VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Programa de Doctorado en Física y Matemáticas

Móduli de Fibrados Principales y Teoría Algebraica de Solitones

Tesis doctoral

Jesús Martín Ovejero

Directores:
Dr. Francisco José Plaza Martín
Dr. Ángel Luis Muñoz Castañeda

Mediante este documento, nosotros, D. Francisco José Plaza Martín con D.N.I. 11955505J, y D. Ángel Luis Muñoz Castañeda con D.N.I. 70885804B certificamos que la presente tesis doctoral titulada Espacio de móduli de fibrados principales y teoría algebraica de solitones ha sido realizada por D. Jesús Martín Ovejero con D.N.I. 45137269E bajo nuestra supervisión y autorizamos su presentación.

D. Francisco José Plaza Martín D. Ángel Luis Muñoz Castañeda

Índice general

Agradecimientos

Quisiera aprovechar estas líneas para plasmar mi agradecimiento a las personas que han hecho posible este trabajo, siendo este agradecimiento en tinta una sombra de mi verdadero sentimiento. En primer lugar quisiera mostrar mi más sincero respeto, admiración y gratitud a mis directores de tesis. Al Dr. Francisco José Plaza Martín, por su paciencia y sus enseñanzas durante todos estos años. Por darme la oportunidad de investigar bajo su dirección y por hacerme ser mejor matemático, mejor profesional y mejor persona. En la vida, solo unos pocos tienen la suerte de encontrar a un verdadero maestro y me considero afortunado por estar en ese grupo. Al Dr. Ángel Luis Muñoz Castañeda por su inestimable ayuda en el desarrollo de esta tesis, por su paciencia y gentileza a la hora de enseñarme, por su cercanía, y por su energía inagotable, gracias. Quisiera aprovechar esta ocasión para agradecer a todos los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Salamanca por su compromiso con la educación matemática de sus estudiantes.

En cualquier guerra, un compañero de trincheras es necesario para mantener la moral en los momentos de crisis. Yo he tenido la suerte de contar como aliado, a mi compañero y amigo Javier Sánchez González. Nos hicimos fuertes en el zulo y sentimos el *despertar* mediante el sol y el acero. Gracias Javi por todos estos años. Está todo dicho.

No puedo olvidar aquí a mis otros compañeros y amigos del doctorado Alicia Pérez González y Juan Francisco Torres Sancho, que hicieron de nuestro primer despacho un sitio ameno y distendido donde trabajar.

Agradezco a mis amigos de fuera del mundo matemático por el estoicismo mostrado al aguantar las insoportables peroratas que les he proporcionado a lo largo de los años. En especial a mi hermano Alberto, y a mis otros dos hermanos elegidos conscientemente, Alicia Murciano Hueso y Juan García-Loygorri Ferrero.

A mis amigos de Plasencia: Alex, Ángel, Basi, Bazaga, Bolson, Edu, Ester, Gema, Iniesta, Jose, Julio, Loulo, Noel, Pablo, Pascu y Yolanda. A mis amigos de Salamanca: Alfonso, Alicia, Jhonatan, Juan, Julio, Loreto, Lucio, Omar y Quique. Gracias a cada uno de vosotros por hacer, a vuestra manera, esta tesis más sencilla.

A mi profesor de la educación pre-universitaria, D. José Miguel Acosta Coleto, por ser el primero que despertó mí la pasión por las matemáticas, y el que me hizo entender hace diez años que en la vida como en las matemáticas importan más los procedimientos que las fórmulas.

Por último, quisiera agradecer a mis padres, Dña. Rocío Ovejero Mendo y D. Jesús Damián Martín Hermoso por todo. Por el regalo de la vida, por su cariño incondicional y por los valores que me han inculcado, de los cuales me siento tremendamente orgulloso. Sin vuestro ejemplo de disciplina, constancia, honradez y trabajo duro no sería quién soy. Gracias.

Introducción

En el ámbito de estudio de la matemática, los problemas de clasificación adquieren una relevancia especial, pues es a través de la resolución de los mismos cuando se es posible llegar a un entendimiento profundo de los objetos considerados. En la presente tesis doctoral, los objetos a clasificar serán fibrados principales sobre una curva algebraica, lisa y proyectiva. La ubicuidad de los fibrados principales no solo en cuestiones matemáticas, si no también físicas, colocan a este tipo de objetos en un lugar privilegiado. En esta memoria se aborda el problema de clasificación, o mejor dicho, problema de móduli, desde un punto de vista algebro-geométrico, esto es, mediante el estudio de la representabilidad de un funtor de la categoría de esquemas en la categoría de conjuntos. La distinción esencial entre problema de clasificación y problema de móduli es que mientra que el primero aborda una caracterización conjuntística de las clases de equivalencia de los objetos considerados, el segundo se centra en la construcción de un espacio donde cada punto se identifica con una clase de equivalencia de los objetos de interés.

El punto de partida del desarrollo histórico de los problemas de clasificación de fibrados sobre curvas algebraicas se encuentra a finales de la década de 1950, en los artículos de A. Grothendieck [Gro57] y M. F. Atiyah [Ati57], centrados en la caracterización de los fibrados vectoriales sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ y sobre las curvas elípticas respectivamente. No obstante, no es hasta 1963, que Mumford en [Mum63] introduce la noción de fibrado vectorial estable y dota al conjunto de clase de isomorfismos de fibrados vectoriales estables sobre una curva alebraica lisa y proyectiva de genero $g \geqq 2$ de estructura de variedad algebraica quasi-proyectiva. Dos años más tarde, se publica el libro *Geometric Invariant Theory* [MF82], en el cual, desde el punto de vista de la teoría de esquemas, se proponen técnicas para abordar la construcción de espacios de móduli introduciendo la noción de *estabilidad*. En 1967, C. S. Seshadri [Ses67] construye una compactificación natural del espacio de móduli descrito por Mumford, caracterizando los puntos de la frontera como fibrados semiestables. El problema de móduli, sustituyendo la curva por una superficie es abordado por D. Giesecker [Gie77], mientras que el caso de una variedad proyectiva lisa n-dimensional es estudiado por M. Maruyama [Mar77a, Mar77b], y C. Simpson [Sim94].

El lector puede preguntarse por qué, a la hora de abordar un problema de móduli, los anterior autores restringen su estudio a los objetos estables y semiestables. La respuesta, de forma poco precisa, es que debido a la existencia de automorfismos no triviales de los objetos considerados, el funtor de móduli asociado al problema no es representable. Debido a esto, surgen tres opciones distintas.

- Restringir el estudio a los objetos estables y semiestables, y utilizar la Teoría Geométrica de Invariantes.
- Añadir un dato extra, conocido como dato de rigidificación, de tal manera que los nuevos objetos no tengan automorfismos no triviales.
- Utilizar la teoría de stacks.

Es bien conocido que dado un esquema X, se tiene una equivalencia categorial entre el grupoide de fibrados vectoriales de rango n sobre X y el grupoide de $\mathrm{Gl}(n)$-fibrados principales sobre X, por lo que los problemas de clasificación de $\mathrm{Gl}(n)$-fibrados principales sobre X se traducen esencialmente a los problemas de clasificación de fibrados vectoriales de rango n sobre X. Ahora, de modo general, dado un subgrupo G de $\mathrm{Gl}(n)$, uno puede preguntarse si un G-fibrado principal sobre X tiene una interpretación análoga a la dada anteriormente, es decir, si existe una descripción en términos de fibrados vectoriales con datos extras de los G-fibrados principales sobre X.

En el artículo seminal de 1955 de J. P. Serre [Ser55], se da un primer paso en esa dirección. En dicho artículo se prueba que dado un grupo lineal G y un subgrupo cerrado de este $H \subset G$, se tiene una asignación biyectiva entre el conjunto de H-fibrados principales y el conjunto de G-fibrados principales dotados de un cierto morfismo llamado H-reducción. En su tesis doctoral, A. Ramanathan construye el espacio de móduli de G-fibrados semiestables sobre una curva algebraica lisa [Ram96a, Ram96b]. Posteriormente, en 2002, A.H.W Schmitt [Sch02] prueba que considerando un grupo lineal semisimple G dotado de una representación fiel $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(n)$, dar un G-fibrado principal equivale a dar un fibrado vectorial de rango n y determinante trivial, y cierto morfismo de álgebras. En dicho artículo, el autor construye un espacio de móduli compacto para los fibrados principales δ-semiestables sobre variedades algebraicas proyectivas lisas finito dimensionales, siendo dicho espacio de móduli independiente de la representación. De hecho, cuando el autor restringe el estudio al caso de curvas, se recupera el espacio de móduli de Ramanathan anteriormente citado. En la construcción de A. H. W. de Schmitt aparecen de modo natural los denominados campos tensoriales introducidos por T. L. Gómez e I. Sols en [GS01]. Además, T.L Gómez e I. Sols introducen en [GS02] la noción de haces G-principales, generalizando la definición de Ramanathan de G-fibrado principal semiestable a dimensiones superiores y construyendo un espacio de móduli proyectivo para estos objetos. Conviene resaltar aquí, que T. L. Gómez, A. Langer, A. H. W. Schmitt, e I. Sols construyen en [GLSS08] un espacio de móduli para fibrados principales sobre variedades proyectivas definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica positiva.

Aunque el problema de móduli de G-fibrados principales tiene importancia per se, es conveniente destacar algunas de sus aplicaciones más conocidas. Desde el punto de vista físico, en los artículos [FMW98, FM00, FM18] se relaciona la construcción del espacio de móduli de G-fibrados principales sobre curvas elípticas con la dualidad existente entre la teoría de cuerdas heteróticas y la teoría F. Por otro lado, desde un punto de vista más matemático, la construcción de bloques conformes [Bea18], así como la definición de los invariantes de Gromov-Witten en variedades cociente [CFBD14], justifican la necesidad de estudiar el espacio de móduli de fibrados principales. Es más, el stack de fibrados principales aparece como el ingrediente esencial en la formulación de la conjetura de Langlands Geométrica [Lau87, Fre07].

El punto de inicio de la presente tesis doctoral es abordar el problema de móduli de fibrados principales sobre curvas algebraicas desde un punto de vista distinto al dado por los autores anteriormente mencionados. Rigidificaremos el problema de clasificación añadiendo a los fibrados principales un dato extra que se denominará trivialización formal, y además, no se impondrá ninguna condición en la categoría de k-esquemas, es decir, no se asumirán las hipótesis de noetherianidad, quasi-compacidad y quasi-separabilidad. La motivación detrás de la anterior decisión se fundamenta en la existencia de un esquema infinito dimensional conocido como Grassmanniana infinita [ÁV96, PM98b], que aparece, de modo natural en el estudio de ciertos problemas geométricos como puede consultarse en los artículos y trabajos de A. Álvarez Vázquez, E. Gómez González, D. Hernández Serrano, J. M. Muñoz Porras, y F.J. Plaza Martín [ÁVMPPM96, PM98a, PM98b, HS08, GGHSMPPM12].

Para dar unas pinceladas de la relación de la Grassmanniana infinita con los problemas de móduli, es necesario remontarse al artículo de I. Krichever [Kri77], donde estudia la relación entre ciertas curvas algebraicas y ciertos anillos de operadores diferenciales, y donde se da un método explicito para construir soluciones de la ecuación KP(Kadomtsev-Petviashvil) en términos de funciones theta de las jacobianas de curvas. A partir de este trabajo pionero, M. Mulase [Mul84] caracteriza las Jacobianas de curvas algebraicas a través de las órbitas de un cierto sistema dinámico, y paralelamente, T. Shiota [Shi86], establece que una variedad abeliana principalmente polarizada es la jacobiana de una curva algebraica si y sólo si es una solución compacta para la jerarquía KP. Sato [SS83] encuentra una equivalencia entre las soluciones de la jerarquía KP y los puntos de una Grassmanniana infinito dimensional, estando este último espacio definido por las ecuaciones de Plücker. Mientras que en la literatura se encuentran otras referencias a Grassmannianas infinitas, por ejemplo [SW85], no es hasta el trabajo de A. Álvarez Vázquez, J. M. Muñoz Porras y F. J. Plaza Martín [ÁVMPPM96] donde se da una definición como esquema, donde el punto clave de la representabilidad es no asumir las condiciones de noetehrianidad, quasi-compacidad y quasi-separabilidad en la categoría de esquemas. Los autores J. M. Muñoz Porras y F.J. Plaza Martín construyen en [MPPM90] el espacio de móduli de curvas punteadas M^∞, siendo un punto racional de este último, una terna (C,p,z) con C una curva algebraica C, $p \in C$

un punto liso y $z : \hat{\mathcal{O}}_{C,p} \simeq \mathrm{k}[[t]]$ un isomorfismo. En el anterior artículo se da una inmersión $\mathcal{M}^\infty$ en una Grassmanniana infinita y se computan las ecuaciones de $\mathcal{M}^\infty$ en dicho espacio proyectivo infinito dimensional. Obsérvese que lo que se hace es rigidificar el problema mediante la introducción de un parámetro formal, de esta forma, los objetos obtenidos no tienen automorfismos no triviales.

La pregunta natural que surge a continuación es si una construcción análoga de fibrados vectoriales sobre curvas algebraicas puede ser llevada a cabo. Dicha pregunta se sustenta en los resultados obtenidos por M. Mulase en [Mul90], donde se da una correspondencia categorial entre fibrados vectoriales sobre curvas algebraicas y ciertos puntos de una Grassmanniana infinita. Entre los resultados obtenidos por D. Hernández Serrano en [HS08], se encuentra la construcción del espacio de móduli de fibrados vectoriales dotados de una trivialización formal. Fijada una curva C, un punto p, y una trivialización formal $z : \hat{\mathcal{O}}_{C,p} \simeq \mathrm{k}[[t]]$, un punto racional del anterior espacio de móduli es una clase de equivalencia dada por un fibrado vectorial $E \to C$ de rango n y un isomorfismo $\hat{E}_p \simeq \mathrm{k}[[t]]^{\oplus n}$ compatible con la trivialización formal z considerada. De nuevo, este espacio de móduli admite una inmersión en una Grassmanniana infinita.

La presente memoria está dividida en tres partes bien diferenciadas. En la primera parte nos centramos en la construcción del espacio de móduli de fibrados principales sobre una curva algebraica dotados de trivialización formal, así como su relación con el stack de fibrados principales. La segunda parte consiste en la compactificación del espacio de móduli construido en la primer parte de la memoria, entendiendo por compactificar el dar una inmersión del espacio de móduli construido en un espacio proyectivo. La tercer parte está dedicada a los apéndices que contienen algunos resultados necesarios a lo largo de esta memoria, que aun pudiendo ser encontrados en la literatura, están dispersos. De forma breve exponemos a continuación los contenidos de esta memoria. Siempre se supondrá que k-es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

En el capítulo uno revisamos la teoría general de fibrados principales. En la aproximación más estándar a la teoría, se consideran fibrados principales $\pi : P \to X$ donde se imponen ciertas condiciones sobre el morfismo estructural π y el esquema base X. En el presente trabajo hemos decidido abordar esta teoría de un modo diferente, ya que consideraremos que la base X es un esquema totalmente arbitrario, mientras que se impondrán algunas condiciones a π de modo compatible con cambios de base. La razón y la necesidad de este enfoque radica en el hecho de que nuestro problema de móduli es un problema de representabilidad de un funtor sobre la categoría de esquemas y, por tanto, es necesario que todos los objetos involucrados estén definidos sobre un esquema arbitrario y tengan un comportamiento funtorial.

El capítulo 2 consiste en una reformulación del Teorema de Serre, el cual establece una correspondencia entre fibrados principales y parejas formadas por un fibrado vectorial y una reducción del grupo estructural. A través de esta reformulación, conseguimos readaptar el resultado a fibrados principales definidos sobre una base arbitraria de modo compatible con cambios de base. Es importante recalcar que, cuando el esquema base X es quasi-compacto, quasi-separado y noetheriano, entonces los resultados que hemos obtenido coinciden con los que se encuentran en la literatura.

En el tercer capítulo realizamos una discusión de las trivializaciones sobre fibrados principales. Introducimos la noción de fibrado principal sobre un esquema formal y probamos que todo fibrado principal definido sobre el espectro de un anillo linealmente topológico admisible tiene un fibrado principal asociado sobre el esquema formal del anillo de modo natural. En particular, todo fibrado principal definido sobre una curva $P \to C$ induce un fibrado principal sobre el disco formal. En general, dado un fibrado principal definido sobre un esquema arbitrario y fijado un subesquema cerrado de la base, se tiene de modo natural un fibrado principal inducido sobre la completación del esquema base a lo largo del subesquema cerrado fijado. Introducimos la noción de trivialización formal de un fibrado principal, y probamos que la correspondencia de Serre obtenida en el capítulo dos sigue siendo cierta en el caso de que se añada este nuevo dato. A través de la noción de trivialización formal de un fibrado principal será posible rigidificar los objetos de tal modo que no tengan automorfismos no triviales. Adoptar la estrategia de una base arbitraria desde el inicio del estudio, junto con el dato de trivializaciones formales, serán las dos claves para conseguir que los espacios de móduli construidos en el trabajo sean módulis finos.

En el capítulo 4, definimos el funtor de móduli $\mathtt{Bun}_{\mathcal{G},C}$ de fibrados principales con trivialización formal y probamos que es representable. Por completitud en la exposición realizamos una revisión de la construcción del móduli de curvas equipadas con una trivialización formal, así como el móduli de fibrados vectoriales sobre una curva algebraica junto con trivializaciones formales. A través de la correspondencia de Serre obtenida en el capítulo tres nos será posible traducir el problema de móduli de fibrados principales con trivializaciones formales a un problema de móduli de ternas formadas por un fibrado vectorial, un cierto morfismo de álgebras y una trivialización formal del fibrado vectorial.

En el capítulo 5 estudiamos la relación existente entre el stack asociado al esquema de fibrados principales con trivialización formal $\mathtt{Bun}_{\mathcal{G},C}$ obtenido en el capítulo 4 y el stack de fibrados principales $\mathrm{Bun}_{G,C}$ sobre C. Probamos que existe un funtor de olvido, y en ciertas situaciones, por ejemplo cuando en la categoría de esquemas se considera la topología de Zariski y el grupo G considerado es especial, el funtor olvido es epiyectivo. Si la topología considerada en la categoría de esquemas es la étale, entonces el funtor de olvido es epiyectivo para todo grupo algebraico afín, lineal y semisimple. Probamos que el *Positive Loop Group* L^+G de G puede ser entendido como el grupo de automorfismos del G-fibrado principal trivial sobre el disco formal, lo cual nos permite probar que se tiene una acción libre y transitiva de L^+G en $\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$. En el caso particular de que el grupo G sea especial, como ocurre por ejemplo cuando se considera el grupo especial lineal o el grupo simpléctico, se prueba un Teorema de Uniformización que expresa $\mathrm{Bun}_{G,C}$ como el stack cociente de $\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$ por la acción de L^+G. Si de nuevo se considera la topología étale en la categoría de k-esquemas, el Teorema de Uniformización es cierto para todo grupo algebraico lineal, afín y semisimple. Por último, relacionamos el grupo de Picard de $\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$ con el grupo de Picard del stack de fibrados principales.

En el último capítulo de la primera parte calculamos el espacio tangente al espacio de móduli $\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$. Al principio del capítulo recordamos la construcción del álgebra de Lie de un grupo algebraico y se define el fibrado adjunto de un fibrado principal. En el capítulo estudiamos las deformaciones de primer orden de fibrados principales sobre una curva algebraica, y de los fibrados principales dotados de lo que se definirá como una trivialización infinitesimal de orden n en un punto cerrado $p \in C$. Probaremos que el espacio tangente a $\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$ en un punto racional (P, ψ), donde P es un G-fibrado principal sobre C y ψ es una trivialización formal de P en el disco formal centrado en p, es isomorfo a $\mathrm{H}^1(C - p, \mathrm{ad}\, P)$.

La segunda parte de la tesis está dedicada a la compactificación del espacio de móduli $\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$ construido en el capítulo 4. De nuevo recalcamos que por compactificación entendemos la construcción de una inmersión canónica de $\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$ en fibrado proyectivo.

En el capítulo 7 introducimos un nuevo tipo de objeto matemático llamado álgebra graduada parcialmente generada, o por simplicidad, una pgg-álgebra. Este tipo de objetos dan respuesta a la pregunta de cuándo una álgebra graduada está generada por sus elementos de grado menor o igual que t para un cierto t. Por ejemplo, toda álgebra graduada de presentación finita es una pgg-álgebra, y en general, toda álgebra que verifique que tanto el grado de sus generadores, como el grado de las relaciones algebraicas entre sus generadores están acotados, es una pgg-álgebra. Otro ejemplo de pgg-álgebra es el álgebra de invariantes de un espacio vectorial por la acción de un grupo clásico (Sl_n, Sp_n, SO_n, O_n). A lo largo de todo el capítulo 7 estudiamos las distintas propiedades que ostentan este tipo de álgebras y probamos que dada una pgg-álgebra A, existe una inmersión localmente cerrada natural de $\mathrm{Spec}(A)$ en un fibrado proyectivo.

El capítulo 8 comienza con un resultado clásico de la Teoría de Invariantes, el Teorema de Nagata, que motivará el desarrollo posterior. Dicho Teorema prueba que para toda k-álgebra finito generada A, y para toda toda representación fiel $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{k\text{-}\acute{a}lg}(A)$ de un grupo reductivo G, el anillo de invariantes A^G es de nuevo una k-álgebra finita generada. En este capítulo consideramos una k-álgebra R arbitraria (no necesariamente finito generada), M un R-módulo libre finito generado, $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{R\text{-}m\acute{o}d}(M)$ una representación cualquiera, T una R-álgebra cualquiera y N un T-módulo arbitrario, y se estudia el anillo de invariantes $A := (S^\bullet_T(M^\vee \otimes_T N))^G$ mediante la variación del T-módulo N. Probamos que incluso en el caso más general, el álgebra de invariantes satisface una condición de finitud sobre el grado de los generadores y las relaciones entre ellos, lo cual enlaza con las pgg-álgebras introducidas en el capítulo anterior. De hecho, todas las construcciones realizadas en este capítulo son naturales y si N es de presentación finita ó G es uno de los grupos algebraicos lineales semisimples definidos sobre k (Sl_n, SO_n, Sp_{2n}), entonces demostramos que existe una inmersión localmente cerrada canónica

$$\Phi_{M,N,G} : \mathrm{Spec}\left(S^\bullet_T(M^\vee \otimes_T N)\right)^{G_T} \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigoplus_{1\leq|\underline{d}|\leq d} S^{d_1}A_1 \otimes_T \cdots \otimes_T S^{d_t}A_t\right)$$

con $A_i = S^i(M^\vee \otimes_T N))^{G_T}$, para cierto número natural d. Además, si G es clásico, d depende de G pero no de N y en cualquier caso $\Phi_{M,N,G}$ es $\mathrm{Aut}_T(N)$-equivariante.

El último capítulo de la tesis aborda el problema de compactificación del espacio de móduli $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$. En el capítulo construimos el espacio de móduli de fibrados principales singulares con trivialización formal $\mathrm{Sing}_{\mathcal{G},C}$, y probamos que $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$ es un subesquema abierto de este último. Mediante la inmersión natural que construimos en el capítulo anterior, la compactificación de $\mathrm{Sing}_{\mathcal{G},C}$ es ahora inmediata. Para finalizar la tesis damos una construcción del espacio de móduli de swamps dotados de una trivialización formal, apareciendo este tipo de objetos de modo natural en el estudio de los fibrados principales.

La tercera parte de la tesis está dedicada a los apéndices. En el primero de ellos introducimos las definiciones y resultados elementales de la Teoría Geométrica de Invariantes utilizados en el capítulo 2. El segundo apéndice, denominados esquemas formales, sirve como punto de apoyo para la construcción del fibrado formal asociado a un fibrado principal que realizamos en el capítulo 3. El tercer apéndice esta dedicado a la definición de la Grassmanniana infinita, siendo este objeto central en la construcción del espacio de móduli de curvas con trivialización formal y de fibrados principales con trivialización formal realizada en el capítulo 4. Por último, el cuarto apéndice está dedicado a los módulos de Schur, siendo estos objetos utilizados a lo largo de todo el capítulo 8.

Convenios y notaciones

Si no se especifica lo contrario, k denotará siempre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Los k-esquemas considerados no se suponen noetherianos, quasi-compactos ni quasi-separados a no ser que se especifique lo contrario. Por grupo algebraico sobre k se entiende un k-esquema conexo, íntegro, separado, de tipo finito, liso, con estructura de grupo.

- **Sch**$_k$ es la categoría de k-esquemas con la topología de Zariski.
- **Sets** es la categoría de conjuntos.
- **Grp** categoría de grupos.
- Dado un k-esquema X, y una $\mathcal{O}_X$-álgebra $\mathcal{A}$ se denotará por $\operatorname{Spec}(\mathcal{A})$ al espectro relativo.
- Dado un esquema X, se denotará por $X^\bullet$ a su funtor de puntos. Lo análogo para un esquema formal X.
- Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Una topología de Grothendieck en es dar para cada objeto U la familia de recubrimientos de U. Dicha familia verifica las siguientes condiciones

  i) Si $V \to U$ es un isomorfismo, entonces $\{V \to U\}$ es un recubrimiento.

  ii) Si $\{U_i \to U\}$ es un recubrimiento y $V \to U$ es un morfismo, entonces los productos fibrados $\{U_i \times_U V\}$ existen y la colección de proyecciones $\{U_i \times_U V \to V\}$ es un recubrimiento de V.

  iii) Si $\{U_i \to U\}$ es un recubrimiento y para cada i se tiene un recubrimiento $\{V_{ij} \to U_i\}$ de U_i, entonces la composición $\{V_{ij} \to U\}$ es un recubrimiento de U.

  Un sitio es una categoría dotada de una topología de Grothendieck.

Parte I

Espacio de móduli de fibrados principales

1. Fibrados principales

El presente capítulo introduce la teoría de G-fibrados principales en el contexto de la geometría algebraica. Siguiendo el artículo seminal de Serre [Ser55], junto con los trabajos de Raynaud [Ray70] y Giraud [Gir71], se formulará la teoría de fibrados principales sin imponer que los esquemas considerados sean noetherianos, quasi-compactos o quasi-separados. Es necesario indicar que la atención de todo el desarrollo teórico aquí expuesto está centrada en revisión de una generalización del Teorema de Serre ([Ser55, Prop. 9]) dada en el capítulo 2; donde se establece, que fijado un k-esquema X, existe un isomorfismo entre el grupoide de G-fibrados principales sobre X, y el grupoide de G-reducciones sobre X, siendo, dicha equivalencia, funtorial en la base. El Teorema de Serre será central a la hora traducir el problema de móduli de fibrados principales a un problema de clasificación de fibrados vectoriales dotados de un cierto morfismo de álgebras.

1.1. Primeras definiciones y propiedades

Sea G un grupo algebraico sobre k y X un k-esquema.

Definición 1.1. Un **G-sistema fibrado** sobre X es una pareja (P, π), donde P es un k-esquema dotado de una acción de G por la derecha y $\pi : P \to X$ es un morfismo de k-esquemas G-invariante, esto es

$$\pi(p \cdot g) = \pi(p)$$

Un **morfismo de G-sistemas fibrados** sobre X es un morfismo de X-esquemas $f : P \longrightarrow P^{I}$ que es G-equivariante, es decir

$$f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$$

Se define el G-sistema fibrado trivial sobre X como la pareja $(X \times G, \pi)$, donde la acción de G en $X \times G$ viene dada por la multiplicación de G, y $\pi : X \times G \to X$ es la proyección en el primer factor.

Considérese un G-sistema fibrado (P, π) sobre X y un morfismo de k-esquemas, $f : S \to X$. Es inmediato que el producto fibrado

$$f^* P := P \times_X S \to S$$

es un G-sistema fibrado.

Definición 1.2. Un G**-fibrado principal** sobre X con respecto la topología de Zariski (resp. étale, fppf, fpqc) es un G-sistema fibrado (P, π) sobre X tal que π es quasi-compacto y quasi-separado, y tal que es localmente trivial en la topología de Zariski (resp. étale, fppf, fpqc), es decir, existe un recubrimiento $\{f_i : U_i \to X\}_{i \in I}$ de X de Zariski (resp. étale, fppf, fpqc) tal que para todo $i \in I$ se tiene un isomorfismo de G-sistemas fibrados sobre U_i

$$\begin{tikzcd} f^*P \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & U_i \times G \arrow[dl] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

Un **morfismo de** G**-fibrados principales** sobre X es un morfismo como G-sistemas fibrados sobre X. Obsérvese que π es epiyectivo independientemente de la topología considerada.

De modo análogo en el caso de los G-sistemas fibrados, el producto fibrado de un G-fibrado principal $P \to X$ a lo largo de un morfismo de k-esquemas $f : S \to X$ vuelve a ser un G-fibrado principal sobre S

$$\begin{tikzcd} f^*P \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ S \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Basta con observar que si $\{U_i \to X\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de X en la topología de Zariski (resp. étale, fppf, fpqc), entonces $\{U_i \times_X X' \to X'\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de S en la topología de Zariski (resp. étale fppf, fpqc), y que la quasi-compacidad y quasi-separabilidad de un morfismo es estable por cambios de base.

Observación 1.3. En lo sucesivo, si no se especifica lo contrario, todos los G-fibrados principales sobre X serán entendidos con respecto la topología étale.

Teorema 1.4: ([Mil80, III, Proposition 4.1]) *Sea $\pi : P \to X$ un G-sistema fibrado sobre X con π quasi-compacto y quasi-separado, y sea G un grupo algebraico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $P \to X$ es un fibrado principal en la topología étale,

(ii) el morfismo π es liso, epiyectivo y la acción de G en P es libre y transitiva, es decir, el morfismo natural

$$\begin{aligned} P \times_k G &\to P \times_X P \\ (p, g) &\mapsto (p, p \cdot g) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de X-esquemas

Corolario 1.5: *Sea $\pi : P \to X$ un G-fibrado principal con respecto la topología étale. Entonces el morfismo π es fielmente plano y quasi-compacto.*

Corolario 1.6: *El morfismo π es afín (resp. propio) si y sólo si G lo es.*

Demostración. Por el Teorema 1.4, el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \times G \arrow[r] \arrow[d, "p_1"'] & P \arrow[d] \\ P \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

es cartesiano. Esto, junto con el hecho de que cualquier fibrado principal con respecto la topología étale es fielmente y plano y quasi-compacto (Corolario 1.5), implica, por la teoría del descenso [Gro65, Théorème 2.7.1], el resultado del enunciado. □

Observación 1.7. Obsérvese que por hipótesis G es de tipo finito, luego por el mismo resultado [Gro65, Théorème 2.7.1], el morfismo $P \to X$ es de tipo finito.

Teorema 1.8: *Todo morfismo de G-fibrados principales en la topología étale es un isomorfismo.*

Demostración. Sean (P, π) y (P^I, π^I) dos G-fibrados principales sobre X y sea $f : P \to P^I$ un morfismo de X-esquemas G-equivariante. El morfismo f es inyectivo. En efecto, supóngase que $f(p) = f(q)$ con $p, q \in P$. Como los fibrados principales considerados son étale y el grupo algebraico G liso, por el Teorema 1.4, la acción de G en P y en P^I es libre y transitiva, por tanto, existe un único $g \in G$ tal que $q = p \cdot g$. Ahora bien, como f es G-equivariante, se tiene que

$$f(q) = f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$$

y como la acción es libre, se sigue que $g = e$, siendo e el elemento neutro de G, luego $p = q$. La epiyectividad de f es automática observando que tanto π como π^I son morfismos epiyectivos de esquemas. □

Corolario 1.9: *Si un G-fibrado principal $\pi : P \to X$ admite una sección global $s : X \to P$, entonces P es isomorfo al G-fibrado principal trivial.*

Demostración. Basta observar que toda sección global $s : X \to P$ da lugar a un morfismo G-equivariante

$$\begin{aligned} X \times G &\to P \\ (x, g) &\mapsto s(x) \cdot g \end{aligned}$$

□

Corolario 1.10: *Si G es liso entonces la categoría de G-fibrados principales sobre X es un grupoide.*

El siguiente Teorema prueba que todo G-fibrado principal $P \to X$ es un cociente geométrico universal en el sentido de [MF82, Def. 0.6], y por tanto, un cociente categorial universal [MF82, Prop. 0.1] (véase Apéndice A). Pero antes, es necesario un lema previo.

Lema 1.11: *Sean X e Y dos* k*-esquemas quasi-compactos y separados. Entonces, el morfismo natural*

$$\mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathrm{k}} \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_{X\times Y}(X \times Y) \tag{1.12}$$

es un isomorfismo de k*-álgebras.*

Demostración. Si X e Y son afines se concluye. Si X es afín e Y arbitrario considérese un recubrimiento finito de Y por abiertos afines $\{V_i\}$, y como por hipótesis Y es separado, se tiene que $V_i \cap V_j$ es afín para toda pareja de índices i, j. Considerando la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_Y(Y) \to \coprod_i \mathcal{O}_Y(V_i) \to \coprod_{i,j} \mathcal{O}_Y(V_i \cap V_j)$$

y tensorializando por $\mathcal{O}_X(X)$ (que es una k-álgebra plana por ser k-cuerpo) se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathrm{k}} \mathcal{O}_Y(Y) \to \coprod_i \mathcal{O}_{X\times Y}(X \times V_i) \to \coprod_{i,j} \mathcal{O}_{X\times Y}(X \times (V_i \cap V_j))$$

Como $X \times V_i$ es un recubrimiento abierto de $X \times Y$ se concluye. En el caso general considérese un recubrimiento finito de X por abiertos afines $\{U_i\}$, y por el caso anterior se obtiene una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathrm{k}} \mathcal{O}_Y(Y) \to \coprod_i \mathcal{O}_{X\times Y}(U_i \times Y) \to \coprod_{i,j} \mathcal{O}_{X\times Y}((U_i \cap U_j) \times Y)$$

de donde se sigue el resultado. □

Teorema 1.13: *Sea $\pi : P \to X$ un G-fibrado principal con respecto la topología étale. Entonces $P \to X$ es un cociente geométrico universal.*

Demostración. Por hipótesis, el morfismo $\pi : P \to X$ es G-invariante, epiyectivo, y la acción de G en P es libre y transitiva (Teorema 1.4, (*ii*)). Como π es liso (Teorema 1.4, (*ii*)) es universalmente abierto ([Sta18, Lemma 29.34.10]) y por tanto, el morfismo π es universalmente submersivo ([Ryd10, Remark 2.5 (2c)]), luego se satisfacen las condiciones (*i*), (*ii*) y (*iii*) de la Definición A.2.

Por último, hay que probar que el morfismo canónico $\pi^{\#}\mathcal{O}_X \to \pi\ (\mathcal{O}_P)^G$ es isomorfismo. Como π fielmente plano, basta ver que el morfismo natural

$$\mathcal{O}_P = \pi^*(\mathcal{O}_X) \to \pi^*(\pi_*(\mathcal{O}_P)^G)$$

es isomorfismo. Ahora bien, por el Teorema 1.4, el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \times G \arrow[r] \arrow[d, "p_1"'] & P \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

es cartesiano, luego

$$\pi^*(\pi_*\mathcal{O}_P) \quad p_{1*}(\mathcal{O}_{P\times G})$$

Por otro lado, existe un isomorfismo canónico de haces

$$p_{1*}(\mathcal{O}_{P\times G}) \quad \mathcal{O}_P \otimes_k \mathcal{O}_G(G) \tag{1.14}$$

En efecto, basta comprobar que se tiene un isomorfismo en un recubrimiento abierto de P. Por hipótesis $P \to X$ es quasi-compacto y epiyectivo, luego P admite un recubrimiento por abiertos quasi-compactos $\{U_i$, siendo, cada uno de los U_i, la antimagen de un abierto afín en X. Como G es de tipo finito, el morfismo $P \to X$ es finito (Observación 1.7) luego separado, por lo que cada U_i se recubre por un número finito de abiertos afines cuya intersección vuelve a ser afín. Por hipótesis G es de tipo finito, luego quasi-compacto y separado. Aplicando el Lema 1.11 se concluye la existencia del isomorfismo (1.14).

Ahora bien, los anteriores isomorfismos identifican la G-acción inducida en $\pi^*(\pi\ \mathcal{O}_P)$ por la G-acción en P, con la acción de G en $\mathcal{O}_P \otimes_k \mathcal{O}_G(G)$ dada por la multiplicación por la derecha en $\mathcal{O}_G(G)$. Tomando invariantes por la acción de G se concluye que

$$\pi^*(\pi_*(\mathcal{O}_P)^G) \quad p_{1,*}(\mathcal{O}_{P\times G}^G) = \mathcal{O}_P$$

como se quería demostrar.

□

1.2. Extensión y reducción del grupo estructural

La presente sección está dedicada al estudio de dos operaciones básicas en la teoría de fibrados principales, a saber, la extensión y reducción del grupo estructural del fibrado principal considerado. Aunque las construcciones aquí explicadas son bien conocidas en la literatura ([Ser55, §3]), debido a su repetido uso a lo largo de todo el trabajo se ha creído conveniente introducirlas.

Sea X un esquema, G un grupo algebraico y $\pi : P \to X$ un G-fibrado principal con respecto la topología étale. Sea F un esquema quasi-proyectivo dotado de una G-acción por la derecha. Se tiene por tanto una G-acción natural en el esquema producto $P \times F$ como sigue

$$\begin{aligned} (P \times F) \times G &\to P \times F \\ ((p,f), g) &\mapsto (p \cdot g, g^{-1} \cdot f) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Proposición 1.16: [Espacio fibrado asociado] *Con las anteriores hipótesis, existe el cociente categorial*

$$P \times^G F := (P \times F)/G \to X$$

que es un espacio fibrado sobre X de fibra F. Se tiene que $P \times F \to (P \times F)/G$ es un G-fibrado principal.

Demostración. Una demostración completa en el caso de que los fibrados principales considerados sean localmente isotriviales ([Ser55, Def. 2.2]) puede ser encontrada en [Sch08, Prop. 2.1.1.7]. La construcción en el caso de fibrados principales en la topología étale, o en la topología fppf requiere teoría del descenso [Mil80, p. 16 y ss.], lo cual es posible debido a que los fibrados principales con respecto la topología étale son fielmente planos y quasi-compactos sobre la base (Corolario 1.5). No obstante, cuando G es un grupo algebraico afín, todo fibrado principal en la topología étale es localmente isotrivial [Ray70, XIV 1.4] y se puede aplicar la construcción anteriormente mencionada. □

1.2.1. Extensión del grupo estructural

Sea $P \to X$ un G-fibrado principal y sea $\alpha : G \to G^I$ un morfismo de grupos algebraicos. A través de α, se tiene una acción G-acción en $P \times G^I$ como sigue

$$\begin{aligned} (P \times G^I) \times G &\to P \times G^I \\ ((p, g^I), g) &\mapsto (p \cdot g, \alpha(g)^{-1} \cdot g^I) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Por la Proposición 1.16, tomando el cociente por la G-acción, se tiene un G-fibrado principal $P \times G^I \to P \times^G G^I$, siendo en este caso particular

$$P \times^G G^I \to X$$

un espacio fibrado de fibra tipo G^I, es decir, un G^I-fibrado principal.

Definición 1.18. El G^I-fibrado principal $P \times^G G^I \to X$ se denomina **extensión de** $P \to X$ mediante $\alpha : G \to G^I$.

1.2.2. Reducción del grupo estructural

Sea G un grupo algebraico lineal y sea $H \subseteq G$ un subgrupo algebraico cerrado actuando en G por la derecha mediante multiplicación.

Teorema 1.19:

i) Existe un esquema G/H dotado de una G-acción y de un morfismo G-equivariante

$$q : G \to G/H$$

que es un un H-fibrado principal para la acción de H en G.

ii) El esquema G/H es de tipo finito y liso.

iii) Si H es normal en G, entonces G/H tiene una única estructura de grupo algebraico afín tal que q es un morfismo de grupos algebraicos.

Demostración. Consúltese [Bor91, Theorem 6.8] y [GD70, Exposé VIA, 3.2]. □

Obsérvese, que por ser $G \to G/H$ un H-fibrado principal, es en particular un cociente geométrico universal (Teorema 1.13), luego en particular, q es único excepto un único isomorfismo. El morfismo q es llamado **morfismo cociente**.

Considérese un G-fibrado principal $P \to X$ con G afín, y H G un subgrupo cerrado de G. El grupo G actúa en la variedad cociente G/H mediante la fórmula

$$[\bar{g}] \cdot g := [(g)^{-1} \cdot \bar{g}] \tag{1.20}$$

Por otro lado, obsérvese, que la inclusión natural $H \subseteq G$ induce de modo canónico una acción de H en P. Sea

$$P \times (G/H) \to P \times^G (G/H)$$

el G-fibrado principal obtenido en la Proposición 1.16. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.21: ([Ser55, Proposition 8]) *El morfismo inducido*

$$P \to P \times^G (G/H)$$

es un H-fibrado principal. Se tiene por tanto que $P \times^G (G/H)$ P/H.

Observación 1.22. De nuevo obsérvese que la anterior proposición sigue siendo cierta en las hipótesis de este trabajo porque es posible aplicar la teoría del descenso fielmente plano.

1.3. Descripción cohomológica de un fibrado principal

El presente capítulo finaliza con una descripción cohomológica de los fibrados principales con respecto la topología étale. Para ello, se introducirán los grupos de cohomología étale así como los grupos de cohomología de Čech cuando se considera en la categoría de k-esquemas la topología étale. Se seguirán de cerca los trabajos [Mil80, §3], [Gir71].

En lo sucesivo se denotará por $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$ a la categoría de haces de grupos abelianos definidos sobre el sitio étale pequeño de X. La categoría $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$ es abeliana, cocompleta, completa, y donde se verifica que los colímites filtrados de sucesiones exactas vuelven a ser exactas, y donde el producto de una familia de epimorfismos es de nuevo un epimorfismo ([Mil80, §2]). La categoría $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$ tiene suficientes inyectivos ([Mil80, Lemma 3.1.3]). Cabe destacar que lo dicho en esta sección se aplica a cualquiera que sea la topología de Grothendieck considerada en la categoría de k-esquemas, siempre y cuando, la categoría de haces sobre X con respecto a la topología considerada verifique las mismas propiedades que $\mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$.

Definición 1.23. Considérese el funtor tomar secciones globales

$$\begin{aligned} \Gamma(X_{\text{ét}}, -) : \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}}) &\to \mathbf{Ab} \\ F &\mapsto \Gamma(X_{\text{ét}}, F) := F(X) \end{aligned}$$

El funtor $\Gamma(X_{\text{ét}}, -)$ es exacto por la izquierda y sus funtores derivados por la derecha se denotan por $R^i\Gamma(X_{\text{ét}}, -)$. Dado $F \in \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$, se llama ***i*-ésimo grupo de cohomología étale** de F a $\mathrm{H}^i(X_{\text{ét}}, F) := R^i\Gamma(X_{\text{ét}}, -)$.

Considérese ahora $\mathcal{U} := \{\varphi_i : U_i \to X\}_{i \in I}$ un recubrimiento étale de X. Para cada $(p+1)$-tupla de índices $(i_0, \ldots, i_p)$ con $i_j \in I$ para todo j, se utilizará la siguiente notación

$$U_{i_0,\ldots,i_p} := U_{i_0} \times_X \ldots \times_X U_{i_p}$$

Si $F \in \mathbf{Sh}(X_{\text{ét}})$, la inclusión natural $U_{i_0,\ldots,i_p} \to U_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p}$ induce un morfismo de restricción

$$\mathrm{res}_j : F(U_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p}) \to F(U_{i_0,\ldots,i_p}) \tag{1.24}$$

Se define el complejo $C^\bullet(\mathcal{U}, F) = (C^p(\mathcal{U}, F), d^p)_p$ como sigue a continuación. Para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$C^p(\mathcal{U}, F) := \prod_{(i_0,\ldots,i_p) \in I^{p+1}} F(U_{i_0,\ldots,i_p})$$

y donde la diferencial

$$d^p : C^p(\mathcal{U}, F) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, F)$$

es el morfismo definido como

$$(d^p s)_{i_0,\dots,i_{p+1}} := \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \operatorname{res}_j(s_{i_0,\dots,\hat{i_j},\dots,i_p}) \tag{1.25}$$

Definición 1.26. Los grupos de cohomología de $C(U, F)$ se denominan **grupos de cohomología de Čech**, $\check{H}^p(U, F)$ de F con respecto el recubrimiento U.

Para cada refinamiento V de U y para cada natural p, se tiene un morfismo de grupos

$$\check{H}^p(U, F) \to \check{H}^p(V, F)$$

bien definido ([Mil80, Lemma 3.2.1]).

Definición 1.27. Se definen los **grupos de cohomología de Čech étale** de F como

$$\check{H}^p(X_{\acute{e}t}, F) := \varinjlim \check{H}^p(U, F)$$

donde el límite se toma sobre todos los recubrimientos étale U de X.

El resultado central que relaciona los grupos de cohomología étale con los grupos de cohomología de Čech étale es el siguiente.

Teorema 1.28: [Mil80, Theorem 3.2.17] *Sea X un esquema quasi-compacto tal que todo subconjunto finito de X está contenido en un abierto afín, y sea $F \in \boldsymbol{Sh}(X_{\acute{e}t})$. Entonces, existen isomorfismos naturales*

$$\check{H}^p(X_{\acute{e}t}, F) \cong H^p(X_{\acute{e}t}, F)$$

Sea G un grupo algebraico sobre k. En particular, para cada k-esquema X, y cada recubrimiento étale $U = \{U_i \to X\}_{i \in I}$, se tiene que el funtor de puntos $G^\bullet$ de G es un haz de grupos sobre $X_{\acute{e}t}$.

Definición 1.29. Un 1-**cociclo** para el recubrimiento U con valores en G es una familia $g := \{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ con $g_{ij} \in G^\bullet(U_{ij})$ verificando que

$$(g_{ij}|_{U_{ijk}})(g_{jk}|_{U_{ijk}}) = (g_{ik}|_{U_{ijk}}) \tag{1.30}$$

Dos cociclos g, y g', son **cohomólogos** si existe una colección $\{h_i\}_{i \in I}$ con $h_i \in G^\bullet(U_i)$ para todo i, tal que

$$g'_{ij} = (h_i|_{U_{ij}}) g_{ij} (h_j|_{U_{ij}})^{-1} \tag{1.31}$$

para todo $i, j \in I$. La relación binaria (1.31) es una relación de equivalencia. El conjunto de clases de cohomología se denota por $\check{H}^1(U, G)$. El conjunto $\check{H}^1(X_{\acute{e}t}, G)$ se define como $\varinjlim \check{H}^1(U, G)$ donde el límite se toma sobre los recubrimientos étale de X.

Observación 1.32. Como se puede comprobar, las Definiciones 1.26 y 1.29 coinciden cuando X es quasi-compacto, G es abeliano, $\mathcal{F} = G^\bullet$ y $p = 1$, ya que los límites inyectivos filtrados de conjuntos y grupos abelianos coinciden. La ventaja de la Definición 1.29 es que se tiene una descripción explícita de $\check{\mathrm{H}}^1(X_{\acute{e}t}, G^\bullet)$ en el caso de ser G abeliano, y, por el Teorema 1.28, es isomorfo canónicamente a $\mathrm{H}^1(X_{\acute{e}t}, G^\bullet)$.

Teorema 1.33: [Mil80, Prop 4.6]*Sea G un grupo algebraico no necesariamente abeliano. Se tiene una correspondencia biunívoca entre el conjunto de G-fibrados principales sobre X con respecto la topología étale salvo isomorfismos, y el conjunto clases de equivalencia de $\check{\mathrm{H}}^1(X_{\acute{e}t}, G)$.*

Demostración. Sea $P \to X$ un G-fibrado principal y $\mathcal{U} = \{\phi_i : U_i \to X\}_{i \in I}$ un recubrimiento étale de X donde P trivializa. Sea $P^\bullet$ el funtor de puntos de P. Es automático que $P^\bullet \in \mathbf{Sh}(X_{\acute{e}t})$. Para cada $i \in I$ considérese una trivialización de P sobre U_i, esto es, una sección $s_i \in P^\bullet(U_i)$ (Corolario 1.9). Entonces existe una única colección $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ con $g_{ij} \in G^\bullet(U_{ij})$ tal que

$$(s_i|_{U_{ij}})g_{ij} = (s_j|_{U_{ij}})$$

Se verifica además que sobre U_{ijk}

$$s_i g_{ij} g_{jk} = s_k = s_i g_{ik} \qquad g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$$

luego la colección $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ es un 1-cociclo. Si la elección de las s_i es otra, entonces $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ es remplazado por un cociclo cohomólogo. La asignación inversa puede consultarse en [Mil80, Prop 4.6]. □

Corolario 1.34: *Sea X un esquema quasi-proyectivo sobre un esquema afín y sea* $\mathrm{G}_m := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ *el grupo multiplicativo. Las clases de isomorfismos de* G_m*-fibrados principales sobre X están en correspondencia biunívoca con las clases de isomorfismos de los fibrados de línea sobre X.*

Demostración. Basta observar que el Teorema 90 de Hilbert [Mil80, Prop. 3.4.9] establece un isomorfismo canónico

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{H}^1(X_{Zar}, \mathcal{O}_X^\times) \quad \mathrm{H}^1(X_{\acute{e}t}, \mathrm{G}^\bullet_m)$$

y como G_m es abeliano $\mathrm{H}^1(X_{\acute{e}t}, \mathrm{G}^\bullet_m) = \check{\mathrm{H}}^1(X_{\acute{e}t}, \mathrm{G}_m)$. Por el Teorema 1.33 se concluye. □

De modo análogo es posible probar que el conjunto de clases de isomorfismos de Gl_n-fibrados principales sobre X es canónicamente biyectivo al conjunto de clases de isomorfismos de haces localmente libres de rango n.

