



VNiVERSIDAD D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Facultad de Ciencias

Trabajo de Fin de Grado. Grado en Física

Ondas gravitacionales y primera detección en LIGO

Gravitational Waves and first detection in LIGO.

Alumno: Diego Herrero Tabanera

Tutor: Marc Mars Lloret. Departamento de Física Fundamental

Dr. Marc Mars Lloret autoriza la entrega del trabajo de fin de grado titulado “Ondas Gravitacionales y primera detección con LIGO”, realizado bajo su dirección por el alumno Diego Herrero Tabanera.

Salamanca, 6 de julio de 2022.

Fdo.: Marc Mars Lloret

Índice

1	Introducción, historia y antecedentes	1
2	Punto de partida, campos débiles y teoría linealizada	2
2.1	Tensor de Riemann, Ricci y curvatura escalar en teoría linealizada.	2
2.2	Libertad gauge	3
2.3	Ecuaciones de Einstein.	4
2.3.1	Gauge de Hilbert o de Lorenz.	5
2.3.2	Aplicación del gauge a las ecuaciones de Einstein.	6
3	Aproximación geométrica a las ondas gravitacionales.	7
3.1	Propagación: TT-gauge.	7
3.1.1	El proyector TT.	8
3.2	Efecto de las ondas gravitacionales: Desviación geodésica y fuerzas de marea.	9
3.2.1	Sistema de referencia del TT-gauge	9
3.2.2	Sistema de referencia del detector: Desviación geodésica y fuerzas de marea	10
3.2.3	Masas prueba en anillo: Efecto de la polarización.	11
3.3	Energía de las ondas gravitacionales	11
3.3.1	Aproximación de onda corta, efecto de la onda sobre el fondo	12
3.3.2	Tensor energía momento de ondas gravitacionales	14
3.4	Generación de Ondas Gravitacionales	15
3.5	Emisión de radiación gravitatoria. Energía de las ondas.	15
3.5.1	Tensor energía-momento efectivo para fuentes cosmológicas: Sistemas binarios	16
3.5.2	Potencia emitida	18
4	Púlsar de Hulse-Taylor.	19
4.1	Ecuaciones de movimiento	19
4.2	Cálculo del momento cuadrupolar	20
4.2.1	$\langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle$	21
4.3	Potencia radiada	21
5	BBH, BHNS y BNS: las fuentes actuales de Ondas Gravitacionales	22
5.1	Cambio inducido en la métrica por un sistema binario	24
5.2	Tiempo de coalescencia	25
6	Estudio del universo con Ondas gravitacionales: <i>redshift</i> y constante de Hubble	26
6.1	Constante de Hubble	26
6.2	Redshift	26
6.2.1	Un vistazo al problema con la constante de Hubble	27
7	Detectores-Observatorios de Ondas Gravitacionales	28
7.1	Funcionamiento	28
7.2	Elementos principales de los observatorios	29
7.2.1	Periodización de los observatorios y periodos de observación	29
7.3	Breve descripción de los observatorios actuales	30
7.3.1	LIGO	30
7.3.2	Virgo	30
7.3.3	KAGRA	31
7.4	Subsistemas presentes en los observatorios	31
8	Resumen de las detecciones más importantes	35
8.1	GW150914: Primera detección	35

8.2	GW170814: Primera observación con tres detectores	37
8.3	GW170817: Primera señal BNS	37
8.4	GW190412: dos BH de masas asimétricas	38
8.5	GW190521: Primer BH de masa intermedia	40
9	Conclusiones	41
10	Anexos	42
10.1	Anexo A: Derivadas del tensor I_{ij} para el púlsar de Hulse-Taylor	42
10.1.1	Derivadas de I_{xx}	42
10.1.2	Derivadas de I_{yy}	42
10.1.3	Derivadas de I_{xy}	43
10.1.4	Traza de \ddot{I}_{ij}	43
10.2	Anexo B: EOB, NR y Phenom	44
10.2.1	EOB	44
10.2.2	Relatividad numérica (NR)	44
10.2.3	Phenom	44
11	Tablas y figuras	45
12	Bibliografía	47

RESUMEN

El presente Trabajo de Fin de Grado (TFG) constituye el recorrido histórico de la radiación gravitatoria, abordado desde un punto de vista teórico y práctico.

Las ondas gravitacionales (GW) nacen teóricamente con la relatividad general (GR) y las soluciones en forma de ondas a las ecuaciones de campo de Einstein (EFE) en el marco de la teoría linealizada, basada en una perturbación espacio-temporal $h_{\mu\nu}$ sobre una métrica base $\bar{g}_{\mu\nu}$, propuestas hace unos 100 años, poco después de la publicación de la GR. Analizaremos cómo se emiten estas ondas, los efectos que tienen y sus características, en especial la energía que emiten curvando el espacio-tiempo para lo que desarrollaremos una expresión en función de parámetros observables como la frecuencia del tensor energía momento $T_{\mu\nu}^{GW}$.

A continuación, hablaremos sobre la primera observación indirecta de la emisión de GW realizada por Hulse y Taylor usando un púlsar binario en la década de 1970, y de fuentes astronómicas viables para la detección directa de radiación gravitatoria. Para ambos casos desarrollaremos los cálculos teóricos que nos llevan a la emisión de ondas gravitacionales.

El trabajo sigue con una descripción de los proyectos LIGO y Virgo de interferómetros láser para la detección de GW, que comienzan a construirse en 1990 y son operativos desde 2015.

Por último, comentaremos las observaciones más destacadas realizadas por los detectores y su importancia tanto en la exploración del universo como en la determinación de la constante de Hubble H_0 , complementando el estudio realizado con telescopios tradicionales.

PALABRAS CLAVE

Relatividad general, métrica, tensor, perturbación, vacío, ecuación de ondas, onda gravitacional, GW, interferómetro, observatorio, LIGO, VIRGO, KAGRA, sistema binario, estrella binaria, chirp mass, púlsar de Hulse-Taylor, fusión, agujeros negros.

ABSTRACT

This Final Degree Project (TFG) is a historical overview of gravitational radiation, approached from a theoretical and practical point of view.

Gravitational waves are theoretically born with general relativity (GR) and the wave solutions to the Einstein field equations (EFE) in the framework of the linearized theory, based on a space-time perturbation $h_{\mu\nu}$ on a base metric $\bar{g}_{\mu\nu}$, proposed about 100 years ago, shortly after the publication of GR. We will analyse how these waves are emitted, the effects they have and their characteristics, especially the energy they emit by curving space-time, for which we will develop an expression of the stress-energy tensor $T_{\mu\nu}^{GW}$ as a function of observable parameters such as the frequency .

We will then discuss the first indirect observation of GW emission by Hulse and Taylor using a binary pulsar in the 1970s, and viable astronomical sources for the direct detection of gravitational radiation. For both cases we will develop the theoretical calculations that lead to the emission of gravitational waves.

The work continues with a description of the LIGO and Virgo laser interferometer projects for GW detection, which started construction in 1990 and have been operational since 2015.

Finally, we will discuss the most outstanding observations made by the detectors and their importance both in the exploration of the universe and in the determination of the Hubble constant H_0 , complementing traditional telescopes.

KEY WORDS

General relativity, metric, tensor, perturbation, vacuum, wave equation, Gravitational Wave, GW, interferometer, observatory, LIGO, Virgo, KAGRA, binary system, binary star, chirp mass, Hulse-Taylor pulsar, merger, black holes.

1. Introduccion, historia y antecedentes

La Relatividad General abrió la puerta a una concepción diferente del universo, uniendo las dimensiones espaciales y la temporal a la vez que las transformaba en algo flexible y elástico, y cambiando el concepto por completo de gravedad, sustituida por la curvatura del espacio-tiempo. Las ondas gravitacionales (GW) son un efecto de esta flexibilidad espacio-temporal, y consecuencia de los sucesos más violentos del cosmos, la colisión de dos objetos muy masivos como los agujeros negros o estrellas de neutrones. Este efecto puramente relativista ha sido una de las predicciones teóricas más ambiciosas y la detección ha confirmado la validez de la teoría, a la vez que ha supuesto la culminación de uno de los proyectos más grandes hasta el momento, que requería precisión más allá del tamaño del núcleo atómico. Con el éxito de la detección en LIGO(Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), comienza una nueva forma de exploración del universo, pues ha sido la primera detección directa de agujeros negros, invisibles por otros métodos. También podría contribuir a resolver el problema de los distintos valores que se han obtenido para la constante de Hubble, dado que las fuentes que se miden están a millones de años luz y la expansión del universo es un factor a tener en cuenta debido al corrimiento al rojo de los sistemas que generan ondas gravitacionales.

La radiación gravitatoria fue un resultado esperado de la relatividad general dada la similitud con la teoría electromagnética y con la concepción flexible del espacio-tiempo. Así, el desarrollo teórico realizado por el propio Einstein de las ondas gravitacionales y sus propiedades se conocen al poco tiempo de la publicación de la teoría en 1915. Sin embargo, los científicos de la época no creyeron que fuera posible medirlas. 50 años después, aparece la primera aproximación a la detección o demostración indirecta de la existencia de las ondas gravitacionales por Russell Hulse y Joseph Taylor [14]. Usando un púlsar binario, demostraron que la emisión de radiación gravitatoria era la responsable del acercamiento de las estrellas y su creciente velocidad, lo que les llevó a ganar el Nobel en 1993.

Antes de esto, en la década de 1960 los científicos rusos Michael Gertsenshtein y Vladislav Pustovoit propusieron el concepto de interferómetro láser para detectar ondas gravitacionales. En 1968 se asociaron con Kip S. Thorne, quien había formado un grupo de investigadores en Caltech para trabajar en la teoría de ondas gravitacionales y sus posibles fuentes astronómicas. Paralelamente, Joseph Weber y Rainer Weiss estudiaban los interferómetros láser y las posibles fuentes de ruido culminando en 1972 con la propuesta de un interferómetro e identificando todas las fuentes de ruido. En los años posteriores, grupos científicos con los mismos propósitos trabajaron en ideas para aumentar la sensibilidad. El resultado de estos esfuerzos teóricos fue la construcción de un prototipo de interferómetro en Caltech de 40m y otro de 1.5m en el MIT, a la vez que Weiss fue designado para estudiar el diseño técnico y el coste económico de un interferómetro de varios kilómetros de brazo. La construcción de LIGO comienza en 1990 con Kip S. Thorne, Barry C. Barish y Rainer Weiss a la cabeza del proyecto y culmina en 2002, con actualizaciones hasta 2015 para conseguir la sensibilidad necesaria, y hasta la actualidad mejorando todos los aspectos de las mediciones.

Finalmente LIGO realizó la primera detección directa el 14 de septiembre de 2015 [19] tras las mejoras realizadas, lo que supuso el premio Nobel de 2017 para Rainer Weiss, Barry C. Barish y Kip S. Thorne. Desde la confirmación de la primera detección, disponemos de más de dos docenas de eventos confirmados como Ondas Gravitacionales, las cuales siguen aportando información al campo de la astrofísica, la cosmología, la teoría de la relatividad general, e incluso a la teoría de campos.

2. Punto de partida, campos débiles y teoría linealizada

Las ondas gravitacionales son un fenómeno puramente relativista, es decir, nacen a partir de la relatividad general, haciendo a esta teoría el pilar fundamental desde el que se construyen. Las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del espacio-tiempo y las fuentes de energía-momento,

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}. \quad (1)$$

En las ecuaciones de Einstein (1), los términos que hacen referencia a la geometría del espacio-tiempo son: el tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$, el tensor de Ricci $R^{\mu\nu}$ y la curvatura escalar R , construidos a partir del tensor métrico $g_{\mu\nu}$; que se relacionan por otro lado con las fuentes que modifican dicho espacio-tiempo según su tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$. G es la constante de gravitación universal y c es la velocidad de la luz.

Los objetos o fenómenos que generan esta radiación gravitatoria distan millones de años luz, lo que significa que el radio de curvatura del frente de onda, al igual que la curvatura del espacio en el que se propagan (\mathcal{R}) es mucho mayor que su longitud de onda (λ): $\mathcal{R} \gg \lambda$. En consecuencia, podemos idealizar las ondas gravitacionales con un frente de onda plano que se propaga a través de un espacio-tiempo plano.

El método más efectivo para estudiar la radiación gravitatoria es la *gravedad linealizada*, la aplicación de la teoría de perturbaciones al tensor métrico $g_{\mu\nu}$ alrededor de un espacio-tiempo plano

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \text{con } |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2)$$

Aquí $h_{\mu\nu}$ es la perturbación métrica de las ondas, que tomamos del orden $o(\varepsilon)$ y $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. De forma más general, esta definición de $g_{\mu\nu}$ es válida para otras situaciones y permite estudiar y/o modelar los efectos de la gravedad cuando el campo gravitatorio es débil.

Las ecuaciones de movimiento, en este caso las de Einstein, en el marco de teoría linealizada se expanden a orden lineal en $h_{\mu\nu}$, despreciando los términos de orden mayor. Esto implica utilizar la métrica $\eta_{\mu\nu}$ para subir y bajar índices en las expresiones que involucran $h_{\mu\nu}$, ya que, por ejemplo, $\partial^\alpha h_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \partial_\beta h_{\mu\nu} \simeq \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta h_{\mu\nu}$ a primer orden en la perturbación.

La métrica inversa es $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, donde como ya se ha dicho, todos los índices se suben y bajan con la métrica de Minkowski. La expresión es válida hasta primer orden y se verifica con

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} &= (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\eta_{\nu\sigma} + h_{\nu\sigma}) \\ &= \delta_\sigma^\mu + h_\sigma^\mu - h_\sigma^\mu + o(\varepsilon^2) \\ &= \delta_\sigma^\mu + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

2.1. Tensor de Riemann, Ricci y curvatura escalar en teoría linealizada.

Con el objetivo de determinar ecuaciones de campo de Einstein en teoría linealizada necesitamos tanto el tensor de Ricci como la curvatura escalar como funciones lineales en $h_{\mu\nu}$.

Empezamos calculando los símbolos de Christoffel para la métrica $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \\
&= \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (\eta_{\mu\beta,\nu} + h_{\mu\beta,\nu} + \eta_{\beta\nu,\mu} + h_{\beta\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu,\beta} - h_{\mu\nu,\beta}) \\
&= \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (h_{\mu\beta,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) \\
&= \frac{1}{2} (h^{\alpha}_{\mu,\nu} + h^{\alpha}_{\nu,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}).
\end{aligned}$$

Notemos que la expresión $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ es lineal en $h_{\mu\nu}$. Como en teoría linealizada despreciamos los términos cuadráticos, esto nos lleva a que el tensor de Riemann

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}, \quad (3)$$

se simplifique y adopte la forma

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_{\mu} \left(h^{\alpha}_{\nu,\beta} - h_{\nu\beta}{}^{,\alpha} \right) + \frac{1}{2}\partial_{\nu} \left(h_{\beta\mu}{}^{,\alpha} - h^{\alpha}_{\mu,\beta} \right). \quad (4)$$

Bajamos el primer índice para obtener el tensor de Riemann covariante

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= g_{\lambda\alpha}R^{\lambda}_{\beta\mu\nu} = \eta_{\lambda\alpha}R^{\lambda}_{\beta\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}).
\end{aligned} \quad (5)$$

Necesitamos también calcular el tensor de Ricci, que por definición es

$$\begin{aligned}
R_{\beta\nu} &= R^{\alpha}_{\beta\alpha\nu} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \\
&= \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\beta}{}^{\alpha} + h_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\alpha\nu} - h_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha}{}^{\alpha}).
\end{aligned} \quad (6)$$

Por último la curvatura escalar, con $h = h_{\mu}{}^{\mu}$ la traza de la perturbación $h_{\mu\nu}$, se escribe como

$$R = g^{\beta\nu}R_{\beta\nu} = \eta^{\beta\nu}R_{\beta\nu} = h^{\beta\mu}{}_{,\beta\mu} - h_{,\mu}{}^{\mu}. \quad (7)$$

2.2. Libertad gauge

Las ecuaciones de Einstein son covariantes bajo transformación de coordenadas, es decir, podemos aplicar una transformación de coordenadas arbitraria. Sin embargo, en el régimen de campo débil en el que trabajamos ya hemos elegido un sistema de coordenadas, de forma que las transformaciones que mantienen (2) es un conjunto más pequeño, que se corresponde con transformaciones infinitesimales de coordenadas descritas por un campo de vectores $\xi^{\alpha}(x^{\beta})$ de manera que

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}(x) = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x).$$

Dentro de este conjunto tenemos libertad para imponer condiciones según nos conviene, lo que se conoce habitualmente como libertad de *gauge*

Al transformar las coordenadas también lo hace la métrica. El Jacobiano de la transformación es

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \xi^{\alpha}{}_{,\beta} + o(|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}|^2), \quad (8)$$

por tanto la métrica en el nuevo sistema de coordenadas se obtiene mediante una transformación

$$g'_{\alpha\beta}(x') = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}g_{\mu\nu}(x) = x^{\mu}{}_{,\alpha}x^{\nu}{}_{,\beta}g_{\mu\nu}(x)$$

y dada la transformación de coordenadas obtenemos, en función de las mismas variables

$$g'_{\alpha\beta}(x) = [(\delta_{\alpha}^{\mu} - \xi^{\mu}_{,\alpha})(\delta_{\beta}^{\nu} - \xi^{\nu}_{,\beta})](\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(x), \quad (9)$$

donde los términos de orden dos se ignoran, es decir nos quedamos a orden lineal tanto en $h_{\mu\nu}$ como en $\xi^{\nu}_{,\mu}$. Sustituyendo (2) y (8) llegamos a que la métrica transformada es

$$g'_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x) - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}.$$

Dado que

$$g'_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}(x), \quad (10)$$

concluimos que la perturbación $h_{\alpha\beta}$ se transforma como

$$h_{\alpha\beta}(x) \rightarrow h'_{\alpha\beta}(x) = h_{\alpha\beta}(x) - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}. \quad (11)$$

2.3. Ecuaciones de Einstein.

Como ya hemos dicho, las ecuaciones de campo de Einstein son, incluyendo la constante cosmológica Λ en el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Sustituimos el tensor de Ricci (6) y la curvatura escalar (7) para obtener una expresión en función de la perturbación de onda gravitacional $h_{\mu\nu}$

$$2G_{\mu\nu} = -\square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h^{\alpha}_{\mu,\alpha\nu} + h^{\alpha}_{\nu,\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu}\square h - \eta_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (12)$$

\square es el operador de D'Alembert: $\square = \partial_{\beta}\partial^{\beta} = \nabla^2 - (1/c^2)\partial_t^2$ donde hemos introducido la coordenada t mediante la definición habitual $x^0 = ct$. Tanto $g_{\mu\nu}$ como $h_{\mu\nu}$ son simétricas, por lo que hay 10 funciones independientes.

