



VNiVERSIDAD D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

EQUILIBRIO EN SISTEMAS DINÁMICOS DEFINIDOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES

Autor: Silvia García Tapia

Tutor: Ricardo José Alonso Blanco

Salamanca, Julio 2022



VNiVERSIDAD D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS
GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

EQUILIBRIO EN SISTEMAS DINÁMICOS DEFINIDOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES

Autor:

Tutor:

FDO: SILVIA GARCÍA TAPIA

FDO: RICARDO JOSÉ ALONSO
BLANCO

Salamanca, Julio 2022

Índice

Introducción	1
1. Sistemas dinámicos	3
1.1. La teoría fundamental de las ecuaciones diferenciales	3
1.2. Sistemas lineales con coeficientes constantes	8
2. Puntos de equilibrio	12
2.1. Caso lineal	12
2.2. Caso no lineal	14
2.3. Estabilidad	16
3. Órbitas periódicas y comportamiento oscilatorio	22
3.1. Ecuación de Van der Pol	22
3.2. El Teorema de Poincaré-Bendixson	25
4. Teoremas de estructura local	29
4.1. Variedades estable e inestable	29
4.2. Equivalencia topológica	33
4.3. El Teorema de Hartman-Grobman	35
5. Bifurcaciones	39
5.1. Bifurcación de nodo-silla	39
5.2. Algunas bifurcaciones en dimensión uno	43
5.3. Bifurcación tridente	44
5.4. Bifurcaciones vertical y homoclínica o de bucle-silla	45
5.5. Bifurcación de Hopf: Teorema de Poincaré-Andronov-Hopf	46
6. Algunas aplicaciones a economía	49
6.1. Estabilidad en el modelo de Solow	49
6.2. Existencia de órbitas periódicas en el modelo de Kaldor	51
6.3. Bifurcación de Hopf en el modelo del ciclo económico Keynesiano	53
Conclusiones	55
Referencias	56

Introducción

Esta memoria consiste en la exposición de una parte de la teoría fundamental de los sistemas dinámicos continuos, enfocada al análisis de estados de equilibrio, junto con algunas de sus aplicaciones.

Dicho en términos genéricos, los sistemas dinámicos son modelos matemáticos de sistemas compuestos por diferentes partes interrelacionadas de alguna manera entre sí cuyo comportamiento o estado varía con el tiempo de acuerdo con ciertas reglas. Cuando estas reglas son deterministas, dichos modelos permiten analizar y describir el cambio modelado por una o varias ecuaciones que predicen el valor de las magnitudes significativas en cualquier instante. De esta manera, su conocimiento en un momento dado permite reconstruir el pasado y predecir el futuro. En ciertas situaciones, es incluso más importante el estudio cualitativo de la evolución que los valores numéricos concretos.

En función de la escala temporal considerada para estudiar la evolución del valor de la variable, se tienen dos tipos de sistemas dinámicos: discretos y continuos. En los primeros, los valores del tiempo son determinados a intervalos dados o bien por procesos recurrentes de modo que la variable tiempo viene dada en números enteros. Cuando los valores del tiempo recorren un intervalo real, se habla de sistemas dinámicos continuos; es en estos últimos en los que recae el interés en esta memoria. En el caso continuo, se suele exigir también que la evolución del sistema sea diferenciable y, con ello, las reglas que rigen la evolución del sistema se corresponden, muy habitualmente, con sistemas de ecuaciones diferenciales.

Históricamente, aunque siempre hay antecedentes, podríamos decir que los sistemas dinámicos continuos se remontan a Isaac Newton (1643-1727). Sin embargo, ya en la época moderna, es Henri Poincaré (1854-1912) a quién se le suele atribuir el inicio del estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales y, así también, de los sistemas dinámicos. Esta teoría desarrolla una serie de técnicas innovadoras que hicieron originar muchas de las bases de las actuales geometría y topología. En la actualidad, la teoría de los sistemas dinámicos ha tenido un enorme desarrollo y ha ganado importancia potenciada, entre otras cosas, por el crecimiento exponencial en la capacidad de procesamiento de los computadores modernos y debido al estudio de fenómenos casi desconocidos hasta tiempos recientes como es el del *caos*, que constata la existencia de sistemas cuyo comportamiento es prácticamente imposible de predecir, o la teoría de las *catástrofes* (bifurcaciones en sistemas dinámicos). Una idea de la complejidad que puede alcanzar la da el aún sin resolver decimosexto problema de Hilbert: se pregunta por el número máximo y la posición relativa de los ciclos límite de una ecuación polinómica. En el ámbito teórico, son especialmente notables las aportaciones de Liapunov, Andronov, Birkhof, Hopf y Smale, entre otros. Asimismo, la importancia en las aplicaciones de los sistemas dinámicos para modelar problemas de muy diferentes ramas (física, biología, medicina, economía, etc.) no ha hecho más que aumentar.

El tema central del trabajo, los estados de equilibrio de un sistema dinámico, es de máxima importancia: en muchos casos, no son tan relevantes las situaciones transitorias por las que pasa un sistema como aquellos estados en los que el sistema va a permanecer una vez sean alcanzados. Entre ellos, son de interés los estados en los que el sistema deja de evolucionar así como aquellos en los que el sistema oscila periódicamente. El trabajo se centrará básicamente en estas cuestiones: existencia de puntos de equilibrio, tendencias asintóticas, existencia de órbitas periódicas, etc.; sobre esta cuestión, además de hacer una exposición relativamente autocontenida de la materia (salvo las cuestiones que son de conocimiento general), se ha procurado abordar matemáticamente varios aspectos fundamentales de la teoría: teoremas de equivalencia topológica y estructura local, teoremas de existencia de órbitas periódicas así como algunos teoremas destacados de la teoría de bifurcaciones (por supuesto, se ha hecho necesario elegir solo algunos aspectos debido a las limitaciones que una memoria de este tipo impone, dejando fuera temas también de alto valor). Junto a ello, se han incorporado algunos modelos y aplicaciones concretas que, salvo el oscilador de Van der Pol, se han tomado del ámbito de la economía.

Estructuralmente, la memoria consta de 6 capítulos. En el primero, se presentan las definiciones básicas, gran parte de las cuales provienen de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se recuerdan los aspectos básicos de existencia de soluciones y se demuestra que toda ecuación diferencial da lugar a un sistema dinámico mediante una reparametrización adecuada. Se analiza también el comportamiento cualitativo de los sistemas, además de algunas otras herramientas que serán utilizadas posteriormente. En el segundo capítulo, se definen los puntos de equilibrio o puntos estacionarios, analizando el caso lineal y los conceptos de estabilidad: tendencia de las órbitas a acercarse o alejarse de un punto de equilibrio dado, finalizando con el conocido método de Liapunov para su análisis. El siguiente capítulo detalla el concepto de comportamiento oscilatorio introduciendo un interesante modelo de la teoría de circuitos (el oscilador de Van der Pol), demostrando la existencia de una órbita periódica y la tendencia asintótica hacia ella de las órbitas próximas y, a continuación, se demuestra el importante teorema de Poincaré-Bendixson, que bajo ciertas hipótesis asegura la existencia de órbitas cerradas en sistemas dinámicos bidimensionales. El cuarto capítulo está dedicado a los teoremas de estructura local cerca de un punto estacionario. En concreto, se demuestran los siguientes resultados muy intuitivos aunque no triviales: bajo algunas suaves restricciones, el comportamiento en un entorno de un punto de equilibrio es equivalente, por deformación continua, al de su aproximación lineal (Teorema de Hartman-Grobman¹) y, en segundo lugar, la existencia de subvariedades diferenciales constituidas por los puntos que son atraídos (resp. repelidos) por el punto de equilibrio (Teorema de las variedades estable e inestable). En el capítulo cinco, se analiza la teoría de las bifurcaciones: cambio brusco de comportamiento que adquiere un sistema dinámico cuando se varían ciertos parámetros de los que depende; se incluyen, además de un cierto listado de casos de importancia, ciertos resultados teóricos en el caso unidimensional así como el importante teorema de Poincaré-Andronov-Hopf sobre la aparición de órbitas periódicas. Finalmente, el capítulo sexto se ha dedicado a ilustrar los resultados teóricos en modelos de la teoría económica: se han analizado los modelos de Solow, Kaldor y Keynes, donde se han aplicado, respectivamente, el método de Liapunov, el teorema de Poincaré-Bendixson y el teorema de Poincaré-Andronov-Hopf.

¹<https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/the-most-addictive-theorem-in-applied-mathematics/>

Capítulo 1. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico describe el paso de la evolución con el tiempo de todos los puntos de un espacio dado S , que habitualmente es un espacio euclídeo o un subconjunto abierto de éste.

Formalicemos esta idea:

Definición 1.0.1. Un *sistema dinámico continuo* es una aplicación $\mathbb{R} \times S \xrightarrow{\phi} S$ donde S es un conjunto abierto de un espacio euclídeo E (identificado con \mathbb{R}^n normalmente) y, poniendo $\phi(t, x) = \phi_t(x)$, la aplicación $\phi_t : S \rightarrow S$ satisface

- 1) $\phi_0 : S \rightarrow S$ es la identidad
- 2) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ para cada t, s en \mathbb{R} .

Es decir, es una acción del grupo \mathbb{R} sobre S .

Generalmente, supondremos que ϕ es de clase \mathcal{C}^1 . Entonces la definición implicará que la aplicación $\phi_t : S \rightarrow S$ también sea \mathcal{C}^1 para cada t y que tenga inversa, ϕ_{-t} (tomando $s = -t$ en 2)), de la misma clase.

El valor $\phi_t(x)$ se interpreta como “la posición del punto x después de un tiempo t ”.

Observación 1.0.2. La definición anterior se podría ampliar también a otras situaciones. Por ejemplo, cuando S es una variedad diferenciable o exigiendo otros tipos de continuidad o diferenciabilidad; incluso sustituir \mathbb{R} por \mathbb{R}^+ .

Como en este trabajo no vamos a tratar los sistemas dinámicos discretos (misma definición, pero cambiando \mathbb{R} por \mathbb{Z}), entenderemos que todo sistema dinámico será del tipo continuo de ahora en adelante.

Un sistema dinámico ϕ_t en S da lugar a una ecuación diferencial, esto es, un campo vectorial en S , $f : S \rightarrow E$, del siguiente modo: dada ϕ_t ($x(t) = \phi_t(x)$), definamos f por

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t(x) \right|_{t=0};$$

luego, para x en S , $f(x)$ es un vector en E y lo tomamos como el vector tangente (velocidad) a la curva $t \mapsto \phi_t(x)$ en $t = 0$. También podemos expresar lo anterior como

$$x' = f(x).$$

Entonces, $\phi_t(x)$ es una curva solución de la ecuación diferencial $x' = f(x)$ que verifica la condición inicial $x(0) = x$.

1.1. La teoría fundamental de las ecuaciones diferenciales

Hay un proceso inverso al que establece que todo sistema dinámico da lugar a una ecuación diferencial que es la teoría fundamental de las ecuaciones diferenciales: cuando

las soluciones de una ecuación diferencial dada están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, se obtiene un sistema dinámico (el grupo uniparamétrico generado).

Una parte de los resultados de esta sección serán de conocimiento general por lo que no se incluirán sus demostraciones, pero pueden encontrarse en [1], [3], [8], [9] y/o [12].

Antes de nada, recordemos que una función $f : W \rightarrow E$ (W conjunto abierto del espacio vectorial normado E) se dice que es de *Lipschitz* en W si existe una constante K tal que $\|f(y) - f(x)\| \leq K\|y - x\|$ para todo x, y en W . Llamamos a K *constante de Lipschitz* para f . En una norma distinta, f seguirá siendo de Lipschitz debido a la equivalencia de normas, pero la constante K puede cambiar.

Decimos que f es *localmente lipschitziana* si cada punto de W (el dominio de f) tiene un entorno W_0 en W tal que la restricción $f|_{W_0}$ es de Lipschitz. La constante de Lipschitz de $f|_{W_0}$ puede variar con W_0 .

Lema 1.1.1. Sea la función $f : W \rightarrow E$ \mathcal{C}^1 . Entonces, f es localmente lipschitziana. Además, si $A \subset W$ es un conjunto compacto (cerrado y acotado), entonces $f|_A$ es de Lipschitz.

Sea X un espacio de Banach. Un *punto fijo* de la aplicación $T : C \subset X \rightarrow C$ es un elemento $x \in C$ tal que $T(x) = x$. Además, T se llama *contracción* o se dice que es *contractiva* si hay una constante (de contracción) $\theta \in [0, 1)$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \theta\|x - y\|, \quad x, y \in C.$$

Se utiliza también la notación $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$, $T^0(x) = x$.

Teorema 1.1.2 (Teorema de las aplicaciones contractivas). Sea C un subconjunto cerrado (no vacío) de un espacio de Banach X y $T : C \rightarrow C$ contractiva. Entonces, T tiene un único punto fijo $\bar{x} \in C$ tal que $\|T^n(x) - \bar{x}\| \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\|T(x) - x\|$, con $x \in C$.

A continuación, sea E un espacio vectorial finito, $W \subset E$ un conjunto abierto en E y $f : W \rightarrow E$ una aplicación continua. Con solución de la ecuación diferencial $x' = f(x)$ nos referimos a una función diferenciable

$$u : J \rightarrow W$$

definida en algún intervalo $J \subset \mathbb{R}$ tal que, para $t \in J$,

$$u'(t) = f(u(t)).$$

Una condición inicial para una solución $u : J \rightarrow W$ es una condición de la forma

$$u(t_0) = x_0,$$

donde $t_0 \in J$ y $x_0 \in W$.

Una ecuación diferencial puede no tener solución o tener varias dada una condición inicial. Para asegurar soluciones únicas, se han de imponer más condiciones sobre la función f :

Teorema 1.1.3 (Teorema de existencia y unicidad). Sea $W \subset E$ un subconjunto abierto del espacio vectorial normado, $f : W \rightarrow E$ una aplicación localmente lipschitziana (por ejemplo, \mathcal{C}^1) y $x_0 \in W$. Hay algún $a > 0$ y una solución $x : (t_0 - a, t_0 + a) \rightarrow W$ de la ecuación diferencial $x' = f(x)$ que satisface

$$x(t_0) = x_0.$$

Además, si se suponen dos soluciones $u(t)$, $v(t)$ que están definidas en el mismo intervalo abierto J el cual contiene a t_0 y que verifiquen $u(t_0) = v(t_0)$, entonces $u(t) = v(t)$ para todo $t \in J$.

Nos interesa tratar cómo es la dependencia de parámetros y de la condición inicial x_0 . Dejemos variar libremente el punto $\lambda := x_0 \in W$ y sea $x(t, \lambda, \mu)$ la solución (localmente única) del problema de valor inicial o de Cauchy
$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
, con f dependiente de un parámetro dado μ .

Teorema 1.1.4 (Dependencia continua y diferenciable de las condiciones iniciales y los parámetros). Sea U un abierto de \mathbb{R}^n y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua que verifique una condición local de Lipschitz. Para cada $\lambda \in U$, denótese por $x(t, \lambda, \mu)$ la solución (local) del problema de Cauchy $x' = f(x)$, $x(t_0) = \lambda$. Entonces se cumple que $x(t, \lambda, \mu)$ es una función continua de λ y de μ . Si, además, f es de clase \mathcal{C}^m para un $m \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $x(t, \lambda, \mu)$ es \mathcal{C}^m también.

No hay garantía de que se pueda definir una solución $x(t)$ a una ecuación diferencial para todo $t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, la solución al problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

es $x(t) = \operatorname{tg} t$, la cual no puede extenderse más allá de $(-\pi/2, \pi/2)$. Abusando de la terminología, seguiremos usando la denominación de sistema dinámico en este caso (a este respecto, ver teorema 1.1.8).

Consideremos ahora una ecuación $x' = f(x)$, donde la función f es vectorial de clase \mathcal{C}^1 y está definida en un conjunto abierto $W \subset E$. Para cada $x_0 \in W$, hay un intervalo abierto máximo (α, β) que contiene a 0 y en el que hay una solución $x(t)$ (solución maximal) con $x(0) = x_0$. De hecho, (α, β) es la unión de todos los intervalos que admiten una solución al mismo problema de valor inicial; esto es posible ya que las soluciones en dos intervalos cualesquiera coinciden en la intersección de los dos intervalos por el teorema de existencia y unicidad (1.1.3).

Teorema 1.1.5. En las hipótesis y notaciones previas, sea $x(t)$ una solución maximal de $x' = f(x)$. Si el intervalo de definición está acotado, entonces $x(t)$ abandona cualquier compacto $K \subseteq W$.

Demostración. Supongamos que $x(t) \in K \forall t \in (\alpha, \beta)$. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene a K y h una función escalar \mathcal{C}^∞ tal que $h|_K = 1$ y $\operatorname{soph} \subset U$ sea compacto, esto es, que h fuera de U sea 0. Consideremos la ecuación $x' = h(x)f(x)$, que tiene soporte compacto y, por tanto, es de Lipschitz globalmente. Por consiguiente, tiene soluciones globales, es decir, que están definidas para todo t , y coincide con $x' = f(x)$ en K . Llegamos pues a contradicción: la solución maximal $x(t)$ de $x' = f(x)$ también es solución de $x' = hf$, que es global. \square

Lo mismo es cierto si estuviese acotado a la izquierda o a la derecha.

Corolario 1.1.6. Sea M una constante y $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Si $\|f(x)\| < M$, entonces $x' = f(x)$ tiene soluciones globales.

Demostración. Supongamos que el sistema $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ está definido solo para $t < \beta < \infty$. De este modo,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) ds, \quad t \in [t_0, \beta).$$

Entonces, $x(t)$ se encuentra en una región acotada pues $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + (\beta - t_0)M$. Se llega así a contradicción, luego $x(t)$ no abandona todo compacto cuando $t \rightarrow \infty$. \square

Corolario 1.1.7. Sea $x' = f(x)$, con $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Se puede modificar f en magnitud (pero no en dirección ni sentido) de modo que tenga soluciones globales.

Por ejemplo, una modificación podría ser

$$x' = \frac{f}{1 + \|f\|} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n), \quad \text{donde } \|f\| := +\sqrt{\langle f, f \rangle} \text{ (norma euclídea)}.$$

Este último corolario también se cumple cuando $f \in \mathcal{C}^1(U)$, siendo $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto; veámoslo.

Teorema 1.1.8. Una reparametrización de las soluciones a $x' = f(x)$ convierte cada ecuación $\mathcal{C}^1(U)$ en un sistema dinámico.

Demostración. Sea la función $g(x) = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|} \in \mathcal{C}^1(U)$ y $\|g(x)\| \leq 1$. Las soluciones $x(t)$

$$\text{de } \begin{cases} x' = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{satisfacen}$$

$$\int_0^t \|x'(r)\| dr = \int_0^t \|g(x(r))\| dr \leq |t|;$$

es decir, la trayectoria definida por $x(t)$ tiene longitud de arco finita para t finito. Sea (α, β) el intervalo maximal de existencia de $x(t)$ y supongamos que $\beta < \infty$. Como la longitud de arco de la trayectoria definida por $x(t)$ para $t \in (0, \beta)$ es finita, ésta ha de tener un punto límite $x_1 = \lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t) \in \partial U$ ya que, para cada sucesión $t_n \rightarrow \beta$, $x(t_n)$ es de Cauchy y, por tanto, convergente. Definamos ahora un conjunto cerrado $C = \mathbb{R}^n$ y sea $G(x) = \frac{\text{dist}(x, C)}{1 + \text{dist}(x, C)}$, donde $\text{dist}(x, y)$ denota la distancia entre x e y en \mathbb{R}^n y $\text{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \text{dist}(x, y)$. La función G es de Lipschitz, $0 \leq G(x) \leq 1$ y $G(x) = 0$ para $x \in C$. Sea $F(x) = g(x)G(x)$. Teniendo en cuenta que $g(x)$ es localmente lipschitziana puesto que es \mathcal{C}^1 , F resulta serlo también. Adicionalmente, el sistema $x' = F(x)$ tiene parte derecha acotada; luego sus trayectorias tienen longitud de arco finita para t finito. Para probar que $x' = F(x)$ define un sistema dinámico, basta demostrar que sus trayectorias que se encuentran en U , que tienen longitud de arco finita (s_0) y que tienden a $x_1 \in \partial U$ están definidas para todo $t \in [0, \infty)$. A lo largo de cualquier solución $x(t)$ de $x' = F(x)$, $\frac{ds}{dt} = \|x'(t)\|$ y, por tanto,

$$t = \int_0^s \frac{du}{\|F(x(t(u)))\|},$$

donde $t(s)$ es la inversa de la función estrictamente creciente $s(t)$ definida por

$$s = \int_0^t \|F(x(r))\| dr$$

para $s > 0$. Sin embargo, para cada punto $x = x(t(s))$ en la parte $t \geq 0$ de la trayectoria, tenemos

$$G(x) = \frac{\text{dist}(x, C)}{1 + \text{dist}(x, C)} < d(x, C) = \inf_{y \in C} \text{dist}(x, y) \leq \text{dist}(x, x_1) \leq s_0 - s.$$

Puesto que $0 < \|g(x)\| \leq 1$, se tiene

$$t \geq \int_0^s \frac{du}{s_0 - u} = \log \frac{s_0 - s}{s_0}.$$

Por consiguiente, $t \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow s_0$; esto es, la trayectoria $x(t)$ está definida para todo $t \in [0, \infty)$, es decir, $\beta = \infty$, contradiciendo que β sea finita. \square

Por otro lado, nos será útil recordar

Lema 1.1.9 (Lema de Gronwall). Sea $[0, \alpha] \xrightarrow{u} \mathbb{R}$ continua y no negativa ($u \geq 0$). Supóngase que existen constantes $c, k \geq 0$ con $u(t) \leq c + \int_0^t ku(s)ds \forall t \in [0, \alpha]$. Entonces, $u(t) \leq ce^{kt}$.