2. El Teorema de Serre

El presente capítulo gira entorno a la demostración de una generalización del Teorema de Serre ([Ser55, Prop. 9]). Dicho resultado permitirá entender, bajo las hipótesis de este trabajo, que fijado un grupo algebraico lineal semisimple G dotado de una representación fiel en un k-espacio vectorial V de dimensión finita, se tiene una equivalencia funtorial entre el grupoide de G-fibrados principales sobre X con respecto la topología étale, y el grupoide de G-reducciones, esto es, parejas formadas por un fibrado vectorial y un morfismo de X en el cociente por la acción de G del esquema de referencias del fibrado vectorial. Por completitud en la exposición se ha creído conveniente introducir una sección dedicada a la construcción del esquema de isomorfismos de módulos, así como de sus propiedades elementales. Se darán dos construcciones distintas del anterior esquema.

En lo sucesivo, k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, V es un k-espacio vectorial n-dimensional y G es un grupo algebraico lineal semisimple dotado de una representación fiel $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$.

2.1. Esquema de isomorfismos

Sea X un k-esquema y considérese dos $\mathcal{O}_X$-módulos quasi-coherentes E y H. Sobre la categoría $\mathbf{Sch}_X$ de X-esquemas se define el funtor de homomorfismos de E en H

$$\underline{\mathrm{Hom}}(E, H) : \mathbf{Sch}_X^{op} \to \mathbf{Sets} \tag{2.1}$$

mediante la asignación $(h : S \to X) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(h^*E, h^*H)$. Análogamente se define el funtor de isomorfismos de E en H como el funtor

$$\underline{\mathrm{Isom}}(E, H) : \mathbf{Sch}_X^{op} \to \mathbf{Sets} \tag{2.2}$$

que asigna, a cada X-esquema $h : S \to X$, el conjunto $\mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_S}(h^*E, h^*H)$.

Teorema 2.3: *Sean E y H haces de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente libres de rango finito. Entonces*

(i) $\underline{\mathrm{Hom}}(E, H)$ *es representable por un esquema liso y afín sobre X;*

(ii) $\underline{\mathrm{Isom}}(E, H)$ *es representable por un X-esquema liso y separado sobre X;*

(iii) $\underline{\mathrm{Isom}}(E, H)$ *es un subesquema abierto de* $\underline{\mathrm{Hom}}(E, H)$ *que es esquemáticamente denso si* $\mathrm{rk}(E) = \mathrm{rk}(H)$.

Demostración. Considérese el $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre $E \otimes_{\mathcal{O}_X} H^\vee$ y tómese su álgebra simétrica, $S^\bullet_{\mathcal{O}_X}(E \otimes_{\mathcal{O}_X} H^\vee)$. El espectro de la anterior $\mathcal{O}_X$-álgebra,

$$\mathrm{H}_{E,H} := \operatorname{Spec}(S^\bullet_{\mathcal{O}_X}(E \otimes_{\mathcal{O}_X} H^\vee)) \tag{2.4}$$

es el representante del funtor (2.1). En efecto, dado un X-esquema $h : S \longrightarrow X$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_X(S, \mathrm{H}_{E,H}) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X-alg}(S^\bullet_{\mathcal{O}_X}(E \otimes_{\mathcal{O}_X} H^\vee), h_*\mathcal{O}_S)\\
&= \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S-alg}(h^* S^\bullet_{\mathcal{O}_X}(E \otimes_{\mathcal{O}_X} H^\vee), \mathcal{O}_S)\\
&= \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S-alg}(S^\bullet_{\mathcal{O}}(h^*E \otimes_{\mathcal{O}_S} (h^*H)^\vee), \mathcal{O}_S)\\
&= \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S-mód}(h^*E \otimes_{\mathcal{O}_S} (h^*H)^\vee, \mathcal{O}_S)\\
&= \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S-mód}(h^*E, h^*H)
\end{aligned}$$

La primera igualdad es la propiedad universal de los X-esquemas afines, mientras que la segunda se debe a la adjunción de la imagen directa e inversa de haces. La tercera igualdad es la propiedad de cambio de base del álgebra simétrica y el hecho de que las operaciones *cambiar de base* y *tomar dual* aplicadas a un módulo localmente libre de rango finito, conmutan. La cuarta igualdad es la propiedad universal del álgebra simétrica y la última se debe a que H es localmente libre de rango finito (y por tanto su cambio de base también) y consecuentemente se verifica el teorema de reflexividad $(H^\vee)^\vee \simeq H$.

Para probar (*ii*) y (*iii*) obsérvese que tanto $\underline{\operatorname{Hom}}(E, H)$ como $\underline{\operatorname{Isom}}(E, H)$ son haces en la topología de Zariski, luego basta probar el resultado localmente. Supóngase que $X = \operatorname{Spec} R$, $E = \mathcal{O}_X^{\oplus m}$ y $H = \mathcal{O}_X^{\oplus n}$. En esta situación $\underline{\operatorname{Hom}}(E, H)$ es representable por el esquema de matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en R, el cual es canónicamente isomorfo al espacio afín $m \times n$-dimensional

$$\mathrm{Mat}_{m\times n,R} \simeq \mathbb{A}^{mn}_R = \operatorname{Spec}(R[x_1, \dots, x_{mn}])$$

Si $m \neq n$, el funtor $\underline{\operatorname{Isom}}(E, H)$ es vacío, supóngase por tanto que $m = n$. En esta situación $\underline{\operatorname{Isom}}(E, H)$ es representable por $\mathrm{Gl}_{n,R}$, que es el subesquema abierto afín de $\mathbb{A}^{n^2}_R$ definido como

$$R[(x_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n]_{(\det)}$$

donde (det) denota al sistema multiplicativo definido por la función determinante, la cual es un polinomio cuyos coeficientes son ± 1, y por tanto no es un divisor del cero. Como consecuencia, $\mathrm{Gl}_{n,R}$ es esquemáticamente denso en $\mathbb{A}^{n^2}_R$ ([GT10, Lemma 9.23]). □

2.2. G-reducciones

Sea X un k-esquema y $P \to X$ un fibrado principal de grupo G. La representación $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$ induce una acción en $P \times V$ dada por la fórmula (1.17)

$$\begin{aligned} (P \times V) \times G &\to P \times V \\ ((p, v), g) &\mapsto (p \cdot g, \rho(g)^{-1} v) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por la Proposición 1.16 es posible construir el espacio fibrado asociado

$$E_P := P \times^G V \to X \tag{2.6}$$

siendo E_P un espacio fibrado sobre X de fibra tipo V, es decir, un fibrado vectorial sobre X. Por construcción, como la representación ρ considerada valora en el grupo $\mathrm{Sl}(V)$, el determinante de E_P es trivial. Cuando no haya confusión se utilizará simplemente la notación E. En lo sucesivo denótese por $V_X = V \times_{\mathrm{Spec}\,k} X \to X$ al fibrado vectorial trivial sobre X de fibra tipo V.

Antes de continuar recuérdese que existe una correspondencia biunívoca y funtorial entre el conjunto de clases de isomorfismos de fibrados vectoriales de rango n sobre un esquema X, y el conjunto de clases de isomorfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente libres de rango n ([Gro61b, 1.7]). A cada fibrado vectorial $E \to X$ le corresponde su haz de secciones $\mathcal{E}$, que sobre un abierto U de X está definido como

$$\mathcal{E}(U) = \mathrm{Hom}_X(U, E) \tag{2.7}$$

y a cada haz localmente libre $\mathcal{E}$ le corresponde el X-esquema afín

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}^{\vee})) \to X \tag{2.8}$$

Mediante la anterior asignación se concluye que, dados dos fibrados vectoriales E y H de rango finito, los funtores

$$\underline{\mathrm{Hom}}(E, H) : \mathbf{Sch}_X^{op} \to \mathbf{Sets} \qquad (h : S \to X) \mapsto \mathrm{Hom}_S(h^*E, h^*H) \tag{2.9}$$

$$\underline{\mathrm{Isom}}(E, H) : \mathbf{Sch}_X^{op} \to \mathbf{Sets} \qquad (h : S \to X) \mapsto \mathrm{Isom}_S(h^*E, h^*H) \tag{2.10}$$

son canónicamente isomorfos a los funtores (2.1) y (2.2) respectivamente, luego representables por esquemas afines y separados sobre X (Teorema 2.3).

Observación 2.11. En lo sucesivo, cuando no produzca confusión, dado un fibrado vectorial E sobre X y un morfismo de X-esquemas $h : S \to X$, se utilizará la notación E_S para denotar al producto fibrado $h^*E = E \times_X S$. Lo análogo para los $\mathcal{O}_X$-módulos. Se denotará por simplicidad, cuando no produzca confusión, $\underline{\mathrm{Hom}}(E, H)$ (resp. $\underline{\mathrm{Isom}}(E, H)$) a los representantes de los funtores (2.1) (resp. 2.2).

Lema 2.12: *Sea $E \to X$ un fibrado vectorial de rango n y fibra tipo V. El X-esquema* $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)$ *es un* $\mathrm{Gl}(V)$*-fibrado principal mediante la acción*

$$f \cdot g = f \circ g \tag{2.13}$$

Demostración. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento afín de X donde V_X y E trivializan. Para cada i se tienen los siguientes isomorfismos canónicos

$$\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)_{|U_i} = \underline{\mathrm{Isom}}(U_i \times_k V, U_i \times_k V) = U_i \times_k \underline{\mathrm{Isom}}(V, V) = \mathrm{Gl}(V) \times_k U_i$$

Como todo recubrimiento de Zariski es un recubrimiento étale, $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)$ es un esquema separado sobre X (Teorema 2.3), y quasi-compacto por ser subesquema abierto de $\underline{\mathrm{Hom}}(V_X, E)$, que es afín sobre X (Teorema 2.3) , se concluye. □

Lema 2.14: *Sea $P \to X$ un G-fibrado principal. Se tiene un isomorfismo canónico de* $\mathrm{Gl}(V)$*-fibrados principales sobre X*

$$P \times^G \mathrm{Gl}(V) \to \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$$

Demostración. Como todo morfismo de $\mathrm{Gl}(V)$-fibrados principales es isomorfismo (Teorema 1.8), basta ver que existe un morfismo $\mathrm{Gl}(V)$-equivariante entre los fibrados considerados. El morfismo

$$\begin{aligned} P \times^G \mathrm{Gl}(V) &\to \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P) \\ [p, \varphi] &\mapsto (v \mapsto [p, \varphi(v)]) \end{aligned}$$

es $\mathrm{Gl}(V)$-equivariante. En efecto, basta observar que $\mathrm{Gl}(V)$-actúa en $P \times^G \mathrm{Gl}(V)$ mediante la fórmula

$$[p, \varphi] \cdot g := [p, \varphi \circ g]$$

y comparando con la acción de $\mathrm{Gl}(V)$ en $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$ descrita en (2.13) se concluye. □

2.2.1. Cociente geométrico de $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$

La representación considerada, $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$, induce sendas G-acciones en los X- esquemas $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$ y $\underline{\mathrm{Hom}}(V_X, E_P)$ mediante la fórmula

$$f \cdot g := f \circ \rho(g)$$

El objetivo de los siguientes párrafos es la construcción de un cociente geométrico universal de $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$ por la acción de G anteriormente definida. La construcción de dicho cociente será esencial para la definición de la G-reducción asociada a un fibrado principal.

Considérese el X-esquema afín

$$\mathrm{H} := \mathrm{Hom}(V_X, E_P) = \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(V_X \otimes_{\mathcal{O}_X} E_P^{\vee}))$$

donde a nivel de haces se tiene que $V_X = V \otimes_k \mathcal{O}_X$.

Observación 2.15. Es evidente que se tiene un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos canónico $V_X \otimes_{\mathcal{O}_X} E_P^{\vee} \quad V \otimes_k E_P^{\vee}$.

La representación ρ induce en $\mathrm{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(V \otimes_k E_P^{\vee})$ una estructura canónica de G-módulo, y, por el Teorema A.21, la inclusión de los invariantes

$$\mathrm{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(V \otimes_k E_P^{\vee})^G \hookrightarrow \mathrm{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(V \otimes_k E_P^{\vee})$$

induce a nivel de espectros un cociente universalmente bueno

$$\mathrm{H} \to \mathrm{H}/\!/G := \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(V^{\vee} \otimes E_P)^G) \tag{2.16}$$

Considérese el morfismo universal de H, este es, el elemento de H asociado a $\mathrm{Id} \in \mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{H})$, que será un morfismo de $\mathcal{O}_{\mathrm{H}}$-módulos

$$\mathrm{h} : V_{\mathrm{H}} \to (E_P)_{\mathrm{H}}$$

Como V_{H} y $(E_P)_{\mathrm{H}}$ son $\mathcal{O}_{\mathrm{H}}$-módulos localmente libres del mismo rango, el anterior morfismo induce uno entre las álgebras exteriores de grado máximo

$$\wedge V_{\mathrm{H}} \to \wedge (E_P)_{\mathrm{H}}$$

El anterior morfismo se puede expresar de forma equivalente como

$$\det \mathrm{h} : \mathcal{O}_H \to \wedge V_{\mathrm{H}}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{H}}} \wedge (E_P)_{\mathrm{H}}$$

Definición 2.17. El haz de línea $\wedge V_{\mathrm{H}}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{H}}} \wedge (E_P)_{\mathrm{H}}$ se llamará **haz de línea determinante** sobre H.

La sección

$$\det \mathrm{h} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{H}, \wedge V_{\mathrm{H}}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{H}}} \wedge (E_P)_{\mathrm{H}})$$

se llamará **sección determinante**. El fibrado de línea asociado al haz de línea determinante se denotará por

$$\mathrm{DET} := \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{\bullet}(\wedge V_{\mathrm{H}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{H}}} \wedge (E_P)_{\mathrm{H}}^{\vee})) \to \mathrm{H}$$

Se seguirá denotando por $\det \mathrm{h}$ a la sección obtenida mediante el isomorfismo canónico

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{H}, \wedge V_{\mathrm{H}}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{H}}} \wedge (E_P)_{\mathrm{H}}) = \Gamma(\mathrm{H}, \mathrm{DET})$$

La naturaleza funtorial de la sección determinante, así como su estabilidad por cambios de base, se pueden comprobar en este caso particular de forma inmediata por ser el esquema H afín sobre X. No obstante, todas estas propiedades se deducen de la teoría general del determinante de complejos perfectos sobre esquemas desarrollada en [KM76].

Teorema 2.18: *El fibrado determinante* $\mathrm{DET} \to \mathrm{H}$ *está dotado, de forma canónica, de una* G*-acción compatible con la acción de* G *en* H*. Es decir, el siguiente cuadrado*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{DET} \times G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{DET} \arrow[d] \\ \mathrm{H} \times G \arrow[r] & \mathrm{H} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. En primer lugar obsérvese que el fibrado determinante admite la siguiente descripción

$$\mathrm{DET} \quad \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{\bullet}_{O_X}(\wedge V \otimes_{\mathrm{k}} \wedge (E_P)^{\vee}) \times_X \mathrm{H} \tag{2.19}$$

La representación $\rho : G \to \mathrm{Sl}(V)$ induce una representación en el álgebra exterior de grado máximo de V

$$\det\rho : G \to \mathrm{Sl}(V) \qquad \det\rho(g)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) := \rho(g)(v_1) \wedge \ldots \wedge \rho(g)(v_n)$$

La acción de G en $\mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{\bullet}_{O_X}(\wedge V \otimes_{\mathrm{k}} \wedge (E_P)^{\vee}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\wedge V, \wedge E_P)$ viene dada por la fórmula

$$\varphi \cdot g := \varphi \circ \det\rho(g)$$

La condición de que G valore en el grupo $\mathrm{Sl}(V)$ implica que $\det\rho(g) = 1$ para todo g, y por tanto, la acción de G en $\underline{\mathrm{Hom}}(\wedge V, E_P)$ es trivial. Utilizando la descripción del fibrado determinante dada en (2.19) junto con la anterior observación, se sigue que el grupo G actúa en DET mediante la siguiente fórmula

$$(\varphi, f) \cdot g := (\varphi, f \circ \rho(g))$$

La compatibilidad de las G-acciones en DET y en H es ahora inmediata. □

Corolario 2.20: *El haz de línea determinante* $\wedge V_{\mathrm{H}}^{\vee} \otimes_{O_{\mathrm{H}}} \wedge (E_P)_{\mathrm{H}}$ *admite una* G*-linealización canónica. La sección determinante* $\det_{\mathrm{H}} \in H^0(\mathrm{H}, \wedge V_{\mathrm{H}}^{\vee} \otimes_{O_{\mathrm{H}}} \wedge (E_P)_{\mathrm{H}})$ *es* G*-invariante.*

Demostración. Dado un esquema X donde G actúa, y un haz de O_X-módulos invertible L, existe una correspondencia biunívoca canónica entre el conjunto de G-linealizaciones en L, y el conjunto de G-acciones sobre el fibrado de línea asociado $L \to X$ compatibles con la acción de G en X (Teorema A.24).

Decir que la sección $\det \mathrm{h}$ del haz determinante es G-invariante es equivalente a decir que la sección geométrica asociada

$$\det \mathrm{h} : \mathrm{H} \to \mathrm{DET}$$

es G-invariante en el sentido de la Definición A.25. Si Σ denota a la G-acción canónica en DET descrita en el Teorema 2.18, y σ denota a la acción de G en H, entonces se trata de ver que para todo $g \in G$ se verifica la siguiente ecuación

$$\Sigma(-, g) \circ \det \mathrm{h} \circ \sigma(-, g^{-1}) = \det \mathrm{h}$$

Considerando un punto $f \in \mathrm{H}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(\Sigma(-, g) \circ \det \mathrm{h} \circ \sigma(-, g^{-1}))(h) = & \\ & (\Sigma(-, g) \circ \det \mathrm{h}(f \circ \rho(g^{-1})) = \\ & \Sigma(-, g)(f \circ \rho(g^{-1}), \wedge(f) \circ \wedge\rho(g^{-1})) = \\ & \Sigma(-, g)(f \circ \rho(g^{-1}), \wedge f) = \\ & (f \circ \rho(g^{-1}) \circ \rho(g), \wedge f) = \\ & (f, \wedge f) = \\ & \det \mathrm{h}(f)\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad es consecuencia de que ρ valore en $\mathrm{Sl}(V)$. □

El siguiente resultado permite dar una caracterización del esquema de isomorfismos $\mathrm{I} := \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$ como el locus de puntos estables de H con respecto la $\mathrm{Sl}(V)$-linealización canónica del haz estructural de H, ó, equivalentemente, como el subesquema abierto de H donde la sección determinante $\det \mathrm{h}$ no se anula.

Teorema 2.21: *Sea $h \in \mathrm{H}$ un punto cerrado. Las siguientes condiciones son equivalentes*

(i) *h es estable con respecto la acción de $\mathrm{Sl}(V)$ en H, es decir, tiene órbitas cerradas y el subgrupo de isotropía es finito,*

(ii) $h \in \mathrm{I}$,

(iii) $h \notin (\det \mathrm{h})_0$; *es decir,* $(\det \mathrm{h})(h) = \det(h) \neq 0$;

Demostración.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Si h es estable entonces, su subgrupo de isotropía $\mathrm{Sl}(V)_h$ es 0-dimensional. Si h no es un isomorfismo considérese una descomposición de V como

$$V \quad \mathrm{Im}\, h \oplus W$$

Sea $\sigma \in \mathrm{Sl}(V)$ un elemento tal que

$$\sigma|_{\mathrm{Im}\, h} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, h}$$

con $\sigma \neq \mathrm{Id}_V$. Es claro que $\sigma \in \mathrm{Sl}(V)_h$ y que existe una familia 1-dimensional de tales elementos σ, ya que $\sigma + \tau \in \mathrm{Sl}(V)_h$ para todo $\tau : \mathrm{Im}\, h \oplus W \to \mathrm{Im}\, h \oplus W$ tal que $\tau|_{\mathrm{Im} h} = 0$ y $\mathrm{Im}(\tau|_W) \subset \mathrm{Im}\, h$. Contradicción.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Obsérvese que $\sigma \in \mathrm{Sl}(V)_h$ si y sólo si $h = \sigma \circ h$ o, equivalentemente, $\mathrm{Im}\, h \subseteq \ker(\mathrm{Id} - \sigma)$. Por ser h epiyectivo, σ es la identidad y por tanto $\sigma \in \mathrm{Sl}(V)_h = \{\mathrm{Id}\}$.

Además, como $\mathrm{h} : V_{\mathrm{H}} \to (E_P)_{\mathrm{H}}$ es el objeto universal y la epiyectividad es una condición abierta, se sigue que existe un entorno abierto U de h tal que $\mathrm{h}|_U$ es epiyectivo. El anterior argumento prueba que to $h^I \in \mathrm{Sl}(V) \cdot h$ es epiyectivo, y por tanto $\mathrm{Sl}(V)_h = \{\mathrm{Id}\}$. Como $\dim \mathrm{Sl}(V)_h = \dim \mathrm{Sl}(V)_h$ para todo $h^I \in \mathrm{Sl}(V) \cdot h$, se sigue que $\mathrm{Sl}(V) \cdot h$ es cerrado.

Como $\mathrm{Sl}(V) \cdot h$ es cerrado y $\mathrm{Sl}(V)_h$ es 0-dimensional, se tiene que h es estable.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Inmediato. □

Corolario 2.22: *Si $h \in \mathrm{I}$, entonces h es estable con respecto la G-acción de* H, *es decir,* $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{H}^s$ *es un abierto.*

Demostración. Como G puede ser entendido como un subgrupo de $\mathrm{Sl}(V)$ a través de la representación fiel ρ, la implicación (ii) $\Longrightarrow$ (i) del Teorema 2.21 sigue siendo cierta. Explícitamente, supóngase que $h \in \mathrm{I}$ y obsérvese que $\sigma \quad G_h$ si y sólo si $h = \rho(\sigma) \circ h$ o, equivalentemente, $\mathrm{Im}\, h \subseteq \ker(\mathrm{Id} - \rho(\sigma))$. Por ser h epiyectivo, $\rho(\sigma)$ es la identidad y, como ρ es fiel, se sigue σ es el elemento neutro de G y por tanto $\sigma \in G_h = \{e\}$.

Además, como $\mathrm{h} : V_{\mathrm{H}} \to (E_P)_{\mathrm{H}}$ es el objeto universal y la epiyectividad es una condición abierta, se sigue que existe un entorno abierto U de h tal que $\mathrm{h}|_U$ es epiyectivo. El anterior argumento prueba que to $h^I \in G \cdot h$ es epiyectivo, y por tanto $G_h = \{e\}$. Como $\dim G_h = \dim G_h$ para todo $h^I \in G \cdot h$, se sigue que $G \cdot h$ es cerrado.

Como $G \cdot h$ es cerrado y G_h es 0-dimensional, se tiene que h es estable. □

Teorema 2.23: *Existe el cociente geométrico universal de* I *por la acción de G. El cociente se denotará por* I/G. *Se verifica además que I/G es un subesquema abierto del cociente universalmente bueno* $\mathrm{H}/\!/G$ (2.16) *de* H *por la acción de G.*

Demostración. En el caso particular de considerar la G-linealización canónica del haz estructural de H, todo punto de H es semi-estable, y el cociente universalmente bueno del Teorema A.27 es precisamente el cociente obtenido en el Teorema A.21, es decir, $\mathrm{H}//G$.

Como I es un subesquema abierto de H donde todo punto es estable con respecto la G-acción (Corolario 2.22), y además es un subesquema definido por una sección G-invariante det h (Teorema 2.21 y Corolario 2.20), se sigue que I es un abierto G-invariante de puntos estables, donde el morfismo de inclusión $\mathrm{I} \hookrightarrow \mathrm{H}$ es afín por construcción. Emulando la demostración del Teorema A.27 se sigue que existe un cociente geométrico universalmente bueno $\mathrm{I} \to \mathrm{I}/G$ siendo I/G un subesquema abierto de H, de tal modo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{H} \arrow[d] \\ \mathrm{I}/G \arrow[r, hook] & \mathrm{H}//G \end{tikzcd}$$

donde los morfismos horizontales son las inclusiones naturales y los morfismos verticales son los morfismos cociente. □

Utilizando el Lema del descenso de Drezet y Narasimhan [Dré89, Théorème 2.3], como para todo punto cerrado h de H se tiene que el grupo de isotropía G_h actúa trivialmente en la fibra DET_h, se sigue que el fibrado determinante DET desciende a $\mathrm{H}//G$, es decir, existe un fibrado de línea $\overline{\mathrm{DET}}$ sobre $\mathrm{H}//G$ tal que el siguiente cuadrado es cartesiano

$$\begin{tikzcd} \mathrm{DET} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\mathrm{DET}} \arrow[d] \\ \mathrm{H} \arrow[r] & \mathrm{H}//G \end{tikzcd}$$

Es más, como la sección det h es G-invariante (Corolario 2.20) se sigue que existe una sección del fibrado determinante descendido

$$\overline{\det} : \mathrm{H}//G \to \overline{\mathrm{DET}} \tag{2.24}$$

tal que su pullback por el morfismo cociente $\mathrm{H} \to \mathrm{H}//G$ es la sección determinante det h. Debido a la construcción de det h y DET mediante la Teoría General del Determinante desarrollada en [KM76], así como el hecho de que los cocientes $\mathrm{H} \to \mathrm{H}//G$ y $\mathrm{I} \to \mathrm{I}/G$ son universales, se sigue que $\overline{\mathrm{DET}}$ y $\overline{\det}$ cambian de base para cualquier morfismo de X-esquemas $S \to X$. Por construcción, se tiene que

$$\mathrm{I}/G = \mathrm{H}//G - (\overline{\det})_0 \tag{2.25}$$

Proposición 2.26: *El morfismo natural $P \to \mathrm{I} = \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$ dado por la fórmula $p \mapsto (v \mapsto [p, v])$ es G-equivariante.*

Demostración. Basta observar que para todo $g \in G$ se tiene que

$$p \cdot g \mapsto (v \mapsto [p \cdot g, v])$$

y dos elementos (p, v), (p^I, v^I) de $P \times V$ están en la misma clase de equivalencia si y sólo si existe un $g \in G$ verificando que $p^I = p\ g$ y $v^I = \rho(g)^{-1}\ v$ (recuérdese la construcción del fibrado vectorial asociado (2.5)). En este caso particular se tiene que $[p \cdot g, v] = [p, \rho(g)v]$ y por tanto

$$(v \mapsto [p \cdot g, v]) = (v \mapsto [p, \rho(g)v]) = (v \mapsto [p, v]) \cdot g$$

donde la última igualdad se debe a la G-acción en I (2.13). □

Corolario 2.27: *Sea P un G-fibrado principal sobre X. Existe un morfismo canónico X-esquemas*

$$s_P : X \to \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)/G$$

haciendo cartesiano el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{I} = \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "s_P"'] & \mathrm{I}/G = \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)/G \end{tikzcd}$$

Demostración. La composición del morfismo $P \to \mathrm{I}$ descrito en la Proposición 2.26, junto con el morfismo de paso al cociente $\mathrm{I} \to \mathrm{I}/G$, es un morfismo G-invariante $P \to \mathrm{I}/G$. Como P es un fibrado principal con respecto la topología étale, $P \quad X$ es un cociente geométrico universal (Teorema 1.13) y por tanto un cociente categorial. Se tiene por tanto que existe un único morfismo $s_P : X \to \mathrm{I}/G$ haciendo el diagrama del enunciado cartesiano. □

Proposición 2.28: *El cociente geométrico $\mathrm{I} \to \mathrm{I}/G$ es un G-fibrado principal con respecto la topología étale. Existe un isomorfismo canónico*

$$\mathrm{I}/G \quad \mathrm{I} \times^G (\mathrm{Gl}(V)/G)$$

Demostración. Por ser $\mathrm{I} \to \mathrm{I}/G$ un cociente geométrico, el morfismo cociente es epiyectivo y afín, luego quasi-compacto y separado. Ahora, basta observar que por ser I un $\mathrm{Gl}(V)$-fibrado principal sobre X, entonces $\to \mathrm{I} \times^G (\mathrm{Gl}(V)/G)$ es un G-fibrado principal (Proposición 1.21). Como todo fibrado principal es un cociente geométrico universal (Teorema 1.13) y este es único salvo un único isomorfismo, se sigue que I/G y $\mathrm{I} \times^G (\mathrm{Gl}(V)/G)$ son canónicamente isomorfos. □

Definición 2.29. Una G-**reducción** sobre X es una pareja (E, s), siendo E un fibrado vectorial de de fibra tipo V y determinante trivial, y $s : X \to \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)//G$ un morfismo de X-esquemas.

Un **morfismo de** G**-reducciones** $(E, s) \to (E^I, s^I)$ es un morfismo de fibrados vectoriales $f : E \to E$ tal que $s^I = f \circ s$, donde $f : \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)/G \to \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E^I)/G$ es el morfismo inducido por f. El morfismo de G-reducciones $(E, s) \to (E^I, s^I)$ es un isomorfismo si f es un isomorfismo.

Teorema 2.30: *Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de G-fibrados principales sobre X y el conjunto de G-reducciones sobre X.*

Demostración. Sea P un G-fibrado principal. La G-reducción asociada a P es (E_P, s_P) siendo s_P el morfismo obtenido en el Corolario 2.27. La asignación inversa es la siguiente. Dado una G-reducción (E, s), se considera el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E) \arrow[d, no head] \\ X \arrow[r, "s"'] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)/G \end{tikzcd}$$

Por la Proposición 2.28, se tiene que $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E) \to \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)/G$ es un G-fibrado principal con respecto la topología étale y

$$\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)/G \quad \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E) \times^G (\mathrm{Gl}(V)/G)$$

Como el pullback de un G-fibrado principal vuelve a ser un G-fibrado principal se tiene un G-fibrado principal sobre X que hace el siguiente diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd} P_E := s^*(\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)) \arrow[r] \arrow[d, no head] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E) \arrow[d, no head] \\ X \arrow[r, "s"'] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)/G \end{tikzcd}$$

Dado un fibrado principal P, se tiene que $P_{E_P} \quad P$ canónicamente. En efecto, a partir de P se construye el diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, no head] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P) \arrow[d, no head] \\ X \arrow[r, "s"'] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)/G \end{tikzcd}$$

y se tiene un morfismo canónico $s^*(\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)) \to P$ de G-fibrados principales. Como todo morfismo de G-fibrados principales es isomorfismo, se concluye.

Considérese ahora una G-reducción (E, s), entonces se tiene un isomorfismo canónico de G-reducciones (E, s) (E_{P_E}, s_{P_E}), donde (E_{P_E}, s_{P_E}) es la G-reducción asociada al fibrado principal P_E. En efecto, en primer lugar, obsérvese que se tiene un isomorfismo canónico de $\mathrm{Gl}(V)$-fibrados principales sobre X (Lema 2.14)

$$\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_{P_E}) \quad P_E \times^G \mathrm{Gl}(V)$$

Por otro lado, $P_E \times^G \mathrm{Gl}(V)$ es canónicamente isomorfo a $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)$ como $\mathrm{Gl}(V)$-fibrado principal mediante la asignación

$$[(\varphi, x, g)] \mapsto \varphi$$

Componiendo los anteriores isomorfismos de $\mathrm{Gl}(V)$-fibrados principales se obtiene un isomorfismo canónico de $\mathrm{Gl}(V)$-fibrados principales sobre X

$$\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_{P_E}) \quad \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)$$

Tomando cocientes por la G-acción, se tiene un isomorfismo inducido entre los cocientes (que es único, pues cada uno de ellos son cocientes categoriales)

$$\kappa : \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_{P_E})/G \quad \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)/G$$

Además, la sección inducida $s_{P_E} : X \to \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_{P_E})$ verifica que

$$s^*_{P_E}\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_{P_E}) \quad P_E = s^*\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)$$

Mediante el isomorfismo κ, se tiene que

$$s^*\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P) \quad (\kappa^{-1} \circ s)^*\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_{P_E})$$

y por tanto, se concluye que $s_{P_E} = \kappa^{-1} \circ s$ de donde se sigue que $s = \kappa \circ s_P$.

Por último obsérvese que existe una correspondencia biyectiva entre el grupoide de $\mathrm{Gl}(V)$-fibrados principales sobre X y el grupoide de fibrados vectoriales sobre X de fibra tipo V, donde las flechas de la categoría son los isomorfismos de fibrados vectoriales. A cada $\mathrm{Gl}(V)$-fibrado principal $Q \to X$ se le asigna el fibrado vectorial asociado $Q \times^{\mathrm{Gl}(V)} G$ (Proposición 1.16), y a cada fibrado vectorial E de fibra tipo V se le asigna su fibrado de referencias, es decir, $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)$. Las asignaciones son inversas una de la otra. Mediante la anterior construcción se sigue que el isomorfismo $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_{P_E})$ $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)$ viene determinado por un isomorfismo canónico de fibrados vectoriales

$$E_{P_E} \to E$$

□

2.3. Demostración del Teorema de Serre

El presente capítulo finaliza con el Teorema de Serre, el cual servirá como piedra angular para la construcción del espacio de móduli de fibrados principales con trivialización formal. El Teorema de Serre clásico afirma lo siguiente:

Teorema 2.31: [Ser55, Prop 9]*Sea X un esquema íntegro, separado y de tipo finito sobre un cuerpo* k *algebraicamente cerrado de característica cero. Sea G un grupo algebraico y H un subgrupo cerrado de G. Dar un H-fibrado principal equivale a dar un fibrado principal de grupo G y una sección s del espacio fibrado asociado de fibra tipo G/H*

$$\begin{tikzcd} P \times^G (G/H) = P/H \arrow[r] & X \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

Cabe destacar que las hipótesis del artículo de Serre [Ser55] son distintas a las nuestras. En este trabajo no se ha impuesto ninguna condición sobre el esquema base, pero a cambio, el morfismo estructural de los fibrados principales considerados es quasi-compacto y separado. La generalización del Teorema 2.31 consiste no solo en estudiar la correspondencia a nivel de objetos, si no también a nivel de morfismos, comprobando la funtorialidad de las construcciones con respecto el esquema base X, que ahora es arbitrario, y la extensión del grupo estructural. Obsérvese, que el Teorema 2.30 es un caso particular del Teorema 2.31 bajo las hipótesis consideradas en esta tesis.

Definición 2.32. Se define el grupoide de G-reducciones sobre X como la categoría cuyo objetos son las G-reducciones (E, s), y los morfismos de la categoría son los isomorfismos de G-reducciones.

Teorema 2.33: *Sea X un* k*-esquema y sea G un grupo algebraico lineal semisimple dotado de una representación fiel $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$, siendo V un* k*-espacio vectorial n-dimensional. Se tiene una equivalencia de grupoides*

$$G\text{-fibrados principales sobre } X \qquad G\text{-reducciones sobre } X \tag{2.34}$$

donde a cada G-fibrado principal P se le asigna la G-reducción (E_P, s_P), siendo E_P el fibrado vectorial construido en (2.6) *y s_P es el morfismo de X-esquemas dado en el Corolario 2.27; y a cada G-reducción (E, s) se le asocia el G-fibrado principal $P_E := s^*(\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E))$.*

La anterior equivalencia es funtorial en X, es decir que para todo morfismo de k*-esquemas, $f : S \to X$, se verifica que $(E_{f^*P}, s_{f^*P}) = (f^*E_P, f^*s_P)$ y $P_{f^*E} = f^*P_E$.*

Demostración. Las asignaciones definidas en el enunciado son inversas una de la otra a nivel de objetos (Teorema 2.30). Considérese un isomorfismo de G-fibrados principales $P \to P^I$. Por construcción, se tiene un isomorfismo canónico entre los fibrados vectoriales asociados $E_P \quad E_P$ que inducen un isomorfismo canónico de $\mathrm{Gl}(V)$-fibrados principales entre sus esquemas de referencia $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$ $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$. Obsérvese que se tiene la siguiente identificación canónica

$$P \quad P \times^G G \quad (P \times G)/G$$

así como (Lema 2.14)

$$P \times_G \mathrm{Gl}(V) \quad \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$$

Ahora es claro cuál es el morfismo G-equivariante natural $P \to \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$. Lo análogo para P^I. Se tiene por tanto el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, dash] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P) \arrow[d, dash] \\
P^I \arrow[r] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)
\end{tikzcd}$$

Tomando cocientes por la acción de G en cada uno de los términos del anterior diagrama se obtiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s_P"'] \arrow[rr, bend left, "s_P"] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)/G \arrow[r, "\simeq"] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)/G
\end{tikzcd}$$

de donde se concluye.

Recíprocamente, sea $(E, s) \to (E^I, s^I)$ un isomorfismo de G-reducciones. El isomorfismo de fibrados vectoriales $f : E \quad E^I$, induce un isomorfismo de $\mathrm{Gl}(V)$-fibrados principales $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)$ $\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E^I)$, y por tanto un isomorfismo entre los cocientes. Sean P_E y P_E los fibrados principales asociados a las G-reducciones consideradas, la condición de compatibilidad entre las secciones s y s^I induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P_E \arrow[r] \arrow[d, dash] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E) \arrow[d, dash] \\
P_E & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E^I)
\end{tikzcd}$$

donde $P_E \to P_E^I$ es un morfismo G-equivariante entre fibrados principales, y por tanto un isomorfismo.

Falta por ver que la asignación es funtorial en X. Considérese un morfismo de X-esquemas $f: S \to X$, y P un G-fibrado principal sobre X. En primer lugar obsérvese que la construcción del espacio fibrado asociado (Proposición 1.16) conmuta con cambios de base, es decir, se verifica la fórmula

$$f^*(E_P) \quad E_{f^*P} \tag{2.35}$$

Esto es inmediato observando que G actúa trivialmente en S y por tanto existe un isomorfismo canónico de S-esquemas

$$(P \times^G V) \times_X S \quad (P \times_X S) \times^G V$$

que consiste en permutar los factores. Para probar que la sección s_P de la G-reducción asociada a P es estable por cambios de base obsérvese que, por los mismos argumentos que antes,

$$P \times^G \mathrm{Gl}(V) = \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)$$

es estable por cambios de base de forma canónica y además,

$$\underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P) \to \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P)/G$$

es un cociente geométrico universal (Teorema 2.23), luego estable por cambios de base. Se concluye por tanto que $s_{f^*P} = f^* s_P$ y por consecuente $(E_{f^*P}, s_{f^*P}) = (f^* E_P, f^* s_P)$.

Los mismos argumentos dados sirven para probar que $P_{f^*E} = f^* P_E$ de forma canónica. Se concluye la demostración. □

3. Trivializaciones de fibrados principales

En el presente capítulo se realiza un estudio sistemático de las trivializaciones de un fibrado principal. En la primera sección se realiza una breve revisión bibliográfica del artículo de Drinfeld y Simpson [DS95] donde se prueba que todo fibrado principal sobre una curva algebraica trivializa en la topología de Zariski. En la segunda sección se prueba que todo fibrado principal sobre una curva algebraica trivializa al restringir al disco formal. Finalmente se demostrará que la correspondencia de Serre (Teorema 2.33) es compatible con trivializaciones, es decir, que toda trivialización de un fibrado principal induce de modo canónico una trivialización en la G-reducción asociada de forma canónica y recíprocamente. Este resultado será clave a la hora de construir el espacio de móduli de fibrados principales con trivialización formal sobre una curva algebraica en el capítulo 4, así como el espacio de móduli de fibrados principales singulares con trivialización formal y el espacio de móduli de fibrados principales singulares lineales con trivialización formal considerados en la segunda parte de esta memoria.

3.1. Grupos especiales

Al principio de esta memoria se tomó como convenio que todos los fibrados principales considerados serían entendidos con respecto la topología étale. La motivación detrás de esta decisión es que, por lo general, la topología de Zariski es demasiado gruesa para el estudio de los fibrados principales. Para ejemplificar dicha problemática se recuerda en las siguientes definiciones lo que es un revestimiento y un revestimiento de Galois. (El lector interesado puede consultar un estudio sistemático de la teoría de revestimientos de Galois en el contexto de la Geometría Algebraica en [Sza09, §5])

Definición 3.1. Sean X e Y dos esquemas. Un **revestimiento étale** de grado n es un morfismo finito étale epiyectivo $f: X \to Y$ tal que $f_* \mathcal{O}_X$ es un módulo localmente libre de rango n.

Un revestimiento étale es un **revestimiento de Galois** si X es conexo y se trivializa a sí mismo, es decir, si se tiene un isomorfismo

$$X \times_Y X \cong X \sqcup \overset{n)}{\cdots} \sqcup X$$

Teorema 3.2: [Sza09, Proposition 5.3.7] *Sea $f: X \to Y$ un revestimiento étale y $G \subset \mathrm{Aut}_Y(X)$ un subgrupo. El cociente geométrico X/G es isomorfo a Y si y sólo si f es un revestimiento de Galois y $G = \mathrm{Aut}_Y(X)$.*

Utilizando que dado un revestimiento de Galois, la acción del grupo de automorfismos es libre y transitiva, se obtiene que todo revestimiento de Galois es en particular un fibrado principal con respecto la topología étale, pero no necesariamente con respecto la topología de Zariski. Por ejemplo considérese Spec(k). Los revestimiento de Galois de Spec(k) se corresponden con las extensiones de Galois de k, que son fibrados principales que se auto-trivializan, pero que no son triviales con respecto la topología de Zariski.

No obstante, aunque por norma general no todo fibrado principal con respecto la topología étale es localmente trivial en la topología de Zariski, existen una clase de grupos algebraicos que verifican precisamente dicha condición.

Definición 3.3. Un grupo algebraico G se dice **especial** si todo fibrado principal de grupo G con respecto la topología étale, es también un G-fibrado principal con respecto la topología de Zariski.

Teorema 3.4: [Ser55, Théorème 1, Section 4] *Todo grupo especial es conexo y lineal.*

Teorema 3.5: [Ser55, Théorème 2, Section 4] *Para que un subgrupo algebraico G de Gl_n sea especial, es condición necesaria y suficiente que la fibración $\mathrm{Gl}_n \to \mathrm{Gl}_n/G$ sea localmente trivial con respecto la topología de Zariski.*

Ejemplo 3.6. Algunos ejemplos de grupos especiales son los siguientes ([Ser55, Section 4.4])

- El grupo multiplicativo G_m.
- El grupo aditivo G_a.
- El grupo general lineal Gl_n.
- El grupo especial lineal Sl_n.
- El grupo simpléctico Sp_{2n}.

La clasificación completa de los grupos algebraicos especiales semisimples se debe a Grothendieck, y está recogida en el siguiente Teorema.

Teorema 3.7: [Gro58, Théorème 3] *Sea G un grupo algebraico. Para que G sea especial es condición necesaria y suficiente que G sea afín, conexo y sin torsión. Si G es afín, semisimple y sin torsión, entonces G es isomorfo a un producto directo de grupos de la forma Sl_n y Sp_{2n}.*

Para finalizar la sección se enuncian dos Teoremas relativos a los fibrados principales sobre curvas algebraicas, siendo los resultados centrales del artículo de Drinfeld y Simpson [DS95].

Sea S un k-esquema y $C \to S$ un esquema liso y propio sobre S cuyas fibras geométricas son curvas íntegras y conexas. Recuérdese que un **subgrupo de Borel** de G es un subgrupo algebraico maximal entre todos los subgrupos conexos, resolubles y cerrados. De ahora en adelante, sea B un subgrupo de Borel de G fijo.

Teorema 3.8: [DS95, Theorem 1] Todo G-fibrado principal sobre C admite una reducción del grupo estructural a B después de un cambio de base $S^I \to S$ adecuado, siendo el anterior morfismo étale y epiyectivo.

Teorema 3.9: [DS95, Theorem 2] Todo G-fibrado principal sobre C es localmente trivial en la topología de Zariski después de un cambio de base étale adecuado $S^I \to S$. Si además $S = \mathrm{Spec}(k)$, no es necesario considerar un cambio de base, es decir, todo G-fibrado principal sobre una curva algebraica proyectiva C sobre Spec(k) es localmente trivial en la topología de Zariski.

3.2. Fibrados principales sobre el disco formal

En la presente sección se introduce la noción de fibrado principal sobre un esquema formal, y se prueba, que todo fibrado principal sobre el espectro de un k-álgebra linealmente topológica admisible induce uno sobre el esquema formal asociado. Se estudia también el caso relativo a la completación de un esquema a lo largo de un subesquema cerrado. Para las definiciones y resultados utilizados relativos a la teoría de esquemas formales se recomienda al lector consultar el Apéndice B.

Definición 3.10. Sea X un esquema formal y sea $G = \mathrm{Spec}(k[G])$ un grupo algebraico afín. Un G-**fibrado principal** sobre X con respecto la topología fppf es dar un esquema formal P dotado de una G-acción junto con un morfismo de esquemas formales $\pi : \mathrm{P} \to \mathrm{X}$ que es G-invariante, fielmente plano, y tal que se tiene un isomorfismo de esquemas formales

$$\mathrm{P} \times_{\mathrm{Spf(k)}} \times G \quad \mathrm{P} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{P}$$

En esta situación el G-fibrado principal trivial sobre X se define como el esquema formal $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Spf(k)}} G$ dotado de la G-acción dada por la multiplicación de G, y donde el morfismo $\pi : \mathrm{X} \times_{\mathrm{Spf(k)}} G \to \mathrm{X}$ es el dado por la proyección en el primer factor.

A continuación se explicará como asignar a cada fibrado principal sobre el espectro de una k-álgebra linealmente topológica admisible un fibrado principal formal sin necesidad de imponer condiciones de noetherianidad sobre la k-álgebra.

Definición 3.11. Sea A una k-álgebra linealmente topológica admisible, e I un ideal de definición. Sea $P \to \mathrm{Spec}(A)$ un G-fibrado principal, y denótese por

$$i_n : \mathrm{Spec}(A/I^n) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

a las inmersiones cerradas naturales. Se define el **G-fibrado formal asociado** a P como sigue.

- Para todo $n \geq 1$, se considera el G-fibrado principal P_n como

$$\pi_n : i^*_n P \to \operatorname{Spec}(A/I^n)$$

  Obsérvese que por tenerse para todo $m < n$ el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}(A/I^m) \arrow[rr, "\Theta_{mn}"] \arrow[dr, "i_m"'] & & \operatorname{Spec}(A/I^n) \arrow[dl, "i_n"] \\
& \operatorname{Spec}(A) &
\end{tikzcd}$$

  se tienen isomorfismos canónicos $\Theta^*_{mn} P_n = \Theta^*_{mn} i^*_n P = i^*_m P = P_m$.

- Los morfismos $f_{mn} : P_m \to P_n$ son los naturales.

Teorema 3.12: *Sea A una* k*-álgebra linealmente topológica admisible, e I un ideal de definición. El G-fibrado formal asociado a P define un G-fibrado principal en el sentido de la Definición 3.10 sobre* $\operatorname{Spf}(A)$.

Demostración. Defínase el espacio topológico anillado

$$\mathrm{P} := (|P_1|, \mathcal{O}_{\mathrm{P}} := \varprojlim \mathcal{O}_{P_i})$$

Como G es afín, el morfismo estructural de un fibrado principal $\pi : P \to \operatorname{Spec}(A)$ es afín (Corolario 1.6), y por tanto $P = \operatorname{Spec}(B)$ siendo B una A-álgebra. Se tiene por tanto que $P_n = \operatorname{Spec}(B \otimes_A A/I^n)$ y por tanto P tiene como espacio topológico subyacente a $\operatorname{Spec}(B/IB)$ y como haz de anillos a $\varprojlim B/I^n B$.

Ahora es claro que, denotando por $\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_{P_n} = B/I^n B$, los morfismos naturales $u_{ij} : \mathcal{O}_{n+1} \to \mathcal{O}_n$ inducidos por los morfismos $f_{ij} : P_i \to P_j$ son epiyectivos. Por último, obsérvese que $(\mathrm{P}, \mathcal{O}_{P_i}) = P_i$ como esquema, y el núcleo del morfismo $\mathcal{O}_i \to \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{P_1}$ es nilpotente por la construcción del G-fibrado formal asociado. Por el Teorema B.13 se tiene que $(\mathrm{P}, \mathcal{O}_{\mathrm{P}} := \varprojlim \mathcal{O}_{P_i})$ es un esquema formal. De hecho, $\mathrm{P} = \operatorname{Spf}(\hat{B})$, donde $\hat{B} = \varprojlim (B/I^n B)$.

