Universidad de Salamanca

Facultad de Ciencias

Programa de Doctorado Física Fundamental y Matemáticas

Tesis doctoral

Procesos de renovación compuestos con deriva y correlación

Doctorando:
Juan Antonio
Vega Coso

Director:
Dr. Francisco Javier
Villarroel Rodríguez

Salamanca, Julio 2022

Mediante este documento, yo, D. Francisco Javier Villarroel Rodrígez, catedrático de la Universidad de Salamanca, del Dpto. de Estadística e investigación operativa, con DNI. 07836630R, certifico que la presente tesis doctoral titulada "Procesos de renovación compuestos con deriva y correlación" ha sido realizada por D. Juan Antonio Vega Coso con DNI. 11946444Z bajo mi supervisión y autorizo su presentación.

VILLARROEL RODRIGUEZ FRANCISCO JAVIER - 07836630R

Firmado digitalmente por VILLARROEL RODRIGUEZ FRANCISCO JAVIER - 07836630R
Fecha: 2022.07.14 19:13:14 +01'00'

D. Francisco Javier Villarroel Rodríguez

Salamanca, Julio 2022

Agradecimientos.

Deseo expresar mi agradecimiento a todas las personas que han contribuido a que esta aventura, la elaboración de esta tesis doctoral, haya sido posible: a todos los grandes matemáticos que me han proporcionado la motivación, la ilusión y las herramientas necesarias; a mis amigos, que me han "soportado" los desplantes y ausencias; a la familia, que ha estado ahí empujando para que el barco llegue al puerto sin hundirse; y por supuesto, a mi director de tesis, el profesor Dr. Javier Villarroel, que con sus consejos y guia firme ha conseguido que la navegación sea placentera y el puerto de llegada bueno... Muchas gracias a todos.

Índice general

NOTACIÓN

$<$	" menor que"	$>$	"mayor que"
$\leq$	"menor o igual que"	$\geq$	"mayor o igual que"
$\subset$	"incluido en"	$\supset$	" contiene a"
$\subseteq$	" incluido o igual que"	$\supseteq$	" contiene o es igual a"
$\equiv$	" equivalente a"	$\approx$	"aproximadamente igual que"
$\in$	" pertenece a"	$\notin$	"no pertenece a"
$:$	"verifica "	$\neq$	"distinto de"
$\cup$	"unión"	$\cap$	" intersección"
$-$	"diferencia de conjuntos"	Δ	"diferencia simétrica de conjuntos"
$\vee$	" o "	$\wedge$	"y "
$\Rightarrow$	" implica"	$\Leftrightarrow$	" si y sólo si "
"sii "	" si y sólo si "	$\mathbb{R}$	"conjunto de los números reales"
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}\times\overset{n}{\cdots}\times\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$
$\mathbb{N}$	"conjunto de los números naturales"	$\mathbb{Z}$	"conjunto de los números enteros"
$\mathbb{Q}$	"conjunto de los números racionales"	$\mathbb{C}$	"conjunto de los números complejos"
$\Re(z)$	"parte real de z"	$\Im(z)$	"parte imaginaria de z"
$\exists$	"existe "	$\nexists$	"no existe"
$\forall$	"para todo"	∞	"infinito"
$\neg$	"no"	$/$	" tal que"
$\perp$	" perpendicular a(v.a. independientes)"	$\parallel$	" paralelo a "
$\nparallel$	" no paralelo a"	$\therefore$	"por lo tanto"
$\because$	" debido a"	$\emptyset$	"conjunto vacío"
$\rightsquigarrow$	"sigue"	$\square$	"c.q.d."
$\delta_a(t),\ a\in\mathbb{R}$	"delta de Dirac"	$\int$	"integral de Lebesgue"
$\mathscr{L}^n$	"σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$"	ℓ^n	"medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$"
$L^1(\mu)$	"Lebesgue integrable respecto de μ"	$\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$	"σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$"
Ω	"espacio muestral"	$\mathscr{A}$	"σ-álgebra de sucesos"
$\mathbb{P}$	"medida de probabilidad"	$\mathbb{E}$	"esperanza matemática"
$\bullet \ll \bullet$	"$\bullet$ absolut. conti. respecto $\bullet$"	$\bullet \prec \bullet$	"$\bullet$ singular respecto $\bullet$"
$\mathbb{P}(\bullet/*)$	"probabilidad condicionada"	$\mathbb{E}(\bullet/*)$	"Esperanza condicionada"
$\mu.c.t.$	"μ casi todo"	$c.s.$	"$\mathbb{P}$ casi seguro'
lím	"límite"	lím sup	"límite superior"
lím inf	"límite inferior"	máx	"máximo"
mín	"mínimo"	sup	"supremo"
ínf	"ínfimo"	sen	"seno"
cos	"coseno"	tan	"tangente"
$\mathscr{F}$	"transformada de Fourier"	$\mathscr{F}^{-1}$	"transformada inversa de Fourier"
$\mathcal{L}$	"transformada de Laplace"	$\mathcal{L}^{-1}$	"transformada inversa de Laplace"
$\mathscr{Z}$	"transformada Z"	$\mathscr{Z}^{-1}$	"transformada Z inversa"
$\bar{f}$	"transformada de Fourier de f"	$\hat{f}$	"transformada de Laplace de f"

Capítulo 1

Introducción.

Con el presente trabajo pretendemos estudiar los denominados *"procesos de renovación compuestos con deriva"* en tiempo continuo ($T \subset \mathbb{R}$). La teoría de los procesos estocásticos tiene su origen en estudios relacionados con el movimiento browniano, con las fluctuaciones y ruidos en sistemas físicos, con la economía.... Uno de los primeros estudios matemáticos de estos procesos fue el llevado a cabo por el matemático Louis Bachelier, en 1900, el cual presentó en su tesis [5] un modelo estocástico para el estudio de los mercados bursátiles. Este trabajo pionero, sin embargo, durante mucho tiempo permaneció ignorado. Con posterioridad, en 1905, Albert Einstein ([37]) con su investigación sobre el movimiento browniano, Smoluchowski (1906), Schottky (1918),... hicieron uso de modelos estocásticos para el estudio de diversos problemas físicos, de tal modo que se puede considerar la teoría de los procesos estocásticos como el fundamento matemático de la física estadística. Una introducción muy sistemática sobre los procesos estocásticos y la relación con el estudio de diversos fenómenos (no sólo físicos) es el interesante libro de Emmanuel Parzen [122].

El estudio matemático riguroso de los procesos estocásticos comenzó con la monografía de Andrei Kolmogorov [77], publicada en el año 1933 en ruso. En dicha monografía desarrolla la teoría de la probabilidad desde un punto de vista axiómatico, "exáctamente del mismo modo que la geometría y el álgebra" (palabras textuales, capítulo 1 de su fundamental trabajo). A partir de los axiomas Kolmogorov proporciona una definición rigurosa y precisa de proceso estocástico; su punto de vista subraya el hecho de que un proceso estocástico no es otra cosa que una variable aleatoria valorada en un espacio de funciones. Posteriormente Joseph Doob en su libro "Stochastic processes" [32] desarrolla esta idea definiendo un proceso estocástico como "cualquier familia de variables aleatorias $\{X_t,\ t \in T\}$", puntualizando el hecho de que no hay ninguna razón matemática para restringir el conjunto T a estar formado por números reales y tampoco para restringir que las variables aleatorias X_t estén valoradas en conjuntos numéricos (ya sean reales o complejos). El punto de vista de Doob, consistente con las ideas de Kolmogorov y posteriormente desarrollado por matemáticos como Paul Lévy [85], William Feller [42]... es el comunmente aceptado como definición de proceso estocástico.

Los procesos de renovación y los procesos de renovación compuestos, asumiendo un conjunto temporal $T \subset \mathbb{R}$ continuo o discreto, fueron estudiados ya en los años 30 y 40 del siglo pasado por A. J. Lotka ([93]), S. Malmquist ([101]) ,...en contextos industriales (reemplazamiento de piezas defectuosas en la industria), físicos (conteo de partículas radiactivas) etc. Sin embargo hasta los años 50 y 60 no se puede hablar de un estudio riguroso y sistemático de los mismos; los trabajos de W. Feller ([39], [40], [41]), D. R. Cox ([19], [20]) y W. L. Smith ([139]) sistematizan y dan forma a la *"Teoría de la Renovación"* estudiando los "fenómenos renovados" y su relación con los "fenómenos recurrentes (recurrent events)", los "procesos de ramificación (branching processes)", "caminatas aleatorias (random walks)" , las "colas (queues)" y los "procesos de difusión (diffusion processes)". En las décadas siguientes el estudio, tanto desde el punto de vista teórico como aplicado, ha sido constante, con trabajos tan interesantes como los de R. A. Doney ([31]), A. Garsia and J. Lamperti ([51]), R. Grübel ([59]), P. Ney ([117]) o L. Tacks ([144]), los cuales investigan conceptos fundamentales de la Teoría de la Renovación. Desde el punto de vista práctico, en contextos propios de la física, merecen destacarse entre otros M. E. Fisher ([46]), M. Kac ([69]), J. Villaroel y M. Montero ([149]) y Y. Zhou and J. Dou ([158]); en la investigación de fenómenos meteorológicos L. Lavergnat and P. Golet ([80]), P. Perona, A. Porporato and L. Ridolf ([123]), P. Perona, E. Daly, B. Crouzy and A. Porporato ([124]) y I. Rodriguez-Iturbe, D. R. Cox and V. Isham ([131]); biológicos D. Boyer and C. Solis-Salas ([14]) y S. Reuveni, M. Urbach and J. Klafter ([129]); en geología se han aplicado estos modelos al estudio del epicentro de los terremotos (A. Helmstetter and D. Sornette, [63]). Debido al gran desarrollo que han tenido las ciencias económicas y financieras los trabajos en los cuales se estudian aspectos relacionados con las mismas son innumerables: H. Cramér ([16]), L. Dang, N. Zhu and H. Zhang ([21]), D. C. M. Dickson and C. Hipp ([23]), D. C. Dickson and C. Hipp ([24]), A. Frolova, Y. Kabanov and S. Pergamenshchikov ([48]), H. U. Gerber and E. S. W. Shiu ([55]), C. Kluppelberg ([75]), donde se estudia la “probabilidad de ruina”, la “probabilidad de supervivencia” o el “tiempo de ruina” mediante modelos matemáticos que hacen uso, en diferente medida, de los procesos de renovación. F. Avram, A. E. Kyprianou and M. R. Pistorius ([4]), J. Masoliver, M. Montero, J. Perelló an G. H. Weiss ([103]), R. C. Merton ([105]), T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels ([132]), donde se investigan diferentes aspectos relacionados con los mercados financieros.

Nuestra investigación tiene por objeto un tipo particular de procesos de renovación, los procesos de renovación compuestos con deriva, asumiendo un conjunto temporal $T \subset \mathbb{R}$ continuo (3.1.1, en la página 50); en concreto el denominado en la literatura actuarial “modelo de riesgo de Sparre Andersen” que aunque ha sido ampliamente estudiado desde el punto de vista teórico y práctico (H. Albrecher and O. J. Boxmab ([1]), S. E. Andersen ([3]), J. Bertoin ([9]), D. C. M. Dickson, B. D. Hughes and Z. Lianzeng ([26]), D. C. Dickson and C. Hipp ([27]), H. U. Gerber and E .S. W. Shiu ([54]), etc) en la actualidad ha despertado un renovado interés no únicamente en ámbitos financieros (D. C. M. Dickson ([30], J. Gao, L. Wu and H. Liu ([49]), D. J. Santana and L. Rincón ([134]), etc), sino también en contextos más generales (S. N. Majumdar and B. Meerson ([97]), M. Montero and J. Villarroel ([112]), M. Montero, A. Masó-Puigdellosas and J. Villarroel ([114]), A. Pal, I. Eliazar and S. Reuveni ([121]), J. Villarroel and M. Montero ([150]) . . .). Nosotros pretendemos efectuar un estudio general, para lo cual supondremos, en los primeros capítulos, que las sucesiones $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son mutuamente independientes, y en el último capítulo asumiremos dependencia entre τ_i y $Y_i,\ i \in \mathbb{N}$, si bien por razones de tamaño el estudio es menos profundo. Se supone, salvo que se indique lo contrario, que las variables aleatorias $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ pueden tomar tanto valores positivos como negativos.

Nos planteamos los siguientes objetivos principales:

- Obtener los resultados clásicos relacionados con los procesos de renovación compuestos con deriva, enfocando su estudio desde una perspectiva “generativa” y autocontenida de forma que su estudio quede contextualizado correctamente dentro del amplio corpus de la Teoría de la Renovación, abordando primeramente los procesos de renovación, pasando por los procesos de conteo renovados y los procesos de renovación compuestos, pues su estudio y comprensión son imprescindibles para abordar el estudio de los procesos de renovación compuestos con deriva.

- Estudiaremos su markovianidad.

- Dado un cierto intervalo $[0, b]$ investigaremos el “tiempo de primera llegada a b” y el “tiempo de escape de $[0, b]$”, tanto suponiendo tiempo inicial un tiempo de renovación t_n, como un tiempo no de renovación $t_n < r < t_{n+1}$. Se deducirán las ecuaciones integrales que satisfacen y se resolverán en algunos casos.

- Dado el intervalo $[0, b]$ calcularemos la probabilidad de llegar a b y la de escapar del intervalo, deduciendo las ecuaciones integrales que satisfacen, tanto partiendo de un tiempo inicial de renovación como un tiempo inicial no de renovación.

El trabajo está organizado de la siguiente forma:

- **Introducción.**

  Describimos su estructura general y, brevemente, lo contextualizamos históricamente.

- **Procesos estocásticos de renovación.**

  Definimos los procesos estocásticos de renovación, estudiamos diversas propiedades de los mismos y describimos algunos de los más importantes. La parte principal del capítulo consiste en el estudio de los procesos de renovación, en particular el proceso de conteo renovado, y los procesos de renovación compuestos. También estudiaremos dos paradojas clásicas, "la paradoja de los tiempos de espera" y "la paradoja del inspector" como ilustración de la sutileza que es necesario tener a la hora de estudiar los fenomenos aleatorios en general y los procesos de renovación en particular.

- **Procesos de renovación compuestos sin correlación salto-tiempo y con deriva. Estudio markovianidad.**

  En este capítulo estudiamos los procesos de renovación compuestos con deriva, deduciendo su ley de probabilidad y estudiando su markovianidad. La parte más interesante del trabajo es el estudio de los *tiempos de primera llegada* y de los *tiempos de escape*, de los cuales damos las ecuaciones de renovación que satisfacen. A continuación estudiamos los *tiempos medios de primera llegada* y los *tiempos medios de escape* deduciendo las ecuaciones integrales que verifican y en algunos casos resolviéndolas mediante la transformada de Laplace y aplicando los resultados en algunos ejemplos ilustrativos. También deducimos la ley de probabilidad de los tiempos de primera llegada y de los tiempos de escape.

  Tan interesante como los anteriores estudios, con un enfoque muy parecido, es el de las probabilidades de primera llegada a la barrera superior de un determinado intervalo, que por simplicidad (sin perder nada de generalidad) suponemos que es el $[0, b]$, $b \in (0, +\infty)$ siendo $b \neq +\infty$, aunque en determinados casos (probabilidad de ruina en estudios actuariales o financieros) se podría estudiar haciendo $b \to +\infty$, y las probabilidades de escape de la zona $[0, b]$. También aquí deducimos las ecuaciones integrales que verifican y las resolvemos en ciertos casos, aplicando los resultados en algunos ejemplos interesantes.

- **Procesos de renovación compuestos con correlación salto-tiempo y con deriva. Estudio markovianidad.**

  En este capítulo investigamos los procesos de renovación compuestos con deriva suponiendo correlación entre los tiempos de espera y los saltos, si bien debido a limitaciones evidentes (tamaño desmesurado de la tesis...) el estudio no es tan profundo, dejando la parte más detallada para posteriores publicaciones.

- **Conclusiones.**

  Resumimos las principales conclusiones obtenidas y mencionamos algunas de las línea de investigación que quedan abiertas.

Capítulo 2

Procesos estocásticos de renovación.

En este capítulo vamos a enunciar algunos resultados básicos de la teoría de los procesos estocásticos de renovación. Intuitivamente, se puede interpretar un proceso estocástico como un "proceso" que se va desarrollando en el tiempo según unas determinadas leyes probabilísticas; las observaciones registradas en los tiempos $t_1,\ t_2,\ \cdots$ describen su evolución. Definiciones rigurosas de procesos estocásticos hay muchas, nosotros proporcionaremos dos, una inspirada en los trabajos pioneros de J. L. Doob, [32], y que es comúnmente aceptada. A lo largo de esta monografía usaremos ambas de forma indistinta.

El capítulo está estructurado de la siguiente forma:

- En la primera sección estudiaremos los procesos de renovación y los de conteo renovado, recordando los resultados clásicos y deduciendo algunas propiedades relativas a las variables aleatorias "excess life", "current life" y "total life" , y dos paradojas interesantes, la "paradoja del tiempo de espera" y la "paradoja del inspector".

- En la segunda sección investigaremos los procesos de renovación compuestos, hallando la función de densidad que describe el proceso y resolviéndola para algunos casos particulares.

2.1. Procesos de renovación. El proceso de conteo renovado.

Los denominados "procesos de renovación", estudiados por D. R. Cox ([20])), W. Feller ([44]),... son los precursores de los procesos de renovación compuestos y los procesos de renovación compuestos con deriva. Juntos forman la importante Teoría de la Renovación, con aplicaciones en economía, física, biología...En esta sección vamos a estudiar estos procesos con detalle, enunciando los resultados fundamentales, la mayor parte sin demostración. También analizaremos tres variables aleatorias relacionadas con los tiempos de llegadas $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y los tiempos entre llegadas $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, la variable *excess life* ($\mathscr{E}_r^+$), la variable *current life* ($\mathscr{E}_r^-$) y la variable *total life* ($\mathscr{E}_r$). Por último, describiremos dos paradojas interesantes: "la paradoja del tiempo de espera" y la "paradoja del inspector".

En todo lo que sigue consideramos un espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ y, salvo que se indique lo contrario, todas las variables aleatorias están definidas en él.

Definición 2.1.1. Proceso de renovación (Feller). *Una sucesión de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *decimos que forman un "proceso de renovación (proceso renovado)" si se cumple que* $X_n = \sum_{k=0}^{n} Y_k,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *siendo, a su vez,* $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con una función de distribución* F *tal que* $F(0) = 0$. *Por convención* $X_0 = 0$ *contando el* 0 *como la renovación* 0.

En el caso en que $\{Y_2, Y_3, \cdots\}$ sean variables aleatorias idénticamente distribuidas con función de distribución F y la variable aleatoria Y_1 tenga una función de distribución G, decimos que "es un proceso de renovación retardado".

En el caso en que se verifique $F(0) = 0 \ \wedge \ \lim_{x \to +\infty} F(x) < 1$ decimos que "es un proceso de renovación terminante (transitorio)".

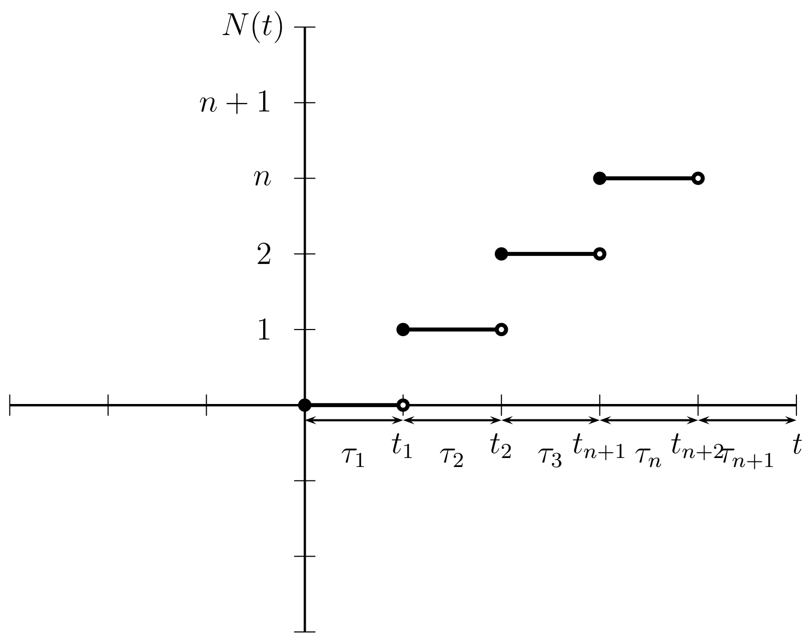
Un caso particular de procesos de renovación son los denominados "procesos de conteo renovados".

Definición 2.1.2. Proceso de conteo renovado. *Dado un proceso estocástico $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ decimos que es un "proceso de conteo renovado" si es un proceso de conteo donde:*

- *Existe una sucesión $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ formada por variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas, con función de distribución común F tal que $F(0) = 0$ y función de densidad común f. Las denominamos "tiempos de espera".* [1]
- *La sucesión de variables aleatorias $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ / $t_n = \sum_{i=0}^{n} \tau_i \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ es un proceso de renovación; las denominamos "tiempos de renovación".*

En la siguiente imagen se representan los tiempos de espera, los tiempos de renovación y la variable aleatoria $N(t),\ t > 0$.

Relación entre los tiempos de espera, τ_i, los tiempos de renovación, $t_i = \tau_1 + \cdots + \tau_i$ y el proceso de conteo $N(t),\ t > 0$.



Es interesante, en relación con los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y el propio proceso de conteo renovado $\{N(t)\}_{t\geq 0}$, el siguiente teorema:

Teorema 2.1.1. *Dado un proceso de conteo renovado $\{N(t)\}_{t\geq 0}$, si los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tienen una distribución exponencial con media $\frac{1}{\nu}$, $\nu > 0$, es un proceso de Poisson con intensidad ν.*

A continuación vamos a deducir algunos resultados relacionados con el proceso de conteo renovado $\{N(t)\}_{t\geq 0}$.

[1] *Por lo tanto son variables aleatorias positivas. Para el caso discreto se puede consultar [44] de W. Feller.*

2.1.1. Ley de probabilidad.

Teniendo en cuenta (apéndice A.4.1, en la página 254) que todo proceso estocástico $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ queda descrito si conocemos la ley de probabilidad de la variable aleatoria $N(t)$ $\forall\ t \geq 0$, vamos a obtener una fórmula para dicha ley de probabilidad. Es trivial la deducción de la siguiente proposición:

Proposición 2.1.1. *La variable aleatoria $N(t)$, $\forall\ t \geq 0$, tiene la siguiente ley de probabilidad:*

$$\boxed{\mathbb{P}_{N(t)}(k) = \mathbb{P}(N(t) = k) = F^{*k}(t) - F^{*(k+1)}(t),\ \forall\ k \in \mathbb{N}} \tag{2.1}$$

Denotamos, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, F^{*k} como el k-ésimo producto de convolución de la función de distribución F.[2]

Demostración. En efecto

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(t_k \leq t < t_{k+1}) = \mathbb{P}(t < t_{k+1}) - \mathbb{P}(t < t_k) = F^{*k}(t) - F^{*(k+1)}(t).$$

□

Una vez deducida la ley de probabilidad de la variable aleatoria $N(t)$ es interesante obtener su función generatriz.

Proposición 2.1.2. *La variable aleatoria $N(t)$, $\forall\ t > 0$ tiene de función generatriz:*

$$\boxed{G_{N(t)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \cdot \frac{1 - \hat{f}(s)}{s(1 - \hat{f}(s) \cdot z)}\, \mathrm{d}s} \tag{2.2}$$

Demostración. Aplicando la transformada de Laplace a la función generatriz:

$$\mathcal{L}(G_{N(t)}(z)) = \mathcal{L}(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = k) \cdot z^k) = \mathcal{L}(\sum_{k=0}^{\infty} (F^{*k}(t) - F^{*(k+1)}(t)) \cdot z^k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}(F^{*k}(t) \cdot z^k) - \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}(F^{*(k+1)}(t) \cdot z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\hat{f}(s))^k}{s} \cdot z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\hat{f}(s))^{k+1}}{s} \cdot z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{(\hat{f}(s))^k}{s} - \frac{(\hat{f}(s))^{k+1}}{s}) \cdot z^k = \frac{(1 - \hat{f}(s)}{s} \cdot \frac{1}{1 - \hat{f}(s) \cdot z}.$$ [3]

Con lo cual:

[2] *Suponemos, salvo que se indique lo contrario, $k > 0$.*

[3] *Pues se cumple $|F^{*k}(t)| \leq 1$, $\forall k > 0$ y por lo tanto, teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Laplace, podemos aplicar la transformada término a término en la serie.*

$$\mathcal{L}(G_{N(t)}(z)) = \frac{1-\hat{f}(s)}{s \cdot (1-\hat{f}(s)\cdot z)}.$$

Teniendo en cuenta el lema de Riemann-Lebesgue (lema A.1.1, en la página 217, recordando la relación entre la transformada de Laplace y la de Fourier), podemos suponer que $\mathcal{L}(G_{N(t)}(z))$ es absolutamente integrable (proposición A.3.5, en la página 248), pues:

$$\underset{|s|\to+\infty}{lim}\left(\frac{1-\hat{f}(s)}{s \cdot (1-\hat{f}(s)\cdot z)}\right) = 0.$$

Para calcular ahora $G_{N(t)}(z)$ aplicamos la inversa de la transformada de Laplace y obtenemos 2.2.

□

Si interpretamos $N(t_n+h)-N(t_n),\ h>0$ como la "cantidad de renovaciones que se han producido en el intervalo $(t_n, t_n+h]$" (de forma semejante a A.4.21, en la página 261) es fundamental el siguiente resultado:

Proposición 2.1.3. *Para todo tiempo de renovación t_n se verifica:*

$$\boxed{N(t_n+h)-N(t_n) \overset{d}{=} N(h), \forall h>0} \tag{2.3}$$

Demostración. En efecto:

$$\mathbb{P}(N(t_n+h)-N(t_n)=m) = \mathbb{P}(N(t_n+h)=N(t_n)+m) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(N(t_n+h)=N(t_n)+m \diagup N(t_n)=k\right)\cdot \mathbb{P}(N(t_n)=k).$$

Se verifica

$$\mathbb{P}(N(t_n)=k) = \mathbb{P}(t_k \le t_n < t_{k+1}) = \begin{cases} 0, & n\neq k \\ 1, & n=k \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(N(t_n+h)=N(t_n)+m \diagup N(t_n)=k\right)\cdot \mathbb{P}(N(t_n)=k) = \mathbb{P}(N(t_n+h)=m+n) =$$

$$= \mathbb{P}(t_{n+m} \le t_n+h < t_{n+m+1}) = \mathbb{P}(t_n+\tau_{n+1}+\cdots+\tau_{n+m} \le t_n+h < t_n+\tau_{n+1}+\cdots+\tau_{n+m}+\tau_{n+m+1}) =$$

$$= \mathbb{P}(\tau_{n+1} + \cdots + \tau_{n+m} \leq h < \tau_{n+1} + \cdots + \tau_{n+m+1}) = \mathbb{P}(t_m \leq h < t_{m+1}) = \mathbb{P}(N(h) = m).^4$$

□

De forma inmediata deducimos la siguiente proposición, la cual necesitaremos más adelante:

Proposición 2.1.4. *Sea $N(t), t > 0$ la cantidad de renovaciones que se han producido en $(0, t]$. Se verifica*

$$\boxed{N(t) \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ 1 + N(t - t_1), & t_1 \leq t \end{cases}} \tag{2.4}$$

Demostración. Si $t < t_1 \ : \ t_0 \leq t < t_1$ y puesto que $t_0 = 0$ por definición, $N(t) = 0$, no ha habido todavía ninguna renovación.

Si $t_1 \leq t$ se ha producido una renovación en t_1 y por lo tanto,

$$N(t) = 1 + (N(t) - N(t_1)) \stackrel{d}{=} 1 + N(t - t_1)$$

por 2.1.3. con lo cual se cumple 2.4.

□

2.1.2. Función de Renovación. Resultados clave.

A continuación vamos a enunciar algunos resultados clásicos sobre la función de renovación. Textos de referencia son D. R. Cox ([20]), W. Feller ([45]), S. Karlin y H. Taylor ([70]),...

Definición 2.1.3. Función de renovación. *Definimos la "función de renovación", y la denotamos por $m(t)$, como $m : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ / $m(t) = \mathbb{E}(N(t))$, $\forall t > 0$. Siendo $N(t)$ la cantidad de renovaciones en $(0, t]$.*

Es interesante destacar que hemos definido $N(t)$ como la cantidad de renovaciones en el intervalo $(0, t]$, con lo cual $m(t)$ es la cantidad esperada de renovaciones en $(0, t]$. Sin embargo algunos autores (ver [45] de W. Feller) consideran el intervalo $[0, t]$ contando el origen como una renovación. Definimos:

Definición 2.1.4. Función de renovación amplidada. *Definimos la "función de renovación ampliada", y la denotamos por $U(t)$, como $U : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ / $U(t) = \mathbb{E}(N(t))$, $\forall t > 0$. Siendo $N(t)$ la cantidad de renovaciones en $[0, t]$.*

Evidentemente $U(t) = 1 + m(t)$. Las dos proposiciones siguientes son esenciales en la Teoría de la Renovación; demostraciones detalladas se pueden consultar, entre otros, en [20] de D. R. Cox.

Proposición 2.1.5. *Se verifica* $\forall\ t > 0$

$$\boxed{m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)} \tag{2.5}$$

[4] *Teniendo en cuenta que las variables aleatorias "tiempos de espera" $\{\tau_i\}$ son independientes e igualmente distribuidas.*

Demostración. Por definición $\forall\, t > 0$

$$\mathbb{E}(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(N(t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t).$$

Teniendo en cuenta la proposición 2.1.1, en la página 13.

□

Del mismo modo, trivalmente, se deduce:

Proposición 2.1.6. *Se verifica* $\forall\, t > 0$

$$\boxed{m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) \geq n)} \tag{2.6}$$

Si consideramos la función de renovación ampliada se verifican las proposiciones:

Proposición 2.1.7. *Se verifica* $\forall\, t > 0$

$$\boxed{U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)} \tag{2.7}$$

El origen es un átomo de peso unitario y en la anterior serie F^{*0} es una distribución atómica concentrada en el origen.

Proposición 2.1.8. *Se verifica* $\forall\, t > 0$

$$\boxed{U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) \geq n)} \tag{2.8}$$

Vamos a enunciar sin demostración dos teoremas muy importantes relacionados con la función de renovación (demostraciones detalladas se pueden consultar en S. Karlin y H. Taylor ([70])).

Teorema 2.1.2. ***(Teorema elemental de la renovación)****. Si los tiempos entre llegadas* $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *no tienen función de distribución* F *aritmética, siendo* $\mu = \mathbb{E}(\tau_i) < \infty$*,* $\mu \neq 0$*, se verifica:*

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu},\ \lim_{t\to+\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}} \tag{2.9}$$

El anterior límite se considera nulo cuando $\mu = \infty$*.*

Cuando F es aritmética existe el teorema equivalente, pero debido a la generalidad y naturaleza de nuestro estudio parece superfluo enunciarlo.

Como una generalización del anterior teorema se deduce:

Teorema 2.1.3. ***(Teorema de Blackwell)***. *Si los tiempos entre llegadas* $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *no tienen función de distribución* F *aritmética, siendo* $\mu = \mathbb{E}(\tau_i) < \infty$, $\mu \neq 0$, *se verifica* $\forall h > 0$:[5]

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} [m(t+h) - m(t)] = \lim_{t\to+\infty} [m(t) - m(t-h)] = \frac{h}{\mu}} \tag{2.10}$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} [U(t+h) - U(t)] = \lim_{t\to+\infty} [U(t) - U(t-h)] = \frac{h}{\mu}} \tag{2.11}$$

Cuando $\mu = \infty$ *el anterior límite se considera nulo.*

En el caso en que F *sea aritmética se cumple el anterior límite, siendo* h *múltiplo del span* λ *de* F.

Las "ecuaciones de renovación" son esenciales en la Teoría de la Renovación en general y en nuestro trabajo en particular. Las definimos:

Definición 2.1.5. Ecuación de renovación. *Una ecuación integral de la forma:*

$$\boxed{g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-l)\,\mathrm{d}F(l), t > 0.} \tag{2.12}$$

O bien:

$$g = h + F * g. \tag{2.13}$$

Siendo $h(t)$ *una función conocida,* $F(t)$ *una función de distribución de una variable aleatoria positiva conocida y* $g(t)$ *una función desconocida a determinar, se dice que "es una ecuación de renovación".*[6]

Es interesante destacar que la propia función de renovación satisface una ecuación de renovación:

Lema 2.1.1. *La función de renovación verifica la siguiente ecuación de renovación:*

$$\boxed{m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-l)\,\mathrm{d}F(l)} \tag{2.14}$$

[5] *Una función de distribución* F *es aritmética si está concentrada en un conjunto* $A = \{k\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\ \wedge\ k \in \mathbb{Z}\}$ *(es decir,* $\mathbb{P}(\neg A) = 0$*). La cantidad* λ *más grande tal que* F *está concentrada en* $\{\lambda,\ 2\lambda, \cdots\}$ *recibe el nombre de* **span de** F. *El teorema, para el caso discreto, fue anteriormente demostrado por P. Erdös, W. Feller y H. Pollard.*

[6] *Si* $F(l)$ *tiene una cierta función de densidad* $f(l)$*, la anterior ecuación integral es posible escribirla de la forma:*

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-l) f(l)\,\mathrm{d}l, t > 0.$$

Demostración. Condicionando por el valor que toma $t_1 = \tau_1$:

$$\mathbb{E}(N(t) \diagup \tau_1 = l) = \begin{cases} 0, & t < l \\ 1 + m(t-l), & l \leq t \end{cases}$$

Por el teorema de la probabilidad total:

$$m(t) = \mathbb{E}(N(t)) = \int_0^{+\infty} E(N(t) \diagup \tau_1 = l) \, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= \int_0^t (1 + m(t-l)) \, \mathrm{d}F(l) = F(t) + \int_0^t m(t-l) \, \mathrm{d}F(l).$$

□

Para el caso de la función de renovación ampliada de un modo semejante se demuestra el siguiente lema:

Lema 2.1.2. *La función de renovación ampliada verifica la siguiente ecuación de renovación:*

$$\boxed{U(t) = 1 + \int_0^t U(t-l) \, \mathrm{d}F(l)} \tag{2.15}$$

Los siguiente teoremas son básicos en la Teoría de la Renovación, y fundamentales a la hora de resolver una ecuación de renovación:

Teorema 2.1.4. *Si $h(t)$ está acotada existe una única función acotada en los intervalos finitos que satisface la ecuación de renovación 2.12 y se anula en $(-\infty, 0)$.*

Esta función es:

$$\boxed{g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-l) \, \mathrm{d}m(l)} \tag{2.16}$$

o bien $g = h + m * h$.

En el caso que consideremos la función de renovación ampliada, es inmediato el teorema:

Teorema 2.1.5. *Si $h(t)$ está acotada existe una única función acotada en los intervalos finitos que satisface la ecuación de renovación 2.12 y se anula en $(-\infty, 0)$.*

Esta función es:

$$\boxed{g(t) = \int_0^t h(t-l) \, \mathrm{d}U(l)} \tag{2.17}$$

o bien $g = U * h$.

Relacionado con la ecuación de renovación tenemos otro teorema fundamental, que enunciaremos sin demostración, que en cierto modo es equivalente al teorema de Blackwell 2.1.3, en la página 17.

Teorema 2.1.6. ***("Teorema clave de la renovación" de Smith)***. *Si* $g(t)$ *es la solución de la ecuación de renovación* $g = h + F * g$, *los tiempos de espera* $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *no tienen función de distribución* F *aritmética, siendo* $\mu = \mathbb{E}(\tau_i)$, $\mu \neq 0$, *se cumple:*

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} h(l)\,\mathrm{d}l, & si\ \mu < +\infty \\ \\ 0, & si\ \mu = +\infty \end{cases}} \tag{2.18}$$

En el caso en que F *sea aritmética con span* $\lambda > 0$ *se cumple* $\forall\ c > 0$*:*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} g(c+n\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h(c+n\lambda), & si\ \mu < +\infty \\ \\ 0, & si\ \mu = +\infty \end{cases}}$$

Teorema 2.1.7. *Si* F *no es aritmética con esperanza* $\mu < +\infty$, $\mu \neq 0$ *y varianza* $\sigma^2 < +\infty$, *se cumple:*

$$\boxed{0 \leq m(t) - \frac{t}{\mu} \to \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2},\ 0 \leq U(t) - \frac{t}{\mu} \to \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2}} \tag{2.19}$$

Existe el equivalente cuando se trata de distribuciones aritméticas. El teorema es cierto incluso cuando no exite varianza, tomando el segundo miembro como $+\infty$.

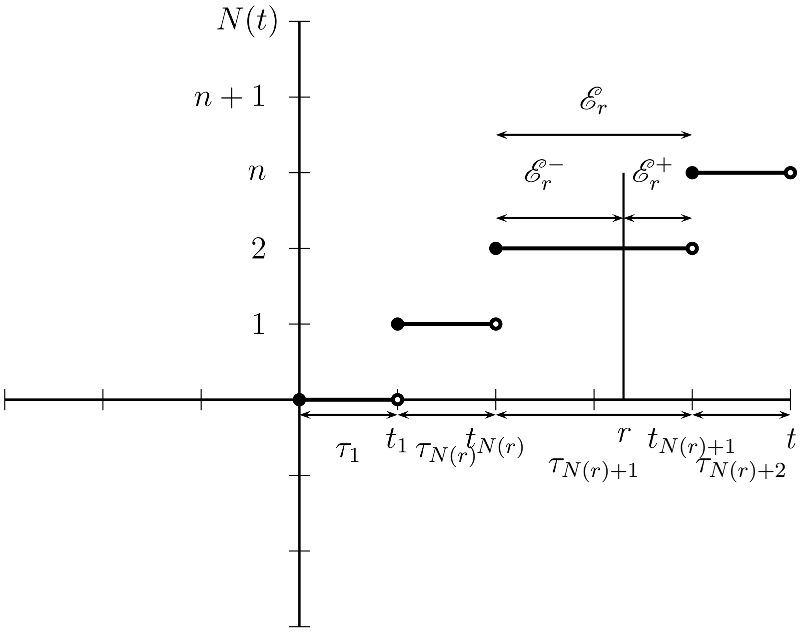
En la proposición 2.1.1, en la página 13, estudiamos la ley de probabilidad de la variable aleatoria $N(t),\ t \geq 0$. En el siguiente teorema se completa el estudio hallando su distribución para valores grandes de t.

Teorema 2.1.8. ***(Comportamiento asintótico de*** $N(t)$***)***. *Si* F *tiene esperanza* $\mu \neq 0$ *y varianza* σ^2, *entonces, para* t *grande, la variable aleatoria* $N(t)$, *la cantidad de épocas de renovación en el intervalo* $(0, t]$, *está distribuida aproximadamente normal con media* $\frac{t}{\mu}$ *y varianza* $\frac{t\sigma^2}{\mu^3}$.

2.1.3. Las variables aleatorias *excess life, current life y total life.*

Relacionadas con las variables aleatorias "tiempos de espera", $\{\tau_i\}$, y "tiempos de renovación", $\{t_j\}$, existen tres variables aleatorias muy importantes: *el excess life*, $\mathscr{E}_r^+ = t_{N(r)+1} - r, r > 0$, que definimos como el tiempo que queda, dado $r > 0$, para que ocurra la siguiente renovación; el *current life*, $\mathscr{E}_r^- = r - t_{N(r)}, r > 0$, que definimos como el tiempo transcurrido desde la última renovación hasta el tiempo actual $r > 0$; el *total life*, $\mathscr{E}_r = t_{N(r)+1} - t_{N(r)}$, que es la longitud del intervalo $[t_{N(r)}, t_{N(r)+1})$ al cual pertenece $r > 0$. En la siguiente imagen representamos los tiempos de espera, los tiempos de renovación y las variables aleatorias $\mathscr{E}_r^+$, $\mathscr{E}_r^-$ y $\mathscr{E}_r$.

Las variables aleatorias excess life $\mathscr{E}_r^+$, current life $\mathscr{E}_r^-$ y total life $\mathscr{E}_r$.



Estas tres variables aleatorias juegan un papel destacado en la Teoría de la Renovación y los trabajos relacionados con las mismas son numerosos. Estudios interesantes sobre dichas variables aleatorias se pueden encontrar en los textos clásicos de R. N. Bhattacharya y E. C. Waymire ([6]), D. R. Cox ([20]), W. Feller ([45]), S. Karlin y H. Taylor ([70]),.... A continuación vamos a deducir algunos resultados que necesitaremos en nuestra investigación, para lo cual haremos uso tanto de la función de renovación como de la función de renovación ampliada. Ambas funciones, teniendo en cuenta el teorema de Helly (teorema A.3.15, en la página 249) y el teorema de continuidad para funciones características (teorema A.3.16, en la página 250), no son funciones de distribución. Nuestra investigación obligatoriamente es muy general, deduciendo únicamente las ecuaciones integrales que satisfacen (un estudio completo implicaría buscar la solución de esas ecuaciones integrales mediante la transformada de Laplace como se hace, por ejemplo, en [57] de C. Godrèche y J. M. Luck); para un estudio más detallado será necesario consultar la abundante literatura existente.

Proposición 2.1.9. *Las variables aleatorias $\{\mathscr{E}_r^+\}_{r>0}$, $\mathscr{E}_r^+ = t_{N(r)+1} - r$, tienen la siguiente función de distribución:*

$$\boxed{\phi(t/r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq t) = \int_0^r \mathrm{d}U(l)\,[F(t+r-l) - F(r-l)]\,, \forall t \in [0, +\infty)} \tag{2.20}$$

Demostración. Por definición:

$$\phi(t/r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq t) = \sum_{N(r)} \mathbb{P}(t_{N(r)} \leq r, 0 < t_{N(r)+1} - r \leq t) =$$

$$= \sum_{N(r)} \mathbb{P}(t_{N(r)} \leq r < t_{N(r)} + \tau_{N(r)+1} < t + r) = \sum_{N(r)} \mathbb{P}(t_{N(r)} \leq r, r - t_{N(r)} < \tau_{N(r)+1} < t + r - t_{N(r)}) =$$

$$= \sum_{N(r)} \int_0^r \mathrm{d}F^{*N(r)}(l) \int_{r-l}^{t+r-l} \mathrm{d}\mathbb{P}_{\tau_{N(r)+1}} = \sum_{N(r)} \int_0^r \mathrm{d}F^{*N(r)}(l) \left[F(t+r-l) - F(r-l)\right] =$$

Pues, dado el tiempo $r > 0$, el tiempo restante hasta la siguiente renovación será menor que t si la $N(r)$ -esima renovación se ha producido antes de r, $t_{N(r)} = l < r$, y la siguiente renovación se produce en el intervalo $[r, t+r)$. Sumando ahora para $N(r) = n$ y $l \in [0, r]$ y teniendo en cuenta que la función de distribución de $t_n, n \in \mathbb{N}$ es F^{*n}, y la de $\tau_{N(r)+1}$ es F, obtenemos:

$$= \int_0^r \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{d}F^{*n}(l) \left[F(t+r-l) - F(r-l)\right] = \int_0^r \mathrm{d}(\sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(l)) \left[F(t+r-l) - F(r-l)\right] =$$

$$= \int_0^r \mathrm{d}U(l) \left[F(t+r-l) - F(r-l)\right].$$

□

Hemos tenido en cuenta $U(l) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(l)$ (proposición 2.1.7, en la página 16) y que se cumplen las condiciones por las cuales la suma de la serie formada por las derivadas coincide con la derivada de la suma (A.1.15 y A.1.18, en la página 221).

Para la cola de la distribución, razonando de un modo muy parecido, obtenemos:

Proposición 2.1.10. *Las variables aleatorias* $\{\mathscr{E}_r^+\}_{r>0}$, $\mathscr{E}_r^+ = t_{N(r)+1} - r$ *cumplen:*

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > t) = 1 - F(t+r) + \int_0^r \mathrm{d}m(l) \left[1 - F(t+r-l)\right], \forall t \in [0, +\infty)} \tag{2.21}$$

Demostración. Definimos $g(r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > t)$. Condicionando por los valores que toma τ_1:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > t/\tau_1 = l) = \begin{cases} 1, & \text{si } l > r + t \\ \\ \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^+ > t), & \text{si } l \leq r + t \end{cases}$$

Pues en el caso en que $\tau_1 > r + t \ : \ \tau_1 > r$ y por lo tanto no ha habido ninguna renovación antes de r con lo cual el intervalo en el cual está r es $[0, t_1)$ y por lo tanto se cumple que $\mathscr{E}_r^+ = t_1 - r = \tau_1 - r > r + t - r = t$, de donde $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > t/\tau_1 = l) = 1$.

Si $l \leq r + t \ : \ r < r + t$ y puede ocurrir que $r < l < r + t$ o que $l < r < r + t$ en el primero de los casos no ha habido renovaciones antes de r con lo cual $\mathscr{E}_r^+ = \tau_1 - r$, pero como $\tau_1 \leq r + t$ no puede cumplirse que $\mathscr{E}_r^+ > t$ y por lo tanto será $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > t/\tau_1 = l) = 0$. Con lo cual, se verifica:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > t/\tau_1 = l) = \begin{cases} 1, & \text{si } l > r+t \\ 0, & \text{si } r < l \leq r+t \\ \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^+ > t), & \text{si } l \leq r \end{cases}$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > t) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > t/\tau_1 = l)\,\mathrm{d}F(l) = \int_0^r \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^+ > t)\,\mathrm{d}F(l) + \int_r^{r+t} 0\,\mathrm{d}F(l) + \int_{r+t}^{+\infty} \mathrm{d}F(l) =$$

$$= 1 - F(r+t) + \int_0^r P(\mathscr{E}_{r-l}^+ > t)\,\mathrm{d}F(l).$$

Teniendo en cuenta la definición de g se verifica:

$$g(r) = 1 - F(r+t) + \int_0^r g(r-l)\,\mathrm{d}F(l) = 1 - F(r+t) + F * g(r).$$

La función $1 - F(r+t)$ cumple las condiciones que nos permiten aplicar el teorema 2.1.5, en la página 18, y concluimos que

$$g(r) = 1 - F(r+t) + \int_0^r [1 - F(r+t-l)]\,\mathrm{d}m(l).$$

Con lo cual efectívamente se verifica 2.21.

□

Teniendo en cuenta los anteriores resultados se deduce:

Proposición 2.1.11. *Las variables aleatorias $\{\mathscr{E}_r^+\}_{r>0}$, $\mathscr{E}_r^+ = t_{N(r)+1} - r$, tienen la siguiente función de densidad, suponiendo que F, la función de distribución de los tiempos de espera, tenga función de densidad f:*

$$\boxed{f_{\mathscr{E}_r^+}(t) = f(t+r) + \int_0^r \mathrm{d}m(l) f(t+r-l), \forall t \in [0, +\infty)} \tag{2.22}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 2.1.10, en la página 21, y derivando respecto de t, concluimos que se verifica 2.22.

