógica B de Routley y Meyer

En lo que sigue, se exponen las pruebas de la lista de reglas derivadas y teoremas demostrables en la lógica B de Routley y Meyer que se han utilizado en la investigación. Como todos los teoremas y las reglas empleadas en las siguientes pruebas son demostrables en B, omitiré el subíndice $\vdash_B$ a lo largo de las mismas. No obstante, la numeración de los axiomas que se emplean en estas pruebas no coincide con la expuesta en la Definición 2.3.1 del sistema B, sino con aquella empleada durante todo el trabajo –esto es, la numeración expuesta en la definición de la lógica b4 (cf. Definición 6.1.1 o Anexo II).

R5 (I∧) $A \to B, A \to C \Rightarrow A \to (B \wedge C)$

1. $A \to B$	Hip.
2. $A \to C$	Hip.
3. $(A \to B) \wedge (A \to C)$	ADJ; 1, 2
4. $\vdash [(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$	A3
5. $A \to (B \wedge C)$	MP; 3, 4

R6 (E∨) $A \to C, B \to C \Rightarrow (A \vee B) \to C$

1. $A \to C$	Hip.
2. $B \to C$	Hip.
3. $(A \to C) \wedge (B \to C)$	ADJ; 1, 2
4. $\vdash [(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$	A5
5. $(A \vee B) \to C$	MP; 3, 4

R7 (MT) $A \to B \,\&\neg B \Rightarrow \neg A$

1. $A \to B$	Hip.
2. $\neg B$	Hip.
3. $\neg B \to \neg A$	CON; 1
4. $\neg A$	MP; 2, 3

R8 (TRANS) $A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C$

1. $A \to B$	Hip.
2. $B \to C$	Hip.
3. $(B \to C) \to (A \to C)$	SUF; 1
4. $A \to C$	MP; 2, 3

R9 (SUM) $A \to B \Rightarrow (A \vee C) \to (B \vee C)$

1. $A \to B$	Hip.
2. $\vdash B \to (B \vee C)$	A4
3. $A \to (B \vee C)$	TRANS; 1, 2
4. $\vdash C \to (B \vee C)$	A4
5. $(A \vee C) \to (B \vee C)$	E$\vee$; 3, 4

R10 (DF) $A \to (B \vee C)$, $(A \wedge C) \to B \Rightarrow A \to B$

1. $A \to (B \vee C)$	Hip.
2. $(A \wedge C) \to B$	Hip.
3. $\vdash [A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$	A6
4. $\vdash A \to A$	A1
5. $A \to [A \wedge (B \vee C)]$	I$\wedge$; 1, 4
6. $A \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$	TRANS; 3, 5
7. $\vdash (A \wedge B) \to B$	A2
8. $[(A \wedge B) \vee (A \wedge C)] \to B$	E$\vee$; 2, 7
9. $A \to B$	TRANS; 6, 8

En las siguientes pruebas, todas las líneas son teoremas (o axiomas) o el resultado de aplicar reglas de B a teoremas. Como no hay posibilidad de confusión, omitiré el símbolo $\vdash$ (y el correspondiente subíndice $\vdash_B$) en las líneas de todas las pruebas que siguen.

T1 $A \leftrightarrow (A \vee A)$

1. $A \to (A \vee A)$	A4
2. $A \to A$	A1
3. $A \to A$	A1
4. $(A \vee A) \to A$	E$\vee$; 2, 3
5. $A \leftrightarrow (A \vee A)$	df$_\leftrightarrow$; 1, 4

T2 $[A \vee (B \vee C)] \leftrightarrow [(A \vee B) \vee C]$

Pruebo T2 de izquierda a derecha. La prueba de T2 de derecha a izquierda es semejante.

1. $A \to (A \vee B)$	A4
2. $(A \vee B) \to [(A \vee B) \vee C]$	A4
3. $A \to [(A \vee B) \vee C]$	TRANS; 1, 2
4. $B \to (A \vee B)$	A4
5. $B \to [(A \vee B) \vee C]$	TRANS; 2, 4
6. $C \to [(A \vee B) \vee C]$	A4

7. $(B \vee C) \to [(A \vee B) \vee C]$ E$\vee$; 5, 6
8. $[A \vee (B \vee C)] \to [(A \vee B) \vee C]$ E$\vee$; 3, 7

T3 $[A \vee (B \wedge C)] \leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$

De izquierda a derecha.