Por definición de límite inductivo, se tiene un morfismo inducido entre los límites $\mathrm{P} \to \operatorname{Spf}(A)$. Este morfismo está caracterizado como el único morfismo de esquemas formales que hacen los diagramas

$$\begin{tikzcd}
P_n \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n"'] & (\mathrm{P}, \mathcal{O}_{\mathrm{P}}) \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}(A/I^n) \arrow[r] & \operatorname{Spf}(A)
\end{tikzcd}$$

cartesianos. Como para cada n, el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n+1} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(A/I^n) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A/I^{n+1}) \end{tikzcd}$$

era cartesiano, el morfismo entre los esquemas formales obtenidos es ádico (véase Definición B.12)

Obsérvese además que se tiene una familia compatible de morfismos

$$\begin{tikzcd} P_n \times G \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_n \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(A/I^n) & \end{tikzcd}$$

que es compatible con el sistema inductivo dado por $\{\mathrm{Spec}(A/I^n) \to \mathrm{Spec}(A/I^{n+1})\}$, luego induce un morfismo $\mathrm{P} \times G \to \mathrm{P}$ sobre $\mathrm{Spf}(A)$. Como en cada una de las etapas del límite era una G-acción, en el límite es una G-acción. El mismo razonamiento muestra que se tiene un isomorfismo de esquemas formales

$$\mathrm{P} \times G \simeq \mathrm{P} \times_{\mathrm{Spf}(A)} \mathrm{P}$$

por tener dicho isomorfismo en cada etapa del límite ya que $P_n \to \mathrm{Spec}(A/I^n)$ es un fibrado principal con respecto la topología étale para cada n. La epiyectividad de $\mathrm{P} \to \mathrm{Spf}(A)$ es inmediata, y la platitud se sigue de [ATJLPR09, 3.3.1]. □

Proposición 3.13: *Sea* $G = \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[G])$ *un grupo algebraico afín. El G-fibrado formal asociado al G-fibrado trivial* $G \times_{\mathrm{k}} \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A)$ *es*

$$G \times_{\mathrm{Spf(k)}} \mathrm{Spf}(A) \to \mathrm{Spf}(A)$$

Demostración. El G-fibrado formal asociado tiene como espacio topológico subyacente $G \times_{\mathrm{Spec(k)}} \mathrm{Spec}(A/I)$, que es precisamente el espacio topológico subyacente de $\mathrm{Spec}(\mathrm{k}[G]) \times_{\mathrm{Spf(k)}} \mathrm{Spf}(A)$ donde $\mathrm{k}[G]$ y k tienen la topología discreta. Se concluye si se prueba que los haces de anillos son isomorfos, lo cual equivale a probar que existe un isomorfismo

$$\varprojlim (\mathrm{k}[G] \otimes_{\mathrm{k}} A/I^n) \simeq \mathrm{k}[G] \hat{\otimes}_{\mathrm{k}} A$$

Esto último es inmediato por la definición del producto tensorial completado y del hecho de que al considerar en $\mathrm{k}[G]$ la topología discreta, el (0) es un ideal de definición. □

Definición 3.14. Sean X y X^I dos esquemas. Se dice que X es un **engrosamiento de primer orden** si X es un subesquema cerrado de X^I, y el haz de ideales quasi-coherente $I \subset O_X$ definiendo X tiene cuadrado nulo, es decir $I^2 = 0$.

Definición 3.15. [Sta18, Definition 37.11.1] Un morfismo de esquemas $f : X \to S$ es **formalmente liso** si dado cualquier cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T^I \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

donde $T \to T^I$ es un engrosamiento de primer orden de T, entonces existe un único morfismo $T^I \to X$ haciendo el anterior diagrama conmutativo.

Lema 3.16: [Sta18, Lemma 37.11.6] *Sea $f : X \to S$ un morfismo de esquemas. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) f es liso,

ii) f es localmente de presentación finita y formalmente liso.

Corolario 3.17: *Si G es un grupo algebraico lineal sobre* k *entonces todo G-fibrado principal $P \to X$ es formalmente liso.*

Demostración. Es inmediato a partir del Teorema 1.4 y el Lema 3.16. □

Definición 3.18. Sea A una k-álgebra linealmente topológica admisible, I un ideal de definición y $P \to \mathrm{Spec}(A)$ un G-fibrado principal. Una **trivialización formal** de P sobre A con respecto I es dar un isomorfismo G-equivariante

$$\mathrm{P} \quad \mathrm{Spf}(A) \times G$$

de esquemas formales sobre $\mathrm{Spf}(A)$, donde P es el fibrado formal asociado a P.

Teorema 3.19: *Sea A una* k-*álgebra linealmente topológica admisible, I un ideal de definición y $\pi : P \to \mathrm{Spec}(A)$ un G-fibrado principal. Las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $f : \mathrm{P} \quad \mathrm{Spf}(A) \times G$ es una trivialización formal.

ii) Para cada $n \geq 1$ se tiene un isomorfismo de G-fibrados principales sobre $\mathrm{Spec}(A/I^n)$

$$f_n : i^*{}_n P \quad \mathrm{Spec}(A/I^n) \times G$$

de forma compatible con el sistema inductivo $\{\Theta_n : \mathrm{Spec}(A/I^n) \to \mathrm{Spec}(A/I^{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definido en* (B.4), *y con el sistema inductivo de formado por los* (P_n).

iii) *Para algún* $n \in \mathbb{N}$, P_n *es isomorfo al G-fibrado principal trivial.*

iv) *Se tiene una sección del morfismo* $\mathrm{P} \to \mathrm{Spf}(A)$.

v) *Para cada* $n \geq 1$ *se tiene una sección* $s_n : \mathrm{Spec}(A/I^n) \to P_n$ *de forma compatible los sistemas inductivos definidos por* $(\mathrm{Spec}(A/I^n)$ *y por* (P_n).

vi) *Para algún* $n \in \mathbb{N}$, *se tiene una sección de* $P_n \to \mathrm{Spec}(A_n)$.

Demostración. Las implicaciones $i) \Rightarrow ii)$ y $ii) \Rightarrow iii)$ son inmediatas por pullback, ya que el morfismo $\mathrm{P} \to \mathrm{Spf}(A)$ es ádico. La implicación $iv) \Rightarrow v)$ es inmediata por la propiedad universal del límite inductivo. Por otro lado, que $v) \Rightarrow vi)$ es tautológico y $ii) \Leftrightarrow iv)$ por la equivalencia entre trivializaciones y secciones, por el mismo motivo se tiene que $iii) \Leftrightarrow vi)$. Por otro lado, por la propiedad universal del límite inductivo $v) \Rightarrow iv)$.

Basta con comprobar por tanto que $iii) \Rightarrow ii)$. Supóngase que P_n es trivializable para un n, como el pullback de un fibrado principal trivial es trivial, se tiene que para todo $m \leq n$, los fibrados principales P_m son trivializables, y las trivializaciones se puede tomar de tal manera que sean compatibles con el sistema inductivo hasta la etapa m. Se concluye si se prueba que el fibrado P_{m+1} es trivializable. Sea $s : \mathrm{Spec}(A/I^n) \to P_n$ la sección asociada a la trivialización. Obsérvese que por ser $P_n \to \mathrm{Spec}(A/I^n)$ formalmente liso (Corolario 3.17), y $\mathrm{Spec}(A/I^n) \to \mathrm{Spec}(A/I^{n+1})$ un engrosamiento de orden 1, la sección s levanta a un único morfismo $\bar{s}$ haciendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(A/I^n) \arrow[r, "f_{n,n+1}\circ s"] \arrow[d] & P_{n+1} \arrow[d, "\pi_n"] \\
\mathrm{Spec}(A/I^{n+1}) \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] \arrow[ur, "\bar{s}"] & \mathrm{Spec}(A/I^{n+1})
\end{tikzcd}$$

Se obtiene por tanto que $P_{n+1} \to \mathrm{Spec}(A_{n+1})$ admite una sección y por tanto es trivializable de modo compatible con el sistema inductivo por construcción. □

Corolario 3.20: *Sea* k *un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, todo G-fibrado principal* $P \to \mathrm{Spec}(k[[x]])$ *admite una trivialización formal sobre* $\mathrm{Spf}(k[[x]])$ *con respecto el ideal de definición* (x).

Demostración. Basta observar que $k[[x]]/x \simeq k$, y que todo G-fibrado principal sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es trivial, pues admite un punto racional. Por el Teorema anterior se concluye. □

Definición 3.21. Sea X un esquema cualquiera y sea $Z \subset X$ un subesquema cerrado dado por un ideal $\mathcal{J}$. Denótese por Z_n al esquema $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X / \mathcal{J}^{n+1})$. La **completación** de X a lo largo de Z se define como el esquema formal Z cuyo espacio topológico subyacente es Z, y el haz de anillos es $\mathcal{O}_Z := \varprojlim \mathcal{O}_{Z_n}$.

Definición 3.22. Sea $P \to X$ un G-fibrado principal sobre un esquema X y sea $Z \subset X$ un subesquema cerrado. Se define el G-fibrado principal formal asociado a P en la completación de X sobre Z como la pareja (P, $\mathcal{O}_P$) siendo P el espacio topológico del pullback de P a Z, y $\mathcal{O}_P$ el haz de anillos obtenido como el límite proyectivo de los haces $\mathcal{O}_{P_n}$, siendo P_n el pullback de P a Z_n.

Con las mismas ideas que en el Teorema 3.12 y en el Teorema 3.19, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.23: *Sea $Z \subseteq X$ un subesquema cerrado y sea $P \to X$ un G-fibrado principal.*

i) El G-fibrado principal asociado a P en la completación de X sobre Z es un G-fibrado principal en el sentido de la definición 3.10.

ii) Las siguientes condiciones son equivalentes

- *a) El G-fibrado principal asociado $\mathrm{P} \to \mathrm{Z}$ es isomorfo a $\mathrm{Z} \times G$.*
- *b) Para cada $n \geq 1$, se tienen isomorfismos G-equivariantes $P_n \quad Z_n \times G$ compatibles con el sistema inductivo definido por (Z_n) y (P_n).*
- *c) Para algún n, P_n es trivializable.*

Demostración. La implicación *ii*) ⇒ *iii*) es inmediata, mientras que *iii*) ⇒ *ii*) es por ser P un fibrado principal formalmente liso. Por otro lado que *i*) ⇒ *ii*) se obtiene por pullback por ser el morfismo $\mathrm{P} \to \mathrm{Z}$ ádico. Por la propiedad universal del límite inductivo, *ii*) ⇒ *i*). □

3.3. Teorema de Serre con trivializaciones

En esta sección se estudiarán los G-fibrados principales sobre el disco formal, así como las operaciones de extensión y reducción del grupo estructural sobre un fibrado principal sobre el disco formal. Además, se demostrara que la correspondencia de Serre (Teorema 2.33), el cual establecía una equivalencia funtorial de grupoides

G-fibrados principales sobre X $\qquad$ G-reducciones sobre X

$$P\ 1\!\to (E_P, s_P)$$
$$P_E \leftarrow (E, s)$$

sigue siendo cierta para fibrados principales sobre el disco formal. Este resultado será fundamental para la construcción del espacio de moduli de G-fibrados principales con trivializaciones formales realizada en el capítulo 4, que sigue la misma estrategia seguida por A. H. W. Schmitt en [Sch02] en el caso clásico.

En primer lugar se extenderá la correspondencia anterior considerando un dato extra, siendo dicho dato una trivialización en un esquema U. Por trivialización se entenderá un isomorfismo con el objeto trivial. En la categoría de G-fibrados principales sobre X, el objeto trivial es $X\times G$, y la G-reducción trivial se entenderá como el objeto asociado a $X\times G$. Por construcción de la correspondencia descrita en en el Teorema 2.33, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X\times G \arrow[r] \arrow[d] & X\times \mathrm{Gl}(V)=\underline{\mathrm{Isom}}(V_X,V_X) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "s"] & X\times \mathrm{Gl}(V)/G
\end{tikzcd}$$

pues obsérvese que el fibrado vectorial asociado a $X\times G$ es $V_X = X\times V$. El morfismo horizontal superior está definido como

$$(x,g)\mapsto (x,\rho(g))$$

y el morfismo vertical del lado derecho es simplemente el paso al cociente, luego

$$s(x)=[x,1]$$

donde $[x,1]$ es la clase de equivalencia de la pareja $(x,1)\in X\times \mathrm{Gl}(V)$ en $X\times \mathrm{Gl}(V)/G$. La G-reducción trivial sobre X se denotará por (E_X,s_X).

Definición 3.24. Sea $f: U\to X$ un morfismo de esquemas. Una **trivialización** de un fibrado principal $P\to X$ en U es un isomorfismo de G-fibrados principales $f^*P \cong U\times G$.

Sea (E,s) una G-reducción en X. Una **trivialización** de (E,s) en U es un isomorfismo de G-reducciones sobre U, $(f^*E,f^*s)\cong(E_U,s_U)$.

Definición 3.25. Sean (P,ψ), y (P',ψ') dos G-fibrados principales sobre X con sendas trivializaciones ψ y ψ' a lo largo de un esquema $f: U\to X$. Un **morfismo de trivializaciones** $(P,\psi)\to(P',\psi')$ es un morfismo de fibrados principales

$$g: P\to P'$$

tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd}
f^*P \arrow[rr, "f^*g"] \arrow[dr, dash, "\psi"'] & & P^I \arrow[dl, "\psi"] \\
& U \times G &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Evidentemente, todo morfismo de trivializaciones tiene inverso.

Análogamente, dadas dos G-reducciones sobre X con sendas trivializaciones (E, s, ψ), (E^I, s^I, ψ^I) a lo largo de un esquema $f : U \to X$, se define un **morfismo de G-reducciones con trivializaciones** como un morfismo de G-reducciones $g : (E, s) \to (E^I, s^I)$ (Definición 2.29) verificando que el triángulo de G-reducciones

$$\begin{tikzcd}
(f^*E, f^*s) \arrow[rr, "f^*g"] \arrow[dr, dash, "\psi"'] & & (f^*E^I, f^*s^I) \arrow[dl, dash, "\psi"] \\
& (E_U, s_U) &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Un isomorfismo de G-reducciones con trivializaciones es un isomorfismo de G-reducciones satisfaciendo la condición de compatibilidad anterior.

Observación 3.26. A través de la correspondencia de Serre (Teorema 2.33) se observa que toda trivialización de un fibrado principal en un esquema $U \to X$ induce de modo canónico una trivialización de la G-reducción asociada en U y recíprocamente; es más, debido a la funtorialidad de la anterior construcción se sigue que todo morfismo de fibrados principales trivializados induce un morfismo entre las G-reducciones asociadas con trivialización, y recíprocamente.

Por tanto, la equivalencia del Teorema 2.33 sigue siendo cierta si se añade como dato extra trivializaciones a lo largo de un esquema $U \to X$. Lo último que falta por ver es que la asignación de trivializaciones en un esquema U se comporta de modo funtorial con respecto X.

Observación 3.27. Sea (E, s) una G-reducción sobre X y ψ una trivialización de E en un esquema $f : U \to X$. Entonces, se tiene de modo automático una trivialización de la G-reducción (E, s) sobre U del modo que sigue. Por hipótesis, $\psi : f^*E \quad U \times V$, luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{I}_{f^*E} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & U \times \mathrm{Gl}(V) \arrow[d] \\
U \arrow[r] & \mathrm{I}_{f^*E}/G \arrow[r, "\sim"] & U \times \mathrm{Gl}(V)/G
\end{tikzcd}$$

Sea $\bar{s}$ el morfismo obtenido mediante la composición de f^*s y el isomorfismo inducido por ψ entre los cocientes $\mathrm{I}_{f^*E}/G \simeq U \times \mathrm{Gl}(V)/G$. Se tiene un isomorfismo de G-fibrados principales sobre U

$$\kappa : \bar{s}^*(U \times \mathrm{Gl}(V)) \simeq U \times G$$

A través de la correspondencia de Serre, el isomorfismo κ da lugar a un isomorfismo entre las G-reducciones asociadas. Ahora bien, la G-reducción asociada al G-fibrado principal trivial es la G-reducción trivial, luego se tiene un isomorfismo de G-reducciones entre $\bar{\kappa} : (U \times V, \bar{s}) \simeq (U \times V, s_U)$, que da lugar al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{I}_{f^*E} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & U \times \mathrm{Gl}(V) \arrow[r] \arrow[d] & U \times \mathrm{Gl}(V) \arrow[d] \\
U \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "s_U"'] & \mathrm{I}_{f^*E}/G \arrow[r, "\sim"] & U \times \mathrm{Gl}(V)/G \arrow[r] & U \times \mathrm{Gl}(V)/G
\end{tikzcd}$$

Mediante la composición de ψ con $\bar{\kappa}$ se obtiene una trivialización de la G-reducción de partida.

Teorema 3.28: *La asignación de trivializaciones de fibrados principales sobre X en un esquema fijo $f : U \to X$ es funtorial en X, es decir, si P es un fibrado principal sobre X dotado de una trivialización en U y $g : T \to X$ es un morfismo de esquemas, entonces P trivializa sobre $T \times_X U$ de modo canónico.*

Demostración. Sea $P \to X$ un fibrado principal y sea ψ una trivialización de P en un esquema $f : U \to X$. Considérese un morfismo de esquemas $g : T \to X$. Se tiene el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(P \times_X T) \times_X U \arrow[r] \arrow[d] & P \times_X U \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & U \times G \\
U \times_X T \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d, "f"] & \\
T \arrow[r, "g"] & X &
\end{tikzcd}$$

Como el pullback de un fibrado principal trivial vuelve a ser trivial, se sigue

$$(P \times_X U) \times_X T \simeq (U \times G) \times_X T \simeq U \times_X T \times G$$

□

En conclusión, el Teorema 3.28 junto con la correspondencia de Serre (Teorema 2.33) permiten demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.29: *Sea $f : U \to X$ un esquema. Se tiene una equivalencia entre grupoides funtorial en X*

G-fibrados principales sobre X con trivializaciones en	*G-reducciones sobre X con trivializaciones en*

Sea C una curva algebraica lisa y proyectiva, $p \in C$ un punto cerrado. Considérese un isomorfismo $\hat{\mathcal{O}}_{C,p} \simeq k[[t]]$. Dado un G-fibrado principal $P \to C$, por el Corolario 3.20 siempre existe una trivialización formal de P al restringir el fibrado a $\operatorname{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{C,p}) \to C$ a través del morfismo natural. A través de la correspondencia de Serre para trivializaciones (Teorema 3.29), junto con el hecho de que la trivialización de la G-reducción equivale a la trivialización del fibrado vectorial (Observación 3.27, se tiene, que toda trivialización de P sobre el disco formal centrado en P

$$\mathrm{D} := \operatorname{Spf}(\mathcal{O}_{C,p}) \simeq \operatorname{Spf}(k[[t]]) \tag{3.30}$$

induce una familia de trivializaciones de E_P sobre $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p^n)$ compatibles con el sistema inductivo definido por los $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p^n)$ por el Teorema 3.19 . Esto equivale a decir que se tiene una familia de isomorfismos

$$(E_p/\mathfrak{m}_p^n) \simeq (\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p^n)^{\oplus n}$$

que al tomar límite proyectivo da lugar a una trivialización formal de E

$$\hat{E}_p \simeq \hat{\mathcal{O}}_{C,p}^{\oplus n} \simeq k[[t]]^{\oplus n}$$

El recíproco también es cierto por la misma construcción y por la Observación 3.27.

Considérese ahora un k-esquema cualquiera S y sea $P \to C \times S$ un G-fibrado principal. Fíjese el punto $p \in C$. El G-fibrado principal induce por el Teorema 3.23 un G-fibrado formal sobre la completación de $C \times S$ a lo largo de $\{p\} \times S$. De nuevo, por la correspondencia de Serre con trivializaciones, se tiene una biyección entre el conjunto de trivializaciones formales de P y el conjunto de trivializaciones formales del fibrado vectorial asociado por Serre. Por definición, una trivialización formal de E es un isomorfismo de haces $\hat{E}_{p \times S} \simeq \mathcal{O}_S[[t]]^{\oplus n}$.

Definición 3.31. Sea (E, s) una G-reducción sobre $C \times S$. Una trivialización formal de (E, s) es un isomorfismo de haces $\hat{E}_{p \times S} \simeq \mathcal{O}_S[[t]]^{\oplus n}$.

Definición 3.32. Sean P, P' dos fibrados principales sobre $C \times S$ dotados de trivializaciones formales ψ, ψ' respectivamente. Un morfismo de fibrados principales con trivialización formal es un morfismo de fibrados principales $f : P \to P'$, de tal forma que el morfismo inducido entre los esquemas formales asociados $\hat{f} : \hat{\mathrm{P}} \to \hat{\mathrm{P}}'$, satisface que el siguiente triángulo es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{P} \arrow[rr, dash, "\hat{f}"] \arrow[dr, dash, "\psi"'] & & \mathrm{P}^I \arrow[dl, dash, "\psi"] \\
& \mathrm{D} \times S \times G &
\end{tikzcd}
$$

Definición 3.33. Sean (E, s, ψ) (E, s, ψ^I) dos G-reducciones sobre $C \times S$ con sendas trivializaciones formales ψ y ψ^I. Un morfismo de G-reducciones con trivialización formal es un morfismo de G-reducciones $f : (E, s) \mapsto (E, s)$ de tal forma que el morfismo inducido en la completación sea compatible con ψ y ψ^I.

A partir de la discusión realizada anteriormente se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.34: *Sea C una curva, $p \in C$ un punto cerrado, S un esquema cualquiera y $P \to C\ \ S$ un G-fibrado principal. Se tiene una equivalencia entre grupoides funtorial en S*

G-fibrados principales sobre $C \times S$ con trivializaciones formales a lo largo de $\{p\} \times S$	*G-reducciones sobre $C \times S$ con trivializaciones formales a lo largo de $\{p\} \times S$*

4. Espacio de móduli de fibrados principales

El presente capítulo está dedicado a la construcción del espacio de móduli de fibrados principales dotados de una trivialización formal sobre una curva algebraica fija. Las herramientas preliminares necesarias a lo largo de todo el capítulo serán las desarrolladas por A. Álvarez Vázquez, E. Gómez González, D. Hernández Serrano, J.M Muñoz Porras, y F. J. Plaza Martín. en los artículos y trabajos [PM00],[ÁV96],[ÁVMPPM96], [PM98b], [GGHSMPPM12], [HS08] y [PM98a]. Los conocimientos previos necesarios son esencialmente la construcción de la Grassmanniana infinita como esquema (consúltese Apéndice C), y la construcción del espacio de móduli de fibrados vectoriales con trivialización formal sobre una curva fija. Con intención de que el presente trabajo resulto lo más completo posible se hará un breve resumen de la construcción del anterior espacio de móduli, siendo este un elemento central en la construcción del espacio de móduli de fibrados principales.

4.1. Espacio de móduli de curvas con trivialización formal

Definición 4.1. Se define el funtor $\widehat{\mathcal{M}}_g^{\infty}$ sobre la categoría de k-esquemas en la categoría de conjuntos como:

$$\widehat{\mathcal{M}}_g^{\infty}(S) := \{\text{Familias } (X, D, z) \text{ sobre } S\},$$

donde estas familias verifican que:

i) $\pi : X \to S$ es un morfismo propio y plano cuyas fibras geométricas son curvas íntegras de género aritmético g.

ii) $\sigma : S \to X$ es una sección de π, tal que su divisor de Cartier asociado, $D = \sigma(S)$, es liso, de grado relativo uno y plano sobre S. Se entenderá que el divisor $D \subset X$ es liso sobre S, cuando para cada punto x de D exista un entorno U de x en X, tal que el morfismo $U \to S$ es liso.

iii) z es una trivialización formal de X a lo largo de D, ésto es, una familia epiyectiva de anillos $\mathcal{O}_X \to \sigma_*(\mathcal{O}_S[t]/t^m\mathcal{O}_S[t])$ con $m \in \mathbb{N}$, compatibles con las proyecciones canónicas

$$\mathcal{O}_S[t]/t^m\mathcal{O}_S[t] \to \mathcal{O}_S[t]/t^{m'}\mathcal{O}_S[t] \quad m \geq m',$$

y tal que el morfismo correspondiente a $m = 1$ coincide con σ.

Fijado un k-esquema S, se define una relación de equivalencia $\sim$ en el conjunto de familias sobre S como sigue: Dos familias sobre S (X, D, z) y (X', D', z) son equivalentes si existe un isomorfismo $f : X \to X'$ de S-esquemas compatibles con los datos de la familias, es decir, si la imagen inversa del divisor D' por f es el divisor D, y si el morfismo f es compatible con las respectivas trivializaciones, es decir, si para todo m se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
O_X \arrow[r] \arrow[d, "z"] & f_* O_X \arrow[d, "f_* z"] \\
\sigma'_*(O_S[t]/t^n O_S[t]) \arrow[r, equal] & f_* \sigma_*(O_S[t]/t^n O_S[t])
\end{tikzcd}$$

Definición 4.2. El **funtor de móduli de las curvas punteadas de género** g, M_g^∞, es el funtor sobre la categoría de k-esquemas en la categoría de conjuntos definido por ser la hacificación del prehaz de conjuntos

$$S \rightsquigarrow M_g^\infty(S)/\sim .$$

Cuando no se haga referencia al género g, se estará considerando la unión

$$M^\infty = \coprod_{g \geq 0} M_g^\infty .$$

Proposición 4.3: *Sea $O_X(-1)$ el haz de ideales de D. La siguiente sucesión es exacta par todo n*

$$0 \to O_X(-n) \to O_X \to \sigma_*(O_S[t]/t^n O_S[t]) \to 0$$

Demostración. La prueba radica en el hecho de que la trivialización z implica la exactitud de la sucesión. Sea K_n el núcleo del morfismo

$$O_X \to \sigma_*(O_S[t]/t^n O_S[t]).$$

Se verifica que $K_1^n \subseteq K_n$, y en el caso particular en que n sea igual a uno, entonces la sucesión es exacta, se concluye por tanto que O_X está contenido en K_n. Para ver que el haz $O_X(-n)$ es exactamente K_n basta con comprobar la exactitud de la sucesión sobre las fibras de los puntos geométricos de X. Ahora bien, la sucesión es exacta cuando se restringe a las fibras geométricas de π, luego se concluye la proposición. □

Considerando la sucesión exacta del anterior enunciado y tomando el límite proyectivo, se obtiene un isomorfismo

$$\varprojlim_n (O_X/O_X(-n)) \simeq \sigma_* O_S[[t]].$$

Dado un isomorfismo de anillos topológicos como el anterior, se obtiene una trivialización formal de X a lo largo de D, considerando la familia de morfismos epiyectivos obtenidas al componer el isomorfismo de partida con los morfismos de completación

$$\mathcal{O}_X \to \hat{\mathcal{O}}_X$$

con

$$\sigma_* \mathcal{O}_S[[t]] \to \sigma_*(\mathcal{O}_S[[t]]/t^n \mathcal{O}_S[[t]])$$

En [ÁV96, 2.2] se prueba que existe un recubrimiento abierto de S y números enteros $\{m_i\}$ tales que los haces $\pi_* \mathcal{O}_X(m_i)_{U_i}$ son localmente libres de tipo finito, y la primera imagen directa superior es nula, es decir,

$$\mathrm{R}^1 \pi_* \mathcal{O}_X(m_i)_{U_i} = 0$$

La anterior proposición con el resultado recientemente expuesto, muestra que para todo par de números enteros positivos n y m, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(-n) \to \mathcal{O}_X(m) \to \sigma_*(t^{-m}\mathcal{O}_S[t]/t^n \mathcal{O}_S[t]) \to 0.$$

Tomando en primer lugar la imagen directa de π, y posteriormente el límite proyectivo sobre n y el límite inductivo sobre m, se llega a que

$$\varinjlim_m \pi_* \mathcal{O}_X(m) \subset \mathcal{O}_S((t))$$

es un punto de la Grassmanniana $\mathrm{Gr}(\mathrm{k}((t)))$ con valores en S. Esto recupera un resultado conocido sobre los números complejos (véase [Kri77], [PS88]). En analogía con el artículo [Kri77] se define el **morfismo de Krichever** para $\mathcal{M}^\infty$ como:

$$\begin{aligned} \mathrm{Kr} : \mathcal{M}^\infty(S) &\to \mathrm{Gr}(\mathrm{k}((t)))^\bullet(S) \\ (X, D, z) &\mapsto \varinjlim_n \pi_* \mathcal{O}_X(n) \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.1.1. Representabilidad de $\mathcal{M}^\infty$

En lo que sigue se probará la representabilidad del funtor $\mathcal{M}^\infty$ así como la caracterización de la imagen del morfismo de Krichever, Kr (4.4). Además, se dará una construcción efectiva para recuperar la curva, el divisor, y la trivialización a partir de un punto en la imagen del morfismo de Krichever. La idea es probar que $\mathcal{M}^\infty$ es un subfuntor de la Grassmanniana $\mathrm{Gr}(\mathrm{k}((t)))$, caracterizar los puntos de $\mathcal{M}^\infty(S)$ como las $\mathcal{O}_S$-álgebras de $\mathrm{Gr}(\mathrm{k}((t)))(S)$. La representabilidad del funtor se deduce porque la anterior condición es localmente cerrada en $\mathrm{Gr}(\mathrm{k}((t)))$.

Por simplicidad en la exposición, denótese por V a $k((t))$, solo en esta sección.

Definición 4.5. Se define el **orden** de un elemento $g \in \hat{V}_S$ como la función

$$\operatorname{ord}(g) : S \to \mathbb{Z}$$

que asigna a cada punto $s \in S$ un entero $\operatorname{ord}(g)(s) = N$ verificando que

$$g_s = \sum_{i \geq N} a_i t^i \quad a_N \neq 0$$

donde g_s índica la imagen de g en $\hat{V}_{\operatorname{Spec}(k(s))}$.

Lema 4.6: [PM98a, 6.1.3] *La aplicación* $\operatorname{ord}(g)$ *es superiormente semicontinua.*

Dado un punto U de $\operatorname{Gr}(V)(S)$, la función que asigna a cada punto $s \in S$ el máximo del conjunto $\{\operatorname{ord}(g)(s) : g \in U_{k(s)}\}$ está localmente acotada superiormente en S. Si U es una sub-$\mathcal{O}_S$-álgebra de $\mathcal{O}_S((t))$, entonces la función ord induce en U una valoración discreta v.

Sea K un cuerpo conteniendo a k y U una sub-K-álgebra de $K((t))$. Teniendo en cuenta el párrafo anterior las siguientes condiciones son equivalentes [PM98a, 9.2.2]:

1. $v \not\equiv 0$,
2. $U \neq K$,
3. el grado de trascendencia de U_0 sobre K es 1,
4. $\operatorname{Spec}(U)$ es una curva sobre $\operatorname{Spec}(K)$.

Las anteriores condiciones se verifican para cada $U \in \operatorname{Gr}(V)^\bullet(\operatorname{Spec} K)$ que sea sub-K-álgebra. Lo único que hace falta observar es que $U_0 \subset K((t))$.

Teorema 4.7: [PM98a, 9.2.3]*Sea* $U \in \operatorname{Gr}(V)^\bullet(K)$ *una* K*-álgebra. Entonces, se tiene que*

$$C = \operatorname{Spec}(U) \cup \{p\}$$

es una curva propia sobre $\operatorname{Spec}(K)$, *donde el punto* p *es el correspondiente a la valoración* v *inducida por la función orden* ord. *Se tiene un isomorfismo canónico* $\hat{\mathcal{O}}_{C,p} \simeq K[[t]]$, *y, por tanto, una trivialización formal de* C *en* p.

Demostración. La primera parte es trivial por tratarse $U_{(0)}$ de un cuerpo de grado de trascendencia sobre K igual a uno, luego C es precisamente la variedad de Riemann asociada a este cuerpo.

Por otro lado, $K = U \cap O_v$, donde O_v es el anillo de valoración discreta asociado a v, es decir

$$O_v = \{a \in U_0^* : v(a) \geq 0\} \cup \{0\};$$

por tanto v es la única valoración que no centra en ningún punto de $\mathrm{Spec}(U)$ y además $\mathrm{Spec}(U) \cup \{p\}$ es una curva completa. Para finalizar, como la valoración v se corresponde con la valoración asociada al punto p, y U es una sub-K-álgebra de $K[[t]]$, resulta que la completación del anillo local $O_{C,p} = O_v$ es precisamente $K[[t]]$, y por tanto, p es un punto liso y se tiene un isomorfismo natural $\hat{O}_{C,p} \simeq K[[t]]$. □

Del teorema se deduce que por ser v la valoración de p entonces

$$H^0(C, O_C(np)) = U \cap t^{-n}K[[t]],$$

y por tanto, tomando límite inductivo, se sigue que $H^0(C - p, O_C) = U$.

El principal inconveniente de la construcción anterior es que la curva que se reconstruye es el modelo no singular de la de partida. Un modo directo de construir los anteriores datos, y que será posible generalizar al caso relativo es el explicado a continuación. Considérese un sub-O_S-módulo U de $O_S((t))$, entonces, se tiene una filtración en U

$$U^{(i)} := U \cap t^{-i}O_S[[t]] = \{a \in U : v(a) \geq -i\}$$

para cada número entero $i \geq 0$. Sea U^n el módulo graduado asociado a la filtración $\{U^{(in)} : i \geq 0\}$, es decir

$$U^n = \bigoplus_{i\geq 0} U^{(in)}.$$

Supóngase que $U \in \mathrm{Gr}(V)(K)$ es una K-álgebra. Entonces

$$H^0(C, O_C(inp)) = U \cap t^{-in}K[[t]]$$

Tomando N lo suficientemente grande, se tiene que $O_C(np)$ es muy amplio para $n \geq N$, luego sus secciones globales definen una inmersión en un espacio proyectivo,

$$\mathrm{Proj}(U^n) = \mathrm{Spec}(U) \cup \{p\}, \qquad \forall\ n \geq N.$$

La anterior construcción es generalizable al caso relativo. Sea S un k-esquema y $U \in \mathrm{Gr}(V)^{\bullet}(S)$ una O-álgebra. Como $\mathcal{M}$ y $\mathrm{Gr}(V)$ son haces, se puede suponer sin perdida de generalidad, que $S = \mathrm{Spec}(O)$ es el espectro de un anillo local. Se define la filtración

$$U^{(i)} = U \cap t^{-i}O[[t]] \tag{4.8}$$

Los siguientes resultados pueden ser encontrados en [Mul90] .

Lema 4.9: *Para $i >> 0$, existe un elemento en $U^{(i)}$ de la forma*

$$p_{U,i} = t^{-i} + \text{ términos de grado mayor en } t.$$

Lema 4.10: *Para $i >> 0$, se tiene un isomorfismo*

$$U^{(i)}/U^{(i-1)} \quad t^{-1}O[[t]]/t^{-(i-1)}O[[t]] \quad t^{-i}O$$

que transforma la clase $\overline{p}_i$ de $p_i \in U^{(i)}/U^{(i-1)}$ en t^{-i}.

Lema 4.11: *Fijado un entero m, se tiene, para $i-m >> 0$, un isomorfismo:*

$$U^{(i)}/U^{(i-m)} \quad t^{-1}O[[t]]/t^{-(i-m)}O[[t]] = t^{-i}O \oplus \cdots \oplus t^{-(i-m+1)}O.$$

De nuevo se considera $U := \oplus_{i\geq 0} U^{(i)}$ el álgebra graduada asociada a la anterior filtración. Como U es una sub-k-álgebra no trivial de $k((z))$, se sigue que $\mathrm{Proj}(U)$ es una curva sobre S. Con el fin de distinguir un elemento de $U^{(i)}$ en $U^{(i+1)}$, considérese $U = \oplus_{i\geq 0} x_1^i U^{(i)}$, donde x_1 es una variable independiente.

Observación 4.12. La localización homogénea de U en x_1 es U como se comprueba fácilmente. De esta manera, el abierto básico que define x_1 es isomorfo al espectro $\mathrm{Spec}(U)$ de U, luego, el complementario de $\mathrm{Spec}(U)$ en $\mathrm{Proj}(U)$ se corresponde con los ceros homogéneos de x_1.

Ahora es posible definir una sección de S en $\mathrm{Proj}(U)$ cuyo divisor de Cartier asociado es el subesquema definido por el ideal $x_1 U$. Con este propósito, considérese la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow U[-1] \xhookrightarrow{\cdot x_1} U \longrightarrow \quad \mathop{}_{i\geq 0} U^{(i)}/U^{(i-1)} \longrightarrow 0,$$

donde el primer morfismo es multiplicar por la variable x_1. Los Lemas 4.9 y 4.10 revelan que para un i suficientemente grande $U^{(i)}/U^{(i-1)} \quad t^{-i}O$, luego, considerando una nueva variable independiente x_0, se puede definir, para $n >> 0$, un morfismo homogéneo

$$O[x_0]^{[n]} \to \quad \mathop{}_{i\geq 0} (x_1^i U^{(i)}/U^{(i-1)})^{[n]},$$

donde $[n]$ denota la truncación del anillo en grado n. El anterior morfismo manda x_0^i a $x_1^i t^{-i}$ para $i >> 0$ y a cero en cualquier otro caso; este morfismo es isomorfismo para grados altos. Tomando el espectro proyectivo:

$$\mathrm{Proj}(\quad \mathop{}_{i\geq 0} x_1^i U^{(i)}/U^{(i-1)}) \quad \mathrm{Proj}(\quad \mathop{}_{i\geq 0} x_1^{in} U^{(in)}/U^{(i-1)n}) \quad \mathrm{Proj}\, O[x_0] \quad \mathrm{Spec}\, O = S.$$

Teniendo en cuenta la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow U[-1] \xrightarrow{\cdot x_1} U \longrightarrow \bigoplus_{i\geq 0} U^{(i)}/U^{(i-1)} \longrightarrow 0,$$

se ha construido la sección

$$\sigma : S \hookrightarrow \mathrm{Proj}(U)$$

cuyo divisor de Cartier, $D = \sigma(S)$ es el subesquema cerrado definido por $x_1 U$.

Lema 4.13: $\mathrm{Proj}(U)$ *es liso a lo largo de D.*

Demostración. Sea $C := \mathrm{Proj}(U)$. Basta ver que la completación formal de $\mathcal{O}_C$ a lo largo de D es isomorfa a un anillo de series formales. Sea D el subesquema de C dado por el ideal (x_1) y $x_0 \notin (x_1)$, por tanto $D \in \operatorname{Spec} U^+_{x_0}$ y el ideal que define en $U^+_{x_0}$ es precisamente $(\frac{x_1}{x_0})$. En este sentido:

$$\hat{\mathcal{O}}_{C,D} = \varprojlim_m ((U/x_1^m)^+_{x_0})_{(\frac{x_1}{x_0})}$$

La componente homogénea de grado i del anillo graduado $U/(x_1^m)$ viene dada por $x_1^i U^{(i)}/U^{(i-m)}$, donde la variable x_1 sólo se introduce con objeto de graduar. Por el Lema 4.11, para todo $i > m \gg 0$ se tiene el siguiente isomorfismo

$$U^{(i)}/U^{(i-m)} \simeq t^{-i}\mathcal{O}[[t]]/t^{-(i-m)}\mathcal{O}[[t]] = t^{-i}\mathcal{O} \oplus \cdots \oplus t^{-(i-m+1)}\mathcal{O}$$

Se tiene por tanto que

$$x_1^i U^{(i)}/U^{(i-m)} \simeq \langle x_0^i, x_0^{i-1}x_1, \cdots, x_0^{i-m+1}x_1^{m-1} \rangle$$

donde $x_0 = t^{-1}x_1$. A su vez, se tiene un isomorfismo con la componente de grado i de $\mathcal{O}[x_0, x_1]/x_1^m$, luego para m suficientemente grande

$$U/(x_1^m) \simeq \mathcal{O}[x_0, x_1]/(x_1^m)$$

Entonces,

$$(U/(x_1^m))^+_{x_0} = \mathcal{O}[\frac{x_1}{x_0}]/(\frac{x_1}{x_0})^m$$

Y por tanto

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,D} = \varprojlim_m (\mathcal{O}[\frac{x_1}{x_0}]/(\frac{x_1}{x_0})^m)_{(\frac{x_1}{x_0})} = \mathcal{O}[[\frac{x_1}{x_0}]]_{(\frac{x_1}{x_0})} = \mathcal{O}[[\frac{x_1}{x_0}]] \simeq \mathcal{O}[[t]].$$

□

Observación 4.14. En el lema anterior se ha obtenido una trivialización formal a lo largo del divisor. Ahora es fácil ver que la anterior construcción y la de Krichever son inversas una de otra.

Teorema 4.15: *Un punto $U \in \mathrm{Gr}(V)^{\bullet}(S)$ está en la imagen del morfismo de Krichever si y sólo si $\mathcal{O}_S \subset U$, y además $U \cdot U \subseteq U$, siendo $\cdot$ el producto de V.*

Teorema 4.16: *El funtor de móduli $\mathcal{M}^{\infty}$ es representable por un subesquema localmente cerrado de* $\mathrm{Gr}(V)$.

Demostración. La cuestión es local, y, las condiciones del teorema anterior son localmente cerradas ([PM98a, Lema 1.4.3]). □

4.2. Espacio de móduli de fibrados vectoriales con trivialización formal

En lo sucesivo C es una curva algebraica lisa, proyectiva e íntegra sobre k, $p \in C$ es un punto cerrado y $t : \hat{\mathcal{O}}_{C,p} \xrightarrow{\sim} k[[z]]$ una trivialización formal en el punto p.

Definición 4.17. Se define el funtor $\mathcal{U}\mathcal{E}^{\infty}$ como el hacificado del funtor

$$\begin{aligned} \mathbf{Sch}_{k} &\to \mathbf{Sets} \\ S &\mapsto \{(E, \psi)\}/\sim \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde

i) $E \to C \times S$ es un fibrado vectorial de rango n sobre $C \times S$;

ii) ψ es una trivialización formal de E a lo largo de $p \times S$, es decir un isomorfismo

$$\psi : \hat{E}_{p\times S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S[[z]]^{\oplus n}$$

de tal forma que el siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \hat{E}_{p\times S} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\psi"'] & & (\hat{\mathcal{O}}_{C\times S})_{p\times S} \arrow[dl, "1\otimes t^{\oplus n}"] \\ & \mathcal{O}_S[[z]]^{\oplus n} & \end{tikzcd}$$

iii) Dos parejas (E, ψ), (E^{I}, ψ^{I}) son equivalentes si existe un isomorfismo de fibrados vectoriales $f : E \to E^{I}$, compatibles con las trivializaciones ψ y ψ^{I}, es decir, haciendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \hat{E}_{p\times S} \arrow[rr, "\hat{f}"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \hat{E}^{I}_{p\times S} \arrow[dl, "\psi"] \\ & \mathcal{O}_S[[z]]^{\oplus n} & \end{tikzcd}$$

Un punto racional del funtor $U\mathcal{C}^{\infty}$ se corresponde con una pareja (E,ψ) donde $E \to C$ es un fibrado vectorial de rango n y $\psi : \hat{E}_p \to k[[z]]^{\oplus n}$ es un isomorfismo.

Definición 4.19. Se define el **morfismo de Krichever** para $\mathcal{C}$ como el morfismo de funtores

$$\begin{aligned} \mathrm{Kr} : U\mathcal{C}^{\infty}(S) &\to \mathrm{Gr}(k((z))^{\oplus n})^{\bullet}(S) \\ [E,\psi] &\mapsto (t\circ\psi)(\varinjlim_{m} \pi_* E(m(p\times S))) \end{aligned} \tag{4.20}$$

donde $\mathrm{Gr}(k((z))^{\oplus n})$ es la Grassmanniana infinita construida en el Apéndice C.

A continuación se caracterizará el morfismo de Krichever (4.20). En analogía con el problema de móduli de curvas estudiado anteriormente, se probará, que es inyectivo y que dado un punto racional U de la Grassmanniana $\mathrm{Gr}(k((z))^{\oplus n})$, y considerando $A_U \subset k((z))$ el estabilizador de U en $k((z))$, es posible recuperar una curva un punto y un parámetro formal con el segundo de los datos, y con U será posible recuperar el fibrado y una trivialización formal en el punto. La generalización al caso relativo pasa por una serie de resultados técnicos que se remiten a la bibliografía. S denotará un k-esquema.

Definición 4.21. Sea $U \in \mathrm{Gr}(k((z))^{\oplus n})(S)$ un punto de la Grassmanniana. Se dice que una sub-$\mathcal{O}_S$-álgebra A de $\mathcal{O}_S((z))$ **estabiliza** a U, si se verifica que $\mathcal{O}_S((z))/A$ es plano sobre S, y $A \cdot U \subseteq U$.

Se define el **estabilizador** A_U de U como la máxima sub-álgebra de $\mathcal{O}_S((z))$ que estabiliza a U.

Observación 4.22. El estabilizador existe por el lema de Zorn. Si $S = \mathrm{Spec}(k)$, entonces la condición de platitud es automática y se recupera la noción clásica de estabilizador:

$$A_U = \{f \in k((z)) \text{ tal que } f\cdot U \subseteq U\}.$$

Proposición 4.23 ([HS08, Prop 3.11]): *Sea A una sub-$\mathcal{O}_S$-álgebra no trivial de $\mathcal{O}_S((z))$ y $U \in \mathrm{Gr}(k((z))^n)(S)$ un A-módulos. Entonces, el rango de U sobre A es n, si y sólo si $A \in \mathrm{Gr}(k((z)))(S)$.*

Observación 4.24. En el caso relativo el estabilizador A_U no es una familia buena, ya que a priori no cambia de base; con precisión: si $T \to S$ es un morfismo de k-esquema, y A estabiliza a U, entonces, en virtud de la platitud de $\mathcal{O}_S((z))/A$, se tiene que $A_T \subseteq \mathcal{O}_T((z))$, y también A_T estabiliza a U_T, y en particular $(A_U)_T$ estabiliza a U_T, concluyéndose que

$$(A_U)_T \subseteq A_{U_T},$$

no obstante la anterior inclusión no tiene porqué ser una igualdad.

Teorema 4.25 ([HS08, Teorema 3.15]): *Sea S un* k*-esquema, $(E, \psi) \in \mathcal{U}^{\infty}_{C}(S)$, $U \in \operatorname{Gr}(k((z))^{\oplus n})^{\bullet}(S)$ el punto que define vía el morfismo de Krichever, y A el punto que define $(C \times S, p \times S, z)$ en $\operatorname{Gr}(k((z)))^{\bullet}(S)$ vía el morfismo de Krichever para el funtor $\mathcal{M}^{\infty}$* (4.4). *Para cada morfismo de* k*-esquemas $T \to S$, se verifica que*

$$A_T = (A_U)_T = A_{U_T} \in \operatorname{Gr}(k((z)))^{\bullet}(T).$$

El anterior teorema se traduce a que siempre que los objetos de partida sean datos geométricos, entonces el estabilizador es estable por cambios de base. Recíprocamente, si se parte de datos algebraicos U y A_U en $\operatorname{Gr}(k((z))^n)$ y $\operatorname{Gr}(k((z)))$ respectivamente, y A_U es regular, entonces A_U sigue siendo el estabilizador al cambiar de base.

Definición 4.26. Sea S un k-esquema y A una $\mathcal{O}_S$-álgebra. Se dice que A es **relativamente regular** sobre S, cuando para cada punto cerrado $s \in S$ se verifique que el cambio de base, A_s, es un anillo regular para todo punto $s \in S$.

Teorema 4.27: *Un punto $U \in \operatorname{Gr}(k((z))^n)^{\bullet}(S)$ está en la imagen del morfismo de Krichever* (4.20) *para el funtor $\mathcal{U}\mathcal{E}^{\infty}$, si y sólo si el estabilizador $A_U \in \operatorname{Gr}(k((z)))^{\bullet}(S)$, es no trivial, $A_U \neq \mathcal{O}_S$, y es relativamente regular sobre S.*

Demostración. Supóngase que U está en la imagen del morfismo de Krichever, es decir $U = (t \circ \psi)(\varinjlim \pi_* E(m(p \times S)))$. Por otro lado $A := t(\varinjlim \pi_* \mathcal{O}_{C \times S}(m(p \times S)))$ es también un punto de la Grassmanniana $\operatorname{Gr}(k((z)))(S)$ que es una sub-$\mathcal{O}_S$-álgebra de $\mathcal{O}_S((z))$ íntegra y relativamente regular, tal que U es un A-módulo de rango n, y se verifica automáticamente la condición de platitud de la Definición 4.21. Se tiene que $A \subseteq A_U$, pero por el Teorema anterior se concluye que $A = A_U$.

Recíprocamente, supóngase que $A_U \in \operatorname{Gr}(k((z)))(S)$. Entonces, por ser una sub-$\mathcal{O}_S$-álgebra de $\mathcal{O}_S((z))$ no trivial, A_U define una familia propia y plana de curvas íntegras, $\pi : C \times S \to S$, y el divisor de Cartier $p \times S$, que es liso y de grado relativo uno. La familia $C \times S \to S$ parametriza curvas lisas por ser A_U relativamente regular. Como se explicó en la sección anterior (Teorema 4.7) $C \times S = \operatorname{Proj}(\mathcal{A})$, donde

$$\mathcal{A} := \bigoplus_{i \geq 0} x_1^i A_U^{(i)}$$

Se construye un haz quasi-coherente $\mathcal{E}$ sobre $C \times S$ como el haz de localizaciones homogéneas del $\mathcal{A}$-módulo graduado:

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{i \geq 0} U^{(i)},$$

con $U^{(i)} = U \cap z^{-i}\mathcal{O}_S[[z]]^n$. Se tiene que $\mathcal{U}$ es plano sobre S, luego también lo es $\mathcal{E}$.

En [ÁV96] se prueba que E es localmente libre. El rango de E sobre $C \times S$ es n, y para obtener una trivialización formal de E a lo largo del divisor $p \times S$, basta tensorializar por E la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_{C\times S}(-m(p\times S))) \to \mathcal{O}_{C\times S} \to \mathcal{O}_{C\times S}/\mathcal{O}_{C\times S}(-m(p\times S)) \to 0.$$

□

4.2.1. Representabilidad de U^∞

Para probar la representabilidad de U_C^∞ por un k-esquema. es necesario un Lema previo.

Lema 4.28 ([HS08, 3.21]): *Sea S un k-esquema sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_S$ sobre la categoría de S-esquemas. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos subhaces quasi-coherentes de $\mathcal{F}$ tal que localmente*

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}_2 \simeq \varprojlim_i \mathcal{L}_i,$$

donde los haces $\mathcal{L}_i$ coherentes y libres. Entonces, los puntos $f : S' \to S$ tales que $f^*(\mathcal{F}_1) \subseteq f^*(\mathcal{F}_2)$, como subhaces de $f^*(\mathcal{F})$, son los puntos de un cerrado de S.