□

Es interesante la siguiente proposición, que completa el resultado obtenido en la proposición 2.1.3, en la página 14:

Proposición 2.1.12. *Para todo tiempo $t > 0$, siendo $h > 0$, se verifica:*

$$\boxed{\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)=n)=\begin{cases}\mathbb{P}(\mathscr{E}_t^+ > h), & si\, n=0\\ \\ \int_0^h \mathbb{P}(N(h-l)=n-1)\,\mathrm{d}\phi(l\diagup t), & si\, n>0, n\in\mathbb{N}\end{cases}} \tag{2.23}$$

Demostración. Si $n=0$, se verifica $\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)=0)=\mathbb{P}(\mathscr{E}_t^+ > h)$, pues si en el intervalo $[t,t+h]$ no hay ninguna renovación, $\mathscr{E}_t^+$, el tiempo que falta para que haya una renovación despues de t, será mayor que h.

Sea $n>0, n\in\mathbb{N}$. Entonces:

$$\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)=n)=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)=n\diagup\mathscr{E}_t^+=l)\,\mathrm{d}F_{\mathscr{E}_t^+}(l)=$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)=n\diagup t_{N(t)+1}-t=l)\,\mathrm{d}F_{\mathscr{E}_t^+}(l)=$$

La probabilidad $\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)=n\diagup t_{N(t)+1}-t=l)$ es nula cuando $l>h$, con lo cual

$$=\int_0^{h}\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)=n\diagup t_{N(t)+1}-t=l)\,\mathrm{d}F_{\mathscr{E}_t^+}(l)=$$

Teniendo en cuenta la definición de $N(t)$ es evidente que se cumple $N(t)=N(t_{N(t)+1})-1$, la cantidad de renovaciones que hay en el intervalo $(0,t]$ coincide con las que hay en el intervalo $(0,t_{N(t)+1}]$ $(N(t)+1)$ menos una, con lo cual se cumple:

$$N(t+h)-N(t)=N(t+h)-(N(t_{N(t)+1})-1)=N(t+h)-N(t_{N(t)+1})+1.$$

Que $t_{N(t)+1}-t=l\Rightarrow t=t_{N(t)+1}-l$ y por lo tanto:

$$=\int_0^{h}\mathbb{P}(N(t_{N(t)+1}-l+h)-N(t_{N(t)+1})+1=n)\,\mathrm{d}F_{\mathscr{E}_t^+}(l)=$$

$$=\int_0^{h}\mathbb{P}(N(t_{N(t)+1}-l+h)-N(t_{N(t)+1})=n-1)\,\mathrm{d}F_{\mathscr{E}_t^+}(l)=$$

Teniendo en cuenta ahora la proposición 2.1.3, en la página 14 obtenemos:

$$=\int_0^{h}\mathbb{P}(N(h-l)=n-1)\,\mathrm{d}F_{\mathscr{E}_t^+}(l)=\int_0^{h}\mathbb{P}(N(h-l)=n-1)\,\mathrm{d}\phi(l\diagup t).$$

□

A continuación vamos a estudiar la variable aleatoria *current life*. Necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.1.3. *Las variables aleatorias* $\{\mathscr{E}_r^-\}_{r>0}, \mathscr{E}_r^- = r - t_{N(r)}$ *cumplen:*

$$\boxed{\mathscr{E}_r^- = l \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / t_n = r - l \wedge \tau_{n+1} > l, n = 0, 1, \cdots} \tag{2.24}$$

Demostración. Por definición de $\{\mathscr{E}_r^-\}_{r>0}, \mathscr{E}_r^- = r - t_{N(r)}$:

$$\{\mathscr{E}_r^- = l\} \Leftrightarrow \left\{r - t_{N(r)} = l\right\} \cap \left\{t_{N(r)+1} > r\right\} \Leftrightarrow \left\{t_{N(r)} = r - l\right\} \cap \left\{\tau_{N(r)+1} + t_{N(r)} > r\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{t_{N(r)} = r - l\right\} \cap \left\{\tau_{N(r)+1} > r - t_{N(r)}\right\} \Leftrightarrow \left\{t_{N(r)} = r - l\right\} \cap \left\{\tau_{N(r)+1} > r - (r - l)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{t_{N(r)} = r - l\right\} \cap \left\{\tau_{N(r)+1} > l\right\}, N(r) \in \mathbb{N}.$$

□

Teniendo en cuenta el lema 2.1.3 es inmediato deducir una fórmula para la función de distribución de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^-,\ r > 0$.

Proposición 2.1.13. *Las variables aleatorias* $\{\mathscr{E}_r^-\}_{r>0}$, $\mathscr{E}_r^- = r - t_{N(r)}$ *tienen la siguiente función de distribución:*

$$\boxed{\varphi(t/r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- \leq t) = \begin{cases} \int_{r-t}^{r} \mathrm{d}U(l)\,[1 - F(r-l)] & ,\ si\, t \in [0, r] \\ \\ 1 & ,\ si\, t > r \end{cases}} \tag{2.25}$$

Demostración. Por definición de $\mathscr{E}_r^-,\ r > 0$ obtenemos

$$\varphi(t/r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- \leq t) = \sum_{N(r)} \mathbb{P}(0 < r - t_{N(r)} \leq t, t_{N(r)+1} > r) =$$

$$= \sum_{N(r)} \mathbb{P}(r - t \leq t_{N(r)} \leq r, \tau_{N(r)+1} > r - t_{N(r)}) = \sum_{N(r)} \int_{r-t}^{r} \mathrm{d}F^{*N(r)}(l) \int_{r-l}^{+\infty} \mathrm{d}\mathbb{P}_{\tau_{N(r)+1}} =$$

Pues para que dado $r > 0$, el tiempo transcurrido desde la $N(r)$-ésima renovación sea menor que t, tiene que ocurrir que la $N(r)$-ésima renovación se produzca en un tiempo $t_{N(r)} = l \in (r - t, r)$ y la $N(r) + 1$-ésima renovación se produzca en un tiempo $t_{N(r)+1} > r$. Sumando para $N(r) = n$ y $l \in [r - t, r]$ y teniendo en cuenta que la función de distribución de $t_n, n \in \mathbb{N}$ es F^{*n}, y la de $\tau_{N(r)+1}$ es F, obtenemos:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r-t}^{r} \mathrm{d}F^{*n}(l) \int_{r-l}^{+\infty} \mathrm{d}F(x) = \int_{r-t}^{r} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{d}F^{*n}(l)\,[1 - F(r-l)] =$$

$$= \int_{r-t}^{r} \mathrm{d}\left(\sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(l)\right)[1 - F(r-l)] = \int_{r-t}^{r} \mathrm{d}U(l)\,[1 - F(r-l)]\,.$$

En el caso en que $t > r$, por el anterior argumento es evidente que $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- \leq t) = 1$.

□

A continuación deducimos la función de densidad de forma trivial.

Proposición 2.1.14. *Las variables aleatorias* $\{\mathscr{E}_r^-\}_{r>0}$, $\mathscr{E}_r^- = r - t_{N(r)}$ *tienen la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{\mathscr{E}_r^-}(t) = \begin{cases} (1 - F(t))\, m'(r-t) & , \textit{ si } t \in [0, r] \\ \\ 0 & , \textit{ si } t > r \end{cases}} \tag{2.26}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 2.1.13, en la página 24, después de dar un cambio adecuado de variable, obtenemos:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- \leq t) = \int_{r-t}^{r} \mathrm{d}m(l)\,[1 - F(r-l)]\,, t \in [0, r].$$

Derivando respecto de t obtenemos 2.26.[7]

□

Para la cola de la distribución obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.1.15. *Las variables aleatorias* $\{\mathscr{E}_r^-\}_{r>0}$, $\mathscr{E}_r^- = r - t_{N(r)}$ *cumplen:*

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t) = \begin{cases} 1 - F(r) + \int_0^{r-t} \mathrm{d}m(l)\,[1 - F(r-l)] & , \textit{ si } t \in [0, r] \\ \\ 0 & , \textit{ t>r} \end{cases}} \tag{2.27}$$

Demostración. Definimos $g(r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t)$. Condicionando por los valores que toma τ_1, si $\tau_1 > r$ no ha habido renovaciones antes de r y por lo tanto $r \in [0, t_1)$, $t_{N(r)} = 0$ y $\mathscr{E}_r^- = r - t_{N(r)} = r - 0 = r > t$, pues tiene que ser $t \leq r$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t \diagup \tau_1 = l) = 1$, si $l > r$. Si $\tau_1 \leq r$ se cumple que $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t \diagup \tau_1 = l) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^- > t)$. Es decir:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t \diagup \tau_1 = l) = \begin{cases} 1, & \text{si } l > r \\ \\ \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^- > t), & \text{si } l \leq r \end{cases}$$

[7] *Es interesante destacar que en este caso no se requiere que los tiempos de espera tengan función de densidad f.*

En el caso en que $r - t < \tau_1 < r$ se cumple que $t_{N(r)} \geq \tau_1$ y por lo tanto $\mathscr{E}_r^- = r - t_{N(r)} \leq r - \tau_1 < r - (r-t) = t$ de donde $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t / \tau_1 = l) = 0$ en el caso en que $\tau_1 \in (r-t, r)$. Con lo cual:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t / \tau_1 = l) = \begin{cases} 1, & \text{si } l > r \\ 0, & \text{si } r - t < l < r \\ \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^- > t), & \text{si } l \leq r - t \end{cases}$$

Por el teorema de la probabilidad total, obtenemos:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t / \tau_1 = l)\, \mathrm{d}F(l) = \int_0^{r-t} \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^- > t)\, \mathrm{d}F(l) + \int_{r-t}^{r} 0\, \mathrm{d}F(l) + \int_r^{+\infty} \mathrm{d}F(l) =$$

$$= 1 - F(r) + \int_0^{r-t} \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^- > t)\, \mathrm{d}F(l).$$

Por definición de g:

$$g(r) = 1 - F(r) + \int_0^r g(r-l)\, \mathrm{d}F(l).$$

Se cumplen las hipótesis que nos permite aplicar el teorema 2.1.5, en la página 18, con lo cual:

$$g(r) = 1 - F(r) + \int_0^r [1 - F(r-l)]\, \mathrm{d}m(l).$$

Concluimos que se verifica 2.27

□

En el caso del *total life* los razonamientos son semejantes. Obtenemos:

Proposición 2.1.16. *Las variables aleatorias* $\{\mathscr{E}_r\}_{r>0}$, $\mathscr{E}_r = t_{N(r)+1} - t_{N(r)}$, *tienen la siguiente función de distribución:*

$$\boxed{\beta(t/r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r \leq t) = \int_{r-t}^{r} \mathrm{d}U(l)\, [F(t) - F(r-l)]} \tag{2.28}$$

Demostración. Se verifica:

$$\beta(t/r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r \leq t) = \sum_{N(r)} \mathbb{P}(t_{N(r)+1} - t_{N(r)} \leq t, t_{N(r)} \leq r, t_{N(r)+1} > r) =$$

$$= \sum_{N(r)} \mathbb{P}(r-t \leq t_{N(r)} \leq r, r \leq t_{N(r)} + \tau_{N(r)+1} < t_{N(r)} + t) = \sum_{N(r)} \mathbb{P}(r-t \leq t_{N(r)} \leq r, r - t_{N(r)} < \tau_{N(r)+1} < t) =$$

Pues para que dado $r > 0$ se cumpla que $t_{N(r)+1} - t_{N(r)}$ sea menor que $t > 0$ tiene que verificarse que la $N(r)$-ésima renovación se produzca en un tiempo $t_{N(r)} = l < r$ y mayor que $r-t$, y la $N(r)+1$-ésima renovación se produzca en un tiempo $t_{N(r)+1} \in (r, t_{N(r)} + t)$. Sumando ahora para $N(r) = n$ y $l \in [r-t, r]$ y teniendo en cuenta que la función de distribución de $t_n, n \in \mathbb{N}$ es F^{*n}, y la de $\tau_{N(r)+1}$ es F, obtenemos:

$$= \sum_{N(r)} \mathbb{P}(r - t \leq t_{N(r)} \leq r, r - t_{N(r)} < \tau_{N(r)+1} < t) = \sum_{N(r)} \int_{r-t}^{r} \mathrm{d}F^{*N(r)}(l) \int_{r-l}^{t} \mathrm{d}\mathbb{P}_{\tau_{N(r)+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r-t}^{r} \mathrm{d}F^{*n}(l) \int_{r-l}^{t} \mathrm{d}F(x) = \int_{r-t}^{r} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{d}F^{*n}(l)\, [F(t) - F(r-l)] =$$

$$\int_{r-t}^{r} \mathrm{d}(\sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(l))\, [F(t) - F(r-l)] = \int_{r-t}^{r} \mathrm{d}U(l)\, [F(t) - F(r-l)]\,.$$

□

La función de densidad se obtiene de forma directa.

Proposición 2.1.17. *Las variables aleatorias $\{\mathscr{E}_r\}_{r>0}$, $\mathscr{E}_r = t_{N(r)+1} - t_{N(r)}$, tienen la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{\mathscr{E}_r}(t) = \begin{cases} f(t)[m(r) - m(r-t)], & si\; 0 < t \leq r \\ \\ f(t)[1 + m(r)], & si\; r < t \end{cases}} \tag{2.29}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 2.1.16, en la página 26, por derivación paramétrica obtenemos de forma inmediata el resultado.

$$\frac{\partial \beta(t/r)}{\partial t} = \int_{r-t}^{r} \frac{\partial[[F(t) - F(r-l)]\, \mathrm{d}U(l)]}{\partial t} + [F(t) - F(r-r)]\, \mathrm{d}U(r) \cdot 0 - [F(t) - F(r-(r-t))]\, \mathrm{d}U(r-t) \cdot (-1) =$$

$$= \int_{r-t}^{r} f(t)\, \mathrm{d}U(l)$$

De donde se concluye de forma inmediata 2.29.

□

Para la cola de la distribución, usando un razonamiento semejante al empleado anteriormente, obtenemos:

Proposición 2.1.18. *Las variables aleatorias $\{\mathscr{E}_r\}_{r>0}$ verifican:*

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathscr{E}_r > t) = 1 - F(max\{r, t\}) + \int_0^r [1 - F(max\{r - l, t\})]\, \mathrm{d}m(l)} \tag{2.30}$$

Demostración. Vamos a condicionar por el valor que toma τ_1. Puede ocurrir que $\tau_1 = l > max\{r,t\}$ en este caso $\mathscr{E}_r = t_1 - t_0 = \tau_1 = l > t$ con lo cual $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r > t) = 1$. Si $\tau_1 = l < r$, $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r > t) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l} > t)$, en cualquier otro caso $P(\mathscr{E}_r > t) = 0$. Teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r > t) = \int_0^r \mathbb{P}(\mathscr{E}_r > t \diagup \tau_1 = l)\,\mathrm{d}F_{\tau_1} = \int_{max\{r,t\}}^{+\infty} \mathrm{d}F(l) + \int_0^r \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l} > t)\,\mathrm{d}F(l) =$$

$$= 1 - F(max\{r,t\}) + \int_0^r \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l} > t)\,\mathrm{d}F(l).^8$$

Teniendo en cuenta el teorema 2.1.5, en la página 18, puesto que $1 - F(max\{r,t\})$ es una función acotada, la única solución acotada en los intervalos finitos y que se anula en $(-\infty, 0)$ es:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r > t) = 1 - F(max\{r,t\}) + \int_0^r [1 - F(max\{r-l,t\})]\,\mathrm{d}m(l).$$

□

Es relevante el estudio de la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}_r^+, \mathscr{E}_r^-)$. Obtenemos:

Proposición 2.1.19. *Las variables aleatorias $\{\mathscr{E}_r^-\}_{r>0}$ y $\{\mathscr{E}_r^+\}_{r>0}$ tienen la siguiente función de distribución conjunta:*

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq x, \mathscr{E}_r^- \leq y) = \int_{r-y}^r [F(r+x-l) - F(r-l)]\ \mathrm{d}U(l), x \in [0,+\infty), y \in [0,r]} \tag{2.31}$$

Demostración. Por las definiciones de las variables aleatorias $\mathscr{E}_r^+$ y $\mathscr{E}_r^-$ obtenemos:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq x, \mathscr{E}_r^- \leq y) = \sum_{N(r)} \mathbb{P}(t_{N(r)+1} - r \leq x, r - t_{N(r)} \leq y) = \sum_{N(r)} \mathbb{P}(r \leq t_{N(r)+1} \leq r+x, r-y \leq t_{N(r)} \leq r) =$$

$$= \sum_{N(r)} \mathbb{P}(r - t_{N(r)} \leq \tau_{N(r)+1} \leq r + x - t_{N(r)}, r - y \leq t_{N(r)} \leq r) = \int_{r-y}^r [F(r+x-l) - F(r-l)]\ \mathrm{d}U(l).$$

Teniendo en cuenta que F^{*n} es la función de distribución de $t_n, n \in \mathbb{N}$ y F la de $\tau_i, i \in \mathbb{N}$ y sumando para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

[8] *En realidad tendríamos:*

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r > t \diagup \tau_1 = l) = \begin{cases} 1, & si\, l > max\{r,t\} \\ \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l} > t), & si\, l \leq max\{r,t\} \end{cases}$$

Pero si $r < \tau_1 = l < t$ no ha habido renovaciones antes de r, con lo cual $\mathscr{E}_r = t_1 - t_0 = \tau_1 < t$ y por lo tanto $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r > t \diagup \tau_1 = l) = 0$ si $l \in (r,t)$.

Es posible obtener la función de densidad conjunta teniendo en cuenta las propiedades de las funciones de distribución en $\mathbb{R}^2$.

Proposición 2.1.20. *Las variables aleatorias* $\{\mathscr{E}_r^-\}_{r>0}$ *y* $\{\mathscr{E}_r^+\}_{r>0}$ *tienen la siguiente función de densidad conjunta, suponiendo que las variables aleatorias tiempos de espera* $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *tengan función de densidad* f*:*

$$\boxed{f_{\mathscr{E}_r^+,\mathscr{E}_r^-}(x,y) = f(x+y)U'(r-y), x \in [0,+\infty), y \in [0,r]} \tag{2.32}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 2.1.19 (en el caso en que $y<r$), es evidente que se cumplen las condiciones que nos permiten afirmar que:

$$f_{\mathscr{E}_r^+,\mathscr{E}_r^-}(x,y) = \frac{\partial^2\left[\int_{r-y}^r [F(x+r-l)-F(r-l)]\,\mathrm{d}U(l)\right]}{\partial x\partial y} = \frac{\partial\left[\int_{r-y}^r f(x+r-l)\,\mathrm{d}U(l)\right]}{\partial y} =$$

$$= f(x+r-(r-y)U'(r-y)(-\frac{\mathrm{d}(r-y)}{\mathrm{d}y}) = f(x+y)U'(r-y).$$

□

Para la cola de la distribución conjunta obtenemos:

Proposición 2.1.21. *Las variables aleatorias* $\{\mathscr{E}_r^-\}_{r>0}$ *y* $\{\mathscr{E}_r^+\}_{r>0}$ *verifican:*

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x, \mathscr{E}_r^- > y) = 1 - F(x+r) + \int_0^{r-y} \mathrm{d}m(l)\,[1-F(x+r-l)]\,, x \in [0,+\infty), y \in [0,r]} \tag{2.33}$$

[9]

Es posible dar una demostración usando las propiedades de la ecuación de renovación:

Demostración. Definimos $g(r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > x)$. Condicionando por los valores que toma τ_1, si $\tau_1 > x+r$ no ha habido ninguna renovación antes de r con lo cual $r \in [0,\tau_1)$ y $\mathscr{E}_r^- = r - 0 = r > y$ por hipótesis; al mismo tiempo $\mathscr{E}_r^+ = \tau_1 - r > x + r - r = x$ y por lo tanto en este caso $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > x / \tau_1 = l > x+r) = 1$. Si $\tau_1 \le x+r$: $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > x/\tau_1 = l \le x+r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^- > y, \mathscr{E}_{r-l}^+ > x) = g(r-l)$. Es decir:

[9] *Es interesante destacar que teniendo en cuenta esta identidad, también se puede calcular:*

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > 0) = 1 - F(0+r) + \int_0^{r-y} \mathrm{d}m(l)\,[1-F(0+r-l] = 1 - F(r) + \int_0^{r-y} \mathrm{d}m(l)\,[1-F(r-l)]\,.$$

Por comprobación directa de sus probabilidades se puede comprobar que los sucesos $\{\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > x\}$ y $\{\mathscr{E}_{r-y}^+ > x+y\}$ *tienen la misma probabilidad.*

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > x \diagup \tau_1 = l) = \begin{cases} 1, & \text{si } l > x + r \\ \\ \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^- > y, \mathscr{E}_{r-l}^+ > x), & \text{si } l \leq x + r \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total, obtenemos:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > x \diagup \tau_1 = l)\, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= \int_0^{x+r} \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^- > y, \mathscr{E}_{r-l}^+ > x)\, \mathrm{d}F(l) + \int_{x+r}^{+\infty} \mathrm{d}F(l) = 1 - F(x+r) + \int_0^{x+r} \mathbb{P}(\mathscr{E}_{r-l}^- > y, \mathscr{E}_{r-l}^+ > x)\, \mathrm{d}F(l).$$

Si $r - y < \tau_1 < r$, se cumple que $\mathscr{E}_r^- = r - t_1 < r - (r - y) = y$ con lo cual $\tau_1 < r - y < r$. Por lo tanto:

$$g(r) = 1 - F(x+r) + \int_0^r g(r-l)\, \mathrm{d}F(l) = 1 - F(x+r) + \int_0^{r-y} g(r-l)\, \mathrm{d}F(l).$$

Se cumplen las condiciones que nos permiten afirmar que:

$$g(r) = 1 - F(x+r) + \int_0^{r-y} [1 - F(x + r - l)]\, \mathrm{d}m(l).$$

Concluimos que, efectivamente, se verifica 2.33.

□

A continuación vamos a estudiar la distribución del *"excess life"*, $\mathscr{E}_r^+$, condicionada por el *"current life"*, $\mathscr{E}_r^-$. Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.1.22. *Dado $\mathscr{E}_r^- = l \leq r$, la distribución de las variables aleatorias $\{\mathscr{E}_r^+\}_{r>0}$ es independiente de r, y verifica:*

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x \diagup \mathscr{E}_r^- = l) = \frac{\bar{F}(x+l)}{\bar{F}(l)}, x \in [0, +\infty)} \tag{2.34}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el lema 2.1.3, en la página 24, obtenemos:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x \diagup \mathscr{E}_r^- = l) = \frac{\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x, \mathscr{E}_r^- = l)}{\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- = l)} = \frac{\mathbb{P}(t_{N(r)+1} - r > x, t_{N(r)} = r - l, \tau_{N(r)+1} > l)}{\mathbb{P}(t_{N(r)} = r - l, \tau_{N(r)+1} > l)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\tau_{N(r)+1} + t_{N(r)} > x + r, t_{N(r)} = r - l, \tau_{N(r)+1} > l)}{\mathbb{P}(t_{N(r)} = r - l, \tau_{N(r)+1} > l)} = \frac{\mathbb{P}(\tau_{N(r)+1} > x + l, \tau_{N(r)+1} > l)\mathbb{P}(t_{N(r)} = r - l)}{\mathbb{P}(t_{N(r)} = r - l)\mathbb{P}(\tau_{N(r)+1} > l)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\tau_{N(r)+1} > x + l)}{\mathbb{P}(\tau_{N(r)+1} > l)} = \frac{1 - F(x+l)}{1 - F(l)} = \frac{\overline{F}(x+l)}{\overline{F}(l)}.$$

Teniendo en cuenta que $N(r) \in \mathbb{N}\ \forall r \geq 0$ y que las variables aleatorias $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ estan idénticamente distribuidas con función de distribución F, concluimos que la distribución de $\{\mathscr{E}_r^+\}_{r\geq 0}$ no depende del valor r.

$\square$

Proposición 2.1.23. *Si τ_i tiene función de densidad f la distribución de $\mathscr{E}_r^+$ condicionada por $\mathscr{E}_r^- = l$ tiene función de densidad:*

$$\boxed{f_{\mathscr{E}_r^+/\mathscr{E}_r^-=l}(x) = \frac{f(x+l)}{\bar{F}(l)}, x \in [0,+\infty)} \tag{2.35}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en la proposición 2.1.22, en la página 30, deducimos para la función de distribución condicionada:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq x/\mathscr{E}_r^- = l) = 1 - \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x/\mathscr{E}_r^- = l) = 1 - \frac{\bar{F}(x+l)}{\bar{F}(l)} = \frac{\bar{F}(l) - 1 + F(x+l)}{\bar{F}(l)}.$$

Derivando respecto de x obtenemos 2.35.

$\square$

En la teoría de la renovación son importantes los comportamientos cuando $r > 0$ es grande de las distribuciones deducidas anteriormente; las distribuciones cuando $r \to +\infty$ de las variables aleatorias $\mathscr{E}_r^-$, $\mathscr{E}_r^+$y $\mathscr{E}_r$ y para su deducción es fundamental el uso del teorema 2.1.6, en la página 19, el denominado, no sin motivo, “Teorema Clave de la Renovación” de Smith ([139]). Salvo que se diga lo contrario, suponemos que $\mu = \mathbb{E}(\tau_1),\ 0 < \mu < +\infty$.

Teorema 2.1.9. *Para valores grandes de $r > 0$ la función de distribución de $\mathscr{E}_r^+$ verifica:*[10]

$$\boxed{\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(l)]\ \mathrm{d}l} \tag{2.36}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 2.1.9, en la página 20 y el teorema 2.1.6, en la página 19 obtenemos:

$$\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq t) = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} (F(t+u) - F(u))\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} ([1-F(u)] - [1-F(u+t])\ \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\int_0^{+\infty} (1-F(u))\ \mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} (1-F(u+t))\ \mathrm{d}u\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\int_0^{+\infty} (1-F(u))\ \mathrm{d}u - \int_t^{+\infty} (1-F(l))\ \mathrm{d}l\right] = \frac{1}{\mu}\int_0^t (1-F(l))\ \mathrm{d}l.$$

[10] *Siendo $\mu = \mathbb{E}(\tau_i)$ y F la función de distribución de τ_i.*

Dando un cambio apropiado de variable.

$\square$

Para la cola de la distribución se deduce trivialmente el siguiente teorema:

Teorema 2.1.10. *Para valores grandes de $r > 0$ la cola de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^+$ verifica:*

$$\boxed{\lim_{r \to +\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > t) = \frac{1}{\mu} \int_t^{+\infty} [1 - F(l)] \, \mathrm{d}l} \tag{2.37}$$

Demostración. Por la proposición 2.1.10, en la página 21 y el teorema 2.1.6, en la página 19 tenemos:

$$\lim_{r \to +\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} [1 - F(t+u)] \, \mathrm{d}u.$$

Dando un cambio de variable obtenemos 2.37.

$\square$

Para el *current life* obtenemos los siguientes teoremas:

Teorema 2.1.11. *Para valores de $r > 0$ grandes la función de distribución de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^-$ verifica:*

$$\boxed{\lim_{r \to +\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- \leq t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{t} [1 - F(l)] \, \mathrm{d}l} \tag{2.38}$$

Demostración. Por la proposición 2.1.13, en la página 24 y razonando de un modo semejante a los teoremas anteriores obtenemos 2.38.

$\square$

En el caso de la cola de la distribución deducimos:

Teorema 2.1.12. *Para valores grandes de $r > 0$, la cola de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^-$ verifica:*

$$\boxed{\lim_{r \to +\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t) = \frac{1}{\mu} \int_t^{+\infty} [1 - F(l)] \, \mathrm{d}l} \tag{2.39}$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $r > t$, se cumple que $r - t > 0$ y podemos denominar a esa cantidad por $u > 0$, con lo cual teniendo en cuenta la proposición 2.1.15, en la página 25, obtenemos:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t) = 1 - F(u+t) + \int_0^u \mathrm{d}m(l) \, [1 - F(u+t-l)] \, .^{11}$$

[11] *Teniendo en cuenta la definición de producto de convolución se cumple:*

$$\int_0^u \mathrm{d}m(l)[1 - F(u+t-l)] = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}m(l)[1 - F(u+t-l)] = \int_0^{u+t} \mathrm{d}m(l)[1 - F(u+t-l)].$$

Pues en el producto de convolución por convenio la integral es nula para aquellos valores en los cuales la función integrando toma valores negativos.

Por lo tanto, teniendo en cuenta el teorema 2.1.6, en la página 19 obtenemos:

$$\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > t) = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} [1 - F(u+t)]\, \mathrm{d}u.$$

Dando un cambio de variable concluimos 2.39.

□

Del mismo modo para el *total life* deducimos:

Teorema 2.1.13. *Para valores grandes de $r > 0$ la función de distribución de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r$ verifica:*

$$\boxed{\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r \leq t) = \frac{1}{\mu}\int_0^{t} l\, \mathrm{d}F(l)} \tag{2.40}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 2.1.16, en la página 26 obtenemos:

$$\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r \leq t) = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} [F(t) - F(u)]\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} du \int_u^t \mathrm{d}F(l) =$$

$$\{0 \leq u \leq +\infty \wedge u \leq l \leq t\} \Rightarrow \{0 \leq u \leq l \wedge 0 \leq l \leq t\}.$$

Con lo cual

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^t \mathrm{d}F(l) \int_0^l \mathrm{d}u = \frac{1}{\mu}\int_0^t l\, \mathrm{d}F(l).$$

□

Teorema 2.1.14. *Para valores grandes de $r > 0$ la cola de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r$ verifica:*

$$\boxed{\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r > t) = \frac{1}{\mu}\int_t^{+\infty} l\, \mathrm{d}F(l)} \tag{2.41}$$

Demostración. Por la proposición 2.1.18, en la página 27, y razonando como en los anteriores casos, obtenemos:

$$\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r > t) = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} [1 - F(max\{u,t\}]\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}u \int_{max\{u,t\}}^{+\infty} \mathrm{d}F(l) =$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}u \int_u^{+\infty} \mathrm{d}F(l).$$

Dando un cambio trivial del recinto de integración obtenemos 2.41.

□

Para el caso de la variable $(\mathscr{E}_r^-, \mathscr{E}_r^+)$ obtenemos los siguientes teoremas:

Teorema 2.1.15. *Para valores grandes de $r > 0$ la distribución de la cola de las variables $\mathscr{E}_r^-$ y $\mathscr{E}_r^+$ (de su distribución conjunta) verifica:*

$$\boxed{\underset{r\to+\infty}{lim} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > x) = \frac{1}{\mu}\int_{x+y}^{+\infty} [1 - F(l)]\ \mathrm{d}l} \tag{2.42}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 2.1.21, en la página 29, dando un cambio de variable, obtenemos:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > x) = 1 - F(u + x + y) + \int_0^u \mathrm{d}m(l)\,[1 - F(u + x + y - l)]\,.$$

Por lo tanto se cumple:

$$\underset{r\to+\infty}{lim} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- > y, \mathscr{E}_r^+ > x) = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} [1 - F(u + x + y)]\ \mathrm{d}u.$$

Denotando $u + x + y = l,\ du = dl$ obtenemos 2.42.

□

Teorema 2.1.16. *Para valores grandes de $r > 0$ la distribución conjunta de $\mathscr{E}_r^-$ y $\mathscr{E}_r^+$ verifica:*

$$\boxed{\underset{r\to+\infty}{lim} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^- \le y, \mathscr{E}_r^+ \le x) = \frac{1}{\mu}\int_0^{x+y} [1 - F(l)]\ \mathrm{d}l} \tag{2.43}$$

Demostración. Inmediata teniendo en cuenta la proposición 2.1.21, en la página 29.

□

Se puede demostrar que las tres familias de variables aleatorias $\{\mathscr{E}_r^-\}_{r>0},\ \{\mathscr{E}_r\}_{r>0}$, y $\{\mathscr{E}_r^+\}_{r>0}$ forman procesos de Markov con probabilidades de transición estacionarias, y por lo tanto los anteriores teoremas límites representan ejemplos de teoremas ergódicos para procesos de Markov pero por razones de brevedad, y teniendo en cuenta el objetivo de esta monografía, no lo haremos (se puede consultar, en relación con esta línea de investigación, entre otros, W. Feller ([45]), S. Karlin y H. Taylor ([70]).

Es importante calcular la media de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^+ = t_{N(r)+1} - r$. Para ello primero vamos a calcular $\mathbb{E}(t_{N(r)+1})$ y hemos de tener en cuenta que no se puede afirmar que:

$$\mathbb{E}(t_{N(r)+1}) = \mathbb{E}(\tau_1 + \cdots \tau_{N(r)+1}) = \sum_{i=1}^{N(r)+1} \mathbb{E}(\tau_i) = \mathbb{E}(\tau_1)\mathbb{E}(N(r) + 1).$$

Esto es debido a que en general **no hay** independencia entre la cantidad de sumandos (que es una variable aleatoria) y la suma de esos sumandos.

Lema 2.1.4. Identidad de Wald para los procesos de renovación. *Se verifica* $\forall\, r > 0$

$$\boxed{\mathbb{E}(t_{N(r)+1}) = \mu\,[1+m(r)]\,,\ \mu = \mathbb{E}(\tau_1) < +\infty} \tag{2.44}$$

Demostración. Procederemos usando una ecuación de renovación, para lo cual vamos a condicionar por los valores que toma τ_1; si $\tau_1 = l > r\ :\ N(r) = 0$ con lo cual $t_{N(r)+1} = \tau_1 = l$; si $\tau_1 = l < r$:

$$t_{N(r)+1} = l + \sum_{i=1}^{N(r)+1-N(t_1)} \tau_i = l + \sum_{i=1}^{N(r-t_1)+1} \tau_i = l + t_{N(r-l)+1}.$$

Por la proposición 2.1.3, en la página 14.
Por lo tanto:

$$\mathbb{E}(t_{N(r)+1} \big/ \tau_1 = l) = \begin{cases} l, & \text{si } l > r \\ l + \mathbb{E}(t_{N(r-l)+1}), & \text{si } l \leq r \end{cases}$$

Por el teorema de la probabilidad total:

$$\mathbb{E}(t_{N(r)+1}) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(t_{N(r)+1} \big/ \tau_{1=l})\,\mathrm{d}\mathbb{P}_{\tau_1} =$$

$$= \int_r^{+\infty} l\,\mathrm{d}F(l) + \int_0^r \left[l + \mathbb{E}(t_{N(r-l)+1})\right]\,\mathrm{d}F(l) =$$

$$= \mu + \int_0^r \mathbb{E}(t_{N(r-l)+1})\,\mathrm{d}F(l).$$

Es una ecuación de renovación con $\mu = \mathbb{E}(\tau_1)$ constante, y teniendo en cuenta el teorema 2.16, en la página 18, obtenemos que

$$\mathbb{E}(t_{N(r)+1}) = \mu + \int_0^r \mu\,\mathrm{d}m(l) = \mu + \mu m(r) = \mu\,[1+m(r)]\,.$$

$\square$

Ahora es inmediato demostrar la siguiente proposición:

Proposición 2.1.24. *La variable aleatoria* $\mathscr{E}_r^+$ *tiene la siguiente media:*

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+) = \mathbb{E}(t_{N(r)+1} - r) = \mu\,[1+m(r)] - r,\ \mu = \mathbb{E}(\tau_1) < +\infty} \tag{2.45}$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $\mathscr{E}_r^+ = t_{N(r)+1} - r$, se verifica:[12]

$$\mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+) = E(t_{N(r)+1} - r) = \mu\,[1 + m(r)] - r.$$

□

Vamos a estudiar el valor que toma $\mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+)$ para valores grandes de $r > 0$.

Proposición 2.1.25. *Si los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no tienen función de distribución aritmética se verifica:*

$$\boxed{\lim_{r\to+\infty} \mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+) = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu},\ 0 < \mu < +\infty,\ \sigma^2 < +\infty} \tag{2.46}$$

Siendo $\mu = \mathbb{E}(\tau_i)$, $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[(\tau_i - \mu)^2\right]$ (la varianza de los tiempos de espera).

Demostración. Condicionando por el valor que toma $t_1 = \tau_1$:

$$\mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+ \diagup \tau_1 = l) = \begin{cases} l - r, & l \geq r \\ \mathbb{E}(\mathscr{E}_{r-l}^+), & l < r \end{cases}$$

Por el teorema de la probabilidad total:

$$\mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+ \diagup \tau_1 = l)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_{\tau_1}(l) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+ \diagup \tau_1 = l)\,\mathrm{d}F(l) =$$

$$= \int_r^{+\infty} (l - r)\,\mathrm{d}F(l) + \int_0^r \mathbb{E}(\mathscr{E}_{r-l}^+)\,\mathrm{d}F(l).$$

Se trata de una ecuación de renovación de la forma

$$f(r) = g(r) + \int_0^r f(r - l)\,\mathrm{d}F(l).$$

con $g(r) = \int_r^{+\infty} (l - r)\,\mathrm{d}F(l)$. Vamos a calcular esa integral:

$$\int_r^{+\infty} (l - r)\,\mathrm{d}F(l) = \int_0^{+\infty} s\,\mathrm{d}F(s + r) =$$

12 *Teniendo en cuenta que $m(0) = 0$.*

$$= \int_0^{+\infty} (1 - F(s+r))\, \mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \int_{s+r}^{+\infty} \mathrm{d}F(u)^{13}$$

Teniendo en cuenta ahora el teorema 2.1.6, en la página 19, obtenemos:

$$\underset{r\to+\infty}{lim}\, \mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+) = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} g(r)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty}\int_{s+r}^{+\infty} \mathrm{d}F(u)\right)\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}F(u) = \frac{1}{2\mu}\int_0^{+\infty} u^2\,\mathrm{d}F(u) = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}.$$

Después de varios cambios de variable triviales.

□

Las implicaciones prácticas de los resultados deducidos son importantes, y en algunos casos sorprendentes. Como ejemplos de la sutileza que es necesario tener a la hora de estudiar los procesos de renovación vamos a examinar dos paradojas clásicas en el estudio de los procesos renovados.

2.1.4. Las paradoja de los tiempos de espera y del inspector.

Las referencias a ambas paradojas son muy abundantes en la literatura (W. Feller,[45])), nosotros únicamente las estudiaremos de un modo general, sin profundizar en los detalles.

La paradoja de los tiempos de espera.

En relación con el *excess life,* el *current life* y el *total life* destaca la denominada *Paradoja de los Tiempos de Espera,* que en la abundante literatura sobre la Teoría de la Renovación ha sido estudiada con diferentes nombres y en diferentes ejemplos a causa de sus serias implicaciones. De un modo informal, podemos decir que tenemos un proceso de renovación en el cual la sucesión de tiempos de espera, $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ está formada por variables aleatorias independientes, igualmente distribuidas (positivas), con función de distribución F y media μ. Relacionada con ellas, la sucesión de tiempos de renovación, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}, t_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$, representa los tiempos en los que se ha producido la renovación n-ésima, y por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, el intervalo $[t_n, t_{n+1})$ es el período de tiempo transcurrido entre la n-ésima renovación y la (n+1)-ésima renovación.

Dado un cierto $r > 0$ estamos interesados en calcular la media de la longitud del intervalo $[t_{N(r)}, t_{N(r)+1})$. Ingenuamente, podemos pensar:

[13] *Teniendo een cuenta que:*

$$\int_0^{+\infty} s\,\mathrm{d}F(s+r) = \int_0^{+\infty}\int_0^{s} dx\,\mathrm{d}F(s+r) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_x^{+\infty} \mathrm{d}F(s+r) = \int_0^{+\infty} [F(+\infty+r) - F(x+r)]\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} [1 - F(x+r)]\,\mathrm{d}x.$$

$$t_{N(r)+1} - t_{N(r)} = \sum_{i=1}^{N(r)+1} \tau_i - \sum_{i=1}^{N(r)} \tau_i = \tau_{N(r)+1}$$

Y teniendo en cuenta la equidistribución de los tiempos de espera, la media esperada de la longitud del intervalo sería μ. Sin embargo, eso no es así, pues hemos deducido la distribución de $\mathscr{E}_r, r > 0$ (proposiciones 2.1.16 y 2.1.17, en la página 26) y observamos que su distribución no es la misma que la de τ_i. ¿Hay contradicción?. En realidad no, pues el $\tau_{N(r)+1}$ es el ***único*** que cumple $t_{N(r)} \leq r < t_{N(r)+1}$, y por lo tanto su distribución coincide con la de $\mathscr{E}_r$. Si nos fijamos, primero hemos elegido $r > 0$, y a continuación calculamos la media de la longitud de los intervalos que cubren a ese r en concreto... pero evidentemente, los intervalos de mayor longitud tienen una probabilidad de cubrirlo mayor.

Examinemos un ejemplo: Un viajero A está en una estación de autobuses, los cuales llegan de acuerdo con un proceso de Poisson, siendo la media del tiempo esperado entre la llegada de dos autobuses $\frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$. A ha llegado en un tiempo r, siendo su tiempo de llegada independiente de los autobuses. ¿Cuál es la media de su tiempo de espera para coger el siguiente autobús?. Se pueden dar dos respuestas diferentes:

- Teniendo en cuenta que es un proceso de Poisson, la falta de memoria implica que la distribución de su tiempo de espera no debe depender del tiempo de llegada, y por lo tanto la respuesta sería $\frac{1}{\alpha}$.
- Como su tiempo de llegada entre dos autobuses consecutivos es aleatorio, su tiempo esperado, su media, debe ser la mitad del tiempo de espera entre dos autobuses consecutivos; es decir, $\frac{1}{2\alpha}$.

Sin embargo, como mencionamos anteriormente, el error está en considerar que ese tiempo de espera $\tau_{N(r)+1}$ tiene una distribución exponencial de parámetro α, cuando en realidad coincide con la de $\mathscr{E}_r$.

Razonemos usando los resultados deducidos con anterioridad. El viajero A ha llegado en un determinado tiempo $r > 0$ y quiere saber cual es la media de su tiempo de espera hasta subirse al siguiente autobus. Es decir, que quiere conocer la media de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^+ = t_{N(r)+1} - r$, para la cual hemos deducido su función de distribución en la proposición 2.1.9, en la página 20:

$$\phi(x/r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq x) = \int_0^r \mathrm{d}U(l)\,[F(x+r-l) - F(r-l)] =$$

$$= e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^r \frac{\alpha^n l^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha l} \left[e^{-\alpha(r-l)} - e^{-\alpha(x+r-l)}\right] \mathrm{d}l =$$

$$= e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^r \frac{\alpha^n l^{n-1}}{(n-1)!} \left[e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)}\right] \mathrm{d}l =$$

$$= e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)} + \left[e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)}\right] \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^r \frac{\alpha^n l^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d}l =$$

$$= e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)} + \left[e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)}\right] \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha^n l^n}{(n-1)! \cdot n}\right]_0^r =$$

$$= e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)} + \left[e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)}\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n r^n}{n!} =$$

$$= e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)} + \left[e^{-\alpha r} - e^{-\alpha(x+r)} \right] (e^{\alpha r} - 1) =$$
$$= 1 - e^{\alpha x} = F(x).$$

Es decir, que la distribución del tiempo de espera para coger el próximo autobús a partir de $r > 0$ coincide con la distribución del tiempo de espera τ_i, y por lo tanto la media del tiempo esperado a partir de la llegada de A en $r > 0$ es $\frac{1}{\alpha}$ como habíamos aventurado en la primera respuesta.

Para $\mathscr{E}_r$ también hemos deducido su distribución en la proposición 2.1.16, en la página 26:

$$\beta(x/r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r \leq x) = \int_{r-x}^{r} \mathrm{d}U(l) \left[F(x) - F(r-l) \right].$$

Derivando la anterior identidad, y teniendo en cuenta que se trata de un proceso poisonniano, obtenemos la siguiente identidad para la función de densidad:

$$f_{\mathscr{E}_r}(x) = \begin{cases} \alpha^2 x e^{-\alpha x}, & \text{si } 0 < x \leq r \\ \alpha(1 + \alpha r) e^{-\alpha x}, & \text{si } r < x \end{cases}$$

Vamos ahora a calcular la media de la longitud de ese intervalo que cumple $t_{N(r)+1} \leq r < t_{N(r)}$, $\mathbb{E}(\mathscr{E}_r)$.

$$\mathbb{E}(\mathscr{E}_r) = \int_0^{+\infty} x f_{\mathscr{E}_r}(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{r} x\alpha^2 x e^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x + \int_r^{+\infty} x\alpha(1+\alpha r) e^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha}.$$

Ese resultado nos confirma lo dicho: la distribución de $\tau_{N(r)+1}$ que cumple $t_{N(r)} \leq r < t_{N(r)+1}$ no es la común de las variables aleatorias tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Fijándonos con más detalle vemos que

$$\lim_{r \to +\infty} \mathbb{E}(\mathscr{E}_r) = \lim_{r \to +\infty} \left(\frac{2}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha} \right) = \frac{2}{\alpha}.$$

Con lo cual obtenemos que cuando los valores de $r > 0$ son grandes la longitud esperada del intervalo particular $t_{N(r)} \leq r < t_{N(r)+1}$ es $\frac{2}{\alpha}$ y la segunda respuesta que habíamos dado es correcta: el tiempo esperado (su media) es la mitad del esperado para el intervalo de llegada entre dos autobuses consecutivos. Lo que ocurre es que en este caso ese tiempo esperado ya no es $\frac{1}{\alpha}$ sino $\frac{2}{\alpha}$, y no hay contradicción. Este hecho sorprendente tiene serias implicaciones y se puede generalizar a cualquier proceso de renovación.

En efecto, supongamos ahora el proceso de renovación general del que hablábamos al principio. En el teorema 2.1.9, en la página 31, se obtuvo la distribución límite, para valores grandes de $r > 0$ (procesos “viejos”, que llevan mucho tiempo funcionando) de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^+$; en el teorema 2.1.11, en la página 32, de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^-$ y en el teorema 2.1.13, en la página 33 de $\mathscr{E}_r$. A la vista de esos resultados observamos que la distribución de $\mathscr{E}_r^+$, igual que ocurría en los procesos poisonnianos, no coincide con la distribución de $\mathscr{E}_r$, pero sí con la de $\mathscr{E}_r^-$. Por ello sería un error tomar el valor esperado hasta que ocurra la siguiente renovación desde $r > 0$, $\mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+)$, como representativo para estimar el valor esperado del tiempo entre dos renovaciones consecutivas.

Otro ejemplo clásico en la literatura es la denominada *paradoja de inspección (o del inspector).*

La paradoja del inspector.

Supongamos una cierta máquina en una fábrica, un equipo, en el cual se instala una pieza que permanece en la máquina hasta que se estropea, momento en el cual se sustituye de forma inmediata por otra pieza semejante y el proceso sigue sin interrupción. Aquí las épocas de renovación forman un proceso de renovación en donde τ_k es la duración de la k-ésima pieza.

El "inspector" quiere comprobar las duraciones reales mediante una inspección, para lo cual toma una muestra de piezas en funcionamiento en la época $r > 0$ y observa sus duraciones. Teniendo en cuenta que F es la distribución de la duración de todas las piezas, erroneamente puede pensar que esa es también la de la pieza inspeccionada en el momento $r > 0$, pero esto no es así: si se inspecciona esa pieza en el momento $r > 0$ ya lleva un tiempo funcionando, que se estime su duración a partir del momento r introduce un sesgo si se pretende extrapolarlo a todas las piezas: simplemente, puede que sea una pieza muy "dura", de mayor duración, y su tiempo de vida sea mucho mayor que el de las demás. El hecho riguroso es que el haber inspeccionado la pieza en el momento r, estando funcionando en ese momento, cambia la distribución de su duración: *dobla* su duración esperada.