Con su ayuda, se puede probar

Teorema 1.1.10. Sea $f(x)$ de clase \mathcal{C}^1 e $y(t)$ una solución a $x' = f(x)$ definida en el intervalo cerrado $[t_0, t_1]$ con $y(t_0) = y_0$. Hay un entorno $U \subset E$ de y_0 y una constante K tal que si $z_0 \in U$, entonces existe una única solución $z(t)$, también definida en $[t_0, t_1]$, con $z(t_0) = z_0$ y que satisface

$$\|y(t) - z(t)\| \leq K\|y_0 - z_0\|e^{K(t-t_0)}$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Por otro lado, que una ecuación $x' = f(x)$ sea autónoma significa que la función f no depende del tiempo. Se puede considerar también una aplicación $\mathcal{C}^1 f : I \times W \rightarrow E$, donde I es un intervalo y W un conjunto abierto en el espacio vectorial E . En este caso, la ecuación es

$$x' = f(t, x)$$

y se llama no autónoma. Es conocido que el estudio de tales sistemas se reduce al de los autónomos mediante la introducción de una incógnita auxiliar.

1.1.1. El flujo de una ecuación diferencial

Consideremos una ecuación $x' = f(x)$ definida por una función de clase $\mathcal{C}^1 f : W \rightarrow E$, con $W \subset E$ abierto. Para cada $y \in W$, hay una única solución $\phi(t)$ con $\phi(0) = y$ definida en un intervalo abierto maximal $J(y) \subset \mathbb{R}$. Escribimos $\phi(t) = \phi(t, y)$ para indicar la dependencia de $\phi(t)$ en y , luego $\phi(0, y) = y$.

Sea $\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times W \mid t \in J(y)\} \subset \mathbb{R} \times W$. La aplicación $(t, y) \mapsto \phi(t, y) = \phi_t(y)$ es entonces una función

$$\phi : \Omega \rightarrow W,$$

a la que llamamos *flujo* de la ecuación $x' = f(x)$.

Ejemplo 1.1.11. Sea $f(x) = Ax$, $A \in L(E)$. Entonces, $\Omega = \mathbb{R} \times E$ y $\phi_t(x) = e^{tA}x$.

El término de *grupo uniparamétrico* se usa cuando el flujo está definido $\forall t \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1.12. Con las mismas hipótesis, la aplicación ϕ tiene la siguiente propiedad:

$$\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$$

en el sentido de que si uno de sus lados está definido, entonces el otro también y son iguales.

Por el teorema 1.1.4,

Teorema 1.1.13. Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times W$ y $\phi : \Omega \rightarrow W$ es una aplicación de clase \mathcal{C}^1 .

Supongamos ahora que $(t, x_0) \in \Omega$. Como Ω es abierto en $\mathbb{R} \times W$, x_0 tiene un entorno $U \subset W$ con $t \times U \subset \Omega$. La función $x \mapsto \phi_t(x)$ define una aplicación $\phi_t : U \rightarrow W$.

Teorema 1.1.14. La aplicación ϕ_t envía U a un conjunto abierto V y ϕ_{-t} está definida en V y manda V en U . La composición $\phi_{-t}\phi_t$ es la aplicación identidad de U y $\phi_t\phi_{-t}$ la de V .

Adicionalmente,

Definición 1.1.15. Se llama *órbita* que pasa por y al conjunto

$$\gamma_y := \{\phi(t, y) \mid t \in J(y)\} \subset S.$$

Definición 1.1.16. Si $J(y) = (t_y^-, t_y^+)$, se llama *semi-órbita negativa* (resp. *positiva*) a través de $y \in S$ a

$$\gamma_y^- := \{\phi(t, y) \mid t \in (t_y^-, 0)\} \quad (\text{resp. } \gamma_y^+ := \{\phi(t, y) \mid t \in (0, t_y^+)\}).$$

1.2. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Vamos a analizar el caso lineal; su comportamiento servirá para describir o aproximar el caso general en muchas ocasiones.

1.2.1. Exponenciales de operadores lineales

El conjunto $L(\mathbb{R}^n)$ de operadores (aplicación entre dos espacios vectoriales) lineales en \mathbb{R}^n se identifica con el conjunto de matrices $n \times n$. Además, $L(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial bajo la adición habitual y la multiplicación escalar de operadores (o matrices).

Para cualquier operador lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos

$$\exp T = e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!},$$

que es una serie absolutamente convergente en el espacio vectorial $L(\mathbb{R}^n)$ pues está mayorada en norma por $e^{\|T\|}$, siendo $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \|Tx\|/\|x\|$.

Proposición 1.2.1. Sean P , S y T operadores lineales en \mathbb{R}^n .

- 1) Si $Q = PTP^{-1}$, entonces $e^Q = Pe^TP^{-1}$
- 2) Si $ST = TS$, entonces $e^{S+T} = e^Se^T$
- 3) $e^{-S} = (e^S)^{-1}$
- 4) Si $n = 2$ y $T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, entonces $e^T = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}$.

La demostración, que no se incluye por ser conocida, puede encontrarse en la sección 3 del capítulo 5 de [3].

Por ejemplo, podemos calcular e^A para cualquier matriz A (2×2) mediante

$$e^A = e^{P^{-1}BP} = P^{-1}e^BP,$$

siendo B una matriz de una de las siguientes formas:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

1.2.2. Sistemas lineales homogéneos

Sea A un operador en \mathbb{R}^n . Consideremos la aplicación $\mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ que asigna a $t \in \mathbb{R}$ el operador e^{tA} . Se tiene que

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

y, gracias a ello, podemos resolver la ecuación

$$x' = Ax.$$

Así,

Teorema 1.2.2 (Teorema fundamental de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes). La única solución del problema de valor inicial $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ es

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Sin llegar a soluciones explícitas, podemos obtener información cualitativa importante a partir los valores propios de A . Los siguientes casos son los de mayor importancia.

- Nodo: A tiene valores propios reales y del mismo signo.
- Silla: A tiene valores propios reales de signos opuestos.
- Sumidero: Todo valor propio tiene parte real negativa.
- Fuente: Todo valor propio tiene parte real positiva.
- Centro: Los valores propios son imaginarios puros.

1.2.2.1. Comportamiento cualitativo de las soluciones

La herramienta básica a partir de la que se deduce el comportamiento de los sistemas lineales es la reducción a forma canónica (ver sección 4 del capítulo 6 de [3]), expresada en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3. Sea $T : E \rightarrow E$ un operador lineal en un espacio vectorial real. Existe una base de E en la que la matriz de T está compuesta de bloques diagonales de las formas

$$\begin{bmatrix} B & & & & \\ & B & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} D & & & & \\ I_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_2 & D \end{bmatrix} \text{ ó } D,$$

donde $B = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Los elementos de la

diagonal son valores propios reales con multiplicidad. Cada bloque D , con $b > 0$, aparece tantas veces como la multiplicidad que tenga el valor propio $a + bi$. Tal matriz está determinada de forma única excepto para el orden de los bloques.

La matriz descrita en el teorema se llama *forma canónica real* de T .

Consideremos ahora la ecuación $x' = Ax$, $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Como consecuencia del teorema anterior y al descomponer la matriz en una diagonal generalizada y otra nilpotente, resulta

Teorema 1.2.4. Sea $x(t)$ una solución de $x' = Ax$. Cada coordenada $x_j(t)$ es una combinación lineal de las funciones $t^k e^{ta} \cos bt$ y $t^l e^{ta} \sin bt$, donde $a + bi$ recorre todos los valores propios de A con $b \geq 0$ y k y l todos los enteros $0, \dots, n - 1$. Además, para cada $\lambda = a + bi$, k y l son menores que el tamaño del mayor λ -bloque en la forma canónica real de A .

Observación 1.2.5. Las funciones del teorema incluyen las de la forma $t^k e^{at}$ en el caso de que A tenga valores propios reales.

En particular,

Teorema 1.2.6. Supóngase que todo valor propio de $A \in L(\mathbb{R}^n)$ tiene parte real negativa. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

para toda solución $x' = Ax$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema 1.2.4, de las desigualdades $|\cos bt| \leq 1$, $|\sin bt| \leq 1$ y del hecho de que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{at} = 0$ para todo k si $a < 0$. \square

Recíprocamente,

Teorema 1.2.7. Si toda solución $x' = Ax$ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, entonces todo valor propio de A tiene parte real negativa.

Demostración. Supongamos que $\mu = a + ib$ es un valor propio con $a \geq 0$. Eligiendo adecuadamente una condición inicial, podemos obtener la solución

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{at} \cos bt, \\y_1(t) &= e^{at} \operatorname{sen} bt, \\x_j(t) &= u_j(t) = 0, \quad j \geq 1,\end{aligned}$$

que no tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. □

Estos dos últimos teoremas prueban que $0 \in \mathbb{R}^n$ es un sumidero si y solo si toda trayectoria tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.

Análogamente al teorema 1.2.6,

Teorema 1.2.8. Si todo valor propio de $A \in L(\mathbb{R}^n)$ tiene parte real positiva, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$$

para toda solución a $x' = Ax$.

Ahora, denotemos por $Re(\lambda)$ la parte real de $\lambda \in \mathbb{C}$. Una matriz cuyos valores propios, α_j , $j = 1, \dots, m$, satisfagan que $Re(\alpha_j) < 0$ recibe el nombre de *matriz de Hurwitz*. El criterio de Routh-Hurwitz establece que una matriz real es de Hurwitz si y solo si

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & a_{2k-5} & \dots & a_k \end{pmatrix} > 0$$

para $1 \leq k \leq n$. Los números a_j son los coeficientes del polinomio característico de A , $\det(xI - A) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, y $a_j = 0$ para $j \geq n$.

1.2.3. Sistemas lineales completos

Consideremos una ecuación diferencial lineal, no autónoma y no homogénea

$$x' = Ax + B(t),$$

siendo A un operador en \mathbb{R}^n y $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua. Buscamos una solución de la forma

$$x(t) = e^{tA} f(t),$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es alguna curva diferenciable. De hecho, toda solución puede escribirse de esta manera ya que e^{tA} es invertible.

Un pequeño cálculo da

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) ds, \tag{1.2.1}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es el valor (inicial) para $t = 0$, $x(0)$, que se puede fijar a voluntad.

Este método de solución se llama *variación de constantes* y la expresión (1.2.1) *principio de Duhamel*.

Observación 1.2.9. Existe una versión para A no constante (véase la sección 5 del capítulo 1 de [12]), pero no la necesitaremos en el trabajo.

Capítulo 2. Puntos de equilibrio

Entre todas las soluciones que puede tener un sistema, son relevantes tanto en la teoría como en la práctica las que se mantienen constantes en el tiempo. En este capítulo, se seguirá fundamentalmente [3].

Definición 2.0.1. Una solución constante de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas $x' = f(x)$ se llama *punto de equilibrio*. En otras palabras, x^* es un punto de equilibrio del sistema si

$$f(x^*) = 0.$$

Si existe un entorno sobre x^* en el que no hay ningún otro punto de equilibrio, se dice que x^* es aislado.

2.1. Caso lineal

Consideremos una ecuación lineal $x' = Ax$, $A \in L(\mathbb{R}^n)$, y señalemos que el origen siempre es un punto de equilibrio.

Definición 2.1.1. Se dice que el flujo lineal e^{tA} es una *contracción* cuando el origen $0 \in \mathbb{R}^n$ es un sumidero (valores propios con parte real negativa).

Teorema 2.1.2. Sea A un operador en un espacio vectorial E . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- 1) el origen es un sumidero para el sistema dinámico $x' = Ax$
- 2) para cualquier norma en E , hay constantes $k > 0$, $b > 0$ tales que

$$\|e^{tA}x\| \leq ke^{-tb}\|x\|$$

para todo $t \geq 0$, $x \in E$

- 3) existe $b > 0$ y una base \mathfrak{B} de E cuya norma correspondiente (la que hace que esta base sea ortonormal) satisface

$$\|e^{tA}x\|_{\mathfrak{B}} \leq e^{-tb}\|x\|_{\mathfrak{B}}$$

para todo $t \geq 0$, $x \in E$.

Demostración. 3) implica 2) por equivalencia de normas.

2) implica 1) por el teorema 1.2.7.

Para probar la implicación de 1) a 3), utilizaremos el siguiente

Lema 2.1.3. Sea A un operador lineal en un espacio vectorial real E y supóngase que $\alpha < \operatorname{Re}(\lambda) < \beta$ para todo valor propio λ de A . Entonces, E tiene una base tal que, en el producto escalar y norma correspondientes (los que hacen que esta base sea ortonormal),

$$\alpha\|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \beta\|x\|^2 \tag{2.1.1}$$

para todo $x \in E$.

Sean (x_1, \dots, x_n) las coordenadas en E correspondientes a la base \mathfrak{B} que hacen que se cumpla 2.1.1 y que

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

sea una solución de $x' = Ax$. Para la norma y el producto escalar definidos por \mathfrak{B} , tenemos

$$\frac{d}{dt}\|x\| = \frac{d}{dt}[\sum x_j^2]^{1/2} = \frac{\sum x_j x'_j}{[\sum x_j^2]^{1/2}}.$$

Así,

$$\frac{d}{dt}\|x\| = \frac{\langle x, x' \rangle}{\|x\|} = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|}.$$

Por lo tanto, de 2.1.1, se deduce que

$$\alpha \leq \frac{d\|x\|/dt}{\|x\|} \leq \beta \quad \text{ó} \quad \alpha \leq \frac{d}{dt} \log \|x\| \leq \beta.$$

Por integración, resulta que $\alpha t \leq \log \|x(t)\| - \log \|x(0)\| \leq \beta t$. De este modo,

$$\alpha t \leq \log \frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|} \leq \beta t \quad \text{ó} \quad e^{\alpha t} \|x(0)\| \leq \|x(t)\| \leq e^{\beta t} \|x(0)\|.$$

Tomando $\beta = -b < 0$ (los valores propios de A tienen parte real negativa menor que $-b$), concluimos. \square

La demostración del lema puede verse en la sección 1 del capítulo 7 de [3]; se basa en la forma canónica (teorema 1.2.3), comenzando por el caso “diagonal”, que es trivial, y modificando la base de modo que la parte nilpotente tienda a 0.

El flujo lineal e^{tA} que tiene el carácter opuesto a una contracción es una *expansión*, para el que el origen es una fuente (valores propios con parte real positiva). El siguiente resultado es el análogo al teorema anterior para expansiones.

Teorema 2.1.4. Si $A \in L(E)$,

- 1) el origen es una fuente para el sistema dinámico $x' = Ax$
- 2) para cualquier norma en E , hay constantes $L > 0$, $a > 0$ tales que

$$\|e^{tA}x\| \geq Le^{ta}\|x\|$$

para todo $t \geq 0$, $x \in E$

- 3) existe $a > 0$ y una base \mathfrak{B} de E cuya norma correspondiente (la que hace que esta base sea ortonormal) satisface

$$\|e^{tA}x\|_{\mathfrak{B}} \geq e^{ta}\|x\|_{\mathfrak{B}}$$

para todo $t \geq 0$, $x \in E$

son equivalentes.

La demostración es como la del teorema 2.1.2, usando el lema 2.1.3 y la primera desigualdad de 2.1.1.

Un tipo de flujo lineal e^{tA} más general que las contracciones y las expansiones es el *flujo hiperbólico*: todo valor propio de A tiene parte real no nula. Su importancia deriva del hecho de que casi todos los flujos lineales son hiperbólicos.

Teorema 2.1.5. Sea e^{tA} un flujo lineal hiperbólico, $A \in L(E)$. Entonces, E tiene una descomposición en suma directa

$$E = E^- \oplus E^+$$

invariante bajo A tal que el flujo inducido en E^- es una contracción y en E^+ una expansión. Esta descomposición es única.

Demostración. Damos a E una base que le proporcione a A forma canónica real (teorema 1.2.3). Ordenamos esta base para que la matriz de forma canónica tenga primero los bloques correspondientes a los valores propios con parte real negativa, seguidos por los correspondientes a los valores propios positivos. El primer conjunto de bloques representa la restricción de A al subespacio $E^- \subset E$ mientras que los bloques restantes representan su restricción a $E^+ \subset E$.

Como E^- es invariante bajo A , también lo es bajo e^{tA} . Pongamos $A|_{E^-} = A_-$ y $A|_{E^+} = A_+$. Entonces, $e^{tA}|_{E^-} = e^{tA_-}$. Por el teorema 2.1.2, $e^{tA}|_{E^-}$ es una contracción. De forma similar, el teorema 2.1.4 implica que $e^{tA}|_{E^+}$ es una expansión. Luego $A = A_- \oplus A_+$ es la descomposición deseada.

Para comprobar la unicidad de la descomposición, supongamos que $F^- \oplus F^+$ es otra descomposición de E invariante bajo el flujo tal que $e^{tA}|_{F^-}$ es una contracción y $e^{tA}|_{F^+}$ una expansión. Sea $x \in F^-$. Podemos escribir

$$x = y + z, \quad y \in E^-, \quad z \in E^+.$$

Como $e^{tA}x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, tenemos que $e^{tA}y \rightarrow 0$ y $e^{tA}z \rightarrow 0$. Sin embargo, para todo $t \geq 0$,

$$\|e^{tA}z\| \geq e^{ta}\|z\|, \quad a > 0,$$

por el teorema 2.1.4. Así, $\|z\| = 0$. Esto demuestra que $F^- \subset E^-$ y el mismo argumento prueba que $E^- \subset F^-$, así que $E^- = F^-$. Un razonamiento similar sobre e^{-tA} demuestra que $E^+ = F^+$. Por lo tanto, concluimos. \square

Observación 2.1.6. En el caso de tener $E^+ = 0$, el flujo hiperbólico sería una contracción; y si $E^- = 0$, una expansión.

2.2. Caso no lineal

Consideremos una ecuación diferencial $x' = f(x)$, siendo $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $W \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. Supongamos que f es de clase C^1 .

Sea $\phi : \Omega \rightarrow W$ el flujo asociado a $x' = f(x)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R} \times W$ es un conjunto abierto, y, para cada $x \in W$, la aplicación $t \mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x)$, que está definida para t en algún intervalo abierto, la solución que pasa por x cuando $t = 0$. Si x^* es un punto de equilibrio, entonces $\phi_t(x^*) = x^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por esta razón, a x^* también se le llama *punto estacionario* o *fijo* del flujo. Otro nombre para x^* es *cero* o *punto singular* del campo vectorial f .

Pensemos en la derivada $df(x^*)$ de f en x^* como un campo vectorial lineal que aproxima f cerca de 0 y llamémosla *parte lineal* de f en x^* .

Definición 2.2.1. Se dice que un punto de equilibrio x^* es *hiperbólico* si la derivada $df(x^*)$ no tiene valores propios con parte real nula.

Si estas partes reales son todas negativas, x^* es un sumidero; si son todas positivas, x^* se llama fuente. Si se dan ambos signos, x^* es un punto de silla.

Teorema 2.2.2. Sea $x^* \in W$ un sumidero de la ecuación $x' = f(x)$. Supóngase que todo valor propio de $df(x^*)$ tiene parte real menor que $-c$, $c > 0$. Entonces hay un entorno $U \subset W$ de x^* tal que

1) $\phi_t(x)$ está definido y en U para todo $x \in U$, $t > 0$

2) hay una norma euclídea en \mathbb{R}^n tal que

$$\|\phi_t(x) - x^*\| \leq e^{-tc} \|x - x^*\|$$

para todo $x \in U$, $t \geq 0$

3) para cualquier norma en \mathbb{R}^n , hay una constante $k > 0$ tal que

$$\|\phi_t(x) - x^*\| \leq ke^{-tc} \|x - x^*\|$$

para todo $x \in U$, $t \geq 0$.

En particular, $\phi_t(x) \rightarrow x^*$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $x \in U$.

Demostración. Supongamos que $x^* = 0$ (si no, se le dan nuevas coordenadas $y = x - x^*$ a \mathbb{R}^n ; en las y -coordenadas, f tiene un punto de equilibrio en 0). Pongamos $A = df(0)$. Elijamos $b > 0$ de modo que la parte real de los valores propios de A sea menor que $-b < -c$. El lema 2.1.3 prueba que \mathbb{R}^n tiene una base \mathfrak{B} cuyos norma y producto escalar correspondientes (los que hacen que \mathfrak{B} sea ortonormal) verifican $\langle Ax, x \rangle \leq -b\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Como $A = df(0)$ y $f(0) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - Ax\|}{\|x\|} = 0$$

debido a la definición de derivada. Por la desigualdad de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\langle f(x) - Ax, x \rangle}{\|x\|^2} = 0.$$

Existe pues $\delta > 0$ tan pequeño que si $\|x\| \leq \delta$, entonces

$$x \in W \text{ y } \langle f(x), x \rangle \leq -c\|x\|^2.$$

Pongamos $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \delta\}$. Sea $x(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, una curva solución en U , $x(t) \neq 0$. Entonces,

$$\frac{d}{dt} \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \langle x', x \rangle \Big|_{x'=f(x)} \leq -c\|x\|.$$

Primero, esto demuestra que $\|x(t)\|$ decrece; luego $\|x(t)\| \in U$ para todo $t \in [0, t_0]$. Como U es compacto, la trayectoria $x(t)$ está definida y en U para todo $t \leq 0$ por el teorema 1.1.5. Por otro lado, $\frac{d}{dt}\|x\| \leq -c\|x\|$ implica que

$$\|x(t)\| \leq e^{-tc}\|x(0)\|$$

para todo $t \leq 0$. Por lo tanto, 1) y 2) quedan probados y 3) resulta de la equivalencia de normas. \square

Si la derivada $df(x^*)$ tiene valores propios con parte real nula, diremos que x^* es un punto de equilibrio *degenerado*.

