

Propagación de la luz en medios de índice de refracción no uniforme

Millán Pérez Martín

6 de julio de 2022

D. Luis Plaja Rustein y D. Enrique Conejero Jarque, profesores del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Salamanca, autorizan la presentación del Trabajo de Fin de Grado titulado "Propagación de la luz en medios de índice de refracción no uniforme", realizado por el alumno D. Millán Pérez Martín.

Salamanca, 6 de julio de 2022.

Fdo: Luis Plaja Rustein y Enrique Conejero Jarque

Resumen

El parámetro más importante a la hora de estudiar la propagación de la luz en un medio material es el índice de refracción, si el índice no es independiente de la posición entonces diremos que el medio es inhomogéneo. La propagación de los rayos de luz en este tipo de medios en general no sigue una línea recta, sino que se curvará en la dirección que maximiza el gradiente del índice. Las trayectorias que seguirán los rayos se estudian en el formalismo de la óptica geométrica, en concreto a través de la resolución de las ecuaciones diferenciales del rayo.

Las ecuaciones del rayo, salvo en algún caso concreto, son muy difíciles o incluso imposibles de resolver de forma analítica. Normalmente se trabaja utilizando aproximaciones que nos permitan simplificar los cálculos, pero esto limita mucho los resultados que es posible obtener, ofreciendo una visión muy reducida del comportamiento de la luz en este tipo de medios. Es por esto que resulta de gran interés encontrar un método alternativo que nos de un resultado suficientemente buena en los casos en que no es posible obtener la solución analítica exacta.

Siguiendo el procedimiento detallado en el artículo de A. Sharma et al. [1] se puede desarrollar un método muy eficiente y rápido para resolver de forma numérica la segunda ecuación diferencial del rayo. Este método se basa en reescribir la ecuación en una forma sencilla utilizando una serie de matrices unidimensionales y resolverla mediante el método de Runge-Kutta. Al comparar el resultado obtenido utilizando este método con la solución exacta en alguno de los casos en los que esta es posible de obtener de forma analítica se obtienen errores relativos del orden de 10^{-10} sin utilizar un paso espacial demasiado pequeño, lo que nos permite reducir en gran medida el tiempo de computación. Otra de las ventajas de este método es su gran flexibilidad, al requerir solo de los valores del índice y de su gradiente nos permite estudiar medios de todo tipo de una forma relativamente sencilla.

En este trabajo se ha aplicado este método al estudio de la propagación de la luz al atravesar un medio con un perfil de índice de dependencia cuadrática con el radio polar, caso imposible de resolver analíticamente sin recurrir a la aproximación paraxial. Este medio tiene especial interés ya que se comporta como una lente para rayos que inciden ortogonalmente a la superficie, siendo convergente o divergente dependiendo del signo del gradiente del índice. Se ha estudiado la convergencia de los rayos en el caso de una lente gruesa, haciendo posible el cálculo aproximado de la distancia focal en un régimen en el que la aproximación paraxial no funciona. Se ha estudiado también la dependencia de la distancia focal con la altura del rayo, observándose que esta deja de ser única a medida que nos alejamos del eje de la lente de manera similar a lo que ocurre con las aberraciones de una lente convencional.

Abstract

The most important parameter when studying the propagation of light in a material medium is the refractive index, if the index is not independent of position then we will say that the medium is inhomogeneous. Propagation of light rays in such media generally does not follow a straight line, instead curving in the direction that maximizes the index gradient. The path that light will take is studied in the ray formalism of geometrical optics, specifically by solving the differential ray equations.

The ray equations, except in some specific cases, are very difficult or even impossible to solve analytically. Normally we work with approximations to simplify calculations, but this greatly limits the results that can be obtained, offering a very limited view of the behavior of light in this type of media. This is why it is of great interest to find an alternative method that provides a sufficiently good result in situations where the analytical solution is impossible to obtain.

Following the procedure detailed in the article written by A. Sharma et al. [1] a very efficient and fast method to solve the second ray equation numerically can be developed. This method involves rewriting the equation in a simple form using a series of one-dimensional arrays and solving it using the Runge-Kutta method. When comparing the results obtained using this method with the exact solution in some of the cases in which it is possible to obtain it analytically, relative errors of around 10^{-10} are obtained without using too small of a spatial step, allowing us to greatly reduce the computational time. Another benefit of using this method is its great flexibility, since it requires only the values of the index and its gradient, thus allowing us to study a great variety of media in a relatively simple way.

In this work we have applied this method to the study of light propagation through a medium with an index profile of quadratic dependence with the polar radius, a case impossible to solve analytically without resorting to the paraxial approximation. This medium is of special interest since it behaves as a lens for rays incident orthogonally to the surface, being convergent or divergent depending on the sign of the index gradient. The convergence of rays in the case of a thick lens have been studied, making an approximate calculation of the focal distance possible in a regime in which the paraxial approximation does not work. The dependence of the focal distance on the height of the ray has also been studied, observing that it ceases to be unique as we move further from the axis of the lens in a similar manner to what happens with the aberrations of a conventional lens.

Palabras clave

medios no homogéneos, óptica geométrica, ecuaciones de propagación del rayo, lentes de gradiente de índice, integración numérica

Keywords

inhomogeneous media, geometrical optics, ray equations, gradient index lenses, numerical integration

Índice

1. Introducción y objetivos	5
2. Propagación de la luz en medios homogéneos	5
3. Aproximación de onda corta	9
4. Propagación de la luz en medios inhomogéneos	10
5. Ecuaciones diferenciales del rayo	12
6. Soluciones analíticas de la segunda ecuación del rayo	14
6.1. Estrategia general para estratificaciones planas	14
6.2. Perfil de índice $n^2 = n_0^2(1 + 2y/h)$	15
6.3. Perfil de índice $n = n_0 + ax$	16
7. Integración numérica de la segunda ecuación diferencial del rayo	16
8. Comparación entre las soluciones analítica y numérica	18
9. Estudio en aproximación paraxial de un caso con simetría cilíndrica	20
10. Estudio fuera de la aproximación paraxial	23
10.1. Dependencia de la distancia focal con el espesor del medio	24
10.2. Dependencia de la distancia focal con la altura del rayo	25
A. Ejemplo de código para la resolución numérica de la segunda ecuación diferencial del rayo	31

1. Introducción y objetivos

La óptica geométrica estudia la luz asumiendo longitudes de onda muy pequeñas. En este rango, las ecuaciones que gobiernan la propagación de las ondas se pueden escribir en lenguaje geométrico. Las trayectorias que resultan de resolver dichas ecuaciones son lo que conocemos como rayos, que nos dan la información sobre cómo se propaga la luz en el medio. Obtener estas trayectorias tiene especial interés en medios inhomogéneos, es decir, medios cuyo índice de refracción depende de la posición.

A lo largo de este trabajo se estudiará la propagación de la luz por este tipo de medios, se obtendrán las ecuaciones diferenciales del rayo que nos permiten obtener estas trayectorias y se estudiarán sus soluciones. Las ecuaciones diferenciales del rayo son, en general, muy complejas y salvo algún caso concreto no tienen solución analítica. Es por esto que en este trabajo se explicará y utilizará el método formulado por Anarug Sharma et al. en 1982 [1] para resolverlas de forma numérica.

El resultado aproximado obtenido con dicho método se comparará con el analítico en alguno de los casos en los que este se pueda obtener de forma sencilla con el objetivo de verificar su fiabilidad. Finalmente se estudiará un medio cuyas trayectorias solo tienen solución analítica en aproximación paraxial, se comparará con la solución numérica y se estudiará la fenomenología que aparece al dejar de cumplirse dicha aproximación.