1. $A \to (A \vee B)$	A4
2. $A \to (A \vee C)$	A4
3. $A \to [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$	I$\wedge$; 1, 2
4. $B \to (A \vee B)$	A4
5. $(B \wedge C) \to B$	A2
6. $(B \wedge C) \to (A \vee B)$	TRANS; 4, 5
7. $C \to (A \vee C)$	A4
8. $(B \wedge C) \to C$	A2
9. $(B \wedge C) \to (A \vee C)$	TRANS; 7, 8
10. $(B \wedge C) \to [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$	I$\wedge$; 6, 9
11. $[A \vee (B \wedge C)] \to [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$	E$\vee$; 3, 10

Para probar la otra dirección, utilizaré el teorema (t) $[(A \vee B) \wedge C] \to [A \vee (B \wedge C)]$. Pruebo, entonces, en primer lugar este teorema. Del mismo modo, para probar este último, utilizaré (t') $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$, la propiedad conmutativa de la conjunción, que se obtiene de modo trivial aplicando la regla I$\wedge$ a A2.

1. $[C \wedge (A \vee B)] \to [(C \wedge A) \vee (C \wedge B)]$	A6
2. $[(A \vee B) \wedge C] \to [C \wedge (A \vee B)]$	t'
3. $[(A \vee B) \wedge C] \to [(C \wedge A) \vee (C \wedge B)]$	TRANS; 1, 2
4. $(C \wedge A) \to A$	A2
5. $A \to [A \vee (B \vee C)]$	A4
6. $(C \wedge A) \to [A \vee (B \vee C)]$	TRANS; 4, 5
7. $(C \wedge B) \to (B \wedge C)$	t'
8. $(B \wedge C) \to [A \vee (B \wedge C)]$	A4
9. $(C \wedge B) \to [A \vee (B \wedge C)]$	TRANS; 7, 8
10. $[(C \wedge A) \vee (C \wedge B)] \to [A \vee (B \wedge C)]$	E$\vee$; 6, 9
11. t	TRANS; 3, 10

Pruebo ahora T3 de derecha a izquierda.

1. $[(A \vee B) \wedge (A \vee C)] \to \{[(A \vee B) \wedge A] \vee [(A \vee B) \wedge C]\}$	A6
2. $[(A \vee B) \wedge A] \to A$	A2
3. $A \to [A \vee (B \wedge C)]$	A4
4. $[(A \vee B) \wedge A] \to [A \vee (B \wedge C)]$	TRAN; 2, 3
5. $[(A \vee B) \wedge C] \to [A \vee (B \wedge C)]$	t
6. $\{[(A \vee B) \wedge A] \vee [(A \vee B) \wedge C]\} \to [A \vee (B \wedge C)]$	E$\vee$; 4, 5
7. $[(A \vee B) \wedge (A \vee C)] \to [A \vee (B \wedge C)]$	TRAN; 1, 6

T4 $[(A \vee B) \wedge (C \wedge D)] \to [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$

1.	$[(C \wedge D) \wedge (A \vee B)] \to .[(C \wedge D) \wedge A] \vee [(C \wedge D) \wedge B]$	A6
2.	$(C \wedge D) \to C$	A2
3.	$[(C \wedge D) \wedge A] \to A$	A2
4.	$[(C \wedge D) \wedge A] \to (C \wedge D)$	A2
5.	$[(C \wedge D) \wedge A] \to C$	TRANS; 2, 4
6.	$[(C \wedge D) \wedge A] \to (A \wedge C)$	I$\wedge$; 3, 5
7.	$(A \wedge C) \to [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$	A4
8.	$[(C \wedge D) \wedge A] \to [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$	TRANS; 6, 7
9.	$[(C \wedge D) \wedge B] \to B$	A2
10.	$[(C \wedge D) \wedge B] \to (C \wedge D)$	A2
11.	$(C \wedge D) \to D$	A2
12.	$[(C \wedge D) \wedge B] \to D$	TRANS; 10, 11
13.	$[(C \wedge D) \wedge B] \to (B \wedge D)$	I$\wedge$; 9, 12
14.	$(B \wedge D) \to [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$	A4
15.	$[(C \wedge D) \wedge B] \to [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$	TRANS; 13, 14
16.	$[(C \wedge D) \wedge A] \vee [(C \wedge D) \wedge B] \to .[(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$	E$\vee$; 8, 15
17.	$[(C \wedge D) \wedge (A \vee B)] \to [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$	TRANS; 1, 16
18.	$[(A \vee B) \wedge (C \wedge D)] \to [(C \wedge D) \wedge (A \vee B)]$	t’
19.	T4	TRANS; 17, 18

