



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Facultad de Ciencias

GRADO EN MATEMÁTICAS

REPRESENTACIONES UNITARIAS DE LOS GRUPOS
DE LIE COMPACTOS: TEOREMA DE
PETER-WEYL Y ALGUNAS APLICACIONES A LA
FÍSICA

Trabajo Fin de Grado

Autor: Diego Martín Martín

Tutor: Antonio López Almorox

Julio 2022



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

REPRESENTACIONES UNITARIAS DE LOS GRUPOS
DE LIE COMPACTOS: TEOREMA DE
PETER-WEYL Y ALGUNAS APLICACIONES A LA
FÍSICA

Autor: Diego Martín Martín

Tutor: Antonio López Almorox

Julio 2022

Índice general

Introducción	I
1. Grupos topológicos localmente compactos	1
1.1. Medida de Haar sobre grupos topológicos localmente compactos	3
1.2. Medidas integrales de Haar en grupos topológicos localmente compactos Hausdorff	5
1.3. Medidas integrales invariantes	6
2. Representaciones unitarias de los grupos topológicos localmente com- pactos Hausdorff	9
2.1. Representaciones complejas finitas de grupos	9
2.2. Representaciones de grupos topológicos en espacios de Hilbert	13
3. Representaciones unitarias de grupos compactos Hausdorff	22
3.1. Operador de Weyl y representaciones irreducibles unitarias de un grupo topológico compacto	22
3.2. Relaciones de ortogonalidad de Schur y caracteres	26
3.3. Teorema de Peter-Weyl	32
4. Representaciones unitarias irreducibles de los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$	40
4.1. Representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$	40
4.2. Representaciones irreducibles del grupo $SO(3)$	47
4.3. Polinomios armónicos esféricos	48
A. ANEXO: Nociones básicas de espacios medibles y operadores autoad- juntos compactos	52
A.1. Espacios topológicos medibles	52
A.2. Operadores compactos en espacios de Hilbert y teorema espectral	53
Bibliografía	55

Introducción

Esta memoria recoge las bases de la teoría de representaciones unitarias de los grupos topológicos localmente compactos haciendo un énfasis particular en el estudio de las representaciones de los grupos compactos. Actualmente, esta teoría se puede englobar dentro de lo que se conoce como Análisis Armónico abstracto.

Como es conocido el Análisis Armónico clásico de Fourier, estudia las funciones continuas (reales o complejas) periódicas definidas en los espacios $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. La estructura de grupo topológico abeliano (localmente compacto Hausdorff) de dichos espacios permite reformular la teoría de Fourier en términos de las funciones carácter de las representaciones unitarias irreducibles (unidimensionales) de dichos grupos. Mostremos brevemente esta idea para las funciones periódicas en la recta real. A finales del siglo XIX, Joseph Fourier desarrolló lo que hoy conocemos como series de Fourier para resolver la ecuación del calor. Con dichas series logró expresar cualquier función periódica real (de periodo 2π) f como $f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$ con $\theta \in \mathbb{R}$ donde los coeficientes a_0, a_k, b_k están dados por

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \quad ; \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta \quad ; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(k\theta) d\theta$$

Estas funciones periódicas pueden ser vistas como funciones continuas de $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ y ser consideradas como elementos del espacio de Hilbert $L^2(S^1)$. Si denotamos por $\mathcal{H}_0(S^1)$ es el espacio de las funciones constantes y por $\mathcal{H}_k(S^1)$ con $k \geq 1$ a los espacios bidimensionales generados por las funciones $\cos(k\theta)$, $\sin(k\theta)$ se tiene una descomposición ortogonal

$$L^2(S^1) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(S^1)$$

Estos espacios $\mathcal{H}_k(S^1)$ aparecen de manera natural como solución de la ecuación de Laplace $\Delta f = 0$ en $\mathbb{R}^2$, ya que usando coordenadas polares y escribiendo $f(r, \theta) = r^k g(\theta)$ se tiene que f es armónica si y solo si $g(\theta)$ es una autofunción del operador Δ_{S^1} de autovalor $-k^2$. Precisamente las funciones de $\mathcal{H}_k(S^1)$ son dichos autovalores. Un hecho remarcable es que estos espacios $\mathcal{H}_k(S^1)$ son espacios de representación (irreducible) del grupo abeliano $SO(2)$. La razón de este hecho surge como resultado de la invariancia del operador Δ de $\mathbb{R}^2$ bajo rotaciones bidimensionales euclídeas.

Estas ideas se pueden generalizar al caso de las funciones complejas de S^1 . En este caso, las funciones $\{e^{ik\theta} = \cos k\theta + i \sin k\theta\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son una base del espacio de funciones complejas de cuadrado integrable $L^2(S^1)$ provisto del producto hermítico

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^1} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta$$

Resaltamos que estas funciones son precisamente las funciones carácter de las representaciones irreducibles del grupo topológico abeliano (compacto) $S^1 \simeq SO(2)$.

La generalización de estos resultados al caso no abeliano es lo que actualmente se conoce como Análisis Armónico no conmutativo que puede ser entendido como el estudio de las funciones continuas y funciones medibles sobre grupos topológicos localmente compactos en términos de sus representaciones unitarias irreducibles. Todo grupo topológico G opera linealmente en el espacio $C_c(G)$ de sus funciones continuas (complejas) con soporte compacto mediante la denominada representación regular. Si el grupo topológico es localmente compacto y Hausdorff, la existencia de medidas Radón invariantes o medidas de Haar μ en G , permiten dotar al espacio $C_c(G)$ de un producto hermítico respecto del cual la representación regular es fuertemente continua y unitaria. Teniendo en cuenta que el espacio $C_c(G)$ es denso en el espacio de Hilbert $L^2(G, \mu)$ (proposición 1.3.3 de [7]), dicha representación regular extiende de manera continua y unitaria a este último espacio. (Si el espacio topológico G cumple el primer axioma de numerabilidad, el espacio de Hilbert $L^2(G, \mu)$ es separable (véase [13]) hecho que asumiremos). La completa reducibilidad de las representaciones unitarias de este tipo de grupos topológicos permite descomponer el espacio de representación en sus componentes más básicas o irreducibles.

En el caso particular de que el grupo topológico G sea además compacto, la medida de Haar en G puede ser tomada bi-invariante y cualquier representación unitaria irreducible es de dimensión finita. Ello permite escribir cualquier función de $L^2(G, \mu)$ como combinación lineal (infinita) de las bases ortonormales (finitas) de cada uno de los espacios irreducibles, ahora de dimensión finita, de la citada descomposición. Un teorema debido a Hermann Weyl y a su estudiante Fritz Peter explicita esta descomposición en términos de las denominadas funciones con coeficientes matriciales que constituyen unas bases ortonormales de los espacios de las representaciones irreducibles (véase [19]). Estos hechos son el germen del Análisis Armónico en los grupos topológicos compactos (abelianos o no).

Históricamente, la aparición del Análisis Armónico no conmutativo se relaciona con los trabajos de Frobenius, Schur, Burnside y Molin entre 1890 y 1920 sobre el estudio y clasificación de las representaciones irreducibles de los grupos finitos a través de la generalización de la noción de carácter de la teoría de grupos abelianos a través de la traza de la representación matricial del grupo. El siguiente periodo histórico se desarrolla en la primera mitad del siglo XX y está caracterizado por la creación de la teoría de representaciones de los grupos topológicos y grupos de Lie compactos. Entre los resultados más importantes de este periodo se encuentra el teorema de Haar acerca de la existencia de una medida invariante, así como el teorema de Peter-Weyl sobre la completitud de

un sistema de representaciones unitarias irreducibles de tales grupos. En este periodo, H. Weyl, E. Cartan y W. Killing desarrollaron la teoría de representaciones finitas de grupos de Lie compactos que tuvieron un impacto enorme tanto a nivel teórico matemático como en la Física Cuántica que empezó a desarrollarse en dicha época (para una mayor información histórica puede verse [15] y [16]). A partir de la segunda mitad del siglo XX, se ha desarrollado el Análisis Armónico en grupos topológicos que no son ni abelianos ni compactos e incluso para grupos que no son localmente compactos, pero cuyos resultados exceden al contenido y objetivos de este trabajo de Fin de Grado.

Como consta en la propuesta inicial, este proyecto es un trabajo de revisión bibliográfica e investigación sobre la teoría de representaciones unitarias de los grupos de Lie compactos y su relación con el Análisis Armónico. Con este objetivo, inicialmente estudiamos los grupos de Lie desde un punto de vista de la Geometría Diferencial con el objetivo de construir las medidas de Haar bi-invariantes en grupos de Lie compactos a través de los elementos del dual de las álgebra de Lie de estos grupos (1-formas diferenciables invariantes por traslaciones a izquierda y a derecha) y el producto exterior de sus elementos para construir elementos de volumen bi-invariantes. Sin embargo, la limitación de espacio para desarrollar la memoria y a propuesta de mi tutor, no se ha incluido un capítulo explícito de grupos de Lie, ya que por otra parte el desarrollo de la teoría para grupos topológicos localmente compactos y Hausdorff incluye también los resultados para grupos de Lie como caso particular. A este respecto, señalemos que el teorema de A. M. Gleason, D. Montgomery y L. Zippin de 1952 (véase [14] y [17]) afirma que un grupo topológico G posee una (única) estructura de grupo de Lie si y solo si el espacio subyacente de G es una variedad topológica (o equivalentemente, si es localmente compacto y no contiene subgrupos pequeños; esto es, el elemento neutro posee un entorno compacto sin subgrupos no triviales). En particular y como ejemplos, se han desarrollado con bastante detalle el cómputo de las representaciones unitarias irreducibles de grupos de Lie compactos tales como los grupos $U(1)$, $SU(2)$, $SO(2)$, $SO(3)$ y su aplicación al estudio del espectro de ciertos operadores diferenciables invariantes. En este sentido en el título del proyecto se podría haber excluido el término 'grupo de Lie compacto' y sustituirlo por 'grupo topológico compacto'.

Pasemos a continuación a describir brevemente la estructura y contenido de este trabajo. La memoria consta de cuatro capítulos y un anexo.

En el capítulo 1 se introducen los grupos topológicos y sus propiedades más elementales. No se incluyen demostraciones por razones de espacio y porque algunos de ellos han sido vistos en varias asignaturas de la titulación, pero que las mismas se pueden encontrar en las referencias empleadas en la redacción de este capítulo y descritas más abajo. La condición Hausdorff que se asume a lo largo de la memoria para estos grupos no implica limitaciones de carácter genérico, ya que todo grupo topológico G posee un cociente maximal Hausdorff (véase observación 1.0.3) tal que toda función continua factoriza a través de dicho cociente. Por lo que un estudio analítico de G a través de funciones continuas factoriza a través de un grupo topológico cociente Hausdorff. Se introducen las nociones elementales de la teoría de la medida para definir las medidas de Haar como medidas de Radón no nula invariante

por traslaciones a izquierda o derecha en un grupo topológico. Los conceptos más básicos de la teoría de la medida se estudian en la titulación y algunos de ellos se recogen en el anexo de la memoria tratando de que sea lo más autocontenida posible. Se enuncia, sin demostración, el teorema de existencia de medidas de Haar por la izquierda en todo grupo topológico localmente compacto Hausdorff (grupo LCH). Dicha medida es única salvo un factor multiplicativo positivo. Se demuestra que la existencia de una medida de Haar por la izquierda implica la existencia de una medida de Haar por la derecha. Sin embargo, la diferencia entre ambas medidas viene determinada una función unimodular en el grupo. Se incluye en la memoria la demostración de que los grupos localmente compactos Hausdorff abelianos, grupos discretos o grupos topológicos LCH compactos son unimodulares y por tanto, poseen medidas de Haar bi-invariantes. A continuación, se estudian las propiedades topológicas del espacio $C(X)$ de las funciones continuas a valores complejos de un espacio X topológico LCH y medidas μ integrales sobre el espacio $C_c(X)$ de las funciones de X con soporte compacto. Se particulariza este estudio para el caso de los grupos topológicos LCH y con el uso de una medida de Haar normalizada. En particular, cuando un grupo G topológico LCH opera en un espacio topológico X se induce de manera natural una acción lineal continua de G en el espacio $C_c(X)$ que es unitaria respecto de la estructura hermítica

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_X f_1(x) \overline{f_2(x)} d\mu(x) \quad \forall f_1, f_2 \in C_c(X)$$

Dicha acción extiende al espacio de Hilbert $L^2(X, \mu)$ de manera uniformemente continua y unitaria. En particular, cuando $X = G$ es un grupo topológico LCH y μ es la medida de Haar normalizada, esta construcción conduce a la denominada representación regular del grupo G en el espacio $L^2(G, \mu)$ que es uno de los objetivos de estudio de este trabajo. Las referencias más importantes empleadas para la redacción de este capítulo han sido [2], [4], [7], [8], [9], [20] y [26].

En la primera parte del capítulo 2 detallamos los conceptos fundamentales algebraicas de las representaciones complejas unitarias finitas de los grupos. Estos conceptos son desarrollados en una asignatura de la titulación cursada por lo que no se incluyen demostraciones que implican el álgebra lineal, pero su inclusión sirve para fijar la notación de la memoria. Estos conceptos incluyen además de la definición de representación unitaria finita, la equivalencia de representaciones, la noción de irreducibilidad y el teorema de completa reducibilidad de las mismas, así como el lema de Schur para representaciones finitas y sus implicaciones. Se ha excluido por razones de espacio la teoría de caracteres de representaciones finitas. Tras lo cual nos introducimos en el núcleo del trabajo estudiando las representaciones unitarias de grupos topológicos LCH en espacios de Hilbert. Se introducen las diferentes equivalencias sobre la continuidad de tales representaciones. Por su importancia, como ejemplo, se estudia la representación unitaria en el espacio $L^2(X, \mu)$ inducida, de manera natural, por la acción de un grupo topológico G en un espacio localmente compacto medible (X, μ)

$$(\rho_g^L f)(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{para todo } g \in G, x \in X, f \in L^2(X, \mu)$$

y se demuestra que dicha representación es fuertemente continua. En el caso particular

en que $(X, \mu) = (G, \mu_{\text{Haar}})$ sea un grupo topológico LCH provisto de una medida de Haar normalizada, la acción por traslación del grupo G en sí mismo induce de esta manera lo que se denomina la representación unitaria regular de dicho grupo. Cuando G sea compacto esta representación será de especial relevancia en el teorema de Peter-Weyl. La definición de subespacio invariante bajo una representación continua incluye la condición de que dicho subespacio sea cerrado. (Dado que esta condición es automática en representaciones finitas, no se suele incluir esta exigencia en la definición de subespacio invariante en esos casos). De manera similar a las representaciones finitas se introducen la noción de irreducibilidad de una representación unitaria continua. Se define la suma directa de una familia arbitraria de representaciones unitarias para establecer cuando una representación es completamente reducible en términos de sus representaciones irreducibles. La equivalencia de dos representaciones $(\rho^{(1)}, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho^{(2)}, \mathcal{H}_2)$ de un grupo G topológico LCH exige la existencia un isomorfismo lineal acotado $\sigma : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ verificando

$$\sigma \circ \rho_g^{(1)} = \rho_g^{(2)} \circ \sigma \quad \forall g \in G$$

Se demuestra el lema de Schur para representaciones unitarias irreducibles de grupos topológicos LCH. Mientras que en el caso que representaciones unitarias finitas, la demostración de este lema es trivial, en el caso de representaciones continuas no finitas hay que hacer uso de ciertos resultados de análisis funcional relativos a las proyecciones espectrales de operadores acotados. Se termina el capítulo demostrando que toda representación unitaria irreducible de un grupo topológico LCH abeliano es unidimensional y viene determinada por las denominadas funciones carácter de dicho grupo. Como ya hemos comentado más arriba, este resultado está en el núcleo del Análisis Armónico conmutativo. Las referencias empleadas para la redacción de las representaciones finitas han sido [11], [22] y [23] entre otras. La bibliografía empleada en la redacción de las representaciones de grupos topológicos son [2], [7], [8], [9], [10], [13], [18] y [26].

En el capítulo 3 abordamos el resultado fundamental de esta memoria: las representaciones unitarias de grupos topológicos LCH compactos y en particular, el teorema de Peter-Weyl sobre la descomposición en componentes irreducibles de la representación regular de dichos grupos. A través del denominado operador de Weyl asociado a una representación unitaria $(\rho, \mathcal{H})$ de un grupo topológico compacto G y a un vector $\xi \in \mathcal{H}$ unitario definido por el operador $K_\xi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por

$$K_\xi(\eta) = \int_G \langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle \rho_g(\xi) d\mu(g) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}$$

y sus propiedades de ser un operador acotado, autoadjunto, compacto y equivariante con respecto a la representación demostramos que toda representación unitaria irreducible de un grupo topológico compacto es de dimensión finita y con ello de que toda representación continua unitaria de tales grupos descomponen en suma directa de subrepresentaciones irreducibles de dimensión finita. Utilizando la métrica hermítica definida, a través de la medida de Haar bi-invariante normalizada, en el espacio de las funciones continuas en dichos grupos, se demuestran las relaciones de ortogonalidad de las funciones continuas de coeficientes matriciales asociadas a cualquier representación unitaria irreducibles de gru-

pos topológicos compactos y con ello las relaciones de ortonormalidad de sus caracteres. Si denotamos por $C(G)_{(\rho^{(a)})}$ al conjunto de funciones matriciales para una representación irreducible $(\rho^{(a)}, \mathcal{H}_a)$ de un grupo y $R(G) = \bigoplus_{a \in \hat{G}} C(G)_{(\rho^{(a)})}$ siendo $\hat{G}$ el conjunto de todas las representaciones unitarias irreducibles no equivalentes. Finalmente, se demuestra el teorema de Peter-Weyl que afirma que dado un grupo G topológico compacto, el espacio invariante $R(G)$ es denso en $L^2(G, \mu)$ y las funciones de coeficientes matriciales $\{\sqrt{d_a} A_{ij}^{(a)}\}_{1 \leq i, j \leq d_a; \forall a \in \hat{G}}$, descritas en la memoria son una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2(G, \mu_{H_{aar}})$. Demostrándose con ello que toda representación irreducible aparece en dicha descomposición tantas veces como la dimensión de la misma. Se acaba este capítulo demostrando mediante este teorema el desarrollo de Fourier de una función periódica en el espacio $\mathbb{T} = S^1$. Para la redacción de este capítulo se han empleado además de las referencias citadas en el capítulo anterior [1], [3], [21] y [25].

En el último capítulo determinamos todas las representaciones unitarias irreducibles de los grupos compactos $SU(2)$ y $SO(3)$. Como aplicación física y matemática estudiamos los polinomios armónicos esféricos de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ y su relación con las representaciones irreducibles del grupo $SO(3)$. Esta relación y el lema de Schur, permiten calcular explícitamente los autovalores y autofunciones del operador laplaciano en la esfera S^2 . En este capítulo se han utilizado de manera especial los libros [12] y [24], además de algunos manuales citados en el capítulo anterior.

La memoria acaba con un anexo donde se recogen sin demostración resultados básicos vistos en la titulación, sobre la teoría de la medida, así como el teorema espectral de los operadores compactos autoadjuntos en espacios de Hilbert. Se acaba la memoria con la bibliografía empleada en la elaboración de esta memoria.

Capítulo 1

Grupos topológicos localmente compactos

En este capítulo introducimos las nociones necesarias para trabajar con las representaciones de los grupos topológicos localmente compactos. Mientras que no se indique lo contrario, las estructuras de los grupos a lo largo de este capítulo se denotarán multiplicativamente.

Definición 1.0.1. *Un grupo topológico es un grupo G dotado de una topología para la cual las operaciones de grupo $m : G \times G \rightarrow G$, con $m(g, h) = gh$, e $\iota : G \rightarrow G$, con $\iota(g) = g^{-1}$, son continuas.*

Ejemplo 1.0.1. *Es trivial comprobar que:*

- *Todo grupo finito con la topología discreta es un grupo topológico.*
- *El grupo aditivo $(E, +)$ de todo espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es un grupo topológico.*
- *$(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo topológico respecto a la topología inducida por la norma euclídea.*
- *El grupo aditivo complejo $(\mathbb{C}, +)$ y el grupo aditivo cuaterniónico $(\mathbb{H}, +)$ son grupos topológicos con la topología usuales como espacios vectoriales.*
- *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach de dimensión finita. El grupo de invertibles $A^* = \{a \in A : b \in A \text{ con } ab = ba = 1\}$ es un grupo topológico con respecto a la topología inducida por la distancia $d(a, b) = \|a - b\|$.*
- *Dado que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ son álgebras asociativas de dimensión finita, los grupos multiplicativos de sus invertibles $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ y $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ son grupos topológicos.*
- *$(\mathbb{C}^*, \cdot)$ y $S^1 = \mathbb{T} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \forall \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^*$ es un grupo topológico abeliano con la multiplicación compleja.*
- *El grupo de los cuaterniones unitarios $\mathbb{H}_1 = \{q \in \mathbb{H} : q\bar{q} = 1\}$ es un grupo topológico.*
- *Sean $G_1, \dots, G_k$ un número finito de grupos topológicos, entonces el grupo $G_1 \times \dots \times G_k$ es un grupo topológico con la estructura topológica producto. En particular, los toros n -dimensionales $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ es un grupo topológico.*

- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Entonces, $Gl(n, \mathbb{K})$ con la topología inducida como abierto de $Mat(n \times n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2}$ es un grupo topológico. Los grupos matriciales clásicos de $Sl(n, \mathbb{K})$, $O(n, \mathbb{K})$, $SO(n, \mathbb{K})$, $U(n, \mathbb{K})$, $SU(n, \mathbb{K})$ son también grupos topológicos (y en particular, son grupos de Lie).

Observación 1.0.1. A partir de ahora, se denotará por e al elemento neutro del grupo topológico G . Además, si A y B son subconjuntos de G se definen $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$ y $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Dado $g \in G$ denotaremos $gA = \{ga : a \in A\}$ y $Ag = \{ag : a \in A\}$. Un subconjunto $A \subset G$ es simétrico si $A = A^{-1}$.

Proposición 1.0.1. Sea G un grupo topológico, entonces:

1. Si $U \subset G$ es abierto, entonces gU , Ug , U^{-1} son abiertos para todo $g \in G$. Y si $A \subset G$ es otro abierto, entonces AU y UA son abiertos.
2. Para todo entorno U del elemento neutro $e \in G$ existe un entorno simétrico V de e tal que $VV \subset U$.
3. Si H es un subgrupo de G , su cierre $\overline{H}$ también lo es.
4. Todo subgrupo abierto de G es cerrado.
5. Si A, B son conjuntos compactos de G , AB también es compacto.

Demostración: Las afirmaciones anteriores se comprueban de manera inmediata. Por ejemplo, la demostración de la cuarta propiedad es el siguiente argumento: sea $g \in G$ que no pertenezca a H , entonces $gH \cap H = \emptyset$. Como H es abierto, gH también lo es. Luego, las distintas clases de equivalencia del conjunto cociente son conjuntos abiertos de G . Podemos así descomponer G en subconjuntos gH abiertos y disjuntos entre sí. Concluimos por tanto que un complementario de H consiste en la unión de todos los subconjuntos gH con $g \notin H$ y por tanto, un abierto. ■

Definición 1.0.2. Sea G un grupo topológico. Se dice que un subconjunto $H \subset G$ es un subgrupo topológico si H es un subgrupo cerrado de G .

Observación 1.0.2. Sea G un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo. El conjunto cociente G/H dotado de la topología cociente hace que la aplicación natural $\pi : G \rightarrow G/H$ es continua.

Definición 1.0.3. Se dice que un grupo topológico G es localmente compacto si la topología asociada es localmente compacta; es decir, si para todo punto $g \in G$ y todo entorno V suyo, existe un conjunto compacto $K \subset V$ que contiene a dicho punto.