2.3. Estabilidad

El estudio del equilibrio tiene gran importancia en las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones. Vamos a clasificar los puntos estacionarios según su estabilidad (tendencia a mantenerse en un estado dado).

Sea E un espacio vectorial y $W \subset E$ un abierto. Supóngase que $x^* \in W$ es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $x' = f(x)$, donde $f : W \rightarrow E$ es una aplicación de clase \mathcal{C}^1 .

Definición 2.3.1 (Tipos de estabilidad). Se dice que x^* es un punto de equilibrio

- *estable* si, para todo entorno U de x^* en W , hay un entorno U_1 de x^* en U tal que toda solución $x(t)$ con $x(0) \in U_1$ está definida y en U para todo $t > 0$
- *asintóticamente estable* si, además, se puede elegir U_1 tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$
- *inestable* si hay un entorno U de x^* tal que, para todo entorno U_1 de x^* en U , hay al menos una solución $x(t)$ que empieza en $x(0) \in U_1$, la cual no se encuentra completamente en U para t positivo.

El siguiente resultado es de gran importancia.

Teorema 2.3.2. Sea $W \subset E$ un abierto y $f : W \rightarrow E$ continuamente diferenciable. Supóngase $f(x^*) = 0$ y que x^* es un punto de equilibrio estable de la ecuación $x' = f(x)$. Entonces no hay valores propios de $df(x^*)$ con parte real positiva.

Demostración. Debemos demostrar que, en caso contrario, x^* no es estable. Supongamos que algunos valores propios tienen parte real positiva y $x^* = 0$. Por el teorema 1.2.3,

$$E = E_1 \oplus E_2,$$

que es invariante bajo $df(0)$ y tal que todos los valores propios de $A = df(0)|_{E_1}$ tienen parte real positiva y los de $B = df(0)|_{E_2}$ negativa ó 0.

Sea $a > 0$ de modo que todo valor propio de A tenga parte real $> a$. Hay una norma euclídea en E_1 tal que

$$\langle Ax, x \rangle \geq a\|x\|^2 \text{ para todo } x \in E_1.$$

De forma similar, para cualesquiera $-p < 0 < b$, existe una norma euclídea en E_2 tal que

$$-p\|y\|^2 \leq \langle By, y \rangle \leq b\|y\|^2 \text{ para todo } y \in E_2,$$

eligiendo $0 < b < a$. Consideramos que la norma en $E = E_1 \oplus E_2$ es la suma directa de estas normas en E_1 y E_2 ; tomamos también los productos escalares asociados a éstas en E , E_1 y E_2 . Si $z = (x, y) \in E_1 \oplus E_2$, entonces $\|z\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$. Usando el desarrollo de Taylor de f alrededor de 0, resulta

$$f(x, y) = (Ax + o_1(x, y), By + o_2(x, y)) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

con $(x, y) = z$ y $(o_1(x, y), o_2(x, y)) = o(z)$. Luego, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $U = \overline{B}_\delta(0)$ (la bola cerrada de radio δ y centro 0), entonces

$$\|o(z)\| \leq \epsilon\|z\| \text{ para } z \in U.$$

Sea γ un factor suficientemente grande. Definimos el cono¹

$$C = \{(x, y) \in E_1 \oplus E_2 \mid \|x\| \geq \gamma\|y\|\},$$

con $\gamma \geq 1$, y $g : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(z) = g(x, y) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \gamma^2\|y\|^2) = \frac{1}{2}(\langle x, x \rangle - \gamma^2\langle y, y \rangle).$$

Luego g es C^1 , $g^{-1}[0, \infty) = C$ y $g^{-1}(0)$ es la frontera de C . Si $(x, y) = z \in U$, entonces

$$dg(z)(f(z)) = dg(x, y)(f_1(x, y), f_2(x, y)) = \langle x, f_1(x, y) \rangle - \gamma^2\langle y, f_2(x, y) \rangle, \quad (2.3.1)$$

que será positivo si $z \in g^{-1}(0)$ por

Lema 2.3.3. Existe $\delta > 0$ tal que si U es la bola cerrada $\overline{B}_\delta(0) \subset W$, entonces

- 1) $\langle x, f_1(x, y) \rangle - \gamma^2\langle y, f_2(x, y) \rangle > 0$ si $x \neq 0$
- 2) existe $\alpha > 0$ con $\langle f(z), z \rangle \geq \alpha\|z\|^2$

para todo $z = (x, y) \in C \cap U$.

Demostración del lema. Empecemos probando 2). Si $(x, y) = z \in C \cap U$, entonces

$$\langle f(z), z \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle By, y \rangle + \langle o(z), z \rangle.$$

Como $\langle Ax, x \rangle \geq a\|x\|^2$, $-p\|y\|^2 \leq \langle By, y \rangle \leq b\|y\|^2$ y $\|o(z)\| \leq \epsilon\|z\|$, se tiene que

$$\langle f(z), z \rangle \geq a\|x\|^2 - p\|y\|^2 - \epsilon\|z\|^2.$$

En C , $\|x\| \geq \gamma\|y\| \geq \|y\|$ y $\|x\|^2 \geq 1/2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \geq 1/2\|z\|^2$. Luego

$$\langle f(z), z \rangle \geq \left(\frac{a}{2} - \frac{p/\gamma^2}{2} - \epsilon \right) \|z\|^2,$$

¹La demostración que aparece en [3] es incorrecta: se utiliza un cono,

$$C = \{(x, y) \in E_1 \oplus E_2 \mid \|x\| \geq \|y\|\},$$

con el que no se puede concluir el resultado. De ahí la incorporación del parámetro γ en esta versión.

siendo γ lo suficientemente grande como para que $a > p/\gamma^2$. Para concluir, elegimos $\epsilon > 0$ y, entonces, $\delta > 0$ con el objetivo de que $\alpha = \frac{a-p/\gamma^2}{2} - \epsilon > 0$.

En 1),

$$\langle x, f_1(x, y) \rangle - \gamma^2 \langle y, f_2(x, y) \rangle = \langle Ax, x \rangle - \langle By, y \rangle + \langle x, o_1(x, y) \rangle - \langle y, o_2(x, y) \rangle.$$

Sin embargo,

$$\|\langle x, o_1(x, y) \rangle - \langle y, o_2(x, y) \rangle\| \leq 2\|\langle z, o(z) \rangle\|.$$

Procediendo como antes, se elige $\delta > 0$ para que $\frac{a-b}{2} - 2\epsilon > 0$. □

En una solución $z(t)$ de $z' = f(z) \equiv \begin{cases} x' = f_1(x, y) = f_1(z) \\ y' = f_2(x, y) = f_2(z) \end{cases}$ en U la cual pasa por

la frontera de C , la ecuación (2.3.1) implica que g es creciente pues, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}(g(z(t))) = dg(z(t))f(z(t)) = \langle x(t), x'(t) \rangle - \gamma^2 \langle y(t), y'(t) \rangle,$$

donde $x'(t) = f_1(z)$ e $y'(t) = f_2(z)$, y se aplica el lema anterior. Por lo tanto, ninguna solución que empiece en el cono puede abandonarlo antes de dejar U . Ahora, si $z = z(t)$ es una curva solución en $C \cap U$,

$$\frac{d\|z(t)\|^2}{dt} = 2\langle z(t), z'(t) \rangle = 2\langle z(t), f(z(t)) \rangle \stackrel{2)}{\geq} 2\alpha\|z(t)\|^2 \Rightarrow \frac{\log\|z(t)\|^2}{dt} \geq 2\alpha.$$

Así, $\|z(t)\|^2 \geq \|z(0)\|^2 e^{2\alpha t}$ ó, lo que es lo mismo, $\|z(t)\| \geq \|z(0)\| e^{\alpha t}$. Luego cada solución no trivial $z(t)$ que empiece en $C \cap U$ se aleja de 0 con una tasa exponencial mientras que esté definida y en $C \cap U$. Si $z(t)$ no está definida para todo $t \geq 0$, entonces ha de abandonar el conjunto compacto $C \cap U$ por el teorema 1.1.5 y, por tanto, también U . Por otro lado, si $z(t)$ está definida para todo t , también tendrá que dejar U porque es la bola cerrada de radio δ y $e^{\alpha t}\|z(0)\| > \delta$ para t grande. Luego el campo vectorial f no tiene a 0 como punto de equilibrio estable. □

Corolario 2.3.4. Un punto de equilibrio hiperbólico es o bien inestable o asintóticamente estable.

Ejemplo 2.3.5. 1) Un sumidero es asintóticamente estable y, por tanto, estable.

2) Las fuentes y los puntos de silla son inestables.

Por definición, si x^* es un punto de equilibrio asintótico de un sistema dinámico, hay un entorno N de x^* tal que cualquier curva solución que empieza en N tiende hacia x^* .

Definición 2.3.6. La unión de todas las curvas solución que tienden hacia x (cuando $t \rightarrow \infty$) se llama *cuenca* de x^* , $\mathcal{B}(x^*)$.

2.3.1. Método de Liapunov

En 1892, el matemático e ingeniero ruso A. M. Liapunov encontró un criterio útil para la estabilidad, el cual vamos a introducir aquí.

Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable definida en un entorno $U \subset W$ de x^* . Denotamos por $\dot{V} : U \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$\dot{V}(x) = dV(x)(f).$$

Si $\phi_t(x)$ es la solución a $x' = f(x)$ que pasa por x cuando $t = 0$, entonces

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi_t(x)) \right|_{t=0}$$

por la regla de la cadena. Por consiguiente, si \dot{V} es negativa, entonces V decrece a lo largo de la solución de $x' = f(x)$ a través de x .

Teorema 2.3.7 (Teorema de Liapunov). Sea $x^* \in W$ un punto singular para $x' = f(x)$ y $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en un entorno $U \subset W$ de x , diferenciable en $U - x^*$ y tal que $V(x^*) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq x^*$.

- 1) Si $\dot{V} \leq 0$ en $U - x^*$, entonces x^* es estable.
- 2) Si $\dot{V} < 0$ en $U - x^*$, entonces x^* es asintóticamente estable.

Demostración. Sea $\delta > 0$ tan pequeño que la bola cerrada $\overline{B}_\delta(x^*)$ de centro x^* y radio δ se encuentre completamente en U y α el valor mínimo de V en la frontera de $\overline{B}_\delta(x^*)$, esto es, en la esfera $S_\delta(x^*)$ de radio δ y centro x^* . Por ser $V(x^*) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq x^*$, se deduce que $\alpha > 0$. Sea $U_1 = \{x \in \overline{B}_\delta(x^*) \mid V(x) < \alpha\}$. Ninguna solución que empiece en U_1 puede atravesar $S_\delta(x^*)$ pues V es no creciente en curvas solución. Por lo tanto, toda solución que empiece en U_1 nunca sale de $\overline{B}_\delta(x^*)$. Esto prueba que x^* es estable. Supongamos ahora que se cumple 2) para que V sea estrictamente decreciente en las órbitas que se encuentran en $U - x^*$. Sea $x(t)$ una solución que empiece en $U_1 - x^*$ y supongamos que $x(t_n) \rightarrow z_0 \in \overline{B}_\delta(x^*)$ para alguna sucesión $t_n \rightarrow \infty$; tal solución existe por compacidad de $\overline{B}_\delta(x^*)$. Establecemos que $z_0 = x^*$. Para ver esto, observemos que $V(x(t)) > V(z_0)$ para todo $t \geq 0$ ya que $V(x(t))$ decrece y $V(x(t_n)) \rightarrow V(z_0)$ por continuidad de V . Si $z_0 \neq x^*$, sea $z(t)$ la solución que empiece en z_0 . Para cualquier $s > 0$, tenemos $V(z(s)) < V(z_0)$. Luego, para cualquier solución $y(s)$ que empiece bastante cerca de z_0 , se tiene

$$V(y(s)) < V(z_0);$$

poniendo $y(0) = x(t_n)$ para n suficientemente grande, se llega a la contradicción

$$V(x(t_n + s)) < V(z_0).$$

Por consiguiente, $z_0 = x^*$. Esto prueba que x^* es el único punto de acumulación posible del conjunto $\{x(t) \mid t \geq 0\}$. \square

Una función V que satisfaga $V(x^*) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq x^*$ y 1) se llama *función de Liapunov* para x^* . Si se cumplen $V(x^*) = 0$ y $V(x) > 0$ cuando $x \neq x^*$ y 2), llamamos a V *función de Liapunov estricta*.

El teorema de Liapunov (2.3.7) puede aplicarse sin resolver la ecuación diferencial. Por otro lado, no hay un método explícito para encontrar funciones de Liapunov; pero las funciones cuadráticas y la de la energía suelen servir.

Sea ahora $V : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en un dominio, W , que contenga al origen $x = 0$. Supongamos que $V(0) = 0$ y que hay un punto x_0 arbitrariamente cercano al origen tal que $V(x_0) > 0$. Elijamos $r > 0$ tal que la bola $\overline{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ esté contenida en W y sea $U = \{x \in \overline{B}_r \mid V(x) > 0\}$. El conjunto U no es vacío. Su frontera está dada por la superficie $V(x) = 0$ y la esfera $\|x\| = r$. Como $V(0) = 0$, el origen está sobre la frontera de U en el interior de \overline{B}_r .

Teorema 2.3.8 (Chetaev). Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $x' = f(x)$ y V una función de clase \mathcal{C}^1 tal que $V(0) = 0$ y $V(x_0) > 0$ para cierto x_0 con $\|x_0\|$ arbitrariamente pequeña. Defínase el conjunto U como en $U = \{x \in \overline{B}_r \mid V(x) > 0\}$ y supóngase que $\dot{V}(x) > 0$ en este conjunto. Entonces, $x = 0$ es inestable.

Demostración. El punto x_0 está en el interior de U y $V(x_0) = a > 0$. La trayectoria $x(t)$ que comienza en $x(0) = x_0$ debe dejar el conjunto U . Para probar esto, mientras $x(t)$ permanezca en U , $V(x(t)) \geq a$ pues $\dot{V}(x) > 0$ en este conjunto. Sea

$$\gamma = \min\{\dot{V}(x) \mid x \in U \text{ y } V(x) \geq a\},$$

que existe porque la función continua $\dot{V}(x)$ tiene un mínimo en el conjunto compacto $\{x \in U \text{ y } V(x) \geq a\} = \{x \in \overline{B}_r \mid V(x) \geq a\}$. Entonces,

$$\gamma > 0 \text{ y } V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \geq a + \gamma t.$$

Esta desigualdad muestra que $x(t)$ no se puede quedar indefinidamente en U ya que $V(x)$ está acotada en este conjunto. Ahora, $x(t)$ no puede abandonar U a través de la superficie $V(x) = 0$ porque $V(x(t)) \geq a$. Por lo tanto, debe dejar U a través de la esfera $\|x\| = r$. Como esto pasa para $\|x_0\|$ arbitrariamente pequeña, el origen es inestable. \square

Denotando al grupo uniparamétrico del sistema ϕ ,

Definición 2.3.9. Un conjunto P en el dominio W de un sistema dinámico es *invariante* si para todo $x \in P$, $\phi_t(x)$ está definido y en P para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 2.3.10. Un conjunto P es *negativamente* (resp. *positivamente*) *invariante* para un sistema dinámico si para cada x en P , $\phi_t(x)$ está definida y en P para todo $t \leq 0$ (resp. $t \geq 0$).

Podemos utilizar funciones de Liapunov también para estimar la extensión de la cuenca de un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Teorema 2.3.11. Sea $x^* \in W$ un punto de equilibrio del sistema dinámico $x' = f(x)$, $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Liapunov para x^* , siendo U un entorno de x^* , y $P \subset U$ otro, pero cerrado en W . Supóngase que P es positivamente invariante y que no existe ninguna órbita en $P - x^*$ en la cual V sea constante. Entonces, x^* es asintóticamente estable y $P \subset \mathcal{B}(x^*)$.

Demostración. Imaginémonos una trayectoria $x(t)$, $0 \leq t < \infty$, en el conjunto positivamente invariante P . Supongamos que $x(t)$ no tiende a x^* cuando $t \rightarrow \infty$. Luego tiene que haber un punto $a \neq x^*$ en P y una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = a.$$

Si $\alpha = V(a)$, entonces α es la mayor cota inferior de $\{V(x(t)) \mid t \geq 0\}$; esto resulta de la continuidad de V y del hecho de que V decrece a lo largo de las trayectorias.

Sea $L = \{a \in W \mid \text{existe } t_n \rightarrow \infty \text{ con } x(t_n) \rightarrow a\}$ el conjunto de todos estos puntos a en W . Como todo punto de L es un límite de puntos en P y P es cerrado en W , resulta que $L \subset P$. Además, si $a \in L$, entonces la órbita de a está en L ; es decir, $\phi_t(a)$ está definida y en L para todo $t \in \mathbb{R}$. Como P es positivamente invariante, $\phi_t(a)$ está definido para todo $t \geq 0$. Por otro lado, cada punto $\phi_t(x(t_n))$ está definido para todo t en el intervalo $[-t_n, 0]$; suponiendo $t_1 < t_2 < \dots$, tenemos que $\phi_t(a)$ está definido para todo $t \in [-t_n, 0]$, $n = 1, 2, \dots$, pues $x(t_n) \rightarrow a$. Como $-t_n \rightarrow -\infty$, $\phi_t(a)$ está definido para todo $t \leq 0$. Para ver que $\phi_s(a) \in L$, para cualquier $s \in \mathbb{R}$ en particular, si $x(t_n) \rightarrow a$, entonces $x(t_n + s) \rightarrow \phi_s(a)$. Llegamos a contradicción: $V(a) = \alpha$ para todo $a \in L$, luego V es constante en una órbita en P . Esto es imposible; por tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ para toda trayectoria en P . Esto prueba que x^* es asintóticamente estable y también que $P \subset \mathcal{B}(x^*)$. \square

Adicionalmente,

Definición 2.3.12. Dado $p \in W$, $L = \{a \in W \mid \text{existe } t_n \rightarrow \infty \text{ con } x(t_n) = \phi_{t_n}(p) \rightarrow a\}$ se llama conjunto de *puntos ω -límite* o *conjunto ω -límite* de la trayectoria $x(t)$ (ó de cualquier punto en la trayectoria, en este caso p) y se denota por $L_\omega(p)$.

De forma similar,

Definición 2.3.13. El conjunto de *puntos α -límite* o *conjunto α -límite* de una trayectoria $x(t)$, $L_\alpha(p)$, es el conjunto de todos los puntos a tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(p) = a$ para alguna sucesión $t_n \rightarrow -\infty$.

El siguiente resultado se deduce, en parte, de la demostración del teorema 2.3.11.

Proposición 2.3.14. Los conjuntos α - y ω -límites de una trayectoria que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ son conjuntos invariantes cerrados.

Proposición 2.3.15. 1) Si x e y están en la misma trayectoria, entonces se tiene $L_\omega(x) = L_\omega(y)$; análogamente para α -límites.

2) Si D es un conjunto positivamente invariante cerrado e $y \in D$, entonces $L_\omega(y) \subset D$; análogamente para conjuntos negativamente invariantes y α -límites.

3) Un conjunto invariante cerrado, en particular, un conjunto límite, contiene los conjuntos α - y ω -límites de todos sus puntos.

Demostración. 1) Supongamos $z \in L_\omega(x)$ y $\phi_s(x) = y$. Si $\phi_{t_n}(x) \rightarrow z$, entonces $\phi_{t_n-s}(y) \rightarrow z$. Luego $z \in L_\omega(y)$.

2) Si $t_n \rightarrow \infty$ y $\phi_{t_n}(y) \rightarrow z \in L_\omega(y)$, entonces $t_n \geq 0$ para n bastante grande como para que $\phi_{t_n}(y) \in D$. Por lo tanto, $z \in \overline{D} = D$.

3) Se deduce de 2). \square

Capítulo 3. Órbitas periódicas y comportamiento oscilatorio

El comportamiento oscilatorio o periódico es un fenómeno frecuente en los sistemas dinámicos. Nos vamos a dedicar al caso 2-dimensional e incluiremos un ejemplo fundamental de la teoría de circuitos eléctricos y el importante teorema de Poincaré-Bendixson. También seguiremos sobre todo [3] en este capítulo.

3.1. Ecuación de Van der Pol

Consideremos el sistema de ecuaciones (*ecuación de Van der Pol*)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - x^3 + x \\ \frac{dy}{dt} &= -x.\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Los valores propios son $1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, luego el sistema tiene solo un punto de equilibrio en $(0, 0)$, que es una fuente.

Dividamos el plano (x, y) definiendo las siguientes cuatro curvas disjuntas:

$$\begin{aligned}v^+ &= \{(x, y) \mid y > 0, x = 0\} \\ g^+ &= \{(x, y) \mid x > 0, y = x^3 - x\} \\ v^- &= \{(x, y) \mid y < 0, x = 0\} \\ g^- &= \{(x, y) \mid x < 0, y = x^3 - x\}.\end{aligned}$$

Surgen así las regiones disjuntas A (entre g^+ y v^-), B (entre v^- y g^-), C (entre g^- y v^+) y D (entre v^+ y g^+). Hecho esto y tomando el campo vectorial (x', y') , tenemos que $y' = 0$ únicamente en $(0, 0)$ y en $v^+ \cup v^-$ y $x' = 0$ en $g^+ \cup g^- \cup (0, 0)$. Además, el vector (x', y') es horizontal en $v^+ \cup v^-$ y apunta hacia la derecha en v^+ y hacia la izquierda en v^- . Por otro lado, el vector es vertical en $g^+ \cup g^-$, apuntando hacia abajo en g^+ y hacia arriba en g^- . Los signos de x' e y' son constantes en cada región.

