

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA  
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

# Parametrización de órbitas de partículas mediante escalares de estructura.

AUTOR/AUTORA: Pablo Serrano Martínez

TUTOR/TUTORES: Justo Hernán Ospino Zúñiga  
Luis Núñez De Villavicencio

Curso 2020-2021





VNiVERSiDAD  
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA  
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

# Parametrización de órbitas de partículas mediante escalares de estructura.

AUTOR/AUTORA: Pablo Serrano Martínez

TUTOR/TUTORES: Justo Hernán Ospino Zúñiga

Luis Núñez De Villavicencio

Curso 2020-2021

**M<sup>3</sup>**  
**Máster Universitario en**  
**Modelización**  
**Matemática**



**VNiVERSiDAD**  
**De SALAMANCA**

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Don **Justo Hernán Ospino Zúñiga**, Profesor Contratado Doctor del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la Universidad de Salamanca

Don **Luis Núñez De Villavicencio** Profesor Titular de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga Colombia.

Certifican

Que la presente memoria titulada **“Parametrización de órbitas de partículas mediante escalares de estructura”** ha sido realizada bajo su dirección por Don Pablo Serrano Martínez.

Que dicha memoria presenta un trabajo de investigación original y constituye el Trabajo Fin de Máster Universitario en Modelización Matemática.

AUTORIZAN su presentación firmando la presente en Salamanca a 13 de julio de 2021.

Fdo. Justo Hernán Ospino Zúñiga

  
Fdo. Luis Núñez De Villavicencio



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Planteamiento del problema</b>	<b>3</b>
<b>2. Conocimientos previos</b>	<b>4</b>
2.1. Gravitación . . . . .	4
2.1.1. Newtoniana . . . . .	4
2.1.2. Relativista . . . . .	6
2.2. Relatividad General . . . . .	9
2.2.1. Métrica . . . . .	9
2.2.2. Geodésicas . . . . .	10
2.2.3. Tensor de Riemann . . . . .	11
2.2.4. Tensor de Ricci . . . . .	11
2.2.5. Ecuaciones de Einstein . . . . .	12
2.2.6. Tensor de Weyl . . . . .	12
2.3. Formalismo 1+3 . . . . .	13
2.4. Soluciones de vacío . . . . .	14
2.4.1. Dos Killing . . . . .	14
<b>3. Un nuevo enfoque</b>	<b>16</b>
3.1. Objetivos . . . . .	16
3.2. Tétrada . . . . .	16
3.2.1. Derivada de la tétrada . . . . .	17
3.2.2. Escalares geométricos . . . . .	18
3.2.3. Campos de Killing . . . . .	19
3.2.4. Escalares de Weyl . . . . .	19
3.3. Geodésicas . . . . .	20
3.3.1. Caso A: $z_1 = z_2 = 0$ . . . . .	22
3.3.2. Caso B: $z_2 = 0$ y $z_1^\theta = j_1 z_1$ . . . . .	22
3.3.3. Caso C: $z_1 = 0$ y $z_2^\dagger + j_2 z_2 = 0$ . . . . .	22
3.3.4. Caso D: $z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2 = 0$ . . . . .	22
<b>4. Aplicación y resultados</b>	<b>23</b>
4.1. Schwarzschild . . . . .	23
4.1.1. Caso A . . . . .	23
4.1.2. Caso B . . . . .	24
4.1.3. Caso C . . . . .	28

4.2. Kerr . . . . .	31
4.2.1. Caso A . . . . .	31
4.2.2. Caso B . . . . .	31
<b>5. Conclusiones</b>	<b>38</b>
<b>6. Desarrollos futuros</b>	<b>40</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>42</b>



# Índice de figuras

2.1.	Representación del potencial $V_{\text{Nefe}}$ en rojo, $\frac{L^2}{2mr^2}$ en azul y $-\frac{GMm}{r}$ en negro. Las líneas horizontales representan valores de energía. . . . .	5
4.1.	Órbita relativista con precesión del perihelio. . . . .	25
4.2.	. . . . .	25
4.3.	. . . . .	25
4.4.	. . . . .	26
4.5.	. . . . .	26
4.6.	. . . . .	26
4.7.	. . . . .	27
4.8.	. . . . .	27
4.9.	. . . . .	27
4.10.	. . . . .	28
4.11.	Órbita circular en el plano constante $\theta = \pi/4$ . . . . .	30
4.12.	Órbitas de radio constante no coplanarias. . . . .	30
4.13.	. . . . .	32
4.14.	. . . . .	32
4.15.	. . . . .	33
4.16.	. . . . .	33
4.17.	. . . . .	34
4.18.	. . . . .	34
4.19.	. . . . .	35
4.20.	. . . . .	35
4.21.	. . . . .	36
4.22.	. . . . .	36
4.23.	. . . . .	37
5.1.	Trayectorias de estrellas cercanas al centro de la galaxia. . . . .	39

# Abstract

In this essay we try to give a new solution to the orbits equations through General Relativity. We give a new approach from the  $1 + 3$  formalism which is characterised by the structure scalars. This scalars are the ones which will allow us to simplify the geodesic equations and give a new classification. We test this method to be successful with already known solutions as Schwarzschild and Kerr.

# Resumen

En este trabajo tratamos de dar una nueva solución a las ecuaciones de órbitas en el marco de la Relatividad General. Partimos del planteamiento de un nuevo formalismo 1+3 caracterizado por los escalares de estructura. Estos escalares son los que permitirán simplificar las ecuaciones de las geodésicas y dar una nueva clasificación. Comprobamos que este método es satisfactorio con soluciones de métricas ya conocidas como Schwarzschild y Kerr.

# Introducción

El estudio de la gravedad y de las órbitas de los cuerpos estelares es un problema que retoma varios siglos atrás. Su primera formulación matemática fue dada por Isaac Newton en su libro Principia publicado en 1687. Newton describió la gravedad mediante una fórmula que relacionaba la fuerza con la que se atraían dos objetos según sus masas y el cuadrado de la distancia que los separaba. Ya con esta primera teoría de la gravedad se pudieron desarrollar las primeras ecuaciones que describían el movimiento de los cuerpos celestes.

Posteriormente, en 1915 Einstein presentó una nueva teoría gravitatoria, la Relatividad General. Esta teoría era nueva y revolucionaria y daba un nuevo enfoque matemático de la gravedad como la curvatura del espacio-tiempo. El principal problema de la Relatividad General es que plantea ecuaciones muy complicadas, concretamente, en el caso del cálculo de trayectorias.

Actualmente se conocen las soluciones de varias de estas trayectorias para distintas soluciones de vacío como las métricas de Schwarzschild y de Kerr estudiadas en [10].

Este trabajo plantea una nueva metodología para el cálculo de trayectorias de partículas. Esta metodología recibe el nombre de formalismo  $1 + 3$  ya que se caracteriza por la descomposición de los elementos físicos en 1 vector temporal y 3 vectores espaciales. Este formalismo ya ha sido estudiado en [1] y [6]. La idea principal de este trabajo es expresar la trayectoria de las partículas en términos de unos escalares denominados escalares de estructura. Estos escalares nacen de las descomposiciones de los elementos geométricos del espacio y son derivadas primeras de las funciones de la métrica. Por tanto, esto permite que, al escribir las ecuaciones de las geodésicas en términos de estos escalares, podamos escribir una primera integral de las ecuaciones relativistas que se conocen. Llegados al punto de la resolución estudiaremos dos soluciones de vacío ya conocidas como son las soluciones de Schwarzschild y Kerr.

La motivación de este trabajo reside en dos grandes aplicaciones. La primera es estudiar como influye la rotación de una fuente gravitatoria en la trayectoria de un cuerpo en el espacio. El efecto de la rotación en las trayectorias de partículas puede ayudar a optimizar estudios sobre asistencia gravitacional como los llevados a cabo en [3] y [4]. Por otro lado, el estudio de los elementos que parametrizan la órbita nos puede ayudar a estudiar cuerpos estelares desconocidos. Un buen caso es el del agujero negro situado en el centro de la galaxia, Sagitario A. En este caso se tiene que las órbitas de objetos cercanos ya han sido observadas y registradas como se puede comprobar en [7]. Entonces un estudio interesante sería ajustar las curvas registradas mediante las ecuaciones que obtenemos para encontrar así los parámetros que caracterizan ese movimiento.

El trabajo se desarrolla en un primer capítulo 1 en el que se plantea el problema. En el segundo capítulo 2 se da una presentación de los conocimientos necesarios para el seguimiento del trabajo. En el capítulo 3 se presenta la nueva metodología que proponemos así como la resolución de las geodésicas y su clasificación. Una vez obtenido esto se lleva a la práctica en el capítulo 4 en el que se presentan los resultados obtenidos una vez aplicamos nuestro enfoque a métricas conocidas. Por último en los capítulos 5 y 6 se resumen las conclusiones obtenidas y se da una idea de los posibles desarrollos futuros de este trabajo.

# Capítulo 1

## Planteamiento del problema

El estudio de órbitas es un problema que retoma varios siglos atrás. Según han ido avanzando las teorías gravitatorias se han ido encontrando nuevas soluciones, aún así desde Newton hasta la actualidad el problema sigue presentando dificultades. En este trabajo se propone dar una nueva formulación más sencilla para el cálculo de órbitas de partículas. En relatividad General el conocimiento de estas órbitas puede llevar a hallazgos sobre características de objetos masivos mediante el estudio de las trayectorias de los cuerpos que lo orbitan.

# Capítulo 2

## Conocimientos previos

### 2.1. Gravitación

#### 2.1.1. Newtoniana

La ley de gravitación universal de Newton afirma que todo par de partículas se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Dar una noción básica de esta teoría servirá para apreciar los cambios y los avances realizados en el estudio de la gravedad.

Partimos de la ecuación de la conservación de la energía total de la partícula

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r}, \quad (2.1)$$

y la ecuación de conservación del momento angular

$$L = mr^2\dot{\phi}. \quad (2.2)$$

Sustituyendo (2.2) en (2.1)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}. \quad (2.3)$$

A la derecha de esta ecuación se puede apreciar la energía cinética más un término que definiremos como potencial efectivo

$$V_{\text{Nefe}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}. \quad (2.4)$$

Así (2.3) queda de la siguiente manera

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{Nefe}}(r). \quad (2.5)$$

Observando la ecuación (2.5) se prueba que los puntos de intersección de la recta  $E$  con la función  $V_{\text{Nefe}}$  representan puntos de retorno, es decir, aquellos en los que  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0$ .

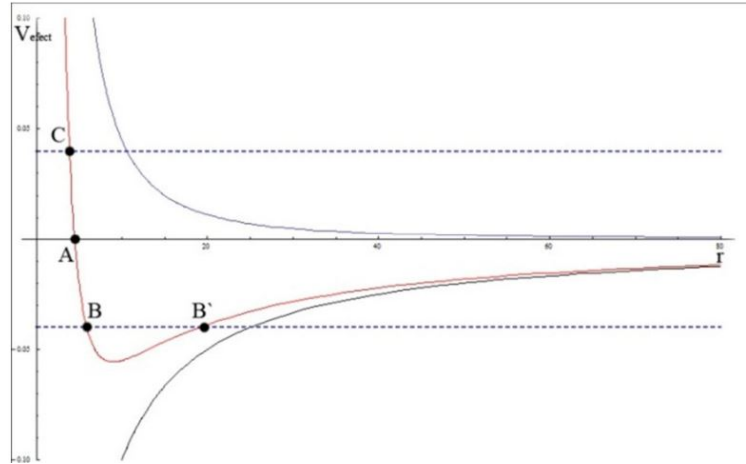


Figura 2.1: Representación del potencial  $V_{\text{Nefe}}$  en rojo,  $\frac{L^2}{2mr^2}$  en azul y  $-\frac{GMm}{r}$  en negro. Las líneas horizontales representan valores de energía.

En esta gráfica se pueden distinguir cuatro situaciones dependiendo del valor de la energía.

- El primer caso se observa en el mínimo del potencial cuando existe un único valor de  $r$ , tal que el potencial y la energía se igualan. Este caso corresponde con las órbitas circulares.
- Aumentando el valor de la energía se observa que se pueden encontrar dos cortes con la curva del potencial. Es decir, existen dos radios  $r_1$  y  $r_2$  en los que energía y potencial se anulan. Estas órbitas trazan elipses.
- En el punto A de la gráfica se puede observar una asíntota del potencial. Entonces la partícula alcanzará un punto de retorno en el infinito. Estas órbitas son parabólicas
- Por último en el caso de energías positivas solo existe un punto de retorno, estas órbitas son las de dispersión y trazan hipérbolas.

Para estudiar las trayectorias es necesario tener en cuenta la identidad

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}. \quad (2.6)$$

Aplicando esta igualdad en la ecuación (3.53) se obtiene

$$E = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{L^2}{2mr^4} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad (2.7)$$

que mediante el cambio de variable  $u = 1/r$  resulta

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{d(1/u)}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}. \quad (2.8)$$

Así la ecuación (2.7) toma la forma

$$E = \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 \frac{L^2}{2m} + \frac{L^2 u^2}{2m} - GMmu. \quad (2.9)$$



Derivando esta ecuación respecto del ángulo  $\phi$

$$\frac{du}{d\phi} \frac{d^2u}{d\phi^2} \frac{L^2}{m} + \frac{du}{d\phi} \frac{L^2u}{m} - \frac{du}{d\phi} GMm = 0. \quad (2.10)$$

Suponiendo ahora que no se trata de trayectorias circulares, i.e,  $\frac{du}{d\phi} \neq 0$  y que el momento angular  $L$  no se anula, se puede dividir esta ecuación por  $L^2 \frac{du}{d\phi} \neq 0$  con lo que se obtiene la ecuación final de las órbitas

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}, \quad (2.11)$$

que es una ecuación diferencial con solución analítica dada por

$$u(\phi) = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{GMm^2\epsilon}{L^2} \cos \phi, \quad (2.12)$$

con  $e$  la excentricidad<sup>1</sup> de la órbita y cumpliendo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \dot{u}(0) &= 0, \\ u(0) &= \frac{GMm^2(1+\epsilon)}{L^2} = u_{\text{máx}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Deshaciendo ahora el cambio de variable se tiene

$$\begin{aligned} r(\phi) &= \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}, \\ \dot{r}(0) &= 0, \\ r(0) &= \frac{p}{1 + \epsilon} = r_{\text{mín}} \text{ (perihelio) y} \\ r(\pi) &= \frac{p}{1 - \epsilon} = r_{\text{máx}} \text{ (afelio)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En la ecuación  $r(\phi)$  se puede distinguir entonces que la curva trazará una circunferencia en el caso que  $\epsilon = 0$ , una elipse para  $\epsilon < 1$ , una parábola para  $\epsilon = 1$  o una hipérbola para los valores de  $\epsilon > 1$ .

## 2.1.2. Relativista

En el año 1915 Einstein presentó la teoría de la Relatividad General, una nueva teoría que busca explicar la gravedad mediante la curvatura del espacio-tiempo. La ecuación que describe el campo gravitatorio es la denominada ecuación de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} R, \quad (2.15)$$

donde  $G_{\alpha\beta}$  es el tensor gravitacional,  $T_{\alpha\beta}$  el tensor de energía-momento y la parte derecha de la ecuación corresponde a términos de la métrica y curvatura. Esta ecuación tiene múltiples soluciones<sup>2</sup>, de las cuales estudiaremos en este texto las de vacío, aquellas en

<sup>1</sup>La excentricidad es el parámetro que representa la desviación de una curva cónica respecto de una circunferencia.

