DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA EVOLUTIVA
Y DE LA EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

ARITMÉTICA COGNITIVA.
EL ROL DEL FORMATO EN EL CÁLCULO SIMPLE

DOCTORANDA:

Laura Matilla Cordero

TRABAJO DIRIGIDO POR:

José Orrantia Rodríguez

José David Múñez Méndez

Salamanca, septiembre de 2021

Esta investigación ha sido posible gracias al apoyo de la Universidad de Salamanca en beneficio de la ayuda de la Universidad de Salamanca cofinanciada por el Banco Santander y concedida a la doctoranda en la convocatoria de 2017, por la que se conceden ayudas para contratos predoctorales para la Formación del Profesorado Universitario

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

A mis padres, Paco y Yeyi.

Por regalarme la libertad de elegir mi camino

y darme su apoyo para recorrerlo.

AGRADECIMIENTOS

La realización de esta Tesis Doctoral ha sido un proceso largo y no siempre agradecido, pero he contado en todo momento con el apoyo de muchas personas que me han acompañado y ayudado de todas las maneras posibles. Puesto que no puedo recoger a todos ellos en unas pocas líneas, doy las gracias a todas aquellas personas que han compartido tiempo conmigo durante mi etapa de doctorado y han contribuido a que mis días fuesen más alegres, interesantes y divertidos. Unas "gracias" muy especiales tengo que dárselas:

A mis padres, porque ellos han hecho que yo sea quien soy ahora, me han apoyado de una manera extraordinaria, y no solo en la tesis, sino en otros muchos aspectos. Aunque muchas veces desde la distancia, siempre han hecho lo imposible para que yo estuviese bien y para facilitarme la vida, lo que me ha permitido continuar en este camino académico. Así que una gran parte de esta tesis es de ellos. A mi hermana, porque siempre ha sido mi otra mitad, mi gran soporte y mi mejor amiga. Es a quien recurro y donde encuentro cobijo, de manera que otra gran parte de este trabajo es de ella. A Fede (*cuñi*) que es otro hermano para mí y mi consejero en muchísimos momentos importantes. Y a Laura, mi sobrina, que con solo 2 años se ha convertido en uno de los motores principales que me han ayudado a llevar a cabo este trabajo. Siempre me contagia de su energía genuina que es la que me ha dado fuerza para continuar en los momentos difíciles y me ha enseñado más de lo que se puede escribir en una tesis.

A mis directores porque gracias a ellos sé todo lo que sé ahora sobre lo que es investigar. A los dos los conocí hace muchísimos años cuando yo ni siquiera sabía que era "el doctorado". Gracias a ellos elegí el camino que me ha hecho llegar hasta aquí. Gracias Putxo por enseñarme lo que es la constancia en el trabajo, la dedicación, el esfuerzo. Siempre has sido un ejemplo de dedicación y de trabajo constante, y, aunque como modelo has puesto el estándar muy alto, eso me ha ayudado y motivado a superarme a mí misma en muchísimas ocasiones. Pero no solo de trabajo me has enseñado, sino de cómo el equilibrio es fundamental para la supervivencia en la universidad y por eso me has dado momentos de recreos, de vinos y de fiestas que te agradezco enormemente. Gracias a David porque este trabajo no sería posible sin tu ayuda, tu enorme trabajo y tus didácticas explicaciones. Me has enseñado desde cómo "limpiar datos" cuando yo estaba empezando este camino, hasta cómo plantear muchas cuestiones importantes de esta tesis. Siempre estaré enormemente agradecida.

A Charo, porque gracias a ti, compañera y amiga, los momentos malos siempre han sido menos malos porque los hemos gestionado entre las dos, y los momentos buenos siempre han sido mucho mejores porque los hemos compartido y disfrutado las dos. Desde el día en que te vi por primera vez en el despacho supe que llegabas para mejorar mi vida y, efectivamente, así ha sido. Mi sorpresa es que no solo la has mejorado en el ámbito académico, sino que también la has enriquecido en lo personal. ¡Somos una!

A mis amigos más cercanos, los que han estado desde mis comienzos en el mundo académico y me han acompañado durante todos estos años. A mi primo Álex, que es mucho más que un primo con el que comparto genes Matilla. Es un gran amigo, y aunque sea el más nihilista que tengo, nunca ha dejado de preocuparse por mí y de hacerme reír. A Arancha y a Pablo que, aunque la pandemia no nos haya dejado hacer tantos planes, siempre habéis alegrado mis veranos y vacaciones en el pueblo, sois mis capricornios favoritos. A Vero, por tus cocidos, tus suculesntas, tus astros y por estar siempre ahí cuando he necesitado un paseo por los “Jesu” durante la tesis. Espero que nuestros planes ahora empiecen a ser más diversos. A Natalia, porque compartimos mucho más que el amor por ser tías. Pasar tiempo contigo es tener un montón de cosas de las que hablar y el tiempo nunca es suficiente. A María, que comenzó siendo una compañera recogiendo datos y ahora estoy deseando volver a compartir algún viaje contigo. Por último, pero no por ello menos importante, Víctor y David, que habéis pasado de ser unos casi-desconocidos con los que empezamos a tomar café y ahora sois nuestro plan A. Hemos compartido infinidad de momentos que me han alegrado día tras día. Víctor con su humor sarcástico y su capacidad de dar consejos se ha convertido en el oráculo del grupo. David siempre pragmático y muy centrado en el fútbol, pero jamás me ha negado un favor y es alguien con quien sé que puedo contar.

Y finalmente, muchas gracias a las personas y profesores de la Universidad que de alguna manera me han acompañado en este camino, muchísimas gracias. También a todos los participantes, alumnos de la Facultad de Educación que se han prestado de manera voluntaria a realizar infinidad de pruebas y tareas sin las que esta Tesis no hubiese sido posible.

MCHÍSIMAS GRACIAS A TODOS

ÍNDICE DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

Esta Tesis Doctoral se enmarca en el ámbito de estudio de la "cognición numérica" (también denominada "aritmética cognitiva" o "cognición matemática") y más específicamente, dentro del estudio de las diferencias individuales en ejecución en aritmética simple en adultos. Aunque es mucho el camino que queda por recorrer en este ámbito de investigación, el campo de estudio es extenso ya que esta área de conocimiento ha suscitado mucho interés dentro de la comunidad científica sobre todo en los últimos años. Y no es de extrañar puesto que las matemáticas y el procesamiento numérico invaden nuestro día a día, lo que hace que nuestro cerebro procese y operare con magnitudes numéricas de forma muy habitual. Desde este ámbito de estudio, se ha tratado de dar respuesta a numerosas preguntas como: ¿cómo representamos los números? ¿de qué manera operamos con ellos cuando tenemos que calcular? ¿cuáles son los precursores tempranos del procesamiento numérico y del cálculo? ¿existe una base biológica del procesamiento numérico y la aritmética? y otras muchas cuestiones similares. Con el fin de responder a estas diversas cuestiones, durante las últimas décadas, desde el campo de la aritmética cognitiva se ha intentado analizar los procesos básicos implicados en el cálculo simple y en la resolución de operaciones y problemas sencillos (p. ej., "4 + 5" o "¿cuántas canicas tiene Ana ahora si comenzó la partida con 4 y ganó 5?"). Así, muchos trabajos se han planteado como objetivo entender el procesamiento numérico y los procesos que se llevan a cabo cuando calculamos, con el fin de analizar las habilidades aritméticas básicas.

Este campo de investigación es extensamente amplio precisamente por la relevancia que tiene la aritmética en la vida y desarrollo de las personas desde las primeras etapas educativas hasta la vida adulta. Una de las habilidades fundamentales para conseguir una adecuada adaptación a nuestro entorno cultural cargado de información cuantitativa, es la capacidad de manejar cantidades numéricas. Las habilidades numéricas han jugado un papel crucial a lo largo de la historia de la humanidad permitiendo la adaptación de las civilizaciones, culturas y sociedades. Manejar y comparar cantidades permitió a los humanos primitivos juzgar si merecía la pena trepar un árbol para conseguir sus frutos, o decidir si se encontraban en situación de ventaja al enfrentarse a una manada de lobos. Un cálculo erróneo o una deficiente habilidad para procesar estas magnitudes numéricas ponía en grave peligro la supervivencia del grupo. Si esto ha sido de ayuda para el progreso de nuestra especie, cabría pensar que el resto de los animales también se han servido de estas habilidades para sobrevivir y adaptarse al medio. Pensemos, por ejemplo, en un depredador marino al detectar varios bancos de peces; tendría más sentido atacar al que posea mayor número de potenciales presas pues la tasa de éxito será más alta si el número de peces perseguidos es mayor. Por lo tanto, el pensamiento numérico ha sido crucial en el desarrollo y evolución no solo de la especie humana, sino también del resto de especies animales. Estas habilidades no solo han permitido a los humanos sobrevivir como especie, sino que de manera individual también contribuyen al desarrollo y adaptación de las personas a su entorno. La importancia de entender y saber operar con números es más que evidente en una sociedad como en la que vivimos. Comprender cómo funcionan los números nos permite gestionar muchas tareas de la vida cotidiana, así como plantear y responder a cuestionas tan habituales como ¿qué edad tienes?, ¿cuánto cuesta esto?, ¿qué temperatura hace?, ¿qué hora es? En los contextos sociales y de ocio manejamos constantemente cantidades y números simbólicos, lo que nos lleva a inferir que un buen rendimiento en estas habilidades no solo nos lleva a una mejor adaptación al medio, sino también una mejor adaptación sociocultural. Pero no solo la capacidad de procesar numerosidades tiene una gran importancia en nuestro desarrollo como especie, sino que muchos estudios han demostrado que las habilidades aritméticas son un importante predictor del bienestar y del éxito económico y social de las personas.

Pero es en el ámbito educativo y académico donde el pensamiento numérico y la capacidad de calcular con numerosidades adquieren una posición de especial importancia a través de una de las áreas más relevantes del currículo académico: las matemáticas. Las matemáticas son un área de conocimiento que no solo permite a los estudiantes operar con magnitudes simbólicas, sino que les proporciona las bases fundamentales para su desarrollo intelectual. Operar con números dentro del contexto de las matemáticas implica poner en marcha procesos de razonamiento y pensamiento abstracto además del uso de la lógica; habilidades imprescindibles no solo para el progreso académico en sus diferentes áreas, sino también para una mejor adaptación en el ámbito profesional y en la vida cotidiana.

Puesto que operar y entender los números es una parte central de nuestra existencia cotidiana, es comprensible que un mayor entendimiento sobre cómo desarrollamos esta capacidad para procesar y operar con números se hayan convertido en el objetivo principal de muchas investigaciones en los últimos años. No obstante, pese a que las matemáticas son una de las ciencias más antiguas, el campo de investigación de la cognición numérica y matemática es relativamente joven por lo que aún hay muchos interrogantes a los que la Ciencia trata de dar respuesta. Actualmente existen muchos focos de estudio dirigidos a comprender mejor cómo procesamos las magnitudes y analizar qué variables individuales explican las diferencias en rendimiento en matemáticas y en aritmética. Pero en la actualidad aún no existe un consenso dentro de la comunidad científica sobre qué es exactamente lo que predice la ejecución en matemáticas. Esta falta de consenso puede ser debida a muchos factores. Entre ellos, como decimos, el campo de investigación es relativamente joven y aún necesita tiempo para que las diferentes áreas de estudio se vayan acotando y especializando. Otro de los aspectos que pueden llevar a los estudiosos de la cognición matemática a obtener resultados diferentes, podría ser precisamente, el concepto que cada uno de ellos tiene de lo que es el rendimiento en matemáticas, las aptitudes que dicho concepto engloba y la manera de medirlo. De esta manera, el nivel en ejecución matemática de un individuo podría variar dependiendo de la manera en que es medida. Medir la competencia matemática de un individuo no es tarea fácil ya que las matemáticas como área curricular abarcan diferentes campos de conocimiento como los números enteros, los números racionales, la aritmética, la resolución de problemas, el cálculo, la trigonometría, las funciones… Cuando evaluamos el rendimiento en matemáticas, podemos recurrir a múltiples pruebas, test o cuestionarios estandarizados que incluyen la medida de múltiples capacidades y en muchas ocasiones resulta muy complicado concluir qué refleja la puntuación obtenida. Para acotar nuestro trabajo y con el fin de utilizar medidas de cálculo muy específicas, nos centraremos en las tareas de cálculo simple que involucran operaciones de suma y de resta con operandos pequeños. Pretendemos analizar los procesos de cálculo en el contexto de 2 tareas aritméticas concretas (operaciones simples y problemas numérico-verbales sencillos) con el objetivo algunos de los procesos básicos del cálculo simple.