Teorema 4.29: *El funtor de móduli U_C^∞ es representable por un subesquema localmente cerrado de* $\mathrm{Gr}(\mathrm{k}((z))^{\oplus n})$*. Por abuso de notación se denotará de la misma manera.*

Demostración: El Teorema 4.27 muestra que el morfismo de Krichever es inyectivo. El funtor $\mathrm{Gr}(\mathrm{k}((z))^{\oplus n})$ es representable por un k-esquema, que, abusando de notación se denotará de la misma forma que el respectivo funtor. Existe por tanto un subespacio discreto universal

$$U_{univ} \in \mathrm{Gr}(\mathrm{k}((z))^{\oplus n})^\bullet(\mathrm{Gr}(\mathrm{k}((z))^{\oplus n}))$$

Además, denótese por A a la imagen de (C, p, z) por el morfismo de Krichever para curvas (4.4). Ahora bien, un punto proviene de U_C^∞ si y sólo si A es relativamente regular y se verifica que

$$A \cdot A = A, \qquad A \cdot U_{univ} \subset U_{univ}.$$

Considerando el esquema

$$S := \mathrm{Gr}(\mathrm{k}((z))^{\oplus n})$$

y los haces $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S((z))^{\oplus n}$, $\mathcal{F}_1 = A \cdot U_{univ}$ y $\mathcal{F}_2 = A$ en el Lema 4.28, se sigue que los puntos $f : S' \to S$ tales que $f^*(\mathcal{F}_1) \subseteq f^*(\mathcal{F}_2)$, como subhaces de $f^*(\mathcal{F})$, son, precisamente, los puntos de un cerrado Z de S. Los puntos de Z que provienen de curvas lisas forman un abierto denso de Z. ○

4.2.2. La fibra del morfismo determinante

En el trabajo de A. Grothendieck, *Fondements de la Géometrie Algébrique* [Gro62], se expone las técnicas de construcción del esquema de Picard para un morfismo de esquemas $f : X \to S$ bajo ciertas condiciones. Como se demostró a través de la Correspondencia de Serre 2.33, los fibrados principales sobre una curva algebraica se corresponden con fibrados vectoriales de determinantes trivial dotados de un cierto morfismo de $\mathcal{O}_C$-álgebras. El objetivo de esta sección es construir el espacio de móduli de fibrados vectoriales con determinante trivial y trivialización formal sobre la curva C. A través de este espacio de móduli se construirá, como fibración afín el espacio de móduli de fibrados principales con trivialización formal. Por completitud en la exposición se incluye la definición del funtor de Picard y se remite a la bibliografía la prueba de su representabilidad.

Definición 4.30. Se define el funtor de Picard sobre C como el funtor

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Pic}}_C : \mathbf{Sch}_{\mathrm{k}} &\to \mathbf{Sets} \\
S\ 1&\to \mathrm{Pic}(C \times_{\mathrm{k}} S)/\mathrm{Pic}(S)
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

donde $\mathrm{Pic}(C \times_{\mathrm{k}} S)/\mathrm{Pic}(S)$ es el conjunto de clases de equivalencia de haces de línea sobre $C \times_{\mathrm{k}} S$, donde $L \quad L^I$ si existe un haz de línea G en S tal que

$$L \quad L^I \otimes \pi_S^* G$$

siendo $\pi_S : C \times S \to S$ es la proyección en el segundo factor.

Observación 4.32. La anterior relación de equivalencia es equivalente a decir que existe un recubrimiento abierto de $S = \cup U_i$ e isomorfismos

$$f_i : L_{|C\times U_i} \quad L^I_{|C\times S_i}$$

Teorema 4.33: *El funtor* $\underline{\mathrm{Pic}}_C$ *es representable por un* k*-esquema que será denotado por* Pic_C.

Demostración. [Gro62, Théorème 3.1]. □

Observación 4.34. Es importante recalcar que en el anterior Teorema no se asume que los k-esquemas sean noetherianos, ni quasi-separados, ni quasi-compactos.

Definición 4.35. Se define el morfismo determinante $\det^\infty$ como el morfismo entre funtores

$$
\begin{aligned}
\det{}^{\infty} : U\mathcal{E}^{\infty}(S) &\to \mathrm{Pic}^{\bullet}_C(S) \\
(E, \psi)\ 1&\to \det E := \wedge^n E
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

Considerando la fibra de $[\mathcal{O}_C]$ por el morfismo determinante (4.36), esto es, el producto fibrado

$$U_C^{\infty,triv} := U_C^{\infty} \times_{\mathrm{Pic}_C} \{[\mathcal{O}_C]\} \tag{4.37}$$

se obtiene el k-esquema de fibrados vectoriales de rango n, determinante trivial y dotados de una trivialización formal. El esquema $U_C^{\infty,triv}$ es el representante de la hacificación del funtor

$$\begin{aligned} \mathbf{Sch}_{\mathrm{k}} &\to \mathbf{Sets} \\ S &\mapsto \{(E,\psi)\}/\sim \end{aligned} \tag{4.38}$$

donde

i) ψ es una trivialización formal de E a lo largo de $p \times S$, es decir, un isomorfismo $\psi : \hat{E}_{p\times S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S[[z]]^{\oplus n}$ de tal forma que el siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \hat{E}_{p\times S} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\psi"'] & & (\hat{\mathcal{O}}_{C\times S})_{p\times S} \arrow[dl, "1\otimes t^{\oplus n}"] \\ & \mathcal{O}_S[[z]]^{\oplus n} & \end{tikzcd}$$

ii) $\wedge^n E \simeq \mathcal{O}_{C\times S}$,

iii) y dos parejas (E,ψ), (E',ψ') son equivalentes si existe un isomorfismo de fibrados vectoriales $f : E \to E'$, compatibles con las trivializaciones ψ y ψ'.

4.3. Espacio de móduli de fibrados principales con trivialización formal

La presente sección está dedicada a la construcción del espacio de móduli de fibrados principales con trivialización formal. En lo que sigue se supondrá fijada la curva C, el punto p, la trivialización formal $t : \hat{\mathcal{O}}_{C,p} \simeq \mathrm{k}[[z]]$, el grupo algebraico lineal semisimple G, y la representación fiel $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$. Se denotará por D a $\mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}}_{C,p})$

Definición 4.39. Se define el funtor $\mathtt{Bun}^{\infty}_{G,C}$ como la hacificación del funtor

$$\begin{aligned} \mathbf{Sch}_{\mathrm{k}} &\to \mathbf{Sets} \\ S &\mapsto \{P,\psi\}/\sim \end{aligned} \tag{4.40}$$

donde

i) P es un G-fibrado principal sobre $C \times S$ (con respecto la topología étale),

ii) ψ es una trivialización formal de P, es decir, un isomorfismo G-equivariante sobre $D \times S$

$$\psi : P \quad D \times S \times G$$

iii) y dos parejas (P, ψ), (P^I, ψ^I) son equivalentes si existe un isomorfismo de G-fibrados principales sobre $C \times S$

$$f : P \quad P^I$$

tal que f es compatible con ψ y ψ^I, es decir, si el siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & & P \arrow[dl, "\psi"] \\ & D \times S \times G & \end{tikzcd}$$

En lo sucesivo, la pareja universal de $U_C^{\infty,triv}$ (4.37) será denotada por (E_U, ψ_U), donde E_U es un haz localmente libre de rango n y determinante trivial sobre $C \times U_C^{\infty,triv}$ y ψ_U una trivialización formal de E_U. Además, se utilizará la notación

$$A_U := S^{\bullet}_{O_{C \times U_C^{\infty,triv}}} (V_U \otimes E_U^{\vee})^{G} \tag{4.41}$$

donde $V_U := V \otimes_k O_{C \times U_C^{\infty,triv}}$.

Teorema 4.42: *El funtor* $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$ *es representable por el* k-*esquema* $\mathrm{Spec}(A_U)_{\det_U}$, *donde* $\det_U$ *es el elemento descrito en* (2.24) *asociado a los datos* E_U *y* V_U, *y donde* $\mathrm{Spec}(A_U)_{\det_U}$ *denota al subesquema abierto de* $\mathrm{Spec}(A_U)$ *donde la sección canónica* $\det_U$ *no se anula. El isomorfismo* $\mathrm{Hom}(\ ,\mathrm{Spec}(A_U)_{\det_U}) \to \mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$ *se dará en la demostración del Teorema.*

Demostración. Sea S un k-esquema cualquiera, y sea $f : S \to \mathrm{Spec}(A_U)$ un morfismo. Mediante la composición de los siguientes morfismos naturales

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "g"] & \mathrm{Spec}(A_U) \arrow[r] & C \times U_C^{\infty,triv} \arrow[r, "\pi_2"] & U_C^{\infty,triv} \end{tikzcd}$$

donde π_2 es la proyección en el segundo factor, se obtiene un punto de $U_C^{\infty,triv}$ con valores en S, es decir, un fibrado vectorial E de rango n sobre $C \times S$ y determinante trivial, junto con una trivialización formal ψ de E, siendo el haz de secciones de E. El anterior fibrado vectorial se obtiene haciendo el pullback de la pareja universal, E_U y ψ_U, vía el morfismo

$$1 \times g : C \times S \to C \times U_C^{\infty,triv}$$

Mediante la composición

$$\begin{tikzcd} C \times S \arrow[r, "\pi_S"] \arrow[rr, bend left, "\sigma"] & S \arrow[r, "f"] & \mathrm{Spec}(A_U) \end{tikzcd}$$

se obtiene un morfismo de k–esquemas

$$\sigma : C \times S \to \mathrm{Spec}(A_U)$$

que, por la propiedad universal de los esquemas afines, junto con la propiedad de cambio de base del álgebra de invariantes (Teorema A.21) da lugar a un morfismo de $\mathcal{O}_{C\times S}$-álgebras

$$\tau : \ \left(S^{\bullet}_{\mathcal{O}_{C\times S}}(V_{C\times S} \otimes E^{\vee})\right)^G \to \mathcal{O}_{C\times S}$$

Ahora bien, obsérvese que

$$\mathrm{Spec}(A_U) = \underline{\mathrm{Hom}}(V \times (C \times U_C^{\infty, triv}), E_U)//G$$

Geométricamente, el morfismo τ se reinterpreta como un morfismo de $C\times S$-esquemas

$$\sigma_S : C \times S \to \mathrm{Spec}(A_U) \times_{\mathrm{k}} (C \times S) = \mathrm{Spec}\left(\left(S^{\bullet}_{\mathcal{O}_{C\times S}}(V_{C\times S} \otimes E^{\vee})\right)^G\right)$$

Por el Teorema de Serre (Teorema 3.29), y la observación 3.27 la terna (E, ψ, τ) proviene de un G-fibrado principal si y sólo si σ_S valora en el esquema de isomorfismos $\underline{\mathrm{Isom}}(V \times (C \times S), E)/G$, lo que equivale a decir por la ecuación (2.25) que σ_S valora en el subesquema abierto donde la sección $\det_{C\times S}$ asociada a los datos $V \times (C \times S)$ y E no se anula.

Por último obsérvese que por la Teoría general del Determinante ([KM76]), $\det h_{C\times S}$ es el pullback de $\det h_U$, y como consecuencia del Corolario 2.20, $\det_{C\times S}$ es el pullback de $\det_U$, porque el descenso de la sección $\det h$ es único. Utilizando ahora el Teorema de Serre con trivializaciones (Teorema 3.29) se concluye que el espacio de móduli de fibrados principales con trivialización formal es representable por $\left(\mathrm{Spec}(A_U)\right)_{\det_U}$. □

5. El Teorema de Uniformización

El presente capítulo tiene como objetivo estudiar la relación existente entre el espacio de móduli de fibrados principales con trivialización formal construido en el capítulo anterior con el stack de fibrados principales. Entre las múltiples relaciones existentes se probará el Teorema de Uniformización, que permitirá expresar el stack de fibrados principales como el stack cociente de $\mathrm{Bun}_{G,C}$ por la acción del Positive Loop Group de G. Con la finalidad de fijar notaciones e ideas, se ha decidido incluir una primera sección dedicada a los resultados previos sobre la teoría de stacks necesarios. Dicha sección está basada en [Ols16] y [Neu11]

5.1. Preliminares sobre stacks

En lo sucesivo k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Se denotará por $\mathbf{Sch}_{\mathrm{k}}$ a la categoría de esquemas sobre Spec(k). Análogamente, dado un k-esquema S, se denotará por $\mathbf{Sch}_S$ a la categoría de esquemas sobre S. Dado un k-esquema X, se denotará por $X^\bullet$ a su funtor de puntos, siendo este último un haz en $\mathbf{Sch}_{\mathrm{k}}^{fppf}$, donde el superíndice denota la topología de Grothendieck considerada en la categoría $\mathbf{Sch}_{\mathrm{k}}$. En caso de que no se haga referencia a la misma se supondrá que es la de Zariski, además, G denotará a un grupo algebraico afín y linealmente semisimple definido sobre k.

Definición 5.1. Sea C una categoría. Una **categoría sobre** C es una categoría F junto con un funtor $p_F : F \to C$. Dado un objeto $X \in C$ se define su **fibra** como la subcategoría F_X de F donde los objetos son las fibras de X, es decir

$$\mathrm{Obj}(F_X) = \{x \in F : p_F(x) = X\}$$

y los morfismos entre dos fibras x, x' de X son los morfismos que descienden a la identidad, es decir

$$\mathrm{Hom}_{F_X}(x, x') = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_F(x, x') : p_F(\varphi) = \mathrm{Id}_X\} \tag{5.2}$$

Un **morfismo entre categorías sobre** C, $g : F \to G$ es un funtor que preserva la fibración, es decir, que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p_F"'] & & G \arrow[dl, "p_G"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Definición 5.3. Sea X un objeto de C. Se define la categoría C_X como aquella donde los objetos son los objetos sobre X, es decir, los morfismos $\varphi : Y \to X$, y los morfismos entre dos objetos Z, Y de C_X, son aquellos morfismos $f : Z \to Y$ de C que hacen el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Definición 5.4. Sea $p_F : F \to C$ una categoría sobre C. Un morfismo $\varphi : x \to y$ en F se dice que es **cartesiano**, si para todo morfismo $\psi : z \to y$ en F que admite una factorización

$$p_F(\psi) = p_F(\varphi) \circ h$$

en C, entonces ψ factoriza a través de π por un único morfismo $\alpha : z \to x$ tal que $p_F(\alpha) = h$. Si el morfismo $\varphi : x \to y$ es cartesiano se dice que x es el **pullback** de y a lo largo de $p_F(\varphi)$.

Definición 5.5. Una categoría $p_F : F \to C$ sobre C, es una **categoría fibrada** sobre C, si para todo morfismo $f : X \to Y$ de objetos de C, y un objeto en la fibra de Y, es decir, $y \in Y$, existe un pullback f^*y de y a lo largo de f, es decir, un morfismo cartesiano $\varphi : f^*y \to y$ tal que $p_F(f^*y) = X$ y $p_F(\varphi) = f$.

Un **morfismo de categorías fibradas** sobre C es un morfismo de categorías sobre C que preserva morfismos cartesianos.

Definición 5.6. Una categoría fibrada $p_F : F \to C$ es una **categoría fibrada en grupoides** si para todo objeto $X \in C$, la fibra de X, es decir, la categoría F_X, es un grupoide.

Definición 5.7. Sean $g, g' : F \to G$ dos morfismos de categorías fibradas sobre C. Una **transformación natural que preserva la base** $\alpha : g \to g'$, es una transformación natural entre funtores $\alpha : g \to g'$ satisfaciendo que para todo $x \in F$ el morfismo

$$\alpha_x : g(x) \to g'(x)$$

se proyecta en la identidad vía $p_G : G \to C$, es decir

$$p_G(\alpha_x) = \mathrm{Id}_X : X \to X$$

Definición 5.8. Sean F y G dos categorías fibradas sobre C. Se define la 1-categoría $\mathrm{HOM}_C(F, G)$ como aquella cuyos objetos son los morfismos de categorías fibradas $F \to G$ y los morfismos son las transformaciones naturales que preservan la base.

Teorema 5.9 (2-Yoneda): *Sea F una categoría fibrada sobre $\mathcal{C}$. Existe una equivalencia de categorías*

$$\mathrm{HOM}_C(\mathcal{C}_X, F) \sim F_X$$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos fibrados finitos y sea $p : F \to \mathcal{C}$ una categoría fibrada donde se ha hecho una elección de pullbacks (son únicos salvo isomorfismos). Todo morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ da lugar a un morfismo de pullbacks

$$f^*F_Y \to F_X \qquad y \mapsto f^*y$$

Definición 5.10. Sea $\{X_i \to Y\}$ una colección de morfismos de C. Se define la **categoría de datos de descenso** de $\{X_i \to Y\}$ con respecto F como la categoría $F(\{X_i \to Y\})$ tal que

- Los objetos de la categoría son las parejas $(\{x_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ que consisten en una colección de objetos $x_i \in F_{X_i}$, y en isomorfismos

$$\sigma_{ij} : \pi_1{}^*x_i \to \pi_2{}^*x_j$$

  en $F_{X_i \times_Y X_j}$ donde se verifica la condición de cociclo, es decir, si el siguiente diagrama sobre $F_{X_i \times_Y X_j \times_Y X_k}$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_{12}^*\pi_1^*x_i \arrow[r, "\pi_{12}^*\sigma_{ij}"] \arrow[d, "="] & \pi_{12}^*\pi_2^*x_j \arrow[r, "="] & \pi_{23}^*\pi_1^*x_j \arrow[d, "\pi_{23}^*\sigma_{jk}"] \\
\pi_{13}^*\pi_1^*x_i \arrow[r, "\pi_{13}^*\sigma_{ik}"'] & \pi_{13}^*\pi_2^*x_k \arrow[r, "="] & \pi_{23}^*\pi_2^*x_k
\end{tikzcd}$$

- un morfismo $(\{x_i\}, \{\sigma_{ij}\}) \to (\{x'_i\}, \{\sigma'_{ij}\})$ es una colección de morfismos $g_i : x_i \to x'_i$ en F_{X_i} tal que el siguiente diagrama sobre $F_{X_i \times_Y X_j}$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^*x_i \arrow[r, "\pi_1^*g_i"] \arrow[d, "\sigma_{ij}"'] & \pi_1^*x'_i \arrow[d, "\sigma'_{ij}"] \\
\pi_2^*x_j \arrow[r, "\pi_2^*g_j"'] & \pi_2^*x'_j
\end{tikzcd}$$

Definición 5.11. Se define el **funtor de descenso** de $\{f_i : X_i \to Y\}$ con respecto F como el funtor $E : F_Y \to F(\{X_i \to Y\})$ definido por

$$(y \to y') \mapsto (\{f_i^*y\}, \{(\sigma_{ij})_{can}\}) \to (\{f_i^*y'\}, \{(\sigma'_{ij})_{can}\})$$

donde $(\sigma_{ij})_{can}$ es el isomorfismos canónico $\pi_1{}^*f_i^*y = \pi_2{}^*f_j^*y$ que proviene de $X_i \times_Y X_j \to Y$.

El conjunto $\{X_i \to Y\}$ se dice que es de **descenso efectivo** para F si el funtor de descenso da lugar a una equivalencia de categorías

$$E : F_Y \sim F(\{X_i \to Y\})$$

Definición 5.12. Una categoría fibrada $p : F \to C$ sobre C es un **stack** si

i) $F \to C$ es una categoría fibrada en grupoides,

ii) Todo recubrimiento de un objeto X en C es de descenso efectivo, es decir, existe una equivalencia entre categorías

$$F_X \sim^E F(\{X_i \to X\})$$

para todo objeto $X \in C$ y todo recubrimiento $\{X_i \to X\}$ de X.

Un **morfismo de stacks** es un morfismo de categorías fibradas en grupoides.

Teorema 5.13 (Olsson Th. 4.6.5): *Sean F y G stacks sobre un sitio C. Existe una equivalencia categorial*

$$\mathrm{HOM}_C(F, G) \sim \mathrm{Hom}_{stacks}(F, G)$$

5.1.1. Stack asociado a un esquema

En primer lugar considérese una categoría C y un prehaz de conjuntos

$$F : C^{op} \to \mathbf{Sets}$$

A F le corresponde una categoría F sobre C, cuyos objetos son

$$\mathrm{Obj}(F) = \{(X, x) : X \in C, x \in F(X)\}$$

y un morfismo $(X, x) \to (Y, y)$ es un morfismo $f : X \to Y$ en C donde se verifica que

$$F(f)(y) = x$$

Es decir, F es la categoría de puntos del prehaz F, junto con los morfismos entre esos puntos. Se comprueba que junto con el funtor de olvido

$$F \to C \qquad (X, x) \mapsto X$$

F es una categoría fibrada sobre C. La fibra de un objeto X son conjuntos pues

$$\mathrm{Obj}(F_X) = \{(X, x) : x \in F(X)\} = F(X)$$

Teorema 5.14: *Sea C un sitio. Todo haz de conjuntos F sobre C es un stack sobre C.*

Demostración. Por lo dicho anteriormente, a F se le asigna una categoría fibrada sobre C denotada por $\mathcal{F}$ y que es la categoría de puntos. La condición de haz se traduce al descenso efectivo, pues

$$\mathcal{F}_X = F(X) = \mathrm{Eq}\left(\prod F(X_i) \rightrightarrows \prod F(X_i \times_X X_j)\right) = \mathcal{F}(\{X_i \to X\})$$

para todo recubrimiento $\{X_i \to X\}$. □

Definición 5.15. Sea X un k-esquema en la topología de Zariski y sea $X^\bullet$ su funtor de puntos. Se denotará por $\mathcal{S}X$ al stack asociado a $X^\bullet$ por el procedimiento explicado anteriormente.

Observación 5.16. Sea $\mathcal{X}$ un stack sobre $\mathbf{Sch}_k$. Si algún objeto de tiene algún automorfismo distinto de la identidad entonces $\mathcal{X}$ no puede ser el stack asociado a un k-esquema.

5.2. El morfismo de olvido π^∞

Sea C una curva algebraica lisa, proyectiva, conexa e íntegra sobre k, y considérese $\mathbf{Sch}_k$ la categoría de k-esquemas dotada de la topología de Zariski.

Definición 5.17. Se define el **stack de fibrados principales** $\mathrm{Bun}_{G,C}$ como la categoría sobre $\mathbf{Sch}_k$ cuyos objetos son las parejas (S, P), siendo S un k-esquema y $P \to C \times S$ un G-fibrado principal con respecto la topología étale. Un morfismo de objetos

$$(S, P) \to (S', P')$$

es un morfismo de esquemas $f : S \to S'$ tal que se tiene un isomorfismo de fibrados principales

$$(1 \times f^*)P' \simeq P$$

La estructura de categoría fibrada sobre $\mathbf{Sch}_k$ viene dada por la proyección

$$\begin{aligned} \mathrm{Bun}_{G,C} &\to \mathbf{Sch}_k \\ (S, P) &\mapsto S \end{aligned}$$

Dado un k-esquema S, la fibra de S es

$$\mathrm{Bun}_{G,C}(S) := (\mathrm{Bun}_{G,C})_S = \{\text{Grupoide de } G\text{-fibrados principales sobre } C \times S\}$$

Teorema 5.18: [Wan11, Theorem 2.0.2] $\mathrm{Bun}_{G,C}$ *es un stack sobre* $\mathbf{Sch}_k^{fpqc}$.

Observación 5.19. Como consecuencia del anterior Teorema se tiene que $\mathrm{Bun}_{G,C}$ es un stack sobre $\mathbf{Sch}_k$, $\mathbf{Sch}_k^{\acute{e}t}$, y $\mathbf{Sch}_k^{fppf}$.

Sea $\mathfrak{B}un_{\mathcal{G},C}$ el stack asociado al k-esquema $\mathtt{Bun}_{\mathcal{G},C}$. Para tener un completo control de los morfismos que se van a definir es necesario hacer un breve repaso al proceso de hacificación para entender mejor el haz $\mathtt{Bun}_{\mathcal{G},C}$ de la Definición 4.39.

Sea C un sitio cualquiera y $F : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$ un funtor.

Definición 5.20. Una hacificación de F es un haz $F^{\#} : C^{op} \to \mathbf{Sets}$ dotado de una transformación natural $F \to F^{\#}$ tal que las siguientes condiciones se verifican

i) dado un objeto $X \in \mathrm{Obj}(C)$ y dos elementos α y β en $F(X)$ cuyas imágenes $\alpha^{\#}, \beta^{\#}$ por el morfismo $F(X) \to F^{\#}(X)$ sean isomorfas, entonces existe un recubrimiento abierto $\{f_i : U_i \to X\}_{i \in I}$ de X tal que
$$f_i^* \alpha = f_i^* \beta$$

ii) para cada objeto $X \in \mathrm{Obj}(C)$ y para cada elemento $\overline{\alpha} \in F^{\#}(X)$, existe un recubrimiento abierto $\{f_i : U_i \to X\}$ y elementos $\{\alpha_i \in F(U_i)\}$ tal que
$$\alpha^{\#}_i = f_i^* \overline{\alpha}$$

Teorema 5.21: [FGI+05, Theorem 2.64] *Existe una hacificación del funtor F y es única salvo un isomorfismo canónico. Además, todo morfismo de funtores de F en otro haz factoriza de modo único a través de $F^{\#}$.*

El proceso de construcción de $F^{\#}$ pasa por dos etapas. En primer lugar se define el funtor F^s sobre un objeto $X \in \mathrm{Obj}(C)$ como $F^s(X) := F(X)/\sim$ donde $\sim$ es una relación de equivalencia definida en el conjunto $F(X)$ como sigue a continuación. Dos elementos α, β de $F(X)$ son **equivalentes** si existe un recubrimiento abierto $\{f_i : U_i \to X\}_{i \in I}$ de X tal que el pullback de α y β a cada uno de los U_i coincide
$$f_i^* \alpha = f_i^* \beta \quad \forall i \in I$$

La construcción de $F^{\#}$ se realiza a partir de F^s. Para cada objeto X de se considera el conjunto de parejas $(\{U_i \to X\}_{i \in I}, \{\alpha_i\}_{i \in I})$ donde $\{U_i \to X\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de X y $\alpha_i \in F^s(U_i)$ para todo $i \in I$; además, se impone que el pullback de α_i y α_j a $F^s(U_i \times U_j)$ a través de la primera y segunda proyección respectivamente coincidan. En este conjunto de parejas se impone una relación de equivalencia como sigue: $(\{U_i \to X\}_{i \in I}, \{\alpha_i\}_{i \in I})$ es equivalente a $(\{V_j \to X\}_{j \in J}, \{\beta_j\}_{j \in J})$ cuando el pullback de α_i y β_j a $F^s(U_i \times V_j)$ coincida para cada $i \in I, j \in J$. El funtor hacificado $F^{\#}$ está definido sobre un objeto X como el conjunto de clases de equivalencia descritas anteriormente.

Dada una flecha $Y \to X$, la función $F^{\#}(X) \to F^{\#}(Y)$ está definida enviando la clase de la pareja $(\{U_i \to X\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I}) \in F^{\#}(X)$ a la clase de equivalencia de la pareja $(\{U_i \times_X Y \to Y\}_{i\in I}, \{p_i^* \alpha_i\}_{i\in I}))$ donde $p_i : U_i \times_X Y \to U_i$ denota la proyección en el primer factor. Obsérvese que la transformación natural $F \to F^{\#}$ se obtiene enviando cada elemento $\alpha \in F(X)$ a su clase $\overline{\alpha}$ en F^s, y este último elemento a su clase de equivalencia $(\{X = X\}, \overline{\alpha})$ en $F^{\#}(X)$.

A continuación se aplicará la anterior construcción para entender mejor el funtor $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$. Considérese un k-esquema S. Entonces, un elemento de $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}(S)$ es una clase de equivalencia de parejas $(\{U_i \to S\}, ([P_i, \psi_i]))$ donde $\{U_i \to S\}$ es un recubrimiento de S con respecto la topología de Zariski, $P_i \to C \times U_i$ es un G-fibrado principal sobre $C \times U_i$ y ψ_i es una trivialización formal de P_i sobre $\mathrm{D} \times U_i$. Obsérvese que los fibrados principales $\{P_i\}$ definen un G-fibrado principal en $C \times S$ por ser datos de descenso efectivo, de este modo, se tiene un funtor natural de olvido que se denotará por π_∞ y que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S\,\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C} \arrow[rr, "\pi_\infty"] \arrow[dr] & & \mathrm{Bun}_{G,C} \arrow[dl] \\ & \mathbf{Sch}_{\mathrm{k}} & \end{tikzcd} \tag{5.22}$$

π_∞ envía cada clase $(S, \{U_i \to S\}_{i\in I}, \{[P_i, \psi_i]\}_i)$ a P, siendo P el G-fibrado obtenido a través de los P_i's por descenso. Obsérvese que π_∞ está bien definido pues $\mathrm{Aut}(S, \{U_i \to S\}_{i\in I}, \{[P_i, \psi_i]\}_{i\in I}) = \mathrm{Id}_S$ por la Observación 5.16 y por ser $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$ representable por un k-esquema (Teorema 4.42).

Teorema 5.23: *Si G es un grupo algebraico lineal afín semisimple especial, el funtor*

$$\pi_\infty : S\,\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C} \to \mathrm{Bun}_{G,C}$$

es epiyectivo a nivel de objetos.

Demostración. Sea $P \to C \times S$ un G-fibrado principal. Si P es formalmente trivializable sobre $\mathrm{D} \times S$ entonces se concluye.

Supóngase que P no es trivial sobre $\mathrm{D} \times S$. Considérese un recubrimiento $\{U_i \to S\}$ por abiertos afines. Para cada i se obtiene por pullback un fibrado principal $P_i \to C \times U_i$. Por el Teorema 3.19, para que P_i sea formalmente trivializable a lo largo de $\{p\} \times U_i$ basta con ver que P_i es trivializable al hacer el pullback a $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p) \times U_i$. Denótese por P'_i al pullback de P_i en $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p) \times U_i$. Como G es especial, existe un recubrimiento afín $\{W_j \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p) \times U_i\}$ tal que el pullback de P'_i trivializa para cada j. En particular,

$$\{W_j \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p) \times U_i\}$$

también es un recubrimiento afín donde trivializa el pullback.

Como $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p) \times U_i \to U_i$ es afín, se sigue que la familia de flechas $\{W_j \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p) \times U_i \to U_i\}$ es un recubrimiento afín de U_i donde se tienen definidos fibrados principales que al restringir a $W_j \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p)$ trivializan.

Se tiene por tanto un recubrimiento afín $\{W_j \to U_i \to S\}_{j,i}$ de S con fibrados principales $P_j \to C \times W_j$ dotados de trivializaciones formales de modo compatible por construcción. Los P_j dan lugar al fibrado principal de partida $P \to C \times S$ por construcción. □

Observación 5.24. Como $\mathcal{S}\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$ es representable por un esquema, es en particular un haz en la topología fpqc ([FGI+05, Theorem 2.55]) y por tanto en la topología étale. En consecuencia, se puede definir $\mathcal{S}\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$ como un stack sobre $\mathbf{Sch}_k^{ét}$ y lo análogo con $\mathrm{Bun}_{G,C}$. Ahora los elementos de $\mathcal{S}\mathrm{Bun}_{G,C}$ son ternas $(S, \{W_i \to S\}_i, \{(P_i, \psi_i)\}_i)$ donde S es un k-esquema, $\{W_i \to S\}$ es un recubrimiento étale de S y donde cada $P_i \to C \times W_i$ es un fibrado principal con respecto la topología étale y ψ_i una trivialización formal de P_i. De nuevo por recollement se tiene un morfismo olvido $\pi_{\infty}^{ét}$ haciendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C} \arrow[rr, "\pi_{\infty}^{ét}"] \arrow[dr] & & \mathrm{Bun}_{G,C} \arrow[dl] \\
& \mathbf{Sch}_k^{ét} &
\end{tikzcd} \tag{5.25}$$

A partir de la Observación 5.24 y siguiendo el mismo razonamiento que en el Teorema 5.23 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 5.26: *Sea G un grupo algebraico lineal, afín y semisimple. El funtor*

$$\pi_{\infty}^{ét} : \mathcal{S}\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C} \to \mathrm{Bun}_{G,C}$$

es epiyectivo a nivel de objetos.

5.3. Familias geométricas

La presente sección está dedicada a explicar la relación entre algunas de las familias de objetos geométricos (fibrados vectoriales, fibrados principales) definidas sobre el stack $\mathcal{S}\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$ y el stack $\mathrm{Bun}_{G,C}$.

Se comienza la sección recordando la siguiente definición.

Definición 5.27. Sea C una (2)-categoría. Un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

se dice 2-**conmutativo** si los 1-morfismos $A \to B \to D$ y $A \to C \to D$ son 2-isomorfos.

Observación 5.28. En lo sucesivo, dada una (2)-categoría, para distinguir entre 1-morfismos y 2-morfismos se utilizará la notación $\to$ y $\Rightarrow$ respectivamente.

Definición 5.29. Sea $X \to \mathbf{Sch}_k$ un stack sobre $\mathbf{Sch}_k$. Dar un G-**fibrado principal** sobre X es dar la siguiente siguiente colección de datos:

i) para cada morfismo de stacks $f : SU \to X$ donde U es un k-esquema, un G-fibrado principal P_f sobre U,

ii) para cada (2)-diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} SU \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & SV \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

siendo U y V dos k-esquemas, un isomorfismo

$$\alpha_k : P_f \quad k^*P_g$$

donde $k : C \times U \quad G \quad V$ es el morfismo inducido entre esquemas que será denotado de la misma manera por abuso de notación. Además, los isomorfismos α deben satisfacer la condición de cociclo, es decir, para todo (2)-diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} SU \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "f"'] & SV \arrow[r, "l"] \arrow[d, "g"] & SW \arrow[dl, "h"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

siendo U, V y W, sendos k-esquemas, el diagrama

$$\begin{tikzcd} P_f \arrow[r, "\alpha_{l\circ k}"] \arrow[d, "\alpha_k"'] & (l \circ k))^*P \arrow[d, equal] \\ k^*P_g \arrow[r, "k^*\alpha_l"'] & k^* \; l^*P_h \end{tikzcd}$$

de isomorfismos de fibrados principales sobre U es conmutativo.

Un **morfismo** de G-fibrados principales sobre un stack es una colección de morfismos de fibrados principales compatibles con los isomorfismos α.

Intercambiando la noción de fibrado principal por fibrado vectorial, o por fibrado principal con trivialización formal, se obtienen las definiciones análogas.

En lo sucesivo se denotará por $Vect^n_C$ al stack de fibrados vectoriales de rango n sobre C. Si S es un k-esquema. la fibra de S con respecto $Vect^n_C$ es el grupoide de fibrados vectoriales de rango n sobre $C \times S$. El siguiente resultado es inmediato.

Lema 5.30: *Sea* $X \to \mathbf{Sch}_k$ *un stack sobre* $\mathbf{Sch}_k$.

i) *Dar un G-fibrado principal sobre* $SC \times_{\mathbf{Sch}_k} X$ *es equivalente a dar un morfismo de stacks* $X \to \mathrm{Bun}_{G,C}$.

ii) *Dar un G-fibrado principal dotado de trivialización formal sobre* $SC \times_{\mathbf{Sch}_k} X$ *es equivalente a dar un morfismo de stacks* $X \to S\,\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$.

iii) *Dar un fibrado vectorial de rango n sobre* $SC \times_{\mathbf{Sch}_k} X$ *es equivalente a dar un morfismo de stacks* $X \to Vect^n_C$.

Obsérvese que por el Lema 5.30, y por el Lema de Yoneda en el contexto de las categorías fibradas (Teorema 5.9), se recupera la noción usual de fibrado principal (resp. fibrado vectorial, resp. fibrado principal con trivialización formal) cuando se consideran stacks de la forma SU siendo U un k-esquema.

Por completitud en la exposición obsérvese que el Lema de Yoneda cuando se consideran los stacks SU tiene la siguiente forma.

Lema 5.31: *Sea U un* k*-esquema y sea* X *un stack sobre* $\mathbf{Sch}_k$. *Existe una equivalencia canónica de categorías*

$$\mathrm{Hom}_{stacks}(SU, X) = X(U) \tag{5.32}$$

donde $X(U)$ *es la fibra de* U *con respecto de la fibración* $X \to \mathbf{Sch}_k$.

Sea U un k-esquema. Dar un G-fibrado principal sobre $SC \times_{\mathbf{Sch}_k} SU$ es por el Lema 5.30 equivalente a dar un morfismo de stacks

$$P : SU \to \mathrm{Bun}_{G,C}$$

Por el Lema de Yoneda (Lema 5.31), esto es equivalente a dar un elemento de $\mathrm{Bun}_{G,C}(U)$, que es un fibrado principal sobre $C \times U$. El mismo razonamiento se aplica a los fibrados principales con trivialización formal y los fibrados vectoriales.

Definición 5.33. El G-**fibrado principal universal** sobre $SC \times_{\mathbf{Sch}} \mathrm{Bun}_{G,C}$, es el fibrado principal que corresponde, por el Lema 5.30 con el morfismo identidad.

El **fibrado vectorial de rango** n **universal** sobre $SC \times_{\mathbf{Sch}_k} Vect^n_C$ y el G-**fibrado principal dotado de trivialización formal universal** sobre $SC \times_{\mathbf{Sch}_k} S\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$ son definidos de modo análogo.

Observación 5.34. El G-fibrado principal universal sobre $SC \times_{\mathbf{Sch}} \mathrm{Bun}_{G,C}$ admite una descripción explícita como sigue a continuación. Sea U un k-esquema y sea

$$f:(f_1,f_2): SU \to SC \times_{\mathbf{Sch}_k} \mathrm{Bun}_{G,C}$$

un morfismo de stacks donde f_1 y f_2 son las proyecciones sobre SC y $\mathrm{Bun}_{G,C}$ respectivamente. Por el 2-Lema de Yoneda (Lema 5.31), dar el morfismo

$$f_2 : SU \to \mathrm{Bun}_{G,C}$$

es equivalente a dar un G-fibrado principal P sobre $C \times U$. Se define el G-fibrado principal P_f como el pullback de P por el morfismo

$$(f_1, Id_U) : U \to C \times U$$

Dado un (2)-diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} SU \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & SV \arrow[dl, "g"] \\ & SC \times_{\mathbf{Sch}_k} X & \end{tikzcd}$$

siendo U y V dos k-esquemas, se tiene un isomorfismo de funtores

$$\beta : f \circ k \Rightarrow g$$

que induce un isomorfismo (componiendo con la proyección en $\mathrm{Bun}_{G,C}$)

$$\beta_2 : f_2 \circ k \Rightarrow g_2$$

De nuevo, por la versión (2)-categorial del Lema de Yoneda, $f_2 \circ k$ y g_2 se corresponden con los G-fibrados principales $(\mathrm{Id} \times k)^*P$ y P^I sobre $C \times V$ respectivamente, y β_2 da lugar a un isomorfismo entre ellos. Es una comprobación elemental que los isomorfismos anteriores satisfacen la condición de cociclo.

Con las mismas ideas es posible dar una descripción explícita del fibrado vectorial universal de rango n sobre el stack de fibrados vectoriales de rango n, así como el G-fibrado principal dotado de trivialización formal universal sobre $\mathrm{Bun}^{\infty}_{G,C}$.

De ahora en adelante se denotará por

$$P^{univ} \to SC \times_{\mathbf{Sch}_k} \mathrm{Bun}_{G,C} \tag{5.35}$$

al G-fibrado principal universal y por

$$(P_U, \psi_U) \to SC \times_{\mathbf{Sch}_k} \mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C} \tag{5.36}$$

al G-fibrado principal universal dotado de trivialización formal universal. Análogamente

$$E_{univ} \to SC \times_{\mathbf{Sch}_k} Vect_n \tag{5.37}$$

denotará al fibrado vectorial universal de rango n.

La anterior discusión da lugar al siguiente Teorema de demostración tautológica.

Teorema 5.38: *El pullback del fibrado universal P^{univ} por el morfismo*

$$\mathrm{Id} \times \pi_\infty : SC \times_{\mathbf{Sch}_k} \mathrm{Bun}_{G,C} \to SC \times_{\mathbf{Sch}_k} \mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$$

es el G-fibrado principal universal P_U.

5.4. El grupo L^+G

En esta sección se introducirá el *Positive Loop Group* de G, apareciendo dicho grupo de modo natural en el estudio del stack $\mathrm{Bun}_{G,C}$. Se restringirá el estudio a los resultados mínimos necesarios para probar el Teorema de Uniformización de la próxima sección. Para un estudio más detallado del *Loop Group* y el *Positive Loop Group* se remite al lector interesado a [PS88] y [Fal03]. No obstante, como aportación original se reinterpretará el Positive Loop Group de G desde un punto de vista geométrico, esto es, como el grupo de automorfismos del G-fibrado principal trivial sobre el disco formal.

Considérese el funtor

$$\mathrm{Aut}_G : \mathbf{Sch}_k \to \mathbf{Grp} \tag{5.39}$$

que asigna a cada k-esquema S el grupo de automorfismos del G-fibrado principal trivial sobre $\mathrm{D} \times S$, es decir

$$\mathrm{Aut}_G(S) := \mathrm{Aut}_{\mathrm{D}\times S}(\mathrm{D} \times S \times G)$$

Teorema 5.40: *El funtor Aut_G es canónicamente isomorfo al funtor que asigna a cada k-esquema S el grupo $\mathrm{Hom}_{k-esq-form}(\mathrm{D} \times S, G)$*

Demostración. Considérese un morfismo de G-fibrados principales sobre $\mathrm{D}\times S$

$$f : \mathrm{D}\times S\times G \to \mathrm{D}\times S\times G$$

Al morfismo f se le asocia su restricción a $\mathrm{D}\times S\times\{e\} \simeq \mathrm{D}\times S$, siendo e el elemento neutro de G. Componiendo la anterior restricción con la proyección en G se obtiene un morfismo de k-esquemas-formales

$$\pi_G \circ f_{|e} : \mathrm{D}\times S \to G$$

Recíprocamente, supóngase que

$$\varphi : \mathrm{D}\times S \to G$$

es un morfismo de k-esquemas formales. Entonces, el morfismo φ define canónicamente un morfismo de G-fibrados principales sobre $\mathrm{D}\times S$

$$f : \mathrm{D}\times S\times G \to \mathrm{D}\times S\times G$$

estando f definido como

$$f(a, b, g) := (a, b, (\varphi(a, b)\cdot g))$$

Una asignación es inversa de la otra. □

Definición 5.41. Se define el **Loop Group** de G como el funtor

$$\begin{aligned} LG : \mathbf{Aff}_{\mathrm{k}} &\to \mathbf{Grp} \\ R &\mapsto LG(R) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{k}-alg}(\mathcal{O}_G, R((t))) \end{aligned}$$

donde $R[G]$ es el anillo de funciones G, es decir, $\mathrm{Spec}(R[G]) = G$.

Definición 5.42. Se define el **Positive Loop Group** de G como el funtor

$$\begin{aligned} L^+G : \mathbf{Aff}_{\mathrm{k}} &\to \mathbf{Grp} \\ R &\mapsto L^+G(R) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{k}-alg}(\mathcal{O}_G, R[[t]]) \end{aligned}$$

Proposición 5.43: *Los funtores LG y L^+G son haces en la topología fpqc.*

Demostración. Sean A y B dos k-álgebras, y considérese un morfismo fielmente plano y quasi-compacto $A \to B$. Como $A \to B$ es fpqc, la sucesión

$$A \longrightarrow B \rightrightarrows B\otimes_A B$$

es exacta por la izquierda. Se tiene una sucesión canónica asociada entre los respectivos anillos de series formales

$$A[[t]] \longrightarrow B[[t]] \rightrightarrows (B \otimes_A B)[[t]]$$

Es una comprobación elemental ver que la anterior sucesión es exacta por la izquierda. Localizando se obtiene que la sucesión

$$A((t)) \longrightarrow B((t)) \rightrightarrows (B \otimes_A B)((t))$$

es de nuevo exacta por la izquierda. □

Utilizando las mismas ideas explicadas en el artículo de Beauville y Laszlo [Bea18] cambiando Gl(n) por G, se prueba que LG es representable por un ind-esquema (límite inductivo de los funtores de puntos de un sistema inductivo de k-esquemas), y el funtor L^+G es representable por un k-esquema afín (de tipo infinito) en grupos (consúltese también el artículo de Pappas y Rapoport [PR08]). Como consecuencia del Teorema 5.40 se obtiene lo siguiente.

Teorema 5.44: *La hacificación del funtor* Aut_G *es canónicamente isomorfo a* $L*G$*, y por tanto representable por un* k*-esquema afín. .*

Demostración. En primer lugar $G = \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[G])$ se considera como esquema formal dotando a k[G] de la topología discreta. Dado $S = \mathrm{Spec}(R)$ se tiene por el Teorema 5.40 que

$$\mathrm{Aut}_G(S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{k}-esq-form}(\mathrm{D} \times S, G) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{k}-\acute{a}lg-cont}(\mathrm{k}[G], R[[z]])$$

donde la última igualdad se tiene por ser G un esquema formal afín. Por último, como k[G] tiene la topología discreta

$$Hom_{\mathrm{k}-\acute{a}lg-cont}(\mathrm{k}[G], R[[z]]) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{k}-alg}(\mathrm{k}[G], R[[z]]) = L^+G(R)$$

□

Observación 5.45. En lo sucesivo, y por abuso de notación, se denotará por Aut_G, a la hacificación del funtor (5.39).

5.5. El Teorema de uniformización

La presente sección está dedicada a probar el Teorema de Uniformización para el stack $\mathrm{Bun}_{G,C}$. Dicho teorema permitirá expresar el stack $\mathrm{Bun}_{G,C}$ como el stack cociente de $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$ por la acción de Aut_G. Para una introducción a las propiedades elementales de los stacks cocientes se recomienda consultar [Ols16] o [Wan11]. En primer lugar y antes de continuar obsérvese que Aut_G actúa libremente en $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$ del modo que sigue. Considérese S un k-esquema, un elemento $\gamma \in \mathrm{Aut}_G(S)$ y un punto de $\mathrm{Bun}^\infty_{G,C}$ con valores en S, es decir, una clase de equivalencia $(\{f_i : U_i \to S\}, \{[P_i, \psi_i]\})$. El grupo $\mathrm{Aut}_G(S)$ actúa sobre la anterior clase de equivalencia a través de γ mediante la siguiente fórmula

$$(\{f_i : U_i \to S\}, \{[P_i, \psi_i]\}) \cdot \gamma = (\{f_i : U_i \to S\}, \{[P_i, (1 \times f_i)^* \gamma^{-1} \circ \psi_i]\}) \tag{5.46}$$

Observación 5.47. Obsérvese la importancia de considerar el espectro formal en vez del espectro usual. Dada una k-álgebra R cualquiera, es bien conocido que el morfismo canónico de anillos $k[[t]] \otimes_k R \to R[[t]]$ rara vez es un isomorfismo. No obstante, si se considera R con la topología discreta y se completa el producto tensorial [Gro71, § 10], entonces se tiene el siguiente isomorfismo de anillos

$$k[[t]] \hat{\otimes}_k R \simeq R[[t]]$$

En el caso particular en el que se trabaja

$$\mathrm{Spf}(k[[t]]) \times \mathrm{Spec}(R) \simeq \mathrm{Spf}(R[[t]])$$

Teorema 5.48: *Sea G un grupo algebraico lineal afín semisimple y especial. El stack cociente $[\mathrm{Bun}^\infty_{G,C} / \mathrm{Aut}_G]$, donde Aut_G actúa en $\mathrm{Bun}^\infty_{G,C}$ vía* (5.46) *es canónicamente isomorfo a $\mathrm{Bun}_{G,C}$ como stacks sobre $\mathbf{Sch}_k$ con la topología de Zariski. Es decir*

$$[\mathrm{Bun}^\infty_{G,C} / \mathrm{Aut}_G] \simeq \mathrm{Bun}_{G,C} \tag{5.49}$$

Demostración. Sea S un k-esquema. La fibra de S con respecto el stack $[\mathrm{Bun}^\infty_{G,C} / \mathrm{Aut}_G]$ es una pareja formada por un Aut_G-fibrado principal $P \to S$ y un morfismo Aut_G-equivariante $f : P^\bullet \to \mathrm{Bun}^\infty_{G,C}$, donde recuérdese que la notación $P^\bullet$ hace referencia al funtor de puntos de P. Como f es Aut_G-equivariante se tiene un morfismo inducido entre los cocientes

$$\bar{f} : (P/\mathrm{Aut}_G)^\bullet \simeq S^\bullet \to \mathrm{Bun}^\infty_{G,C} / \mathrm{Aut}_G$$

Se puede formar por tanto el siguiente diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet \simeq \mathrm{Bun}^\infty_{G,C} \times_{\mathrm{Bun}^\infty_{G,C}/\mathrm{Aut}_G} S^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Bun}^\infty_{G,C} \arrow[d] \\
S^\bullet \arrow[r] & \mathrm{Bun}^\infty_{G,C} / \mathrm{Aut}_G
\end{tikzcd}$$

Se tiene por tanto que el stack cociente $[\mathrm{Bun}^\infty_{G,C} / \mathrm{Aut}_G]$ puede ser entendido como el haz cociente $\mathrm{Bun}^\infty_{G,C} / \mathrm{Aut}_G$.

Dados dos elementos de $\mathrm{Bun}^\infty_{G,C}(S)$ de la forma $(\{f_i : U_i \to S\}, \{[P_i, \psi_i]\})$, $(\{f_i : U_i \to S\}, \{[P_i, \psi_i']\})$, donde recuérdese que $\{U_i \to S\}$ es un recubrimiento con respecto la topología de Zariski, se tiene que ambos yacen en la misma clase de equivalencia con respecto la Aut_G-acción definida en (5.46), ya que para cada U_i se tiene el siguiente triángulo conmutativo de isomorfismos de G-fibrados principales

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}\times U_i\times G \arrow[rr, dashed, "\psi_i\circ(\psi_i)^{-1}"] \arrow[dr, dash, "\psi_i"'] & & \mathrm{D}\times U_i\times G \arrow[dl, dash, "\psi_i"] \\
& \mathbf{P}_i &
\end{tikzcd}$$

y

$$\psi_i^I\circ(\psi_i)^{-1}\in \mathrm{Aut}_G(U_i)$$

para cada i. Como Aut_G es un haz, y por construcción los isomorfismos $\psi_i^I\circ(\psi_i)^{-1}$ satisfacen las condiciones de compatibilidad usuales, existe una sección global $\gamma\in \mathrm{Aut}_G(S)$ tal que para cada i, el pullback de γ a lo largo de los morfismos

$$1\times f_i:\mathrm{D}\times U_i\to \mathrm{D}\times S$$

son precisamente las secciones locales de partida.