T5 $(A \to B) \to [A \to (B \vee C)]$

1.	$B \to (B \vee C)$	A4
2.	$(A \to B) \to [A \to (B \vee C)]$	PREF; 1

T6 $(A \to B) \to [(A \wedge C) \to (B \vee D)]$

1.	$[(A \wedge C) \to B] \to [(A \wedge C) \to (B \vee D)]$	T5
2.	$(A \wedge C) \to A$	A2
3.	$(A \to B) \to [(A \wedge C) \to B]$	SUF; 2
4.	$(A \to B) \to [(A \wedge C) \to (B \vee D)]$	TRANS; 1, 3

T7 $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to [(A \wedge B) \to (C \wedge D)]$

1.	$[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to (A \to C)$	A2
2.	$(A \wedge B) \to A$	A2
3.	$(A \to C) \to [(A \wedge B) \to C]$	SUF; 2
4.	$[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to [(A \wedge B) \to C]$	TRANS; 1, 3
5.	$[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to (B \to D)$	A2
6.	$(A \wedge B) \to B$	A2
7.	$(B \to D) \to [(A \wedge B) \to D]$	SUF; 6

8. $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to [(A \wedge B) \to D]$ TRANS; 5, 7
9. $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to$ **.** I$\wedge$; 4, 8
   $[(A \wedge B) \to C] \wedge [(A \wedge B) \to D]$
10. $[(A \wedge B) \to C] \wedge [(A \wedge B) \to D] \to$ **.** A3
    $[(A \wedge B) \to (C \wedge D)]$
11. T7 TRANS; 9, 10

T8 $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to [(A \vee B) \to (C \vee D)]$

1. $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to (A \to C)$ A2
2. $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to (B \to D)$ A2
3. $(A \to C) \to [A \to (C \vee D)]$ T5
4. $(B \to D) \to [B \to (C \vee D)]$ T5
5. $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to [A \to (C \vee D)]$ TRANS; 1, 3
6. $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to [B \to (C \vee D)]$ TRANS; 2, 4
7. $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to$ **.** I$\wedge$; 5, 6
   $[A \to (C \vee D)] \wedge [B \to (C \vee D)]$
8. $[A \to (C \vee D)] \wedge [B \to (C \vee D)] \to$ **.** A5
   $[(A \vee B) \to (C \vee D)]$
9. T8 TRANS; 7, 8

T9 $[(A \to C) \vee (B \to D)] \to [(A \wedge B) \to (C \vee D)]$

1. $(A \to C) \to [(A \wedge B) \to (C \vee D)]$ T6
2. $(B \to D) \to [(A \wedge B) \to (C \vee D)]$ T6
3. T9 E$\vee$; 1, 2

T10 $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

De izquierda a derecha.

1. $\neg A \to (\neg A \vee \neg B)$ A4
2. $\neg B \to (\neg A \vee \neg B)$ A4
3. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to \neg\neg A$ CON; 1
4. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to \neg\neg B$ CON; 2
5. $\neg\neg A \to A$ A7
6. $\neg\neg B \to B$ A7
7. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to A$ TRANS; 3, 5
8. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to B$ TRANS; 4, 6
9. $\neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$ I$\wedge$; 7, 8
10. $\neg(A \wedge B) \to \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ CON; 9
11. $\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \to (\neg A \vee \neg B)$ A7
12. $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ TRANS; 10, 11

De derecha a izquierda.

1. $(A \wedge B) \rightarrow A$	A2
2. $\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$	CON; 1
3. $(A \wedge B) \rightarrow B$	A2
4. $\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$	CON; 3
5. $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$	E$\vee$; 2, 4

T11 $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

De derecha a izquierda.

1. $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$	A2
2. $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg B$	A2
3. $\neg\neg A \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	CON; 1
4. $\neg\neg B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	CON; 2
5. $A \rightarrow \neg\neg A$	A8
6. $B \rightarrow \neg\neg B$	A8
7. $A \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	TRANS; 3, 5
8. $B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	TRANS; 4, 6
9. $(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	E$\vee$; 7, 8
10. $\neg\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$	CON; 9
11. $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg\neg(\neg A \wedge \neg B)$	A8
12. $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$	TRANS; 10, 11

De izquierda a derecha.