Analicemos ahora la naturaleza del flujo en el interior de las regiones.

Proposición 3.1.1. Cualquier trayectoria que empiece en v^+ entra en A . Cualquier trayectoria que empiece en A interseca g^+ antes de hacerlo con v^- , g^- ó v^+ .

Demostración. Sea $(x(t), y(t))$ una curva solución a 3.1.1. Si $(x(0), y(0)) \in v^+$, entonces $x(0) = 0$ e $y(0) > 0$. Como $x'(0) > 0$, $x(t)$ aumenta para t pequeño por lo que $x(t) > 0$; esto implica que $y(t)$ decrezca para t pequeño. Por lo tanto, la curva entra en A . Antes de que la curva abandone A , si es que lo hace, x' ha de anularse con el objetivo de que la curva interseque g^+ antes de hacerlo con v^- , g^- ó v^+ .

Nos queda demostrar que si $(x(0), y(0)) \in A$, entonces $(x(t), y(t)) \in g^+$ para algún $t > 0$. Supongamos que no.

Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto delimitado por $(0, 0)$ y v^+ , g^+ y la recta $y = y(0)$. La

curva solución $(x(t), y(t))$, $0 \leq t < \beta$, está en P . Del teorema 1.1.5, se deduce que está definida para todo $t > 0$ porque $(x(t), y(t))$ no interseca g^+ . Como $x' > 0$ en A , $x(t) \geq a$ para $t > 0$. Así, de 3.1.1, $y'(t) \leq -a$ para $t > 0$. Para estos valores de t ,

$$y(t) = \int_0^t y'(s) ds \leq y(0) - at,$$

lo cual es imposible a no ser que la trayectoria interseque g^+ . Por consiguiente, concluimos. \square

Argumentos similares prueban

Proposición 3.1.2. Toda trayectoria está definida para al menos todo $t \geq 0$. Excepto para $(0, 0)$, cada trayectoria interseca de forma repetida las curvas v^+ , g^+ , v^- y g^- en el sentido de las agujas del reloj pasando por las regiones A , B , C y D en el mismo orden.

Definamos ahora una aplicación

$$\sigma : v^+ \rightarrow v^+$$

como sigue. Sea $p \in v^+$. La curva solución en p , $t \rightarrow \phi_t(p)$, está definida para todo $t \geq 0$. Para el mínimo valor del tiempo, $t_1(p) = t_1 > 0$, se tendrá $\phi_{t_1}(p) \in v^+$. Pongamos $\sigma(p) = \phi_{t_1}(p)$. Así, $\sigma(p)$ es el primer punto después de p en la trayectoria de p (para $t > 0$), que está de nuevo en v^+ . La aplicación $p \rightarrow t_1(p)$ es continua, luego σ también. Además, σ es inyectiva por unicidad de soluciones.

Entre otras cosas, la importancia de esta aplicación $\sigma : v^+ \rightarrow v^+$ proviene de que $p \in v^+$ es un punto fijo de σ (esto es, $\sigma(p) = p$) si y solo si p está en una solución periódica de 3.1.1 (es decir, $\phi_t(p) = p$ para algún $t \neq 0$). Adicionalmente, toda curva solución periódica interseca v^+ .

Para todo punto $p \in v^+$, sea $t_2(p) = t_2$ el $t > 0$ más pequeño tal que $\phi_t \in v^-$. Definamos una aplicación continua

$$\begin{aligned} \alpha : v^+ &\rightarrow v^- \\ p &\mapsto \alpha(p) = \phi_{t_2}(p), \end{aligned}$$

que también es inyectiva por la unicidad de las soluciones y, por tanto, monótona. Además, solo hay un punto $p_0 \in v^+$ en el que se da una intersección entre la curva solución

$$\{\phi_t(p_0) \mid 0 \leq t \leq t_2(p_0)\}$$

y g^+ en el punto $(1, 0)$ donde esta última curva atraviesa el eje x .

Definamos la aplicación continua

$$\begin{aligned} \delta : v^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \delta(p) = \frac{1}{2}(|\alpha(p)|^2 - |p|^2), \end{aligned}$$

donde $|p|$ representa la norma euclídea usual del vector p .

Proposición 3.1.3. 1) $\delta(p) > 0$ si $0 < |p| < |p_0|$.

2) $\delta(p)$ decrece monótonamente a $-\infty$ cuando $|p| \rightarrow \infty$, $|p| \geq |p_0|$.

En este caso, vamos a dar una idea de la demostración. Sea $W(x, y) = 1/2(x^2 + y^2)$ de modo que

$$\delta(p) = 1/2(\alpha(p)^2 - p^2) = W(\alpha(p)) - W(p) = \int_0^{t_2} x(t)^2(1 - x(t)^2)dt$$

dado $x(t_2) = \alpha(p)$. Para $|p| < |p_0|$, es $x < 1$; luego $\delta(p) > 0$ y esto prueba 1). Para valores mayores, se considera la trayectoria de p hasta $\alpha(p)$ dividida en 3 partes mediante la recta $x = 1$. Lo primero que se hace es parametrizar por x :

$$\delta(p) = \int_0^1 \frac{x^2(1 - x^2)}{y - (x^3 - x)} dx.$$

El integrando de esta expresión disminuye con p porque aumenta el denominador. En los otros dos tramos, análisis similares demuestran que $\delta(p)$ es decreciente y que tiende a $-\infty$ (detalles en la sección 3 del capítulo 10 de [3]).

El teorema del valor medio y la proposición 3.1.3 implican la existencia de un único $q_0 \in v^+$ con $\delta(q_0) = 0$.

Con todo esto, podemos probar

Teorema 3.1.4. Hay una solución periódica no trivial de 3.1.1 y toda solución no constante tiende a ella: “tras un periodo de transición, el sistema oscila”.

Demostración. Tomemos $g(x, y) = (y - x^3 + x, -x)$ con $g(-x, -y) = -g(x, y)$. Esto quiere decir que si $t \rightarrow (x(t), y(t))$ es una curva solución, también lo será $t \rightarrow (-x(t), -y(t))$. Consideremos la trayectoria del único punto $q_0 \in v^+$ tal que $\delta(q_0) = 0$. Este punto tiene la propiedad de que $|\alpha(q_0)| = |q_0|$, luego

$$\phi_{t_2}(q_0) = -q_0.$$

Por simetría, se tiene también que

$$\phi_{t_2}(-q_0) = -(-q_0) = q_0;$$

por tanto, tenemos

$$\phi_\lambda(q_0) = q_0$$

poniendo $\lambda = 2t_2 > 0$. Por consiguiente, q_0 está en una trayectoria periódica no trivial γ . Como δ es monótona, un razonamiento similar prueba que la trayectoria que pasa por q_0 es la única solución periódica no trivial.

Para investigar otras trayectorias, definimos una aplicación

$$\beta : v^- \rightarrow v^+$$

que mande cada punto de v^- a la primera intersección de su trayectoria (para $t > 0$) con v^+ . Por simetría,

$$\beta(p) = -\alpha(-p).$$

Además, $\sigma = \beta\alpha$.

Identifiquemos el eje de ordenadas con los números reales en las coordenadas y . Si

$$p, q \in v^+ \cup v^-$$

y p está por encima de q , escribimos $p > q$. Adicionalmente, α y β invierten este orden, pero σ lo conserva.

Sea ahora $p \in v^+$ con $p > q_0$. Al ser $\alpha(q_0) = -q_0$, tenemos que $\alpha(p) < -q_0$ y $\sigma(p) > q_0$. Por otro lado, $\delta(p) < 0$ ó, lo que es lo mismo, $\alpha(p) > -p$. Por lo tanto, $\sigma(p) = \beta\alpha(p) < p$. Hemos demostrado pues que si $p > q_0$, entonces $p > \sigma(p) > q_0$. Análogamente, se tiene $\sigma(p) > \sigma^2(p) > q_0$ y, por inducción, $\sigma^n(p) > \sigma^{n+1}(p) > q_0$, $n = 1, 2, \dots$

La sucesión $\sigma^n(p)$ tiene límite $q_1 \geq q_0$ en v^+ . Además, q_1 es un punto fijo de σ ya que

$$\sigma(q_1) - q_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\sigma^n(p)) - q_1 = q_1 - q_1 = 0$$

debido a la continuidad de σ . Como σ tiene solo un punto fijo, $q_1 = q_0$. Esto prueba que la trayectoria de p gira alrededor de γ cuando $t \rightarrow \infty$. Lo mismo es cierto para $p < q_0$. Al intersecar toda trayectoria, a excepción de $(0, 0)$, con v^+ , concluimos. \square

Adicionalmente, con *órbita cerrada o periódica* de un sistema dinámico nos referimos a la imagen de una solución periódica no trivial. En otras palabras, una trayectoria γ es una órbita cerrada si no es un punto de equilibrio y $\phi_p(x) = x$ para algún $x \in \gamma$, $p \neq 0$.

3.2. El Teorema de Poincaré-Bendixson

En esta sección, vamos a ver bajo qué condiciones se asegura la existencia de órbitas cerradas.

Consideremos el flujo ϕ_t del campo vectorial $f : W \rightarrow E$ de clase \mathcal{C}^1 .

Definición 3.2.1. Una *sección local* de f en un punto $p \in W$ es un conjunto abierto conexo S que contiene a p en un hiperplano $H \subset E$ el cual es transversal a f .

Definición 3.2.2. Una *caja de flujo* es un difeomorfismo

$$\mathbb{R} \times H \supset N \xrightarrow{\psi} W$$

de un entorno N de $(0, p)$ en otro de p en W que transforma el campo vectorial $f : W \rightarrow E$ en otro constante $(1, 0)$ en $\mathbb{R} \times H$.

La existencia de cajas de flujo está garantizada por el teorema de reducción a forma canónica para campos tangentes (véase la sección 6 del capítulo 1 de [8]).

Sea x_0, x_1, \dots una sucesión de puntos distintos en la curva solución

$$C = \{\phi_t(x_0) \mid 0 \leq t \leq \alpha\}.$$

Decimos que una sucesión es *monótona a lo largo de una trayectoria* si $\phi_{t_n}(x_0) = x_n$ con $0 \leq t_1 < t_2 < \dots \leq \alpha$.

A partir de ahora y hasta el final de esta sección, vamos a restringirnos a dimensión 2.

Proposición 3.2.3. Sea S una sección local de un sistema dinámico plano de clase \mathcal{C}^1 e y_0, y_1, \dots una sucesión de puntos distintos de S que estén en la misma curva solución C . Si la sucesión es monótona a lo largo de C , entonces también lo es a lo largo de S .

La idea de la demostración es la siguiente: considerando la curva cerrada formada por la trayectoria que une y_0, y_1 junto con el segmento de S entre y_0 e y_1 , se demuestra que y_1 está entre y_0 e y_2 , utilizando reiteradamente el hecho de que las trayectorias deben atravesar S siempre hacia un mismo lado y nunca entre sí (los detalles en la sección 3 del capítulo 11 de [3]).

A continuación, llegamos a una propiedad importante de los puntos límite.

Proposición 3.2.4. Sea $y \in L_\omega(x) \cup L_\alpha(x)$. La trayectoria de y atraviesa cualquier sección local en un solo punto.

Demostración. Supongamos que y_1 e y_2 son puntos distintivos en la trayectoria de y , S una sección local que los contenga e $y \in L_\omega(x)$ (el argumento para $L_\alpha(x)$ es similar). Entonces, $y_k \in L_\omega(x)$, con $k = 1, 2$. Sea V_k las cajas de flujo en y_k definidas para algunos intervalos $J_k \subset S$; suponemos que J_1 y J_2 son disjuntos. La trayectoria de x entra en V_k infinitas veces, así que cruza J_k el mismo número de ocasiones. Luego hay una sucesión $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ monótona a lo largo de la trayectoria de x con $a_n \in J_1, b_n \in J_2, n = 1, 2, \dots$. Sin embargo, tal sucesión no puede ser monótona a lo largo de S porque J_1 y J_2 son disjuntos, lo que contradice la proposición 3.2.3. \square

Teorema 3.2.5 (Poincaré-Bendixson). Un conjunto límite, compacto y no vacío de un sistema dinámico de clase \mathcal{C}^1 que no contiene puntos de equilibrio es una órbita cerrada.

Demostración. Supongamos que $L_\omega(x)$ es compacto y que $y \in L_\omega(x)$. (El caso de conjuntos α -límite es similar.) Demostremos primero que la trayectoria de y es una órbita cerrada.

Como y pertenece al conjunto invariante compacto $L_\omega(x)$, $L_\omega(y)$ es un subconjunto no vacío de $L_\omega(x)$. Sea $z \in L_\omega(y)$, S una sección local de z y N un entorno de caja de flujo de z alrededor de cierto intervalo abierto $J, z \in J \subset S$. La trayectoria de y atraviesa S exactamente en un punto por la proposición 3.2.4. Por otro lado, hay una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\phi_{t_n}(y) \rightarrow z$, por lo que bastantes $\phi_{t_n}(y)$ pertenecen a V . Por lo tanto, podemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tal que

$$r > s \quad \text{y} \quad \phi_r(y) \in S \cap V, \quad \phi_s(y) \in S \cap V.$$

Resulta que $\phi_r(y) = \phi_s(y)$, luego $\phi_{r-s}(y) = y, r - s > 0$. Como $L_\omega(x)$ no contiene puntos de equilibrio, y pertenece a la órbita cerrada.

Queda probar que si γ es una órbita cerrada en $L_\omega(x)$, entonces $\gamma = L_\omega(x)$. Basta demostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi_t(x), \gamma) = 0$, donde $\text{dist}(\phi_t(x), \gamma)$ es la distancia de x al conjunto compacto γ (es decir, la distancia de $\phi_t(x)$ al punto más cercano de γ).

Sea S una sección local de $z \in \gamma$ tan pequeña que $S \cap \gamma = z$. Teniendo en cuenta una caja de flujo V_ϵ cerca de z , vemos que hay una sucesión $t_0 < t_1 < \dots$ tal que

$$\phi_{t_n}(x) \in S, \quad \phi_{t_n}(x) \rightarrow z, \quad \phi_t(x) \notin S \quad \text{para} \quad t_{n-1} < t < t_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Pongamos $x_n = \phi_{t_n}(x)$. Por la proposición 3.2.3, $x_n \rightarrow z$ en S de forma monótona. Existe una cota superior para el conjunto de números positivos $t_{n+1} - t_n$. Supongamos que $\phi_\lambda(z) = z, \lambda > 0$. Para x_n suficientemente cercano a $z, \phi_\lambda(x_n) \in V_\epsilon$ y, por tanto,

$$\phi_{\lambda+t}(x_n) \in S$$

para algún $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Luego

$$t_{n-1} - t_n \leq \lambda + \epsilon.$$

Sea $\beta > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que si $\|x_n - u\| < \delta$ y $|t| \leq \lambda + \epsilon$, entonces $\|\phi_t(x_n) - \phi_t(u)\| < \beta$. Sea n_0 tan grande que $\|x_n - z\| < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Entonces,

$$\|\phi_t(x_n) - \phi_t(z)\| < \beta$$

si $|t| \leq \lambda + \epsilon$ y $n \geq n_0$. Sea ahora $t \geq t_{n_0}$ y $n \geq n_0$ tal que $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Entonces,

$$\text{dist}(\phi_t(x), \gamma) \leq \|\phi_t(x) - \phi_{t-t_n}(z)\| = \|\phi_{t-t_n}(x_n) - \phi_{t-t_n}(z)\| < \beta$$

pues $|t - t_n| \leq \lambda + \epsilon$. □

3.2.1. Aplicaciones

Antes de nada, demos la siguiente

Definición 3.2.6. Un *ciclo límite* es una órbita cerrada γ tal que $\gamma \subset L_\omega(x)$ ó $\gamma \subset L_\alpha(x)$ para algún $x \notin \gamma$.

En el primer caso, γ se llama ciclo ω -límite y, en el otro, ciclo α -límite.

Supongamos que γ es un ciclo ω -límite y que ϕ_t gira en espiral alrededor de γ cuando $t \rightarrow \infty$. Sea S una sección local en $z \in \gamma$. Entonces habrá un intervalo $T \subset S$ disjunto de γ acotado por $\phi_{t_0}(x)$, $\phi_{t_1}(x)$, con $t_0 < t_1$ y que no atraviesa la trayectoria de x para $t_0 < t < t_1$. La región acotada por γ , T y la curva $\{\phi_t(x) \mid t_0 \leq t \leq t_1\}$, A , es positivamente invariante al igual que el conjunto $B = A - \gamma$. Adicionalmente, $\phi_t(y)$ gira en espiral alrededor de γ para todo $y \in B$. Una consecuencia de esto es

Proposición 3.2.7. Sea γ un ciclo ω -límite. Si $\gamma = L_\omega(x)$, $x \notin \gamma$, entonces x tiene un entorno V tal que $\gamma = L_\omega(y)$ para todo $y \in V$. En otras palabras, el conjunto

$$A = \{y \mid \gamma = L_\omega(y)\} - \gamma$$

es abierto.

Se tiene un resultado similar para ciclos α -límite.

Teorema 3.2.8. Un conjunto compacto no vacío K que es positivamente o negativamente invariante contiene o bien una órbita cerrada¹ o un punto de equilibrio.

Demostración. Supongamos que K es positivamente invariante (el otro caso es análogo). Si $x \in K$, entonces $L_\omega(x)$ es un subconjunto no vacío de K . Aplicando el teorema de Poincaré-Bendixson (3.2.5), concluimos. □

Proposición 3.2.9. Sea γ una órbita cerrada y supóngase que el dominio W del sistema dinámico incluye toda la región abierta U rodeada por γ . Entonces, U contiene o bien un punto de equilibrio o una órbita cerrada.

¹El enunciado equivalente en [3] afirma, por error, que si K no contiene un punto de equilibrio, entonces debe contener un ciclo límite. Se puede encontrar un contraejemplo: un anillo circular plano con el grupo de los giros. Mismo error en lo equivalente a la proposición 3.2.9.

Demostración. Sea D el conjunto compacto $U \cup \gamma$. Como ninguna trayectoria de U puede intersectar γ , D es invariante. Si U no contiene órbitas cerradas ni puntos de equilibrio, entonces

$$L_\omega(x) = L_\alpha(x) = \gamma$$

para cualquier $x \in U$ debido al teorema de Poincaré-Bendixson (3.2.5). Si S es una sección local en un punto $z \in \gamma$, hay sucesiones $t_n \rightarrow \infty$ y $s_n \rightarrow -\infty$ tales que

$$\phi_{t_n}(x) \in S, \quad \phi_{t_n}(x) \rightarrow z; \quad \phi_{s_n}(x) \in S, \quad \phi_{s_n}(x) \rightarrow z.$$

Sin embargo, esto contradice la proposición 3.2.3. □

De hecho, el enunciado anterior se puede mejorar y queda

Teorema 3.2.10. Sea γ un órbita cerrada que rodea un conjunto abierto U contenido en el dominio W del sistema dinámico. Entonces, U encierra al menos un punto de equilibrio. Además, si solo contiene uno, éste no puede ser un punto de silla.

Demostración. Supongamos que U no contiene ningún punto de equilibrio. Si $x_n \rightarrow x$ en U y cada x_n se encuentra en una órbita cerrada, entonces x ha de estar en una también porque, de lo contrario, la trayectoria de x giraría en espiral alrededor de un ciclo límite y lo mismo haría la trayectoria de algún x_n por la proposición 3.2.7.

Sea $A \geq 0$ la mayor cota inferior de las áreas de las regiones rodeadas por órbitas cerradas en U y $\{\gamma_n\}$ una sucesión de órbitas cerradas que rodeen regiones con áreas A_n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ y $x_n \in \gamma_n$. Al ser $\gamma \cup U$ compacto, vamos a suponer que $x_n \rightarrow x \in U$. Si U no contiene puntos de equilibrio, x se encuentra en una órbita cerrada β de área $A(\beta)$. Como $n \rightarrow \infty$, γ_n se acerca arbitrariamente a β y, por tanto, el área de la región entre γ_n y β , $A_n - A(\beta)$, tiende a 0. Luego $A(\beta) = A$.

Hemos demostrado que si U no contiene ningún punto de equilibrio, entonces contiene una órbita cerrada β que rodea una región de área mínima. Así, la región rodeada por β no contiene ni un punto de equilibrio ni una órbita cerrada, lo que contradice la proposición 3.2.9.

Para la última parte, se utiliza la teoría del índice: sin entrar en detalles, el índice de un campo a lo largo de sus trayectorias cerradas es 1 mientras que el índice de un punto de silla es -1 , lo que nos llevaría a contradicción (véase la sección 4 del capítulo 9 de [7]). □

Teorema 3.2.11. Sea H una integral primera de un sistema dinámico de clase \mathcal{C}^1 (esto es, H es una función real que es constante en las trayectorias). Si H no es constante en ningún conjunto abierto, entonces no hay ciclos límites.

Demostración. Supongamos que hay un ciclo límite γ . Sea $c \in \mathbb{R}$ un valor constante de H en γ . Si $x(t)$ es una trayectoria que gira en espiral alrededor de γ , entonces $H(x(t)) \equiv c$ por continuidad de H . Como en la proposición 3.2.7 encontramos un conjunto abierto cuyas trayectorias giran alrededor de γ , H es constante en un conjunto abierto. □

Capítulo 4. Teoremas de estructura local

En este capítulo, demostraremos el hecho intuitivo de que la estructura local de un sistema y su aproximación lineal son la misma. Seguiremos esencialmente [13].