Dentro de este contexto en el que se enmarca la realización de nuestra Tesis Doctoral, son muchos los estudios que se han centrado en analizar las diferencias individuales en el rendimiento en cálculo simple tanto en adultos como en niños. Aunque bien es cierto que en adultos esta cuestión ha sido menos abordada, sí existen trabajos científicos donde se han analizado estas cuestiones. En estos trabajos han analizado el papel que juegan diferentes habilidades de dominio general (p. ej., inteligencia, memoria de trabajo, velocidad de procesamiento, procesamiento visoespacial, etc.) y otras habilidades relacionadas con el número (procesamiento de magnitudes no simbólicas y procesamiento de magnitudes simbólicas) y parece existir bastante acuerdo sobre la importancia de estas habilidades en el cálculo simple. Sin embargo, existen otro tipo de variables que en nuestro trabajo hemos denominado "variables contextuales" que son ajenas al individuo y hacen referencia a la forma en la que se presentan las operaciones aritméticas. Este tipo de variables no han sido tan investigadas y aún no existe acuerdo en cuanto a la relevancia y el papel que juegan en la aritmética sencilla. Una de estas variables es el formato en el que se pueden presentar las numerosidades dentro de una operación o un problema simple: en formato dígito arábigo (p. ej., "3 +7") y en formato palabra numérica (p. ej., "tres + siete"). Por lo tanto, el objetivo que perseguimos en esta tesis es **analizar de forma exhaustiva el papel que juega el formato de presentación en el cálculo simple** de manera que analizaremos esta variable en el contexto de: (1) operaciones de sumas y restas simples presentadas en formato dígito y en formato palabra y (2) problemas numérico-verbales simples presentados en formato dígito y en formato palabra numérica.

CAPÍTULO I

COGNICIÓN NUMÉRICA

El número es el núcleo de todas las cosas, Pythagoras de Samos

En la actualidad y durante las últimas décadas ha habido un creciente número de estudios que se han dedicado a analizar cómo se procesan las magnitudes numéricas y cómo este procesamiento puede influir en el rendimiento en matemáticas, tanto en población adulta como en niños pequeños. Este tema es de vital importancia ya que son muchos los trabajos que muestran la relación inequívoca entre la habilidad para procesar y operar con números y el éxito socioeconómico de las personas (Ritchie y Bates, 2013). La importancia de entender y saber operar con números es más que evidente en una sociedad como en la que vivimos. Comprender cómo funcionan los números nos permite gestionar muchas tareas de la vida cotidiana, así como plantear y responder cuestiones tan habituales como ¿qué edad tienes?, ¿cuánto cuesta esto?, ¿qué temperatura hace?, ¿qué hora es? La *numeracy* o *literacy cuantitativa* (McCloskey, 2007), incluye habilidades para razonar con números y conceptos aritméticos, que nos permiten gestionar muchas tareas de la vida cotidiana. Ser capaces de manejar, comparar e interpretar las magnitudes numéricas, así como calcular con ellas, es un aspecto fundamental para vivir en nuestra sociedad y estar adaptados a sus constantes demandas. En los últimos años la investigación se ha puesto de manifiesto que la competencia matemática es crucial tanto para el éxito académico, como para el profesional (Finnie y Meng, 2001). Algunas evidencias indican que un bajo rendimiento en estas habilidades se asocia con grandes costos para la sociedad en su conjunto (Butterworth et al., 2011; Duncan et al., 2007) e incluso con una mayor probabilidad de conducta criminal y encarcelamiento, así como un mayor riesgo de depresión y otras enfermedades (Parsons y Bynner, 2005).

Puesto que trabajar y entender los números es una parte central de nuestra existencia cotidiana, es comprensible que una mayor comprensión de cómo el cerebro desarrolla esta capacidad para procesar cantidades numéricas y los mecanismos que subyacen a estas habilidades, se hayan convertido en el foco de muchas investigaciones en los últimos años. Se ha descubierto que la capacidad para procesar, manipular y operar con magnitudes numéricas no solo depende del lenguaje y la educación que nos aporta la cultura, sino que nos es dotada de una manera innata (Feigenson et al 2004). Parece ser que estos procesos tienen una base biológica primitiva que permite no solo a adultos, sino también a bebés, niños e incluso animales entender y manipular magnitudes numéricas gracias a las representaciones análogas o no simbólicas de la magnitud. Como veremos en los siguientes puntos, venimos dotados de dos sistemas de representación de la magnitud que nos permiten mostrar, incluso antes de la escolarización, ciertas habilidades prematemáticas que parece que son capaces de explicar el rendimiento en aritmética y en cálculo muchos años después (Watts et al., 2014). Por lo tanto, es de vital importancia conocer estas habilidades tempranas y los fundamentos sobre los que se asienta el conocimiento matemático ya que esto nos permitirá entender cómo mejorar o promover el desarrollo de dichas habilidades.

Trataremos de dar una visión general sobre qué es lo que conocemos hasta el momento acerca de las bases en las que se construye el concepto de número. Intentaremos responder a varias cuestiones: cómo y cuándo aparecen las representaciones de la magnitud; si estas representaciones son innatas o forman parte de la transmisión cultural; en qué momento adquirimos las representaciones simbólicas de la magnitud numérica; si éstas se relacionan de alguna manera con las anteriores; y si hay evidencia neurofisiológica sobre la existencia de estas representaciones.

PROCESAMIENTO DE MAGNITUDES NUMÉRICAS NO SIMBÓLICAS

Como ya hemos adelantado en los párrafos anteriores, parece ser que tanto los humanos como otras especies animales, nacemos dotados de un sistema de representación innato que nos permite discriminar, representar y operar con las magnitudes numéricas no simbólicas de una forma rápida, inexacta y aproximada. Nos estamos refiriendo al Sistema Numérico Aproximado (en adelante SNA) y opera de forma totalmente independiente a las representaciones verbales y simbólicas de la magnitud que nos proporciona la transmisión cultural y la educación (dígitos arábigos y palabras numéricas; Butterworth, 1999; Dehaene, 1997; Whalen et al., 1999). Sin embargo, según lo que nos aporta la literatura en este campo, parece ser que éste no sería el único sistema que nos permite representar y diferenciar magnitudes numéricas no simbólicas (Moyer y Landauer, 1967), sino que también poseemos otro sistema que nos permite manejar y enumerar de forma más precisa los conjuntos compuestos de hasta 3 o 4 elementos. Estamos hablando del Sistema Numérico Exacto (en adelante SNE; p. ej., Carey, 2001; Feigenson et al., 2002; Feigenson et al., 2004; Xu, 2003). Por lo tanto, ambos sistemas comparten el hecho de que comparten un origen innato y existe evidencia de ellos tanto en bebés, como en niños, como en adultos. También lo compartimos con otras muchas especies animales por lo que no dependen de la instrucción ni de las transmisiones culturales. No obstante, ambos sistemas continúan desarrollándose a lo largo de la vida, convirtiéndose en más precisos, en parte, gracias a la intervención de la cultura, de la educación y a la adquisición de las representaciones numéricas simbólicas (Halberda et al., 2008). Los dos sistemas también son la base de nuestro *sentido numérico* básico (Dehaene, 1997), que nos permitirá desarrollar otras habilidades más complejas como la aritmética y el cálculo pero que, sin embargo, no parece tener mucha relación con otros tipos de conceptos numéricos como los números negativos, las fracciones, las raíces cuadradas, etc. Por todo esto, la diferencia fundamental entre el SNA y el SNE sería la cantidad de elementos que nos permite procesar y discriminar cada uno de estos sistemas. Mientras que el SNA nos permite discriminar grandes conjuntos de elementos, el SNE es con el que enumeramos conjuntos de hasta 4 elementos.

En este punto hablaremos de estos dos sistemas numéricos y ahondaremos en sus características principales para comprenderlos mejor. También realizaremos una revisión de la literatura para incluir los hallazgos más importantes encontrados en la investigación tanto con animales, bebés, niños y adultos, lo que nos permitirá tener una conciencia sobre la importancia de cada uno de estos sistemas para lograr ese *sentido numérico* del que hablábamos. Presentaremos por un lado el SNA y ahondaremos en él abordando todas estas cuestiones, y posteriormente pasaremos al SNE para hacer lo propio.

Sistema Numérico Aproximado (SNA)

Los adultos poseemos la capacidad de comprender y operar con cantidades numéricas exactas y las representamos de manera simbólica a través de los números arábigos y las palabras numéricas que nos proporciona la cultura y la educación. Estas asociaciones entre símbolos y cantidades son dependientes de la cultura en la que crecemos y pueden variar de unas sociedades a otras. Además de esta capacidad adquirida y exclusivamente humana, las personas poseemos otro sistema numérico con el que venimos dotados de forma innata: es el Sistema Numérico Aproximado que nos permite operar de manera inexacta y aproximada con cantidades numéricas y que además compartimos con otras especies animales (Butterworth, 1999; Dehaene, 1997).

Aunque en muchas ocasiones nos pase desapercibido, hacemos uso de este sistema aproximado casi diariamente en nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, si vamos al mercado y pedimos una docena de naranjas y el tendero nos da una bolsa con 6 unidades, rápidamente nos damos cuenta de que faltan naranjas. No sabemos de manera exacta cuántas unidades, pero vemos rápidamente que las naranjas recibidas son menos que las que hemos pedido. Cuando organizamos una cena con invitados y decidimos ofrecer patatas como acompañamiento al plato principal, también hacemos uso de este sistema para calcular las unidades de patatas precocinadas que tenemos que descongelar. Supongamos que somos seis personas a la mesa. En un principio podríamos suponer que necesitamos gran cantidad de patatas, por lo que sacamos del congelador el envase de 2 kilos. Cuando abrimos la bolsa y las vertemos sobre un recipiente, nos damos cuenta de que son demasiadas para seis personas. Para llegar a esta conclusión no necesitamos contarlas una por una, simplemente las comparamos con la ración habitual por persona y nos damos cuenta de que son demasiadas. No sabemos exactamente cuántos pedazos de patatas sobran, pero sí tenemos claro de que son más de los que creíamos que eran necesarios. Así, corregimos la cantidad hasta que creamos que el número de patatas se ajusta al número de comensales. Lo que estamos haciendo aquí, es recurrir a nuestro SNA que nos permite hacer una comparación de manera rápida e imprecisa y tomar una decisión en consecuencia.

Este sistema de representación de magnitudes posee una serie de características que lo definen como un sistema de representación que parece que es innato, muy primitivo, independiente de las representaciones verbales y simbólicas de las numerosidades y que opera de manera rápida e imprecisa. A estas conclusiones se han llegado a través de diversos estudios utilizando la tarea clásica de comparación de magnitudes no simbólicas aplicada en diferentes formatos a diferentes tipos de poblaciones.

Estas investigaciones han puesto en evidencia la presencia de este sistema en animales (p. ej., Cantlon y Brannon, 2006) lo que nos lleva a pensar que este sistema es muy primitivo y antiguo desde el punto de vista evolutivo. También se ha encontrado que es un sistema con el que venimos dotados de manera innata como se ha demostrado en muchos trabajos realizados con bebés casi recién nacidos (p. ej., Xu y Spelke, 2000). De estos trabajos se desprende también la idea de que el sistema al estar presente en animales, bebés y poblaciones indígenas (p. ej., Pica et al., 2004) es un sistema que opera de forma independiente a las representaciones verbales y simbólicas que nos aporta el conocimiento a través de la cultura y la educación (Butterworth, 1999; Dehaene, 1997; Whalen et al., 1999). Finalmente, los estudios con niños (p. ejl, Halberda et al., 2008; Holloway y Ansari, 2008;) y adultos (p. ej., Buckley y Gilman, 1974; Halberda et al., 2012; Smets et al., 2015) nos han permitido saber que el sistema está presente durante todo el desarrollo y que además continua evolucionan y mejorando, de manera que se vuelve algo más preciso con la edad y esto, probablemente ocurre gracias a la intervención de la cultura y a la adquisición de los sistemas de representación simbólica (Halberda et al, 2008; Estévez et al., 2008).

Parece ser que venimos dotados de un sistema que nos permite representar y procesar magnitudes numéricas no simbólicas y que es cualitativamente similar al que poseen los animales no humanos. Podemos decir que ya nacemos con las bases fundamentales que nos permitirán procesar diferentes informaciones numéricas. Además, pese a la evidencia de la existencia de este sistema, parece que la agudeza del mismo va cambiando a lo largo del desarrollo.

Sistema Numérico Exacto (SNE)

Según lo visto en el punto anterior y en base a los estudios realizados con bebés, animales, poblaciones iletradas y adultos, se pone en evidencia el hecho de que existe un sistema que nos permite representar magnitudes numéricas grandes de una forma aproximada. Es el conocido como SNA con el que podemos representar grandes numerosidades o conjuntos de elementos y eventos de una forma imprecisa. Los hallazgos indican que bebés, niños, animales y adultos compartimos este sistema que genera representaciones aproximadas de los números y que nos permite discriminar entre diferentes cantidades de una forma poco precisa ya que está limitado por la ratio y la distancia entre las cantidades a diferenciar lo que se explica por la representación logarítmica de las magnitudes que subyacen a estas representaciones. Además, y como veremos más adelante, sobre este sistema se construirá el sistema numérico simbólico que nos proporciona la transmisión cultural y del que se sirven tanto los niños como los adultos para la enumeración y para el cálculo.