Definimos $\bar{h}_{\mu\nu}$ como la métrica reducida

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (13)$$

cuyo cambio inverso es

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h},$$

donde \bar{h} es la traza de la métrica reducida y se cumple $\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = h - 2h = -h$.

El motivo de introducir la métrica reducida es que las ecuaciones de Einstein (12) se simplifican si utilizamos $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} - \partial^{\alpha}\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^{\alpha}\partial_{\mu}\bar{h}_{\nu\alpha} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (14)$$

La expresión (14) proporciona las ecuaciones de movimiento en teoría linealizada.

2.3.1. Gauge de Hilbert o de Lorenz.

El tensor de Riemann en teoría linealizada es invariante bajo las transformaciones $h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$,

$$\begin{aligned}
R'_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2} (h'_{\alpha\nu,\beta\mu} + h'_{\beta\mu,\alpha\nu} - h'_{\alpha\mu,\beta\nu} - h'_{\beta\nu,\alpha\mu}) \\
&= \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} - \partial_\beta \partial_\mu (\partial_\alpha \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\alpha) + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - \partial_\alpha \partial_\nu (\partial_\beta \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\beta) - \\
&\quad h_{\alpha\mu,\beta\nu} + \partial_\beta \partial_\nu (\partial_\alpha \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\alpha) - h_{\alpha\nu,\beta\mu} + \partial_\alpha \partial_\mu (\partial_\beta \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\beta)) \\
&= \frac{1}{2} [h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\alpha\nu,\beta\mu} - \\
&\quad \partial_\beta \partial_\mu (\partial_\alpha \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\alpha) - \partial_\alpha \partial_\nu (\partial_\beta \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\beta) + \partial_\beta \partial_\nu (\partial_\alpha \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\alpha) + \partial_\alpha \partial_\mu (\partial_\beta \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\beta)] \\
&= R_{\alpha\beta\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Donde los términos con derivadas de $\partial_\mu \xi_\nu$ cancelan usando que las derivadas conmutan.

Por lo tanto, es posible generar infinitas soluciones a las ecuaciones de Einstein utilizando transformaciones infinitesimales según (10), no obstante todas denotan el mismo sistema físico. La libertad que hay en (10) es análoga a la libertad gauge en electromagnetismo. Para el campo EM, dado el potencial A_μ , el cambio de la forma: $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$, con $f = f(x_\mu)$ una función escalar, no cambia el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &\rightarrow \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) \\
&\rightarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu \partial_\mu f \\
&\rightarrow F_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\square A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu A^\mu = 0. \quad (15)$$

Resulta conveniente imponer el gauge de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

lo cual requiere que la función f satisfaga

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu f = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \square f = -\partial_\mu A^\mu.$$

En el gauge de Lorenz el segundo término en (15) se desvanece de forma que las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\square A_\mu = 0.$$

De manera análoga al caso EM partimos de la perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$, de acuerdo con (11), que se transforma utilizando un campo de vectores $\xi_\mu(x)$ aplicando (8):

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu} \xi^\alpha{}_{,\alpha}. \quad (16)$$

Dada la invariancia de las ecuaciones de Einstein bajo estas transformaciones podemos imponer condiciones de manera que simplifiquen las ecuaciones y/o reduzcan los 10 funciones independientes de las que partimos según (12), es decir, tenemos la posibilidad de tomar $\xi_\mu(x)$ y $\partial_\nu \xi_\mu$ de forma que simplifiquen tanto la expresión (14) como sus componentes independientes. Una elección conveniente que simplifica de forma notable las expresiones es el llamado gauge de Hilbert o de Lorenz, que se define a partir de la métrica reducida $\bar{h}_{\mu\nu}$ mediante la condición

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (17)$$

Para determinar las ecuaciones que deben cumplir $\xi_\mu(x)$ y $\partial_\nu \xi_\mu$ partimos de una $\bar{h}_{\mu\nu}$ cualquiera e imponemos que cumpla el gauge de Lorenz $\partial^\nu \bar{h}'_{\mu\nu} = 0$.

$$(\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu.$$

Por tanto, para que una perturbación arbitraria satisfaga el gauge de Lorenz se debe cumplir

$$\square \xi_\mu = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}.$$

Si definimos f_μ mediante $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = f_\mu$ concluimos que para obtener $(\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = 0$ el campo de vectores ha de cumplir $\square \xi_\mu = f_\mu$, ecuación que siempre admite solución ya que el operador d'Alambert es invertible. En términos de la función de Green $G(x - y)$ del operador \square podemos escribir

$$\xi_\mu = \int dx^4 G(x - y) f_\mu(y).$$

El gauge de Lorenz mantiene una libertad gauge residual. En efecto si $\bar{h}_{\mu\nu}$ ya se encuentra en el gauge de Lorenz, una transformación gauge con vector ξ_μ que satisfaga $\square \xi_\mu = 0$ mantendrá el campo transformado $\bar{h}'_{\mu\nu}$ dentro del gauge de Lorenz.

2.3.2. Aplicación del gauge a las ecuaciones de Einstein.

El gauge de Lorenz reduce las ecuaciones de Einstein (14) a un único término

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (18)$$

Esta ecuación de ondas proporciona sentido al nombre que dimos al principio a $h_{\mu\nu}$, denominándola perturbación de ondas gravitacionales. Además, también ha limitado las componentes independientes de $h_{\mu\nu}$: por simetría, el tensor métrico tiene diez componentes independientes, el gauge de Lorenz introduce cuatro restricciones y la libertad gauge residual incluye cuatro funciones iniciales arbitrarias, así como sus derivadas temporales. Con todo ello, el tensor métrico $h_{\mu\nu}$ tiene como libertad inicial dos funciones arbitrarias y sus primeras derivadas temporales. Es decir la perturbación describe dos grados de libertad.

El gauge de Lorenz es consistente con la conservación del tensor de energía-momento

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

que en nuestras condiciones toma la forma $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ya que podemos sustituir ∇_μ por ∂_μ . Si ahora tomamos la divergencia de (18) obtenemos

$$\partial^\mu \square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \partial^\mu T_{\mu\nu},$$

donde ambos términos son nulos de forma independiente, el primero porque ∂ y \square conmutan y se cumple el gauge de Lorenz, y el segundo porque el tensor energía-momento se conserva.

3. Aproximación geométrica a las ondas gravitacionales.

3.1. Propagación: TT-gauge.

La propagación de las ondas gravitacionales se realiza en vacío, por lo que tomamos $T_{\mu\nu} = 0$ y obtenemos la ecuación de ondas

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (19)$$

Dado que el D'Alambertiano en el espacio plano se escribe como $\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2$, las soluciones para $\bar{h}_{\mu\nu}(x)$ son una superposición de ondas planas,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re} \left(\varepsilon_{\mu\nu} e^{-ik^\alpha x_\alpha} \right).$$

En esta expresión $\varepsilon_{\mu\nu}$ es la amplitud de las ondas y el tensor polarización de las mismas y $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$, donde \vec{k} es el vector de onda.

Las ecuaciones imponen que $k^\alpha k_\alpha = 0$. Para demostrarlo tan solo hay que sustituir la expresión en la ecuación de ondas

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = -\eta^{\mu\nu} k_\nu k_\mu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0.$$

Dado que $\bar{h}^{\alpha\beta}$ es distinto de 0, se sigue que $k_\mu k^\mu = 0$, es decir que el vector de ondas es luminoso y concluimos que estas ondas viajan a la velocidad de la luz.

También tenemos que la onda es transversal $k^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ a la propagación en el gauge de Lorenz. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} \\ 0 &= ik^\mu \bar{h}_{\mu\nu} e^{-ik_\alpha x^\alpha}. \end{aligned} \quad (20)$$

La perturbación provoca que el propio espacio-tiempo sea el que se curve como superposición de ondas planas, y además, dicha perturbación se propague a la velocidad de la luz.

Consideramos la propagación de la onda en la dirección del eje z , proceso que siempre podemos realizar orientando los ejes de coordenadas, de manera que la fase es $k^\alpha x_\alpha = (\omega/c, 0, 0, \omega/c) \cdot (-ct, 0, 0, z) = -\omega(t - z/c)$. Si definimos el tiempo retardado $\tau = (t - z/c)$, las soluciones se escriben en función de τ y son independientes de x e y . Si escogemos unidades $c = 1$ la condición de gauge de Lorenz $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}(t - z) = 0$ toma la forma

$$-\partial_t \bar{h}_{\mu t} + \partial_z \bar{h}_{\mu z} = 0.$$

Podemos escribir esta ecuación en derivadas parciales en función el tiempo retardado donde veremos que se simplifica. Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{h}_{\mu t} &= \frac{\partial \bar{h}_{\mu t}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \partial_\tau \bar{h}_{\mu t} \\ \partial_z \bar{h}_{\mu z} &= \frac{\partial \bar{h}_{\mu z}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\partial_\tau \bar{h}_{\mu z}, \end{aligned}$$

de manera que el gauge de Lorenz queda

$$-\partial_t \bar{h}_{\mu t} + \partial_z \bar{h}_{\mu z} = -\partial_\tau (\bar{h}_{\mu t} + \bar{h}_{\mu z}) = 0.$$

Esto nos fija, salvo constantes de integración que tomamos nulas ya que estamos interesados en soluciones dependientes del tiempo, $\bar{h}_{\mu z} = -\bar{h}_{\mu t}$. Además tenemos la condición de transversalidad de la onda a la propagación de forma que

$$\bar{h}_{\mu z} = \bar{h}_{\mu t} = 0.$$

Ahora imponemos condiciones sobre las cuatro funciones arbitrarias $\xi_\mu(x)$ que ya sabemos que satisfacen $\square\xi_\mu = 0$ en el gauge de Lorenz. Dado el cambio de coordenadas (16)

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \eta^{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha},$$

podemos considerar soluciones de la forma

$$\xi^\alpha(t, \mathbf{x}) = B^\alpha \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \beta_{(\alpha)}),$$

y tenemos la libertad de elegir B^α y $\beta_{(\alpha)}$ para anular la traza $\eta^{\mu\nu}\bar{h}'_{\mu\nu} = 0$. Usando la transformación de la traza

$$\bar{h} \rightarrow \bar{h}' = \bar{h} - 2\xi^\lambda{}_{,\lambda},$$

podemos escoger B^α de forma que la traza cumpla $\bar{h} = \bar{h}_{11} + \bar{h}_{22} = 0$, lo cual resulta en que $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, de forma que llegamos al conjunto de condiciones

$$h = 0, \quad \partial^i h_{ij} = 0, \quad h_{\mu 0} = 0, \quad k^\mu h_{\mu\nu} = 0.$$

Por lo tanto, hemos reducido las 10 funciones iniciales que teníamos a dos únicas componentes independientes que proporcionan el significado físico de la perturbación, que son sobre las que no hemos impuesto ninguna condición h_{xx} y h_{xy} salvo que satisfacen $h_{xx} = -h_{yy}$ por anular la traza y $h_{xy} = h_{yx}$ por simetría en la perturbación.

Definimos de esta manera el gauge TT (Transverse-Traceless), en el que la perturbación se escribe directamente en función del tiempo retardado como

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega(t - z/c)]. \quad (21)$$

En conclusión la métrica completa para una onda gravitacional que se propaga en z se puede escribir como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dz^2 + \{1 + h_+ \cos[\omega(t - z/c)]\} dx^2 + \{1 - h_+ \cos[\omega(t - z/c)]\} dy^2 + 2h_\times \cos[\omega(t - z/c)] dx dy, \quad (22)$$

donde h_+ y h_\times son los dos grados de libertad que sobreviven en teoría linealizada y corresponden con las dos posibles polarizaciones que puede tener una GW.

Físicamente, en el gauge TT la perturbación de onda gravitacional toma una forma sencilla. El correspondiente sistema de referencia ligado a las condiciones es el que denotamos como sistema de referencia TT.

3.1.1. El proyector TT.

El objetivo de este apartado es determinar las componentes TT de las fuentes que generen ondas gravitacionales. En el apartado anterior hemos visto que las componentes TT son las que determinan la perturbación, de forma que es muy útil introducir un método con el que obtener las componentes que buscamos de una manera general y sencilla.

Las condiciones TT y la forma de la onda obtenida vienen de imponer las condiciones de gauge y bajo la suposición de que se propaga en el eje z . Para poder tomar una dirección arbitraria de propagación \hat{n} introducimos un operador de proyección,

$$P_{ij}(\hat{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j. \quad (23)$$

P_{ij} define la proyección sobre las componentes TT, con $\hat{n}_i = \frac{k_i}{|k|}$ los vectores unitarios en la dirección de propagación a partir del vector de ondas. P_{ij} es simétrico, tiene traza igual a 2 y cumple $n^i P_{ij} = 0$.

Este proyector actúa sobre tensores (simétricos) y sus índices se suben y bajan utilizando coordenadas cartesianas, es decir, con δ_{ij} , por tanto $P_j^k = P^{jk} = P_{jk}$. Usando este proyector podemos definir las componentes TT de cualquier métrica $h_{\mu\nu}$. La definición solo involucra a las componentes espaciales y es

$$h_{ij}^{TT} = P_i^l P_j^m h_{lm} - \frac{1}{2} P_{ij} (P^{lm} h_{lm}).$$

A partir de esta ecuación, introducimos el operador Λ

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}, \quad (24)$$

que por construcción es también un proyector, y por tanto cumple: $\Lambda_{ij}^{kl} \Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn}$, es ortogonal a la propagación $n^i \Lambda_{ij,kl} = 0$ para todos los índices, es simétrico bajo el intercambio de pares y todas sus trazas valen cero.

Denominado ocasionalmente tensor Lambda (ver ecuación (10.4.14) en [17]), nos permite obtener las componentes TT para una dirección cualquiera de propagación

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij}^{kl} h_{kl}. \quad (25)$$

Y su forma desarrollada es

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = & \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} \\ & + \frac{1}{2} n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2} n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l. \end{aligned} \quad (26)$$

3.2. Efecto de las ondas gravitacionales: Desviación geodésica y fuerzas de marea.

3.2.1. Sistema de referencia del TT-gauge

Una consecuencia hasta cierto punto sorprendente del gauge TT es que una partícula libre inicialmente en reposo en una región cuyo sistema ambiente es de Lorenz se mantendrá en reposo al paso de una onda gravitacional. Fijamos un sistema inercial cuyo eje Z coincide con la dirección de una onda gravitacional incidente que cumple las condiciones del gauge TT. Dicha masa obedecerá la ecuación de las geodésicas

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (27)$$

En el instante inicial la cuadrivelocidad de la partícula es $u^\mu \simeq (1, 0, 0, 0)$. Nuestro sistema tiene un tensor métrico dado por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, por lo tanto los símbolos de Christoffel están dados por (3). Esto nos lleva a que la ecuación (27) se escribe

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} &= \frac{du^\alpha}{dt} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}). \end{aligned}$$

Usamos que en el gauge TT $h_{00} = h_{\mu 0} = 0$ por lo que $\Gamma^\alpha_{00} = 0$ y obtenemos que la partícula no se ve afectada al paso de la onda gravitacional. Sin embargo, esto está limitado a que la partícula se encuentra en una posición coordenada constante. Concluimos que el estudio de partículas de forma

individual no proporciona información acerca de cómo podemos estudiar las ondas gravitacionales.

En cambio, si ahora tomamos una partícula situada en el origen en el instante inicial y otra en $x = L, y = z = 0$, ya sabemos que el paso de una onda gravitacional no afecta a su posición coordenada, pero su distancia propia s sí lo hace. En efecto dicha distancia propia puede calcularse en cualquier sistema de coordenadas mediante la expresión

$$\begin{aligned} s &= \int ds = \int \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{g_{xx}} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + h_+ \cos \omega t} \\ &\simeq L \left(1 + \frac{1}{2} h_+ \cos \omega t \right). \end{aligned}$$

que vemos que no se mantiene constante.