Como ya hemos visto, el comportamiento del sistema $x' = Ax$ está determinado por la parte real de los valores propios de la matriz A . En general, hay dos variedades lineales $E^+(e^A)$ y $E^-(e^A)$ tal que si empezamos en $E^+(e^A)$ (resp. $E^-(e^A)$), entonces la solución $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$).

La variedad lineal $E^+(e^A)$ (resp. $E^-(e^A)$) se llama *variedad estable* (resp. *inestable*) y es

$$E^+(e^A) = \bigoplus_{\operatorname{Re}(\alpha_j) < 0} \operatorname{Ker}(A - \alpha_j)^{a_j} \quad (\text{resp. } E^-(e^A) = \bigoplus_{-\operatorname{Re}(\alpha_j) < 0} \operatorname{Ker}(A - \alpha_j)^{a_j}),$$

donde α_j son valores propios y $a_j \in \mathbb{N}$. Podemos definir de forma similar la *variedad central* $E^0(e^A)$ correspondiente a valores propios con parte real nula.

De los resultados de la sección 2.1 se deduce el siguiente

Teorema 4.0.1. Las variedades estable e inestable lineales $E^\pm = E^\pm(e^A)$ son invariantes bajo el flujo de $x' = Ax$ y todo punto que empiece en E^\pm converge exponencialmente a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. De hecho, tenemos

$$\|e^{tA}x_\pm\| \leq Ce^{\mp t\alpha}\|x_\pm\|, \quad \pm t \geq 0, \quad x_\pm \in E^\pm$$

para cada $\alpha < \min\{|\operatorname{Re}(\alpha_j)| \mid \alpha_j \in \sigma(A), \pm \operatorname{Re}(\alpha_j) < 0\}$, donde $\sigma(A)$ es el espectro de la matriz A (conjunto de sus valores propios), y alguna $C > 0$ que depende de α .

Para uso posterior, introduzcamos también el espacio que converge a 0 con cierta tasa exponencial dada $\alpha > 0$,

$$E^{\pm, \alpha}(e^A) = \{x \in E \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{\pm\alpha t}\|e^{tA}x\| = 0\}.$$

4.1. Variedades estable e inestable

Consideremos el sistema $x' = f(x)$ con $f \in \mathcal{C}^1$. Podemos descomponer la función f , que se anula en $x^* \in M$, como

$$f(x) = A(x - x^*) + g(x),$$

siendo A la matriz Jacobiana de f en x^* y $g(x) = o(\|x - x^*\|)$.

Sea M un conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Definimos el *conjunto estable* (resp. *inestable*) de un punto fijo x^* como el conjunto de todos los puntos que converjan a x^* para $t \rightarrow \infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$), esto es,

$$W^+(x^*) = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, x) - x^*\| = 0\}$$

$$(\text{resp. } W^-(x^*) = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\Phi(t, x) - x^*\| = 0\}).$$

Ambos conjuntos son invariantes bajo el flujo.

Fijamos un entorno $U(x^*)$ de x^* y definamos el conjunto de todos los puntos que convergen a x^* bajo el flujo con cierta tasa exponencial $\alpha > 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ como

$$M^{+,\alpha}(x^*) = \{x \in U(x^*) \mid \gamma_+(x) \subseteq U(x^*) \text{ y } \sup_{t \geq 0} e^{\alpha t} \|\Phi(t, x) - x^*\| < \infty\}$$

$$(\text{resp. } M^{-,\alpha}(x^*) = \{x \in U(x^*) \mid \gamma_-(x) \subseteq U(x^*) \text{ y } \sup_{-t \geq 0} e^{-\alpha t} \|\Phi(t, x) - x^*\| < \infty\}).$$

Ahora,

Definición 4.1.1. La *variedad estable* (resp. *inestable*) local de un punto fijo x^* es el conjunto de todos los puntos que convergen exponencialmente a x^* cuando $t \rightarrow \infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$), es decir,

$$M^+(x^*) = \bigcup_{\alpha > 0} M^{+,\alpha}(x^*) \quad (\text{resp. } M^-(x^*) = \bigcup_{\alpha > 0} M^{-,\alpha}(x^*)).$$

Por construcción, el conjunto es positivamente (resp. negativamente) invariante bajo el flujo.

Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que $x^* = 0$ es un punto fijo hiperbólico. Por el principio de Duhamel (1.2.1), tenemos la ecuación

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}g(x(s))ds$$

ya que $\phi(t)$ también es solución de $x' = Ax + g(\phi(t))$ si lo es de $x' = Ax + g(x)$. A continuación, denotemos por P^\pm las proyecciones a los subespacios estable e inestable $E^\pm(e^A)$. Además, $x_\pm = P^\pm x(0)$ y $g_\pm = P^\pm g(x)$.

Necesitamos una condición en $x(0) = x_+ + x_-$ para que $x(t)$ sea acotado. Si $g(x) = 0$, ésta es $x_- = 0$. En el caso general, vamos a intentar expresar x_- como una función de x_+ : $x_- = h^+(x_+)$. Para ello, proyectemos la parte inestable de la ecuación integral y despejémosla para x_- :

$$x_- = e^{-tA}x_-(t) - \int_0^t e^{-sA}g_-(x(s))ds.$$

Aquí, $x_\pm(t) = P^\pm x(t)$. Si suponemos que $\|x(t)\|$ está acotado para $t \geq 0$, podemos considerar $t \rightarrow \infty$ y tendríamos

$$x_- = - \int_0^\infty e^{-sA}g_-(x(s))ds,$$

donde la integral converge absolutamente ya que el integrando decrece exponencialmente. Sustituyendo,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA}x_+ + \int_0^t e^{(t-s)A}g_+(x(s))ds - \int_t^\infty e^{(t-s)A}g_-(x(s))ds \\ &= e^{tA}x_+ + \int_0^\infty e^{(t-s)A}P(t-s)g(x(s))ds, \end{aligned}$$

$$\text{donde } P(t) := \begin{cases} P^+ & \text{si } t > 0 \\ -P^- & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

En resumen, si los valores propios de A no tienen parte real nula, toda solución acotada es un punto fijo de

$$K(x)(t) := e^{tA}x_+ + \int_0^\infty e^{(t-s)A}P(t-s)g(x(s))ds.$$

Para encontrar una solución de la ecuación anterior, necesitamos lo siguiente:

Teorema 4.1.2 (Hammerstein). Sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ compacto y considérense funciones continuas $\beta : [0, \infty) \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tales que

- 1) β es uniformemente continua y acotada
- 2) existen $\epsilon > 0$ y una función integrable α tal que si $|t| \leq \epsilon$, entonces $\|\kappa(t+s)\| \leq \alpha(s)$
- 3) G es de Lipschitz con constante L tal que $L \int_{-\infty}^\infty \|\kappa(s)\| ds < 1$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, la ecuación

$$\psi(t) := \beta(t, \lambda) + \int_0^\infty \kappa(s-t)G(\psi(s))ds$$

definida sobre las funciones continuas $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene una solución y solo una $\psi = \psi(t, \lambda)$. Además, si β y G son de clase \mathcal{C}^r respecto de λ , entonces $\psi(t, \lambda)$ también lo es y su derivada $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ satisface la siguiente identidad:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \frac{\partial \beta}{\partial \lambda}(t, \lambda) + \int_0^\infty \kappa(s-t)G(\psi(s, \lambda)) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(s, \lambda) ds.$$

Su demostración, basada en la teoría de las aplicaciones contractivas y que no incluimos por falta de espacio, puede consultarse en la sección 9.4 de [13].

Con ayuda de este resultado, probemos el

Teorema 4.1.3. Supóngase que $x' = f(x)$, con $f \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, tiene un punto fijo x^* con matriz Jacobiana correspondiente A . Si $\alpha > 0$ y $A + \alpha I$ no tiene valores propios con parte real nula, hay entornos $U(x^*)$ de x^* y U de 0 y una función $h^{+, \alpha} \in \mathcal{C}^k(E^{+, \alpha} \cap U, E^{-, -\alpha})$ tal que

$$M^{+, \alpha}(x^*) = \{x^* + a + h^{+, \alpha}(a) \mid a \in E^{+, \alpha} \cap U\}.$$

Por lo tanto, es una variedad diferenciable de clase \mathcal{C}^k . Además, $h^{+, \alpha}$ y su matriz Jacobiana se anulan en 0, esto es, $M^{+, \alpha}(x^*)$ es tangente a $E^{+, \alpha}$ en x^* .

Se tiene $M^{+, \beta}(x^*) \subseteq M^{+, \alpha}(x^*)$ para $\alpha \leq \beta$ y si $E^{+, \beta} = E^{+, \alpha}$, entonces

$$M^{+, \beta}(x^*) = M^{+, \alpha}(x^*).$$

Demostración. Suponemos $x^* = 0$ y que ningún valor propio de A tiene parte real nula para poder elegir $\alpha = 0$. Vamos a trabajar en el espacio de Banach de las funciones continuas acotadas, $\mathcal{C}_b([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, dotado con la norma del supremo: sea $x \in \mathcal{C}_b([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, $\|x\| = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|$.

Supongamos $\|x(t)\| \leq \delta$. Como la matriz Jacobiana de g se anula en 0, tenemos

$$\|g(x(t)) - g(y(t))\| \leq \epsilon \|x(t) - y(t)\|,$$

donde ϵ se puede hacer arbitrariamente pequeño eligiendo δ bastante pequeño. Además, tenemos

$$\|e^{(t-s)A}P(t-s)\| \leq Ce^{-\alpha_0|t-s|}$$

para $\alpha_0 < \min\{|\operatorname{Re}(\alpha)| \mid \alpha \in \sigma(A)\}$ por el teorema 4.0.1. Obtenemos así

$$\begin{aligned} \|K(x) - K(y)\| &= \sup_{t \geq 0} \left\| \int_0^\infty e^{(t-s)A}P(t-s)(g(x(s)) - g(y(s)))ds \right\| \\ &\leq C \sup_{t \geq 0} \int_0^\infty e^{-\alpha_0|t-s|} \|g(x(s)) - g(y(s))\| ds \\ &\leq C\epsilon \|x - y\| \sup_{t \geq 0} \int_0^\infty e^{-\alpha_0|t-s|} ds = \frac{2C\epsilon}{\alpha_0} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Aplicando pues el teorema de las aplicaciones contractivas (1.1.2), se puede establecer la existencia de una única solución $\psi(t, x_+)$ para $\epsilon < \frac{\alpha_0}{2C}$. Adicionalmente, el teorema de Hammerstein (4.1.2) nos dice que $\psi(t, x_+)$ es de clase \mathcal{C}^k con respecto a x_+ si f lo es. Se tiene $\psi(t, 0) = 0$. Introduciendo la función $h^+(a) = P^-\psi(0, a)$, obtenemos

$$M^+(0) \cap U = \{a + h^+(a) \mid a \in E^+ \cap U\}$$

para la variedad estable del sistema no lineal en un entorno U de 0.

Por el teorema de Hammerstein (4.1.2), $M^+(0)$ es tangente a E^+ en 0: en efecto, la igualdad $\varphi(t, x_+) = \frac{\partial}{\partial x_+}\psi(t, x_+)$ satisface

$$\varphi(t, x_+) = e^{tA}P^+ + \int_0^\infty e^{(t-s)A}P(t-s) \frac{\partial g}{\partial x}(\psi(s, x_+))\varphi(s, x_+)ds.$$

Evaluando esta ecuación en $(t, x_+) = (0, 0)$, vemos que $\varphi(0, 0) = P^+$, lo cual es equivalente a decir que $M^+(0)$ es tangente a la variedad estable lineal E^+ en 0, esto es,

$$\left. \frac{\partial}{\partial a} h^+(a) \right|_{a=0} = P^- \circ P^+ = 0.$$

Para el caso general, se realiza el cambio de coordenadas $\tilde{x}(t) = e^{\alpha t}x(t)$, transformando A en $\tilde{A} = A + \alpha I$ y $g(x)$ en $\tilde{g}(t, \tilde{x}) = e^{\alpha t}g(e^{-\alpha t}\tilde{x})$. Como \tilde{A} y \tilde{g} verifican las mismas suposiciones y $\sup_{t \geq 0} \|\tilde{x}(t)\| \leq \delta$, concluimos que $\sup_{t \geq 0} \|x(t)\| \leq \delta e^{-\alpha t}$. Se obtiene $M^{+, \alpha}(x^*) = \{x^* + a + h^{+, \alpha}(a) \mid a \in E^{+, \alpha} \cap U\}$ por la unicidad de la solución de la ecuación integral en un entorno suficientemente pequeño de x^* .

Para la última parte, sea $x \in M^{+, \beta}(x^*) \subseteq M^{+, \alpha}(x^*)$. Entonces,

$$x = x^* + a + h^{+, \beta}(a) = x^* + a + h^{+, \alpha}(a)$$

para $a \in E^{+, \alpha} = E^{+, \beta}$ implica $h^{+, \beta}(a) = h^{+, \alpha}(a)$, deduciéndose así el resultado. \square

El caso de $M^{-, \alpha}$ se puede obtener simplemente invirtiendo el tiempo, $t \rightarrow -t$.

Como consecuencia, resulta la existencia de las variedades estable e inestable incluso en el caso no hiperbólico pues $M^+(x^*) = M^{+, \epsilon}(x^*)$ para $\epsilon > 0$ pequeño tal que $E^+ = E^{+, \epsilon}$. Así, queda demostrado lo siguiente:

Teorema 4.1.4 (Variedad estable). Supóngase que $f \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, tiene un punto fijo x^* con matriz Jacobiana correspondiente A . Hay entornos $U(x^*)$ de x^* y U de 0 y funciones $h^\pm \in \mathcal{C}^k(E^\pm \cap U, E^0 \oplus E^\mp)$ tales que

$$M^\pm(x^*) = \{x^* + a + h^\pm(a) \mid a \in E^\pm \cap U\} \text{ (variedades diferenciables } \mathcal{C}^k\text{)}.$$

En x^* , se anulan h^\pm y sus matrices Jacobianas, esto es, $M^\pm(x^*)$ son tangentes a sus respectivos E^\pm en x^* . Además,

$$\|\Phi(t, x) - x^*\| \leq Ce^{\mp t\alpha}, \quad \pm t \geq 0, \quad x \in M^\pm,$$

para cualquier $\alpha < \min\{|Re(\alpha_j)| \mid \alpha_j \in \sigma(A), Re(\alpha_j) \neq 0\}$ y alguna $C > 0$ dependiente de α .

Puede ocurrir que una órbita que empiece en la variedad inestable de un punto fijo x_0 termine en la variedad estable de otro punto fijo x_1 . Una órbita de este tipo recibe el nombre de *órbita heteroclínica* si $x_0 \neq x_1$ y de *órbita homoclínica* si $x_0 = x_1$.

4.2. Equivalencia topológica

Especifiquemos cuando dos sistemas dinámicos son “cualitativamente similares” o equivalentes.

Sean $\phi : S \rightarrow S$ y $\varphi : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ dos sistemas dinámicos.

Definición 4.2.1. Un sistema dinámico se dice que es *topológicamente equivalente* a otro si hay un homeomorfismo $h : S \rightarrow \tilde{S}$ que aplica órbitas del primer sistema en órbitas del segundo, conservando la dirección del tiempo.

Tomemos $S = \tilde{S} = \mathbb{R}^n$ y consideremos dos sistemas topológicamente equivalentes

$$x' = f(x) \text{ e } y' = g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

donde f y g son aplicaciones invertibles diferenciables. Denotemos por ϕ_t y φ_t los flujos correspondientes. Supongamos que $y = h(x)$ es una aplicación invertible $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que es diferenciable junto con su inversa, es decir, h es un difeomorfismo, y tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = M^{-1}(x)g(h(x)), \text{ donde } M(x) = \frac{dh(x)}{dx}$$

es la matriz Jacobiana de $h(x)$ evaluada en el punto x . Entonces el sistema $x' = f(x)$ es topológicamente equivalente a $y' = g(y)$. De hecho, el sistema $y' = g(y)$ se obtiene de $x' = f(x)$ por el cambio de coordenadas diferenciable $y = h(x)$. Luego h aplica las soluciones de $x' = f(x)$ en las de $y' = g(y)$, $h(\phi_t(x)) = \varphi_t(h(x))$.

Así,

Definición 4.2.2. Dos sistemas $x' = f(x)$ e $y' = g(y)$ que satisfagan

$$f(x) = M^{-1}(x)g(h(x))$$

para algún difeomorfismo h se dice que tienen *equivalencia diferenciable*.

Dos sistemas con equivalencia diferenciable son prácticamente idénticos. Por ejemplo, los valores propios de los puntos de equilibrio correspondientes son los mismos. En efecto, sean x^* e $y^* = h(x^*)$ tales puntos estacionarios y denotemos por $A(x^*)$ y $B(y^*)$ las correspondientes matrices Jacobianas. Derivando $f(x) = M^{-1}(x)g(h(x))$, resulta

$$A(x^*) = M^{-1}(x^*)B(y^*)M(x^*).$$

Por lo tanto, los polinomios característicos para las matrices $A(x^*)$ y $B(y^*)$ coinciden. Deducimos pues que dos sistemas con equivalencia diferenciable son topológicamente equivalentes, pero no al revés. Como la equivalencia diferenciable es muy restrictiva, de aquí en adelante, nos vamos a centrar en la equivalencia topológica ya que este tipo de equivalencia engloba al otro y lo que nos interesa es que dos sistemas tengan comportamiento similar.

Observación 4.2.3. Recordando el teorema 1.1.8, se puede decir que toda ecuación diferenciable \mathcal{C}^1 es topológicamente equivalente a un sistema dinámico (el homeomorfismo en cuestión es la identidad y solo se reparametrizan las soluciones).

De hecho,

Definición 4.2.4. Se dice que un sistema dinámico es *topológicamente equivalente localmente* cerca de un punto singular x^* a otro cerca de un punto estacionario y^* si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que

- 1) está definido en un entorno pequeño $U \subset \mathbb{R}^n$ de x^*
- 2) satisface $y^* = h(x^*)$
- 3) aplica órbitas del primer sistema en U en órbitas del segundo en $V = h(U)$, preservando la dirección del tiempo.

Si consideramos dos sistemas dinámicos dependientes de parámetros

$$x' = f(x, \alpha) \text{ e } y' = f(x, \beta), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^m,$$

con parte derecha diferenciable y el mismo número de variables y parámetros, entonces se modifica la definición anterior y queda

Definición 4.2.5. Los sistemas $x' = f(x, \alpha)$ e $y' = f(x, \beta)$ son topológicamente equivalentes localmente cerca del origen si existe una aplicación, $(x, \alpha) \mapsto (h_\alpha(x), p(\alpha))$, definida en un pequeño entorno de $(x, \alpha) = (0, 0)$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y tal que

- 1) $p : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo definido en un entorno pequeño de $\alpha = 0$, $p(0) = 0$
- 2) $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo parámetro dependiente definido en un pequeño entorno U_α de $x = 0$, $h_0 = 0$ y que aplica órbitas del primer sistema en U_α en órbitas del segundo en $h_\alpha(U_\alpha)$, manteniendo la dirección del tiempo.

Observación 4.2.6. La definición se puede extender a cualquier otro punto de equilibrio mediante una traslación.

4.3. El Teorema de Hartman-Grobman

El objetivo de esta sección es demostrar que las órbitas cercanas a un punto fijo hiperbólico son versiones localmente deformadas de forma continua de sus aproximaciones lineales, es decir, queremos probar que son topológicamente equivalentes localmente.

Si suponemos que una matriz A no tiene valores propios en la circunferencia unidad, entonces podemos usar $\mathbb{R}^n = E^-(A) \oplus E^+(A)$ para tener partes contractiva y expansiva, $A = A_- \oplus A_+$, donde $A_{\pm} = A|_{E^{\pm}(A)}$. Por construcción, todos los valores propios de A_+ están en el interior del círculo unidad y los de A_- fuera.