<sup>2</sup>Una solución a la ecuación de campo gravitatorio de Einstein es una métrica  $\mathbf{g}$  que define la forma del espacio-tiempo.

las que el tensor de energía impulso  $T_{\alpha\beta}$  se anula. La solución de vacío más conocida es la métrica de Schwarzschild dada por el elemento de línea

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (2.16)$$

En esta métrica se comprueba que existen dos simetrías. Estas simetrías definen para cada partícula en movimiento dos cantidades conservadas que denominaremos energía  $e$  y momento angular  $\ell$ . La trayectoria de una partícula que orbita alrededor de una estrella viene dada por una geodésica. Las geodésicas son las curvas que cumplen las siguientes ecuaciones

$$\mathcal{L} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -1 \text{ y} \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (2.18)$$

Donde las funciones coordenadas son  $(x^\alpha) = (t, r, \theta, \phi)$ . De la ecuación (2.18) se obtienen 4 ecuaciones, de las cuales las tres últimas son:

$$\begin{aligned} 2r^2 \dot{\theta} - r^2 2\dot{\theta} \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 &\Rightarrow 2r^2 \dot{\theta} (1 - \cos \theta \dot{\phi}^2) = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0, \\ \frac{d}{d\lambda} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 &\Rightarrow r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \ell, \\ \frac{d}{d\lambda} \left[ \dot{t} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right] = 0 &\Rightarrow \dot{t} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = e. \end{aligned} \quad (2.19)$$

De la primera ecuación se deduce que las órbitas son planas con lo que, sin pérdida de generalidad, se puede tomar  $\theta = \pi/2$ . Sustituyendo entonces las ecuaciones de la energía  $e$  y el momento angular  $\ell$  en (2.17)

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{e^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = -1. \quad (2.20)$$

Multiplicando ahora por  $(1 - 2M/r)$  se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \left[ \frac{-M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3} \right]. \quad (2.21)$$

Puesto que  $e$  es constante se tiene que  $\frac{e^2-1}{2}$  también lo es, por tanto, se puede interpretar este término como la energía  $\mathcal{E}$ . Al igual que en el caso Newtoniano, se define el potencial efectivo como la energía  $\mathcal{E}$  menos la energía cinética  $\frac{1}{2}\dot{r}^2$

$$V_{\text{Nefe}} = \left[ \frac{-M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3} \right]. \quad (2.22)$$

Una manera de resolver las ecuaciones de las órbitas a partir de aquí es derivar la ecuación (2.21) respecto del tiempo propio  $\lambda$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = \left[ \frac{-M}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3} - \frac{3M\ell^2}{r^4} \right]. \quad (2.23)$$

Despejando de la segunda ecuación de (2.19)

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\ell}{r^2}. \quad (2.24)$$

De (2.17) se obtiene

$$\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{r^2 \dot{\phi}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2}. \quad (2.25)$$

Otra manera de resolver las ecuaciones de las órbitas a partir de la ecuación (2.21) es usando el cambio (2.6):

$$\mathcal{E} = \frac{\ell^2}{2r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left[ \frac{-M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3} \right]. \quad (2.26)$$

Haciendo ahora el cambio de variable  $u = 1/r$  (y usando la identidad de (2.8)) la ecuación (2.26) queda de la siguiente forma

$$\varepsilon = \frac{\ell^2}{2} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \left[ -Mu + \frac{\ell^2 u^2}{2} - M\ell^2 u^3 \right]. \quad (2.27)$$

Reordenando términos

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{2Mu}{\ell^2} + u^2 - 2Mu^3 - \frac{2\varepsilon}{\ell^2} = 0. \quad (2.28)$$

Esta ecuación ya se puede resolver numéricamente, no obstante, aún se puede simplificar más. Derivando respecto de  $\phi$  se obtiene

$$2 \left(\frac{du}{d\phi}\right) \left(\frac{d^2u}{d\phi^2}\right) - \frac{2M}{\ell^2} \frac{du}{d\phi} + 2u \frac{du}{d\phi} - 6Mu^2 \frac{du}{d\phi} = 0, \quad (2.29)$$

y dividiendo por  $2\frac{du}{d\phi}$  (se puede suponer que este término no es cero ya que es el caso de órbitas circulares) nos da la siguiente ecuación de la órbita

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3Mu^2 = \frac{M}{\ell^2}, \quad (2.30)$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \text{ y} \\ \dot{u}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Tanto (2.30) como las ecuaciones propuestas en (2.23), (2.24) y (2.25) se pueden resolver de manera numérica. La ecuación (2.25) presenta una singularidad en  $r = 2M$ . Este radio es el conocido como radio de Schwarzschild y representa el tamaño máximo que debe de tener una estrella para considerarse agujero negro.

Es interesante observar también que la ecuación de la órbita relativista (2.30) se diferencia de la órbita newtoniana (2.11) por un único término  $-3Mu^2$ . Este término complica la ecuación diferencial, pero a cambio otorga una mayor precisión en los cálculos.

## 2.2. Relatividad General

### 2.2.1. Métrica

La métrica es la parte principal a la hora de estudiar el espacio-tiempo. Esta métrica define las propiedades geométricas del espacio-tiempo mediante un elemento de línea. A continuación se da una definición rigurosa de métrica.

**Definición 2.2.1.** Una métrica  $\mathbf{g}$  sobre un espacio vectorial  $V$  es una forma bilineal  $\mathbf{g} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  simétrica no degenerada ( $\mathbf{g}(X, Y) = 0$  para todo  $Y \in V$  implica  $X = 0$ ). Una métrica se dice que tiene índice  $r$  si la dimensión del mayor subespacio  $W$  de  $V$  sobre el que  $\mathbf{g}$  es definida negativa es  $r$ .

Una de las imposiciones de la Relatividad General es que la métrica sea de Minkowski (plana y con índice  $-1$ ) en el infinito, lo que quiere decir, que la curvatura generada por la gravedad del cuerpo será despreciable a distancias muy grandes.

Se denota entonces el elemento de línea como

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \mathbf{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.32)$$

Donde  $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$  son las funciones métricas y  $x^\alpha$  son las coordenadas del espacio vectorial  $V$ .

Asociada a la métrica se define una derivada direccional en el espacio-tiempo denominada derivada covariante.

**Definición 2.2.2.** Dada una variedad  $M = (V, \mathbf{g})$  se llama derivada covariante  $\nabla_X Y$  de  $Y$  en la dirección de  $X$  al campo vectorial resultado de una aplicación

$$\begin{aligned} D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

que verifica

1.  $\nabla_X fY = XfY + f\nabla_X Y$ ,
2.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
3.  $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ ,
4.  $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$ ,
5.  $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$  y
6.  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ .

Donde  $\mathfrak{X}(M)$  es el conjunto de campos vectoriales tangentes en  $M$ ,  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  son campos vectoriales y  $[\cdot, \cdot]$  es el corchete de Lie de  $M$ . Esta derivada covariante toma el nombre de conexión de Levi-Civita y se prueba que existe y es única ([8] pag. 61).

Además de la derivada covariante, cabe resaltar la presencia de otro elemento principal en el estudio de la geometría como son los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\delta} \mathbf{g}^{\delta\gamma} \left( \frac{d\mathbf{g}_{\beta\delta}}{dx^{\alpha}} + \frac{d\mathbf{g}_{\alpha\delta}}{dx^{\beta}} - \frac{d\mathbf{g}_{\alpha\beta}}{dx^{\gamma}} \right). \quad (2.33)$$

Estas funciones determinan de manera unívoca la derivada covariante asociada a la métrica.

## 2.2.2. Geodésicas

Como ya se ha mencionado, las órbitas en la Relatividad General vienen representadas por las geodésicas del espacio-tiempo considerado.

**Definición 2.2.3.** Dada una variedad  $M = (V, \mathbf{g})$  se dice que una curva parametrizada  $c$  es una geodésica si su vector tangente es paralelo a lo largo de la curva.

Esta definición es equivalente a decir que

$$\frac{d\langle c', c' \rangle}{d\lambda} = 2\langle c', \nabla c' \rangle = 0. \quad (2.34)$$

Donde  $\lambda$  es el parámetro de la curva. Se tiene, por tanto, que si  $c$  es una curva geodésica se cumple también que su vector tangente tiene módulo constante.

Dada una curva  $c(\lambda) = (x^{\alpha}(\lambda))$  se comprueba que las funciones coordenadas  $x^{\alpha}$  de la geodésica verifican la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \sum_{\beta\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \frac{dx^{\gamma}}{d\lambda} = 0. \quad (2.35)$$

Esta ecuación refuerza el concepto de línea recta como geodésicas, pues se tiene que en el caso que los símbolos de Christoffel sean todos nulos la ecuación de Euler-Lagrange que define la caída libre de una partícula corresponde con la definición usual de una recta

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\lambda^2} = 0. \quad (2.36)$$

Esto lleva a la conclusión de que el espacio-tiempo en cuestión es plano. La ecuación (2.35) da a entender la complejidad natural del problema: para resolver la trayectoria de una órbita hay que integrar un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal y de segundo orden.

### 2.2.3. Tensor de Riemann

El estudio del tensor de Riemann es la manera de expresar la curvatura intrínseca del espacio-tiempo. Como ya se ha mencionado previamente, la curvatura del espacio-tiempo es la representación de la gravedad en la teoría de la Relatividad General así que este tensor es uno de los objetos geométricos principales a estudiar.

**Definición 2.2.4.** Se define el tensor curvatura de  $(M, \mathbf{g})$  como la aplicación  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida por

$$R(X, Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

**Definición 2.2.5.** El tensor curvatura de Riemann de una variedad  $M = (V, \mathbf{g})$  es la aplicación  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  definida por

$$R_{XYZW} := \langle R(X, Y), Z, W \rangle.$$

Dado un sistema de referencia local  $\{e_{\alpha}\}$  de  $M$  se puede calcular el tensor de Riemann como

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \frac{d\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}}{dx^{\mu}} - \frac{d\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\gamma}. \quad (2.37)$$

**Proposición 2.2.1.** Los tensores de curvatura tienen las siguientes simetrías:

1.  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ ;
2.  $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$  (Primera identidad de Bianchi);
3.  $R_{XYZW} = -R_{YXZW}$ ,  $R_{XYZW} = -R_{XYWZ}$ ;
4.  $R_{XYZW} = R_{ZWXY}$ ;
5.  $R_{XYZW} + R_{ZXYW} + R_{YZXW} = 0$ ;
6.  $R_{XYZW} + R_{XWYZ} + R_{XZWY} = 0$ .

### 2.2.4. Tensor de Ricci

El tensor de curvatura de Ricci es el tensor que se obtiene del tensor de curvatura de Riemann mediante la contracción de dos de sus índices.

**Definición 2.2.6.** En una variedad  $M = (V, \mathbf{g})$  se llama curvatura de Ricci a la aplicación definida por  $R(X, Y) = \sum_{\alpha} R_{Xe_{\alpha}Xe_{\alpha}}$  para cualquier marco de referencia local ortonormal  $e_{\alpha}$ . Para sistemas de referencia locales no ortonormales se tiene que  $R_{\alpha\beta} = R(E_{\alpha}, E_{\beta}) = \sum_{\mu, \nu} \mathbf{g}^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu} = \sum_{\mu} R_{\alpha\mu\beta}^{\mu}$ .

**Definición 2.2.7.** Se llama curvatura escalar a la función  $R : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $R = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} R(e_{\alpha}, e_{\alpha})$  para cualquier referencia local ortonormal  $\{e_{\alpha}\}$  con  $\epsilon_{\alpha} = \langle e_{\alpha}, e_{\alpha} \rangle$ .

Para sistemas de referencia locales no ortonormales se tiene  $R = \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{g}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ .

## 2.2.5. Ecuaciones de Einstein

Es importante diferenciar entre materia y masa en lo que concierne a este trabajo. La materia sólo es gravitacionalmente significativa como medio de transporte de energía-momento, por tanto, respecto a su efecto como fuente de gravitación debemos estudiar el tensor  $T_{\alpha\beta}$  de energía-impulso. Einstein probó diferentes posibilidades para la definición de un tensor gravitatorio  $G_{\alpha\beta}$ . Quizás por el único hecho de limitarse al caso más simple, propuso la fórmula  $G_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta}$  donde  $k$  es una constante y  $G_{\alpha\beta}$  es una variante de la curvatura de Ricci. Se sabe además que por la conservación de la energía el tensor  $T_{\alpha\beta}$  debe de cumplir la condición

$$\text{div} T_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.38)$$

Esto implica que  $\text{div} G_{\alpha\beta} = 0$ .

Donde  $\text{div}$  es la aplicación divergencia de un tensor dada por

$$\text{div} T_{\alpha\beta} = \sum_{\mu} \langle \nabla_{E_{\mu}} T_{\alpha\beta}, E_{\mu} \rangle \quad (2.39)$$

(Ver [8] pag. 85).

**Definición 2.2.8.** Se define el tensor gravitacional de Einstein como

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} R, \quad (2.40)$$

Esta definición no es arbitraria, se comprueba que la divergencia de  $G_{\alpha\beta}$  es nula (ver Corolario 3,54 de [8] Se puede apreciar entonces que la constante  $k$  antes mencionada toma el valor  $8\pi$ . Esto se debe a una comparación con la física Newtoniana (se puede encontrar más información sobre esto en la sección 17,7 de [2]).

## 2.2.6. Tensor de Weyl

Cuando la dimensión de la variedad  $M$  es 4 se puede descomponer el tensor curvatura de Riemann  $R_{ijkl}$  en términos que dependen únicamente del tensor de Ricci  $R_{ij}$  más un término  $C_{ijkl}$  que no tiene contracciones no triviales. Para una dimensión  $N \geq 3$  esta descomposición viene dada por

$$\begin{aligned} R_{ijkl} \equiv & \frac{1}{N-2} (\mathbf{g}_{ik} R_{jl} - \mathbf{g}_{il} R_{jk} - \mathbf{g}_{jk} R_{il} + \mathbf{g}_{jl} R_{ik}) \\ & - \frac{R}{(N-1)(N-2)} (\mathbf{g}_{ik} \mathbf{g}_{jl} - \mathbf{g}_{il} \mathbf{g}_{jk}) + C_{ijkl}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

El tensor  $C_{ijkl}$  es el denominado tensor de Weyl. Este tensor posee las mismas propiedades algebraicas que  $R_{ijkl}$  y además cumple la condición

$$C^i_{jik} = 0. \quad (2.42)$$

Se comprueba que este tensor tiene traza nula.

Cuando se anula el tensor de Ricci  $R_{ij} = 0$  se tiene que  $T_{ij} = 0$ . Este caso describe el campo gravitatorio en el vacío. Se tiene entonces que el tensor de Weyl no se anula para  $N > 3$  y, por tanto, define el campo gravitatorio exterior. Se puede encontrar una explicación más detallada sobre el tensor de Weyl y sus propiedades en [9] pag. 142.

### 2.3. Formalismo 1+3

A continuación se da una pequeña introducción al formalismo 1 + 3 utilizado en el estudio geométrico del espacio-tiempo en el marco de la relatividad.