Ejemplo 1.0.2. Todos los grupos descritos en el ejemplo 1.0.1 son grupos topológicos localmente compactos, ya que en particular, son grupos de Lie.

Proposición 1.0.2. Sea G un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo. Se verifica:

1. Si H es cerrado, G/H es Hausdorff.
2. Si G es localmente compacto, también lo es G/H .

3. Si H es normal, G/H es un grupo topológico.

Ejemplo 1.0.3. El grupo $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ es un grupo topológico localmente compacto isomorfo, como grupo topológico, a $\mathbb{T}^n$.

Observación 1.0.3. A lo largo de esta memoria asumiremos que los grupos topológicos localmente compactos son también Hausdorff. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir esta condición, ya que si G es un grupo topológico localmente compacto que no fuese Hausdorff se puede construir el conjunto cociente $G/\overline{\{e\}}$. Como $\overline{\{e\}}$ es un subgrupo cerrado y normal en G , luego $G/\overline{\{e\}}$ es un grupo topológico, localmente compacto y Hausdorff.

Proposición 1.0.3. Sea G un grupo localmente compacto. Existe un subgrupo $H \subset G$ que es abierto, cerrado y es unión numerable de conjuntos compactos.

Demostración: Por ser G localmente compacto se puede escoger un entorno U del elemento neutro compacto y simétrico. Si denotamos $U_n = \underbrace{UU \dots U}_n$ con $n \in \mathbb{N}$, es fácil comprobar que U_n son abiertos simétricos y compactos por serlo U . Entonces, el grupo $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ cumple los requisitos. ■

1.1. Medida de Haar sobre grupos topológicos localmente compactos

Recordemos que dado un espacio topológico X , se llama σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}$ a la menor σ -álgebra sobre X que contiene todos los subconjuntos abiertos y dota a X de una estructura de espacio medible que denotamos $(X, \mathcal{B})$. Todo elemento de $\mathcal{B}$ se denomina conjunto Borel. (Veáse Anexo de esta memoria).

Una medida de Borel en $(X, \mathcal{B})$ viene dada por la aplicación $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$. Dicha medida se dice que es localmente finita si para cualquier $x \in X$ existe un entorno $U \subset X$ tal que $\mu(U) < \infty$.

Definición 1.1.1. Sea μ una medida localmente finita en $(X, \mathcal{B})$. Se dice que μ es una medida de Radón si

- $\forall B \in \mathcal{B}$ abierto o tal que $\mu(B) < \infty$, $\mu(B) = \sup_{K \subset B} \{\mu(K) : K \in \mathcal{B} \text{ compacto}\}$.
- $\forall B \in \mathcal{B}$, $\mu(B) = \inf_{B \subset U} \{\mu(U) : U \in \mathcal{B} \text{ abierto}\}$.

Veremos a continuación que los grupos topológicos localmente compactos Hausdorff pueden ser dotados de medidas de Radón que además son invariantes (bien por la derecha o bien por la izquierda) respecto de la estructura de grupo. Dichas medidas sobre la σ -álgebra de Borel asociada a la topología del grupo, se denominan medidas de Haar (invariantes a derecha o a izquierda).

Definición 1.1.2. Sea G un grupo topológico localmente compacto Hausdorff. Una medida de Haar por la izquierda sobre el grupo $(G, \mathcal{B})$ es una medida Radón no nula que verifica $\mu(gB) = \mu(B)$ para todo $g \in G$ y $B \in \mathcal{B}$.

De manera similar, se definen las medidas de Haar por la derecha en $(G, \mathcal{B})$ verificando $\mu(Bg) = \mu(B)$.

Observación 1.1.1. *Dicho de otra manera, una medida de Haar es una medida de Radón que es invariante por traslaciones en el grupo.*

Teorema 1.1.1. *Todo grupo topológico localmente compacto Hausdorff G admite una medida de Haar por la izquierda que es única salvo un factor multiplicativo positivo.*

Demostración: La demostración de este teorema no se incluye en la memoria debido a su extensión, pero puede encontrarse en las páginas 40-45 del [10] o bien teorema 1.3.4. del [8]. ■

Lema 1.1.1. *La existencia de una medida de Haar izquierda μ en un grupo topológico localmente compacto Hausdorff G implica la existencia de una medida de Haar derecha.*

Demostración: Dado un $B \in \mathcal{B}$ se define la siguiente medida en G :

$$\mu'(B) = \mu(B^{-1})$$

donde B^{-1} es el conjunto de inversos de elementos de B . Se comprueba fácilmente que μ' es una medida de Borel y además es una medida derecha de Haar ya que para todo $g \in G$:

$$\mu'(Bg) = \mu((Bg)^{-1}) = \mu(g^{-1}B^{-1}) = \mu(B^{-1}) = \mu'(B)$$

■

Sea G un grupo localmente compacto y sea μ una medida de Haar por izquierda. Para $g \in G$ se define la medida $\mu_g(B) = \mu(Bg)$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Es fácil ver que esta nueva medida es invariante por izquierda y por la unicidad de la medida de Haar debe existir un número $\Delta(g) > 0$ tal que $\mu_g = \Delta(g)\mu$ y que no depende de la elección inicial de la medida μ .

Definición 1.1.3. *La función $\Delta : G \rightarrow (0, \infty)$ se denomina función modular de G y verifica $\mu_g = \Delta(g)\mu$. Se dice que G es un grupo unimodular si verifica que $\Delta \equiv 1$. Dicho de otra manera, G es unimodular si la medida de Haar por la izquierda coincide con la medida de Haar por la derecha.*

Proposición 1.1.1. $\Delta : G \rightarrow (0, \infty)$ es un homomorfismo de grupos.

Demostración: Probaremos que Δ es continuo en el elemento neutro y en consecuencia continuo. Sea $\epsilon > 0$ y $K \subset G$ compacto tal que $\mu(K) > 0$. Entonces, por ser medida de Radón existe un $U \supset K$ tal que $\mu(U) < (1 + \epsilon)\mu(K)$. Por el lema del tubo, podemos encontrar un entorno simétrico V tal que $KV \subset U$ y por tanto, tenemos

$$\Delta(g)\mu(K) = \mu(Kg) \leq \mu(U) \leq (1 + \epsilon)\mu(K)$$

y análogamente

$$\frac{\mu(K)}{\Delta(g)} = \mu(Kg^{-1}) \leq \mu(U) \leq (1 + \epsilon)\mu(K)$$

Por lo que $\frac{1}{1+\epsilon} < \Delta(g) < 1 + \epsilon$ si $g \in V$. ■

Teorema 1.1.2. *Los grupos localmente compactos y abelianos, los grupos discretos y los grupos compactos son unimodulares.*

Demostración: Un grupo topológico localmente compacto y abeliano es claramente unimodular. En el caso en que G sea un grupo discreto también será localmente compacto de forma trivial y Hausdorff bajo la topología discreta. Sea una medida de Haar μ tal que $\mu(g) = 1 \quad \forall g \in G$. Ahora bien, por la invarianza por traslación izquierda debe asignar a cada elemento del grupo la misma medida y esta medida ha de ser única salvo por un factor multiplicativo, luego, se puede asignar el valor 1 a cada elemento. Por tanto, definiendo la medida $\mu_g(h) = \mu(hg)$ esta asigna el mismo valor 1 a todos los elementos; basta aplicar el mismo argumento que antes. Luego, $\mu_g = \mu$. Por último, para un grupo compacto G , por la continuidad de la función modular, $\Delta(G)$ es subgrupo compacto en $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Ahora bien, el único subgrupo compacto es $\{1\} \subset \mathbb{R}^+$. ■

1.2. Medidas integrales de Haar en grupos topológicos localmente compactos Hausdorff

Recordemos algunas nociones sobre medidas integrales.

Sea X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff y denotemos por $C(X)$ al espacio de funciones continuas a valores complejos sobre X y sea $C_c(X) \subset C(X)$ el subconjunto de las funciones con soporte compacto.

Para cada $f \in C(X)$ sea $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$.

Proposición 1.2.1. *El conjunto $B(X) = \{f \in C(X) : \|f\|_\infty < \infty\}$ es completo respecto de $\|\cdot\|_\infty$. En particular, si X es compacto $C(X) = C_c(X) = B(X)$.*

Demostración: La demostración se puede ver en apéndice 7 del libro [26]. ■

Definición 1.2.1. *Una medida integral compleja positiva en X es una funcional lineal $I : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $f \in C_c(X)$ a valores reales con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, entonces $I(f)$ es un valor real no negativo ($I(f) \geq 0$).*

Definición 1.2.2. *Una medida positiva en X es normal si para cada $f \in C_c(X)$ a valores reales no idénticamente nula tal que $f \geq 0$, entonces $I(f) \geq 0$.*

Observación 1.2.1. *Por el teorema de representación de Riesz nos garantiza que una integral Radón positiva I no es más que la integral asociada a una medida de Borel regular μ sobre X , por lo que se suele denotar:*

$$I(f) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

La siguiente proposición resume algunas de las propiedades de estas integrales de Radón.

Proposición 1.2.2. *Sea I una medida integral de Radón positiva sobre X . Entonces;*

1. *Si f, g son funciones reales tales que $f \leq g$, entonces $I(f) \leq I(g)$.*
2. *Para todo $f \in C_c(X)$ se verifica que $|I(f)| \leq I(|f|)$.*
3. *La aplicación $f \rightarrow I(f)$ es continua en $C_c(X)$.*

Demostración:

1. La primera afirmación es consecuencia de que $g - f \geq 0$ y la definición de I .
2. Supongamos primero que f es una función a valores reales. Se definen las funciones continuas $f_+ = \max(f, 0)$ y $f_- = \max(-f, 0)$, es claro que $f = f_+ - f_-$ y $|f| = f_+ + f_-$. Luego, se tiene

$$|I(f)| = |I(f_+) - I(f_-)| \leq I(f_+) + I(f_-) = I(|f|)$$

Supongamos ahora el caso en que f es una función a valores complejos tal que $I(f) \in \mathbb{R}$. Entonces, $I(\operatorname{Im} f) = 0$ y por tanto,

$$|I(f)| = |I(\operatorname{Re} f)| \leq I(|\operatorname{Re} f|) \leq I(|f|)$$

Sea ahora una f una función compleja arbitraria. Entonces, existe un $z \in \mathbb{C}$ con $\|z\| = 1$ tal que $zI(f) \geq 0$. Entonces, $(I(zf)) \in \mathbb{R}$ y por tanto, $|I(f)| = |I(zf)| \leq I(|zf|) = I(|f|)$.

3. Veamos el último resultado. Sea $K \subset X$ un subconjunto compacto. Entonces, debemos demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $f \in C_c(K)$ se verifique que $|I(f)| \leq C\|f\|_\infty$. Tomemos una función $h \in C_c(X)$ a valores reales no negativa tal que $h = 1$ en K . Luego, para todo $f \in C_c(K)$ se tiene $\|f\| = \|f\|h \leq \|f\|_\infty h$ de donde se sigue que

$$\|I(f)\| \leq I(\|f\|) \leq \|f\|_\infty I(h)$$

por lo que se tiene la estimación deseada. ■

Corolario 1.2.1. *Si $K \subset X$ es compacto, existe una constante C_K tal que si $f \in C_c(X)$ tiene $\operatorname{supp} f \subset K$, entonces $\|I(f)\| \leq C_K\|f\|_\infty$.*

1.3. Medidas integrales invariantes

En lo que sigue G es un grupo topológico que opera de manera continua de manera continua en un espacio topológico X ; esto es existe una acción $G \times X \rightarrow X$ que es continua con la topología producto en $G \times X$. Diremos entonces que X es un G -espacio.

Denotemos por L la acción natural inducida de G en $C(X)$ definida por $L_g f(x) = f(g^{-1}x)$.

Proposición 1.3.1. *Si X es un G -espacio localmente compacto Hausdorff y $f \in C_c(X)$. Entonces, la aplicación $G \rightarrow C_c(X)$, dada por $g \rightarrow L_g f$, es continua.*

Demostración: Sea $g_0 \in G$ y hay que ver que si $g \rightarrow g_0$, entonces $L_g f \rightarrow L_{g_0} f$. Luego, $L_g f - L_{g_0} f = L_{gg_0^{-1}} \hat{f} - \hat{f}$, siendo $\hat{f} = L_{g_0} f$ y podemos asumir sin pérdida de generalidad que $g_0 = e$. Sea ahora un entorno compacto $C \subset G$ de e y se tiene que el conjunto $K = C \cdot (\text{sop} f)$ es compacto en X . Además, para cada $g \in C$ la función $L_g f - f$ tiene soporte contenido en K . Fijando un $\epsilon > 0$ se tiene que existe un entorno abierto U de e en C tal que

$$\|L_g f - f\|_K = \sup_{x \in K} \|L_g f(x) - f(x)\| < \epsilon$$

para todo $x \in U$. La función $(g, x) \rightarrow f(g^{-1}x)$ es continua, luego, para todo $x \in K$ existe un entorno abierto $N_x \subset X$ de x y un entorno abierto $U_e^{(x)}$ de e contenido en $C \subset G$, tal que $\|f(g^{-1}y) - f(y)\| < \epsilon$ para todo $y \in N_x$, $g \in U_e^{(x)}$. Por la compacidad de K existe una colección finita $x_1, \dots, x_n$ de puntos en K tales que los conjuntos N_{x_j} recubren K . Sea U la intersección de los conjuntos $U_e^{(x_j)}$ y entonces, U es un entorno abierto de e en G buscado. ■

Corolario 1.3.1. *Sea X un G -espacio localmente compacto Hausdorff y sea I una integral Radón positiva en X . Entonces, para cada $f \in C_c(X)$ la función $G \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $g \rightarrow I(L_g f)$ es una función continua.*

Definición 1.3.1. *Una medida integral Radón positiva I en un G -espacio localmente compacto Hausdorff es G -invariante si para todo $f \in C_c(X)$ y todo $g \in G$ se verifica*

$$I(L_g f) = I(f)$$

Observación 1.3.1. *Si μ denota la medida Radón en X asociada a I , la condición de G -invariancia se expresa de la siguiente manera*

$$\int_X f(g^{-1}x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

Lema 1.3.1. *Sea I una medida integral Radón positiva G -invariante no trivial en un G -espacio homogéneo X localmente compacto Hausdorff. Sea $f \in C_c(X)$ una función a valores reales tal que $f \geq 0$. Entonces, $I(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.*

Corolario 1.3.2. *En las hipótesis del lema anterior la aplicación*

$$\langle f|g \rangle = I(f\bar{g}) = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$$

define un producto interior hermítico definido positivo en $C_c(X)$.

La completación de $C_c(X)$ con este producto interior la denotaremos por $L^2(X)$. Entonces, la invarianza de la medida integral hace que la aplicación $L_g : C_c(X) \rightarrow C_c(X)$ sea unitaria que define una única extensión a una aplicación $L_g : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ que es unitaria.

Esta situación ocurrirá cuando $X = G$ es un grupo topológico localmente compacto Hausdorff y G opera en sí mismo transitivamente por traslaciones a izquierda o a derecha. Por tanto, G es un G -espacio homogéneo respecto a dichas acciones.

Definición 1.3.2. *Sea G un grupo topológico localmente compacto Hausdorff. Una medida integral de Haar por la izquierda (respectivamente, por la derecha) en G es una medida integral Radón positiva no trivial invariante bajo traslaciones a izquierda (respectivamente, derecha) del grupo G .*

Teorema 1.3.1. *Todo grupo topológico localmente compacto Hausdorff G admite una medida integral de Haar por la izquierda que es única salvo una constante positiva.*

Demostración: La demostración de este teorema no se incluye en la memoria debido a su extensión, pero puede encontrarse en las páginas 40-45 del [10] o bien teorema 1.3.4. del [8]. ■

Capítulo 2

Representaciones unitarias de los grupos topológicos localmente compactos Hausdorff

2.1. Representaciones complejas finitas de grupos

Recogemos en esta sección ciertas definiciones y nociones elementales de teoría de representaciones complejas finitas de grupos desarrolladas en el grado para posteriormente centrarnos en los grupos topológicos localmente compactos Hausdorff.

Definición 2.1.1. *Una representación compleja de un grupo G en un espacio vectorial complejo E de dimensión finita es un homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned}\rho: G &\longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(E) \\ g &\longmapsto \rho_g = \rho(g)\end{aligned}$$

donde $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$ es el grupo de los automorfismos lineales de E . La dimensión de la representación es la dimensión del espacio vectorial E .

Cuando el grupo G se sobreentienda denotaremos por (ρ, E) a las representaciones compleja de dicho grupo.

Observación 2.1.1. *Notése que toda representación no es más que una acción lineal de G en un espacio vectorial. Claramente, si ρ es una representación lineal se verifica que $\rho_{g_1 g_2} = \rho_{g_1} \circ \rho_{g_2}$, $\rho_e = \text{Id}_E$ y $\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1}$. Fijada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en E denotemos por $A(g) \in \text{Gl}(n, \mathbb{C})$ a la matriz asociada al automorfismo ρ_g en dicha base. Entonces, la representación ρ viene determinada por el homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned}\rho: G &\longrightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{C}) \\ g &\longmapsto A(g) = (A(g)_{ij})\end{aligned}$$

con $\rho_g(e_i) = \sum_{j=1}^n A(g)_{ij} e_j$.

Ejemplo 2.1.1. *Algunos ejemplos de representaciones complejas son:*

1. La aplicación $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$ definida como $\rho_g = \text{Id}$ para todo $g \in G$ es una

representación a la que llamaremos representación trivial.

2. Dada una representación finita $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$ se induce una en el espacio dual E^* denominada representación contragradiente $\rho^* : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(E^*)$ definida como $\rho_g^* \omega = \omega \circ \rho_{g^{-1}} = \rho_{g^{-1}}^t \omega$ para todo $g \in G$ y todo $\omega \in E^*$.
3. Dadas dos representaciones $(\rho^{(1)}, E_1)$, $(\rho^{(2)}, E_2)$ de un mismo grupo G se definen
 - La representación suma directa $(\rho^{(1)} \oplus \rho^{(2)}, E_1 \oplus E_2)$ mediante

$$(\rho^{(1)} \oplus \rho^{(2)})_g = \rho_g^{(1)} \oplus \rho_g^{(2)}$$

- La representación producto tensorial $(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}, E_1 \otimes E_2)$ mediante

$$(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)})_g = \rho_g^{(1)} \otimes \rho_g^{(2)}$$

- La representación de G en el espacio $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_1, E_2)$ definida por

$$g \cdot \varphi = \rho_g^{(2)} \circ \varphi \circ \rho_{g^{-1}}^{(1)} \quad \forall g \in G, \varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_1, E_2)$$

Se dice que una aplicación lineal $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_1, E_2)$ es invariante bajo la acción de G si $g \cdot \varphi = \varphi$ para todo $g \in G$; es decir, si

$$\varphi \circ \rho_g^{(1)} = \rho_g^{(2)} \circ \varphi$$

Tales aplicaciones se dice que son equivariantes respecto de las representaciones dadas.

4. Dada una representación (ρ, E) de G se inducen representaciones o acciones lineales en los espacios de tensores de tipo (r, s) de E .

$$\begin{aligned} G \times T_r^s(E) &\longrightarrow T_r^s(E) \\ (g, T_r^s) &\longmapsto g \cdot T_r^s \end{aligned}$$

con

$$(g \cdot T_r^s)(e_1, \dots, e_r, \omega_1, \dots, \omega_s) \equiv T_r^s(\rho_{g^{-1}}(e_1), \dots, \rho_{g^{-1}}(e_r), \rho_{g^{-1}}^*(\omega_1), \dots, \rho_{g^{-1}}^*(\omega_s))$$

donde $e_1, \dots, e_r \in E$ y $\omega_1, \dots, \omega_s \in E^*$. (Notése que $\rho_{g^{-1}}^* \omega = \rho_g^t \omega$). En particular, la restricción de esta acción lineal al espacio de tensores r -covariantes induce una representación de G en el espacio de tensores hemisimétricos r -covariantes $\Omega_r(E)$.

5. Sea G un grupo finito y consideremos el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial complejo de dimensión finita $F(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ aplicaciones}\}$. Es fácil ver que $\dim F(G) = |G|$ y una base de este espacio viene dada por las aplicaciones

$$\begin{aligned} f_{g_i} : \quad G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g_j &\longmapsto f_{g_i}(g_j) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

para cada $g_i \in G$. Entonces, se define la siguiente representación lineal

$$\begin{aligned} \rho^L: \quad G &\longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(F(G)) \\ g &\longmapsto L_g \end{aligned}$$

donde $(L_g f)(h) = f(g^{-1}h)$ para toda $f \in F(G)$ y $h \in G$. Esta representación es la que se denomina representación regular por la izquierda del grupo G .

6. Sea $H^{(n)} = \{z^k : 0 \leq k \leq n\}$ el espacio vectorial complejo de todas las funciones holomorfas polinómicas en una variable de grado menor o igual que n . El grupo $SU(2)$ opera linealmente en dicho espacio mediante

$$[g \cdot p](z) = (-\beta z + \alpha)^n p\left(\frac{\bar{\alpha}z + \bar{\beta}}{-\beta z + \alpha}\right)$$

para cada $g = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$ y $p = p(z) \in H^{(n)}$. Se tiene así una representación de dimensión $n+1$ de dicho grupo.

Definición 2.1.2. Sea (ρ, E) una representación lineal finita de un grupo G . Se dice que un subespacio $E' \subseteq E$ es un subespacio invariante (estable) con respecto a ρ si para todo $e' \in E'$ y $g \in G$, entonces $\rho_g(e') \in E'$.

Observación 2.1.2. Si $E' \subseteq E$ es un subespacio invariante por una representación (ρ, E) de G , entonces se induce una representación lineal $\bar{\rho}$ de G en el espacio vectorial cociente E/E' mediante $\bar{\rho}_g(\pi(e)) = \pi(\rho_g(e))$, siendo $\pi : E \rightarrow E/E'$ la proyección lineal canónica.

Observación 2.1.3. Toda representación (ρ, E) de G tiene al menos dos subespacios invariantes: el subespacio nulo $\{0\}$ y el total E , denominados subespacios invariantes triviales.

Definición 2.1.3. Dado un subespacio $E' \subseteq E$ invariante respecto de una representación (ρ, E) de un grupo G , la restricción de cada ρ_g al subespacio E' define una representación (ρ', E') de G que se denomina subrepresentación de la representación ρ .

Definición 2.1.4. Se dice que una representación (ρ, E) de un grupo G es (algebraicamente) irreducible si los únicos subespacios invariantes son los triviales. En caso contrario, diremos que (ρ, E) es (algebraicamente) reducible.

Definición 2.1.5. Diremos que dos representaciones $(\rho^{(1)}, E_1)$, $(\rho^{(2)}, E_2)$ de un mismo grupo G son equivalentes si existe un isomorfismo lineal $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ tal que

$$\sigma \circ \rho_g^{(1)} = \rho_g^{(2)} \circ \sigma$$

para todo $g \in G$. En tal caso escribiremos que $\rho^1 \simeq \rho^2$. Observemos que esta noción define una relación de equivalencia en el conjunto de todas las representaciones de G .

Si el espacio complejo E posee además una métrica hermitica $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ (lineal en el primer factor y antilineal en el segundo), podemos introducir la noción de representación

unitaria

Definición 2.1.6. Se dice que una representación compleja ρ de G en el espacio hermitico $(E, \langle, \rangle)$ es unitaria si ρ_g es un operador lineal unitario para todo $g \in G$; esto es, $\langle \rho_g(e_1), \rho_g(e_2) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$ para todo $e_1, e_2 \in E$.