2. Propagación de la luz en medios homogéneos

Para entender cómo se propaga la luz en un medio material necesitamos conocer qué ecuaciones rigen su dinámica. Al ser la luz una onda electromagnética podemos partir de las leyes que recogen el comportamiento de los campos de este tipo, las leyes de Maxwell, en el sistema internacional estas ecuaciones toman la siguiente forma [2]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (4)$$

Siendo $\vec{E}$ y $\vec{H}$ los campos eléctrico y magnético respectivamente, $\vec{J}$ la densidad de corriente en volumen y ρ la de carga. Los parámetros ε y μ son respectivamente la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del medio, que nos describen la respuesta

electromagnética de este. En el caso de campos monocromáticos (es decir, campos con solo una frecuencia) y de medios isótropos y de respuesta lineal estas cantidades se definen como:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (6)$$

Donde $\vec{D}$ es el vector desplazamiento eléctrico y $\vec{B}$ es la inducción magnética, que relacionan el campo eléctrico con la polarizabilidad y el campo magnético con la magnetización del medio respectivamente. Por ahora tomaremos ε y μ como constantes en el espacio (siempre serán dependientes de la frecuencia pero al estar trabajando con campos monocromáticos esto no nos supone un problema) porque en el caso del vacío y de algunos medios materiales sencillos lo son, pero más adelante veremos que esto no siempre es cierto y es precisamente el hecho de que no lo sean lo que nos va a servir para explicar cómo se propaga la luz en un medio inhomogéneo.

Nos interesa estudiar la propagación de la luz en medios neutros y en regiones alejadas de las fuentes del campo electromagnético por lo que podemos tomar $\vec{J}$ y ρ como nulos, si tenemos esto en cuenta las ecuaciones (1) y (4) nos quedan de la siguiente forma.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8)$$

Queremos encontrar una ecuación que nos describa una onda, para esto tomaremos el rotacional de ambos lados de la ecuación (2) y aplicaremos la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$. Con esto y aplicando 7 el lado izquierdo de la ecuación nos queda

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \quad (9)$$

En el lado derecho aplicamos (8) y obtenemos:

$$\nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (10)$$

Igualando ahora ambos lados y reordenando llegamos a la conocida ecuación de ondas del campo electromagnético:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

Donde hemos introducido la velocidad de la luz en el medio $v = (\sqrt{\mu\epsilon})^{-1}$, esta ecuación nos describe la propagación de una onda electromagnética en el vacío. Aunque hemos hecho el desarrollo solo para el campo eléctrico se puede seguir un procedimiento análogo en la ecuación (8) para obtener una ecuación similar para el campo magnético. Cabe destacar que estamos considerando $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$, es decir, el campo eléctrico es una función vectorial dependiente tanto de la posición como del tiempo.

Vamos a introducir ahora un parámetro de vital importancia a la hora de describir cómo se propagará la luz en un medio material, el índice de refracción:

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad (12)$$

El índice de refracción n contiene tanto la permitividad como la permeabilidad del medio por lo que codifica la respuesta de este a un campo electromagnético. Como hemos mencionado previamente en esta sección estamos considerando ϵ y μ constantes en el espacio por lo que el índice de refracción también lo será. Es fácil ver que nos da una relación entre la propagación de la luz en el medio y en el vacío:

$$\frac{1}{v} = \sqrt{\epsilon\mu} \Rightarrow n = \frac{c}{v} \quad (13)$$

Esto nos permite relacionar la longitud de onda de la luz en el medio λ con la que tendría en el vacío λ_0 :

$$v = \frac{c}{n} = \lambda\nu = \frac{\lambda_0\nu}{n} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (14)$$

Donde ν es la frecuencia de la radiación. La expresión (11) es una ecuación diferencial en derivadas parciales que admite infinitas soluciones de los campos electromagnéticos, entre ellas nos vamos a quedar con un tipo de soluciones de especial utilidad a la hora de trabajar en sistemas de coordenadas cartesianas, las ondas planas monocromáticas. La forma de una onda plana de frecuencia ω para los campos eléctrico y magnético es:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{e}(\vec{r}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \varphi)} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{h}(\vec{r}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \varphi)} \end{aligned} \quad (15)$$

Siendo $\vec{e}$ y $\vec{h}$ los vectores de amplitud que supondremos l ntamente variables, en general serán funciones complejas pero como trabajamos con campos reales solo tomaremos su parte real. También hemos introducido el llamado vector de onda $\vec{k} = k\vec{s} = n\frac{2\pi}{\lambda_0}\vec{s}$, siendo $\vec{s}$ el vector unitario que nos da la dirección en la que se propaga la onda. La cualidad que le da nombre a esta onda es que los llamados frentes de onda (superficies de fase constante) son planos perpendiculares a la dirección de propagación. En la figura 1 observamos los frentes de onda de una onda plana arbitraria.

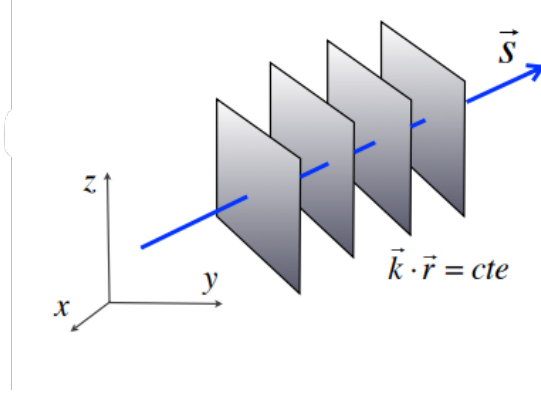


Figura 1: Geometría de una onda plana

Vamos a buscar la forma de las ecuaciones de Maxwell para los campos descritos en (15), para esto tendremos que calcular divergencia y rotacional para el campo eléctrico y el magnético. Veamos cuanto vale la derivada parcial de uno de ellos con respecto a una coordenada arbitraria x_i

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i} = ik s_{x_i} \vec{E} \quad (16)$$

Puede obtenerse una relación equivalente para el vector $\vec{H}$. Es fácil ver entonces que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= ik \vec{s} \cdot \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= ik \vec{s} \times \vec{E} \end{aligned} \quad (17)$$

Podemos ahora reescribir las ecuaciones de Maxwell para las ondas planas. Empezamos con las ecuaciones vectoriales, es decir, las que dependen del rotacional de los campos:

$$\nabla \times \vec{E} = ik \vec{s} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\mu\omega \vec{H} \Rightarrow k(\vec{s} \times \vec{e}) = \mu\omega \vec{h} \quad (18)$$

$$\nabla \times \vec{H} = ik \vec{s} \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\varepsilon\omega \vec{E} \Rightarrow k(\vec{s} \times \vec{h}) = -\varepsilon\omega \vec{e} \quad (19)$$

Nótese que como ambas ondas tienen la misma exponencial nos quedamos únicamente con los términos de amplitud. Podemos reescribir todo en función de la velocidad de la luz en el vacío y del índice de refracción:

$$n(\vec{s} \times \vec{e}) = \mu c \vec{h} \quad (20)$$

$$n(\vec{s} \times \vec{h}) = -\varepsilon c \vec{e} \quad (21)$$

Las ecuaciones escalares no cambian mucho ya que están igualadas a cero, pero por similitud con las vectoriales vamos a multiplicar ambas por el índice de refracción:

$$n(\vec{s} \cdot \vec{e}) = 0 \quad (22)$$

$$n(\vec{s} \cdot \vec{h}) = 0 \quad (23)$$

3. Aproximación de onda corta

Cuando hablamos de luz normalmente nos estamos refiriendo al rango visible del espectro electromagnético, caracterizado por frecuencias de oscilación muy grandes (del orden de 10^{14} s^{-1}) en comparación con la escala típica de la variación de los parámetros ópticos del material. Podemos considerar entonces la aproximación de onda corta, en la que supondremos una longitud de onda infinitamente pequeña. Podría parecer a primera vista que estamos perdiendo demasiada información sobre la luz pero siempre que el resto de elementos del problema tengan un tamaño característico muy superior al de la longitud de onda esta forma de trabajar resulta enormemente útil y es solo en casos en los que esto no se cumpla que aparecerán sucesos que no podemos describir desde la aproximación de onda corta, conocidos como fenómenos de difracción.

La rama de la óptica que surge de estudiar el límite $\lambda \rightarrow 0$ se conoce como óptica geométrica, ya que las ecuaciones que nos aparecerán para el estudio de la propagación podrán ser formuladas en términos puramente geométricos mediante los rayos de luz. Posteriormente daremos una definición formal de dichos rayos pero por ahora se pueden entender como las trayectorias que seguirá la luz al propagarse por un medio.