Partimos de imponer un vector temporal  $\mathbf{X}$ . Debido a la estructura impuesta en el espacio-tiempo por el vector  $X$  es interesante dar una descomposición física de los elementos geométricos de interés. Comenzando por la derivada covariante, y sin entrar en detalles pues este texto no pretende ser más que una introducción (se puede encontrar una versión más extendida en [5]), se tiene que la derivada covariante del vector  $X$  tiene la siguiente descomposición irreducible

$$\nabla_{\mu} X_{\nu} = -X_{\mu} a_{\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}. \quad (2.43)$$

donde  $\sigma_{ab}$  es un tensor simétrico y sin traza y  $\Omega_{ab}$  es antisimétrico. Los campos cinemáticos que aparecen en esta descomposición son

$$\begin{aligned} a^{\mu} &:= X^{\nu} \nabla_{\nu} X^{\mu}; \\ \Theta &:= \nabla_{\mu} X^{\mu}; \\ \sigma_{\mu\nu} &:= a_{(\mu} X_{\nu)} + \nabla_{(\mu} X_{\nu)} - \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu}; \\ \omega_{\mu\nu} &:= -X_{[\mu} a_{\nu]} - \nabla_{[\mu} X_{\nu]}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde  $a^{\mu}$  denota el vector aceleración,  $\Theta$  representa la razón de expansión escalar,  $\sigma_{\mu\nu}$  es el tensor de cizalladura con magnitud

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \quad (2.45)$$

y  $\Omega_{ab}$  es el tensor vorticidad cuya magnitud es

$$\omega^2 := \omega_{\mu} \omega^{\mu} = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}. \quad (2.46)$$

Dado un vector  $Y$  que no sea el temporal existe una formulación general para la derivada covariante. Dado un sistema de referencia local  $\{e_{\beta}\}$  la derivada covariante de un vector viene dada por

$$Y_{\alpha;\beta} = e_{\beta}(Y_{\alpha}) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} Y_{\mu} \quad \text{y} \quad Y_{;\beta}^{\alpha} = e_{\beta}(Y^{\alpha}) + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} Y_{\mu} \quad (2.47)$$

Usualmente si el espacio viene dado por las coordenadas  $(x^{\beta})$  la referencia local tomada será la canónica  $\{\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\}$ , por tanto, la ecuación anterior resulta:

$$Y_{\alpha;\beta} = \frac{\partial Y_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} Y_{\mu} \quad \text{y} \quad Y_{;\beta}^{\alpha} = \frac{\partial Y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} Y_{\mu} \quad (2.48)$$



La ecuación de Einstein con constante cosmológica  $\Lambda$  no nula se puede escribir como

$$R_{\beta}^{\alpha} = T_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}T\delta_{\beta}^{\alpha} + \Lambda\delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (2.49)$$

con  $\delta_{\beta}^{\alpha} = e^{\alpha}e_{\beta}$ .

La descomposición estándar del tensor energía impulso  $T_{\alpha\beta}$  respecto del vector temporal  $X$  es

$$T_{\alpha\beta} = \mu X_{\alpha}X_{\beta} + 2q_{(\alpha}X_{\beta)} + ph_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} \quad (2.50)$$

Aquí  $\mu$  denota la densidad de energía total,  $p$  la presión isotrópica,  $q^{\alpha}$  es el tensor de flujo de energía,  $\pi_{\alpha\beta}$  es el tensor de anisotropía y  $h_{\alpha\beta}$  es un tensor dado por

$$h_{\beta}^{\alpha} = \delta^{\alpha}\beta + X^{\alpha}X_{\beta}. \quad (2.51)$$

El tensor de Weyl que se obtiene cuando se anula el tensor de energía impulso viene dado por la ecuación

$$C_{cd}^{ab} := R_{cd}^{ab} - 2\delta^{[a}{}_{[c}R_{d]}^{b]} + \frac{1}{3}R\delta_{[c}^a\delta_{d]}^b \quad (2.52)$$

Por la imposición del vector temporal  $X$  es interesante descomponer el tensor de Weyl en la parte eléctrica

$$E_{ac} := C_{abcd}u^bu^d \quad (2.53)$$

y la parte magnética

$$H_{ac} := *C_{abcd}u^bu^d \quad (2.54)$$

donde  $*C$  representa el dual de  $C$  (Ver [5]).

## 2.4. Soluciones de vacío

Si anulamos el tensor de energía impulso la ecuación de Einstein (2.15) sigue teniendo soluciones no triviales. Estas soluciones son las denominadas soluciones de vacío, puesto que el tensor  $T_{\alpha\beta}$  se anula debido a la ausencia de materia. Estas soluciones sirven para estudiar el campo gravitatorio exterior de una fuente y las órbitas descritas por partículas y fotones.

### 2.4.1. Dos Killing

A la hora de resolver las ecuaciones de campo en el vacío es común hacer suposiciones para simplificar el problema. La suposición más usual es tomar un espacio estático y esféricamente simétrico. Esto quiere decir que la variedad a considerar tiene una simetría temporal y una simetría esférica. Estas simetrías en el contexto de la geometría Riemanniana se asocian con los denominados campos vectoriales de Killing que son generadores infinitesimales de simetrías.

**Definición 2.4.1.** Dada una variedad  $M$  un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se dice de Killing si cumple que

$$\mathcal{L}_X g = 0 \quad (2.55)$$

Donde  $\mathcal{L}_X g$  representa la derivada de Lie<sup>3</sup> de la métrica respecto de  $X$ .

<sup>3</sup>La derivada de Lie evalúa el cambio de un campo vectorial a lo largo del flujo definido por otro campo vectorial. Se puede encontrar una definición más rigurosa en [8].

La derivada de Lie de  $\mathbf{g}$  respecto de un vector  $X$  viene dada por

$$\mathcal{L}_X \mathbf{g} = (X^\gamma \mathbf{g}_{\alpha\beta;\gamma} + \mathbf{g}_{c\beta} X_{;\alpha}^\gamma + \mathbf{g}_{\alpha\gamma} X_{;\beta}^\gamma) dx^\alpha \otimes dx^\beta = (X_{\beta;\alpha} + X_{\alpha;\beta}) dx^\alpha \otimes dx^\beta \quad (2.56)$$

Se puede deducir entonces, que, suponiendo que estamos en una métrica en coordenadas polares  $(t, r, \theta, \phi)$  los campos de Killing en el caso estático y axialmente simétrico son:

El vector de Killing temporal

$$\tau^\alpha = (1, 0, 0, 0), \quad (2.57)$$

y el vector de Killing axial

$$\xi^\alpha = (0, 0, 0, 1). \quad (2.58)$$

Se enuncia a continuación un resultado interesante sobre los campos de Killing cuya demostración se puede encontrar en [8] sección 9,26.

**Proposición 2.4.1.** *Dada una variedad  $M$ , una curva geodésica  $c^\alpha$  de  $M$  y un vector de Killing  $X^\alpha \in \mathfrak{X}(M)$  se tiene que el  $X$  es constante a lo largo del vector tangente  $z^\alpha$  de  $c^\alpha$ . Es decir*

$$X_\alpha z^\alpha = k \quad (2.59)$$

donde  $k$  es constante.

Este resultado es el que da lugar a las denominadas cantidades conservadas, que por analogía con las simetrías temporal y espacial se denominan energía  $e$  para el vector de Killing temporal, y momento angular  $l$  para el vector de Killing axial. Una condición suficiente para que estos campos vectoriales existan es que las funciones métricas no dependan de  $t$  ni de  $\phi$ .

A lo largo de este trabajo se considerarán dos soluciones de vacío con simetrías temporal y axial: la solución de Schwarzschild y la de Kerr. La primera solución a considerar es la de Schwarzschild, que fue la primera solución de vacío a las ecuaciones de Einstein publicada en 1916 apenas cuatro meses después de que la teoría de la Relatividad General viera la luz. Esta solución viene descrita por la métrica

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (2.60)$$

Otra solución de vacío de gran relevancia es la solución de Kerr cuya métrica toma la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dr^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} d\theta^2 + \left(\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\Sigma}\right) \sin^2(\theta)\right) d\phi^2 - \frac{4mr}{\Sigma} a \sin^2(\theta) dt d\phi \quad (2.61)$$

con

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta) \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2 \quad (2.62)$$

Esta métrica describe un espacio-tiempo estacionario con la aparición de un parámetro  $a$  que representa la razón del momento angular por la masa de la fuente. Esta solución fue propuesta por Roy Kerr en 1963 y presenta una generalización de la métrica de Schwarzschild para una fuente en rotación.

La suposición de las simetrías temporal y esférica son aproximaciones para hacer más sencillos los cálculos de las ecuaciones de campo.

# Capítulo 3

## Un nuevo enfoque

### 3.1. Objetivos

La idea principal de este trabajo es dar una nueva formulación y clasificación para el cálculo de curvas geodésicas en geometrías axialmente simétricas y, estáticas o estacionarias. Este nuevo enfoque parte del formalismo 1 + 3 y la introducción de los escalares de estructura que simplificarán las ecuaciones de las geodésicas. Para llevar esto a cabo se proponen los siguientes objetivos parciales

1. Primero se propone estudiar el nuevo enfoque en busca de una nueva formulación más sencilla para el cálculo de curvas geodésicas.
2. Una vez se conocen las herramientas teóricas con las que se está trabajando es necesario plantear las ecuaciones de las geodésicas y hacer una clasificación.
3. Por último se identificarán las cantidades que parametrizan las geodésicas y aplicaremos los resultados obtenidos a métricas conocidas como las de Schwarzschild y Kerr para comprobar este nuevo método.

### 3.2. Tétrada

Comenzaremos la introducción del enfoque propuesto suponiendo que tenemos una fuente estacionaria, axialmente simétrica y con una única métrica cuya métrica viene dada por:

$$ds^2 = -A^2(r, \theta)^2 dt^2 + B^2(r, \theta)^2 dr^2 + C^2(r, \theta) d\theta^2 + R^2(r, \theta) d\phi^2 + 2\omega_3 dt d\phi. \quad (3.1)$$

Suponiendo entonces por conveniencia que el vector temporal  $V^\alpha$  está definido como la inversa de la función métrica  $A$  se define entonces la siguiente tétrada de vectores:

$$\begin{aligned}
V^\alpha &= \left( \frac{1}{A}, 0, 0, 0 \right), & V_\alpha &= \left( -A, \frac{\omega_1}{A}, \frac{\omega_2}{A}, \frac{\omega_3}{A} \right), \\
K^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta}} (C^2 R^2 \omega_1, \Delta_1, -R^2 \omega_1 \omega_2, -C^2 \omega_1 \omega_3), & K_\alpha &= \left( 0, \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}, 0, 0 \right), \\
L^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} (R^2 \omega_2, 0, \Delta_2, -\omega_2 \omega_3), & L_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} (0, R^2 \omega_1 \omega_2, \Delta_1, 0), \\
S^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}} \left( \frac{\omega_3}{A}, 0, 0, A \right), & S_\alpha &= \frac{1}{A \sqrt{\Delta_2}} (0, \omega_1 \omega_3, \omega_2 \omega_3, \Delta_2).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Que a su vez son ortonormales

$$\begin{aligned}
V^\alpha V_\alpha &= -K^\alpha K_\alpha = -L^\alpha L_\alpha = -S^\alpha S_\alpha = -1, \\
V^\alpha K_\alpha &= V^\alpha L_\alpha = V^\alpha S_\alpha = K^\alpha L_\alpha = L^\alpha S_\alpha = 0,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde  $\Delta, \Delta_1$  y  $\Delta_2$  son

$$\begin{aligned}
\Delta &= A^2 B^2 C^2 R^2 + B^2 C^2 \omega_3^2, \\
\Delta_1 &= A^2 C^2 R^2 + C^2 \omega_3^2 \text{ y} \\
\Delta_2 &= A^2 R^2 + \omega_3^2.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

### 3.2.1. Derivada de la tétrada

A partir de ahora se denotará la derivada covariante como  $X_{\alpha;\beta}$  y la derivada parcial como  $X_{\alpha,\beta}$ . De manera general, como ya se ha mencionado en (2.48) la derivada covariante de un vector cualquiera  $X$  se puede escribir como

$$X_{\alpha;\beta} = X_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu X_\mu. \tag{3.5}$$

Llevando a cabo las cuentas y renombrando los distintos elementos que aparecen vemos que las derivadas covariantes de los vectores de la tétrada pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
V_{\alpha;\beta} &= -a_\alpha V_\beta + \sigma_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \Theta h_{\alpha\beta}, \\
K_{\alpha;\beta} &= -a_\mu K^\mu V_\alpha V_\beta + V_\alpha (\sigma_{\nu\beta} + \Omega_{\nu\beta} + \frac{1}{3} \Theta h_{\nu\beta}) K^\nu - a_\alpha^{(k)} V_\beta + J_{\alpha\beta}^{(k)}, \\
L_{\alpha;\beta} &= -a_\mu L^\mu V_\alpha V_\beta + V_\alpha (\sigma_{\nu\beta} + \Omega_{\nu\beta} + \frac{1}{3} \Theta h_{\nu\beta}) L^\nu - a_\alpha^{(l)} V_\beta + J_{\alpha\beta}^{(l)} \text{ y} \\
S_{\alpha;\beta} &= -a_\mu S^\mu V_\alpha V_\beta + V_\alpha (\sigma_{\nu\beta} + \Omega_{\nu\beta} + \frac{1}{3} \Theta h_{\nu\beta}) S^\nu - a_\alpha^{(s)} V_\beta + J_{\alpha\beta}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Donde las variables cinemáticas  $a_\alpha, \sigma_{\alpha\beta}, \Omega_{\alpha\beta}$  y  $\Theta$  son las ya mencionadas en el formalismo 1 + 3 y aparecen dos nuevos elementos que toman la forma

$$a_\alpha^{(k)} = h_\alpha^\mu K_{\mu;\nu} V^\nu, \tag{3.7}$$

y

$$J_{\alpha\beta}^{(k)} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu K_{\mu;\nu}. \tag{3.8}$$

Como estamos considerando una solución de vacío los tensores físicos que dependen de la materia se anulan, así

$$\Theta = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.9}$$

### 3.2.2. Escalares geométricos

En esta sección haremos una descomposición de los términos que aparecen en las derivadas covariantes de (3.6) en función de los vectores de la tetraeda.