Examinemos esto matemáticamente, usando los resultados previos:

$$\mathbb{E}(\mathscr{E}_r) = \mathbb{E}(\mathscr{E}_r^- + \mathscr{E}_r^+) = \mathbb{E}(\mathscr{E}_r^-) + \mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+) = 2\mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+).$$

Teniendo en cuenta que la distribución de $\mathscr{E}_r^-$ coincide con la distribución de $\mathscr{E}_r^+$ (para valores grandes de $r > 0$). En la proposición 2.1.24, en la página 35, hemos calculado $\mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+)$, con lo cual:

$$\mathbb{E}(\mathscr{E}_r) = 2(\mu\,[1 + m(r)] - r).$$

Usando el resultado obtenido en la proposición 2.1.25, en la página 36, vemos que para valores grandes de r se cumple:

$$\lim_{r\to+\infty} \mathbb{E}(\mathscr{E}_r) = \frac{2(\mu^2+\sigma^2)}{2\mu} = \frac{(\mu^2+\sigma^2)}{\mu}.$$

¿Quiere esto decir que para estimar la duración de ese tipo de pieza no me sirven los resultados proporcionados por una muestra, y por lo tanto la estadística "no sirve para nada"? Naturalmente que no: hay que inspeccionar piezas que se instalen a partir de ese momento $r > 0$.

En esta sección hemos investigado con cierto detalle los procesos de renovación en general y el proceso de conteo renovado en particular, enunciando y recordando resultados clásicos, muchos de ellos sin demostración, que son imprescindibles para el desarrollo de la tesis o que simplemente resultaría imperdonable no mencionar en una investigación sobre los procesos de renovación compuestos con deriva. Sin embargo, como es evidente, no son el objeto principal de nuestro estudio y por lo tanto, para ampliar conocimientos o resultados más detallados es necesario consultar la bibliografía. Estudios clásicos, pero actuales, son [39], [40], [41], [44], [45] de W. Feller, donde se estudian en profundidad los procesos de renovación (no sólo el proceso de conteo renovado), se estudian los procesos de renovación en el caso en que la distribución F de los tiempos de renovación no está concentrada en la semirrecta positiva; se relacionan los procesos de renovación con las caminatas aleatorias y se aplican en la resolución del problema de la ruina; se analizan la paradoja de los tiempos de espera y la del inspector, etc. Un estudio específico de la Teoría de la Renovación se puede consultar en [19] y [20] de D. R. Cox y en [139] de W. L. Smith, donde se estudia el modelo ordinario de los procesos de renovación, el proceso de Poisson y modelos más generales como los procesos de renovación superpuestos, los alternados y los compuestos, obteniendo resultados muy interesantes y mostrando, mediante ejemplos, posibles aplicaciones de la teoría. En una línea muy parecida tenemos [70] de S. Karlin y H. Taylor donde, además de obtener los resultados clásicos relacionados con la Teoría de la Renovación, estudian las variables aleatorias $\mathscr{E}_r^-$, $\mathscr{E}_r^+$ y $\mathscr{E}_r$. También son interesantes los estudios del proceso de Poisson, de los modelos de conteo y generalizaciones como los procesos de renovación retardados, los estacionarios, los compuestos, los alternados y los de Markov. En [57] de C. Godrèche y J. M. Luck se estudian la cantidad de sucesos que ocurren entre 0 y un tiempo dado t, el tiempo del último suceso antes de t, las variables $\mathscr{E}_r^-$ y $\mathscr{E}_r^+$ (para las cuales obtienen la transformada de Laplace de sus respectivas funciones de densidad), entre otras variables aleatorias; los resultados obtenidos los particularizan para varios casos, según la naturaleza de la distribución de los intervalos temporales. En relación con la variable "excess life", $\mathscr{E}_r^+$, en [92] de S. Losidis y P. Kostas obtienen su función de densidad, sus momentos, su varianza y estudian para $t \to +\infty$ la covarianza entre $\mathscr{E}_t^+$ y $N(t)$.

En un contexto particular, en estudios económicos y actuariales, son importantes, entre otros, [106] de T. Mikosch y G. Samorodnitsky y [132] de T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt y J. Teugels, donde usan las herramientas proporcionadas por la Teoría de la Renovación para estudiar tópicos como la "probabilidad de ruina", la "probabilidad de supervivencia" etc, que, aunque estudiadas en un contexto más general y con otra denominación, forman parte importante de esta tesis. Es interesante destacar en relación con las variables aleatorias $\mathscr{E}_r^-$ y $\mathscr{E}_r^+$ que debido a que, en general, un proceso de renovación compuesto con deriva (definición 3.1.1, en la página 50), el denominado en la literatura actuarial y financiera "risk reserve process", no es un proceso markoviano, mediante las técnicas denominadas "Backward Markovization Technique" y la "Forward Markovization Technique" se consigue transformarlo en un "Piecewise Deterministic Markov Procecess" (PDMP). Un estudio muy detallado sobre estas técnicas se puede consultar en [132] de T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt y J. Teugels.

2.2. Procesos de renovación compuestos.

Los procesos de renovación compuestos se pueden considerar como una generalización de los procesos de renovación, y sirven para modelar diferentes fenómenos aleatorios en una gran variedad de disciplinas científicas. Suelen denominarse, especialmente en contextos físicos y relacionados, CTRW (continuous-time randon walks). Son interesantes, además de los clásicos W. Feller, D. R. Cox, S. Karlin y H. Taylor, etc, los estudios de E. W. Montroll y G. H. Weiss ([109]), J. Villarroel y M. Montero ([148]),...

En esta sección deduciremos su ley de probabilidad, tanto condicionada como no condicionada, hallando las ecuaciones integrales que satisfacen. A continuación resolveremos esas ecuaciones integrales para algunos ejemplos concretos. También enunciaremos algunos otros resultados relevantes.

Definición 2.2.1. Proceso de renovación compuesto. *Dado el proceso estocástico $\{S_t\}_{t\geq 0}$ decimos que es un "proceso de renovación compuesto" si:*

$$S_t = \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k, \ \forall\, t \geq 0, \tag{2.47}$$

donde:

1. *$N(t)$ es un proceso de conteo renovado (definición 2.1.2, página 12).*
2. *$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución G.*
3. *$\tau_n \perp Y_m\ \forall \{n, m\} \in \mathbb{N}$ ($\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones mutuamente independientes).*[14]

Se trata, por lo tanto, de un proceso de saltos (definición A.4.28, página 263) cuyas llegadas $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ definen un proceso de renovación. Recordando la definición de los procesos de renovación (definición 2.1.1, en la página 11) por convención $Y_0 = 0 \ \wedge\ t_0 = 0$. A continuación vamos a estudiar la ley de probabilidad de $S_t,\ t > 0$.

2.2.1. Ley de probabilidad no condicionada.

En primer lugar vamos a deducir la ley de probabilidad no condicionada. Sea el proceso de renovación compuesto 2.2.1, se verifica la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1. *La variable aleatoria $S_t,\ t > 0$ tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{S_t}(x) = \delta_0(x)\cdot(1 - F(t)) + \frac{1}{4\pi^2 i}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\,\mathrm{d}p\cdot\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\cdot(1-\hat{f}(s))\cdot\frac{\hat{f}(s)\cdot\psi(p)}{s(1-\hat{f}(s)\cdot\psi(p))}\,\mathrm{d}s} \tag{2.48}$$

siendo $\delta_0(x)$ la función Delta de Dirac y $\psi(p)$ la función característica de la variable aleatoria Y_1.

[14] *En el capítulo 4, en la página 173, estudiaremos el caso en el cual aceptamos dependencia entre $\tau_n, Y_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Asumimos que los vectores $(\tau_k, Y_k),\ k \in \mathbb{N}$ tienen la misma distribución (proceso de renovación compuesto homogéneo).*

Demostración. Vamos a calcular la función característica de $S_t,\ t > 0,\ \varphi_{S_t}(p) = \mathbb{E}(e^{ipS_t})$:

$$\mathbb{E}(e^{ipS_t}) = \mathbb{E}(e^{ip\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{ip\sum_{j=1}^{k} Y_j} \big/ N(t) = k) \cdot \mathbb{P}(N(t) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (\psi(p))^k \cdot \mathbb{P}(N(t) = k).$$

Recordando la definición y las propiedades de las funciones generatrices, si denotamos por $G_{N(t)}(z)$ la función generatriz de $N(t)$, vemos que $E(e^{ipS_t}) = G_{N(t)}(\psi(p))$, siendo $\psi(p)$ la función característica de Y_1. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en la proposición 2.1.2, en la página 13 nos quedará:

$$\mathbb{E}(e^{ipS_t}) = \varphi_{S_t}(p) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \cdot \frac{1 - \hat{f}(s)}{s(1 - \hat{f}(s) \cdot \psi(p))} \, \mathrm{d}s.^{15}$$

No podemos asegurar que se cumpla que:

$$\lim_{|p| \to \infty} \varphi_{S_t}(p) = 0.$$

Concluimos por lo tanto que $\varphi_{S_t}(p)$ no es la función característica de una variable aleatoria absolutamente continua. Vamos a descomponer la distribución de probabilidad F_{S_t} en la suma de dos distribuciones de probabilidad, una discreta, $F_{S_t}^D$, y una absolutamente continua, $F_{S_t}^C$, siendo $F_{S_t}^D$ la distribución de probabilidad de un átomo concentrado en el $\{0\}$.

$$F_{S_t} = F_{S_t}^D + F_{S_t}^C.$$

Vamos a calcular la función característica $\varphi_{S_t}(p)$ teniendo en cuenta la anterior descomposición:

$$\varphi_{S_t}(p) = \mathbb{E}(e^{ipS_t}) = e^{ip \cdot 0} \cdot \mathbb{P}(S_t = 0) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipS_t} \cdot \mathrm{d}F_{S_t}^C =$$

$$= 1 \cdot \mathbb{P}(S_t = 0) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipS_t} \cdot \mathrm{d}F_{S_t}^C = \mathbb{P}(S_t = 0) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipS_t} \cdot \mathrm{d}F_{S_t}^C.$$

Para calcular la función característica asociada a la distribución de probabilidad $F_{S_t}^C$ despejamos, quedando:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipS_t} \cdot \mathrm{d}F_{S_t}^C = \mathbb{E}(e^{ipS_t}) - \mathbb{P}(S_t = 0) = \mathbb{E}(e^{ipS_t}) - \mathbb{P}(N(t) = 0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \cdot \frac{1 - \hat{f}(s)}{s(1 - \hat{f}(s) \cdot \psi(p))} \, \mathrm{d}s - \mathbb{P}(N(t) = 0) =$$

[15] *Siendo $\hat{f}(s)$ la transformada de Laplace de la función de densidad $f(x)$ de la variable aleatoria τ_1. Hemos elegido γ de modo que todas las singularidades de $\frac{1-\hat{f}(s)}{s(1-\hat{f}(s)\cdot z)}$ queden a la izquierda de la recta $x = \gamma$.*

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \cdot \frac{1 - \hat{f}(s)}{s(1 - \hat{f}(s) \cdot \psi(p))} \, \mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \cdot \frac{1 - \hat{f}(s)}{s} \, \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma_\infty} e^{st} \cdot (1 - \hat{f}(s)) \cdot \frac{\hat{f}(s) \cdot \psi(p)}{s(1 - \hat{f}(s) \cdot \psi(p))} \, \mathrm{d}s.$$

Hemos tenido en cuenta que:

$$\mathbb{P}(N(t) = 0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \cdot \frac{1 - \hat{f}(s)}{s} \, \mathrm{d}s.$$

Si suponemos que la anterior expresión es absolutamente integrable podemos aplicar la inversa de la transformada de Fourier (teorema A.3.14, en la página 249), quedando:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \, \mathrm{d}p \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \cdot (1 - \hat{f}(s)) \cdot \frac{\hat{f}(s) \cdot \psi(p)}{s(1 - \hat{f}(s) \cdot \psi(p))} \, \mathrm{d}s$$

siendo $g(x)$ la función de densidad asociada a la distribución de probabilidad $F_{S_t}^C$. De aquí deducimos:

$$f_{S_t}(x) = \delta_0(x) \cdot \mathbb{P}(S_t = 0) + \frac{1}{4\pi^2 i} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \, \mathrm{d}p \cdot \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \cdot (1 - \hat{f}(s)) \cdot \frac{\hat{f}(s) \cdot \psi(p)}{s(1 - \hat{f}(s) \cdot \psi(p))} \, \mathrm{d}s.$$

Teniendo en cuenta que $\mathbb{P}(S_t = 0) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = \mathbb{P}(t_1 > t) = \mathbb{P}(\tau_1 > t) = 1 - F(t)$ obtenemos 4.1.

□

2.2.2. Ley de probabilidad condicionada.

Vamos a deducir la ley de probabilidad condicionada diferenciando si el tiempo de partida es un tiempo de renovación $t_n,\ n \in \mathbb{N}$ o un tiempo $r \in (t_n, t_{n+1})$ no de renovación.

Proposición 2.2.2. *La variable aleatoria $S_{r+h},\ h > 0$ condicionada por $S_r = x$ tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{S_{r+h}/S_r = x}(y) = \delta_0(y - x)\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > h) + \frac{1}{4\pi^2 i} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(y-x)}\psi(p) \int_0^h \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{s(h-l)}[1 - \hat{f}(s)]}{s[1 - \hat{f}(s)\psi(p)]} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\phi(l/r) \, \mathrm{d}p} \tag{2.49}$$

siendo $\delta(y - x)$ la función δ de Dirac, $\psi(p)$ la función característica de la variable aleatoria Y_1, $\phi(l/r)$ la función de distribución de $\mathscr{E}_r^+$ y eligiendo $\gamma \in \mathbb{R}$ de forma adecuada.

Demostración. Vamos a calcular la función característica $\varphi_{S_{r+h}/S_r = x}(p)$:

$$\varphi_{S_{r+h}\diagup S_r=x}(p)=\mathbb{E}(e^{ipS_{r+h}}\diagup S_{r=x})=\mathbb{E}(e^{ip\sum_{k=0}^{N(r+h)}Y_k}\diagup\sum_{k=0}^{N(r)}Y_k=x)=$$

$$=\mathbb{E}(e^{ip\sum_{k=0}^{N(r)}Y_k+\sum_{k=N(r)+1}^{N(r+h)}Y_k}\diagup\sum_{k=0}^{N(r)}Y_k=x)=e^{ipx}\cdot\mathbb{E}(e^{ip\sum_{k=0}^{N(r+h)-N(r)}Y_k}\diagup\sum_{k=0}^{N(r)}Y_k=x)=$$

$$=e^{ipx}\cdot\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{E}(e^{ip\sum_{k=1}^{j}Y_k}\diagup\sum_{k=0}^{N(r)}Y_k=x,N(r+h)-N(r)=j)\mathbb{P}(N(r+h)-N(r)=j)=$$

$$=e^{ipx}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{E}(e^{ip\sum_{k=1}^{j}Y_k})\mathbb{P}(N(r+h)-N(r)=j)=$$

$$=e^{ipx}\left[\mathbb{P}(N(r+h)-N(r)=0)+\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}(e^{ip\sum_{k=0}^{N(r+h)-N(r)}Y_k})\mathbb{P}(N(r+h)-N(r)=j)\right]=$$

$$=e^{ipx}\left[\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+>h)+\sum_{j=1}^{\infty}(\psi(p))^j\int_0^h\mathbb{P}(N(h-l)=j-1)d\phi(l\diagup r)\right]=$$

Recordando el resultado obtenido en la proposición 2.1.12 en la página 23. Teniendo en cuenta las propiedades de las series y haciendo $m=j-1$ nos quedará:

$$=e^{ipx}\left[\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+>h)+\psi(p)\int_0^h\sum_{m=0}^{\infty}(\psi(p))^m\mathbb{P}(N(h-l)=m)\,\mathrm{d}\phi(l\diagup r)\right]=$$

Por la proposición 2.1.2, en la página 13, obtenemos:

$$=e^{ipx}\left[\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+>h)+\psi(p)\int_0^h G_{N(h-l)}(\psi(p))\,\mathrm{d}\phi(l\diagup r)\right].$$

Aplicando ahora la transformada inversa de Fourier nos quedará:

$$f_{S_{r+h}\diagup S_r=x}(y)=\delta(y-x)\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+>h)+\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ip(y-x)}\psi(p)\int_0^h G_{N(h-l)}(\psi(p))\cdot\,\mathrm{d}\phi(l\diagup r)\,\mathrm{d}p.$$

Siendo $\delta_0(y-x)$ la función δ de Dirac. Recordando la proposición 2.1.2, en la página 13, concluimos que se verifica 2.49.

□

Cuando el tiempo de partida es un tiempo de renovación t_n es trivial deducir el siguiente corolario:

Corolario 2.2.1. *La variable aleatoria* S_{t_n+h}*,* $h > 0$ *condicionada por* $S_{t_n} = x$ *tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{S_{t_n+h}/S_{t_n}=x}(y) = \delta_0(y-x)[1-F(h)] + \frac{1}{4\pi^2 i} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(y-x)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sh} \frac{[1-\hat{f}(s)]\hat{f}(s)\psi(p)}{s[1-\hat{f}(s)\psi(p)]} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p} \tag{2.50}$$

siendo $\delta(y-x)$ *la función* δ *de Dirac,* $\psi(p)$ *la función característica de la variable aleatoria* Y_1 *y eligiendo* $\gamma \in \mathbb{R}$ *de forma adecuada.*

Por lo tanto, la ley de probabilidad condicionada por $S_{t_n} = x$, siendo t_n un tiempo de renovación, es estacionaria en el tiempo y en el espacio y podemos suponer que el tiempo inicial será t_0; sin embargo, en general, cuando r no es un tiempo de renovación la ley de probabilidad condicionada no es estacionaria ni en el tiempo ni en el espacio. Otra implicación trivial de los anteriores resultados es que la ley de probabilidad de la variable aleatoria S_t condicionada por $S_0 = x$ podemos considerarla como la ley de probabilidad no condicionada de la variable aleatoria $S'_t = x + S_t$ (en paralelo con las "caminatas aleatorias iniciadas en x", definición A.4.26, en la página 263).

De un modo parecido a la definición de la "función de renovación" $m(t)$ en el caso de los procesos de conteo renovados, para el caso de los procesos de renovación compuestos se define la "función de tendencia (trend function)", que vamos a denotar por $M(t)$.

Definición 2.2.2. Función de tendencia. *Definimos la "función de tendencia", y la denotamos por* $M(t)$*, como* $M : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \; / \; M(t) = \mathbb{E}(S_t)),\ \forall t > 0$.

Teniendo en cuenta la definición del proceso estocástico $\{S_t\}_{t\geq 0}$ (definición 2.2.1, en la página 42) es trivial demostrar, como simple aplicación del teorema de la probabilidad total, la siguiente proposición:

Proposición 2.2.3. Identidad de Wald para los procesos de renovación compuestos. *Se verifica* $\forall\ t > 0$

$$\boxed{M(t) = \mathbb{E}(Y_1) \cdot m(t),\ \mathbb{E}(|Y_1|) < +\infty} \tag{2.51}$$

Siendo $m(t)$ *la función de renovación de los procesos de conteo renovados (definición 2.1.3, página 15).*

No es el objetivo de esta tesis el estudio de los procesos de renovación compuestos, sin embargo los siguientes resultados los enunciamos por su relevancia en contextos actuariales y financieros:

Teorema 2.2.1. *Si los tiempos entre llegadas* $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *no tienen función de distribución* F *aritmética, siendo* $\mu = \mathbb{E}(\tau_i) < \infty,\ \mu \neq 0,\ \mathbb{E}(|Y_1|) < +\infty$*, se verifica:*

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mu},\ \lim_{t\to+\infty} \frac{S_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mu},\ c.s.} \tag{2.52}$$

El anterior límite se considera nulo cuando $\mu = \infty$.

Teorema 2.2.2. *Si los tiempos entre llegadas $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no tienen función de distribución F aritmética, siendo $\mu = \mathbb{E}(\tau_i) < \infty,\ \mu \neq 0,\ \mathbb{E}(|Y_1|) < +\infty$, se verifica:*

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{t+h} - S_t}{t} = \frac{h\mathbb{E}(Y_1)}{\mu},\ h > 0 \ c.s.} \tag{2.53}$$

El anterior límite se considera nulo cuando $\mu = \infty$.

El teorema 2.2.1, que en contextos actuariales y de ciencias económicas se conoce como “renewal reward theorem”, se interpreta como que el porcentaje a largo plazo de pérdida o beneficio por unidad de tiempo es igual al porcentaje de perdida o beneficio por unidad de tiempo en un ciclo de renovación.

2.2.3. Estudio de casos particulares de distribuciones.

Una vez deducida la fórmula de la ley de probabilidad de la variable aleatoria S_t tanto condicionada como no condicionada, vamos a particularizar los resultados para algunos casos. Dado el espacio probabilistico $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sea el proceso de renovación compuesto $\{S_t\}_{t\geq 0}$ definido en él (definición 2.2.1, página 42).

a) **Caso en que los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tienen distribución exponencial de parámetro λ, $\tau_i \rightsquigarrow \varepsilon(\lambda)$.**

Vamos a deducir en primer lugar la ley de probabilidad no condicionada.

Proposición 2.2.4. (Ley de probabilidad no condicionada).*En el caso de que las variables aleatorias tiempos de espera, $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tengan distribución exponencial de parámetro λ la función de densidad de $S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{f_{S_t}(x) = \delta_0(x)e^{-\lambda t} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx-\lambda t} \cdot \left(e^{\lambda t\psi(p)} - 1\right) \mathrm{d}p} \tag{2.54}$$

La demostración en el apéndice B.1.1, en la página 265.

Para la ley de probabilidad condicionada se verifica:

Proposición 2.2.5. (Ley de probabilidad condicionada).*En el caso de que las variables aleatorias tiempos de espera, $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tengan distribución exponencial de parámetro λ la función de densidad de $S_{t+h} = \sum_{i=1}^{N(t+h)} Y_i$ condicionada por $S_t = x$ satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{f_{S_{t+h}/S_t=x}(y) = \delta_0(y-x)e^{-\lambda h} + \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(y-x)} \frac{e^{\lambda(\psi(p)-1)h}\left[1 - e^{-\lambda\psi(p)h}\right]}{\lambda} \mathrm{d}p} \tag{2.55}$$

La demostración requiere cálculos demasiado laboriosos como para transcribirlos. El razonamiento, semejante al de la anterior proposición, en el apéndice B.1.2, en la página 266.

Como una generalización del anterior caso, tenemos:

b) Caso en que los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tienen distribución Erlang de parámetros λ, n, con $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a hallar la ley de probabilidad no condicionada del proceso.

Proposición 2.2.6. Ley de probabilidad no condicionada. *En el caso de que los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tienen distribución Erlang, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon_r(n, \lambda)$, la función de densidad no condicionada satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{f_{S_t}(x) = \delta_0(x)e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}+} \tag{2.56}$$

$$\boxed{+\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx-\lambda t}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda r_i t}\left[\psi(p)-1\right]}{(r_i-1)\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(r_i-r_k)}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t\lambda)^i}{i!}\right]\mathrm{d}p}$$

Un esquema de la demostración en el apéndice B.2.1, en la página 267. Para la ley de probabilidad condicionada, tendremos (un esquema de la demostración en el apéndice B.2.2, página 268):

Proposición 2.2.7. Ley de probabilidad condicionada. *En el caso de que los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tienen distribución Erlang, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon_r(n, \lambda)$, la función de densidad condicionada satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{f_{S_{t+h}/S_t=x}(y) = \delta_0(y-x)\sum_{k=1}^{n}(\lambda h)\frac{e^{-\lambda h}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\alpha_j(t)+} \tag{2.57}$$

$$\boxed{+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(y-x)}\left[\frac{\lambda\psi(p)\left[\psi(p)-1\right]}{(n-1)!}e^{-\lambda h}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda r_i h}}{(r_i-1)\prod_{k\neq i}^{n}(r_i-r_k)}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(t)\int_0^h(\lambda l)^{k-1}e^{-\lambda r_i l}dl\right)\right]\mathrm{d}p}$$

Un estudio muy detallado de los procesos de renovación compuestos (*cumulative processes*) se puede consultar en [20] de D. R. Cox, estudiando (en el caso de independencia entre los saltos y los tiempos de espera) la función generatriz de momentos del proceso, momentos de orden superior, comportamiento asintótico, etc. Es interesante el artículo de J. Villarroel y M. Montero [148], en el cual se efectúa un estudio profundo, tanto obteniendo las ecuaciones integrales como resolviéndolas para algunos casos particulares. En un contexto diferente, estudiando las CTRW con deriva pero permitiendo resets tenemos [114] de J. Villarroel y M. Montero en el cual se obtiene no sólo la ley de probabilidad sino también una fórmula para el Mean First -Passage time. Asumiendo ciertas condiciones en [12] de A. A. Borovkov y A. A. Mogulskii se obtiene la función de densidad del proceso 2.2.1 y su comportamiento asintótico. Desde una perspectiva propia de las ciencias económicas en [103] de J. Masoliver, M. Montero, J. Perelló y G. H. Weiss se aplican las técnicas de las CTRW al estudio de la evolución de los mercados financieros obteniendo, entre otros objetos, la transformada de Laplace-Fourier para la ley de probabilidad del proceso.

Capítulo 3

Procesos de renovación compuestos sin correlación salto-tiempo y con deriva. Estudio markovianidad.

En este capítulo vamos a estudiar los procesos estocásticos de renovación compuestos con deriva, suponiendo que no hay correlación entre los tiempos de espera $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y los saltos $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El modelo que vamos a estudiar comunmente es conocido como “Modelo de Sparre Andersen” (principalmente en el ámbito de la ciencia actuarial) y es una generalización del “Modelo de Cramér-Lundberg”, en el cual los tiempos de espera τ_i siguen una distribución exponencial de parámetro λ, con lo cual el proceso de conteo $N(t)$ tiene una distribución de Poisson de parámetro λt. La literatura, tanto en el modelo clásico de Cramér-Lundberg como en el de Sparre Andersen, es muy abundante, siendo un clásico el estudio de “la probabilidad de ruina” y problemas relacionados, ya en los inicios del cálculo de probabilidades con Feller. Sería imperdonable no mencionar los estudios pioneros de P. Lundberg quien en 1903 presentó su tesis doctoral “Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks” ([95]); H. Cramér ([16]), quien desarrolló y profundizó el modelo de P. Lundberg, S. Andersen ([3]) y tantos otros que han hecho posible que en la actualidad la ciencia actuarial haya alcanzado un desarrollo notable. Relacionados con el tema de estudio en este trabajo son de destacar, entre otros, D. C. M. Dickson ([24]), D. C. M. Dickson y G. E. Willmot ([25])...y más recientemente J. Villarroel y M. Montero ([112]) y A. Paland y S. Reuveni ([120]).

Estos estudios asumian como tiempo inicial un tiempo de renovación $t_n \in \mathbb{T},\ n \in \mathbb{N}$ que debido a la naturaleza del proceso, se puede considerar $t_n = 0$, siendo $\mathbb{T}$ el conjunto de todos los tiempos de renovación. Nosotros, sin embargo, vamos a realizar un estudio más general, vamos a considerar un tiempo $r > 0$ arbitrario, que va a cumplir $r \in [t_n, t_{n+1})$.

El capítulo está organizado de la siguiente forma:

- En la primera sección estudiaremos los procesos de renovación compuestos con deriva, deduciendo su ley de probabilidad y enunciando algunos otros resultados destacados y fundamentales en ciencias económicas y financieras.

- En la segunda sección estudiaremos la markovianidad del proceso estocástico.

- En la tercera y cuarta secciones estudiaremos dos variables aleatorias, *el tiempo de primera llegada a la barrera superior* b, y el *tiempo de escape del intervalo* $[0, b]$. Dado un cierto intervalo $[0, b]$ estamos interesados en el tiempo de primera llegada a la barrera superior y el tiempo de escape del intervalo; deduciremos las identidades de renovación que satisfacen, hallaremos las ecuaciones integrales que verifican y las resolveremos para algunos casos particulares. También estudiaremos la ley de probabilidad de dichas variables aleatorias.

- En la quinta y sexta secciones, dado un intervalo $[0, b]$ estudiaremos la probabilidad de que el proceso llegue a la barrera superior y la probabilidad de que salga del intervalo. Deduciremos las identidades de renovación que satisfacen, hallaremos las ecuaciones integrales que las resuelven y solucionaremos esas ecuaciones integrales en algunos casos.

3.1. Ley de probabilidad no condicionada. Ley de probabilidad condicionada.

Definición 3.1.1. Proceso de renovación compuesto con deriva. *Dado el proceso estocástico* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *decimos que es un "proceso de renovación compuesto con deriva" si :*

1. $X_t = ct \pm S_t,\ \forall\, t \geq 0.$
2. $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *es un proceso de renovación compuesto (definición 2.2.1, página 42).*
3. c *es una cantidad constante; en principio* $c \in \mathbb{R}$.

A continuación vamos a deducir la ley de probabilidad no condicionada.

Ley de probabilidad no condicionada.

Una vez que hemos hallado la función de densidad de la variable aleatoria $S_t,\ t > 0$ (sección 2.2, página 42), es trivial deducir la de $X_t,\ t > 0$ (por simplicidad en los razonamientos, sin pérdida de generalidad, consideramos $X_t = ct + S_t,\ \forall t \geq 0$). Tenemos la siguiente proposicion:

Proposición 3.1.1. *La variable aleatoria* $X_t,\ t > 0$ *tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{X_t}(x) = f_{S_t}(x - ct)} \tag{3.1}$$

Demostración. En efecto:

$$f_{X_t}(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}(X_t \in (x, x + \,\mathrm{d}x]) = \mathbb{P}(ct + \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \in (x, x + \,\mathrm{d}x]) =$$

$$= \mathbb{P}(\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \in (x - ct, x - ct + \,\mathrm{d}x]) = f_{S_t}(x - ct)\,\mathrm{d}x.$$

Teniendo en cuenta la proposición 2.2.1, página 42.

□

Ley de probabilidad condicionada.

A continuación vamos a estudiar la ley de probabilidad del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ condicionada por $X_0 = u$, donde vamos a considerar el proceso $X_t = u + ct + \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k\ \forall\ t \geq 0$ cuando partimos de $X_0 = u$ (teniendo en cuenta los razonamientos de la sección 2.2, página 42).

Proposición 3.1.2. *La variable aleatoria* $X_t,\ t > 0$*, condicionada por* $X_0 = u,\ u \in \mathbb{R}$*, tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{X_t}(x) = f_{S_t}(x - u - ct)} \tag{3.2}$$

El razonamiento es semejante al de la demostración de la proposicion 3.1.1, página 50.

A continuación vamos a hallar la función de densidad de la variable aleatoria $X_t,\ t > 0$ condicionada por $X_r = y,\ y \in \mathbb{R},\ r \in (t_n, t_{n+1})\ \wedge\ r < t$.

Proposición 3.1.3. *La variable aleatoria $X_t,\ t > r$, condicionada por $X_r = y,\ y \in \mathbb{R},\ r \in (0, t_1)$ tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{X_t \diagup X_r = y}(x) = f_{S_t \diagup S_r = y - cr}(x - ct)} \tag{3.3}$$

Demostración. En efecto:

$$f_{X_t \diagup X_r = y}\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}(X_t \in\ \mathrm{d}x \diagup X_r = y) = \mathbb{P}(ct + \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \in (x, x +\ \mathrm{d}x] \diagup cr + \sum_{k=0}^{N(r)} Y_k = y) =$$

$$= \mathbb{P}(\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \in (x - ct, x - ct +\ \mathrm{d}x] \diagup \sum_{k=0}^{N(r)} Y_k = y - cr) =$$

$$= f_{S_t \diagup S_r = y - cr}(x - ct)\,\mathrm{d}x$$

Teniendo en cuenta la proposición 2.2.2, en la página 44.

□

Del mismo modo que en la sección 2.2, página 42, definimos la función de tendencia del proceso:

Definición 3.1.2. Función de tendencia. *Definimos la "función de tendencia", y la denotamos por $\mathbf{M}(t)$, como $\mathbf{M} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}\ /\ \mathbf{M}(t) = \mathbb{E}(X_t)),\ \forall t > 0$.*

Teniendo en cuenta la definición del proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ (definición 3.1.1, en la página 50) es trivial demostrar

Proposición 3.1.4. Identidad de Wald para los procesos de renovación compuestos con deriva. *Se verifica $\forall\ t > 0$*

$$\boxed{\mathbf{M}(t) = ct \pm M(t)} \tag{3.4}$$

Siendo $M(t)$ la función de tendencia de los procesos de renovación compuestos (definición 2.2.1, página 42 y definición 2.2.2, en la página 46).

Los siguientes resultados son inmediatos:

Teorema 3.1.1. *Si los tiempos entre llegadas $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ no tienen función de distribución F aritmética, siendo $\mu = \mathbb{E}(\tau_i) < \infty,\ \mu \neq 0,\ \mathbb{E}(|Y_1|) < +\infty$, se verifica:*

$$\boxed{\mathit{lim}_{t \to +\infty} \frac{\mathbf{M}(t)}{t} = c \pm \frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mu},\ \lim_{t \to +\infty} \frac{X_t}{t} = c \pm \frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mu},\ \mathit{c.s.}} \tag{3.5}$$

El anterior límite se considera nulo cuando $\mu = \infty$.

La demostración es inmediata teniendo en cuenta el teorema 2.2.1, en la página 46. Del mismo modo, teniendo en cuenta el teorema 2.2.2, en la página 47 es trivial la demostración del siguiente teorema:

Teorema 3.1.2. *Si los tiempos entre llegadas $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no tienen función de distribución F aritmética, siendo $\mu = \mathbb{E}(\tau_i) < \infty,\ \mu \neq 0,\ \mathbb{E}(|Y_1|) < +\infty$, se verifica:*

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{X_{t+h} - X_t}{t} = c \pm \frac{h\mathbb{E}(Y_1)}{\mu},\ h > 0\ c.s.} \tag{3.6}$$

El anterior límite se considera nulo cuando $\mu = \infty$.

El teorema 3.1.1 es fundamental en ciencias actuariales y está relacionado con la denominada *safety loading*, que se define como

$$\eta = \frac{c - \frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mu}}{\frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mu}} = c \cdot \frac{\mu}{\mathbb{E}(Y_1)} - 1,$$

cuando se considera el proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0},\ X_t = u + ct - S_t\ \forall\ t \geq 0$, siendo $\{S_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de renovación compuesto. Se puede demostrar ([16] de H. Cramér, [26] de D. C. M. Dickson, B. D. Hughes and Z. Lianzeng, [132] de T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels, etc) que cuando $\eta < 0$ la "probabilidad de ruina" es 1 y cuando $\eta > 0$ la "probabilidad de ruina" es < 1. La probabilidad de ruina es el equivalente en contextos económicos y financieros de la probabilidad de escape de un cierto intervalo, que estudiaremos en nuestro trabajo con detalle en la sección 3.6, en la página 136.

En ciencias actuariales y financieras el proceso de renovación compuesto con deriva se suele denotar por $\{R_t\}_{t\geq 0},\ R_t = u + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k,\ \forall\ t \geq 0$, donde $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ es un proceso de conteo renovado, (el conocido como *risk reserve process*), y se suele estudiar en paralelo con el proceso $\{S_t\}_{t\geq 0},\ S_t = u - R_t,\ \forall\ t \geq 0$ (el conocido como *claim surplus process*). Gran parte de los resultados que obtendremos en esta memoria, no sólo la probabilidad de ruina, admiten una interpretación particular en este contexto, como veremos.

Un estudio más general, aunque centrado en las CTRW, se puede consultar en los artículos [110] y [111], de J. Villarroel y M. Montero. También son interesantes [42] y [45] de W. Feller, donde se estudian los procesos de renovación compuestos y las caminatas aleatorias en relación con los procesos y semigrupos de Markov, derivando, en un contexto físico, la conocida como ecuación de Fokker-Planck.

Hemos obtenido la ley de probabilidad del proceso cuando el tiempo inicial es t_0 o bien un tiempo $r \in (0, t_1)$, sin embargo, en un estudio general, es necesario conocer la ley de probabilidad cuando el tiempo inicial es un tiempo de renovación $t_n \neq t_0$ o bien un tiempo $r \in (t_n, t_{n+1})$; también podríamos preguntarnos si es un proceso de Markov, cómo influye el pasado en la evolución futura del proceso, etc. En la siguiente sección vamos a estudiar con más detalle la probabilidad condicionada y algunas propiedades notables del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

3.2. Estudio markovianidad.

En esta sección vamos a estudiar la markovianidad de los procesos $\{X_t\}_{t\geq 0}$, $\{S_t\}_{t\geq 0}$. En todo lo que sigue vamos a considerar el proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$, siendo $X_t = ct - S_t,\ \forall\ t \geq 0$ (el conocido en ciencias actuariales y económicas como *modelo de Sparre Andersen*), definido en un espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ y $\{S_t\}_{t\geq 0}$ cumpliendo las condiciones de la definición 2.2.1, en la página 42. Se deducen los siguientes resultados:

Proposición 3.2.1. *Dado un proceso de renovación compuesto $\{S_t\}_{t\geq 0}$, no cumple la propiedad markoviana, no es un proceso de Markov.*

Demostración. En efecto, para que $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sea un proceso de Markov es condición necesaria que verifique la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Sin embargo, teniendo en cuenta las proposiciones 2.2.1, en la página 42, y 2.2.2, en la página 44, se verifica:

$$\mathbb{P}(S_{r+h} \in (x, x + \mathrm{d}x]) \neq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(S_r \in \mathrm{d}y)\mathbb{P}(S_{r+h} \in (x, x + \mathrm{d}x] \diagup S_r = y),$$

siendo $\mathbb{P}(S_{r+h} \in (x, x + \mathrm{d}x]) = \mathbb{P}(S_{r+h} \in (x, x + \mathrm{d}x] \diagup S_0 = 0)$.Y, por lo tanto, en general un proceso de renovación compuesto $\{S_t\}_{t\geq 0}$ no es markoviano.

□

Teniendo en cuenta la definición de proceso de renovación compuesto (2.2.1, en la página 42), o calculando de forma directa, es inmediato el siguiente corolario:

Corolario 3.2.1. *Dado el proceso de renovación compuesto $\{S_t\}_{t\geq 0}$, cumple la propiedad de "pseudomarkovianidad", se cumple la propiedad de Markov cuando consideramos el pasado $\mathscr{F} = \sigma(S_r, r \leq t_n)$, con t_n un tiempo de renovación.*

La siguiente proposición es interesante:

Proposición 3.2.2. $\{S_t\}_{t\leq t_n}$ *y* $\{S_{t_n+t} - S_{t_n}\}_{t\geq 0}$ *son independientes y se verifica que* $S_{t_n+t} - S_{t_n} \stackrel{d}{=} S_t\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \wedge\ \forall\ t \geq 0$

Demostración. Que son independientes es evidente teniendo en cuenta que $S_{t_n+t} - S_{t_n}$ es una variable aleatoria que no depende de los tiempos menores que t_n.

Vamos a estudiar la distribución de $S_{t_n+t} - S_{t_n}$:

$$\forall\ a \in \mathbb{R}\ :\ \mathbb{P}(S_{t_n+t} - S_{t_n} \leq a) = \mathbb{P}(\sum_{k=0}^{N(t_n+t)} Y_k - \sum_{k=0}^{N(t_n)} Y_k \leq a) =$$

$$= \mathbb{P}(\sum_{k=N(t_n)+1}^{N(t_n+t)} Y_k \leq a) = \mathbb{P}(\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \leq a) = \mathbb{P}(S_t \leq a).^1$$

Con lo cual podemos concluir que efectívamente $S_{t_n+t} - S_{t_n} \stackrel{d}{=} S_t\ \forall t \geq 0$.

□

[1]Teniendo en cuenta resultados ya conocidos, como las proposiciónes 2.1.3 y 2.4, en la páginas 15.

Excepto para el caso Poissoniano la distribución de $S_{r+t} - S_r$ es diferente de la de S_t $\forall\ r > 0\ \wedge\ t > 0$ (la demostración es trivial siguiendo el razonamiento anterior).

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la sección 2.2, en la página 42, es inmediata la siguiente proposición:

Proposición 3.2.3. *Dado un proceso estocástico de renovación compuesto $\{S_t\}_{t>0}$, en general no tiene probabilidades condicionadas estacionarias, ni en el tiempo ni en el espacio. Sin embargo, cuando partimos de un tiempo de renovación, las probabilidades condicionadas son estacionarias, tanto en el espacio como en el tiempo. Diremos, por lo tanto, que cumple la propiedad de "pseudoestacionariedad espacio-temporal".*

Una vez que hemos estudiado la markovianidad del proceso de renovación compuesto $\{S_t\}_{t\geq 0}$ vamos a estudiar la markovianidad del proceso de renovación compuesto con deriva $\{X_t\}_{t\geq 0}$; los resultados son inmediatos razonando con el proceso $\{S_t\}_{t\geq 0},\ S_t = ct - X_t,\ \forall\ t \geq 0$.

Proposición 3.2.4. *Dado un proceso de renovación compuesto con deriva $\{X_t\}_{t\geq 0}$, no cumple la propiedad markoviana, no es un proceso de Markov.*

Demostración. Trivial teniendo en cuenta lo demostrado en la proposición 3.2.1 y los resultados obtenidos en la sección 3.1, en la página 50.

□

El siguiente corolario es consecuencia inmediata de los resultados anteriores:

Corolario 3.2.2. *Dado el proceso de renovación compuesto con deriva $\{X_t\}_{t\geq 0}$, cumple la propiedad de "pseudomarkovianidad", se cumple la propiedad de Markov cuando consideramos el pasado $\mathscr{F} = \sigma(X_r, r \leq t_n)$, con t_n un tiempo de renovación.*

La siguiente proposición se demuestra de forma inmediata:

Proposición 3.2.5. *$\{X_t\}_{t\leq t_n}$ y $\{X_{t_n+t} - X_{t_n}\}_{t\geq 0}$ son independientes y se verifica que $X_{t_n+t} - X_{t_n} \stackrel{d}{=} X_t\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \wedge\ \forall\ t \geq 0$.*

Demostración. Que son independientes es evidente teniendo en cuenta que $X_{t_n+t} - X_{t_n}$ es una variable aleatoria que no depende de los tiempos menores que t_n.

Vamos a estudiar la distribución de $X_{t_n+t} - X_{t_n}$:

$$\forall\ a \in \mathbb{R}\ :\ \mathbb{P}(X_{t_n+t} - X_{t_n} \leq a) = \mathbb{P}(c(t_n + t) - \sum_{k=0}^{N(t_n+t)} Y_k - ct_n + \sum_{k=0}^{N(t_n)} Y_k \leq a) =$$

$$= \mathbb{P}(ct - \sum_{k=N(t_n)+1}^{N(t_n+t)} Y_k \leq a) = \mathbb{P}(ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \leq a) = \mathbb{P}(X_t \leq a).^2$$

Con lo cual podemos concluir que efectívamente $X_{t_n+t} - X_{t_n} \stackrel{d}{=} X_t\ \forall t \geq 0$.

□

Excepto para el caso Poissoniano la distribución de $X_{r+t} - X_r$ es diferente de la de X_t $\forall\ r > 0\ \wedge\ t > 0$ (la demostración es trivial siguiendo el razonamiento anterior).

Teniendo en cuenta la proposición 3.2.3 y los resultados obtenidos en la sección 3.1, en la página 50 es trivial demostrar la siguiente proposición:

[2] Teniendo en cuenta resultados ya conocidos, como las proposiciónes 2.1.3 y 2.4, en la páginas 15.

Proposición 3.2.6. *Dado un proceso estocástico de renovación compuesto con deriva $\{X_t\}_{t\geq 0}$, en general no tiene probabilidades condicionadas estacionarias, ni en el tiempo ni en el espacio. Sin embargo, cuando partimos de un tiempo de renovación, las probabilidades condicionadas son estacionarias, tanto en el espacio como en el tiempo. Diremos, por lo tanto, que cumple la propiedad de "pseudoestacionariedad espacio-temporal".*

Influencia del pasado.

Dado un tiempo r, no necesariamente un tiempo de renovación, estamos interesados en la influencia del pasado para la evolución futura del proceso. Teniendo en cuenta las características del proceso estocástico (corolario 3.2.2, página 54), es evidente que $\mathbb{P}(X_t \in B\diagup X_0) = \mathbb{P}(X_t \in B\diagup X_{t_n})\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, puesto que en general no es markoviano ni homogéneo en el tiempo (estacionario), eso no se verifica para cualquier tiempo r. Por lo tanto la distribución del proceso depende del tiempo inicial r en que la información es accesible. Nos interesará la distribución del proceso condicionada por $\mathscr{F}_r = \sigma(X_s, s \leq r)$, información completa, todo el pasado. Definimos el siguiente objeto:

Definición 3.2.1. *Definimos la probabilidad condicionada por $\sigma(X_r, \mathscr{E}_r^-)$, $r \in (t_{N(r)}, t_{N(r)+1})$ como:*

$$\boxed{\Pi(t, B; r, u, z) = \mathbb{P}(X_t \in B\diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z),\ B \in \mathscr{A},\ u \in \mathbb{R},\ \{r, z\} \in\ \mathbb{R}^+} \tag{3.7}$$

En relación con la influencia de la información que nos proporciona el pasado para la evolución futura del proceso es fundamental la siguiente proposición demostrada por J. Villarroel:

Proposición 3.2.7. (J. Villarroel). *Dado el proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ y el tiempo $r \in (t_{N(r)}, t_{N(r)+1})$ la distribución condicionada del proceso depende únicamente de la información contenida en $(X_r, \mathscr{E}_r^-)$ y el resto de la información de la historia previa es irrelevante. En concreto:*

$$\boxed{\mathbb{P}(X_t \in B\diagup \mathscr{F}_r) = \mathbb{P}(X_t \in B\diagup X_r, \mathscr{E}_r^-) = \bigsqcup_{z=0}^{r} \bigsqcup_{u} \Pi(t, B; r, u, z) I_{\{X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z\}},\ \forall B \in \mathscr{A}} \tag{3.8}$$

A partir de la anterior proposición se deduce de modo inmediato el siguiente corolario:

Corolario 3.2.3. *Dado el tiempo presente r la única información relevante para conocer la evolución futura del proceso es la contenida en $\sigma(X_r, \mathscr{E}_r^-)$.*

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la sección 3.1, en la página 50, el corolario 3.2.2, la proposición 3.2.7 y el corolario 3.2.3, podemos suponer que el tiempo inicial es $t_0 = 0$ o bien $r \in (0, t_1)$.