La anterior discusión permite concluir que el morfismo inducido

$$[\mathrm{Bun}_{\mathfrak{G},C}/\mathrm{Aut}_G]\to \mathrm{Bun}_{G,C}$$

por el morfismo de olvido π_∞ (5.25) es inyectivo en los objetos, y por tanto biyectivo para los grupos especiales por el Teorema 5.23. El funtor definido en el Teorema 5.23, permite concluir que $\mathrm{Bun}_{G,C}\to[\mathrm{Bun}_{\mathfrak{G},C}/\mathrm{Aut}_G]$ es el funtor inverso y por tanto se trata de una equivalencia de categorías. Es inmediato que ambos funtores preservan morfismos cartesianos, de donde se sigue que la equivalencia categorial es un isomorfismo de stacks. □

Corolario 5.50: *$\pi_\infty:\mathrm{Bun}_{\mathfrak{G},C}\to \mathrm{Bun}_{G,C}$ es un Aut_G-fibrado principal.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 5.48 y el Lema [Wan11, Lema 2.1.1], el cual establece una equivalencia biunívoca entre los stacks cocientes y los fibrados principales. □

Observación 5.51. El Teorema de Uniformización 5.48 presentado en esta tesis es que permite describir explícitamente el esquema de tipo infinito que aparece en [BZF01, 4.17] y [Tel98], y recuperar dichos resultados de un modo más preciso.

La misma demostración dada en el Teorema 5.48, junto con la Observación 5.24 y el Teorema 5.26 sirven para probar el siguiente resultado.

Teorema 5.52: *Sea G un grupo algebraico lineal afín semisimple cualquiera. El stack cociente $[\mathrm{Bun}_{\mathfrak{G},C}/\mathrm{Aut}_G]$, donde Aut_G actúa en $\mathrm{Bun}_{\mathfrak{G},C}$ vía* (5.46) *es canó-*

nicamente isomorfo a $\mathrm{Bun}_{G,C}$ *como stacks sobre* $\boldsymbol{Sch}_{\mathrm{k}}^{\text{ét}}$. *Es decir*

$$[\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}/\mathrm{Aut}_G] \quad \mathrm{Bun}_{G,C} \tag{5.53}$$

como stacks sobre la categoría de k*-esquemas dotada de la topología étale.*

5.6. El grupo de Picard

Para explicar las relaciones existentes entre los grupos de Picard de $S\,\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$ y $\mathrm{Bun}_{G,C}$ es necesario dar algunas definiciones previas. En particular, que significa dar una G-linealización en el contexto de stacks.

Sean X y Y dos stacks sobre $\mathbf{Sch}_{\mathrm{k}}$, y sea $f : X \to Y$ un morfismo de stacks. Supóngase que G es un grupo algebraico y denótese por G a SG. Supóngase que G actúa en el Y-stack X . Se denotará por m_G (resp. e_G) al morfismo de multiplicación (resp. al morfismo identidad) de G.

Definición 5.54. Dar una **acción** de G en $X \to Y$ es dar un morfismo de stacks sobre Y

$$\sigma : X \times_{\mathbf{Sch}_{\mathrm{k}}} G \to X$$

y un 2-morfismo

$$\mu : m \circ (m_G \times \mathrm{Id}_X) \Rightarrow m \circ (m \times \mathrm{Id}_G)$$

tal que la propiedad asociativa es satisfecha

$$\sigma \circ (m \times \mathrm{Id}_X) \qquad \sigma \circ (\mathrm{Id}_X \circ \sigma)$$

y tal que existe un 2-morfismo (el elemento inverso)

$$E : m \circ (Id_X \times e_G) \Rightarrow \mathrm{Id}_X$$

compatible con μ. La composición de 2-morfismos será denotada por $*$.

De ahora en adelante

$$p_1 : X \times G \to X$$

denotará a la proyección en el primer factor.

Considérese un fibrado de línea sobre X. Como existe una correspondencia canónica entre los fibrados de línea y los $\mathbb{G}_m$-fibrados principales, se tiene, en analogía con el Lema 5.30, que dar el fibrado de línea L es equivalente a dar un morfismo de stacks

$$l : X \to B\mathbb{G}_m := [\mathrm{Spec}(\mathrm{k})/\mathbb{G}_m]$$

Sean L, L^I dos haces de línea X definidos por los morfismos l, l^I. Un isomorfismo de fibrados de línea $L \quad L^I$ será entendido como un 2-morfismo $l \Rightarrow l^I$.

Definición 5.55. Sea $L \quad \to X$ un fibrado de línea. Una **-linealización** de L es un 2-morfismo

$$\lambda : l \circ m \Rightarrow l \circ p_1$$

tal que los siguientes diagramas de 2-morfismos son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
l \circ m \circ (\mathrm{Id}_X \times m_G) \arrow[rr, equal, "l*\mu"] \arrow[d, equal, "l*(\mathrm{Id}_X \times m_G)"'] & & l \circ m \circ (m \times \mathrm{Id}_G) \arrow[d, equal, "\lambda*(m \times \mathrm{Id}_G)"] \\
l \circ p_1 \circ p_{12} = l \circ p_1 \circ (\mathrm{Id}_X \times m_G) \arrow[rr, equal, "\lambda * p_{12}"] & & l \circ p_1 \circ (m \times \mathrm{Id}_G) = l \circ m \circ p_{12}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& l \circ m \circ (\mathrm{Id}_X \times e_G) \arrow[dl, equal, "\lambda*(1 \times \mathrm{Id}_X)"'] \arrow[dr, equal, "l*e_G"] & \\
l \arrow[rr, equal] & & l
\end{tikzcd}$$

donde

$$p_{12} : X \times_{\mathbf{Sch}_k} G \times_{\mathbf{Sch}_k} G \to X \times_{\mathbf{Sch}_k} G$$

es la proyección en las dos primeras componentes.

Teorema 5.56: *[Las97, Theorem 4.1] Sea $f : X \to Y$ un G fibrado principal. Sea $\mathrm{Pic}^G(X)$ el grupo de clases de isomorfismos de fibrados de línea G-linealizados sobre X. Entonces, el pullback por f da lugar a un isomorfismo de grupos*

$$f^* : \mathrm{Pic}(Y) \quad \mathrm{Pic}^G(X)$$

El Teorema 5.56 junto con el resultado obtenido en Corolario 5.50 dan lugar a la siguiente relación.

Corolario 5.57: *El pullback del funtor olvido π_∞ da lugar a un isomorfismo de grupos*

$$\pi^*_\infty : \mathrm{Pic}(\mathrm{Bun}_{G,C}) \quad \mathrm{Pic}^{S\,\mathrm{Aut}G}(S\,\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C})$$

5.7. Fibrados determinantes

Como sección final de este capítulo se relacionan los fibrados determinantes del stack de fibrados principales y del stack $\mathcal{S}\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$. Es conveniente recalcar que el fibrado determinante sobre $\mathrm{Bun}_{G,C}$ aparece de modo natural en el estudio de las inmersiones en espacios proyectivos (consúltese [BLS98]). Por completitud, se recuerdan algunas de las definiciones y resultados elementales acerca del fibrado determinante asociado a una familia de fibrados vectoriales sobre una curva C.

Sea $E \to C \times S$ un fibrado vectorial con S un esquema localmente noetheriano, denótese por $p_S : C \times S \to S$ a la proyección en el segundo factor y sea $\mathcal{E}$ el haz de secciones de E. Por [Gro61a, Théorème 2.2.1], los haces $R^i p_{2*}\mathcal{E}$ son coherentes y se tiene que $R^i p_{2*}\mathcal{E} = 0$ para todo $i \geq 2$ por ser las fibras del morfismo $C \times S \to S$ de dimensión 1. Utilizando el de nuevo [Gro61a, Théorème 2.2.1] (consúltese [Sor00, 6.1]), existen haces localmente libres que $\mathcal{E}_i$, con $\mathcal{E}_i = 0$ para todo $i \geq 2$ sobre S

$$C_E \equiv E_0 \to E_1 \to 0 \to \cdots$$

tal que para cualquier morfismo de k-esquemas $f : Z \to S$ se verifica la siguiente fórmula

$$\mathrm{R}^i((\pi_Z)_*(\mathrm{Id}\times f)^*E) = \mathrm{H}^i(f^* C_E) \tag{5.58}$$

donde $\pi_Z : C \times Z \to Z$ denota la proyección en Z.

Definición 5.59. El **fibrado determinante** $\mathrm{Det}\, E$ de E, es el fibrado de línea sobre S asociado al haz localmente libre

$$\mathrm{Det} E := \wedge^{\text{máx}} \mathcal{E}_1 \otimes (\wedge^{\text{máx}} \mathcal{E}_0^*)$$

es decir, $\mathrm{Spec}(\mathrm{S}^\bullet((\mathrm{Det} E)^\vee))$.

Por construcción dado un morfismo de k-esquemas $f : Z \to S$, se tiene que la formación del fibrado Determinante es compatible con cambios de base

$$\mathrm{Det}((\mathrm{Id}\times f)^*E) = f^*(\mathrm{Det}\, E) \tag{5.60}$$

Además la definición del fibrado determinante no depende del complejo C_E considerado por la Teoría general del determinante [KM76].

Definición 5.61. Sea $P \to C \times S$ un G-fibrado principal con S localmente noetheriano, y sea $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$ una representación fiel fija. Sea E_P el fibrado vectorial asociado. El **fibrado determinante** $\mathrm{Det}\, P$ de P se define como

$$\mathrm{Det}\, P := \mathrm{Det}\, E_P$$

Sea $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$ una representación fiel fija, y sea $\mathcal{X} \to \mathbf{Sch}_k$ un stack. Considérese un G-fibrado principal $P \to \mathcal{X}$ sobre $\mathcal{X}$ (Definición 5.29). A través del Teorema de Serre (Teorema 2.33), se define a través de ρ un fibrado vectorial $P \times^G V$ sobre $\mathcal{X}$. La construcción es la siguiente. Dado un k-esquema U y un morfismo de stacks

$$f : SU \to \mathcal{X}$$

se tiene, por hipótesis, un G-fibrado principal $P_f \to U$. Se define el fibrado vectorial E_f sobre U como

$$P_f \times^G V$$

Dado un (2)-diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} SU \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & SV \arrow[dl, "g"] \\ & \mathcal{X} & \end{tikzcd}$$

siendo U y V dos k-esquemas, el isomorfismo

$$\alpha_k : E_f \simeq k^* E_g$$

es el isomorfismo canónico descrito en la ecuación (2.35) del Teorema 2.33. Es una comprobación elemental que el anterior isomorfismo satisface la condición de cociclo.

Definición 5.62. Sea $\mathcal{P}^{univ} \to SC \times_{\mathbf{Sch}} \mathrm{Bun}_{G,C}$ el fibrado principal universal. Se define el **Fibrado Determinante** $\mathrm{Det}\,\mathcal{P}^{univ}$ sobre $\mathrm{Bun}_{G,C}$ como el fibrado de línea $\mathrm{Bun}_{G,C}$ construido como sigue. Para cada k-esquema U localmente noetheriano, y cada morfismo de stacks

$$f : SU \to \mathrm{Bun}_{G,C}$$

se tiene, por el Lema de Yoneda (Lema 5.31) un G-fibrado principal $P_U \to C \times U$. A P_U se le asigna su fibrado vectorial asociado con respecto la representación $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$, es decir

$$E_U = P_U \times^G V$$

Finalmente, a E_U se le asocia su fibrado determinante $\mathrm{Det}\,E_U$ (Definición 5.59). Debido a las propiedades de cambio de base del fibrado determinante (5.60), se ha construido un haz de línea sobre $\mathrm{Bun}_{G,C}$

Sea (P_U, ψ_U) la familia universal sobre $SC \times_{\mathbf{Sch}_k} S\,\mathrm{Bun}_{G,C}$. En particular $P_U \to SC \times_{\mathbf{Sch}_k} S\,\mathrm{Bun}_{G,C}$ es un G-fibrado principal. Se define de modo análogo el fibrado determinante $\mathrm{Det}\,P_U$ sobre $S\,\mathrm{Bun}_{G,C}$.

Teorema 5.63: *Sea* π_∞: $\mathrm{Bun}_{\mathfrak{G},C}$ $\mathrm{Bun}_{G,C}$ *el morfismo de olvido* (5.25). *El pullback del fibrado determinante sobre* $\mathrm{Bun}_{G,C}$ *es canónicamente isomorfo al fibrado determinante sobre* $\mathrm{Bun}_{\mathfrak{G},C}$*; es decir, se verifica la siguiente fórmula*

$$\pi_\infty^*(\mathrm{Det} P^{univ}) = \mathrm{Det}\left((\mathrm{Id}\times\pi_\infty)^* P^{univ}\right) = \mathrm{Det}\, P_U \qquad (5.64)$$

Demostración. El primer isomorfismo es la propiedad de cambio de base del determinante (5.60). El segundo isomorfismo se sigue del Teorema 5.38, donde se prueba que el pullback de P^{univ} por $(\mathrm{Id}\times\pi_\infty)$ es P_U. □

6. Espacios Tangentes

Con el presente capítulo se concluye la primera parte de la Tesis. En este capítulo se realiza cálculo del espacio tangente al espacio de móduli $\mathtt{Bun}_{\mathcal{G},C}$, así como el estudio de las deformaciones de parejas dadas por un fibrado principal P sobre C y una trivialización del fibrado principal en $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p^n)$. Además se obtiene una sucesión exacta que relaciona el espacio tangente a $\mathtt{Bun}_{\mathcal{G},C}$ con el álgebra de Lie del Loop Group de G. Se expondrá de forma resumida la teoría de álgebras de Lie desde un punto de vista puramente algebraico siguiendo las referencias [Mil17, Chapter 12] y [TY05]. Una exposición rigurosa del estudio de deformaciones puede ser encontrada en [Ser10]. Es necesario recalcar que el cálculo del espacio tangente al funtor $\mathtt{Bun}_{\mathcal{G},C}$ está basado en algunas de las ideas del artículo de I. Biswas y S. Ramanan [Bis94] y en el artículo de Kenji Ueno [Uen92].

6.1. Álgebra de Lie de un grupo Algebraico

Definición 6.1. Una k-**álgebra de Lie** es un k-espacio vectorial $\mathfrak{g}$ dotado de una aplicación k-bilineal

$$[-,-]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

verificando que

i) $[x,x]=0$ para todo $x\in\mathfrak{g}$;

ii) y satisfaciendo la identidad de Jacobi

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

para todo $x,y,z\in\mathfrak{g}$.

Un **morfismo** de álgebras de Lie es un morfismo de k-álgebras $\Phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ preservando las respectivas aplicaciones bilineales, es decir

$$\Phi([x,y])=[\Phi(x),\Phi(y)]$$

para todo $x,y\in\mathfrak{g}$.

Observación 6.2. Si A es una k-álgebra asociativa, entonces, definiendo $[a,b]:=ab-ba$, se dota a A de estructura de álgebra de Lie sobre k. Dada una k-álgebra A (no necesariamente asociativa ni conmutativa), el conjunto de derivaciones de A sobre k, $\operatorname{Der}_k(A)$ dotado con la operación $[T,S]:=T\circ S-S\circ T$ es una k-álgebra de Lie. De hecho, $\operatorname{Der}_k(A)$ es una sub-k-álgebra de Lie de $\operatorname{End}_k(A)$.

Definición 6.3. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie, y sea $x \in \mathfrak{g}$ un elemento fijo. La aplicación lineal

$$\mathrm{ad}(x) := [x, -] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \tag{6.4}$$

se llama **morfismo adjunto** asociado a x. Es una comprobación elemental probar que $\mathrm{ad}(x)$ es una derivación de $\mathfrak{g}$ sobre k. Se tiene por tanto que la asignación

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\to \mathrm{Der}_{k}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto \mathrm{ad}(x) \end{aligned} \tag{6.5}$$

es un morfismo de álgebras de Lie. El morfismo (6.5) se conoce como **representación adjunta**.

Definición 6.6. Sea

$$F : \mathbf{Sch}_{k} \to \mathbf{Sets}$$

un funtor contravariante y sea $p \in F(\mathrm{Spec}(k))$ un punto *racional*. Se define el **espacio tangente** a F en el punto p como el conjunto

$$\mathrm{T}_p F := F(Spec(k[E])) \times_{F(\mathrm{Spec}(k))} \{p\}$$

donde $E^2 = 0$.

Definición 6.7. Sea G un grupo algebraico afín. Se define su **álgebra de Lie** como el espacio tangente a su funtor de puntos en el elemento neutro e, es decir

$$\mathfrak{g} := \mathrm{T}_e G^{\bullet} = \mathrm{Ker}[G^{\bullet}(\mathrm{Spec}(k[E])) \to G^{\bullet}(\mathrm{Spec}(k))] \tag{6.8}$$

Como G es afín, $G = \mathrm{Spec}(k[G])$ y por tanto el espacio tangente (6.8) se identifica con los morfismos de k-álgebras

$$\varphi : k[G] \to k[E]$$

cuya composición con el morfismo $E \to 0$ da lugar al morfismo inducido por el elemento neutro

$$e : k[G] \to k \tag{6.9}$$

En particular, un morfismo φ envía el ideal de aumentación del grupo $I := \mathrm{Ker}(e)$ a E, y como $E^2 = 0$ se verifica que φ factoriza a través del cociente $k[G]/I^2$. Ahora bien, utilizando [Mil17, 3.37]

$$k[G]/I^2 \quad k \oplus I/I^2$$

y el morfismo φ envía a cada pareja $(a, b) \in k \oplus I/I^2$ a $a + D(b)E$ con $D(b) \in k$. Como la asignación $\varphi \mapsto D$ es una biyección se tiene un isomorfismo de k-álgebras

$$T_e G \quad \mathrm{Hom}_{k}(I/I^2, k)$$

Finalmente, se tiene que el álgebra de Lie de G se identifica con $\mathrm{Hom}_k(I/I^2, k)$. La aplicación $[-,-]$ en $\mathrm{Hom}_k(I/I^2, k)$ se define como

$$[f, g] := f \circ g - g \circ f$$

A través del isomorfismo descrito anteriormente, dados $(\mathrm{Id} + S\varepsilon)$ y $(\mathrm{Id} + T\varepsilon)$ se tiene que

$$[(\mathrm{Id} + S\varepsilon), (\mathrm{Id} + T\varepsilon)] := \mathrm{Id} + (S \circ T - T \circ S)E \tag{6.10}$$

Observación 6.11. Siguiendo [MPPM19, 2.D] se tiene que dado un funtor en grupos F, se define su álgebra de Lie como el espacio vectorial

$$\mathrm{Lie}\,F := F(k[E]) \times_{F(\mathrm{Spec}(k))} \{1\}$$

dotado de la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie}\,F \times \mathrm{Lie}\,F &\to \mathrm{Lie}\,F \\ (S, T) &\mapsto [S, T] \end{aligned}$$

donde $[S, T]$ es el elemento de $\mathrm{Lie}\,F$ verificando la ecuación

$$1 + \varepsilon_1\varepsilon_2[S, T] = (1 + \varepsilon_1 S)(1 + \varepsilon_2 T)(1 + \varepsilon_1 S)^{-1}(1 + \varepsilon_2 T)^{-1}$$

donde ε_1 (resp. ε_2) denotan a los elementos $E \otimes 1$ (resp. $1 \otimes \varepsilon_2$) pertenecientes a $k[E] \otimes_k k[E]$. La anterior relación depende únicamente de la ley de grupo considerada en F . Desarrollando la parte derecha de la anterior igualdad (formalmente) se obtiene que $1 + \varepsilon_1\varepsilon_2(ST - TS)$.

Definición 6.12. Sea $P \to X$ un G-fibrado principal. Se define la **acción adjunta** de G en sí mismo como

$$\Psi_h(g) := g \cdot h = g^{-1} \cdot h \cdot g \tag{6.13}$$

La anterior acción induce un morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \Psi : G &\to \mathrm{Aut}(G) \\ h &\mapsto \Psi_h(-) \end{aligned} \tag{6.14}$$

Se denota por $\mathrm{Ad}\,P$ al espacio fibrado de fibra tipo G obtenido mediante la acción adjunta (6.14), es decir $P \times^G G$.

Definición 6.15. Sea G un grupo algebraico lineal sobre k y R una k-álgebra. Se define $\mathfrak{g}(R)$ a través de la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathfrak{g}(R) \to G^\bullet(\mathrm{Spec}(R[E])) \to G^\bullet(\mathrm{Spec}(R)) \to 0$$

donde el morfismo $G^\bullet(\mathrm{Spec}(R[E])) \to G^\bullet(\mathrm{Spec}(R))$ viene dado por $E \mapsto 0$. De nuevo, por [Mil17, 3.37] se tiene una sucesión exacta de k-espacios vectoriales

$$0 \to I \to \mathrm{k}[G] \xrightarrow{e} \mathrm{k} \to 0$$

que tensorializando por R da lugar a una sucesión exacta de R-módulos

$$0 \to I_R \to \mathrm{k}[G] \otimes_{\mathrm{k}} R \xrightarrow{e \otimes 1} R \to 0$$

Se tiene por tanto que $\mathfrak{g}(R)$ es un morfismo $\mathrm{k}[G] \otimes_{\mathrm{k}} R \to R[E]$ cuya composición con $E \mapsto 0$ es $e \otimes 1$. Se obtiene por tanto que

$$\mathfrak{g}(R) \quad \mathfrak{g}(\mathrm{k}) \otimes_{\mathrm{k}} R$$

Como $G^\bullet(\mathrm{Spec}(R[E])$ actúa en $\mathfrak{g}(R)$ por automorfismos internos, y $G^\bullet(\mathrm{Spec}(R))$ es un subgrupo de $G^\bullet(\mathrm{Spec}(R[E]))$, este último también actúa por automorfismos internos. Se obtiene por tanto, para todo R, un morfismo de grupos

$$G^\bullet(\mathrm{Spec}(R)) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{k}}(\mathfrak{g}(R))$$

Se tiene definido por tanto un morfismo de funtores en grupos sobre la categoría de k-álgebras, conocido como la **representación adjunta**

$$\mathrm{ad} : G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{k}}(\mathfrak{g}) \tag{6.16}$$

Se denomina **fibrado adjunto** y se denota por $\mathrm{ad}(P)$ al fibrado vectorial asociado a la representación adjunta (6.16), es decir $P \times^G \mathfrak{g}$.

Lema 6.17: *Sea F una variedad quasi-proyectiva dotada de una G-acción. Y sea $\pi : P \to X$ un G-fibrado principal. Se tiene una correspondencia biunívoca entre morfismos G-equivariantes $P \to F$ y secciones del fibrado adjunto $s \in \Gamma(X, (P \times F)/G)$.*

Demostración. Sea $f : P \to F$ un morfismo G-equivariante. Se define la sección

$$\begin{aligned} s_f : X &\to (P \times F)/G \\ x &\mapsto (p, f(p)) \end{aligned}$$

donde $p \in P$ con $\pi(p) = x$. Recíprocamente, toda sección $s : X \to (P \times F)/G$ es de la forma $s(x) = (e, s^I(e))$ siendo $\pi(e) = x$. Se define el morfismo

$$\begin{aligned} f_s : P &\to F \\ e &\mapsto s^I(e) \end{aligned}$$

Las asignaciones están bien definidas y una es inversa de la otra. □

Teorema 6.18: *Sea $P \to X$ un G-fibrado principal sobre un* k*-esquema X. Los G-automorfismos de P se corresponden con las secciones globales del fibrado* $\mathrm{Ad}(P) = P \times^G G$*, es decir, se verifica la fórmula*

$$\mathrm{Aut}_{G-fib-prin}(P) \quad \Gamma(X, \mathrm{Ad}(P))$$

Demostración. Sea $s : X \to \mathrm{Ad}(P)$ una sección, que por el Lema 6.17 puede ser entendida como un morfismo G-equivariante $f : P \to G$. El morfismo

$$\begin{aligned} \sigma_s : P &\to P \\ p &\mapsto p \cdot f(p) \end{aligned}$$

es un automorfismo G-equivariante. Recíprocamente, sea $\sigma : P \to P$ un automorfismo G-equivariante. La acción de G en P es libre y transitiva (Teorema 1.4), por lo que dado $p \in P$ existe un único $g_p \in G$ tal que $p \cdot g_p = \sigma(p)$. Se define el morfismo

$$\begin{aligned} f : P &\to G \\ p &\mapsto g_p \end{aligned}$$

Los morfismos están bien definidos y una correspondencia es inversa de la otra como puede comprobarse. □

Teorema 6.19: *Sea $P \to X$ un G-fibrado principal con X propio sobre* k *y sea* $P \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E]) \to X \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E])$ *con* $E^2 = 0$ *el G-fibrado principal obtenido por cambio de base mediante la proyección* $X \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E]) \to X$*. Se tiene una correspondencia biunívoca entre los automorfismos G-equivariantes de* $P \times \mathrm{Spec}(E)$ *sobre* $C \times \mathrm{Spec}\ \mathrm{k}[E]$ *que inducen la identidad en P al hacer $E = 0$, y las secciones del fibrado adjunto* $\mathrm{ad}(P) = P \times^G \mathfrak{g}$.

Demostración. El funtor

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(P)^{\bullet} : \mathbf{Sch}_{\mathrm{k}} &\to \mathbf{Grp} \\ S &\mapsto Aut(P)^{\bullet} := \mathrm{Aut}^G(P \times S) \end{aligned}$$

que asigna a cada k-esquema S el grupo de automorfismos G-equivariantes de $P \times S$ sobre $X \times S$ es representable por un esquema en grupos afín de tipo finito [Bri11, Prop. 4.3], que se denotará por $\underline{\mathrm{Aut}}(P)$. Se verifica que el álgebra de Lie asociada a $\underline{\mathrm{Aut}}P$ es canónicamente isomorfa al k-espacio vectorial dado por los morfismos G-equivariantes de P en el álgebra de Lie de G, es decir $\mathrm{Hom}_G(P, \mathfrak{g})$ [Bri11, Lema 4.1], y por el Lema 6.17 se sigue que que el álgebra de Lie de $\underline{\mathrm{Aut}}(P)$ se corresponde de forma canónica con las secciones del fibrado adjunto $P \times^G \mathfrak{g}$. Ahora bien, los automorfismos de $P \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E]) \to X \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E])$ que restringen a la identidad se identifican precisamente con el espacio tangente al elemento neutro de $\underline{\mathrm{Aut}}(P)$.

En conclusión, se tiene que

$$\mathrm{T}_{\mathrm{Id}}(\underline{\mathrm{Aut}}(P)) = \{\mathrm{Id}+sE\}$$

con $s \in \Gamma(X, \operatorname{ad} P)$. □

6.2. Cálculo de espacios tangentes

En la presente sección, se calculará las deformaciones infinitesimales de las parejas formadas por un G-fibrado principal sobre una curva algebraica lisa y proyectiva C, y una trivialización infinitesimal de orden k en un punto cerrado $p \in C$, es decir, una trivialización de P sobre $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}_p^k)$. En la presente sección se utilizarán las técnicas explicadas en [Ser10] para llevar a cabo los cálculos expresados anteriormente.

Definición 6.20. Se define

$$Prin_{C,G} : \mathbf{Sch}_{\mathrm{k}} \to \mathbf{Sets}$$

como el funtor que asigna a cada k-esquema S el conjunto de G-fibrados principales sobre $C \times S$ módulo isomorfismos.

Teorema 6.21: *Sea $P \to C \in Prin_{C,G}(\operatorname{Spec}(\mathrm{k}))$ un G-fibrado principal. Entonces, el espacio tangente a $Prin_{C,G}$ en el punto P está caracterizado como*

$$\mathrm{T}_P Prin_{C,G} \cong \mathrm{H}^1(C, \operatorname{ad} P)$$

Demostración. Considérese un recubrimiento de Zariski $U := \{U_i = \operatorname{Spec}(A_i) \to C\}_{i\in I}$. Sea E el haz localmente libre asociado al fibrado vectorial $\operatorname{ad} P$. Obsérvese que para cada $i \in I$ se tiene que $E_{|U_i} = \tilde{M}_i$ siendo M_i un A_i-módulo. En lo sucesivo, se utilizará la notación $U_{ij} := U_i \cap U_j$.

Se define Z como el conjunto de elementos de la forma $(s_{ij})_{i,j\in I}$, siendo s_{ij} una sección de $\in \Gamma(U_{ij}, \operatorname{Ad} P) := M_{ij}$, que verifican la condición de cociclo (aditivo)

$$s_{ij} + s_{jk} = s_{ik} \quad \text{como elementos de } M_{ijk} \tag{6.22}$$

Sea B es el subespacio de Z consintiendo en los elementos $(s_i - s_j)_{i,j\in I}$ con $s_i \in M_i$ y $s_j \in M_j$. Considérese un elemento (s_{ij}) de Z, el objetivo es construir un G-fibrado principal $\tilde{P} \to C \times \operatorname{Spec}(\mathrm{k}[E])$ con un isomorfismo $\tilde{P}_{|C} \cong P$. Obsérvese que la notación $\tilde{P}_{|C}$ hace referencia al pullback de $\tilde{P}$ a través del morfismo natural $C \to C \times \operatorname{Spec}(\mathrm{k}[E])$.

Para cada $i \in I$, considérese el G-fibrado principal

$$\tilde{P}_i := p^*{}_1(P_{|U_i}) \to U_i[E] := U_i \times \operatorname{Spec}(\mathrm{k}[E])$$

siendo $p_1 : U_i \times \operatorname{Spec}(\mathrm{k}[E]) \to U_i$ la proyección en el primer factor. Por el Teorema 6.19, las restricciones de $\tilde{P}_i$ y $\tilde{P}_j$ a $U_{ij}[E]$ se pueden identificar en términos de un isomorfismo $1 + s_{ij}E$. La condición (6.22) permite asegurar la compatibilidad de las anteriores asignaciones y por tanto concluir la existencia de un G-fibrado principal $\tilde{P}$ sobre $C[E] := C \times \operatorname{Spec}(\mathrm{k}[E])$ que restringe a P.

Supóngase ahora que $(s_{ij}) \in B$, es decir, $s_{ij} = s_i - s_j$. Se tiene por tanto que la identificación $\tilde{P}_i \to \tilde{P}_j$ sobre $U_{ij}[E]$ viene dado por un automorfismo $1 + (s_i - s_j)E$. En consecuencia, si se considera un automorfismo de $\tilde{P}_i$ dado por $1 + s_iE$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\tilde{P}_{ij} \arrow[r, "1+s_iE"] \arrow[d, "1+s_{ij}E"'] & \tilde{P}_{ij} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\tilde{P}_{ij} \arrow[r, "1+s_jE"] & \tilde{P}_{ij}
\end{tikzcd}$$

Es decir, que si $(s_{ij}) \in B$, la construcción de pegado da lugar al G-fibrado principal trivial sobre $C[E]$, por lo que si dos elementos de Z difieren en uno de B, entonces dan lugar al mismo fibrado principal sobre la curva deformada.

Recíprocamente, sea $\tilde{P}$ un G-fibrado principal sobre $C[E]$ tal que su restricción a C es isomorfo a P. Como cada U_i es afín, los G-fibrados $\tilde{P}_i := \tilde{P}_{|U_i[E]}$ son el pullback de un G-fibrado principal en U_i. Se tiene por tanto que $\tilde{P}$ se obtiene pegando $\tilde{P}_i$ con $\tilde{P}_j$ sobre $U_{ij}[E]$ utilizando automorfismos de $\tilde{P}_{ij}$ que restringen a la identidad, que, de nuevo, por el Teorema 6.19, son de la forma $1 + s_{ij}E$, con $s_{ij} \in (U_{ij}, \operatorname{ad} P)$. Evidentemente, se satisface la condición $s_{ij} + s_{jk} = s_{ik}$ sobre U_{ijk}, luego la colección (s_{ij}) es un elemento de Z. Ambas asignaciones son inversas una de la otra, luego el Teorema queda probado.

□

Definición 6.23. Sea $P \to C$ un G-fibrado principal y sea

$$\Theta_k : \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}^k) \to C$$

el morfismo natural. Una **trivialización infinitesimal de orden** k de P en p es un isomorfismo G-equivariante

$$\begin{tikzcd} \Theta_k^* P \arrow[rr, "\sim", "\psi_k"'] \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}^k) \times G \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}^k) & \end{tikzcd}$$

De este modo, una trivialización formal puede ser entendida como un sistema inductivo de trivializaciones infinitesimales.

Definición 6.24. Se define $\mathrm{Bun}^k_{C,G}$ como el hacificado del funtor de la categoría de $\mathbf{Sch}_k$ en **Sets** que asigna a cada k-esquema S el conjunto de G-fibrados principales dotados de una trivialización infinitesimal de orden k en $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}^k) \times S$ módulo isomorfismos.

Teorema 6.25: *Sea $k \in \mathbb{N}$, $P \to C$ un G-fibrado principal y ψ_k una trivialización infinitésimal de orden k de P en p. Existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\mathrm{T}_{P,\psi_k} \mathrm{Bun}^k_{G,C} \cong \mathrm{H}^1(C, \mathrm{ad}\, P(-kp))$$

donde $\mathrm{ad}\, P(-kp) := \mathrm{ad}\, P \otimes \mathcal{O}_C(-kp)$ *siendo* $\mathcal{O}_C(-kp)$ *el haz de línea asociado al divisor* $-kp$.

Demostración. Es una generalización directa del Teorema 6.21. Se trata de construir fibrados principales $\hat{P} \to C \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E])$ dotados de una trivialización

$$\hat{\psi}_k : (1 \times \Theta^*_k)\hat{P} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}^k) \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E]) \times G$$

satisfaciendo que restringen a P y ψ_k cuando $E = 0$. Considérese un recubrimiento afín $U := \{U_i\}$ de C. Para cada $i \in I$, considérese el G-fibrado principal

$$\hat{P}_i := p^*{}_1(P_{|U_i}) \to U_i[E] := U_i \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E])$$

siendo $p_1 : U_i \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E]) \to U_i$ la proyección en el primer factor. Por el Teorema 6.19, las restricciones de $\hat{P}_i$ y $\hat{P}_j$ a $U_{ij}[E]$ se pueden identificar en términos de un isomorfismo $1 + s_{ij}E$. La condición (6.22) permite asegurar la compatibilidad de las anteriores asignaciones y por tanto concluir la existencia de un G-fibrado principal $\hat{P}$ sobre $C[E] := C \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E])$ que restringe a P.

Ahora bien, para cada U_i con $p \in U_i$ se tienen trivializaciones locales en los abiertos fines $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}^k) \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E])$

$$\hat{\psi}_k : (\Theta_k \times 1)^* \hat{P}_i \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}^k) \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E]) \times G$$

y se tiene que verificar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\Theta_k \times 1)^*(\tilde{P}_i)_{|U_{ij}[E]} \arrow[r, "\tilde{\psi}^i_k"] \arrow[d, "1+E\Theta^*_k s_{ij}"] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,p}/\mathfrak{m}^k) \times \mathrm{Spec}(\mathrm{k}[E]) \times G \\
(\Theta_k \times 1)^*(\tilde{P}_j)_{|U_{ij}[E]} \arrow[ur, "\tilde{\psi}^j_k"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, las secciones $\Theta^*_k s_{ij} \in \mathrm{H}^0(U_{ij}, \operatorname{ad} P(-kp))$ y verifican la condición de cociclo, pues las s_{ij} lo hacían. Siguiendo la misma línea de razonamiento que en el Teorema 6.21 se llega al resultado deseado. □

Teorema 6.26: *El espacio tangente a* $\mathrm{Bun}_{G,C}$ *en un punto* (P, ψ) *siendo* $P \to C$ *un G-fibrado principal y* ψ *una trivialización formal de* P *en el punto* $p \in C$*, es isomorfo a* $\mathrm{H}^1(C - p, \operatorname{ad} P)$*.*

Demostración. En primer lugar obsérvese que el funtor $\mathrm{Bun}_{G,C}$ se puede expresar como el límite proyectivo $\varprojlim \mathrm{Bun}^k_{G,C}$. Como consecuencia del Teorema 6.25 se tiene que el espacio tangente a $\mathrm{Bun}_{G,C}$ en un punto racional (P, ψ) es

$$\mathrm{T}_{(P,\psi)}\mathrm{Bun}_{G,C} \quad \varprojlim \mathrm{H}^1(C, \operatorname{ad} P(-kp)) \quad \mathrm{H}^1(C - p, \operatorname{ad} P)$$

□

Corolario 6.27: *Dado un punto racional* (P, ψ) *de* $\mathrm{Bun}_{G,C}$ *se tiene un isomorfismo de* k*-espacios vectoriales*

$$(\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}((z)))/\mathrm{H}^0(C - p, \operatorname{ad} P) \qquad \mathrm{H}^1(C - p, \operatorname{ad} P)$$

Demostración. Dado un fibrado vectorial E de rango n sobre C, se tiene para todo m la siguiente sucesión exacta

$$0 \to E \to E(mp) \to \mathrm{k}^{\oplus n} \otimes_{\mathrm{k}} \left(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_C(mp) \right) \to 0$$

$\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_C(mp)$ es el cociente de las funciones meromorfas en C admitiendo un polo en p de orden como máximo m y las funciones regulares en C, se tiene que

$$\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_C(mp) = (z^{-1}, \cdots, z^{-m})$$

En particular como $\operatorname{ad} P$ es un fibrado vectorial de fibra tipo $\mathfrak{g}$ se tiene que para todo m la siguiente sucesión es exacta

$$0 \to \operatorname{ad} P \to \operatorname{ad} P(mp) \to \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \left(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_C(mp) \right) \to 0$$

En general, dados m, k enteros cualesquiera se tiene que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \to \mathrm{ad}\, P(-kp) \to \mathrm{ad}\, P((m-kp) \to \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \langle z^{-m+k}, \dots, z^{k-1} \rangle \to 0 \tag{6.28}$$

Como C es una curva proyectiva, y $\mathrm{ad}\, P$ es un fibrado vectorial existe un $m \gg 0$ ([Gro61a, Théorème 2.2.1, ii)]) tal que

$$\mathrm{H}^1(C, \mathrm{ad}\, P((m-kp)) = 0$$

Tomando cohomología en la sucesión exacta (6.28) se obtiene el siguiente isomorfismo

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \langle z^{-m+k}, \dots, z^{k-1} \rangle / \mathrm{H}^0(C, \mathrm{ad}\, P((m-kp)) \quad \mathrm{H}^1(C, \mathrm{ad}\, P(-kp))$$

Tomando $\varinjlim_m$ se obtiene el siguiente isomorfismo

$$(\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[z, z^{-1}]/z^{k+1})/\mathrm{H}^0(C-p, \mathrm{ad}\, P) \quad \mathrm{H}^1(C, \mathrm{ad}\, P(-kp)) \tag{6.29}$$

Finalmente, tomando $\varprojlim_k$ en (6.29), se obtiene que

$$(\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}((z)))/\mathrm{H}^0(C-p, \mathrm{ad}\, P) \quad \mathrm{H}^1(C-p, \mathrm{ad}\, P)$$

□

Observación 6.30. Del anterior resultado se sigue la existencia de una sucesión exacta de espacios vectoriales

$$0 \to \mathrm{H}^0(C-p, \mathrm{ad}\, P) \to \mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}((z)) \to \mathrm{H}^1(C-p, \mathrm{ad}\, P) \to 0$$

Obsérvese que el álgebra $\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}((z))$ es el álgebra de Lie del Loop Group LG ([PS88]). El paréntesis de Lie viene dado por

$$[X \otimes p, Y \otimes q] = [X, Y] \otimes pq$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $p, q \in \mathrm{k}((z))$.

Parte II

Compactificación del espacio de móduli de fibrados principales

7. Álgebras graduadas parcialmente generadas

El presente capítulo está dedicado al estudio de un nuevo tipo de objetos algebraicos que serán utilizados para la compactificación del espacio de móduli de fibrados principales singulares construido con anterioridad. Este nuevo tipo de objetos, llamados álgebras graduadas parcialmente generadas, de forma abreviada, álgebras pgg, responden una pregunta esencial, y es, cuando un álgebra graduada es generada por elementos de grado menor o igual que un cierto número natural t.

No obstante, es conveniente remarcar la importancia per se que tienen las álgebras pgg, ya que, su estructura se revela como natural en el estudio de la teoría de invariantes. Lo estudiado aquí servirá para probar, en el siguiente capítulo, una generalización del Teorema de Nagata sobre el anillo de invariantes eliminando la hipótesis de Noetherianidad. De hecho, para los grupos clásicos, el álgebra de invariantes sera un álgebra graduada parcialmente generada, y en general, para cualquier grupo semisimple, será de presentación finita.

7.1. Álgebras graduadas parcialmente generadas

Sea R un anillo cualquiera, y considérese un subconjunto $I \subseteq \mathbb{Z}$.

Definición 7.1. Un **álgebra parcial** sobre R con soporte I es una colección de datos $\{A_i, m_{ij}\}_{i,j \in I}$ donde cada A_i es un R-módulo, y cada m_{ij} es un morfismo bilineal de R-módulos, llamados morfismos de multiplicación

$$m_{ij} : A_i \times A_j \to A_{i+j} \qquad \text{para todo } i, j \in I \text{ con } i+j \in I$$

satisfaciendo la propiedad conmutativa, es decir, $m_{ij}(a_i, a_j) = m_{ji}(a_j, a_i)$ para todo $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ y todas las parejas de índices i, j con $i, j, i+j \in I$; así como la propiedad asociativa (cuando tenga sentido)

$$m_{i+j,k} \circ (m_{ij}, 1) = m_{i,j+k} \circ (1, m_{jk}) \tag{7.2}$$

como morfismos

$$A_i \times A_j \times A_k \to A_{i+j+k}$$

para todo i, j, k con $i+j, i+k, j+k, i+j+k \in I$.

Si no produce confusión, se utilizará la notación

$$A = \oplus_{i \in I} A_i$$

Definición 7.3. Sean $A = \oplus_{i\in I} A_i$ y $B = \oplus_{j\in J} B_j$ con $I, J \subseteq \mathbb{Z}$ dos álgebras parciales sobre R. Un **morfismo de álgebras parciales** $f : A \to B$ es una colección de morfismos de R-módulos $\{f_k : A_k \to B_k \mid k \in I \cap J\}$ tal que

$$f_{i+j} \circ m^A_{ij} = m^B_{ij} \circ (f_i, f_j)$$

para todo i, j, con $i, j, i+j \in I \cap J$.

Observación 7.4. En particular, dada una R-álgebra equipada con una $\mathbb{Z}$-graduación, $A = \oplus_{\mathbb{Z}} A_n$, se tiene que para cualquier conjunto de índices $I \subseteq \mathbb{Z}$, $A_I := \oplus_{i\in I} A_i$ es una R-álgebra parcial. Cualquier R-álgebra no graduada A es un álgebra parcial definiendo $A_0 := A$ y $A_i := (0)$ para todo $i \neq 0$.

En lo sucesivo, todos los anillos considerados serán conmutativos. Además, se supondrá, para cualquier R-álgebra graduada A que $I = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $A_0 = R$; y para todas las R-álgebras parciales con $0 \in I$ se supondrá que $A_0 = R$.

Definición 7.5. Sea A una R-álgebra graduada (o parcial). Los elementos de A_n se denominan **elementos homogéneos de grado** n. Se utilizará la notación

$$[A]_n := \{a \in A \mid a \text{ es un elemento homogéneo de grado } n\} \tag{7.6}$$
$$[A]_{\leq t} := \oplus_{i=1}^{t} [A]_i$$

Definiciones y notaciones análogas si M es un R-módulo graduado. Si no hay confusión, se escribirá $A_{\leq t}$ en vez de $[A]_{\leq t}$ para denotar a los elementos homogéneos de A de grado menor o igual que t.

Sea $\mathbf{Alg}_R$ la categoría de R-álgebras. Dado un entero $t > 0$ y una R-álgebra $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$, se tiene una transformación natural de funtores sobre $\mathbf{Alg}_R$

$$\Phi_{\leq t} : \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(A, -) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-alg-parcial}}(A_{\leq t}, -) \tag{7.7}$$

que para cada R-álgebra B, está definido como

$$\begin{aligned} \Phi_{\leq t}(B) : \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-part-alg}}(A_{\leq t}, B) \\ f &\longrightarrow \Phi_{\leq t}(B)(f) := (f_i := f|_{A_i})_{i=0,\dots,t} \end{aligned} \tag{7.8}$$

Definición 7.9. Sea $A = \oplus_{0\leq} A_n$ una R-álgebra graduada. Se dice que A es una R-**álgebra graduada parcialmente generada**, o, por simplicidad, una **pgg**-R-álgebra, si $A_0 = R$ y existe un entero positivo t tal que $\Phi_{\leq t}$ (7.7) es un isomorfismo de funtores sobre $\mathbf{Alg}_R$. En dicho caso se dirá que A es una t-pgg-R-álgebra.

Observación 7.10. Obsérvese que si el morfismo $\Phi_{\leq t}$ (7.7) es isomorfismo, entonces, $\Phi_{t'}$ es isomorfismo para todo $t' \geq t$.

Ejemplo 7.11.

- $R[x]$ es un álgebra parcialmente generada, pues $\Phi_{\leq t}$ es isomorfismo para $t \geq \mathrm{grad}(x)$, siendo $\mathrm{grad}(x)$ el grado de la indeterminada x.
- $R[\{x_i : i \in \mathbb{N}\}]/Q$ con $\deg(x_i) = 1$ y Q un ideal generado por relaciones cuadráticas es una pgg-álgebra. Obsérvese que en este caso, el álgebra considerada no es noetheriana, ni de presentación finita sobre R.
- $R[\{x_i : i \in \mathbb{N}\}]$ con $\deg(x_i) = i$ no es una pgg-álgebra, así como tampoco lo es $R[\{x_i : i \in \mathbb{N}\}]/(\{x_i^i \,|\, i \in \mathbb{N}\})$ con $\mathrm{grad}(x_i) = 1$.

La siguiente proposición permite dar una plétora de ejemplos de pgg-álgebras.

Proposición 7.12: *Sea R un anillo y sea $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ una R-álgebra graduada. Si A es de presentación finita sobre R, entonces A es una pgg-R-álgebra.*

Demostración. Basta con probar la existencia de un $t > 0$ tal que $\Phi_{\leq t}$ es un isomorfismo. Por hipótesis, A es una R-álgebra graduada de presentación finita, por lo que existe un sistema finito de generadores $S = \{a_1, \ldots, a_l\}$ tal que el núcleo de la epiyección

$$\begin{aligned} R[x_1, \ldots, x_l] &\to A \to 0 \\ x_i &\mapsto a_i \end{aligned} \tag{7.13}$$

es un ideal I_S finito generado. Sin perdida de generalidad, los generadores a_i pueden ser considerados homogéneos. Imponiendo la graduación $\mathrm{grad}(x_i) := \mathrm{grad}(a_i)$, la epiyección (7.13) es un morfismo de R-álgebras graduadas, por lo que I_S es un ideal homogéneo. Sea $\{y_1, \ldots, y_m\}$ un conjunto de generadores de I_S, y defínanse los siguientes enteros

$$\begin{aligned} d &:= \max\{\mathrm{grad}(a_i) \,|\, i = 1, \ldots, l\}, \\ d' &:= \max\{\mathrm{grad}(y_i) \,|\, i = 1, \ldots, m\}, \\ t &:= \max\{d, d'\}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Se concluye la demostración si se prueba que $\Phi_{\leq t}$ es un isomorfismo. Sea B una R-álgebra. Para probar la inyectividad del morfismo $\Phi_{\leq t}(B)$ definido en (7.8) considérense dos morfismos de R-álgebras, $f, g : A \to B$ satisfaciendo que

$$\Phi_{\leq t}(B)(f) = \Phi_{\leq t}(B)(g)$$

Como $f_i = g_i$ para cada $i = 0, \ldots, t$, y $t \geq d$, se obtiene que ambos morfismos coinciden sobre el sistema de generadores S considerado

$$f(a_i) = f_i(a_i) = g_i(a_i) = g(a_i) \qquad \forall i = 0, \ldots, l$$

Se concluye por tanto que $f = g$.