3.2.2. Sistema de referencia del detector: Desviación geodésica y fuerzas de marea

Consideremos ahora dos partículas muy próximas en caída libre y denominemos a sus geodésicas x_1^α y x_2^α respectivamente. Ambas geodésicas se relacionan a través del vector desplazamiento L^α como $x_2^\alpha(\tau) = x_1^\alpha(\tau) + L^\alpha(\tau)$. Hacemos uso de la propiedad de la relatividad general que nos dice que siempre existe un sistema de referencia inercial en un punto P de la geodésica x_1^α que podemos tomar como el origen $x|_P = 0$, donde $u^\mu \simeq (1, 0, 0, 0)$ y $\Gamma|_P = 0$. En dicho sistema de referencia la partícula se encuentra instantáneamente en reposo por lo que podemos tomar $\tau = t$. Consideremos un punto Q de x_2^α que está separado de P por L^α en un instante de tiempo propio τ . En otras palabras, si suponemos que la partícula Q se encuentra inicialmente en reposo tenemos que $\tau \simeq t$ y en este sistema de coordenadas local alrededor del punto P , tenemos

$$[\Gamma_{\mu\nu}^\alpha]_P = 0 \quad , \quad \left(\frac{d^2 x_1^\alpha}{dt^2} \right)_P = 0 \quad , \quad \left(\frac{d^2 x_2^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx_2^\mu}{dt} \frac{dx_2^\nu}{dt} \right)_Q = 0. \quad (28)$$

Ahora, para el punto Q tomamos los símbolos de Christoffel y realizamos un desarrollo de Taylor a partir de la condición de que el vector desplazamiento L^α es pequeño

$$[\Gamma_{\mu\nu}^\alpha]_Q = [\Gamma_{\mu\nu}^\alpha]_P + [\Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\alpha]_P L^\lambda = [\Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\alpha]_P L^\lambda.$$

Esta ecuación nos permite calcular (28), que en el punto Q toma la forma

$$\left(\frac{d^2 L^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\lambda} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} L^\lambda \right)_P = 0. \quad (29)$$

Sin embargo, la derivada total en P es, usando que $\Gamma|_P = 0$

$$\left(\frac{D^2 L^\alpha}{Dt^2} \right)_P = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dL^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} x^\nu L^\mu \right) \right)_P = \left(\frac{d^2 L^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} L^\mu \right)_P. \quad (30)$$

Combinamos las ecuaciones (29) y (30) obtenemos una relación entre la separación L^μ y el tensor de Riemann $R^\alpha_{\mu\nu\lambda}$

$$\frac{D^2 L^\alpha}{Dt^2} + [\Gamma^\alpha_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\lambda}] L^\nu \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = \frac{D^2 L^\alpha}{Dt^2} + R^\alpha_{\mu\nu\lambda} L^\nu \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 L^i}{dt^2} = -R_{itjt}(t, 0)L^j(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{ij}^{TT}}{dt^2} L^j, \quad (31)$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado la expresión (5).

Por tanto, considerando de nuevo que la onda gravitacional se propaga en el eje z , el cambio de longitud en el plano XY de polarización se obtiene integrando (31) que escribimos de forma más intuitiva como

$$\ddot{\delta x}^i = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{ij}^{TT}}{dt^2} x^j \quad \Rightarrow \quad \delta x^i = \frac{1}{2} h_{ij}^{TT} x^j,$$

donde los puntos indican derivadas respecto al tiempo.

De modo que la polarización presenta dos casos, dado que h_{ij}^{TT} solo afecta al plano perpendicular a la propagación para nuestras masas situadas en el plano (x, y) tenemos:

1.- Polarización $+$:

$$\delta x = \frac{1}{2} h_{+x} \quad , \quad \delta y = -\frac{1}{2} h_{+y} \quad , \quad \delta z = 0.$$

2.- Polarización \times :

$$\delta x = \frac{1}{2} h_{\times y} \quad , \quad \delta y = \frac{1}{2} h_{\times x} \quad , \quad \delta z = 0.$$

3.2.3. Masas prueba en anillo: Efecto de la polarización.

La denominación \times y $+$ en la polarización es debida al movimiento inducido por el paso de una onda gravitacional que sigue un conjunto de masas colocadas inicialmente en un anillo. Tomamos la propagación de la onda en el eje z , perpendicular a la posición de las masas prueba $\zeta_0 = (x_{0i}, y_{0i})$, la perturbación la denominaremos de la misma forma que en el apartado anterior $(\delta x, \delta y)$. Con $h_{ab}^{TT} = (h_{+} + h_{\times})_{ab} \cos(\omega t)$ dependiendo de cada polarización, escribimos la ecuación de movimiento en forma matricial

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{\delta x} \\ \ddot{\delta y} \end{pmatrix}_{+} &= \left\{ \frac{(h_{\times})_{ab}}{2} \begin{pmatrix} y_0 + \delta x \\ x_0 + \delta x \end{pmatrix} + \frac{(h_{+})_{ab}}{2} \begin{pmatrix} x_0 + \delta x \\ -y_0 - \delta y \end{pmatrix} \right\} \omega^2 \cos \omega t \\ &\approx \left\{ \frac{h_{\times}}{2} \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + \frac{h_{+}}{2} \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} \right\} \omega^2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (32)$$

Los términos δx y δy son del orden $O(h)$ y podemos ignorarlos frente a x_0 y y_0 . Si ahora integramos y separamos cada polarización por separado obtenemos las ecuaciones representadas de manera visual en la figura 1,

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = -\frac{h_{\times}}{2} \cos(\omega t) \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} - \frac{h_{+}}{2} \cos(\omega t) \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

3.3. Energía de las ondas gravitacionales

El transporte de energía por parte de las ondas gravitacionales queda demostrado en el apartado anterior al concluir que dos o más masas se mueven, es decir adquieren energía cinética, al interactuar con la perturbación a su paso. En este apartado analizaremos las consecuencias que tiene el transporte de energía de la onda gravitacional, ya que en el marco de la relatividad general, la energía que transporta la perturbación generará una curvatura en el espacio-tiempo.

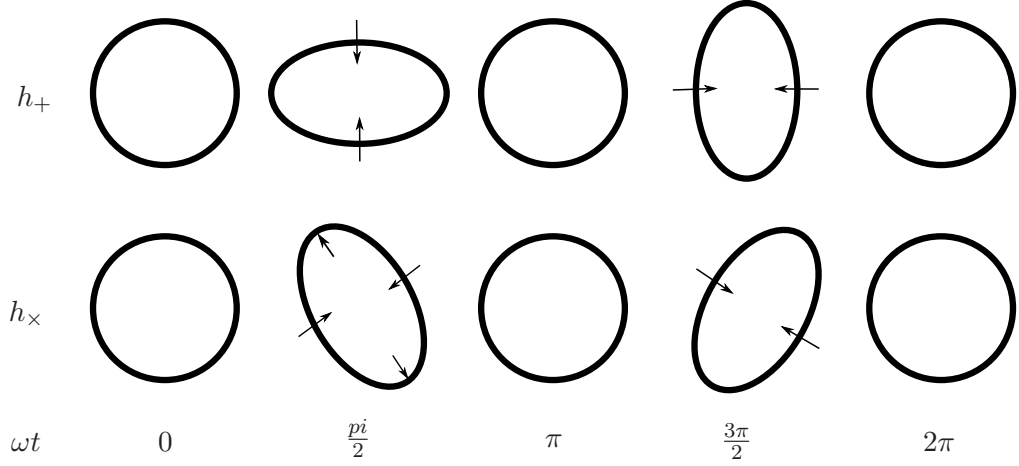


Figura 1: Efecto de una onda gravitacional sobre una distribución continua de masa en anillo para las dos polarizaciones.

3.3.1. Aproximación de onda corta, efecto de la onda sobre el fondo

Partimos de una onda gravitacional propagándose en el espacio-tiempo en el cual hay una métrica $\bar{g}_{\alpha\beta}$ dinámica y no necesariamente plana (ya que descartaríamos la posibilidad de que la onda gravitacional curve el espacio-tiempo base), y asumimos que $g_{\mu\nu}$ varía en dos escalas de longitud-tiempo: una para la curvatura del espacio base, que denominaremos L y que indica una longitud de onda larga, o baja frecuencia, y otra para la onda gravitacional, que tiene una longitud de onda λ corta, o alta frecuencia, y que cumplen la condición $\lambda/L \ll 1$. Para estudiar la energía y el momento debemos expandir la aproximación de la métrica (2) hasta un orden más alto, de forma que se introduzcan correcciones no lineales,

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) + h_{\mu\nu}(\mathbf{x}). \quad (34)$$

Esta separación en fondo y perturbación es un instrumento matemático y puede tomarse de muchas formas. El problema que se presenta es decidir qué parte corresponde a las fluctuaciones y qué parte es la métrica base.

La aproximación de onda corta asume que $g_{\mu\nu}$ presenta dos escalas de longitud-tiempo muy distintas entre sí: $\lambda \ll l \ll \mathcal{R}$, donde \mathcal{R} es la curvatura de $\bar{g}_{\mu\nu}$, λ es la longitud de onda gravitacional que es también la escala en la que varía $h_{\mu\nu}$ y l es la escala característica de longitud que usamos para detectar las ondas gravitacionales. Con esta condición separamos $R_{\mu\nu}$ en dos partes: una de alta frecuencia que varía rápidamente con escala λ y otra de baja frecuencia, más estable, que cambia suavemente con escala \mathcal{R} .

Separamos el tensor de Einstein, el tensor de Ricci y el tensor energía-momento hasta orden cuadrático, los superíndices indican el orden lineal (1) o cuadrático (2) respecto a la perturbación $h_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) &= G_{\mu\nu}(\bar{g}_{\mu\nu}) + G_{\mu\nu}^{(1)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) + G_{\mu\nu}^{(2)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) + \dots \\ T_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) &= T_{\mu\nu}(\bar{g}_{\mu\nu}) + T_{\mu\nu}^{(1)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) + T_{\mu\nu}^{(2)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) + \dots \\ R_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) &= R_{\mu\nu}(\bar{g}_{\mu\nu}) + R_{\mu\nu}^{(1)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) + R_{\mu\nu}^{(2)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

A partir de estas expresiones las ecuaciones de Einstein (1) se escriben

$$G_{\mu\nu}(\bar{g}_{\mu\nu}) + G_{\mu\nu}^{(1)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) - \frac{c^4}{8\pi} G_{\mu\nu}^{(2)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) \right].$$

Cada término de la ecuación es una cierta combinación de derivadas de $\bar{g}_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu}$. Desde el punto de vista físico y, teniendo en cuenta cada orden, se traduce en:

- $G_{\mu\nu}(\bar{g}_{\mu\nu})$ contiene términos de baja frecuencia.
- $G_{\mu\nu}^{(1)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu})$ combina un factor de baja frecuencia con un factor de alta frecuencia.
- $G_{\mu\nu}^{(2)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu})$ contiene un término de baja frecuencia y dos términos de alta frecuencia.

Ahora separamos e igualamos los términos de alta frecuencia y baja frecuencia de ambos lados de la ecuación de Einstein,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(\bar{g}_{\mu\nu}) &= \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) - \frac{c^4}{8\pi} G_{\mu\nu}^{(2)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) \right]^{\text{Baja f}}, \\ G_{\mu\nu}^{(1)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) &= \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) - \frac{c^4}{8\pi} G_{\mu\nu}^{(2)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}) \right]^{\text{Alta f}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Para el tensor de Ricci esto se traduce en

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu} &= - \left[R_{\mu\nu}^{(2)} \right]^{\text{Baja f}} + \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)^{\text{Baja f}}, \\ R_{\mu\nu}^{(1)} &= - \left[R_{\mu\nu}^{(2)} \right]^{\text{Alta f}} + \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)^{\text{Alta f}}, \end{aligned} \quad (37)$$

donde hemos usado la notación $\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(\bar{g}_{\mu\nu})$, $R_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu})$ y $R_{\mu\nu}^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)}(\bar{g}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu})$. Estas ecuaciones nos permiten concluir que son las componentes de baja frecuencia las que producen curvatura del espacio-tiempo base. Tomamos promedios en una región del espacio-tiempo dentro de la aproximación de onda corta para extraer las componentes de baja frecuencia. Hacemos el promedio espacial en una escala l y temporal $\bar{t} \gg T_{GW} = 1/f_{GW}$. De esta forma, \bar{R} se mantendrá aproximadamente constante, mientras que el promedio de los términos de alta frecuencia $\langle R_{\mu\nu}^{(1)} \rangle$ es nulo. Ésta es precisamente la razón por la que es necesario extender a orden cuadrático los cálculos. La propia naturaleza ondulatoria de las ondas hace que no haya depósito de energía al tomar promedios en una región.

Definimos el tensor energía-momento efectivo de una onda gravitacional

$$T_{\mu\nu}^{(GW)} = - \frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)} = - \frac{c^4}{8\pi G} \left(\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \langle R^{(2)} \rangle \right), \quad (38)$$

donde hemos separado e identificado los términos que se deben a la perturbación de términos debidos a las fuentes de materia que se encuentran codificadas en $T_{\mu\nu}$. De esta manera, podemos escribir la parte de baja frecuencia de las ecuaciones (36) y (37) haciendo la relación con $T_{\mu\nu}^{(GW)}$ explícita

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(\bar{g}_{\mu\nu}) &= \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) - T_{\mu\nu}^{(GW)} \right]^{\text{Baja f}}, \\ - \left[R_{\mu\nu}^{(2)} \right]^{\text{Baja f}} &= \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{(GW)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{(GW)} \right)^{\text{Baja f}}. \end{aligned}$$

Por tanto las ondas gravitacionales afectan a la métrica ambiente según la relación

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(GW)} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{\mu\nu},$$

donde hemos tomado las ecuaciones de Einstein en vacío y hemos usado únicamente la parte de baja frecuencia.

3.3.2. Tensor energía momento de ondas gravitacionales

Para el cálculo explícito del tensor energía-momento hemos de determinar la forma que toma el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}^{(2)}$. Nos situamos a distancias lejanas a las fuentes de forma que tomamos la métrica base aproximadamente plana $\bar{g}_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$. De esta forma las derivadas covariantes en las expresiones tanto del tensor de Einstein como de Ricci pueden ser sustituidas por derivadas parciales. De esta forma tomamos la ecuación (6) y la ampliamos para incluir los términos de segundo orden,

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta h_{\alpha\mu} - h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} \right. \\ \left. + h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} + \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\mu} \right. \\ \left. + \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\nu h_{\alpha\mu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\mu h_{\alpha\nu} \right].$$

En el gauge de Lorenz la expresión se reduce a, incluyendo los corchetes para los promedios,

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle. \quad (39)$$

Finalmente, el tensor energía-momento, con las ecuaciones (38) y (39) se escribe

$$T_{\mu\nu}^{GW} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle, \quad (40)$$

y con las condiciones de propagación de onda plana, las componentes distintas de 0 son

$$T_{00}^{GW} = T_{0z}^{GW} = -T_{z0}^{GW} = T_{zz}^{GW} = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle, \quad (41)$$

donde hay que tener en cuenta que $\partial_t = \frac{1}{c} \partial_0$.

Recordamos la interpretación física que tienen asociadas las componentes de $T_{\mu\nu}$:

- \mathbf{T}_{00} = densidad de energía.
- \mathbf{T}_{i0} = flujo de energía en la dirección i .
- \mathbf{T}_{i0} = densidad de momento lineal en la dirección i .
- \mathbf{T}_{ij} = flujo a lo largo de la dirección i del momento lineal en la dirección j .

Un cálculo rápido con las componentes de $h_{\mu\nu}$ nos da el la componente 00, que usaremos más adelante,

$$T_{00}^{GW} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle 2 (\dot{h}_{xy})^2 + \frac{1}{2} (\dot{h}_{xx} - \dot{h}_{yy})^2 \rangle. \quad (42)$$

Es interesante puntualizar que esta relación de $T_{\mu\nu}$ con la métrica hace posible estudiar los efectos (cambios de longitud) de las ondas gravitacionales producidas por objetos de los cuales conocemos el tensor energía-momento, y en caso contrario, midiendo los efectos, determinar la forma de $T_{\mu\nu}$ de la fuente.

3.4. Generación de Ondas Gravitacionales

La generación de ondas gravitacionales lleva asociada fuentes de energía-momento $T_{\mu\nu}$ de acuerdo con la ecuación

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (43)$$

Usamos la función de Green para la resolución

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x-x') T_{\mu\nu}.$$

La función de Green del operador \square es (siguiendo las expresiones (1.22) y (1.23) de [9])

$$G(x-x') = -\frac{1}{4\pi|x-x'|} \delta(x_{ret}^0 - x'^0) = -\frac{1}{4\pi|x-x'|} \delta\left(t - \frac{|x-x'|}{c} - t'\right),$$

que resulta en

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|x-x'|} T_{\mu\nu}(t_{ret}, x')$$

con $t_{ret} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$. Al estudiar fuentes muy lejanas, podemos aproximar $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r$, donde r es la distancia a la fuente. El error es del orden L/r siendo L el tamaño de la fuente, despreciable frente a la distancia a la que medimos las ondas gravitacionales que genera. Obtenemos pues una relación de la que partir para estudiar fuentes astronómicas de ondas gravitacionales

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int d^3x' T_{\mu\nu}\left(t - \frac{r}{c}, x'\right). \quad (44)$$

Las aproximaciones tomadas constituyen el primer término de un desarrollo multipolar para el campo de radiación gravitatoria. De nuevo, la expresión y su desarrollo es análoga a la aproximación multipolar del campo electromagnético.

3.5. Emisión de radiación gravitatoria. Energía de las ondas.

El punto de partida será entonces la ecuación (44)

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int d^3x' T_{\mu\nu}\left(t - \frac{r}{c}, x'\right).$$

Sin embargo, trabajamos con los índices ij referidos a las componentes espaciales ya que los términos 00 y $0i$ de la métrica $\bar{h}_{\mu\nu}$ hacen referencia a cantidades conservadas por lo que no tienen relevancia a la hora de determinar la energía de las ondas gravitacionales, cuya expresión (ecuación (41)) depende de sus derivadas. A este primer orden en desarrollo multipolar, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{h}_{00}(t, x) &= \frac{4G}{c^4 r} \int d^3x' T_{00}\left(t - \frac{r}{c}, x'\right) = \frac{4G}{c^4 r} E, \\ \bar{h}_{0i}(t, x) &= \frac{4G}{c^4 r} \int d^3x' T_{0i}\left(t - \frac{r}{c}, x'\right) = \frac{4G}{c^4 r} P_i, \end{aligned}$$

donde E es la energía total y P_i es el momento total de materia. Ambas cantidades son constantes al integrar en una región que incluya las fuentes. Sin embargo esta propiedad deja de ser cierta para las componentes espaciales. Nos interesa pues analizar la dependencia temporal de la expresión

$$\bar{h}_{ij}(t, x) = \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int d^3x' T_{ij}\left(t - \frac{r}{c}, x'\right). \quad (45)$$

3.5.1. Tensor energía-momento efectivo para fuentes cosmológicas: Sistemas binarios

La ecuación (44) describe la emisión de ondas gravitacionales por el término dominante, el cuadrupolar. Además podemos obtener la relación entre dicha emisión con la distribución de energía/materia de la fuente. Para ello hemos de trabajar un poco con la expresión usando la conservación del tensor energía-momento $\partial_\mu \mathbf{T}^{\mu\nu} = 0$ y el gauge de Lorenz $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$.