Observación 2.1.4. Dado un vector e en un espacio hermitico $(E, \langle, \rangle)$, recordemos que su módulo es el número real $\|e\| = \sqrt{\langle e, e \rangle}$. Luego, si ρ es unitaria, para todo $g \in G$ se tiene que $\|\rho_g(e)\| = \|e\|$. En particular, si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal respecto de la métrica hermitica, entonces, la matriz $A(g)$ asociada a ρ_g en dicha base es una matriz unitaria; esto es, $A(g)^\dagger A(g) = Id$ y $A(g)_{ij} = \langle \rho_g(e_i), e_j \rangle$. Por tanto, la representación viene definida por un homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow U(n)$.

Lema 2.1.1. Sea (ρ, E) una representación unitaria finita de un grupo G y $E' \subset E$ un subespacio invariante. Entonces, el subespacio ortogonal $(E')^\perp$ respecto de la métrica hermitica es también invariante e induce una subrepresentación $((\rho')^\perp, (E')^\perp)$ de G .

Demostración: Por ser ρ unitaria se verifica que $\langle \rho_g(e), v \rangle = \langle e, \rho_{g^{-1}}(v) \rangle$ para todo $e, v \in E$. En particular, tomando $e \in E'$ y $v \in (E')^\perp$ y teniendo en cuenta que por ser E' invariante, $\rho_g(e) \in E'$ y por tanto, $\langle \rho_g(e), v \rangle = 0$, luego $\rho_{g^{-1}}(v) \in (E')^\perp$ para todo $v \in E'$ y todo $g^{-1} \in G$. Se concluye así que $(E')^\perp$ es invariante. ■

Proposición 2.1.1. Sea (ρ, E) una representación unitaria finita de un grupo G , entonces dicha representación es equivalente a una suma directa de subrepresentaciones irreducibles.

Demostración: Por inducción sobre la dimensión n de E . Si E es de dimensión 1, entonces (ρ, E) es irreducible. Supongamos que el resultado es cierto para representaciones unitarias de dimensión $n - 1$. Si (ρ, E) hemos terminado. Supongamos ahora que E admite un subespacio invariante no trivial E' , entonces $E = E' \oplus (E')^\perp$ y por tanto, $\rho \simeq \rho' \oplus (\rho')^\perp$. La proposición se concluye por la finitud del espacio y la hipótesis de inducción. ■

Definición 2.1.7. Se dice que dos representaciones finitas unitarias $(\rho^{(1)}, E_1)$, $(\rho^{(2)}, E_2)$ son unitariamente equivalentes si existe un morfismo lineal hermitico $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ tal que

$$\sigma \circ \rho_g^{(1)} = \rho_g^{(2)} \circ \sigma$$

Lema 2.1.2 (Lema de Schur). Sean $(\rho^{(1)}, E_1)$, $(\rho^{(2)}, E_2)$ dos representaciones finitas unitarias e irreducibles de un grupo G y sea $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_1, E_2)$ una aplicación lineal tal que

$$\sigma \circ \rho_g^{(1)} = \rho_g^{(2)} \circ \sigma \quad \text{para todo } g \in G$$

Entonces, o bien $\sigma = 0$, o bien σ es un isomorfismo. Si $E_2 = E_1$ y $\rho^{(2)} \simeq \rho^{(1)}$ y σ no nulo, entonces $\sigma = \lambda Id$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración: Como σ es una aplicación equivariante respecto las dos representaciones, es trivial comprobar que su núcleo $\ker \sigma$ y su imagen $\text{Im } \sigma$ son subespacios invariantes de E_1 y de E_2 , respectivamente. Como $\rho^{(1)}$ es irreducible se deduce que o bien $\ker \sigma = E_1$,

o bien $\ker \sigma = (0)$. En el primer caso, $\sigma = 0$. En el segundo, σ es inyectiva y además, como $\operatorname{Im} \sigma$ es no nula, $\operatorname{Im} \sigma = E_2$ por la irreducibilidad de $\rho^{(2)}$. Concluyéndose con ello que σ es isomorfismo lineal y por tanto, en esta situación las representaciones $\rho^{(1)}$ y $\rho^{(2)}$ son equivalentes.

Consideremos $E_2 = E_1$ y $\rho^{(2)} \simeq \rho^{(1)}$, entonces, $\sigma \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E_1)$ admite al menos un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, al ser un endomorfismo de un espacio vectorial complejo. Denotemos por $E(\lambda)$ el subespacio de autovectores asociado a λ , es decir;

$$E(\lambda) = \{e_1 \in E_1 : \sigma(e_1) = \lambda e_1\}$$

Es trivial comprobar que es invariante al ser σ equivariante, respecto a $\rho^{(1)}$. Como la representación es irreducible, $E(\lambda) = E_1$, ya que por definición de autovalor existe un vector $e_1 \in E_1$ no nulo tal que $\sigma(e_1) = \lambda e_1$, luego, $E(\lambda)$ no puede ser el subespacio $\{0\}$. Se concluye así que el isomorfismo $\sigma = \lambda Id$, con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. ■

Observación 2.1.5. *Si (ρ, E) es una representación finita unitaria de un grupo G , la métrica hermítica es invariante por la acción del grupo. Si la representación es irreducible se puede demostrar que cualquier otra métrica hermítica en E que sea invariante por la acción del grupo es un múltiplo real de la inicial. Este hecho se puede utilizar para demostrar que dos representaciones finitas unitarias irreducibles equivalentes de un grupo G son también unitariamente equivalentes. Véanse lema 2.3.8 y lema 2.3.9 de [26], donde se encuentran las demostraciones de estos hechos.*

2.2. Representaciones de grupos topológicos en espacios de Hilbert

En esta sección, $(\mathcal{H}, \langle, \rangle)$ denotará un espacio de Hilbert que asumiremos separable (esto es, contiene un subconjunto denso numerable). Recordemos que por una base ortonormal en $(\mathcal{H}, \langle, \rangle)$ entendemos un conjunto de elementos numerables $\{\xi_n\}_{n=1}$ de $\mathcal{H}$ tales que $\langle \xi_n, \xi_m \rangle = \delta_{nm}$ y el subespacio lineal generado por $\{\xi_n\}_{n=1}$ es denso en $\mathcal{H}$. Un resultado conocido es que un espacio de Hilbert posee bases ortonormales sí y solo sí es separable. Además, en esta situación si $\xi \in \mathcal{H}$ es tal que $\langle \xi, \xi_n \rangle = 0$ para todo n , entonces $\xi = 0$ y la serie $\sum_{n=1} \langle \xi, \xi_n \rangle \xi_n$ converge a ξ .

De igual manera, a partir de ahora y mientras no se señale lo contrario, G denotará un grupo topológico localmente compacto Hausdorff, lo que denotaremos por simplicidad mediante las siglas LCH.

Definición 2.2.1. *Denotemos por $L(\mathcal{H})$ al conjunto de los operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$. Una representación de un grupo G topológico LCH en $\mathcal{H}$ es una aplicación*

$$\begin{aligned} \rho: \quad G &\longrightarrow L(\mathcal{H}) \\ g &\longmapsto \rho_g = \rho(g) \end{aligned}$$

verificando

1. $\rho_{g_1 g_2} = \rho_{g_1} \circ \rho_{g_2}$ y $\rho_e = Id_{\mathcal{H}}$ para todo $g_1, g_2 \in G$.
2. Para todo $\xi \in \mathcal{H}$ la aplicación $G \rightarrow \mathcal{H}$, dada por $g \mapsto \rho_g(\xi)$, es continua.

En la literatura, cuando se verifica la segunda condición se dice que la representación es fuertemente continua. En esta situación, se verifica que para cualquier $g_0 \in G$ y $\xi \in \mathcal{H}$, se verifica que

$$\|\rho_g(\xi) - \rho_{g_0}(\xi)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } g \rightarrow g_0$$

La condición de que la representación sea fuertemente continua impuesta en la definición es equivalente a una condición aparentemente más fuerte que veremos en la siguiente proposición y que es utilizada alternativamente en la definición de representación de grupos topológicos.

Proposición 2.2.1. *Sea $\rho : G \rightarrow L(\mathcal{H})$ un morfismo de grupos, entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. La aplicación ρ es fuertemente continua.
2. La aplicación $G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dada por $(g, \xi) \mapsto \rho_g(\xi)$ es continua.

Demostración: Claramente, si la aplicación $G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es continua, entonces ρ es fuertemente continua.

Supongamos ahora que ρ es fuertemente continua. Es necesario demostrar que si $g \rightarrow g_0$ en G y $\xi \rightarrow \xi_0$ en $\mathcal{H}$, entonces,

$$\rho_g(\xi) \rightarrow \rho_{g_0}(\xi_0)$$

Ahora bien, por ser G un grupo topológico localmente compacto podemos tomar un entorno compacto K del punto $g_0 \in G$. Dado $\xi \in \mathcal{H}$, el conjunto $S = \{\rho_g(\xi) : g \in K\}$ es un subconjunto compacto por ser ρ fuertemente continua. Utilizando el principio de acotación uniforme (véase apéndice A.4 de [2]) permite asegurar que existe una constante C tal que $\|\rho_g\| \leq C$ para todo $g \in K$.

Luego, podemos asumir que $g \in K$ y por tanto:

$$\begin{aligned} \|\rho_g(\xi) - \rho_{g_0}(\xi_0)\| &\leq \|\rho_g(\xi) - \rho_g(\xi_0)\| + \|\rho_g(\xi_0) - \rho_{g_0}(\xi_0)\| \\ &\leq C\|\xi - \xi_0\| + \|\rho_g(\xi_0) - \rho_{g_0}(\xi_0)\| \end{aligned}$$

El primer término tiende a 0 cuando $\xi \rightarrow \xi_0$ y el segundo término tiende a 0 por ser fuertemente continua. Luego, la aplicación $(g, \xi) \mapsto \rho_g(\xi)$ de $G \times \mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ es continua. ■

Definición 2.2.2. *Una representación se dice acotada si $\sup \|\rho_g\| < \infty$.*

En la demostración de la proposición anterior hemos visto que $\|\rho_g\| \leq C$ cuando $g \in K$, siendo K un entorno compacto de un punto arbitrario $g_0 \in G$. Por tanto, una representación de un grupo topológico localmente compacto y separable está acotada en cualquier subconjunto compacto $K \subset G$.

Observación 2.2.1. *Consideremos el grupo real aditivo $G = (\mathbb{R}, +)$ y cualquier espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, para cualquier número real no nulo $a \in \mathbb{R}^*$ fijo, las aplicaciones*

$\rho^{(1)}, \rho^{(2)} : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ dadas por:

- $\rho_x^{(1)} = e^{iax} \text{Id}_{\mathcal{H}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- $\rho_x^{(2)} = e^{ax} \text{Id}_{\mathcal{H}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$

verifican las condiciones $\rho_{x_1+x_2} = \rho_{x_1} \circ \rho_{x_2}$ y $\rho_0 = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y son fuertemente continuas. Mientras que los operadores $\rho_x^{(1)}$ son operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$ (por tanto, $\rho^{(1)}$ define una representación de $\mathbb{R}$), los operadores $\rho_x^{(2)}$ no están acotados para todo $x \in \mathbb{R}$ (aunque, lo estaría sobre un subconjunto acotado del grupo aditivo $\mathbb{R}$), por lo que $\rho^{(2)}$ no es una representación del grupo topológico $(\mathbb{R}, +)$ en el sentido de esta memoria.

Denotemos por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ al conjunto de los operadores lineales acotados unitarios del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Definición 2.2.3. Diremos que una representación de un grupo G topológico LCH en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es unitaria si ρ_g , para todo $g \in G$, es un operador unitario.

Por tanto, una representación unitaria viene definida por un morfismo $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ fuertemente continuo.

Proposición 2.2.2. Si ρ es una representación unitaria de G en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, se verifica

1. Para cualquier $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$\langle \rho_g(\xi), \eta \rangle \rightarrow \langle \rho_{g_0}(\xi), \eta \rangle \quad \text{cuando } g \rightarrow g_0$$

2. La función $g \mapsto \langle \rho_g(\xi), \xi \rangle$ es continua en el elemento neutro $e \in G$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Observación 2.2.2. Supongamos que $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es un morfismo de grupos tal que para cualquier $\xi \in \mathcal{H}$ la función $f^{(\xi)} : G \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f^{(\xi)}(g) = \langle \rho_g(\xi), \xi \rangle$ es continua en el elemento neutro $e \in G$. Entonces, para cualquier $g, g_0 \in G$

$$\begin{aligned} \|\rho_g(\xi) - \rho_{g_0}(\xi)\|^2 &= \langle \rho_g(\xi), \rho_g(\xi) \rangle - \langle \rho_g(\xi), \rho_{g_0}(\xi) \rangle - \langle \rho_{g_0}(\xi), \rho_g(\xi) \rangle + \langle \rho_{g_0}(\xi), \rho_{g_0}(\xi) \rangle \\ &= 2\langle \xi, \xi \rangle - 2\text{Re}\langle \rho_{g_0}(\xi), \rho_g(\xi) \rangle \leq 2|\langle \xi, \xi \rangle - \langle \rho_{g_0}(\xi), \rho_g(\xi) \rangle| \\ &= 2|\langle \xi, \xi \rangle - \langle \rho_{g^{-1}g_0}(\xi), \xi \rangle| \end{aligned}$$

Luego, si $g \rightarrow g_0$ y $f^{(\xi)}$ es continua en e se tiene $\langle \rho_{g^{-1}g_0}(\xi), \xi \rangle \rightarrow \langle \rho_e(\xi), \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle$ y consecuentemente $\|\rho_g(\xi) - \rho_{g_0}(\xi)\| \rightarrow 0$ y ρ es una representación fuertemente continua y unitaria.

Ejemplo 2.2.1. Sea G un grupo topológico LCH que opera continuamente en un espacio localmente compacto medible (X, μ) dejando dicha medida invariante. Se define una acción de G en el espacio de Hilbert separable $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$ mediante

$$(\rho_g^L f)(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{para todo } g \in G, x \in X, f \in L^2(X, \mu)$$

ya que claramente cada ρ_g^L es un operador lineal y como

$$(\rho_{gh}^L f)(x) = f((gh)^{-1}x) = f(h^{-1}g^{-1}x) = (\rho_h^L f)(g^{-1}x) = (\rho_g^L(\rho_h^L f))(x)$$

$$(\rho_e^L f)(x) = f(x)$$

se tiene que $\rho_{gh}^L = \rho_g^L \rho_h^L$ y $\rho_e^L = Id$. Veamos ahora que la aplicación ρ^L define una representación unitaria de G en el espacio $L^2(X, \mu)$. Para ello, tendremos presente que el espacio $L^2(X, \mu)$ es la completación del espacio prehilbertiano $C_c(X)$ de las funciones continuas complejas de X con soporte compacto con el producto $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_X f_1(x) \overline{f_2(x)} d\mu(x)$.

- La invarianza de la medida implica que

$$\langle \rho_g^L(f_1), \rho_g^L(f_2) \rangle = \int_X f_1(g^{-1}x) \overline{f_2(g^{-1}x)} d\mu(x) = \langle f_1, f_2 \rangle$$

por lo que ρ^L es una isometría y como el dominio de ρ_g^L es igual a $L^2(X, \mu)$, luego ρ^L es unitaria.

- Si $f \in C_c(X)$, entonces $\sup \|f(g^{-1}x) - f(x)\| \rightarrow 0$ cuando $g \rightarrow e$ (ya que toda función continua definida en un subconjunto compacto de un grupo topológico es uniformemente continua en dicho compacto). Además, cuando g está suficientemente cerca del elemento neutro $e \in G$, existe un subconjunto compacto $K \subset X$ dentro del soporte de f y del soporte de $\rho_g^L(f)$. Entonces, cuando $g \rightarrow e$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\rho_g^L(f) - \rho_e^L(f)\| &= \|\rho_g^L(f) - f\| = \left[\int_X \|f(g^{-1}x) - f(x)\|^2 d\mu(x) \right]^{1/2} \\ &\leq \max_{x \in K} \|f(g^{-1}x) - f(x)\| \sqrt{\mu(K)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Lo que demuestra la continuidad fuerte de la aplicación $g \mapsto \rho_g^L(f)$ en el elemento neutro $e \in G$. La continuidad en cualquier otro punto $g_0 \in G$ se deduce sustituyendo f por $L_{g_0}(f)$ en el argumento anterior.

Si ahora $\hat{f} \in L^2(X, \mu)$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $f \in C_c(X)$ tal que $\|\hat{f} - f\| < \epsilon$. Luego,

$$\|\rho_g^L(\hat{f}) - \rho_e^L(\hat{f})\| = \|\rho_g^L(\hat{f}) - \hat{f}\| \leq \|\rho_g^L(\hat{f} - f)\| + \|\rho_g^L(f) - f\| + \|f - \hat{f}\|$$

Como ya hemos visto, la invarianza de μ bajo la acción de G implica que los operadores ρ_g^L son unitarios, por lo que $\|\rho_g^L(\hat{f} - f)\| = \|\hat{f} - f\|$. Se tiene así que

$$\|\rho_g^L(\hat{f}) - \hat{f}\| \leq 2\epsilon + \|\rho_g^L(f) - f\|$$

Luego, si g está suficientemente cerca de $e \in G$ se cumple $\|\rho_g^L(\hat{f}) - \hat{f}\| \leq 3\epsilon$, ya que $\|\rho_g^L(f) - f\| \rightarrow 0$ cuando $g \rightarrow e$ pues $f \in C_c(X)$. Con ello hemos demostrado que para cada $\hat{f} \in L^2(X, \mu)$, la aplicación $g \mapsto \rho_g^L(\hat{f})$ es fuertemente continua.

Con ello obtenemos una representación unitaria fuertemente continua del grupo G topológico LCH en el espacio de Hilbert $L^2(X, \mu)$.

Ejemplo 2.2.2. Sea (G, μ_{Haar}) un grupo topológico LCH provisto de la medida de Haar por la izquierda (normalizada a la unidad). Las traslaciones a izquierda de G definen una acción continua de G en (G, μ_{Haar}) dejando invariante la medida de Haar por la izquierda. Obtenemos un caso particular del ejemplo anterior. Esto es la acción por traslaciones a izquierda de un grupo topológico LCH determina una representación unitaria de dicho grupo G en el espacio de Hilbert $L^2(G, \mu_{\text{Haar}})$ denominada representación regular por la izquierda del grupo G .

De manera similar, tomando la medida de Haar por la derecha (normalizada también a la unidad) en G y considerando las traslaciones a derecha en el grupo se obtiene una nueva representación unitaria de G denominada regular por la derecha del grupo G .

Definición 2.2.4. Se dice que una representación ρ de un grupo G topológico LCH en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es (topológicamente) irreducible si no tiene subespacios cerrados invariantes no triviales. En caso contrario, se dice que la representación ρ es (topológicamente) reducible.

Si $\mathcal{H}'$ es un subespacio invariante cerrado respecto a la representación $(\rho, \mathcal{H})$ de G y $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ denota el operador de proyección, entonces $\pi \circ \rho_g = \rho_g \circ \pi$ para todo $g \in G$.

Definición 2.2.5. Si una representación $(\rho, \mathcal{H})$ unitaria de un grupo G topológico LCH en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, admite un subespacio invariante cerrado $\mathcal{H}'$, la restricción de la representación a dicho subespacio define una nueva representación unitaria de G que denotaremos $(\rho', \mathcal{H}')$, donde $\rho'_g = (\rho_g)|_{\mathcal{H}'}$. Tales representaciones se denominan subrepresentaciones de $(\rho, \mathcal{H})$.

Observación 2.2.3. Anteriormente vimos que dada una representación unitaria de un grupo G que posee un subespacio invariante $\mathcal{H}'$ no trivial, el subespacio ortogonal $(\mathcal{H}')^\perp$ es invariante. Este resultado sigue siendo cierto cuando G es un grupo topológico LCH. Además, si $\mathcal{H}'$ es cerrado, su ortogonal también es cerrado y se verifica que $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$ (véase lema A.6.2.15 del apéndice 6 en el libro [26]).

Definición 2.2.6. Sea una familia arbitraria de espacios de Hilbert $\{(\mathcal{H}_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_i})\}_{i \in I}$, se define su suma directa:

$$\bigoplus_i \mathcal{H}_i = \left\{ \xi = \prod_{i \in I} \xi_i : \xi_i \in \mathcal{H}_i, \sum_{i \in I} \|\xi_i\|^2 < \infty \right\}$$

con el producto hermitico definido por

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\bigoplus_i \mathcal{H}_i} = \sum_{i \in I} \langle \xi_i, \eta_i \rangle_{\mathcal{H}_i}, \quad \forall \xi, \eta \in \bigoplus_i \mathcal{H}_i$$

Proposición 2.2.3. Se tiene que $(\bigoplus_i \mathcal{H}_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\bigoplus_i \mathcal{H}_i})$ es un espacio de Hilbert.

Observación 2.2.4. Cada espacio de Hilbert $\mathcal{H}_i$ puede ser entendido como un subespacio de $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$. Además, si $i \neq j$, los subespacios $\mathcal{H}_i$ y $\mathcal{H}_j$ son ortogonales respecto de la métrica hermitica $\langle, \rangle_{\bigoplus_i \mathcal{H}_i}$.

Definición 2.2.7. Se dice que un espacio de Hilbert es suma directa ortogonal de una familia de subespacios cerrados $\{\mathcal{H}'_i\}_{i \in I}$ y lo denotaremos por $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}'_i$ si se cumplen

1. $\mathcal{H}'_i \perp \mathcal{H}'_j$ para $i \neq j$.
2. Si denotamos $\pi_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'_i$ la proyección ortogonal para cada $i \in I$, cada elemento $\xi \in \mathcal{H}$ descompone como una serie convergente $\xi = \sum_{i \in I} \xi_i$, siendo $\xi_i = \pi_i(\xi)$.

Observación 2.2.5. Notése que si $\mathcal{H}$ es suma directa ortogonal de una familia de subespacios cerrados $\{\mathcal{H}'_i\}_{i \in I}$ y $\langle, \rangle_{\mathcal{H}'_i}$ denota la restricción de la métrica hermitica al respectivo subespacio, entonces $\mathcal{H}$ es isomorfo como espacio de Hilbert a la suma directa de la familia de espacios de Hilbert $(\mathcal{H}'_i, \langle, \rangle_{\mathcal{H}'_i})$.

Definición 2.2.8. Sean $\varphi_i \in L(\mathcal{H}_i)$ operadores tales que $\|\varphi_i\| \leq M$ para cada $i \in I$. Se define el operador suma directa $\phi = \bigoplus_i \varphi_i : \bigoplus_i \mathcal{H}_i \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{H}_i$ mediante

$$\langle \phi(\xi), \eta \rangle_{\bigoplus_i \mathcal{H}_i} = \sum_{i \in I} \langle \varphi_i(\xi_i), \eta_i \rangle_{\mathcal{H}_i}, \quad \forall \xi, \eta \in \bigoplus_i \mathcal{H}_i$$

Observación 2.2.6. Se verifica que $\phi = \bigoplus_i \varphi_i \in L(\bigoplus_i \mathcal{H}_i)$. Si cada $\varphi_i \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_i)$, entonces $\phi \in \mathcal{U}(\bigoplus_i \mathcal{H}_i)$.

Definición 2.2.9. Sean $\{(\rho^{(i)}, \mathcal{H}_i)\}_{i \in I}$ una familia de representaciones de G , tales que para todos $g \in G$, $i \in I$, es $\|\rho_g^{(i)}\| \leq M$. Entonces, definimos la suma directa de representaciones $\rho = \bigoplus_i \rho^{(i)}$ de G en el espacio $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$ por

$$\begin{aligned} \rho = \bigoplus_i \rho^{(i)} : G &\longrightarrow L(\bigoplus_i \mathcal{H}_i) \\ g &\longmapsto \rho_g = \bigoplus_i \rho_g^{(i)} \end{aligned}$$

Observación 2.2.7. Si cada $\rho^{(i)}$ es unitaria, entonces $\bigoplus_i \rho^{(i)}$ también lo es.