A continuación nos valdremos de esta aproximación para estudiar el caso de la propagación de la luz a través de un medio inhomogéneo y trataremos de encontrar una ecuación que nos permita obtener la trayectoria de la luz en función del índice de refracción del medio.

4. Propagación de la luz en medios inhomogéneos

Previamente habíamos mencionado que la permitividad y la permeabilidad no siempre son constantes. Vamos a considerar ahora el caso de un medio inhomogéneo, es decir, un medio en el que $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ y $\mu = \mu(\vec{r})$. Recordando la definición del índice de refracción (12), es fácil ver que $n = n(\vec{r})$. Definimos el camino óptico como $\Gamma(\vec{r}) = n(\vec{r})\vec{s} \cdot \vec{r}$, cantidad que nos será muy útil para estudiar este tipo de medios. El camino óptico representa la distancia recorrida por la luz en un tiempo determinado si se propagase en el vacío. Queremos realizar un estudio similar al que hicimos en el caso de medios homogéneos por lo que nos interesa obtener la expresión de la onda plana en función del camino óptico. Simplemente sustituyendo en (15) obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}(\vec{r})e^{ik_0\Gamma(\vec{r})} \quad (24)$$

Queremos reescribir las ecuaciones de Maxwell en este tipo de medios, el primer paso es obtener la derivada espacial del campo con respecto a una de las tres coordenadas cartesianas.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} E_i = e^{ik_0\Gamma} \frac{\partial e_i}{\partial x_j} + ik_0 E_i \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma \quad (25)$$

Utilizando este resultado podemos obtener la divergencia y el rotacional:

$$\nabla \cdot \vec{E} = (\nabla \cdot \vec{e} + ik_0 \nabla \Gamma \cdot \vec{e})e^{ik_0\Gamma} \quad (26)$$

$$\nabla \times \vec{E} = (\nabla \times \vec{e} + ik_0 \nabla \Gamma \times \vec{e})e^{ik_0\Gamma} \quad (27)$$

Hasta este punto todo es análogo para el campo magnético. Recordando las ecuaciones de Maxwell escalares (3) y (7):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} = 0 &\Rightarrow \frac{-1}{ik_0} \nabla \cdot \vec{e} = \nabla \Gamma \cdot \vec{e} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 &\Rightarrow \frac{-1}{ik_0} \nabla \cdot \vec{h} = \nabla \Gamma \cdot \vec{h} \end{aligned} \quad (28)$$

Y utilizando la aproximación de onda corta ($\lambda_0 \rightarrow 0$) tenemos que k_0 será muy grande, el término de la izquierda en ambas ecuaciones será entonces muy pequeño y podemos tomarlo como nulo. Obtenemos entonces las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \nabla \Gamma \cdot \vec{e} &= 0 \\ \nabla \Gamma \cdot \vec{h} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Nos centraremos ahora en las ecuaciones vectoriales (18) y (19):

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= i\omega\mu\vec{H} \Rightarrow (\nabla \times \vec{e} + ik_0\nabla\Gamma \times \vec{e}) = i\mu\omega\vec{h} \\ \Rightarrow \frac{1}{k_0}\nabla \times \vec{e} &= -i\nabla\Gamma \times \vec{e} + i\mu\frac{\omega}{k_0}\vec{h}\end{aligned}\quad (30)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= i\omega\varepsilon\omega\vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} \Rightarrow (\nabla \times \vec{h} + ik_0\nabla\Gamma \times \vec{h}) = -i\varepsilon\omega\vec{e} \\ \Rightarrow \frac{1}{k_0}\nabla \times \vec{h} &= -i\nabla\Gamma \times \vec{h} - i\varepsilon\frac{\omega}{k_0}\vec{e}\end{aligned}\quad (31)$$

De nuevo tomando k_0 muy grande podemos anular el término de la izquierda en ambas expresiones y obtener así una forma muy compacta de estas ecuaciones.

$$\begin{aligned}\nabla\Gamma \times \vec{e} &= \mu c\vec{h} \\ \nabla\Gamma \times \vec{h} &= -\varepsilon c\vec{e}\end{aligned}\quad (32)$$

Vamos a multiplicar vectorialmente ahora la primera de estas ecuaciones por $\nabla\Gamma$, utilizando la misma relación vectorial que utilizamos para obtener la ecuación de ondas:

$$\nabla\Gamma \times (\nabla\Gamma \times \vec{e}) = \nabla\Gamma(\nabla\Gamma \cdot \vec{e}) - \vec{e}(\nabla\Gamma)^2 = \mu c\nabla \times \vec{h} = -\mu\varepsilon c^2\vec{e}\quad (33)$$

Recordando ahora el resultado obtenido en (29) podemos eliminar el primer término de la izquierda. Recordando ahora la definición de n :

$$n = c\sqrt{\mu\varepsilon}\quad (34)$$

Podemos obtener el equivalente en la óptica geométrica de la ecuación de ondas, la ecuación eikonal:

$$n^2 = (\nabla\Gamma)^2\quad (35)$$

Esta ecuación es la más importante de la óptica geométrica ya que permite deducir el resto de las leyes de esta aproximación, en particular nosotros la vamos a utilizar para obtener las ecuaciones diferenciales del rayo, que nos describen la trayectoria de un rayo de luz dentro de un medio inhomogéneo.

5. Ecuaciones diferenciales del rayo

Antes de poder obtener las ecuaciones que nos van a describir la propagación de la luz en el medio necesitamos una definición formal para el rayo. Llamaremos frentes de onda a las superficies que cumplen que Γ es constante. Definimos entonces el rayo de luz como aquella trayectoria que es siempre ortogonal al frente de ondas, llamando $\vec{s}$ al vector unitario tangente a esta trayectoria tendremos que:

$$\vec{s} = \frac{\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|} = \frac{\nabla\Gamma}{n} \quad (36)$$

Donde hemos utilizado la ecuación eikonal (35). Sea $\vec{r}$ el vector de posición de un punto del rayo y s la longitud de este medida desde un punto fijo entonces:

$$\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (37)$$

En la figura 2 podemos ver la trayectoria del rayo con respecto a los ejes cartesianos, así como los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ para un punto arbitrario de esta.

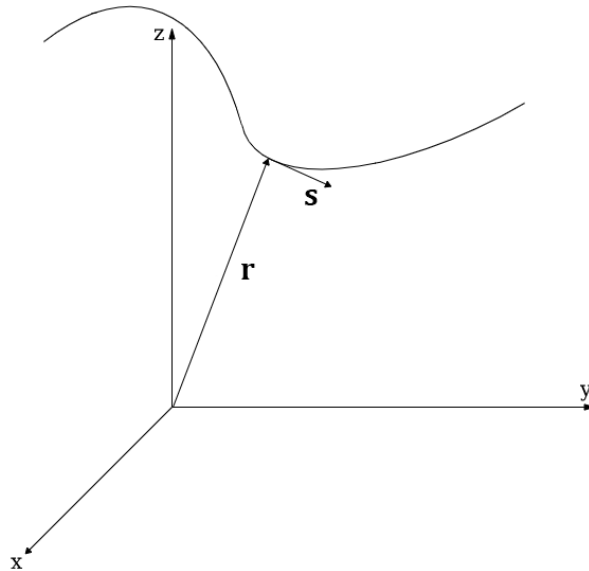


Figura 2: Esquema geométrico de la trayectoria del rayo

Juntando estas dos expresiones obtenemos la que se conoce como primera ecuación diferencial del rayo:

$$n \frac{d\vec{r}}{ds} = \nabla \Gamma \quad (38)$$

Esta ecuación nos da la trayectoria del rayo en función del camino óptico, pero lo que queremos es obtenerla en función del índice de refracción. Para esto estudiaremos la variación de esta ecuación a lo largo de la trayectoria.