Teorema de Gauss:

Recordemos el teorema de Gauss

$$\int_U \partial_\mu V^\mu d^4x = \int_{\partial U} V^\mu n_\mu d^3x,$$

donde U es un dominio cuatridimensional y ∂U su borde, d^4x es un elemento de volumen de U , d^3x el de ∂U y n_μ el covector normal y unitario a ∂U . Consideremos ahora un dominio formado por el interior de dos hipersuperficies t espaciales localizadas en $t = t_0$ y $t = t_1$, y supongamos que $t_1 - t_0 = \epsilon$ es infinitesimal. El término de la izquierda de la integral se puede escribir como

$$\int \partial_\mu V^\mu d^4x = \epsilon \int \partial_\mu V^\mu d^3x. \quad (46)$$

La normal a una hipersuperficie $t = cte$ es $n_\mu = (dx)_\mu = \delta_\mu^0$ en unidades $c = 1$. Por otro lado, si el campo V^μ decrece suficientemente rápido a 0, la integral en la parte temporal del dominio se anula y podemos escribir el término de la derecha como

$$\int_\Sigma V^\mu n_\mu d^3x = \int_{t_1} V^0 d^3x - \int_{t_0} V^0 d^3x. \quad (47)$$

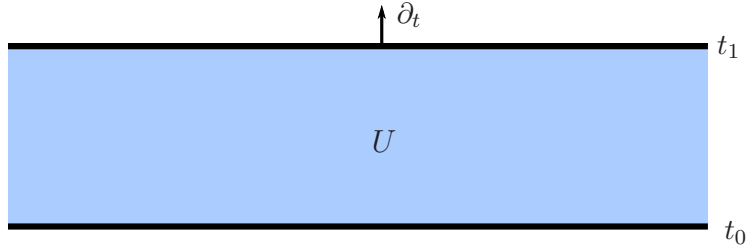


Figura 2: Elemento de volumen (4D) a modo de ejemplo de visualización para el teorema de Gauss.

Iguualamos las ecuaciones (46) y (47) para reescribir el teorema de Gauss

$$\epsilon \int \partial_\mu V^\mu d^3x = \int_{t_1} V^0 d^3x - \int_{t_0} V^0 d^3x.$$

Dado que $t_1 = t_0 + \epsilon$ hacemos un desarrollo de Taylor al primer sumando de la ecuación (47), por lo que tenemos

$$\epsilon \int \partial_\mu V^\mu d^3x = \left[\int_{t_0} V^0 d^3x + \frac{d}{dt} \epsilon \int_{t_0} V^0 d^3x + o(\epsilon^2) \right] - \int_{t_0} V^0 d^3x,$$

y concluimos

$$\int \partial_\mu V^\mu d^3x = \frac{d}{dt} \int V^0 d^3x, \quad (48)$$

donde hemos utilizado $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial_0} = \partial_0$ ya que estamos usando unidades $c = 1$.

Aplicación del teorema de Gauss:

Para aplicar el teorema de Gauss en (45) tenemos que reescribir la ecuación como una divergencia. Tomamos el contorno de integración como un volumen que encierre nuestras fuentes y asumimos que el tensor de energía momento decrece rápidamente con la distancia.

Escribamos el tensor energía-momento usando la identidad

$$T^{\mu\nu} = \partial_\alpha(T^{\alpha\nu}x^\mu) - x^\mu\partial_\alpha T^{\alpha\nu}.$$

La conservación de energía-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, que en teoría linealizada es $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ nos dice que el segundo sumando es nulo. La integral nos queda

$$\int T^{\mu\nu} d^3x = \int \partial_\alpha(T^{\alpha\nu}x^\mu) d^3x = \frac{d}{dt} \int T^{0\nu} x^\mu d^3x, \quad (49)$$

donde hemos introducido (48) para obtener la segunda igualdad. Para el último término a integrar introducimos de nuevo una divergencia. Específicamente, usamos la identidad

$$\begin{aligned} \partial_\alpha(T^{0\alpha}x^\mu x^\nu) &= T^{0\alpha}(\delta_\alpha^\nu x^\mu + \delta_\alpha^\mu x^\nu) \\ &= T^{0\nu}x^\mu + T^{0\mu}x^\nu. \end{aligned}$$

que también es consecuencia de la conservación del tensor energía-momento. Esta identidad junto con la expresión (49) donde utilizamos la simetría en los índices de $T^{\mu\nu}$ nos permiten escribir

$$\int T^{\mu\nu} d^3x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (T^{0\nu}x^\mu + T^{0\mu}x^\nu) d^3x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \partial_\alpha(T^{0\alpha}x^\mu x^\nu) d^3x.$$

La componente T^{00} se corresponde con la densidad de materia ρ de las fuentes. De esta forma, retomando la ecuación de partida de la métrica inducida (44) que codifica la generación de ondas gravitacionales, obtenemos una expresión que relaciona la perturbación $h_{\mu\nu}$ (y en consecuencia un cambio de longitud) con la geometría de las fuentes

$$\begin{aligned} h^{ij} &\simeq \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int d^3x' T_{ij}(t-r, x') = \frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dt^2} \int (T^{00} x'^i x'^j) d^3x' \\ &= \frac{2G}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(t - \frac{r}{c}, x') x'^i x'^j d^3x'. \end{aligned} \quad (50)$$

Para reescribir integral definimos el tensor cuadrupolar másico, de forma análoga al término cuadrupolar del desarrollo multipolar del campo electromagnético,

$$Q_{ij}(t) = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(t, x') d^3x'. \quad (51)$$

Insertando (51) en (50)

$$h_{ij} = \frac{2G}{3c^2} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_{ij}(t - \frac{r}{c}) + \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r'^2 \rho(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}') d^3x' \right). \quad (52)$$

La métrica inducida por una onda gravitacional en función del término cuadrupolar se escribe como

$$h_{ij} = \frac{2G}{3c^2} \frac{1}{r} \ddot{Q}_{ij}. \quad (53)$$

Para determinar la energía que emite la onda, que tomamos de nuevo viajando en la dirección z , tomamos el tensor energía-momento cuyo término T_{0z} corresponde al utilizamos de energía en la dirección de propagación,

$$T_{0z}^{\text{GW}} = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle,$$

donde introducimos (52) para obtener el tensor energía-momento efectivo, en este caso $\delta_{0z} = 0$ por lo que el segundo término de la ecuación no contribuye a la radiación

$$T_{0z}^{\text{GW}} = \frac{G}{36\pi c^2 r^2} \langle \ddot{Q}_+^2 + \ddot{Q}_\times^2 \rangle.$$

3.5.2. Potencia emitida

La luminosidad o potencia radiada por la fuente, por unidad de área dA en función del ángulo sólido $d\Omega$ a una distancia r viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\text{GW}} &= P = \frac{dE}{dt} = c \int r^2 d\Omega T_{00} \\ &= \frac{r^2 c^3}{32\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle, \end{aligned} \quad (54)$$

donde utilizamos que la densidad de energía E viene dada por la componente T_{00} y la ecuación (40) en la última igualdad. En función del tensor cuadrupolar Q_{ij} la potencia radiada se escribe

$$\mathbb{L}_{\text{GW}} = \frac{G}{72\pi c^5} \int d\Omega \langle \ddot{Q}_{ij}^{\text{TT}} \ddot{Q}_{ij}^{\text{TT}} \rangle. \quad (55)$$

En las ecuaciones (54) y (55) vemos que la potencia radiada viene dada por las componentes TT. Si ahora buscamos una forma más general de la última expresión para casos en los que no disponemos de dichas componentes directamente, basta con introducir el proyector Λ definido por (24), que contiene la dependencia angular en referencia a la posición relativa de la fuente de ondas gravitacionales con el observador

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\text{GW}} &= \frac{G}{72\pi c^5} \int \Lambda_{ij,kl} d\Omega \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \rangle \\ &= \frac{G}{36 \cdot 15c^5} \langle 11\delta_{ik}\delta_{jl} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} - 4\delta_{ij}\delta_{kl} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \rangle \\ &= \frac{G}{36 \cdot 15c^5} \langle 12\ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle \\ &= \frac{G}{45c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle, \end{aligned} \quad (56)$$

donde hemos usado la expresión (ecuación (3.23) de [9])

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_{i_1} \dots n_{i_{2l}} = \frac{1}{(2l+1)!!} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2l-1} i_{2l}} + \dots)$$

para obtener la integral

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15} (11\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

La ecuación (56) se denomina habitualmente fórmula cuadrupolar.

4. Púlsar de Hulse-Taylor.

En 1974 Russell Hulse y Joseph Taylor, desde el radiotelescopio de Arecibo, descubrieron el primer púlsar binario (PSR 1913 + 16), compuesto por dos estrellas de neutrones (de masas en el rango solar y separadas una distancia de decenas de km) emitiendo ondas electromagnéticas en el rango de frecuencias de radio. Hulse y Taylor obtuvieron un período de emisión electromagnética de milisegundos, muy estable. Sin embargo, detectaron un comportamiento extraño en la señal que recibían, una oscilación con un periodo de $8h$ en el tiempo de llegada de la señal. Esto les llevó a la conclusión que el púlsar debía estar en órbita con otra estrella formando una estrella binaria.

En 1993 R. Hulse y J. Taylor recibieron el premio Nobel por su descubrimiento, que ha tenido importancia más allá de ser el primer púlsar binario registrado. En especial, ha servido como reloj atómico muy preciso debido a la estabilidad temporal de los pulsos electromagnéticos, y como verificación de la teoría de la Relatividad General, ya que fue la primera demostración de la existencia de ondas gravitacionales, responsables del cambio del periodo de rotación ($\sim 5\%$ cada millón de años) de las estrellas de neutrones que se midió posteriormente; un trabajo que llevó alrededor de 4 años desarrollarlo por parte de Taylor y sus compañeros.

4.1. Ecuaciones de movimiento

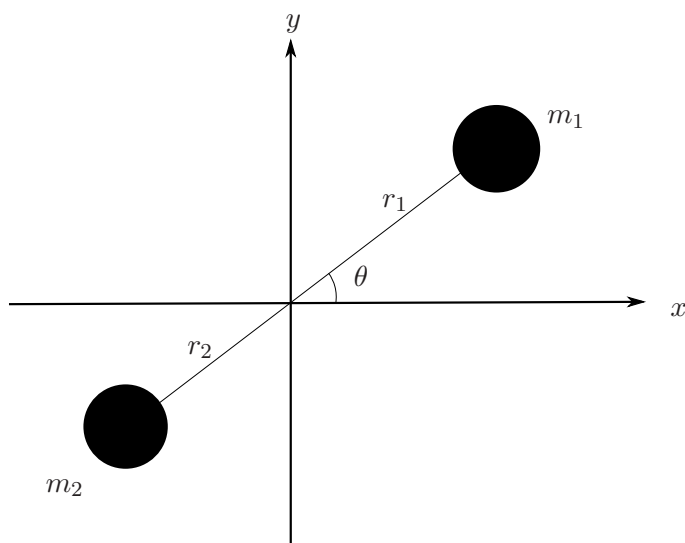


Figura 3: Esquema de una estrella binaria para el estudio del púlsar.

Consideramos la binaria en una órbita elíptica, con $r = r_1 + r_2$ la distancia entre las masas, $M = m_1 + m_2$ la suma de ambas y $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ la masa reducida. Los parámetros que usaremos serán:

- Energía:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu M}{r}.$$

- Momento angular:

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}.$$

- Excentricidad:

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2\mu^3}.$$

- Semieje mayor:

$$a = -\frac{m_1m_2}{2E}.$$

La posición radial de las masas respecto al centro de masas es

$$r_{1,2} = \frac{m_{2,1}}{m_1 + m_2}r.$$

Para el momento cuadrupolar resulta conveniente tener presente las expresiones siguientes

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}}{r^2} \\ &= (1 + e \cos \theta)^2 \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{a^3(1 - e^2)^3}} \end{aligned} \quad (58)$$

$$\dot{r} = e \sin \theta \left(\frac{m_1 + m_2}{a(1 - e^2)} \right)^{1/2}. \quad (59)$$

El siguiente paso es calcular la energía emitida en forma de ondas gravitacionales del púlsar, partiendo de la expresión de la luminosidad gravitacional

$$\mathbb{L}_{GW} = \frac{G}{45c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle \quad (60)$$

4.2. Cálculo del momento cuadrupolar

Para calcular el tensor Q_{ij} (y sus derivadas) del sistema binario, usamos el tensor de inercia I_{ij} de las dos masas rotando sobre el CM, ya que ambos cumplen la relación $Q_{ij} = 3I_{ij} - \delta_{ij}I$ con I la traza de I_{ij} . El problema se trata en dos dimensiones, definidas en el mismo plano que las componentes TT de la onda

$$\begin{cases} I_{xx} = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 = \mu r^2 \cos^2 \theta \\ I_{yy} = m_1y_1^2 + m_2y_2^2 = \mu r^2 \sin^2 \theta \\ I_{xy} = m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2 = \mu r^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\mu}{2}r^2 \sin(2\theta). \end{cases}$$

4.2.1. $\langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle$

Desarrollamos la expresión ¹ $\ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij}$,

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} &= \ddot{I}_{xx}^2 + \ddot{I}_{yy}^2 + 2\ddot{I}_{xy}^2 - \frac{1}{3}(\ddot{I})^2 \\ &= \left(\frac{2m_1 m_2}{a(1-e^2)} \right)^2 \dot{\theta}^2 [2(2\sin(2\theta) + 3e\cos^2\theta\sin\theta)^2 + (e\sin\theta)^2 + \\ &\quad 2(2\sin(2\theta) + 3e\cos^2\theta\sin\theta)e\sin\theta - \frac{1}{3}e^2\sin^2\theta] \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2m_1 m_2}{a(1-e^2)} \right)^2 \dot{\theta}^2 [12(1+e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta]. \end{aligned} \quad (61)$$

4.3. Potencia radiada

Partimos de la expresión (60)

$$\mathbb{L}_{GW} = \frac{G}{45c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{ij} - \frac{1}{3} \ddot{I}^2 \right\rangle = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{I}_{xx}^2 + 2\ddot{I}_{xy}^2 + \ddot{I}_{yy}^2 - \frac{1}{3} \ddot{I}^2 \right\rangle \quad (62)$$

Sustituimos (61) en (62) y tras unos cálculos para simplificar la expresión se obtiene

$$\mathbb{L}_{GW} = \frac{8m_1^2 m_2^2}{15a^2 (1-e^2)^2} \left\langle (12(1+e\cos\vartheta)^2 + e^2\sin^2\vartheta) \dot{\vartheta}^2 \right\rangle. \quad (63)$$

La tercera ley de Kepler establece que el periodo de una órbita es $T = \frac{2\pi a^{3/2}}{M^{1/2}}$. Tomamos los promedios en un periodo T lo que, junto con (58), proporciona

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{GW} &= \frac{1}{T} \frac{8m_1^2 m_2^2}{15a^2 (1-e^2)^2} \int_0^T (12(1+e\cos\vartheta)^2 + e^2\sin^2\vartheta) \dot{\vartheta}^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{8m_1^2 m_2^2}{15a^2 (1-e^2)^2} \int_0^{2\pi} (12(1+e\cos\vartheta)^2 + e^2\sin^2\vartheta) \dot{\vartheta}^2 \frac{d\theta}{\dot{\theta}} \\ &= \frac{8(m_1+m_2)m_1^2 m_2^2}{2\pi 15a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left\{ 12 \cdot 2\pi \left(\frac{3e^4}{8} + 3e^2 + 1 \right) + e^2 \left(\frac{1}{4}\pi(e^2+4) \right) \right\} \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos una expresión bastante sencilla para el promedio de la potencia emitida por el púlsar binario en cada periodo en forma de ondas gravitacionales

$$\boxed{\mathbb{L}_{GW} = \frac{32(m_1+m_2)m_1^2 m_2^2}{5a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(\frac{37}{96}e^4 + \frac{73}{24}e^2 + 1 \right)} \quad (64)$$

La potencia que emite la binaria se hace en forma de ondas gravitacionales y modifica la órbita de las dos masas, cambiando su energía orbital o de ligadura de la forma

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{GW} &= -\dot{E}_{orb} = -\frac{m_1 m_2}{2a^2} \dot{a} \\ \frac{m_1 m_2}{2a^2} \langle \dot{a} \rangle &= -\frac{32(m_1+m_2)m_1^2 m_2^2}{5a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(\frac{37}{96}e^4 + \frac{73}{24}e^2 + 1 \right). \end{aligned} \quad (65)$$

¹utilizando las expresiones del anexo 10.1

De la tercera ley de Kepler obtenemos la igualdad

$$\left\langle \frac{\dot{T}}{T} \right\rangle = \frac{3}{2} \left\langle \frac{\dot{a}}{a} \right\rangle.$$

Sustituyendo (65) llegamos a una ecuación en función de parámetros clásicos orbitales, que determina el cambio orbital del púlsar debido a la emisión de ondas gravitacionales según

$$\left\langle \frac{\dot{T}}{T} \right\rangle = -\frac{96}{5} \frac{m_1 m_2}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{8/3} (m_1 + m_2)^{1/3} (1 - e^2)^{7/2}} \left(\frac{37}{96} e^4 + \frac{73}{24} e^2 + 1 \right).$$

Introducimos el parámetro denominado como *chirp mass* \mathcal{M}_c que se define como $\mathcal{M}_c = \eta^{5/3} m$, y en función de la frecuencia obtenemos

$$-\left\langle \frac{\dot{f}}{f} \right\rangle = \left\langle \frac{\dot{T}}{T} \right\rangle = -\frac{96}{5} \mathcal{M}_c^{3/5} f^{8/3} \frac{\left(\frac{37}{96} e^4 + \frac{73}{24} e^2 + 1 \right)}{(1 - e^2)^{7/2}}.$$

Con la observación del púlsar se determinó el cambio en el periodo de la órbita del sistema coincidiendo con el cálculo teórico correspondiente, de forma que se demostró por primera vez, de forma teórica, la existencia de las ondas gravitacionales.