Definición 2.2.10. Diremos que una representación $(\rho, \mathcal{H})$ de G es completamente reducible si puede ser expresada como suma directa de subrepresentaciones irreducibles; esto es, existe una familia de subrepresentaciones $\{(\rho^{(i)}, \mathcal{H}'_i)\}_{i \in I}$ irreducibles tales que $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}'_i$ y para todo $\xi = \sum_{i \in I} \xi_i \in \mathcal{H}$ con $\xi_i = \pi_i(\xi)$, siendo $\pi_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'_i$ la proyección ortogonal, entonces, para todo $g \in G$

$$\rho_g(\xi) = \sum_{i \in I} \rho_g^{(i)}(\xi_i)$$

En tal caso escribiremos $\rho = \bigoplus_i \rho^{(i)}$.

Observación 2.2.8. Si $\xi \in \mathcal{H}$ descompone como serie convergente $\xi = \sum_{i \in I} \xi_i$, entonces $\rho_g(\xi)$ descompone como serie convergente $\rho_g(\xi) = \sum_{i \in I} \rho_g^{(i)}(\xi_i)$ por la continuidad de la representación.

Observación 2.2.9. Recordemos que toda representación finita unitaria de un grupo descompone es completamente irreducible. En particular, esto mismo ocurre cuando el grupo es un grupo topológico LCH.

Veremos más adelante que cuando el grupo G es un grupo de Lie compacto, toda representación unitaria irreducible es de dimensión finita y por tanto, toda representación unitaria suya descompone en suma de subrepresentaciones irreducibles finitas.

Definición 2.2.11. Se dice que dos representaciones $(\rho^{(1)}, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho^{(2)}, \mathcal{H}_2)$ de un grupo G topológico LCH son equivalentes si existe un isomorfismo lineal acotado $\sigma : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ verificando que

$$\sigma \circ \rho_g^{(1)} = \rho_g^{(2)} \circ \sigma \quad \forall g \in G$$

Observación 2.2.10. Si $(\rho, \mathcal{H})$ es una representación de un grupo G topológico LCH y $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$ es un isomorfismo acotado en otro espacio de Hilbert $\hat{\mathcal{H}}$, entonces la aplicación $\hat{\rho} : G \rightarrow L(\hat{\mathcal{H}})$ definida por $\hat{\rho}(g) = \sigma \circ \rho_g \circ \sigma^{-1}$ define una representación de G en $\hat{\mathcal{H}}$. En efecto, $\hat{\rho}_{g_1 g_2} = \sigma \circ \rho_{g_1} \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ \rho_{g_2} \circ \sigma^{-1} = \hat{\rho}_{g_1} \circ \hat{\rho}_{g_2}$, $\hat{\rho}_e = Id$ y si $g \rightarrow g_0$ se cumple que $\|\hat{\rho}_g(\hat{\xi}) - \hat{\rho}_{g_0}(\hat{\xi})\| = \|\sigma \circ (\rho_g \circ \sigma^{-1}(\hat{\xi}) - \rho_{g_0} \circ \sigma^{-1}(\hat{\xi}))\| \leq \|\sigma\| \|\rho_g(\xi) - \rho_{g_0}(\xi)\| \rightarrow 0$ debido a que $\|\sigma\|$ está acotada.

Definición 2.2.12. Dadas dos representaciones $(\rho^{(1)}, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho^{(2)}, \mathcal{H}_2)$ de un grupo G topológico LCH se llama operador de enlace a cualquier operador lineal acotado σ que verifica que $\sigma \circ \rho_g^{(1)} = \rho_g^{(2)} \circ \sigma$ para todo $g \in G$.

Denotaremos por $C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)})$ al conjunto de estos operadores y si $\rho^{(1)} \simeq \rho^{(2)} = \rho$, entonces $C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}) = C(\rho)$.

Definición 2.2.13. Se dice que dos representaciones $(\rho^{(1)}, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho^{(2)}, \mathcal{H}_2)$ de un grupo G topológico LCH son unitariamente equivalentes si existe un operador $\sigma \in C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)})$ que sea unitario.

Ejemplo 2.2.3. Sea G un grupo topológico LCH provisto de una medida de Haar por la izquierda, μ^L , y de otra por la derecha, μ^R . Denotemos por $\rho^L : G \rightarrow L^2(G, \mu^L)$ y por $\rho^R : G \rightarrow L^2(G, \mu^R)$ las representaciones regulares por la izquierda y por la derecha, respectivamente, del grupo G . Sean $\langle, \rangle_L$ y $\langle, \rangle_R$ los respectivos productos hermíticos en dichos espacios. Se define un operador lineal $\sigma : L^2(G, \mu^L) \rightarrow L^2(G, \mu^R)$ dado por $(\sigma f)(g) = f(g^{-1})$ para cualquier $f \in L^2(G, \mu^L)$ y $g \in G$. Es claro que $\sigma^2 = Id_{L^2(G, \mu^L)}$ y

dados $f_1, f_2 \in L^2(G, \mu^L)$, por la invarianza de la medida se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \sigma f_1, \sigma f_2 \rangle_R &= \int_G (\sigma f_1)(g) \overline{(\sigma f_2)(g)} d\mu^R(g) = \int_G f_1(g^{-1}) \overline{f_2(g^{-1})} d\mu^R(g) \\ &= \int_G f_1(h) \overline{f_2(h)} d\mu^R(h^{-1}) = \int_G f_1(h) \overline{f_2(h)} d\mu^L(h) = \langle f_1, f_2 \rangle_L \end{aligned}$$

Luego, σ es un isomorfismo unitario que para todo $f \in L^2(G, \mu^L)$ y $g, h \in G$ cumple que:

$$[\sigma(\rho_h^L f)](g) = (\rho_h^L f)(g^{-1}) = f(h^{-1}g^{-1}) = f((gh)^{-1}) = (\sigma f)(gh) = [\rho_h^R(\sigma f)](g)$$

Por lo tanto, σ es un isomorfismo unitario verificando que $\sigma \circ \rho_h^L = \rho_h^R \circ \sigma$ para cualquier $h \in G$, o lo que es lo mismo, $\sigma \in C(\rho^L, \rho^R)$. Por ello, las representaciones ρ^R y ρ^L son unitariamente equivalentes.

Lema 2.2.1. Sea $(\rho, \mathcal{H})$ una representación unitaria de un grupo G topológico LCH y $\mathcal{H}'$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Denotemos por $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ la proyección ortogonal. Entonces, $\mathcal{H}'$ es invariante si y solo si $\pi \in C(\rho)$.

Teorema 2.2.1 (Lema de Schur). Sea G un grupo topológico LCH, entonces:

1. Una representación unitaria $(\rho, \mathcal{H})$ de G es irreducible si y solo si $C(\rho)$ solo contiene operadores de la forma $\lambda Id_{\mathcal{H}}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Sean $(\rho^{(1)}, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho^{(2)}, \mathcal{H}_2)$ dos representaciones unitarias irreducibles de G . Si ambas representaciones son equivalentes, entonces $C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)})$ es unidimensional, si no, $C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}) = \{0\}$, siendo 0 el operador nulo.

Demostración: Los aspectos más algebraicos de la demostración son iguales a los vistos en la demostración del Lema de Schur para representaciones finitas de grupos vistos en el capítulo anterior. Los aspectos topológicos de la demostración pueden verse en el teorema 3.5 del libro [10].

Para demostrar la primera afirmación supongamos que $(\rho, \mathcal{H})$ es una representación de G reducible. Luego, $C(\rho)$ contiene proyecciones no triviales por el lema anterior. Recíprocamente, supongamos que $\sigma \in C(\rho)$ tal que $\sigma \neq \lambda Id_{\mathcal{H}}$. Dado que la representación es unitaria $\sigma^\dagger \in C(\rho)$, entonces tanto $\alpha = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^\dagger)$ como $\beta = \frac{1}{2i}(\sigma - \sigma^\dagger)$ están en $C(\rho)$. Además, o bien α o bien β no puede ser un múltiplo de la identidad (si ambos fuesen múltiplos de la identidad se verificaría que σ también lo sería). Asumamos que α no es múltiplo de la identidad. Como α es autoadjunto, el teorema espectral de estos operadores (Veáse teorema 1.51(c) en [10]) dice que cualquier operador lineal que conmute con α debe conmutar con las proyecciones espectrales de dicho operador. Dado que cada ρ_g conmuta con α , conmuta con las proyecciones espectrales y por tanto, $C(\rho)$ contiene proyecciones no triviales y por el lema anterior ρ es reducible.

En el caso de la segunda afirmación, sea un operador $\sigma \in C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)})$ y por tanto, $\sigma^\dagger \in C(\rho^{(2)}, \rho^{(1)})$, ya que se verifica que $\sigma^\dagger \circ \rho_g^{(2)} = [\rho_{g^{-1}}^{(2)} \circ \sigma]^\dagger = [\sigma \circ \rho_{g^{-1}}^{(1)}]^\dagger = \rho_g^{(1)} \circ \sigma^\dagger$. Luego,

$\sigma^\dagger \circ \sigma \in C(\rho^{(1)})$ y $\sigma \circ \sigma^\dagger \in C(\rho^{(2)})$. Esto implica que $\sigma^\dagger \circ \sigma = \lambda Id_{\mathcal{H}_1}$ y que $\sigma \circ \sigma^\dagger = \lambda Id_{\mathcal{H}_2}$. Entonces, o bien $\sigma = 0$, o bien $\lambda^{-1/2}\sigma$ es unitario. Esto demuestra que $C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}) = \{0\}$ cuando $\rho^{(1)}$ y $\rho^{(2)}$ no son equivalentes y que $C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)})$ está formado por múltiplos de operadores unitarios. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, entonces $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 = \sigma_2^\dagger \circ \sigma_1 \in C(\rho^{(1)})$ y por tanto, $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 = \lambda Id_{\mathcal{H}_1}$ y $\sigma_1 = \lambda \sigma_2$. Concluimos finalmente que $\dim C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}) = 1$. ■

Corolario 2.2.1. *Toda representación unitaria irreducible de un grupo G topológico LCH abeliano es unidimensional.*

Demostración: Sea $(\rho, \mathcal{H})$ es una representación unitaria irreducible del grupo G . Como G es abeliano, se tiene que $\rho_g \circ \rho_h = \rho_{gh} = \rho_h \circ \rho_g$ para cualquier $g, h \in G$. Entonces, se deduce por el Lema de Schur que $\rho_h = \lambda_h Id_{\mathcal{H}}$ para cierto $\lambda_h \in \mathbb{C}$ y por tanto, si $\dim \mathcal{H} > 1$ se llega a contradicción. ■

Ejemplo 2.2.4. *Dado que el grupo $U(1) = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ es abeliano, por el corolario anterior sus representaciones unitarias irreducibles son unidimensionales. Si $(\rho, \mathcal{H})$ es una representación unitaria irreducible de $U(1)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ y por tanto, $\rho_g(z) = \lambda_g z$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $g \in U(1)$ con λ_g un número complejo de módulo uno. Por ser ρ una representación se tiene que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_{g_1 g_2} = \lambda_{g_1} \lambda_{g_2}$. Se define así un homomorfismo de grupo $\lambda : U(1) \rightarrow S^1$ dado por $\lambda(g) = \lambda_g$ para cualquier $g \in U(1)$. Si denotamos $\mu = \lambda \circ \exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, siendo $\exp : \mathbb{R} \rightarrow U(1)$ la aplicación exponencial, se verifica que $\mu(t + t') = \mu(t)\mu(t')$ y por tanto, su derivada satisface*

$$\dot{\mu}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(t + \epsilon) - \mu(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(t) \frac{\mu(\epsilon) - 1}{\epsilon} = k\mu(t)$$

siendo $k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(\epsilon) - 1}{\epsilon}$. Integrando ahora la ecuación diferencial teniendo en cuenta que $\mu(0) = \lambda(1) = 1$ se tiene que $\mu(t) = e^{kt}$. Por otra parte, dado que $1 = e^{2\pi i} \in U(1)$ se tiene que $\mu(0) = \lambda(1) = \lambda(e^{2\pi i}) = \mu(2\pi)$. Esto implica que $k = im$ siendo m un número entero. Se tiene finalmente que $\lambda(e^{it}) = e^{imt}$, para algún m entero; o sea, $\lambda(g) = g^m$ siendo m entero.

En definitiva, para cada $m \in \mathbb{Z}$ existe una representación irreducible $\rho^{(m)}$ de $U(1)$, con $\rho_{e^{it}}^{(m)}(z) = e^{imt}z$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y cualquier representación unitaria irreducible de $U(1)$ es equivalente a estas. Es trivial comprobar que $\rho^{(m)}$ es equivalente a $\rho^{(m')}$ sí y solo sí $m = m'$.

Observación 2.2.11. *En el estudio de las representaciones unitarias de un grupo G topológico LCH abeliano, aparecen de manera similar a este ejemplo ciertos homomorfismos de grupos $\lambda : G \rightarrow S^1$ asociados a dichas representaciones. Estos morfismos son denominados caracteres o funciones carácter asociados a las representaciones del grupo abeliano G .*

Capítulo 3

Representaciones unitarias de grupos compactos Hausdorff

En este capítulo, abordaremos el estudio de las propiedades representaciones unitarias de los grupos compactos y el teorema de Peter-Weyl. Por ello, a lo largo de este capítulo los grupos G topológicos LCH se asumirán que son compactos, mientras no se indique lo contrario, y por sencillez, diremos que G es un grupo topológico compacto. En particular, los resultados de este capítulo engloban el caso de los grupos de Lie compactos.

Señalemos que la teoría de representaciones de los grupos topológicos compactos es, en cierto sentido una generalización de resultados más clásicos de la teoría de representaciones complejas de grupos finitos y la teoría de caracteres impartidas en el grado. Por esta razón, muchos de los resultados sobre representaciones complejas de dimensión finita de grupos topológicos compactos comparten cierta analogía con las de los grupos finitos e incluso, muchas de las demostraciones para el caso de grupos finitos continuarán siendo válidas para los grupos compactos.

Asumiremos en esta memoria que la topología del grupo compacto cumple el primer axioma de numerabilidad (esto es, como espacio topológico, G tiene una base local numerable en todo punto del mismo). La razón de imponer esta condición implica que el espacio de Hilbert $L^2(G, \mu)$ es separable (véase capítulo 2 de [13]).

3.1. Operador de Weyl y representaciones irreducibles unitarias de un grupo topológico compacto

Si G es un grupo topológico compacto, podemos tomar la medida de Haar bi-invariante μ sobre G normalizada a la unidad. Dicha medida será la que consideremos a lo largo de este capítulo.

Al igual que en los grupos finitos, se tiene que

Teorema 3.1.1. *Sea $(\rho, \mathcal{H})$ una representación de un grupo topológico compacto G en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, $(\rho, \mathcal{H})$ es equivalente a una representación unitaria en el*

mismo espacio de Hilbert.

Demostración: Sea $(,)$ el producto hermítico original en $\mathcal{H}$. Dada la representación continua $\rho : G \rightarrow L(\mathcal{H})$ puede ocurrir que $(\rho_h(\xi_1), \rho_h(\xi_2)) \neq \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ para algún $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$ y por tanto, ρ no es unitaria con respecto a dicho producto. Utilizando la medida bi-invariante de Haar, se define un nuevo producto hermítico $\langle, \rangle$ en $\mathcal{H}$ mediante

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \equiv \int_G (\rho_g(\xi_1), \rho_g(\xi_2)) d\mu(g) \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$$

Si denotamos por $\|\cdot\|_{(i)}$ a la norma asociada a la métrica inicial $(,)$ y por $\|\cdot\|$ la asociada a $\langle, \rangle$, se tiene que para todo $\xi \in \mathcal{H}$

$$\|\xi\|^2 = \int_G (\rho_g(\xi), \rho_g(\xi)) d\mu(g) \leq (\sup_{g \in G} \|\rho_g\|_{(i)})^2 \int_G (\xi, \xi) d\mu(g) = M^2(\xi, \xi) = M^2 \|\xi\|_{(i)}^2$$

siendo $M = \sup_{g \in G} \|\rho_g\|_{(i)}$. Por otro lado, $\|\xi\|_{(i)}^2 = (\rho_{g^{-1}}(\rho_g(\xi)), \rho_{g^{-1}}(\rho_g(\xi))) \leq M^2 \|\rho_g(\xi)\|_{(i)}^2$. Por tanto, $\|\xi\|_{(i)}^2 \leq \int_G (\xi, \xi) d\mu(g) \leq M^2 \int_G (\rho_g(\xi), \rho_g(\xi)) d\mu(g) = M^2 \|\xi\|^2$. Concluimos entonces que las normas $\|\cdot\|_{(i)}$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes y por tanto, definen la misma topología en $\mathcal{H}$. Finalmente comprobemos que con respecto a la nueva métrica, ρ define una representación unitaria en $\mathcal{H}$

$$\langle \rho_h(\xi_1), \rho_h(\xi_2) \rangle = \int_G (\rho_{gh}(\xi_1), \rho_{gh}(\xi_2)) dg = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \quad \forall h \in G \text{ y } \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$$

■

Observación 3.1.1. Este resultado permite presuponer en el desarrollo de la teoría que toda representación de un grupo topológico compacto es unitaria.

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y un vector $\xi \in \mathcal{H}$, la proyección ortogonal $\pi_\xi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definida por $\pi_\xi(\eta) = \langle \eta, \xi \rangle \xi$ para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es un operador lineal de rango 1 y por tanto, compacto.

Lema 3.1.1. Dada ahora una representación unitaria $(\rho, \mathcal{H})$ de un grupo topológico compacto G y un vector $\xi \in \mathcal{H}$ unitario, la aplicación

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow L(\mathcal{H}) \\ g &\longmapsto \pi_{\rho_g(\xi)} \end{aligned}$$

es continua respecto de la topología de la norma.

Demostración: Dado que $\pi_{\rho_g(\xi)}(\eta) = \langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle \rho_g(\xi)$, se tiene que para todo $\eta \in \mathcal{H}$ tal que $\|\eta\| \leq 1$ es

$$\begin{aligned} \|\pi_{\rho_g(\xi)}(\eta) - \pi_{\rho_e(\xi)}(\eta)\| &= \|\langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle \rho_g(\xi) - \langle \eta, \xi \rangle \xi\| \\ &\leq \|\langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle (\rho_g(\xi) - \xi)\| + \|\langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle \xi - \langle \eta, \xi \rangle \xi\| \\ &\leq \|\eta\| \|\rho_g(\xi) - \xi\| + \|\xi\| \|\langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle - \langle \eta, \xi \rangle\| \leq 2\|\rho_g(\xi) - \xi\| \end{aligned}$$

Entonces cuando $g \rightarrow e$ en G , $\|\pi_{\rho_g(\xi)}(\eta) - \pi_{\rho_e(\xi)}(\eta)\|$ tiende a 0, ya que ρ es fuertemente continua. ■

Observación 3.1.2. De forma análoga, se puede considerar un vector $\xi \in \mathcal{H}$ no nulo y considerar el operador lineal compacto dado por la proyección ortogonal $\pi_\xi \in L(\mathcal{H})$ con $\pi_\xi(\eta) = \frac{\langle \eta, \xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} \xi$ con similares propiedades.

Definición 3.1.1. Sea $(\rho, \mathcal{H})$ una representación unitaria de un grupo topológico compacto G . Fijado un vector $\xi \in \mathcal{H}$, se define el operador de Weyl asociado a dicho vector como el operador lineal $K_\xi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ verificando

$$\langle K_\xi(\eta), \eta' \rangle = \int_G \langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle \overline{\langle \eta', \rho_g(\xi) \rangle} d\mu(g) = \int_G \langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle \langle \rho_g(\xi), \eta' \rangle d\mu(g) \quad \forall \eta, \eta' \in \mathcal{H}$$

que permite escribir este operador en la forma

$$K_\xi(\eta) = \int_G \langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle \rho_g(\xi) d\mu(g) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}$$

Teorema 3.1.2. Dada una representación unitaria $(\rho, \mathcal{H})$ de un grupo topológico compacto G . El operador de Weyl asociado a un vector $\xi \in \mathcal{H}$ verifica

1. K_ξ es un operador acotado.
2. K_ξ es autoadjunto, es decir, $K_\xi^\dagger = K_\xi$.
3. K_ξ es un operador compacto.
4. $K_\xi \circ \rho_g = \rho_g \circ K_\xi$ para todo $g \in G$ y $\xi \in \mathcal{H}$.

Demostración:

1. Cada operador K_ξ está acotado como consecuencia de

$$\|K_\xi(\eta)\| \leq \int_G |\langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle| \|\rho_g(\xi)\| d\mu(g) \leq \int_G \|\eta\| \|\rho_g(\xi)\| \|\xi\| d\mu(g) = \|\xi\|^2 \|\eta\|$$

2. Cada operador K_ξ es autoadjunto ya que para todo $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle K_\xi(\eta_1), \eta_2 \rangle &= \int_G \langle \eta_1, \rho_g(\xi) \rangle \langle \rho_g(\xi), \eta_2 \rangle d\mu(g) = \int_G \overline{\langle \eta_2, \rho_g(\xi) \rangle} \langle \eta_1, \rho_g(\xi) \rangle d\mu(g) \\ &= \langle \eta_1, \int_G \langle \eta_2, \rho_g(\xi) \rangle \rho_g(\xi) d\mu(g) \rangle = \langle \eta_1, K_\xi(\eta_2) \rangle \end{aligned}$$

3. Para demostrar que el operador K_ξ es compacto tendremos en cuenta que si $\{A_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de operadores compactos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con límite A , $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$, entonces el operador A es compacto (véase proposición 6.2.3 del [9]).

Dado que G es compacto la aplicación $g \rightarrow \rho_g(\xi)$ es uniformemente continua. Entonces dado un $\epsilon > 0$ se puede hacer una partición de G en conjuntos disjuntos $E_1, \dots, E_n$ y puntos $g_1, \dots, g_n$ con $g_j \in E_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$\|\rho_g(\xi) - \rho_{g_j}(\xi)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall g \in E_j$$

Entonces, si $g \in E_j$, se tiene que usando la desigualdad de Schwarz

$$\|\langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle \rho_g(\xi) - \langle \eta, \rho_{g_j}(\xi) \rangle \rho_{g_j}(\xi)\| < \epsilon \|\eta\|$$

Definamos para cada $\epsilon > 0$, el operador

$$K_\xi^{(\epsilon)}(\eta) = \sum_{j=1}^n \int_{E_j} \langle \eta, \rho_{g_j}(\xi) \rangle \rho_{g_j}(\xi) d\mu(g) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j) \langle \eta, \rho_{g_j}(\xi) \rangle \rho_{g_j}(\xi)$$

que tiene imagen finito dimensional, ya que la misma está dentro del subespacio generado por $\{\rho_{g_j}(\xi) \mid j = 1, \dots, n\}$. Por lo que dichos operadores son compactos. Además, verifica la desigualdad $\|K_\xi(\eta) - K_\xi^{(\epsilon)}(\eta)\| < \epsilon \|\xi\|$ para todo $\eta \in \mathcal{H}$. Lo que implica la convergencia $K_\xi^{(\epsilon)} \rightarrow K_\xi$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Lo que implica utilizando el resultado más arriba comentado que el operador K_ξ es compacto.