Lema 4.3.1. Supóngase que A es una matriz invertible sin valores propios en la circunferencia unidad y elíjase una norma tal que $\alpha = \max(\|(A_-)^{-1}\|, \|A_+\|) < 1$ (se pondrá $\|(A_-)^{-1}\| = 0$ si no hay ningún valor propio en el exterior del círculo unidad). Entonces, para toda g acotada que satisfaga

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \epsilon \|x - y\|, \quad \epsilon < \frac{1 - \alpha}{2},$$

hay una única aplicación continua $\varphi(x) = x + h(x)$ con h acotada tal que

$$\varphi \circ A = f \circ \varphi, \quad f = A + g.$$

Si f es invertible, entonces φ es un homeomorfismo. Además, si $g(0) = 0$, entonces se tiene $\varphi(0) = 0$.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que A tiene valores propios tanto dentro como fuera del círculo unidad. Entonces, $\varphi \circ A = f \circ \varphi$

$$\Downarrow$$

$$Ax + h(A(x)) = \varphi(Ax) = (A + g)(\varphi(x)) = (A + g)(x + h(x)) = Ah(x) + Ax + g(x + h(x))$$

$$\Downarrow$$

$$h(A(x)) - Ah(x) = g(x + h(x)).$$

Estudiemos esta ecuación en el espacio de Banach $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con la norma del supremo¹. El operador lineal $U : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $h \mapsto Uh : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $x \mapsto h(Ax)$, es decir, dado por $(Uh)(x) = h(Ax)$, conserva la norma y es invertible ya que A lo es. También podemos considerar A como $A : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dada por $(Ah)(x) = Ah(x)$. Introduzcamos $L = U - A$ y escribamos $h(Ax) - Ah(x) = g(x + h(x))$ como

$$Lh(x) = g(x + h(x)).$$

Para obtener un ecuación de punto fijo, debemos invertir L . Poniendo

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, E^-(A)) \oplus \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, E^+(A)),$$

¹[13] consideraba únicamente el espacio de Banach de las funciones continuas, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, espacio en el que no se puede definir la norma del supremo. El autor confirmó que se trataba de una errata por lo que sustituimos $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ por $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

resultan $A = A_- \oplus A_+$, $U = U_- \oplus U_+$ y $L = L_- \oplus L_+$ (A y U dejan invariantes estos espacios). Tomemos $L_- = -A_-(I - (A_-)^{-1}U_-)$. Vemos que $(L_-)^{-1} = -(I - (A_-)^{-1}U_-)(A_-)^{-1}$, donde $I - (A_-)^{-1}U_-$ es invertible y su inversa viene dada por

$$(I - (A_-)^{-1}U_-)^{-1} = \frac{1}{I - (A_-)^{-1}U_-} = I + (A_-)^{-1}U_- + ((A_-)^{-1}U_-)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} ((A_-)^{-1}U_-)^n$$

pues $\|(A_-)^{-1}U_-\| \leq \alpha$. Ahora,

$$\begin{aligned} \|I + (A_-)^{-1}U_- + ((A_-)^{-1}U_-)^2 + \dots\| &\leq 1 + \|(A_-)^{-1}U_-\| + \|(A_-)^{-1}U_-\|^2 + \dots \\ &\leq 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots = \frac{1}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Luego

$$\|(L_-)^{-1}\| \leq \|(I - (A_-)^{-1}U_-)^{-1}\| \|(A_-)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \alpha} \alpha < \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Análogamente, $\|(L_+)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \alpha}$. Resumiendo, existe $L^{-1} = (U_- - A_-)^{-1} \oplus (U_+ - A_+)^{-1}$ y $\|L^{-1}\| < \frac{2}{1 - \alpha}$.

Queda resolver la ecuación de punto fijo

$$h(x) = L^{-1}g(x + h(x)) = Th.$$

¿Es T contractiva?

Como

$$\begin{aligned} \|Th_1(x) - Th_2(x)\| &= \|L^{-1}g(x + h_1(x)) - L^{-1}g(x + h_2(x))\| \\ &\leq \frac{2}{1 - \alpha} \|g(x + h_1(x)) - g(x + h_2(x))\| \\ &\stackrel{\text{por hipótesis}}{\leq} \frac{2}{1 - \alpha} \epsilon \|h_1(x) - h_2(x)\| \leq \frac{2\epsilon}{1 - \alpha} \|h_1 - h_2\|, \end{aligned}$$

el teorema de las aplicaciones contractivas (1.1.2) garantiza la existencia de una única solución.

Supongamos ahora que $f = A + g$ es invertible. Existe $k = k(x)$ tal que hay una aplicación $\theta(x) = x + k(x)$ que cumple $A \circ \theta = \theta \circ f$. De hecho, definiendo M como L , pero con $V(k)(x) = k(f(x))$ en vez de U , vemos que $A \circ \theta = \theta \circ f$ es equivalente a $M(k)(x) = -g(x)$. El mismo argumento que demuestra que L es invertible prueba que M lo es. Por lo tanto,

$$k(x) = -M^{-1}(g)(x).$$

Luego $A \circ \theta \circ \varphi = \theta \circ f \circ \varphi = \theta \circ \varphi \circ A$ por lo que $\theta \circ \varphi = I$ debido a la unicidad del resultado (en el caso $g \equiv 0 \Rightarrow f = A$). De modo similar, $f \circ \varphi \circ \theta = \varphi \circ \theta \circ f$ implica que $\varphi \circ \theta = I + m$, donde m es una solución de $Mm(x) = g(x) - g(x + m(x))$. Usando estimaciones para la inversa de M y para g , obtenemos $m \equiv 0$ por unicidad y, por tanto, φ es un homeomorfismo. En otras palabras, φ es un homeomorfismo porque $\theta = \varphi^{-1}$ es continua.

Si, además, $g(0) = 0$, entonces

$$\varphi \circ A = f \circ \varphi \Rightarrow A \circ \varphi^{-1}(0) = \varphi^{-1} \circ f(0) = \varphi^{-1}(0)$$

ya que $f(0) = A0 + g(0) = 0$. Sin embargo, esta ecuación solo tiene como solución a $\varphi^{-1}(0) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$. \square

Corolario 4.3.2. Sea A como en lema anterior y f arbitraria. Si se tiene un homeomorfismo $\varphi(x) = x + h(x)$ con h acotada tal que

$$\varphi \circ A = f \circ \varphi,$$

entonces φ es única.

Demostración. Supongamos que hay dos de estas aplicaciones, φ_1 y φ_2 , con inversas φ_j^{-1} , $j = 1, 2$, del mismo tipo. Entonces $f = \varphi_1 A \varphi_1^{-1} = \varphi_2 A \varphi_2^{-1}$ implica que $A \varphi_1^{-1} \varphi_2 = \varphi_1^{-1} \varphi_2 A$. Esto prueba que $\varphi_1^{-1} \varphi_2 = I$ por el caso en el que $g \equiv 0$ del lema previo. \square

Estamos ya en situación de demostrar

Teorema 4.3.3 (Teorema de Hartman-Grobman). Supóngase que f es un campo vectorial diferenciable en el que 0 sea punto fijo hiperbólico. Denótese por $\Phi(t, x) = \Phi_t(x)$ y $A = d_0 f$ el correspondiente grupo uniparamétrico y la matriz Jacobiana de f en 0 , respectivamente. Entonces hay un homeomorfismo $\varphi(x) = x + h(x)$ con h acotada tal que

$$\varphi \circ e^{tA} = \Phi_t \circ \varphi$$

en un entorno suficientemente pequeño de 0 .

Demostración. Definamos

$$\Pi(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, x).$$

Obtenemos

$$\Pi'(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(t, x)) \Pi(t, x), \quad \Pi(0, x) = I,$$

de

$$\Phi'(t, x) = f(\Phi(t, x)), \quad \Phi(0, x) = x.$$

Poniendo $x = 0$,

$$\Pi(t, 0) = e^{At}.$$

Luego

$$\Phi_1(x) = e^A x + G(x),$$

donde se verifica $\|G(x) - G(y)\| \leq \epsilon \|x - y\|$, $\epsilon < \frac{1-\alpha}{2}$ al menos cuando estamos bastante cerca del punto fijo. Modifiquemos f para asegurar que esto se cumple siempre.

Sea $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función meseta diferenciable tal que $\phi(x) = 0$ para $0 \leq x \leq 1$ y $\phi(x) = 1$ para $x \geq 2$. Podemos considerar el problema global con $f = A$ para $\|x\| > 2\delta$, reemplazando $f(x) = Ax + g(x)$ por la función $\tilde{f}(x) = Ax + (1 - \phi(\|x\|/\delta))g(x) = Ax + \tilde{g}(x)$. Probemos que $z(1, x)$, definido por

$$\Pi(t, x) = e^{tA} + z(t, x),$$

se puede hacer arbitrariamente pequeño eligiendo δ pequeño. Sustituyendo ahora en $\Pi'(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(t, x)) \Pi(t, x)$, resulta

$$Ae^{tA} + z'(t, x) = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\Phi(t, x)) \right) (e^{tA} + z(t, x)).$$

Integrando entre 0 y t , obtenemos

$$\begin{aligned} z(t, x) - z(0, x) &= \int_0^t \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\Phi(s, x))e^{sA} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\Phi(s, x))z(s, x) - Ae^{sA} \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(\Phi(s, x))e^{sA} ds + \int_0^t \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\Phi(s, x))z(s, x) ds, \end{aligned}$$

donde $z(0, x) = 0$. Si se elige $\delta > 0$ pequeño, entonces $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}$ se puede hacer arbitrariamente pequeño y la afirmación resulta del lema de Gronwall (1.1.9).

Por el lema 4.3.1, hay un φ tal que se satisface $\varphi \circ e^{tA} = \Phi_t \circ \varphi$ para, al menos, $t = 1$. Además, la aplicación $\varphi_s = \Phi_s \circ \varphi \circ e^{-sA}$ también verifica $\varphi \circ e^{tA} = \Phi_t \circ \varphi$ para este valor de t : teniendo en cuenta la propiedad conmutativa de los flujos,

$$\varphi_s \circ e^A = \Phi_s \circ \varphi \circ e^{-sA} \circ e^A = \Phi_s \circ \varphi \circ e^A \circ e^{-sA} = \Phi_s \circ \Phi_1 \circ \varphi \circ e^{-sA} = \Phi_1 \circ \Phi_s \circ \varphi \circ e^{-sA} = \Phi_1 \circ \varphi_s.$$

Por lo tanto, si podemos demostrar que $\varphi_t(x) = x + h_t(x)$ con h_t acotada, entonces, por el corolario 4.3.2, $\varphi = \varphi_t$, que es precisamente $\varphi \circ e^{tA} = \Phi_t \circ \varphi$. Ahora, tomando $\Phi_t = e^{tA} + \tilde{G}_t$, donde \tilde{G}_t es acotada, observamos que

$$h_t = \Phi_t \circ \varphi \circ e^{-tA} - I = e^{tA} \circ h \circ e^{-tA} + \tilde{G}_t \circ \varphi \circ e^{-tA},$$

siendo $h = \varphi - I$ y estando acotados ambos términos. □

Capítulo 5. Bifurcaciones

La teoría de la bifurcación estudia los posibles cambios en la estructura de las órbitas de una ecuación diferencial cuando se modifican ciertos parámetros de los que depende (continuamente). Esta vez, tomamos la información tanto de [2] como de [6].

Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = f(x, \lambda),$$

donde λ es un vector de parámetros, y las ecuaciones de equilibrio $f(x, \lambda) = 0$. ¿Cómo depende el tipo de equilibrio de los parámetros?

5.1. Bifurcación de nodo-silla

La ecuación diferencial cuadrática

$$x' = x^2 + \lambda = F(x, \lambda),$$

donde λ es un parámetro real, es una perturbación de $x' = x^2$. Estudiémosla según los valores que puede tomar λ .

- $\lambda < 0$: el sistema tiene dos puntos de equilibrio.
- $\lambda = 0$: el origen es el único punto de equilibrio y es degenerado.
- $\lambda > 0$: no hay puntos de equilibrio.

Si λ varía, siempre y cuando sea negativo, el número y la dirección de las órbitas permanecen iguales; el único cambio es el de la localización de los puntos de equilibrio. De forma similar, para todo λ positivo, hay una sola órbita y su dirección siempre es la misma. Sin embargo, para $\lambda = 0$, independientemente de lo poco que varíe una cantidad λ , el número de órbitas cambia: hay dos puntos de equilibrio para cualquier $\lambda < 0$ y ninguno para cualquier $\lambda > 0$.

Para una ecuación diferencial escalar $x' = f(x)$, los puntos de equilibrio y el signo de la función $f(x)$ entre ellos determinan el número de órbitas y la dirección del flujo en éstas. Nos referiremos a lo anterior como la *estructura de órbita* de la ecuación diferencial o la *estructura cualitativa del flujo*.

En un valor de parámetro dado, una ecuación diferencial se dice que tiene *estructura de órbita estable* si la estructura cualitativa del grupo uniparamétrico no varía para cambios suficientemente pequeños del parámetro. Un valor de parámetro para el que el flujo no tiene estructura de órbita estable se llama *valor de bifurcación* y se dice que la ecuación está en un punto de bifurcación. Por lo tanto, $x' = x^2 + \lambda$ tiene estructura de órbita estable para cualquier $\lambda \neq 0$, pero se encuentra en un punto de bifurcación para $\lambda = 0$. La bifurcación a la que se somete esta ecuación se llama *bifurcación de nodo-silla*.

Se puede considerar el sistema $x' = \lambda - x^2$ en la misma manera. Su análisis revela la aparición de dos puntos de equilibrio para $\lambda > 0$.

Lema 5.1.1. El sistema

$$x' = \lambda + x^2 + o(x^3)$$

es topológicamente equivalente localmente cerca del origen al sistema $x' = \lambda + x^2$.

Demostración. Nos basamos en el hecho de que para sistemas escalares, un homeomorfismo que aplica puntos de equilibrio en puntos de equilibrio aplicará también sus órbitas entre sí.

Empecemos analizando los puntos singulares. Introduzcamos una variable escalar y y escribamos el primer sistema como

$$y' = F(y, \lambda) = \lambda + y^2 + \psi(y, \lambda),$$

donde $\psi = o(y^3)$ es una función diferenciable de (y, λ) cerca de $(0, 0)$. Considérese el conjunto de puntos estacionarios de $y' = F(y, \lambda) = \lambda + y^2 + \psi(y, \lambda)$ cerca del origen $(0, 0)$, $M = \{(y, \lambda) : F(y, \lambda) = \lambda + y^2 + \psi(y, \lambda) = 0\}$. La curva M pasa por el origen $(F(0, 0) = 0)$. Por el teorema de las funciones implícitas y como $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, 0) = 1$, se puede parametrizar localmente por y del siguiente modo:

$$M = \{(y, \lambda) \mid \lambda = g(y)\},$$

donde g es diferenciable y está definida para $|y|$ pequeño. Adicionalmente, suponemos que $g(y) = -y^2 + o(y^3)$. Luego, para cualquier $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, hay dos puntos de equilibrio de $y' = \lambda + y^2 + \psi(y, \lambda)$ cerca del origen, $y_1(\lambda)$ e $y_2(\lambda)$, que están cerca de los puntos de equilibrio de $x' = \lambda + x^2$, es decir, $x_1(\lambda) = -\sqrt{-\lambda}$ y $x_2(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ para el mismo valor de parámetro.

Pasemos ahora a la construcción del homeomorfismo. Para $|\lambda|$ pequeño, construyamos una aplicación parámetro dependiente $y = h_\lambda(x)$ como sigue. Para $\lambda \geq 0$, tomemos la aplicación identidad $h_\lambda(x) = x$. Para $\lambda < 0$, cojamos la transformación lineal

$$h_\lambda(x) = a(\lambda) + b(\lambda)x,$$

donde los coeficientes a y b están determinados de forma única por las condiciones

$$h_\lambda(x_j(\lambda)) = y_j(\lambda), \quad j = 1, 2.$$

La aplicación construida $h_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo que aplica órbitas de la ecuación diferencial $x' = \lambda + x^2$ cerca del origen en las órbitas correspondientes de

$$y' = \lambda + y^2 + \psi(y, \lambda),$$

conservando la dirección del tiempo. Como esta propiedad es la equivalencia topológica local de sistemas parámetro dependientes, concluimos. \square

Definición 5.1.2. La *codimensión* de una bifurcación en el sistema $x' = f(x, \lambda)$ es el número de condiciones independientes que determinan ésta.

A veces es posible construir un sistema polinomial en ξ_i ,

$$\xi' = g(\xi, \beta; \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma \in \mathbb{R}^l,$$

el cual tiene en $\beta = 0$ un punto de equilibrio $\xi = 0$ que satisface k condiciones que determinan una bifurcación de codimensión k de este punto de equilibrio y donde σ es un vector de los coeficientes σ_i , $i = 1, \dots, l$, de los polinomios involucrados. Junto a este sistema, consideremos $x' = f(x, \alpha)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^k$, que tiene un punto de equilibrio en $\alpha = 0$.

Definición 5.1.3. El sistema $\xi' = g(\xi, \beta; \sigma)$ se llama *forma normal topológica* para la bifurcación si cualquier sistema parámetro dependiente $x' = f(x, \alpha)$ con punto de equilibrio $x = 0$ que cumpla las mismas condiciones de bifurcación en $\alpha = 0$ es topológicamente equivalente localmente cerca del origen al primer sistema para ciertos valores de los coeficientes σ_i .

Teorema 5.1.4. Supóngase que el sistema de dimensión uno

$$x' = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

con f diferenciable, tiene en $\lambda = 0$ un punto de equilibrio $x = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$
- 2) $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0$

Entonces hay cambios de coordenadas y parámetros que transforman el sistema en

$$z' = \beta \pm z^2 + o(z^3).$$

Demostración. Realicemos un cambio de coordenadas lineal introduciendo una nueva variable ξ : $\xi = x + \delta$, donde $\delta = \delta(\lambda)$ es una función a definir. Así, $x = \xi - \delta$. Sustituyendo en $x' = f(x, \lambda)$, resulta

$$\begin{aligned} \xi' &= x' = f_0(\lambda) + f_1(\lambda)(\xi - \delta) + f_2(\lambda)(\xi - \delta)^2 + \dots \\ &= f_0(\lambda) - f_1(\lambda)\delta + f_2(\lambda)\delta^2 + o(\delta^3) + (f_1(\lambda) - 2f_2(\lambda)\delta + o(\delta^2))\xi + (f_2(\lambda) + o(\delta))\xi^2 \\ &\quad + o(\xi^3). \end{aligned}$$

Supongamos que $f_2(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$. Por el teorema de las funciones implícitas, hay una función diferenciable $\delta(\lambda)$ que elimina el término lineal de esta ecuación para todo $|\lambda|$ suficientemente pequeño: $F(\lambda, \delta) \equiv f_1(\lambda) - 2f_2(\lambda)\delta + \delta^2\psi(\lambda, \delta) = 0$, siendo ψ alguna función diferenciable. Tenemos

$$F(0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \delta} \right|_{(0,0)} = -2f_2(0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_{(0,0)} = f_1'(0),$$

que implica la existencia (local) y la unicidad de una función diferenciable $\delta = \delta(\lambda)$ tal que $\delta(0) = 0$ y $F(\lambda, \delta(\lambda)) \equiv 0$. Resulta también que $\delta(\lambda) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\lambda + o(\lambda^2)$. Ahora, la ecuación para ξ no contiene términos lineales: $\xi' = f_0'(0)\lambda + o(\lambda^2) + (f_2(0) + o(\lambda))\xi^2 + o(\xi^3)$. Consideremos como un nuevo parámetro $\mu = \mu(\lambda)$ el término constante (independiente de ξ) de la expresión anterior: $\mu = f_0'(0)\lambda + \lambda^2\phi(\lambda)$, donde ϕ es alguna función diferenciable. Tenemos lo siguiente:

- 1) $\mu(0) = 0$
- 2) $\mu'(0) = f_0'(0) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0)$.

Si suponemos que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) \neq 0$, entonces el teorema de la función inversa implica la existencia y unicidad locales de una función inversa diferenciable $\lambda = \lambda(\mu)$ con $\lambda(0) = 0$. Por lo tanto, la ecuación $\xi' = f'_0(0)\lambda + o(\lambda^2) + (f_2(0) + o(\lambda))\xi^2 + o(\xi^3)$ es

$$\xi' = \mu + b(\mu)\xi^2 + o(\xi^3),$$

donde $b(\mu)$ es una función diferenciable con $b(0) = f_2(0) \neq 0$.

Sean $z = |b(\mu)|\xi$ y $\beta = |b(\mu)|\mu$. Obtenemos

$$z' = \beta + sz^2 + o(z^3),$$

donde $s = \text{sign}b(0) = \pm 1$. □

Usando el lema 5.1.1, podemos eliminar los términos $o(z^3)$. Llegamos así al siguiente resultado:

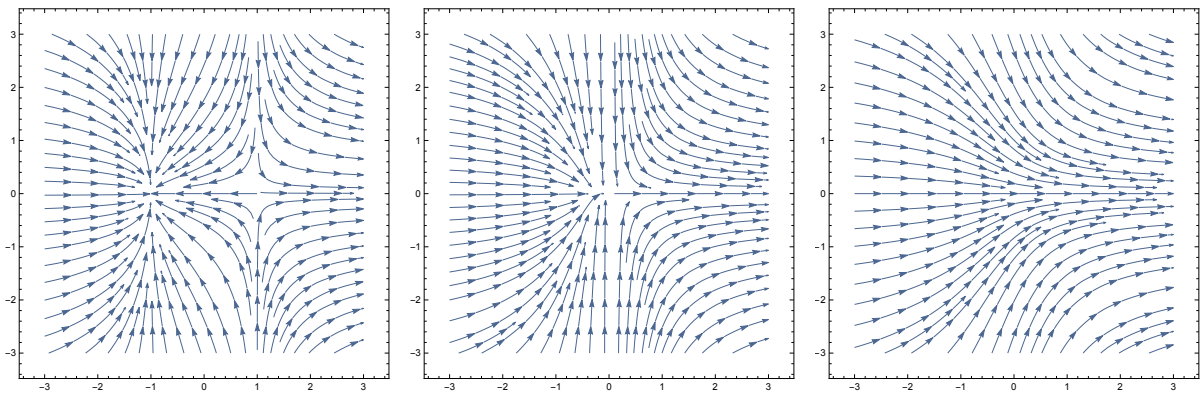
Teorema 5.1.5 (Forma normal topológica para la bifurcación de nodo-silla). Cualquier sistema dependiente de un parámetro escalar $x' = f(x, \lambda)$ que tenga el punto de equilibrio $x = 0$ con $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ en $\lambda = 0$ es topológicamente equivalente localmente cerca del origen a una de las siguientes formas normales:

$$z' = \beta \pm z^2.$$

Consideremos ahora el sistema

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda + x_1^2 \\ x'_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

Para $\lambda < 0$, hay dos puntos de equilibrio: uno de ellos es una silla y el otro un nodo. En $\lambda = 0$, los dos puntos de equilibrio se unen en uno. Y, para $\lambda > 0$, el punto de equilibrio desaparece.



De hecho, hay varios sistemas dinámicos que son equivalentes al anterior. Consideremos un sistema $x' = f(x, \lambda)$, con $x \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que, en $\lambda = 0$, tiene el punto de equilibrio en $x = 0$ con un valor propio $\rho_1 = 0$ y otro $\rho_2 < 0$. Entonces, $x' = f(x, \lambda)$ es topológicamente equivalente localmente al sistema

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda + \sigma x_1^2 \\ x'_2 &= -x_2, \end{aligned}$$

donde $\sigma = \pm 1$.