5. BBH, BHNS y BNS: las fuentes actuales de Ondas Gravitacionales

Aunque el púlsar de Hulse-Taylor supuso la primera confirmación teórica de la existencia de ondas gravitacionales, consideremos ahora sistemas binarios formados por objetos astronómicos muy masivos y compactos ya que son los que proporcionan una perturbación suficiente para ser detectada, en particular hablamos de: BBH (Binary Black Hole), BHNS (Black Hole - Neutron star) o BNS (Binary Neutron Star), en órbita circular. El procedimiento a seguir es el mismo realizado en el apartado anterior para el púlsar de Hulse-Taylor, pero los cálculos son más sencillos debido a que solamente consideramos órbitas circulares.

Elegimos un sistema en el que el movimiento de los cuerpos esté en el plano (x, y) . Respecto al centro de masas, el primer momento es idéntico al caso de órbita elíptica, con las mismas variables para los parámetros

$$\begin{cases} I_{xx} = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = \mu r^2 \cos^2 \theta \\ I_{yy} = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 = \mu r^2 \sin^2 \theta \\ I_{xy} = m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 = \mu r^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\mu}{2} r^2 \sin(2\theta). \end{cases}$$

El tensor cuadrupolar Q_{ij} en forma matricial se escribe a partir de los momentos de inercia, o bien siguiendo la ecuación (51), con $\theta = \omega t$ de la siguiente forma

$$Q_{ij} = 3\mu R^2 \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t) & \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \sin(\omega t) & -\sin^2(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Un detalle a tener en cuenta es que al estar generadas por la segunda derivada y éstas oscilar con 2ω , la frecuencia angular observada de las ondas gravitacionales cumple $\omega_{gw} = 2\omega$ por lo

que la se relaciona con los parámetros orbitales según la tercera Ley de Kepler en función de la frecuencia

$$\omega_{gw}(t) = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}}.$$

Por tanto, el radio orbital es un parámetro medible a través de la frecuencia observada.

Retomamos Q_{ij} y consideramos que durante cada periodo completo la frecuencia se mantiene constante ($\omega \gg \dot{\omega}$). Escribimos las derivadas del tensor cuadrupolar en forma de matriz, con $\theta = \omega t$

$$\ddot{Q}_{ij} = 12\mu R^2 \omega^3 \begin{pmatrix} \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) \\ -\cos(2\omega t) & -\sin(2\omega t) \end{pmatrix}.$$

La potencia radiada por el sistema en cada periodo, teniendo en cuenta que el tensor cuadrupolar tiene traza nula, es

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{GW} &= \frac{G}{45c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{I}_{xx}^2 + 2\ddot{I}_{xy}^2 + \ddot{I}_{yy}^2 \rangle \\ &= \frac{G}{c^5} \frac{16}{5} r^4 \omega^6 \mu^2 \langle 2\sin^2(2\omega t) + 2\cos^2(2\omega t) \rangle \\ &= \frac{G}{c^5} \frac{32}{5} r^4 \omega^6 \mu^2, \end{aligned}$$

donde en la ultima igualdad hemos usado que el promedio de una constante es ella misma.

Aunque durante cada vuelta el periodo se mantenga constante, la emisión de energía en forma de ondas gravitacionales provoca un aumento en la velocidad orbital y una disminución de la distancia entre las estrellas. Escribimos el balance energético de la misma forma que para el púlsar de Hulse-Taylor

$$\mathbb{L}_{GW} = -\dot{E}_{orb} = \frac{d}{dt} \left(\frac{G(m_1 + m_2)\mu}{2r} \right) = \frac{G(m_1 + m_2)\mu \dot{r}}{2r^2}.$$

Con esta ecuación, la tercera ley de Kepler $\omega^2 = \frac{GM_T}{r^3}$ y tomando $G = c = 1$, tenemos una serie de ecuaciones con las que jugar para obtener el resultado final. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Del balance de emisión-reacción a la radiación:

$$\mathbb{L}_{GW} = -\dot{E}_{orb} \rightarrow -\frac{M_T \mu \dot{r}}{2r^2} = \frac{32}{5} r^4 \omega^6 \mu. \quad (66)$$

2. Derivando en la tercera ley de Kepler:

$$\dot{r} = -\frac{2M_T \dot{\omega}}{3\omega^3 r^2}. \quad (67)$$

3. Sustituimos (67) en el balance (66) para obtener la variación de la frecuencia angular del

sistema binario

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} \frac{\dot{\omega}}{\omega^3} &= \frac{64}{5} \frac{M_T \mu}{r} \\
\dot{\omega} &= \frac{96}{5} \omega^3 \frac{M_T \mu}{r} \\
\dot{\omega} &= \frac{96}{5} \omega^3 \frac{M_T \mu}{r} \left(\frac{M_T}{\omega^2} \right)^{1/3} \\
\dot{\omega} &= \frac{96}{5} \omega^{11/3} M_T^{2/3} \mu.
\end{aligned} \tag{68}$$

4. Definimos el parámetro de la *chirp mass* $\mathcal{M}_c = \left(\mu M_T^{2/3} \right)^{3/5}$ y lo despejamos de (68) para obtenerlo en función de parámetros observables

$$\mathcal{M}_c = \left(\frac{5}{96} \right)^{3/5} \dot{\omega}^{3/5} \omega^{-11/5} = \left(\frac{5}{96} \right)^{3/5} \left(\frac{f}{\pi^{8/3} f^{11/3}} \right)^{3/5}. \tag{69}$$

Por tanto, medir los cambios de longitud que provoca una onda gravitacional es el camino para poder determinar la frecuencia y su derivada (numéricamente), y a partir de esos datos estimar las masas de la binaria entre otros parámetros.

5.1. Cambio inducido en la métrica por un sistema binario

La segunda derivada de Q_{ij} es

$$\ddot{Q}_{ij} = 6\mu R^2 \omega^3 \begin{pmatrix} -\cos(2\omega t) & -\sin(2\omega t) \\ -\sin(2\omega t) & \cos(2\omega t) \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo la ecuación (53) para un sistema binario en órbita circular nos llevan a la perturbación de la métrica cuando la dirección de propagación de la onda gravitacional coincide con la línea entre la fuente y el observador,

$$\begin{aligned}
h_+(t) &= \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \mu R^2 \omega^2 \cos(2\omega t), \\
h_\times(t) &= \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \mu R^2 \omega^2 \sin(2\omega t).
\end{aligned}$$

Y en función de \mathcal{M}_c toma la forma

$$\begin{aligned}
h_+ &= \frac{4\mathcal{M}_c^{5/3} \omega^{2/3}}{r} \cos(2\omega t), \\
h_\times &= \frac{4\mathcal{M}_c^{5/3} \omega^{2/3}}{r} \sin(2\omega t).
\end{aligned}$$

Sin embargo, si la dirección de propagación, que coincide con el vector normal de la órbita no está alineada con la del observador, tenemos que proyectar Q_{ij} para obtener las componentes TT. Para ello denominamos ϕ al ángulo entre el vector normal de la órbita y el eje z apuntando al observador

$$Q_{ij} = 3\mu R^2 \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t) & \cos(\phi) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ \cos(\phi) \cos(\omega t) \sin(\omega t) & \cos^2(\phi) \sin^2(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la perturbación $h_{\mu\nu}$ cuando la dirección de propagación de la onda y la dirección al observador forman un ángulo ϕ toma la forma

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{4}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\omega}{c} \right)^{2/3} \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2} \cos(2\omega t) \\ h_\times &= \frac{4}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\omega}{c} \right)^{2/3} \cos \varphi \sin(2\omega t). \end{aligned} \tag{70}$$

Recordamos que en estas ecuaciones t hace referencia al tiempo retardado $t = t_{ret}$.

5.2. Tiempo de coalescencia

Si integramos (68) obtenemos una expresión para la frecuencia donde se observa que diverge para valores finitos. Definimos el tiempo de coalescencia como aquel en que la frecuencia diverge y que, físicamente, corresponde al instante último de la fusión. En términos del tiempo $\tau = t_{coal} - t$ la expresión para la frecuencia es

$$\omega(\tau) = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{\tau} \right)^{3/8} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{-5/8}.$$

Como ya hemos dicho, esta ecuación diverge para $\tau = 0$, es decir, la frecuencia aumenta cuanto más cerca estemos temporalmente de la fusión de las fuentes que emiten ondas gravitacionales. Sin embargo, aunque la expresión se ha obtenido haciendo uso de la tercera Ley de Kepler, el valor de la frecuencia está acotada ya que la separación entre las fuentes tiene un valor crítico ligado a sus radios. Por tanto, ahora evaluamos esta ecuación sustituyendo ω de la tercera Ley de Kepler en un tiempo inicial t_0 , encontramos una relación entre el radio orbital inicial R_0 y el tiempo para la coalescencia $\tau = \tau_0$

$$\tau_0 = \frac{5}{2^8} \frac{c^5 R_0^4}{G^3 m^2 \mu}.$$

Durante los últimos momentos fusión, la señal emitida debe ser tratada con métodos de relatividad numérica ² en un régimen no lineal debido a la presencia de campos gravitacionales intensos y velocidades orbitales altas (comparables a la velocidad de la luz) de las fuentes.

²ver apéndice sobre relatividad numérica 10.2.2

6. Estudio del universo con Ondas gravitacionales: *redshift* y constante de Hubble

Las fuentes observadas de ondas gravitacionales están situadas a millones de años luz, y por tanto, los efectos de la expansión del universo no son despreciables. El modelo cosmológico actual se basa en la métrica de FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) que describe un universo isótropo y homogéneo,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right),$$

con k la curvatura del espacio y $a(t)$ el factor de escala que parametriza la expansión isotrópica del universo.

6.1. Constante de Hubble

La constante de Hubble se define como $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ en función del parámetro de escala. Dicha constante está presente en la Ley de Hubble, que afirma que la velocidad a la que se alejan observables lejanos es proporcional a la distancia que nos separa de ellos: $v(t) = H(t)D(t)$. Tomando el valor presente con el subíndice 0 obtendríamos $v = H_0 D$.

Definimos la distancia de luminosidad d_L a partir del flujo F que emite una fuente con una luminosidad L

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (71)$$

Para el modelo FLRW la distancia de luminosidad d_L se obtiene en función de parámetros cosmológicos y el *redshift* mediante la expresión (ecuación (7.51) de [27])

$$d_L = a(t_0) (1 + z) f \left(\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right) \quad (72)$$

Integrando la expresión para $\Lambda = 0$, un universo prácticamente vacío y en el cual la interacción con la materia no tiene apenas consecuencias en la propagación de las ondas gravitacionales, resulta en (ecuación (7.52) de [27])

$$d_L(z) = \frac{2}{H_0 \Omega_0^2} (1 + z) \left[\Omega_0 z - (2 - \Omega_0) \left(\sqrt{1 + \Omega_0 z} - 1 \right) \right] \quad (73)$$

siendo H_0 la constante de Hubble actual y $\Omega_0 = \frac{8\pi}{3} \frac{\rho_{m_0}}{H_0^2}$ con ρ_{m_0} la densidad de materia en el presente.

6.2. Redshift

La expansión del universo induce una modificación en la frecuencia que emiten las fuentes debido a la velocidad a la que se alejan de nosotros, de forma que lo que medimos lleva asociado un desplazamiento al rojo o *redshift* denotado por z , que se relaciona con el factor de escala mediante

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_{obs} - a(t)\lambda_{obs}}{a(t)\lambda_{obs}} = \frac{1 - a(t)}{a(t)}. \quad (74)$$

De la primera igualdad podemos derivar el cambio en la frecuencia

$$\nu_{observada} = \frac{\nu}{1+z}. \quad (75)$$

Si sustituimos $\nu \rightarrow \nu_{obs}$ en (69) obtenemos el parámetro *Chirp Mass* \mathcal{M}'_c incluyendo el efecto del *redshift*,

$$\left(\frac{\dot{f}_{obs}}{f_{obs}^{11/3}} \right)^{3/5} = \left(\frac{\dot{f}}{(1+z)f^{11/3}} \right)^{3/5} \Rightarrow \mathcal{M}'_c = \mathcal{M}_c(1+z). \quad (76)$$

Por tanto, para fuentes astronómicas de ondas gravitacionales la ecuación (70) debe tomarse con los parámetros que tienen en cuenta la expansión del universo \mathcal{M}'_c , la frecuencia observada ν_{obs} y d_L .

Será entonces, a partir de la amplitud definida por $h_{\mu\nu}$, cuando podemos determinar el redshift z , y con esto la constante de Hubble H_0 . Sin embargo, dado que el *redshift* de las señales detectadas está implícito en los parámetros, para su determinación es necesario localizar primero la fuente, lo que necesita dos o más conjuntos de medidas. Por este motivo desde el primer momento ya se planificó que el observatorio LIGO constara de dos detectores.

6.2.1. Un vistazo al problema con la constante de Hubble

Diferentes proyectos han tratado y tratan de medir la constante de Hubble con el fin de saber la velocidad de expansión del universo. Distintas medidas conducen a valores distintos que, aunque no son muy dispares, son incompatibles dada la precisión de las observaciones:

- En 2016, la observación de las estrellas de Cefeidas por parte del telescopio Hubble estimaron $H_0 = 72 - 73 km/s/Mpc$.
- En 2018, la misión Planck de la ESA (European Space Agency) dedicada al mapeo más preciso y detallado del CMB (Cosmic Microwave Background) encontró el valor de $H_0 = 67,4 km/s/Mpc$.
- En 2019, Midiendo la luminosidad de una gigante roja en fase de muerte, se midió $H_0 = 69,8 km/s/Mpc$.
- Los datos de LIGO y Virgo proporcionan un valor de $H_0 = 70 km/s/Mpc$ (según [28]), una estimación que se encuentra en el medio del resto.

Esta tensión en la medición de la constante de Hubble es uno de los problemas fundamentales de la cosmología. Actualmente otros experimentos relacionados con el CMB, con lentes gravitacionales, con observación de galaxias y mediante ondas gravitacionales, están tratando de mejorar las medidas anteriores y tratar de encontrar por un lado el valor correcto y por otro explicar las divergencias actuales.

7. Detectores-Observatorios de Ondas Gravitacionales

Los interferómetros, haciendo uso de la desviación geodésica de masas suspendidas, en este caso espejos divisores de haz, reflectores y detectores, son los instrumentos usados para realizar el trabajo de precisión que requiere medir distancias del orden de $\sim 10^{-20} m$, menores que el tamaño de un núcleo atómico. Pese a que se dedican a observar los eventos más violentos de universo, son los mecanismos más precisos fabricados hasta la fecha. De forma general, los observatorios son interferómetros Michelson-Morley con dos brazos perpendiculares del orden del km, donde además se disponen cavidades resonantes Fabry-Perot que alargan el camino del haz hasta un factor 100.

Los observatorios empezaron a construirse en la década de los 90 y llevó casi 20 años ponerlos en funcionamiento con las características necesarias para la detección de ondas gravitacionales. La tecnología necesaria ha sido todo un reto y se ha desarrollado desde que los proyectos comenzaron con los esfuerzos de un equipo de científicos, ingenieros y trabajadores, entre los que podemos destacar Kip Thorne o Charles Misner como los principales pioneros y cabezas de los proyectos. En consecuencia de estos esfuerzos, con la financiación suficiente de diversas fuentes, actualmente en funcionamiento disponemos de dos detectores principales: Advanced Virgo (Europa) y Advanced LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) (EEUU), que son las versiones actualizadas y mejoradas de VIRGO y LIGO. También existen otros observatorios de ondas gravitacionales como: GEO-600 (Alemania), KAGRA (Japón) y LIGO-India (construido pero no operativo), además de existir nuevos proyectos como LISA, un observatorio espacial con la ventaja de ser mucho más sensible que los terrestres.

Los observatorios constituyen una herramienta de observación del universo, mucho más precisa que cualquier telescopio, que permiten observar eventos y objetos invisibles hasta la fecha como los agujeros negros, y que proporcionan información nueva y/o complementaria a medidas ya realizadas (por ejemplo, la constante de Hubble). En especial, nos centramos en los agujeros negros, invisibles de forma directa por telescopios. Los detectores de ondas gravitacionales aportan información sobre tres agujeros negros involucrados en el proceso: los dos que se fusionan y el resultante de la fusión.

7.1. Funcionamiento

Los interferómetros funcionan partiendo de un cambio de fase causado por un cambio en la longitud de sus brazos. Tomando una de las polarizaciones, ya sabemos que el cambio de longitud que provoca el paso de una onda gravitacional es

$$\delta x = \frac{1}{2}h_{\times}y \quad , \quad \delta y = -\frac{1}{2}h_{\times}x \quad , \quad \delta z = 0.$$

El cambio de fase toma la forma, con $c = 1$ y siendo ω_0 la frecuencia del láser,

$$\Delta\varphi = \omega_0 2(\delta_x + \delta_y) = \omega_0(l_x + l_y)h_{\times}.$$

Considerando el detector como ideal, la configuración inicial es tal que hay oscuridad en el fotodetector, los cambios en intensidad son proporcionales al cambio de fase que produce el paso de una onda gravitacional, dando lugar a que llegue luz al fotodetector cuya intensidad es la que nos dará la información de la amplitud y la forma de la onda.