4. Veamos que K_ξ conmuta con ρ . Luego, para todo $h \in G$ y todo $\eta \in \mathcal{H}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \rho_h(K_\xi(\eta)) &= \int_G \langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle \rho_{hg}(\xi) d\mu(g) = \int_G \langle \eta, \rho_{h^{-1}k}(\xi) \rangle \rho_k(\xi) d\mu(h^{-1}k) \\ &= \int_G \langle \rho_h(\eta), \rho_k(\xi) \rangle \rho_k(\xi) d\mu(k) = K_\xi(\rho_h(\eta)) \end{aligned}$$

por ser μ bi-invariante. ■

Observación 3.1.3. *Observemos que*

$$\langle K_\xi(\eta), \eta \rangle = \int_G \|\langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle\|^2 d\mu(g) \geq 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{H}$$

y si $\xi \neq 0$, entonces $\langle K_\xi(\eta), \eta \rangle > 0$, ya que $\|\langle \eta, \rho_g(\xi) \rangle\|^2$ es estrictamente mayor que 0 en un entorno del elemento neutro por ser ξ unitario y $g \rightarrow \rho_g(\xi)$ continua. Por tanto, K_ξ es un operador positivo para todo $\xi \in \mathcal{H}$ no nulo. El teorema espectral aplicado a K_ξ permite afirmar que existe un autovalor propio real positivo tal que el subespacio de autovectores asociado es de dimensión finita.

Lema 3.1.2. *Toda representación unitaria $(\rho, \mathcal{H})$ de un grupo topológico compacto G admite una subrepresentación de dimensión finita.*

Demostración: Dado un $\xi \in \mathcal{H}$ unitario, el operador de Weyl, K_ξ , es un operador

lineal compacto y autoadjunto. Aplicando el teorema espectral podemos asegurar la existencia de un autovalor λ positivo del mismo, tal que el espacio de autovectores $E(\lambda) = \{\eta \in \mathcal{H} : K_\xi(\eta) = \lambda\eta\}$ es de dimensión finita. Como K_ξ es equivariante con respecto a la representación ρ , el espacio vectorial $E(\lambda)$ es cerrado por ser de dimensión finita e invariante, y define una subrepresentación finita de G contenida en $(\rho, \mathcal{H})$. ■

Corolario 3.1.1. *Toda representación unitaria irreducible de un grupo topológico compacto es de dimensión finita.*

Teorema 3.1.3. *Si $(\rho, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de un grupo topológico compacto G , entonces descompone como suma directa de subrepresentaciones unitarias irreducibles finitas.*

Demostración: Supongamos que $(\rho, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de G que no es irreducible, entonces existe un subespacio invariante finito no nulo $E(\lambda)$. Por ser $E(\lambda)$ finito, la representación $(\rho|_{E(\lambda)}, E(\lambda))$ descompone en suma directa de representaciones unitarias irreducibles. Además, el subespacio ortogonal $E(\lambda)^\perp$ es un subespacio invariante y contiene una subrepresentación unitaria finita que puede ser descompuesta en suma de representaciones unitarias irreducibles. De esta manera, podemos considerar la familia $\{\rho|_{E_i}\}_{i \in I}$, donde $\rho|_{E_i}$ son subrepresentaciones de ρ que descomponen como suma directa de subrepresentaciones unitarias irreducibles. Sabemos que esta última familia es no vacía (ya que $\rho|_{E(\lambda)} \in \{\rho|_{E_i}\}_{i \in I}$). Luego, ordenando esta familia en términos de inclusión (si $\rho|_E, \rho|_{E'} \in \{\rho|_{E_i}\}_{i \in I}$, entonces $\rho|_{E'} < \rho|_E$ si $E' \subset E$), podemos aplicar el lema de Zorn obteniendo de esta manera un elemento maximal $\rho|_E$.

En el caso que $E \subsetneq \mathcal{H}$, podemos aplicar lo anterior a la subrepresentación $\rho|_{E^\perp}$ y por tanto, hallar una subrepresentación irreducible $\rho|_{E'}$ con $E' \subset E^\perp$. Entonces, $\rho|_E \oplus \rho|_{E'} \in \{\rho|_{E_i}\}_{i \in I}$ y es estrictamente mayor que $\rho|_E$, luego se llega a contradicción y por tanto, $E = \mathcal{H}$. ■

3.2. Relaciones de ortogonalidad de Schur y caracteres

Dado que las representaciones unitarias irreducibles de un grupo topológico compacto son de dimensión finita, en la literatura se recogen muchas veces propiedades de las representaciones unitarias finitas (irreducibles o no) de estos grupos. Dichas propiedades son similares a las de las representaciones complejas de grupos finitos. Recogemos en esta sección algunas de las mismas.

Por ejemplo, el método de integración con respecto a la medida de Haar normalizada a la unidad proporciona una manera de encontrar explícitamente morfismos equivariantes de dos representaciones finitas de un grupo compacto.

Proposición 3.2.1. *Sean $(\rho^{(1)}, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho^{(2)}, \mathcal{H}_2)$ dos representaciones unitarias finitas de G . Sea $\varphi : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ una aplicación $\mathbb{C}$ -lineal, entonces la aplicación $\varphi^{(inv)} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$*

definida por

$$\varphi^{(inv)} = \int_G \rho_g^{(2)} \circ \varphi \circ \rho_{g^{-1}}^{(1)} d\mu(g)$$

es $\mathbb{C}$ -lineal y satisface $\varphi^{(inv)} \circ \rho_h^{(1)} = \rho_h^{(2)} \circ \varphi^{(inv)}$ para todo $h \in G$. Además, si $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$ y $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, entonces las trazas de φ y de $\varphi^{(inv)}$ coinciden.

Demostración: La demostración de la linealidad y equivariancia $\varphi^{(inv)}$ es una mera comprobación. Para ver la igualdad de las trazas cuando $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, con $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = n$ y $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho$, consideremos una base ortonormal $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ en $\mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned} \text{tr} \varphi^{(inv)} &= \sum_{i=1}^n \langle \varphi^{(inv)}(\xi_i), \xi_i \rangle = \sum_{i=1}^n \int_G \langle \rho_g[\varphi(\rho_{g^{-1}}(\xi_i))], \xi_i \rangle d\mu(g) \\ &= \int_G \sum_{i=1}^n \langle \varphi(\rho_{g^{-1}}(\xi_i)), \rho_{g^{-1}}(\xi_i) \rangle d\mu(g) = \int_G \text{tr} \varphi d\mu(g) = \text{tr} \varphi \end{aligned}$$

ya que $\{\rho_{g^{-1}}(\xi_1), \dots, \rho_{g^{-1}}(\xi_n)\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y la traza de un endomorfismo no depende de la base tomada. ■

Observación 3.2.1. El morfismo $\varphi^{(inv)}$ debe ser entendido a través del siguiente hecho

$$\langle \varphi^{(inv)}(\xi), \eta \rangle_{(2)} = \int_G \langle \rho_g^{(2)}[\varphi(\rho_{g^{-1}}^{(1)}(\xi))], \eta \rangle_{(2)} d\mu(g) \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_1, \forall \eta \in \mathcal{H}_2$$

siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(2)}$ el producto hermitico en $\mathcal{H}_2$.

Observación 3.2.2. Recordemos que en las condiciones del enunciado de esta proposición el grupo G opera linealmente en el espacio vectorial $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mediante $g \cdot \varphi = \rho_g^{(2)} \circ \varphi \circ \rho_{g^{-1}}^{(1)}$. Luego, φ es invariante por dicha acción si y solo si es equivariante, esto es, $\varphi^{(inv)} \circ \rho_h^{(1)} = \rho_h^{(2)} \circ \varphi^{(inv)}$ para todo $h \in G$. Razón por la que hemos denotado $\varphi^{(inv)}$ al morfismo de la proposición.

La anterior proposición permite deducir las denominadas relaciones de ortogonalidad de Schur para las representaciones unitarias irreducibles de un grupo topológico compacto por ser estas finitas siguiendo los pasos similares a la deducción de las mismas para los grupos finitos (Veáse [22]). Sin embargo con vistas a la demostración del teorema de Peter-Weyl formularemos las mismas de la siguiente manera.

Definición 3.2.1. Sea $(\rho, \mathcal{H})$ una representación continua unitaria y finita de un grupo compacto. Para cada $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$, se define la función continua $f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho)} : G \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho)}(g) = \langle \rho_g(\xi_1), \xi_2 \rangle \quad \forall g \in G$$

Dichas funciones se denominan funciones de coeficientes matriciales asociadas a la representación finita $(\rho, \mathcal{H})$.

Observación 3.2.3. La razón de este nombre es que si $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ es una base ortonor-

mal de $\mathcal{H}$ tal que $\rho_g(\xi_i) = \sum_{j=1}^n A(g)_{ij} \xi_j$. Entonces, las funciones continuas $A_{ij}^{(\rho)} \in C(G)$ definidas por $A_{ij}^{(\rho)}(g) := A(g)_{ij} = \langle \rho_g(\xi_i), \xi_j \rangle = f_{\xi_i, \xi_j}^{(\rho)}(g)$ determinan la matriz de cada ρ_g respecto de dicha base ortonormal. Además, si $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ y $\xi' = \sum_{j=1}^n \beta_j \xi_j$, entonces es trivial comprobar que $f_{\xi, \xi'}^{(\rho)} = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} A_{ij}^{(\rho)}$, esto es, cualquier función matricial es combinación lineal de las funciones $A_{ij}^{(\rho)}$ con $i, j = \{1, \dots, n\}$.

Para cada representación unitaria finita del grupo compacto G (en particular, sus representaciones unitarias irreducibles) y para cualquier pareja de vectores ξ_1, ξ_2 en el espacio de representación, las funciones $f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho)}$ son funciones continuas y por tanto, pertenecen a $L^2(G, \mu)$. Su producto hermítico asociado a la medida de Haar invariante normalizada μ en este espacio de Hilbert es

$$\langle f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho)}, f_{\xi'_1, \xi'_2}^{(\rho')} \rangle = \int_G f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho)}(g) \overline{f_{\xi'_1, \xi'_2}^{(\rho')}(g)} d\mu(g)$$

Como consecuencia del lema de Schur para representaciones unitarias finitas irreducibles de un grupo, se tiene que

Teorema 3.2.1. Sean $(\rho^{(1)}, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho^{(2)}, \mathcal{H}_2)$ dos representaciones unitarias irreducibles de un grupo topológico compacto G .

1. Si $\rho^{(1)}$ y $\rho^{(2)}$ no son equivalentes, entonces

$$\langle f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho^{(1)})}, f_{\eta_1, \eta_2}^{(\rho^{(2)})} \rangle = \int_G f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho^{(1)})}(g) \overline{f_{\eta_1, \eta_2}^{(\rho^{(2)})}(g)} d\mu(g) = 0$$

para todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_1$ y $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}_2$.

2. Si $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho$ y $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, entonces

$$\langle f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho)}, f_{\eta_1, \eta_2}^{(\rho)} \rangle = \int_G f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho)}(g) \overline{f_{\eta_1, \eta_2}^{(\rho)}(g)} d\mu(g) = \frac{1}{\dim \mathcal{H}} \langle \xi_1, \eta_1 \rangle \overline{\langle \xi_2, \eta_2 \rangle}$$

para todo $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}$.

En particular, fijando bases ortonormales en los espacios $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, se tiene que para todo $1 \leq i, j \leq \dim \mathcal{H}_1 = d_1$ y $1 \leq m, n \leq \dim \mathcal{H}_2 = d_2$

$$\langle A_{ij}^{(\rho^{(1)})}, A_{nm}^{(\rho^{(2)})} \rangle = \int_G A_{ij}^{(\rho^{(1)})}(g) \overline{A_{nm}^{(\rho^{(2)})}(g)} d\mu(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho^{(1)} \text{ no equiv. a } \rho^{(2)} \\ \frac{\delta_{in} \delta_{jm}}{d_1} & \text{si } \rho^{(1)} = \rho^{(2)} \end{cases}$$

Demostración: Basta comprobarlo para las funciones $f_{\xi_i, \xi_j}^{(\rho^{(1)})} = A_{ij}^{(\rho^{(1)})}$, $f_{\eta_m, \eta_n}^{(\rho^{(2)})} = A_{mn}^{(\rho^{(2)})}$, siendo $\{\xi_1, \dots, \xi_{d_1}\}$ y $\{\eta_1, \dots, \eta_{d_2}\}$ bases ortonormales respectivamente de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ debido a la observación 3.2.3.

Para cualquier aplicación $\mathbb{C}$ -lineal $\sigma : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ la aplicación lineal $\varphi : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ dada

por $\varphi(\xi) = \int_G \rho_g^{(2)}[\sigma(\rho_{g^{-1}}^{(1)}(\xi))]d\mu(g) = \int_G \rho_{g^{-1}}^{(2)}[\sigma(\rho_g^{(1)}(\xi))]d\mu(g)$, ya que μ es invariante por el paso al inverso, y satisface que $\rho_h^{(2)} \circ \varphi = \varphi \circ \rho_h^{(1)}$ para todo $h \in G$. Aplicando el lema de Schur, se tiene que

1. Si $\rho^{(1)}$ y $\rho^{(2)}$ no son equivalentes, entonces $\varphi = 0$. Es decir, fijando bases ortonormales en $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ y teniendo en cuenta las matrices asociadas a $\rho_{g^{-1}}^{(1)}$, $\rho_g^{(2)}$ y σ en dichas bases obtenemos

$$\sum_{j=1}^{d_1} \sum_{m=1}^{d_2} \int_G A_{ij}^{(\rho^{(1)})}(g) B_{jm} A_{mn}^{(\rho^{(2)})}(g^{-1}) d\mu(g) = 0$$

siendo (B_{jm}) la matriz de σ en las bases ortonormales elegidas. Como la representación $\rho^{(2)}$ es unitaria la matriz $A^{(\rho^{(2)})}(g^{-1})$ es igual a $[A^{(\rho^{(2)})}(g)]^\dagger$, luego $A_{mn}^{(\rho^{(2)})}(g^{-1}) = \overline{A_{nm}^{(\rho^{(2)})}(g)}$. Dado que esto es cierto para cualquier morfismo σ y por tanto, para cualquier matriz (B_{jm}) se tiene que

$$\int_G A_{ij}^{(\rho^{(1)})}(g) \overline{A_{nm}^{(\rho^{(2)})}(g)} d\mu(g) = 0$$

y por tanto, las funciones $A_{ij}^{(\rho^{(1)})}$ y $A_{nm}^{(\rho^{(2)})}$ son ortogonales en $L^2(G, \mu)$, es decir, $\langle A_{ij}^{(\rho^{(1)})}, A_{nm}^{(\rho^{(2)})} \rangle = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq d_1$ y $1 \leq m, n \leq d_2$.

2. Si tomamos $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho$ y $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ y para cualquier endomorfismo $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se tiene que el endomorfismo φ definido de manera similar al apartado anterior es equivariante respecto a ρ y por el lema de Schur es una homotecia de razón λ ; esto es, $\varphi = \lambda Id_{\mathcal{H}}$. Tomando ahora la traza se tiene que

$$tr\varphi = \int_G tr(\rho_g \circ \sigma \circ \rho_{g^{-1}})d\mu(g) = tr\sigma$$

debido a las propiedades cíclicas de la traza en dimensión finita. Dado que $tr\varphi = \lambda \cdot \dim \mathcal{H} = \lambda d$ y tomando una base ortonormal se tiene que

$$\sum_{j,m=1}^d \int_G A_{ij}^{(\rho)}(g) B_{jm} A_{mn}^{(\rho)}(g^{-1}) d\mu(g) = \lambda \delta_{in} = \frac{tr\sigma}{d} \delta_{in} = \frac{1}{d} \sum_{j,m=1}^d B_{jm} \delta_{jm} \delta_{in}$$

como esto es cierto para cualquier σ y por tanto, para cualquier matriz (B_{jm}) se tiene que

$$\int_G A_{ij}^{(\rho)}(g) A_{mn}^{(\rho)}(g^{-1}) d\mu(g) = \int_G A_{ij}^{(\rho)}(g) \overline{A_{nm}^{(\rho)}(g)} d\mu(g) = \frac{1}{d} \delta_{jm} \delta_{in}$$

■

Como es bien conocido, el carácter de una representación compleja de un grupo finito

es una herramienta importante en el estudio de sus representaciones irreducibles. Este concepto se generaliza sin problemas para las representaciones unitarias finitas de los grupos topológicos compactos. A continuación, veremos estas ideas.

Definición 3.2.2. Sea G un grupo topológico compacto, se dice que una función continua $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es central si $f(hgh^{-1}) = f(g)$ para todo $g, h \in G$.

Observación 3.2.4. Si G es un grupo topológico compacto abeliano, entonces cualquier función continua $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es central.

Definición 3.2.3. Dada una representación compleja finita (unitaria o no) $(\rho, \mathcal{H})$ de dimensión n de un grupo topológico compacto G se define la función

$$\begin{aligned} \chi^{(\rho)} : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \chi^{(\rho)}(g) = \text{tr } \rho_g \end{aligned}$$

que denominaremos carácter de la representación $(\rho, \mathcal{H})$. Si $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ se tiene que $\chi^{(\rho)} = \sum_{i=1}^n A_{ii}^{(\rho)}$, siendo $A_{ii}^{(\rho)}(g) = \langle \rho_g(\xi_i), \xi_i \rangle$.

Observación 3.2.5. Es fácil ver que si $(\rho^{(1)}, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho^{(2)}, \mathcal{H}_2)$ son dos representaciones complejas finitas, se verifica que $\chi^{(\rho^{(1)} \oplus \rho^{(2)})} = \chi^{(\rho^{(1)})} + \chi^{(\rho^{(2)})}$ y que $\chi^{(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)})} = \chi^{(\rho^{(1)})} \cdot \chi^{(\rho^{(2)})}$.

Proposición 3.2.2. Si $(\rho, \mathcal{H})$ es una representación unitaria finita de un grupo topológico compacto G , entonces para todo $g, h \in G$

1. $\chi^{(\rho)}(hgh^{-1}) = \chi^{(\rho)}(g)$.
2. $\chi^{(\rho)}(g^{-1}) = \overline{\chi^{(\rho)}(g)}$.

que se denominan relaciones de ortonormalidad de caracteres de las representaciones unitarias irreducibles de G .

Proposición 3.2.3. Sean $(\rho^{(1)}, \mathcal{H}_1)$ y $(\rho^{(2)}, \mathcal{H}_2)$ dos representaciones unitarias irreducibles de un grupo topológico compacto G . Se verifica que

1. Si $\rho^{(1)} \simeq \rho^{(2)}$, entonces $\chi^{(\rho^{(1)})} = \chi^{(\rho^{(2)})}$.
2. $\langle \chi^{(\rho^{(1)})}, \chi^{(\rho^{(2)})} \rangle = \int_G \chi^{(\rho^{(1)})}(g) \overline{\chi^{(\rho^{(2)})}(g)} d\mu(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho^{(1)} \text{ no equiv. a } \rho^{(2)} \\ 1 & \text{si } \rho^{(1)} = \rho^{(2)} \end{cases}$

Demostración:

1. Sea un operador $\sigma \in C(\rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, entonces $\chi^{(\rho^{(1)})}(g) = \text{tr } \rho_g^{(1)} = \text{tr}(\sigma^{-1} \circ \rho_g^{(2)} \circ \sigma) = \text{tr } \rho_g^{(2)} = \chi^{(\rho^{(2)})}(g)$ para todo $g \in G$.

2. Haciendo uso de las relaciones de ortogonalidad de Schur se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \chi^{(\rho^{(1)})}, \chi^{(\rho^{(2)})} \rangle &= \int_G \chi^{(\rho^{(1)})}(g) \overline{\chi^{(\rho^{(2)})}(g)} d\mu(g) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_G A_{i,i}^{(\rho^{(1)})}(g) \overline{A_{j,j}^{(\rho^{(2)})}(g)} d\mu(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho^{(1)} \text{ no equiv. a } \rho^{(2)} \\ 1 & \text{si } \rho^{(1)} = \rho^{(2)} \end{cases}\end{aligned}$$

■

Observación 3.2.6. Sea $(\rho, \mathcal{H})$ una representación unitaria finita de un grupo topológico compacto G . Entonces, sabemos que $(\rho, \mathcal{H})$ descompone en suma directa de subrepresentaciones unitarias irreducibles finitas, es decir, $\rho \simeq \bigoplus_i m_i \rho^{(i)}$, en donde $\rho^{(i)}$ son subrepresentaciones unitarias irreducibles contenidas en $(\rho, \mathcal{H})$ y m_i su multiplicidad, es decir, el número de veces que aparece cada $\rho^{(i)}$ en la descomposición de ρ . Entonces, se tiene que $\chi^{(\rho)} = \sum_i m_i \chi^{(\rho^{(i)})}$, siendo $m_i = \int_G \chi^{(\rho)}(g) \overline{\chi^{(\rho^{(i)})}(g)} d\mu(g) = \langle \chi^{(\rho)}, \chi^{(\rho^{(i)})} \rangle$. Las relaciones de ortogonalidad de caracteres implica que

$$\langle \chi^{(\rho)}, \chi^{(\rho)} \rangle = \int_G \chi^{(\rho)}(g) \overline{\chi^{(\rho)}(g)} d\mu(g) = \sum_{i=1}^n m_i^2$$

Por ello, la representación es irreducible si y solo si se verifica $\langle \chi^{(\rho)}, \chi^{(\rho)} \rangle = 1$ y es reducible si y solo si $\langle \chi^{(\rho)}, \chi^{(\rho)} \rangle > 1$.

Ejemplo 3.2.1. En el caso particular de que G sea un grupo finito. Es bien conocido que estos grupos poseen tantas representaciones unitarias no equivalentes como clases de conjugación. Además, G es un grupo compacto con la topología discreta y cualquier aplicación $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es continua con dicha topología.

El espacio $L^2(G) = C(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ aplicaciones}\}$ es ahora un espacio vectorial complejo de dimensión finita igual al orden del grupo $|G|$. En este caso, el carácter de la representación regular por la derecha de G en $L^2(G)$ viene dado por $\chi^{(\rho^R)}(g) = 0$ para todo $g \neq e$ y en el elemento neutro $e \in G$ por $\chi^{(\rho^R)}(e) = |G|$. Lo que permite demostrar que la representación regular por la derecha contiene a todas las irreducibles del grupo y tantas veces como la dimensión de la representación irreducible (véase [22]).

Lema 3.2.1. Si G es un grupo topológico compacto abeliano, entonces toda representación irreducible de G , al ser de dimensión uno, viene determinada por su carácter.

Demostración: Sea $(\rho, \mathcal{H})$ una representación unitaria irreducible de G . Como G es abeliano, $\rho_g \circ \rho_h = \rho_h \circ \rho_g$ para todo $g, h \in G$ y aplicando el lema de Schur, se tiene que $\rho_g = \lambda(g) Id_{\mathcal{H}}$ para cierta función $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces, por el corolario 2.2.1, $(\rho, \mathcal{H})$ es unidimensional y por tanto, $tr \rho_g = tr(\lambda(g) Id_{\mathcal{H}}) = \lambda(g) tr(Id_{\mathcal{H}}) = \lambda(g)$. Luego, $\lambda = \chi^{(\rho)}$.

■

3.3. Teorema de Peter-Weyl

En esta sección nos centraremos en el objetivo fundamental de este trabajo que es el Teorema de Peter-Weyl.

Definición 3.3.1. Dado un grupo topológico compacto G , se denota por $\hat{G}$ al conjunto de todas las representaciones unitarias, irreducibles y no equivalentes entre sí de G .

Recordemos que dada una representación unitaria finita (irreducible o no) $(\rho, \mathcal{H})$ de un grupo topológico compacto G y fijados $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$, se define la función continua compleja $f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho)} : G \rightarrow \mathbb{C}$ mediante $f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho)}(g) = \langle \rho_g(\xi_1), \xi_2 \rangle$ para todo $g \in G$.