1. $A \rightarrow (A \vee B)$	A4
2. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$	CON; 1
3. $B \rightarrow (A \vee B)$	A4
4. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg B$	CON; 3
5. $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	I$\wedge$; 2, 4

Anexo II: Lista de axiomas, teoremas y reglas

En este segundo anexo, incluyo la lista general de axiomas, teoremas y reglas (tanto primitivas como derivadas) que se han utilizado en diferentes pruebas a lo largo de esta investigación. En resumen, los axiomas A1-A12 (y A12') son los que forman la lógica básica b4, contenida en todas las extensiones (y expansiones) propuestas –a su vez, A1-A8 axiomatizan la lógica B de Routley y Meyer. Los axiomas A13-A29 son aquellos característicos de alguna (o varias) de las lógicas-Lti ($1 \leq i \leq 8$), formadas como extensiones de b4. Por último, A30-A34 están presentes en alguna de las expansiones modales de las lógicas-Lti. En lo que refiere a las reglas, todas ellas forman parte de la lógica b4 (y, por tanto, también de todas las lógicas-Lti) a excepción de NEC y NECd, que están presentes en el segundo tipo de expansiones modales. Por último, T1-T11 son teoremas de la lógica B de Routley y Meyer y, junto a T12-T13, constituyen los teoremas de b4 utilizados a lo largo de este estudio; mientras que T14 y T15, son teoremas de algunas de las expansiones modales de las lógicas-Lti.

AXIOMAS

A1 $A \to A$

A2 $(A \wedge B) \to A \ / \ (A \wedge B) \to B$

A3 $[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$

A4 $A \to (A \vee B) \ / \ B \to (A \vee B)$

A5 $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$

A6 $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

A7 $\neg\neg A \to A$

A8 $A \to \neg\neg A$

A9 $\neg A \to [A \vee (A \to B)]$

A10 $B \to [\neg B \vee (A \to B)]$

A11 $(A \vee \neg B) \vee (A \to B)$

A12 $(A \to B) \vee [(\neg A \wedge B) \to (A \to B)]$

A12' $A \to .B \to \{[(A \vee B) \vee \neg(A \vee B)] \vee (A \to B)\}$

A13 $(A \wedge \neg B) \to [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$

A14 $A \vee [\neg(A \to B) \to A]$

A15 $\neg B \vee [\neg(A \to B) \to \neg B]$

A16 $[(A \to B) \wedge A] \to B$

A17 $[(A \to B) \wedge \neg B] \to \neg A$

A18 $A \to [B \vee \neg(A \to B)]$

A19 $\neg B \to [\neg A \vee \neg(A \to B)]$

A20 $[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to A$

A21 $\neg(A \to B) \to (A \vee \neg B)$

A22 $[\neg(A \to B) \wedge B] \to \neg B$

A23 $B \to \{[B \wedge \neg(A \to B)] \to A\}$

A24 $(A \to B) \vee \neg(A \to B)$

A25 $(\neg A \vee B) \vee \neg(A \to B)$

A26 $[(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)] \to \neg(A \to B)$
A27 $\neg(A \to B) \vee [(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)]$
A28 $\{[\neg(A \to B) \wedge \neg A] \to \neg B\} \vee \neg B$
A29 $\{[\neg(A \to B) \wedge B] \to A\} \vee A$
A30 $LA \to A$
A31 $A \to (\neg A \vee LA)$
A32 $(LA \wedge \neg LA) \to B$
A33 $A \vee \neg LA$
A34 $(LA \wedge \neg LA) \to \neg A$

REGLAS PRIMITIVAS
ADJ $A,\ B \Rightarrow A \wedge B$
MP $A,\ A \to B \Rightarrow B$
MPd $C \vee A,\ C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee B$
PREFd $D \vee (A \to B) \Rightarrow D \vee [(C \to A) \to (C \to B)]$
SUFd $D \vee (A \to B) \Rightarrow D \vee [(B \to C) \to (A \to C)]$
CONd $C \vee (A \to B) \Rightarrow C \vee (\neg B \to \neg A)$
CTEd $C \vee (A \wedge \neg B) \Rightarrow C \vee \neg(A \to B)$
NECd $B \vee A \Rightarrow B \vee LA$