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\nabla \Gamma) \quad (39)$$

Al estar trabajando en un sistema cartesiano nos interesa obtener la derivada con respecto a s en función de las coordenadas, para esto aplicamos regla de la cadena y obtenemos:

$$\frac{d}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \nabla = \frac{\nabla \Gamma}{n} \cdot \nabla \quad (40)$$

Donde hemos utilizado la primera ecuación diferencial del rayo. Si seguimos desarrollando el lado derecho de (39):

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{\nabla \Gamma}{n} \cdot \nabla (\nabla \Gamma) = \frac{1}{2n} \nabla (\nabla \Gamma)^2 = \frac{1}{2n} \nabla n^2 \quad (41)$$

Para llegar a este resultado hemos utilizado tanto la ecuación (35) como la siguiente identidad:

$$\nabla (\nabla A)^2 = 2 \nabla A \cdot \nabla (\nabla A) \Rightarrow \nabla A \cdot \nabla (\nabla A) = \frac{1}{2} \nabla (\nabla A)^2 \quad (42)$$

Obtenemos entonces el resultado que buscábamos, una ecuación que nos describe la trayectoria del rayo en función únicamente del índice de refracción, esta ecuación se conoce como segunda ecuación diferencial del rayo.

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (43)$$

6. Soluciones analíticas de la segunda ecuación del rayo

El objetivo final de este trabajo es encontrar un método numérico para resolver la trayectoria de los rayos en un medio en el que la ecuación (43) no tiene solución analítica. Para verificar que este método funciona vamos a tener que comparar la solución que nos proporciona con algún caso en el que dicha solución sea analítica. En la siguiente sección vamos a resolver alguno de estos casos para poder compararlos con nuestra solución numérica.

6.1. Estrategia general para estratificaciones planas

Integrar la segunda ecuación diferencial del rayo en general es imposible, vamos a buscar una forma alternativa. Nos vamos a centrar fundamentalmente en el estudio de estratificaciones planas, es decir, medios en los que el gradiente de índice es paralelo a una de las tres direcciones cartesianas, elegimos, por ejemplo, a coordenada y . En este caso $n(\vec{r}) = n(y)$, la estrategia que vamos a utilizar en estos problemas es la de buscar una cantidad conservada a lo largo de la trayectoria.

La cantidad que vamos a elegir es $n\vec{s} \times \vec{e}_y$, calculamos su derivada a lo largo de la trayectoria:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{s} \times \vec{e}_y) = \frac{d}{ds}(n\vec{s}) \times \vec{e}_y \quad (44)$$

Aplicando ahora (43) y teniendo en cuenta que el gradiente de índice es paralelo a la dirección $\vec{e}_y$:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{s} \times \vec{e}_y) = \nabla n \times \vec{e}_y = 0 \quad (45)$$

Por lo que concluimos que $n\vec{s} \times \vec{e}_y$ es constante a lo largo de la trayectoria y por tanto:

$$n\vec{s} \times \vec{e}_y = n \sin \varphi_y = \pm q \Rightarrow \sin \varphi_y = \pm \frac{q}{n} \quad (46)$$

Siendo φ_y el ángulo que forma el rayo con el eje y , el signo $\pm$ depende del signo del producto vectorial. Expresamos ahora dx/dy en función de este parámetro q :

$$\frac{dx}{dy} = \tan \varphi_y = \frac{\sin \varphi_y}{\cos \varphi_y} = \pm \frac{q/n}{\sqrt{1 - (1/n)^2}} \quad (47)$$

Integrando ahora esta ecuación podemos obtener la trayectoria de una forma más sencilla que trabajando directamente con la ecuación (43), la integral a resolver será:

$$x - x_0 = \pm \int_{y_0}^y \frac{q}{\sqrt{n^2 - q^2}} d\xi \quad (48)$$

Donde x_0 e y_0 son las coordenadas de entrada en el medio y $q = n(y) \sin \varphi_y = n(y_0) \sin \varphi_{y_0}$ es constante a lo largo de la trayectoria.

6.2. Perfil de índice $n^2 = n_0^2(1 + 2y/h)$

El primer caso que vamos a estudiar es un índice que varía como la raíz cuadrada de y , la integral a resolver es la ecuación (48) obtenida en la sección anterior. Si suponemos que el rayo parte del origen de coordenadas ($x_0 = y_0 = 0$, $q = n_0 \sin \varphi_0$):

$$x = \pm \int_0^y \frac{q}{\sqrt{n_0^2(1 + 2\xi/h) - q^2}} d\xi \quad (49)$$

Introducimos los siguientes cambios de variable:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2\xi}{h} \\ v &= 1 - \frac{q^2}{n_0^2} = \cos^2 \varphi_0 \end{aligned} \quad (50)$$

La integral (49) nos queda entonces de la siguiente forma:

$$x = \pm \frac{h}{2} \sin \varphi_0 \int_0^{2y/h} \frac{1}{\sqrt{u+v}} du = \pm h \sin \varphi_0 \left(\sqrt{\frac{2y}{h} + \cos^2(\varphi_0) - \cos \varphi_0} \right) \quad (51)$$

O lo que es lo mismo, despejando $y(x)$:

$$y(x) = \frac{x^2}{2h \sin^2 \varphi_0} \pm \frac{x}{\tan \varphi_0} \quad (52)$$

Obtenemos trayectorias parabólicas.

6.3. Perfil de índice $n = n_0 + ax$

El siguiente caso que vamos a estudiar es el de un índice que tenga variación lineal con la coordenada x . Para esto podemos aprovechar la misma cantidad conservada que en el ejemplo anterior, basta con hacer los cambios de variable $y \rightarrow x$, $x \rightarrow -y$, cambiamos el signo en una de ellas para mantener el mismo signo para el producto vectorial. El ángulo φ será ahora el formado con el eje x . De nuevo supondremos que partimos del origen de coordenadas. La integral a resolver será:

$$-y = \mp \int_0^x \frac{q}{(n_0 + a\xi)^2 - q^2} d\xi = \mp \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n_0 + a\xi}{q}\right)^2 - 1}} d\xi \quad (53)$$

Introducimos el cambio de coordenadas:

$$u = \frac{n_0 + a\xi}{q} \Rightarrow du = \frac{a}{q} d\xi \quad (54)$$

La ecuación (53) tras este cambio de coordenadas nos queda:

$$y = \mp \frac{q}{k} \int_{\frac{n_0}{q}}^{\frac{n_0 + kx}{q}} \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} = \mp \frac{q}{k} \left[\ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) \right]_{\frac{n_0}{q}}^{\frac{n_0 + ax}{q}} \quad (55)$$

Deshaciendo el cambio de variable y sustituyendo el valor de q :

$$y(x) = \mp \frac{n_0 \sin \varphi_0}{k} \ln \left(\frac{n_0 + ax + \sqrt{n_0^2 \cos^2 \varphi_0 + 2n_0 kx + k^2 x^2}}{n_0(1 + \cos \varphi_0)} \right) \quad (56)$$

7. Integración numérica de la segunda ecuación diferencial del rayo

Nuestra intención es resolver numéricamente la ecuación (43), para esto vamos a seguir el método de A. Sharma et al. [1]. Primero vamos a reescribirla en una forma más compacta y cómoda de integrar. En primer lugar definiremos la variable τ como:

$$\tau = \int \frac{ds}{n} \Rightarrow d\tau = \frac{ds}{n} \quad (57)$$

Podemos reescribir entonces la ecuación (43) de la siguiente forma:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = n \nabla n \quad (58)$$

Definiremos también un vector $\vec{T}$ del rayo como:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = n \left(\frac{d\vec{r}}{dx} \hat{u}_x + \frac{d\vec{r}}{dy} \hat{u}_y + \frac{d\vec{r}}{dz} \hat{u}_z \right) \quad (59)$$

Es fácil ver que las componentes de este vector serán los cosenos de los ángulos que forma el rayo con los ejes cartesianos.