Sin embargo, muchos autores han apuntado al hecho de que este no sería el único sistema que nos permite representar y diferenciar magnitudes numéricas, sino que también poseemos otro sistema que nos permite manejar magnitudes más pequeñas y exactas, sería el denominado Sistema Numérico Exacto (en adelante SNE; p. ej., Carey, 2001; Feigenson et al., 2002; Feigenson et al., 2004; Xu, 2003). Este sistema de representaciones exactas o precisas también es conocido en la literatura como *parallel individuation system* (Gordon, 2004) o *object tracking system* (conocido como OTS) que viene a significar sistema de rastreo de objetos. Este sistema nos permite rastrear, manejar y enumerar de forma precisa numerosidades pequeñas compuestas de hasta 3 o 4 elementos (Piazza, 2010).

Ya en los estudios clásicos y más antiguos sobre el conteo, se hacía referencia a que había un sistema que nos permitía reconocer de manera rápida y muy precisa un conjunto de elementos pequeños y que no requerían ser contados uno a uno para conocer su valor numérico. Parecían estar de acuerdo en que este proceso suponía un prerrequisito esencial para el desarrollo del conteo y para la adquisición del sistema numérico simbólico (Douglass, 1925; Freeman 1912). Explicaban ya entonces que esta peculiar manera de "no contar" se enfocaba en el conjunto de elementos como un toda y lo asociaba al valor exacto. De esta manera, muchos ya estaban de acuerdo en plantear que este proceso era una forma especial y más precisa que nos permitía contar (Carper, 1942). Por lo tanto, aunque no es hasta un tiempo después cuando ya se acuña este este sistema, desde los inicios del siglo pasado, los investigadores ya eran conscientes de que había dos formas o mecanismos que nos permitían procesar y representar magnitudes numéricas.

De esta manera, podemos decir que ambos sistemas, el SNA y el SNE comparten ciertos rasgos como el hecho de que tienen un origen innato y podemos encontrar evidencia de la presencia de ambos tanto en adultos, como en bebés, animales y poblaciones iletradas. Al estar presentes en otras especies, nos permite apuntar que estos sistemas de representación no dependen de la instrucción ni de las transmisiones culturales. También encontramos acuerdo en el hecho de que los dos sistemas continúan desarrollándose a lo largo de la vida con lo que llegan a hacerse más precisos, en parte, gracias a la adquisición de las representaciones numéricas simbólicas (Halberda et al., 2008) y ambos sistemas ayudan a conformar nuestro sentido numérico (Dehaene, 1997). La principal diferencia entre el SNA y el SNE, por lo tanto, parece ser que mientras que el SNA nos permite procesar grandes magnitudes, el SNE nos permite enumerar conjuntos pequeños de hasta 4 elementos.

DE LO NO SIMBÓLICO A LO SIMBÓLICO

Hasta el momento hemos visto que la manera en que procesamos las magnitudes numéricas no simbólicas presenta algunas disociaciones que dan lugar a la idea de que existen dos sistemas diferentes que nos permiten procesar, representar y operar con las magnitudes numéricas. Estamos hablando del sistema de representación de magnitudes numéricas aproximadas (SNA), y el sistema para representar magnitudes numéricas de forma exacta (SNE). El SNA nos permite representar numerosidades grandes y compararlas de una manera rápida e imprecisa, mientras que gracias al SNE podemos discriminar entre conjuntos de elementos pequeños y tiene la limitación de 3 o 4 elementos.

Una de las características que comparten estos sistemas de representación es que parece ser que son innatos y aunque están presentes y son evidentes desde los primeros años de vida, evolucionan durante el desarrollo hasta llegar a un funcionamiento óptimo a la edad adulta. Muchos investigadores se han venido preguntando cuáles son los factores determinantes que permiten que esto sistemas mejoren en precisión. El SNE por su parte, mejora drásticamente durante el primer año de vida de los niños (Libertus y Brannon, 2009) mientras que el SNA evoluciona desde los primeros años de vida hasta llegar a una edad adulta donde ya se pueden discriminar conjuntos que presentan una ratio de 7:8 entre ellos, lo que implica una precisión muy alta (Van Oeffelen y Vos, 1982). Por lo tanto, en términos generales, la precisión y agudeza de los sistemas de representación de numerosidades van mejorando con el tiempo (Huntley-Fenner, 2001) sufriendo cambios muy significativos sobre todo durante los primeros años de vida (Halberda et al., 2008; Piazza et al., 2010).

Llegados a este punto del planteamiento parecerá obvio que nos preguntemos por que se produce este cambio, en qué momento exacto se produce, si tiene que ver con el desarrollo evolutivo o más bien podría estar explicado por la intervención de la cultura. La respuesta a esta cuestión no parece que esté demasiado clara a día de hoy. Por un lado, parece que podría estar claro que el desarrollo natural y evolutivo de los niños puede ayudar a que se incremente la precisión del SNA ya que, según lo visto en las páginas anteriores, tanto animales como bebés compartían la presencia de este sistema que además, en el caso de los humanos, mejora durante los primeros años de vida y antes de la escolarización. Sin embargo, recordemos también el caso de la tribu indígena Mundurukú (Pica et al., 2004) quienes no tenían un sistema numérico simbólico aportado por la cultura y, aunque se veía que la precisión de su SNA mejoraba, no lo hacía al nivel de lo que lo hace en otro tipo de poblaciones letradas en las que la educación les permite adquirir un sistema simbólico para representar las magnitudes. Sea como fuere, esta segunda idea es indicativa y pone en relevancia la importancia de la adquisición de un sistema simbólico para representar las magnitudes.

Antes de seguir avanzando, debemos tener presente que las representaciones simbólicas de la magnitud (tanto en el formato de palabra numérica como en el formato de dígito arábigo) son totalmente arbitrarias y aleatorias ya que no hay nada en la palabra *cuatro* que nos indique la magnitud que está representando. Ocurre lo mismo para los dígitos arábigos que son símbolos fruto de la invención humana que no guardan ninguna relación con la magnitud numérica que están representando (Holloway y Ansari, 2012). La adquisición de estos símbolos es fruto de la transmisión cultural y de la instrucción explicita que permite a los humanos aprender a representar numerosidades de una forma precisa con palabras y posteriormente con los números arábigos.

La cuestión de cómo procesamos y representamos los números simbólicos ha sido muy investigada en los humanos durante todos los momentos del desarrollo y es un tema que nos parece de vital importancia. En la literatura científica se ha intentado dar respuesta a la cuestión de como los sistemas de procesamiento de magnitudes simbólicas y no simbólicas se conectan a lo largo del desarrollo. Cuando los bebés y los niños más pequeños se exponen por primera vez a las representaciones simbólicas de los números, no encuentran ninguna relación con las magnitudes que representan, sino que simplemente escuchan palabras y ven símbolos que aparentemente no tienen significado. Por lo tanto, es necesario que los niños conecten de alguna manera estos símbolos arbitrarios con sus significados en términos de magnitud numérica para que posteriormente puedan operar y calcular con ellos. Pero esta cuestión, como decíamos, ha sido muy discutida y aún no existen resultados concluyentes al respecto.

De esta manera, en la literatura podemos encontrar dos posturas principalmente. La primera de ellas (Kolkman, et al, 2013; Wagner y Johnson, 2011) nos viene a decir que los números simbólicos adquieren su significado gracias a que se van proyectando sobre las representaciones no simbólicas del SNA. Sin embargo, algunos autores (Lyons et al., 2012; Lyons et al., 2015) han encontrado ciertas contradicciones en estos estudios por lo que se ha planteado una segunda hipótesis que, como ya comentábamos con anterioridad, defiende que los números simbólicos van adquiriendo su significado gracias a que se realizan mapeos entre las magnitudes simbólicas y las representaciones del SNE. En las siguientes páginas describiremos con más exactitud estos procesos y presentaremos las evidencias que han llevado a los diferentes autores a plantear estos dos modos de adquisición del número simbólico. Finalmente, presentaremos una última alternativa que ha aparecido más recientemente en la literatura y que defiende que estos mapeos no ocurren sobre ninguno de los sistemas de representación de magnitudes, sino que defienden que las únicas asociaciones posibles son las que ocurren entre los propios símbolos y argumentan que las representaciones simbólicas y no simbólicas en realidad activan representaciones diferentes (Noël y Rousselle, 2011; Reynvoet y Sasanguie, 2016; Sasanguie et al., 2014).

CAPÍTULO II

ARQUITECTURA DE LA ARITMÉTICA COGNITIVA

La matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas,
Carl Friedrich Gauss

MODELOS DE PROCESAMIENTO NUMÉRICO Y CÁLCULO

En el capítulo anterior hemos dado una idea general respecto a la base sobre la que se construye el conocimiento numérico y los fundamentos más básicos del procesamiento de magnitudes numéricas. Conocer estos aspectos tan relevantes sobre las numerosidades es imprescindible para que podamos seguir avanzando hacia el núcleo fundamental de esta tesis doctoral que sería analizar los procesos de la aritmética y el cálculo. Muchos estudios (Duncan et al, 2007; Watts et al, 2014) han demostrado que las aptitudes que ya poseen los niños antes de ser escolarizados son las precursoras del conocimiento numérico que mostrarán durante los años escolares posteriores. Parece ser que estas habilidades prematemáticas que nos permiten comparar y manipular magnitudes numéricas no simbólicas tienen una base innata de manera que desde que nacemos tenemos una cierta predisposición a atender y procesar magnitudes numéricas. De acuerdo con Feigenson et al. (2004) y Piazza (2010), existen dos sistemas que nos permiten representar cantidades no simbólicas y que nos sirven como base sobre la que se construye el significado de los números exactos: el SNA y el SNE. Por un lado, el SNA (Barth et al. 2003; Mundy y Gilmore, 2009) nos permite diferenciar entre conjuntos de magnitudes no simbólicas grandes, mientras que el SNE (Carey, 2001; Feigenson et al., 2002) es utilizado para conjuntos más pequeños de hasta 3 o 4 elementos. Estos dos sistemas constituyen la base sobre la que se proyectan los números simbólicos y conforma nuestro *sentido numérico* básico (Dehaene, 1997), que nos permitirá desarrollar otras habilidades más complejas como la aritmética y el cálculo.

Aquí vamos a abordar la organización de los procesos básicos que sirven a la cognición numérica y a la aritmética. Para comenzar, aclararemos que el término de **arquitectura de la aritmética cognitiva** se utiliza para especificar y definir un dominio cognitivo en particular donde se pueden identificar diferentes etapas o módulos de procesamiento involucrados en el cálculo, así como la forma de interactuar entre sí y comunicarse. Para el tema que nos ocupa, que es la aritmética y el cálculo, podríamos descomponer el proceso de responder a un problema aritmético simple como 5 + 3 = ? en las siguientes etapas de procesamiento:

a. **Codificación del estímulo**: en primer lugar, hemos de convertir el estímulo (en este caso formado por dígitos arábigos) en los códigos internos apropiados que permitirán su manipulación. Esta primera etapa hace referencia a los diferentes formatos en los que se pueden presentar y producir las numerosidades, aspecto fundamental dentro de esta tesis doctoral.
b. **Cálculo de la respuesta**: en segundo lugar, hay que llegar a la respuesta al problema a través de la memoria si es que el resultado lo tenemos almacenado en ella, o a través del cálculo utilizando diversas estrategias basadas en el conteo.
c. **Producción de la respuesta**: finalmente, tenemos que transformar la respuesta al formato adecuado que nos permita producir la respuesta. La producción de la respuesta es la etapa que implica una conducta expresa por el participante y por lo tanto en la mayor parte de los experimentos e investigaciones esta es la conducta que se mide en términos de latencias y tasa de errores.

Esta descomposición implica una arquitectura compuesta por subsistemas cognitivos para la codificación, el cálculo y la producción de respuestas. Pero además de estos subsistemas, para comprender la arquitectura del procesamiento numérico, también necesitamos especificar cómo se comunican los subsistemas entre ellos para poder realizar predicciones e inferencias sobre el comportamiento en el contexto del procesamiento numérico y el cálculo. De esto se han encargado varios estudios y autores que han dedicado sus esfuerzos a elaborar diferentes modelos que permiten explicar desde distintos puntos de vista cómo se relacionan estos sistemas entre sí y cómo permiten que se procesen las numerosidades para resolver problemas aritméticos. De esta manera, han surgido varias maneras de describir cómo interactúan estos sistemas y los procesos que se llevan a cabo dentro de ellos, dando lugar a diversos modelos explicativos.