La cuadiaceleración, toma la forma  $a_\alpha = V_{\alpha;\beta}V^\beta$ , por tanto, su descomposición está dada por

$$a_\alpha = a_1K_\alpha + a_2L_\alpha + a_3S_\alpha. \quad (3.10)$$

Los escalares  $a_i$  toman entonces la expresión

$$a_1 = V_{\alpha;\beta}V^\beta K^\alpha, \quad a_2 = V_{\alpha;\beta}V^\beta L^\alpha, \quad a_3 = V_{\alpha;\beta}V^\beta S^\alpha. \quad (3.11)$$

El término de vorticidad  $\Omega_{\alpha\beta}$  está dado por la ecuación

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_1(K_\alpha L_\beta - K_\beta L_\alpha) + \Omega_2(K_\alpha S_\beta - K_\beta S_\alpha) + \Omega_3(L_\alpha S_\beta - L_\beta S_\alpha). \quad (3.12)$$

Los escalares  $\Omega_i$  entonces son

$$\Omega_1 = \Omega_{\alpha\beta}L^\beta K^\alpha, \quad \Omega_2 = \Omega_{\alpha\beta}K^\beta S^\alpha, \quad \Omega_3 = \Omega_{\alpha\beta}L^\beta S^\alpha. \quad (3.13)$$

Los términos  $J_{\alpha\beta}^{(i)}$  se descomponen de la siguiente manera

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta}^{(k)} &= j_1L_\alpha K_\beta + j_2L_\alpha L_\beta + j_3L_\alpha S_\beta + j_4S_\alpha K_\beta + j_5S_\alpha L_\beta + j_6S_\alpha S_\beta, \\ J_{\alpha\beta}^{(l)} &= -j_1K_\alpha K_\beta - j_2K_\alpha L_\beta - j_3K_\alpha S_\beta + j_7S_\alpha K_\beta + j_8S_\alpha L_\beta + j_9S_\alpha S_\beta, \\ J_{\alpha\beta}^{(s)} &= -j_4K_\alpha K_\beta - j_5K_\alpha L_\beta - j_6K_\alpha S_\beta - j_7L_\alpha K_\beta - j_8L_\alpha L_\beta - j_9L_\alpha S_\beta. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por tanto, los escalares  $j_i$  se calculan como

$$\begin{aligned} j_1 &= K_{\alpha;\beta}K^\beta L^\alpha & j_2 &= K_{\alpha;\beta}L^\beta L^\alpha & j_3 &= K_{\alpha;\beta}S^\beta L^\alpha, \\ j_4 &= K_{\alpha;\beta}K^\beta S^\alpha & j_5 &= K_{\alpha;\beta}L^\beta S^\alpha & j_6 &= K_{\alpha;\beta}S^\beta S^\alpha, \\ j_7 &= L_{\alpha;\beta}K^\beta L^\alpha & j_8 &= L_{\alpha;\beta}L^\beta S^\alpha & j_9 &= L_{\alpha;\beta}S^\beta S^\alpha. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Desarrollando las expresiones de (3.15) en términos de las funciones métricas las expresiones de los escalares  $a_i$ ,  $\Omega_j$  y  $j_k$  que no se anulan son

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A_{,r}}{AB}, & a_2 &= \frac{A_{,\theta}}{AB}, \\ j_1 &= \frac{B_{,\theta}}{BC}, & j_2 &= \frac{C_{,r}}{BC}, \\ j_6 &= \frac{-\omega_3^2 A_{,r} + A^3 RR_{,r} + A\omega_3\omega_{3,r}}{AB(A^2 R^2 + \omega_3^2)}, & j_9 &= \frac{-\omega_3^2 A_{,\theta} + A^3 RR_{,\theta} + A\omega_3\omega_{3,\theta}}{AB(A^2 R^2 + \omega_3^2)}, \\ \Omega_2 &= \frac{-2\omega_3 A_{,r} + A\omega_{3,r}}{2AB\sqrt{A^2 R^2 + \omega_3^2}}, & \Omega_3 &= \frac{2\omega_3 A_{,\theta} - A\omega_{3,\theta}}{2AB\sqrt{A^2 R^2 + \omega_3^2}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Además, si tomamos la función  $\omega_3$  de la siguiente manera

$$\omega_3 = A^2\psi. \quad (3.17)$$

Los escalares geométricos toman expresiones más sencilla

$$a_1 = \frac{A_{,r}}{AB}, \quad a_2 = \frac{A_{,\theta}}{AC}, \quad (3.18)$$

$$j_1 = -\frac{B_{,\theta}}{BC}, \quad j_2 = \frac{C_{,r}}{BC}, \quad (3.19)$$

$$j_6 = \frac{(\ln(R^2 + A^2\psi^2))_{,r}}{2B}, \quad (3.20)$$

$$j_9 = \frac{(\ln(R^2 + A^2\psi^2))_{,\theta}}{2C}, \quad (3.21)$$

$$\Omega_2 = \frac{A\psi_{,r}}{2B\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}}, \quad (3.22)$$

$$\Omega_3 = \frac{A\psi_{,\theta}}{2C\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}}. \quad (3.23)$$

### 3.2.3. Campos de Killing

Como ya se ha mencionado previamente, en un espacio-tiempo estático y axialmente simétrico existen dos vectores de Killing, el vector temporal  $\tau^\alpha$  y el vector axial  $\xi^\alpha$

$$\tau^\alpha = (1, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad \xi^\alpha = (0, 0, 0, 1). \quad (3.24)$$

El Killing temporal puede descomponerse como

$$\tau^\alpha = \tau_0 V^\alpha \Rightarrow \tau_0 = A. \quad (3.25)$$

El Killing axial se descompone como

$$\xi^\alpha = \xi_0 V^\alpha + \xi_3 S^\alpha \Rightarrow \xi_0 = -\frac{\omega_3}{A} \quad \text{y} \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{\Delta_2}}{A}. \quad (3.26)$$

### 3.2.4. Escalares de Weyl

Para las soluciones de vacío el tensor de curvatura de Riemann viene definido únicamente por el tensor de Weyl, que está caracterizado por las partes eléctrica y magnética del campo.

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = C_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (3.27)$$

Donde las partes eléctrica y magnética vienen definidas por

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\gamma\beta\delta} V^\gamma V^\delta, \\ H_{\alpha\beta} &= {}^* C_{\alpha\gamma\beta\delta} V^\gamma V^\delta. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Siendo  ${}^* C_{\alpha\gamma\beta\delta}$  el dual del tensor de Weyl.

Lo que se propone entonces, es escribir estos campos como una combinación de elementos de la tétrada. La parte eléctrica del tensor de Weyl viene dada por la ecuación

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= E_1 K_\alpha K_\beta + E_2 L_\alpha L_\beta - (E_1 + E_2) S_\alpha S_\beta \\ &+ E_3 K_{(\alpha} L_{\beta)} + E_4 K_{(\alpha} S_{\beta)} + E_5 L_{(\alpha} S_{\beta)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

La parte magnética es

$$H_{\alpha\beta} = H_1 K_\alpha K_\beta + H_2 L_\alpha L_\beta - (H_1 + H_2) S_\alpha S_\beta + H_3 K_{(\alpha} L_{\beta)} + H_4 K_{(\alpha} S_{\beta)} + H_5 L_{(\alpha} S_{\beta)} \quad (3.30)$$

Donde los escalares  $E_i$  y  $H_i$  son los denominados escalares de Weyl. Podemos calcular estos escalares mediante los vectores de Killing. Sabemos que un vector de Killing cumple las condiciones

$$X_{\alpha;\beta} - X_{\beta;\alpha} = 0, \quad X^\mu X_{\alpha;\beta;\mu} = 0 \quad (3.31)$$

Aplicando entonces estas condiciones a los vectores  $\tau$  y  $\xi$  se obtienen las siguientes expresiones para los escalares de Weyl

$$\begin{aligned} E_1 &= a_1^\dagger - a_2 j_1 + a_1^2 + \Omega_2^2 \\ E_2 &= -E_1 - a_1 j_6 - a_2 j_9 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2 \\ E_3 &= -a_1^\theta + a_1 a_2 - a_2 j_2 + \Omega_2 \Omega_3 \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= -\Omega_3^\dagger - (a_2 + j_1) \Omega_2 - a_1 \Omega_3 \\ H_2 &= \Omega_3^\dagger + (2a_2 + j_1 - j_9) \Omega_2 + j_6 \Omega_3 \\ H_3 &= -\Omega_3^\theta - j_2 \Omega_2 - 2a_2 \Omega_3 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Donde el resto son nulos y la notación  $a^\dagger$  y  $a^\theta$  es la siguiente

$$a^\dagger = \frac{a,r}{B} \quad \text{y} \quad a^\theta = \frac{a,\theta}{C}. \quad (3.34)$$

### 3.3. Geodésicas

Para el cálculo de las curvas geodésicas del espacio-tiempo se define el vector tangente  $Z^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$  y su contracción  $Z^\alpha$  como una combinación lineal de los vectores  $V, K, L, S$ :

$$Z_\alpha = z_0 V_\alpha + z_1 K_\alpha + z_2 L_\alpha + z_3 S_\alpha. \quad (3.35)$$

donde  $z_i$  son escalares. Se tiene entonces que los escalares  $z_i$  cumplen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z_0 &= Z^\alpha V_\alpha, & z_1 &= Z^\alpha K_\alpha, \\ z_2 &= Z^\alpha L_\alpha, & z_3 &= Z^\alpha S_\alpha. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por tanto, por las propiedades de los vectores de la tétrada, el sistema ecuaciones paramétricas a resolver será

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{z_0}{A} + \frac{z_3 \omega_3}{A \sqrt{\Delta_2}}, \quad (3.37)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{z_1}{B}, \quad (3.38)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{z_2}{C}, \quad (3.39)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{z_3 A}{\sqrt{\Delta_2}}. \quad (3.40)$$

Para verificar que las funciones  $(x^\alpha)$  parametrizan una geodésica  $Z^\alpha$  debe de cumplir la ecuación del transporte paralelo

$$Z^\alpha Z_{\beta;\alpha} = 0, \quad (3.41)$$

y la condición de módulo constante

$$Z_\alpha Z^\alpha = -1 \Rightarrow Z_{\alpha;\beta} Z^\alpha = 0. \quad (3.42)$$

El valor del módulo  $-1$  indica que la geodésica a estudiar es la trayectoria de una partícula. El problema está ahora en identificar los escalares  $z_i$  tales que verifiquen (3.41) y (3.42).

Por la propiedad 2.4.1 se tiene que los vectores de Killing  $\tau$  y  $\xi$  son constantes a lo largo del vector tangente a la geodésica

$$\tau^\alpha Z_\alpha = e \quad \text{y} \quad \xi^\alpha Z_\alpha = \ell \quad (3.43)$$

Donde  $e$  y  $\ell$  son constantes que llamaremos energía y momento angular respectivamente por ser las cantidades conservadas por las simetrías temporal y axial. Se deduce entonces de estas ecuaciones que

$$z_0 = \frac{e}{A} \quad \text{y} \quad z_3 = \frac{A^2 \ell + e \omega_3}{A \sqrt{A^2 R^2 + \omega_3^2}}. \quad (3.44)$$

Por tanto basta con encontrar las expresiones de  $z_1$  y  $z_2$  para poder resolver las ecuaciones de las geodésicas.

Para ello utilizaremos las dos condiciones que tenemos de transporte paralelo y módulo constante del vector tangente  $Z_\alpha$ .

A partir de las ecuaciones del transporte paralelo (3.41) resulta

$$z_1 z_1^\dagger + z_2 z_1^\theta = j_1 z_1 z_2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2 + j_2 z_2^2 + j_6 z_3^2, \quad (3.45)$$

$$z_1 z_2^\dagger + z_2 z_2^\theta = -j_2 z_1 z_2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2 - j_1 z_1^2 + j_9 z_3^2. \quad (3.46)$$

De las ecuaciones de módulo constante (3.42) obtenemos

$$z_1 z_1^\dagger + z_2 z_2^\dagger = j_6 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2, \quad (3.47)$$

$$z_1 z_1^\theta + z_2 z_2^\theta = j_9 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2. \quad (3.48)$$

Restando las ecuaciones (3.47)-(3.45) y (3.48)-(3.46) se obtiene

$$z_2(z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2) = 0, \quad (3.49)$$

$$z_1(z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2) = 0. \quad (3.50)$$

Que son las ecuaciones que deberán cumplir  $z_1$  y  $z_2$  para que la curva definida sea una geodésica. Hay cuatro posibilidades para que se cumplan estas ecuaciones.



### 3.3.1. Caso A: $z_1 = z_2 = 0$

Al anularse los escalares  $z_1$  y  $z_2$  se tiene que las funciones coordenadas  $r$  y  $\theta$  de la geodésica son constantes

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{d\theta}{d\lambda} = 0. \quad (3.51)$$

Por tanto, este primer caso representa las órbitas circulares.

Por las ecuaciones (3.45)-(3.48) se tiene además que los escalares  $z_0$  y  $z_3$  deben cumplir

$$j_6 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2 = 0, \quad (3.52)$$

$$j_9 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2 = 0, \quad (3.53)$$

$$z_0^2 - z_3^2 - 1 = 0 \quad (3.54)$$

### 3.3.2. Caso B: $z_2 = 0$ y $z_1^\theta = j_1 z_1$

Puesto que el escalar  $z_2$  se anula se tiene

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 0. \quad (3.55)$$

En este caso se pueden estudiar entonces todas las órbitas que están restringidas a un plano no necesariamente circulares. Por las ecuaciones (3.45)-(3.48) los escalares  $z_0, z_1$  y  $z_3$  deben de cumplir el siguiente sistema de ecuaciones

$$j_9 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2 - j_1 z_1^2 = 0, \quad (3.56)$$

$$\epsilon + z_0^2 - z_3^2 - z_1^2 = 0, \quad (3.57)$$

$$z_1^\theta - j_1 z_1 = 0. \quad (3.58)$$

### 3.3.3. Caso C: $z_1 = 0$ y $z_2^\dagger + j_2 z_2 = 0$

De manera análoga a los casos anteriores cuando el escalar  $z_1$  se anula se obtienen las trayectorias de radio constante. El sistema de ecuaciones que deben de cumplir los escalares  $z_0, z_2$  y  $z_3$  es

$$j_6 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2 + j_2 z_2^2 = 0, \quad (3.59)$$

$$\epsilon + z_0^2 - z_3^2 - z_2^2 = 0, \quad (3.60)$$

$$z_2^\dagger + j_2 z_2 = 0. \quad (3.61)$$

### 3.3.4. Caso D: $z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2 = 0$

. Este caso es el más general y contiene a todos los anteriores, sin embargo, su resolución es más complicada. El sistema de ecuaciones a considerar es

$$z_1 z_1^\theta + z_2 z_2^\theta - j_9 z_3^2 + 2z_0 z_3 \Omega_3 + a_2 z_0^2 = 0, \quad (3.62)$$

$$z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2 = 0, \quad (3.63)$$

$$\epsilon + z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 0. \quad (3.64)$$

En este trabajo no nos dedicaremos a la resolución de este apartado, no obstante, se da una breve idea de como se puede resolver en desarrollos futuros.

# Capítulo 4

## Aplicación y resultados

Una vez llevado a cabo el estudio teórico del desarrollo de este método veremos su aplicación en las métricas de Schwarzschild y Kerr.

### 4.1. Schwarzschild

La métrica el agujero negro de Schwarzschild viene dada por

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (4.1)$$

Reproduciendo los cálculos con esta métrica en los distintos casos se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales para las curvas geodésicas y algunos resultados

#### 4.1.1. Caso A

En este caso la ecuación (3.53) resulta

$$\frac{\ell^2 \cot(\theta) \csc^2(\theta)}{r^3} = 0. \quad (4.2)$$

Lo que implica que la única solución para esta ecuación con momento angular  $\ell$  no nulo es  $\theta = \pi/2$ . Esto quiere decir que todas las órbitas de este caso están contenidas en el plano ecuatorial.

De la ecuación del módulo constante se obtiene la siguiente relación para la energía

$$e^2 = \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (4.3)$$

Introduciendo esta ecuación en (3.52) se obtiene una condición para el radio constante de esta curva

$$r = \frac{\ell^2 \pm \sqrt{\ell^4 - 12\ell^2 m^2}}{2m}. \quad (4.4)$$

Con lo que el conjunto de ecuaciones diferenciales que definen la curva geodésica es

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= 0, \\
\theta &= \pi/2, \\
\dot{r} &= 0, \\
r &= \frac{\ell^2 \pm \sqrt{\ell^4 - 12\ell^2 m^2}}{2m}, \\
\dot{\phi} &= \frac{\ell}{r^2}, \\
\dot{t} &= \frac{\ell^2 + r^2}{r(r - 2m)}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

#### 4.1.2. Caso B

Calculando las ecuaciones de las geodésicas del caso B se obtiene que para que se verifique (3.56) se debe de cumplir  $\theta = \pi/2$ . Se concluye entonces que todas las órbitas que permanecen en un plano deben de estar en el plano ecuatorial.

Por la ecuación del módulo constante el escalar  $z_1$  viene dado por la expresión

$$z_1 = \sqrt{\frac{e^2}{1 - \frac{2m}{r}} - \frac{\ell^2}{r^2} - 1}. \tag{4.6}$$

Así sistema de ecuaciones diferenciales a resolver entonces es

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= 0, \\
\theta &= \pi/2, \\
\dot{r}^2 &= e^2 + \frac{(2m - r)(\ell^2 + r^2)}{r^3}, \\
\dot{\phi} &= \frac{\ell}{r^2}, \\
\dot{t} &= -\frac{e}{1 - \frac{2m}{r}}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

En la ecuación de  $\dot{r}^2$  se puede apreciar que coincide con la ecuación de la conservación de la energía total relativista (2.21). Es decir, podemos obtener el potencial efectivo  $V_{\text{Nefe}}$  que describirá los distintos tipos de órbitas. Recordamos que el potencial efectivo estaba dado por

$$V_{\text{Nefe}} = -\frac{m}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{m\ell^2}{r^3}. \tag{4.8}$$

Y los puntos de retorno están dados por los valores del radio en los que  $\mathcal{E} = V_{\text{Nefe}}$  donde

$$\mathcal{E} = \frac{e^2 - 1}{2}. \tag{4.9}$$

Se representan a continuación ejemplos de órbitas junto a sus potenciales para explicar su comportamiento. Comenzaremos con los casos para los que  $\mathcal{E} < 0$ .