3.3. Tiempos de escape. Tiempos de primera llegada a la barrera superior.

En esta sección vamos a estudiar el tiempo de escape de un cierto intervalo y el tiempo de primera llegada a la "barrera superior" del intervalo. Intuitivamente, en el caso del tiempo de escape, dado un cierto intervalo $[a, b]$ queremos estudiar el tiempo en que por primera vez el suceso sale de esa zona, es decir, el tiempo t para el cual por primera vez se cumple que $X_t \notin [a, b]$. En el caso del tiempo de primera llegada estamos interesados en el tiempo t para el cual $X_t = b \ \wedge \ X_s \in (0, b) \ \forall \ 0 \leq s < t$, con la convención de considerarlo infinito si el proceso sale del intervalo $[0, b]$ antes de llegar a b (en 3.6.1, en la página 137, demostraremos que para valores grandes de t se verifica $\mathbb{P}(X_t \notin [0, b]) = 1$). Siguiendo los mismos razonamientos podríamos estudiar el tiempo de primera llegada a la barrera inferior a, sin embargo, teniendo en cuenta el carácter de la investigación y que el razonamiento es el mismo parece aconsejable omitirlo. En la literatura especializada existen muchos trabajos relativos al estudio de los "hitting times", los "exit times" y los "first passage times" en los cuales se pueden ampliar conocimientos o profundizar en los detalles. Sí que conviene resaltar que el tiempo de primera llegada que estudiaremos a continuación no es un tiempo de primer paso (un first passage time) sino un hitting time, estamos interesados en el tiempo t en el que por primera vez $X_t = b$, mientras que un tiempo de primer paso es el menor tiempo en el cual el proceso cruza la barrera; de hecho, por definición, el tiempo de primera llegada a una barrera b es mayor que el tiempo de primer paso de la barrera b. Ya en 1940 Kramers estudió la dinámica de sistemas con barreras de activación, considerando particulas brownianas y que posteriormente sería conocido como " the Kramers problem". Como referencias destacables tenemos [17], de S. N. Chiu and C. Yin, donde se estudian los first passage time en el contexto de la teoría de riesgo, [110], de J. Villarroel y M. Montero, donde se estudian los exit times en el caso de random walk, [146], de D. Valenti, B. Spagnolo and G. Bonnano, donde se estudian los hitting time en mercados financieros, [158], de Y. Zhou and J. Dou, donde se estudian los first passage time en difusión de energía...

Para el estudio vamos a simplificar el modelo asumiendo que el intervalo es $[0, b]$. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la sección 3.2 suponemos que el tiempo inicial es $t_0 = 0 \ \vee \ r \in (0, t_1)$. Empezaremos con algunas definiciones:

Definición 3.3.1. *Dado el proceso de renovación compuesto con deriva (definición 3.1.1, página 50) $X(\omega, t)$, $T = [0, +\infty)$ definido en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, denotamos para todo $0 \leq r < t$:*

$$X_{t,0}^0 = X_t = ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k, \ \forall t \geq 0. \tag{3.9}$$

$$X_{t,0}^u = u + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k, \ \forall t \geq 0. \tag{3.10}$$

$$X_{t,r}^u = u + c(t-r) - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k, \ \forall t \geq r \tag{3.11}$$

Definición 3.3.2. *Definimos el conjunto $\mathcal{F}_2^+$ como el formado por las variables aleatorias que son medibles respecto la $\sigma-$álgebra $\sigma(\tau_2, \tau_3, \cdots, \tau_n, \cdots, Y_2, Y_3, \cdots, Y_n, \cdots\}$.*

Antes de abordar el estudio de los tiempos de escape y de primera llegada a la barrera superior demostraremos el siguiente lema, que necesitaremos para deducir posteriores resultados:

Lema 3.3.1. (J. Villarroel). *La cola de la distribución de la variable "excess life", $\mathscr{E}_r^+$, condicionada por la σ-álgebra $\mathscr{F}_r = \sigma(X_s, s \leq r)$ verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x \diagup \mathscr{F}_r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x \diagup X_r, \mathscr{E}_r^-) = \frac{\overline{F}(x+z)}{\overline{F}(z)} I_{\{\mathscr{E}_r^- = z\}}} \tag{3.12}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 3.2.7 y el corolario 3.2.3, en la página 55 se verifica:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x \diagup \mathscr{F}_r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x \diagup X_r, \mathscr{E}_r^-).$$

Con lo cual (denotamos $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$):

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x \diagup N(r) = k, X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)\mathbb{P}(N(r) = k \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(\tau_{N(r)+1} - \mathscr{E}_r^- > x, N(r) = k, X_r = u, t_{N(r)} = r - z, \tau_{N(r)+1} > z)}{\mathbb{P}(N(r) = k, X_r = u, t_{N(r)} = r - z, \tau_{N(r)+1} > z)} \cdot \mathbb{P}(N(r) = k \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(\tau_{k+1} > z + x, N(r) = k, X_r = u, t_k = r - z, \tau_{k+1} > z)}{\mathbb{P}(N(r) = k, X_r = u, t_k = r - z, \tau_{k+1} > z)} \cdot \mathbb{P}(N(r) = k \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{\overline{F}(x+z)}{\overline{F}(z)} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N(r) = k \diagup \sigma) = \frac{\overline{F}(x+z)}{\overline{F}(z)}.$$

Teniendo en cuenta que τ_{k+1} es independiente de $(N(r), X_r, t_k)$ cuando $N(r) = k$ y la equidistribución de las $\tau_i,\ i \in \mathbb{N}$. Con lo cual, efectívamente, podemos afirmar que se cumple 3.12.

□

A continuación vamos a estudiar los tiempos de primera llegada a la barrera superior y de escape del intervalo $[0, b]$.

3.3.1. Tiempos de primera llegada a la barrera superior. Ecuaciones integrales.

Empezaremos con las definiciones básicas:

Definición 3.3.3. *(***Tiempo de primera llegada al nivel** b **partiendo de** $X_0 = u$**).** *Definimos el tiempo de primera llegada al nivel b partiendo de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$, y lo denotamos por t_u^b, como:*

$$\boxed{t_u^b = inf\ \left\{t > 0 : [X_{t,0}^u = b] \wedge [X_{s,0}^u \in (0,b)\ \forall\ 0 \leq s < t]\right\},\ considerando\ \infty = inf\{\emptyset\}} \quad (3.13)$$

Definición 3.3.4. *(***Tiempo de primera llegada al nivel** b **partiendo de** $X_0 = u$ **después de** τ_1**).**

Definimos el tiempo de primera llegada al nivel b partiendo de $X_0 = u,\ u \in [0,b]$ *después de* τ_1*, y lo denotamos por* $t_u^{\prime b}$*, como:*

$$\boxed{t_u^{\prime b} = inf\ \left\{t > 0 : [X_{\tau_1+t,0}^u = b] \wedge [X_{\tau_1+s,0}^u \in (0,b)\ \forall\ \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]\right\},\ considerando\ \infty = inf\{\emptyset\}} \quad (3.14)$$

Es esencial el siguiente lema:

Lema 3.3.2. *La variable aleatoria* $t_u^{\prime b}$*, tiempo de primera llegada al nivel b partiendo de* $X_0 = u,\ u \in [0,b]$ *después de* τ_1*, es independiente de* τ_1*, pertenece al conjunto* $\mathcal{F}_2^+$ *y tiene la misma distribución que* $t_{u+X_{\tau_1}}^b$*.*

Demostración. Suponiendo que $X_{\tau_1} = l$, obtenemos:

$$t_u^{\prime b} = \inf\ \left\{t : [X_{\tau_1+t,0}^u = b] \wedge [X_{\tau_1+s,0}^u \in (0,b)\ \forall\ \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]\right\} =$$

$$= \inf\ \left\{t : [u + X_{\tau_1+t} = b] \wedge [X_{\tau_1+s,0}^u \in (0,b)\ \forall\ \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]\right\} =$$

$$= \inf \left\{t : [u + c\,(\tau_1 + t) - \sum_{k=0}^{N(\tau_1+t)} Y_k = b] \wedge [X_{\tau_1+s,0}^u \in (0,b)\ \forall\ \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]\right\} =$$

$$= \inf \left\{t : [u + c\tau_1 - (Y_0 + Y_1) + ct - \sum_{k=N(\tau_1)+1}^{N(\tau_1+t)} Y_k = b] \wedge [X_{\tau_1+s,0}^u \in (0,b)\ \forall\ \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]\right\} =$$

$$= \inf \left\{t : [u + l + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k = b] \wedge [X_{s,0}^{u+l} \in (0,b)\ \forall\ 0 \leq s < t]\right\} = t_{u+X_{\tau_1}}^b.$$

Razonando de un modo trivial, y teniendo en cuenta la proposición 2.1.3, en la página 14, concluimos que efectívamente es independiente de τ_1, pertenece a $\mathcal{F}_2^+$ y tiene la misma distribución que $t_{u+X_{\tau_1}}^b$. Cuando $t_u^{\prime b} = \infty$ la demostración es trivial.

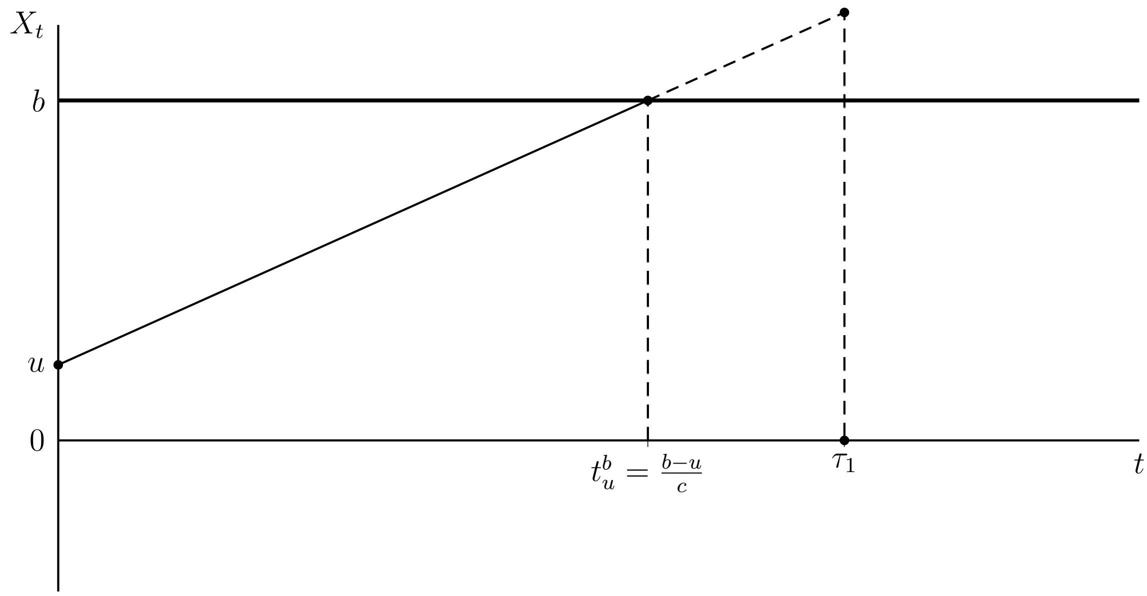
□

Vamos a estudiar a continuación los tiempos de primera llegada al nivel $b > 0$.

Teorema 3.3.1. *El tiempo de primera llegada al nivel b partiendo del origen, con $X_0 = u,\ u \in [0, b]$ satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{t_u^b = \frac{b-u}{c} I_{\left\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\right\}} + \left(\tau_1 + t_u^{'b}\right) I_{\left\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u+c\tau_1-b<Y_1<u+c\tau_1)\right\}},\ t_u^b = \infty I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, Y_1 \notin (u+c\tau_1-b, u+c\tau_1))\}}} \tag{3.15}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma τ_1 obtenemos:



- $\tau_1 > \frac{b-u}{c}$. No ha habido renovaciones antes de τ_1 con lo cual,

$$t_u^b = \inf\{t : u + X_t = b\} = \inf\{t : u + ct = b\} = \frac{b-u}{c}.$$

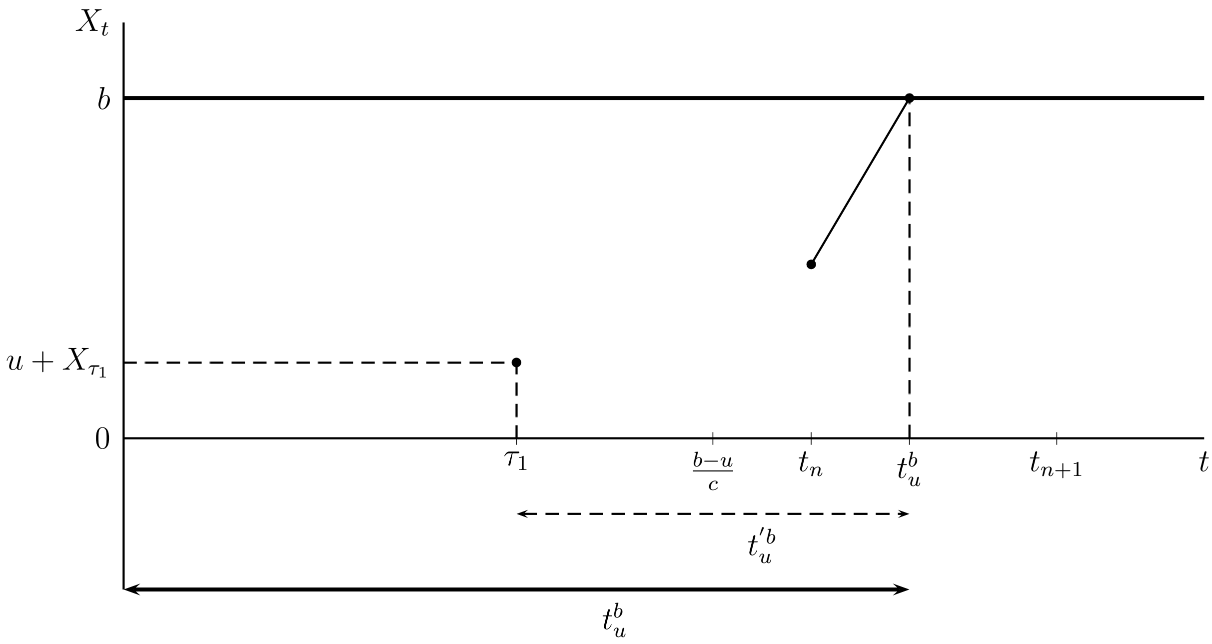
- $\tau_1 \le \frac{b-u}{c}$. En este caso, puesto que antes de τ_1 el proceso no puede llegar al nivel b, se verifica:

$$t_u^b = \tau_1 + t_u^{'b}.$$

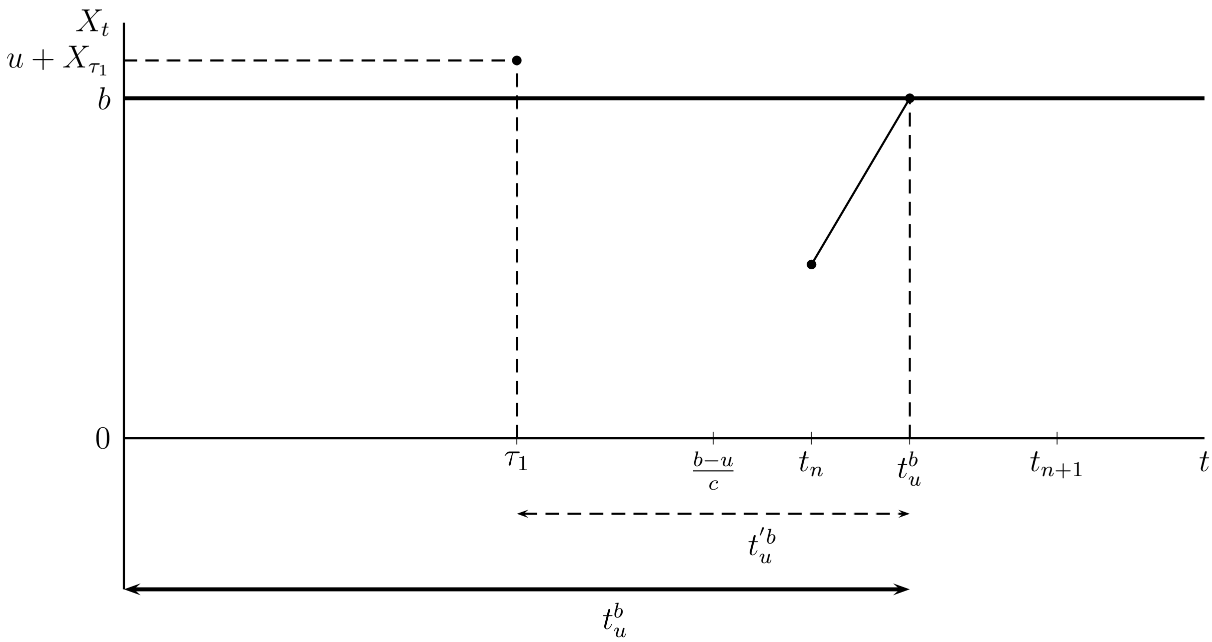
En efecto, puesto que ahora $\tau_1 \le \frac{b-u}{c}$, tenemos que considerar el valor que toma el proceso en τ_1, $u + X_{\tau_1} = u + c\tau_1 - Y_1$; puede ocurrir:

1. $u + X_{\tau_1} \in [0, b]$, en cuyo caso:

$$t_u^b = \left(\tau_1 + t_u^{'b}\right) I_{\left\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u+X_{\tau_1} \in [0,b]\right\}} = \left(\tau_1 + t_u^{'b}\right) I_{\left\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, Y_1 \in [u+c\tau_1-b, u+c\tau_1]\right\}}.$$

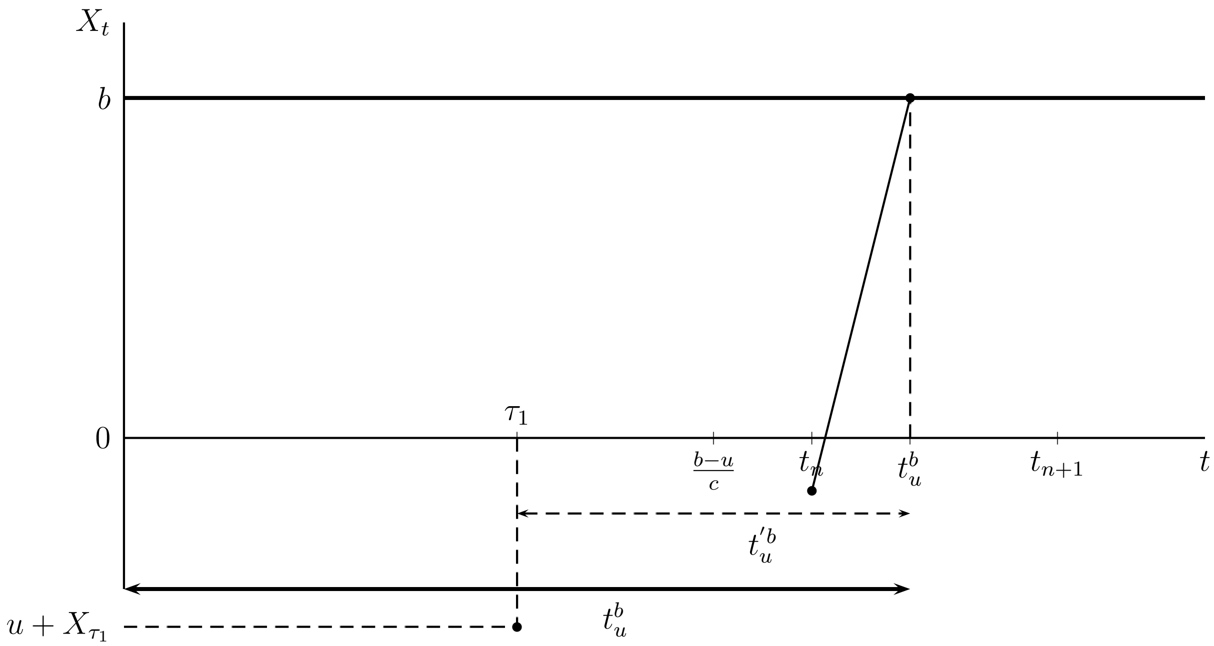


2. $u + X_{\tau_1} \notin [0, b]$, pudiendo ocurrir:
   a) Que $u + X_{\tau_1} > b$.

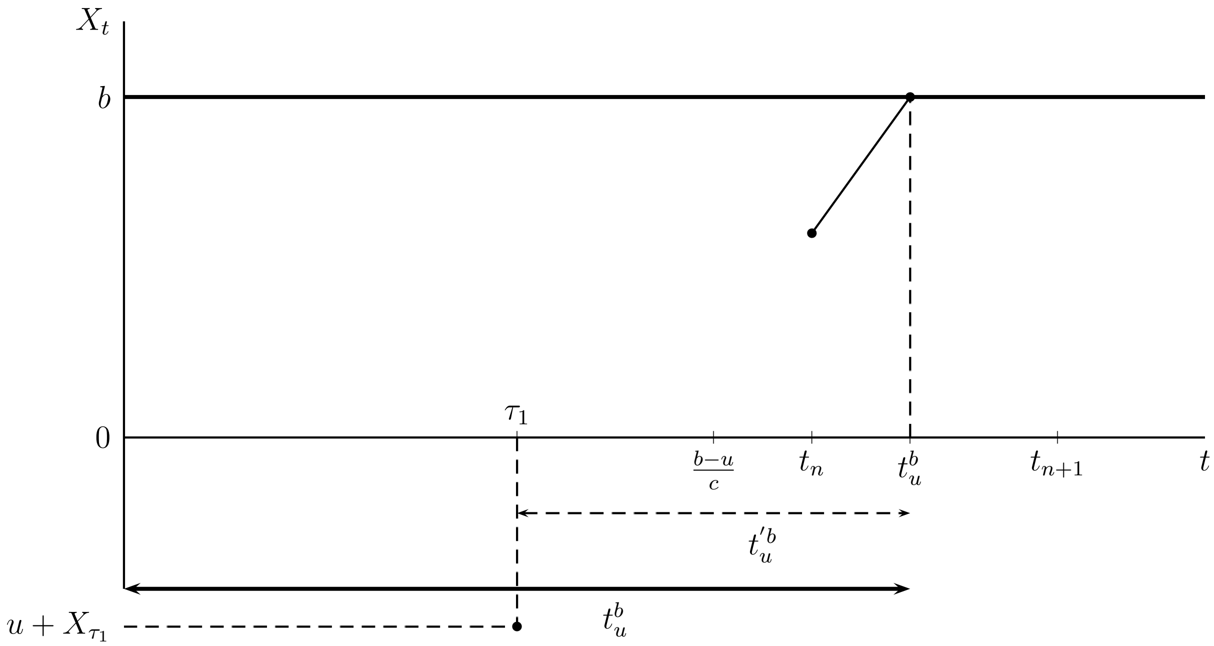


El tiempo de llegada al nivel $b > 0$ será en este caso $\tau_1 + t_u'^b$. Sin embargo, como estamos interesados únicamente en llegadas a la barrera b desde el interior de la zona $[0, b]$, no vamos a considerar este caso.

   b) Que $u + X_{\tau_1} < 0$. Razonando como en el anterior caso el tiempo de primera llegada al nivel $b > 0$ será $\tau_1 + t_u'^b$. Sin embargo, tampoco vamos a considerar este caso, por la misma razón.



O bien



3. Que $u+X_{\tau_1}=b$. Sin embargo, puesto que estamos estudiando un proceso estocástico con variables aleatorias continuas, el suceso $\{u+X_{\tau_1}=b\}$ es un suceso con probabilidad cero.

Con lo cual efectívamente se cumple 3.15. El caso $t_u^b=\infty$ es trivial.

$\square$

Es trivial que el teorema también es cierto cuando $u=0 \ \vee \ u=b$. A continuación vamos a estudiar los tiempos de primera llegada a un nivel $b>0$ a partir de un tiempo $r>0$, no tiempo de renovación. Teniendo en cuenta lo razonado anteriormente, podemos considerar que $\tau_1>r$. Empezaremos con algunas definiciones:

Definición 3.3.5. *(***Tiempo de primera llegada al nivel** b **partiendo de** $X_r=u$**.** *Definimos el tiempo de primera llegada al nivel* $b>0$ *partiendo* $X_r=u$*,* $u\in[0,b]$*, y lo denotamos por* $t^b_{r,u}$*, como:*

$$\boxed{t^b_{r,u} = inf\Big\{t > 0 : [X^u_{r+t,r} = b] \wedge [X^u_{r+s,r} \in (0,b)\ \forall\, r \leq r+s < r+t]\Big\},\ considerando\ \infty = inf\{\emptyset\}} \tag{3.16}$$

Cuando se ha producido la primera renovación y el proceso sigue dentro del intervalo $[0,b]$ definimos:

Definición 3.3.6. *(***Tiempo de primera llegada al nivel** b **partiendo de** $X_r = u$ **después de** τ_1**).**
Definimos el tiempo de primera llegada al nivel $b > 0$ *partiendo de* $X_r = u,\ u \in [0,b]$ *después de* τ_1*, y lo denotamos por* $t'^b_{r,u}$*, como:*

$$\boxed{t'^b_{r,u} = inf\Big\{t > 0 : [X^u_{\tau_1+t,r} = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0,b)\ \forall\, \tau_1 \leq \tau_1+s < \tau_1+t]\Big\},\ considerando\ \infty = inf\{\emptyset\}} \tag{3.17}$$

Es fundamental el siguiente lema:

Lema 3.3.3. *La variable aleatoria* $t'^b_{r,u}$*, tiempo de primera llegada al nivel* b *partiendo de* $X_r = u,\ u \in [0,b]$ *después de* τ_1*, es independiente de* τ_1*, pertenece al conjunto* $\mathcal{F}_2^+$ *y tiene la misma distribución que* $t^b_{u+c\mathscr{E}_r^+-Y_1}$.

Demostración. Se verifica:

$$t'^b_{r,u} = \inf\Big\{t > 0 : [X^u_{\tau_1+t,r} = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0,b)\ \forall\, \tau_1 \leq \tau_1+s < \tau_1+t]\Big\} =$$

$$= \inf\left\{t > 0 : [u + c(\tau_1 + t - r) - \sum_{k=0}^{N(\tau_1+t)} Y_k = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0,b)\ \forall\, \tau_1 \leq \tau_1+s < \tau_1+t]\right\} =$$

$$= \inf\left\{t > 0 : [u + c\mathscr{E}_r^+ + ct - Y_1 - \sum_{k=N(\tau_1)+1}^{N(\tau_1+t)} Y_k = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0,b)\ \forall\, \tau_1 \leq \tau_1+s < \tau_1+t]\right\} =$$

$$= \inf\left\{t > 0 : [u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1 + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0,b)\ \forall\, \tau_1 \leq \tau_1+s < \tau_1+t]\right\} =$$

$$= \inf\Big\{t > 0 : [X^{u+c\mathscr{E}_r^+-Y_1}_{t,0} = b] \wedge [X^{u+c\mathscr{E}_r^+-Y_1}_{s,0} \in (0,b)\ \forall\, 0 \leq s < t]\Big\} = t^b_{u+c\mathscr{E}_r^+-Y_1}.$$

Por la proposición 2.1.3, en la página 14. La demostración cuando $t'^{b}_{r,u} = \infty$ es inmediata.

□

A continuación vamos a deducir una identidad para el tiempo $t^b_{r,u}$.

Teorema 3.3.2. *El tiempo de primera llegada al nivel $b > 0$ partiendo del tiempo $r > 0$, siendo $X_r = u,\ u \in [0, b]$, satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{t^b_{r,u} = \frac{b-u}{c} I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}} + (\mathscr{E}^+_r + t'^{b}_{r,u}) I_{\{0 \leq \mathscr{E}^+_r \leq \frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}^+_r - b < Y_1 < u + c\mathscr{E}^+_r\}},\ t^b_{r,u} = \infty I_{\{0 \leq \mathscr{E}^+_r \leq \frac{b-u}{c}, Y_1 \notin (u+c\mathscr{E}^+_r - b, u+c\mathscr{E}^+_r)\}}} \tag{3.18}$$

Demostración. En efecto, condicionando por los valores que toma τ_1:

- $\tau_1 > r + \frac{b-u}{c}$. No ha habido renovaciones antes de τ_1, con lo cual:

$$t^b_{r,u} = \inf\left\{t > 0 : X^u_{r+t,r} = b\right\} = \inf\left\{t > 0 : u + ct - \sum_{k=0}^{N(r+t)} Y_k = b\right\} = \inf\{t > 0 : ct = b - u\} = \frac{b-u}{c}.$$

- $\tau_1 \leq r + \frac{b-u}{c}$. Para cualquier tiempo anterior a τ_1 no ha habido renovaciones, con lo cual

$$\forall t < \tau_1 : X^u_{t,r} = u + c(t-r) < u + c(r + \tfrac{b-u}{c} - r) = b \text{ y por lo tanto } t^b_{r,u} = \tau_1 - r + t'^{b}_{r,u}\ .$$

  Siendo $t'^{b}_{r,u}$ el tiempo de primera llegada a b partiendo de $X_r = u$ después del valor tomado por τ_1. Estamos interesados en los tiempos en que por primera vez se llega a la barrera b desde dentro de la zona $[0, b]$, por lo tanto los casos en los que el proceso ha salido de la zona en la primera renovación no nos interesan.

Con lo cual obtenemos efectívamente 3.18, razonando de un modo equivalente al teorema 3.3.1, en la página 59. Despreciamos sucesos con probabilidad cero. Cuando $t^b_{r,u} = \infty$ es inmediato.

□

Lo mismo que ocurría para el tiempo de primera llegada partiendo de un tiempo de renovación, el teorema también es cierto cuando $u = 0\ \vee\ u = b$.

A continuación vamos a calcular el tiempo medio de primera llegada a la barrera superior b, suponiendo $t^b_u < \infty\ \wedge\ t^b_{r,u} < \infty$, condicionado por $\mathscr{F}_r = \sigma(X_s, s \leq r)$ (toda la información disponible en el tiempo actual $r > 0$) de un cierto intervalo $[0, b]$, para lo cual haremos uso de los resultados anteriores[3]. Definimos la siguiente función:

Definición 3.3.7. (Función media). *Definimos la función media como:*

$$\boxed{M : T \times [0, b] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \ /\ \forall (r, u, z) \in T \times [0, b] \times \mathbb{R}^+\ :\ M(r, u, z) = \mathbb{E}(t^b_{r,u} \diagup X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)} \tag{3.19}$$

[3] *En la definición de la función media son fundamentales la proposición 3.2.7 y el corolario 3.2.3, en la página 55.*

Siendo T el conjunto de los tiempos. Si denominamos por $\mathbb{T} \subset T$ al subconjunto de los tiempos de renovación, es evidente que $M(t_n, u, 0) = M(0, u, 0)\ \forall (t_n, u) \in \mathbb{T} \times [0, b]$, pues se cumple $\mathscr{E}^-_{t_n} = t_n - t_n = 0$, con lo cual:

$$\mathbb{E}(t^b_u \diagup X_{t_n} = u, \mathscr{E}^-_{t_n} = z) = \mathbb{E}(t^b_u \diagup X_{t_n} = u, 0) = \mathbb{E}(t^b_u \diagup X_0 = u)$$

y para esos casos, por simplicidad, convenimos en representar $M(t_n, u, 0) = M(0, u, 0) = M(u)$.

En el caso en que $X_0 = u \in [0, b]$ obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.3. *El tiempo medio de primera llegada al nivel $b > 0$, partiendo de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{M(u) = \frac{b-u}{c}\overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_u^b \int_{t-b}^t (\frac{t-u}{c} + M(t-y))g(y)f(\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \qquad (3.20)$$

Demostración. En efecto, teniendo en cuenta la identidad obtenida en 3.3.1, en la página 59 y aplicando el teorema de la probabilidad total obtenemos:

$$\mathbb{E}(t^b_u \diagup X_0 = u) = \frac{b-u}{c}\mathbb{E}[I_{\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\}} \diagup X_0 = u] + \mathbb{E}[(\tau_1 + t'^b_u) I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u+c\tau_1-b \le Y_1 \le u+c\tau_1\}} \diagup X_0 = u] =$$

$$= \frac{b-u}{c}\int I_{\{l > \frac{b-u}{c}\}}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l \diagup X_0 = u) + \int l I_{\{l \le \frac{b-u}{c}, u+cl-b \le y \le u+cl\}}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) +$$

$$+ \mathbb{E}[t'^b_u I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u+c\tau_1-b \le Y_1 \le u+c\tau_1\}} \diagup X_0 = u] =$$

$$= \frac{b-u}{c}\int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} l\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y) + \mathbb{E}[t'^b_u I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u+c\tau_1-b \le Y_1 \le u+c\tau_1\}} \diagup X_0 = u] =$$

$$= \frac{b-u}{c}\overline{F}\left(\frac{b-u}{c}\right) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} l\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y) + \mathbb{E}[t'^b_u I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u+c\tau_1-b \le Y_1 \le u+c\tau_1\}} \diagup X_0 = u].$$

Teniendo en cuenta que las variables aleatorias τ_i y $Y_j\ \forall\ \{i, j\} \in \mathbb{N}$ son independientes entre ellas y del valor que haya tomado el proceso en el tiempo $t_0,\ X_0 = u$.

Vamos a calcular:

$$\mathbb{E}[t'^b_u I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u+c\tau_1-b \le Y_1 \le u+c\tau_1\}} \diagup X_0 = u] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[t'^b_u I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u+c\tau_1-b \le Y_1 \le u+c\tau_1\}} \diagup \tau_1, Y_1, X_0 = u] \diagup X_0 = u] =$$

$$= \mathbb{E}[I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u+c\tau_1-b \le Y_1 \le u+c\tau_1\}}\mathbb{E}[t'^b_u \diagup \tau_1, Y_1, X_0 = u] \diagup X_0 = u] =$$ [4]

$$= \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{E}[t^b_{u+cl-y} \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u]\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y).$$

[4] *Teniendo en cuenta que $I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u+c\tau_1-b \le Y_1 \le u+c\tau_1\}}$ es $\sigma(\tau_1, Y_1, X_0 = u)-$medible.*

Teniendo en cuenta que $t'^{b}_{u} \stackrel{d}{=} t^{b}_{u+X_{\tau_1}}$ y es independiente de $\sigma(\tau_1, Y_1)$. Por lo tanto:

$$\mathbb{E}(t^b_u \diagup X_0 = u) = \frac{b-u}{c}\overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl}(l + \mathbb{E}(t^b_{u+cl-y}\diagup X_0 = u+cl-y))\,\mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}F(l).$$

Dando un cambio apropiado de variable obtenemos 3.20.

$\square$

En el caso en que el tiempo inicial no sea un tiempo de renovación obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.4. *El tiempo medio de primera llegada al nivel $b > 0$, partiendo de un tiempo $r > 0$, $X_r = u,\ u \in [0, b],\ \mathscr{E}^-_r = z$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{M(r,u,z) = \frac{b-u}{c}\cdot\frac{\overline{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\overline{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_u^b\int_{t-b}^{t}[\frac{t-u}{c} + M(t-y)]g(y)f(z+\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \quad (3.21)$$

Demostración. Teniendo en cuenta la identidad obtenida en el teorema 3.3.2, en la página 63 y aplicando el teorema de la probabilidad total, condicionando por los valores que toma $(\mathscr{E}^+_r, Y_1)$ obtenemos:

$$\mathbb{E}(t^b_{r,u}\diagup X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z) = \mathbb{E}(\frac{b-u}{c}I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}}\diagup X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)+$$

$$+\mathbb{E}[(\mathscr{E}^+_r + t'^{b}_{r,u})I_{\{0\le\mathscr{E}^+_r\le\frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}^+_r - b < Y_1 < u + c\mathscr{E}^+_r\}}\diagup X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z].$$

Denotando, por comodidad, $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$:

$$\mathbb{E}(t^b_{r,u}\diagup\vec{\sigma}) = \frac{b-u}{c}\mathbb{E}[I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}}\diagup\vec{\sigma}] + \mathbb{E}[\mathscr{E}^+_r I_{\{0\le\mathscr{E}^+_r\le\frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}^+_r - b < Y_1 < u + c\mathscr{E}^+_r\}}\diagup\vec{\sigma}]+$$

$$+\mathbb{E}[t'^{b}_{r,u} I_{\{0\le\mathscr{E}^+_r\le\frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}^+_r - b < Y_1 < u + c\mathscr{E}^+_r\}}\diagup\vec{\sigma}].$$

Efectuando los cálculos:

- En el primer sumando:

$$\frac{b-u}{c}\mathbb{E}[I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}}\diagup\vec{\sigma}] = \frac{b-u}{c}\mathbb{E}[\mathbb{E}[I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}}\diagup\mathscr{E}^+_r, Y_1, \vec{\sigma}]\diagup\vec{\sigma}] =$$

$$= \frac{b-u}{c}\int\mathbb{E}[I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}}\diagup\mathscr{E}^+_r = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}]\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y\diagup\vec{\sigma}) = [5]$$

$$= \frac{b-u}{c}\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\diagup\vec{\sigma}) = \frac{b-u}{c}\cdot\frac{\overline{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\overline{F}(z)}.$$

[5] *Pues la variable aleatoria $I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}}$ es $\sigma(\mathscr{E}^+_r, Y_1, \vec{\sigma})-$medible.*

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el lema 3.3.1, en la página 57.

- En el segundo sumando:

$$\mathbb{E}[\mathscr{E}_r^+ I_{\{0\leq \mathscr{E}_r^+\leq \frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}_r^+ -b<Y_1<u+c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup \vec{\sigma}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathscr{E}_r^+ I_{\{0\leq \mathscr{E}_r^+\leq \frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}_r^+ -b<Y_1<u+c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup \mathscr{E}_r^+, Y_1, \vec{\sigma}] \diagup \vec{\sigma}] =$$

$$= \int \mathbb{E}[\mathscr{E}_r^+ I_{\{0\leq \mathscr{E}_r^+\leq \frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}_r^+ -b<Y_1<u+c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}]\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int l I_{\{0\leq\ l\leq \frac{b-u}{c}, u+cl-b<y<u+cl\}} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l \diagup \vec{\sigma})\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y) =$$

$$= \frac{1}{\overline{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} l \frac{\mathrm{d}F(z+l)}{\mathrm{d}l} \,\mathrm{d}G(y) = \frac{1}{\overline{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} l g(y) f(z+l) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}l.$$

- En el tercer sumando:

$$\mathbb{E}[t_{r,u}^{\prime b} I_{\{0\leq \mathscr{E}_r^+\leq \frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}_r^+ -b<Y_1<u+c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup \vec{\sigma}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[t_{r,u}^{\prime b} I_{\{0\leq \mathscr{E}_r^+\leq \frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}_r^+ -b<Y_1<u+c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup \mathscr{E}_r^+, Y_1, \vec{\sigma}] \diagup \vec{\sigma}] =$$

$$= \int \mathbb{E}[t_{r,u}^{\prime b} I_{\{0\leq \mathscr{E}_r^+\leq \frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}_r^+ -b<Y_1<u+c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}]\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int I_{\{0\leq l\leq \frac{b-u}{c}, u+cl-b<y<u+cl\}} \mathbb{E}[t_{r,u}^{\prime b} \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}]\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{E}[t_{u+cl-y}^b \diagup X_0 = u+cl-y]\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l \diagup \vec{\sigma}))\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y) =$$

$$= \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} M(u+cl-y) g(y) f(z+l) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta la equidistribución de $t_{u+c\mathscr{E}_r^+ - Y_1}^b$ y $t_{r,u}^{\prime b}$. Por lo tanto:

$$M(r,u,z) = \frac{b-u}{c} \cdot \frac{\overline{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\overline{F}(z)} + \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} [l + M(u+cl-y)] g(y) f(z+l) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}l.$$

Dando un cambio de variable apropiado obtenemos 3.21.

□

3.3.2. Tiempos de escape de la zona $[0, b]$. Ecuaciones integrales.

A continuación vamos a estudiar los *tiempos de escape* suponiendo que partimos del origen, de t_0 (en realidad, el razonamiento es el mismo si partimos de cualquier tiempo de renovación t_n teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la sección 3.2, página 53). Empecemos con algunas definiciones (a diferencia del tiempo de primera llegada a b, el tiempo de escape de $[0, b]$ es finito):

Definición 3.3.8. *(***Tiempo de escape de la zona** $[0, b]$ **partiendo de** $X_0 = u$**).**
Definimos el tiempo de escape de la zona $[0, b]$ *partiendo de* $X_0 = u$, $u \in [0, b]$, *y lo denotamos por* $\mathbf{t_u^{[0,b]}}$*, como:*

$$\boxed{\mathbf{t_u^{[0,b]}} = inf\left\{t > 0 : X_{t,0}^u \notin [0, b]\right\} = inf\ \{t > 0 : u + X_t \notin [0, b]\}} \tag{3.22}$$

Cuando se ha producido la primera renovación y el proceso no ha salido de $[0, b]$ definimos:

Definición 3.3.9. *(***Tiempo de escape partiendo de** $X_0 = u$ **despues de** τ_1**).**
Definimos el tiempo de escape de la zona $[0, b]$ *partiendo de* $X_0 = u$, $u \in [0, b]$ *después del valor tomado por* τ_1*, y lo denotamos por* $\mathbf{t_u'^{[0,b]}}$*, como:*

$$\boxed{\mathbf{t_u'^{[0,b]}} = inf\left\{t > 0 : X_{\tau_1+t,0}^u \notin [0, b]\right\} = inf\ \{t > 0 : u + X_{\tau_1+t} \notin [0, b]\}} \tag{3.23}$$

Cuando el tiempo inicial no es de renovación tenemos las siguientes definiciones.

Definición 3.3.10. *(***Tiempo de escape de la zona** $[0, b]$ **partiendo de** $X_r = u$*).*
Definimos el tiempo de escape de la zona $[0, b]$ *partiendo de* $X_r = u$, $u \in [0, b]$, *y lo denotamos por* $\mathbf{t_{r,u}^{[0,b]}}$*, como:*

$$\boxed{\mathbf{t_{r,u}^{[0,b]}} = inf\left\{t > 0 : X_{r+t,r}^u \notin [0, b]\right\}} \tag{3.24}$$

Para el tiempo de escape después de la primera renovación definimos:

Definición 3.3.11. *(***Tiempo de escape de la zona** $[0, b]$ **partiendo de** $X_r = u$ **después del valor tomado por** τ_1*).*
Definimos el tiempo de escape de la zona $[0, b]$ *partiendo de* $X_r = u$, $u \in [0, b]$ *después del valor tomado por* τ_1*, y lo denotamos por* $\mathbf{t_{r,u}'^{[0,b]}}$*, como:*

$$\boxed{\mathbf{t_{r,u}'^{[0,b]}} = inf\left\{t > 0 : X_{\tau_1+t,r}^u \notin [0, b]\right\}} \tag{3.25}$$

Son necesarios los siguientes lemas para el desarrollo de la investigación:

Lema 3.3.4. *La variable aleatoria* $\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]}$*, tiempo de escape de la zona* $[0,b]$ *partiendo de* $X_0 = u$ *después de* τ_1*, es independiente de* τ_1*, pertenece al conjunto* $\mathcal{F}_2^+$ *(definición 3.3.2, en la página 56) y tiene la misma distribución que* $\mathbf{t}_{\mathbf{u}+\mathbf{X}_{\tau_1}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}$.

Demostración. En efecto:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \inf\{t>0 : u + X_{\tau_1+t} \notin [0,b]\} = \inf\left\{t>0 : u + c\tau_1 + ct - \sum_{k=0}^{N(\tau_1+t)} Y_k \notin [0,b]\right\} =$$

$$= \inf\Big\{t>0 : [u + c\tau_1 + ct - (Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n)] I_{\{\tau_0+\tau_1+\cdots+\tau_n \le \tau_1+t < \tau_0+\cdots+\tau_{n+1}\}} \notin [0,b]\Big\} =$$

$$= \inf\{t>0 : u + X_{\tau_1} + X_t \notin [0,b]\} = \mathbf{t}_{\mathbf{u}+\mathbf{X}_{\tau_1}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}.$$

□

Cuando partimos de $X_r = u,\ r \in (0,t_1), u \in [0,b]$ se demuestra de forma inmediata el siguiente lema, teniendo en cuenta la definición de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^+$:

Lema 3.3.5. *La variable aleatoria* $\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]}$*, tiempo de escape de la zona* $[0,b]$ *partiendo de* $X_r = u,\ u \in [0,b]$ *después de* τ_1*, es independiente de* τ_1*, pertenece al conjunto* $\mathcal{F}_2^+$ *y tiene la misma distribución que* $\mathbf{t}_{\mathbf{u}+\mathbf{c}\mathscr{E}_{\mathbf{r}}^+-\mathbf{Y}_1}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}$.

Demostración. En efecto:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \inf\Big\{t>0 : X_{\tau_1+t,r}^{u} \notin [0,b]\Big\} = \inf\left\{t>0 : u + c(\tau_1 + t - r) - \sum_{k=0}^{N(\tau_1+t)} Y_k \notin [0,b]\right\} =$$

$$= \inf\Big\{t>0 : [u + c(\tau_1 - r) + ct - (Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n)] I_{\{\tau_0+\tau_1+\cdots+\tau_n \le \tau_1+t < \tau_0+\cdots+\tau_{n+1}\}} \notin [0,b]\Big\} =$$

$$= \inf\Big\{t>0 : u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1 + X_t \notin [0,b]\Big\} = \mathbf{t}_{\mathbf{u}+\mathbf{c}\mathscr{E}_{\mathbf{r}}^+-\mathbf{Y}_1}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}.$$

Razonando de un modo semejante a la demostración del anterior lema.

□

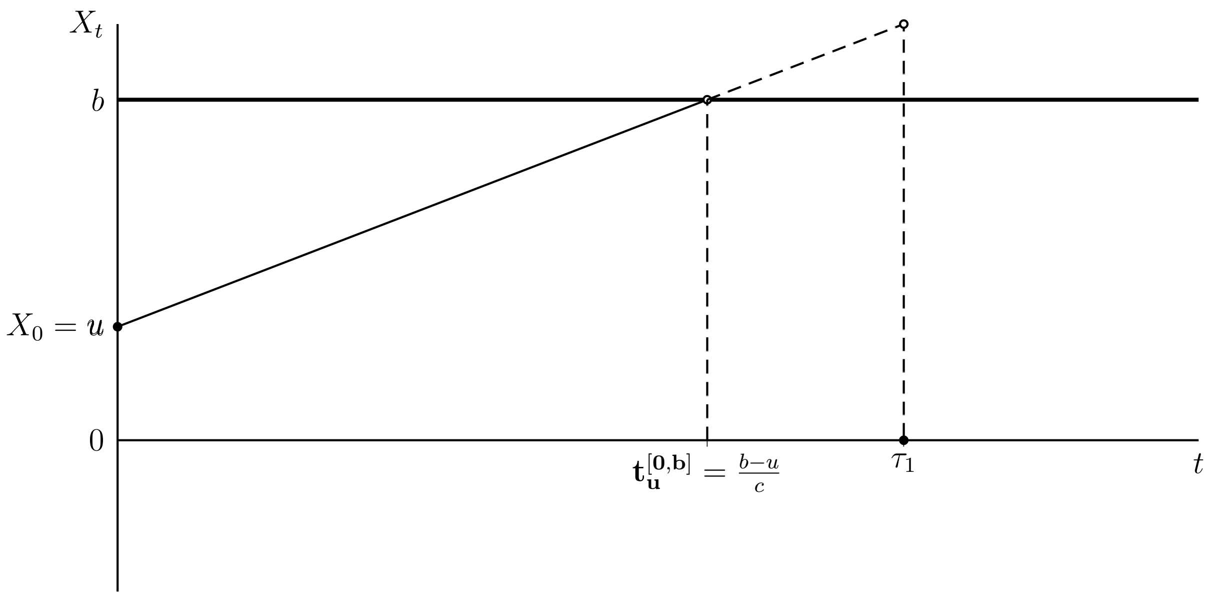
A continuación vamos a deducir las relaciones que satisfacen los tiempos de escape de la zona $[0,b]$.