Notación. En lo que sigue asumiremos conocido un conjunto completo de representaciones unitarias irreducibles no equivalentes de G que denotaremos por $\{(\rho^{(a)}, \mathcal{H}_a)\}_{a \in \hat{G}}$, siendo $\dim \mathcal{H}_a = d_a$ finita para cada representación irreducible. En este sentido, si $a \neq b$, entonces $\rho^{(a)}$ no es equivalente a $\rho^{(b)}$. En cada espacio $\mathcal{H}_a$ fijaremos también una base ortonormal $\{\xi_1^{(a)}, \dots, \xi_{d_a}^{(a)}\}$ y denotaremos por sencillez

$$A_{ij}^{(a)} = f_{\xi_i^{(a)}, \xi_j^{(a)}}^{(\rho^{(a)})} \quad \text{con } 1 \leq i, j \leq d_a$$

Definición 3.3.2. Dada una representación unitaria finita (irreducible o no) $(\rho, \mathcal{H})$, con $\dim \mathcal{H} = n$, de un grupo topológico compacto G denotemos por

$$C(G)_{(\rho)} = \{f_{\xi_1, \xi_2}^{(\rho)} \mid \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}\}$$

Dicho conjunto es un subespacio de $C(G)$ de dimensión finita, ya que fijada una base ortonormal $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ en $\mathcal{H}$, las n^2 funciones $A_{ij}^{(\rho)} = f_{\xi_i, \xi_j}^{(\rho)}$ son base de dicho espacio.

Cada espacio $C(G)_{(\rho)}$ está formado por las denominadas funciones de coeficientes matriciales asociadas a la representación $(\rho, \mathcal{H})$. Dichas funciones continuas contenidas en el espacio de Hilbert $L^2(G, \mu)$, siendo μ la medida de Haar bi-invariante normalizada. Teniendo en cuenta la acción de G vía las representaciones regulares en $L^2(G, \mu)$ dadas por

$$(\rho_g^L f)(h) = f(g^{-1}h) \quad \text{y} \quad (\rho_g^R f)(h) = f(hg)$$

se tiene que

Proposición 3.3.1. Dada una representación unitaria finita $(\rho, \mathcal{H})$ de un grupo topológico compacto G , el espacio $C(G)_{(\rho)}$ es invariante por la acción regular a izquierda y derecha y se tiene que

$$\rho_g^L(f_{\xi, \eta}^{(\rho)}) = f_{\xi, \rho_g(\eta)}^{(\rho)} \quad \text{y} \quad \rho_g^R(f_{\xi, \eta}^{(\rho)}) = f_{\rho_g(\xi), \eta}^{(\rho)}$$

Demostración: La invariancia es consecuencia de los siguientes hechos

$$1. (\rho_g^L f_{\xi, \eta}^{(\rho)})(h) = f_{\xi, \eta}^{(\rho)}(g^{-1}h) = \langle \rho_{g^{-1}h}(\xi), \eta \rangle = \langle \rho_h(\xi), \rho_g(\eta) \rangle = f_{\xi, \rho_g(\eta)}^{(\rho)}(h).$$

$$2. (\rho_g^R f_{\xi, \eta}^{(\rho)})(h) = f_{\xi, \eta}^{(\rho)}(hg) = \langle \rho_{hg}(\xi), \eta \rangle = \langle \rho_h(\rho_g(\xi)), \eta \rangle = f_{\rho_g(\xi), \eta}^{(\rho)}(h).$$

■

Una consecuencia trivial de estas relaciones es el siguiente hecho

Corolario 3.3.1. *Sea $(\rho^{(a)}, \mathcal{H}_a)$ una representación unitaria irreducible del grupo compacto G . Entonces, las funciones $A_{jk}^{(a)} \in C(G)_{(\rho^{(a)})}$ verifican*

$$A_{jk}^{(a)}(g^{-1}h) = \sum_{m=1}^{d_a} A_{jm}^{(a)}(h) A_{mk}^{(a)}(g^{-1}) \quad y \quad A_{jk}^{(a)}(hg) = \sum_{m=1}^{d_a} A_{jm}^{(a)}(g) A_{mk}^{(a)}(h)$$

Proposición 3.3.2. *Dadas dos representaciones unitarias finitas $(\rho, \mathcal{H})$ y $(\rho', \mathcal{H}')$ de un grupo topológico G compacto, se verifica que*

1. Si $\rho \simeq \rho'$, entonces $C(G)_{(\rho)} = C(G)_{(\rho')}$.
2. Si ρ no es equivalente a ρ' , entonces $C(G)_{(\rho)} \cap C(G)_{(\rho')} = \{0\}$. Además, los espacios $C(G)_{(\rho)}$ y $C(G)_{(\rho')}$ son ortogonales dentro de $L^2(G, \mu)$.

Demostración: Teniendo en cuenta que dos representaciones unitarias finitas equivalentes de G son unitariamente equivalentes. Entonces, modificando si es preciso la métrica hermítica en uno de estos subespacios, podemos suponer que existe un isomorfismo unitario $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ tal que $\sigma \circ \rho_g = \rho'_g \circ \sigma$ para todo $g \in G$.

1. Si $\xi' = \sigma(\xi)$ y $\eta' = \sigma(\eta)$, se tiene que para todo $g \in G$

$$f_{\xi', \eta'}^{(\rho')}(g) = \langle \rho'_g(\xi'), \eta' \rangle = \langle \rho'_g(\sigma(\xi)), \sigma(\eta) \rangle = \langle \sigma(\rho_g(\xi)), \sigma(\eta) \rangle = \langle \rho_g(\xi), \eta \rangle = f_{\xi, \eta}^{(\rho)}(g)$$

Luego, $C(G)_{(\rho)} = C(G)_{(\rho')}$.

2. Si ρ y ρ' no son equivalentes las relaciones de ortogonalidad de Schur nos dicen que

$$\langle f_{\xi, \eta}^{(\rho)}, f_{\xi', \eta'}^{(\rho')} \rangle = 0$$

para todo $f_{\xi, \eta}^{(\rho)} \in C(G)_{(\rho)}$ y todo $f_{\xi', \eta'}^{(\rho')} \in C(G)_{(\rho')}$.

■

Corolario 3.3.2. *Sea $(\rho, \mathcal{H})$ una representación finita irreducible de un grupo topológico compacto G y sea $\rho \simeq m_{a_1} \rho^{(a_1)} \oplus \dots \oplus m_{a_k} \rho^{(a_k)}$ con $m_{a_1}, \dots, m_{a_k} \geq 1$ su descomposición en representaciones irreducibles. Entonces,*

$$C(G)_{(\rho)} = C(G)_{(\rho^{(a_1)})} \oplus \dots \oplus C(G)_{(\rho^{(a_k)})}$$

Utilizando las relaciones de ortogonalidad de Schur, es trivial comprobar con las notaciones introducidas que

Lema 3.3.1. Si $\{(\rho^{(a)}, \mathcal{H}_a)\}_{a \in \hat{G}}$ es un conjunto completo de representaciones unitarias irreducibles de un grupo G topológico compacto. Se tiene que

1. Las d_a^2 funciones $\{\sqrt{d_a} A_{ij}^{(a)}\}_{1 \leq i, j \leq d_a}$ son una base ortonormal de $C(G)_{(\rho^{(a)})}$ para cada $a \in \hat{G}$.
2. Si $a \neq b \in \hat{G}$, los espacios $C(G)_{(\rho^{(a)})}$ y $C(G)_{(\rho^{(b)})}$ son ortogonales en $L^2(G, \mu)$.

Definición 3.3.3. Sea G un grupo topológico compacto. Denotemos por $R(G)$ el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de todas funciones de coeficientes matriciales asociadas a cualquier representación unitaria finita (r.u.f. abreviadamente) de G ; esto es,

$$R(G) = \{f_{\xi, \eta}^{(\rho)} : \forall (\rho, \mathcal{H}) \text{ r.u.f. de } G \text{ y } \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}\} = \bigoplus_{\rho \text{ r.u.f.}} C(G)_{(\rho)}$$

Dicho espacio es un subespacio de $L^2(G, \mu)$ invariante bajo las representaciones regulares a izquierda y a derecha de G .

Como consecuencia del corolario 3.3.2 se tiene que

Proposición 3.3.3. $R(G) = \bigoplus_{a \in \hat{G}} C(G)_{(\rho^{(a)})}$. Además, esta suma directa es suma ortogonal como subespacios dentro de $L^2(G, \mu)$.

Corolario 3.3.3. El conjunto de funciones $\{\sqrt{d_a} A_{ij}^{(a)}\}_{1 \leq i, j \leq d_a; \forall a \in \hat{G}}$ es una base ortonormal de $R(G)$.

Proposición 3.3.4. Sea $(\rho, \mathcal{H})$ una representación unitaria irreducible de un grupo topológico compacto G . Dado un $\xi \in \mathcal{H}$ no nulo, la aplicación lineal $\pi_\xi : \mathcal{H} \rightarrow C(G)_{(\rho)}$ dada por $\pi_\xi(\eta) = f_{\xi, \eta}^{(\rho)}$, es inyectiva y equivariante respecto de la representación regular por la derecha.

Demostración: La demostración es una mera comprobación y los detalles se encuentran en la proposición 4.9 de [1]. ■

Corolario 3.3.4. Sea $(\rho, \mathcal{H})$ una representación unitaria irreducible de un grupo topológico compacto G . Para cada $\xi \in \mathcal{H}$ no nulo, $\text{Im } \pi_\xi$ es un subespacio invariante de $C(G)_{(\rho)}$ con respecto a la representación regular por la derecha y además, $(\rho^R, \text{Im } \pi_\xi)$ es equivalente a la representación irreducible $(\rho, \mathcal{H})$.

Corolario 3.3.5. Si G es un grupo topológico compacto, entonces cualquier representación unitaria irreducible de G está contenida en el espacio $R(G) = \bigoplus_{a \in \hat{G}} C(G)_{(\rho^{(a)})}$.

Teorema 3.3.1 (Peter-Weyl). Sea G un grupo topológico compacto, entonces el espacio invariante $R(G)$ es denso en $L^2(G, \mu)$ y por tanto, las funciones $\{\sqrt{d_a} A_{ij}^{(a)}\}_{1 \leq i, j \leq d_a; \forall a \in \hat{G}}$ es una base ortonormal de $L^2(G, \mu)$.

Demostración: Consideremos el cierre $\overline{R(G)}$ del subespacio invariante $R(G)$ y supongamos que no coincide con $L^2(G, \mu)$, en tal caso el subespacio ortogonal $(\overline{R(G)})^\perp$ es no nulo

e invariante por la representación regular por la derecha. Sea entonces $f \in (\overline{R(G)})^\perp$ una función no nula y definamos la siguiente función continua $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(g) = \int_G (\rho_g^R f)(h) \overline{f(h)} d\mu(h)$$

Dicha función pertenece a $(\overline{R(G)})^\perp$, ya que para toda $a \in \hat{G}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle A_{jk}^{(a)}, \varphi \rangle &= \int_G A_{jk}^{(a)}(g) \overline{\varphi(g)} d\mu(g) = \int_G A_{jk}^{(a)}(g) \int_G \overline{f(hg)} f(h) d\mu(h) d\mu(g) \\ &= \int_G \int_G A_{jk}^{(a)}(h^{-1}t) \overline{f(t)} f(h) d\mu(h) d\mu(t) \\ &= \int_G \int_G \sum_{m=1}^{d_a} A_{jm}^{(a)}(t) A_{mk}^{(a)}(h^{-1}) \overline{f(t)} f(h) d\mu(h) d\mu(t) \\ &= \int_G \int_G \sum_{m=1}^{d_a} A_{jm}^{(a)}(t) \overline{A_{km}^{(a)}(h)} \overline{f(t)} f(h) d\mu(h) d\mu(t) \\ &= \sum_{m=1}^{d_a} \left(\int_G A_{jm}^{(a)}(t) \overline{f(t)} d\mu(t) \right) \left(\int_G \overline{A_{km}^{(a)}(h)} f(h) d\mu(h) \right) \\ &= \sum_{m=1}^{d_a} \langle A_{jm}^{(a)}, f \rangle \overline{\langle A_{km}^{(a)}, f \rangle} = 0 \end{aligned}$$

ya que $A_{jk}^{(a)}(h^{-1}t) = \sum_{m=1}^{d_a} A_{jm}^{(a)}(t) A_{mk}^{(a)}(h^{-1})$ por el corolario 3.3.1. Además, si $e \in G$ es el elemento neutro se tiene que $\varphi(e) = \|f\|^2 > 0$.

Sea ahora $\varphi' : G \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$\varphi'(g) = \varphi(g) + \overline{\varphi(g^{-1})}$$

y consideremos el operador lineal $\tau : L^2(G, \mu) \rightarrow L^2(G, \mu)$ definido por

$$(\tau\psi)(g) = \int_G \varphi'(gh^{-1}) \psi(h) d\mu(h) \quad \forall \psi \in L^2(G, \mu)$$

Dado que un cálculo sencillo demuestra que $\varphi'(gh^{-1}) = \overline{\varphi'(hg^{-1})}$ y por la invariancia de la medida de Haar, se tiene que τ es un operador autoadjunto compacto. Como $\varphi' \neq 0$, por el teorema espectral existe un autovalor real λ no nulo de τ y el correspondiente subespacio de autovectores $E(\lambda)$ es de dimensión finita. Sea ϕ_λ una autofunción de τ asociada a dicho autovalor; esto es, $\tau(\phi_\lambda) = \lambda\phi_\lambda$.

Se tiene que para toda $a \in \hat{G}$ es

$$\begin{aligned}
\langle \phi_\lambda, A_{ij}^{(a)} \rangle &= \int_G \phi_\lambda(g) \overline{A_{ij}^{(a)}(g)} d\mu(g) = \frac{1}{\lambda} \int_G (\tau \phi_\lambda)(g) \overline{A_{ij}^{(a)}(g)} d\mu(g) \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_G \int_G (\varphi'(gh^{-1}) \phi_\lambda(h) d\mu(h)) \overline{A_{ij}^{(a)}(g)} d\mu(g) \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_G \left(\int_G \varphi'(t) \phi_\lambda(h) d\mu(h) \right) \overline{A_{ij}^{(a)}(th)} d\mu(t) \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_G \int_G \varphi'(t) \phi_\lambda(h) \overline{A_{ij}^{(a)}(th)} d\mu(h) d\mu(t) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{d_a} \int_G \int_G \varphi'(t) \phi_\lambda(h) \overline{A_{im}^{(a)}(h)} \overline{A_{mj}^{(a)}(t)} d\mu(h) d\mu(t) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{d_a} \left(\int_G \varphi'(t) \overline{A_{mj}^{(a)}(t)} d\mu(t) \right) \left(\int_G \phi_\lambda(h) \overline{A_{im}^{(a)}(h)} d\mu(h) \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{d_a} \langle \varphi', A_{mj}^{(a)} \rangle \langle \phi_\lambda, A_{im}^{(a)} \rangle = 0
\end{aligned}$$

porque $\langle \varphi', A_{mj}^{(a)} \rangle = 0$. Luego, $\phi_\lambda \in \overline{(R(G))}^\perp$.

Veamos ahora que el operador τ es invariante por ρ^R . En efecto, para todo $\psi \in L^2(G, \mu)$ y todo $t \in G$ es

$$[(\rho_g^R \circ \tau)\psi](t) = \int_G \varphi'(tgh^{-1}) \psi(h) d\mu(h) = [\tau(\psi)](tg) = [(\tau \circ \rho_g^R)\psi](t)$$

Como consecuencia, $E(\lambda)$ es invariante respecto de ρ^R y la restricción de ρ^R al subespacio de dimensión finita $E(\lambda)$ es completamente reducible. Luego, existe dentro de $E(\lambda)$ un subespacio V (de autovectores) invariante e irreducible por ρ^R equivalente a la representación irreducible $(\rho^{(c)}, \mathcal{H}_c)$ de G . Sin pérdida de generalidad podemos escribir $V \simeq \mathcal{H}_c$ y sea $\{\xi_j^{(c)}\}_{j=1}^{d_c}$ una base ortonormal de $V \simeq \mathcal{H}_c$. Como $\rho^R|_V \simeq \rho^{(c)}$, se tiene que

$$\rho_g^R(\xi_j^{(c)}) \simeq \rho_g^{(c)}(\xi_j^{(c)}) = \sum_{k=1}^{d_c} \langle \rho_g^{(c)}(\xi_j^{(c)}), \xi_k \rangle \xi_k = \sum_{k=1}^{d_c} A_{j,k}^{(c)}(g) \xi_k^{(c)}$$

Por tanto, $\rho_g^R(\xi_j^{(c)})(h) = \sum_{k=1}^{d_c} A_{j,k}^{(c)}(g) \xi_k^{(c)}(h)$ para todo $h \in G$. Y como por otro lado, $\rho_g^R(\xi_j^{(c)})(h) = \xi_j^{(c)}(hg)$, obtenemos que $\xi_j^{(c)}(hg) = \sum_{k=1}^{d_c} A_{j,k}^{(c)}(g) \xi_k^{(c)}(h)$. Tomando $h = e$, se tiene que $\xi_j^{(c)}(g) = \sum_{k=1}^{d_c} A_{j,k}^{(c)}(g) \xi_k^{(c)}(e)$. Se concluye así que

$$\xi_j^{(c)} = \sum_{k=1}^{d_c} \xi_k^{(c)}(e) A_{j,k}^{(c)} = \sum_{k=1}^{d_c} \mu_k A_{j,k}^{(c)}$$

Luego, $\xi_j^{(c)} \in \overline{R(G)}$ y por tanto, $\xi_j^{(c)} = 0$, ya que $\xi_j^{(c)} \in E(\lambda) \subset (\overline{R(G)})^\perp$. Concluyéndose con ello que $E(\lambda) = 0$ contradiciendo la hipótesis asumida. Por tanto, no puede existir $f \in (\overline{R(G)})^\perp$ no nula. ■

Corolario 3.3.6. *Sea G un grupo topológico compacto. Dada cualquier $f \in L^2(G, \mu)$ se tiene que*

$$f = \sum_{a \in \hat{G}} \sum_{j,k=1}^{d_a} c_{jk}^{(a)} A_{jk}^{(a)}$$

(donde la convergencia es entendida en el sentido de la norma de $L^2(G, \mu)$) y siendo

$$c_{jk}^{(a)} = d_a \int_G f(g) \overline{A_{jk}^{(a)}(g)} d\mu(g)$$

Además, se cumple que

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_G |f(g)|^2 d\mu(g) = \sum_{a \in \hat{G}} \frac{1}{d_a} \sum_{j,k=1}^{d_a} |c_{jk}^{(a)}|^2$$

denominada identidad de Parseval.

Demostración: Teniendo en cuenta que las funciones $\{\sqrt{d_a} A_{jk}^{(a)}\}_{1 \leq j,k \leq d_a; \forall a \in \hat{G}}$ forman una base ortonormal de $L^2(G, \mu)$, se tiene que

$$f = \sum_{a \in \hat{G}} \sum_{j,k=1}^{d_a} \langle f, \sqrt{d_a} A_{jk}^{(a)} \rangle \sqrt{d_a} A_{jk}^{(a)} = d_a \sum_{a \in \hat{G}} \sum_{j,k=1}^{d_a} \langle f, A_{jk}^{(a)} \rangle A_{jk}^{(a)} = \sum_{a \in \hat{G}} \sum_{j,k=1}^{d_a} c_{jk}^{(a)} A_{jk}^{(a)}$$

donde

$$c_{jk}^{(a)} = d_a \langle f, A_{jk}^{(a)} \rangle = d_a \int_G f(g) \overline{A_{jk}^{(a)}(g)} d\mu(g)$$

Teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad de Schur, $\langle A_{jk}^{(a)}, A_{rs}^{(b)} \rangle = \frac{1}{d_a} \delta_{ab} \delta_{jr} \delta_{ks}$ y haciendo uso del resultado anterior se tiene trivialmente que

$$\|f\|^2 = \sum_{a \in \hat{G}} \frac{1}{d_a} \sum_{j,k=1}^{d_a} |c_{jk}^{(a)}|^2$$

■

Observación 3.3.1. *Consideremos una función $f \in L^2(G, \mu)$ y fijemos un conjunto finito de representaciones unitarias irreducibles $\{\rho^{(a_1)}, \dots, \rho^{(a_N)}\}$ de G . Definamos entonces la*

función

$$f^{(a_1, \dots, a_N)} = \sum_{t=1}^N \sum_{j,k=1}^{d_{a_t}} c_{jk}^{(a_t)} A_{jk}^{(a_t)}$$

entonces, para todo $g \in G$

$$f(g) = f^{(a_1, \dots, a_N)}(g) + \epsilon(g)$$

A medida que aumentamos el número N de representaciones unitarias irreducibles tomadas (lo que formalmente denotaremos por $N \rightarrow \infty$) se tiene que

$$|\epsilon(g)| = |f(g) - f^{(a_1, \dots, a_N)}(g)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

para todo $g \in G$. Entonces, por las relaciones de ortogonalidad, se verifica que

$$\langle f, f \rangle = \sum_{t=1}^N \frac{1}{d_{a_t}} \sum_{j,k=1}^{d_{a_t}} |c_{jk}^{(a_t)}|^2 + \langle f^{(a_1, \dots, a_N)}, \epsilon \rangle + \langle \epsilon, f^{(a_1, \dots, a_N)} \rangle + \langle \epsilon, \epsilon \rangle$$

Usando la desigualdad de Schwartz

$$\left| \int_G |f(g)|^2 d\mu(g) - \sum_{t=1}^N \sum_{j,k=1}^{d_{a_t}} |c_{jk}^{(a_t)}|^2 \right| \leq (2\|f^{(a_1, \dots, a_N)}\| + \|\epsilon\|)\|\epsilon\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

De esta manera, se puede aproximar (dentro de la convergencia uniforme) cualquier función $f \in L^2(G, \mu)$ mediante la función $f^{(a_1, \dots, a_N)}$ tanto como queramos eligiendo un número N suficientemente grande de representaciones irreducibles.

Teorema 3.3.2. Toda representación unitaria irreducible $\rho^{(a)}$ de un grupo topológico compacto G aparece en la descomposición de la representación regular con una multiplicidad igual a la dimensión d_a de la misma.

$$L^2(G, \mu) \simeq \bigoplus_{a \in \hat{G}} d_a \mathcal{H}_a \quad \Leftrightarrow \quad \rho^R \simeq \bigoplus_{a \in \hat{G}} d_a \rho^{(a)}$$

Fijado $a \in \hat{G}$ y variando el índice j entre 1 y d_a , los vectores $\{\sqrt{d_a} A_{j1}^{(a)}, \dots, \sqrt{d_a} A_{jd_a}^{(a)}\}$ generan los d_a subespacios invariantes e irreducibles equivalentes a $(\rho^{(a)}, \mathcal{H}_a)$ en la representación regular por la derecha.

Análogamente, fijado $a \in \hat{G}$ y variando el índice k entre 1 y d_a , los vectores ortonormales $\{\sqrt{d_a} A_{1k}^{(a)}, \dots, \sqrt{d_a} A_{dk}^{(a)}\}$ generan los d_a subespacios invariantes e irreducibles equivalentes a $(\rho^{(a)}, \mathcal{H}_a)$ en la representación regular por la izquierda.

Demostración: Es consecuencia de las relaciones de ortogonalidad de Schur, las expresiones de la proposición 3.3.1, y del corolario 3.3.5. ■

Ejemplo 3.3.1. En el ejemplo 2.2.4 hemos computado todas las representaciones del

grupo compacto abeliano $U(1)$. Teniendo en cuenta que dicho grupo es isomorfo al toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = S^1$, podemos utilizar el teorema de Peter-Weyl para describir los conocidos resultados de análisis armónico sobre las funciones periódicas de la recta real, dadas por $f \in L^2(\mathbb{T}, \mu)$. Se tiene que el conjunto de todas las representaciones irreducibles unitarias no equivalentes de $\mathbb{T}$ viene dado por $\{(\rho^{(n)}, \mathbb{C})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definidas para cualquier $\theta \in \mathbb{T}$ por $\rho_\theta^n = e^{in\theta} \text{Id}_{\mathbb{C}}$. Por lo que, en este caso $\hat{\mathbb{T}} \equiv \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{T}$ es un grupo de Lie unidimensional, la medida de Haar es $d\mu(\theta) = d\theta$ para todo $\theta \in \mathbb{T}$. El producto hermitico en $L^2(\mathbb{T}, d\theta)$ es

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{T}} f_1(\theta) \overline{f_2(\theta)} d\theta$$

En este caso, como todas las representaciones unitarias irreducibles son de dimensión uno, es decir, $d_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, cualquier función $f \in L^2(\mathbb{T}, d\theta)$ puede escribirse como

$$f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [d_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

que no es más que el conocido desarrollo de Fourier de una función periódica de periodo 2π . En este sentido, los resultados del teorema de Peter-Weyl permiten dar una generalización del Análisis Armónico de Fourier a los grupos topológicos compactos no conmutativos.