5.2. Algunas bifurcaciones en dimensión uno

Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = \lambda x + x^2 = F(x, \lambda).$$

El origen es un punto de equilibrio para todo valor de λ . Para $\lambda < 0$, el origen es asintóticamente estable y hay otro punto de equilibrio, digamos $x = -c$, que es inestable. El caso $\lambda = 0$ es un valor de bifurcación en el que dos puntos estacionarios se fusionan en el origen, el cual es un punto de equilibrio inestable degenerado. Para $\lambda > 0$, el origen es inestable y hay otro punto de equilibrio, $x = -c$, que es estable. La bifurcación a la que $x' = \lambda x + x^2$ se somete se llama *bifurcación transcritical*.

Usemos ahora la ecuación diferencial cúbica

$$x' = -x^3 + x + \lambda = F(x, \lambda).$$

Para $\lambda = 0$, el sistema es $x' = -x^3 + x$. Tiene tres puntos de equilibrio: $-1, 0, 1$; y estructura de órbita estable. El flujo continúa teniendo estructura de órbita estable para valores pequeños del parámetro, $-\lambda_0 < \lambda < \lambda_0$, donde $-\lambda_0 = -2/3\sqrt{3}$ y λ_0 son el mínimo y el máximo locales de $F(x, 0)$. Para $\lambda = -\lambda_0$ ó $\lambda = \lambda_0$, la ecuación está en un punto de bifurcación. El tipo de bifurcación al que se somete $x' = -x^3 + x + \lambda$ se llama *histéresis*.

Pasemos a considerar la *bifurcación de cúspide*. La ecuación diferencial es

$$x' = -x^3 + cx + d = F(x, c, d),$$

donde c y d son parámetros reales. En los puntos de bifurcación, este tipo de ecuación diferencial ha de tener un punto de equilibrio múltiple, es decir, $F(x, c, d) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial x}(x, c, d) = 0$. Esto es, tenemos

$$-x^3 + cx + d = 0, \quad -3x^2 + c = 0.$$

Eliminando x , resulta una cúspide

$$4c^3 = 27d^2.$$

Mediante un argumento análogo al realizado en 5.1.4, se prueba

Lema 5.2.1. Supóngase que un sistema de una dimensión

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

con f diferenciable, tiene en $\alpha = 0$ un punto de equilibrio $x = 0$ y se cumplen las condiciones de la bifurcación de cúspide

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f / \partial x^2(0, 0)}{2} = 0.$$

Supongamos que se satisface también

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha_2} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha_1} \neq 0,$$

en $(0, 0)$. Entonces hay cambios de coordenadas y parámetros que transforman el sistema en

$$\eta' = \beta_1 + \beta_2 \eta \pm \eta^3 + o(\eta^4).$$

El sistema con los términos $o(\eta^4)$ truncados se llama *forma normal aproximada* para la bifurcación de cúspide, mientras que

$$\eta' = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3$$

es su forma normal topológica. Teniendo en cuenta el lema 5.1.1, la primera es topológicamente equivalente localmente cerca del origen a la segunda.

Finalmente,

Teorema 5.2.2 (Forma normal topológica para la bifurcación de cúspide). Cualquier sistema dependiente de dos parámetros escalar $x' = f(x, \alpha)$ la cual tiene un punto de equilibrio $x = 0$ en $\alpha = 0$ que exhibe que la bifurcación de cúspide es topológicamente equivalente localmente cerca del origen a una de las formas normales $\eta' = \beta_1 + \beta_2\eta \pm \eta^3$.

5.3. Bifurcación tridente

Consideremos

$$x' = -x^3 + \lambda x = F(x, \lambda).$$

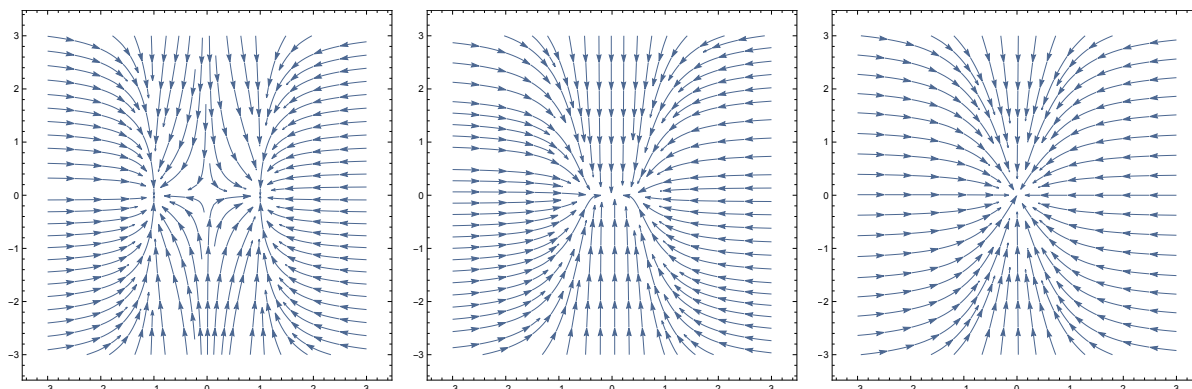
Para $\lambda = 0$, el sistema es $x' = -x^3$. Para todo $\lambda < 0$, esta ecuación tiene estructura de órbita estable. Para $\lambda = 0$, los puntos de equilibrio se reúnen en el origen y el sistema se encuentra en un punto de bifurcación. Para todo λ positivo, la ecuación tiene tres puntos de equilibrio y estructura de órbita estable de nuevo. La bifurcación a la que se somete $x' = -x^3 + \lambda x$ se llama *bifurcación tridente*.

En este caso, la bifurcación tridente es supercrítica, es decir, los puntos de equilibrio adicionales que aparecen en el valor de bifurcación ocurren para los valores del parámetro en los que el punto de equilibrio es inestable. Cuando los puntos de equilibrio adicionales ocurren para valores del parámetro en los que el punto de equilibrio original es estable, la bifurcación se llama subcrítica.

Consideremos ahora

$$\begin{aligned} x_1' &= -\lambda x_1 - x_1^3 \\ x_2' &= -x_2 \end{aligned}$$

La dinámica de bifurcación del sistema se decide en la primera ecuación, la cual es equivalente a la que acabamos de analizar.

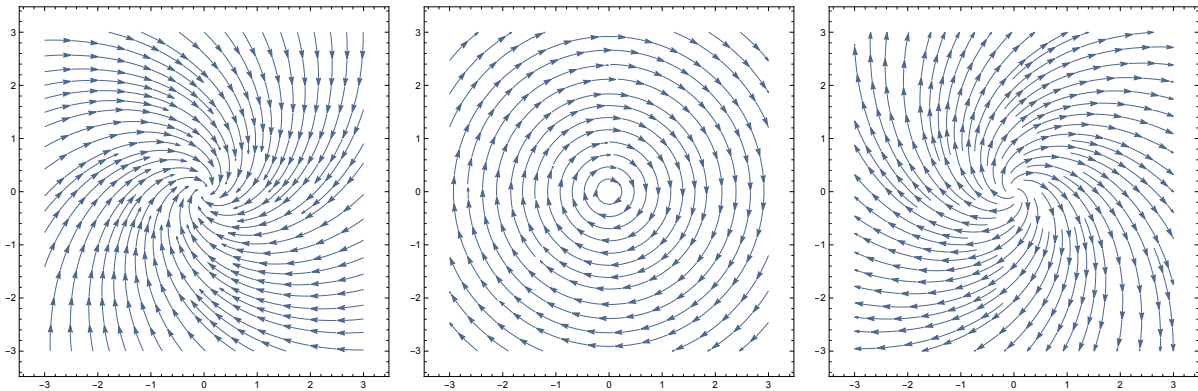


5.4. Bifurcaciones vertical y homoclínica o de bucle-silla

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}x_1' &= \lambda x_1 + x_2 \\x_2' &= -x_1 + \lambda x_2,\end{aligned}$$

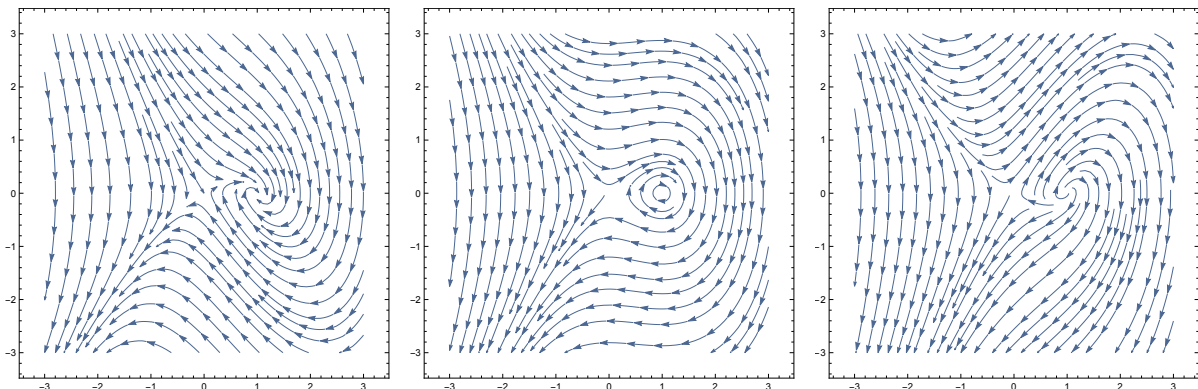
donde λ es un parámetro. Si $\lambda < 0$, todas las soluciones giran en espiral en el sentido de las agujas del reloj hacia el origen cuando t aumenta. Para $\lambda = 0$, todas las soluciones son periódicas, por lo que el origen es un centro (caso 4 de la proposición 1.2.1 cuando $a = 0$ y $b = t$). Como en este valor del parámetro aparecen órbitas periódicas, consideramos a $\lambda = 0$ un punto de bifurcación. Para $\lambda > 0$, toda solución sale en espiral en el sentido de las agujas del reloj sin límite.



Por otro lado, consideremos ahora el sistema que depende de un parámetro real

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= x_1 + \lambda x_2 - x_1^2.\end{aligned}$$

Para $\lambda = 0$, $H(x_1, x_2) = 1/2(x_1^2 - x_2^2) - x_1^3/3$ es una integral primera de este sistema. El punto de equilibrio en $(1, 0)$ es un centro localmente rodeado de órbitas periódicas concéntricas. El punto de equilibrio en el origen es una silla localmente. Sin embargo, globalmente, una de las órbitas que emana del origen vuelve a éste después de rodear el otro punto de equilibrio. El conjunto $H(x_1, x_2) = 0$ contiene al punto de equilibrio y la órbita cuyos conjuntos α - y ω -límite están en el origen. Tales órbitas son homoclínicas. Cuando $\lambda \neq 0$, el centro es destruido, pero el punto de silla se mantiene. Se rompe el bucle que consiste en la órbita homoclínica y el punto de equilibrio en el origen.



5.5. Bifurcación de Hopf: Teorema de Poincaré-Andronov-Hopf

Consideremos

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 + x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2) \\x_2' &= -x_1 + x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2),\end{aligned}$$

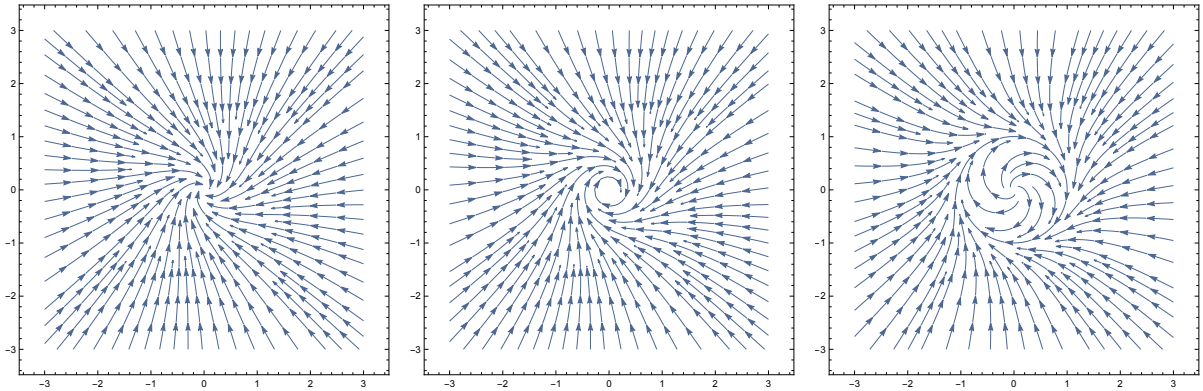
donde λ es un parámetro.

En coordenadas polares, el sistema es

$$\begin{aligned}r' &= r(\lambda - r^2) \\ \theta' &= -1.\end{aligned}$$

Para $\lambda \leq 0$, toda solución gira en espiral en el sentido de las agujas del reloj hacia el origen cuando t aumenta. Cuando $\lambda > 0$, el origen es inestable y aparece un órbita periódica de radio $\bar{r} = \sqrt{\lambda}$. Además, todas las órbitas, excepto el origen, giran en espiral sobre esta órbita periódica.

Al nacimiento o muerte de una órbita periódica por un cambio en la estabilidad de un punto de equilibrio se le conoce como la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf.



Consideremos ahora una dinámica de dimensión 2 que incluye un parámetro λ que puede variar

$$x_j'(t) = f_j(x_1, x_2, \lambda), \quad j = 1, 2.$$

Para cada λ , supóngase que hay un punto de equilibrio aislado $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ que depende de la elección de λ . Denotamos esta dependencia por $x^*(\lambda)$. El sistema linealizado tiene una matriz Jacobiana $A_{2 \times 2}$ que depende de λ :

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

evaluada en $x = x^*$. Los dos valores propios vienen dados por $\rho_i(\lambda)$, $i = 1, 2$. Suponemos que, para algún rango adecuado de valores de λ , los valores propios son diferenciables en λ y complejos: $\rho_{1,2} = \alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$.

El siguiente resultado en \mathbb{R}^2 garantiza la existencia de ciclos límite.

Teorema 5.5.1 (Teorema de bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf). Sea

$$x' = A(\lambda)x + F(\lambda, x)$$

un campo vectorial de clase \mathcal{C}^k , $k \geq 3$, dependiente de un parámetro escalar λ tal que $F(\lambda, 0) = 0$ y $\frac{dF}{dx}(\lambda, 0) = 0$ para todo $|\lambda|$ suficientemente pequeño. Supóngase que, en el origen, la parte lineal $A(\lambda)$ tiene valores propios $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ con $\alpha(0) = 0$ y $\beta(0) \neq 0$ y que, además, éstos cruzan el eje imaginario con velocidad no nula, es decir, $\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) \neq 0$. Entonces, en cualquier entorno U del origen en \mathbb{R}^2 y $\lambda_0 > 0$ dado, hay un $\bar{\lambda}$ con $|\bar{\lambda}| < \lambda_0$ tal que la ecuación diferencial $x' = A(\bar{\lambda})x + F(\bar{\lambda}, x)$ tiene una órbita periódica no trivial en U .

Demostración. Realicemos primero una serie de simplificaciones. Tras un cambio lineal de coordenadas adecuado, se obtiene

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha(\lambda)x_1 + \beta(\lambda)x_2 + F_1(\lambda, x_1, x_2) \\ x'_2 &= -\beta(\lambda)x_1 + \alpha(\lambda)x_2 + F_2(\lambda, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Tomando $\tau = \beta(\lambda)t$, $\frac{d}{d\tau} = \frac{d/dt}{\beta(\lambda)}$ y podemos suponer que el sistema es

$$\begin{aligned} x'_1 &= \tilde{\alpha}(\lambda)x_1 + x_2 + \tilde{F}_1(\lambda, x_1, x_2) \\ x'_2 &= -x_1 + \tilde{\alpha}(\lambda)x_2 + \tilde{F}_2(\lambda, x_1, x_2) \end{aligned}$$

($\tilde{\alpha}$ y \tilde{F}_i , $i = 1, 2$, satisfacen las mismas hipótesis que α y F_i). Como $\tilde{\alpha}'(0) \neq 0$, se tiene una correspondencia entre $\tilde{\alpha}(\lambda)$ y λ por el teorema de la función inversa; luego podemos reemplazar $\tilde{\alpha}$ por λ y resulta

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda x_1 + x_2 + \tilde{F}_1(\lambda, x_1, x_2) \\ x'_2 &= -x_1 + \lambda x_2 + \tilde{F}_2(\lambda, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Pasando ahora a coordenadas polares $\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = -r \sin \theta \end{cases}$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Derivando y sustituyendo, obtenemos

$$r' = \lambda r + \cos \theta \tilde{F}_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) - \sin \theta \tilde{F}_2(r \cos \theta, -r \sin \theta).$$

De forma similar, se deduce que

$$\theta' = \begin{cases} 1 - \frac{1}{r}(\sin \theta \tilde{F}_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) + \cos \theta \tilde{F}_2(r \cos \theta, -r \sin \theta)) & \text{si } r \neq 0 \\ 1 & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

Utilizando las notaciones $\mathcal{R}(r, \theta) := \cos \theta \tilde{F}_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) - \sin \theta \tilde{F}_2(r \cos \theta, -r \sin \theta)$ y

$\Theta(r, \theta) := \begin{cases} -\frac{1}{r}(\sin \theta \tilde{F}_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) + \cos \theta \tilde{F}_2(r \cos \theta, -r \sin \theta)) & \text{si } r \neq 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \end{cases}$, se tiene

el sistema $\begin{cases} r' = \lambda r + \mathcal{R}(r, \theta) \\ \theta' = 1 + \Theta(r, \theta) \end{cases}$.

Ahora, hacemos lo siguiente:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\lambda r + \mathcal{R}(r, \theta)}{1 + \Theta(r, \theta)} = \lambda r + \mathcal{P}(\lambda, r, \theta),$$

donde $\mathcal{P}(\lambda, r, \theta) = \frac{\lambda r + \mathcal{R}(r, \theta)}{1 + \Theta(r, \theta)} - \lambda r = \frac{\mathcal{R}(r, \theta) - \lambda r \Theta(r, \theta)}{1 + \Theta(r, \theta)}$ cumple $\begin{cases} \mathcal{P}(\lambda, 0, \theta) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r}(\lambda, 0, \theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{P} = r^2 \mathcal{Q}$

para cierta \mathcal{Q} al tener en cuenta que \tilde{F} y $d\tilde{F}$ se anulan en el origen: para $i = 1, 2$, $\begin{cases} \frac{\partial \tilde{F}_i(r \cos \theta, -r \sin \theta)}{\partial r} \Big|_{r=0} = \left(\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_2} (-\sin \theta) \right) \Big|_{r=0} = 0 \\ \tilde{F}_i \Big|_{r=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{F}_i = r G_i = r^2 H_i.$

Para seguir, definamos la solución de $\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \lambda r + \mathcal{P}(\lambda, r, \theta) \\ r(0) = a \end{cases}$ por $r(\lambda, \theta, a)$. En particular,

$r = 0$ será la solución de $\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \lambda r + \mathcal{P}(\lambda, r, \theta) \\ r(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow r(\lambda, \theta, 0) = 0$. Lo que queremos ver

es si $r(\lambda, \theta, a) \stackrel{?}{=} r(\lambda, \theta + 2\pi, a) \forall \theta$, que ocurrirá si y solo si $r(\lambda, 0, a) = a = r(\lambda, 2\pi, a)$. Por el principio de Duhamel (1.2.1), la solución de $\frac{dr}{d\theta}$ con $r(\lambda, 0, a)$ verifica que

$$r(\lambda, \theta, a) = e^{\lambda\theta} a + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-s)} \mathcal{P}(\lambda, r(\lambda, s, a), s) ds.$$

Imponiendo $a = r(\lambda, 2\pi, a)$, se tiene que

$$a = e^{2\pi\lambda} a + \int_0^{2\pi} e^{2\pi\lambda} e^{-\lambda s} \mathcal{P}(\lambda, r(\lambda, s, a), s) ds.$$

Despejando, obtenemos

$$0 = (1 - e^{-2\pi\lambda}) a + \int_0^{2\pi} e^{-\lambda s} \mathcal{P}(\lambda, r(\lambda, s, a), s) ds,$$

relación que a y λ han de satisfacer.

Definimos ahora $h(a, \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-2\pi\lambda} + 1/a \int_0^{2\pi} e^{-\lambda s} \mathcal{P}(\lambda, r(\lambda, s, a), s) ds & \text{si } a \neq 0 \\ 1 - e^{-2\pi\lambda} & \text{si } a = 0 \end{cases}$, que es

\mathcal{C}^1 y $\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \lambda}(0, 0) = 2\pi \\ h(0, 0) = 0 \end{cases}$. Por lo tanto, $\lambda =: \hat{\lambda}(a)$ si y solo si $(0, 0)$ es solución de $h(a, \lambda) = 0$

con $\frac{\partial h}{\partial \lambda} \neq 0$. Así, $\hat{r}(\theta, a) := r(\hat{\lambda}(a), \theta, a)$ y tenemos la solución 2π -periódica

$$\begin{cases} x_1 = \hat{r}(\theta, a) \cos \theta \\ x_2 = -\hat{r}(\theta, a) \sin \theta \end{cases},$$

siendo $a = \hat{r}(0, a)$. Por último, $\frac{d\theta}{dt} = 1 + \Theta(\hat{\lambda}(a), \hat{r}(\theta, a), \theta) \Rightarrow \theta =: \hat{\theta}(t, a)$ con $\hat{\theta}(0, a) = 0$ y, sustituyendo,

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t, a) &= \hat{r}(\hat{\theta}(t, a), a) \cos \hat{\theta}(t, a) \\ \hat{x}_2(t, a) &= -\hat{r}(\hat{\theta}(t, a), a) \sin \hat{\theta}(t, a). \end{aligned}$$

Se concluye pues $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ verifica las condiciones del enunciado. \square

En dimensión $n > 2$, se satisface un resultado análogo: se supone la existencia de un par de valores propios complejos conjugados y los otros $n - 2$ deben tener parte real negativa.