La ecuación vectorial (58) se compone de tres ecuaciones escalares, una para cada coordenada. Para resolver las tres ecuaciones a la vez vamos introducir tres matrices unidimensionales R , T y D . R es equivalente al vector de posición $\vec{r}$ y T al vector del rayo $\vec{T}$, definimos D como:

$$D = n \begin{pmatrix} \partial n / \partial x \\ \partial n / \partial y \\ \partial n / \partial z \end{pmatrix} \quad (60)$$

Podemos reescribir de nuevo nuestra ecuación en una forma aún más adecuada para nuestro método de integración:

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} = \frac{dT}{d\tau} = D \quad (61)$$

Hemos conseguido reducir nuestra ecuación inicial a una ecuación de primer orden. Para resolver esta ecuación vamos a utilizar un método de Runge-Kutta de orden cuatro [3] con condiciones iniciales $R = R_0$, $T(R_0) = T_0$, ambas cantidades conocidas. En cada paso utilizaremos el T_n anterior para obtener el T_{n+1} que a su vez nos servirá para obtener el R_{n+1} , repetiremos este proceso las veces que sea necesario para obtener la trayectoria del rayo en el medio.

Teniendo en cuenta que nuestro medio es isótropo podemos llegar a la siguiente expresión para T_{n+1} y R_{n+1} :

$$T_{n+1} = T_n + \frac{1}{6}(A + 4B + C) \quad (62)$$

$$R_{n+1} = R_n + \frac{1}{6}(A + 2B) \quad (63)$$

Donde A, B y C son:

$$A = \Delta\tau D(R_n), \quad (64)$$

$$B = \Delta\tau D(R_n + \frac{\Delta\tau}{2}T_n + \frac{1}{8}\Delta\tau A), \quad (65)$$

$$C = \Delta\tau D(R_n + \Delta\tau T_n + \frac{1}{2}\Delta\tau B), \quad (66)$$

y $\Delta\tau$ es la longitud de extrapolación elegida para el algoritmo. Cuanto menor sea esta $\Delta\tau$ mayor será la precisión, pero también supondrá un mayor tiempo de computación. En nuestro caso este método se ha implementado desde cero en Python, se puede ver un ejemplo de cómo en el anexo A. Los tiempos de computación típicos son de alrededor de un segundo para simulaciones sencillas de un solo rayo como las expuestas en la sección siguiente e inferiores a treinta segundos para simulaciones más complejas con alrededor de cien rayos.

8. Comparación entre las soluciones analítica y numérica

Utilizando el método descrito en la sección anterior hemos obtenido una solución numérica para los casos discutidos en las secciones 6.2 y 6.3. En esta sección vamos a comparar los resultados obtenidos con las soluciones exactas, primero de forma gráfica y luego explicitando el error relativo de la coordenada vertical en función de $d\tau$.

En la figuras 3 y 4 se representan en línea continua las soluciones analíticas y, marcados sobre esta, los puntos obtenidos mediante el método numérico. Empezaremos con el caso de la sección 6.2 en la que el índice dependía de la raíz cuadrada de la coordenada. Hemos utilizado un $d\tau$ de 0.05 metros y un ángulo de entrada de 30° con el eje y :

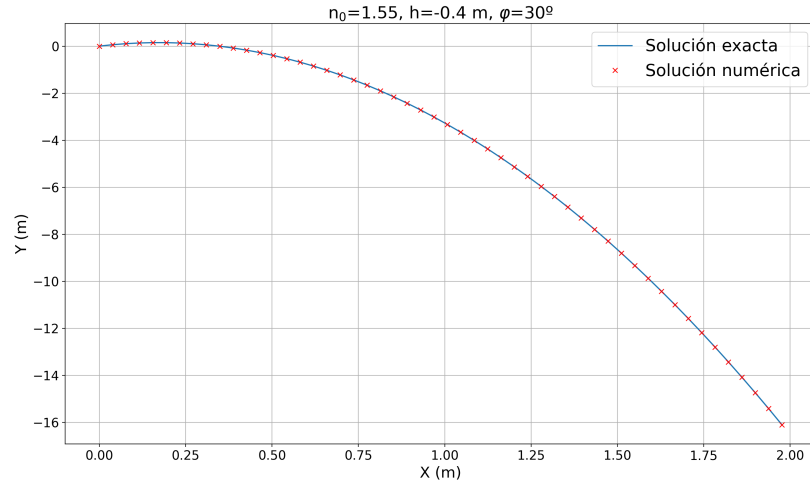


Figura 3: Comparación entre soluciones analítica y numérica para el perfil de índice de la sección 6.2

En este caso el error relativo obtenido a la salida es de $1,15 \times 10^{-16}$, de forma casi independiente del valor de $d\tau$ en el rango estudiado (0.5-0.05 metros). Podemos concluir que nuestra solución numérica funciona muy bien para este perfil de índice.

Pasamos ahora al caso de la sección 6.3, hemos utilizado el mismo $d\tau$ del ejemplo anterior y un ángulo de 45° con el eje x :

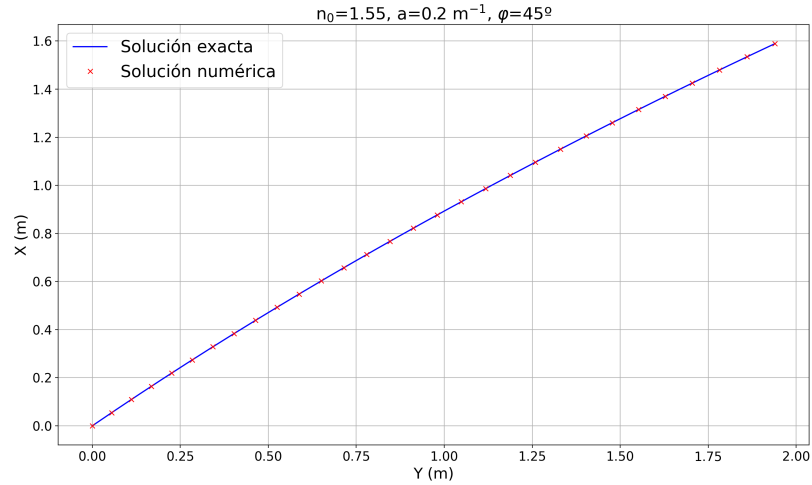


Figura 4: Comparación entre soluciones analítica y numérica para el perfil de índice de la sección 6.3

En el cuadro 1 se muestra la dependencia del error relativo en la coordenada vertical

x con el valor de $d\tau$.

$d\tau$ (m)	Error relativo
0.5	6.92×10^{-6}
0.25	4.25×10^{-8}
0.1	1.08×10^{-9}
0.05	6.72×10^{-11}

Cuadro 1: Errores relativos a la salida para el perfil de índice de la sección 6.3

Para un $d\tau$ igual o inferior a 0.1 metros la convergencia en este caso es también excelente.

9. Estudio en aproximación paraxial de un caso con simetría cilíndrica

Nos centraremos en las siguientes dos secciones en un caso que solo tiene solución analítica sencilla en aproximación paraxial, es decir, para rayos que forman ángulos muy pequeños con el eje. En esta sección nos ocuparemos de dicha solución.

Vamos a estudiar la trayectoria que siguen rayos que inciden paralelos al eje z al atravesar un medio de espesor d y perfil de índice $n(\rho) = n_0 + n_1\rho^2$ (con $n_1\rho^2 \ll n_0$) donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es el radio polar. Las trayectorias están contenidas en un plano que contiene el eje $\rho = 0$, la estratificación admite soluciones helicoidales para los rayos que inciden de forma oblicua, pero estas no serán discutidas en este trabajo. Nos encontramos en aproximación paraxial, por lo que podemos suponer que la longitud de la trayectoria será aproximadamente igual a la distancia recorrida a lo largo del eje z , por tanto $ds \approx dz$. Si introducimos esto en la ecuación (43) obtenemos:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{s}) \approx n(\rho)\frac{d}{dz}\vec{s} = \nabla n(\rho) = \frac{d}{d\rho}n(\rho)\hat{u}_\rho \quad (67)$$

Recordando ahora que $\vec{s}$ es el vector tangente a la trayectoria podemos utilizar la ecuación (37) para reescribir la expresión anterior en función del vector $\vec{r}$.

$$\frac{d^2}{dz^2}\vec{r} = \frac{1}{n(\rho)}\frac{d}{d\rho}n(\rho)\hat{u}_\rho \quad (68)$$

Y teniendo en cuenta la definición del vector de posición en coordenadas cilíndricas $\vec{r} = \rho\hat{u}_\rho + z\hat{u}_z$ podemos separar la ecuación vectorial anterior en dos ecuaciones escalares

para ρ y para el ángulo azimutal ϕ :