Observación 3.3.2. Se puede utilizar el teorema de Peter-Weyl para caracterizar aquellos grupos topológicos compactos Hausdorff para los cuales hay una cantidad finita o numerable de clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles. En este comentario, G denotará un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff sin asumir que la topología de G verifique el primer axioma de numerabilidad. Las demostraciones de los siguientes resultados se pueden encontrar en el capítulo 2 de [13].

1. Sea G compacto, entonces $\hat{G}$ es finito si y solo si G es finito.
2. Si G es un grupo compacto, entonces $\hat{G}$ es numerable si y solo si G verifica el primer axioma de numerabilidad.
3. Veamos un ejemplo de grupo compacto con una cantidad de representaciones unitarias irreducibles no numerables. Consideremos el grupo $\mathbb{Z}/2 = \{0, 1\}$ el grupo abeliano aditivo dotado con la topología discreta. Entonces,

$$G = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}/2\}$$

es un espacio topológico con una estructura de grupo con la multiplicación coordinada a coordenada es un grupo compacto por el teorema de Tychonoff, para el cual $\hat{G} \simeq \bigoplus_{t \in [0, 1]} \mathbb{Z}_2$ es no numerable.

Capítulo 4

Representaciones unitarias irreducibles de los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$

La formulación matemática de la invariancia bajo rotaciones en Mecánica Cuántica no relativista hace uso de la acción de los grupos compactos $SU(2)$ y $SO(3)$ en los espacios de Hilbert asociados a los sistemas cuánticos que se estudian. La invariancia del operador hamiltoniano cuántico del sistema bajo dichas acciones permite obtener información, e incluso en ciertas ocasiones determinar, los espacios de autofunciones de dicho operador como las componentes irreducibles del espacio de Hilbert bajo dicha acción. Estos hechos están directamente relacionados con el lema de Schur aplicado al operador hamiltoniano, ya que las componentes irreducibles no equivalentes son invariantes por el hamiltoniano. En ciertos casos particulares, estas ideas permiten trivialmente calcular los autovalores de dicho operador. La aplicación de estas técnicas exigen determinar previamente un conjunto completo de representaciones unitarias no equivalentes y los caracteres de las mismas para estos dos grupos. Este es precisamente el objetivo de este capítulo.

4.1. Representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$

El grupo especial unitario de orden 2 es el grupo de isometrías de determinante 1 de la métrica hermitica usual de $\mathbb{C}^2$ dada por

$$\langle (z_1, z_2), (\omega_1, \omega_2) \rangle = z_1 \overline{\omega_1} + z_2 \overline{\omega_2}$$

Fijada una base ortonormal en $\mathbb{C}^2$, la matriz de estas isometrías son matrices unitarias de determinante 1. Lo que permite identificar dicho grupo con el grupo matricial

$$SU(2) = \{U \in Mat(2 \times 2, \mathbb{C}) : UU^* = Id \text{ y } det(U) = 1\}$$

Estas condiciones permiten escribir este grupo en la forma

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in Mat(2 \times 2, \mathbb{C}) : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Observación 4.1.1. *Este grupo es isomorfo al grupo de cuaterniones unitarios*

$$\mathbb{H}_1 = \{q \in \mathbb{H} : \|q\|^2 = 1\} = \{q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\} \simeq S^3$$

hecho que resulta de la estructura de $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de los cuaterniones de Hamilton $\mathbb{H}$. La conocida sucesión exacta $1 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{H}_1 \rightarrow SO(3) \rightarrow 1$ permitirá relacionar el grupo $SU(2)$ con el grupo de rotaciones euclídeas $SO(3)$. Para estos detalles veáse [5] y [6].

Resaltemos que el grupo $SU(2)$ se puede identificar como espacio topológico al espacio S^3 . Hechos que permiten demostrar que $SU(2)$ es un grupo de Lie compacto y por tanto, es un grupo topológico LCH compacto. Llamando $\alpha = x + iy$ y $\beta = z + i\omega$ podemos identificar $SU(2)$ con la esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, ya que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2 = 1$. Parametrizando S^3 mediante las variables angulares $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ tales que $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta \cos\phi$, $z = \sin\theta \sin\phi \cos\psi$, $\omega = \sin\theta \sin\phi \sin\psi$ se tiene que la medida de Haar normalizada de $SU(2) \simeq S^3$ es

$$d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2\theta \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\psi$$

y el producto hermítico para toda función $f_1, f_2 \in L^2(SU(2), \mu)$ es

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi f_1(\theta, \phi, \psi) \overline{f_2(\theta, \phi, \psi)} \sin^2\theta \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\psi$$

Observación 4.1.2. *Se puede demostrar que el subgrupo abeliano máximo de $SU(2)$ es el toro dado por las matrices diagonales*

$$\mathbb{T} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} : \forall \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

que es un grupo topológico unidimensional compacto isomorfo a S^1 .

Las clases de conjugación de $SU(2)$ están generadas por las matrices:

$$U_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$; esto es, en cada clase de conjugación existe un elemento del toro máximo. Nótese también que si $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SU(2)$, se tiene que $UU_\theta U^{-1} = U_{-\theta}$, es decir, las clases de conjugación de U_θ y de $U_{-\theta}$ son las mismas.

Definición 4.1.1. Denotemos por $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$ al espacio vectorial complejo de dimensión

$n + 1$ de los polinomios homogéneos con coeficientes complejos de grado n de $\mathbb{C}^2$; esto es,

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2) = \left\{ p(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k} : a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

Se pueden dotar a estos espacios con una métrica hermítica definida por

$$\left\langle \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k}, \sum_{k=0}^n b_k z_1^k z_2^{n-k} \right\rangle = \sum_{k=0}^n k!(n-k)! a_k \overline{b_k}$$

Se comprueba fácilmente que los polinomios $\{p_k^{(n)}(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{n-k}\}_{k=0}^n$ forman una base ortogonal de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$ y por tanto, las funciones

$$e_k^{(n)}(z_1, z_2) = \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{\sqrt{(k)!(n-k)!}} \quad 0 \leq k \leq n$$

forman una base ortonormal de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$ con respecto a la métrica hermítica citada.

Recordemos que cuando un grupo G opera en un conjunto X se tiene también una acción lineal de G en el conjunto de las funciones de X definida por $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$ para todo $g \in G$ y todo $x \in X$. En nuestro caso, la acción de $SU(2)$ en $\mathbb{C}^2$ induce de manera natural acciones lineales en cada uno de los espacios $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$ dadas por las representaciones

$$\begin{aligned} \rho^{(n)}: \quad SU(2) &\longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)) \\ U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} &\longmapsto \rho_U^{(n)}(p) \end{aligned}$$

siendo $[\rho_U^{(n)}(p)](z_1, z_2) = p(\overline{\alpha}z_1 - \beta z_2, \overline{\beta}z_1 + \alpha z_2)$.

Teorema 4.1.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la representación $(\rho^{(n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ de $SU(2)$ es una representación unitaria irreducible.*

Demostración: En primer lugar, comprobemos que efectivamente $\rho^{(n)}$ define una representación. Claramente, la aplicación $\rho^{(n)}$ está bien definida ya que para todo $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$ y todo polinomio $p = \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$ se cumple que:

$$[\rho_U^{(n)}(p)](z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n a_k (\overline{\alpha}z_1 - \beta z_2)^k (\overline{\beta}z_1 + \alpha z_2)^{n-k} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$$

y trivialmente se comprueba que para cualquier $U, U' \in SU(2)$ se verifica que $\rho_{UU'}^{(n)} = \rho_U^{(n)} \circ \rho_{U'}^{(n)}$ y que $\rho_I^{(n)} = Id_{\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)}$. Se concluye así que $\rho^{(n)}$ es una representación.

Veamos ahora que cada $\rho^{(n)}$ es unitaria. Para ello, observemos que $\forall (z_1, z_2), (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\sum_{k=0}^n e_k^{(n)}(z_1, z_2) \overline{e_k^{(n)}(\omega_1, \omega_2)} = \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k z_2^{n-k} (\bar{\omega}_1)^k (\bar{\omega}_2)^{n-k}}{(k)!(n-k)!} = \frac{1}{n!} (z_1 \bar{\omega}_1 + z_2 \bar{\omega}_2)^n$$

Por otro lado, se tiene que para todo $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left[\rho_U^{(n)} e_k^{(n)} \right] (z_1, z_2) \overline{\left[\rho_U^{(n)} e_k^{(n)} \right] (\omega_1, \omega_2)} &= \\ &= \sum_{k=0}^n e_k^{(n)}(\bar{\alpha} z_1 - \beta z_2, \bar{\beta} z_1 + \alpha z_2) \overline{e_k^{(n)}(\bar{\alpha} \omega_1 - \beta \omega_2, \bar{\beta} \omega_1 + \alpha \omega_2)} \\ &= \frac{1}{n!} ((\bar{\alpha} z_1 - \beta z_2)(\alpha \bar{\omega}_1 - \beta \bar{\omega}_2) + (\bar{\beta} z_1 + \alpha z_2)(\beta \bar{\omega}_1 + \alpha \bar{\omega}_2))^n \\ &= \frac{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^n}{n!} (z_1 \bar{\omega}_1 + z_2 \bar{\omega}_2)^n = \frac{1}{n!} (z_1 \bar{\omega}_1 + z_2 \bar{\omega}_2)^n \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que para todo $U \in SU(2)$ se verifica:

$$\sum_{k=0}^n e_k^{(n)}(z_1, z_2) \overline{e_k^{(n)}(\omega_1, \omega_2)} = \sum_{k=0}^n \left[\rho_U^{(n)} e_k^{(n)} \right] (z_1, z_2) \overline{\left[\rho_U^{(n)} e_k^{(n)} \right] (\omega_1, \omega_2)}$$

Luego, si $\mathcal{A}^{(n)}(U) = \left(\mathcal{A}_{jk}^{(n)}(U) \right)$ es la matriz asociada a la representación $\rho_U^{(n)}$ en la base ortonormal que estamos tomando en $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^n e_k^{(n)}(z_1, z_2) \overline{e_k^{(n)}(\omega_1, \omega_2)} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^n \mathcal{A}_{ik}^{(n)}(U) \left[e_i^{(n)}(z_1, z_2) \right] \sum_{j=0}^n \overline{\mathcal{A}_{jk}^{(n)}(U) \left[e_j^{(n)}(\omega_1, \omega_2) \right]} \right)$$

es decir,

$$\sum_{i,j,k=0}^n \left(\mathcal{A}_{ik}^{(n)}(U) \overline{\mathcal{A}_{jk}^{(n)}(U)} - \delta_{ij} \right) \left[e_i^{(n)}(z_1, z_2) \overline{e_j^{(n)}(\omega_1, \omega_2)} \right] = 0$$

Como las funciones $e_i^{(n)} \otimes \overline{e_j^{(n)}}$ de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ definidas por

$$e_i^{(n)} \otimes \overline{e_j^{(n)}} [(z_1, z_2), (\omega_1, \omega_2)] = e_i^{(n)}(z_1, z_2) \overline{e_j^{(n)}(\omega_1, \omega_2)}$$

son linealmente independientes se tiene que

$$\sum_{k=0}^n \mathcal{A}_{ik}^{(n)}(U) \overline{\mathcal{A}_{jk}^{(n)}(U)} = \delta_{ij}$$

Luego, cada matriz $\mathcal{A}^{(n)}(U)$ es unitaria y con ello concluimos, que la representación

$(\rho^{(n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ es unitaria.

A continuación, comprobemos que $\rho^{(n)}$ es irreducible. Para ello, supongamos que existe un subespacio invariante no nulo $V \subset \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$ y veremos entonces que V es el espacio total $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$; esto es, que los únicos subespacios invariantes son los triviales. Dado un polinomio $q \in V$ no nulo, definimos para cada $\epsilon \in \mathbb{C}$ con $|\epsilon| = 1$ un nuevo polinomio q_ϵ mediante

$$q_\epsilon(z_1, z_2) = q(\epsilon z_1, \epsilon^{-1} z_2)$$

Claramente, $q_\epsilon \in V$ ya que si $U_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \in SU(2)$, se tiene que $q_\epsilon = \rho_{U_\epsilon}^{(n)}(q)$.

Si $q = \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k} \in V$ para ciertos $a_k \in \mathbb{C}$ se tiene que $g_\epsilon = \sum_{i=0}^n a_k \epsilon^{2k-n} z_1^k z_2^{n-k}$. Si tomamos ahora un $\epsilon \in \mathbb{C}$ tal que $\epsilon^{2k-n} = -1$ para cierto $k \in \{0, \dots, n\}$ se tiene que $q + q_\epsilon$ tiene un término menos que q . Por inducción, modificando el parámetro k si es preciso podemos tomar un elemento q de V con un solo término; esto es, en la forma $q = z_1^k z_2^{n-k}$ para un cierto k . Ahora bien, considerando la matriz $A = \begin{pmatrix} a & ib \\ ib & a \end{pmatrix} \in SU(2)$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho_A^{(n)}(q) &= \rho_A^{(n)}(z_1^k z_2^{n-k}) = (az_1 - ibz_2)^k (-ibz_1 + az_2)^{n-k} \\ &= \left(\sum_{m=0}^k a^m (-ib)^{k-m} z_1^m z_2^{k-m} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-k} (-ib)^j a^{n-k-j} z_1^j z_2^{n-k-j} \right) \\ &= \sum_{l=0}^n \left(\sum_{m+j=l} (ib)^{k+j-m} a^{n-k-j+m} \right) z_1^l z_2^{n-l} \\ &= \sum_{l=0}^n (ib)^k a^{n-k} \left(\sum_{m=0}^l (ib)^{l-2m} a^{2m-l} \right) z_1^l z_2^{n-l} \end{aligned}$$

Observemos que cuando $a \rightarrow 1$ el coeficiente de $z_1^l z_2^{n-l}$ se aproxima a:

$$(ib)^k \left(\sum_{m=0}^l (ib)^{l-2m} \right) = (ib)^{k+l} \left(\sum_{m=0}^l (ib)^{-2m} \right) = (ib)^{k+l} \frac{(ib)^{-2} - (ib)^{-2(l+1)}}{1 - (ib)^{-2}}$$

Luego, si $b \neq 0$ se tiene que este coeficiente será no nulo. Además, se puede ver que existe un valor $(a, b) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ para el cual todos los coeficientes de $\rho_A^{(n)}(q) = \rho_A^{(n)}(z_1^k z_2^{n-k})$ son no nulos. Concluimos así que hay un polinomio en V con todos sus coeficientes distintos de cero. Si ahora se aplica el procedimiento realizado anteriormente para convertir un elemento de V en un monomio, se deduce que V contiene todos los monomios y por tanto $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$. En otras palabras, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(\rho^{(n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ es una representación irreducible de $SU(2)$. ■

Observación 4.1.3. Como ya hemos comentado, las clases de conjugación de $SU(2)$

están generadas por las matrices U_θ para cierto $\theta \in \mathbb{R}$. En particular, se tiene

$$\rho_{U_\theta}^{(n)}(z_1^k z_2^{n-k}) = e^{i\theta(n-2k)} z_1^k z_2^{n-k} \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

Esto es, para cada $k \in \{0, \dots, n\}$ el polinomio $z_1^k z_2^{n-k}$ es un autovector de $\rho_{U_\theta}^{(n)}$ de autovalor $e^{i\theta(n-2k)}$ y por tanto, cada $\rho_{U_\theta}^{(n)}$ diagonaliza (este hecho también se puede ver teniendo en cuenta que la restricción $\rho^{(n)}$ al toro maximal $\mathbb{T}$ es una representación de este grupo en $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$ que descompone en suma de representaciones irreducibles de dimensión uno por ser $\mathbb{T}$ abeliano). Con ello, hemos visto que los autovalores de $\rho_{U_\theta}^{(n)}$ son $\{e^{i\theta(n-2k)}\}_{k=0}^n$ y como el carácter de la representación unitaria irreducible $\rho^{(n)}$ es una función central, está completamente determinado por su valor sobre el toro maximal. Así, si $U \in SU(2)$ está en la clase de conjugación del elemento U_θ , entonces el carácter $\chi^{(n)}$ de la representación $\rho^{(n)}$ es

$$\chi^{(n)}(U) = \chi^{(n)}(U_\theta) = \sum_{k=0}^n e^{i\theta(n-2k)} = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}\theta}$$

En particular, vemos que el carácter de $\rho^{(n)}$ solo depende de la variable angular θ y por tanto,

$$\langle \chi^{(n)}, \chi^{(n)} \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2((n+1)\theta) d\theta = 1$$

Teorema 4.1.2. Toda representación unitaria irreducible de $SU(2)$ es equivalente a una representación $(\rho^{(n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ para cierto $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Consideremos una representación irreducible (ϱ, V) de $SU(2)$ de dimensión m . La restricción de la misma al toro maximal $\mathbb{T}$, que denotamos (ϱ', V) , puede descomponerse en suma directa de subrepresentaciones irreducibles de dimensión uno por ser $\mathbb{T}$ abeliano. Así

$$\varrho' = \varrho'_1 \oplus \dots \oplus \varrho'_m$$

siendo cada ϱ'_j una representación unitaria irreducible de $\mathbb{T}$ en un subespacio $\langle v_j \rangle$ de V unidimensional. Por tanto, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, se tiene que

$$(\varrho'_j)_{U_\theta}(v_j) = e^{ik_j\theta} v_j$$

para cierta constante $k_j \in \mathbb{Z}$ (ya que como vimos en el ejemplo 2.2.4, las representaciones irreducibles de $\mathbb{T} \simeq U(1)$ son de esa manera). Por tanto, el carácter $\chi^{(\varrho')} = \chi^{(\varrho'_1)} + \dots + \chi^{(\varrho'_m)}$ viene dado por

$$\chi^{(\varrho')}(U_\theta) = \sum_{j=1}^m \chi^{(\varrho'_j)}(U_\theta) = \sum_{j=1}^m e^{ik_j\theta}$$

Dado que $\chi^{(\varrho')}(U_\theta) = \chi^{(\varrho)}(U_\theta)$ se tiene que $\chi^{(\varrho)}(U_\theta) = \sum_{j=1}^m e^{ik_j\theta}$; esto es, el carácter $\chi^{(\varrho)} : SU(2) \rightarrow \mathbb{C}$ es la función $\chi^{(\varrho)}(\theta) = \sum_{j=1}^m e^{ik_j\theta}$ para ciertos $k_j \in \mathbb{Z}$ (vemos que dicha función solo depende de la variable θ y no de las variables ψ y ϕ que coordinan el grupo $SU(2)$).

Supongamos ahora que la representación (ϱ, V) no es equivalente a ninguna de las representaciones $(\rho^{(n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$0 = \langle \chi^{(\varrho)}, \chi^{(n)} \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \chi^{(\varrho)}(\theta) \chi^{(n)}(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \chi^{(\varrho)}(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}((n+1)\theta) d\theta$$

Dado que U_θ y $U_{-\theta}$ están en la misma clase de conjugación de $SU(2)$ se tiene que $\chi^{(\varrho)}(U_\theta) = \chi^{(\varrho)}(U_{-\theta})$. Podemos extender simétricamente la función $\chi^{(\varrho)}$ al intervalo $[-\pi, \pi]$. Extensión que seguimos denotando $\chi^{(\varrho)}$. En dicho intervalo $[-\pi, \pi]$, la función $f(\theta) = \chi^{(\varrho)} \operatorname{sen}(\theta)$ es una función impar perteneciente a $L^2([-\pi, \pi])$. Utilizando el análisis de Fourier y teniendo en cuenta que las funciones $\{1, \operatorname{sen}(n\theta), \cos(n\theta) : n \in \mathbb{N}\}$ son base ortonormal de $L^2([-\pi, \pi])$. Los coeficientes de Fourier de $f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta))$ en dicha base vienen dados por

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\theta) d\theta \quad ; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta$$

En particular, como $f(\theta)$ y $f(\theta) \cos(n\theta)$ son funciones impares, $a_0 = 0$ y $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $f(\theta) \cos(n\theta)$ es par

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \chi^{(\varrho)}(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta = \langle \chi^{(\varrho)}, \chi^{(n-1)} \rangle = 0$$

Concluimos así que la función $f(\theta)$ es la función nula. Por tanto, $f(\theta) = \chi^{(\varrho)}(\theta) \operatorname{sen}(\theta) = 0$ para cada $\theta \in [0, \pi]$ de donde $\chi^{(\varrho)}(\theta) = 0$, lo cuál implica que $\varrho = 0$. ■

Corolario 4.1.1. *Sea (ϱ, V) una representación finita de $SU(2)$ de dimensión $n+1$ y tal que $e^{in\theta}$ sea un autovalor de ϱ_{U_θ} . Entonces, ϱ es equivalente a $\rho^{(n)}$.*

Demostración: Por ser (ϱ, V) una representación de $SU(2)$ su descomposición en irreducibles viene dada por

$$\varrho \simeq \rho^{(n_1)} \oplus \dots \oplus \rho^{(n_p)}$$

En el caso que $n_j > n$ para algún $j \in \{1, \dots, p\}$ se llega a contradicción por dimensiones. Si $n_j \leq n$, los autovalores de $\rho_{U_\theta}^{(n_j)}$ son de la forma $e^{i\theta(n_j-2k)}$ para cierto $k \in \{0, \dots, n_j\}$. Luego, como $e^{in\theta}$ es autovalor de ϱ_{U_θ} , alguna de las representaciones $\rho_{U_\theta}^{(n_j)}$ tendrá dicho autovalor. Por tanto, algún n_j tiene que ser igual a n y por dimensiones $\varrho \simeq \rho^{(n)}$. ■

Teorema 4.1.3 (Clebsch-Gordan). *Para cualquiera valores $n, m \in \mathbb{N}$, se verifica que*

$$\rho^{(n)} \otimes \rho^{(m)} \simeq \rho^{(m+n)} \oplus \rho^{(m+n-2)} \oplus \dots \oplus \rho^{(|m-n|)}$$

Demostración: Asumiremos que $m \geq n$. Teniendo en cuenta que con las notaciones precedentes $\chi^{(n)}(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{i\theta(n-2k)} = \frac{e^{i\theta(n+1)} - e^{i\theta(-n-1)}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$, el carácter de la representación

$\rho^{(n)} \otimes \rho^{(m)}$ viene dado por

$$\chi^{(n)}(\theta) \cdot \chi^{(m)}(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{i\theta(n-2k)} \left(\frac{e^{i\theta(m+1)} - e^{i\theta(-m-1)}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{i\theta(m+n-2k+1)} - e^{i\theta(n-m-2k-1)}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

Por otro lado, el carácter de la representación $\rho^{(m+n)} \oplus \rho^{(m+n-2)} \oplus \dots \oplus \rho^{(m-n)}$ es

$$\sum_{k=0}^n \chi^{(m+n-2k)}(\theta) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n e^{i\theta(m+n-2k-2j)} = \sum_{k=0}^n \frac{e^{i\theta(m+n-2k+1)} - e^{i\theta(-m-n+2k-1)}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