7.2. Elementos principales de los observatorios

Para construir un interferómetro, los elementos mínimos necesarios son los siguientes:

- **Láser:** Operando a $1064nm$. Dependiendo del observatorio, la potencia que llega a los brazos es del orden de los $100W$ (un láser comercial de corte/grabado tiene potencia entre 40 y $80W$ y un láser de mano habitual tiene una potencia del orden del mW).
- **Divisor del haz:** Prisma que divide el haz que incide en dos haces iguales y que salen perpendiculares entre ellos.
- **Fotoreceptor:** medirá la potencia que recibe al final del camino de los haces.
- **Espejos:** Rondan los $40kg$ y los $35cm$ de diámetro, ultrapuros, ultra-reflexivos (absorben 1 fotón de cada tres millones).
- **Cámaras de ultra vacío:** Proporcionando presiones por debajo de los $10^{-12}atm$, que requieren vaciado mensual del túnel.
- **Brazos del interferómetros:** Del orden del km , junto con cavidades resonantes para aumentar el camino óptico del haz.

En los estados de máxima sensibilidad se pueden llegar a medir cambios de longitud de $10^{-21}m$ (figura 8) ($1/1000000$ el tamaño de un núcleo atómico), de forma que la mayoría de sistemas que componen los observatorios están enfocados a tener la máxima idealidad posible y eliminar errores. La mayor parte de estos instrumentos y técnicas se desarrollaron exclusivamente para los proyectos y se han mejorado periódicamente desde su primera instalación. A su vez suponen un avance tecnológico inmenso del que se nutren otros experimentos e instalaciones que estudian las fronteras de la física actual. Las cavidades donde se alojan los componentes están en vacío, donde se busca equilibrio térmico, sísmico y acústico, junto con una máxima sincronización entre instrumentos para eliminar posibles fuentes de errores o fluctuaciones. Además, se tiene en cuenta el ruido eléctrico de cableado y aparatos electrónicos.

Aunque cada detector cuenta con sus subsistemas específicos para el estabilizado de los componentes y la reducción de ruido y fluctuaciones, no es suficiente para obtener una señal donde se detecte una GW. Una parte esencial para la obtención de los datos es la eliminación del ruido y fluctuaciones restantes, que no hayan sido posible evitar en los interferómetros. Así, el análisis de las señales y la modelización del ruido es también un reto en el que trabajan un gran grupo de científicos y que constituye una parte crucial en la observación debido a que es el paso previo a confirmar o no si se trata de un evento de onda gravitacional, para su posterior determinación de parámetros.

7.2.1. Periodización de los observatorios y periodos de observación

- LIGO acabó su construcción en 2002; la primera búsqueda de ondas gravitacionales duró desde entonces hasta 2010 sin éxito.
- Advanced LIGO (LIGO o aLIGO en adelante): Con los datos adquiridos, se hizo una remodelación de los instrumentos entre 2010 y 2014. Las mejoras que permitieron multiplicar por 10 su sensibilidad ³, lo que implica un aumento por el mismo factor en la distancia de detección (analizando en consecuencia un volumen 1000 veces mayor).

³La sensibilidad y/o alcance de los observatorios se determina como la distancia de observación de una BNS (Binary Neutron Star o estrella binaria de neutrones) con una relación señal-ruido (SNR) de 8.

- Con estos avances, el 14 de septiembre de 2015, LIGO hizo la primera observación de onda gravitacional de la historia, producida por un sistema binario compuestos de dos agujeros negros (BBH: Binary Black Hole) y abrió el primer periodo de observación O1.
- O1: Duró hasta enero de 2016, un periodo de tres meses midiendo. Confirmó otras tres observaciones provenientes de BBH.
- Tras un largo periodo de no observación por causas ambientales, el segundo periodo de observación O2 comenzó en noviembre de 2016 y terminó en agosto de 2017. Durante el último mes, Advanced Virgo entró en funcionamiento y se unió a la recogida de datos. La presencia de tres detectores permite un espectro más amplio de observación a la vez que supone un aumento en la precisión de la localización de los eventos detectados. Como resultado, *GW170817* fue la primera observación de una fusión de una BNS.
- O3: El tercer periodo de observación comenzó el 1 de abril de 2019 y se prolongó hasta el 27 de marzo de 2020 debido a la pandemia COVID-19, presentando las tres instalaciones mejoras en sensibilidad y supresión de ruido. Aunque con poca sensibilidad en su inicio, en octubre de 2019 se confirmó que el observatorio KAGRA (Japón) se unía a la red que formaban LIGO y Virgo. La mayor distancia entre estos interferómetros permite la localización de los eventos detectados de forma mucho más precisa.
- O4: Comienzo de observación previsto para marzo de 2023.

En la figura 4 se resumen de forma gráfica la sensibilidad esperada de cada observatorio durante cada periodo de observación así como su temporización.

7.3. Breve descripción de los observatorios actuales

7.3.1. LIGO

Advanced LIGO es un observatorio de Ondas Gravitacionales que cuenta con dos instalaciones: una en Livingston, Louisiana y la segunda en Handford, Washington. Están separados 3000km, de forma que hay un desfase aproximado de una centésima de segundo en la recepción de la señal de los eventos. Ambos detectores son similares, cuentan con brazos de $4km$ y sistemas y subsistemas parecidos, que actúan en sincronía. Actualmente consta de más de 650 miembros provenientes de 59 instituciones y 11 países.

Fue la primera instalación construida y operativa, cuyo proyecto comenzó en 1992, y alcanzó su primer objetivo operativo en cuanto a sensibilidad en el rango de $0 - 100Hz$ en 2005. Sin embargo su búsqueda operativa no comenzó hasta el año 2015.

7.3.2. Virgo

Virgo o Advanced Virgo. Situado en Cascina, una localidad cerca de Pisa, Italia, en el Observatorio Gravitacional Europeo (EGO), fue un proyecto diseñado y construido por el 'Centro Nacional de la Investigación Científica' francés y por el 'Instituto Nacional de Física Nuclear' italiano. Es un interferómetro con brazos de $3km$ operando entre $10Hz$ y $10000Hz$ como se puede observar en la figura 5, activo desde 2016. Se unió a la pareja de LIGO en 2017. El proyecto Virgo Collaboration agrupa más de 650 miembros de 119 instituciones y 14 países.

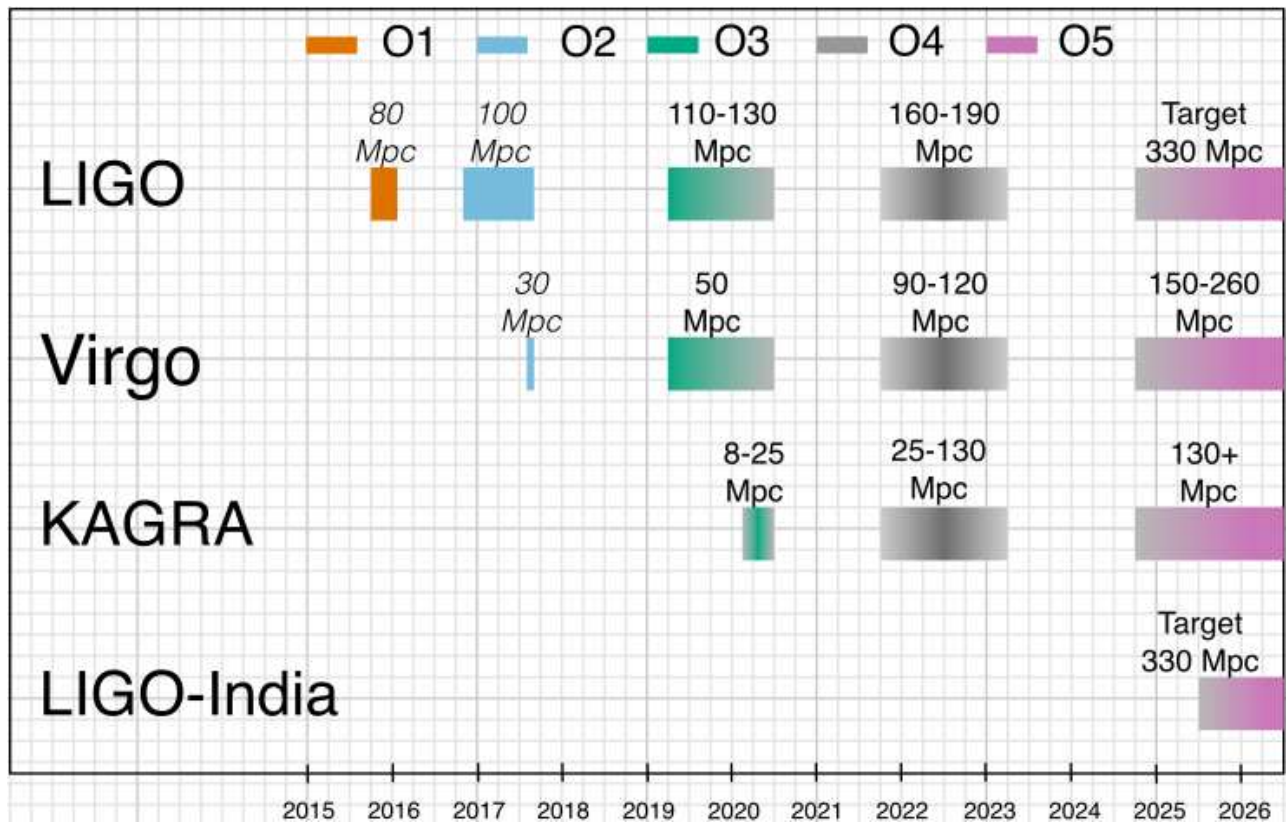


Figura 4: Sensibilidad de los detectores en los periodos de observación y su previstas actualizaciones para los periodos siguientes. Fuente: [24]

Los equipos de Virgo Collaboration y LSC (LIGO Scientific Collaboration) trabajan muy de cerca y los datos entre ambos se comparten y combinan para su análisis.

7.3.3. KAGRA

Siglas de Kamioka Gravitational Wave Detector, está construido a 200m bajo tierra en Gifu, Japón. Es un interferómetro de 3km de brazo, establecido en 2016 pero activo desde 2019, con la característica de que sus espejos son de zafiro criogénico. Es un centro perteneciente a la Universidad de Tokyo.

7.4. Subsistemas presentes en los observatorios

Vamos a describir, sin profundizar demasiado en este apartado ya que no es el tema principal, los subsistemas de los que se disponen de forma general en los observatorios, en particular sobre los de LIGO.

Núcleo óptico:

Incluye los espejos (las masas test, de 40kg), pesas compensadoras de las masas test, el divisor del haz, el espejo de reciclado de potencia y el espejo que recicla la señal.

Estos componentes están hechos de sílice de alta pureza cubiertos de tántalo dopado cuya superficie no presenta rugosidades mayores a 0,16nm, consiguiendo una dispersión de la luz

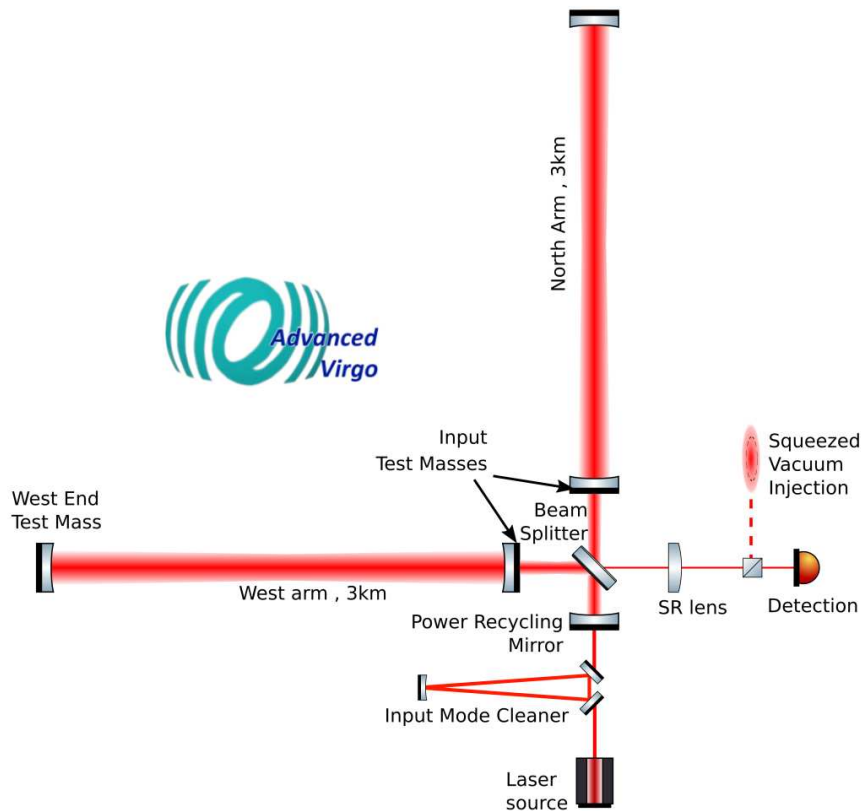


Figura 5: Elementos de Advanced Virgo durante el periodo de observación O3. Fuente: Virgo project

incidente prácticamente nula.

Sistema óptico auxiliar:

Conjunto de sistemas que intervienen en la calibración, alineamiento y en el control de interferómetro. Incluye los siguientes componentes y tareas:

- Control de luz dispersa.
- Compensación térmica: Dado que el haz principal calentará los sistemas por absorción es necesario controlar la temperatura. Para ello se dispone de un sistema de calentadores de control grueso en los espejos, y un láser de CO_2 sobre las placas/pesas de compensación que irradian calor a las masas test dando un control fino.
- Palancas ópticas: Crean un sistema de referencia que estabiliza las alineaciones angulares.
- Alineamiento inicial: Tiene en cuenta el ruido sísmico y la suspensión óptica.
- Calibrador: Sistema láser auxiliar, con ayuda de ondas sonoras que compensa la aceleración de los espejos producida por la presión de radiación.
- Estabilizadores de la longitud de los brazos.

Sistema óptico de entrada:

Subsistema de apoyo que condiciona el haz preestabilizado y lo hace coincidir con el núcleo óptico, modula la fase y reduce fluctuaciones. Entre las tareas y componentes tenemos:

- Estabilizado de frecuencia e intensidad.
- Fotodetector y capas protectoras.
- Cableado.
- Supresor de fluctuaciones.
- Limpieza de modos ópticos.
- Control en la distribución del haz para la detección, la longitud y la alineación.
- Aislantes ópticos de Faraday.

Aislamiento sísmico:

Consta de dos partes: aislamiento interno y aislamiento hidráulico. Este subsistema atenúa el movimiento que transmite el suelo y permite posicionar y alinear las cargas ópticas en las cámaras de vacío. La atenuación requiere distintos valores dependiendo de la frecuencia que se quiera medir, llegando a cifras del orden de 10^{-12} en la banda de $1 - 10Hz$.

Suspensión:

Las suspensiones se encuentran en la interfase entre el aislamiento sísmico y la óptica suspendida y tiene los objetivos:

1. Aislamiento pasivo y suspensión/atenuación del ruido térmico.
2. Control de la orientación y la posición de los elementos ópticos.
3. Amortiguamiento los modos de baja frecuencia de la suspensión.

Los espejos se encuentran suspendidos por fibras de silicio fundido, mismo material del que están contruidos, debido a que tiene pérdida mecánica muy baja consiguiendo disminuir el ruido térmico. Este sistema es una característica principal de los interferómetros y es la segunda parte del aislamiento sísmico. Para obtener el valor requerido, los espejos se encuentran suspendidos formando un péndulo cuádruple para la estabilización horizontal junto con tres capas de cuchillas de acero *maraging* (tipo especial de acero inoxidable con alto contenido en níquel) para el aislamiento vertical. Hay varios sistemas de suspensión tanto para el interferómetro principal como para sistemas auxiliares y la óptica, todos dedicados a la supresión de ruido, y basados en péndulos múltiples, llegando hasta 4 niveles dependiendo del aislamiento sísmico que se requiera.

Preestabilizado del láser:

Es el subsistema que proporciona la frecuencia y la intensidad estabilizada. Consta de tres etapas en las que inicialmente se dispone de $2W$ de potencia para el láser que acaban siendo $220W$ a $1064nm$:

- Primera etapa: Cristal Nd:YAG (óxido de yodo y aluminio dopado con neodimio) como entorno láser y resonador y un oscilador en anillo no planar. Estos componentes forman un láser que produce un haz a $1064nm$ altamente estable.

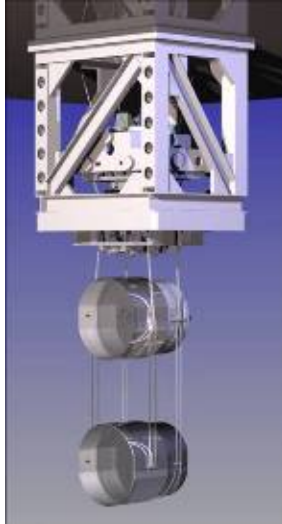


Figura 6: Modelo de péndulo cuádruple.
Fuente: <https://advancedligo.mit.edu/sus.html>

- Segunda etapa: Cristal de Nd:YVO₄ (ortovanadato de itrio dopado con neodimio) que proporciona 35W a la salida.
- Tercera etapa: Cuatro cristales de Nd:YAG (óxido de yodo y aluminio dopado con neodimio) que proporcionan finalmente 220W, que viajan por fibra óptica. Las dos últimas etapas no comprometen la estabilidad que proporciona la primera.

Finalmente, durante el trayecto en la cavidad, la potencia llega a los 100kW.