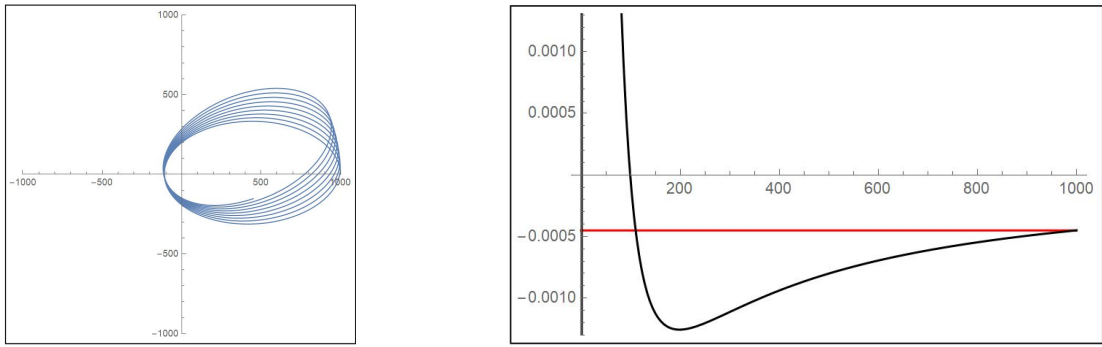


Figura 4.1: Órbita relativista con precesión del perihelio.

En esta figura se han representado la órbita y el potencial dados por los parámetros  $\ell = 10$ ,  $r_0 = 1000$ ,  $m = 0,5$  y  $\dot{r}_0 = 0$ . Se puede observar como la energía, representada en rojo, tiene dos puntos de corte con el potencial efectivo, en negro. Esto indica dos puntos de retorno, es decir una órbita elíptica. Como podemos observar en la imagen de la órbita esta trayectoria presenta una precesión del perihelio.

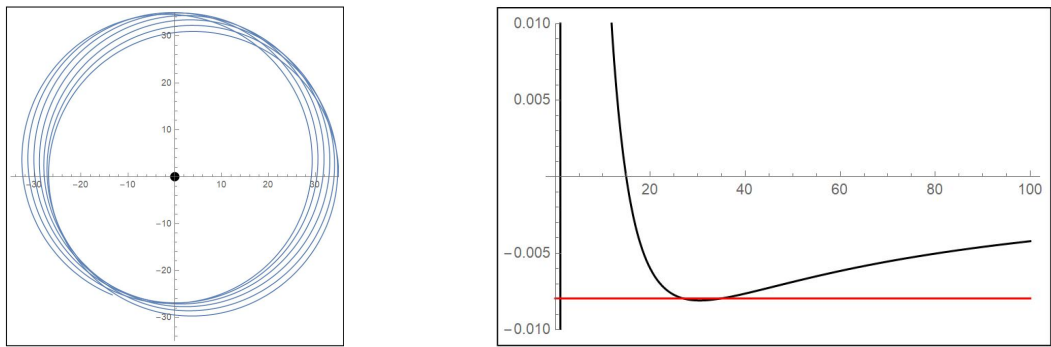


Figura 4.2:

Los parámetros son  $\ell = 4$ ,  $r_0 = 35$ ,  $m = 0,5$  y  $\dot{r}_0 = 0$ . Se observa el mismo efecto que en la figura anterior para una órbita casi circular. Se representa por un círculo negro el denominado agujero negro de Schwarzschild de radio  $r = 2m$ .

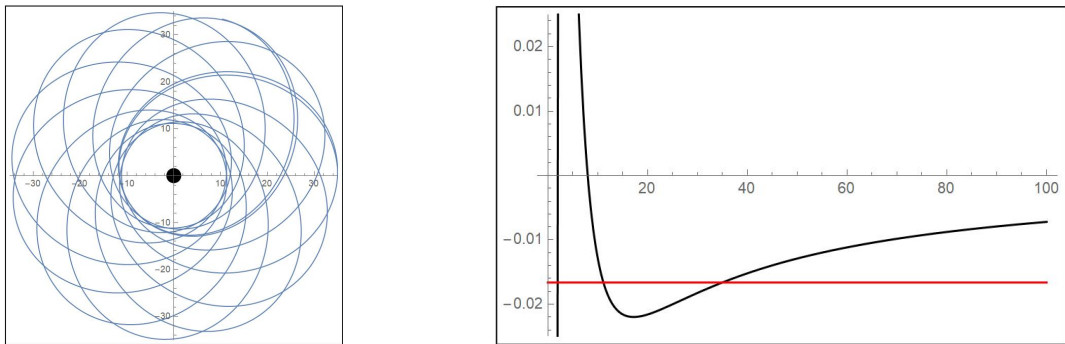


Figura 4.3:

Los parametros tomados son los mismos que en la figura 4.2 salvo por un cambio en

la masa que en este caso es  $m = 0,8$ . Así se puede ver como afecta un campo gravitatorio más fuerte a una partícula que no cae en la singularidad.

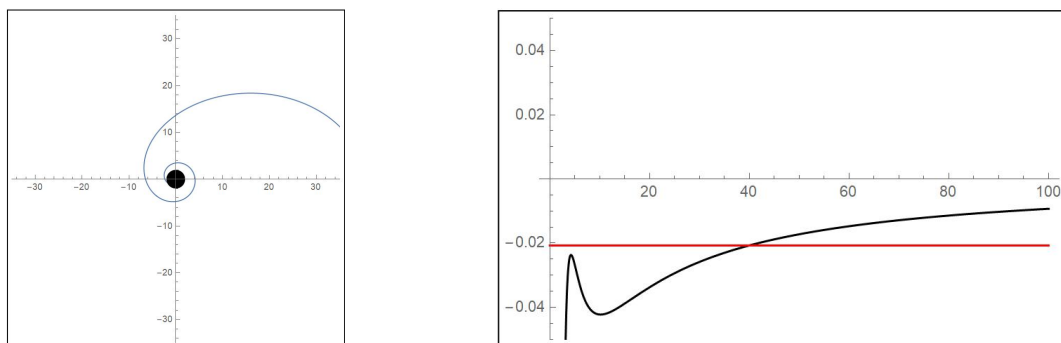


Figura 4.4:

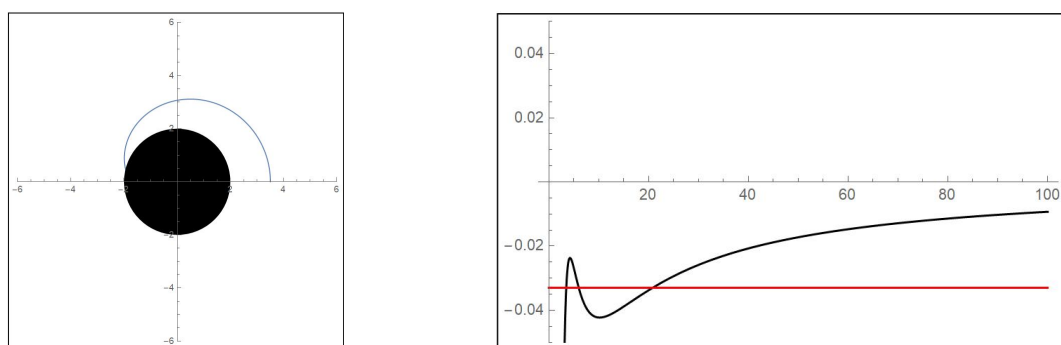


Figura 4.5:

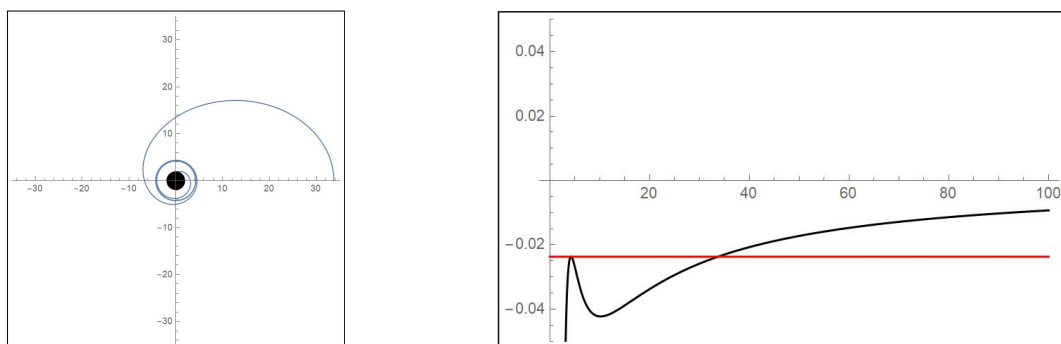


Figura 4.6:

En las figuras 4.4 - 4.6 se han representado distintas órbitas para un mismo potencial. En el primer caso se puede observar en el potencial que solo existe un punto de retorno. Esto implica que la órbita debe de ser de colapso o de escape. En la figura 4.5 el potencial y la energía tienen 3 puntos de intersección  $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ . En este caso se comprueba que cuando el radio es  $r_1$  la órbita colapsa. Finalmente se puede apreciar en la figura 4.6 una órbita con un único punto de retorno y un punto en el que se aproxima al máximo local

del potencial. Es por esto que la órbita traza una previamente a caer en la singularidad. Los valores tomados en estos casos son  $\ell = 19/5$ ,  $m = 1$  y  $r_0 = 40$ ,  $r_0 = 3,50467$  y  $r_0 = 33,7328$  respectivamente.

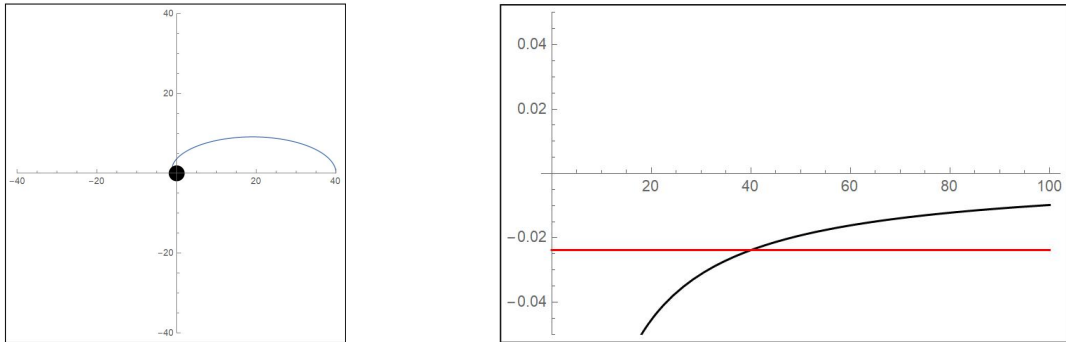


Figura 4.7:

Por último se visualiza un caso en el que el potencial no tiene máximos ni mínimos y, por tanto, no existen órbitas ligadas. Los parámetros son  $\ell = 2$ ,  $r_0 = 40$ ,  $m = 1$  y  $r_0 = 0$ . Veamos ahora cuáles son las órbitas para  $\mathcal{E} > 0$

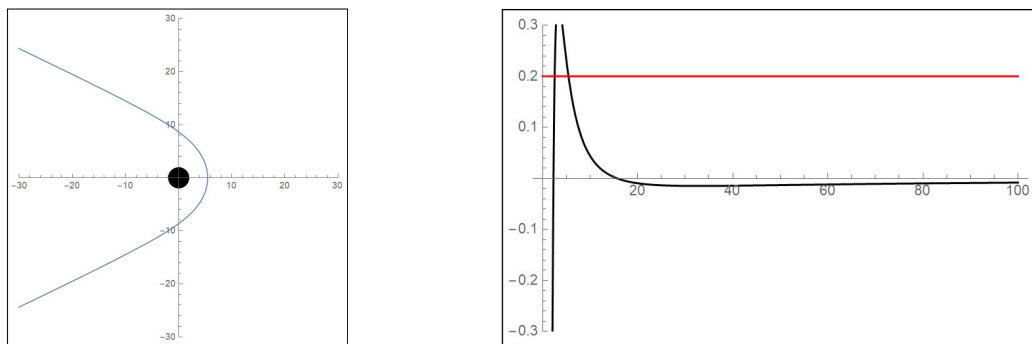


Figura 4.8:

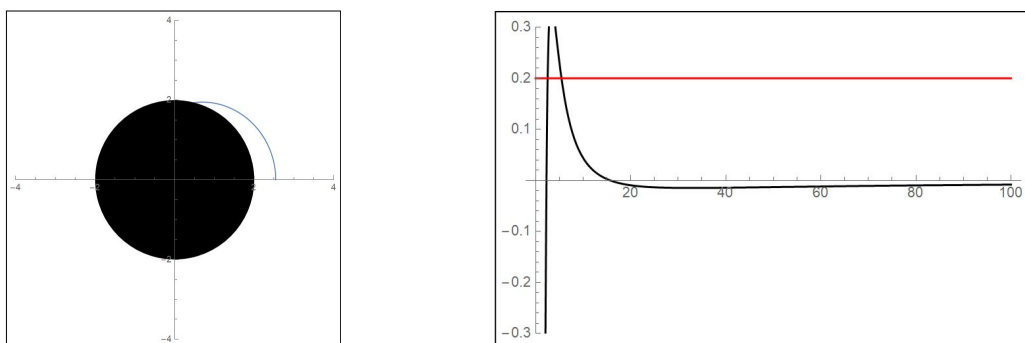


Figura 4.9:

Las figuras 4.8 y 4.9 son la representación de dos órbitas con el mismo valor de energía. En este caso hay dos puntos de corte con la gráfica de potencial efectivo. El mayor valor

de estos induce a una órbita de dispersión, que se corresponde con las órbitas hiperbólicas Newtonianas. El punto de corte más cercano al origen reproduce una órbita que cae dentro de la singularidad. Los valores tomados para esta representación son  $\ell = 6$ ,  $m = 1$ ,  $r_0 = 0$ ;  $r_0 = 5,45203$  y  $e = 0,2$  en la órbita de dispersión y  $r_0 = 2,541$  y  $e = 2,541$  en la órbita de colapso.

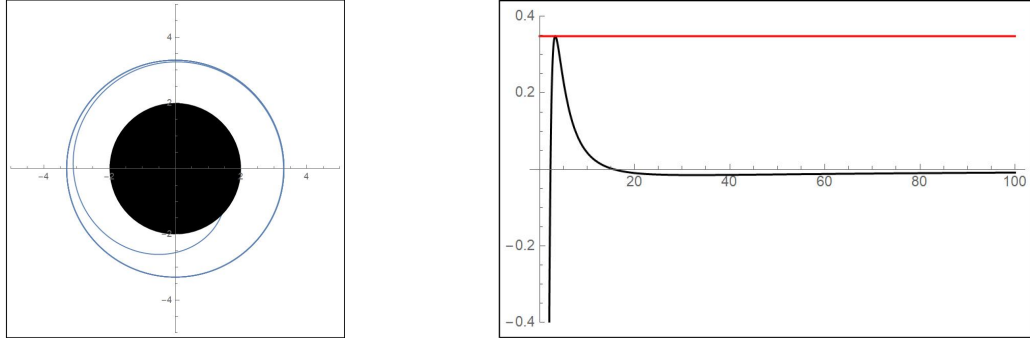


Figura 4.10:

Por último podemos ver una órbita circular inestable. Esta órbita es susceptible de colapsar o escapar debido a cualquier perturbación (en este caso las perturbaciones son la imprecisión numérica de la solución). Los parámetros tomados para representar esta órbita son  $\ell = 6$ ,  $m = 1$ ,  $r_0 = 0$ ,  $r_0 = 18(1 - \sqrt{2/3})$  y  $e = 0,348$ .