La arquitectura de la cognición numérica y la aritmética nos permite explicar los procesos de codificación de estímulos, cálculo y producción de respuesta, lo que supone un aspecto central y común para todos los modelos explicativos del cálculo. Sin embargo, los modelos difieren entre sí en otra serie de aspectos relevantes, de manera que actualmente no existe un acuerdo sobre cuál sería el modelo que mejor explica la cognición numérica. Así, podemos clasificar los modelos en base a la manera en la que se relacionan entre sí los distintos componentes implicados y lo haremos dando respuesta a la pregunta de si estas etapas de codificación, cálculo y producción de la respuesta son aditivas e independientes, o más bien están integradas y se relacionan de una forma más interactiva. Si las etapas son aditivas, esto implicaría que cada una completa sus operaciones de manera independiente para poder pasar a la siguiente. Para entenderlo, pondremos un ejemplo: en aritmética simple, si el proceso de codificación, de cálculo de la solución y producción de la respuesta son aditivas, implicaría que una vez que codifica el estímulo, el cálculo de la solución ocurriría una vez finalizado el procesamiento y la producción de la respuesta, una vez acabada la etapa del cálculo, es decir de manera independiente. Por el contrario, si la codificación y las dos etapas de cálculo fuesen procesos interactivos, implicaría que los procesos de codificación podrían afectar de manera directa a la manera en accedemos a la solución y también a la producción de la respuesta, de manera que la codificación del estímulo podría interferir en el cálculo y en la producción de la respuesta. Esta cuestión de si los procesos y mecanismos que componen la arquitectura de la cognición numérica son interactivos o aditivos ha influido de manera determinante en la metodología y en los planteamientos teóricos en la investigación en el ámbito de la aritmética cognitiva y la neruropsicología del procesamiento numérico (McCloskey y Macaruso, 1994).

Modelo Modular de Código Abstracto de McCloskey

En 1985, McCloskey, Caramazza y Basili propusieron un marco teórico para comprender con mayor profundidad los procesos cognitivos relacionados con el procesamiento numérico y el cálculo. Este modelo fue elaborado utilizando como fuente de conocimiento los estudios realizados con pacientes con deterioro cognitivo y daño cerebral. Lo postularon sobre el supuesto de que ciertos deterioros deberían estar reflejando el funcionamiento cognitivo típico (McCloskey et al., 1985). De acuerdo con esta afirmación continuaron avanzando en el desarrollo del modelo durante los años siguientes (McCloskey, 1992; McCloskey y Macaruso, 1994, 1995; Sokol et al., 1991) y elaboraron un modelo esquemático en el que se relacionan los procesos cognitivos involucrados en el procesamiento de números y el cálculo. El modelo de código abstracto identifica tres tipos de sistemas cognitivos en el procesamiento numérico: sistemas de comprensión, cálculo y producción de respuestas. Uno de los aspectos fundamentales de este modelo es la afirmación de que los subsistemas para el procesamiento y para el cálculo se comunican entre sí a través del uso de un código interno de representación semántica abstracta.

Modelo de Triple Código de Dehaene

A diferencia de la anterior teoría modular que planteaba su modelo estableciendo conexiones entre los diferentes módulos de procesamiento, este modelo está basado en la interacción entre tres códigos en los que defienden que se basa el procesamiento numérico: un código para la representación análoga de la magnitud, otro para la forma numérica visual-arábiga y un sistema de codificación auditivo-verbal (Dehaene, 1992; Dehaene y Cohen, 1995; Dehaene et al., 2003). Por lo tanto, una primera novedad introducida es que incluye un tercer formato de presentación: las representaciones análogas de la magnitud. En contraste con las teorías modulares del procesamiento de numerosidades, estos autores asumen que los tres códigos son capaces de activar de una forma directa otro código sin la necesidad de pasar por una representación semántica abstracta (un código abstracto y amodal). En este modelo, se mantiene la noción de que las numerosidades se representan internamente de diferentes formas que son los denominados "formatos de superficie" o los formatos en los que podemos percibir las numerosidades y corresponden con tres códigos diferentes: uno para las modalidades relacionadas con el lenguaje, otro para las modalidades relacionadas con los objetos y otro para el reconocimiento de los dígitos arábigos (Dehaene, 1992; Dehaene y Cohen, 1995; Dehaene et al., 2003).

Hipótesis de Codificación Compleja de Campbell

Campbell y Clark (1988, 1992; Campbell, 1992, 1994; Clark y Campbell, 1991) en contraposición a las teorías modulares y las posturas aditivas, señalaron que los fenómenos básicos del procesamiento numérico no son abordados por arquitecturas tan simples y aditivas. La teoría modular asume que existe una secuencia particular en la que deben ocurrir los procesos cognitivos, de modo que cada proceso se suma al siguiente en una cadena de eventos. También asume que el uso de una secuencia cognitiva excluye el uso de otra. Por ejemplo, en el modelo de las rutas múltiples, la denominación de números debe proceder de la transcodificación semántica o no semántica de números arábigos a palabras numéricas. Las rutas son mutuamente excluyentes (Campbell y Clark, 1992; Campbell y Epp, 2004; Campbell y Epp, 2005), por lo tanto, la principal característica que distingue a esta hipótesis de la Codificación Compleja de otros modelos es que no asume que las funciones cognitivas estén organizadas de forma aditiva.

CODIFICACIÓN DE LOS ESTÍMULOS NUMÉRICOS

El procesamiento de las numerosidades depende del formato en el que se presenten, cuestión que es muy importante para tener en cuenta en el tema que tratamos en esta tesis doctoral. De esta manera, podemos decir que los dígitos arábigos y las palabras numéricas no se procesan de igual forma y parecen seguir reglas y rutas diferentes. Estas diferencias se hacen evidentes en la diversa investigación presentada en este punto y que ha encontrado que los dígitos y las palabras se diferencian en varios aspectos: (1) cuando procesamos los dígitos somos más rápidos y precisos que procesando palabras numéricas; (2) el procesamiento de los dígitos arábigos no tiene una ruta asemántica mientras que el de las palabras sí; (3) los dígitos parece que se procesan como un todo de manera logográfica mientras que no encontramos esta evidencia para las palabras; (4) los efectos encontrados en diversas tareas, aunque tienen puntos en común, en otros casos no se muestran de la misma manera cuando utilizamos estímulos en formato dígito que en formato palabra numérica; y (5) finalmente parece que estas diferencias tienen una base neurológica. No obstante, aún queda mucho camino por recorrer hasta que podamos tener más claro cuáles son las diferencias que hacen únicos a cada formato.

CÁLCULO DE LA RESPUESTA: RECUPERACIÓN VS. ESTRATEGIAS

Actualmente, existe un amplio consenso sobre cómo los adultos resuelven las operaciones de multiplicación simples con un solo dígito (p. ej., 3 x 4) y es que lo hacen casi de manera exclusiva a través de la recuperación de hechos, es decir, recuperando de manera directa el resultado de una red de hechos aritméticos en la memoria a largo plazo (Ashcraft, 1992; Campbell y Epp, 2005). Este procedimiento, en términos generales, implicaría una percepción de los dos estímulos que componen el problema, así como el signo que indica la operación a realizar y de manera automática nos llevaría a nuestra memoria a largo plazo donde almacenamos las respuestas a este tipo de problemas y simplemente tendríamos que recuperarla. Este hecho ha sido ampliamente demostrado tanto en estudios conductuales (p. ej., Campbell y Xue, 2001; Groen y Parkman, 1972) como neuropsicológicos (p. ej., Prado et al., 2011) y va en consonancia con la observación de que la tabla de multiplicar se aprende verbalmente y de memoria. Por el contrario, ha habido más debate sobre los procesos involucrados en la resolución de sumas y restas de un solo dígito (p. ej., 3 + 4; 4 - 2) ya que en algunas ocasiones los participantes los resuelven recuperando el hecho aritmético de la memoria, pero en otras, necesitan recurrir al uso de estrategias procedimentales y basadas en el conteo. La variabilidad es muy alta tanto en población adulta como en niños.

RENDIMIENTO Y EJECUCIÓN EN ARITMÉTICA

En este apartado, seguimos intentando aclarar las tres fases fundamentales que implica la cognición aritmética cuando operamos: procesamiento del estímulo, cálculo o recuperación de la solución y producción de la respuesta. Antes de comenzar este punto, echaremos la vista atrás para aclarar hacia donde se dirige este trabajo. El objetivo último que perseguimos es aclarar algunos aspectos sobre el cálculo que aún están en el aire. Como veíamos en puntos anteriores (ahora en relación con el cálculo mental y la aritmética) son muchos los autores que han intentado aclarar la arquitectura del procesamiento numérico y el cálculo, no obstante, hay muchos efectos que se muestran en las tareas de cálculo que aún se encuentran en debate. Los modelos tratados presentaban ciertas limitaciones por su incapacidad para explicar todo el procesamiento numérico, y porque había también limitaciones a la hora de explicar aspectos relacionados con el cálculo o la recuperación de la respuesta a los problemas aritméticos. Por lo tanto, en este apartado hablaremos de la tercera etapa de la arquitectura cognitiva que es la producción de la respuesta, pero la abordaremos desde el punto de vista del rendimiento en aritmética.

Cuando evaluamos a los adultos en aritmética simple, pese a que siguen un proceso que implica procesar y calcular la respuesta, la conducta que se recoge en los estudios comportamentales es la respuesta que da el participante, así como el tiempo transcurrido entre la presentación del estímulo y la producción de la solución. Por este motivo, lo que se mide habitualmente en población adulta es la latencia o tiempos de respuesta ya que, al tratarse de aritmética simple, la tasa de acierto es muy alta y no aporta demasiada información. Es por esto por lo que en este punto vamos a tratar de analizar las diferentes variables que parece que pueden explicar en mayor o menor medida estas latencias y el rendimiento de los adultos en la aritmética simple (problemas cortos compuestos por operandos menores que 10).

Aunque está claro lo que se mide en este tipo de estudios, hay otra serie de cuestiones sobre las que no hay tanto acuerdo y es que encontramos en la literatura multitud de trabajos que proponen diferentes tipos de variables que pueden explicar el rendimiento en aritmética. Sin embargo, tras muchos años de investigación en este campo, parece que podemos llegar a una serie de conclusiones que involucran un alto grado de acuerdo entre los diferentes autores y perspectivas científicas. Lo que parece estar claro es que existe una seri de precursores o habilidades tempranas que sí influyen en las diferencias interindividuales en el rendimiento en matemáticas y aritmética: los factores de dominio general y de dominio específicos.

En la cognición numérica, hay dos perspectivas dominantes para entender los factores que subyacen a la competencia aritmética. Por un lado, se encuentra la perspectiva que podríamos denominar de “dominio general”, que propone que habilidades no numéricas como la inteligencia no verbal, las habilidades fonológicas, la memoria de trabajo, la memoria a largo plazo o el procesamiento visoespacial son las que subyacen a las diferencias individuales en la ejecución aritmética. Alternativamente, desde otra perspectiva que podríamos denominar “específica de dominio” se propone que las diferencias interindividuales se explican por diferencias en procesos específicos del número. Desde esta perspectiva se asume que contamos con una capacidad innata para procesar números de manera aproximada que es compartida incluso por otras especies. El SNA formaría las bases para las habilidades aritméticas, ya que cuando aparece la aritmética más formal y simbólica, los números adquieren significado al asociarse a la representación aproximada no simbólica preexistente. De estos dos grandes grupos de factores hablaremos a lo largo del punto ya que componen el grupo de variables que explican las diferencias individuales en el rendimiento en aritmética.

Además de las variables que explican las diferencias interindividuales en ejecución en cálculo, existe otro grupo de variables que han sido menos estudiadas y que nos permiten analizar las diferencias intrasujeto en relación con el rendimiento en aritmética. Nosotros las hemos denominado variables contextuales y hacen referencia a una serie de factores inherentes a la tarea en sí misma pero que pueden intervenir de manera muy directa en el rendimiento de cada participante. Son variables contextuales porque son factores que tienen que ver con la forma en la que se presenta el estímulo aritmético. Este tipo de variables ha sido menos estudiado dentro del ámbito de la aritmética y es por este motivo que será uno de los principales objetos de estudio de esta tesis doctoral. En las próximas páginas veremos cuáles son las variables de dominio general que nos permiten explicar las diferencias individuales en ejecución en aritmética, así como las variables de dominio específico. Y en tercer lugar presentaremos el tercer conjunto de variables que son las contextuales. Todas ellas serán incluidas en el estudio empírico.

CAPÍTULO III

ESTUDIOS EMPÍRICOS

Dentro del campo de la aritmética cognitiva existe una gran pregunta que aún se encuentra en el aire y es la cuestión de cómo se relacionan entre sí las diferentes etapas que componen la arquitectura de la aritmética durante los procesos de cálculo (etapa de codificación del estímulo, etapa de cálculo de la respuesta y etapa de la producción de la respuesta). Y es precisamente esta pregunta la que ha guiado y motivado este trabajo en el que pretendemos aportar nuevos datos que puedan clarificar esta cuestión y dar apoyo a alguna de las posturas teóricas que intentan explicar el procesamiento numérico y el cálculo. Por un lado, algunos autores (p. ej., Dehaene y Cohen, 1995; McCloskey et al., 1986; McCloskey y Macaruso, 1994), defienden que cuando calculamos, las tres etapas ocurren de manera más o menos secuencial de manera que cuando una finaliza, se activa la siguiente y por lo tanto sostienen la idea de que la relación entre los procesos es aditiva. Por otro lado, otro grupo de trabajos (p. ej., Campbell, 1994; Campbell y Clark, 1992; Jackson y Coney, 2007) argumenta que el proceso de cálculo no es tan simple ni aditivo y que mientras resolvemos operaciones de cálculo puede haber más de una etapa activa a la vez y que además durante estos procesos, los diferentes procesos se relacionan entre sí, defendiendo una postura en la que las etapas interactúan entre sí.