8. Resumen de las detecciones más importantes

Durante los periodos de observación, las detecciones

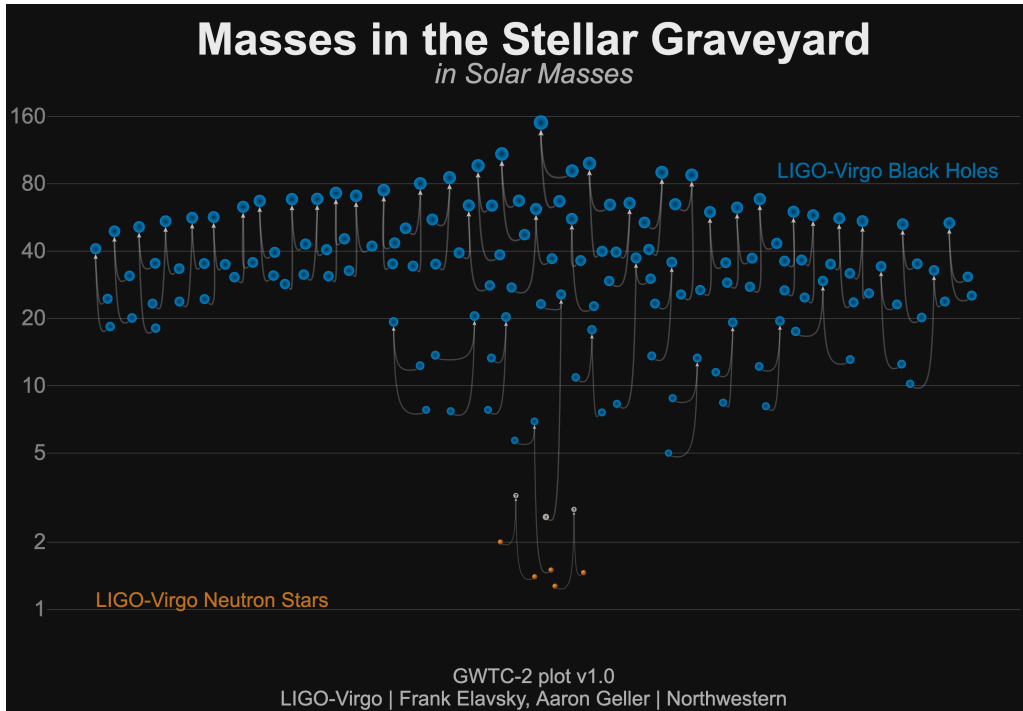


Figura 7: Representación de las masas iniciales y final de las ondas gravitacionales detectadas y su origen. Fuente: LIGO.

8.1. GW150914: Primera detección

GW150914 fue el primer evento de onda gravitacional observado. Registrado por los dos interferómetros de LIGO, se trata de una fusión de dos agujeros negros, que como ya sabemos, emiten energía en forma de ondas gravitacionales. Durante su movimiento orbital, los parámetros de la detección son los siguientes

BH m_1	$36M_{\odot}$
BH m_2	$29M_{\odot}$
Chirp mass \mathcal{M}	$28,6M_{\odot}$
Masa total M	$65M_{\odot}$
Masa del BH resultante M_f	$62M_{\odot}$
Energía emitida E_{rad}	$3,1M_{\odot}c^2$
Pico de luminosidad ℓ_{peak}	$3,6 \times 10^{56} \text{ergs}^{-1}$
Spin del BH resultante a_f	0,67
Distancia de luminosidad D_L	410Mpc
Redshift de la fuente z	0,09

Cuadro 1: Parámetros obtenidos de GW150914.

Dada su importancia y consecuencias futuras en los campos de la relatividad, la astronomía y la cosmología, esta primera medición esperó a tener una confirmación muy sólida. La medida

tiene una fiabilidad de $5,1\sigma$, lo que significa un falso positivo de evento con una probabilidad menor de $2 \cdot 10^{-7}$.

Las ondas gravitacionales no solo fueron otro éxito de la Relatividad General. La consecuencia principal de esta detección es la confirmación directa de la existencia de agujeros negros; es una señal directa de dos agujeros negros de masas estelares. Además, esto confirma que pueden fusionarse. Asimismo, supone una nueva era en la exploración del universo, no solo de agujeros negros, también de las estrellas de neutrones ya que pueden estudiarse actualmente junto con la medida de señales electromagnéticas.

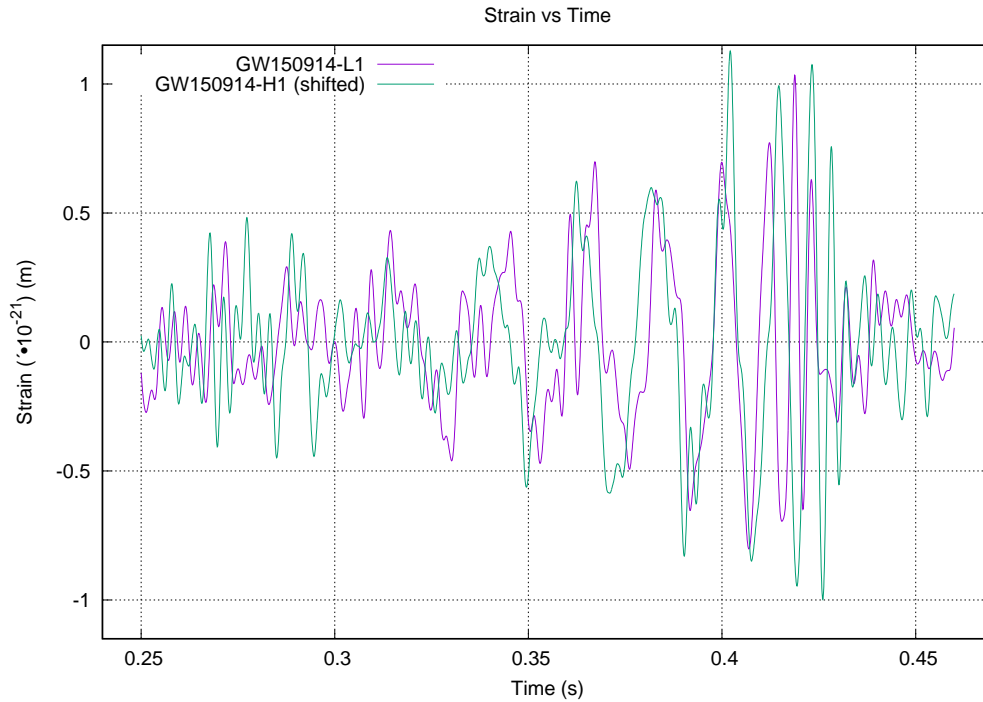


Figura 8: Primera observación de onda gravitacional, GW150614. Datos de LIGO: Handford, Washington (H1), invertido y Livingston, Louisiana (L1).

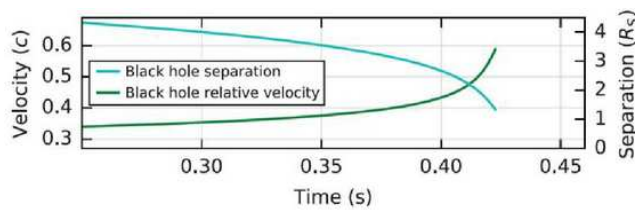


Figura 9: Separación entre las masas en la primera observación de onda gravitacional, GW150614. Datos de LIGO: Handford, Washington (H1), invertido y Livingston, Louisiana (L1). Fuente:[19]

En las figuras 8 y 9 se presentan los principales resultados del análisis, apuntando firmemente a GW150914 como la fusión de dos agujeros negros. En dicha figura vemos representada la tensión (strain), que hace referencia al cambio de longitud durante el paso de la onda gravitacional y donde vemos que el orden de magnitud es de 10^{-21} m frente al tiempo (time). Los valores estimados de las masas antes de la fusión y la separación entre las mismas (dado en función de su radio de Schwarzschild R_s) constituyen un argumento muy potente para confirmar que ambos son agujeros negros.

8.2. GW170814: Primera observación con tres detectores

La diferencia finita de la luz permite medir la distancia al evento de forma mucho más precisa usando tres detectores. Esta medida se realiza a partir de la diferencia temporal de la llegada de la señal a los tres interferómetros: $\sim 8ms$ Livingston-Handford y $\sim 14ms$ Handford-Virgo. La inclusión de Virgo en las observaciones supuso una reducción en la incertidumbre del parámetro de la distancia de luminosidad de al menos un orden de magnitud, una mejora notable en el estudio de los futuros eventos. También permite comparar datos para confirmar o descartar otros eventos.

Los datos medidos en la detección, eliminando ruido y errores se representan en la figura 10 donde vemos una gráfica con el SNR (ratio señal/ruido), un mapa de calor de la frecuencia y la contracción de la longitud durante el tiempo que dura la fusión.

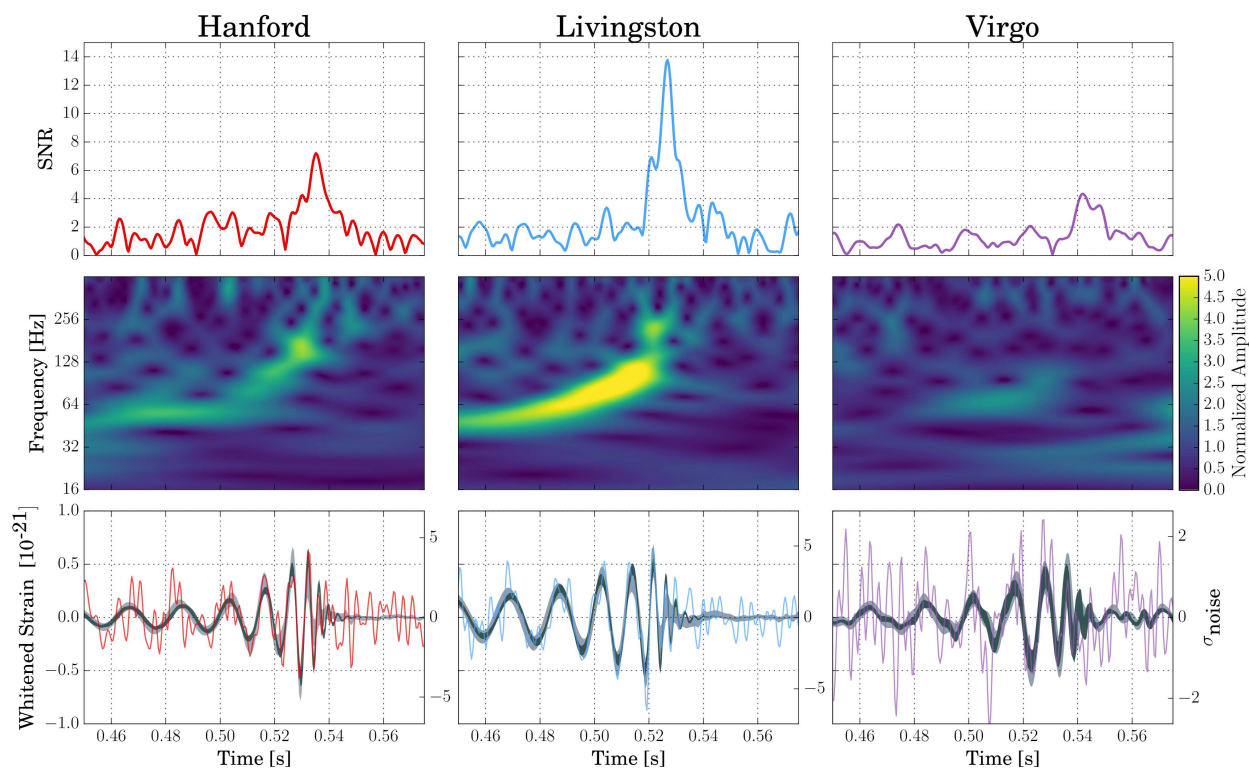


Figura 10: GW170814, datos. Fuente: [20]

GW170814 es un evento de fusión de agujeros negros, los parámetros son (sin incluir errores)

La región de localización de este evento se estimó de $1160deg^2$ sin los datos de Virgo. Dicha cifra pasó a ser de tan solo $60deg^2$ incluyendo las medidas de Virgo. Ambas dentro del intervalo de confianza del 90 %.

8.3. GW170817: Primera señal BNS

La onda gravitacional GW170817 es la primera señal proveniente de una estrella binaria de neutrones. La señal lleva asociada una explosión de rayos- γ (GRB 170817A) detectada

BH m_1	$30,5M_\odot$
BH m_2	$25,3M_\odot$
Chirp mass \mathcal{M}	$24,1M_\odot$
Masa total M	$55,9M_\odot$
Masa del BH resultante M_f	$53,2M_\odot$
Energía emitida E_{rad}	$2,7M_\odot c^2$
Pico de luminosidad ℓ_{peak}	$3,7 \times 10^{56} \text{ergs}^{-1}$
Parámetro efectivo de espín inspiral χ_{eff}	0,06
Spin del BH resultante a_f	0,70
Distancia de luminosidad D_L	540Mpc
Redshift de la fuente z	0,11

Cuadro 2: Parámetros obtenidos de GW170814. Fuente: [20]

en Fermi-GBM con un retraso temporal de 1.7s después de la fusión de las dos estrellas. La contraparte electromagnética confirmó la hipótesis sobre la posibilidad de que las estrellas de neutrones pudieran fusionarse a la vez de que dicha fusión produciría un estallido de rayos- γ .

El evento tiene asociada una masa menor que los eventos de agujeros negros, se localiza en la galaxia NGC 4993, en la constelación Hydra, y conlleva un análisis más complejo en el que se tiene en cuenta la deformación y el spin de las estrellas y los agujeros negros, lo que da lugar a distintos parámetros y una incertidumbre mayor dependiendo si se analiza bajo una previsión de alto o de bajo spin. En la siguiente tabla se resume y se puede ver cómo varían dependiendo si se asume alto o bajo spin

	Bajo spin ($ \chi \leq 0,05$)	Alto spin ($ x \leq 0,89$)
Estrella 1 m_1	$1,36 - 1,60M_\odot$	$1,36 - 2,26M_\odot$
Estrella 2 m_2	$1,17 - 1,36M_\odot$	$0,86 - 1,36M_\odot$
Chirp mass \mathcal{M}	$1,188M_\odot$	$1,188M_\odot$
Relación entre las masas m_2/m_1	0,7 – 1,0	0,4 – 1,0
Masa total m_{tot}	$2,74M_\odot$	$2,82M_\odot$
Energía radiada E_{rad}	$> 0,025M_\odot c^2$	$> 0,025M_\odot c^2$
Distancia de luminosidad D_L	40^{+8}_{-14}Mpc	40^{+8}_{-14}Mpc
Ángulo de visión Θ	$\leq 55^\circ$	$\leq 56^\circ$

Cuadro 3: Parámetros obtenidos de GW170817. Fuente: [21]

8.4. GW190412: dos BH de masas asimétricas

Este evento corresponde a una fusión de dos agujeros negros, cuya asimetría en las masas vemos representada en la figura 11 junto con la emisión de ondas gravitacionales visualizada en el fondo mediante un diagrama de colores, conlleva contribuciones no despreciables en términos de orden mayor al cuadrupolar en el desarrollo multipolar de la radiación gravitatoria. De nuevo, hay fuertes evidencias de estas contribuciones, lo que constituye otro éxito en la teoría de la relatividad.