### 4.1.3. Caso C

Multiplicando la ecuación (3.60) por  $j_2$  y sumándole (3.59) se obtiene que

$$(j_6 - j_2)z_3^2 - 2z_0z_3\Omega_2 - (a_1 - j_2)z_0^2 - j_2 = 0. \quad (4.10)$$

Que una vez computado para la métrica de Schwarzschild nos da la condición

$$(4 - 3e^2)mr + (e^2 - 1)r^2 - 4m^2 = 0. \quad (4.11)$$

Resolviendo  $z_2$  de la ecuación del módulo constante podemos obtener la siguiente expresión

$$z_2 = \sqrt{z_0^2 - z_3^2 - 1} = \frac{\ell\sqrt{\alpha \sin^2(\theta) - 1}}{r \sin(\theta)}, \quad (4.12)$$

donde

$$\alpha = \frac{r^2}{\ell^2} \left( \frac{e^2}{1 - \frac{2m}{r}} - 1 \right), \quad (4.13)$$

es constante porque  $r$ ,  $e$ ,  $\ell$  y  $m$  son constantes. Las ecuaciones características de la curva entonces son

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\ell\sqrt{\alpha \sin^2(\theta) - 1}}{r^2 \sin(\theta)}, \quad (4.14)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\ell}{r^2 \sin^2(\theta)}. \quad (4.15)$$

Dividiendo (4.14) entre (4.15) se llega a la expresión

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \sin(\theta) \sqrt{\alpha \sin^2(\theta) - 1}. \quad (4.16)$$

Esta ecuación diferencial es resoluble analíticamente y su solución viene dada por

$$\phi = \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\alpha \sin^2(\theta) - 1}}\right) + \theta_0. \quad (4.17)$$

Esta ecuación ya nos permite hacer gráficas de las curvas, aún así aún se pueden obtener más resultados de las ecuaciones.

Se observa también que cuando se comprueba que

$$\frac{d\theta}{d\phi} = 0, \quad (4.18)$$

se pueden obtener dos situaciones.

Dado  $\theta_0$  fijo se puede obtener un valor de  $\alpha$  tal que la curva que pasa por  $\theta_0$  sea una órbita circular contenida en el plano  $\theta = \theta_0$ . Por otro lado, dado un valor de  $\alpha$  se obtiene el valor de  $\theta_0$  tal que la órbita circular está contenida en ese plano.

Para estudiar estas órbitas podemos tomar el caso concreto en el que  $e = 1$ . Con estos valores la ecuación (4.11) queda de la siguiente manera

$$mr - 4m^2 = 0. \quad (4.19)$$

Por tanto, el radio constante es  $r = 4m$ .

Se puede observar además en la ecuación (4.17) que en los casos en los que el denominador sea cero o un valor complejo no existe solución. Se comprueba entonces que existen valores en los que no existe solución como son  $\ell = r$ ,  $\ell = 0$  ó  $\theta = \pm\pi$ .

Supongamos ahora que queremos obtener una órbita circular en el plano  $\theta_0 = \pi/4$ . Entonces hay que resolver la ecuación

$$\sin(\theta_0) \sqrt{\alpha \sin^2(\theta_0) - 1} = 0, \quad (4.20)$$

donde  $\alpha$  en este caso es  $\frac{r^2}{L^2}$ . Llevando a cabo los cálculos se obtiene que  $\ell = 2\sqrt{2}$ . Se obtiene así la curva siguiente



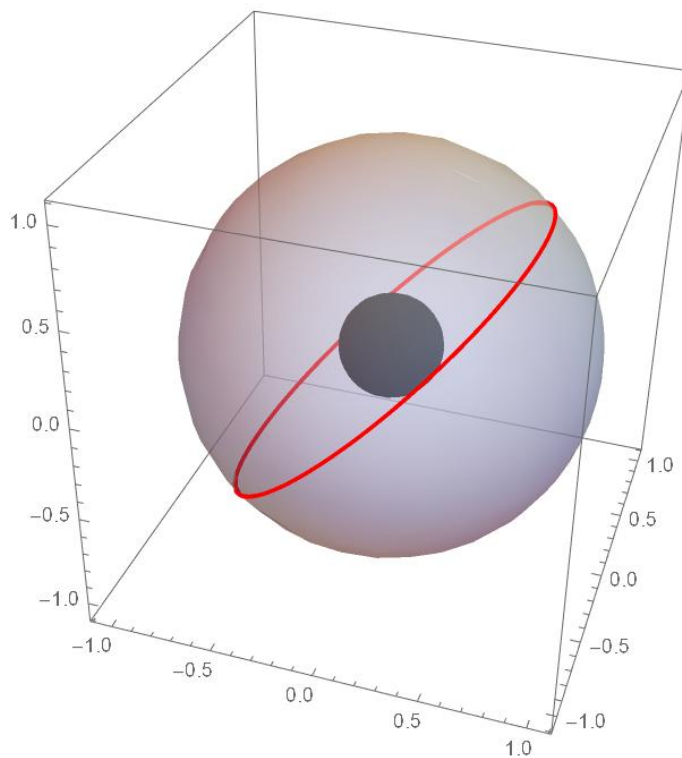


Figura 4.11: Órbita circular en el plano constante  $\theta = \pi/4$ .

De igual manera se puede resolver para obtener el ángulo en el que una partícula con un determinado momento angular permanecerá en un plano constante. Por otro lado podemos representar algunos ejemplos de órbitas de radio constante que no permanecen en un plano.

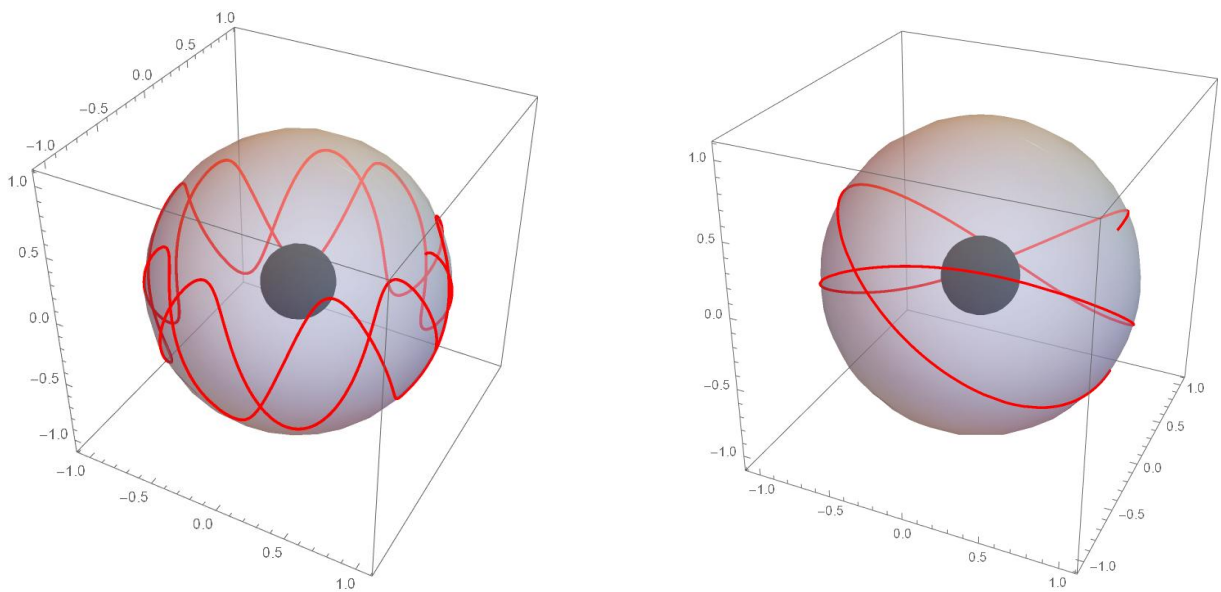


Figura 4.12: Órbitas de radio constante no coplanarias.

Para la representación de estas órbitas se ha tomado un ángulo inicial  $\theta_0 = \pi/3$  y los

respectivos momentos angulares  $\ell = 1$  y  $\ell = 3$ .

## 4.2. Kerr

La métrica del espacio-tiempo generado por el agujero negro de Kerr está descrita por la ecuación

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dr^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\Sigma}\right) \sin^2(\theta)\right) d\phi^2 - \frac{4mr}{\Sigma} a \sin^2(\theta) dt d\phi \quad (4.21)$$

con

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta) \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2 \quad (4.22)$$

Donde  $a$  es la velocidad relativa de rotación por unidad de masa. Reproduciendo los cálculos correspondientes se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones para las curvas geodésicas y algunos resultados.

### 4.2.1. Caso A

Al igual que en el caso de Schwarzschild se verifica que se debe imponer que el ángulo  $\theta$  tome el valor  $\pi/2$  para cumplir la ecuación (3.53). Para obtener las órbitas circulares y coplanarias se debe de resolver entonces el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 0, \\ \theta &= \pi/2, \\ \dot{r} &= 0, \\ \dot{\phi} &= \frac{\ell(r - 2m) - 2aem}{r(a^2 + r(r - 2m))}, \\ \dot{t} &= -\frac{a^2 e(2m + r) + 2alm + er^3}{r(a^2 + r(r - 2m))}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

### 4.2.2. Caso B

En este caso se vuelve a cumplir que para cumplir la ecuación (3.56) el ángulo  $\theta$  debe de tomar el valor  $\pi/2$ . Se concluye entonces que todas las órbitas planas, sean circulares o no, deben estar contenidas en el plano ecuatorial. Resolviendo el valor de  $z_1$  en las ecuaciones de las geodésicas y sustituyendo en las ecuaciones de las funciones coordenadas se tiene que las ecuaciones que gobiernan el movimiento en este caso son

$$\dot{\theta} = 0, \quad (4.24)$$

$$\theta = \pi/2, \quad (4.25)$$

$$\dot{r}^2 = \frac{a^2(e^2(2m + r) - r) + 4aelm + r^2((e^2 - 1)r + 2m) + \ell^2(2m - r)}{r^3}, \quad (4.26)$$

$$\dot{\phi} = \frac{r(\ell(r - 2m) - 4aem)}{a^2(12m^2 + r^2) + r^3(r - 2m)}, \quad (4.27)$$

$$\dot{t} = -\frac{r(a^2 e(2m + r) + 4alm + er^3)}{a^2(12m^2 + r^2) + r^3(r - 2m)}. \quad (4.28)$$

A continuación se da una pequeña muestra de las órbitas en la métrica de Kerr. Para hacer este estudio se tomarán los mismos valores de los parámetros que en las órbitas estudiadas para la métrica de Schwarzschild. A parte de los parámetros utilizados previamente en las ecuaciones características de estas órbitas aparecen también la energía  $e$  y el parámetro  $a$  que describe la velocidad relativa de rotación cuyo signo indica el sentido de esta. De manera general tomaremos  $e = 1$  y  $a = |1|$ . Representaremos a la izquierda las órbitas con  $a$  positivo y a la derecha aquellas con  $a$  negativo.

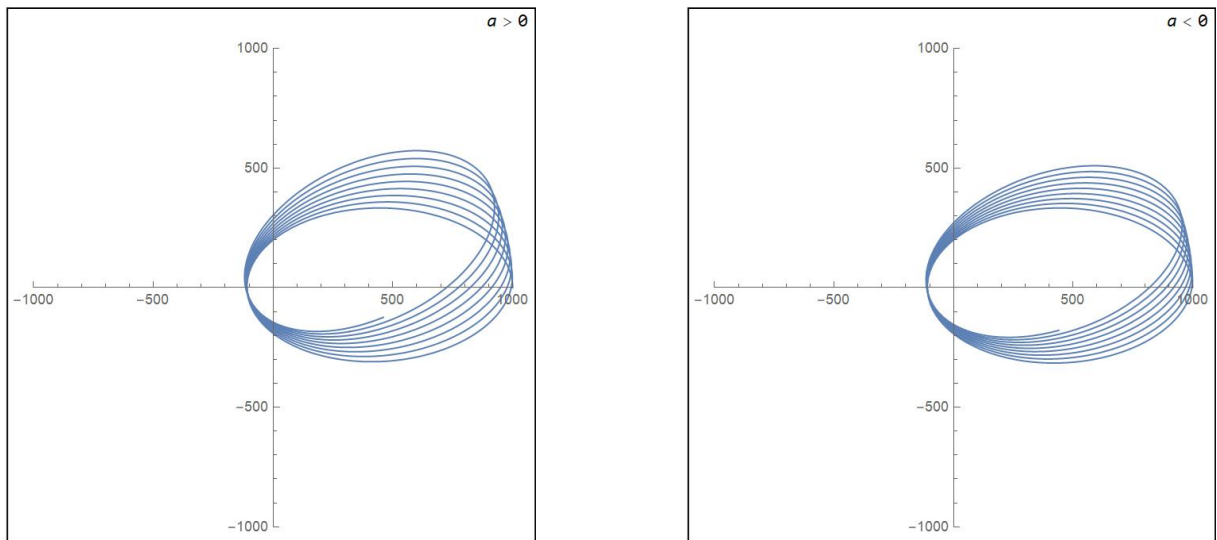


Figura 4.13:

Para comenzar podemos observar cómo afecta la rotación de la fuente a una órbita con retroceso del perihelio en un campo gravitatorio débil. Se puede apreciar que en el caso en que  $a = 1$  la precesión es mayor al caso negativo.

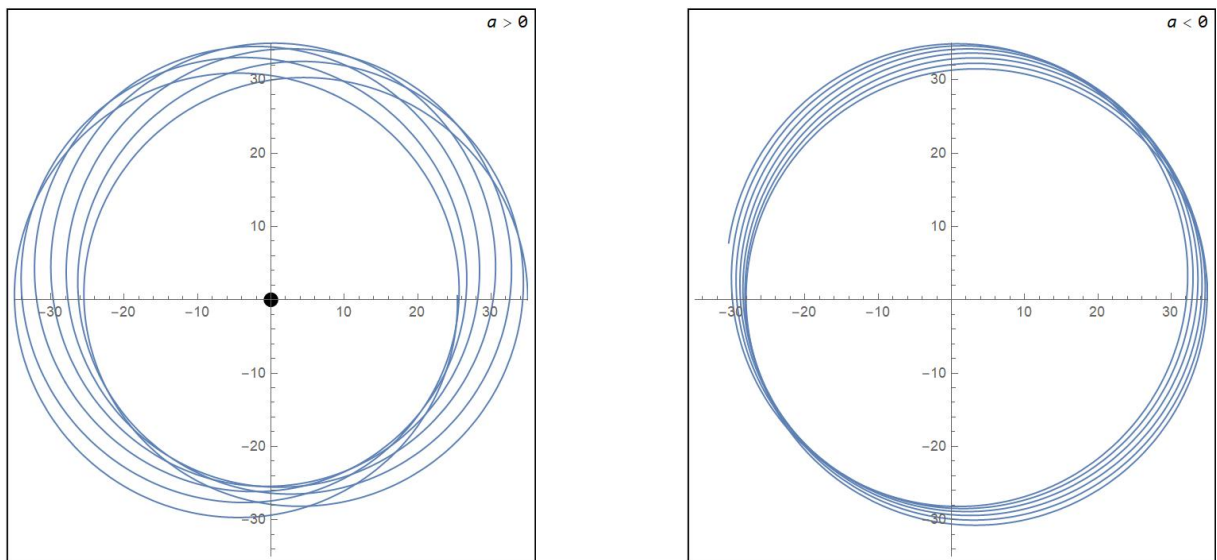


Figura 4.14:

Dada una órbita menos excéntrica parece ser que la precesión del perihelio desaparece en el caso en que  $a$  es positivo. En cambio, en el caso negativo seguimos teniendo una órbita parecida a 4.2 pero con una precesión menor.