El siguiente asunto que tratar, parece estar claro y es cómo podemos analizar la manera en que se relacionan estas etapas. Aquí parece haber más acuerdo entre los investigadores y es que todos consideran que el efecto del formato de presentación de los estímulos es la pieza clave que nos puede ayudar a decantarnos por una postura más aditiva (p. ej., Campbell y Fugelsang, 2001; McCloskey, 1992; Blankenberger y Vorberg, 1997) o por otra más interactiva (p. ej., Campbell, 1992; Campbell y Clark, 1988). Es este el motivo principal que da título a nuestro trabajo y es la importancia del efecto formato dentro de la aritmética cognitiva. Por lo tanto, no es un efecto más sino la llave que nos puede abrir la puerta para dar respuesta a la pregunta fundamental.

OBJETIVOS

El objetivo general que ha guiado este trabajo y que además le da título, es analizar el papel que juega el efecto formato en el cálculo simple con el fin de ver hasta qué punto esta variable contextual es capaz de explicar el rendimiento en cálculo y para poder determinar si los procesos de codificación, cálculo y producción son interactivos o aditivos. Este amplio objetivo general lo vamos a descomponer en 4 objetivos específicos o preguntas de investigación que serán los que guíen nuestros estudios empíricos:

1) Analizar si el formato es otra variable o dimensión que afecta directamente al rendimiento en cálculo tanto al nivel de estrategias para calcular la solución como a nivel de producción de la respuesta (tiempo de reacción).

2) Analizar qué aspectos afectan a la variabilidad del efecto formato tanto los relacionados con las características de los ítems como los relacionados con las características de los participantes.

3) Comprobar en el Estudio 2 si esta influencia sigue existiendo aun cuando eliminamos la variable familiaridad de la operación (en los problemas numérico-verbales).

Finalmente, una vez que hayamos presentado los dos estudios y sus discusiones pertinentes, en las conclusiones finales del trabajo, revisaremos todos los hallazgos a los que hemos llegado desde una perspectiva global con el fin de **concluir si los procesos que componen la arquitectura de la aritmética cognitiva (codificación, cálculo y producción de la respuesta) son interactivos o independientes**. Esta es una cuestión fundamental dentro del campo de la aritmética cognitiva y, por lo tanto, más allá de analizar el papel del formato en el rendimiento del cálculo, pretendemos interpretar estas relaciones para comprobar si pueden ayudar a clarificar este interrogante. Hasta entonces nos centraremos en los objetivos específicos que perseguimos.

Para dar respuesta al primero de los objetivos específicos de esta tesis doctoral, **"analizar si el formato es otra variable o dimensión que afecta directamente al rendimiento en cálculo"** en primer lugar analizaremos cómo se relaciona el formato de presentación de la operación (dígito vs. palabra) con el rendimiento en cálculo medido en tiempo de reacción (TR) y, en segundo lugar, exploraremos cómo se relaciona con la forma en la que se calcula la respuesta (recuperación vs. estrategias procedimentales). Y esto lo haremos tanto en el Estudio 1 como en el Estudio 2.

Numerosos estudios han puesto de manifiesto que el proceso de codificación en aritmética mental y cálculo simple se refleja en el denominado Efecto Formato (p. ej., Campbell, 1994; Dehaene y Cohen, 1995; Noël, et al., 1997). Este efecto refleja el hecho de que los tiempos de respuesta y los errores aumentan considerablemente cuando las operaciones o los problemas son presentados en formato palabra numérica (p. ej., "cinco + dos") frente al formato dígito arábigo (p. ej., "5 + 2"). Aunque este efecto ha sido ampliamente replicado, todavía no está clara la causa que explica este efecto. Se han propuesto varias explicaciones posibles a este efecto formato, siendo la más común la relacionada con la familiaridad de la operación (Schunn et al., 1997). Así, defienden que los incrementos en las latencias y los errores asociados al formato de presentación de palabra numérica pueden atribuirse a que los participantes no encuentran las operaciones presentadas en ese formato como familiares visualmente. Sin embargo, debido a la alta frecuencia con la que nos encontramos operaciones aritméticas en formato dígito, sería mucho más probable que se activara la solución a las operaciones presentadas en este formato ya que estamos más familiarizados con estas representaciones visuales y, por lo tanto, la asociación entre estas representaciones y la solución es mayor. Plantean que es poco probable que las representaciones visuales formadas por operaciones en formato palabra numérica activen la solución a las operaciones y en consecuencia los participantes convierten los estímulos en representaciones fonológicas que sí están fuertemente asociadas con el resultado a las operaciones. Este planteamiento de que los dígitos se procesan como códigos visuales y las palabras como códigos fonológicos es defendida por varios autores (p. ej., Campbell y Clark, 1992; Jackson y Coney, 2007) y lo utilizan para explicar el efeto del formato.

Tras analizar todas estas cuestiones, continuaremos avanzando en nuestros objetivos centrándonos en **"analizar cuáles son los aspectos que afectan a la variabilidad del efecto formato tanto a nivel de las características de los ítems como a nivel de las características de los participantes"**. Por lo tanto, dentro de este segundo objetivo pretendemos analizar qué otras variables (de dominio general, de dominio específico y/o dimensiones de las tareas: tamaño y operación) podrían estar influyendo en el efecto formato.

Esta es una cuestión importante ya que pese a que el efecto formato ha sido ampliamente replicado (Ashcraft y Battaglia, 1978; Campbell, 1985; Miller et al., 1984; Parkman y Groen, 1971) no existe un consenso sobre la causa que lo provoca. De esta manera, mientras unos defienden que es precisamente el formato lo que explica la ocurrencia de este efecto, otros trabajos han explicado el efecto formato en otros términos. Se han propuesto varias explicaciones posibles a este efecto formato, siendo la más común la relacionada con la familiaridad de la operación (Schunn et al., 1997). Defienden que estamos más familiarizados con las representaciones visuales formadas por operaciones en formato dígito arábigo que palabra numérica. Plantean que es poco probable que las representaciones visuales formadas por operaciones en formato palabra numérica activen la solución a las operaciones y por esto los participantes convierten los estímulos en representaciones fonológicas que sí están fuertemente asociadas con el resultado a las operaciones. Este planteamiento de que los dígitos se procesan como códigos visuales y las palabras como códigos fonológicos es defendida por varios autores (p. ej., Campbell y Clark, 1992; Jackson y Coney, 2007) y lo utilizan para explicar el efeto del formato.

En tercer lugar, pretendemos **“comprobar si esta influencia sigue existiendo aun cuando eliminamos la variable familiaridad de la operación, es decir, en los problemas numérico-verbales”**. Una de las principales limitaciones encontradas en los estudios previos llevados a cabo en el campo de la aritmética cognitiva en general y en el campo del estudio del efecto del formato sobre el cálculo en particular, en la gran variedad de pruebas diferentes que se han utilizado para medir el cálculo simple. Esta falta de consenso en las tareas utilizadas ha llevado en muchos casos a que los investigadores lleguen a conclusiones contrarias. Como argumentábamos en el punto anterior, muchos estudios han utilizado tareas de producción (p. ej., Campbell, 1999; Campbell & Clark, 1988, 1992; Dehaene, 1992; McCloskey et al., 1986; Noël y Seron, 1992) mientras que otros han utilizado tareas de verificación (p. ej., Campbell y Fugelsang, 2001; Megías y Macizo, 2016). También nos encontramos diferencias cuando analizamos los tipos de operaciones, de manera que algunos estudios han utilizado únicamente tareas de multiplicaciones (p. ej., Campbell, 1994; Campbell y Penner-Wilger, 2006; Noël et al. 1997), otros han usado sumas y multiplicaciones (p. ej., Seyler et al., 2003), otros han incluido las restas (p. ej., Campbell, 2008), incluso algunos las divisiones (p. ej., Campbell y Alberts, 2009). Además de estas distinciones, también hemos encontrado diferencias en el modo de presentar las operaciones aritméticas. Mientras que la mayor parte de los estudios han presentado la operación como la podemos encontrar habitualmente ajustándose al algoritmo (“3 +2”), otros han intentado eliminar la variable familiaridad incluyendo las operaciones en el contexto de problemas numérico-verbales presentados de manera secuencial (utilizando la metodología RSPV; p. ej., Orrantia et al., 2015).

MÉTODO

Participantes

La muestra inicial para los estudios que se presentan en esta tesis doctoral consta de un total de 218 participantes (63% mujeres: M[1] 19,9 años) estudiantes de segundo curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Salamanca. Aunque todos los estudiantes fueron evaluados durante el segundo curso del grado, no pertenecían a la misma promoción ya que las medidas se tomaron durante dos años. Mientras que a la mayoría de ellos se les administro la prueba de cálculo simple (Estudio 1), la prueba de resolución de problemas (Estudio 2) fue administrada a un porcentaje de esa muestra.

Materiales

En este apartado presentamos las tareas utilizadas en los análisis posteriores para los dos estudios. Aunque son estudios diferentes, las tareas para ambos han sido las mismas a excepción de las tareas utilizadas para medir el cálculo. De esta manera, en el Estudio 1 utilizamos 4 tareas de cálculo simple de sumas y restas presentadas en ambos formatos. Para el Estudio 2, tal como veremos a continuación, la medida de cálculo se deriva de la aplicación de problemas numérico-verbales de sumas y restas en ambos formatos.

Tareas de cálculo

a) Cálculo simple (Estudio 1):

El rendimiento en aritmética o cálculo simple en el primer estudio se midió con 4 tareas de sumas y restas simples de un solo dígito (1-9). Los estímulos de las pruebas están basados en los utilizados por Campbell (1994) aunque hemos realizado algunas variaciones y también los hemos transformado a restas, ya que en este estudio el rendimiento en cálculo se midió a través de sumas y restas. Los estímulos incluyeron todas las combinaciones posibles de números enteros de un solo dígito, excluyendo los problemas en los que el número se repite (p. ej., 3 + 3; 6–3) y los problemas que contienen 0 o 1 como operandos o respuestas.

i) Cálculo con sumas presentadas en formato dígito arábigo

[1] Media

ii) Cálculo con restas presentadas en formato dígito arábigo
iii) Cálculo con sumas presentadas en formato palabra numérica
iv) Cálculo con restas presentadas en formato palabra numérica

La medida de rendimiento aritmético utilizada en las 4 tareas (sumas y restas, ambas en formato dígito y formato palabra) fue un **Indice de Eficacia** (en adelante IE) que es el cociente entre el Tiempo de Respuesta (en adelante TR) y la proporción de aciertos en la tarea. Además de la medida en TR que refleja el rendimiento en la etapa de producción de la respuesta, también recogimos los datos referentes a la etapa en la que se calcula la respuesta. Para esto, tras cada ítem resuelto por el participante recogimos la información referente al **procedimiento utilizado para calcular la solución, o enfoque de resolución**: recuperación del hecho si estaba almacenado en la memoria y uso de estrategias procedimentales.

b) Problemas numérico-verbales (Estudio 2)

El segundo tipo de tareas de cálculo fueron las empleadas como variable dependiente en el Estudio 2. En este caso, el rendimiento en aritmética se midió a través de 4 tareas de problemas numérico-verbales en los que se utilizaban los mismos operandos y estímulos descritos en la tarea anterior, aunque éstos eran presentados dentro del contexto de un problema escrito. Cada ensayo experimental consistía en un problema verbal sin la usual pregunta que se presenta al final. Todos los problemas verbales pertenecían a las categorías de Cambio 1 (sumas) y Cambio 2 (restas) de acuerdo con la clasificación de Riley et al. (1983).

i) Problemas con sumas presentadas en formato dígito arábigo
ii) Problemas con restas presentadas en formato dígito arábigo
iii) Problemas con sumas presentadas en formato palabra numérica
iv) Problemas con restas presentadas en formato palabra numérica

La medida de rendimiento aritmético utilizada en las 4 tareas (problemas de sumas y de restas, ambos en formato dígito y formato palabra) fue un **Indice de Eficacia** (IE) que es el cociente entre el Tiempo de Respuesta (TR) y la proporción de aciertos en la tarea. Además de la medida en TR que refleja el rendimiento en la etapa de producción de la respuesta, también recogimos los datos referentes a la etapa en la que se calcula la respuesta. Para esto, tras cada ítem resuelto por el participante recogimos la información referente al **procedimiento utilizado para calcular la solución o enfoque de resolución**:

recuperación del hecho si estaba almacenado en la memoria y uso de estrategias procedimentales.

c) TEA-3: Tests de Aptitudes Escolares, subprueba de cálculo

El test es una adaptación al castellano del test original de Thurstone y Thurstone (1957; SRA, Testo of educational ability). Se divide en 3 niveles en función de la edad del evaluado y se utiliza principalmente dentro del ámbito académico. Hemos utilizado el tercer nivel que explora las habilidades de los estudiantes con mayor edad. El TEA-3 se compone de tres subescalas que miden el nivel de razonamiento, las aptitudes verbales y las aptitudes numéricas. Esta última subescala es la que hemos utilizado para los estudios que presentamos. Esta subprueba evalúa la velocidad y la precisión con la que los participantes realizan operaciones mentales con números, conceptos cuantitativos como el sistema de base 10, fracciones, porcentajes y números romanos. Se obtuvieron puntuaciones brutas que iban de 0 a 30 y se pidió a los participantes que resolvieran la tarea en menos de 11 minutos.