Se comprueba que $\chi^{(n)}(\theta) \cdot \chi^{(\theta)}(\theta) = \sum_{k=0}^n \chi^{(m+n-2k)}(\theta)$ a través del desarrollo de los sumatorios con lo que se concluye que ambas representaciones son equivalentes al tener el mismo carácter. ■

Observación 4.1.4. Para los primeros valores de n y m se tiene que:

$$\begin{aligned} m, n = 1 &\longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{P}_1(\mathbb{C}^2) \simeq \mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2) \oplus \mathcal{P}_0(\mathbb{C}^2) \\ n = 1, m = 2 &\longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2) \simeq \mathcal{P}_3(\mathbb{C}^2) \oplus \mathcal{P}_1(\mathbb{C}^2) \\ n = 3, m = 1 &\longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{P}_1(\mathbb{C}^2) \simeq \mathcal{P}_4(\mathbb{C}^2) \oplus \mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2) \\ n = 2, m = 2 &\longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2) \simeq \mathcal{P}_4(\mathbb{C}^2) \oplus \mathcal{P}_2(\mathbb{C}^2) \oplus \mathcal{P}_0(\mathbb{C}^2) \end{aligned}$$

Observación 4.1.5. En el estudio del momento angular en Mecánica Cuántica se suele caracterizar a las representaciones unitarias irreducibles $(\rho^{(n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ de $SU(2)$ mediante el valor $s = (n-1)/2$ relacionado con el spin del sistema cuántico y que se denotan $(\rho^{(s)}, V_s)$, pero con $\dim V_s = 2s+1$. Por lo que las representaciones vienen parametrizadas por valores $s \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}$. En este caso, la descomposición de Clebsch-Gordan del producto tensorial de dos representaciones irreducibles se escribe

$$V_{s_1} \otimes V_{s_2} \simeq V_{|s_2-s_1|} \oplus V_{|s_2-s_1|+1} \oplus \dots \oplus V_{s_2+s_1}$$

4.2. Representaciones irreducibles del grupo $SO(3)$

Como es bien conocido las isometrías lineales de determinante uno del espacio euclídeo tridimensional se identifican con el grupo especial lineal ortogonal

$$SO(3) = \{A \in Mat(3 \times 3, \mathbb{R}) : A^T \cdot A = I \text{ y } \det(A) = 1\}$$

Este grupo es un subgrupo de Lie (cerrado) compacto contenido en $Gl(3, \mathbb{R})$. La conocida sucesión exacta de grupos de Lie (y por tanto, grupos topológicos)

$$1 \rightarrow \{\pm I\} \rightarrow SU(2) \rightarrow SO(3) \rightarrow 1$$

permite determinar las representaciones unitarias del grupo $SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm I\}$ a partir de las del grupo $SU(2)$ debido al siguiente hecho

Proposición 4.2.1. *Una representación unitaria (ϱ, V) de dimensión finita de $SU(2)$ factoriza a través de $SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm I\}$ si $\varrho_{-I} = Id_V$ definiendo con ello una representación unitaria finita $(\hat{\varrho}, V)$ de $SO(3)$ y toda representación finita de $SO(3)$ se obtiene de esta manera. Además, si (ϱ, V) es irreducible, $(\hat{\varrho}, V)$ también lo es.*

Corolario 4.2.1. *Las representaciones unitarias irreducibles de $SO(3)$ no equivalentes vienen dada por la factorización de las representaciones $(\rho^{(n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ con n par.*

Demostración: Dada una representación unitaria irreducible $(\rho^{(n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ de $SU(2)$ se tiene que para cualquier polinomio $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$ se cumple que

$$[\rho_{-I}^n(p)](z_1, z_2) = p(-z_1, -z_2) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^n (z_1^k z_2^{n-k}) = (-1)^n p(z_1, z_2)$$

se concluye que n debe ser un número par para que $\rho_{-I}^{(n)} = Id_{\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)}$. ■

Observación 4.2.1. *Si denotamos por $(\hat{\rho}^{(n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ a la representación unitaria irreducible de $SO(3)$ definida por la representación $(\rho^{(n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ de $SU(2)$ con n par se tiene que $\hat{\rho}^{(n)}$ es no equivalente a $\hat{\rho}^{(m)}$ si $n \neq m$, ya que $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2) \neq \dim \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^2)$. Como $n = 2r$ par, entonces la $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2) = 2r + 1$ impar.*

4.3. Polinomios armónicos esféricos

Una función C^∞ -diferenciable del espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ se dice armónica si verifica la ecuación de Laplace

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = 0$$

siendo Δ el operador laplaciano euclideo. Tomando las coordenadas esféricas usuales de $\mathbb{R}^3$, el laplaciano es de la forma

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}$$

en donde

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Dicho laplaciano se puede extender de manera natural a las funciones $\mathbb{C}$ -valoradas de $\mathbb{R}^3$.

Es bien conocido que el operador laplaciano anterior es invariante bajo transformaciones euclídeas de $\mathbb{R}^3$. Restringiendonos a las rotaciones euclídeas queremos mostrar en esta sección como las representaciones irreducibles de $SO(3)$ permiten analizar algunos aspectos del espectro de este operador y muy en particular de su núcleo.

El grupo $SO(3)$ opera de manera natural en el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$. Vectorialmente, esta

acción lineal la podemos escribir

$$\begin{aligned} SO(3) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (A, \vec{x}) &\longmapsto A\vec{x} \end{aligned}$$

Esto permite definir la acción lineal de $SO(3)$ en el espacio de las funciones $\mathbb{C}$ -valoradas de $\mathbb{R}^3$ (veáse ejemplo 2.2.1) ; así dada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ y $A \in SO(3)$ se tiene que

$$(\rho_A f)(\vec{x}) = f(A^{-1}\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

Esta acción transforma funciones diferenciables en funciones diferenciables. La invarianza del laplaciano bajo movimientos euclídeos significa que

$$\Delta(\rho_A f) = \rho_A(\Delta f)$$

para toda función f del espacio vectorial de las funciones $\mathbb{C}$ -valoradas C^∞ -diferenciable de $\mathbb{R}^3$.

Definición 4.3.1. Denotemos por $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$ al espacio vectorial complejo de los polinomios homogéneos con coeficientes complejos de grado n de $\mathbb{R}^3$; esto es,

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3) = \left\{ f(x, y, z) = \sum_{k,m=0}^n \alpha_{km} x^k y^m z^{n-m-k} : \alpha_{km} \in \mathbb{C} \right\}$$

Proposición 4.3.1. $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$ es un subespacio vectorial de dimensión finita de las funciones diferenciables $\mathbb{C}$ -valoradas de $\mathbb{R}^3$. Su dimensión es $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3) = (n+1)(n+2)/2$.

Proposición 4.3.2. El espacio $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$ es invariante por la acción lineal de $SO(3)$ en las funciones $\mathbb{C}$ -valoradas diferenciables; esto es, para todo $f \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$ y todo $A \in SO(3)$, $\rho_A f \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$.

Observación 4.3.1. Se tiene así una representación compleja de dimensión finita $(n+1)(n+2)/2$ del grupo $SO(3)$ en el espacio $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$. Para $n \neq 0$ esta representación no es irreducible.

Es claro que el operador laplaciano es un operador lineal en el espacio de las funciones $\mathbb{C}$ -valoradas diferenciables de $\mathbb{R}^3$, pero no deja invariantes los espacios $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$, ya que transforma polinomios homogéneos $\mathbb{C}$ -valorados de grado n en polinomios homogéneos de grado $n-2$. Sin embargo, trivialmente se comprueba que

Proposición 4.3.3. La aplicación lineal $\Delta : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^3)$ es epiyectiva y por tanto, $\dim \ker \Delta|_{\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)} = 2n+1$

Definición 4.3.2. Denotemos por $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$ al espacio vectorial los polinomios armónicos de grado n del espacio euclídeo; es decir,

$$\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3) = \ker \Delta = \{f \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3) : \Delta f = 0\}$$

Debido a la invarianza del operador de Laplace bajo rotaciones euclídeas se tiene que el subespacio $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$ es un subespacio invariante de dimensión $2n + 1$ bajo la acción de $SO(3)$. Luego, como dicha dimensión es impar podemos asumir que es la factorización de una representación τ de $SU(2)$ en dicho espacio vectorial a través de la proyección $\pi : SU(2) \rightarrow SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm Id\}$; esto es, existe una acción lineal

$$\begin{aligned} \tau : SU(2) \times \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3) \\ (U, f) &\longmapsto \tau_U(f) = \rho_A(f) \end{aligned}$$

siendo $A \in SO(3)$ la imagen de $U \in SU(2)$ por la proyección $\pi : SU(2) \rightarrow SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm Id\}$. En particular, el polinomio $(y + iz)^n \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$, ya que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (y + iz)^n &= \left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) (y + iz)^n \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial z} \right) n(y + iz)^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) (y + iz) = 0 \end{aligned}$$

Además, tomando el elemento $U_\theta \in SU(2)$ se tiene que $\pi(U_\theta) \in SO(3)$ es la rotación euclídea de ángulo 2θ en torno al eje X de $\mathbb{R}^3$, de donde se deduce que $\tau_{U_\theta}((y + iz)^n) = e^{2in\theta}(y + iz)^n$. Por tanto, $(y + iz)^n$ es un autovector del operador τ_{U_θ} de autovalor $e^{2in\theta}$. Por el corolario 4.1.1 la representación $(\tau, \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3))$ es equivalente a la representación irreducible $(\rho^{(2n)}, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2))$ de $SU(2)$. Por tanto, la representación de $SO(3)$ en dicho espacio también es irreducible. Se tiene por tanto que

Proposición 4.3.4. *El espacio $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$ es un subespacio irreducible bajo la acción natural de $SO(3)$ en las funciones $\mathbb{C}$ -valoradas diferenciables de $\mathbb{R}^3$.*

Es evidente que $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^3)$, pues son los polinomios constantes y $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3)$ al ser polinomios homogéneos de grado 1. Se tiene que

Proposición 4.3.5. *Si $n \geq 2$ y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, se verifica que*

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3) \oplus r^2 \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^3)$$

Demostración: Por inducción, si $n = 2$ un cálculo trivial muestra que $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3) \oplus \{r^2\}$. Sea ahora un n cualquiera y consideremos la aplicación $Q : \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$ dada por multiplicar por r^2 . Entonces, por inducción la imagen de Q no contiene componentes equivalentes a $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$. Luego, si descomponemos $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$ en irreducibles obtenemos que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)^\perp$$

en donde $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)^\perp$ contiene todas las irreducibles de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$ no equivalentes a $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$. Como $\dim \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)^\perp = \dim \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^3) = \dim \text{Im } Q$ concluimos que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3) \oplus \text{Im } Q = \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3) \oplus r^2 \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^3)$$

■

Corolario 4.3.1. Para todo $k \geq 1$ se tiene la descomposición en subespacios invariantes irreducibles

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{2k}(\mathbb{R}^3) &= \mathcal{H}_{2k}(\mathbb{R}^3) \oplus r^2 \mathcal{H}_{2(k-1)}(\mathbb{R}^3) \oplus \dots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^3) \\ \mathcal{P}_{2k+1}(\mathbb{R}^3) &= \mathcal{H}_{2k+1}(\mathbb{R}^3) \oplus r^2 \mathcal{H}_{2(k-1)+1}(\mathbb{R}^3) \oplus \dots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3)\end{aligned}$$

Definición 4.3.3. Denotaremos por $\hat{\mathcal{H}}_n(S^2)$ a la restricción a la esfera S^2 de los elementos de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$. Los elementos de dicho espacio se denominan armónicos esféricos de grado n .

En coordenadas esféricas, los elementos de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$ se escriben $f(r, \theta, \varphi) = r^n g(\theta, \varphi)$ donde $g(\theta, \varphi) \in \hat{\mathcal{H}}_n(S^2)$ son los armónicos esféricos de grado n sobre la esfera S^2 . Veamos a continuación que estas funciones $g(\theta, \varphi)$ son autofunciones del operador laplaciano Δ_{S^2} . En efecto, dado que $f \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$ se verifica que

$$0 = \Delta f = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \right) r^n g = (n(n-1) + 2n + \Delta_{S^2}) r^{n-2} g$$

Y por tanto, se cumple que $\Delta_{S^2} g = -n(n+1)g$ para todo $g \in \hat{\mathcal{H}}_n(S^2)$. Con ello vemos que cada uno de los espacios $\hat{\mathcal{H}}_n(S^2) \subset L^2(S^2)$ es un espacio de autovectores para el operador Δ_{S^2} de autovalor $-n(n+1)$ y de multiplicidad $2n+1$. Como el operador Δ_{S^2} es autoadjunto, concluimos que los espacios $\hat{\mathcal{H}}_n(S^2)$ y $\hat{\mathcal{H}}_m(S^2)$ son ortogonales en $L^2(S^2)$ para $m \neq n$.

Proposición 4.3.6. En la descomposición $L^2(S^2) = \overline{\bigoplus_{n \geq 0} \hat{\mathcal{H}}_n(S^2)}$ cada representación irreducible de $SO(3)$ aparece con multiplicidad 1.

Demostración: Es suficiente con demostrar que la suma directa de los $\hat{\mathcal{H}}_n(S^2)$ es densa en el espacio de las funciones continuas de S^2 . Pero, podemos aproximar cualquier función continua de S^2 por la restricción de funciones polinómicas de $\mathbb{R}^3$ como consecuencia del teorema de Stone-Weierstrass. Cualquier polinomio es una suma de sus componentes homogéneas y cada componente homogénea es $f_0 + r^2 f_1 + r^4 f_2 + \dots$, donde $f_i \in \hat{\mathcal{H}}_{n-2i}(S^2)$ para todo $i \in \{0, 1, \dots\}$. Como en la esfera unidad $r \equiv 1$, se concluye que $\hat{\mathcal{H}}_n(S^2)$ es denso en $L^2(S^2)$. ■

Observación 4.3.2. Toda $f = f(\theta, \varphi) \in L^2(S^2)$ tiene una expansión armónica esférica convergente $f = \sum_{n \geq 0} a_n g_n$ con $g_n \in \hat{\mathcal{H}}_n(S^2)$.

Es usual elegir una base ortogonal de $\hat{\mathcal{H}}_n(S^2)$ formada por los polinomios

$$\{Y_n^k(\theta, \varphi) = e^{ik\varphi} P_n^k(\cos\theta) \ ; \ 0 \leq k \leq n\}$$

donde $P_n^k(t)$ son los polinomios de Legendre (véase sección 7.3 de [12]). Normalizando dicha base ortogonal se obtiene una base ortonormal del espacio $L^2(S^2)$ que es ampliamente utilizada en el estudio del momento angular en Mecánica Cuántica y en sistemas cuánticos elementales.

Capítulo A

ANEXO: Nociones básicas de espacios medibles y operadores autoadjuntos compactos

En este anexo se recogen algunas definiciones y resultados básicos sobre teoría de la medida y operadores compactos autoadjuntos en espacios de Hilbert de los que se hace uso en la memoria. Las demostraciones de estos resultados en numerosos libros docentes como por ejemplo [9].

A.1. Espacios topológicos medibles

Definición A.1.1. Sea X un conjunto y $P(X)$ el conjunto de sus partes, entonces se dice que $\mathcal{A} \subset P(X)$ es un álgebra de conjuntos si verifica:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Si E pertenece a $\mathcal{A}$, entonces su complementario E^c también.
3. Si $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$, entonces $E_1 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{A}$

Si además se cumple:

4. Si $E_1, \dots, E_n$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$

diremos que $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra.

Definición A.1.2. Un espacio medible es una pareja $(X, \mathcal{M})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{M}$ una σ -álgebra en X .

Definición A.1.3. Sea X un conjunto. Dado un subconjunto $\mathcal{G} \subseteq P(X)$, se define la σ -álgebra generada por $\mathcal{G}$ como:

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \bigcap_{\mathcal{A} \supseteq \mathcal{G}} \mathcal{A}$$

donde $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra en X .

Definición A.1.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se denomina σ -álgebra de Borel a la σ -álgebra generada por τ .

Definición A.1.5. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Una medida en $(X, \mathcal{M})$ es una función $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ que verifica:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. Si $E = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i$ con $E_i \in \mathcal{M}$, entonces $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

Definición A.1.6. Dado un espacio medible $(X, \mathcal{M})$, se dice que un subconjunto $M \subseteq X$ es medible si $M \in \mathcal{M}$.

Definición A.1.7. Sean dos espacios medibles $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$, se dice que una función $f : X \rightarrow Y$ es medible si $\forall E \in \mathcal{N}$ se tiene que $f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\} \in \mathcal{M}$.

Definición A.1.8. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y μ una medida en él, se dice que una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece al espacio vectorial $L^p(X, \mu)$ si cumple

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

Definición A.1.9. Dado un espacio medible $(X, \mathcal{M})$ y una medida μ en él, se define la aplicación $\|\cdot\|_p : L^p(X, \mu) \rightarrow \mathbb{R}^+$ como $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Observación A.1.1. Se puede comprobar fácilmente que $\|\cdot\|_p$ define una norma en espacio vectorial $L^p(X, \mu)$, y por lo tanto, es normado.

A.2. Operadores compactos en espacios de Hilbert y teorema espectral

Definición A.2.1. Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Un operador A , con dominio $D(A)$ contenido en $\mathcal{H}$, se dice que es continuo en un punto $\xi_0 \in D(A)$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\xi \in D(A)$ es tal que $\|\xi - \xi_0\| \leq \delta$, entonces $\|A(\xi) - A(\xi_0)\| < \epsilon$

Definición A.2.2. Un operador A se dice acotado si existe una constante C tal que $\|A(\xi)\| \leq C\|\xi\|$ para todo $\xi \in D(A)$.

Proposición A.2.1. Todo operador lineal acotado A de un espacio de Hilbert es (uniformemente) continuo.

Definición A.2.3. Si A es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, entonces su norma viene dada por

$$\|A\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A(\xi)\|$$

Fijado un elemento $\eta \in \mathcal{H}$, la aplicación $\xi \mapsto \langle A(\xi), \eta \rangle$ es continua. Por el teorema de representación de Riesz, existe un único $\eta' \in \mathcal{H}$ tal que $\langle A(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, \eta' \rangle$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Definición A.2.4. Dado un operador continuo A en un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, se denomina operador adjunto de A al operador $A^\dagger$ definido por la relación $\langle A(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, A^\dagger(\eta) \rangle$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Proposición A.2.2. El operador $A^\dagger$ es continuo y $\|A\| = \|A^\dagger\|$. Se tiene además que $(A^\dagger)^\dagger = A$.

Definición A.2.5. Diremos que un operador lineal acotado A en un espacio de Hilbert es autoadjunto si satisface que $A = A^\dagger$, es decir, $\langle A(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, A(\eta) \rangle$.

Proposición A.2.3. Si A es un operador autoadjunto, entonces

1. Los autovalores de A son reales.
2. Dados dos autovalores λ y μ distintos de A , se verifica que sus correspondientes espacios de autovectores son ortogonales.

Proposición A.2.4. Si A es un operador autoadjunto, entonces $\|A\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} |\langle A(\xi), \xi \rangle|$.

Definición A.2.6. Se dice que un operador A de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es compacto si la imagen por A de un conjunto acotado es relativamente compacta.

Observación A.2.1. La definición de operador compacto es equivalente a cualquiera de las dos siguientes:

- La imagen por A de la bola unidad es relativamente compacta.
- Si tenemos una sucesión acotada $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ en $\mathcal{H}$, entonces existe una subsucesión de la misma $\{\xi_{n_k}\}_{n_k \geq 1}$ tal que la sucesión $\{A(\xi_{n_k})\}_{n_k \geq 1}$ converge.

Proposición A.2.5. Si $\{A_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de operadores compactos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con límite A , $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$, entonces el operador A es compacto.

Teorema A.2.1. Si A es un operador compacto autoadjunto, entonces, o bien $\|A\|$, o bien $-\|A\|$ es un autovalor de A .

Teorema A.2.2 (teorema espectral). Sea A un operador compacto autoadjunto. Los autovalores no nulos de A forman una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ que es finita o converge a 0. Denotemos por $E(\lambda_n)$ el espacio de autovectores asociado al autovalor λ_n y por $\pi_n : \mathcal{H} \rightarrow E(\lambda_n)$ la proyección ortogonal. Si el número N de autovalores distintos de cero es finito, la dimensión de $E(\lambda_n)$ es finita y $A = \sum_{n=1}^N \lambda_n \pi_n$. En otro caso, $A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \pi_n$ como una serie convergente en la topología de la norma.

Bibliografía

- [1] L. A. BARRERA SAN MARTÍN, *Lie Groups*. Latin American Mathematics Series. Springer, 2021.
- [2] A. O. BARUT y R. RACZKA, *Theory of Groups Representations and Applications*. Second revised edition. World Scientific Publishing Company, 1986.
- [3] T. BRÖCKER y T. DIECK, *Representations of Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1985.
- [4] K. CHANDRASEKHARAN, *A Course on Topological Groups*. Texts and Reading in Mathematics 9. Hindustan Book Agency, 2011.
- [5] A. CRUMEYROLLE, *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras. Spinor Structures*. Mathematics and Its Applications. Springer, 1990.
- [6] R. DEHEUEVELS, *Formes quadratiques et groupes classiques*. Presses Universitaires de France, 1981.
- [7] A. DEITMAR, *A First Course in Harmonic Analysis*. Second edition, Universitext. Springer, 2005.
- [8] A. DEITMAR y S. ECHTERNHOFF, *Principles of Harmonic Analysis*. Springer, 2008.
- [9] J. FARAUT, *Analysis on Lie Groups: An Introduction*. Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 110. Cambridge University Press, 2008.
- [10] G. B. FOLLAND, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Second edition. Chapman and Hall/CRC, 2015.
- [11] W. FULTON y J. HARRIS, *Representation Theory: A First Course*. Graduate Texts in mathematics, vol. 129. Springer, 1991.
- [12] J. GALLIER y J. QUAINANCE, *Differential Geometry and Lie Groups: A Second Course: 13*. Geometry and Computing. Springer, 2020.
- [13] E. GARDELLA, *Análisis Armónico en Grupos Compactos*. Trabajo monográfico. Licenciatura en Matemáticas. Universidad de la República, Uruguay, 2009. En <https://www.colibri.udelar.edu.uy/jspui/bitstream/20.500.12008/8207/1/uy24-17538.pdf> (visitada en Marzo del 2022).
- [14] A. GLEASON, *Groups without small subgroups*. Ann. of Math. 56 (1952), 193-212.

- [15] T. HAWKINS, *The Emergence of the Theory of Lie Groups. An Essay in the History of Mathematics (1869-1926)*. Springer, 2000.
- [16] T. HAWKINS, *Weyl and the Topology of Continuous Groups*. Capítulo 7 (páginas 169-198) de *History of Topology* (editado por I. M. James). Elsevier Science B. V., 2006.
- [17] D. MONTGOMERY y L. ZIPPIN, *Small subgroups of finite-dimensional groups*. Ann. of Math. 56 (1952), 213-241.
- [18] M. A. NAJMARK y A. I. STERN, *Theory of Groups Representations*. Comprehensive Studies in Mathematics 246. Springer Verlag, 1982.
- [19] F. PETER y H. WEYL, *Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe*. Mathematischen Annalen. vol. 97 (1927), 737-755.
- [20] L. S. PONTRJAGIN, *Topological Groups*. Princeton University Press, 1946.
- [21] M. R. SEPANSKI, *Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics 235. Springer, 2007.
- [22] J. SERRE, *Linear Representations of Finite Groups*. Springer Verlag, 1977.
- [23] B. SIMON, *Representation of Finite and Compact Groups*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 10. American Mathematical Society 1996.
- [24] S. STERNBERG, *Group Theory and Physics*. Cambridge University Press, 1995.
- [25] A. VIÑA ESCALAR, *Geometría diferencial*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo, 2000.
- [26] N. R. WALLACH, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*. Second edition. Dover Publications, 2018.