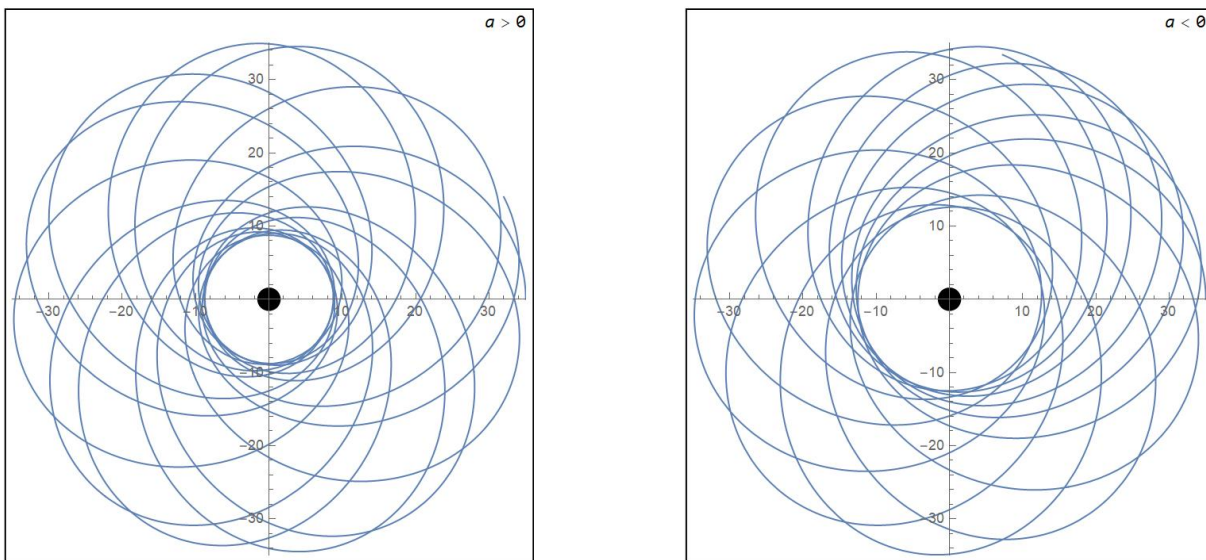


Figura 4.15:

En esta figura se aprecia una partícula con una trayectoria comprendida entre un radio máximo y un radio mínimo en un campo gravitatorio menos débil. Corresponde a la figura 4.3.

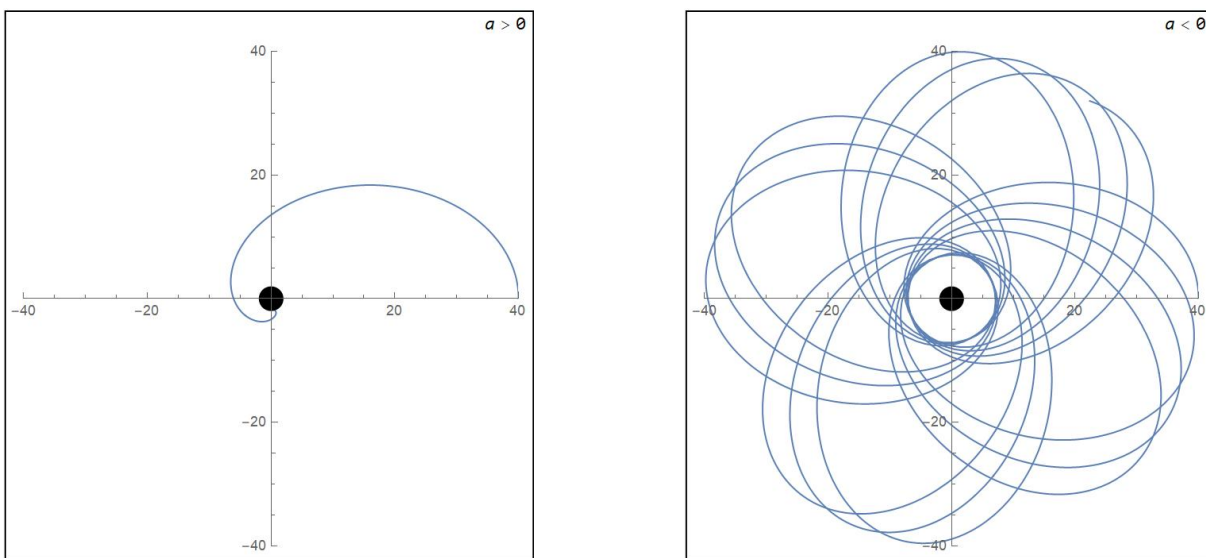


Figura 4.16:

Este es el primer ejemplo en el que se observa una gran diferencia entre los distintos sentidos de rotación del agujero negro. Se puede observar claramente como la partícula colapsa cuando  $a$  es positivo (esto parece indicar una especie de freno en la trayectoria), mientras que cuando  $a$  es negativo la partícula se ve acelerada y permanece en una órbita

estable. Se puede observar la correspondiente figura 4.4 en la que la partícula cae en la singularidad con una trayectoria algo más larga.

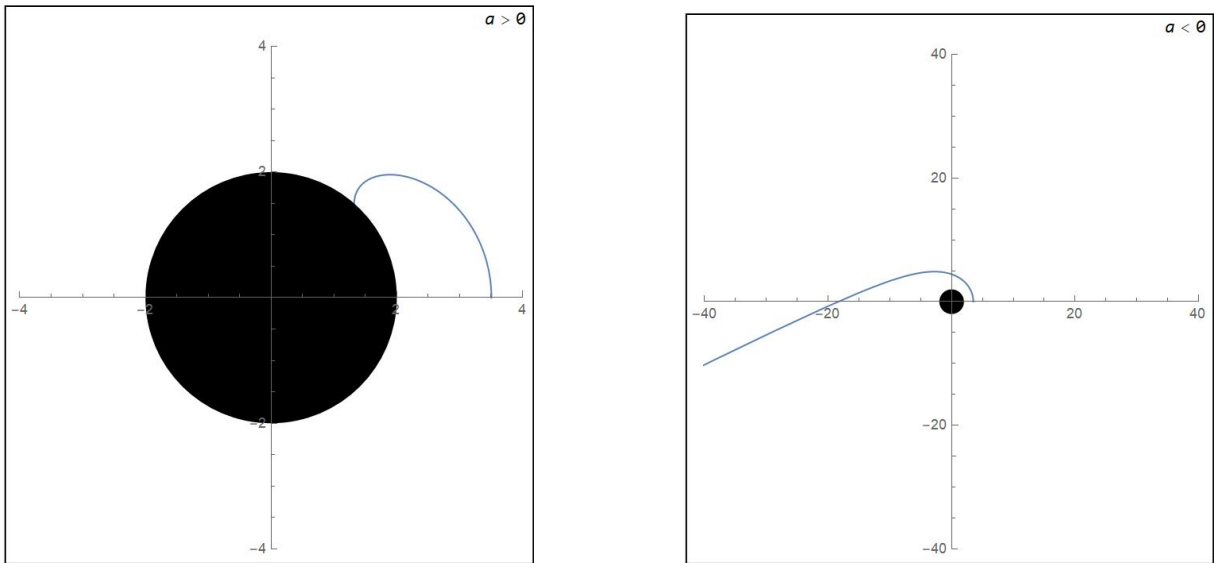


Figura 4.17:

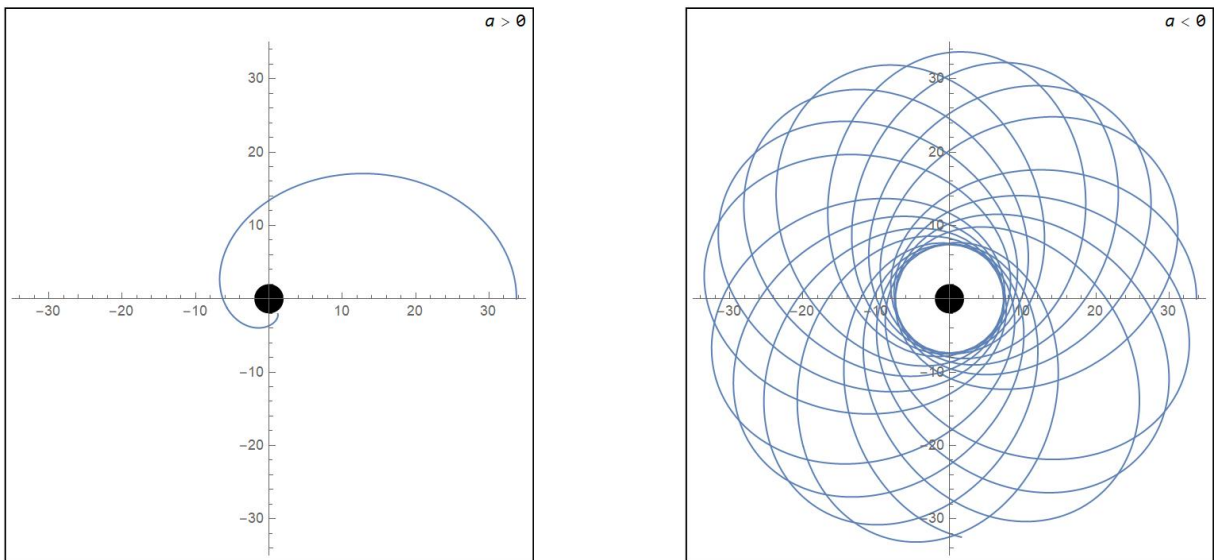


Figura 4.18:

Las figuras 4.17 y 4.18 refuerzan la idea de que en los casos en los que el parámetro  $a$  es positivo la partícula se ve frenada y para casos en los que  $a$  presenta una aceleración. Tanto es así que incluso supone la diferencia entre caer a la singularidad y salir del campo gravitatorio como pasa en 4.17.

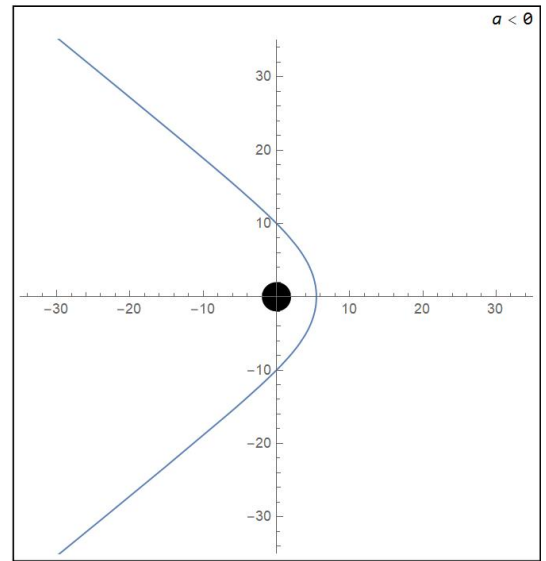
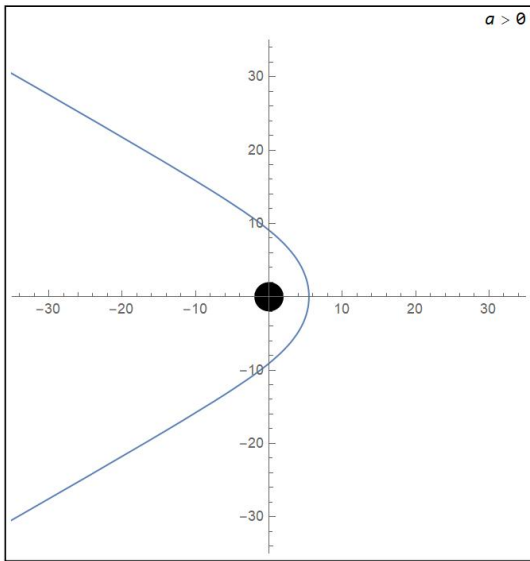


Figura 4.19:

Esta gráfica es de gran importancia pues revela la diferencia entre dos órbitas hiperbólicas en función del sentido de rotación del agujero negro. Esto parece indicar que si quisiéramos lanzar una nave en un viaje galáctico de larga distancia podríamos hacer uso de objetos masivos con gran rotación para acelerar la nave y optimizar la trayectoria.

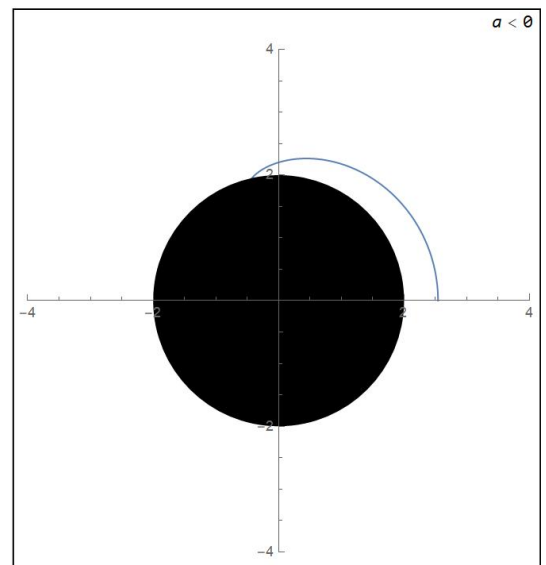
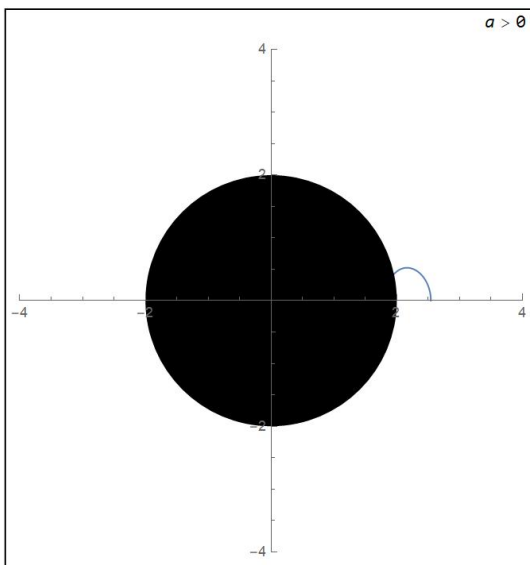


Figura 4.20:

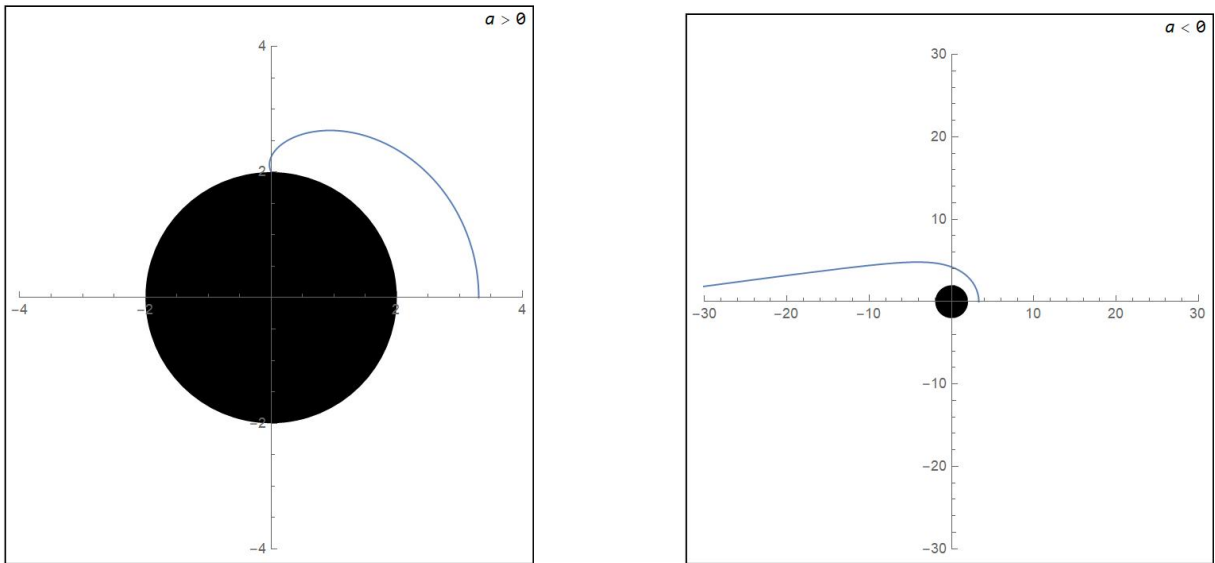


Figura 4.21:

Por último se observan las trayectorias correspondientes a los parámetros dados en las gráficas 4.9 y 4.10 respectivamente. Se aprecia un primer caso en el que la órbita es de colapso para ambos sentidos de rotación. Además, en contraposición con la órbita circular inestable de 4.10 en esta última gráfica podemos ver una vez más la diferencia entre caer en la singularidad o escapar de ella.