Tareas de procesamiento numérico

a) Procesamiento de magnitudes numéricas simbólicas (1-9)

Con el fin de medir la eficacia del procesamiento de magnitudes numéricas simbólicas (PSB) de los participantes se aplicó una tarea de comparación de magnitudes numéricas simbólicas. Esta tarea también fue diseñada con el *software* SuperLab y aplicada en un ordenador de 15 pulgadas de manera que los participantes veían en la pantalla dos numerosidades en formato simbólico (dígitos arábigos del 1 al 9) de manera simultánea en color negro sobre fondo blanco. La tarea de los participantes era indicar de la manera más rápida y precisa e qué lado de la pantalla se encontraba la numerosidad mayor presionando la tecla “a“ (si el dígito mayor se encontraba en la parte izquierda de la pantalla) y la tecla “l” (cuando el número mayor se encontraba en la parte derecha). Cada estímulo era precedido por un punto de fijación (***) que permanecía en la pantalla durante 500 milisegundos para avisar al participante de que el siguiente estímulo aparecería en la pantalla y tras él una pantalla en blanco que también se presentaba durante 500 milisegundos. A continuación, aparecían las parejas de dígitos, cada uno a un lado de la pantalla y el estímulo permanecía en la pantalla hasta que el participante emitía una respuesta presionando la tecla correspondiente. En total se presentaban 4 estímulos de práctica y 72 ensayos experimentales. Estos 72 estímulos correspondían a todas las posibles combinaciones de 1 a 9 con una distancia numérica entre ellos de 1 a 6.

La medida de esta tarea empleada en los Estudios 1 y 2 fue el **Índice de Eficacia** que es el cociente entre el tiempo de reacción entre la proporción de aciertos.

b) Procesamiento de magnitudes numéricas no simbólicas

Para medir la eficacia del procesamiento de magnitudes numéricas no simbólicas (PNSB) de los participantes se aplicó una tarea de comparación de magnitudes numéricas no simbólicas. En esta tarea utilizamos una versión de *PANAmath* (the psychophysical assessment of number-senteacuity; Halberda & Ly, 2013). En ella se presenta a los participantes sucesivas pantallas con dos conjuntos de puntos (un conjunto con puntos en color azul y otro conjunto en color amarillo) sobre un fondo gris. La tarea del participante consistía en indicar de la manera más rápida y precisa posible el conjunto más numeroso presionando una tecla en el teclado del ordenador (S si el conjunto más numeroso se encontraba a la izquierda de la pantalla y L si el conjunto más numeroso se encontraba en la derecha de la pantalla). El rango de numerosidades iba desde 5 puntos hasta 21 puntos con diferentes 4 rangos de ratios (de 1.1 a 1.2, M=1.1489; de 1.25 a 1.35, M=1.299; de 1.5; de 2). La prueba constó de 160 ensayos más 8 de práctica. Cada ensayo comenzó con un punto de fijación (600 milisegundos) seguido por los conjuntos de puntos que permanecieron un tiempo limitado en la pantalla (2000 ms) para evitar conteo. Para pasar al siguiente ensayo el participante tenía que presionar la barra espaciadora. En la mitad de los ensayos los puntos amarillos fueron más numerosos y en la otra mitad los azules. Se controlaron también el resto de las variables continuas como el tamaño de los puntos, el área que ocupaban de la pantalla y la luminosidad para prevenir estrategias basadas en dichas variables. El radio medio de los puntos que se presentaron era de 36 píxeles pudiendo variar hasta en un 20%. En la mitad de los ensayos el tamaño de los puntos y el área decrementó con la numerosidad, y en la otra mitad incrementó.

La medida utilizada en ambos estudios para esta tarea fue la **fracción de Weber**. Cuanto menor es el valor de la fracción de Weber, mayor es la precisión con la que el participante distingue las numerosidades no simbólicas. Sin embargo, fracciones de Weber altas indican que la precisión del participante para procesar magnitudes numéricas no simbólicas es menor.

Tareas de control

a) Inteligencia no verbal

La inteligencia no verbal (NVIT) fue medida con el test de las Matrices Progresivas de Raven (Raven et al., 1992). Este test es una prueba psicométrica que tiene como meta principal medir el nivel de inteligencia general no verbal, también conocido como factor G. Este test está compuesto por un total de 60 matrices presentadas en láminas que se reparten en 5 series. Las matrices son composiciones geométricas a las que les falta un hueco que debe completarse con alguna de las opciones que se presentan en la parte inferior de cada lámina. Los participantes completaron el test en menos de 20 minutos.

La medida utilizada para los estudios fueron las **puntuaciones directas** de los participantes, esto es, el número de aciertos total en los estímulos de la prueba.

b) Memoria de trabajo

Para medir la memoria de trabajo (MT) de los participantes, utilizamos la subprueba denominada "Dígitos" en su versión "orden inverso" de la cuarta edición de la versión española de la escala de inteligencia de Wechsler para adultos – IV (WAIS-IV). En esta tarea los participantes tienen que repetir en el orden inverso (hacia atrás, 7 ítems en total) una serie de números que son pronunciados por el experimentador de forma verbal. Las secuencias de números eran inicialmente de dos dígitos, pero la dificultad de la tarea se iba incrementando a medida que avanzaba hasta alcanzar el último ítem, cuyos intentos estaban compuestos por un total de 8 números. La tarea constaba de un total de 7 ítems con dos intentos posibles dentro de cada ítem, de manera que la tarea se finalizaba cuando los participantes cometían dos fallos dentro del mismo ítem, esto es, cuando fallaban los dos intentos.

La medida utilizada en esta tarea fue la **puntuación directa** obtenida por el participante que correspondía con el número total de aciertos. Así la puntuación máxima fue de 16 (2 intentos x 8 ítems).

c) Memoria de trabajo visoespacial

Para medir la memoria de trabajo visoespacial (MTVE) utilizamos el test estandarizado "Cubos de Corsi" que está basada en la prueba diseñada por Lezak (1995). En esta tarea el experimentador va señalando sucesivamente una secuencia de bloques azules sobre un tablero blanco y el participante tiene que reproducir la secuencia. Hay un total de 9 bloques sobre el tablero y las secuencias son aleatorias, aunque determinadas por las normas de aplicación de la prueba. El test incluye dos aplicaciones: una en la que el participante tiene que repetir las secuencias en el mismo orden que el experimentador (versión directa) y otra en la que tiene que repetir la secuencia en orden inverso (versión inversa). La tarea comienza con secuencias de dos bloques y a medida que avanza la tarea se va incrementando la dificultad hasta llegar a presentar secuencias de 9 bloques. Por lo tanto, consta de un total de 8 ítems y dentro de cada ítem hay 2 intentos de manera que la tarea finaliza cuando el participante comete 2 errores consecutivos dentro del mismo ítem.

La medida utilizada en esta tarea fue la **puntuación directa** obtenida por el participante que correspondía con la suma del número total de aciertos en la versión directa y en la versión inversa.

d) Velocidad de procesamiento

La tarea de velocidad de procesamiento (VP) también fue diseñada con el *software* SuperLab y aplicada en un ordenador de 15 pulgadas de manera que los participantes tenían que decidir de la manera más rápida y precisa posible en qué lado de la pantalla aparecía un cuadrado de color rojo. La tarea constaba de un total de 20 estímulos en los que se presenta a los participantes dos cuadrados: uno en color negro y el otro en color rojo. En la mitad de los ensayos el cuadrado rojo aparecía a la derecha y en la otra mitad apareció a la izquierda. La disposición de los cuadrados fue aleatorizada y aparecían en ambos lados de la pantalla. La tarea del participante fue indicar en qué lado de la pantalla se encontraba el cuadrado de color rojo presionando la tecla “a” cuando éste se encontraba en la parte izquierda de la pantalla, y la tecla “l” si se encontraba en la parte derecha. La tarea era precedida por cuatro ensayos de práctica para que los participantes comprendiesen y se habituasen al mecanismo de la tarea. Cada ensayo era precedido por un punto de fijación (*) que permanecía en la pantalla durante 500 milisegundos para avisar al participante de que aparecería el siguiente estímulo. La medida utilizada en los estudios fue el **tiempo de reacción** de los participantes ya que, al ser una tarea tan sencilla y corta, el índice de errores fue prácticamente cero.

Procedimiento

Los participantes fueron evaluados en estas tareas y otras que no han sido incluidas en los estudios en un total de 4 sesiones de evaluación de una duración de entre 45 – 60 minutos. Una de estas sesiones de evaluación fue grupal y en ella se aplicó el subtest de cálculo del TEA – 3 y las Matrices Progresivas de Raven (Raven et al., 1992). El resto de tareas son de aplicación individual y se administraron dentro de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca en el despacho de Psicología Evolutiva. El orden de aplicación de las pruebas fue aleatorizado, de manera que los participantes resolvían las tareas en orden y sesiones diferentes. Dentro de las tareas utilizadas en los estudios algunas se aplican a través del ordenador y fueron administradas en ordenadores portátiles con pantallas de 15 pulgadas utilizando el software SuperLab para las 4 tareas de cálculo (requería también de un sistema de micrófono RSVP para registrar las respuestas), las 4 tareas de problemas (requería también de un sistema de micrófono RSVP para registrar las respuestas), la tarea de velocidad de procesamiento y la tarea de procesamiento de magnitudes simbólicas 1-9. La tarea para medir el procesamiento de las magnitudes no simbólicas fue diseñada y aplicada con el software PANAmath (Halberda & Ly, 2013) también en el ordenador. El resto de las tareas (memoria de trabajo y memoria de trabajo visoespacial) requerían de hojas de papel para su registro y un tablero con cubos azules para la tarea de los cubos de Corsi.

La recogida de datos se llevó a cabo durante dos años consecutivos durante el periodo correspondiente al primer cuatrimestre académico (entre septiembre y febrero del siguiente año). En total, se realizaron 648 sesiones de evaluación individuales de entre 45 y 60 minutos y 4 sesiones de evaluación grupal de 60 minutos. En cada año, tras los 5 meses de la recogida de datos, se dedicó el resto del año al tratamiento de datos.

CONCLUSIONES

En este apartado perseguimos hacer una discusión general sobre los hallazgos a los que hemos llegado en los dos estudios presentados. El objetivo principal de esta tesis era analizar el efecto formato y estudiarlo con profundidad utilizando dos tipos de tareas diferentes. En los apartados de discusión para cada uno de los estudios ya hemos comentado las implicaciones de los resultados que hemos encontrado por lo que en este momento pretendemos hacer una interpretación general teniendo en cuenta los resultados globales.

La gran pregunta que nos hemos hecho desde el principio de esta Tesis Doctoral, y como bien podrá intuir el lector, es "**averiguar si los procesos que componen la arquitectura de la aritmética cognitiva (codificación, cálculo y producción de la respuesta) son aditivos o interactivos"**. Como ya venimos adelantando desde hace unas páginas, contestar a la pregunta de si el formato influye en la aritmética cognitiva tanto en el nivel de codificación como en el nivel de cálculo de la solución como en la producción de la respuesta implicaría contribuir a aclarar una importante cuestión en debate para los teóricos de la aritmética cognitiva: ¿son los procesos de codificación y cálculo aditivos o interactivos? Aún no se ha llegado a un consenso sobre cómo se relacionan las diferentes etapas involucradas en la aritmética (codificación, cálculo y producción) entre sí, por lo que en la literatura encontramos algunas posturas que defienden que estos procesos se relacionan de manera aditiva (modelo de McCloskey y modelo de Dehaene) y otras que defienden que interactúan (hipótesis de la codificación compleja de Campbell) entre ellas durante las tareas de cálculo. En este momento cabría preguntarnos si este debate tiene solución y si habría alguna manera de aportar argumentos contundentes que apoyen una u otra postura. Consideramos que sí y por este motivo hemos realizado este trabajo. Aunque también apuntaremos que no es tarea fácil ya que los hallazgos encontrados en la literatura son contradictorios, presentan limitaciones y no son concluyentes por lo que es difícil tener claro qué tareas elegir para medir el cálculo y qué tipo de análisis llevar a cabo para analizar los resultados. No obstante, con este trabajo nosotros hemos intentado superar algunas de esas limitaciones.