REGLAS DERIVADAS
R1 (PREF) $A \to B \Rightarrow (C \to A) \to (C \to B)$
R2 (SUF) $A \to B \Rightarrow (B \to C) \to (A \to C)$
R3 (CON) $A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$
R4 (CTE) $A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \to B)$
R5 (I$\wedge$) $A \to B,\ A \to C \Rightarrow A \to (B \wedge C)$
R6 (E$\vee$) $A \to C,\ B \to C \Rightarrow (A \vee B) \to C$
R7 (MT) $A \to B,\ \neg B \Rightarrow \neg A$
R8 (TRANS) $A \to B,\ B \to C \Rightarrow A \to C$
R9 (SUM) $A \to B \Rightarrow (C \vee A) \to (C \vee B)$
R10 (DF) $A \to (B \vee C),\ (A \wedge C) \to B \Rightarrow A \to B$
R11 (NEC) $A \Rightarrow LA$

TEOREMAS
T1 $A \leftrightarrow (A \vee A)$
T2 $[A \vee (B \vee C)] \leftrightarrow [(A \vee B) \vee C]$
T3 $[(A \vee (B \wedge C)] \leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$
T4 $[(A \vee B) \wedge (C \wedge D)] \to [(A \wedge C) \vee (B \wedge D)]$
T5 $(A \to B) \to [A \to (B \vee C)]$
T6 $(A \to B) \to [(A \wedge C) \to (B \vee D)]$
T7 $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to [(A \wedge B) \to (C \wedge D)]$
T8 $[(A \to C) \wedge (B \to D)] \to [(A \vee B) \to (C \vee D)]$
T9 $[(A \to C) \vee (B \to D)] \to [(A \wedge B) \to (C \vee D)]$
T10 $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
T11 $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
T12 $A \to [\neg A \vee (\neg A \to B)]$

T13 $\neg A \to \{B \vee [(A \wedge B) \to C]\}$
T14 $\neg A \to \neg LA$
T15 $LA \vee \neg LA$

Anexo III: Índice ampliado

Anexo IV: Conclusion. Main results of the work

As it was first stated in the Introduction of the present work and as its own name indicates, the purpose of this dissertation is the study of the implicative variants of Brady's 4-valued matrix (i.e., MBN4 or, as it was generally referred to throughout this research, Mt1) which verify Routley and Meyer's logic B. The relevance –in the regular sense of the term– of the logic BN4 regarding not only philosophy or logic but also computer science as well as its importance among many-valued logics and logics of the relevance family were already specified in the Introduction. Furthermore, the discussion which initially motivated this research can be found in the recent literature (Robles and Méndez, 2016). In particular, Robles and Méndez developed what can be considered the 4-valued logic of (relevant) entailment E4 –named Lt5 throughout this work– in the aforementioned article as a companion to the system BN4, which in its turn could be considered as the 4-valued logic of relevant conditional. In addition, they maintained that there are only six 4-valued matrices such that verify Routley and Meyer's logic B while being implicative variants of MBN4 and ME4. Then, Robles and Méndez suggested that a research involving the logics determined by these matrices –which as a matter of fact are the logics presented in this study, i.e., the Lti-logics– will be of great interest. In this dissertation, a very detailed study of the logics characterized by the referred matrices has been carried out.

First of all, we axiomatized the Lti-logics ($1 \leq i \leq 8$) taking the basic system b4 as a common axiomatic base. In the following sections of the dissertation, we endowed the Lti-logics with different types of semantics: (1) a bivalent Belnap-Dunn type semantics; (2) a ternary relational Routley-Meyer semantics with reduced models; (3) a 2 set-up Routley-Meyer relational semantics. Moreover, two kinds of modal expansions were developed for the Lti-logics in Part 5: the first one was based on Font and Rius's truth-tables for L and M –initially suggested by A. Monteiro– and developed according to Łukasiewicz modal notions (Font and Rius, 2000); the second one was based on Tarskian definitions for those modal operators. Last but not least, we studied the main characteristics of the Lti-logics from different perspectives –e.g., semantical and proof-theoretical– in Part 6. The last section of this dissertation is also supposed to be understood as a display of the technical necessary tools for any competent reader to be able to compare and evaluate the Lti-logics. By doing so, we accomplished the second aim of this research: establish a discussion regarding possible comparisons among the eight logics and determine whether any of these new systems can advantageously substitute the properties of E4, or even BN4. Firstly, I want to note that possible answers to this question will depend on the approach we take. For this reason, the properties of these logics were studied from different approaches.