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} = \frac{d}{d\rho} \ln[n(\rho)] \quad (69)$$

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \quad (70)$$

La ecuación (70) se puede resolver de forma inmediata:

$$\phi(z) = \phi_0 + z \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=0} \quad (71)$$

Y como el rayo incide paralelo al eje tendremos que la derivada de ϕ con respecto a z es nula en $z = 0$, por tanto la expresión se reduce a $\phi = \phi_0$. Pasamos ahora a la ecuación para la coordenada radial:

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} = \frac{d}{d\rho} \ln[n(\rho)] = \frac{2n_1\rho}{n_0 + n_1\rho^2} \approx \frac{2n_1}{n_0} \rho \quad (72)$$

Donde hemos aplicado que $n_1\rho^2 \ll n_0$. Esta es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, cuya solución tiene la siguiente forma exponencial:

$$\rho(z) = A_1 \exp\left(\sqrt{\frac{2n_1}{n_0}} z\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{2n_1}{n_0}} z\right) \quad (73)$$

Para determinar A_1 y A_2 impondremos las condiciones de contorno del problema, que el rayo parte con una altura h y paralelo al eje z , de estas condiciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho(z=0) = h &\Rightarrow A_1 + A_2 = h \\ \left. \frac{d\rho}{dz} \right|_{z=0} = 0 &\Rightarrow A_1 - A_2 = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

Resolviendo el sistema obtenido llegamos a la conclusión de que $A_1 = A_2 = h/2$, por tanto la ecuación (73) nos queda de la siguiente forma:

$$\rho(z) = \frac{h}{2} \left[\exp\left(\sqrt{\frac{2n_1}{n_0}} z\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{2n_1}{n_0}} z\right) \right] \quad (75)$$

Estas exponenciales serán imaginarias si $n_1 < 0$ o reales si $n_1 > 0$, luego:

$$\rho(z) = \begin{cases} h \cos \left(\sqrt{\frac{2n_1}{n_0}} z \right) & \text{si } n_1 < 0 \\ h \cosh \left(\sqrt{\frac{2n_1}{n_0}} z \right) & \text{si } n_1 > 0 \end{cases} \quad (76)$$

En el caso en el que $n_1 < 0$ tendremos rayos convergentes y en el contrario divergentes. Vamos a estudiar ahora el ángulo de salida de los rayos tras atravesar un espesor del medio d , recordando que estamos en aproximación paraxial podemos hallar este ángulo como la derivada de ρ con respecto a z . En la figura 5 se muestra un esquema de cómo lo obtenemos.

$$\theta \approx \tan \theta = \left. \frac{d\rho}{dz} \right|_{z=d} = h \sqrt{\frac{2n_1}{n_0}} \sin \left(\sqrt{\frac{2n_1}{n_0}} d \right) \approx h \frac{2n_1}{n_0} d \quad (77)$$

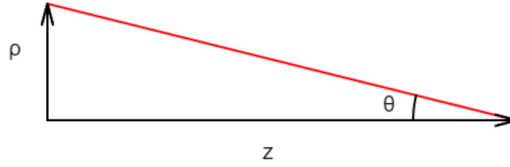


Figura 5: Esquema geométrico de la obtención del ángulo de salida a partir de las coordenadas z y ρ

Supondremos que nuestro medio está sumergido en aire ($n = 1$), por lo que la trayectoria a partir de aquí será recta pero aún tenemos que tener en cuenta la refracción a la salida del medio, para esto utilizamos la ley de Snell de la refracción. Para una refracción entre dos medios a y b :

$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b \quad (78)$$

Aplicamos esto entre nuestro medio y el aire:

$$n(\rho = d) \sin \theta = 1 \cdot \sin \theta' \Rightarrow n(\rho = d) \theta = \theta' \Rightarrow \theta' = 2hn_1d \quad (79)$$

Con este ángulo obtenemos la trayectoria a la salida:

$$\rho(z) = \rho(d) + \theta' z \approx h(1 + 2n_1 dz) \quad (80)$$

Como hemos dicho antes para el caso en el que n_1 es negativo los rayos convergerán, es decir, se acercarán al eje. Definiremos la focal como la distancia a la que el radio polar se anula.

$$\rho(f') = 0 \Rightarrow f' = -\frac{1}{2n_1 d} \quad (81)$$

Como vemos, f' es independiente de la altura en esta aproximación. Si estudiásemos el caso $n_1 > 0$ veríamos que también tiene sentido definir una focal, pero que esta tendría valor negativo, esta distancia corresponde al punto en el que se cortan las prolongaciones de las trayectorias a la salida del medio, exactamente igual que para el caso de una lente divergente. La trayectoria descrita en esta sección se muestra en la figura 6

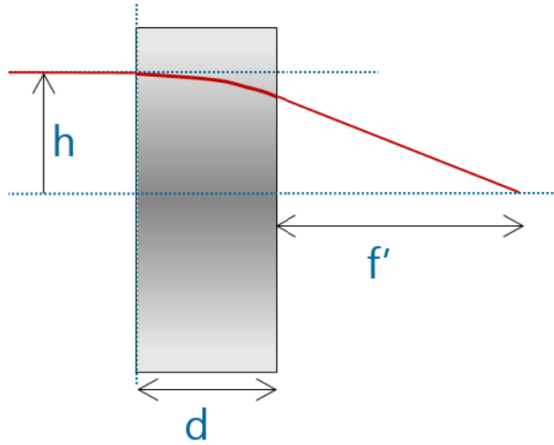


Figura 6: Trayectoria de un rayo que parte con altura h , atraviesa un espesor d de medio inhomogéneo y continúa por el aire hasta cortar al eje

10. Estudio fuera de la aproximación paraxial

En la sección anterior hemos resuelto las trayectorias de un medio de estratificación cilíndrica que solo tenía solución analítica sencilla dentro de la aproximación paraxial. En esta sección vamos a utilizar nuestro método numérico para estudiar qué ocurre cuando nos salimos de esta aproximación.

Expresamos la condición de la aproximación paraxial en función de los ángulos, pero por mayor sencillez a la hora de realizar los cálculos vamos a redefinirla en función de las distancias. Para que el ángulo que forma el rayo con el eje sea pequeño existen dos posibilidades, la primera es que la distancia focal sea muy grande, en nuestro caso vamos a suponer que es mucho mayor que el espesor del medio recorrido por el rayo d . La otra

posibilidad es que el rayo parta de una altura pequeña con respecto al eje. Estudiaremos ahora qué ocurre si no se cumplen estas aproximaciones.

10.1. Dependencia de la distancia focal con el espesor del medio

Para el primer caso vamos a variar el espesor del medio, en la aproximación paraxial obteníamos una distancia focal única para todos los rayos, vamos a comparar ahora esta distancia con la obtenida aplicando nuestro método. Los parámetros que utilizaremos para el índice son $n_0 = 1,55$ y $n_1 = -0,02 \text{ cm}^{-2}$.

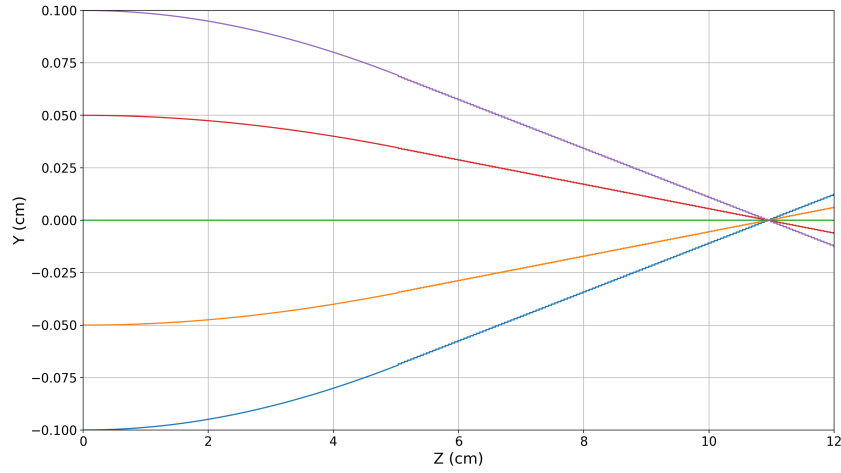


Figura 7: Disposición y trayectorias de los rayos tras atravesar un medio de espesor $d = 5 \text{ cm}$

Utilizaremos cinco rayos que parten equidistantes con alturas de entre $y = -0,1 \text{ cm}$ e $y = 0,1 \text{ cm}$ (como se muestra en la figura 7). Obtendremos para cada uno la distancia a la que corta el eje z para poder comparar con la solución dada por la aproximación paraxial. Al tener nuestros rayos simetría respecto al eje en cada punto de corte con el eje coinciden dos rayos (los que parten con altura $\pm y$), además hay un rayo que incide desde $y = 0$, por lo que el gradiente de índice es nulo para su trayectoria y no se desvía. De los cinco rayos iniciales obtenemos dos distancias focales z_1 y z_2 . Calcularemos z_{num} , el punto medio entre estas para compararlo con la distancia focal obtenida mediante la ecuación (81) z_{par} y calcular el error relativo porcentual. En el cuadro 2 presentamos los resultados obtenidos.