Tomando como referencia la arquitectura de la aritmética que describimos ampliamente en el Capítulo II, una tarea de cálculo simple implicaría los siguientes procesos: (1) codificación de los dos estímulos numéricos que pueden presentarse en formato dígito o en formato palabra numérica, (2) cálculo de la solución a la operación a través de la recuperación directa del hecho aritmético almacenado en la memoria o a través del uso de estrategias procedimentales basadas en el conteo y (3) producción de la respuesta de forma oral o escrita.

De manera más concreta, cuando tenemos que resolver una tarea de cálculo simple en primer lugar nos enfrentaríamos a la codificación del estímulo que es la fase en la que, cuando nos exponemos a un estímulo aritmético concreto (p. ej., “2 + 4” o “dos + cuatro”), transformamos los estímulos numéricos en los códigos internos apropiados que nos permitirán manipularlos y operar con ellos. Esta primera etapa es crucial cuando hablamos del efecto formato ya que en este momento es donde las influencias del formato de presentación del estímulo son mayores. De hecho, son muchos trabajos los que han explorado esta influencia. Es más, de alguna manera, es en la etapa de la arquitectura de la aritmética cognitiva donde hay un mayor acuerdo sobre la influencia del formato. Para la comunidad científica en general está claro que no procesamos de la misma manera los estímulos en formato dígito que en formato palabra, tal y como describimos ampliamente en el Capítulo II. Las diferentes posturas teóricas y modelos explicativos de la aritmética cognitiva coinciden que es en esta etapa en la que está claro que el formato influye, siendo la cuestión que aún está en el aire si el formato influye también en las otras dos etapas: cálculo de la solución y producción de la respuesta. El segundo proceso implicado en la aritmética sería el cálculo de la respuesta que puede llevarse a cabo a través de estrategias procedimentales basadas en el conteo o a través del proceso de recuperación del hecho aritmético almacenado en la memoria a largo plazo. Esta etapa no implica una conducta manifiesta del participante por lo que solo puede ser medida a través de los autoinformes que proporciona el participante o a través de los reportes ítem tras ítem durante todos los ensayos que componen la tarea. Finalmente, la tercera etapa implicada en el cálculo sería la producción de la respuesta que es el momento en el hemos de transformar la solución a la que hemos llegado en la etapa anterior en un formato adecuado que nos permita producir la respuesta. Este proceso de producción de la respuesta implica una conducta expresa del participante, que en nuestro caso será verbal, y es medida en términos de latencias y de proporción de aciertos.

Aunque está claro que las palabras numéricas y los dígitos arábigos no se procesan de la misma manera, en qué sentido se producen esas diferencias aún genera algo de debate. No obstante, este aspecto no es relevante para esta tesis ya que nos centraremos en el cálculo. Donde no existe tanto consenso es en estas dos últimas etapas o procesos relacionados con el cálculo. Las diferentes posiciones teóricas y modelos explicativos de la aritmética cognitiva no han encontrado un acuerdo sobre si el formato de presentación del estímulo afecta también a las etapas en las que se calcula la solución y se produce. Por un lado, desde algunos planteamientos hemos visto que consideran que el formato sólo afecta al momento de codificación de los estímulos y no afecta de manera directa a las otras dos etapas más relacionadas con el cálculo en sí mismo (modelo de McCloskey y modelo de Dehaene). Esta asunción implicaría que los procesos involucrados en el cálculo son aditivos e independientes entre sí y desde esta posición se defiende que, una vez que los números que componen la operación han sido codificados, los siguientes procesos ocurren de manera independiente del formato de presentación de los números. De forma alternativa a esta posición, existen otras posturas teóricas que defienden que el formato de presentación de los estímulos sí puede influir de manera directa en los procesos del cálculo, tanto a nivel de procedimiento para calcular la solución (recuperación vs. estrategias) como al nivel de producción de la respuesta (eficiencia medida en TR y en proporción de aciertos). Al defender que el formato afecta tanto al procesamiento como al cálculo, estos autores (hipótesis de la codificación compleja de Campbell) defienden que los procesos de codificación y cálculo son interactivos de manera que se relacionan entre ellos y no ocurren de forma secuencial, sino que pueden activarse a la vez.

Por todo esto, parece que la clave para responder a esta pregunta está en el efecto formato que ha sido el objeto de estudio de esta Tesis Doctoral. Así, hemos llevado a cabo dos estudios en los que analizamos el efecto del formato en dos tareas de cálculo de una forma exhaustiva. Desde que diseñamos este trabajo, queríamos indagar y profundizar en tres cuestiones principalmente: (1) hasta qué punto la variable contextual formato de presentación explica el rendimiento (tiempo de reacción) en cálculo y la manera en que llegamos a la solución de la operación o el problema(recuperación vs. estrategias); (2) hemos investigado qué otras variables, tanto las relacionadas con los ítems (operación y tamaño) como las relacionadas con los participantes (variables de dominio general y variables de dominio específico) influyen de manera directa en el efecto formato; (3) finalmente, hemos puesto a prueba en qué medida el efecto formato puede mostrar alguna interacción tanto con el tamaño de la operación ya que esta interacción se ha utilizado como la prueba crítica para comprobar la independencia de la codificación y los procesos de cálculo. A continuación, comentaremos qué hemos encontrado para cada una de estas cuestiones y qué nos dicen estos hallazgos sobre la cuestión de cómo se relacionan entre sí las diferentes etapas de la arquitectura de la aritmética cognitiva.

En primer lugar, tras analizar hasta qué punto la variable contextual explica el cálculo, hemos encontrado que el formato es capaz de explicar de manera significativa la varianza en las puntuaciones a nivel de tiempo de reacción y también explica de manera significativa el modo en el que los participantes calculan la solución (esto es, la probabilidad que tienen los participantes de desencadenar procesos de recuperación de los hechos aritméticos desde la memoria y/o la probabilidad que tienen los participantes de utilizar estrategias procedimentales como el conteo, la transformación o la descomposición para llegar a la solución de la tarea de cálculo). Además esta relación significativa se producía en los dos estudios presentados, esto es, tanto cuando las tareas de cálculo utilizadas como variable dependiente fueron operaciones simples (estudio 1:

sumas con dígitos, sumas con palabras, restas con dígitos y restas con palabras), como cuando la variable dependiente correspondía con tareas en las que se presentaban problemas numérico verbales de forma secuencial (estudio 2: problemas de sumas con palabras, problemas de sumas con dígitos, problemas de restas con palabras y problemas de restas con dígitos).

A la vista de estos resultados podemos concluir que el efecto del formato de presentación es un efecto robusto puesto que se ha replicado en todos los análisis que hemos llevado a cabo. Y no solo esto, sino que el tipo de análisis estadístico que hemos empleado nos permite analizar esta relación controlando el resto de variables, por lo que el formato de presentación explica el cálculo más allá del resto de variables incluidas en el estudio. El hecho de que este efecto se muestre tan robusto nos hace inclinarnos a pensar que las etapas que componen la arquitectura de la aritmética cognitiva se relacionan entre ellas de manera interactiva puesto que parece que el formato influye no solo en la etapa de procesamiento del estímulo, sino también en las sucesivas etapas de cálculo. Bien es cierto que cabría pensar que cuando medimos el tiempo de reacción, este tiempo está reflejando todo lo que ocurre con anterioridad. Esto es, el tiempo comienza a medirse desde que el participante produce la respuesta (tercera etapa) y en consecuencia refleja no solo esta etapa sino también las anteriores (codificación y cálculo de la respuesta). Sin embargo, cuando lo planteamos desde el punto de vista del enfoque de la solución (recuperación vs. estrategias) estamos midiendo solamente la segunda etapa de la arquitectura que es precisamente el cálculo de la respuesta. Por lo tanto, esto refleja irremediablemente que el formato influye en la etapa de cálculo de la respuesta, lo que sigue dirigiéndonos hacia la perspectiva que defiende que las etapas del cálculo no ocurren de manera serial y aditiva, sino que puede haber una coactivación de las diferentes etapas durante los procesos de cálculo (hipótesis de la codificación compleja de Dehaene). Como veremos más adelante, existe una prueba aún más crítica para contestar a esta cuestión (interacción formato y tamaño del problema), que también hemos puesto a prueba, por lo que más adelante la comentaremos.

La segunda cuestión importante que pretendíamos indagar era la referente a qué otros aspectos relacionados con las tareas y relacionados con los participantes son capaces de explicar el efecto formato de presentación, y cómo varía en función de dichas variables. En este punto es donde no hemos encontrado tanto consenso entre nuestros resultados ya que la influencia de estas variables cambia en función de la tarea de cálculo que utilicemos y en función de la medida que intentamos explicar (tiempos de reacción vs. probabilidad de recuperación de hechos desde la memoria). De esta manera, la magnitud del efecto formato en el Estudio 1 cuando utilizamos tareas de cálculo simple se va a ver influido por 4 aspectos fundamentales: el tipo de operación (suma vs. resta), la capacidad de la memoria de trabajo visoespacial (MTVE), la memoria de trabajo. Mientras que estas tres variables influyen en la magnitud del efecto formato cuando se analiza a nivel de TR, sólo la capacidad de la MTVE influye en su magnitud cuando lo analizamos en relación con la probabilidad de recuperar hechos aritméticos almacenados en la memoria. Si nos centramos en el Estudio 2 y en los problemas numérico-verbales, encontramos que las variables que influyen de manera directa y significativa en la magnitud del tamaño formato son 2: la capacidad de procesamiento de magnitudes numéricas no simbólicas (precisión del Sistema Numérico Aproximado) y la capacidad de la MTVE.

Puesto que los resultados son bastante más diversos en lo que respecta a esta cuestión, en cada una de las discusiones de los estudios hemos propuesto diversas explicaciones e hipótesis que podrían estar explicando estas relaciones tan diversas. En base a los trabajos que hemos revisado, pese a que hemos encontrado estudios en los que relacionan estas variables con el cálculo, no hemos encontrado ninguno en el que establezcan relaciones entre el efecto formato y este tipo de aspectos relativos a los ítems y relativos a las personas. Por todo esto, sería adecuado profundizar más en estas cuestiones para intentar analizar de manera más minuciosa por qué la MT, la MTVE y la precisión del SNA principalmente son capaces de explicar la magnitud del efecto formato en las tareas de cálculo simple. Varias explicaciones de las que hemos propuesto podrían ser congruentes con la postura de Campbell de que las etapas de la arquitectura aritmética interactúan entre sí. Pero también encontramos otros resultados como que los participantes con alta MTVE no muestran diferencias en la probabilidad de recuperar la solución a la operación de la memoria en función del formato de presentación (no se produce el efecto formato), lo que nos llevaría a plantearnos que quizás el formato no influye en las etapas del cálculo en todos los casos y tendríamos que plantearnos que estas etapas quizás son independientes. Por todo esto, los resultados en lo que respecta a esta cuestión son muy variados y poco concluyentes, al menos en este momento, por lo que requerirían de un estudio más exhaustivo.

Por último, la ultima cuestión que nos hemos planteado es si el efecto formato muestra una interacción significativa con el efecto tamaño de la operación. Esta cuestión toma especial relevancia para este trabajo puesto que ha sido la prueba crítica que se ha utilizado para demostrar la dependencia o independencia de las etapas de la aritmética cognitiva. Si las etapas fueran interactivas, el formato en el que se presentan los estímulos influiría en las tres etapas de la aritmética cognitiva y la forma de demostrarlo es a través de su interacción con el efecto tamaño. Esta afirmación es justificada porque si cuando operamos con palabras las latencias y errores incrementan y además lo hacen en mayor medida cuando los operandos son números grandes, esto estaría indicando que los costes en tiempo de reacción y tasa de errores asociados al formato se producen en la etapa de cálculo ya que cuando procesamos números menores que 9 (tal y como se hace en las tareas de cálculo simple), el tamaño del operando no influye en el tiempo dedicado al procesamiento puesto que dedicamos tiempos similares a procesar estos números. Por lo tanto, los costes serían debidos al formato en el que se presentan estos números.

Cuando hemos analizado en nuestros datos si se producía este efecto de interacción formato x tamaño, hemos encontrado que dicho efecto no es significativo en ninguno de los dos estudios presentados. En un principio, esto podría parecer indicar que el formato no influye en las etapas de cálculo y por lo tanto las etapas de la arquitectura aritmética son aditivas e independientes. Sin embargo, en los trabajos revisados, esta interacción es puesta a prueba a través de un ANOVA de dos factores donde concluyen si existen diferencias significativas entre las medias de las puntuaciones de los grupos. Sin embargo, nosotros hemos utilizado un análisis en el que tenemos en cuenta todas las puntuaciones y la variabilidad a nivel interindividual e intraindividual. Además, esta interacción es puesta a prueba después de controlar el resto de variables, es decir, nosotros comprobamos si esta interacción ocurría después de eliminar la variabilidad explicada por el resto de variables (las contextuales, las de dominio general y las de dominio específico). Por todo esto, consideramos que quizás no sean los datos, sino más bien los análisis estadísticos los que nos han llevado a no encontrar esta interacción significativa. Así, tal y como comentaremos en el siguiente apartado, convendría comprobar que si esta interacción se convierte en significativa si utilizamos un ANOVA para ponerla a prueba.