To begin with, the differences regarding the disjunctive rules needed to prove completeness for the Lti-logics according to the methodology developed in (Brady, 1982) were explained (cf. Section 19). The last can be seen as a proof-theoretical approach to the distinctive features of each Lti-logic and as comparison criteria can be presented along with the list of valid and non-valid formulae in each Lti-logic (cf. Subsections 20.5 and 20.7). As a matter of fact, according to the information given in that list, we stated that among the Lti-logics we can easily find some couples of closely related systems. In particular, Lt1 and Lt8 can be intuitively understood as 4-valued extensions of contractionless relevant logic R; likewise, Lt4 and Lt6 can also be understood as extensions of the system R without the contraposition axiom. On their part, Lt2 and Lt5 can be seen as 4-valued extensions of reductioless logic of entailment E. Lastly, even though Lt3 and Lt7 are the weakest among the systems we are considering[146] –and although they require more disjunctive rules than their companions (cf. Section 19)–, they have some other properties of interest; for instance, both validate the transitivity axiom.

In relation to the previous idea, we find an essential distinctive feature of the Lti-logics in Remark 20.1.2 (which is, on its turn, closely related to Propositions 20.1.6 and 20.1.7). In particular, that Remark can also be useful to determine whether any of the studied logics can be understood as a possible 4-valued version of either the logic R of relevant conditional or the logic E of entailment. It is worth underlying that results obtained upon both Remark 20.1.2 and the entire Subsection 20.5 are clearly connected and, as a whole, lead us to the conclusion that the systems mainly related to the logic R are Lt1, Lt4, Lt6 and Lt8; likewise, those systems more closely related to the logic E are Lt2, Lt3, Lt5 and Lt7. Therefore, if we want to find an alternative to BN4 (i.e., Lt1) among the rest of the Lti-logics, we should probably look for it among the systems related to R. Similarly, if our aim is to find an alternative to E4 (i.e., Lt5), we should search for it among systems Lt2, Lt3 and Lt7 since the conditional of these systems can be understood as *entailment* given that they (completely or partially) enclosed a theory of logical necessity in the sense referred to by Anderson and Belnap (cf. Remark 20.1.2). These results are also interesting in the following sense: one could initially try to look for alternatives to the logic BN4 (i.e., Lt1) among the implicative variants of MBN4 (i.e., Mt2-Mt4) and likewise, look for alternatives to E4 (i.e., Lt5) among Lt6-Lt8, this is, the systems characterized by the implicative variants of ME4. However, given the aforementioned results, the search for alternatives for BN4 and E4, respectively, should not be grounded on the matrix similarities but on properties such as the ones mentioned above. It is worth emphasizing that such properties only can be truly analysed by developing an axiomatization (and a semantics) for each Lti-logic; in other words, an extensive study of these logics such as the one displayed in this dissertation is needed in order to truly recognize the specific properties of each Lti-logic ($1 \leq i \leq 8$).

[146]The fact that they are the weakest systems among the Lti-logics does not mean that they are not worthy of attention. Thus, they can have other interesting properties. For example, Brady (1996, 2006) developed and defended the interest of weak systems in the family of relevance logics; he also studied the set theory built upon these kinds of logics (Brady, 1980, 1983).

Regarding the semantic approach, every Lti-logic ($1 \leq i \leq 8$) has been endowed with three different types of semantics that allow us to compare these systems with a wide range of relevance logics –which even though are not determined by matrices, they do have relational semantics (as it is the case of the logics R and E[147])– and many other interesting 3-valued and 4-valued logics which do not belong to said family. It goes without saying that since the Lti-logics are determined by matrices, they are of course decidable logics. Furthermore, in relation to the matrices (Mti), it has been proved that the Lti-logics have what Tomova named "natural conditionals" (see Subsection 20.4).

Each one of the Lti-logics ($1 \leq i \leq 8$) has certain properties of interest from a non-classical perspective. In relation to a semantic view, they enjoy the Quasi-relevance Property (QRP), as shown in Proposition 20.1.2. In addition to this, although the Lti-logics do not have the VSP[148], they do have some related properties such as the RVSPI and RVSPII, as proved in Propositions 20.1.3 and 20.1.4. Note that these interesting properties are not even characteristic of relevance logics such as RM3, as shown in Remark 20.1.1. Consequently, the fact that the Lti-logics do have the RVSPI and RVSPII, in addition to the QRP, is enough to consider these systems as part of the family of relevance logics.