Para el análisis de estas contribuciones, siempre dentro del intervalo de confianza del 90 %,

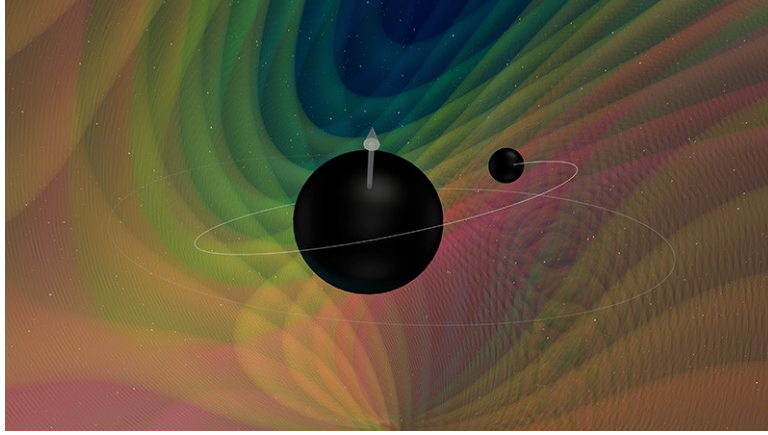


Figura 11: Visualización de la fusión de los dos agujeros negros de GW190412. Autores: N. Fischer, H. Pfeiffer, A. Buonanno (Max Planck Institute for Gravitational Physics), Simulating eXtreme Spacetimes (SXS) Collaboration

se utilizaron dos métodos: *EOBNR PHM* (*Effective-one-body numerical relativity*) y *Phenom PHM* (*phenomenological*), basado en una descripción dominante en frecuencia y relatividad numérica ⁴. Ambos métodos no difieren de forma significativa en sus resultados, resumidos en al siguiente tabla

Parámetro ^a	EOBNR PHM	Phenom PHM	Combinados
m_1/M_\odot	$31,7^{+3,6}_{-3,5}$	$28,1^{+4,8}_{-4,3}$	$30,1^{+4,6}_{-5,3}$
m_2/M_\odot	$8,0^{+0,9}_{-0,7}$	$8,8^{+1,5}_{-1,1}$	$8,3^{+1,6}_{-0,9}$
M/M_\odot	$39,7^{+3,0}_{-2,8}$	$36,9^{+3,7}_{-2,9}$	$38,4^{+3,8}_{-3,9}$
\mathcal{M}/M_\odot	$13,3^{+0,3}_{-0,3}$	$13,2^{+0,5}_{-0,3}$	$13,3^{+0,4}_{-0,4}$
Ratio de masas q	$0,25^{+0,06}_{-0,04}$	$0,31^{+0,12}_{-0,07}$	$0,28^{+0,12}_{-0,07}$
Masa final M_f/M_\odot	$38,6^{+3,1}_{-2,8}$	$35,7^{+3,8}_{-3,0}$	$37,3^{+3,8}_{-4,0}$
Spin final χ_f	$0,68^{+0,04}_{-0,04}$	$0,67^{+0,07}_{-0,07}$	$0,67^{+0,06}_{-0,05}$
m_1^{det}/M_\odot	$36,5^{+4,2}_{-4,2}$	$32,3^{+5,7}_{-5,2}$	$34,6^{+5,4}_{-6,4}$
m_2^{det}/M_\odot	$9,2^{+0,9}_{-0,7}$	$10,1^{+1,6}_{-1,2}$	$9,6^{+1,7}_{-1,0}$
M^{det}/M_\odot	$45,7^{+3,5}_{-3,3}$	$42,5^{+4,4}_{-3,7}$	$44,2^{+4,4}_{-4,7}$
$\mathcal{M}^{\text{det}}/M_\odot$	$15,3^{+0,1}_{-0,2}$	$15,2^{+0,3}_{-0,2}$	$15,2^{+0,3}_{-0,1}$
Spin efectivo χ_{eff}	$0,28^{+0,06}_{-0,08}$	$0,22^{+0,08}_{-0,11}$	$0,25^{+0,08}_{-0,11}$
Spin de precesión χ_p	$0,31^{+0,14}_{-0,15}$	$0,31^{+0,24}_{-0,17}$	$0,31^{+0,19}_{-0,16}$
χ_1	$0,46^{+0,12}_{-0,15}$	$0,41^{+0,22}_{-0,24}$	$0,44^{+0,16}_{-0,22}$
D_L/Mpc	740^{+120}_{-130}	740^{+150}_{-190}	740^{+130}_{-160}
z	$0,15^{+0,02}_{-0,02}$	$0,15^{+0,03}_{-0,04}$	$0,15^{+0,03}_{-0,03}$

Cuadro 4: Parámetros obtenidos de GW190412. ^aSímbolos: 'det' hace referencia al detector, por lo que incluye el redshift. Fuente: [22]

⁴ver anexo B: 10.2

8.5. GW190521: Primer BH de masa intermedia

GW190521 es una fusión de dos agujeros negros cuyas masas iniciales se estiman de $85M_{\odot}$ y $66M_{\odot}$ y tiene como resultado otro de $142M_{\odot}$, constituyendo así la primera observación de agujero negro en el rango de masa intermedia. Estos agujeros negros de masa intermedia hacen referencia a los que se encuentran entre $100M_{\odot}$ y $100000M_{\odot}$ aproximadamente, es decir, los que están por encima de los agujeros negros formados a partir de supernovas pero por debajo de los supermasivos. Estas fusiones, por un lado, podrían tener un papel, explicando la formación de los agujeros negros del centro de las galaxias, y por otro lado, los modelos actuales de supernovas presentan la formación de BH en el rango entre $65M_{\odot}$ y $135M_{\odot}$ como un proceso muy desfavorecido, aunque no quiere decir que imposible como se demuestra con este evento.

Este evento, a su vez, constituye la fusión más masiva detectada hasta la fecha, a la vez que abre la puerta a la existencia, y el estudio tanto de agujeros negros de masa intermedia como a primordiales.

Los parámetros de la observación se recogen en la tabla siguiente, donde se ha hecho uso de los métodos *EOBNR PHM* y *Phenom PHM* para el análisis de la señal

Parámetro	Valor
m_1	$85M_{\odot}$
m_2	$66M_{\odot}$
Spin m_1	0,69
Spin m_2	0,73
Masa total	$150M_{\odot}$
Relación masas ($m_2/m_1 \leq 1$)	0,79
Parámetro de spin inspiral efectivo (χ_{eff})	0,08
Parámetro de spin de precesión efectivo (χ_p)	0,68
Distancia de luminosidad	5,3Gpc
Redshift	0,82
Masa resultante	$142M_{\odot}$
Spin resultante	0,72
$P(m_1 < 65M_{\odot})$	0,32 %

Cuadro 5: Parámetros obtenidos de GW190521. Fuente: [23]

9. Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos tratado de aproximarnos a las ondas gravitacionales desde un punto de vista básico, construyendo de la teoría a la práctica paso a paso de forma simple. Primero partimos de una métrica plana sobre la que aplicamos una perturbación para resolver las ecuaciones de Einstein dentro del margen de la teoría linealizada, aplicando las condiciones gauge para obtener las soluciones independientes. Posteriormente, llegamos a una expresión para la energía que emiten utilizando un desarrollo a segundo orden y separando la perturbación en términos de alta y de baja frecuencia. Lo más destacable de estas secciones es la obtención del término cuadrupolar como el dominante en la emisión de GW.

En segundo lugar, estudiamos los sistemas binarios como fuentes de ondas gravitacionales. Comenzamos por el púlsar de Hulse-Taylor y continuamos con sistemas binarios dentro del contexto de fuentes que se mueven lentamente.

Por último, discutimos los observatorios de ondas gravitacionales, instalaciones punteras en tecnología cuyos componentes y funcionamiento son únicos. También hemos analizado el comienzo, su estado actual y la evolución prevista en términos de sensibilidad y de lo que se espera encontrar. Por otro lado, hemos presentado las detecciones más importantes realizadas y hemos destacado que la detección de GW ha sido el método que nos ha permitido observar y por tanto estudiar directamente agujeros negros.

Como se ha mostrado durante este trabajo las ondas gravitacionales constituyen una poderosa herramienta para el estudio del universo, donde ya lo hacen aunque en menor medida respecto a otros experimentos y estudios.

Más allá de este proyecto en el que hemos considerado situaciones con varias aproximaciones, existen sistemas físicos y situaciones que requieren métodos más avanzados para el estudio de las ondas gravitacionales como por ejemplo, una extensión a fuentes que requieren correcciones relativistas, fuertes campos gravitacionales, interacción de las propias ondas, ondas gravitacionales primordiales, etc.

10. Anexos

10.1. Anexo A: Derivadas del tensor I_{ij} para el púlsar de Hulse-Taylor

10.1.1. Derivadas de I_{xx}

Primera derivada:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_{xx} &= \mu \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \cos^2 \theta) \\
 &= \mu \left[2r \cos^2 \theta \dot{r} - 2r^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta} \right] \\
 &= 2\mu r \left[\cos^2 \theta \left(e \sin \theta \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{a(1 - e^2)}} \right) - 2r \cos \theta \sin \theta \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}}{r^2} \right] \\
 &= -\frac{m_1 m_2}{\sqrt{(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}} r \cos \theta \sin \theta
 \end{aligned} \tag{77}$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned}
 \ddot{I}_{xx} &= -\frac{m_1 m_2}{a(1 - e^2)} \left[\cos \theta \sin \theta + r \dot{\theta} \cos(2\theta) \right] \\
 &= -\frac{m_1 m_2}{a(1 - e^2)} \left[e \sin \theta \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{a(1 - e^2)}} \cos \theta \sin \theta + \cos(2\theta) \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{a(1 - e^2)}} (1 + e \cos \theta) \right] \\
 &= -\frac{m_1 m_2}{a(1 - e^2)} \left[\cos(2\theta) + e \cos^3 \theta \right]
 \end{aligned} \tag{78}$$

Tercera derivada:

$$\begin{aligned}
 \ddot{I}_{xx} &= \frac{2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} \left[2\dot{\theta} \sin(2\theta) + 3e\dot{\theta} \sin \theta \cos^2 \theta \right] \\
 &= \frac{2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} \left[2 \sin(2\theta) + 3e \sin \theta \cos^2 \theta \right] \dot{\theta}
 \end{aligned} \tag{79}$$

10.1.2. Derivadas de I_{yy}

Primera derivada:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_{yy} &= \mu \left[r^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + 2r \dot{r} \sin^2 \theta \right] \\
 &= 2\mu r \left[\frac{\sin \theta \cos \theta}{a(1 - e^2)} (1 + e \cos \theta) \sqrt{(m_1 + m_2)a(1 - e^2)} + e \sin^3 \theta \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{a(1 - e^2)}} \right] \\
 &= \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}} r \sin \theta (\cos \theta + e)
 \end{aligned} \tag{80}$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned}
 \ddot{I}_{yy} &= \frac{2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} \left[\dot{r} (\sin \theta \cos \theta + e \sin \theta) + r \dot{\theta} (e \cos \theta + \cos(2\theta)) \right] \\
 &= \frac{2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} \left[e^2 + e \cos \theta + e \cos \theta (\cos^2 \theta - \cos(2\theta)) + e \cos \theta \cos(2\theta) + \cos(2\theta) \right] \\
 &= \frac{2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} \left[e^2 + e \cos \theta + \cos(2\theta) + e \cos^3 \theta \right]
 \end{aligned} \tag{81}$$

Tercera derivada:

$$\ddot{I}_{yy} = -\frac{2m_1m_2}{a(1-e^2)} [e \sin \theta + 2 \sin(2\theta) + 3e \cos^2 \theta \sin \theta] \dot{\theta} \quad (82)$$

10.1.3. Derivadas de I_{xy}

Primera derivada:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{xy} &= \mu [r\dot{r} \sin(2\theta) + r^2\dot{\theta} \cos(2\theta)] \\ &= \frac{2m_1m_2}{\sqrt{(m_1+m_2)a(1-e^2)}} [e \sin \theta + \cos(2\theta)(1+e \cos \theta)] \\ &= \frac{2m_1m_2}{\sqrt{(m_1+m_2)a(1-e^2)}} r [\cos(2\theta) + e \cos \theta] \end{aligned} \quad (83)$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{xy} &= \frac{2m_1m_2}{\sqrt{(m_1+m_2)a(1-e^2)}} [\dot{r}(\cos(2\theta) + e \cos \theta) - r\dot{\theta}(2 \sin(2\theta) - e \cos \theta)] \\ &= -\frac{2m_1m_2}{a(1-e^2)} [e(\sin \theta + \sin \theta \cos^2 \theta + 2 \sin \theta)] \end{aligned} \quad (84)$$

Tercera derivada:

$$\ddot{I}_{xy} = -\frac{2m_1m_2}{a(1-e^2)} [2 \cos(2\theta) - e \cos \theta + 3e \cos^2 \theta] \dot{\theta} \quad (85)$$

10.1.4. Traza de \ddot{I}_{ij}

$$\begin{aligned} \ddot{I} &= \delta_{ij} \ddot{I}_{kk} = Tr(\ddot{I}_{ij}) = \ddot{I}_{xx} + \ddot{I}_{yy} \\ \ddot{I} &= -\frac{2m_1m_2}{a(1-e^2)} e\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (86)$$

10.2. Anexo B: EOB, NR y Phenom

10.2.1. EOB

El formalismo EOB ([29]) es una aproximación analítica al problema de dos cuerpos en relatividad general que tiene como objetivo proporcionar una descripción de forma precisa el movimiento de los agujeros negros o estrellas que se fusionan. Dicho formalismo es una forma muy eficiente de obtener muchos modelos necesarios para el análisis de datos de GW. Describe de forma no perturbativa la dinámica de sus sistema binario compacto, la coalescencia del mismo a causa de ondas gravitacionales y proporciona parámetros como la energía, el momento angular o la frecuencia orbital en función de la relación de las masas.

El método EOB consta de tres parámetros principales:

- Una descripción de la parte conservativa de la dinámica de dos cuerpos, basada en el Hamiltoniano del sistema.
- Una expresión para la parte de radiación-reacción de la dinámica.
- Una descripción de la forma de onda de la GW que emite el sistema binario en fusión.

Para cada uno de estos, el método utiliza elementos resultado de cálculos post-Newtoniano (PN) de orden alto (la dinámica conservativa del formalismo post-Newtoniano se conoce completamente hasta el nivel 3PN y parcialmente a niveles más altos).

10.2.2. Relatividad numérica (NR)

Las ecuaciones de Einstein constituyen la base de la relatividad general y sus soluciones en general no existen de manera explícita. La relatividad numérica es un campo multidisciplinar basado en el uso de algoritmos y métodos numéricos para modelar, analizar y resolver las ecuaciones de Einstein utilizando ordenadores. Dentro de este campo nos encontramos con simulaciones de agujeros negros, sistemas binarios realistas y de su emisión de ondas gravitacionales. En particular, este método se utiliza para obtener plantillas con formas de ondas gravitacionales para diversos sistemas y que sirven para filtrar los datos obtenidos en los observatorios y llegar a una detección.

Effective-One-Body (EOB)+ Numerical-Relativity (NR) es un método que, como su propio nombre indica emplea las formas de onda que provee EOB calibradas con simulaciones de relatividad numérica.

10.2.3. Phenom

Abreviado de *phenomenological*, es un modelo que se utiliza para obtener la forma de ondas gravitacionales que tiene en cuenta el espín de las masas y su alineación entre sí y con el momento angular de la órbita, la precesión del mismo y términos multipolares no dominantes.

11. Tablas y figuras

Índice de figuras

1	Polarización de un anillo con masa.	12
2	Elemento de volumen para el teorema de Gauss	16
3	Esquema de órbita para el púlsar de Hulse-Taylor	19
4	Sensibilidad de los observatorios de ondas gravitacionales	31
5	Elementos de Advanced Virgo	32
6	Modelo de péndulo cuádruple	34
7	Masas iniciales y finales de las fuentes de ondas gravitacionales observadas .	35
8	GW150614	36
9	GW150614	36
10	GW170814	37
11	Representación GW190412	39

Índice de cuadros

1	Parámetros obtenidos de GW150914.	35
2	Parámetros obtenidos de GW170814. Fuente: [20]	38
3	Parámetros obtenidos de GW170817. Fuente: [21]	38
4	Parámetros obtenidos de GW190412.	39
5	Parámetros obtenidos de GW190521. Fuente: [23]	40

12. Bibliografía

Referencias

- [1] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. Advanced LIGO: Context and Overview. LIGO website www.ligo.caltech.edu/.
- [2] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. A Brief History of LIGO. LIGO website www.ligo.caltech.edu/.
- [3] C. W. Misner et al. Gravitation. Princeton University Press, 2017.
- [4] B. F. Schutz. A First Course in General Relativity. Cambridge University Press, 2018.
- [5] R. Blandford and K. S. Thorne. Applications to Classical Physics: capítulos 25, 27. <http://www.pmaweb.caltech.edu/Courses/ph136/yr2012/>
- [6] M. D. Iftime (2006). Gauge and General Relativity. arxiv.org/abs/gr-qc/0612141v3
- [7] J. P. Chung. Diffeomorphism invariance in general relativity (2008). Honors Theses. Paper 53. digitalcommons.colby.edu/honorsthesis/53
- [8] N. Straumann. General Relativity: with Applications to Astrophysics. Springer, 2011.
- [9] M. Maggiore. Gravitational Waves vol. 1: Theory and experiments. Oxford University Press, 2008.
- [10] É. É. Flanagan and S. A. Hughes (2005). The basics of gravitational wave theory. New J. Phys. **7** 204.
- [11] Dr. Jolien D. E. Creighton, Dr. Warren G. Anderson. Gravitational-Wave Physics and Astronomy: An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis. Wiley-VCH, 2011.
- [12] L. D. Landau, et al. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press, 1979.
- [13] K. Riles (2013). Gravitational Waves: Sources, Detectors and Searches. Progress in Particle & Nuclear Physics 68 1.
- [14] Publicación del premio Nobel de física de 2005: R.A. Hulse and J.H. Taylor. *Astroph. J.* **195** (1975) L51 ; J.M. Weisberg and J.H. Taylor 2005 in Binary Radio Pulsars eds. F.A. Rasio and I.H. Stairs, *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.* vol 328 (San Francisco: Astron. Soc. Pacific), 2005.
- [15] J. M. Weisberg, J. H. Taylor and L. A. Fowler (1981). Gravitational waves from an orbiting pulsar. *Scientific American.* 245 (4): 74–82.
- [16] J. Weber. General relativity and gravitational waves. Dover Publications, 2004.
- [17] S. Weinberg. Gravitation And Cosmology: Principles And Applications Of The General Theory Of Relativity. John Wiley and Sons, 1972.
- [18] B. P. Abbott et al.(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2017) The basic physics of the binary black hole merger GW150914. *Ann. Phys. (Berlin)* **529**, No. 1–2, 1600209.

- [19] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102.
- [20] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2017). GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.* **119**, 141101.
- [21] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2017). GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.* **119**, 161101 .
- [22] R. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2020). GW190412: Observation of a binary-black-hole coalescence with asymmetric masses. *Phys. Rev. D* **102**, 043015.
- [23] R. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2020). GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of $150M_{\odot}$. *Phys. Rev. Lett.* **125**, 101102.
- [24] B.P. Abbott et al. (KAGRA Collaboration, LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2020). Prospects for observing and localizing gravitational-wave transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA. *Living Rev Relativity* **23**, 3.
- [25] M. Pitkin, S. Reid, S. Rowan and J. Hough (2011). Gravitational Wave Detection by Interferometry (Ground and Space). *Living Rev. Relativity*, **14**, 5.
- [26] L. Blanchet (2014). Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries. *Living Rev. Relativity*, **17**, 2.
- [27] G. Ellis, R. Maarten, and M. MacCallum. *Relativistic Cosmology*. Cambridge University Press, 2012.
- [28] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2021). *Astrophys J*, 909 Number 2 **218**.
- [29] A. Buonanno and T. Damour (1999). Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics. *Physical Review D*, 59(8).
- [30] D. Bini, T. Damour and A. Geralico. High-Order Post-Newtonian Contributions to Gravitational Self-force Effects in Black Hole Spacetimes. *Springer INdAM Series*, 25–77, 2017.
- [31] T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro. *Numerical Relativity Hardback: Solving Einstein’s Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
- [32] M- Shibata. *Numerical Relativity (100 Years of General Relativity)*. World Scientific Publishing Company, 2015.