Por todo lo anterior, no podemos dar una respuesta contundente a la pregunta que nos hemos planteado a lo largo de este trabajo: ¿son las etapas de la arquitectura de la aritmética cognitiva aditivas o independientes? Y esto es así porque nuestros resultados son mixtos. Los patrones encontrados en ambos estudios en relación con el enfoque de la solución (etapa de cálculo de la solución) indican claramente que el efecto formato influye en este proceso de cálculo y este motivo indicaría que las etapas son interactivas. También el efecto formato significativo encontrado en ambos estudios cuando analizamos los tiempos de reacción apuntan hacia una postura interactiva. Sin embargo, no hemos encontrado que se produzca una interacción entre el formato y el tamaño después de controlar el resto de variables, lo que estaría apuntando a que no existe interacción entre las etapas de la aritmética cognitiva y esto daría apoyo a los modelos que defienden que la arquitectura de la aritmética se compone por etapas independientes entre sí.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ashcraft, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. *Cognition, 44*, 75-106.

Ashcraft, M. H., & Battaglia, J. (1978). Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory, 4*(5), 527–538.

Barth, H., Kanwisher, E. & Spelke, E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition, 86*, 201-221.

Blankenberger, S., & Vorberg, D. (1997). The single-format assumption in arithmetic fact retrieval. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 23*(3), 721–738.

Buckley, P. B., & Gilman, C. B. (1974). Comparison of digits and dot patterns. *Journal of Experimental Psychology, 103*, 1131-1136.

Butterworth, B. (1999). *What counts: How every brain is hardwire for math*. New York, NY, USA: The Free Press.

Butterworth, B., Reeve, R., & Reynolds, F. (2011). Using mental representations of space when words are unavailable: studies of enumeration an arithmetic in indigenous Australia. *Journal of Cross-Cultural Psychology, 42*(4), 630-638.

Campbell, J. I. D. (1985). *Associative interference in mental computation*. Unpublished doctoral dissertation, University of Waterloo.

Campbell, C. A. (1992). A Decision Theory Model for Entrepreneurial Acts. *Entrepreneurship Theory and Practice*, *17*(1), 21–27.

Campbell, J.I.D. (1994). Architectures for numerical cognition. *Cognition, 53*, 1-44.

Campb

Campbell, J.I.D. (1999). The Surface formxproblem size interaction in cognitive arithmetic: Evidence against an encoding locus. Cognition, 70, 25-33.

Campbell, J. I. D. & Clark, J. M. (1988). An Encoding-Complex View of Cognitive Number Processing: Comment on McCloskey, Sokol, and Goodman (1986). *Journal of Experimental Psychology: General*, *117*(2), 204-214.

Campbell, J. I. D. & Clark, J. M. (1992). Cognitive Number Processing: An Encoding-Complex Perspective. In J. I. D. Campbell (Ed.), *The Nature and Origin of Mathematics Skills*. Amsterdam: North-Holland Elsevier. 457-492.

Campbell, J. I. D. & Epp, L. J. (2004). An Encoding-Complex Approach to Numerical Cognition in Chinese-English Bilinguals. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, *58*(4), 229-244.

Campbell, J. I. D., & Epp, L. J. (2005). Architectures for arithmetic. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 347–360). Psychology Press.

Campbell, J. I. D., & Fugelsang, J. (2001). Strategy choice for arithmetic verification: Effects of numerical surface form. *Cognition, 80*, B21–B30.

Campbell, J. I. D., & Penner-Wilger, M. (2006). Calculation latency: The μ of memory and the τ of transformation. *Memory & Cognition, 34*, 217-226.

Campbell, J. I. D. & Xue, Q. (2001). Cognitive Arithmetic Across Cultures. *Journal of Experimental Psychology: General*, *130*(2), 299-315.

Cantlon, J. F., & Brannon, E. M. (2006). Shared system for ordering small and large numbers in monkeys and humans. *Psychological Science*, *17*, 401–406.

Carey, S. (2001). Cognitive foundations of arithmetic: evolution and ontogenesis. *MindLang.* 16, 37–55.

Carper, D. V. (1942) Seeing Numbers as Groups in Primary-Grade Arithmetic. *Elementary School Journal 43*, 166-70.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44*, 1-42.

Dehaene, S. (1997). *The number sense.* New York, NY: Oxford University Press.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). Towards an anatomi-cal and functional model of number processing.Mathematical Cognition,1, 83–120.

D

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive neuropsychology*, *20*(3-6), 487-506.

Douglas, H. R. (1925). The Development of Number Concept in Children of Preschool and Kindergarten Ages. *Journal of Experimental Psychology 8*, 443-70.

Duncan, G. J., Dowsett,C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston,A., Dlebanov, P., et al. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology, 43*(6), 1428-1446.

Feigenson, L. Carey, S., & Hauser, M. (2002). The representations underlying infants´ choice of more: Object files versus analog magnitudes. *Psychological Science, 13*(2), 150-156.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. Trends in Cognitive Sciences, 8(7), 307–314.

Finnie, R., & Meng, R. (2001). Literacy and employability. Perspectives on Labour and Income, 8(3), 5-13.

Freeman, F. N. (1912). Grouped Objects as a Concrete Basis for the Number Idea. *Elementary School Teacher, 8*, 300-314.

Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: evidence from Amazonia. *Science, 306*, 496-499.

Groen, G. J., & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review, 79*(4), 329–343.

Halberda, J., Mazzocco, M.M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. Nature, 455 (7213), 665–668.

Halberda, J., Ly, R., Wilmer, J. B., Naiman, D. Q., & Germine, L. (2012). Number sense across the lifespan as revealed by a massive Internet-based sample. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 109*(28), 11116-11120.

Holloway, I. D. & Ansari, D. (2008). Domain-specific and domain-general changes in children´s development of number comparison. *Developmental Science, 11*(5), 644-649.

Holloway I.D., & Ansari D. (2012) Learning Numerical Symbols. In: Seel N.M. (eds) Encyclopedia of the Sciences of Learning. Springer, Boston, MA.

Huntley-Fenner, G. (2001). Children's understanding of number is similar to adults' and rats': Numerical estimation by 5–7-year olds. *Cognition, 78*(3), B27–B40.

Jackson, N. D. & Coney, J. R. (2007). Simple arithmetic processing: Individual differences in automaticity. *European Journal of Cognitive Psychology, 19,* 141–160.

Kolkman, M. E., Kroesbergen, E. H., & Leseman, P. P. (2013). Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. *Learning and Instruction*, *25*, 95-103.

Lezak, M. D. (1995). *Neuropsychological assessment* (3rd ed.). Oxford University Press.

Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2010). Stable individual differences in number discrimination in infancy. *Developmental science*, *13*(6), 900–906.

Lyons, I. M., & Ansari, D. (2015). Foundations of Children´s Numerical and Mathematical Skills: The Roles of Symbolic and Nonsymbolic Representations of Numerical Magnitude. In: Janette B. Benson (ed) *Advances in Child Development and Behavior, 48*, 93-116. Burlington: Academic Press.

Lyons, I. M., Ansari, D., & Beilock, S. L. (2012). Symbolic estrangement: Evidence against a strong association between numerical symbols and the quantities they represent. *Journal of Experimental Psychology: General, 141,* 635–641.

Lyons, I. M., Nuerk, H-C., & Ansari, D. (2015). Rethinking the implications of numerical ratio effects for understanding the development of representational precision and numerical processing across formats. *Journal of Experimental Psychology: General*. Advance online publication.

McCloskey, M. (1992). Cognitive mechanisms in numerical processing: evidence from acquired dyscalculia. *Cognition, 44*,107-157.

McCloskey, M. (2007). Quantitative literacy and developmental dyscalculias. In D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Eds.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (p. 415–429). Paul H. Brookes Publishing Co.

McCloskey, M., Caramazza, A., & Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: evidence from dyscalculia. *Brain and cognition*, *4*(2), 171–196.

McCloskey, M., & Macaruso, P. (1994). Architecture of cognitive numerical processing mechanisms: Contrasting perspectives on theory development and evaluation. *Cahiers de Psychologie Cognitive/Current Psychology of Cognition, 13*(3), 275–295.

McCloskey, M., & Macaruso, P. (1995). Representing and using numerical information. *American Psychologist, 50*(5), 351–363.

McCloskey, M., Sokol, S. M. & Goodman, R. A. (1986). Cognitive processes in verbal-number production: Inferences from the performance of brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology: General*, *115*, 307-330.

Megías, P., & Macizo, P. (2016). The retrieval and selection of arithmetic facts in oral arithmetic. *Acta psychologica*, *170*, 155–162.

Miller, K., Perlmutter, M., & Keating, D. (1984). Cognitive arithmetic: Comparison of operations. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 10(1), 46–60.

Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for Judgements of Numerical Inequality. *Nature, 215*, 1519-1520.

Mundy, E., & Gilmore, C. K. (2009). Children's mapping between symbolic and nonsymbolic representations of number. *Journal of experimental child psychology*, *103*(4), 490-502.

Noël, M.P., Fias, W., & Brysbaert, M. (1997). About the influence of the presentation format on arithmetical-fact retrieval processes. *Cognition*, *63*, 335-374.

Noël, M.-P., & Seron, X. (1992). Notational constraints and number processing: A reappraisal of the Gonzalez and Kolers (1982) study. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology A: Human Experimental Psychology, 45A*(3), 451–478.

Noël, M.-P., & Seron, X. (1993). Arabic number reading deficit: A single case study: or When 236 is read (2306) and judged superior to 1258. *Cognitive Neuropsychology, 10*(4), 317–339.

Orrantia, J., Múñez, D., San Romualdo, S. & Verschaffel, L. (2015). Effects of numerical Surface form in arithmetic Word problems. *International Journal of Metodology and Experimental Psychology, 46*(2), 265-281.

Parkman, J. M., & Groen, G. J. (1971). Temporal aspects of simple addition and comparison. *Journal of Experimental Psychology, 89*(2), 335–342.

Parsons, S. and Bynner, J. (2005) *Measuring Basic Skills for Longitudinal Study: The design and development of instruments for use with cohort members in the age 34 follow-up in the 1970 British Cohort Study (BCS70)*. London: National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy

Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. Trends in Cognitive Sciences, 14(12), 542–551.

Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and aproximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science, 306*(5695), 499-503.

Raven JC (1962) Advanced Progressive Matrices, Set II. London: H. K. Lewis.

Raven, J. C., Court, J. H., & Raven, J. (1992). *Standard progressive matrices*. Oxford: Oxford Psychologists Press, Oxford, UK.

Reynvoet, B., & Sasanguie, D. (2016). The Symbol Grounding Problem Revisited: A Thorough Evaluation of the ANS Mapping Account and the Proposal of an Alternative Account Based on Symbol–Symbol Associations. *Frontiers in Psychology*, *7*, 1581.

Ritchie, M. S., & Bates, T. C. (2013). Enduring links from childhood mathematics and Reading achievement to adult socioeconomic status. *Psychological science, 24*(7), 1301-1308.

Sasanguie, D., Defever, E., Maertens, B., & Reynvoet, B. (2014). The approximate number system is not predictive for symbolic number processing in kindergarteners. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 67,* 271–280.

Schunn, C. D., Reder, L. M., Nhouyvanisvong, A., Richards, D. R., & Stroffolino, P. J. (1997). To calculate or not to calculate: a source activation confusion model of problema familiarity's role in strategy selection. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 23,* 3-29.

Seyler, D. J., Kirk, E. P., & Ashcraft, M. H. (2003). Elementary subtraction. *Journal of experimental psychology. Learning, memory, and cognition*, *29*(6), 1339–1352.

Smets, K., Sasanguie, D., Szücs, D., & Reynvoet, B. (2015). The effect of different methods to construct non-symbolic stimuli in numerosity estimation an comparison. *Journal of Cognitive Psychology, 27*(3), 310-325.

Sokol, S. M., McCloskey, M., Cohen, N. J., & Aliminosa, D. (1991). Cognitive representations and processes in arithmetic: Inferences from the performance of brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 17*(3), 355–376.

Thurstone, L. L. & Thurstone, T. G. (1957). The SRA Tests of Educational Ability. Chicago: Science Research Associates.

Thurstone, T. G., & Thurstone, L. L. (1958). SRA primary mental abilities. Science Research Associates.

Van Oeffelen, M. P., & Vos, P. G. (1982). A probabilistic model for the discrimination of visual number. *Perception & Psychophysics, 32*(2), 163–170.

Wagner, J. B., & Johnson, S. C. (2011). An association between understanding cardinality and analog magnitude representations in preschoolers. *Cognition, 119,* 10–22.

Watts, T. W., Duncan, G. J., Siegler, R. S., & Davis-Kean, P. E. (2014). What´s past is prologue: Relations between early mathematics knowledge and high school achievement. *Educational Researcher, 43*(7), 352-360.

Whalen, J., Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1999). Non-verbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychological Science, 10*, 130-137.

Xu, F. (2003). Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition, 89*(1), B15-B25.

Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. Developmental Science, 8(1), 88-101.