Espesor del medio (cm)	z_{num} (cm)	z_{par} (cm)	Δz
0.01	2499.97	2500	0.001 %
0.05	500.03	500	0.005 %
0.1	250.05	250	0.022 %
0.25	125.16	100	25.160 %
0.5	71.74	50	43.485 %
1	39.11	25	56.429 %

Cuadro 2: Dependencia de la distancia focal con el espesor del medio

Como vemos la aproximación nos da un buen resultado para espesores de algunos milímetros pero empieza a fallar a medida que nos alejamos de dicho valor.

10.2. Dependencia de la distancia focal con la altura del rayo

En la aproximación paraxial obteníamos que todos los rayos cortaban al eje en el mismo punto independientemente de su altura. Como observaremos a continuación esto es solo cierto para rayos que parten con alturas sobre el eje pequeñas. En las figuras 8 y 9 podemos observar el efecto que tiene aumentar la altura sobre el eje en un medio de espesor $d = 3$ cm con los mismos n_0 y n_1 de la sección anterior.

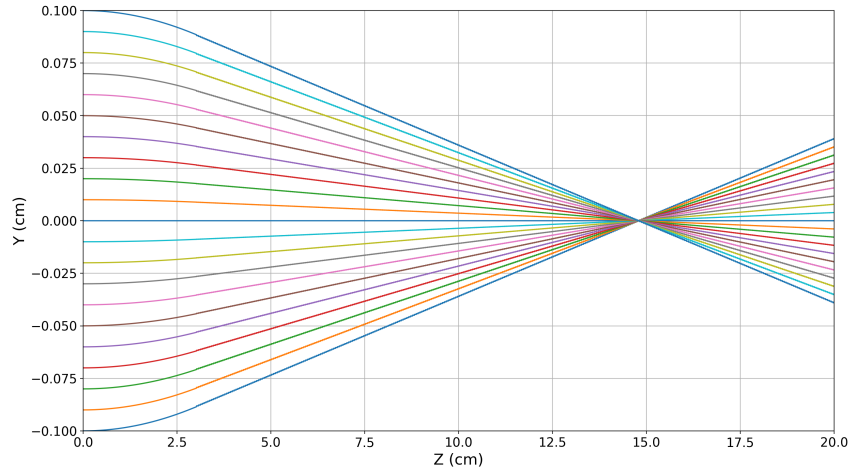


Figura 8: Trayectorias para rayos de altura máxima $y = 0,1$ cm

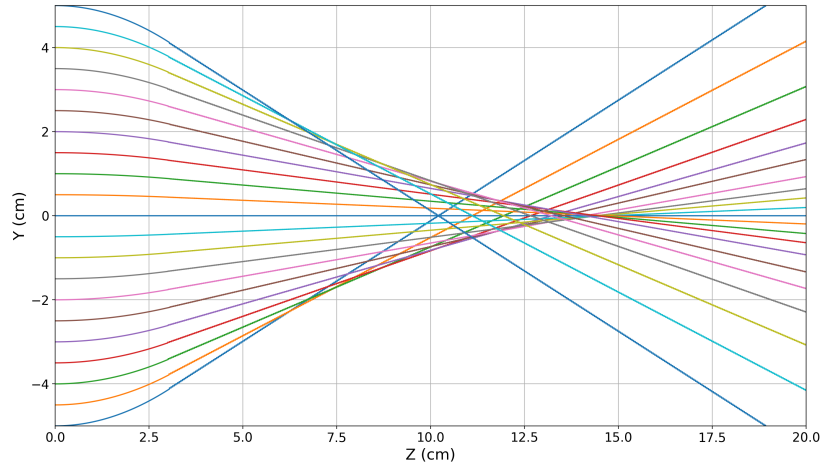


Figura 9: Trayectorias para rayos de altura máxima $y = 5$ cm

Este efecto nos puede recordar bastante a lo que sucede con la aberración esférica de una lente convencional, en la figura 10 se muestra este efecto.

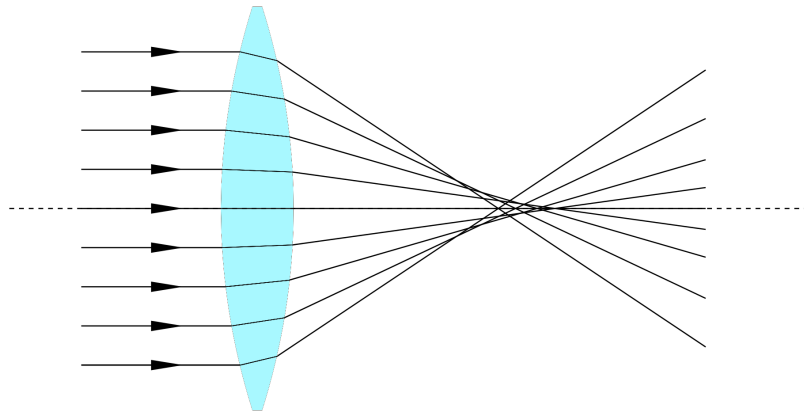


Figura 10: Aberración esférica en una lente convencional ¹

Para los siguientes resultados hemos utilizado un medio de espesor $d = 0,1$ cm con los mismos parámetros que en la sección anterior. Hemos calculado las trayectorias seguidas por rayos que parten a distintas alturas y obtenido los cortes de estas con el eje z . La distancia focal f' la hemos obtenido de forma similar a la sección anterior, hallando el valor medio de todos los cortes con el eje. Al no tener ahora un valor perfectamente definido para la distancia focal, sino más bien una longitud en la que convergen los rayos hemos

¹https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_aberration.svg

calculado también la longitud focal $\Delta f' = z_{m\acute{a}x} - z_{m\grave{i}n}$, siendo $z_{m\acute{a}x}$ y $z_{m\grave{i}n}$ los puntos de corte más y menos alejados del origen de coordenadas respectivamente. En la tabla 3 se muestran los resultados obtenidos.

$y_{m\acute{a}x}$ (cm)	f' (cm)	$\Delta f'$ (μm)
0.1	250.055	0.40
0.5	250.054	9.99
1	250.059	498.54
5	250.061	959.75

Cuadro 3: Dependencia de la distancia focal con la altura del rayo

Hay que tener en cuenta que el paso espacial utilizado en el código es de $d\tau = 100 \mu\text{m}$, por lo que cualquier longitud inferior a este valor debe considerarse nula. Esto no supone demasiado problema ya que longitudes focales de este orden de magnitud solo aparecen para casos en los que la aproximación paraxial se considera válida.

La distancia focal se mantiene constante (salvo pequeñas desviaciones), pero la longitud focal es mayor a medida que aumenta la altura del rayo.

Podemos ahora fijarnos en cómo se distribuyen los rayos a lo largo de la longitud focal, para esto hemos hallado el punto de corte con el eje de cien rayos que parten con alturas uniformemente distribuidas de manera simétrica respecto al eje z y hemos representado la desviación con respecto a f' de dichos cortes en un histograma. En la figura 11 se muestran los resultados obtenidos para una altura máxima de $y = 5 \text{ cm}$.