Additionally, it has been proved that the Lti-logics ($1 \leq i \leq 8$) are paraconsistent and paracomplete in the sense of Definitions 20.2.1 and 20.2.2, respectively. These two properties, together with the fact that every Lti-logic considered here is an expansion of Belnap's 4-valued matrix (MB4), situate them in an interesting place among many-valued, paraconsistent and bilattice logics.

It is worth underlying that many of the properties which make BN4 an appealing system from a philosophical point of view are also properties belonging to the rest of the considered Lti-logics. In particular, Meyer *et al.* (1984) stated: "Our view is that BN4 is the correct logic for the 4-valued situation, where the extra values are to be interpreted in the both and neither senses" (p. 253). Regarding their reasons to make such a statement, we note the following.

1. The disjunctive syllogism is not a valid rule in BN4[149].

2. BN4 has a fascinating model that invalidate classic principles such as $(A \wedge \neg A) \to B$ or $A \to (B \vee \neg B)$[150], which are considered as paradigmatic fallacies of relevance (Anderson and Belnap, 1975, p. 163).

[147] Regarding the undecidability of these systems, the interested reader is advised to see (Urquhart, 1984) and (Anderson, Belnap and Dunn, 1992).

[148] The fact that a system does not have the VSP is not enough reason to exclude it from the family of relevance logics. In fact, there are appealing logics in the aforesaid family which do not enjoy that property; a good example is the well-known logic R-Mingle (Anderson and Belnap, 1975). Regarding the importance of R-Mingle and its place in the family of relevance logics, see (Avron, 2016).

[149] The fact that the DS is not a valid rule in BN4 and the importance bestowed to this fact are strictly related to the relevantist concern of avoiding the rule ECQ. As a matter of fact, every Lti-logic avoids ECQ since they are paraconsistent logics, as it was already proved (cf. Proposition 20.2.1).

[150] It is worth underlying here that the basic structure of the referred model is actually Belnap's 4-valued matrix, which characterizes the logic FDE (Meyer *et al.*, 1984, p. 251).

3. MBN4 is divisible in a pair of 3-valued matrices of great interest which are more "self-evident" than most. In Meyer *et al.*'s (1984) words: "Amazingly, BN4 is what one gets when one puts Ł3 and RM3 together in the most straightforward possible way" (p. 253); "[...] Ł3 does seem more self-evident than most. As for RM3, it is the only 3-valued logic which validates the principles of relevant implication" (note 1).

4. In BN4, we find an asymmetry in the way that both non-classical values are handled, B(oth) and N(either), which is interpreted by them as the result of combining two 3-valued matrices that treat these two values in a different way. In particular, B is designated and N is non-designated.

5. Even though BN4 has all the properties just described, there is no semantic instability of any sort in this logic and it does not lack expressiveness.

In relation to the properties detailed above, every studied Lti-logic shares with BN4 numbers 1, 2, 4 and 5. However, we can find differences among these logics regarding number 3. In particular, as it was already noted, not every Lti-logic is determined by a divisible matrix but only the variants of BN4 (i.e., Lt2-Lt4).

In conclusion, six new 4-valued logics have been studied in depth. Because of their properties, these systems can be considered interesting non-classical logics and possible companions to the systems BN4 and E4 previously developed in the literature. All the Lti-logics have been axiomatized through a common base (the system b4) in order to extend each one of them by means of the corresponding axioms. The logics have been axiomatized by developing a bivalent Belnap-Dunn type semantics and, furthermore, they have been endowed with different types of relational Routley-Meyer semantics and a couple of modal expansions have been provided for each of them. Thus, this research can be understood as a detailed technical study of the Lti-logics which will allow any interested reader to establish direct comparisons among these systems on the basis of the results here presented.

This model (MB4) also works as an initial base to both the matrices determining the Lti-logics (i.e., the studied matrices Mti are implicative expansions of MB4 developed by means of slight variations of MBN4) and the axiomatic systems defining them (i.e., the Lti-logics are axiomatized as extensions of the system B, which on its turn includes FDE). In fact, none of the Lti-logics validate the referred principles.