En los casos respectivos a energías  $\mathcal{E} < 0$  de Schwarzschild se han cogido energías  $En = 1$  ó  $1/2$  de manera genérica. En los casos respectivos a  $\mathcal{E} > 0$  se toman los mismos valores dados en las gráficas. En el caso de Kerr la toma del valor de la energía no tiene una explicación argumentada puesto que no se ha obtenido el potencial efectivo. La obtención de este potencial se propondrá para trabajos futuros.

Por último, pese a que no se dan valores obtenemos las siguientes geodésicas aparentemente idénticas las que aparecen en el artículo [10]:

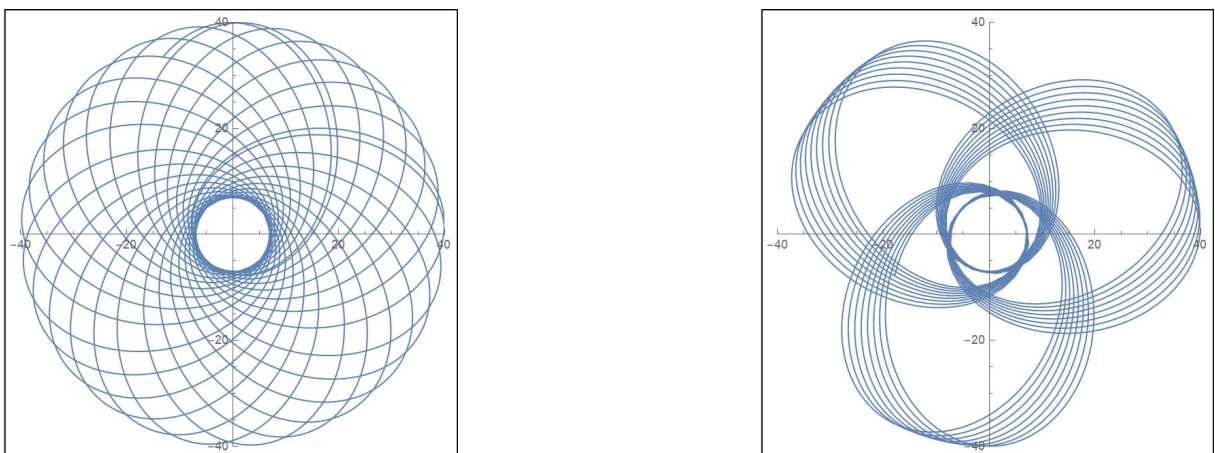


Figura 4.22:

Para los valores  $a = -1$ ,  $\ell = 19/5$ ,  $e = 0,5$ ,  $r_0 = 40$ ,  $m = 1$ ,  $\dot{r}_0 = 0$  y  $a = -0,5$ ,  $\ell = 4$ ,  $e = 0,5$ ,  $r_0 = 40$ ,  $m = 1$  y  $\dot{r}_0 = 0$ .  
Y otra órbita que quizás pueda ser de interés

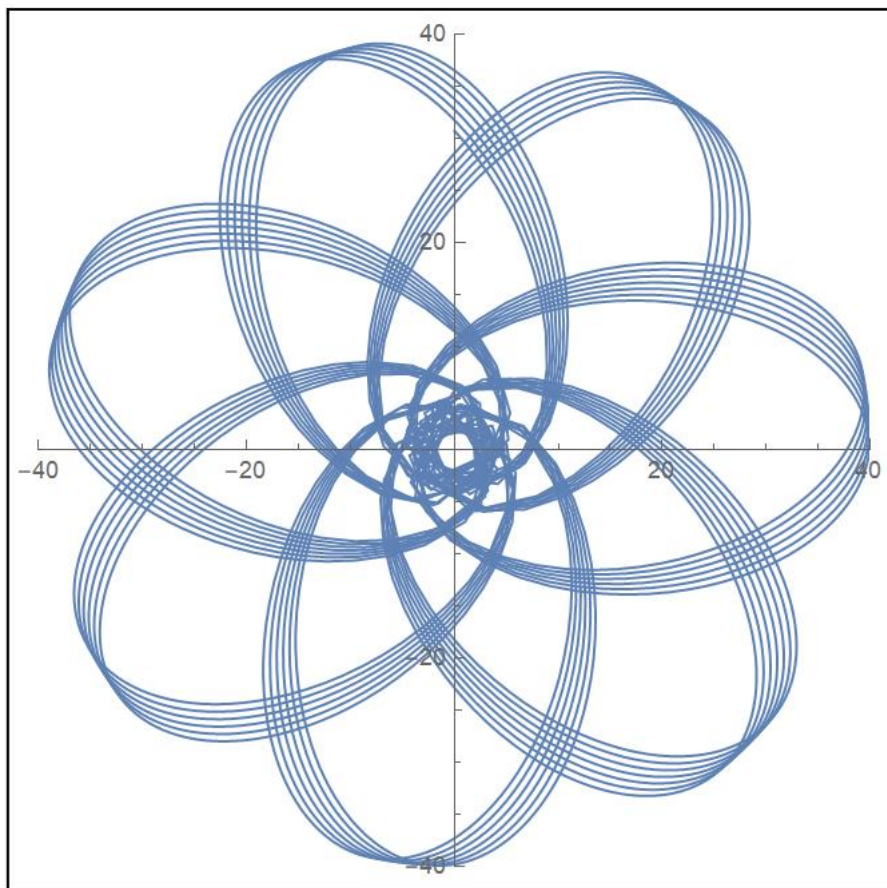


Figura 4.23:

Dada por los valores  $a = -1$ ,  $\ell = 3$ ,  $e = 1$ ,  $r_0 = 40$ ,  $m = 1$  y  $\dot{r}_0 = 0$



# Capítulo 5

## Conclusiones

Según el estudio llevado a cabo podemos sacar las siguientes conclusiones Hemos formulado una nueva metodología para el estudio del espacio-tiempo desde el marco de la Relatividad-General en función de los escalares de estructura que permiten simplificar ecuaciones

Se obtiene de forma exitosa una nueva formulación para el cálculo de geodésicas en métricas estáticas y estacionarias. Este nuevo método no solo permite calcular las curvas sino que otorga una primera integración de estas ecuaciones gracias a los escalares de estructura. Además, obtenemos una clasificación de las curvas geodésicas en 4 casos diferentes: órbitas circulares y planas, órbitas planas, órbitas de radio constante y un cuarto caso general que aparentemente embarca todas las soluciones.

Aplicamos las ecuaciones obtenidas a casos particulares ya conocidos de la métrica de Schwarzschild para comprobar los resultados. Una vez comprobados llevamos a cabo el estudio de las órbitas en la métrica de Kerr y observamos cómo la rotación de la fuente afecta a la trayectoria de una partícula. En aquellos casos en los que el parámetro de velocidad relativa de rotación  $a$  sea positivo se observa una deceleración en la trayectoria de la partícula y viceversa. En figuras como 4.16 o 4.17 se entonces como la el sentido de rotación de la fuente puede significar la diferencia entre una órbita que cae en la singularidad, una órbita que permanece en el campo gravitatorio o una que escapa de este.

Esta idea sobre la aceleración o deceleración inducida mediante la rotación de objetos masivos nos lleva a pensar que, en el caso de un viaje espacial, se podría hacer uso de una asistencia gravitacional que se basaría en beneficiarse de estos cuerpos para optimizar la trayectoria de la nave.

Por otro lado, la parametrización de las trayectorias nos puede permitir estudiar aspectos sobre objetos masivos estelares. Por ejemplo el caso del agujero negro más cercano al planeta Tierra, Sagitario A, que se encuentra en el centro de la galaxia. Existen numerosas observaciones sobre las trayectorias de objetos cercanos al centro de la galaxia, entre otros [MSO]. Tomando estas observaciones se podrían estudiar aproximaciones de las curvas obtenidas a las curvas observadas y así obtener una aproximación de los parámetros que las definen.

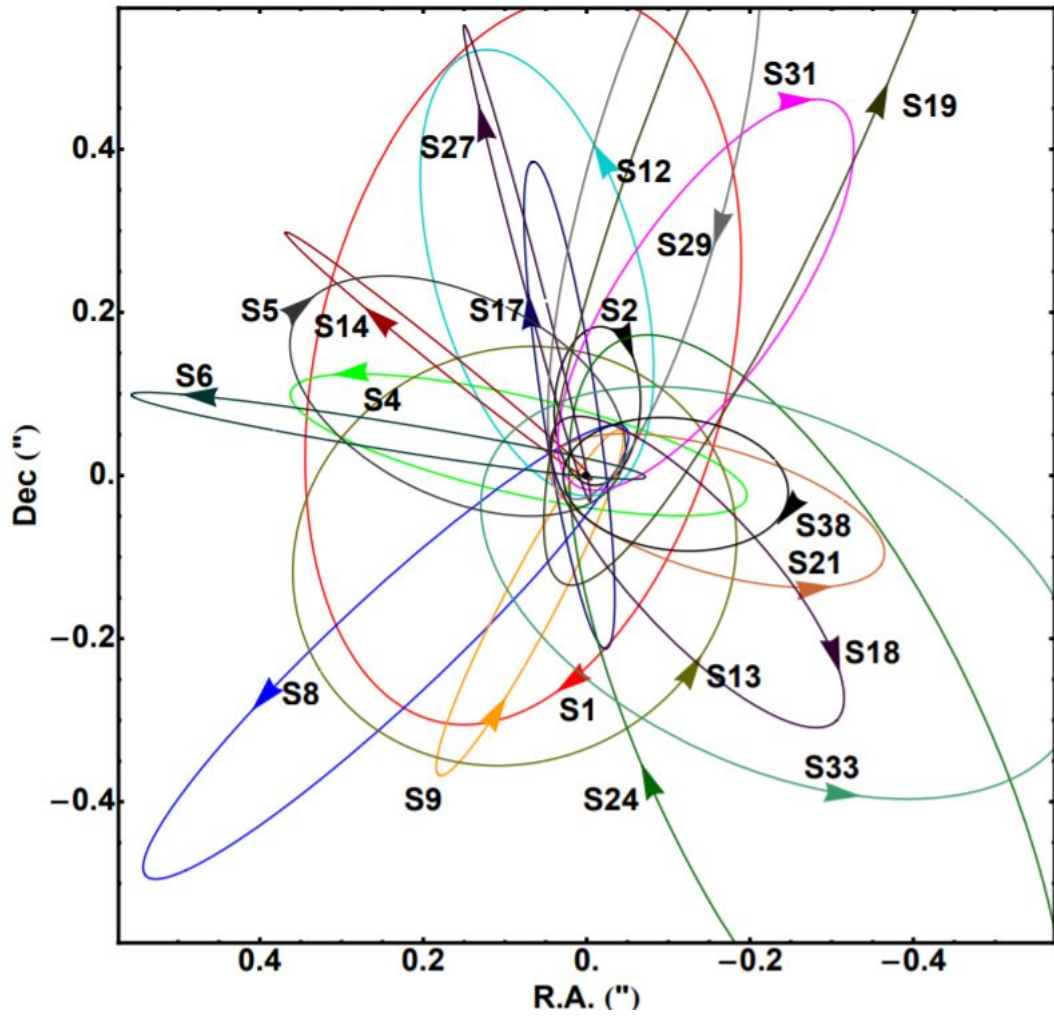


Figura 5.1: Trayectorias de estrellas cercanas al centro de la galaxia.

# Capítulo 6

## Desarrollos futuros

En el capítulo 4 sólo se han desarrollado los casos B y C para Schwarzschild y el caso B para la métrica de Kerr. Estos resultados ya nos permiten hacer un estudio completo de gran parte de las trayectorias conocidas. No obstante, todos los resultados no acaban con esto.

En primer lugar la resolución del caso de órbitas de radio constante para la métrica de Schwarzschild indica que este también será posible resolver el caso C para la métrica de Kerr y poder dar una idea de cómo afectará la rotación de un cuerpo masivo a las trayectorias de radio constante. Por último el objetivo más interesante que se nos plantea a futuro es la resolución del caso D del que daremos una intuición sobre como resolver a continuación. Recordamos que el sistema de ecuaciones a considerar es

$$z_1 z_1^\theta + z_2 z_2^\theta - j_9 z_3^2 + 2z_0 z_3 \Omega_3 + a_2 z_0^2 = 0, \quad (6.1)$$

$$z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2 = 0, \quad (6.2)$$

$$\epsilon + z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 0. \quad (6.3)$$

Dado que

$$f^{\dagger\theta} - f^{\theta\dagger} = f^\dagger j_1 + f^\theta j_2, \quad (6.4)$$

se tiene que la solución de la ecuación (6.2) para una función  $f$  está dada por

$$z_1 = f^\dagger \quad z_2 = f^\theta. \quad (6.5)$$

Y por la ecuación (6.3) obtenemos que

$$(f^\dagger)^2 + (f^\theta)^2 = \epsilon + z_0^2 - z_3^2 \quad (6.6)$$



# Bibliografía

- [1] «An Equivalent System of Einstein Equations.» En: *Journal of Physics*. (2017).
- [2] J.A. Wheeler. C.W. Misner K.S. Thorne. *Gravitation*. Freeman, 1973.
- [3] «Deflection of Spacecraft Trajectories as a New Test of General Relativity». En: *Physical Review Letters* (2001).
- [4] «Deflection of Spacecraft Trajectories as a New Test of General Relativity: Determining the parametrized post-Newtonian parameters  $\beta$  and  $\gamma$ .» En: *Physical Review D* (2004).
- [5] «General Relativistic 1 + 3 Orthonormal Frame Approach Revisited». En: *Classical and Quantum Gravity* Vol 14. (1997).
- [6] «Karmarkar Scalar Condition.» En: *European Physical Journal* (2020).
- [7] «Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic center.» En: *Astrophysical Journal* (2009).
- [8] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry*. Academic Press, 1983.
- [9] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley Sons, Inc., 1972.
- [10] R. Zamora. «Geodésicas en la métrica de Schwarzschild y Kerr. Tratamiento numérico.» En: () .