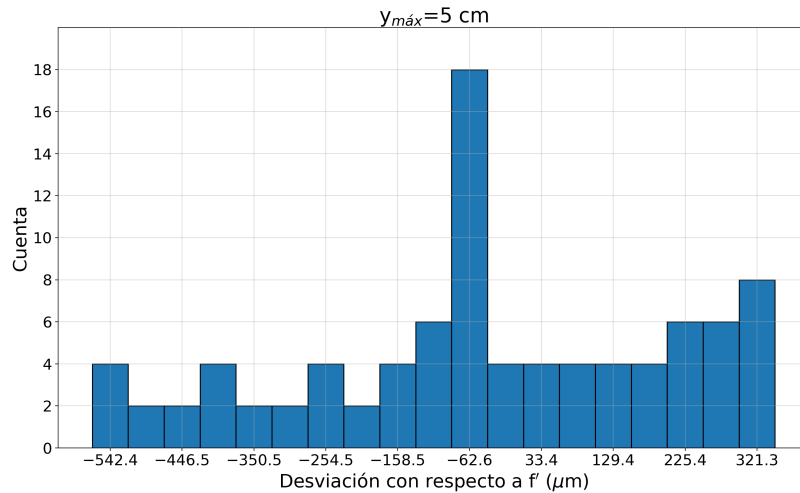


Figura 11: Distribución de cortes con el eje para cien rayos distribuidos entre $y = \pm 5 \text{ cm}$

Como vemos la distribución es asimétrica y no es uniforme, siendo mayor la cola para valores negativos de la distribución.

Conclusiones

En este trabajo se ha implementado un método numérico para resolver la segunda ecuación diferencial de rayo que permite estudiar la propagación de la luz por medios con un perfil de índice inhomogéneo de forma sencilla y sin un gran esfuerzo computacional. Aun estando codificado en un lenguaje de programación lento como es Python, este método obtiene resultados precisos en unos pocos segundos. Esto sumado a lo sencillo que es editar el código para trabajar con distintos perfiles de índice se traduce en una herramienta muy versátil para el estudio de medios inhomogéneos, a nivel tanto cualitativo como cuantitativo.

Centrándonos ahora en el caso de la lente de gradiente de índice estudiado en las secciones 9 y 10, el método muestra una clara discrepancia con respecto a los valores obtenidos para la distancia focal dentro de la aproximación paraxial para lentes gruesas, lo que nos permite establecer un límite para la efectividad de esta. Si nos fijamos en los resultados podemos observar que el error relativo aumenta mucho para espesores superiores a 0.1 cm, el valor de n_1 utilizado en esta simulación es de $-0,02 \text{ cm}^{-2}$, por lo que concluimos que en este caso, la aproximación paraxial es válida para espesores menores que $(50\sqrt{n_1})^{-1}$.

Definiendo la distancia focal f' como el promedio de las focales individuales de todos los rayos se observa que esta no depende de la altura, pero la longitud focal Δf sí que lo hace, aumentando de forma aproximadamente lineal con y . Este fenómeno resulta bastante similar al producido por la aberración esférica en una lente convencional.

Con respecto a la distribución de los rayos a lo largo de la longitud focal destaca sobre todo su asimetría. Encontrar una hipótesis sobre por qué ocurre esto requeriría un análisis con mayor detalle que el que se hace en este trabajo, principalmente centrado en mostrar la versatilidad del método numérico utilizado.

Podemos concluir que el método utilizado para el estudio de este tipo de medios es muy efectivo a la hora de estudiar perfiles de índice convencionales con expresión analítica sencilla, pero su potencial va aún más allá. Al solo necesitar los valores del índice y su gradiente en cada punto a estudiar se abre la puerta al estudio de distribuciones de índice más complejas.

Conclusions

In this work we have implemented a numerical method to solve the second differential ray equation that allows us to study the propagation of light through media with an inhomogeneous index profile in a simple way and without great computational effort. Even being coded in a slow language such as Python, this method obtains accurate results in a few seconds. Adding to how easy it is to edit the code to work with different index profiles makes this a highly versatile tool for the study of inhomogeneous media, both qualitatively and quantitatively.

Focusing now on the case of the gradient index lens studied in sections 9 and 10, the method shows a clear discrepancy with respect to the values obtained for the focal distance within the paraxial approximation in the case of a thick lens, allowing us to obtain a limit for the effectiveness of such approximation. If we look at the results we can observe that the relative error increases for thicknesses larger than 0,1 cm, the value of n_1 used for this simulation is $-0,002 \text{ cm}^{-2}$, so we can conclude that in this case the paraxial approximation is valid for thicknesses smaller than $(50\sqrt{n_1})^{-1}$.

Defining the focal distance f' as the average of the individual focals of all rays shows that it does not depend on height, but the focal length Δf does, increasing approximately linearly with y . This phenomenon is quite similar to that produced by the spherical aberration of a conventional lens.

With respect to the distribution of rays along the focal length its asymmetry stands out above all. Finding a hypothesis as to why this occurs would require a more in-depth analysis than the one done in this work, mainly focused on showing the versatility of the numerical method utilized.

We can conclude that the method used for the study of this type of media is greatly effective when studying conventional index profiles with a simple analytical expression, but its potential goes even further. By only needing the values of the index and its gradient at each point studied, it opens the door to the study of more complex index distributions.

Referencias

- [1] Anurag Sharma, D. Vizia Kumar, and A. K. Ghatak. Tracing rays through graded-index media: a new method. *Appl. Opt.*, 21(6):984–987, Mar 1982.
- [2] David J. Griffiths. 7.3.5 Maxwell’s Equations in Matter. In *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2019.
- [3] William H. Press and William T. Vetterling. 17.1 Runge-Kutta method. In *Numerical recipes*. Cambridge Univ. Press, 2007.
- [4] Área de Óptica de la Universidad de Salamanca. Apuntes de la asignatura ”Óptica 2”.
- [5] Max Born, Emil Wolf, Avadh Behari Bhatia, Phillip C. Clemmow, Dennis Gabor, Alexander Rawson Stokes, P.A. Wayman, W.L. Wilcock, and Peter L. Knight. Foundations of geometrical optics. In *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 1999.

A. Ejemplo de código para la resolución numérica de la segunda ecuación diferencial del rayo

Este programa resuelve numericamente la segunda ecuación diferencial del rayo en un medio con un perfil de índice como el de la sección 6.2. Al ejecutarlo genera un archivo out.txt que contiene las coordenadas cartesianas de la trayectoria en tres columnas x, y, z.

```
import numpy as np

# Definimos el índice, su gradiente y el vector D
def n(x,y,z):
    return n0*np.sqrt(1+2*y/h)
def dn(x,y,z):
    return np.array([0,(n0/(h*np.sqrt(1+2*y/h))),0])
def D(x,y,z):
    return n(x,y,z)*dn(x,y,z)

d=2                                # Distancia (en metros) total
phi=np.pi/6                       # Angulo (en radianes) de entrada
dt=0.05                            # Paso espacial

n0=1.55                            # Constantes del medio
h=-0.4

R=np.array([0.0,0.0,0.0]) # Condiciones iniciales
T=n(R[0],R[1],R[2])*np.array([np.sin(phi),np.cos(phi),0.0])

f=open('out.txt', 'w')

# Bucle principal del programa
while R[0]<d:

    A=dt*D(R[0],R[1],R[2])

    B=dt*D(R[0]+(dt/2)*T[0]+(dt/8)*A[0],
           R[1]+(dt/2)*T[1]+(dt/8)*A[1],
           R[2]+(dt/2)*T[2]+(dt/8)*A[2])

    C=dt*D(R[0]+dt*T[0]+(dt/2)*B[0],
           R[1]+dt*T[1]+(dt/2)*B[1],
           R[2]+dt*T[2]+(dt/2)*B[2],)

    f.write(str(R[0])+ ' '+str(R[1])+ ' '+str(R[2])+'\n')
    for j in range(3):
        R[j]=R[j]+dt*(T[j]+(A[j]+2*B[j])/6)
        T[j]=T[j]+1/6*(A[j]+4*B[j]+C[j])

f.close()
```