Para probar la epiyectividad de $\Phi_{\leq t}$ se construirá el morfismo (7.13) a partir del sistema de generadores S. Obsérvese que dar un morfismo de álgebras $f\colon A \to B$ es equivalente a dar un morfismo de álgebras

$$\hat{f}\colon R[x_1,\dots,x_l] \to B$$

tal $\hat{f}$ se anula sobre I_S, es decir, $\hat{f}|_{I_S} = 0$. Considérese ahora un morfismo de álgebras parciales $(\varphi_i) \in \mathrm{Hom}_{R\text{-alg-parcial}}(A_{\leq t}, B)$ y defínase $b_i := \varphi_{d_i}(a_i)$ para cada $i = 0,\dots,l$. Los elementos $b_1,\dots,b_l$ determinan un morfismo de R-álgebras

$$\begin{aligned} R[x_1,\dots,x_l] &\to B \to 0 \\ x_i &\mapsto b_i \end{aligned} \tag{7.15}$$

Para concluir la demostración basta comprobar que $\hat{f}|_{I_S} = 0$, o lo que es equivalente, que $\hat{f}(y_i) = 0$ para todo $i = 1,\dots,m$. Como y_i es una expresión algebraica en términos de las variables $\{x_j\}_{j=1}^{l}$, se puede expresar y_i como

$$y_i = \sum \lambda_{r_1,\dots,r_l} x_1^{r_1}\cdots x_l^{r_l}$$

y obsérvese que

$$\varphi_{d_1}(a_1)^{r_1}\cdots\varphi_{d_l}(a_l)^{r_l} = \varphi_{r_1 d_1}(a_1^{r_1})\cdots\varphi_{r_l d_l}(a_l^{r_l}) = \varphi_k(a_1^{r_1}\cdots a_l^{r_l}).$$

donde $k := \mathrm{grad}(y_i)$ y $k \leq d^1 \leq t$. Finalmente,

$$\hat{f}(y_i) = \sum \lambda_{r_1,\dots,r_l} b_1^{r_1}\cdots b_l^{r_l} = \sum \lambda_{r_1,\dots,r_l}\varphi_{d_1}(a_1)^{r_1}\cdots\varphi_{d_l}(a_l)^{r_l} = \varphi_k(y_i) = 0.$$

y como φ_k es un morfismo de R-módulos, se obtiene que $\hat{f}$ factoriza a través de un morfismo de R-álgebras $f\colon A \to B$ que satisface la condición buscada, esta es, $\Phi_{\leq t}(f) = (\varphi_i)$. □

Observación 7.16. Si R es un cuerpo, un estudio más detallado de los números (7.14) puede ser llevado a cabo en términos de los números de Betti graduados, la regularidad de Castlenuovo-Mumford y las Syzygias graduadas ([Eis05, Pee11]). Por otro lado, la demostración de la anterior proposición puede ser adaptada al caso de infinitos generadores o relaciones, siempre y cuando, el grado de los mismos esté acotado, implicando la finitud de los números (7.14).

Proposición 7.17: *Sea V un* k*-espacio vectorial n-dimensional. Sea G un grupo algebraico lineal y semisimple actuando en V a través de una representación fiel $\rho\colon G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$. El anillo de invariantes* $\mathrm{k}[V]^G := (\mathrm{S}^{\bullet}_{\mathrm{k}} V^*)^G$ *es una pgg-*k*-álgebra.*

Demostración. Como G es un grupo linealmente reductivo, el Teorema de finitud de Hilbert ([MF82, Theorem A.1.0]) demuestra que $k[V]^G$ es una k-álgebra finito generada. Observando que además, $k[V]^G$ es una k-álgebra noetheriana, se concluye que es de presentación finita. Por la proposición 7.12 se concluye. □

Observación 7.18. En el artículo de H. Derksen ([Der04]) se estudia un análogo de los números (7.14) para las Syzygias del anillo de invariantes. Para entender de que análogos se tratan, considérese $\{a_1, \ldots, a_l\}$ un sistema de generadores homogéneos de $k[V]^G$ verificando que sus grados están ordenados de forma decreciente $d_1 \geq \ldots \geq d_l$ siendo d_l minimal, donde $d_i := \operatorname{grad}(a_i)$. En [Der01] se prueban cotas superiores para $d := d_1$ en términos de G y la representación considerada. Definiendo $d^1 := (s+1)d - s$, donde s es la dimensión de Krull del anillo $k[V]^G$, se tiene que el núcleo del morfismo

$$\begin{aligned} R[x_1, \ldots, x_l] &\to B \to 0 \\ x_i &\mapsto b_i \end{aligned}$$

está generado por polinomios de grado menor o igual que d^1 ([Der04, Thm 1]). Los números (d, d^1) son los análogos a los definidos en (7.14), y, por tanto, $\Phi_{\leq t}$ es un isomorfismo para cualquier $t \geq \max\{d, d^1\}$.

De la anterior observación se sigue que, siempre que se tengan formas explícitas del Primer y Segundo Teorema Fundamental de la teoría clásica de invariantes para un grupo G, se podrá precisar el menor el entero positivo t tal que $\Phi_{\leq t}$ es un isomorfismo. Para ejemplificar este hecho, se consideraran los grupos clásicos $\mathrm{Sl}(V)$, $\mathrm{Sp}(V)$, $\mathrm{SO}(V)$ y $\mathrm{O}(V)$, y se llevará a cabo el cómputo del t minimal.

Proposición 7.19: *Sea V un k-espacio vectorial finito dimensional. Para cualquier entero positivo $m > 0$, considérese la álgebra graduada*

$$A := k[(V)^{\oplus m}]^G = \left(S_k^{\bullet}((V^*)^{\oplus m})\right)^G$$

Entonces, el morfismo $\Phi_{\leq t}$ es un isomorfismo en las siguientes situaciones

(i) para $G = \mathrm{Sl}(V)$ y $t = 2\dim(V)$;

(ii) para V un k-espacio vectorial finito dimensional dotado de una forma simpléctica $\eta : V \times V \to k$, $G = \mathrm{Sp}(V)$ y $t = 2 + \dim(V)$

(iii) para V un k-espacio vectorial finito dimensional dotado de una forma bilineal simétrica no degenerada $\beta : V \times V \to k$, $G = \mathrm{SO}(V)$ y $t = 2 + \dim(V)$

(iv) para V un k-espacio vectorial finito dimensional dotado de una forma bilineal simétrica no degenerada $\beta : V \times V \to k$, $G = \mathrm{O}(V)$ y $t = 2 + \dim(V)$

En particular, A es una pgg-álgebra para todo m.

Demostración. (i) Si $m < n := \dim(V)$, entonces el anillo de invariantes coincide con el anillo de constantes, es decir, $A = $ k. Supóngase por tanto que $m \geq n$. En este caso, A está generado por $\binom{m}{n}$ elementos de grado n, y las relaciones entre dichos elementos están generadas por relaciones cuadráticas ([dCP76, §3]). Se tiene por tanto que $d = n$ y $d^1 = 2n$.

(ii) El Primer Teorema Fundamental de la teoría clásica de invariantes para el grupo simpléctico Sp(V) muestra que el anillo de invariantes está generado por las funciones de grado 2

$$(i,j) : V^{\oplus m} \to \mathrm{k}, \qquad (i,j)(v_1, \ldots, v_m) := \eta(v_i, v_j)$$

para $1 \leq i < j \leq m$. Por tanto, como la dimensión de V es par, $\dim(V) = 2n$, se tiene que A ... $\binom{m}{2}$ elementos de ... $V^{\oplus m}$ ..., y por tanto $d = 2$. El Segundo Teorema Fundamental para el grupo simpléctico establece que si $m \leq 2n$, los elementos (i,j) son algebraicamente independientes, y, en el caso en que $m > 2n$, el ideal de relaciones entre los generadores está generado por los Pfaffianos de los menores principales de orden $2n+2$ de la matriz hemisimétrica cuyo elemento en la fila i-ésima y columna j-ésma es la función (i,j) ([dCP76, §4]). Se tiene por tanto que $d^1 = 2n+2$ y $t = \text{máx}\{d, d^1\} = 2(n+1)$.

(iii) Por el Primer Teorema Fundamental para el grupo especial ortogonal, se tiene que el anillo de invariantes está generado por las funciones de grado 2

$$(i,j) : V^{\oplus m} \to \mathrm{k}, \qquad (i,j)(v_1, \ldots, v_m) := \beta(v_i, v_j)$$

para $1 \leq i < j \leq m$; y por las funciones de grado $n := \dim(V)$

$$[i_1, \ldots, i_n] : V^{\oplus m} \to \bigwedge^n V \simeq \mathrm{k}, \qquad [i_1, \ldots, i_n](v_1, \ldots, v_m) := v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}$$

para $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m$, por lo que $d = 2$ ó $d = n$, dependiendo de si $n < m$ ó $n \geq m$. El Segundo Teorema Fundamental para SO(V) establece que el ideal de relaciones entre los generadores está generado por los menores de orden $(n+1)$ de la matriz simétrica de orden $m \times m$, cuyo elemento en la fila i-ésima y columna j-ésima es (i,j), y, por tanto $d^1 = 2(n+1)$. En cualquier caso $t = 2(n+1)$. ([dCP76, §4]).

(iv) Análogamente, considerando el grupo ortogonal O(V), se tiene que el anillo de invariantes está generado por las funciones (i,j) definidas previamente para $1 \leq i \leq j \leq m$, y el ideal de relaciones está generado por los menores de orden $(n+1)$ de la matriz simétrica de tamaño $m \times m$ cuya entrada en la posición i, j es (i,j). Se tiene por tanto que $d = 2$ y $d^1 = 2(n+1)$, luego $t = 2(n+1)$ ([dCP76, §5]). □

7.2. Propiedades

En la presente sección se analizarán las propiedades elementales de las pgg-álgebras, las cuales, serán utilizadas con posterioridad para probar una generalización de un Teorema clásico de Nagata y la existencia de una inmersión cerrada en un cierto espacio proyectivo de forma canónica.

Recuérdese la notación $[-]_n$ introducida en (7.6) para hacer referencia a los elementos homogéneos de grado n de un álgebra graduada, álgebra parcial, o módulo graduado. Obsérvese que en particular,

$$[\oplus_{n\geq 0} A_n]_i = A_i$$

El producto tensorial de dos objetos graduados A, B (anillos ó módulos) hereda una graduación canónica mediante la fórmula

$$\mathrm{grad}(a\otimes b) := \mathrm{grad}(a) + \mathrm{grad}(b)$$

para elementos homogéneos a y b. Con toda generalidad, se tiene que

$$\left[(\oplus_m A_m)\otimes(\oplus_n B_n)\right]_i = \oplus_j (A_j \otimes B_{i-j}) \tag{7.20}$$

La graduación dada en (7.20) permite dotar a los productos tensoriales simétricos de un álgebra ó un módulo de una graduación canónica, ya que, los productos tensoriales simétricos son submódulos del producto tensorial.

Definición 7.21. Sea $\underline{d} := (d_1, \ldots, d_t) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^t$ una tupla de enteros positivos. Se define la **norma** de $\underline{d}$, y se denota por $|\underline{d}|$ a la siguiente suma

$$|\underline{d}| := \sum_{i=1}^{t} d_i \tag{7.22}$$

Considérese un R-módulo graduado $M = \oplus_{n\geq 0} M_n$. El álgebra simétrica $S^\bullet_R(M)$ de M sobre R es una R-álgebra graduada, cuya componente de grado $n > 0$ es descrita, explícitamente como

$$\left[S^\bullet_R(M)\right]_n = \bigoplus_{t>0}\bigoplus_{|\underline{d}|=n} S^{d_1}M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R S^{d_t}M_t \tag{7.23}$$

Para $n = 0$ se impondrá que

$$[S^\bullet_R(M)]_0 := R$$

El producto tensorial induce el morfismo de multiplicación en el álgebra simétrica, el cual será denotado por m, es decir

$$m : S^\bullet_R(M) \otimes_R S^\bullet_R(M) \to S^\bullet_R(M) \tag{7.24}$$

Sea $(A = \oplus_{n=0}^{t} A_n, m_{ij})$ una R-álgebra parcial con $A_0 = R$. Se sigue de la notación introducida en (7.6) que

$$\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t}) = \mathrm{S}^\bullet_R(\oplus_{n=1}^{t} A_n) \tag{7.25}$$

Dada una R-álgebra graduada $A = \oplus_{n \geq 0} A_n$ y $t > 0$, la inclusión natural $A_{\leq t} \hookrightarrow A$ junto con el producto definido en A, inducen de modo canónico un morfismo homogéneo de R-álgebras graduadas

$$\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t}) \to A \tag{7.26}$$

Observación 7.27. El morfismo de multiplicación

$$m : \mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t}) \otimes_R \mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t}) \to \mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})$$

puede ser caracterizado como el único morfismo haciendo conmutativo los diagramas

$$\begin{array}{ccc} A_i \times A_j & \xrightarrow{\quad m_{ij} \quad} & A_{i+j} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})\right)_i \times \left(\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})\right)_j & \xrightarrow{\quad m \quad} & \left(\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})\right)_{i+j} \end{array}$$

para todo i, j con $i, j, i+j \leq t$.

Teorema 7.28: *Sea R un anillo y sea $(A = \oplus_{n=0}^{t} A_n, m_{ij})$ una R-álgebra parcial. Sobre la categoría* $\mathbf{Alg}_R$, *el funtor* $\mathrm{Hom}_{R\text{-alg-parcial}}(A, -)$ *es un subfuntor cerrado de* $\mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t}), -)$.

Demostración. Es suficiente con probar la existencia de un ideal $I_t \subseteq \mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})$ dependiendo únicamente de A y t, tal que el paso al cociente $\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t}) \to \mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})/I_t$ induce un isomorfismo de funtores

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-alg-parcial}}(A, -) \simeq \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})/I_t, -) \tag{7.29}$$

El ideal I_t buscado es el siguiente

$$I_t := \langle \{ m_{ij}(a_i, a_j) - m(a_i \otimes a_j) \mid a_i \in A_i, a_j \in A_j \text{ and } 0 \leq i, j, i+j \leq t \} \rangle \tag{7.30}$$

Obsérvese que la anterior expresión está bien definida, puesto que

$$m_{ij}(a_i, a_j) \in A_{i+j} \subseteq [\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})]_{i+j}$$

y

$$m(a_i \otimes a_j) \in \mathrm{Im}\left([\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})]_i \otimes [\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})]_j \to [\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})]_{i+j}\right)$$

□

Ejemplo 7.31. Considérese la k-álgebra graduada $A = \mathrm{k}[V] = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{S}^n V^*$. En esta situación, la expresión (7.23) se traduce en

$$\left[\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})\right]_n = \bigoplus_{|\underline{d}|=n} \mathrm{S}^{d_1}(\mathrm{S}^1 V^*) \otimes_R \cdots \otimes_R \mathrm{S}^{d_t}(\mathrm{S}^t V^*)$$

y la componente de grado n del morfismo de multiplicación (7.26) es la suma de los morfismos

$$\mathrm{S}^{d_1}(\mathrm{S}^1 V^*) \otimes_R \cdots \otimes_R \mathrm{S}^{d_t}(\mathrm{S}^t V^*) \longrightarrow \mathrm{S}^n V$$

haciendo variar $\underline{d}$ con $|\underline{d}| = n$.

Por el Teorema de Representabilidad 7.28 se puede dar una condición necesaria y suficiente para determinar cuando un álgebra graduada admite estructura de álgebra graduada parcialmente generada. La caracterización queda recogida en el siguiente Teorema.

Teorema 7.32: *Sea R un anillo y $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ una R-álgebra graduada. A es una t-pgg-álgebra si y sólo si la sucesión*

$$0 \to I_t \to \mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t}) \to A \to 0 \tag{7.33}$$

es una sucesión exacta de R-módulos graduados, siendo I_t el ideal homogéneo (7.30). *En particular, A es una pgg-álgebra si y sólo si la sucesión* (7.33) *es exacta para algún $t \gg 0$.*

Demostración. A es una t-pgg-álgebra si y sólo si $\Phi_{\leq t}$ (7.7) es un isomorfismo. Dado $t > 0$, considérese la siguiente composición de transformaciones naturales

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(A, -) \xrightarrow{\Phi_{\leq t}} \mathrm{Hom}_{R\text{-alg-parcial}}\Big(\bigoplus_{n=0}^{t} A_n, -\Big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(\mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})/I_t, -)$$

donde el isomorfismo se sigue del Lema 7.28.

Si A es una pgg-álgebra y $\Phi_{\leq t}$ es un isomorfismo para t, entonces la anterior composición es un isomorfismo y por la unicidad del representante de un funtor (salvo isomorfismos), se sigue que $A \simeq \mathrm{S}^\bullet_R(A_{\leq t})/I_t$. La misma demostración, invirtiendo los argumentos, prueba el recíproco. □

Observación 7.34. La exactitud de la sucesión (7.33) puede ser expresada como sigue: A es una t-pgg-álgebra (i.e. $\Phi_{\leq t}$ es un isomorfismo) si y sólo si A admite un sistema de generadores de grado menor o igual que t y el ideal de relaciones entre dichos generadores está generado por las relaciones de grado menor o igual que t. De hecho, esta última condición sobre el ideal de relaciones se traduce en la siguiente igualdad

$$I_t = [I_t]_{\leq t} \cdot \mathrm{S}^\bullet_R([A]_{\leq t}) = \Big(I_t \cap \left[\mathrm{S}^\bullet_R([A]_{\leq t})\right]_{\leq t}\Big) \cdot \mathrm{S}^\bullet_R([A]_{\leq t}) \tag{7.35}$$

Como Corolario del anterior Teorema se obtiene la estabilidad de la estructura de álgebra graduada parcialmente generada por cambios de base.

Corolario 7.36: *Si A es una t-pgg-R-álgebra y $R \to R^I$ es un morfismo de anillos, entonces, $A_R := A \otimes_R R^I$ es una t-pgg-R^I-álgebra.*

Demostración. Tensorializando la sucesión exacta (7.33) por R^I, se obtiene la sucesión exacta

$$I_t \otimes_R R^I \to S^\bullet_R\,(A_{\le t} \otimes_R R^I) \to A \otimes_R R^I \to 0$$

Utilizando la notación $A^I := A \otimes_R R^I$ y teniendo en cuenta que

$$S^\bullet{}_R(A_{\le t}) \otimes_R R^I \quad S^\bullet_R\,(A_{\le t} \otimes_R R^I) \quad S^\bullet_R\,(A^I_{\le t})$$

la anterior sucesión da lugar a un morfismo epiyectivo

$$I_t \otimes_R R^I \longrightarrow K := \operatorname{Ker}\left(S^\bullet_R\,(A^I_{\le t}) \to A^I\right)$$

que demuestra que K está generado por elementos de grado menor o igual que t. Se concluye la demostración. □

Proposición 7.37: *Sea R un anillo y A (resp. B) una t_A-pgg-R-álgebra tal que* (7.7) *es un isomorfismo para t_A (resp. t_B-pgg-R-álgebra).*

Entonces $A \otimes_R B$ es una t-pgg-R-álgebra con $t = t_A + t_B$.

Demostración. Por el Teorema 7.32, A (resp. B) son parte de la sucesión exacta dada en (7.33)

$$0 \to I_{t_A} \to S^\bullet{}_R(A_{\le t}) \to A \to 0$$

Sea I^A_t (resp. I^B_t) el núcleo de la sucesión (7.33). Es inmediato que se tiene el siguiente diagrama conmutativo de R-módulo graduados

$$\begin{tikzcd}
 & I^A_t \otimes B + A \otimes I^B_t \arrow[r] \arrow[d, dashed] & S^\bullet_R(A_{\le t_A}) \otimes S^\bullet_R(B_{\le t_B}) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A \otimes B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & S^\bullet_R\,([A \otimes B]_{\le t}) \arrow[r] & A \otimes B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $t := t_A + t_B$, K es el núcleo, el morfismo vertical central es la multiplicación canónica inducida por $A_{\le t_A} \otimes B_{\le t_B} \to [A \otimes B]_{\le t}$ y el morfismo vertical del lado izquierdo es el obtenido por factorización.

Examinando el anterior diagrama conmutativo en cada grado del producto simétrico de los términos centrales, y teniendo en cuenta que A (resp. B) está generada por elementos homogéneos de grado menor o igual que t_A (resp. t_B), se concluye la epiyectividad del morfismo vertical entre las álgebras simétricas.

El Lema de la Serpiente muestra que el morfismo

$$I^A_{t_A} \otimes B + A \otimes I^B_{t_B} \to K$$

es epiyectivo. Como la imagen del morfismo

$$I^A_t \otimes B + A \otimes I^B_t \to S^\bullet_R\, [A \otimes B]_{\leq t})$$

está generado por elementos homogéneos de grado menor o igual t, la proposición queda probada. □

Proposición 7.38: *Sea R un anillo y A una R-álgebra graduada. Sea $J \subset A$ un ideal homogéneo generado por sus componentes de grado menor o igual t_J. Si A es una t_A-pgg-R-álgebra, entonces A/J es una t-pgg-R-álgebra para $t := \text{máx}(t_A, t_J)$.*

Demostración. Sea $t := \text{máx}(t_A, t_J)$ y $B := A/J$. Utilizando (7.33), se tiene el siguiente diagrama conmutativo de R-módulos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^A_t \arrow[r] \arrow[d, dashed] & S^\bullet_R(A_{\leq t}) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & S^\bullet_R(B_{\leq t}) \arrow[r, "p"] & B \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

donde K es el núcleo de $p : S^\bullet_R(B_{\leq t}) \to B$. Como $A \to B$ es un morfismo epiyectivo de R-módulos graduados, se sigue que tanto el morfismo central como p son epiyectivos.

Falta por probar que K está generado por sus componentes de grado menor o igual que t. El Lema de la serpiente da lugar a la siguiente sucesión exacta

$$I^A_t \to K \to L \to 0$$

donde L es un cociente de J. Observando que I^A_t está generado como $S^\bullet_R(A_{\leq t})$-módulo por sus componentes de grado menor o igual que t, y que J está generado como A-módulo por sus componentes de grado menor o igual que t, se sigue que K está generado como $S^\bullet_R(B_{\leq t})$-módulo por sus componentes de grado menor o igual que t. □

Proposición 7.39: *Sea R un anillo y A una R-álgebra graduada de presentación finita. Entonces, la función*

$$\begin{aligned} t : S = \operatorname{Spec} R &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto t(x) := \min\{\, t_x \text{ tal que } \Phi_{\leq t_x} \text{ es un isomorfismo para } A \otimes_R k(x) \,\} \end{aligned}$$

es superiormente semi-continua.

Demostración. Sea $x \in S$ y $t := t(x)$. Considérese la sucesión exacta

$$\ker(\mu) \rightarrowtail S^\bullet_R(A_{\leq t}) \xrightarrow{\mu} A$$

Para cada $y \in S$, denótese por $\mu(y)$ a

$$S^\bullet_R(A_{\leq t}) \otimes_R k(y) = S^\bullet_{k(y)}([A \otimes_R k(y)]_{\leq t}) \xrightarrow{\mu(y)} A \otimes_R k(y) \longrightarrow 0$$

y, para $i \in \mathbb{Z}$, sea

$$[\mu(y)]_i : [S^\bullet_R(A_{\leq t}) \otimes_R k(y)]_i \longrightarrow [A \otimes_R k(y)]_i$$

Como $[\mu(y)]_i$ es un morfismo entre R-módulos de tipo finito, se sigue que

$$V_i := \{y \in S \mid [\mu(y)]_i \text{ es epiyectivo } \}$$

es un abierto de Zariski de S. Como A está generado por elementos de grado menor o igual que t, es una comprobación elemental que

$$U := \bigcap_{i=1}^{t} V_i = \bigcap_{i\geq 1} V_i = \{y \in S \mid \mu(y) \text{ es epiyectivo } \}$$

y por tanto, U, es un entorno abierto de x.

Falta por ver que existe un abierto $U^I \subseteq U$ tal que $t(y) \leq t$ para todo $y \in U^I$. Como A es una R-álgebra de presentación finita, se sigue que $[A]_i$ es un R-módulo de presentación finita y $[S^\bullet_R(A_{\leq t})]_i$ es un R-módulo de tipo finito. Entonces, por [Sta18, Lemma 01BP], $[\ker(\mu)]_i$ es un R_U-módulo de tipo finito. Definiendo

$$U^I := \{y \in U \mid \mu_{\leq t} : [\ker(\mu)]_{\leq t} \to [I_t]_{\leq t} \text{ is surjective}\}$$

se sigue que la función $t(-)$ es superiormente semi-continua. □

7.2.1. Ejemplos

En esta sección se darán algunos ejemplos de pgg-álgebras que aparecen de modo natural en Geometría Algebraica así como en Teoría de Números. Cabe destacar que lo interesante de los ejemplos presentados a continuación es que, aunque las álgebras graduadas no sean de presentación finita, los grados de los generadores de su ideal de relaciones están acotados.

Ejemplo 7.40. Sea X una variedad algebraica proyectiva sobre k, y sea D un divisor de Cartier amplio. Entonces, existe un entero positivo m que depende de D, tal que los morfismos naturales

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(aD)) \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(bD)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X((a+b)D))$$

son epiyectivos para todo $a, b \geq m$ ([Laz04, 1.2.22]). Como $\mathcal{O}_X(aD)$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo-coherente, el grupo de cohomología $H^0(X, \mathcal{O}_X(aD))$ es un k-módulo finito generado ([Har13, Theorem 5.2]). Como el producto tensorial de dos módulos finito generados es de nuevo finito generado, $H^0(X, \mathcal{O}_X(aD)) \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(bD))$ es finito generado. Se tiene por tanto que el anillo de secciones de D, es decir, $R(X, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))$, es una k-álgebra graduada finito generada, y los generadores pueden ser encontrados en el sub-k-módulo $\bigoplus_{i=0}^{2m} H^0(X, \mathcal{O}_X(iD))$. Como esos grupos de cohomología son k-módulos finito generados y k es un cuerpo (y por tanto anillo noetheriano), son de presentación finita. Por otro lado, todo anillo noetheriano es coherente, y sobre un anillo noetheriano un módulo es coherente si y sólo si es de presentación finita ([Sta18, Lemma 10.90.4]). Como el núcleo de un morfismo de módulos coherente es coherente ([Sta18, Lemma 10.90.3]), se tiene que el núcleo de cualquiera de los morfismos de multiplicación anteriormente señalados es finito generado. Considerando todas las posibles combinaciones (que son finitas), se concluye que existen únicamente un número finito de relaciones entre los generadores considerados. Se tiene por tanto que $R(X, D)$ es una pgg-álgebra sobre k.

Ejemplo 7.41. (**La Grassmanniana infinita**). Recuérdese que en [SS83], los autores definen la Grassmanniana infinita (desde el punto de vista de la geometría diferencial) de k((z)), denotada por Gr, como el subconjunto de puntos de un espacio proyectivo finito dimensional cuyas coordenadas homogéneas satisfacen las relaciones de Plücker. Alternativamente, introduciendo Gr en el contexto de esquemas, entonces el fibrado determinante da lugar a la inmersión de Plücker, la cual es una inmersión cerrada en un espacio proyectivo del álgebra graduada k[$\{x_S\}$], donde S recorre todos los diagramas de Young. Desde este punto de vista, se prueba en [PM00] que el ideal $I \subseteq$ k[$\{x_S\}$] que define la Grassmanniana infinita está generado por el conjunto de todas las relaciones de Plücker, siendo estas, relaciones cuadráticas en las variables x_S. Se tiene por tanto que $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}} =$ k[$\{x_S\}$]$/I$ es una 2-pgg-álgebra.

Ejemplo 7.42. Considérese una variedad abeliana (A, Θ) sobre un cuerpo k de característica car(k) = 2, es decir, una variedad algebraica proyectiva conexa A, dotada de un haz de línea amplio Θ que está definido salvo traslaciones. Supóngase además que $\Theta = (-1)^{-1}\Theta$ y que se tiene definida una involución $i : \Theta \to \Theta$. Para cada n se tiene definido un morfismo $i^{\otimes n} : \Theta^{\otimes n} \to \Theta^{\otimes n}$ que da lugar a un morfismo entre las secciones globales

$$I : \Gamma(A, \Theta^{\otimes n}) \to \Gamma(A, \Theta^{\otimes n})$$

Sea $\Gamma(A, \Theta^{\otimes n})^+$ el espacio de vectores propios de valor propio 1 de I. El anillo graduado $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(A, \Theta^{\otimes 4n})^+$ está generado por $\Gamma(A, \Theta^{\otimes 4\Theta})^+$, y el ideal de relaciones está generado por relaciones cuadráticas y cúbicas [Kem80]. Se tiene por tanto que $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(A, \Theta^{\otimes 4})^+$ es una pgg-álgebra.

Ejemplo 7.43. Sea $\Gamma_1(n)$ el subgrupo de congruencias de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ de nivel n. Considérese el anillo graduado de funciones modulares (con respecto $\Gamma_1(n)$) con coeficientes en $\mathbb{Q}$, es decir $M(\Gamma_1(n), \mathbb{Q})$. El anterior anillo está generado por elementos de grado ≤ 3 para todo $N \geq 5$ ([Rus14, Cor. 1]) y el ideal de relaciones está generado en grado menor o igual que 6 ([Rus16, Theorem 1.4]). Las anteriores cotas implican que $M(\Gamma_1(n), \mathbb{Q})$ tiene estructura de pgg-álgebra. Resultados análogos para el subgrupo de congruencias de Hecke $\Gamma_0(n)$ para ciertos valores de n, pueden ser encontrados en los artículos [Rus14],[Rus16].

7.3. Geometría de las pgg-álgebras

Es bien conocido que dada una R-álgebra graduada $A = \oplus_{i\geq 0} A_i$ generada por sus elementos de grado uno, es posible construir una inmersión localmente cerrada $\operatorname{Spec}(A) \to \mathbb{P}(R\ A_1)$ [Gro61b]. En la presente sección se estudiará un resultado análogo para las *pgg*-álgebras. Recuérdese, que dado un R-módulo E su **proyectivización** es el esquema sobre $\operatorname{Spec} R$ definido como

$$\mathbb{P}(E) := \operatorname{Proj} S^{\bullet}_R E \to \operatorname{Spec} R$$

Teorema 7.44: *Sea A una t_A-pgg-R-álgebra y sea $d > t_A$ y $t := t_A + 1$.*

Entonces, el morfismo $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} R$ *factoriza de modo canónico por una inmersión localmente cerrada de* $\operatorname{Spec} R$*-esquemas*

$$\operatorname{Spec} A \hookrightarrow \mathbb{P}\Big(\bigoplus_{1\leq |d| \leq d} S^{d_1} A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R S^{d_t} A_t\Big)$$

El cierre de la imagen está dado por $\operatorname{Proj}(A \otimes_R R[T])$. *Además, existe una acción natural de* $G := \operatorname{Aut}_{k-alg-grad}(A)$ *sobre* $\mathbb{P}\Big(\bigoplus_{1\leq |d|\leq d} S^{d_1} A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R S^{d_t} A_t\Big)$ *tal que la inmersión del enunciado es G-equivariante.*

Observación 7.45. Antes de demostrar el Teorema 7.44 se recordarán dos construcciones que inspiran la demostración dada. La primera es la concerniente al estudio de las proyectivizaciones de R-módulos graduados [Gro61b, Chp II, §8]. Para una álgebra graduada cualquiera $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$, considérese una indeterminada T con $\deg T = 1$. Entonces, el morfismo de A-álgebras

$$A[T] := A \otimes_R R[T] \longrightarrow A$$

que consiste en enviar la indeterminada T al 1, factoriza por la localización homogénea de $A[T]$ con respecto el sistema multiplicativo generado por T, el cual será denotado por $A[T]^{+}_{T}$; es decir,

$$A[T] \to A[T]^{+}_{T} \xrightarrow{\sim} A$$

donde el primer morfismo es la localización y el segundo el definido por $T \mapsto 1$. Este último es un isomorfismo cuya inversa consiste en asignar, a cada elemento homogéneo de grado n $a \in A_n$, el elemento $\frac{a}{T^n}$. Se obtiene por tanto una inmersión abierta

$$\operatorname{Spec} A \hookrightarrow \operatorname{Proj} A[T]$$

cuya imagen es densa.

La segunda construcción se basa en la inmersión de Veronese de grado d. Por [Gro61b, Proposition 3.1.8] se tiene que para toda álgebra graduada $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ y todo $d > 0$, existe un isomorfismo canónico $\operatorname{Proj} A \simeq \operatorname{Proj} A^{(d)}$ donde

$$A^{(d)} := \oplus_{n\geq 0} [A^{(d)}]_n \qquad \text{con } [A^{(d)}]_n := [A]_{nd}.$$

Demostración. La R-álgebra graduada $B := R[T]$ con $\deg(T) = 1$ es una pgg-R-álgebra. Además, $\Phi_{\leq t_B}$ es un isomorfismo para $t_B = 1$, el ideal de relaciones $I^B_t = (0)$ y se verifica que

$$S^\bullet_R(B_{\leq t_B}) = S^\bullet_R(R[T]_{\leq 1}) = S^\bullet_R((T)) = R[T]$$

Sea A como en el enunciado. La Proposición 7.37 de cambio de base implica que $\bar{A} = A \otimes_R B = A \otimes_R R[T]$ es una pgg-$R[T]$-álgebra.

La demostración de la Proposición 7.37 da lugar a la sucesión exacta

$$0 \to I^A_t \otimes_R R[T] \to S^\bullet_R(A_{\leq t_A}) \otimes_R R[T] \to A \otimes_R R[T] \to 0$$

Utilizando la notación $\bar{I} := I^A_{t_A} \otimes_R R[T]$, de la anterior sucesión exacta y el Teorema 7.32 se deduce que $\bar{A}$ es una $t_{\bar{A}}$-pgg-álgebra para $t := t_{\bar{A}} = t_A + t_B = t_A + 1$.

Sea d como en el enunciado, es decir, $d \geq t = t_{\bar{A}} = t_A + 1$. Se tiene que $\bar{I}$ está generado por sus elementos de grado menor o igual que t, luego

$$\begin{aligned}
[\bar{I}^{(d)}]_i = [\bar{I}]_{i\cdot d} &= \sum_{j=1}^{t} [\bar{I}]_j \cdot \left[S^\bullet_R(\bar{A}_{\leq t})\right]_{i\cdot d-j} = \\
&= \sum_{j=1}^{t} [\bar{I}]_j \cdot \left[S^\bullet_R(\bar{A}_{\leq t})\right]_{d-j} \cdot \left[S^\bullet_R(\bar{A}_{\leq t})\right]_{(i-1)\cdot d} = \\
&= [\bar{I}^{(d)}]_1 \cdot \left[\left(S^\bullet_R(\bar{A}_{\leq t})\right)^{(d)}\right]_{i-1}
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $[\bar{I}^{(d)}]_1 = [\bar{I}]_d$, se obtiene el siguiente isomorfismo

$$\bar{A}^{(d)} \simeq \left(S^\bullet_R(\bar{A}_{\leq t})\right)^{(d)} / \bar{I}^{(d)}$$

que, compuesto con el morfismo epiyectivo canónico

$$\mathrm{S}^{\bullet}_R([\mathrm{S}^{\bullet}_R \bar{A}_{\leq t}]_d) \to \mathrm{S}^{\bullet}_R([\mathrm{S}^{\bullet}_R \bar{A}_{\leq t}]_d/[\bar{I}]_d) \to \mathrm{S}^{\bullet}_R(\bar{A}_{\leq t})^{(d)}/\bar{I}^{(d)}$$

da lugar al morfismo epiyectivo

$$\mathrm{S}^{\bullet}_R([\mathrm{S}^{\bullet}_R \bar{A}_{\leq t}]_d) \to \bar{A}^{(d)} \tag{7.46}$$

Teniendo en cuenta que $\deg(T) = 1$, y las ecuaciones (7.23) y (7.25), se verifica que

$$[\mathrm{S}^{\bullet}_R \bar{A}_{\leq t}]_d = \bigoplus_{|\underline{d}|=d} \mathrm{S}^{d_1} \bar{A}_1 \otimes_R \cdots \otimes_R \mathrm{S}^{d_t} \bar{A}_t$$

Por otro lado, el morfismo canónico de R-módulos $[\mathrm{S}^{\bullet}_R \bar{A}_{\leq t}]_d \to \bar{A}$ factoriza como sigue a continuación

$$[\mathrm{S}^{\bullet}_R \bar{A}_{\leq t}]_d \to \bigoplus_{0\leq|\underline{d}|\leq d} \mathrm{S}^{d_1} A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R \mathrm{S}^{d_t} A_t \otimes_R (T^{d-|\underline{d}|}) \to \bar{A}$$

Ahora, el morfismo de R-álgebras graduadas dado por la multiplicación de A y la asignación $T \mapsto 1$

$$C := \mathrm{S}^{\bullet}_R \Big(\bigoplus_{1\leq|\underline{d}|\leq} \mathrm{S}_{d_1} A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R \mathrm{S}_{d_t} A_t \otimes_R (T_{d-|\underline{d}|}) \Big) \longrightarrow A \tag{7.47}$$

es epiyectivo y factoriza por la localización homogénea del sistema multiplicativo M generado por todos los elementos de la forma $1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes T^i$; este es, C^+_M

Considerando el espectro y el espectro proyectivo se sigue que la composición

$$\operatorname{Spec} A \hookrightarrow \operatorname{Spec} C^+_M \hookrightarrow \operatorname{Proj} C = \mathrm{P}\Big(\bigoplus_{1\leq|\underline{d}|\leq} \mathrm{S}^{d_1} A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R \mathrm{S}^{d_t} A_t \Big)$$

es el morfismo deseado, pues el primero es una inmersión cerrada y el segundo es una inmersión abierta. De la construcción se sigue automáticamente que el cierre de $\operatorname{Spec}(A)$ por el anterior morfismo es $\operatorname{Proj} \bar{A}$.

Para la segunda parte del enunciado obsérvese que se tiene una acción canónica $G \to \mathrm{Aut}_{R-\text{mód}}(A_i)$ sobre cada componente homogénea de A, definida como $g \to g_{|A_i}$. La anterior acción induce una G-acción en $\mathrm{P}\Big(\bigoplus_{1\leq|\underline{d}|\leq d} \mathrm{S}^{d_1} A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R \mathrm{S}^{d_t} A_t\Big)$ de modo natural. Para probar que la inmersión construida es G-equivariante basta con probar que (7.47) es G-equivariante, pues, obsérvese, que G actúa de modo trivial en la variable T. Ahora bien, por la definición de la acción de G sobre C, para probar que (7.47) es G-equivariante basta con probar que el morfismo natural $A_i \hookrightarrow A$ es G-equivariante, lo cual es trivial. □

7.4. Caso Global

El presente capítulo finaliza con una descripción global de las pgg-álgebras, es decir, con la extensión de definiciones y propiedades al caso de esquemas.

Definición 7.48. Sea S un esquema. Un haz de álgebras parciales sobre S con soporte $I \subseteq \mathbb{Z}$, es un $\mathcal{O}_S$-módulo graduado quasi-coherente, $A = \oplus_{i\in I}$, tal que para cada abierto afín $U \subseteq S$, $A(U)$ es una $\mathcal{O}_S(U)$-álgebra parcial. La noción de morfismo de $\mathcal{O}_S$-álgebras parciales es el evidente.

Definición 7.49. Un haz de $\mathcal{O}_S$-álgebras graduadas $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ es una t-$\mathcal{O}_S$-álgebra graduada parcialmente generada (t-pgg-$\mathcal{O}_S$-álgebra) si para todo abierto afín $U \subseteq S$, $A(U)$ es una t-pgg-$\mathcal{O}_S(U)$-álgebra.

Ejemplo 7.50. (**Espacio proyectivo pesado**). Considérese una tupla de enteros $(d_0, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}_{>}$, y considérese el anillo de polinomios $R := k[x_0, \dots, x_n]$ con $deg(x_i) = d_i$. El espacio proyectivo de pesos $(d_0, \dots, d_n)$ se define como

$$\mathbb{P}_k(d_0, \dots, d_n) := \operatorname{Proj}(R)$$

Como no hay relaciones entre los generadores, $x_0, \dots, x_n$, definiendo el natural $t := \max\{d_i\}_{i=0}^n$ el anillo de polinomios $k[x_0, \dots, x_n]$ es una t-pgg-k-álgebra. Un teorema clásico muestra que si $R = \bigoplus_{d\geq 0} R$ es un anillo graduado y es un entero positivo, entonces existe un isomorfismo canónico $\operatorname{Proj} R \;\; \operatorname{Proj} \bigoplus_{i\geq 0} R_{di}$ dado por la inmersión de Veronese de grado d. El anterior resultado permite sumergir cualquier espacio proyectivo pesado en un espacio proyectivo clásico $\mathbb{P}^N$ para un N lo suficientemente grande. Para un estudio detallado de los espacios proyectivos pesados se referencia al lector interesado a [Dol].

La noción de espacio proyectivo pesado admite la siguiente versión relativa. Dado un esquema S, defínase el espacio proyectivo pesado de pesos $(d_0, d_1, \dots, d_n)$ sobre S como

$$\mathbb{P}_S(d_0, \dots, d_n) := \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}(d_0, \dots, d_n) \times_{\mathbb{Z}} S \to S$$

Por la construcción del Proj de una $\mathcal{O}_S$-álgebra, dado un abierto afín $U = \operatorname{Spec}(A)$ S, se tiene que

$$\mathbb{P}_U(d_0, \dots, d_n) = \operatorname{Proj}(A[x_0, \dots, x_n])$$

con $\deg(x_i) = d_i$, y por tanto, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_S(d_0,\dots,d_n)}$ es una d-pgg-$\mathcal{O}_S$-álgebra, siendo $d = \max\{d_i\}_{i=0}^n$.

Teorema 7.51: *Sea $S = \operatorname{Spec}(R)$. Se tiene una equivalencia categorial entre la categoría de t-pgg-R-álgebras y la categoría de haces de t-pgg $\mathcal{O}_S$-álgebras.*

$$\{t\text{-pgg-}\mathcal{O}_S\text{-álgebras}\} \to \{t\text{-pgg-}R\text{-álgebras}\}$$

Demostración. A cada t-pgg-R-álgebra A se le asocia el haz de álgebras A. Sobre cada abierto afín $U = \mathrm{Spec}(B) \subset S$, $A(U) = A \otimes_R B$. Por la estabilidad de las pgg-álgebras por cambios de base (Proposición 7.37), se sigue que $A(U) = A \otimes_R B$ es una t-pgg-B-álgebra.

Recíprocamente, dada una t-pgg-$\mathcal{O}_S$-álgebra A, le corresponde la t-pgg-R-álgebra $A(\mathrm{Spec}(R))$. Una asignación es inversa de la otra. □

Del anterior Teorema junto con la Proposición 7.37 se sigue el siguiente corolario.

Corolario 7.52: *Sean A y B dos anillos, y $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Sean $X := \mathrm{Spec}(A)$ e $Y := \mathrm{Spec}(B)$. Entonces, el pullback*

$$f^* : \{t\text{-pgg-}\mathcal{O}_Y\text{-álgebras}\} \to \{t\text{-pgg-}\mathcal{O}_X\text{-álgebras}\}$$

es un funtor de la categoría de t-pgg-$\mathcal{O}_Y$-álgebras a la categoría de t-pgg- $_X$-álgebras.

8. El Teorema de Nagata

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, G un grupo algebraico sobre k, y $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ una representación finito dimensional siendo V un k-espacio vectorial. La teoría clásica de invariantes se fundamenta en la problemática de descomponer $T^r(V) := V^{\otimes r}$ como suma directa de representaciones irreducibles. El anterior problema admite dos enfoques diferentes:

1. describir $(T^r(V) \otimes T^s(V^\vee))^G$ en función de generadores y relaciones;

2. o describir $(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{k}}(V^\vee))^G$ en función de generadores y relaciones.

Cuando G es uno de los grupos clásicos (Sl_n, Sp_{2n}, O_n o SO_n), la descripción de los generadores se conoce como Primer Teorema Fundamental, mientras que la descripción de las relaciones se conoce como Segundo Teorema Fundamental. Una referencia clásica que trata estos casos particulares es el libro de Weyl [Wey66]. El hecho de que $(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{k}}(V^\vee))^G$ pueda ser descrito en términos de generadores y relaciones se deduce del hecho de que $(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{k}}(V^\vee))^G$ es una k-álgebra finito generada. El problema 14 de Hilbert, planteado primera vez en [Hil02], pregunta si en toda circunstancia, $(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{k}}(V^\vee))^G$ es una k-álgebra finito generado. Nagata da en [Nag60] un contraejemplo a esta cuestión. En un artículo posterior, [Nag63], Nagata prueba que para toda k-álgebra finito generada A y toda representación fiel $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{k}\text{-}alg}(A)$, el anillo de invariantes $A^G \subset A$ es de nuevo una k-álgebra finito generada, siempre que se asuma que G es reductivo.

En el presente capítulo se probará un resultado análogo en el contexto relativo. Es conveniente remarcar que Seshadri prueba una generalización natural del Teorema de Nagata [Ses77]. El autor demuestra que si $S = \mathrm{Spec}(R)$, donde R es una k-álgebra finito generada, G_S es un S-esquema en grupos reductivo, M un R-módulo libre finito generado y $\rho : G^\bullet_S \to \underline{\mathrm{Aut}}_{R\text{-}m\acute{o}d}(M)$ una representación, entonces el álgebra de invariantes $\mathrm{S}^\bullet_R(M^\vee)^G$ es finito generada sobre R.

En analogía con la teoría clásica, se estudiará el anillo de funciones G_R-invariantes del módulo $\mathrm{Hom}_T(M \otimes_R T, N)$, es decir, la T-álgebra graduada $A := (\mathrm{S}^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_T N))^{G_R}$. Donde M y ρ son como en el artículo de Seshadri, T es una R-álgebra cualquiera y N es un T-módulo. El estudio servirá para entender el comportamiento de A si se hace variar el módulo N. Se probará que incluso en el caso más general, el álgebra de invariantes satisface una condición de finitud sobre el grado de los generadores y de las relaciones, lo cual, casará directamente con los objetos introducidos en el capítulo anterior: las pgg-álgebras.

8.1. Consideraciones previas

En lo sucesivo k será un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y $\mathbf{Alg}_R$ denotará la categoría de R-álgebras conmutativas. G es un grupo algebraico lineal sobre k. Para cada k-álgebra conmutativa R, se denotará por G_R al R-esquema en grupos obtenido como el cambio de base de G a través del morfismo Spec $R \to$ Spec k. Por simplicidad en la notación, el anillo de funciones de G_R será denotado por

$$R[G] := \Gamma(G_R, \mathcal{O}_{G_R}) \tag{8.1}$$

Dada una k-álgebra conmutativa R, y un R-módulo M, sea $\underline{\mathrm{End}}_{R-m\acute{o}d}(M)$ (resp. $\underline{\mathrm{Aut}}_{R-m\acute{o}d}(M)$) al funtor de endomorfismos (resp. automorfismos) de M, es decir

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{End}}_{R-m\acute{o}d}(M) : \mathbf{Alg}_R &\to \mathbf{Grp} \\ T &\mapsto \mathrm{End}_{T-m\acute{o}d}(M \otimes_R T) \end{aligned} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Aut}}_{R-m\acute{o}d}(M) : \mathbf{Alg}_R &\to \mathbf{Grp} \\ T &\mapsto \mathrm{Aut}_{T-m\acute{o}d}(M \otimes_R T) \end{aligned} \tag{8.3}$$

Si M es finito generado, entonces $\mathrm{End}_{R-m\acute{o}d}(M)^\vee$ es representable por la R-álgebra $S^\bullet_R(\mathrm{End}_{R-m\acute{o}d}(M)^\vee)$ como puede comprobarse fácilmente. En este caso, localizando $S^\bullet_R(\mathrm{End}_{R-m\acute{o}d}(M)^\vee)$ por la función determinante, se obtiene el representante del funtor $\underline{\mathrm{Aut}}_{R-m\acute{o}d}(M)$ (8.3). Una representación lineal de G sobre una k-álgebra conmutativa R es una pareja (M, ρ) siendo M un R-módulo y $\rho : G^\bullet_R \to \underline{\mathrm{Aut}}_{R-m\acute{o}d}(M)$ un morfismo de funtores sobre $\mathbf{Alg}_R$, si M tiene estructura de álgebra, entonces ρ valora en $\underline{\mathrm{Aut}}_{R-\acute{a}lg}(M)$. En cualquier caso se dirá que G_R actúa en M.

Observación 8.4. El $G^\bullet_R$ se entiende como la restricción del funtor de puntos de G_R a la categoría de R-esquemas afines, siendo esta última opuesta a la categoría de R-álgebras. De este modo, dada una R-álgebra T, $G^\bullet_R(T) = \mathrm{Hom}_{R-m\acute{o}d}(R[G], T)$.

Obsérvese que la anterior definición equivale a dar un morfismo de grupos

$$\rho_T : G^\bullet(T) \to \underline{\mathrm{Aut}}_{T-m\acute{o}d}(M \otimes_R T)$$

para toda R-álgebra T de modo funtorial. Estos datos, a su vez, equivalen a dar un morfismo de R-módulos

$$M \to M \otimes_R R[G]$$

que dotan a M de estructura de co-módulo sobre la co-álgebra $R[G]$. Como $R[G]$ es R-plana, dar un morfismo $M \to M \otimes_R R[G]$ equivale a su vez a dar un morfismo de R-módulos

$$\mathrm{End}_{R-m\acute{o}d}(M)^\vee \to R[G] = \mathrm{k}[G] \otimes_{\mathrm{k}} R$$

Si M es un R-módulo finito generado, entonces se tiene un isomorfismo canónico

$$(M^\vee \otimes_R T) \quad (M \otimes_R T)^\vee$$

Se tiene por tanto que toda representación $\rho : G^\bullet{}_R \to \underline{\mathrm{Aut}}_{R-\text{mód}}(M)$ induce una representación dual $\rho^\vee : G^\bullet{}_R \to \underline{\mathrm{Aut}}_{R-\text{mód}}(M^\vee)$ definida por la fórmula

$$\begin{aligned} \rho^\vee{}_T(g) : (M \otimes_R T)^\vee &\to (M \otimes_R T)^\vee \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \rho_T(g) \end{aligned} \tag{8.5}$$

La estructura de co-módulo inducida en $M^\vee$ por la representación dual está dada por

$$\begin{aligned} M^\vee &\to \mathrm{Hom}_R(M, R[G]) \quad M^\vee \otimes_R R[G] \\ \delta &\mapsto (\delta \otimes 1) \circ \rho \end{aligned} \tag{8.6}$$

8.2. Teorema de Nagata-Seshadri en el caso no noetheriano

Esta sección está dedicada a generalizar el Teorema [Ses77, Theorem 2] en el contexto no noetheriano, como preámbulo al Teorema central de este capítulo. Debido a que se utilizarán las técnicas de Reducción Noetheriana expuestas en [Gro66, §8], se citarán los resultados necesarios.