Teorema 3.3.5. *El tiempo de escape de la zona* $[0,b]$ *partiendo del origen con* $X_0 = u$ *satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \frac{b-u}{c} I_{\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\}} + \tau_1 I_{\left\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}\right\}} + \mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\left\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}\right\}} I_{\left\{u + X_{\tau_1} \in [0,b]\right\}}} \tag{3.26}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma τ_1:

- $\tau_1 > \frac{b-u}{c}$.

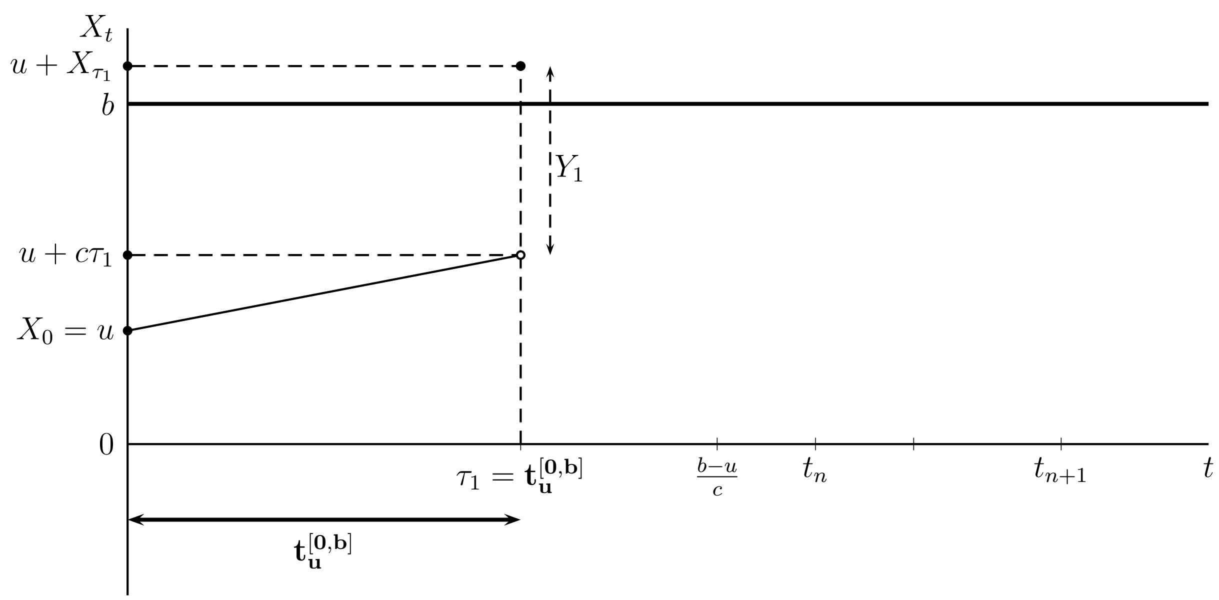


En este caso no hay renovaciones antes de τ_1 y por lo tanto $\forall t \in (0, \tau_1)$ se cumple que $u + X_t = u + ct$. Por lo tanto,

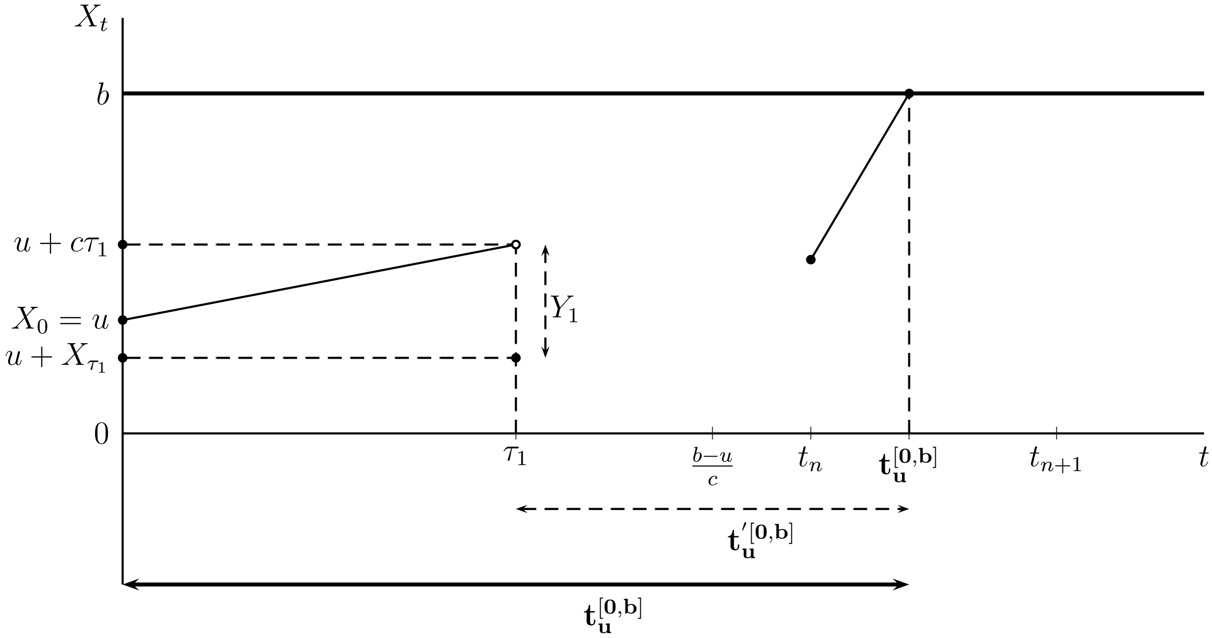
$$u + X_{\frac{b-u}{c}} = u + c\frac{b-u}{c} = u + b - u = b.$$

Con lo cual $\mathbf{t_u^{[0,b]}} = \frac{b-u}{c}$.

- $\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}$, $u + X_{\tau_1} \notin [0, b]$. El proceso está fuera de la zona $[0, b]$, con lo cual $\mathbf{t_u^{[0,b]}} = \tau_1$.



- $\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}, u + X_{\tau_1} \in [0, b]$. En este caso se verifica que $\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \tau_1 + \mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]}$.



Teniendo en cuenta los razonamientos anteriores, se deduce:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \frac{b-u}{c} I_{\left\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\right\}} + \tau_1 I_{\left\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}, u + X_{\tau_1} \notin [0,b]\right\}} + \left(\tau_1 + \mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]}\right) I_{\left\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}, u + X_{\tau_1} \in [0,b]\right\}}.$$

Por las propiedades de las funciones indicatrices y de la unión e intersección de conjuntos, concluimos que se verifica 3.26.

□

Vamos a estudiar el tiempo de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de $X_r = u$, $u \in [0, b]$ y suponiendo $r \in (0, t_1)$. Teniendo en cuenta resultados anteriores y las propiedades de la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^+$, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.6. *El tiempo de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de $X_r = u \in [0, b]$ satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \frac{b-u}{c} I_{\{\mathscr{E}_r^+ > \frac{b-u}{c}\}} + \mathscr{E}_r^+ I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} + \mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}, u + c\mathscr{E}_r^+ - b \leq Y_1 \leq u + c\mathscr{E}_r^+\}}} \tag{3.27}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma τ_1 obtenemos:

- $\tau_1 > r + \frac{b-u}{c}$. En este caso, puesto que no ha habido renovaciones antes de τ_1 se cumple:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \text{ínf}\{t > 0 \ : \ X_{r+t,r}^u \notin [0, b]\} = \text{ínf}\{t > 0 \ : \ u + ct = b\} = \frac{b-u}{c}.$$

Por lo tanto $\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \frac{b-u}{c}$.

- $\tau_1 \leq r + \frac{b-u}{c}, X_{\tau_1,r}^u \notin [0,b]$. En este caso el proceso ya está fuera de la zona, y por lo tanto $\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \tau_1 - r$.
- $\tau_1 \leq r + \frac{b-u}{c}, X_{\tau_1,r}^u \in [0,b]$. En este caso, $\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \tau_1 - r + \mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{'[\mathbf{0},\mathbf{b}]}$.

Con lo cual:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \left(\frac{b-u}{c}\right) I_{\left\{\tau_1 - r > \frac{b-u}{c}\right\}} + (\tau_1 - r)\, I_{\left\{\tau_1 - r \leq \frac{b-u}{c}, X_{\tau_1,r}^u \notin [0,b]\right\}} + \left(\tau_1 - r + \mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{'[\mathbf{0},\mathbf{b}]}\right) I_{\left\{\tau_1 - r \leq \frac{b-u}{c}, X_{\tau_1,r}^u \in [0,b]\right\}} =$$

$$= \left(\frac{b-u}{c}\right) I_{\left\{\tau_1 - r > \frac{b-u}{c}\right\}} + (\tau_1 - r)\, I_{\left\{\tau_1 - r \leq \frac{b-u}{c}\right\}} + \mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{'[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\left\{\tau_1 - r \leq \frac{b-u}{c}, X_{\tau_1,r}^u \in [0,b]\right\}}.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la función indicatriz y de la unión e intersección de conjuntos.

Que $X_{\tau_1,r}^u \in [0,b]$ implica:

$$0 \leq X_{\tau_1,r}^u \leq b \Rightarrow 0 \leq u + c(\tau_1 - r) - Y_1 \leq b \Rightarrow -u - c(\tau_1 - r) \leq -Y_1 \leq b - u - c(\tau_1 - r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u + c(\tau_1 - r) - b \leq Y_1 \leq u + c(\tau_1 - r)$$

$$X_{\tau_1,r}^u \in [0,b] \Rightarrow u + c\,(\tau_1 - r) - b \leq Y_1 \leq u + c\,(\tau_1 - r)\,.$$

Teniendo en cuenta la anterior implicación, obtenemos:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \left(\frac{b-u}{c}\right) I_{\left\{\tau_1 - r > \frac{b-u}{c}\right\}} + (\tau_1 - r)\, I_{\left\{\tau_1 - r \leq \frac{b-u}{c}\right\}} + \mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{'[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\left\{\tau_1 - r \leq \frac{b-u}{c}, u + c(\tau_1 - r) - b \leq Y_1 \leq u + c(\tau_1 - r)\right\}}.$$

Por la definición del "*excess life*" como $\mathscr{E}_r^+ = t_{N(r)+1} - r$ y como $0 < r < \tau_1$ concluimos que $\tau_1 - r = \mathscr{E}_r^+$ y por lo tanto se verifica 3.27.

□

A continuación vamos a hallar los tiempos medios de escape condicionados por la σ-álgebra $\mathscr{F}_r = \sigma(X_s, s \leq r)$ de la zona $[0,b]$. Definimos la siguiente función:

Definición 3.3.12. (Función media). *Definimos la función media como:*

$$\boxed{M : T \times [0,b] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \;/\; \forall (r,u,z) \in T \times [0,b] \times \mathbb{R}^+ \;:\; M(r,u,z) = \mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)} \tag{3.28}$$

Cuando $r = 0$, del mismo modo que en la definición 3.3.7, en la página 63, convenimos en representar $M(0, u, 0) = M(u)$.

A continuación vamos a deducir las ecuaciones integrales que satisface el tiempo medio de escape de $[0, b]$.

Teorema 3.3.7. *El tiempo medio de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{M(u) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} (1 - F(t))\, \mathrm{d}t + \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t M(t-y) g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{3.29}$$

Demostración. Que $u + X_{\tau_1} \in [0, b]$ implica:

$$0 \leq u + c\tau_1 - Y_1 \leq b \Rightarrow -u - c\tau_1 \leq -Y_1 \leq b - u - c\tau_1 \Rightarrow u + c\tau_1 - b \leq Y_1 \leq u + c\tau_1.$$

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el teorema 3.3.5, en la página 68 obtenemos

$$\mathbb{E}(\mathbf{t_u^{[0,b]}} \diagup X_0 = u) = \frac{b-u}{c}\mathbb{E}(I_{\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\}} \diagup X_0 = u) + \mathbb{E}(\tau_1 I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\}} \diagup X_0 = u) +$$

$$+\mathbb{E}(\mathbf{t'^{[0,b]}_u} I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\tau_1-b \leq Y_1 \leq u+c\tau_1\}} \diagup X_0 = u) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \frac{b-u}{c}\, \mathrm{d}F(l) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} l\, \mathrm{d}F(l) + \mathbb{E}(\mathbf{t'^{[0,b]}_u} I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\tau_1-b \leq Y_1 \leq u+c\tau_1\}} \diagup X_0 = u).$$

Las dos primeras integrales se deduce de forma sencilla que se pueden expresar como

$$\int_0^{\frac{b-u}{c}} (1 - F(l))\, \mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el lema 3.3.4 sabemos que $\mathbf{t'^{[0,b]}_u} \overset{d}{=} \mathbf{t^{[0,b]}_{u+X_{\tau_1}}} = \mathbf{t^{[0,b]}_{u+c\tau_1-Y_1}}$ con lo cual:

$$\mathbb{E}(\mathbf{t'^{[0,b]}_u} I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\tau_1-b \leq Y_1 \leq u+c\tau_1\}} \diagup X_0 = u) =$$

$$= \mathbb{E}\left[I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\tau_1-b \leq Y_1 \leq u+c\tau_1\}} \mathbb{E}[\mathbf{t'^{[0,b]}_u} \diagup X_0 = u, \tau_1, Y_1] \diagup X_0 = u\right] = [6]$$

[6] *Teniendo en cuenta que la variable aleatoria $I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\tau_1-b \leq Y_1 \leq u+c\tau_1\}}$ es $\sigma(\tau_1, Y_1)$-medible.*

$$= \int I_{\{l\leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+cl-b\leq y\leq u+cl\}} \mathbb{E}[\mathbf{t}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{u+cl-y}} \diagup X_0 = u+cl-y]\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = ^{7}$$

$$= \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l) \int_{u+cl-b}^{cl} \mathbb{E}[\mathbf{t}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{u+cl-y}} \diagup X_0 = u+cl-y]\,\mathrm{d}G(y) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l) \int_{u+cl-b}^{cl} M(u+cl-y)\,\mathrm{d}G(y).$$

Dando un cambio adecuado de variable concluimos que efectívamente se cumple 3.29.

□

Cuando el tiempo inicial $r \in (0, t_1)$ deducimos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.8. *El tiempo medio de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de $X_r = u, u \in [0, b]$, $\mathscr{E}_r^- = z$ satisface la siguiente ecuación integral (por comodidad denotamos $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$):*

$$\boxed{M(r,u,z) = \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b [1 - F(z + \frac{t-u}{c})]\,\mathrm{d}t + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} M(t-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.30}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el teorema 3.3.6, en la página 70 deducimos

$$\mathbb{E}(\mathbf{t}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{r},\mathbf{u}} \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z) = \frac{b-u}{c}\mathbb{E}(I_{\{\mathscr{E}_r^+ > \frac{b-u}{c}\}} \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z) + \mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+ I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z) +$$

$$+\mathbb{E}(\mathbf{t}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{r},\mathbf{u}} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\mathscr{E}_r^+ - b \leq Y_1 \leq +c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z) =$$

$$= \frac{b-u}{c} \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)\mathbb{P}(Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} l \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y)\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z) +$$

$$+\mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbf{t}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{r},\mathbf{u}} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\mathscr{E}_r^+ - b \leq Y_1 \leq +c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_{N(r)+1} = y, X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z) \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z] = ^{8}$$

$$= \frac{b-u}{c} \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \frac{1}{\bar{F}(z)} \frac{\mathrm{d}F(z+l)}{\mathrm{d}l} + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \frac{l}{\bar{F}(z)} \frac{\mathrm{d}F(z+l)}{\mathrm{d}l} + ^{9}$$

$$+\mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbf{t}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{r},\mathbf{u}} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\mathscr{E}_r^+ - b \leq Y_1 \leq +c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_{N(r)+1} = y, X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z) \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z].$$

[7] *Pues una vez que se ha fijado el valor $\tau_1 = l$, $Y_1 = y$ la variable aleatoria $\mathbf{t}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{u+cl-y}}$ es independiente de $\sigma(\tau_1, Y_1)$.*

[8] *Pues las variables aleatorias $\mathscr{E}_r^+$ y $Y_{N(r)+1}$ son independientes. Además $Y_{N(r)+1}$ no depende de $\sigma(X_r, \mathscr{E}_r^-)$.*

[9] *En su momento vimos(proposición 2.34, en la página 30) que*

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x \diagup X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > x \diagup \mathscr{E}_r^- = z) = \mathbb{P}(\tau_{N(r)+1} - \mathscr{E}_r^- > x \diagup \mathscr{E}_r^- = z) = \frac{\overline{F}(z+x)}{\overline{F}(z)}.$$

Teniendo en cuenta que $\tau_{N(r)+1}$ es independiente de la variable aleatoria X_r conociendo el valor que ha tomado $\mathscr{E}_r^-$.

Vamos a hallar (denotamos $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$):

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbf{t}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{r},\mathbf{u}} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\mathscr{E}_r^+ - b \leq Y_1 \leq +c\mathscr{E}_r^+\}} / \mathscr{E}_r^+ = l, Y_{N(r)+1} = y, \vec{\sigma}) / \vec{\sigma}] =$$

$$\int \mathbb{E}(\mathbf{t}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{r},\mathbf{u}} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\mathscr{E}_r^+ - b \leq Y_1 \leq +c\mathscr{E}_r^+\}} / \mathscr{E}_r^+ = l, Y_{N(r)+1} = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) =$$

$$= \int I_{\{l \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+cl-b \leq y \leq u+cl\}} \mathbb{E}[\mathbf{t}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{r},\mathbf{u}} / \mathscr{E}_r^+ = l, Y_{N(r)+1} = y, \vec{\sigma}] \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} \frac{\mathrm{d}F(z+l)}{\mathrm{d}l} \int_{u+cl-b}^{u+cl} M(u+cl-y)\,\mathrm{d}G(y).$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{t}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{r},\mathbf{u}} \overset{d}{=} \mathbf{t}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{u}+\mathbf{c}\mathscr{E}_r^+ - \mathbf{Y_1}}$ y que una vez fijados los valores de $\mathscr{E}_r^+$ y Y_1 la variable aleatoria $\mathbf{t}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{u}+\mathbf{cl}-\mathbf{y}}$ es independiente de $\sigma(\mathscr{E}_r^+, Y_{N(r)+1})$.

Razonando de forma semejante a los anteriores teoremas obtenemos 3.30.

□

3.3.3. Ley de probabilidad de los tiempos de primera llegada a la barrera superior. Ecuaciones integrales.

A continuación vamos a estudiar la ley de probabilidad de los tiempos de primera llegada. En 3.3.1, en la página 57, obtuvimos el tiempo medio de primera llegada condicionado por $\mathscr{F}_r = \sigma(X_s, s \leq r)$ a la barrera b usando un argumento de renovación y aplicando el teorema de la probabilidad total y diversos cálculos aritméticos sencillos. Ese es el esquema de demostración que vamos a utilizar para deducir la ley de probabilidad del tiempo de primera llegada, y también, en el siguiente apartado, la del tiempo de escape[10]. El estudio de los “first passage times” y los “hitting times” tanto en los procesos de renovación, como en otros tipos de procesos estocásticos, tiene un interés evidente, no sólo desde el punto de vista teórico matemático, sino también práctico, en una amplia variedad de disciplinas científicas, como la física, las ciencias económicas, la biología etc.

Definimos la siguiente función (asumimos que $t^b_{r,u} < \infty \ \wedge \ t^b_u < \infty$):

Definición 3.3.13. (Función ley de probabilidad de primera llegada.) *Definimos la función Ley de probabilidad de primera llegada como (denotamos por $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$):*

$$\boxed{P : T \times [0,b] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \ / \ \forall (r,u,z,x) \in T \times [0,b] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ : \ P(r,u,z;x) = \mathbb{P}(t^b_{r,u} \leq x / \vec{\sigma})} \tag{3.31}$$

Siendo T el conjunto de los tiempos. Si denominamos por $\mathbb{T} \subset T$ al subconjunto de los tiempos de renovación para esos casos, por simplicidad, convenimos en representar $P(t_n, u, 0; x) = P(0, u, 0; x) = P(u; x)$.

Vamos a estudiar el caso en que el proceso toma en el origen un valor $u \in [0,b]$ no nulo.

[10] *Consideramos toda la información disponible en el tiempo r, $\mathscr{F}_r$.*

Teorema 3.3.9. *La ley de probabilidad del tiempo de primera llegada al nivel $b > 0$ partiendo del origen, con $X_0 = u,\ u \in [0, b]$, satisface la siguiente ecuación integral:*

- *Si* $x > \dfrac{b-u}{c}$ *se verifica:*

$$\boxed{P(u;x) = \overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t P(t-y;x-\frac{t-u}{c})g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.32}$$

- *Si* $x \leq \dfrac{b-u}{c}$ *se verifica:*

$$\boxed{P(u;x) = \frac{1}{c}\int_u^{u+cx} f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t P(t-y;x-\frac{t-u}{c})g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.33}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.3.1, en la página 59 obtenemos:

- Si $x > \dfrac{b-u}{c}$:

$$\mathbb{P}(t_u^b \leq x \diagup X_0 = u) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(t_u^b \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\,\mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}F(l) = {}^{11}$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\,\mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}F(l) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\tau_1 + t_u^{\prime b} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\,\mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}F(l) =$$

$$= \overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t_{u+X_l}^b \leq x - l \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\,\mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}F(l) =$$

$$= \overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t_{u+cl-y}^b \leq x - l \diagup X_0 = u + cl - y)\,\mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}F(l).$$

Vamos a calcular la integral:

[11] *Teniendo en cuenta que:*

$$\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l \diagup X_0 = u)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y).$$

$$\int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t^b_{u+cl-y} \leq x - l / X_0 = u + cl - y)\, \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l).$$

Para lo cual damos un cambio de variable y obtenemos 3.32.

- Si $x \leq \dfrac{b-u}{c}$:

$$\mathbb{P}(t^b_u \leq x / X_0 = u) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(t^b_u \leq x / \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\, \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \leq x / \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\, \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\tau_1 + t'^b_u \leq x / \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\, \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= \int_0^{x} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t^b_{u+X_{\tau_1}} \leq x - \tau_1 / \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\, \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= \int_0^{x} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t^b_{u+cl-y} \leq x - l / X_0 = u + cl - y)\, \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l).$$

Pues antes del valor que toma τ_1 el proceso no puede llegar a la barrera superior al ser $\tau_1 \leq \dfrac{b-u}{c}$, pues $X^u_{t,0} = u + ct < b$ si $t < \tau_1$. Que $X^u_{\tau_1,0} = b$ es un suceso con probabilidad cero y por lo tanto para llegar a b tendrá que ser $\tau_1 + t'^b$ que en el caso de $\tau_1 > x$ no consideramos.

Para calcular la anterior integral damos un cambio adecuado de variable y obtenemos 3.33.

□

Cuando el tiempo inicial $r \in (0, t_1)$ no es un tiempo de renovación obtenemos el siguiente resultado (por comodidad vamos a denotar $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$):

Teorema 3.3.10. *La ley de probabilidad del tiempo de primera llegada al nivel $b > 0$, partiendo de $X_r = u$, $u \in [0, b]$, $\mathscr{E}^-_r = z$, satisface la siguiente ecuación integral:*

- *Si $x > r + \frac{b-u}{c}$ se verifica:*

$$\boxed{P(r, u, z; x) = \frac{\overline{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\overline{F}(z)} + \frac{1}{c\overline{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} P(t-y; x - \frac{t-u}{c}) g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \quad (3.34)$$

- *Si $x \leq r + \frac{b-u}{c}$ verifica:*

$$\boxed{P(r,u,z;x) = \frac{1}{c\overline{F}(z)}\int_u^{u+cx} f(z+\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^{t} P(t-y;x-\frac{t-u}{c})g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.35}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.3.2, en la página 63, obtenemos:

- Si $x > r + \frac{b-u}{c}$ condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}_r^+, Y_1)$ obtenemos

$$\mathbb{P}(t_{r,u}^b \le x/\vec{\sigma}) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(t_{r,u}^b \le x/\mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y/\vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \le x/\mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y/\vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ + t_{r,u}^{\prime b} \le x/\mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y/\vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{\overline{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\overline{F}(z)} + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t_{r,u}^{\prime b} \le x - \mathscr{E}_r^+/\mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l/\vec{\sigma})\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y/\vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{\overline{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\overline{F}(z)} + \frac{1}{\overline{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t_{u+cl-y}^b \le x - l/X_0 = u+cl-y)\,\mathrm{d}G(y)\frac{\mathrm{d}F(z+l)}{\mathrm{d}l}.$$

Con lo cual efectívamente obtenemos 3.34.

- Si $x \le r + \frac{b-u}{c}$ condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}_r^+, Y_1)$ obtenemos

$$\mathbb{P}(t_{r,u}^b \le x/\vec{\sigma}) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(t_{r,u}^b \le x/\mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y/\vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \le x/\mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y/\vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ + t_{r,u}^{\prime b} \le x/\mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y\vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y/\vec{\sigma}) =$$

$$= \int_0^{x}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t_{r,u}^{\prime b} \le x - \mathscr{E}_r^+/\mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l/\vec{\sigma})\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y) =$$

$$= \frac{1}{\overline{F}(z)}\int_0^{x}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t_{u+cl-y}^b \le x - l/X_0 = u+cl-y)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y)\frac{\mathrm{d}F(z+l)}{\mathrm{d}l}.$$

Dando un cambio de variable apropiado es inmediato obtener 3.35.

□

3.3.4. Ley de probabilidad del tiempo de escape de la zona $[0, b]$. Ecuaciones integrales.

A continuación vamos a deducir la ley de probabilidad condicionada por $\mathscr{F}_r = \sigma(X_s, s \leq r)$ de los tiempos de escape de la zona $[0, b]$. El estudio sobre la ley de probabilidad del tiempo de escape de un intervalo es un clásico en la teoría de la renovación, relacionado con las caminatas aleatorias, las CTRW o modelos más generales; en particular, en las ciencias financieras y actuariales es uno de los "tópicos relevantes", es el conocido como *tiempo de ruina*. El método que seguiremos para la deducción de la ley de probabilidad es parecido al del apartado anterior, 3.3.3, en la página 74.

Definimos la siguiente función:

Definición 3.3.14. (Función ley de probabilidad del tiempo de escape.) *Definimos la función ley de probabilidad del tiempo de escape como (denotamos por $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$):*

$$\boxed{P : T \times [0, b] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \ / \ \forall (r, u, z, x) \in T \times [0, b] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ : \ P(r, u, z; x) = \mathbb{P}(\mathbf{t}_{\mathbf{r,u}}^{[\mathbf{0,b}]} \leq x / \vec{\sigma})} \tag{3.36}$$

Siendo T el conjunto de los tiempos. Si denominamos por $\mathbb{T} \subset T$ al subconjunto de los tiempos de renovación, convenimos en representar $P(t_n, u, 0; x) = P(0, u, 0; x) = P(u; x)$.

Vamos a deducir una ecuación integral para el tiempo de escape de la zona $[0, b]$. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.11. *La ley de probabilidad del tiempo de escape de la zona $[0, b]$ partiendo del origen con $X_0 = u,\ u \in [0, b]$ satisface la siguiente ecuación integral:*

- *Si $x > \frac{b-u}{c}$ se verifica:*

$$\boxed{P(u; x) = 1 - \frac{1}{c} \int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y; x - \frac{t-u}{c}) \right] g(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t} \tag{3.37}$$

- *Si $x \leq \frac{b-u}{c}$ se verifica:*

$$\boxed{P(u; x) = F(x) - \frac{1}{c} \int_u^{u+cx} f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y; x - \frac{t-u}{c}) \right] g(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t} \tag{3.38}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.3.5, en la página 68, obtenemos:

- Si $x > \frac{b-u}{c}$ condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) y haciendo uso del teorema de la probabilidad total tendremos:

$$\mathbb{P}(\mathbf{t_u^{[0,b]}} \leq x \diagup X_0 = u) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{t_u^{[0,b]}} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) \, \mathrm{d}G(y) \, \mathrm{d}F(l) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{y \notin [u+cl-b, u+cl]} \mathbb{P}(\tau_1 \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) \, \mathrm{d}G(y) \, \mathrm{d}F(l) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\tau_1 + \mathbf{t_u'^{[0,b]}} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) \, \mathrm{d}G(y) \, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= \overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \left[1 - \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathrm{d}G(y) \right] \mathbb{P}(\tau_1 \leq x \diagup \tau_1 = l, X_0 = u) \, \mathrm{d}F(l) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\mathbf{t_u'^{[0,b]}} \leq x - \tau_1 \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) \, \mathrm{d}G(y) \, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= \overline{F}(\frac{b-u}{c}) + F(\frac{b-u}{c}) - \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathrm{d}G(y) \, \mathrm{d}F(l) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\mathbf{t_{u+cl-y}^{[0,b]}} \leq x - l \diagup X_0 = u + cl - y) \, \mathrm{d}G(y) \, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \left[1 - \mathbb{P}(\mathbf{t_{u+cl-y}^{[0,b]}} \leq x - l \diagup X_0 = u + cl - y) \right] \mathrm{d}G(y) \, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} [1 - P(u + cl - y; x - l)] \, \mathrm{d}G(y) \, \mathrm{d}F(l).$$

Dando un cambio apropiado de variable obtenemos 3.37.

- Si $x \leq \frac{b-u}{c}$ condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) y haciendo uso del teorema de la probabilidad total tendremos:

$$\mathbb{P}(\mathbf{t_u^{[0,b]}} \leq x \diagup X_0 = u) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{t_u^{[0,b]}} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\, \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{y \notin [u+cl-b, u+cl]} \mathbb{P}(\tau_1 \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\, \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\tau_1 + \mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\, \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= \int_0^x \mathrm{d}F(l) - \int_0^x \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l) +$$

$$+ \int_0^x \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\mathbf{t}_{\mathbf{u}+\mathbf{X}_{\tau_1}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \leq x - l \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\, \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l) =$$

$$= F(x) - \int_0^x \int_{u+cl-b}^{u+cl} \left[1 - \mathbb{P}(\mathbf{t}_{\mathbf{u+cl-y}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \leq x - l \diagup X_0 = u + cl - y)\right] \mathrm{d}G(y)\, \mathrm{d}F(l).$$

Dando un cambio apropiado de variable obtenemos 3.38.

□

En el caso en que el tiempo de partida no sea un tiempo de renovación $r \in (0, t_1)$ tenemos el siguiente resultado (por comodidad denotamos $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$:

Teorema 3.3.12. *La ley de probabilidad del tiempo de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de $X_r = u,\ u \in [0, b],\ \mathscr{E}_r^- = z$ satisface la siguiente ecuación integral:*

- *Si $x > r + \frac{b-u}{c}$ se verifica:*

$$\boxed{P(r, u, z; x) = 1 - \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y; x - \frac{t-u}{c})\right] g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{3.39}$$

- *Si $x \leq r + \frac{b-u}{c}$ se verifica:*

$$\boxed{P(r, u, z; x) = 1 - \frac{\bar{F}(z+x)}{\bar{F}(z)} - \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^{u+cx} \int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y; x - \frac{t-u}{c})\right] g(y) f(z + \frac{t-u}{c})\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{3.40}$$

Demostración. En efecto, teniendo en cuenta el teorema 3.3.6, en la página 70 obtenemos:

- Si $x > r + \frac{b-u}{c}$, condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}_r^+, Y_1)$ obtenemos:

$$\mathbb{P}(\mathbf{t_{r,u}^{[0,b]}} \leq x \diagup \vec{\sigma}) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{t_{r,u}^{[0,b]}} \leq x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \leq x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{y \notin [u+cl-b, u+cl]} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(l + \mathbf{t_{r,u}^{\prime[0,b]}} \leq x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{1}{\overline{F}(z)} \overline{F}(z + \frac{b-u}{c}) + \frac{1}{\overline{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} \left[1 - \int_{u+cl-b}^{u+cl} g(y) \, \mathrm{d}y \right] f(z+l) \, \mathrm{d}l +$$

$$+ \frac{1}{\overline{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\mathbf{t_{r,u}^{\prime[0,b]}} \leq x - l \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) g(y) f(z+l) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}l =$$

$$= 1 - \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \left[1 - \mathbb{P}(\mathbf{t_{u+cl-y}^{[0,b]}} \leq x - l \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) \right] g(y) f(z+l) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta la independencia de $\mathscr{E}_r^+$ e Y_1 y que $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l) = I_{\{l \leq x\}}$. De modo inmediato concluimos 3.39.

- Si $x \leq r + \frac{b-u}{c}$, condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}_r^+, Y_1)$ obtenemos:

$$\mathbb{P}(\mathbf{t_{r,u}^{[0,b]}} \leq x \diagup \vec{\sigma}) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{t_{r,u}^{[0,b]}} \leq x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \leq x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{y \notin [u+cl-b, u+cl]} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+\int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl}\mathbb{P}(l+\mathbf{t}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}\leq x/\mathscr{E}_r^+=l,Y_1=y,\vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+\in\,\mathrm{d}l,Y_1\in\,\mathrm{d}y/\vec{\sigma})=$$

$$=\frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^x\left[1-\int_{u+cl-b}^{u+cl}g(y)\right]f(z+l)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l+$$

$$+\frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^x\int_{u+cl-b}^{u+cl}\mathbb{P}(\mathbf{t}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}\leq x-l/\mathscr{E}_r^+=l,Y_1=y,\vec{\sigma})g(y)f(z+l)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l=$$

$$=1-\frac{\bar{F}(z+x)}{\bar{F}(z)}-\frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^x\int_{u+cl-b}^{u+cl}\left[1-\mathbb{P}(\mathbf{t}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}_{\mathbf{u+cl-y}}\leq x-l/\mathscr{E}_r^+=t,Y_1=y,\vec{\sigma})\right]g(y)f(z+l)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta la independencia de $\mathscr{E}_r^+$ e Y_1 y que $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+\leq x/\mathscr{E}_r^+=l)=I_{\{l\leq x\}}$. Por comodidad, en vez de la variable aleatoria $Y_{N(r)+1}$ hacemos uso de Y_1, pues $Y_{N(r)+1}\stackrel{d}{=}Y_1$. Se concluye de forma inmediata 3.40.

□

Teniendo en cuenta el carácter de este trabajo, hemos deducido las ecuaciones integrales en un contexto general; para un estudio más detallado, estudiando casos particulares interesantes y relacionando los resultados con los obtenidos en diversos campos de investigación, como los “tiempos de ruina” estudiados en las ciencias actuariales y financieras, se puede consultar el artículo *Tiempos medios de escape y primera llegada en el modelo de Sparre Andersen.*, de próxima publicación. En este artículo obtenemos el tiempo medio de ruina a partir del tiempo medio de escape de un cierto intervalo $[0,b]$ mediante el paso al límite $b\to+\infty$, estudiamos el comportamiento para valores grandes de t, etc. Estos resultados también se han dado a conocer en diferentes ponencias dadas en congresos de la Sociedad de Estadística e Investiación Operativa (SEIO), de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y del Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas (IUFFyM) de la Universidad de Salamanca. El estudio del tiempo de escape, en un tipo particular de caminatas aleatorias, puede consultarse en el artículo *A semi-deterministic random walk with resetting*, donde obtenemos su media y distribución.

Hemos supuesto que dado un tiempo r, el presente, se conoce toda la historia del proceso hasta ese tiempo y, mediante el uso de resultados previamente obtenidos, hemos hallado las ecuaciones integrales. El estudio del tiempo medio de escape o de primera llegada es de suma importancia, no sólo en contextos actuariales y financieros, si bien generalmente considerando como tiempo inicial un tiempo de renovación (generalmente $t_0=0$), con lo cual $\mathscr{E}_r^-=0$ y el tiempo medio condicionado por $\sigma(X_s,\ s\leq t_0)$ coincide con el tiempo medio condicionado por $X_0=u$, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la sección 3.2, en la página 53. Considerando un tiempo no necesariamente de renovación r y efectuando un estudio muy parecido al efectuado en esta memoria es de destacar [110], de M. Montero y J. Villarroel, si bien asumen el conocimiento únicamente del valor tomado por el proceso en ese tiempo r, $X_r=u$, no la historia previa.

Es evidente que las fórmulas obtenidas condicionando por $X_0=u$ son un caso particular de las deducidas condicionando por $(X_r=u,\mathscr{E}_r^-=z)$ pero hemos preferido efectuar su cálculo particular pues son imprescindibles para el estudio del caso general.

3.4. Solución de las ecuaciones integrales. Transformada de Laplace.

A continuación vamos a solucionar las ecuaciones integrales obtenidas, dando algún ejemplo ilustrativo con distribuciones particulares para los tiempos de espera y los saltos. Se puede demostrar que las ecuaciones integrales deducidas tienen solución única, aunque desgraciadamente no siempre de forma cerrada, pero hemos preferido no hacerlo para no dilatar demasiado la investigación.

3.4.1. Tiempos medios de primera llegada a la barrera superior.

Para resolver las ecuaciones integrales deducidas en la subsección 3.3.1 vamos a hacer uso de las propiedades de la transformada de Laplace y de Fourier y teniendo en cuenta los correspondientes teoremas de unicidad (teorema A.1.10 en la página 217, teorema A.1.11 y teorema A.1.12 en la página 218), dada una función f queda identificada de forma única por su transformada de Laplace ($\hat{f}$) o por su transformada de Fourier ($\bar{f}$), si se cumplen ciertas condiciones (lo asumimos sin demostración por brevedad).

1. **El caso general**.

   Denominamos "caso general" cuando los saltos pueden tomar tanto valores positivos como negativos. Vamos a sustituir la función de densidad de los saltos por una combinación convexa de funciones de densidad $g(y) = pg_+(y) + qg_-(y),\ p + q = 1$ donde:

$$g_+(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \in (-\infty, 0) \\ f_1(y), & \text{si } y \in [0, +\infty) \end{cases}, \quad g_-(y) = \begin{cases} f_2(y), & \text{si } y \in (-\infty, 0) \\ 0, & \text{si } y \in [0, +\infty) \end{cases}$$

   Siendo $f_1(y), f_2(y)$ funciones de densidad definidas, respectívamente, en $[0, +\infty)$ y $(-\infty, 0)$. Sustituyendo en 3.20, en la página 64, llegamos a:

$$M(u) = \frac{b-u}{c}\overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{p}{c}\int_u^b \int_{t-b}^t [\frac{t-u}{c} + M(t-y)]g_+(y)f(\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{q}{c}\int_u^b \int_{t-b}^t [\frac{t-u}{c} + M(t-y)]g_-(y)f(\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t,$$

   para el caso en que partimos de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$. Cuando partimos de $X_r = u,\ u \in [0, b],\ \mathscr{E}_r^- = z$, sustituyendo en 3.21, en la página 65, obtenemos:

$$M(r, u, z) = \frac{b-u}{c}\frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^b \int_{t-b}^t [\frac{t-u}{c} + M(t-y)]g_+(y)f(z + \frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{q}{c}\int_u^b \int_{t-b}^t [\frac{t-u}{c} + M(t-y)]g_-(y)f(z + \frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

No siempre es posible solucionar las anteriores ecuaciones integrales. Vamos a estudiar algunos casos particulares en los cuales es posible obtener resultados concretos.

2. **Casos particulares.**

Los casos particulares los vamos a agrupar en casos favorables, cuya solución se puede obtener de forma cerrada mediante la transformada de Laplace, y los desfavorables.

- *El caso favorable. Solución general.*

  Denominamos "caso favorable" a aquel en el cual la deriva es positiva y los saltos son negativos. Es decir, que el proceso estocástico se puede representar de la siguiente forma:

$$X_t = ct + \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k, \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.41}$$

  Siendo $c > 0, \ Y_k \geq 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. De acuerdo con el caso general se verifica que $p = 0, q = 1$ y vamos, por comodidad, a usar $g(y)$ por $g_-(y)$. Efectuaremos el estudio, por lo tanto, suponiendo que tanto la deriva como los saltos son positivos y el proceso estocástico tiene la forma 3.41.

  Se trata de un proceso estocástico creciente y únicamente puede salir de la zona por la barrera superior. Vamos a deducir en primer lugar una ecuación para el tiempo de primera llegada a la barrera superior partiendo de $X_0 = u, \ u \in [0, b]$.

  Proposición 3.4.1. *La solución de la ecuación integral 3.20, en la página 64, en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_0 = u, \ u \in [0, b]$, satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{M(u) = \mathbb{F}(b-u), \ u \in [0, b]} \tag{3.42}$$

  Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{cs\hat{f}'(cs)(1-\hat{g}(s)) + 1 - \hat{f}(cs)}{cs^2(1-\hat{f}(cs)\hat{g}(s))}\right] \mathrm{d}s, \ y \in [0, +\infty)} \tag{3.43}$$

  Un esbozo de la demostración se puede consultar en C.1.1, en la página 270.

  Es interesante el siguiente ejemplo:

  Ejemplo 3.4.1. *Como ejemplo vamos a estudiar el tiempo medio de primera llegada a la barrera superior suponiendo que tanto los saltos como los tiempos de espera tienen distribución exponencial, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda), \ Y_j \rightsquigarrow \epsilon(\gamma)$. Tendremos:*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \ \hat{f}(cs) = \frac{\lambda}{\lambda + cs}, \ \frac{\mathrm{d}(\hat{f}(cs))}{\mathrm{d}s} = \frac{-c\lambda}{(\lambda+cs)^2}, \ g(y) = \gamma e^{-\gamma y}, \ \hat{g}(s) = \frac{\gamma}{\gamma+s}.$$

  Sustituyendo obtenemos:

$$\mathbb{F}(y) = \frac{\gamma y}{c(\frac{\lambda}{c}+\gamma)} + \frac{\lambda - c^2(\frac{\lambda}{c}+\gamma)}{c^2(\frac{\lambda}{c}+\gamma)^2} + \frac{e^{-y\frac{\lambda}{c}}}{\gamma} - e^{-y(\frac{\lambda}{c}+\gamma)}\frac{\lambda[\lambda+\gamma(c+1)]}{c^2\gamma(\frac{\lambda}{c}+\gamma)^2}.$$

Teniendo en cuenta la relación entre $\mathbb{F}(y)$ *y* $M(u)$ *obtenemos:*

$$\boxed{M(u) = \frac{\gamma(b-u)}{c(\frac{\lambda}{c}+\gamma)} + \frac{\lambda - c^2(\frac{\lambda}{c}+\gamma)}{c^2(\frac{\lambda}{c}+\gamma)^2} + \frac{e^{-(b-u)\frac{\lambda}{c}}}{\gamma} - e^{-(b-u)(\frac{\lambda}{c}+\gamma)}\frac{\lambda[\lambda+\gamma(c+1)]}{c^2\gamma(\frac{\lambda}{c}+\gamma)^2}}$$

Para el caso en que el tiempo de partida no es de renovación, se deduce la siguiente proposición:

Proposición 3.4.2. *La solución de la ecuación integral 3.21, en la página 65, en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de* $X_r = u$, $u \in [0, b]$, $\mathscr{E}_r^- = z$, *satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{M(r,u,z) = \mathbb{F}(r, b-u, z),\ u \in [0,b]} \tag{3.44}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{cs\hat{f}'_z(cs)[1-\hat{g}(s)] + \bar{F}(z) - \hat{f}_z(cs)}{cs^2\bar{F}(z)} + \frac{\hat{f}_z(cs)\hat{g}(s)\hat{\mathbb{F}}(s)}{\bar{F}(z)}\right]\mathrm{d}s,\ y \in \mathbb{R}^+} \tag{3.45}$$

Con $\hat{f}_z(cs) = \int_0^{+\infty} e^{(-cs)x} f(z+x)\,\mathrm{d}x,\ \hat{f}'_z(cs) = \frac{\mathrm{d}(\hat{f}_z(cs))}{\mathrm{d}s}.$

Un resumen de la demostración puede consultarse en C.1.2, en la página 271.

Lo mismo que en el caso en que el tiempo de partida era un tiempo de renovación, vamos a considerar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4.2. *Como ejemplo vamos a estudiar el tiempo medio de primera llegada a la barrera superior suponiendo que tanto los saltos como los tiempos de espera tienen distribución exponencial,* $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$, $Y_j \rightsquigarrow \epsilon(\gamma)$. *Tendremos:*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ \hat{f}(cs) = \frac{\lambda}{\lambda+cs},\ \frac{\mathrm{d}[\hat{f}(cs)]}{\mathrm{d}s} = \frac{-c\lambda}{(\lambda+cs)^2},\ g(y) = \gamma e^{-\gamma y},\ \hat{g}(s) = \frac{\gamma}{\gamma+s}.$$

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \frac{-\lambda c}{s(\lambda+cs)(cs+\lambda+c\gamma)} + \frac{\gamma+s}{s^2(cs+\lambda+c\gamma)} = \frac{-\lambda}{cs(s+\frac{\lambda}{c})(s+\frac{\lambda}{c}+\gamma)} + \frac{\gamma+s}{cs^2(s+\frac{\lambda}{c}+\gamma)}.$$

En la proposición 3.4.2, en la página 85, habíamos deducido que:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z) = \frac{cs\hat{f}_z'(cs)[1-\hat{g}(s)] + \bar{F}(z) - \hat{f}_z(cs)}{cs^2\bar{F}(z)} + \frac{\hat{f}_z(cs)\hat{g}(s)\hat{\mathbb{F}}(s)}{\bar{F}(z)}.$$

Por lo tanto:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z) = \frac{cs^2 + [c\gamma + \lambda - c\lambda] + \lambda\gamma}{s(cs+\lambda)^2(\gamma+s)} + \frac{\lambda\gamma}{(cs+\lambda)(s+\gamma)}\hat{\mathbb{F}}(s).$$

Teniendo en cuenta la expresión obtenida para $\hat{\mathbb{F}}(s)$ obtenemos:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z) = \frac{s^2 + [\gamma + \rho - c\rho]s + \rho\gamma}{cs(s+\rho)^2(\gamma+s)} - \frac{\rho^2\gamma}{s(s+\rho)^2(s+\gamma)(s+\rho+\gamma)} + \frac{\rho\gamma}{cs^2(s+\rho)(s+\rho+\gamma)}.$$

Siendo $\rho = \frac{\lambda}{c}$. Mediante transformaciones algebráicas elementales podemos expresarlo como:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z) = \frac{N(c,\gamma,\rho,s)}{cs^2(s+\rho)^2(s+\gamma)(s+\rho+\gamma)}.$$

Siendo $N(c,\gamma,\rho,s)$ un polinomio en s de grado cuatro. Aplicando la transformada de Laplace inversa obtenemos:

$$\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{N(c,\gamma,\rho,s)}{cs^2(s+\rho)^2(s+\gamma)(s+\rho+\gamma)}\right]\mathrm{d}s.$$

Eligiendo $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma adecuada. Se obtiene la solución de forma sencilla haciendo uso del "teorema de los resíduos":

$$\mathbb{F}(r,y,z) = A + Bye^{-\rho y} + Ce^{-\rho y} + De^{-\gamma y} + Ee^{-(\rho+\gamma)y}.$$

Siendo $\{A,\ B,\ C,\ D,\ E\}$ ciertas constantes que dependen de $\{c,\ \rho,\ \gamma\}$. Se obtiene a continuación que $M(r,u,z) = \mathbb{F}(r,b-u,z)$:

$$\boxed{M(r,u,z) = A + B(b-u)e^{-\rho(b-u)} + Ce^{-\rho(c-u)} + De^{-\gamma(b-u)} + Ee^{-(\rho+\gamma)(b-u)}}$$

- *El caso desfavorable. Estudio y solución de casos posibles.*

  Denominamos "caso desfavorable" a aquel en el cual no es posible, en general, obtener una solución cerrada de la ecuación integral con independencia de la distribución de los tiempos de espera y de los saltos. Sin embargo, hay algunos casos en los cuales es posible obtener la solución cerrada.