El valor crítico de cero para el parámetro λ se llama *punto de bifurcación de Hopf*.

Capítulo 6. Algunas aplicaciones a economía

Los sistemas dinámicos pueden servir para dar respuesta a problemas o necesidades en biología, física y economía entre otros campos de estudio. A modo de ilustración de los desarrollos teóricos del trabajo, nos vamos a centrar en la aplicación económica.

6.1. Estabilidad en el modelo de Solow

El modelo de Solow [11] es un marco teórico que trata de explicar el comportamiento de las diferencias de renta entre unos países y otros a través de un modelo de producción. Toma su nombre del economista Robert Merton Solow (1924-), que realizó su trabajo con la ayuda de Trevor Swan (1918-1989).

Se trata de un modelo de crecimiento. En este tipo de modelos, se tienen como variables la producción (Y), la inversión (I) y el consumo (C). Además, se satisface lo siguiente:

- 1) $Y = C + I$
- 2) $K' = I$ (formación instantánea de capital K)
- 3) $C = (1 - s)Y$ (función de consumo), siendo $s \in (0, 1)$ la propensión a ahorrar.

El modelo de Solow cuenta con una función de producción $Y = F(K, N)$, la cual representa cómo se transforman en producto el capital y el trabajo N . Vamos a suponer que el modelo verifica las siguientes propiedades:

- 1) la función de producción es *neoclásica* en el siguiente sentido:
 - a) $F(K, N)$ es no negativa si K y N son no negativos
 - b) $F(0, 0) = 0$
 - c) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial N} > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial N^2} < 0$
 - d) $F(K, L)$ es homogénea de grado uno para todo λ no negativo:

$$F(\lambda K, \lambda N) = \lambda F(K, N), \quad \forall \lambda, K, N \in \mathbb{R}^+;$$

en términos económicos, esto quiere decir que los rendimientos a escala (cambios en la producción que resultan de un cambio proporcional en todos los factores o elementos que se utilizan en un proceso productivo) son constantes;

también satisface

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial N} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial N} = 0,$$

que reciben el nombre de condiciones de Inada (hipótesis sobre la forma de una función de producción que garantizan la ruta de estabilidad de un crecimiento económico) en macroeconomía

- 2) la tasa de crecimiento de acervo de capital (activos fijos no financieros producidos tangibles e intangibles que forman parte de los procesos de producción propiedad del sector público y privado) iguala la inversión neta (incremento del capital tras reducir la depreciación, es decir, la pérdida de valor de un bien como consecuencia de su desgaste con el paso del tiempo, del periodo) $i = sF(K, N)$ menos la depreciación del capital, esto es,

$$K' = sF(K, N) - \delta K$$

- 3) la fuerza de trabajo, es decir, la habilidad tanto física como intelectual para poder desarrollar una actividad productiva (Karl Marx), crece a una tasa constante $N'/N = n > 0$.

Denotemos por $k := K/N$ el capital per capita, esto es, por persona (trabajadora), y sea $y = f(k) = F(K/N, 1) = F(k, 1)$ la función de producción en forma intensiva (la producción per capita $y = Y/N$ solo depende del capital por trabajador). Así, tenemos que

$$f'(k) > 0 \text{ y } f''(k) < 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0 \text{ y } \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$$

ó, lo que es lo mismo, que

$$f'(\cdot) \text{ decrece, } f'(0) = \infty \text{ y } f'(\infty) = 0.$$

Se deduce pues que

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{N'}{N} = \frac{sF(K, N) - \delta K}{K} - n = s \frac{F(K/N, 1)}{K/N} - \delta - n = s \frac{f(k)}{k} - \delta - n.$$

Por lo tanto,

$$k' = sf(k) - (\delta + n)k.$$

Ahora, tenemos

Teorema 6.1.1. La ecuación $k' = sf(k) - (\delta + n)k$ tiene un único punto estacionario k^* , el cual está determinado por

$$sf(k^*) = (\delta + n)k^*, \quad 0 < k^* < \infty$$

y es asintóticamente estable.

Demostración. Sustituyendo $k' = 0$ en $k' = sf(k) - (\delta + n)k$, resulta $sf(k^*) = (\delta + n)k^*$. Por la supuesta concavidad de f , existe un única solución k^* . De hecho,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$$

por la regla de L'Hôpital.

Puesto que $k' = sf(k) - (\delta + n)k$, $0 < k < k^*$ implica que $k' > 0$ y $k^* < k < \infty$ que $k' < 0$.

Además, $V(k) = (k - k^*)^2$ es una función de Liapunov estricta:

a) $V(k^*) = 0$ y $V(k) > 0$ si $k \neq k^*$

b) $\dot{V} = 2(k - k^*)k' = 2(k - k^*)[sf(k) - (\delta + n)k] < 0$ pues

- si $k < k^*$, entonces $k - k^* < 0$ y $sf(k) - (\delta + n)k > 0$
- si $k > k^*$, entonces $k - k^* > 0$ y $sf(k) - (\delta + n)k < 0$.

Aplicando el teorema de Liapunov (2.3.7), se concluye. \square

Podemos ilustrar esto utilizando alguna familia de funciones de producción.

Ejemplo 6.1.2 (Funciones de producción Cobb-Douglas). Sea A el progreso tecnológico o la productividad total de los factores (PTF) y $0 < \alpha, \beta < 1$ parámetros que representan el peso de los factores K y N en la renta (precio de los insumos, es decir, toda materia prima utilizada para producir nuevos elementos, dar servicio y paliar necesidades del ser humano, que tienen una cantidad fija). La función de producción Cobb Douglas

$$Y = AK^\alpha N^\beta$$

estima la función de producción de un país, pudiendo proyectar así su crecimiento económico esperado.

Para $Y = AK^\alpha N^{1-\alpha}$, se cumple que $y = Ak^\alpha$, esto es, $k^* = \frac{sA}{\delta+n}^{1/(1-\alpha)}$. Poniendo, por ejemplo, $A = 1$, $\alpha = 0'25$, $n = 0'05$ y $\delta = 0$, veamos que pasa al tomar distintos valores de s .

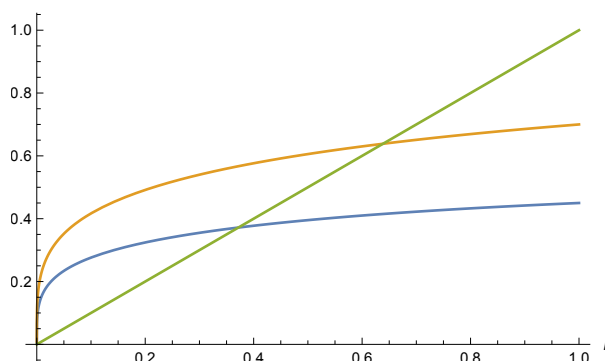


Figura 6.1: En la curva azul, se emplea $s = 0'5$ y, en la naranja, $s = 0'75$.

En vista de lo anterior, podemos señalar que el valor de k^* es mayor para valores altos de s .

6.2. Existencia de órbitas periódicas en el modelo de Kaldor

El modelo de Kaldor (1908-1986) [4] describe una economía donde no existe progreso técnico, la fuerza laboral crece a una tasa fija y el nivel productivo está definido por coeficientes fijos.

Este modelo viene descrito por

$$\begin{aligned} Y' &= \mu[I(Y, K) - S(Y, K)] \equiv \mu F(Y, K) \\ K' &= I(Y, K) - \delta K, \end{aligned}$$

donde Y es el nivel productivo (grado de uso de la capacidad de producción), K el capital social (importe monetario de un país), $I(Y, K)$ una función de inversión (relación entre la

inversión y el tipo de interés), $S(Y, K)$ una función de ahorro, μ un parámetro de ajuste positivo y δ la tasa de depreciación del capital. Además,

$$\frac{\partial I}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial I}{\partial K} < 0, \quad 0 < \frac{\partial S}{\partial Y} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial K} > 0.$$

Supongamos que el sistema cuenta con al menos un punto de equilibrio. La matriz Jacobiana en (Y^*, K^*) tiene

$$\det J = \mu \frac{\partial F}{\partial Y} \left(\frac{\partial I}{\partial K} - \delta \right) - \mu \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial I}{\partial Y} \quad \text{y} \quad \text{tr} J = \mu \frac{\partial F}{\partial Y} + \frac{\partial I}{\partial K} - \delta.$$

Nos interesa que el punto fijo sea inestable para que el campo vectorial

$$\begin{cases} Y' = \mu[I(Y, K) - S(Y, K)] \equiv \mu F(Y, K) \\ K' = I(Y, K) - \delta K \end{cases}$$

apunte hacia fuera sobre los puntos de una circunferencia suficientemente pequeña que rodee dicho punto. Esto es posible gracias al teorema de Hartman-Grobman (4.3.3): el punto de equilibrio es topológicamente equivalente localmente a su aproximación lineal. Recordando el teorema 3.2.10, tomamos pues $\det J > 0$ y $\text{tr} J > 0$, excluyendo así la posibilidad de tener un punto de silla (si la traza fuese negativa, tendríamos que las partes reales de los valores propios es negativa, es decir, el punto fijo sería localmente estable). Por lo tanto, el punto singular supuesto es una fuente.

Ahora, busquemos un conjunto invariante compacto W tal que el campo vectorial apunte hacia dentro.

A lo largo de la curva en la que el capital social no cambia ($K' = 0$), se tiene

$$\left. \frac{dK}{dY} \right|_{K'=0} \Big|_{K=K(Y)} = \frac{\partial I/\partial Y}{\partial I/\partial K - \delta} > 0$$

pues $\frac{\partial I}{\partial K} - \delta < 0$. Esto implica que el lugar geométrico (conjunto de todos los puntos que cumplen una determinada condición) de todos los puntos en el conjunto $\{(Y, K) \mid K' = 0\}$ sea una curva inclinada hacia arriba. Para todo K por encima (resp. por debajo) de la curva $K' = 0$, la inversión disminuye (resp. aumenta).

A lo largo de la curva en la que la producción no cambia ($Y' = 0$), tenemos

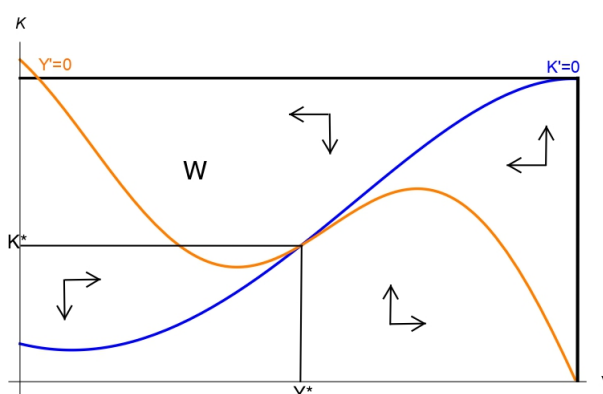
$$\left. \frac{dK}{dY} \right|_{Y'=0} = \frac{\partial S/\partial Y - \partial I/\partial Y}{\partial I/\partial K - \partial S/\partial K},$$

que puede ser mayor o igual o menor que 0. Supongamos que $\frac{\partial I}{\partial K} - \frac{\partial S}{\partial K} < 0$. Por consiguiente, el signo de $\frac{dK}{dY}$ depende de los valores de $\frac{\partial I}{\partial Y}$ y $\frac{\partial S}{\partial Y}$. La diferencia $\frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{\partial I}{\partial Y}$ es positiva para niveles de ingreso tanto bajos como altos en el entorno del punto de equilibrio. Por lo tanto, la curva $Y' = 0$ está negativamente inclinada para valores bajos y altos de Y y positivamente en un entorno de Y^* . Los ingresos aumentan (resp. disminuyen) para todos los puntos por debajo (resp. por encima) de la curva $Y' = 0$.

Sea $(Y_1, 0)$ el punto de corte entre la curva $Y' = 0$ y el eje de abscisas e (Y_1, K_1) . El subconjunto

$$W = \{(Y, K) \mid 0 \leq Y \leq Y_1, 0 \leq K \leq K_1\}$$

es compacto y el campo apunta el conjunto hacia el interior en la frontera.



Tomemos ahora un conjunto U que consista en quitar el entorno que contiene el punto de equilibrio a W . Este $U \subset W$ resulta ser un compacto positivamente invariante y sin puntos de equilibrio. Luego se tiene asegurada la existencia de órbitas cerradas por el teorema 3.2.8.

6.3. Bifurcación de Hopf en el modelo del ciclo económico Keynesiano

El modelo Keynesiano [5] es una teoría económica en la que se analiza fundamentalmente la relación que existe entre el nivel de ocupación o empleo y el nivel de ingresos de un lugar. Su autor, John Maynard Keynes (1883-1946), se dedicó, principalmente, a entender las crisis financieras.

Este modelo viene descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} Y' &= \mu[I(Y, R) - S(Y, R)] \equiv \mu F(Y, R) \\ R' &= \nu[L(Y, R) - L_s], \end{aligned}$$

donde Y es el nivel productivo, R la tasa de interés, $I(Y, R)$ una función de inversión, $S(Y, R)$ una función de ahorro, $L(Y, R)$ la función de demanda total de dinero, L_s la oferta fija de dinero y μ y ν son parámetros de ajuste positivos. Además,

$$\frac{\partial I}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial I}{\partial R} < 0, \quad \frac{\partial S}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial R} > 0, \quad \frac{\partial L}{\partial Y} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial R} < 0.$$

Estos requisitos implican que la inversión está relacionada positivamente con el nivel productivo y negativamente con la tasa de interés, es decir, un aumento en la producción o en la tasa de interés hace que la gente ahorre más y hay mayor demanda de dinero si la producción aumenta o si la tasa de interés disminuye. De hecho, el sistema dinámico establece lo siguiente:

- 1) Si la inversión es menor que los ahorros, entonces el nivel productivo tiende a disminuir, y viceversa.
- 2) Si la demanda del dinero es mayor que la oferta, la tasa de interés tiende a aumentar.

Se supone la existencia de un punto estacionario (Y^*, R^*) determinado por la intersección de $I(Y, R) = S(Y, R)$ y $L(Y, R) = L_s$ y vamos a limitar la discusión a un dominio local.

Vamos a aplicar el teorema de bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf (5.5.1) para identificar la existencia de ciclos límite. Para ello, busquemos primero las condiciones para que exista un par de valores propios puramente imaginarios e identifiquemos la pérdida de estabilidad del punto de equilibrio.

Si se cumplen

$$\mu_0 = \frac{\nu \partial L / \partial R}{\partial F / \partial Y}, \quad \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial L}{\partial R} - \frac{\partial F}{\partial R} \frac{\partial L}{\partial Y} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial Y} > 0$$

en (Y^*, R^*) , entonces se dan las condiciones previas. Como $\frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial I}{\partial Y} - \frac{\partial S}{\partial Y}$, interpretamos $\frac{\partial F}{\partial Y} > 0$ como que la inversión marginal (efecto de un cambio pequeño sobre una determinada variable) en el producto es mayor que el ahorro marginal con respecto a la producción. Así,

Teorema 6.3.1 (La existencia de ciclos económicos en el modelo Keynesiano). Supóngase que se verifica $\mu_0 = \frac{\nu \partial L / \partial R}{\partial F / \partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial L}{\partial R} - \frac{\partial F}{\partial R} \frac{\partial L}{\partial Y} > 0$ y $\frac{\partial F}{\partial Y} > 0$ en (Y^*, R^*) . Existen ciclos límite - bifurcaciones de Hopf - alrededor del punto de equilibrio.

Demostración. Denotemos por λ las pequeñas perturbaciones de μ con respecto a μ_0 : $\lambda \equiv \mu - \mu_0$. Para escribir el sistema de forma local, introduzcamos

$$U_1(t) = Y(t) - Y^* \quad \text{y} \quad U_2(t) = R(t) - R^*.$$

Sustituyendo en $\begin{cases} Y' = \alpha F(Y, R) \\ R' = \beta [L(Y, R) - L_s] \end{cases}$, obtenemos

$$U' = J(\lambda)U + N(\lambda, U, U) + o(U^3),$$

donde $J(\lambda) = \begin{bmatrix} \mu \frac{\partial F}{\partial Y} & \mu \frac{\partial F}{\partial R} \\ \nu \frac{\partial L}{\partial Y} & \nu \frac{\partial L}{\partial R} \end{bmatrix}$ es la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio y N los términos cuadráticos de $U = (U_1, U_2)$. Los dos valores propios son

$$z_{1,2}(\lambda) = \frac{\nu \partial L / \partial R + \mu \partial F / \partial Y}{2} \pm \left[\frac{(\nu \partial L / \partial R + \mu \partial F / \partial Y)^2}{4} - \mu \nu \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial L}{\partial R} - \frac{\partial F}{\partial R} \frac{\partial L}{\partial Y} \right) \right]^{1/2}.$$

Puesto que se satisfacen las condiciones $\mu_0 = \frac{\nu \partial L / \partial R}{\partial F / \partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial L}{\partial R} - \frac{\partial F}{\partial R} \frac{\partial L}{\partial Y} > 0, \frac{\partial F}{\partial Y} > 0$ en $\lambda = 0$, hay un par de valores propios puramente imaginarios, $\pm iz_0$. Si denotamos por $z(\lambda)$ los valores propios que son iguales a iz_0 en $\lambda = 0$, entonces $Re \left(\frac{dz}{d\lambda}(0) \right) \neq 0$. Luego se garantiza la pérdida de estabilidad del punto de equilibrio. Por lo tanto, hemos identificado las hipótesis para que se den bifurcaciones de Hopf [teorema de Poincaré-Andronov-Hopf (5.5.1)]. \square

Conclusiones

Analizar y medir para así comprender y evaluar de forma objetiva el entorno que nos rodea siempre ha sido el afán de muchos científicos a lo largo de la historia. Durante todos estos años, las matemáticas han procurado dar una representación de los sucesos que ocurren a nuestro alrededor, modelizando y estudiando fenómenos que, en un principio, parecían inescrutables.

El presente trabajo trata de dar un primer paso hacia el estudio de los sistemas dinámicos, centrados propiamente en la economía, a través del estudio de modelos que puedan ajustarse y dar una explicación coherente a hechos plausibles de la realidad. También trata del estudio de ciertas herramientas matemáticas que nos ayudan a examinar estos modelos para conocer así sus características.

Aún siendo un paso previo, el estudio e investigación realizados para la presente memoria no carece de importancia debido a que la tarea desarrollada a lo largo de estos meses ha supuesto el poder conocer y entender aspectos básicos de los sistemas dinámicos. Además, ayuda a comprender una serie de modelos matemáticos, proporcionando la capacidad de sacar como conclusión que siempre podremos estudiar los sistemas que nos rodean a través del lenguaje matemático. De esta manera, somos capaces de analizar el comportamiento pasado y plantearnos también cómo funcionará en el futuro.

Su aplicación a otros ámbitos de la ciencia como la biología sirve para conocer que existe un gran campo de investigación. Por ejemplo, en epidemiología, se utilizan modelos matemáticos (SIS, SIR y sus variaciones) que describen, explican y predicen fenómenos y procesos además de mejorar la comprensión de un sistema para prevenir futuras situaciones de enfermedad, determinar su incidencia y tomar decisiones objetivas con la intención de controlar o erradicar afecciones. De hecho, este estudio, realizado en Prácticas Externas I, supuso la motivación a escoger el tema para Trabajo de Fin de Grado.

Con vistas al futuro, se podría ampliar el estudio profundizando en los temas tratados e introduciendo otras nociones como pueden ser las de atractores, estabilidad estructural o caos por enumerar solo algunas posibilidades. También se podrían llevar a cabo diversas puestas en práctica de otras cuestiones económicas, así como de cualquier otro área de conocimiento. Desde luego, esto solo sería un punto de partida porque lo más seguro es que aparezcan nuevos retos a los que dar respuesta.

Referencias

- [1] Arnol'd, V.I., *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlín, 1992.
- [2] Hale, J. y Koçak, H., *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, Nueva York, 1991.
- [3] Hirsch, M.W. y Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, Nueva York, 1974.
- [4] Kaldor, N., *A Model in Economic Growth*, Economic Journal, Oxford, Vol. 67, No. 268 (Dec., 1957), pp. 591-624.
- [5] Keynes, J.M., *The General Theory of Employment, Interest and Money*, MacMillan And Co Ltd, Londres, 1936.
- [6] Kuznetsov, Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, Nueva York, 2004.
- [7] Lefschetz, S., *Differential Equations: Geometric Theory*, Dover Publications, Nueva York, 1977.
- [8] Muñoz Díaz, J., *Ecuaciones Diferenciales I*, Universidad de Salamanca, Salamanca, 1982.
- [9] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Nueva York, 2001.
- [10] Simonovits, A., *Mathematical Methods in Dynamical Economics*, MacMillan Press, Nueva York, 2000.
- [11] Solow, R.M., *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, Cambridge, Vol. 70, No. 1 (Feb., 1956), pp. 65-94.
- [12] Taylor, M.E., *Partial Differential Equations I*, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
- [13] Teschl, G., *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Providence, 2012.
- [14] Zhang, W., *Differential Equations, Bifurcations, and Chaos in Economics*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapur, 2005.