Sea R_0 un anillo conmutativo y $(R_\lambda)_{\lambda\in I}$ un sistema inductivo de R_0-álgebras. Si M_0 es un R_0-módulo, se utilizará la notación $M_\lambda := M_0 \otimes_{R_0} R_\lambda$ Como M_β y $M_\lambda \otimes_{R_\lambda} R_\beta$ son canónicamente isomorfos, existe un morfismo canónico

$$\begin{aligned} M_\lambda &\to M_\beta \\ m &\mapsto m \otimes 1 \end{aligned} \tag{8.7}$$

para cada pareja $\lambda \leq \beta \in I$. Se tiene por tanto que $(M_\lambda)_{\lambda\in I}$ es un sistema inductivo.

Si N_0 es otro R_0-módulo, los mismos argumentos dan lugar a un sistema inductivo $(N_\lambda)_{\lambda\in I}$, y el producto tensorial $\otimes_{R_\lambda} R_\beta$ induce un morfismo

$$\mathrm{Hom}_{R_\lambda}(M_\lambda, N_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{R_\beta}(M_\beta, N_\beta)$$

para cada pareja $\lambda \leq \beta \in I$. Se tiene por tanto un sistema inductivo $(\mathrm{Hom}_{R_\lambda}(M_\lambda, N_\lambda))_{\lambda\in I}$.

Lema 8.8: [Gro66, Lemma 8.5.2.1] *Sea R_0 un anillo conmutativo, $(R_\lambda)_{\lambda\in I}$ un sistema inductivo de R_0-álgebras, $R = \varinjlim R_\lambda$, M_0 y N_0 dos R_0-módulos y sea $M_\lambda := M_0 \otimes_{R_0} R_\lambda$, $N_\lambda := N_0 \otimes_{R_0} R_\lambda$, $M := M_0 \otimes_{R_0} R = \varinjlim M_\lambda$, $N = N_0 \otimes_{R_0} R = \varinjlim N_\lambda$.*

Si M_0 es de tipo finito (resp. de presentación finita), entonces el morfismo canónico

$$\varinjlim \operatorname{Hom}_{R_\lambda}(M_\lambda, N_\lambda) \to \operatorname{Hom}_R(M, N)$$

es inyectivo (resp. biyectivo).

Lema 8.9: [Gro66, Proposition 8.9.1 (ii)] *Sea R un anillo conmutativo y M un R-módulo de presentación finita. Entonces, existe un subanillo noetheriano, $R_0 \subset R$ y un R_0-módulo de presentación finita M_0 verificando que $M_0 \otimes_{R_0} R \quad M$.*

Lema 8.10: *Sea R un anillo conmutativo. Sea $(R_\lambda)_{\lambda\in I}$ el sistema inductivo formado por los subanillos noetherianos de R, de tal modo que $R = \varinjlim R_\lambda$. Sea $R_0 \in (R_\lambda)$ uno de tales subanillos. Considérese el conjunto de indices $J = \{\lambda \in I : R_0 \subset R_\lambda\}$. Entonces,*

$$\varinjlim_{\lambda\in J} R \;= R$$

Demostración. Obsérvese que en este caso, tanto para I como para J se verifica que $\varinjlim R \;= \cup R R$ Para probar el enunciado basta que ver que dado R y λ con $R_0 \subset R_\alpha$, entonces, el subanillo R_λ generado por R_α y R_η es noetheriano y $R_0 \subset R_\lambda$, es decir, $\lambda \in J$.

En efecto, Considérense dos presentaciones finitas

$$u_\alpha : \mathbb{Z}[X_1, \dots, x_m] \to R_\alpha \to 0, \qquad u_\beta : \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n] \to R_\beta \to 0$$

Se tiene entonces que R_λ está dado por la imagen del morfismo de k-álgebras

$$u : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n] \to R$$

definido por $u(x_i) := u_\alpha(x_i)$ y $u(y_j) = u_\beta(y_j)$. Se tiene por tanto que R_λ es noetheriano y evidentemente $R_\alpha, R_\beta \in R_Y$ y en particular $R_0 \in R_Y$. □

Lema 8.11: *Sea R un anillo conmutativo y M un R-módulo de presentación finita. Entonces, existe un subanillo noetheriano $R_0 \subset R$, un sistema inductivo de R_0-subálgebras noetherianas de R, $(R_\lambda)_{\lambda\in J}$, y un sistema inductivo de módulos de presentación finita $(M_\lambda)_{\lambda\in J}$ (con M_λ un R_λ-módulo) tal que $R = \varinjlim R_\lambda$, $M = \varinjlim M_\lambda$ y $\operatorname{End}_R(M) = \varinjlim \operatorname{End}_{R_\lambda}(M_\lambda)$.*

Demostración. El anillo R puede ser escrito como el límite directo de sus subanillos noetherianos $(R_\lambda)_{\lambda\in I}$. Sea R_0 y M_0 como en el Lema 8.9. Sea $J \subset I$ el subconjunto de índices dado en el Lema 8.10, y sea $M_\lambda := M_0 \otimes_{R_0} R_\lambda$. Del Lema 8.10 se sigue que $R = \varinjlim_{\lambda\in J} R_\lambda$. Esto implica que $M = \varinjlim_{\lambda\in J} M_\lambda$, ya que límites directos conmutan con el producto tensorial. Ahora el resultado se sigue de forma inmediata del Lema 8.8. □

Proposición 8.12: *Sea* k *un cuerpo cualquiera, R y A dos* k*-álgebras, y M un R-módulo libre finito generado. Sea $f : \mathrm{End}_R(M)^\vee \to A \otimes_k R$ un morfismo de R-módulos. Entonces, existe una sub-*k*-álgebra noetheriana $R_0 \subset R$, un R_0-módulo finito generado M_0, y un morfismo de R_0-módulos $f : \mathrm{End}_{R_0}(M_0)^\vee \to A \otimes_k R_0$ tal que $f_0 \otimes 1 = f$.*

Observación 8.13. Los Lemas 8.8, 8.9, 8.10 y 8.11 pueden ser enunciados y demostrados en términos de k-álgebras en vez de anillos conmutativos. Los mismos argumentos dados siguen siendo válidos sin más que cambiar la palabra anillo por k-álgebra.

Demostración. Sean R_0, $(R_\lambda)_{\lambda \in J}$ y $(M_\lambda)_{\lambda \in J}$ como en el Lema 8.11. Bajo las hipótesis del enunciado, para cualesquiera $\alpha \leq \beta \in J$, existe un isomorfismo canónico $\mathrm{End}_{R_\alpha}(M_\alpha) \otimes_{R_\alpha} R_\beta = \mathrm{End}_{R_\beta}(M_\beta)$. Se tiene por tanto que

$$\varinjlim \mathrm{End}_{R_\lambda}(M_\lambda)^\vee = \mathrm{End}_R(M)^\vee$$

Por otro lado, como los límites directos conmutan con productos tensoriales, se tiene que $A \otimes_k R = \varinjlim (A \otimes_k R_\lambda)$. Se concluye por tanto que f pertenece a

$$\mathrm{Hom}_R(\varinjlim \mathrm{End}_{R_\lambda}(M_\lambda)^\vee, \varinjlim (A \otimes_k R_\lambda))$$

Por el Lema 8.8, se tiene un isomorfismo canónico

$$\mathrm{Hom}_R(\varinjlim \mathrm{End}_{R_\lambda}(M_\lambda)^\vee, \varinjlim (A \otimes_k R_\lambda)) \quad \varinjlim \mathrm{Hom}_R(\mathrm{End}_{R_\lambda}(M_\lambda)^\vee, A \otimes_k R_\lambda)$$

y se concluye la demostración. □

Se está en condiciones de probar la generalización del Teorema de Seshadri.

Teorema 8.14: *Sea R una* k*-álgebra y M un R-módulo libre finito generado. Sea G un grupo algebraico semisimple sobre* k*, dotado de una representación fiel $\rho : G_R \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{R\text{-}mod}(M)$. Entonces, $A := (S^\bullet_R((M^\vee)^{\oplus n}))^{G_R}$ es una R-álgebra de presentación finita para todo $n > 0$.*

Demostración. Sin perdida de generalidad se puede suponer que R es noetheriana. En efecto, sea $R[G]$ el anillo de funciones de G_R, esto es, $\mathrm{Spec}(R[G]) = G_R$, y con esta notación se verifica que $k[G] \otimes_k R = R[G]$. La acción de G_R sobre M se puede entender como un morfismo de R-módulo

$$\tilde{\rho} : M \to R[G] \otimes_R M$$

Sea $\rho : \mathrm{End}_R(M)^\vee \to R[G] = k[G] \otimes_k R$ el morfismo de R-módulos inducido. Sean R_0, M_0 y ρ_0 como en la Proposición 8.12. Sea R_1 la localización de R_0 por el sistema multiplicativo formado por aquellos $r \in R_0$ que son invertibles en R. Obsérvese que se tienen inclusiones $R_0 \subset R_1 \subset R$. Sea $M_1 := M_0 \otimes_{R_0} R_1$ y $\rho_1 = \rho_0 \otimes 1$.

Obsérvese que R_1 es noetheriano y M_1 es un R_1-módulo libre de rango finito.

El siguiente paso consiste en probar que $\tilde{\rho}_1 : M_1 \to R_1[G] \otimes_{R_1} M_1$ define una acción de G_{R_1} en M_1. Es decir, hay que comprobar que los diagramas

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\tilde{\rho}_1"] \arrow[d, "\tilde{\rho}_1"] & R_1[G] \otimes_R M_1 \arrow[d, "1\otimes\tilde{\rho}_1"] \\ R_1[G] \otimes_{R_1} M_1 \arrow[r, "m\otimes 1"] & R_1[G] \otimes_R R_1[G] \otimes_{R_1} M_1 \end{tikzcd} \tag{8.15}$$

y

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\tilde{\rho}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & R_1[G] \otimes_R M_1 \arrow[d, "e\otimes\tilde{\rho}_1"] \\ & M_1 \end{tikzcd} \tag{8.16}$$

son conmutativos, donde m (resp. e) es el morfismo de multiplicación (resp. el elemento neutro) de G. Como R_1 es noetheriano y M_1 es finito generado, se sigue del Lema de Nakayama que los anteriores dos diagramas son conmutativos si y sólo si lo son después de tensorizar por $\otimes_{R_1} R_1/\mathfrak{m}_1$ para todos los ideales maximales $\mathfrak{m}_1 \subset R_1$.

Dado un maximal $\mathfrak{m} \subset R_1$, se sigue que $\mathfrak{m}_1 R$ es un ideal propio de R, es más, si $\mathfrak{m}_1 R = (1)$, entonces la imagen de $\mathfrak{m}_1$ contiene un elemento invertible de R que será denotado por r. Teniendo en cuenta el sistema multiplicativo considerado para construir R_1, se tendría que r es invertible en R_1 y, por tanto, $\mathfrak{m}_1 = R_1$. Considérese por tanto un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R conteniendo a $\mathfrak{m}_1 R$. Obsérvese que $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} \cap R_1$.

Además, como el morfismo

$$R_1/\mathfrak{m}_1 \to R/\mathfrak{m}$$

es fielmente plano, se tiene que los diagramas (8.15) y (8.16) tensorizados por $\otimes_{R_1} R_1/\mathfrak{m}_1$ son conmutativos si y sólo si los diagramas

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\tilde{\rho}"] \arrow[d, "\tilde{\rho}"] & R[G] \otimes_R M \arrow[d, "1\otimes\tilde{\rho}"] \\ R[G] \otimes_R M \arrow[r, "m\otimes 1"] & R[G] \otimes_R R[G] \otimes_R M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & R[G] \otimes_R M \arrow[d, "e\otimes\tilde{\rho}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

son conmutativos cuando se tensoriza por $\otimes_R R/\mathfrak{m}$. Pero esto es inmediato, pues ρ es una acción.

Por 8.5, el cambio de base de la estructura de co-módulo inducida en $M_1^\vee$ por la representación ρ_1 coincide con la estructura de co-módulo inducida en $M^\vee$ por $\rho_1 \otimes 1 = \rho$. Ahora bien, el Lema D.8 implica que

$$\left(S^\bullet_R (M^\vee)^{\oplus n}\right)^{G_R} = \left(S^\bullet_{R_1} (M_1^\vee)^{\oplus n}\right)^{G_{R_1}} \otimes_R R. \tag{8.17}$$

Si $\left(S^\bullet_{R_1}(M_1^\vee)^{\oplus n}\right)^{G_{R_1}}$ fuera una R_1-álgebra de tipo finito, entonces sería de presentación finita por ser R_1 noetheriana, y, por la ecuación (8.17), A sería una R-álgebra de presentación finita.

Se concluye la demostración si se prueba que cuando R es un anillo noetheriano, entonces $A := \left(S^\bullet_R(M^\vee)^{\oplus n}\right)^{G_R}$ es una R-álgebra finito generada. Pero esto es el Teorema de Seshadri [Ses77, Theorem 2]. □

8.3. La generalización del Teorema de Nagata

El objetivo de la presente sección es finalizar el capítulo probando el siguiente Teorema.

Teorema 8.18: *Sea R una* k*-álgebra, T una R-álgebra, M un R-módulo libre finito generado y N un T-módulo. Sea G un grupo algebraico linealmente semisimple sobre* k *dotado de una representación fiel $\rho : G^\bullet_R \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{R-mod}(M)$. Denótese por A a la T-álgebra graduada $(S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N))^{G_T}$. Entonces*

i) Si G es un grupo clásico, entones A es una T-pgg-álgebra.

ii) Si N es de presentación finita, entonces A es una T-álgebra de presentación finita.

iii) Si N es finito generado, entonces A es una T-álgebra finito generado.

Si la representación está definida sobre k*, $\rho : G^\bullet \to \underline{\mathrm{Aut}}_{k\text{-}mód}(V)$, siendo V un* k*-espacio vectorial finito dimensional, y se considera $M := V \otimes_k R$ entonces*

iv) si N es un T-módulo plano, A es una T-álgebra plana.

Además, si $R \to T$ es un morfismo de presentación finita (resp. plano), las mismas conclusiones obtenidas en i) y ii) (resp. iii)) siguen siendo ciertas substituyendo T por R.

Debido a la longitud de la demostración se ha decidido dividir la prueba en varios resultados.

Teorema 8.19: [Teorema 8.18, ii)] *Sea R una* k*-álgebra, T una R-álgebra, M un R-módulo libre finito generado de rango m y N un T-módulo de presentación finita. Sea G un grupo algebraico linealmente semisimple sobre* k *dotado de una representación fiel $\rho : G^\bullet_R \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{R-mo}(M)$. Entonces, $A := S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)^{G_T}$ es T-álgebra de presentación finita.*

Demostración. La demostración consiste en sucesivas simplificaciones. En primer lugar considérese una presentación finita de N

$$N^{II} \to N^I \to N \to 0$$

donde N^{II} y N^I son módulos libres de rango finito. Obsérvese que se tiene la siguiente sucesión exacta de T-módulos

$$\mathcal{N} := (M^\vee \otimes_R N^{II}) \otimes_T S_T^\bullet(M^\vee \otimes_R N^I) \to S_T^\bullet(M^\vee \otimes_R N^I) \to S_T^\bullet(M^\vee \otimes_R N) \to 0$$

Considerando las T-álgebras $B := S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N^I)^{G_T}$ y $A := S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)^{G_T}$, y recordando que G es reductivo (y por tanto el funtor tomar invariantes es exacto), se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$\mathcal{N}^G \to B \to A \to 0$$

En primer lugar $\mathcal{N}^G$ es un B-módulo finito generado. Para probarlo, obsérvese que como $\mathcal{N}$ es un módulo finito generado sobre $S_T^\bullet(M \otimes_R N^I)$, se tiene un morfismo epiyectivo

$$S^\bullet_T(M \otimes_R N^I)^{\oplus k} \longrightarrow \mathcal{N}$$

y teniendo en cuenta que G es reductivo y el operador de Reynolds tiene un comportamiento funtorial, se sigue la existencia de un morfismo epiyectivo

$$(B)^{\oplus k} \to \mathcal{N}^G$$

de B-módulos. Por tanto, si el Teorema es cierto para B, también será cierto para A, lo que se traduce en que se puede considerar que N es un módulo libre de rango finito.

Por lo dicho en el párrafo anterior considérese que N es libre de rango n. Considerando un isomorfismo

$$N \quad (T)^{\oplus n} \quad R^{\oplus n} \otimes_R T$$

de T-módulos, y teniendo en cuenta el Lema D.8, se deduce que

$$A := S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)^{G_T} \qquad S^\bullet_R((M^\vee)^{\oplus n})^{G_R} \otimes_R T$$

Pero en este caso, el resultado es cierto por el Teorema 8.14. □

Teorema 8.20: [Teorema 8.18, iii)] *Sea R una* k*-álgebra, T una R-álgebra, M un R-módulo libre finito generado de rango m y N un T-módulo finito generado. Sea G un grupo algebraico linealmente semisimple sobre* k *dotado de una representación fiel $\rho : G^{\bullet}_{R} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{R-mod}(M)$. Entonces, $A := \left(\mathrm{S}^{\bullet}_{T}(M^{\vee} \otimes_{R} N)\right)^{G_T}$ es una T-álgebra finito generada.*

Demostración. Utilizando las mismas notaciones que en la demostración del Teorema 8.19, existe un morfismo epiyectivo de T-módulos

$$N^{I} := T^{\oplus n} \to N$$

Por el Teorema 8.19, $B = \left(S^{\bullet}_{T}(M^{\vee} \otimes_{R} N^{I})\right)^{G_T}$ es una T-álgebra de presentación finita, y por construcción, el morfismo inducido $B \to A$ es epiyectivo, luego B es finito generada. □

Teorema 8.21: [Teorema 8.18, iv)] *Sea R una* k*-álgebra, T una R-álgebra, V un* k*-espacio vectorial finito dimensional y N un T-módulo plano. Sea G un grupo algebraico linealmente semisimple sobre* k *dotado de una representación fiel ρ : $G^{\bullet} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{R-mod}(V)$. Entonces, $A := \left(\mathrm{S}^{\bullet}_{T}(V^{\vee} \otimes_{\mathrm{k}} N)\right)^{G_T}$ es una T-álgebra plana.*

Demostración. En primer lugar considérese que N es libre y finito generado. Bajo esta hipótesis, los módulos de Schur (Definición D.2) $\mathrm{S}^{\lambda}_{T}N$ son libres y finito generados para cualquier partición λ, luego en particular, $\mathrm{S}^{\lambda}_{T}N$ son T-módulos planos. Por otro lado, se tiene un isomorfismo canónico de R-módulos (Lema D.8)

$$\mathrm{S}^{\lambda}_{R}(V \otimes_{\mathrm{k}} R)^{G_R} \quad (\mathrm{S}^{\lambda}_{\mathrm{k}}V)^{G} \otimes_{\mathrm{k}} R \tag{8.22}$$

Como V es de dimensión finita, $\mathrm{S}^{\lambda}_{\mathrm{k}}V$ es un k-espacio vectorial donde el grupo reductivo G actúa. Por el Teorema Fundamental de la Teoría de Invariantes ([Nag63]), $(\mathrm{S}^{\lambda}_{\mathrm{k}}V)^{G}$ es un k-espacio vectorial finito dimensional. Por la propiedad de cambio de base de los módulos de Schur (8.22), se concluye que $\mathrm{S}^{\lambda}_{R}(V \otimes_{\mathrm{k}} R)^{G_R}$ es un R-módulo libre y por tanto plano. Como $V \otimes_{\mathrm{k}} R$ es un R-módulo finito generado, por el Lema D.9, se tiene que la componente de grado k de $A = \left(\mathrm{S}^{\bullet}_{T}(V^{\vee} \otimes_{R} N)\right)^{G_T}$ se expresa como

$$\left(\mathrm{S}^{k}_{T}(V^{\vee} \otimes_{\mathrm{k}} N)\right)^{G_T} \quad \bigoplus_{|\lambda|=k} (\mathrm{S}^{\lambda}_{R}(V^{\vee} \otimes_{\mathrm{k}} R))^{G_R} \otimes_{R} \mathrm{S}^{\lambda}_{T}N$$

Como la propiedad de ser plano es estable por pullbacks, y el producto tensorial de dos módulos planos vuelve a ser plano, se concluye que para partición λ

$$(\mathrm{S}^{\lambda}_{R}(V^{\vee} \otimes_{\mathrm{k}} R))^{G_R} \otimes_{R} \mathrm{S}^{\lambda}_{T}N \quad (((\mathrm{S}^{\lambda}_{R}(V^{\vee} \otimes_{\mathrm{k}} R))^{G_R} \otimes_{R} \otimes T) \otimes_{T} \mathrm{S}^{\lambda}_{T}N$$

es un T-módulo plano y por tanto $\left(\mathrm{S}^{k}_{T}(V^{\vee} \otimes_{\mathrm{k}} N)\right)^{G_T}$ también lo es.

En conclusión, si N es libre y finito generado queda probado el resultado, pues en este caso A es una suma directa de módulos planos.

El caso general se obtiene de forma inmediata del Teorema de Lazard. De la platitud de N se sigue que N puede ser expresado como un límite directo de T-módulos finito generados ([Laz69, Théorème 1.2]) . Ahora bien, como los límites directos conmutan con productos tensoriales y también con la formación de los módulos de Schur, se reduce el problema al caso en el que N es libre y finito generado, siendo este último resuelto en la discusión anterior. □

Para probar la primera parte del Teorema 8.18 son necesarios algunos resultados previos. La demostración del anterior enunciado se fundamenta en dos hechos. El primero de ellos es que todo T-módulo es el límite inductivo de T-módulos de presentación finita, y en segundo lugar, el límite inductivo de t-pgg-álgebras vuelve a ser de nuevo una t-pgg-álgebra. Para poder utilizar este último resultado es necesario demostrar primero que si N es de presentación finita entonces, $A := (S^\bullet_T(M^\vee \otimes N))^{G_T}$ es una t-pgg-T-álgebra para un cierto t N, siendo G un grupo clásico.

Lema 8.23: *Sea R una* k*-álgebra, T una R-álgebra, M un R-módulo libre finito generado de rango M y N un T-módulo de presentación finita. Sea G uno de los grupos algebraicos linealmente semisimples clásicos* (Sl_n, Sp_n, SO_n) *dotado de una representación fiel $\rho : G^\bullet{}_R \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{R-\text{mód}}(M)$. Entonces, existe un número natural $t \in \mathbb{N}$ que no depende de N tal que $A := \left(S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)\right)^{G_T}$ es una t-pgg-T-álgebra.*

Demostración. Del Teorema 8.19 y la Proposición 7.12 se obtiene que A es una t-pgg-álgebra para un cierto $t \in \mathbb{N}$. El resultado se obtiene ahora de la Proposición 7.19 y la Proposición 7.39. □

Teorema 8.24: [Teorema 8.18, i)] *Sea R una* k*-álgebra, T una R-álgebra, M un R-módulo libre finito generado de rango M y N un T-módulo. Sea G uno de los grupos algebraicos linealmente semisimples clásicos* (Sl_n, Sp_n, SO_n) *dotado de una representación fiel $\rho : G^\bullet{}_R \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{R-\text{mód}}(M)$. Entonces, existe un número natural $t \in \mathbb{N}$ que no depende de N tal que $A := \left(S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)\right)^{G_T}$ es una t-pgg-T-álgebra.*

Demostración. Todo T-módulo N se puede expresar como un límite inductivo de T-módulos de presentación finita $(N_\lambda)_{\lambda\in I}$, $N = \varinjlim N_\lambda$ [Sha70, Lemma 2]. Para cada índice $\lambda \in I$, la representación $\rho : G_R \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{R-\text{mód}}(M)$ induce una representación $\rho_\lambda : G_R \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{R-\text{mód}}(M^\vee \otimes_R N_\lambda)$. Para cada $\lambda \in I$, por el Lema 8.23, el álgebra de invariantes $\left(S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N_\lambda)\right)^{G_T}$ es una t-pgg-T-álgebra, luego para probar el Teorema basta ver que

$$\varinjlim \left(S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N_\lambda)\right)^{G_T} \quad \left(S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N\right)^{G_T}$$

La demostración de la existencia del anterior isomorfismo equivale a probar que el funtor $\varinjlim(-)$ conmuta con los funtores $S^\bullet{}_T(-)$ y $(-)^{G_T}$.

En primer lugar obsérvese que el sistema inductivo $(\theta_\lambda : N_\lambda \to N)$ induce un sistema inductivo de álgebras $(u_\lambda : S^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N_\lambda) \to S^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N))$ y, por tanto, un morfismo

$$\varinjlim S^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N_\lambda) \to S^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N) \tag{8.25}$$

Por otro lado, existe un morfismo canónico inyectivo

$$M^\vee \otimes_R N \hookrightarrow \varinjlim S^\bullet(M^\vee \otimes_R N_\lambda)$$

que, por la propiedad universal del álgebra simétrica induce un morfismo de álgebras

$$S^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N) \to \varinjlim S^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N_\lambda) \tag{8.26}$$

Es inmediato que los morfismos (8.25) y (8.26) son inversos uno del otro, luego se obtiene un isomorfismo

$$\varinjlim S^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N_\lambda) \quad S^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N) \tag{8.27}$$

En segundo lugar, es claro que para cada $\lambda \in I$, el morfismo

$$u_\lambda : S^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N_\lambda) \to S^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N)$$

es G_T-equivariante. Se tiene por tanto que la restricción de u_λ al submódulo $S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N_\lambda)^{G_R}$ valora en $S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)^{G_T}$.

Denótese a la restricción del morfismo u_λ al álgebra de invariantes por v_λ. Se tiene por tanto un sistema inductivo

$$v_\lambda : \ S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N_\lambda)^{G_R} \to S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)^{G_T}$$

y por tanto un morfismo de R-álgebras

$$v : \varinjlim \ S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N_\lambda)^{G_T} \to S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)^{G_T} \tag{8.28}$$

Considérese ahora la composición del isomorfismo canónico de R-módulos

$$M^\vee \otimes_R N \quad \varinjlim(M^\vee \otimes_R N_\lambda)$$

con el límite inductivo de los operadores de Reynolds

$$\varinjlim(M^\vee \otimes_R N_\lambda) \to \varinjlim(M^\vee \otimes_R N_\lambda)^{G_T}$$

Como existe un morfismo canónico inyectivo

$$\varinjlim (M^\vee \otimes_R N_\lambda)^{G_T} \hookrightarrow \varinjlim \left(S^\bullet_T (M^\vee \otimes_R N_\lambda)\right)^{G_T}$$

se tiene un morfismo de R-módulos

$$(M^\vee \otimes_R N_\lambda) \hookrightarrow \varinjlim \left(S^\bullet_T (M^\vee \otimes_R N_\lambda)\right)^{G_T}$$

y por consecuente un morfismo de R-álgebras

$$S^\bullet_T (M^\vee \otimes_R N_\lambda) \hookrightarrow \varinjlim \left(S^\bullet_T (M^\vee \otimes_R N_\lambda)\right)^{G_T}$$

La restricción del anterior morfismo al álgebra de invariantes da lugar a un morfismo de T-álgebras

$$\left(S^\bullet_T (M^\vee \otimes_R N)\right)^{G_T} \to \varinjlim \left(S^\bullet_T (M^\vee \otimes_R N_\lambda)\right)^{G_T} \tag{8.29}$$

Es ahora inmediato que los morfismos (8.28) y (8.29) son inversos uno del otro y por tanto se tiene un isomorfismo

$$\varinjlim \left(S^\bullet_T (M^\vee \otimes_R N_\lambda)\right)^{G_T} \simeq \left(S^\bullet_T (M^\vee \otimes_R N)\right)^{G_T} \tag{8.30}$$

Por el Lema 8.23 basta ver que el límite inductivo de t-pgg-álgebras es de nuevo una t-pgg-álgebra. Para ello, sea $A_\lambda := \left(S^\bullet_T (M^\vee \otimes_R N_\lambda)\right)^{G_T}$. Como el funtor $\varinjlim(\_)$ es exacto, del Teorema 7.32 se sigue la existencia de una sucesión exacta

$$0 \to \varinjlim I_{\lambda,t} \to \varinjlim S^\bullet_T(A_{\lambda,\leq t}) \to \varinjlim A_\lambda \to 0$$

De (8.30) se sigue que $\varinjlim A_\lambda \simeq A$ y por (8.27) se obtiene que $\varinjlim S^\bullet(A_{\lambda,\leq t}) \simeq S^\bullet(A_{\leq t})$. Por último, es claro que $\varinjlim I_{\lambda,t}$ es isomorfo a un ideal de $S^\bullet(A_{\leq t})$ generado por los elementos de grado menor o igual que t. Por el Teorema 7.32, A es una t-pgg-T-álgebra. □

Corolario 8.31: *Sea R una* k*-álgebra, T una R-álgebra, M un R-módulo libre finito generado y N un T-módulo. Sea G un grupo algebraico linealmente semisimple sobre* k *dotado de una representación fiel $\rho : G^\bullet_R \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{R\text{-}mod}(M)$. Si N es de presentación finita ó G es uno de los grupos algebraicos lineales semisimples definidos sobre* k *(Sl_n, SO_n, Sp_{2n}), entonces existe una inmersión localmente cerrada canónica*

$$\Phi_{M,N,G} : \operatorname{Spec} \left(S^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)\right)^{G_T} \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigoplus_{1\leq|\underline{d}|\leq d} S^{d_1} A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R S^{d_t} A_t\right)$$

con $A_i = (S^i(M^\vee \otimes N))^{G_T}$, para cierto número natural d. Además, si G es clásico, d depende de G pero no de N y en cualquier caso $\Phi_{M,N,G}$ es $\mathrm{Aut}_T(N)$-equivariante.

Demostración. Si N es de presentación finita entonces la T-álgebra de invariantes $\mathrm{S}^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)^{G_T}$ es de presentación finita (Teorema 8.19) y por tanto es una pgg-T-álgebra (Proposición 7.12), de donde se sigue la existencia de la inmersión localmente cerrada (Teorema 7.44). Si G es un grupo clásico se concluye por el Teorema 8.24 y el Teorema 7.44. Para proba la segunda parte del enunciado, obsérvese que la acción natural de $\mathrm{Aut}_T(N)$ sobre N induce una acción natural

$$\alpha : \mathrm{Aut}_T(N) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{R-\text{álg}-grad}(\mathrm{S}^\bullet{}_T(M^\vee \otimes_R N))$$

De hecho, la acción inducida de $\mathrm{Aut}_T(N)$ sobre cada $\mathrm{S}^i(M^\vee \otimes_R N)$ es compatible con la acción de G_T (Lema D.9), luego α induce otra acción

$$\alpha^G : \mathrm{Aut}_T \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{R-\text{álg}-grad}\left(\mathrm{S}^\bullet_T(M^\vee \otimes_R N)^{G_T}\right)$$

Ahora la $\mathrm{Aut}_T(N)$-equivariancía de $\Phi_{M,N,G}$ es inmediata por el Teorema 7.44 observando que para cualquier subgrupo $H \subset G$ se tiene que la inmersión construida en el Teorema 7.44 es también H-equivariante. □

9. Compactificación del espacio de móduli de fibrados principales

En este capítulo final de la tesis se compactificará el espacio de móduli de fibrados principales con trivialización formal $\mathtt{Bun}_{\mathcal{G},C}$ construido en el Teorema 4.42, entendiendo por compactificación la inmersión del espacio de móduli en un fibrado proyectivo. En lo sucesivo se supondrá fijo el k-espacio vectorial V, la curva C, el grupo G y la representación fiel $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$. Por último, en relación con los trabajos realizados por A. H. W. Schmiit [Sch08] relativos a la construcción del espacio de móduli de fibrados principales semi-estables, junto con los de T. L. Gómez e I. Sols [GS01], se construirá el espacio de móduli de los *swamps* de tipo (a, b) con trivialización formal.

9.1. Espacio de móduli de fibrados principales singulares

Como se explicó en la primera parte de este trabajo, el Teorema de Serre 2.33 establece una correspondencia funtorial entre el grupoide de G-fibrados principales sobre un esquema X y el grupoide de G-reducciones. La equivalencia consistía en asignar a cada fibrado principal P la pareja (E_P, s_P) siendo E_P el fibrado vectorial correspondiente al $\mathrm{Gl}(V)$-fibrado principal $(P \times \mathrm{Gl}(V))/G$ y

$$s : X \to \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E_P \times V)/G$$

un morfismo de X-esquemas. Dada una G-reducción (E, s) se tiene el siguiente diagrama conmutativo (consúltese el Teorema 2.23)

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}(V_X, E) \arrow[d] \\
X \arrow[r, hook, "s"'] & \underline{\mathrm{Isom}}(V_X, E)/G \arrow[r, hook] & \underline{\mathrm{Hom}}(V_X, E)//G
\end{tikzcd}$$

La composición del morfismo s con la inclusión natural de los cocientes da lugar a un morfismo de X-esquemas

$$X \to \underline{\mathrm{Hom}}(V_X, E)//G$$

que equivale a dar un morfismo de $\mathcal{O}_X$-álgebras

$$\mathrm{S}^\bullet(V \otimes E^\vee)^G \to \mathcal{O}_X$$

Definición 9.1. Un G-**fibrado principal singular** es una pareja (E, τ) donde

E es un fibrado vectorial sobre X de rango n, fibra tipo V y determinante trivial y τ es un morfismo de O_X-álgebras

$$\tau : S^\bullet(V \otimes E^\vee)^G \to O_X$$

Definición 9.2. Se define el funtor $\mathrm{Sing}_{\mathcal{G},C}$ como la hacificación del funtor

$$\begin{aligned} \mathbf{Sch}_k &\to \mathbf{Sets} \\ S &\mapsto \{E, \tau, \psi\}/\sim \end{aligned} \tag{9.3}$$

donde

i) (E, τ) es un G-fibrado principal singular sobre $C \times S$

ii) ψ es una trivialización formal de E a lo largo de $p \times S$,

iii) y dos tuplas (E, τ, ψ), (E^I, τ^I, ψ^I) son equivalentes si existe un isomorfismo de fibrados vectoriales
$$f : E \quad E^I$$
tal que f es compatible con ψ y ψ^I, y con τ y τ^I

Recuérdese que la pareja universal del espacio de móduli de fibrados vectoriales de rango n sobre C equipados con una trivialización formal y de determinante trivial, $U_C^{\infty,triv}$ (4.37), era denotada por (E_U, ψ_U), donde E_U es un haz localmente libre de rango n y determinante trivial sobre $C \times U_C^{\infty,triv}$ y ψ_U una trivialización formal de E_U. Además, se utilizó a lo largo del capítulo 4 la notación

$$A_U := S^\bullet_{O_{C\times U_C^{\infty,triv}}} (V_U \otimes E_U^\vee)^G \tag{9.4}$$

donde $V_U := V \otimes_k O_{C\times U_C^{\infty,triv}}$.

Teorema 9.5: *El funtor* $\mathrm{Sing}_{\mathcal{G},C}$ *es representable por el esquema* $\mathrm{Spec}(A_U)$. *Se verifica que* $\mathrm{Bun}^\infty_{G,C}$ *es un subesquema abierto de* $\mathrm{Sing}_{G,C}$.

Demostración. La demostración de la representabilidad es análoga a la dada en el Teorema 4.42. $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},G}$ es un subesquema abierto puesto que por construcción es el subesquema abierto de $\mathrm{Spec}(A_U)$ donde la sección $\det_U$ no se anula. □

9.2. Compactificación de $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$

En lo sucesivo sea G un grupo algebraico linealmente semisimple clásico dotado de una representación fiel $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$.

Teorema 9.6: *Sea G un grupo algebraico linealmente semisimple clásico* ($\mathrm{Sl}_n, \mathrm{SO}_n, \mathrm{Sp}_{2n}$) *sobre* k *dotado de una representación fiel* $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$. *Entonces se tiene de forma canónica una inmersión*

$$\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C} \hookrightarrow \mathrm{Sing}_{\mathcal{G},C} \hookrightarrow \mathbb{P}\Big(\bigoplus_{1\leq|\underline{d}|\leq d} \mathrm{S}_{d_1} A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R \mathrm{S}_{d_t} A_t\Big)$$

con $A_i = \mathrm{S}^i_{\mathcal{O}_{C\times U^{\infty,triv}_C}}(V_U \otimes E_U^\vee)^G$, *donde la primera inclusión es una inmersión abierta y densa y la segunda una inmersión localmnete cerrada. En particular,* $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$ *admite una realización como abierto denso del subesquema cerrado de un fibrado proyectivo dado por* $\overline{\mathrm{Sing}_{\mathcal{G},C}} = \mathrm{Proj}(A_U[T])$.

Demostración. La inmersión abierta densa es consecuencia del Teorema 9.5. Para ver la segunda parte basta con restringirse al caso local. Como G es un grupo clásico, A_U es una d-pgg $\mathcal{O}_{C\times^{\infty,triv}_C}$-álgebra para un cierto d (Teorema 8.18) que solo depende de la dimensión de V. Por el Corolario 8.31, localmente se tiene para todo esquema afín $\mathrm{Spec}(T) \to \mathrm{Spec}(R)$ una inmersión localmente cerrada canónica

$$\Phi_{V_T,E_T,G} : \mathrm{Spec}\Big(\mathrm{S}^\bullet_T(V_T^\vee \otimes_R E_T)^{G_T}\Big) \hookrightarrow \mathbb{P}\Big(\bigoplus_{1\leq|\underline{d}|\leq d} \mathrm{S}^{d_1} A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R \mathrm{S}^{d_t} A_t\Big)$$

con $A_i = \mathrm{S}^i(V_T^\vee \otimes_R E_T)^{G_T}$. □

En conclusión, para cualquier grupo G linealmente semisimple dotado de una representación fiel $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$ se tiene que $\mathrm{Bun}_{\mathcal{G},C}$ es un subesquema abierto de $\mathrm{Sing}_{\mathcal{G},C}$, y si el grupo G es clásico, este último espacio de móduli se sumerge canónicamente en el espacio proyectivo

$$\mathbb{P}\Big(\bigoplus_{1\leq|\underline{d}|\leq d} \mathrm{S}^{d_1} A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R \mathrm{S}^{d_t} A_t\Big)$$

9.3. El espacio de móduli de swamps

La presente sección está dedicada a la construcción del espacio de móduli de un tipo de objeto definido en [Sch08] y utilizado para el estudio de la estabilidad de los fibrados principales, dotado de un dato adicional, esto es, una trivialización formal.

Definición 9.7. Un **swamp** de tipo (n, a, b) sobre un k-esquema X es una pareja (E, φ), donde E es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango n y

$$\varphi : (E^{\otimes a})^{\oplus b} \to \mathcal{O}_X$$

es un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Un **morfismo de swamps** $(E, \varphi) \to (H, \varphi^I)$ de tipo (n, a, b) es un morfismo de haces localmente libres $f : E \to H$, de tal forma que el morfismo inducido por f, $(E^{\otimes a})^{\oplus b} \to (H^{\otimes a})^{\oplus b}$ sea compatible con φ y φ^I.

Fijado el grupo G y la representación $\rho. G \hookrightarrow \mathrm{Sl}(V)$, en [Sch08, pp.186] se prueba que dado un G-fibrado principal singular (Definición 9.1), (E, τ) sobre X, siempre es posible asociarle un swamp (E, φ) de tipo (n, a, b), donde los enteros a y b solo dependen del grupo y la representación. De hecho, la anterior asignación establece una aplicación inyectiva entre las clases de isomorfismos de G-fibrados principales singulares sobre X, y las clases de isomorfismos de swamps de tipo (n, a, b) sobre X ([Sch08, Prop. 2.4.3.2]). El objetivo de lo que sigue a continuación es estudiar la representabilidad del siguiente funtor.

Definición 9.8. Se define el funtor $\mathbf{SW}^{\infty,(a,b)}_{G,C}$ como la hacificación del funtor

$$\begin{aligned} \mathbf{Sch}_k &\to \mathbf{Sets} \\ S &\mapsto \{E, \varphi, \psi\}/\sim \end{aligned} \tag{9.9}$$

donde

i) (E, φ) es un swamp de tipo (a, b) sobre $C \times S$

ii) ψ es una trivialización formal de E a lo largo de $p \times S$,

iii) y dos tuplas $(E\varphi, \psi)$, $(^I, \varphi^I, \psi^I)$ son equivalentes si existe un isomorfismo de fibrados vectoriales

$$f : E \quad E^I$$

tal que f es compatible con ψ y ψ^I, y con φ y φ^I.

9.3.1. Representabilidad de $\mathbf{SW}^{\infty,(a,b)}_{G,C}$

Se finaliza el capítulo con la representabilidad del haz $\mathbf{SW}^{\infty,(a,b)}_{G,C}$. De nuevo recuérdese que la pareja universal del espacio de móduli $U^{\infty,triv}_C$ (4.37), era denotada por (E_U, ψ_U), donde E_U es un haz localmente libre de rango n y determinante trivial sobre $C \times U^{\infty,triv}_C$ y ψ_U una trivialización formal de E_U. Sea ω_C el haz dualizante de C, que existe por el Teorema [Kle80, Theorem 20], y denótese por ω al pullback de ω_c por la proyección $C \times U^{\infty,triv}_C \to C$. Por la propiedad de cambio de base del dualizante [Kle80, Prop. 9], ω es el dualizante de $C \times U^{\infty,triv}_C \to C$.

Teorema 9.10: *El funtor* $\boldsymbol{SW}^{\infty,(a,b)}_{G,C}$ *es representable por el* k*-esquema*

$$\mathrm{Spec}(S^\bullet(R^1\pi_*((E_U^{\otimes a})^{\oplus b} \ \otimes\omega))$$

El isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(\mathrm{S}^\bullet(R^1\pi_*((E_U^{\otimes a})^{\oplus b}\otimes\omega)),-)\to \boldsymbol{SW}^{\infty,(a,b)}_{G,C}$$

de funtores se dará en la demostración.

Demostración. Sea S un k-esquema cualquiera, y sea

$$f: S\to \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^\bullet(R^1\pi_*((E_U^{\otimes a})^{\oplus b}\otimes\omega))$$

un morfismo. Mediante la composición de los siguientes morfismos naturales

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "g"] & \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^\bullet(R^1\pi_*((E_U^{\otimes a})^{\oplus b}\otimes\omega))) \arrow[r] & C\times U_C^{\infty,triv} \arrow[r, "\pi_2"] & U_C^{\infty,triv} \end{tikzcd}$$

donde π_2 es la proyección en el segundo factor, se obtiene un punto de $U_C^{\infty,triv}$ con valores en S, es decir, un fibrado vectorial E_S de rango n sobre $C\times S$ y determinante trivial, junto con una trivialización formal ψ de E_S. El anterior fibrado vectorial se obtiene haciendo el pullback de la pareja universal, E_U y ψ_U, vía el morfismo

$$1\times g: C\times S\to C\times U_C^{\infty,triv}$$

Por otro lado, el morfismo

$$f: S\to \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^\bullet(R^1\pi_*((E_U^{\otimes a})^{\oplus b}\otimes\omega))$$

da lugar a un morfismo de $\mathcal{O}_S$-álgebras

$$\overline{\varphi}\ :\ \mathrm{S}^\bullet(R^1\pi_*((E_S^{\otimes a})^{\oplus b}\otimes\omega_{C\times S/S}))\ \to\ \mathcal{O}_{C\times S}$$

que, por la propiedad universal del álgebra simétrica viene determinado por un morfismo de módulos

$$R^1\pi_*((E_S^{\otimes a})^{\oplus b}\otimes\omega_{C\times S/S})\ \to\ \mathcal{O}_S$$

Ahora bien, como $\omega_{C\times S/S}$ es el dualizante de $C\times S\to S$, se verifica la dualidad de orden 1 (Definición [Kle80, Theorem 20]) y por tanto

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(R^1\pi_*((E_S^{\otimes a})^{\oplus b}\otimes\omega_{C\times S/S}),\mathcal{O}_S)\quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{C\times S}}((E_S^{\otimes a})^{\oplus b}\otimes\omega_{C\times S/S},\omega_{C\times S/S})$$

Como $\omega_{C\times S/S}$ es un haz de línea, se obtiene que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{C\times S}}((E_S^{\otimes a})^{\oplus b}\otimes\omega_{C\times S/S},\omega_{C\times S/S})\quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{C\times S}}((E_S^{\otimes a})^{\oplus b},\mathcal{O}_{C\times S})$$

de donde se concluye. □

Observación 9.11. El álgebra $S^{\bullet}(\ {}^{1}R\ \pi\ ((E_U^{\otimes a})^{\oplus b}\ \otimes \omega)$ es una 1-pgg álgebra ya que todos los generadores tienen grado 1 y no hay relaciones entre ellos. Esta observación permite aplicar de nuevo el Corolario 8.31 para asegurar la existencia de una inmersión localmente cerrada de $\mathbf{SW}_{G,C}^{\infty,(a,b)}$ en un espacio proyectivo, de tal forma que el espacio de móduli $\mathbf{SW}_{G,C}^{\infty,(a,b)}$ es un abierto denso de un cerrado de un fibrado proyectivo.

Parte III

Apéndices

A. Teoría Geométrica de Invariantes

El presente apéndice está dedicado a las definiciones y conceptos claves de la Teoría Geométrica de Invariantes utilizados a lo largo de este trabajo. Las referencias utilizadas en este apéndice son [MF82, SdS01]. En lo sucesivo k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Sea G un grupo algebraico sobre k y sea X un k-esquema equipado con una G-acción por la derecha σ.

Definición A.1. Una pareja (Y, π) con Y un k-esquema y $\pi : X \to Y$ un morfismo de k-esquemas es un **cociente categorial** de X por G si

(i) π es G-invariante y,

(ii) para toda pareja (Z, ϕ) como antes satisfaciendo (i), existe un único morfismo $\xi : Y \to Z$ tal que $\phi = \xi \circ \pi$, es decir, si se verifica que

$$\mathrm{Hom}_G(X, Z) = \mathrm{Hom}(Y, Z)$$

donde $\mathrm{Hom}_G(X, Z)$ denota a la colección de morfismos G-invariantes de k-esquemas de X en Z. Si un cociente categorial existe entonces este es único salvo un único isomorfismo canónico.

Definición A.2. Una pareja (Y, π) con Y un k-esquema y $\pi : X \to Y$ un morfismo de k-esquemas es un **cociente geométrico** de X por G

(i) π es G-invariante,

(ii) π es epiyectivo y la imagen del morfismo

$$(p_1, \sigma) : X \times_{\mathrm{k}} G \to X \times_Y X$$

es $X \times_Y X$,

(iii) π es submersivo, es decir, un subconjunto $U \subseteq Y$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto,

(iv) el haz estructural de Y coincide con el subhaz de funciones G-invariantes de $\pi_*(O_X)$, es decir, $O_Y \quad \pi_*(O_X)^G$.

Definición A.3. Un **cociente bueno** para la acción de G en X es una pareja (Y, π) con $\pi : X \to Y$ un morfismo de esquemas verificando que:

(i) π es G-invariante;

(ii) π es afín y epiyectivo;

(iii) $O_Y = \pi_*(O_X)^G$;

(iv) si Z_1 y Z_2 son cerrados estables por la acción de G y disjuntos, entonces $\pi(Z_1)$ y $\pi(Z_2)$ son cerrados y disjuntos.

A este cociente también se le conoce como el cociente GIT. Se prueba que un cociente geométrico no es más que un cociente bueno que es también un espacio de órbitas.

Proposición A.4: [MF82, Proposition 0.1] *Todo cociente bueno es un cociente categorial.*

Definición A.5. Un cociente categorial $X \to Y$ (resp. geométrico, resp. bueno) se dice **universal**, si es estable por cambios de base, es decir, si para todo morfismo de k-esquemas $Y^I \hookrightarrow Y$, el producto fibrado $X \times_Y Y^I \to Y^I$ es un cociente categorial (resp. geométrico, resp. bueno).

A.1. Operador de Reynolds

La presente sección está dedicada al operador de Reynolds en el caso global, se utiliza repetidamente en la segunda parte de la memoria. Sea V un k-módulo.

Definición A.6. Se llama **acción** de G en V, ó estructura de G-módulo en V a cada morfismo de funtores

$$\varphi : \mathrm{G}^\bullet \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{k-lin}}(V)$$

La anterior condición equivale a dar para cada k-álgebra B una estructura de $G^\bullet(B)$-módulo en $V \otimes_{\mathrm{k}} B$.

Definición A.7. Se llama G**-módulo** a cada pareja (V, φ) formada por un k-módulo V y una acción de G en V. El G-módulo es **finito** cuando V es finito generado. V es simple o **irreducible** cuando no tiene sub-G-módulos no triviales. Un morfismo de G-módulos es un morfismo de k-módulos que conmuta con la acción de G.

Definición A.8. Dado un G-módulo V, se llamará G-**submódulo de invariantes** al sub-G-módulo de V formado por los elementos invariantes de V por la acción de G.

Definición A.9. Un un grupo algebraico $G = \mathrm{Spec}(A)$ es **linealmente semisimple** si todo G-módulo es semisimple, i.e, si es suma directa de módulos simples.

Teorema A.10: [SdS01, Teo. 7.1]Un grupo G es linealmente semisimple si y sólo si el funtor tomar invariantes es exacto.

Definición A.11. Sea G un grupo algebraico afín. Un **operador de Reynolds** en G es un retracto funtorial de la inclusión de invariantes, es decir un funtor que para cada G-módulo M da lugar a un retracto $R(M) : M \to M^G$.

Teorema A.12: *Un grupo es linealmente reductivo si y sólo si admite un operador de Reynolds.*

Teorema A.13: [SdS01, Theorem 7.1, Theorem 7.2] *Las siguientes condiciones son equivalentes*

(i) *G es reductivo*

(ii) *existe un único operador de Reynolds para G,*

(iii) *el funtor tomar invariantes $(-)^G$: **G-mód** $\to$ **G-mód** es exacto.*

La existencia del operador de Reynolds permite la construcción de cocientes categoriales para los esquemas afines.