- El caso semifavorable.

  Denominamos "caso semifavorable" a aquel en el cual los saltos tienen como recorrido $(-\infty, -b] \cup [0, +\infty)$. Es decir:

$$g(y) = \begin{cases} g_+(y), & \text{si } y \in [0, +\infty) \\ g_-(y), & \text{si } y \in (-\infty, -b] \\ 0, & \text{si } y \in (-b, 0) \end{cases}$$

Dando unos cambios algebraicos sencillos y teniendo en cuenta la definición de la función $g(y)$ obtenemos, cuando partimos de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$:

$$M(u) = \frac{b-u}{c}\bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{p}{c}\int_0^{b-u}\int_0^t \left[\frac{b-u-t}{c} + M(b-t+y)\right] g_+(y) f(\frac{b-t-u}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

Razonando de forma semejante al "caso favorable" se deduce:

Proposición 3.4.3. *La solución de la ecuación integral 3.20, en la página 64, en el caso en que la deriva es positiva y los saltos toman valores en $(-\infty, -b] \cup [0, +\infty)$, partiendo de $X_0 = u$, satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{M(u) = \mathbb{F}(b-u),\ u \in [0, b]} \tag{3.46}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{cs\hat{f}'(cs)(1-p\hat{g}_+(s)) + 1 - \hat{f}(cs)}{cs^2(1-p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s))}\right]\mathrm{d}s,\ y \in [0, +\infty)} \tag{3.47}$$

Ejemplo 3.4.3. *Como ejemplo vamos a resolver la ecuación integral suponiendo que los tiempos de espera tienen una distribución exponencial de parámetro λ, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ y los saltos tienen la siguiente función de densidad:*

$$g(y) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma y}, & \textit{si } y \in [0, +\infty) \\ g_-(y), & \textit{si } y \in (-\infty, -b] \\ 0, & \textit{si } y \in (-b, 0) \end{cases}$$

Siguiendo el mismo esquema de razonamiento que en el ejemplo 3.4.1 obtenemos:

$$M(u) = -\frac{q\gamma}{r_1 r_2} + e^{-\frac{\lambda}{c}(b-u)}\frac{q\gamma + \frac{\lambda}{c}}{(\frac{\lambda}{c}+r_1)(\frac{\lambda}{c}+r_2)} -$$

$$-\frac{\lambda}{c(r_1-r_2)}\left[\frac{e^{r_1(b-u)}(q\gamma+r_1)}{r_1(r_1+\frac{\lambda}{c})(r_1-r_2)} - \frac{e^{r_2(b-u)}(q\gamma+r_2)}{r_1(r_2+\frac{\lambda}{c})(r_2-r_1)}\right] +$$

$$+\frac{\gamma}{cr_1r_2} + \frac{1}{r_1-r_2}\left[e^{r_1(b-u)}\frac{\gamma+r_1}{cr_1} - e^{r_2(b-u)}\frac{\gamma+r_2}{cr_2}\right].$$

Cuando el tiempo inicial no es un tiempo de renovación se obtiene, teniendo en cuenta la definición de la función de densidad $g(y)$:

$$M(r,u,z) = \frac{b-u}{c}\frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} +$$

$$+\frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_0^{b-u}\int_0^t [\frac{b-t-u}{c} + M(b-t+y)]g_+(y)f(z+\frac{b-t-u}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

Vamos a resolver la anterior ecuación integral. Razonando como en la proposición 3.4.2, página 85, se deduce:

Proposición 3.4.4. *La solución de la ecuación integral 3.21, en la página 65, en el caso en que la deriva es positiva y los saltos toman valores en* $(-\infty,-b]\cup[0,+\infty)$ *partiendo de* $X_r = u$, $\mathscr{E}_r^- = z$*, satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{M(r,u,z) = \mathbb{F}(r,b-u,z),\ u\in[0,b]} \tag{3.48}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{cs\hat{f}'_z(cs)[1-p\hat{g}(s)] + \bar{F}(z) - \hat{f}_z(cs)}{cs^2\bar{F}(z)} + \frac{p\hat{f}_z(cs)\hat{g}(s)\hat{\mathbb{F}}(s)}{\bar{F}(z)}\right]\mathrm{d}s} \tag{3.49}$$

Con $y\in(0,+\infty)$, $\hat{f}_z(cs) = \int_0^{+\infty} e^{(-cs)x}f(z+x)\,\mathrm{d}x$, $\hat{f}'_z(cs) = \dfrac{\mathrm{d}(\hat{f}_z(cs))}{\mathrm{d}s}$.

Ejemplo 3.4.4. *Como ejemplo vamos a resolver la ecuación integral suponiendo que los tiempos de espera tienen una distribución exponencial de parámetro* λ, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ *y los saltos tienen la siguiente función de densidad* $g(y) = pg_+(y) + qg_-(y)$, $p+q=1$*:*

$$g(y) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma y}, & si\ y\in[0,+\infty) \\ g_-(y), & si\ y\in(-\infty,-b] \\ 0, & si\ y\in(-b,0) \end{cases}$$

Efectuando los cálculos como en el ejemplo 3.4.3 obtenemos:

$$\boxed{M(r,u,z) = A + B(b-u)e^{-\rho(b-u)} + Ce^{-\rho(b-u)} + De^{-\gamma(b-u)} + Ee^{r_1(b-u)} + Fe^{r_2(b-u)}}$$

Siendo $\{A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F\}$ *ciertas constantes que dependen de* $\{c,\ \lambda,\ \gamma,\ q\}$.

- El caso actuarial.

Un caso notable es el denominado “caso actuarial”, en el cual tanto los saltos como la deriva son positivos. El proceso estocástico, por lo tanto, puede representarse de la siguiente forma:

$$X_t = ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k,\ \forall\, t \geq 0.$$

siendo $c > 0,\ Y_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la descomposición $g(y) = qg_+(y) + pg_-(y),\ p + q = 1$ se verifica $q = 1,\ g(y) = g_+(y)$.

Razonando de la forma habitual obtenemos que el tiempo de primera llegada, partiendo de un tiempo de renovación, verifica la siguiente identidad:

$$t_u^b = \frac{b-u}{c} I_{\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\}} + (\tau_1 + t_u'^b) I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}, 0<Y_1<u+c\tau_1\}}.$$ [12]

Del mismo modo, el tiempo de primera llegada, partiendo de un tiempo $0 < r < t_1$ satisface la siguiente igualdad:

$$t_{r,u}^b = \frac{b-u}{c} I_{\{\mathscr{E}_r^+ > \frac{b-u}{c}\}} + (\mathscr{E}_r^+ + t_{r,u}'^b) I_{\{0 \leq \mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}, 0<Y_1<u+c\mathscr{E}_r^+\}}.$$

A partir de esas expresiones es fácil demostrar que los tiempos medios de primera llegada a la barrera superior, en el caso actuarial, satisfacen las siguientes ecuaciones integrales:

$$M(u) = \frac{b-u}{c} \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c} \int_u^b \int_0^t (\frac{t-u}{c} + M(t-y)) g(y) f(\frac{t-u}{c})\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t. \tag{3.50}$$

Con $u \in [0, b]$. Y también, cuando $r \geq 0$:

$$M(r,u,z) = \frac{b-u}{c} \frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b \int_0^t [\frac{t-u}{c} + M(t-y)] g(y) f(z + \frac{t-u}{c})\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t. \tag{3.51}$$

Son ecuaciones integrales lineales, pero en este caso no podremos efectuar una integración cerrada. Sin embargo se puede estudiar la existencia de soluciones y el carácter de estas, caso de existir (ver por ejemplo libro de Kolmogorov [78]). No vamos a efectuar tal estudio puesto que no es el objetivo del presente trabajo, y asumimos la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones integrales implicadas.

A la hora de resolver la ecuación 3.50 es fundamental la siguiente proposición:

[12] *Teniendo en cuenta que ahora, a diferencia de lo que ocurría en el caso general, los saltos Y_k únicamente toman valores positivos y como estamos considerando que $u + X_{\tau_1} \in (0, b)$, tenemos:*

$$0 < u + c\tau_1 - y_1 < b \Rightarrow -(u + c\tau_1) < -y_1 < b - (u + c\tau_1).$$

$$u + c\tau_1 - b < y_1 < u + c\tau_1 \Rightarrow 0 < y_1 < u + c\tau_1.$$

Teniendo en cuenta que

$$\tau_1 \leq \frac{b-u}{c} \Rightarrow c\tau_1 \leq b - u \Rightarrow c\tau_1 + u \leq b.$$

Con lo cual $u + c\tau_1 - b \leq 0$.

Proposición 3.4.5. *Supongamos que F tiene una función de densidad f, de clase C^n en $(0,\infty)$ y que existe un operador diferencial de coeficientes constantes $L = L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que f resuelve:*

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}\right) f(t) = 0 \\ \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}\right) f(t) = 0 \end{cases} \tag{3.52}$$

Con las condiciones iniciales

$$f^j(0) = b_j, \text{ para } j = 0, \cdots, n-1. \tag{3.53}$$

Entonces:

a*) La función de renovación $m(t) = \mathbb{E}(N(t))$ tiene una derivada $\nu(t) = m'(t)$ que resuelve la ecuación diferencial:*

$$\boxed{(L - a_0)\,\nu(t) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}\right) \nu(t) = 0} \tag{3.54}$$

con las condiciones iniciales:

$$\nu^j(0) = 0 \text{ para } j = 0, \cdots, n-2, \ \nu^{n-1}(0) = a_0.$$

b*) $M(u) \in C^n(0,b)$ y cualquier solución $M(u)$ de la ecuación integral 3.50 debe también resolver la ecuación integro-diferencial:*

$$\boxed{\left(\sum_{j=0}^{n} (-c)^j a_j \frac{\partial^j}{\partial u^j}\right) M(u) = A + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Pi^k(u) + \sum_{k=0}^{n-2} C_k \Gamma^k(u)} \tag{3.55}$$

Cuando $b < +\infty$ satisface, además, las n condiciones de frontera:

$$M(b) = 0, \ M'(b) = -\frac{1}{c} - \frac{1}{c} f(0)\Pi(b), \tag{3.56}$$

$$M''(b) = -\left(\frac{1}{c^2}\right) 2f(0) + \left(\frac{1}{c^2}\right) f'(0)\Pi(b) - \frac{1}{c} f(0)\Pi'(b) + \left(\frac{1}{c^2}\right) f(0)\Gamma(b),$$

$$M^k(b) = -\left(\frac{1}{c^k}\right) k f^{k-2}(0) - \frac{1}{c} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{c}\right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(0)\Pi^i(b) +$$

$$+\frac{1}{c^2}\sum_{i=0}^{k-2}(k-1-i)\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-2-i} f^{k-2-i}(0)\Gamma^i(b). \textit{ De forma abreviada:}$$

$$M(b)=0,\ M^k(b)=-\left(\frac{1}{c^k}\right)kf^{k-2}(0)-\frac{1}{c}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(0)\Pi^i(b)+ \tag{3.57}$$

$$+\frac{1}{c^2}\sum_{i=0}^{k-2}(k-1-i)\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-2-i} f^{k-2-i}(0)\Gamma^i(b) \textit{ para } k=1,\cdots,n-1,$$

si aceptamos $f^{-1}(0)=1,\ \sum_{i=0}^{-1}=0$. *Siendo:*

$$A=a_0\frac{b-u}{c}-\frac{b-u}{c}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{k-1}+a_1-\sum_{k=2}^{n}a_kkb_{k-2}, \tag{3.58}$$

$$B_k=(-c)^k\left[\sum_{i=k+1}^{n}a_if^{i-k-1}(0)\right],\ \Pi(u)=\int_0^u M(u-y)g(y)\,\mathrm{d}y,\ \Pi^k(u)=\frac{\partial^k\Pi(u)}{\partial u^k}, \tag{3.59}$$

$$C_k=(-c)^k\left[\sum_{i=k+2}^{n}a_i(i-k-1)f^{i-k-2}(0)\right],\ \Gamma(u)=\int_0^u g(y)\,\mathrm{d}y,\ \Gamma^k(u)=\frac{\partial^k\Gamma(u)}{\partial u^k}. \tag{3.60}$$

Un esbozo de la demostración en C.1.3, en la página 273.

Teniendo en cuenta la anterior proposición es fácil obtener una solución de la ecuación 3.55, en la página 90. Es inmediato el siguiente corolario:

Corolario 3.4.1. *Supongamos que F tiene una función de densidad f de clase C^n en $(0,\infty)$ para la cual se cumple 3.52 y 3.53, entonces la solución de la ecuación integro diferencial 3.55 satisface la identidad:*

$$\boxed{M(u)=\frac{\Delta(b,u)}{\Delta(b)}} \tag{3.61}$$

donde:

$$\Delta(b,u)=\begin{vmatrix}\Theta(u) & -\pi_1(u) & -\pi_2(u) & \dots & -\pi_n(u)\\ \sigma_1(b) & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0(n-1)}\\ \sigma_2(b) & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)}\\ \vdots & & & & \\ \sigma_{n-1}(b) & a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}\end{vmatrix}, \tag{3.62}$$

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{3.63}$$

$$\sigma_j(b) = -\Theta^j(b) - \frac{1}{c^j} j b_{j-2} + \sum_{i=0}^{j-1} \xi_{j-1-i} m_0^i(b) + \frac{1}{c^2} \sum_{i=0}^{j-2} (j-1-i) \left(\frac{-1}{c}\right)^{j-2-i} b_{j-2-i} \Gamma^i(b), \tag{3.64}$$

$$\pi_i(u) = \frac{\partial^{i+1} \pi_0(u)}{\partial u^{i+1}},\ \pi_0(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{s[\sum_{j=0}^{n} a_j(-cs)^j - a_0 \hat{g}(s)]}, \tag{3.65}$$

$$a_{ij} = \pi_{j+1+i}(b) - \sum_{k=0}^{i-1} \xi_{i-1-k} m_{j+1}^k(b),\ \xi_{i-1-k} = (\frac{-1}{c})^{i-k} f^{i-1-k}(0),\ \Theta(b) = A\pi(b) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \theta_k(b), \tag{3.66}$$

$$m_0(b) = \int_0^b \Theta(b-y) g(y)\,\mathrm{d}y,\ m_k(b) = \int_0^b \pi_k(b-y) g(y)\,\mathrm{d}y,\ m_k^j(u) = \frac{\partial^j m_k(u)}{\partial u^j},\ k = 1, \cdots, n. \tag{3.67}$$

La demostración, resumida, en C.1.1, en la página 278.

Supongamos que el tiempo inicial $0 < r < t_1$ no es un tiempo de renovación. En su momento habíamos deducido la ecuación 3.51, página 89. Razonando de un modo semejante a cuando el tiempo de partida era un tiempo de renovación, obtenemos:

Proposición 3.4.6. *Supongamos que F tiene una función de densidad f, de clase C^n en $(0, \infty)$ y que existe un operador diferencial de coeficientes constantes $L = L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que f resuelve:*

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}\right) f(z+t) = 0 \\ \left(\sum_{j=1}^{n} a_j j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}\right) f(z+t) = 0 \end{cases} \tag{3.68}$$

Con las condiciones iniciales

$$f^j(z) = b_j,\ \textit{para}\ j = 0, \cdots, n-1. \tag{3.69}$$

Entonces $M(r, u, z) \in C^n(0, b)$ y cualquier solución $M(r, u, z)$ de la ecuación integral 3.51 debe también resolver la ecuación integro-diferencial:

$$\boxed{\left(\sum_{j=0}^{n} (-c)^j a_j \frac{\partial^j}{\partial u^j}\right) M(r, u, z) = A + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Pi^k(u) + \sum_{k=0}^{n-2} C_k \Gamma^k(u)} \tag{3.70}$$

Cuando $b < +\infty$ satisface, además, las n condiciones de frontera:

$$M(r,b,z) = 0,\ M'(r,b,z) = -\frac{1}{c} - \frac{1}{c\bar{F}(z)}f(z)\Pi(b), \tag{3.71}$$

$$M''(r,b,z) = -\left(\frac{1}{c^2\bar{F}(z)}\right)2f(z) + \left(\frac{1}{c^2\bar{F}(z)}\right)f'(z)\Pi(b) - \frac{1}{c\bar{F}(z)}f(z)\Pi'(b) + \left(\frac{1}{c^2\bar{F}(z)}\right)f(z)\Gamma(b),$$

$$M^k(r,b,z) = -\left(\frac{1}{c^k\bar{F}(z)}\right)kf^{k-2}(z) - \frac{1}{c\bar{F}(z)}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(z)\Pi^i(b) +$$

$$+\frac{1}{c^2\bar{F}(z)}\sum_{i=0}^{k-2}(k-1-i)\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-2-i} f^{k-2-i}(z)\Gamma^i(b).$$ *De forma abreviada:*

$$M(r,b,z) = 0,\ M^k(r,b,z) = -\left(\frac{1}{c^k\bar{F}(z)}\right)kf^{k-2}(z) - \frac{1}{c\bar{F}(z)}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(z)\Pi^i(b) + \tag{3.72}$$

$$+\frac{1}{c^2\bar{F}(z)}\sum_{i=0}^{k-2}(k-1-i)\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-2-i} f^{k-2-i}(z)\Gamma^i(b) \ \textit{para}\ k = 1,\cdots,n-1,$$

si aceptamos $f^{-1}(z) = 1,\ \sum_{i=0}^{-1} = 0$. *Siendo:*

$$A = a_0\frac{b-u}{c} - \frac{b-u}{c\bar{F}(z)}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1} + a_1 - \frac{1}{\bar{F}(z)}\sum_{k=2}^{n} a_k k b_{k-2}, \tag{3.73}$$

$$B_k = \frac{(-c)^k}{\bar{F}(z)}\left[\sum_{i=k+1}^{n} a_i f^{i-k-1}(z)\right],\ \Pi(u) = \int_0^u M(u-y)g(y)\,\mathrm{d}y,\ \Pi^k(u) = \frac{\partial^k\Pi(u)}{\partial u^k}, \tag{3.74}$$

$$C_k = \frac{(-c)^k}{\bar{F}(z)}\left[\sum_{i=k+2}^{n} a_i(i-k-1)f^{i-k-2}(z)\right],\ \Gamma(u) = \int_0^u g(y)\,\mathrm{d}y,\ \Gamma^k(u) = \frac{\partial^k\Gamma(u)}{\partial u^k}. \tag{3.75}$$

Teniendo en cuenta la anterior proposición es fácil obtener una solución de la ecuación 3.70 en la página 92. Es inmediato el siguiente corolario:

Corolario 3.4.2. *Supongamos quet F tiene una función de densidad f de clase C^n en $(0,\infty)$ para la cual se cumple 3.68 y 3.69, entonces la solución de la ecuación integro diferencial 3.70 satisface la identidad:*

$$\boxed{M(r,u,z) = \frac{\Delta(b,u)}{\Delta(b)}} \tag{3.76}$$

donde:

$$\Delta(b,u) = \begin{vmatrix} \Theta(u) & -\pi_1(u) & -\pi_2(u) & \dots & -\pi_n(u) \\ \sigma_1(b) & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0(n-1)} \\ \sigma_2(b) & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{n-1}(b) & a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{3.77}$$

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{3.78}$$

$$\sigma_j(b) = -\Theta^j(b) - \frac{1}{c^j \bar{F}(z)} j b_{j-2} + \frac{1}{\bar{F}(z)} \sum_{i=0}^{j-1} \xi_{j-1-i} m_0^i(b) + \tag{3.79}$$

$$+\frac{1}{c^2\bar{F}(z)} \sum_{i=0}^{j-2} (j-1-i) \left(\frac{-1}{c}\right)^{j-2-i} b_{j-2-i} \Gamma^i(b),$$

$$\pi_i(u) = \frac{\partial^{i+1}\pi_0(u)}{\partial u^{i+1}},\ \pi_0(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{s[\sum_{j=0}^n a_j(-cs)^j - a_0\hat{g}(s)]}, \tag{3.80}$$

$$\nu(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{su} \frac{\hat{M}(s)\hat{g}(s)}{L(s)},\ \nu_k(u) = \frac{\partial^k \nu(u)}{\partial u^k}, \tag{3.81}$$

$$a_{ij} = \pi_{j+1+i}(b) - \sum_{k=0}^{i-1} \xi_{i-1-k} m_{j+1}^k(b),\ \xi_{i-1-k} = (\frac{-1}{c})^{i-k} f^{i-1-k}(0), \tag{3.82}$$

$$\Theta(b) = A\pi(b) + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \nu_k(b) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \theta_k(b)\,\mathrm{d}y,\ \theta(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{su} \frac{\hat{\Gamma}(s)\,\mathrm{d}s}{L(s)},\ \theta_k(u) = \frac{\partial^k \theta(u)}{\partial u^k}, \tag{3.83}$$

$$m_0(b) = \int_0^b \Theta(b-y) g(y)\,\mathrm{d}y,\ m_k(b) = \int_0^b \pi_k(b-y) g(y)\,\mathrm{d}y,\ m_k^j(u) = \frac{\partial^j m_k(u)}{\partial u^j},\ k = 1, \cdots, n. \tag{3.84}$$

Se sigue el mismo esquema de razonamiento que para los tiempos de renovación, pero las demostraciones son demasiado aparatosas.

3.4.2. Tiempos medios de escape.

A continuación vamos a resolver las ecuaciones integrales obtenidas en la subsección 3.3.2. Para ello, lo mismo que hicimos para los tiempos de primera llegada, vamos a hacer uso de las propiedades de la transformada de Laplace y de Fourier.

1. **El caso general**.

   Recordando lo razonado en la subsección 3.4.1, en la página 83, a partir de la ecuación 3.29, en la página 72, obtenemos:

$$M(u) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} (1 - F(t))\, \mathrm{d}t + \frac{q}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^0 M(t-y) g_-(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t +$$

$$+\frac{p}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_0^t M(t-y) g_+(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t, \text{ siendo } q = 1-p,\ p \in [0,1].$$

   Cuando el tiempo inicial es un tiempo de renovación. Cuando $0 < r < t_1$ no es un tiempo de renovación sustituyendo en la ecuación 3.30, en la página 73, obtenemos:

$$M(r,u,z) = \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_u^b [1 - F(\frac{t-u}{c} + z)]\, \mathrm{d}t + \frac{q}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^0 M(t-y)\cdot g_-(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t +$$

$$+\frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_0^t M(t-y)\cdot g_+(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t, \text{ siendo } q = 1-p,\ p \in [0,1].$$

   Una vez planteado el caso general, vamos a estudiar algunos casos particulares.

2. **Casos particulares.**

   Los casos particulares más interesantes los podemos agrupar en casos favorables, cuya solución se puede obtener de forma cerrada mediante la transformada de Laplace, y los desfavorables.

   - *El caso favorable. Solución general.*

     Teniendo en cuenta el caso general, y recordando razonamientos previos, se verifica que $p = 1,\ q = 0$; denotamos $g(y) = g_-(y)$ por comodidad. Se trata de un proceso estocástico creciente, por lo tanto únicamente podemos salir de la zona $[0, b]$ por la banda superior.

     Proposición 3.4.7. *La solución de la ecuación integral 3.29, en la página 72, cuando la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{M(u) = \mathbb{F}(b-u),\ u \in [0,b]} \tag{3.85}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{sy}\frac{1}{cs^2}\cdot\frac{1-\hat{f}(cs)}{1-\hat{f}(cs)\hat{g}(s)}\,\mathrm{d}s,\; y\in[0,+\infty)^{13}} \tag{3.86}$$

Un esbozo de la demostración en C.2.1, en la página 281.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4.5. *Supongamos que* $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ *y* $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \epsilon(\gamma)$*. Como sabemos:*

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s},\; \hat{g}(s) = \frac{\gamma}{\gamma+s}.$$

Y por lo tanto obtenemos

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \frac{1}{cs^2}\cdot\frac{1-\frac{\lambda}{\lambda+cs}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+cs}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+s}} = \frac{1}{cs^2}\cdot\frac{cs(\gamma+s)}{s[cs+\lambda+c\gamma]} = \frac{\gamma+s}{s^2[cs+\lambda+c\gamma]}.$$

A partir de la anterior expresión deducimos:

$$\mathbb{F}(y) = \frac{1}{c(\rho+\gamma)^2}\left[(\rho+\gamma)y + \rho(1-e^{-(\rho+\gamma)y})\right].$$

Y por lo tanto:

$$\boxed{M(u) = \frac{1}{c(\rho+\gamma)^2}\left[(\rho+\gamma)(b-u) + \rho(1-e^{-(\rho+\gamma)(b-u)})\right]} \tag{3.87}$$

A continuación vamos a estudiar el caso en que el tiempo inicial $0 < r < t_1$ no es un tiempo de renovación.

Proposición 3.4.8. *Si* $c > 0$ *y* $Y_k < 0\ \forall k\in\mathbb{N}$ *la solución de la ecuación integral 3.30, en la página 73, partiendo de* $X_r = u,\ u\in[0,b]$ *y* $\mathscr{E}_r^- = z$*, satisface para* $0\le u\le b$ *la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{M(r,u,z) = \mathbb{F}(r,b-u,z),\; u\in[0,b]} \tag{3.88}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(r,y,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{sy}\frac{1}{\overline{F}(z)cs^2}\left[1-e^{scz}\hat{f}(cs)-F(z)+e^{scz}\int_0^z e^{-scl}f(l)\,\mathrm{d}l\right]\mathrm{d}s}+ \tag{3.89}$$

$$+\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{sy}\frac{\hat{g}(s)\hat{\mathbb{F}}(s)}{\overline{F}(z)}\left[e^{scz}\hat{f}(cs)-e^{scz}\int_0^z e^{-scl}f(l)\,\mathrm{d}l\right]\mathrm{d}s},\ y\in[0,+\infty).$$

Un resumen de la demostración se puede consultar en C.2.2, en la página 283.

Vamos a estudiar el siguiente ejemplo, como aplicación del anterior resultado:

Ejemplo 3.4.6. *Supongamos* $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}\ /\ \tau_i\rightsquigarrow\epsilon(\lambda)\ \forall\, i\in\mathbb{N}$ *y* $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}\ /\ Y_j\rightsquigarrow\epsilon(\gamma)\ \forall\, j\in\mathbb{N}$. *Como sabemos:*

$$f(l)=\lambda e^{-\lambda l},\ g(y)=\gamma e^{-\gamma y},\ \hat{f}(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s},\ \hat{g}(s)=\frac{\gamma}{\gamma+s}.$$

Teniendo en cuenta la proposición 3.4.8, en la página 96, sabemos que:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z)=\frac{1}{e^{-\lambda z}cs^2}\left[1-e^{scz}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+cs}-1+e^{-\lambda z}+e^{scz}\left[\frac{\lambda(1-e^{-(cs+\lambda)z}}{cs+\lambda}\right]\right]+$$

$$+\frac{\gamma e^{scz}}{(\gamma+s)e^{-\lambda z}}\left[\frac{\lambda}{\lambda+cs}-\left[\frac{\lambda(1-e^{-(cs+\lambda)z}}{cs+\lambda}\right]\right]\hat{\mathbb{F}}(s).$$

En el ejemplo 3.4.5, en la página 96, obtuvimos:

$$\hat{\mathbb{F}}(s)=\frac{\gamma+s}{s^2[cs+\lambda+c\gamma]}=\frac{\gamma+s}{cs^2[s+\rho+\gamma]}.$$

Y por lo tanto:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z)=\frac{1}{cs^2}-\frac{1}{c^2s^2[s+\rho+\gamma]},\ donde\ \rho=\frac{\lambda}{c}.$$

Con lo cual podemos concluir que:

$$\mathbb{F}(r,y,z)=\frac{[c(\rho+\gamma)-1]y}{c^2(\rho+\gamma)}+\frac{1}{c^2(\rho+\gamma)^2}\left[1-e^{-(\rho+\gamma)y}\right],$$

lo cual implica que:

$$\boxed{M(r,u,z) = \frac{[c(\rho+\gamma)-1](b-u)}{c^2(\rho+\gamma)} + \frac{1}{c^2(\rho+\gamma)^2}\left[1-e^{-(\rho+\gamma)(b-u)}\right]} \tag{3.90}$$

- *El caso desfavorable. Estudio y solución de casos posibles.*

Aunque en el "caso desfavorable" no podemos obtener una solución cerrada de la ecuación integral hay algunos casos en los cuales es posible obtener una solución:

- El caso semifavorable.

  Después de sencillos cálculos algebráicos y razonando lo mismo que en el "caso semifavorable" en la subsección 3.4.1, en la página 83, obtenemos:

$$M(u) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} (1-F(t))\,\mathrm{d}t + \frac{p}{c}\int_0^{b-u} f(\frac{b-u}{c}-\frac{t}{c})\int_0^t M(b-t+y)g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t. \tag{3.91}$$

Para el caso en que $X_0 = u,\ u \in [0,b]$. Y para el caso en que $X_r = u,\ u \in [0,b]$ siendo $0 < r < t_1$ un tiempo no de renovación obtenemos:

$$M(r,u,z) = \frac{1}{\overline{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} [1-F(z+t)]\,\mathrm{d}t + \tag{3.92}$$

$$+\frac{p}{c\overline{F}(z)}\int_0^{b-u} f(z+\frac{b-u-t}{c})\int_0^t M(b-t+y)g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

Vamos a resolver las anteriores ecuaciones integrales. Las demostraciones son inmediatas teniendo en cuenta las de las proposiciones 3.4.7 y 3.4.8, en las páginas 95 y 96 respectívamente.

Proposición 3.4.9. *La solución de la ecuación integral 3.91 en el caso en que la deriva es positiva y los saltos pueden tomar valores en* $(-\infty,-b]\cup[0,b]$*, partiendo de* $X_0 = u,\ u \in [0,b]$*, satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{M(u) = \mathbb{F}(b-u),\ u \in [0,b]} \tag{3.93}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy}\frac{1}{cs^2}\cdot\frac{1-\hat{f}(cs)}{1-p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s)}\,\mathrm{d}s,\ y \in [0,+\infty)} \tag{3.94}$$

Ejemplo 3.4.7. *Como ejemplo vamos a resolver la ecuación integral suponiendo que los tiempos de espera tienen una distribución exponencial de parámetro* λ, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ *y los saltos tienen la siguiente función de densidad:*

$$g(y) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma y}, & si\, y \in [0,+\infty) \\ g_-(y), & si\, y \in (-\infty,-b] \\ 0, & si\, y \in (-b,0) \end{cases}$$

Siguiendo el mismo esquema de razonamiento que en el ejemplo 3.4.5, en la página 96, obtenemos:

$$\boxed{M(u) = \frac{1}{q\lambda} + \frac{1}{q\gamma\lambda(r_2 - r_1)}\Big(e^{r_2(b-u)}(r_2+\gamma)r_1 - e^{r_1(b-u)}(r_1+\gamma)r_2\Big)} \tag{3.95}$$

Si el tiempo inicial $0 < r < t_1$ no es un tiempo de renovación tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.4.10. *La solución de la ecuación integral 3.92, en la página 98, cuando la deriva es positiva partiendo de $X_r = u$ y asumiendo que $\mathscr{E}_r^- = z$, satisface para $0 \leq u \leq b$ la siguiente fórmula:*

$$\boxed{M(r,u,z) = \mathbb{F}(r, b-u, z),\ u \in [0,b]} \tag{3.96}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy}\frac{1}{\overline{F}(z)cs^2}\left[1 - e^{scz}\hat{f}(cs) - F(z) + e^{scz}\int_0^z e^{-scl}f(l)\,\mathrm{d}l\right]} + \tag{3.97}$$

$$+\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy}\frac{p\hat{g}(s)\hat{\mathbb{F}}(s)}{\overline{F}(z)}\left[e^{scz}\hat{f}(cs) - e^{scz}\int_0^z e^{-scl}f(l)\,\mathrm{d}l\right],\ y \in [0,+\infty)}$$

Ejemplo 3.4.8. *Como ejemplo vamos a resolver la ecuación integral suponiendo que los tiempos de espera tienen una distribución exponencial de parámetro λ, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ y los saltos tienen la siguiente función de densidad $g(y) = pg_+(y) + qg_-(y)$, $p + q = 1$:*

$$g(y) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma y}, & si\ y \in [0,+\infty) \\ g_-(y), & si\ y \in (-\infty,-b] \\ 0, & si\ y \in (-b,0) \end{cases}$$

Efectuando los cálculos como en el ejemplo 3.4.6, en la página 97, obtenemos:

$$\boxed{M(r,u,z) = \frac{[cr_1r_2 - q\gamma](b-u)}{c^2r_1r_2} - \frac{r_1r_2 + q\gamma(r_1+r_2)}{(cr_1r_2)^2}} - \tag{3.98}$$

$$\boxed{-\frac{1}{(cr_1r_2)^2[r_1-r_2]}\left[e^{r_1(b-u)}r_2^2[r_1+q\gamma] - e^{r_2(b-u)}r_1^2[r_2+q\gamma]\right]}$$

Donde $\rho = \frac{\lambda}{c}$ y r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación:

$$s^2 + (\rho+\gamma)s + q\rho\gamma = 0,\ r_1 = \frac{-(\rho+\gamma) - \sqrt{(\rho+\gamma)^2 - 4q\rho\gamma}}{2},$$

$$r_2 = \frac{-(\rho+\gamma) + \sqrt{(\rho+\gamma)^2 - 4q\rho\gamma}}{2}.$$

Un caso muy interesante, por sus aplicaciones en ciencias económicas y actuariales, es el "caso actuarial".

- El caso actuarial.

Razonando de una forma semejante al "caso actuarial" en la subsección 3.4.1, página 83, llegamos a la siguiente identidad para el tiempo de escape partiendo de un tiempo de renovación:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \frac{b-u}{c} I_{\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\}} + \tau_1 I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\}} + \mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}, 0 < Y_1 < u + c\tau_1\}}.$$

A partir de ella es fácil demostrar que el tiempo medio de escape empezando desde un tiempo de renovación satisface la siguiente ecuación integral:

$$M(u) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} [1 - F(t)]\, \mathrm{d}t + \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_0^t g(y) M(t-y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t. \tag{3.99}$$

Se verifica la siguiente proposición:

Proposición 3.4.11. *Supongamos que F tiene una función de densidad f de clase C^n en $(0,\infty)$ y que existe un operador diferencial lineal $L = L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que f resuelve:*

$$L(f) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}\right) f = 0 \tag{3.100}$$

Con las condiciones iniciales:

$$f^j(0) = b_j,\ \textit{para}\ j = 0, \cdots, n-1. \tag{3.101}$$

Entonces $M(u) \in C^n$ y es solución de la siguiente ecuación integro diferencial:

$$\boxed{\left[\sum_{i=0}^{n} (-c)^i a_i \frac{\partial^i}{\partial u^i}\right] M(u) = A + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Pi^k(u)} \tag{3.102}$$

donde:

$$A = a_0\frac{b-u}{c} - \frac{b-u}{c}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1} + a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k b_{k-2}, \tag{3.103}$$

$$B_k = (-c)^k \left[\sum_{i=k+1}^{n} a_i f^{i-k-1}(0)\right],\ \Pi(u) = \int_0^u M(u-y)g(y)\,\mathrm{d}y,\ \Pi^k(u) = \frac{\partial^k \pi(u)}{\partial u^k}. \tag{3.104}$$

Con las condiciones de frontera en $x = b$:

$$M(b) = 0,\ M'(b) = -\frac{1}{c} - \frac{1}{c}f(0)\Pi(b), \tag{3.105}$$

$$M''(b) = -\frac{1}{c^2}f(0) + \frac{1}{c^2}f'(0)\Pi(b) - \frac{1}{c}f(0)\Pi'(b), \tag{3.106}$$

$$M^k(b) = (-1)^{k+1}\frac{1}{c^k}f^{k-2}(0) - \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-i} f^{k-1-i}(0)\Pi^i(b),\ \textit{para } k = 2,\cdots,n-1. \tag{3.107}$$

O, de una forma más simple:

$$M^k(b) = (-1)^{k+1}\frac{1}{c^k}f^{k-2}(0) - \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(0)\Pi^i(b),\ \textit{para } k = 0,\cdots,n-1. \tag{3.108}$$

Asumiendo que $f^{-2}(0) = 0,\ f^{-1}(0) = -1$ y $\sum_{i=0}^{-1} = 0$.

Un resumen de la demostración se puede consultar en C.2.3, en la página 285.

Teniendo en cuenta la anterior proposición es fácil obtener una solución de 3.102, en la página 100.

Corolario 3.4.3. *Supongamos que F tiene una función de densidad f de clase C^n en $(0,\infty)$ para la cual se cumple 3.100 y 3.101, entonces la solución de la ecuación integro diferencial 3.102 satisface la identidad:*

$$\boxed{M(u) = \frac{\Delta(b,u)}{\Delta(b)}} \tag{3.109}$$

donde:

$$\Delta(b,u) = \begin{vmatrix} A\pi(u) & -\pi_1(u) & -\pi_2(u) & \dots & -\pi_n(u) \\ \sigma_1(b) & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0(n-1)} \\ \sigma_2(b) & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{n-1}(b) & a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{3.110}$$

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{3.111}$$

$$\sigma_k(u) = \sum_{i=1}^{n-k} b_{i+k}\pi_i(u),\ \pi_i(u) = \frac{\partial^{i+1}\pi_0(u)}{\partial u^{i+1}},\ \pi_0(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{s[\sum_{j=0}^{n} a_j(-cs)^j - a_0\hat{g}(s)]}, \tag{3.112}$$

$$a_{ij} = \pi_{j+1+i}(b) - \sum_{k=0}^{i-1} \xi_{i-1-k} m_{j+1}^k(b),\ \xi_{i-1-k} = (\frac{-1}{c})^{i-k} f^{i-1-k}(0),\ m_k(b) = \int_0^b \pi_k(y)g(b-y)\,\mathrm{d}y, \tag{3.113}$$

$$m_k^j(u) = \frac{\partial^j m_k(u)}{\partial^j u},\ \textit{para } i = 0, \cdots, n-1. \tag{3.114}$$

Un esbozo de la demostración en C.2.1, en la página 288.

Como un caso particular tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.4.4. *Supongamos que F tiene una función de densidad f de clase C^n en $(0,\infty)$ y que existe un operador diferencial lineal con coeficientes constantes $L = L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que f resuelve:*

$$L(f) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}\right) f = 0 \tag{3.115}$$

con condiciones iniciales

$$f^j(0) = 0,\ \textit{para } j = 0, \cdots, n-2,\ f^{n-1}(0) = a_0. \tag{3.116}$$

Entonces:

a) *La función de renovación $m(t) = \mathbb{E}(N(t))$ tiene derivada $\nu(t) = m'(t)$ que resuelve la ecuación diferencial lineal:*

$$\boxed{(L - a_0)\,\nu = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}\right) \nu(t) = 0} \tag{3.117}$$

con condiciones iniciales:

$$\nu^j(0) = 0 \textit{ para } j = 0, \cdots, n-2,\ \nu^{n-1}(0) = a_0.$$

b*) $M(u) \in C^n(0,b)$ y cualquier solución $M(u)$ de la ecuación integral 3.99 debe también ser solución de la ecuación integro diferencial:*

$$\boxed{\left(\sum_{j=0}^{n}(-c)^j a_j \frac{\partial^j}{\partial u^j}\right) M(u) = a_1 + a_0 \int_0^u M(u-l)g(l)\,\mathrm{d}l,\ 0 \leq u < b} \tag{3.118}$$

Cuando $b < +\infty$ satisface, además, las n condiciones de frontera:

$$M(b) = M^j(b) = 0,\ j = 2, \cdots, n-1,\ M^{'}(b) = \frac{-1}{c}. \tag{3.119}$$

c*) La solución de la ecuacion integro diferencial 3.118, en la página 103, satisface la identidad:*

$$\boxed{M(u) = \frac{\Delta(b,u)}{\Delta(b)}} \tag{3.120}$$

donde:

$$\Delta(b,u) = \begin{vmatrix} a_1\pi_0(u) & -\sigma_0(u) & -\sigma_1(u) & \dots & -\sigma_{n-1}(u) \\ -a_1\pi_0(b) & \sigma_0(b) & \sigma_1(b) & \dots & \sigma_{n-1}(b) \\ -\frac{1}{c} - a_1\pi_0'(b) & \sigma_0'(b) & \sigma_1'(b) & \dots & \sigma_{n-1}'(b) \\ \vdots & & & & \\ -a_1\pi_0^{n-1}(b) & \sigma_0^{n-1}(b) & \sigma_1^{n-1}(b) & \dots & \sigma_{n-1}^{n-1}(b) \end{vmatrix}, \tag{3.121}$$

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} \sigma_0(b) & \sigma_1(b) & \cdots & \sigma_{n-1}(b) \\ \sigma_0^{'}(b) & \sigma_1^{'}(b) & \cdots & \sigma_{n-1}^{'}(b) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_0^{n-1}(b) & \sigma_1^{n-1}(b) & \cdots & \sigma_{n-1}^{n-1}(b) \end{vmatrix},\ \textit{el wronskiano de } \{\sigma_0(b), \sigma_1(b), \cdots, \sigma_{n-1}(b)\}. \tag{3.122}$$

$$\sigma_k(u) = \sum_{i=1}^{n-k} b_{i+k}\pi_i(u),\ \pi_i(u) = \frac{\partial^{i+1}\pi_0(u)}{\partial u^{i+1}},\ \pi_0(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{s[\sum_{j=0}^{n} a_j(-cs)^j - a_0\hat{g}(s)]}. \tag{3.123}$$

La demostración es trivial teniendo en cuenta la proposición 3.4.11 y el corolario 3.4.3.

A continuación vamos a estudiar el caso en que $\tau_i \rightsquigarrow \varepsilon_r(2,\lambda)$, y $Y_j \rightsquigarrow \varepsilon(\gamma)$.

Ejemplo 3.4.9. *Supongamos $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ / $\tau_i \rightsquigarrow \varepsilon_r(2,\lambda)$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$ y $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ / $Y_j \rightsquigarrow \epsilon(\gamma)$ $\forall\ j \in \mathbb{N}$, $g(y) = \gamma \cdot e^{-\gamma y}$. Con esas hipótesis sabemos que:*

$$f(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{1!} = \lambda^2 t e^{-\lambda t},\ f'(t) = \lambda^2(e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}),\ f''(t) = \lambda^2(-\lambda e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t}), \cdots$$

$$f(0) = 0,\ f'(0) = a_0 = \lambda^2.$$

Si $n = 2$ entonces:

$$\boxed{M(u) = \frac{\Delta(b,u)}{\Delta(b)}}$$

Donde:

$$r_1 = \frac{2\lambda - c\gamma + \sqrt{c\gamma(c\gamma + 4\lambda)}}{2c},\ r_2 = \frac{2\lambda - c\gamma - \sqrt{c\gamma(c\gamma + 4\lambda)}}{2c},$$

$$\Delta(b) = \frac{(r_1+\gamma)^2}{(r_1)^2(r_1-r_2)^2}[1-r_1^2]e^{2r_1 b} + \frac{(r_2+\gamma)^2}{(r_2)^2(r_1-r_2)^2}[1-r_2^2]e^{2r_2 b} - \tag{3.124}$$

$$-\frac{(r_1+\gamma)(r_2+\gamma)}{r_1 r_2 (r_1-r_2)^2}[2-r_1^2-r_2^2]e^{(r_1+r_2)b},$$

$$\Delta(b,u) = \frac{(r_1+\gamma)(r_2+\gamma)}{c(r_1 r_2)^2(r_1-r_2)}\left[2\lambda c r_1 r_2 (r_1-r_2) B e^{(r_1+r_2)b} - [r_1 r_2 - 2\lambda r_2 B]\, e^{r_1 u + r_2 b}\right] + \tag{3.125}$$

$$+\frac{(r_1+\gamma)(r_2+\gamma)}{c(r_1 r_2)^2(r_1-r_2)}\left[[r_1 r_2 - 2\lambda r_1 B]\, e^{r_1 b + r_2 u}\right].$$

Donde

$$B = \frac{(u\gamma+1)r_1 r_2 + \gamma(r_1+r_2)}{(c r_1 r_2)^2}.$$

Si $0 < r < t_1$ no es un tiempo de renovación obtenemos:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \frac{b-u}{c} I_{\{\mathscr{E}_r^+ > \frac{b-u}{c}\}} + \mathscr{E}_r^+ I_{\{\mathscr{E}_r^+ \le \frac{b-u}{c}\}} + \mathbf{t'}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \le \frac{b-u}{c}, 0 \le Y_1 \le u + c\mathscr{E}_r^+\}}.$$

A partir de esa expresión es fácil obtener la siguiente ecuación integral:

$$M(r,u,z) = \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} [1-F(z+t)]\, \mathrm{d}t + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_0^t M(t-y) g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t. \tag{3.126}$$

Se obtienen los siguientes resultados, razonando de forma conocida:

Proposición 3.4.12. *Supongamos que F tiene una función de densidad f de clase C^n en $(0,\infty)$ y que existe un operador diferencial lineal con coeficientes constantes $L = L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que f es solución de:*

$$L(f) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} \right) f(z+t) = 0 \tag{3.127}$$

con las condiciones iniciales:

$$f^j(z) = b_j, \ \textit{para} \ j = 0, \cdots, n-1. \tag{3.128}$$

Entonces $M(r,u,z) \in \ C^n$ y es solución de la siguiente ecuación integro diferencial:

$$\boxed{\left[\sum_{i=0}^{n} (-c)^i a_i \frac{\partial^i}{\partial u^i} \right] M(r,u,z) = A + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Pi^k(u)} \tag{3.129}$$

donde:

$$A = a_0 \frac{b-u}{c} - \frac{b-u}{c\bar{F}(z)} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1} + a_1 - \frac{1}{\bar{F}(z)} \sum_{k=2}^{n} a_k b_{k-2}, \tag{3.130}$$

$$B_k = (-c)^k \left[\sum_{i=k+1}^{n} a_i f^{i-k-1}(z) \right], \ \Pi(u) = \int_0^u M(u-y) g(y) \, \mathrm{d}y, \ \Pi^k(u) = \frac{\partial^k \Pi(u)}{\partial u^k}. \tag{3.131}$$

Con condiciones de frontera en $x = b$:

$$M(r,b,z) = 0, \ M'(r,b,z) = -\frac{1}{c} - \frac{1}{\bar{F}(z)c} f(z)\Pi(b), \tag{3.132}$$

$$M''(r,b,z) = -\frac{1}{\bar{F}(z)c^2} f(z) + \frac{1}{\bar{F}(z)c^2} f'(z)\Pi(b) - \frac{1}{\bar{F}(z)c} f(z)\Pi'(b), \tag{3.133}$$

$$M^k(r,b,z) = (-1)^{k+1} \frac{1}{\bar{F}(z)c^k} f^{k-2}(z) - \frac{1}{\bar{F}(z)} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{c} \right)^{k-i} f^{k-1-i}(z) \Pi^i(b), \ k = 2, \cdots, n-1. \tag{3.134}$$

O más brevemente

$$M^k(r,b,z) = (-1)^{k+1} \frac{1}{\bar{F}(z)c^k} f^{k-2}(z) - \frac{1}{c\bar{F}(z)} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{c} \right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(z) \Pi^i(b), \ k = 0, \cdots, n-1, \tag{3.135}$$

si asumimos que $f^{-2}(z) = 0, \ f^{-1}(z) = -\bar{F}(z)$ y $\sum_{i=0}^{-1} = 0$. $M(u)$ es la solución de la ecuación integro diferencial 3.102 obtenida en la proposición 3.4.11, en la página 100

A partir de la anterior proposición es fácil obtener una solución de la ecuación integro diferencial 3.129, en la página 105.