Teorema A.14: [MF82, Theorem 1.1]*Sea A una* k*-álgebra, y sea G un grupo algebraico reductivo actuando en $X = \operatorname{Spec}(A)$. Si $\pi : X = \operatorname{Spec}(A) \to X//G := \operatorname{Spec}(A^G)$ es el morfismo inducido por la inclusión natural $A^G \hookrightarrow A$, entonces $(X//G, \pi)$ es un cociente universalmente bueno para la acción de G.*

A.1.1. Caso global

Definición A.15. Sean X un esquema, G un grupo algebraico actuando en X trivialmente, y F un haz de O_X-módulos cuasi-coherente. Dar una estructura de G-módulo en F es dar para cada abierto U de X una estructura de $G^\bullet(U)$-módulo en $F(U)$ compatible con los morfismos de restricción.

Teorema A.16: *Si G actúa trivialmente en un esquema X, y F es un $_X$-módulo cuasi-coherente con una estructura de G-módulo, entonces se tiene una acción natural inducida de G en el espacio afín asociado a F, es decir, de G en* $\operatorname{Spec}(S^\bullet_{O_X} F^\vee)$.

Demostración. Por la propiedad universal de los morfismos afines se tiene para cada X esquema $f : T \to X$ que

$$\operatorname{Hom}_X(T, \operatorname{Spec}(S^\bullet_{O_X} F^\vee)) \quad \operatorname{Hom}_{O_X-\mathrm{alg}}(S^\bullet_{O_X} F^\vee, f_* O_T).$$

La estructura de G-módulo de partida en F induce de modo canónico una estructura de G-módulo en $S^\bullet F^\vee$. Se concluye la demostración. $\square$

Definición A.17. Sea $\mathbf{QCoh}_G(\mathcal{O}_X)$ la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos cuasi-coherentes dotados de una acción de G. Se define el funtor **tomar invariantes** como:

$$(-)^G : \mathbf{QCoh}_G(\mathcal{O}_X) \to \mathbf{QCoh}(\mathcal{O}_X), \qquad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^G \tag{A.18}$$

donde $\mathcal{F}^G$ está definido en cada abierto U de X como

$$(\mathcal{F}^G)(U) := (\mathcal{F}(U))^G$$

Definición A.19. Sea G un grupo algebraico actuando trivialmente en un esquema X. Sea $\mathcal{F} \in \mathbf{QCoh}_G(\mathcal{O}_X)$. Un **operador de Reynolds** para $\mathcal{F}$ es un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos $R : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^G$ que es un retracto para la inclusión de invariantes. Se verifica que $R^2 = R$.

Teorema A.20: *Sea G un grupo algebraico reductivo actuando trivialmente sobre un* k*-esquema X. Para cada $\mathcal{F} \in \mathbf{QCoh}_G(\mathcal{O}_X)$ se tiene un operador de Reynolds $R : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^G$. El operador de Reynolds es único.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \in \mathbf{QCoh}_G(\mathcal{O}_X)$. Para cada abierto U de X se tiene, por el Teorema A.13, un único operador de Reynolds

$$R(U) : \mathcal{F}(U) \to (\mathcal{F}(U))^G$$

que es compatible con los morfismos de restricción debido a la unicidad. Se tiene por tanto que los operadores de Reynolds $R(U)$ extienden a un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^G$ que es un retracto de la inclusión de invariantes. La unicidad es inmediata por construcción. □

La existencia y unicidad del operador de Reynolds en el caso global (Teorema A.20), junto con la observación de que la condición de ser un cociente bueno es una cuestión local en la base, permiten dar la siguiente generalización del Teorema A.14, cuya demostración es ahora inmediata.

Teorema A.21: *Sea G un grupo algebraico reductivo actuando trivialmente en un* k*-esquema X, y sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{O}_X$-álgebra quasi-coherente con estructura de G-módulo. El morfismo* $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{A}^G)$ *inducido por la inclusión de los invariantes $\mathcal{A}^G \hookrightarrow \mathcal{A}$ es un cociente universalmente bueno.*

A.1.2. Estabilidad

Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango r. Por simplicidad en la exposición, denótese por $\pi : \mathrm{V}(\mathcal{E}) \to X$ al fibrado vectorial asociado a $\mathcal{E}$, este es, $\mathrm{Spec}(\mathrm{S}^\bullet(\mathcal{E}^\vee))$.

Definición A.22. Una **sección geométrica** de $V(E) \to X$ es un morfismo de esquemas $s : X \to V(E)$ satisfaciendo que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_X$. Al grupo de secciones se denotará por $\Gamma(X, V(E))$. Es inmediato que se tiene una biyección $H^0(X, E)$ $\Gamma(X, V(E))$.

Definición A.23. Una G-**linealización** en $V(E)$ es dar una G-acción σ en $V(\ )$ compatible con la G-acción σ en X. Dicho de otro modo, si el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd} V(E)\times G \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\pi\times \mathrm{Id}_G"'] & V(E) \arrow[d, "\pi"] \\ X\times G \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

Teorema A.24: *Dar una G-linealización en $V(E)$ equivale a dar un isomorfismo de $O_{G\times X}$-módulos*

$$\Phi : \sigma^* E \quad p^*_1 E$$

donde $p_1 : X \times G \to X$ es la proyección en el primer factor, tal que se verifica la condición de cociclo, es decir, si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} (\sigma\circ(\sigma\circ \mathrm{Id}_G))^*E \arrow[rr, "(\sigma\times \mathrm{Id}_G)^*\Phi"] \arrow[dr, "(\mathrm{Id}_X\times m)^*\Phi"'] & & (\sigma\circ p_{12})^*E \arrow[dl, dash, "p^*_{12}\Phi"] \\ & (p_1\circ p_{12})^*E & \end{tikzcd}$$

donde m es la multiplicación definida en G, y $p_{12} : X \times G \times G \to X \times G$ es la proyección en los dos primeros términos.

Demostración. Estándar. Consúltese por ejemplo [CG10, 3.17]. □

De la G-linealización Φ sobre E se obtiene una co-acción $\tilde{\sigma}$ de G en $H^0(X, E)$ dada por la composición de los siguientes morfismos

$$H^0(X,E) \xrightarrow{\sigma^*} H^0(X\times G, \sigma^* E) \xrightarrow{\Phi} H^0(X\times G, p^*_1 E) \quad H^0(G, O_G)\otimes_k H^0(X,E)$$

siendo el último isomorfismo viene dado por la fórmula de Kunneth [Kem80, Theorem 14].

Definición A.25. Sea E un haz localmente libre dotado de una G-linealización Φ. Una sección $s \in H^0(X, E)$ es G-invariante (con respecto la G-linealización considerada) si $\tilde{\sigma}(s) = 1 \otimes s$.

Equivalentemente, sea $\Sigma : V(E) \times G \to V(E)$ una G-linealización. Una sección geométrica $s \in \Gamma(X, V(E))$ es G-invariante (con respecto la linealización considerada), si para todo $g \in G$ se verifica que

$$s^g = \Sigma(-, g) \circ s \circ \sigma(-, g^{-1}) = s$$

Definición A.26. Sea L un haz de línea dotado de una G-linealización y sea $x \in X$ un punto cerrado.

- x es **semi-estable** con respecto L, si existe un natural n y una sección $s \in \mathrm{H}^0(X, L^n)^G$ invariante tal que el conjunto $X_s := \{y \in X : s(y) \neq 0\}$ es un abierto afín y $x \in X_s$.
- x es **estable** con respecto L si es semi-estable, la acción de G en X_s es cerrada, y el grupo de isotropía de x es finito.

Se denotará por $X^{ss}(L)$ al conjunto de puntos semi-estables de X con respecto a la G-linealización de L. Análogamente, se denotará por $X^s(L)$ al conjunto de puntos estables con respecto a la G-linealización de L. Las nociones introducidas de linealizaciones y estabilidad permiten la construcción de cocientes en geometría algebraica cuando un grupo algebraico reductivo actúa en X.

Teorema A.27: [MF82, Theorem 1.10] *Sea G un grupo algebraico reductivo actuando en* k*-esquema X. Sea L un haz de línea dotado de una G-linealización en X.*

a) Existe un cociente bueno universal (por ser k *de característica* 0*) para la acción de G*

$$\pi : X^{ss}(L) \to X^{ss}(L)//G.$$

Además, el morfismo π es afín y existe un haz de línea amplio M en $X^{ss}(L)//G$ tal que $\pi^* M = L^{\otimes n}_{|X^{ss}(L)}$ para un natural n. En particular, $X^{ss}(L)//G$ es un esquema cuasi-proyectivo.

b) Existe un abierto $X^s(L)//G$ de $X^{ss}(L)//G$ tal que $\pi^{-1}(X^s(L)//G) = X^s(L)$, y la restricción:

$$\pi_{|X^s(L)} : X^s(L) \to X^s(L)//G$$

es un cociente geométrico universal (por ser k *de característica 0) para la acción de G.*

B. Esquemas formales

En este apéndice se recopilan las definiciones y resultados básicos sobre esquemas formales que han sido utilizados en el capítulo 3. La referencia a seguir es [Gro71, 1.10].

Definición B.1. Sea A un anillo topológico.

- A se dice **linealmente topológico** si existe un sistema fundamental de entornos del cero formado por ideales.

- Si A es linealmente topológico, un ideal $I \subset A$ se dice que es un **ideal de definición** si I es abierto y para todo entorno V del 0 existe un $n > 0$ tal que $I^n \subset A$. Si existe un ideal de definición se dice que A es **preadmisible**.

- Un anillo A linealmente topológico se dice **admisible** si existe un ideal de definición y A es separado y completo.

Proposición B.2: [Gro71, 0.7.1.5] *Sea A un anillo linealmente topológico e I un ideal de definición, entonces todo ideal primo abierto contiene a I.*

Definición B.3. Sea A un anillo linealmente topológico admisible e $I \subset A$ un ideal de definición tal que $\{I^n\}_{n \geq}$ es un sistema fundamental de entornos del cero de una topología de Hausdorff completa. Se define el **espectro formal** de A con respecto I como el espacio anillado $(\mathrm{Spf}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}(A)})$ donde

$$\mathrm{Spf}(A) := \varinjlim_{n} \mathrm{Spec}(A/I^n)$$

siendo los morfismos del sistema inductivo los dados por las inmersiones cerradas de esquemas afines

$$\Theta_n : \mathrm{Spec}(A/I^n) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A/I^{n+1}) \tag{B.4}$$

y donde el límite se toma en la categoría de espacios anillados topológicos; el haz de anillos topológicos $\mathcal{O}_{\mathrm{Spf}(A)}$ se define como

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spf}(A)} := \varprojlim_{n} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/I^n)}$$

Obsérvese que el espectro formal tiene la propiedad universal del límite inductivo.

Observación B.5. Obsérvese en primer lugar que para todo $n \geq 1$, los esquemas afines $\mathrm{Spec}(A/I^n)$ tienen el mismo espacio topológico subyacente, y por la Proposición B.2, el espacio topológico Spec(A/I) no depende del ideal de definición I considerado.

Dados dos anillos linealmente topológicos admisibles, A y B, se tiene que todo morfismo continuo $A \to B$ induce un morfismo Spec(B) $\to$ Spec(A) de tal modo que la imagen de Spf(B) está contenida en Spf(A); y otro morfismo de haces de anillos topológicos entre los haces correspondientes. Se tiene por tanto definido un morfismo de espacios anillados

$$(\mathrm{Spf}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}(B)}) \to (\mathrm{Spf}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}(A)})$$

Definición B.6. Los morfismos de esquemas formales

$$(\mathrm{Spf}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}(B)}) \to (\mathrm{Spf}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}(A)})$$

se definen como los morfismos continuos de A en B.

Teorema B.7: *Sea A un anillo cualquiera. A admite una estructura de anillo linealmente topológico admisible considerando en A la topología discreta y como ideal de definición el* (0). *De este modo la categoría de anillos es una subcategoría fiel de la categoría de anillos linealmente topológicos admisibles. Equivalentemente, la categoría de esquemas afines es una subcategoría fiel de la categoría de esquemas formales afines de modo canónico.*

Sea A un anillo linealmente topológico completo y B, B^I dos A-álgebras linealmente topológicas. Los ideales $\mathrm{Im}(B \otimes_A I^I) + \mathrm{Im}(B^I \otimes_A I)$ donde I (resp. I^I) recorren los entornos abiertos de B (resp. B^I) inducen en $B \otimes_A B^I$ una estructura de A-álgebra linealmente topológica. El completado del producto tensorial $B \otimes_A B^I$ se denotará por $B \hat{\otimes}_A B^I$. Si además, A, B y B^I son admisibles, entonces el producto tensorial completado $B \hat{\otimes}_A B^I$ también tiene estructura de A-álgebra linealmente topológica admisible ([Gro71, Prop. 0.7.7.7]).

Teorema B.8: [Gro71, 1.10.7] *El producto fibrado en la categoría de esquemas formales afines existe. Dado un anillo A linealmente topológico admisible, y dos A-álgebras B y B^I linealmente topológicas admisibles, el producto fibrado viene dado por*

$$\mathrm{Spf}(B \hat{\otimes}_A B^I) = \mathrm{Spf}(B) \times_{\mathrm{Spf}(A)} \mathrm{Spf}(B^I)$$

Observación B.9. Todas las propiedades formales del producto fibrado de esquema [Gro71, 1.3.3] se siguen verificando para el producto fibrado de esquemas formales afines (consúltese [Gro71, 1.10.7]).

En la siguiente definición por espacio topólogicamente anillado entiéndase un espacio anillado de manera que el haz de anillos valora en la categoría de anillos linealmente topológicos.

Definición B.10. Un espacio topológicamente anillado se dice que es un **esquema formal** si todo punto tiene un entorno abierto isomorfo a un esquema formal afín.

Un **morfismo entre esquemas formales** es un morfismo de espacios topológicamente anillados de modo que el morfismo entre los haces de anillos es local. (Esta definición generaliza la de morfismo entre esquemas formales afines [Gro71, 1.10.2.2]).

Al igual que en el caso local, es sencillo probar que todo esquema tiene un esquema formal asociado de modo canónico, y que la categoría de esquemas es una subcategoría fiel de la categoría de esquemas formales. El siguiente resultado permite la construcción de ciertos límites inductivos de esquemas.

Definición B.11. Sea X un esquema formal. Un **ideal de definición** de X es un haz de ideales $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ tal que para todo abierto afín $U = \mathrm{Spf}(A) \subset X$, se tiene que $\mathcal{I}_{|U}$ es el hacificado de un ideal de definición J de A.

Definición B.12. Sea $X \to Y$ un morfismo de esquemas formales. El morfismo f se dice que es un **morfismo quasi-ádico** si $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{J}$ donde es un ideal de definición de Y, y $\mathcal{J}$ es un ideal de definición de X. Si se verifica la igualdad se dice que el morfismo es **ádico**.

Teorema B.13: [Gro71, 1.10.6.3] *Sea* X *un espacio topológico y sea* $\{\mathcal{O}_i, u_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ *un sistema proyectivo de haces de anillos sobre* X. *Sea* $\mathcal{J}_i$ *el núcleo del morfismo* $u_{i1} : \mathcal{O}_i \to \mathcal{O}_1$. *Supóngase que*

i) *El espacio anillado* $(X, \mathcal{O}_i)$ *es un esquema.*

ii) *Para todo* $x \in X$ *existe un* i *y un entorno abierto* U_i *de* x *tal que* $\mathcal{J}_i$ *es nilpotente.*

iii) *Los morfismos* u_{ij} *son epiyectivos.*

Sea $\mathcal{O}_X$ *el haz de anillos topológicos dado por el límite proyectivo de los* $\mathcal{O}_i$, *y se* $u_i : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_i$ *el morfismo canónico. Entonces*

a) $(X, \mathcal{O}_X)$ *es un esquema formal, que junto con los morfismos canónicos*

$$(X, \mathcal{O}_i) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

es el límite inductivo en la categoría de esquemas formales del sistema inductivo $\{(X, \mathcal{O}_i), u_{ij}\}$.

b) *Para todo i, los morfismos* u_i *son epiyectivos.*

c) *Los ideales* $\mathrm{Ker}(u_i)$ *son ideales de definición de* X, *y se verifica que* $\mathrm{Ker}(u_1) = \varprojlim \mathcal{J}_i$.

Sean $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Y}$ dos esquemas formales con $\mathcal{J}$ y $\mathcal{K}$ dos ideales de definición respectivamente. Supóngase que $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ es un morfismo quasi-adico, en el sentido de que $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$. Entonces, para todo entero positivo n se tiene que

$$f^*(\mathcal{K}^n)\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = (f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})^n \subset \mathcal{J}^n$$

Por el Teorema [Gro71, 10.5.6], f se obtiene como el límite inductivo de un sistema inductivo de morfismos de esquemas $f_n : X_n \to Y_n$ siendo $X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{J}^{n+1})$ e $Y_n = (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{K}^{n+1})$, es decir, los morfismos f_n satisfacen que los cuadrados

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r] \arrow[d, "f_m"'] & X_n \arrow[d, "f_n"] \\ Y_m \arrow[r] & Y_n \end{tikzcd}$$

son conmutativos para todo $m \leq n$.

Recíprocamente, dados dos sistemas inductivos de esquemas (X_n) y (Y_n), satisfaciendo las condiciones del Teorema B.13, considérense los esquemas formales asociados, $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Y}$ respectivamente. Por definición del límite inductivo, toda sistema inductivo de morfismos $(f_n : X_n \to Y_n)$ induce un morfismo de esquemas formales $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, que se define como el único morfismo de esquemas formales que hace los diagramas

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ Y_n \arrow[r] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

conmutativos.

Proposición B.14: [Gro71, Proposition 10.6.9] *Sean* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *dos esquemas formales localmente noetherianos* $\mathcal{J}$ *(resp.) un ideal de definición de* $\mathfrak{X}$ *(resp. un ideal de definición de* $\mathfrak{Y}$*). La correspondencia* $f \mapsto (f_n)$ *definida anteriormente, establece una biyección entre el conjunto de morfismos de esquemas formales* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *satisfaciendo que* $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{J}$ *y el conjunto de morfismos* $(f_n : X_n \to Y_n)$ *haciendo los diagramas*

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r] \arrow[d, "f_m"'] & X_n \arrow[d, "f_n"] \\ Y_m \arrow[r] & Y_n \end{tikzcd}$$

conmutativos.

Lema B.15: *Sea* $G = \mathrm{Spec}(A)$ *con* A *una* k*-álgebra cualquiera. Si* G *es un objeto grupo en la categoría de* k*-esquemas, esto es, si el funtor de puntos de* G *valora* *en la categoría de grupos, entonces, G como esquema formal considerando en A la topología discreta es un objeto grupo en la categoría de esquemas formales.*

Demostración. El enunciado es cierto si para todo esquema formal X, se verifica que el conjunto
$$G^\bullet(\mathrm{X}) := \mathrm{Hom}_{esq-form}(\mathrm{X}, G)$$
tiene estructura de grupo. Por la propiedad universal de los esquemas formales afines [Gro71, 10.4.6], se tiene que

$$\mathrm{Hom}_{esq-form}(\mathrm{X}, G) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{k}-cont}(\mathrm{k}[G], \Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}))$$

Como $\mathrm{k}[G]$ tiene la topología discreta, cualquier morfismo de k-álgebras es continuo, luego

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{k}-cont}(\mathrm{k}[G], \Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})) = \mathrm{Hom}_\mathrm{k}(\mathrm{k}[G], \Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}))$$

y como G era un objeto grupo en la categoría de esquemas se tiene que

$$\mathrm{Hom}_\mathrm{k}(\mathrm{k}[G], \Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(\Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})), G)$$

tiene estructura de grupo. □

Definición B.16. Sea G un grupo algebraico sobre k y X un esquema formal sobre Spf(k). Dar una G-acción en X es dar para cada esquema formal T una $G^\bullet(\mathrm{T})$-acción en $\mathrm{X}^\bullet(\mathrm{T})$.

C. La Grassmanniana Infinita

En este apéndice se construirá la Grassmanniana infinita algebraica utilizada a lo largo de esta memoria, así como alguna de sus propiedades más relevantes. Todo lo dicho aquí puede encontrarse en [ÁV96, PM98a] y en [ÁVMPPM96].

C.1. Subespacios conmensurables

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k.

Definición C.1. Dados A y B dos subespacios de V, se dice que son **conmensurables** , y se denotará por $A \sim B$, cuando $(A + B)/(A \quad B)$ sea un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Observación C.2. La anterior definición equivale a la existencia de subespacios F_1 y F_2 de V, de dimensión finita, verificando la fórmula: $A \oplus F_1 = B \oplus F_2$.

Sea V un k-espacio vectorial topológico con una base de entornos $\mathcal{B}$. Si S es un k-esquema, el $\mathcal{O}_S$-módulo $V_S := V \otimes_k \mathcal{O}_S$ tiene una topología natural; ésta es, la definida por la base de entornos $\{A_S : A \in \mathcal{B}\}$.

Definición C.3. Dado un k-espacio vectorial, la **topología discreta** es la definida por los subespacios vectoriales de dimensión finita como una base de entornos del (0). Se llamará **topología codiscreta** a la definida por los subespacios de codimensión finita como base de entornos del (0).

Observación C.4. A partir de ahora se fija un k-espacio vectorial topológico V, y una base de entornos del (0) dada por un conjunto de subespacios $\mathcal{B}$ tal que:

i) La topología es separada, y V es completo.

ii) Dados $A, B \in \mathcal{B}$, se tiene que $A \sim B$.

iii) Dados $A, B \in \mathcal{B}$, se tiene que $A \cap B$ y $A + B$ pertenecen a $\mathcal{B}$.

iv) Dado $A \in \mathcal{B}$, la base de la topología inducida en el cociente V/A contiene a la topología discreta.

Definición C.5. Dado un submódulo o un cociente de un $\mathcal{O}_S$-módulo topológico V con una base de entornos del (0), $\mathcal{B}$, se define su **completación** como la asociada a la base de entornos inducida por $\mathcal{B}$. El submódulo se dirá completo si el morfismo en su completación es isomorfismo.

Observación C.6. La completación de un subespacio vectorial A de V es

$$\hat{A} = \varprojlim_{B \in \mathcal{B}} A/(A \cap B).$$

Análogamente, para un sub-$\mathcal{O}_S$-módulo $A \subset V_S$ y un morfismo de k-esquemas $T \to S$, se define su completación relativa a T como

$$\hat{A}_T = \varprojlim_{B \in \mathcal{B}} ((A/A \cap B_T)).$$

Dado un subespacio $A \subset V$ y un k-esquema S, el morfismo canónico

$$(\hat{A})_S \to \widehat{(A_S)}$$

no es necesariamente un isomorfismo. Si por ejemplo S es el espectro de una k-álgebra finita, entonces el anterior morfismo es isomorfismo.

Ejemplo C.7. Sea k un cuerpo.

1. Sea V un k-espacio vectorial, y $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los subespacios de dimensión finita. Entonces se verifican todas las condiciones de la observación anterior.
2. Sea $V = k((t))$ y $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los subespacios conmnensurables con $V_+ = k[[t]]$. Se verifican todas las condiciones excepto la completitud.
3. Sea $V = k((t))$ y $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los subespacios conmensurables con el subespacio $V_+ = k[[t]]$ tales que contienen a $t^n k[[t]]$ para algún entero n. Entonces se verifican todas las condiciones.
4. Sea $V = k((t))$ y $\mathcal{B} = \{t^n k[[t]] : n \in \mathbb{Z}\}$. Se cumplen de nuevo todas las condiciones.

C.2. El funtor Gr(V)

El objetivo de esta sección es construir un k-esquema, que se llamará **Grassmanniana de** V, cuyos puntos racionales han de clasificar lo que se conoce por **subespacios discretos** de V, es decir, el conjunto

$$\{L \subset V \text{ tales que } L \cap A \text{ y } V/L + A \text{ son de dimensión finita para un } A \in \mathcal{B}\}.$$

Se definirá el funtor de puntos y se probará que es representable.

Definición C.8. Dados $L \subseteq \hat{V}_S$ y $A \subseteq V$ se dice que la pareja (L, A) cumple la condición $(*)$ (ó que A es un suplementario relativo de intersección localmente libre finita de L) si se verifica que

- $\hat{V}_S/(\hat{A}_S + L) = 0$,
- $\hat{A}_S \cap L$ es localmente libre de tipo finito.

Definición C.9. Dada la pareja (V, B) se define el funtor

$$\mathrm{Gr}(V) : \mathbf{Sch}_{\mathrm{k}} \to \mathbf{Sets}$$

que asigna a cada k-esquema S el conjunto

$$\mathrm{Gr}(V)(S) = \left\{ \begin{array}{l} \text{sub-}\mathcal{O}_S\text{-módulos de } \hat{V}_S \text{ cuasi-coherentes tales que para cada } s \in S \\ \text{se tiene que } L_{\mathrm{k}(s)} \subseteq \hat{V}_{\mathrm{k}(s)} \text{ y existe un entorno } U \text{ y un } A \in B \text{ tales} \\ \text{que } \hat{V}_U/(L+\hat{A}_U) = 0 \text{ y } L \cap \hat{A}_U \text{ es localmente libre de tipo finito.} \end{array} \right\}$$

Teorema C.10: [ÁVMPPM96, Theorem 2.13] *El funtor* $\mathrm{Gr}(V)$ *es representable por un esquema separado.*

D. Módulos de Schur

El presente apéndice está dedicado a los módulos de Schur utilizados en los capítulos 7 y 8 de esta memoria. Siguiendo el artículo [AB82] y el libro [Pro07, Chp. 9, §2], se comenzará con la definición de estos objetos así como algunas de sus propiedades. Posteriormente se demostrarán nuevos resultados orientados a los objetivos de la Parte II de esta memoria.

Definición D.1. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número natural. Una **partición** de p de longitud q es una colección de números naturales $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ con

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q > 0$$

y satisfaciendo que

$$|\lambda| := \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = p$$

Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$, se define su **partición traspuesta** $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ mediante la siguiente fórmula

$$\mu_j := \#\{\lambda_i \geq j : 1 \leq i \leq q\}$$

Sea R un anillo conmutativo, M un R-módulo libre, $p \in \mathbb{N}$ y una **partición** $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ de p. Denótese por $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ a la partición traspuesta. Los morfismos canónicos de R-módulos $a_{\mu_s} : \bigwedge^{\mu_s} M \hookrightarrow \mathrm{T}^{\mu_s} M$ dan lugar al morfismo

$$a_\mu = \otimes_s a_{\mu_s} : \bigwedge^{\mu_1} M \otimes \dots \otimes \bigwedge^{\mu_t} M \hookrightarrow \mathrm{T}^{\mu_1} M \otimes \dots \otimes \mathrm{T}^{\mu_t} M = \mathrm{T}^{p} M.$$

Por otro lado, a través de los operadores de simetrización, se tiene el siguiente morfismo canónico de R-módulos

$$s_\lambda : \mathrm{T}^p M = \mathrm{T}^{\lambda_1} M \otimes \dots \otimes \mathrm{T}^{\lambda_q} M \longrightarrow \mathrm{S}^{\lambda_1} M \otimes \dots \otimes \mathrm{S}^{\lambda_q} M$$

Definición D.2. El módulo de Schur (o módulo de Weil) asociado a los datos (M, λ) se define como la imagen del morfismo $e_\lambda := s_\lambda \circ a_\mu$, y será denotado por $\mathrm{S}^\lambda_R M$

Observación D.3. Por convenio, la única partición de $p = 0$ será denotada por (0) y se define como $\mathrm{S}^{(0)}_R R = R$.

La siguiente proposición recoge las propiedades básicas de los módulos de Schur.

Proposición D.4: *Los módulos de Schur satisfacen las siguientes propiedades*

(i) *Si λ es la partición que consiste en una única columna de longitud p,* $\lambda = (1, \overset{p}{\ldots}, 1)$, *entonces* $S_R^\lambda M = \bigwedge^p M$.

(ii) *Si* $\lambda = (p)$, *entonces* $S_R^\lambda M = S^p M$*; en particular,* $S_R^{(p)} R = R$.

(iii) *Si M es un R-módulo libre de rango m, entonces* $S_R^\lambda M = 0$ *para todo λ de longitud mayor que m,* $\mathrm{ht}(\lambda) > m$.

(iv) $S_R^\lambda R = 0$ *para todo* $\lambda \neq (0), (p)$.

(v) *El módulo de Schur $S_R^\lambda M$ puede ser definido para un R-módulo arbitrario.*

(vi) *La construcción del módulo de Schur $S_R^\lambda M$ es compatible con cambios de base del anillo R.*

(vii) *La construcción del módulo de Schur $S_R^\lambda M$ es funtorial en M.*

(viii) $S_R^\lambda M$ *es libre si M es libre.*

Demostración. Las demostraciones pueden ser encontradas en el tratamiento realizado en [AB82] y [Wey03]. □

Observación D.5. De las propiedades anteriores se sigue, que si X es un k-esquema y E es un $\mathcal{O}_X$-módulo quasi-coherente, entonces $S_{\mathcal{O}_X}^\lambda E$ está bien definido.

Por motivos de simplicidad en la exposición, cuando el anillo base sea claro y no se produzca confusión, se escribirá $S^\lambda M$. En lo sucesivo se supondrá que los anillos considerados son álgebras conmutativas sobre un cuerpo k de característica cero . El siguiente resultado, que se trata de una generalización de la fórmula de Cauchy, será esencial para los objetivos perseguidos en la segunda parte de esta memoria.

Teorema D.6 (The Standard Basis Theorem, [AB82, Theorem III.1.4]): *Sea R un anillo conmutativo de característica cero y M, N dos R-módulos libres finito generados. Entonces, existe un isomorfismo*

$$S^k(M \otimes_R N) \cong \bigoplus_{|\lambda|=k} \left(S^\lambda M \otimes_R S^\lambda N \right) . \tag{D.7}$$

de $\mathrm{Gl}(M) \times \mathrm{Gl}(N)$ *módulos.*

Merece la pena observar que debido a que $S_R^\lambda M = 0$ para $\mathrm{ht}(\lambda) > \mathrm{rk}\, M$, la suma directa en (D.7) recorre aquellas particiones λ con $\mathrm{ht}(\lambda) \leq \min(m, n)$. Esta observación sigue siendo válida en los resultados siguientes.

Lema D.8: *Sean R y R^I dos* k*-álgebras conmutativas de característica cero, $R \to R^I$ un morfismo de* k*-álgebras, y M un R-módulo libre finito generado. Además, sea G un grupo algebraico lineal semisimple sobre* k *dotado de una representación fiel $\rho : G^{\bullet}{}_R \hookrightarrow \mathrm{Gl}(M)$. Entonces, existe un isomorfismo*

$$\mathrm{S}^{\lambda}_{R^I}(M \otimes_R R^I)^{G_{R^I}} \quad (\mathrm{S}^{\lambda}_R M)^{G_R} \otimes_R R^I.$$

Demostración. Denótese por R al operador de Reynolds correspondiente a la acción de G_R en $\mathrm{S}^{\lambda}_R M$. Recuérdese que R, que es único por ser G reductivo, puede ser definido como un retracto de la inclusión natural $i : (\mathrm{S}^{\lambda}_R M)^{G_R} \hookrightarrow \mathrm{S}^{\lambda}_R M$.

Por otro lado, obsérvese que la composición $i \circ R : \mathrm{S}^{\lambda}_R M \to \mathrm{S}^{\lambda}_R M$ es un morfismo de R-módulos G_R-equivariante. El operador de Reynolds es compatible con cambios de base, luego $R \otimes 1$ es el operador de Reynolds de $(\mathrm{S}^{\lambda}_R M)\ {}_R\, R^I$. Teniendo en cuenta que tomar invariantes es exacto por ser G_R reductivo; y que los módulos de Schur son compatibles con cambios de base (Proposición D.4 *vi*), se sigue que

$$\mathrm{S}^{\lambda}_{R^I}(M \otimes_R R^I)^{G_{R^I}} = \mathrm{Im}((i \otimes 1) \circ (R \otimes 1)) \quad \mathrm{Im}(i \circ R) \otimes 1 = (\mathrm{S}^{\lambda}_R M)^{G_R} \otimes_R R^I.$$

□

Lema D.9: *Sean R y R^I dos* k*-álgebras conmutativas de característica cero, $R \to R^I$ un morfismo de* k*-álgebras, M un R-módulo libre finito generado y N un R^I-módulo libre finito generado. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un isomorfismo*

$$\mathrm{S}^k_{R^I}(M \otimes_R N)^{G_R} \quad \bigoplus_{|\lambda|=k} \mathrm{S}^{\lambda}_R M^{G_R} \otimes_{R^I} \mathrm{S}^{\lambda}_{R^I} N. \tag{D.10}$$

Si N^I es un submódulo libre finito generado de N se verifica que

$$\mathrm{S}^{\lambda}_R M^{G_R} \otimes_{R^I} \mathrm{S}^{\lambda}_{R^I} N \ \cap \mathrm{S}^{\bullet}_{R^I}(M \otimes_R N^I) = \ \mathrm{S}^{\lambda}_R M^{G_R} \otimes_{R^I} \mathrm{S}^{\lambda}_{R^I} N^I \tag{D.11}$$

Demostración. El TeoremaD.6 implica que

$$\mathrm{S}^k_{R^I}(M \otimes_R N)^{G} \quad \bigoplus_{|\lambda|=k} \mathrm{S}^{\lambda}_{R^I}(M \otimes_R R^I) \otimes_{R^I} \mathrm{S}^{\lambda}_{R^I} N^{\ G}.$$

Observando que el anterior isomorfismo es un isomorfismo de $\mathrm{GL}(M \otimes_R R^I) \times \mathrm{GL}(N)$-módulos, que G_R actúa en M, que G_R actúa en N de modo trivial, y que $\mathrm{S}^{\lambda}_{R^I} N$ es un R^I-module libre finito generado (Proposición D.4 *viii*)), se tiene que el término de la derecha de la anterior igualdad es isomorfo a

$$\bigoplus_{|\lambda|=k} \mathrm{S}^{\lambda}_{R^I}(M \otimes_R R^I)^{G_R} \otimes_{R^I} \mathrm{S}^{\lambda}_{R^I} N$$

Aplicando D.8, se obtiene (D.10). Finalmente, la ecuación (D.11) is una generalización inmediata de [Pro07, Chap. 6, Eq. 6.3.3]. □

Lema D.12: *Sea M un* k*-espacio vectorial de dimensión m y G un grupo algebraico lineal semisimple sobre* k *junto con una representación fiel $\rho : G^{\bullet} \hookrightarrow SL(M)$. Entonces, para $n > m$, el anillo de invariantes $\left(S^{\bullet}_{\mathrm{k}}(M^{\oplus n})\right)^G$ está generado, bajo la acción de* $\mathrm{Gl}(\mathrm{k}^{\oplus n})$*, por los invariantes de m copias de M; es decir, por $\left(S^{\bullet}_{\mathrm{k}}(M^{\oplus m})\right)^G$.*

Además, existe una constante d, dependiendo de M, G y ρ pero no de n, tal que $\left(S^{\bullet}_{\mathrm{k}}(M^{\oplus n})\right)^G$ está generado por sus componentes de grado menor o igual que d.

Demostración. La primera parte es [Pro07, Chap. 11, Thm 1]. En cuanto a la cota, basta con observar que la acción de $\mathrm{Gl}(\mathrm{k}^{\oplus n})$ preserva el grado de los elementos de $\left(\mathrm{S}^{\lambda}_{\mathrm{k}} M\right)^G \otimes \mathrm{S}^{\lambda}_{\mathrm{k}}(\mathrm{k}^{\oplus m})$. □

Bibliografía

[AB82] A. Akin and D. Buchsbaum. Schur functors and schur complexes. Advances in Mathematics, 44:207–278, 1982.

[Ati57] M. F. Atiyah. Vector bundles over an elliptic curve. Proceedings of the London Mathematical Society, s3–7:414–452, 1957.

[ATJLPR09] L. Alonso Tarrío, A. Jeremías López, and M. Pérez Rodríguez. Local structure theorems for smooth maps of formal schemes. Journal of Pure and Applied Algebra, 213(7):1373–1398, 2009.

[ÁV96] A. Álvarez Vázquez. Estructuras aritméticas de las curvas algebraicas, tesis doctoral, salamanca. 1996.

[ÁVMPPM96] A. Álvarez Vázquez, J . M. Muñoz Porras, and F. J. Plaza Martín. The algebraic formalism of soliton eqquation over arbitrary base fields. In Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, editor, Workshop on Abelian Varieties and Theta Functions. 1996.

[Bea18] A. Beauville. Limits of the trivial bundle on a curve. Épijournal de Géométrie Algébrique, 2:pp. 6, 2018.

[Bis94] Ramanan S. Biswas, I. An infinitesimal study of the moduli of hitchin pairs. Journal of the London Mathematical Society, 49(2):219–231, 1994.

[BLS98] A. Beauville, Y. Laszlo, and C. Sorger. The picard group of the moduli of g-bundles on a curve. Compositio Mathematica, 112(2):183–216, 1998.

[Bor91] A. Borel. Linear Algebraic Groups, volume 126 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1991.

[Bri11] M. Brion. On automorphism groups of fiber bundles, 2011.

[BZF01] D. Ben-Zvi and E. Frenkel. Spectral curves, opers and integrable systems. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 94:87–159, 2001.

[CFBD14] I. çCiocan-Fontanine, K. Bumsig, and M. Davesh. Stable quasimaps to git quotients. Journal of Geometry and Physics, 75:17–47, 2014.

[CG10] N. Chriss and V. Ginzburg. Representation Theory and Complex Geometry. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, 2010.

[dCP76] C. de Concini and C. Procesi. A characteristic free approach to invariant theory. Advances in Math., 21(3):330–354, 1976.

[Der01] H. Derksen. Polynomial bounds for rings of invariants. Proc. Amer. Math. Soc., 129(4):955–963, 2001.

[Der04] H. Derksen. Degree bounds for syzygies of invariants. Adv. Math., 185(2):207–214, 2004.

[Dol] I. Dolgachev. Weighted projective varieties. In J.B. Carrell, editor, Group Actions and Vector Fields, Lecture notes in mathematics.

[Dré89] Narasimhan M. S. Drézet, J. M. Gropue de picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques. Inventiones Mathematicae, 97:53–94, 1989.

[DS95] V. Drinfeld and C. Simpson. b-structures on g-bundles and local triviality. Mathematical Research Letters, 2(6):823–239, 1995.

[Eis05] D. Eisenbud. The geometry of syzygies, volume 229 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2005. A second course in commutative algebra and algebraic geometry.

[Fal03] G. Faltings. Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles. Journal of the European Mathematical Society, 005(1):41–68, 2003.

[FGI+05] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. L. Kleiman, N. Nitsure, and A. Vistoli. Fundamental Algebraic Geometry: Grothendieck's FGA Explained, volume 123 of Mathematical Surveys and Monographs. Amer. Math. Soc, 2005.

[FM00] R. Friedman and J. W. Morgan. Holomorphic principal bundles over elliptic curves ii: The parabolic construction. J. Diff. Geom, 2:301–379, 2000.

[FM18] R. Friedman and J. W. Morgan. Holomorphic principal bundles over elliptic curves iii. arXiv:math.AG/0108104, page pp. 76, 2018.

[FMW98] R. Friedman, J. W. Morgan, and E. Witten. Principal g-bundles over elliptic curves. Mathematical Research Letters, 5:97–118, 1998.

[Fre07] E. Frenkel. Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory, pages 387–533. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007.

[GD70] A. Grothendieck and M. Demazure. Sêminaire de Gêomêtrie Algêbrique du Bois Marie - 1962-64 - vol. 1, volume 151 of Lecture Notes in Mathematics, pages xv+564. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1970.

[GGHSMPPM12] E. Gómez Gonzaález, D. Hernández Serrano, J . M. Muñoz Porras, and F. J. Plaza Martín. Geometric approach to kac-moody and virasoro algebras. Journal of Geometry and Physics, 62(9):1984–1997, 2012.

[Gie77] D. Gieseker. On the moduli of vector bundles on an algebraic surface. Annals of Mathematics, 106(1):45–60, 1977.

[Gir71] J. Giraud. Cohomologie non abélienne, volume 179 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[GLSS08] T.L. Gómez, A. Langer, A.H.W. Schmitt, and I. Sols. Moduli spaces for principal bundles in arbitrary characteristic. Advances in Mathematics, 219(4):1177–1245, 2008.

[Gro57] A. Grothendieck. Sur la classification de fibrés holomorphes sur la sphére de riemann. American Journal of Mathematics, 79, 1957.

[Gro58] A. Grothendieck. Torsion homologique et sections rationnelles. Séminaire Claude Chevalley, 3, 1958. talk:5.

[Gro61a] A. Grothendieck. éléments de géométrie algébrique : Iii. étude cohomologique des faisceaux cohérents, première partie. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 11:5–167, 1961.

[Gro61b] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques clas de morphismes. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 8:5–222, 1961.

[Gro62] A. Grothendieck. Fondements de la géométrie algébrique. Séminaire Bourbaki. Société mathématique de France, 1962.

[Gro65] A. Grothendieck. éléments de géométrie algébrique : Iv. étude locale des schémas et des morphismes de schémas, seconde partie. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 24:5–231, 1965.

[Gro66] A. Grothendieck. éléments de géométrie algébrique : Iv. étude locale des schémas et des morphismes de schémas, troisième partie. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 28:5–255, 1966.

[Gro71] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. I.le langage des schémas. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 1971.

[GS01] T. L. Gómez and I. Sols. Stable tensors and moduli space of orthogonal sheaves. arXiv:math/0103150v4, 2001.

[GS02] T. L. Gómez and I. Sols. Moduli space of principal sheaves over projective varieties. Annals of Mathematics, 161:1037–1092, 2002.

[GT10] U. Görtz and W. Torsten. Algebraic Geometry I: Schemes with examples and exercises. Advances Lectures in Mathematics. Vieweg + Teubner, 2010.

[Har13] R. Hartshorne. Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[Hil02] D. Hilbert. Mathematical problems. Bulletin of the American Mathematical Society, 8(10):437–479, 1902.

[HS08] D. Hernández Serrano. Pares de Higgs, Grassmaniana Infinita y Sistemas Integrables (Tesis Doctoral). Repositorio Gredos de la Universidad de Salamanca, 2008.

[Kem80] G. R. Kempf. Some elementary proofs of basic theorems in the cohomology of quasi-coherent sheaves. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 10(3):637 – 646, 1980.

[Kle80] S. L. Kleiman. Relative duality for quasi-coherent sheaves. Compositio Mathematica, 41(1):39–60, 1980.

[KM76] F. Knudsen and D. Mumford. The projectivity of the moduli space of stable curves i: preliminaries on det and div. Math. Scand, 39:19–55, 1976.

[Kri77] I. M. Krichever. Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations. Russian Math. Surveys, 32(6):19–95, 1977.

[Las97] Y. Laszlo. Linearizations of group stack actions and the picard group of the moduli of sl_r/μ_s-bundles on a curve. Bulletin de la S.M.F, 125(4):529–545, 1997.

[Lau87] G. Laumon. Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions. Duke Mathematical Journal, 54(2):309 – 359, 1987.

[Laz69] D. Lazard. Autour de la platitude. Bulletin de la Société Mathématique de France, 97:81–128, 1969.

[Laz04] R. K. Lazarsfeld. Positivity in Algebraic Geometry I: Classical Setting: Line Bundles and Linear Series. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer, 2004.

[Mar77a] M. Maruyama. Moduli of stable sheaves, i. Journal of Mathematics of Kyoto University, 17:91–126, 1977.

[Mar77b] M. Maruyama. Moduli of stable sheaves, ii. Journal of Mathematics of Kyoto University, 17:91–126, 1977.

[MF82] D. Mumford and J. Fogarty. Geometric Invariant Theory, 2n ed. Springer-Verlag Berlin Heidleberg New York,, 1982.

[Mil80] J. S. Milne. Étale Cohomology, volume 33 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1980.

[Mil17] J. S Milne. Algebraic Groups: The Theory of Group Schemes of Finite Type over a Field. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1 edition, 2017.

[MPPM90] J. M. Muñoz Porras and F.J. Plaza Martín. Equations of the moduli of pointed curves in the infinite grassmannian. J. Differential Geom., 51:431–469, 1990.

[MPPM19] J. M. Muñoz Porras and F. J Plaza Martín. Weil reciprocity law and the theorem of residues, 2019.

[Mul84] M. Mulase. Cohomological structure in soliton equations and Jacobian varieties. Journal of Differential Geometry, 19(2):403 – 430, 1984.

[Mul90] M. Mulase. Cateogry of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional grassmannians. Int. J. Math., 1:293–342, 1990.

[Mum63] D. Mumford. Projective Invariants of Projective Structures and Applications, pages 526–530. 01 1963.

[Nag60] M. Nagata. On the fourteenth problem of hilbert. Proc. Internat. Congress Math., 8(10), 1960.

[Nag63] M. Nagata. Invariants of groups in an affine ring. Journal of Mathematics of Kyoto University, 3(3):369–378, 1963.

[Neu11] Frank Neumann. Publicaçoes Matemáticas. IMPA, 2011.

[Ols16] M. Olsson. Algebraic Spaces and Stacks, volume 62 of Colloquium Publications. American Mathematical Society, 2016.

[Pee11] I. Peeva. Graded syzygies, volume 14 of Algebra and Applications. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[PM98a] F. J. Plaza Martín. Estudio algebraico de las ecuaciones kp: Ecuaciones de las variedades del móduli de curvas y de variedades de prym, tesis doctoral, salamanca. 1998.

[PM98b] F. J. Plaza Martín. Prym varieties and the infinite grassmannian. International Journal of Mathematics, 9(1):75–93, 1998.

[PM00] F. J. Plaza Martín. The grassmannian of $k((z))$: Picard group, equations and automorphism. Math. Kyoto Univ., 40(3):567–580, 2000.

[PR08] G. Pappas and M. Rapoport. Twisted loop groups and their affine flag varieties. Advances in Mathematics, 219(1):118–198, 2008.

[Pro07] C. Procesi. Lie Groups: An approach through invariants and representations. Springer-Verlag New York, 2007.

[PS88] A. Pressley and G. Segal. Loop Groups. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1988.

[Ram96a] A. Ramanathan. Moduli for principal bundles over algebraic curves: I. Proc. Indian. Acad. Sci, 106(3):301–328, 1996.

[Ram96b] A. Ramanathan. Moduli for principal bundles over algebraic curves: Ii. Proc. Indian. Acad. Sci, 106(4):421–449, 1996.

[Ray70] M. Raynaud. Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogénes, volume 119 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Rus14] N. Rustom. Generators of graded rings of modular forms. Journal of Numer Theory, 138:97–118, 2014.

[Rus16] N. Rustom. Generators and relations of the graded algebra of modular forms. The Ramanujan Journal, 39, 2016.

[Ryd10] D. Rydh. Submersions and effective descent of étale morphisms. Bulletin de la Société Mathématique de France, 138(2):181–230, 2010.

[Sch02] A. H. W. Schmitt. Singular principal bundles over higher-dimensional manifolds and their moduli spaces. International Mathematics Research Notices, 2002:1183–1210, 2002.

[Sch08] A. H. W. Schmitt. Geometric Invariant Theory and Decorated Principal Bundles. EMS, 2008.

[SdS01] C. Sancho de Salas. Grupos algebraicos y teoría de invariantes. Sociedad Matemática Mexicana, 2001.

[Ser55] J. P. Serre. Faiseaux algébriques coherenets. Annals of Mathematics, Second Series, 61(2):197–228, 1955.

[Ser10] E. Sernesi. Deformations of Algebraic Schemes. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1st edition. edition, 2010.

[Ses67] C. S. Seshadri. Space of unitary vector bundles on a compact riemann surface. Annals of Mathematics, 85(2):303–336, 1967.

[Ses77] C. S. Seshadri. Geometric reductivity over aribtrary base. Advances in Mathematics, 26(3):225–274, 1977.

[Sha70] R. T. Shannon. The rank of a flat module. Proceedings of the American Mathematical Society, 24(3):452–456, 1970.

[Shi86] T. Shiota. Characterization of jacobian varieties in terms of soliton equations. Inventiones mathematicae, 83:333–382, 1986.

[Sim94] C. Simpson. Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety i. Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 79:47–129, 1994.

[Sor00] C Sorger. Lectures on moduli of principal g-bundles over algebraic curves, Aug 2000.

[SS83] M. Sato and Y. Sato. Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional grassmann manifold. In H. Fijita, P. D. Lax, and G. Strang, editors, Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science. Proceedings of the U.S-Japan Seminar, volume 5 of Lecture Notes in Num. App. Anal., pages 259–271. North-Holland-Amsterdam, 1983.

[Sta18] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.

[SW85] G. Segal and G. Wilson. Loop groups and equations of kdv type. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 61:5–65, 1985.

[Sza09] T. Szamuely. Galois groups and Fundamental groups, volume 117 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2009.

[Tel98] C. Teleman. Borel-weil-bott theory on the moduli stack of g-bundles over a curve. Inventiones mathematicae, 134:1–57, 1998.

[TY05] P. Tauvel and R. W. T Yu. Lie Algebras and Algebraic Groups. Springer monographs in mathematics. Springer, 1 edition, 2005.

[Uen92] K. Ueno. Infinitesimal deformation of principal bundles, determinant bundles and affine lie algebras. Instituto de Investigación de Ciencias Matemáticas, Universidad de Kyoto, pages 36–41, 1992.

[Wan11] J. Wang. The moduli stack of G-bundles. 2011.

[Wey66] H. Weyl. The classical groups: Their invariants and representations. Princeton University Press, 1966.

[Wey03] J. Weyman. Cohomology of Vector Bundles and Syzygies. Cambridge University Press, 2003.

Índice Alfabético