Corolario 3.4.5. *Supongamos que F tiene una función de densidad f de clase C^n en $(0,\infty)$ para la cual se cumplen 3.127 y 3.128. Entonces la solución de la ecuación integro diferencial 3.129 satisface la identidad:*

$$\boxed{M(r,u,z)=\frac{\Delta(b,u)}{\Delta(b)}} \tag{3.136}$$

donde:

$$\Delta(b,u)=\begin{vmatrix} [A\pi(u)+\Gamma(u)] & -\pi_1(u) & -\pi_2(u) & \dots & -\pi_n(u) \\ \sigma_0(b) & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0(n-1)} \\ \sigma_1(b) & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{n-1}(b) & a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{3.137}$$

$$\Delta(b)=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix},\ a_{ij}=\pi_{j+1+i}(b),\ \textit{para } i=0,\cdots,n-1, \tag{3.138}$$

$$\pi(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{sL(s)},\ \pi_k(u)=\frac{\partial^k\pi(u)}{\partial u^k},\ \Gamma(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{su}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{B_i s^i\hat{M}(s)\hat{g}(s)}{L(s)}\right]\mathrm{d}s, \tag{3.139}$$

$$\sigma_j(b)=\frac{(-1)^{i+1}}{\bar{F}(z)}\left(\frac{1}{c}\right)^i f^{i-2}(z)-A\pi^i(b)-\Gamma^i(b)- \tag{3.140}$$

$$-\frac{1}{c\bar{F}(z)}\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{i-1-j}f^{i-1-j}(z)\Pi^j(b),\ j=0,\cdots,n-1.$$

Como caso particular se deduce el siguiente corolario:

Corolario 3.4.6. *Supongamos que F tiene una función de densidad f de clase C^n en $(0,\infty)$ y que existe un operador diferencial con coeficientes constantes $L=L(\partial_u)$ de orden $n\in\mathbb{N}$ tal que f es solución de:*

$$L(f)=\left(\sum_{j=0}^{n}a_j\frac{\partial^j}{\partial t^j}\right)f(z+t)=0 \tag{3.141}$$

con las condiciones iniciales:

$$f^j(z) = 0,\ para\ j = 0, \cdots, n-2,\ f^{n-1}(z) = a_0. \tag{3.142}$$

entonces:

a) *$M(r,u,z) \in C^n(0,b)$ y cualquier solución $M(r,u,z)$ de la ecuación integral 3.126 debe también ser solución de la ecuación integro-diferencial:*

$$\boxed{\left(\sum_{j=0}^{n}(-c)^j a_j \frac{\partial^j}{\partial u^j}\right) M(r,u,z) = a_1 - \frac{a_0 F(z)}{\bar{F}(z)}(\frac{b-u}{c}) + a_0 \int_0^u M(u-l)g(l)\,\mathrm{d}l,\ 0 \le u < b} \tag{3.143}$$

Cuando $b < +\infty$ satisface, además, las n condiciones de frontera:

$$M(r,b,z) = M^j(r,b,z) = 0,\ j = 2, \cdots, n-1,\ M^{'}(r,b,z) = \frac{-1}{c}. \tag{3.144}$$

b) *La solución de la ecuación integro diferencial 3.143, en la página 107, satisface la identidad:*

$$\boxed{M(r,u,z) = \frac{\Delta(b,u)}{\Delta(b)}} \tag{3.145}$$

donde:

$$\Delta(b,u) = \begin{vmatrix} A\pi(u)+\Gamma(u) & -\pi_1(u) & -\pi_2(u) & \dots & -\pi_n(u) \\ -A\pi(b)-\Gamma(b) & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0(n-1)} \\ -\frac{1}{c} - A\pi'(b) - \Gamma'(b) & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ -A\pi^{n-1}(b) - \Gamma^{n-1}(b) & a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{3.146}$$

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{3.147}$$

$$\pi_i(u) = \frac{\partial^{i+1}\pi(u)}{\partial u^{i+1}},\ \pi(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{s[\sum_{j=0}^n a_j(-cs)^j]},\ a_{ij} = \pi_{j+1+i}(b), \tag{3.148}$$

$$\Gamma(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{su}\frac{a_0\hat{M}(s)\hat{g}(s)}{\sum_{i=0}^n(-c)^i a_i s^i}\,\mathrm{d}s,\ A = [a_1 - \frac{a_0F(z)}{\bar{F}(z)}(\frac{b-u}{c})]. \tag{3.149}$$

Siendo $M(u)$ la solución de la ecuación integro diferencial 3.118 obtenida en el corolario 3.4.4, en la página 102.

Ahora vamos a estudiar el caso en que $\tau_i \rightsquigarrow \varepsilon_r(2,\lambda)$, y $Y_j \rightsquigarrow \varepsilon(\gamma)$.

Ejemplo 3.4.10. *De acuerdo con las anteriores hipótesis tenemos:*

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t},\ g(y) = \gamma e^{-\gamma y},\ f(z+t) = \lambda^2 (z+t) e^{-\lambda(z+t)},$$

$$f'(z+t) = \lambda^2 \left[e^{-\lambda(z+t)} - \lambda(z+t)e^{-\lambda(z+t)}\right],$$

$$f''(z+t) = \lambda^3 \left[-2e^{-\lambda(z+t)} + \lambda(z+t)e^{-\lambda(z+t)}\right].$$

Por lo tanto:

$$\Gamma(u) = B\gamma(u) + C\gamma'(0) + D\gamma''(u),\ \textit{donde:}$$

$$B = \frac{2\lambda^3\gamma}{c^4},\ C = \frac{\lambda^2[c\alpha_1 - 2\lambda\alpha_0]\gamma}{c^3},\ D = \frac{\lambda^2\alpha_0\gamma}{c^2},$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{s^2(s-r_1)(s-r_2)(s-\rho)^2},\ \gamma^k(u) = \frac{\partial^k\gamma(u)}{\partial u^k},\ k = 0,\cdots,2.$$

Se sigue, denotando $\rho = \frac{\lambda}{c}$,que

$$\boxed{\pi(u) = \frac{1}{\lambda^2 e^{-\lambda z}[1-\lambda z]} \cdot [1 + e^{\rho u}[\rho u - 1]]}$$

$$\boxed{F(z) = \lambda^2 \int_0^z t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-\lambda z}[1+\lambda z],\ \overline{F}(z) = e^{-\lambda z}[1+\lambda z]}$$

Sabemos que

$$\boxed{A = \frac{\lambda[1-\lambda z]}{1+\lambda z}\left[2e^{-\lambda z}[1+\lambda z] - \lambda\left[1 - e^{-\lambda z}[1+\lambda z]\right]\right]\left[\frac{b-u}{c}\right]}$$

Teniendo en cuenta lo anterior podemos concluir que

$$\boxed{M(r,u,z) = \frac{\Delta(b,u)}{\Delta(b)}} \tag{3.150}$$

donde:

$$\Delta(b,u) = \begin{vmatrix} A\pi(u)+\Gamma(u) & -\pi_1(u) & -\pi_2(u) & \dots & -\pi_n(u) \\ -A\pi(b)-\Gamma(b) & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0(n-1)} \\ -\frac{1}{c}-A\pi'(b)-\Gamma'(b) & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ -A\pi^{n-1}(b)-\Gamma^{n-1}(b) & a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{3.151}$$

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ & & & \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \text{ donde } a_{ij} = \pi_{j+1+i}(b). \tag{3.152}$$

3.4.3. Ley de probabilidad de los tiempos de primera llegada a la barrera superior.

Vamos a resolver las ecuaciones integrales deducidas en su momento (subsección 3.3.3, en la página 74). Para ello vamos a hacer uso de las propiedades de la transformada de Laplace en dos dimensiones.

1. **El caso general**.

   Cuando consideramos que los saltos pueden tomar tanto valores positivos como negativos, el "caso general", teniendo en cuenta los teoremas 3.3.1, en la página 59, y 3.3.9, en la página 75, sustituyendo la función de densidad de los saltos, $g(y)$, por una combinación convexa de funciones de densidad: $g(y) = pg_+(y) + qg_-(y)$, $p+q=1$, siendo $g_+(y)$ la función de densidad de los saltos $\forall\ y \in [0,+\infty)$ y $g_-(y)$ $\forall\ y \in (-\infty,0)$ obtenemos:

   - Si $x > \dfrac{b-u}{c}$:

$$P(u;x) = \overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{p}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_0^t \mathbb{P}(t^b_{t-y} \le x - \frac{t-u}{c} \diagup X_0 = t-y) g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \tag{3.153}$$

$$+\frac{q}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^0 \mathbb{P}(t^b_{t-y} \le x - \frac{t-u}{c} \diagup X_0 = t-y) g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

   - Si $x \le \dfrac{b-u}{c}$:

$$P(u;x) = \frac{p}{c}\int_u^{u+cx} f(\frac{t-u}{c})\int_0^t \mathbb{P}(t^b_{t-y} \le x - \frac{t-u}{c}) g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \tag{3.154}$$

$$+\frac{q}{c}\int_u^{u+cx} f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^0 \mathbb{P}(t^b_{t-y} \le x - \frac{t-u}{c}) g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

En el caso en que partimos de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$.

Cuando el tiempo inicial $0 < r < t_1$ no es un tiempo de renovación teniendo en cuenta los teoremas 3.18, en la página 63, y 3.3.10, en la página 76, obtenemos el siguiente resultado (por comodidad vamos a denotar $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z),\ u \in [0, b]$):

- Si $x > \frac{b-u}{c}$:

$$P(r,u,z;x) = \frac{\overline{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\overline{F}(z)} + \frac{p}{c\overline{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_0^t P(t-y;x-\frac{t-u}{c})g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t+ \tag{3.155}$$

$$+\frac{q}{c\overline{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^0 P(t-y;x-\frac{t-u}{c})g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

- Si $x \leq \frac{b-u}{c}$:

$$P(r,u,z;x) = \frac{p}{c\overline{F}(z)}\int_u^{u+cx} f(z+\frac{t-u}{c})\int_0^t P(t-y;x-\frac{t-u}{c})g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t+ \tag{3.156}$$

$$+\frac{q}{c\overline{F}(z)}\int_u^{u+cx} f(z+\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^0 P(t-y;x-\frac{t-u}{c})g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

No obstante, lo mismo que ocurría con los tiempos medios, estas ecuaciones no siempre son resolubles de forma cerrada (aunque también se puede demostrar la existencia y unicidad de la solución). Vamos a estudiar algunos casos particulares en los cuales es posible encontrar una fórmula que sea solución de las ecuaciones integrales correspondientes.

2. **Casos particulares**

Debido al carácter general de esta tesis y a la dificultad de reflejar de forma resumida los cálculos implicados, únicamente estudiaremos el que denominábamos “caso favorable”.

- *El caso favorable. Solución general.*

  De acuerdo con el caso general, razonando como hicimos en “el caso favorable” en la subsección 3.4.1, tendríamos $p = 0,\ q = 1$, y vamos, por comodidad, a usar $g(y)$ en vez de $g_-(y)$. Vamos a deducir una ecuación integral para la ley de probabilidad del tiempo de primera llegada a la barrera superior partiendo de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$. Únicamente daremos la solución para el caso en que $x > \frac{b-u}{c}$ pues para el caso en que $x \leq \frac{b-u}{c}$ la ecuación no admite solución cerrada en general.

  Proposición 3.4.13. *La solución de la ecuación integral de la ley de probabilidad de primera llegada a la barrera superior en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$, satisface la siguiente identidad:*

  Si $x > \frac{b-u}{c}$:

$$\boxed{P(u;x) = \mathcal{P}(b-u;x) \ siendo:} \tag{3.157}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(y;x) = \frac{-1}{4\pi^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy+px}\frac{[1-\hat{f}(cs)]}{sp[1-\hat{g}(s)\hat{f}(p+cs)]}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p} \tag{3.158}$$

Un resumen de la demostración puede consultarse en C.3.1, en la página 291.

En el caso en que el tiempo inicial $0 < r < t_1$ no sea un tiempo de renovación obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.4.14. *La solución de la ecuación integral de la ley de probabilidad de primera llegada a la barrera superior en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_r = u$, $u \in [0,b]$, $0 < r < t_1$, $\mathscr{E}_r^- = z$, satisface la siguiente identidad:*

Si $x > \frac{b-u}{c}$:

$$\boxed{P(r,u,z;x) = \mathcal{P}(r,b-u,z;x) \ siendo:} \tag{3.159}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(r,y,z;x) = \frac{-1}{4\pi^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy+px}\frac{e^{scz}[e^{-scz}-\hat{f}(cs)+cs\int_0^z e^{-sct}F(t)\,\mathrm{d}t]}{ps\bar{F}(z)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p-} \tag{3.160}$$

$$\boxed{-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy+px}\frac{\hat{g}(s)\hat{\hat{\mathcal{P}}}(s;p)\bar{h}_z(p)}{\bar{F}(z)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p, \ siendo\ h_z(t) = e^{-cst}f(z+t)u(t)}$$

La demostración sigue el mismo esquema que en C.3.1, en la página 291.

3.4.4. Ley de probabilidad de los tiempos de escape de la zona $[0,b]$.

Vamos a resolver las ecuaciones integrales obtenidas en 3.3.4, en la página 78. Para ello vamos a hacer uso de las propiedades de las transformadas de Fourier y de Laplace.

1. **El caso general**.

   En el "caso general", teniendo en cuenta los teoremas 3.3.5, en la página 68, y 3.3.11, en la página 78, sustituyendo la función de densidad de los saltos, $g(y)$, por una combinación convexa de funciones de densidad: $g(y) = pg_+(y) + qg_-(y)$, $p+q=1$, siendo $g_+(y)$ la función de densidad de los saltos $\forall\, y \in [0,+\infty)$ y $g_-(y)\ \forall\, y \in (-\infty,0)$, llegamos a:

   - Si $x > \dfrac{b-u}{c}$:

$$P(u;x) = 1 - \frac{p}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y;x-\frac{t-u}{c})\right] g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t- \tag{3.161}$$

$$-\frac{q}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y;x-\frac{t-u}{c})\right] g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

- Si $x \leq \dfrac{b-u}{c}$:

$$P(u;x) = F(x) - \frac{p}{c}\int_u^{u+cx} f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y;x-\frac{t-u}{c})\right] g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \tag{3.162}$$

$$-\frac{q}{c}\int_u^{u+cx} f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y;x-\frac{t-u}{c})\right] g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

En el caso en que partimos de $X_0 = u,\ u \in [0,b]$.

Cuando el tiempo inicial $0 < r < t_1$ no es un tiempo de renovación obtenemos el siguiente resultado, teniendo en cuenta los teoremas 3.3.6, en la página 70, y 3.3.12, en la página 80 (por comodidad vamos a denotar $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^{-} = z),\ u \in [0,b]$.)

- Si $x > \frac{b-u}{c}$:

$$P(r,u,z;x) = 1 - \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y;x-\frac{t-u}{c})\right] g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t- \tag{3.163}$$

$$-\frac{q}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y;x-\frac{t-u}{c})\right] g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

- Si $x \leq \frac{b-u}{c}$:

$$P(r,u,z;x) = \frac{1}{\bar{F}(z)}F(z+x) - \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^{u+cx}\int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y;x-\frac{t-u}{c})\right] g_+(y) f(z+\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t- \tag{3.164}$$

$$-\frac{q}{c\bar{F}(z)}\int_u^{u+cx}\int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y;x-\frac{t-u}{c})\right] g_-(y) f(z+\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

Sin embargo, lo mismo que ocurría con los tiempos de primera llegada, estas ecuaciones no siempre son resolubles de forma cerrada. Vamos a estudiar algunos casos particulares en los cuales es posible encontrar la solución.

2. **Casos particulares**

Únicamente vamos a estudiar el "caso favorable", debido a la dificultad de reflejar los cálculos necesarios en el resto de casos.

- *El caso favorable. Solución general.*

  Razonando de un modo semejante al "caso general" de la subsección 3.4.2, tendríamos $p = 0,\ q = 1$, y vamos por comodidad a usar $g(y)$ por $g_-(y)$. Únicamente daremos la solución para el caso en que $x > \frac{b-u}{c}$ pues cuando $x \leq \frac{b-u}{c}$ no es posible, en general, obtener una solución cerrada de la ecuación integral.

  Proposición 3.4.15. *La solución de la ecuación integral de la ley de probabilidad del tiempo de escape de la zona $[0, b]$ en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$, satisface la siguiente identidad:*

  Si $x > \frac{b-u}{c}$:

$$\boxed{P(u; x) = \mathcal{P}(b - u; x) \text{ siendo}:} \tag{3.165}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(y; x) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{sy+px} \frac{1 - \hat{g}(s)\hat{f}(cs)}{sp[1 - \hat{g}(s)\hat{f}(p + cs)]} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p} \tag{3.166}$$

  Un resumen de la demostración en C.4.1, en la página 292.

  En el caso en que el tiempo inicial $0 < r < t_1$ no es un tiempo de renovación obtenemos el siguiente resultado:

  Proposición 3.4.16. *La solución de la ecuación integral de la ley de probabilidad del tiempo de escape de la zona $[0, b]$ en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_r = u,\ u \in [0, b],\ 0 < r < t_1,\ \mathscr{E}_r^- = z$, satisface la siguiente identidad:*

  Si $x > \frac{b-u}{c}$:

$$\boxed{P(r, u, z; x) = \mathcal{P}(r, b - u, z; x) \text{ siendo}:} \tag{3.167}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(r, y, z; x) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{sy+px} \left[\frac{[c\bar{F}(z) - \hat{g}(s)\hat{f}_z(\frac{s}{c})]}{pcs\bar{F}(z)} \right] \mathrm{d}s\,\mathrm{d}p -} \tag{3.168}$$

$$\boxed{-\frac{1}{4\pi^2} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{sy+px} \left[\frac{\hat{g}(s)\hat{\hat{\mathcal{P}}}(s; p)\hat{h}_z(p)}{\bar{F}(z)} \right] \mathrm{d}s\,\mathrm{d}p,}$$

  Siendo $h_z(t) = e^{-sct} f(z + t)u(t),\ \hat{f}_z(\frac{s}{c}) = \mathcal{L}(f(z + \frac{t}{c}))$.

  La demostración sigue el mismo esquema que C.4.1, en la página 292.

Un estudio específico sobre los tiempos de escape y de primera llegada, resolviendo las ecuaciones integrales obtenidas para los tiempos medios, teniendo en cuenta una amplia gama de funciones de distribución tanto para los tiempos de espera como para los saltos puede consultarse en el artículo *Tiempos medios de escape y primera llegada en el modelo de Sparre Andersen*, cuyos resultados han sido dados a conocer en varias ponencias de la SEIO y diversos seminarios (del IUFFyM., del Grupo de trabajo SPA,...), y en el artículo *A semi-deterministic random walk with resetting*, [151]. También son interesantes, en un contexto actuarial y de ciencias financieras los artículos [25], de D. C. M. Dickson y G. E. Willmot, [26], de D. C. M. Dickson, B. D. Hughes y Z. Lianzeng y [27], de D. C. M. Dickson y C. Hipp donde obtienen la función de densidad del "tiempo de ruina" y diversos objetos relacionados, como la media, la varianza, coeficiente de variación, kurtosis,... un estudio mas específico de ciencias actuariales es [28], de D. C. M. Dickson y C. Hipp donde estudian la función de densidad conjunta del tiempo de ruina y del "deficit at ruin". Clásicos en teoría de riesgo son los trabajos [54] y [55], de H. U. Gerber y E. S. W. Shiu, [87], de S. Li y J. Garrido donde estudian el tiempo de ruina deduciendo la conocida en Teoría de Riesgos como "función de Gerber-Shiu" (o "función de penalidades de Gerber-Shiu"). Recordando los resultados que hemos obtenido en los ejemplos 3.4.9, en la página 103 y 3.4.10, en la página 108, en los cuales hemos deducido el tiempo medio de escape si hacemos $b \to +\infty$, obtenemos el "tiempo medio de ruina"; sin embargo, si tenemos en cuenta los ejemplos 3.4.5, en la página 96 y 3.4.6, en la página 97, haciendo $b \to +\infty$ el resultado es $+\infty$, resultado trivial teniendo en cuenta que en el "caso favorable" el proceso que estudiamos es creciente y únicamente puede salir de la zona por la barrera superior. En el caso de la función de densidad del "tiempo de ruina", siguiendo el mismo razonamiento, se puede obtener, teniendo en cuenta distribuciones particulares para los tiempos de espera y los saltos, haciendo tender $b \to +\infty$ en las soluciones obtenidas a partir de las proposiciones 3.4.15 y 3.4.16, en la página 113, la fórmula que la describe.

Con un enfoque más general, merecen destacarse [9], de J. Bertoin y [17], de S. N. Chiu y C. Yin donde se estudian los "tiempos de escape" y "tiempos de primer paso", si bien el modelo que estudian es bastante diferente al investigado en esta monografía. En [80], de L. Lavergnat y P. Gole desarrollan un modelo estocástico mediante el cual estudian la distribución del tiempo de lluvia. En [123], de P. Perona, A. Porporato y L. Ridolf se estudian las acumulaciones anuales de nieve, y en [124], de P. Perona, E. Daly, B. Crouzy y A. Porporato se desarrolla un modelo estocástico para el estudio de las avalanchas de nieve mediante procesos de Poisson. Estudios eminentemente teóricos donde se estudian los "hitting time", los "exit time" o los "first passage time" obteniendo resultados destacables para algunos casos concretos o incluso numéricos para determinados valores de los parámetros son [68], de S. Janson y Y. Peres, [79], de G. Kou y H. Wang, o [146], de D. Valenti, B. Spagnolo and G. Bonnano, [158], de Y. Zhou y J. Dou, donde se estudia el tiempo medio de escape en un modelo con aplicaciones en un contexto de ciencias físicas. Estudios centrados en las CTRW, en los cuales se obtiene la función de densidad del tiempo de escape, el tiempo medio de escape y otros objetos relacionados son [110], [111], de J. Villarroel y M. Montero, [109], de E. W. Montroll y G. H. Weiss, [112], de J. Villarroel y M. Montero, en los cuales, aunque los modelos estudiados son diferentes, se obtiene la función de densidad del proceso usando un argumento de renovación y se estudian el tiempo medio de escape, aplicando los resultados para algunos casos concretos. Trabajos en los cuales se realiza un estudio muy interesante, aunque en modelos bastante diferentes al considerado en esta monografía son [120], de A. Pal y S. Reuveni, [121], de A. Pal , I. Eliazar y S. Reuveni o [130], de S. Reuveni. Textos dedicados al estudio de los procesos estocásticos o la Teoría de Riesgos donde se tratan también los tiempos de escape, hitting time, etc son [132], de T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt y J. Teugels[30], de D. C. M. Dickson, centrados en estudios actuariales, [6], de R. N. Bhattacharya y E. C. Waymire, [44] y [45], de W. Feller, o [70], de S. Karlin and H. Taylor con un enfoque más general.

3.5. Probabilidades de primera llegada a la barrera superior.

En esta sección vamos a estudiar la probabilidad de llegar a la barrera superior. La literatura relacionada con los tiempos de primera llegada es muy abundante, tanto en ciencias económicas [112], [146], como en biología [14], química [120],[129],...

3.5.1. Probabilidad de llegar a la barrera superior antes de un cierto tiempo x.

A continuación vamos a estudiar la probabilidad de que el proceso llegue a la barrera superior b (sin previamente haber llegado a la barrera inferior o haber salido de $(0, b)$) antes de un cierto tiempo $x > 0$; asumimos, salvo que se indique lo contrario, $u \in [0, b]$. En la sección 3.3 estudiamos los tiempos de primera llegada a la barrera superior, deduciendo las ecuaciones integrales que verifica su ley de probabilidad; en esta sección vamos a obtener unos resultados equiparables enfocando la investigación de forma diferente. Empezaremos con unas definiciones y resultados previos.

Definición 3.5.1. (Probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u$ antes de $x > 0$.) *Definimos la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u$ antes de un cierto tiempo $x > 0$ como:*

$$\boxed{P^u_{b,0x} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ t \leq x \ / \ [X^u_{t,0} = b] \wedge [X^u_{s,0} \in (0, b) \ \forall \ 0 < s < t \leq x])} \tag{3.169}$$

Definición 3.5.2. (Probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u$ antes de $x > 0$ después de τ_1.) *Definimos la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u$ antes de un cierto tiempo $x > 0$ después de τ_1 como:*

$$\boxed{P^u_{b,\tau_1 x} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \tau_1 + t \leq x \ / \ [X^u_{\tau_1+t,0} = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,0} \in (0, b) \ \forall \ \tau_1 < \tau_1 + s < \tau_1 + t \leq x])} \tag{3.170}$$

Vamos a definir la probabilidad de que el proceso llegue a b partiendo de $X_r = u,\ u \in [0, b]$ antes de un tiempo $x > 0$ y la probabilidad de que el proceso llegue a b partiendo $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ antes de un tiempo $x > 0$ después de τ_1.

Definición 3.5.3. (Probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ antes de un tiempo $x > 0$.) *Definimos la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ antes de un tiempo $x > 0$ como:*

$$\boxed{P^u_{b,rx} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ r + t \leq x / [X^u_{r+t,r} = b] \wedge [X^u_{r+s,r} \in (0, b) \ \forall \ r + s < r + t \leq x])} \tag{3.171}$$

Definición 3.5.4. (Probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ antes de un tiempo $x > 0$ después de τ_1.) *Definimos la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ antes de un tiempo $x > 0$ después de τ_1 como:*

$$\boxed{P^u_{b,r\tau_1 x} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \tau_1 - r + t \leq x \ / \ [X^u_{\tau_1+t,r} = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0, b) \ \forall \ \tau_1 - r < \tau_1 - r + s < \tau_1 - r + t \leq x])} \tag{3.172}$$

Los siguientes lemas son esenciales para la investigación:

Lema 3.5.1. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u$ antes de x después de τ_1, $P^u_{b,\tau_1 x}$, pertenece a $\mathcal{F}_2^+$ y coincide (en distribución) con la probabilidad de llegar a b sin antes haber llegado a la barrera inferior partiendo de $X_0 = u + X_{\tau_1}$, $P^{u+X_{\tau_1}}_{b,0x-\tau_1}$ antes de $x - \tau_1$.*

Demostración. En efecto, teniendo en cuenta la definición de la probabilidad de llegar a b sin antes haber llegado a la barrera inferior partiendo de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$ antes de x después de τ_1, $P^u_{b,\tau_1 x}$ obtenemos:

$$P^u_{b,\tau_1 x} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \tau_1 + t \leq x \ / \ [X^u_{\tau_1+t,0} = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,0} \in (0, b) \forall \tau_1 < \tau_1 + s < \tau_1 + t \leq x]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0, \tau_1 + t \leq x \ /[u + c\tau_1 - Y_1 + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k = b] \wedge [u + c\tau_1 - Y_1 + cs - \sum_{k=0}^{N(s)} Y_k \in (0, b) \forall \tau_1 < \tau_1 + s < \tau_1 + t \leq x]) =$$

$$= {}^{14}\mathbb{P}(\exists t > 0,\ t \leq x - \tau_1 \ / \ [X^{u+X_{\tau_1}}_{t,0} = b] \wedge [X^{u+X_{\tau_1}}_{s,0} \in (0, b) \forall 0 < s < t \leq x - \tau_1]) = P^{u+X_{\tau_1}}_{b,0x-\tau_1}.^{15}$$

□

Lema 3.5.2. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ antes de un tiempo $x > 0$ después de τ_1, $P^u_{b,r\tau_1 x}$, pertenece a $\mathcal{F}_2^+$ y coincide (en distribución) con la probabilidad de llegar a b antes de haber llegado a la barrera inferior partiendo de $X_0 = u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1$, $P^{u+c\mathscr{E}_r^+ - Y_1}_{b,0x-\mathscr{E}_r^+}$ antes de $x - \mathscr{E}_r^+$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la definición de la probabilidad de llegar a b sin antes haber llegado a la barrera inferior partiendo de $X_r = u,\ u \in [0, b],\ r \in (0, \tau_1)$ antes de un tiempo $x > 0$ después de τ_1, $P^u_{b,r\tau_1 x}$ obtenemos:

$$P^u_{b,r\tau_1 x} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \tau_1 - r + t \leq x / \ [X^u_{\tau_1+t,r} = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0, b) \forall \tau_1 - r < \tau_1 - r + s < \tau_1 - r + t \leq x]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \mathscr{E}_r^+ + t \leq x \ / \ [u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1 + ct - \sum_{k=N(\tau_1)+1}^{N(\tau_1+t)} Y_k = b] \wedge$$

$$[u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1 + cs - \sum_{k=N(\tau_1)+1}^{N(\tau_1+s)} Y_k \in (0, b) \forall \mathscr{E}_r^+ < \mathscr{E}_r^+ + s < \mathscr{E}_r^+ + t \leq x]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \mathscr{E}_r^+ + t \leq x \ / \ [u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1 + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k = b] \wedge$$

$$[u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1 + cs - \sum_{k=0}^{N(s)} Y_k \in (0, b) \forall \mathscr{E}_r^+ < \mathscr{E}_r^+ + s < \mathscr{E}_r^+ + t \leq x]) = {}^{16}P^{u+c\mathscr{E}_r^+ - Y_1}_{b,0x-\mathscr{E}_r^+}.$$

[14] *Teniendo en cuenta las proposiciones 2.1.3 y 2.4 en la página 15.*
[15] *Teniendo en cuenta la equidistribución e independencia de los tiempos de espera τ_i y de los saltos Y_j.*
[16] *Razonando igual que en el anterior lema.*

Teniendo en cuenta la definición de la variable aleatoria excess life y la independencia y equidistribución de las variables aleatorias $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

□

A continuación vamos a deducir una relación que verifica la probabilidad de llegar a la barrera superior antes de un tiempo x, para lo cual vamos a condicionar por los valores que toma la variable bidimensional (τ_1, Y_1). Salvo que se indique lo contrario, en todos los casos $u \in [0, b]$.Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.5.1. *La probabilidad de llegar a b antes de $x \in \mathbb{R}^+$, $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, $\tau_1 = l, Y_1 = y$, $P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y}$ verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{\frac{b-u}{c}<l\}\cap\{y\in\mathbb{R}\}} + P^u_{b,lx} I_{\{l\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{u+cl-b\leq y\leq u+cl\}}} \tag{3.173}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma (τ_1, Y_1):

- $\dfrac{b-u}{c} < l$. No ha habido renovaciones antes de l; por la definición del proceso:

  $$u + X_{\frac{b-u}{c}} = u + c(\frac{b-u}{c}) = b.$$

  El proceso ha llegado a b y por lo tanto $P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y} = 1$, para cualquier valor que tome Y_1.

- $l \leq \dfrac{b-u}{c}$. Distinguimos dos casos, dependiendo de si al producirse la primera renovación el salto nos lleva hasta b, o seguimos dentro de la zona $[0, b]$.

  - Supongamos que $u + cl - y = b$. Sin embargo, si suponemos que las variables aleatorias $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son continuas ese es un suceso con probabilidad cero.
  - Supongamos que $u + cl - y \in (0, b)$. Esto ocurre cuando

    $$0 < u + cl - y < b \Rightarrow -(u + cl) < -y < b - (u + cl) \Rightarrow (u + cl) - b < y < (u + cl).$$

    El proceso sigue dentro de la zona, se ha producido la primera renovación, y por lo tanto la probabilidad de llegar a b antes de un tiempo x será $P^u_{0,lx}$.

  Con lo cual, efectívamente obtenemos 3.173

□

A continuación vamos a deducir una ecuación integral para la probabilidad de llegar a b antes de $x \in \mathbb{R}^+$, $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$.

Teorema 3.5.2. *La probabilidad de llegar a b, antes de $x \in \mathbb{R}^+$, $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, que denotamos por $P^u_{b,0x}$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^u_{b,0x} = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t P^{t-y}_{b,0x-\frac{t-u}{c}}\,g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.174}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.5.1, el teorema de la probabilidad total, las propiedades de las funciones indicatrices, de la unión e intersección de conjuntos y la independencia entre las variables aleatorias tiempos de espera τ_i y los saltos Y_j, obtenemos:

$$P^u_{b,0x} = \int P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) =$$

$$= \int P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l \diagup X_0 = u)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = {}^{17}$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \mathrm{d}F(l) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l)\int_{u+cl-b}^{u+cl} P^{u+cl-y}_{E,0x-l}\,\mathrm{d}G(y).$$

Teniendo en cuenta que se cumple $P^u_{b,\tau_1 x} \stackrel{d}{=} P^{u+c\tau_1-Y_1}_{b,0x-\tau_1}$ y dando un cambio de variable apropiado obtenemos 3.174.

□

En el caso en que $x \leq \frac{b-u}{c}$, se deducen los siguientes resultados:

Teorema 3.5.3. *La probabilidad de llegar a b antes de* $x \in \mathbb{R}^+$, $x \leq \frac{b-u}{c}$ *partiendo de* $X_0 = u, \tau_1 = l, Y_1 = y$, $P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y}$ *verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y} = P^u_{b,lx} I_{\{l\leq x\}\cap\{u+cl-b\leq y\leq u+cl\}}} \tag{3.175}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma (τ_1, Y_1):

- $\dfrac{b-u}{c} < l$. No ha habido renovaciones antes de l; por la definición del proceso:

$$u + X_{\frac{b-u}{c}} = u + c(\frac{b-u}{c}) = b.$$

  El proceso ha llegado a b pero como en este caso $x \leq \frac{b-u}{c}$ no lo vamos a considerar.

- $l \leq x \leq \dfrac{b-u}{c}$. Distinguimos dos casos.
  - Supongamos que $u + cl - y = b$. Si suponemos que las variables aleatorias $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son continuas ese es un suceso con probabilidad cero.
  - Supongamos que $u + cl - y \in (0, b)$. Esto ocurre cuando

[17] *Pues* $\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l \diagup X_0 = u) = \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l)$, $\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = \mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y)$.

$$0 < u + cl - y < b \Rightarrow -(u + cl) < -y < b - (u + cl) \Rightarrow (u + cl) - b < y < (u + cl).$$

$X_l \in [0, b]$, se ha producido la primera renovación, y por lo tanto la probabilidad de llegar a b antes de un tiempo x será $P^u_{0,lx}$.

- $x \leq l \leq \dfrac{b-u}{c}$. Antes de l el proceso no puede haber llegado a b, pues:

$$\forall t < l \ : \ u + X_t = u + ct < u + cl < u + c(\frac{b-u}{c}) = b.$$

Por lo tanto $P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.

Con lo cual, efectívamente se cumple 3.175.

□

A continuación vamos a obtener una ecuación integral para la probabilidad de llegar a b antes de $x \in \mathbb{R}^+,\ x \leq \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$.

Teorema 3.5.4. *La probabilidad de llegar a b, antes de $x \in \mathbb{R}^+,\ x \leq \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, que denotamos por $P^u_{b,0x}$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^u_{b,0x} = \frac{1}{c}\int_u^{u+cx} f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} P^{t-y}_{b,0x-\frac{t-u}{c}} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.176}$$

Demostración. A partir de la identidad deducida en el teorema 3.5.3 obtenemos:

$$P^u_{b,0x} = \int P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) =$$

$$= \int P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l \diagup X_0 = u)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) =$$

$$= \int_0^x \mathrm{d}F(l) \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^u_{b,lx}\,\mathrm{d}G(y).$$ [18]

Teniendo en cuenta que se cumple $P^u_{b,\tau_1 x} \overset{d}{=} P^{u+c\tau_1-Y_1}_{b,0x-\tau_1}$; por lo tanto concluimos que se verifica 3.176.

□

Vamos a estudiar la probabilidad de llegar a b partiendo de un tiempo $r \in (0, t_1)$ antes de un tiempo $x \in \mathbb{R}^+,\ x > r + \frac{b-u}{c}$.

Teorema 3.5.5. *La probabilidad de llegar a b antes de $x \in \mathbb{R},\ x > r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_r = u,\ \tau_1 = l,\ Y_1 = y,\ P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y}$, con $r \in (0, \tau_1)$ satisface la siguiente identidad:*

[18] *Pues* $\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l \diagup X_0 = u) = \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l),\ \mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = \mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y)$.

$$\boxed{P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{\frac{b-u}{c}<\mathscr{E}^+_r\}\cap\{Y_1\in\mathbb{R}\}} + P^u_{b,rlx} I_{\{\mathscr{E}^+_r\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{Y_1\in(u+cl'-b,u+cl')\}},\ l'=l-r} \tag{3.177}$$

Demostración. Teniendo en cuenta las hipótesis del enunciado, condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1):

- $r + \frac{b-u}{c} < l$. No ha habido renovaciones antes de $\tau_1 = l$, por lo tanto:

$$X^u_{r+\frac{b-u}{c},r} = u + c(r + \frac{b-u}{c} - r) = b.$$

  El proceso ha llegado a b y se cumple que $P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = 1$ para cualquier valor que pudiera tomar Y_1.

- $l \leq r + \frac{b-u}{c} < x$. Diferenciamos según los valores que toma el proceso en el tiempo $t_1 = \tau_1$ pues para cualquier $t \in (0, l)\ :\ X^u_{t,r} = u + c(t-r) < u + c(r + \frac{b-u}{c} - r) = b$.

  - Sea $u + c(l-r) - y < 0\ :\ X^u_{l,r} \notin [0, b]$, y por lo tanto $P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - Sea $u + c(l-r) - y > b\ :\ X^u_{l,r} \notin [0, b]$ y por lo tanto $P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - Sea $u + c(l-r) - y = b$. Se trata de un suceso con probabilidad cero, teniendo en cuenta que tanto las variables aleatorias tiempos de espera, $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ como las variables aleatorias saltos $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son continuas.
  - Sea $0 < u + c(l-r) - y < b\ :\ X^u_{l,r} \in [0, b]$, se ha producido una renovación y por lo tanto $P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = P^u_{b,r\tau_1 x}$, la probabilidad de llegar a b antes de x partiendo de $X_r = u$ despues de τ_1. Esto ocurre cuando:

$$0 < u + c(l-r) - y < b \Rightarrow 0 < u + cl' - y < b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(u + cl') < -y < b - (u + cl') \Rightarrow (u + cl') - b < y < u + cl'.$$

  Esto cuando $l \leq r + \frac{b-u}{c} \Rightarrow l' \leq \frac{b-u}{c}$.

  Con lo cual, efectivamente se cumple 3.177

□

Vamos a deducir ahora la ecuación integral que satisface la probabilidad de llegar a b antes del tiempo $x \in (0, +\infty)$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$.

Teorema 3.5.6. *La probabilidad de llegar a b antes de $x \in (0, +\infty)$, $x > r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$, que denotamos por $P^u_{b,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{b,rx} = \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t P^{t-y}_{b,0x-\frac{t-u}{c}} g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{3.178}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el teorema 3.5.5 y aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P^u_{b,rx} = \int P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) = \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l' \diagup \vec{\sigma}) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l' \diagup \vec{\sigma}) \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P^u_{b,rlx}\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}).$$

Puesto que en el lema 3.5.2, en la página 116, demostramos que $P^u_{b,r\tau_1 x} \stackrel{d}{=} P^{u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1}_{b,0x-\mathscr{E}^+_r}$, obtenemos:

$$P^u_{b,rx} = \frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l) \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^{u+cl-y}_{b,0x-l} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.^{19}$$

Por comodidad hemos sustituido $l' = l$ como variable de integración. Dando un cambio apropiado de variable obtenemos 3.178.

□

En el caso en que $x \leq r + \frac{b-u}{c}$ tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.5.7. *La probabilidad de llegar a b antes de $x \in \mathbb{R}$, $x \leq r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_r = u$, τ_1, Y_1, $P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y}$ siendo $r \in (0,\tau_1)$ satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = P^u_{b,rlx} I_{\{\mathscr{E}^+_r \leq x\}\cap\{Y_1 \in (u+cl'-b,u+cl')\}},\ l' = l - r} \tag{3.179}$$

Demostración. Por las hipótesis del enunciado, condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1):

- $r + \frac{b-u}{c} < l$.

$$X^u_{r+\frac{b-u}{c},r} = u + c\cdot(r + \frac{b-u}{c} - r) = b.$$

  El proceso ha llegado a b, pero al ser $x \leq r + \frac{b-u}{c}$ no puede llegar antes de x y tendremos que $P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$ para cualquier valor que pudiera tomar Y_1.

- $l \leq x \leq r + \frac{b-u}{c}$. Diferenciamos varios casos según los valores que toma el proceso en el tiempo $t_1 = \tau_1$ pues para cualquier $t \in (0,l)$: $X^u_{t,r} = u + c(t-r) < u + c(r + \frac{b-u}{c} - r) = b$ y $x^u_{t,r} \in [0,b]$.
  - Sea $u + c(l-r) - y < 0$: $X^u_{l,r} \notin [0,b]$, y por lo tanto $P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - Sea $u + c(l-r) - y > b$: $X^u_{l,r} \notin [0,b]$ y por lo tanto $P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - Sea $u + c(l-r) - y = b$. Es un suceso con probabilidad cero.

[19] *Teniendo en cuenta el lema 3.3.1, en la página 57.*

- Sea $0 < u + c(l - r) - y < b \ : \ X^u_{l,r} \in [0, b]$, se ha producido una renovación y por lo tanto $P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = P^u_{b,r\tau_1 x}$, la probabilidad de llegar a b antes de x partiendo de $X_r = u$ despues de τ_1. Esto ocurre cuando:

$$0 < u + c(l - r) - y < b \Rightarrow 0 < u + cl' - y < b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(u + cl') < -y < b - (u + cl') \Rightarrow (u + cl') - b < y < u + cl'.$$

  Esto cuando $l \leq x \leq r + \frac{b-u}{c} \Rightarrow l' \leq \frac{b-u}{c}$.

- $x \leq l \leq r + \frac{b-u}{c}$. Antes de l el proceso no puede llegar a b, por lo tanto $P^u_{b,rt,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.

  Con lo cual, efectivamente se cumple 3.179.

□

Vamos a deducir ahora la ecuación integral que satisface la probabilidad de llegar a b antes del tiempo $x \in (0, +\infty)$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$.

Teorema 3.5.8. *La probabilidad de llegar a b antes de $x \in (0, +\infty)$, $x \leq r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$, que denotamos por $P^u_{b,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{b,rx} = \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^{u+cx} f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} P^{t-y}_{b,0x-\frac{t-u}{c}} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.180}$$

Demostración. Por el teorema 3.5.7 deducimos:

$$P^u_{b,rx} = \int P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^x f(z + l') \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P^u_{b,rlx} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

Puesto que en el lema 3.5.2, en la página 116, demostramos que $P^u_{b,r\tau_1 x} \stackrel{d}{=} P^{u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1}_{b,0x-\mathscr{E}^+_r}$, obtenemos

$$P^u_{b,rx} = \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^x f(z + l) \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^{u+cl-y}_{b,0x-l} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

Hemos considerado, por comodidad, $l' = l$. De modo inmediato concluimos que se verifica 3.180.

□

3.5.2. Probabilidad de llegar a la barrera superior en general.

A continuación vamos a estudiar las probabilidades de llegar a la barrera superior, sin fijar un horizonte finito de tiempo. Empezaremos con algunas definiciones:

Definición 3.5.5. (Probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u$.) *Definimos la probabilidad de llegar a b partiendo del valor $X_0 = u$ como:*

$$\boxed{P^u_{b,0} = \mathbb{P}(\exists t > 0/[X^u_{t,0} = b] \ \wedge \ [X^u_{s,0} \in (0,b) \ \forall\, 0 \leq s < t])} \tag{3.181}$$

Definición 3.5.6. (Probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u \in [0,b]$ después de τ_1). *Definimos la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u$ despues de la primera renovación, después de τ_1, como:*

$$\boxed{P^u_{b,\tau_1} = \mathbb{P}(\exists t > 0/[X^u_{\tau_1+t,0} = b] \wedge \ [X^u_{\tau_1+s,0} \in (0,b) \ \forall\, \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t])} \tag{3.182}$$

Ahora vamos a definir la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u, \ r \in (0, \tau_1)$ y la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u$ después de τ_1.

Definición 3.5.7. (Probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u, \ r \in (0,\tau_1)$.) *Definimos la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u, \ r$ cumpliendo las anteriores condiciones como:*

$$\boxed{P^u_{b,r} = \mathbb{P}(\exists t > 0/[X^u_{r+t,r} = b] \ \wedge \ [X^u_{r+s,r} \in (0,b) \ \forall\, r \leq r + s < r + t])} \tag{3.183}$$

Definición 3.5.8. (Probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u, \ r \in (0,\tau_1)$ después de τ_1.) *Definimos la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u, \ r$ cumpliendo las condiciones del enunciado, después de τ_1 como:*

$$\boxed{P^u_{b,r\tau_1} = \mathbb{P}(\exists t > 0/[X^u_{\tau_1+t,r} = b] \ \wedge \ [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0,b) \ \forall\, \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t])} \tag{3.184}$$

Los siguientes resultados son esenciales para el resto del estudio.

Lema 3.5.3. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u$ después de τ_1, P^u_{b,τ_1}, pertenece a $\mathcal{F}_2^+$ y coincide (en distribución) con la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u + X_{\tau_1}$, $P^{u+X_{\tau_1}}_{b,0}$.*

Demostración. En efecto, teniendo en cuenta la definición de la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u$ después de τ_1, obtenemos:

$$P^u_{b,\tau_1} = \mathbb{P}(\exists t > 0/[X^u_{\tau_1+t,0} = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,0} \in (0,b) \ \forall\, \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0/[u + c\tau_1 + ct - Y_1 - \sum_{k=N(\tau_1)+1}^{N(\tau_1+t)} Y_k = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,0} \in (0,b) \ \forall\, \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0/[u + c\tau_1 - Y_1 + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,0} \in (0,b) \; \forall \; \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0/[X^{u+X_{\tau_1}}_{t,0} = b] \wedge [X^{u+X_{\tau_1}}_{s,0} \in (0,b) \; \forall \; 0 \leq s < t])^{20} = P^{u+X_{\tau_1}}_{b,0}.^{21}$$

□

Lema 3.5.4. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u, \; r \in (0, \tau_1)$ después de $\tau_1, \; P^u_{b,r\tau_1}$, pertenece a $\mathcal{F}^+_2$ y coincide (en distribución) con la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u + c\mathscr{E}^+_r - Y_1, \; P^{u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1}_{b,0}$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la definición de la probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u, \; r \in (0, \tau_1)$ obtenemos:

$$P^u_{b,r\tau_1} = \mathbb{P}(\exists t > 0/[X^u_{\tau_1+t,r} = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0,b) \; \forall \; \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]) =$$

$$= P(\exists t > 0/[u + c(\tau_1 + t - r) - \sum_{k=0}^{N(\tau_1+t)} Y_k = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0,b) \; \forall \; \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0/[u + c\mathscr{E}^+_r - Y_1 + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k = b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0,b) \; \forall \; \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t]) = {}^{22}$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0/[X^{u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1}_{t,0} = b] \wedge [X^{u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1}_{s,0} \in (0,b) \; \forall \; 0 \leq s < t]) = P^{u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1}_{b,0}.$$

Por la definición de la variable aleatoria excess life y la independencia y equidistribución de las variables aleatorias $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \; \{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

□

A continuación vamos a deducir una relación que verifica la probabilidad de llegar a la barrera superior; vamos a condicionar por los valores que toma la variable bidimensional (τ_1, Y_1).

Teorema 3.5.9. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u, \; \tau_1 = l, \; Y_1 = y, \; P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y}$ verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{l \geq \frac{b-u}{c}\} \cap \{y \in \mathbb{R}\}} + P^u_{b,\tau_1} I_{\{l \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{u+cl-b<y<u+cl\}}} \tag{3.185}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) obtenemos:

[20] *Teniendo en cuenta las proposiciones: 2.1.3 y 2.4 en la página 15.*
[21] *Teniendo en cuenta la equidistribución e independencia de los tiempos de espera τ_i y de los saltos Y_j.*
[22] *Teniendo en cuenta las proposiciones: 2.1.3 y 2.4 en la página 15.*

- $l > \frac{b-u}{c}$. No ha habido renovaciones antes de $\frac{b-u}{c}$, y por lo tanto:

$$u + c(\frac{b-u}{c}) = b \;\therefore\; u + X_{\frac{b-u}{c}} = b.$$

El proceso llega seguro a b, con lo cual $P^u_{b,0,\tau_1=1,Y_1=y} = 1$ con independencia del valor que tome Y_1.

- $l \leq \frac{b-u}{c}$. Es necesario distinguir varios casos:
  - Si $u + cl - y > b \;:\; X^u_{l,0} \notin [0,b]$, con lo cual $P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - Si $u + cl - y < 0 \;:\; X^u_{l,0} \notin [0,b]$, con lo cual $P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - Si $u + cl - y = b$ el proceso ha llegado a b, pero es un suceso con probabilidad cero y no lo consideramos.
  - Si $u+cl-y \in (0,b) \;:\; X^u_{l,0} \in (0,b)$ y la probabilidad de llegar a b será P^u_{b,τ_1}, la probabilidad de llegar a b a partir de τ_1. Esto ocurre cuando:

$$0 < u + cl - y < b \Rightarrow -(u+cl) < -y < b - (u+cl) \Rightarrow (u+cl) - b < y < u + cl.$$

Con lo cual se cumple 3.185.

□

A continuación vamos a deducir una ecuación integral para la probabilidad de llegar a b. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.5.10. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u$, $P^u_{b,0}$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{b,0} = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t P^{t-y}_{b,0} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.186}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.5.9, el teorema de la probabilidad total y la independencia entre τ_i y Y_j, $\forall\ \{i,j\} \in \mathbb{N}$, obtenemos:

$$P^u_{b,0} = \int P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y / X_0 = u) = {}^{23}$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \mathrm{d}F(l) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}G(y) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l) \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^u_{b,\tau_1}\,\mathrm{d}G(y) =$$

$$= \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l) \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^u_{b,\tau_1}\,\mathrm{d}G(y).$$

[23] *Pues teniendo en cuenta las hipótesis se cumple:*

$$\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y / X_0 = u) = \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l / X_0 = u)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y / X_0 = u) = \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y).$$

Puesto que se cumple $P^u_{b,\tau_1} \overset{d}{=} P^{u+c\tau_1-Y_1}_{b,0}$ obtenemos 3.186.

$\square$

Cuando el proceso ha alcanzado el valor u en un tiempo $r \in (0,\tau_1)$ tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.5.11. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u$, $\tau_1 = l$, $Y_1 = y$, siendo $r \in (0,\tau_1)$, satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}\cap\{Y_1\in\mathbb{R}\}} + P^u_{b,r\tau_1} I_{\{\mathscr{E}^+_r \le \frac{b-u}{c}\}\cap\{u+c\mathscr{E}^+_r - b < y < u + c\mathscr{E}^+_r\}}} \tag{3.187}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) obtenemos:

- $l > r + \frac{b-u}{c}$. Se cumple que:

  $$X^u_{r+\frac{b-u}{c},r} = u + c\cdot(r + \frac{b-u}{c} - r) = b.$$

  El proceso ha llegado a la barrera superior, por lo tanto $P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = 1$ para cualquier valor que tome Y_1.

  Esto ocurre cuando:

  $$l > r + \frac{b-u}{c} \Rightarrow l - r > \frac{b-u}{c} \Rightarrow \mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}.$$

- $l \le r + \frac{b-u}{c}$. Distinguimos según los valores que tome el proceso en τ_1, en la primera renovación. Puede ocurrir:

  - $u + c(l-r) - y < 0$: $X^u_{l,r} \notin [0,b]$, y por lo tanto $P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - $u + c(l-r) - y > b$: $X^u_{l,r} \notin [0,b]$, con lo cual $P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - $u + c(l-r) - y = b$. Al ser un suceso de probabilidad cero no lo consideramos.
  - $u + c(l-r) - y \in (0,b)$: $X^u_{l,r} \in (0,b)$, se ha producido la primera renovación, con lo cual $P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = P^u_{b,r\tau_1}$. Esto ocurre cuando:

  $$X^u_{\tau_1,r} \in (0,b) \Rightarrow 0 < u + c(l-r) - y < b \Rightarrow 0 < u + c\mathscr{E}^+_r - y < b \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow -(u + c\mathscr{E}^+_r) < -y < b - (u + c\mathscr{E}^+_r) \Rightarrow (u + c\mathscr{E}^+_r) - b \le y \le u + c\mathscr{E}^+_r.$$

  Esto cuando $l \le r + \frac{b-u}{c} \Rightarrow \mathscr{E}^+_r \le \frac{b-u}{c}$.

Con lo cual se cumple 3.187.

□

Para la probabilidad de llegar a la barrera superior partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$ se deduce trivialmente el siguiente teorema:

Teorema 3.5.12. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$, $r \in (0, \tau_1)$, que denotamos por $P_{b,r}^u$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P_{b,r}^u = \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t P_{b,0}^{t-y} g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{3.188}$$

Demostración. Por el teorema 3.5.11 y el teorema de la probabilidad total:

$$P_{b,r}^u = \int P_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y}^u \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l' \diagup \vec{\sigma}) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l' \diagup \vec{\sigma}) \int_{u+cx-b}^{u+cx} P_{b,r\tau_1}^u \mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}).$$

Hemos denotado $l' = l - r$. Teniendo en cuenta que $P_{b,r\tau_1}^u \overset{d}{=} P_{b,0}^{u+c\mathscr{E}_r^+ - Y_1}$ se cumple:

$$P_{b,r}^u = \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z + l') \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P_{b,0}^{u+cl'-y} g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}l'.$$

Dando un cambio apropiado de variable obtenemos 3.188.

□

3.5.3. Solución ecuaciones integrales. Probabilidad de primera llegada a la barrera superior.

Una vez que hemos deducido las ecuaciones integrales que satisface la probabilidad de primera llegada a la barrera superior vamos a resolverlas en los casos en los cuales sea posible (se puede demostrar que tienen solución única, pero por brevedad no lo haremos); salvo que se indique lo contrario, suponemos $u \in [0, b]$. Diferenciamos dos casos:

1. **El caso general.**

   Para efectuar un estudio más detallado de las ecuaciones integrales en este caso, puesto que los saltos pueden tomar tanto valores positivos como negativos, vamos a sustituir la función de densidad de los saltos por una combinación convexa de funciones de densidad; es decir, que vamos a suponer $g(y) = pg_+(y) + qg_-(y)$, $p + q = 1$, siendo $g_+(y)$ la función de densidad de los saltos $\forall y \in [0, +\infty)$ y $g_-(y)$ $\forall y \in (-\infty, 0)$. Haciendo esta sustitución llegamos a:

$$P_{b,0}^u = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{p}{c} \int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_0^t P_{b,0}^{t-y} g_+(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t + \frac{q}{c} \int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^0 P_{b,0}^{t-y} g_-(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t. \tag{3.189}$$

En el caso en que el tiempo inicial sea un tiempo de renovación. Para el caso en que $0 < r < t_1$ no sea tiempo de renovación:

$$P^u_{b,r} = \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{p}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_0^t P^{t-y}_{b,0} g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \tag{3.190}$$

$$+\frac{q}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^0 P^{t-y}_{b,0} g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

En general son ecuaciones que no admiten solución de forma cerrada. Vamos a solucionar algunos casos particulares.

2. **Casos particulares.**

   Como casos particulares vamos a estudiar:

   - *Caso favorable.*

     Denominamos caso favorable al caso en el cual la deriva es positiva y los saltos son negativos. Se trata de un proceso estocástico creciente (razonando como se hizo en la sección 3.4, en la página 83) y por lo tanto la probabilidad de llegar a la barrera superior, tanto partiendo de un tiempo de renovación t_n como de un tiempo no de renovación $r \in (0, t_1)$ será 1.

   - *Caso semifavorable.*

     Denominamos caso semifavorable a aquel en el cual los saltos negativos pueden tomar valores únicamente en el intervalo $(-\infty, -b]$. En este caso para la probabilidad de primera llegada a la barrera superior b partiendo de $X_0 = u,\ \tau_1 = l,\ Y_1 = y$ tenemos la siguiente proposición:

     Proposición 3.5.1. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u,\ \tau_1 = l,\ Y_1 = y,\ P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y}$ en el caso en que los saltos pueden tomar valores en $(-\infty, -b] \cup [0, +\infty)$ verifica la siguiente identidad:*

     $$\boxed{P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{l \geq \frac{b-u}{c}\}\cap\{y\in\mathbb{R}\}} + P^u_{b,\tau_1} I_{\{l\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{0<y<u+cl\}}} \tag{3.191}$$

     Demostración. Condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) obtenemos:

     - $l > \frac{b-u}{c}$. No ha habido renovaciones antes de $\frac{b-u}{c}$, y se cumple:

       $$u + c(\frac{b-u}{c}) = b \ \therefore\ u + X_{\frac{b-u}{c}} = b.$$

       El proceso llega seguro a b, con lo cual $P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y} = 1$ con independencia del valor que tome Y_1.

     - $l \leq \frac{b-u}{c}$. Distinguimos varios casos, dependiendo de si al producirse la primera renovación el proceso sale, o sigue dentro de la zona $[0, b]$.

- Si $u+cl-y>b$, ha salido por la barrera superior, con lo cual $P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y}=0$.
- Si $u+cl-y<0$, ha salido por la barrera inferior de la zona $[0,b]$, con lo cual $P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y}=0$.
- Si $u+cl-y=b$, ha llegado a la barrera superior, pero es un suceso con probabilidad cero y no lo consideramos.
- Si $u+cl-y\in(0,b)$ está dentro de la zona y por lo tanto la probabilidad de llegar a b será P^u_{b,τ_1}, la probabilidad de llegar a b a partir de τ_1. Esto ocurre cuando:

$$0<u+cl-y<b \Rightarrow (u+cl)-b<y<u+cl \Rightarrow 0<y<u+cl.$$

Teniendo en cuenta que los saltos únicamente pueden tomar valores en $(-\infty,-b]\cup[0,+\infty)$.

Con lo cual concluimos que se verifica 3.191.

□

Es inmediato deducir la siguiente proposición:

Proposición 3.5.2. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0=u, P^u_{b,0}$, en el caso en que los saltos pueden tomar valores en $(-\infty,-b]\cup[0,+\infty)$satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{b,0}=\bar{F}(\frac{b-u}{c})+\frac{p}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_0^t P^{t-y}_{b,0}g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.192}$$

Demostración. Supongamos que la función de densidad de los saltos es combinación convexa de funciones de densidad, $g(y)=pg_+(y)+qg_-(y),\ p+q=1$ siendo:

$$g_+(y)=\begin{cases} 0, & \text{si } y\in(-\infty,0)\\ g_1(y), & \text{si } y\in[0,+\infty)\end{cases},\ g_-(y)=\begin{cases} g_2(y), & \text{si } y\in(-\infty,-b]\\ 0, & \text{si } y\in(-b,-\infty)\end{cases}$$

Siendo $g_1(y)$ y $g_2(y)$ funciones de densidad definidas en $[0,+\infty)$ y $(-\infty,-b]$ respectívamente. Teniendo en cuenta la proposición 3.5.1, en la página 128 y el teorema de la probabilidad total y la independencia entre τ_i y Y_j, $\forall\ \{i,j\}\in\mathbb{N}$, obtenemos:

$$P^u_{b,0}=\int P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1\in\ \mathrm{d}l,Y_1\in\ \mathrm{d}y)=\int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\mathrm{d}F(l)\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}G(y)+$$

$$+\int_0^{\frac{b-u}{c}}\mathrm{d}F(l)\int_0^{u+cl}P^u_{b,\tau_1}\,\mathrm{d}G(y)=\bar{F}(\frac{b-u}{c})+\int_0^{\frac{b-u}{c}}\mathrm{d}F(l)\int_0^{u+cl}P^u_{b,\tau_1}\,\mathrm{d}G(y).$$

Teniendo en cuenta que se cumple $P^u_{b,\tau_1}\overset{d}{=}P^{u+c\tau_1-Y_1}_{b,0}$ se verifica:

$$P^u_{b,0} = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l) \int_0^{u+cl} P^{u+cl-y}_{b,0}\, \mathrm{d}G(y).$$

Dando un cambio de variable apropiado obtenemos 3.192.

□

Esa ecuación se puede resolver de forma cerrada mediante la transformada de Laplace, como demostramos a continuación:

Proposición 3.5.3. *La probabilidad de llegar a la barrera superior b partiendo de $X_0 = u$ y los saltos tomando valores en $(-\infty, -b] \cup [0, +\infty)$ satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^u_{b,0} = \mathbb{F}(b-u),\ u \in [0, b]} \tag{3.193}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sy} \left[\frac{1 - \hat{f}(cs)}{s(1 - p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s))} \right] \mathrm{d}s,\ y \in [0, +\infty)} \tag{3.194}$$

Un esbozo de la demostración en D.1.1, en la página 294.

Vamos a estudiar el caso particular en que los tiempos de espera tienen una distribución exponencial y los saltos tienen una distribución que es combinación convexa de otras dos, una de las cuales es exponencial.

Ejemplo 3.5.1. *Si los tiempos de espera tienen una distribución exponencial de parámetro λ, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ y los saltos una distribución cuya función de densidad g es de la forma $g(t) = qg_-(t) + pg_+(t),\ p + q = 1$ siendo*

$$g_-(y) = \begin{cases} h(y), & si\ y \in (-\infty, -b] \\ 0, & si\ y \in (-b, +\infty) \end{cases} \quad g_+(y) = \begin{cases} 0, & si\ y \in (-\infty, 0) \\ \gamma e^{-\gamma y}, & si\ y \in [0, +\infty) \end{cases}$$

la probabilidad de llegar a la barrera superior b partiendo de $X_0 = u$ satisface la siguiente identidad:

$$\boxed{P^u_{b,0} = \frac{c}{\sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\lambda\gamma}} \left[e^{r_1(b-u)}(\gamma + r_1) - e^{r_2(b-u)}(\gamma + r_2) \right],\ u \in [0, b]} \tag{3.195}$$

Siendo

$$r_1 = \frac{-(\lambda + c\gamma) + \sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\gamma\lambda}}{2c},\ r_2 = \frac{-(\lambda + c\gamma) - \sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\gamma\lambda}}{2c}. \tag{3.196}$$

En la proposición anterior habíamos obtenido el siguiente resultado:

$$\mathbb{F}(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{sy}\left[\frac{1-\hat{f}(cs)}{s(1-p\hat{f}(cs)\hat{g}_{+}(s))}\right]\mathrm{d}s.$$

Sabemos que:

$$\hat{f}(cs)=\frac{\lambda}{\lambda+cs},\ \hat{g}(s)=\frac{\gamma}{\gamma+s}.$$

Con lo cual, sustituyendo, tendremos:

$$\mathbb{F}(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{sy}\left[\frac{1-\frac{\lambda}{\lambda+cs}}{s\left(1-p\frac{\lambda}{\lambda+cs}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+s}\right)}\right]\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{sy}\left[\frac{\frac{\lambda+cs-\lambda}{\lambda+cs}}{\frac{s((\lambda+cs)(\gamma+s)-p\lambda\gamma)}{(\lambda+cs)(\gamma+s)}}\right]\mathrm{d}s=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{sy}\left[\frac{c(\gamma+s)}{cs^2+(\lambda+c\gamma)s+q\lambda\gamma}\right]\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{sy}\left[\frac{c(\gamma+s)}{c(s-r_1)(s-r_2)}\right]\mathrm{d}s.$$

Siendo r_1 y r_2 las raíces de la ecuación $cs^2+(\lambda+c\gamma)s+q\lambda\gamma=0$, es decir:

$$r_1=\frac{-(\lambda+c\gamma)+\sqrt{(\lambda+c\gamma)^2-4qc\lambda\gamma}}{2c},\ r_2=\frac{-(\lambda+c\gamma)-\sqrt{(\lambda+c\gamma)^2-4qc\lambda\gamma}}{2c}.$$

El integrando tiene polos de orden uno en r_1 y r_2, por lo tanto, teniendo en cuenta el teorema de los residuos:

$$\mathbb{F}(y)=\lim_{s\to r_1}e^{sy}\frac{(\gamma+s)(s-r_1)}{(s-r_1)(s-r_2)}+\lim_{s\to r_2}e^{sy}\frac{(\gamma+s)(s-r_2)}{(s-r_1)(s-r_2)}=$$

$$=\frac{c}{\sqrt{(\lambda+c\gamma)^2-4qc\lambda\gamma}}\left[e^{r_1y}(\gamma+r_1)-e^{r_2y}(\gamma+r_2)\right].$$

Teniendo en cuenta la relación entre $P_{b,0}^{u}$ y $\mathbb{F}(y)$, obtenemos que efectívamente se verifica 3.195.

A continuación vamos a estudiar la probabilidad de llegar a la barrera superior suponiendo el tiempo de partida no de renovación, es decir partiendo de
$X_r=u,\ r\in(0,t_1)$.

Proposición 3.5.4. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r=u,\ \tau_1=l,\ Y_1=y,\ r\in(0,t_1)$ y los saltos tomando valores en $(-\infty,-b]\cup[0,+\infty)$ satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = P^u_{b,r,\mathscr{E}^+_r=l',Y_1=y} = I_{\{l'>\frac{b-u}{c}\}\cap\{y\in\mathbb{R}\}} + P^u_{b,rl} I_{\{l'\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{0<y<u+cl'\}},\ l'=l-r} \tag{3.197}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) obtenemos:

- $l > r + \frac{b-u}{c}$. No ha habido renovaciones antes de $r + \frac{b-u}{c}$ y se cumple:

$$X^u_{r+\frac{b-u}{c},r} = u + c(r + \frac{b-u}{c} - r) = b.$$

  Por lo tanto tenemos que $P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = 1$ para cualquier valor que tome Y_1. Esto ocurre cuando:

$$l > r + \frac{b-u}{c} \Rightarrow l - r > \frac{b-u}{c} \Rightarrow l' > \frac{b-u}{c}.$$

- $l \leq r + \frac{b-u}{c}$. Diferenciando según los valores que tome el proceso en $\tau_1 = l$, en la primera renovación. Puede ocurrir:
  - $u + c(l-r) - y < 0$. En este caso el proceso ha salido de la zona $[0,b]$ por la barrera inferior, y por lo tanto $P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - $u + c(l-r) - y > b$. Ha salido de la zona $[0,b]$ por la barrera superior, con lo cual $P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - $X^u_{l,r} \in (0,b)$. Está todavía dentro de la zona, se ha producido la primera renovación, con lo cual ahora tendremos $P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = P^u_{b,rl}$. Esto ocurre cuando:

$$X^u_{l,r} \in (0,b) \Rightarrow 0 < u + c(l-r) - y < b \Rightarrow 0 < u + cl' - y < b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(u+cl') < -y < b - (u+cl') \Rightarrow (u+cl') - b < y < u + cl'.$$

    Puesto que los saltos únicamente pueden tomar valores en $(-\infty,-b]\cup[0,+\infty)$ y como $u + cl' - y \in (-b,0)$ se cumple $P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y} = P^u_{b,rl}$ cuando $y \in (0, u+cl')$.

  Esto cuando $l \leq r + \frac{b-u}{c} \Rightarrow l' \leq \frac{b-u}{c}$.

Con lo cual obtenemos 3.197.

□

A partir del anterior resultado obtenemos:

Proposición 3.5.5. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$, $r \in (0,\tau_1)$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{b,r} = \frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_0^t P^{t-y}_{b,0} g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.198}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total y la proposición 3.5.4, en la página 131, considerando la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}_r^+, Y_1)$, obtenemos:

$$P_{b,r}^u = \int P_{b,r,\mathscr{E}_r^+=l',Y_1=y}^u \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} f(z+l')\,\mathrm{d}l' \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l') \int_0^{u+cl'} P_{b,r(r+l')}^u g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l' = {}^{24}$$

$$= \frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l') \int_0^{u+cl'} P_{b,r(r+l')}^u g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l' =$$

Teniendo en cuenta que los saltos no toman valores en $(-b, 0)$. En su momento se demostró que $P_{b,r\tau_1}^u \stackrel{d}{=} P_{b,0}^{u+c\mathscr{E}_r^+-Y_1}$, con lo cual:

$$= \frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l') \int_0^{u+cl'} P_{b,0}^{u+cl'-y}(y) g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l'.$$

Estamos en el caso semifavorable, con lo cual los saltos toman valores en $(-\infty, -b] \cup [0, +\infty)$ y vamos a considerar la función de densidad de los saltos como combinación convexa de otras dos funciones de densidad, $g(y) = pg_+(y) + qg_-(y)$, siendo:

$$g_-(y) = \begin{cases} h_1(y), & \text{si } y \in (-\infty, -b] \\ 0, & \text{si } y \in (-b, +\infty) \end{cases} \qquad g_+(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \in (-\infty, 0) \\ h_2(y), & \text{si } y \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Teniendo eso en cuenta, y dando un cambio de variable adecuado obtenemos 3.198.

□

Esa ecuación se puede solucionar de forma cerrada mediante la transformada de Laplace. Se cumple la siguiente proposición:

Proposición 3.5.6. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u$, $0 < r < t_1$, $\mathscr{E}_r^- = z$ y los saltos tomando valores $Y_j \in (-\infty, -b] \cup [0, +\infty)$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$ satisface la siguiente expresión:*

$$\boxed{P_{b,r}^u = \mathbb{F}(r, b-u, z),\ u \in [0, b]} \text{ donde } \mathbb{F} \text{ satisface:} \tag{3.199}$$

$$\boxed{\mathbb{F}(r, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy} \left[\frac{1}{s\bar{F}(z)} \left[1 - F(z) - \hat{f}_z(cs)\right] + \frac{p\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s)\hat{f}_z(cs)}{\bar{F}(z)} \right] \mathrm{d}s,\ y \in [0, +\infty)} \tag{3.200}$$

[24] *Teniendo en cuenta que $\mathscr{E}_r^+ = l' \Rightarrow \tau_1 - r = l' \Rightarrow \tau_1 = l' + r$ y que $\hat{f}_z(cs) = \int_0^{+\infty} e^{(-cs)x} f(z+x)\,\mathrm{d}x$.*

Un resumen de la demostración se puede ver en D.1.2, en la página 296.

Vamos a estudiar el caso particular en que los tiempos de espera tienen una distribución exponencial y los saltos tienen una distribución que es combinación convexa de otras dos, una de las cuales es exponencial.

Ejemplo 3.5.2. *Si los tiempos de espera tienen una distribución exponencial de parámetro* λ, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ *y los saltos una distribución cuya función de densidad* g *es de la forma* $g(t) = qg_-(t) + pg_+(t),\ p+q=1$ *siendo*

$$g_-(y) = \begin{cases} h(y), & si\ y \in (-\infty,-b] \\ \\ 0, & si\ y \in (-b,+\infty) \end{cases}, \quad g_+(y) = \begin{cases} 0, & si\ y \in (-\infty,0) \\ \\ \gamma e^{-\gamma y}, & si\ y \in [0,+\infty) \end{cases}$$

la probabilidad de llegar a b *partiendo de* $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$ *satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{b,r} = \mathbb{F}(r, b-u, z),\ u \in [0,b]} \text{ donde } \mathbb{F} \text{ satisface:} \tag{3.201}$$

$$\boxed{\mathbb{F}(r,y,z) = e^{-\rho y} + e^{\lambda z}\left[\frac{p\gamma}{r_1 r_2} + \frac{p\gamma\rho e^{r_1 y}}{r_1(r_1-r_2)(r_1+\rho)} - \frac{p\gamma\rho e^{r_2 y}}{r_2(r_1-r_2)(r_2+\rho)} - \frac{p\gamma e^{-\rho y}}{(\rho+r_1)(\rho+r_2)}\right]} \tag{3.202}$$

$\forall y \in [0,+\infty)$. *Siendo*

$$r_1 = \frac{-(\lambda+c\gamma)+\sqrt{(\lambda+c\gamma)^2-4qc\gamma\lambda}}{2c},\ r_2 = \frac{-(\lambda+c\gamma)-\sqrt{(\lambda+c\gamma)^2-4qc\gamma\lambda}}{2c},\ \rho = \frac{\lambda}{c}. \tag{3.203}$$

En la proposición 3.5.6 habíamos deducido la expresión:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z) = \frac{1}{s\bar{F}(z)}\left[1 - F(z) - \hat{f}_z(cs)\right] + \frac{p\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s)\hat{f}_z(cs)}{\bar{F}(z)}.$$

Sabemos que:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}u(t),\ g_+(y) = \gamma e^{-\gamma y}u(y),\ \hat{f}(cs) = \frac{\lambda}{\lambda+cs},\ \hat{g}_+(s) = \frac{\gamma}{\gamma+s}.$$

En la proposición 3.5.3 habíamos obtenido

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \frac{1-\hat{f}(cs)}{s[1-p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s)]}.$$

Realizando los cálculos:

Tenemos:

$$F(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[\frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^z = \boxed{1 - e^{-\lambda z}}$$

Del mismo modo:

$$\bar{F}(z) = 1 - F(z) = \boxed{e^{-\lambda z}}$$

Es trivial que:

$$\hat{f}_z(cs) = e^{scz}\hat{f}(cs) - e^{scz}\int_0^z e^{-scl} f(l)\,\mathrm{d}l.$$

$$\hat{f}_z(cs) = e^{scz}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+cs} - e^{scz}\int_0^z e^{-scl}\cdot\lambda e^{-\lambda l}\,\mathrm{d}l = e^{scz}\left[\frac{\lambda}{\lambda+cs} - \lambda\int_0^z e^{-(sc+\lambda)l}\,\mathrm{d}l\right] =$$

$$= \lambda e^{scz}\left[\frac{1}{\lambda+cs} - \left[\frac{-e^{-(sc+\lambda)l}}{sc+\lambda}\right]_0^z\right] = \lambda e^{scz}\left[\frac{1}{\lambda+cs} - \left[\frac{1-e^{-(sc+\lambda)z}}{\lambda+cs}\right]\right] =$$

$$= \lambda e^{scz}\left[\frac{e^{-(sc+\lambda)z}}{\lambda+cs}\right] = \boxed{\frac{\lambda e^{-\lambda z}}{\lambda+cs}}$$

Se verifica que:

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \frac{1-\frac{\lambda}{\lambda+cs}}{s[1-p\cdot\frac{\lambda}{\lambda+cs}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+s}]} = \frac{\frac{\lambda+cs-\lambda}{\lambda+cs}}{s\left[\frac{(\lambda+cs)(\gamma+s)-p\lambda\gamma}{(\lambda+cs)(\gamma+s)}\right]} =$$

$$= \frac{cs(\gamma+s)}{s[(\lambda+cs)(\gamma+s)-p\lambda\gamma]} = \frac{c(\gamma+s)}{(\lambda+cs)(\gamma+s)-p\lambda\gamma]} = \frac{c(\gamma+s)}{cs^2+(\lambda+c\gamma)s+q\lambda\gamma} =$$

$$= \frac{c(\gamma+s)}{c(s-r_1)(s-r_2)} = \boxed{\frac{\gamma+s}{(s-r_1)(s-r_2)}}$$

Con lo cual:

$$\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy}\frac{c\,\mathrm{d}s}{\lambda+cs} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy}\frac{p\gamma\lambda e^{\lambda z}}{s(s-r_1)(s-r_2)(\lambda+cs)}\,\mathrm{d}s.$$

Concluimos, teniendo en cuenta el teorema de los resíduos, 3.202.

3.6. Probabilidades de escape de la zona $[0, b]$.

Vamos a estudiar la probabilidad de que el proceso salga de la zona $[0.b]$, $b \in \mathbb{R}^+$(los razonamientos son idénticos en el caso de suponer otro intervalo cualquiera de la forma $[a, b]$, $\{a, b\} \in \mathbb{R}$). Dado el proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$, $X_t = ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k$, $\forall\, t \geq 0$, que en un tiempo determinado r ha alcanzado un valor $u \in [0, b]$, $X_r = u \in [0, b]$, queremos estudiar la probabilidad de que el proceso salga de esa zona. Matemáticamente eso se puede interpretar como que para un determinado $t > r$ se cumpla $X_t \notin [0, b]$. Distinguiremos entre el caso en que el tiempo en el cual el proceso ha alcanzado el valor u es un tiempo de renovación, y el caso en que el tiempo no es de renovación, es decir, cualquier $r \in (t_n, t_{n+1})$, $t_n = \sum_{i=0}^{n} \tau_i$. La literatura relacionada con el tema es muy abundante, en ciencias económicas y actuariales ([25], [24],..) donde se estudia la probabilidad de ruina, pero también en otras disciplinas, como física ([69], [158],...), meteorología ([131], [80], [124],...).

3.6.1. Probabilidades de escape de la zona $[0, b]$ en general.

En el estudio de la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ en general vamos a diferenciar los casos en los cuales nos interesa conocer la probabilidad de escape antes de un cierto tiempo x, $x > 0$ y aquellos en los cuales nos interesa la probabilidad de escape sin fijar un tiempo, sin límite temporal.

Probabilidades de escape de la zona $[0, b]$ en general antes de un cierto tiempo x.

Comenzaremos estudiando la probabilidad de escapar de la zona $[0, b]$ antes de un cierto tiempo $x \in (0, +\infty)$ y suponemos que el proceso ha alcanzado en un tiempo arbitrario cualquiera $r \in (0, +\infty)$, $X_r = u \in [0, b]$.

Definición 3.6.1. Escape de la zona $[0, b]$ en un tiempo $t \in (0, +\infty)$. *Definimos el suceso "escape de la zona $[0, b]$ en un tiempo $t \in (0, +\infty)$" como:*

$$\boxed{\{X_t \notin [0, b]\}}$$

A continuación vamos a hallar su probabilidad.

Proposición 3.6.1. *La probabilidad de que en el tiempo $t > 0$ el suceso "escape" de la zona $[0, b]$ satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{\mathbb{P}(X_t \notin [0, b]) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} G^{*n}(u + ct)p_n + \sum_{n=0}^{+\infty} G^{*n}(u + ct - b)p_n, \ \textit{siendo}\ p_n = \mathbb{P}(N(t) = n)} \tag{3.204}$$

Demostración. En efecto, se verifica:

$$\mathbb{P}(X_t \notin [0, b]) = 1-\mathbb{P}(X_t \in [0, b]) = 1-\mathbb{P}(0 \leq u+ct-\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \leq b) = 1-\mathbb{P}(-(u+ct) \leq -\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \leq b-(u+ct)) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(u + ct - b \leq \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \leq u + ct) = 1 - \left[\mathbb{P}(\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \leq u + ct) - \mathbb{P}(\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \leq u + ct - b)\right].$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la esperanza condicionada:

$$\mathbb{P}(\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \leq u + ct) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \leq u + ct \diagup N(t))) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\sum_{k=0}^{n} Y_k \leq u + ct \diagup N(t) = n)\mathbb{P}(N(t) = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\sum_{k=0}^{n} Y_k \leq u + ct)\mathbb{P}(N(t) = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} G^{*n}(u + ct)p_n.$$

Siendo G^{*n} el n-ésimo producto de convolución de la función de distribución G (de $Y_j,\ j \in \mathbb{N}$), teniendo en cuenta que por hipótesis la sucesión de variables aleatorias $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está formada por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) y también se da independencia entre las variables aleatorias Y_j y $\tau_i,\ \forall\ \{i, j\} \in \mathbb{N}$ de donde se deduce la independencia entre las Y_j y $N(t)$ (este es función de las variables τ_i). Por lo tanto concluimos 3.204. La demostración suponiendo un tiempo inicial $r \in (0, t_1)$ sigue el mismo esquema de razonamiento.

□

Es interesante estudiar el comportamiento de la anterior probabilidad para valores grandes de t.

Corolario 3.6.1. *Para valores grandes de $t > 0$ la probabilidad de que el proceso "escape" de la zona $[0, b]$ es uno.*

Demostración. Es conocido que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ G^{*n}$ es una función de distribución; al mismo tiempo $\mathbb{P}(N(t) = n) = p_n$ y por lo tanto $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Por lo tanto:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}(X_t \notin [0, b]) = 1 - \lim_{t\to+\infty} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} G^{*n}(u + ct)p_n - \sum_{n=0}^{+\infty} G^{*n}(u + ct - b)p_n\right] =$$

$$= 1 - \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} G^{*n}(u + ct)p_n + \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} G^{*n}(u + ct - b)p_n =$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\lim_{t\to+\infty} G^{*n}(u + ct)p_n\right] + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\lim_{t\to+\infty} G^{*n}(u + ct - b)p_n\right] = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} p_n + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$ [25]

□

Teniendo en cuenta este resultado, si dejamos que el proceso evolucione hasta tiempos "muy grandes", podemos afirmar que la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ es uno, y en ese caso se cumplirá que $P_{E,0}^{u.i} = 1 - P_{E,0}^{u.s}$.

Siendo $P_{E,0}^{u.i} = \mathbb{P}$(primer escape partiendo de $X_0 = u$ sea a través de la barrera inferior), y $P_{E,0}^{u.s} = \mathbb{P}$(primer escape partiendo de $X_0 = u$ sea a través de la barrera superior).

[25] *Usando el denominado "criterio de Weierstrass" para la convergencia uniforme de series, (teorema A.1.15, página 221), es evidente que las dos series implicadas son uniformemente convergentes, lo cual nos permite pasar del limite de la suma de la serie a la suma de los límites.*

A continuación vamos a estudiar la probabilidad de escapar de la zona $[0, b]$ antes de un tiempo arbitrario $x > 0$. Empezaremos el estudio suponiendo que el proceso ha alcanzado el valor $u \in [0, b]$ en un determinado tiempo de renovación t_n, que teniendo en cuenta la propiedad pseudomarkoviana del proceso (el proceso es markoviano si condicionamos por $\sigma(X_r, r \leq t_n)$, donde t_n es un tiempo de renovación) podemos suponer que es t_0 sin pérdida de generalidad. Necesitamos algunas definiciones. En su momento (sección 3.3, en la página 56) estudiamos los tiempos de escape, deduciendo la ley de probabilidad de los mismos; los resultados que vamos a obtener estudiando la probabilidad de escape antes de un cierto tiempo $x > 0$ son semejantes, enfocando la investigación de una forma distinta.

Definición 3.6.2. (Probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de $X_0 = u \in [0, b]$ antes de $x > 0$.) *Definimos la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ partiendo del valor $X_0 = u$ antes del tiempo $x > 0$ como:*

$$\boxed{P^u_{E,0x} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ t \leq x \ / \ [X^u_{t,0} \notin [0, b]] \wedge [X^u_{s,0} \in (0, b) \ \forall \ 0 < s < t \leq x])} \tag{3.205}$$

Definición 3.6.3. (Probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de $X_0 = u$ antes de $x > 0$ después de τ_1). *Definimos la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de $X_0 = u$ antes del tiempo $x > 0$ después de la primera renovación, después de τ_1, como:*

$$\boxed{P^u_{E,\tau_1 x} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \tau_1 + t \leq x \ / \ [X^u_{\tau_1+t,0} \notin [0, b]] \wedge [X^u_{\tau_1+s,0} \in (0, b) \ \forall \ \tau_1 < \tau_1 + s < \tau_1 + t \leq x])} \tag{3.206}$$

Ahora vamos a definir la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0$ partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ y la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0$ partiendo de $X_r = u$ después de τ_1.

Definición 3.6.4. (Probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0$ partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$.) *Definimos la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes del tiempo $x > 0$ partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ como:*

$$\boxed{P^u_{E,rx} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ r + t \leq x \ / \ [X^u_{r+t,r} \notin [0, b]] \wedge [X^u_{r+s,r} \in (0, b) \ \forall \ 0 < r + s < r + t \leq x])} \tag{3.207}$$

Definición 3.6.5. (Probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0$ partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ después de τ_1.) *Definimos la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0$ partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ después de τ_1 como:*

$$\boxed{P^u_{E,r\tau_1 x} = \mathbb{P}(\exists t > 0, \tau_1 - r + t \leq x \ /[X^u_{\tau_1+t,r} \notin [0, b]] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0, b) \forall \ \tau_1' < \tau_1' + s < \tau_1' + t \leq x])} \tag{3.208}$$

Siendo $\tau_1' = \tau_1 - r$. Los siguientes resultados son esenciales.

Lema 3.6.1. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0$ partiendo de $X_0 = u$ después de τ_1, $P^u_{E,\tau_1 x}$, pertenece a $\mathcal{F}_2^+$ y coincide (en distribución) con la probabilidad de escape de la zona antes de $x - \tau_1$ partiendo de $X_0 = u + X_{\tau_1}$, $P^{u+X_{\tau_1}}_{E,0x-\tau_1}$.*

Demostración. En efecto, teniendo en cuenta la definición de la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de x partiendo de $X_0 = u$ después de τ_1, obtenemos:

$$P^u_{E,\tau_1 x} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \tau_1 + t \leq x \ /\ [X^u_{\tau_1+t,0} \notin [0, b]] \wedge [X^u_{\tau_1+s,0} \in (0, b) \forall \tau_1 \leq \tau_1 + s < \tau_1 + t \leq x]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \tau_1 + t \leq x \ /\ [u + c\tau_1 + ct - Y_1 - \sum_{k=N(\tau_1)+1}^{N(\tau_1+t)} Y_k \notin [0, b]] \wedge$$

$$[u + c\tau_1 + cs - Y_1 - \sum_{k=N(\tau_1)+1}^{N(\tau_1+s)} Y_k \in (0, b) \forall \tau_1 < \tau_1 + s < \tau_1 + t \leq x]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0,\ t \leq x - \tau_1 \ /\ [X^{u+X_{\tau_1}}_{t,0} \notin [0, b] \wedge [X^{u+X_{\tau_1}}_{s,0} \in (0, b) \forall 0 < s < t \leq x - \tau_1]) =$$ [26]

$$= P^{u+X_{\tau_1}}_{E,0x-\tau_1}.$$ [27]

$\square$

Lema 3.6.2. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de x partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ después de τ_1, $P^u_{E,r\tau_1 t}$, pertenece a $\mathcal{F}_2^+$ y coincide (en distribución) con la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x - \mathscr{E}_r^+$ partiendo de $X_0 = u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1$, $P^{u+c\mathscr{E}_r^+-Y_1}_{E,0x-\mathscr{E}_r^+}$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la definición de la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de x partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ obtenemos:

$$P^u_{E,r\tau_1 x} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \tau_1 - r + t \leq x \ /\ [X^u_{\tau_1+t,r} \notin [0, b]] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0, b) \forall \tau_1 - r < \tau_1 - r + s < \tau_1 - r + t \leq x]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \mathscr{E}_r^+ + t \leq x \ /\ [u + c\mathscr{E}_r^+ + ct - Y_1 - \sum_{k=N(\tau_1)}^{N(\tau_1+t)} Y_k \notin [0, b]] \wedge$$

$$[u + c\mathscr{E}_r^+ + cs - Y_1 - \sum_{k=N(\tau_1)}^{N(\tau_1+s)} Y_k \in (0, b) \forall \mathscr{E}_r^+ < \mathscr{E}_r^+ + s < \mathscr{E}_r^+ + t \leq x]) =$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \mathscr{E}_r^+ + t \leq x \ /\ [u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1 + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \notin [0, b]] \wedge$$

[26] *Razonando como hicimos al estudiar la probabilidad de primera llegada a b.*
[27] *Teniendo en cuenta la equidistribución e independencia de los tiempos de espera τ_i y de los saltos Y_j.*

$$[u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1 + cs - \sum_{k=0}^{N(s)} Y_k \in (0, b) \forall \mathscr{E}_r^+ < \mathscr{E}_r^+ + s < \mathscr{E}_r^+ + t \leq x]) = ^{28}$$

$$= \mathbb{P}(\exists t > 0,\ t \leq x - \mathscr{E}_r^+ \ /\ [X_{t,0}^{u+c\mathscr{E}_r^+ - Y_1} \notin [0, b]] \wedge [X_{s,0}^{u+c\mathscr{E}_r^+ - Y_1} \in (0, b) \forall 0 < s < t \leq x - \mathscr{E}_r^+]) =$$

$$= P_{E,0x-\mathscr{E}_r^+}^{u+c\mathscr{E}_r^+ - Y_1}.$$

Teniendo en cuenta la definición de la variable aleatoria “excess life” y la independencia y equidistribución de las variables aleatorias $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}},\ \{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

□

A continuación vamos a deducir una identidad que verifica la probabilidad de escape antes de un cierto $x > 0$; para ello, vamos a condicionar por los valores que toma la variable bidimensional (τ_1, Y_1), el primer tiempo de renovación y la magnitud del salto que se produce en ese tiempo de primera renovación.

Teorema 3.6.1. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u, \tau_1 = l, Y_1 = y$, $P_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y}^u$ verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{P_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y}^u = I_{\{\frac{b-u}{c} < l\}\cap\{y\in\mathbb{R}\}} + I_{\{l\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{y\notin[u+cl-b,u+cl]\}} + P_{E,lx}^u I_{\{l\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{u+cl-b\leq y\leq u+cl\}}} \tag{3.209}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma (τ_1, Y_1):

- $\dfrac{b-u}{c} < l$. En este caso no ha habido renovaciones antes de l, pero teniendo en cuenta la definición del proceso se verifica:

$$\forall t \in [\frac{b-u}{c}, l]\ :\ u + X_t = u + ct > u + c(\frac{b-u}{c}) = b\ \therefore u + X_t \notin [0, b].$$

  Es decir, el proceso sale seguro de la zona $[0, b]$ por arriba, y por lo tanto $P_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y}^u = 1$, sin importar el valor que tome Y_1.

- $l \leq \dfrac{b-u}{c}$. Es necesario distinguir dos casos:

  - Supongamos que $u + cl - y \notin [0, b]$. Entonces:

$$u + cl - y \notin [0, b] \Rightarrow \{u + cl - y < 0\} \cup \{u + cl - y > b\} \Rightarrow \{u + cl < y\} \cup \{y < u + cl - b\}.$$

[28] *Razonando como hicimos anteriormente.*

Es decir, que en el caso en que $\{l \leq \frac{b-u}{c}\}$ y $\{u+cl < y\} \cup \{y < u+cl-b\}$ se sale seguro de la zona. Por lo tanto, en este caso, también $P^u_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y} = 1$.

- Supongamos que ahora $u + cl - y \in [0, b]$. Esto ocurre cuando

$$0 \leq u + cl - y \leq b \Rightarrow -(u + cl) \leq -y \leq b - (u + cl) \Rightarrow (u + cl) - b \leq y \leq (u + cl).$$

En este caso el proceso sigue dentro de la zona, se ha producido la primera renovación, y por lo tanto la probabilidad de escape en este caso será $P^u_{E,lx}$.

Por lo tanto concluimos que efectívamente se cumple 3.209.

□

A continuación vamos a deducir una ecuación integral para la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0,\ x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$.

Teorema 3.6.2. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$, antes de $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, que denotamos por $P^u_{E,0x}$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^u_{E,0x} = 1 - \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t (1 - P^{t-y}_{E,0x-\frac{t-u}{c}})g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.210}$$

Demostración. Se verifica la siguiente igualdad de sucesos:

$$\{y \notin [u + cl - b, u + cl]\} = \{y < u + cl - b\} \cup \{y > u + cl\}.$$

Con lo cual:

$$\{l \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{y \notin [u + cl - b, u + cl]\} = \{l \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{\{y < u + cl - b\} \cup \{y > u + cl\}\} =$$

$$= \{\{l \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{y < u + cl - b\}\} \cup \{\{l \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{y > u + cl\}\}.$$

Teniendo en cuenta ahora el teorema de la probabilidad total, las propiedades de las funciones indicatrices y de la unión e intersección de conjuntos, el teorema 3.6.1 y la independencia entre las variables aleatorias tiempos de espera τ_i y los saltos Y_j, obtenemos:

$$P^u_{E,0x} = \int P^u_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y / X_0 = u)^{29} = \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \mathrm{d}F(l)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}G(y) + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{-\infty}^{u+cl-b} \mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}F(l) +$$

[29] *Pues:*

$$\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y / X_0 = u) = \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l / X_0 = u)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y / X_0 = u) = \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l)\mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y).$$

$$+\int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl}^{+\infty}\mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}F(l)+\int_0^{\frac{b-u}{c}}\mathrm{d}F(l)\int_{u+cl-b}^{u+cl}P^u_{E,lx}\,\mathrm{d}G(y)=$$

$$=\int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\mathrm{d}F(l)+\int_0^{\frac{b-u}{c}}G(u+cl-b)\,\mathrm{d}F(l)+\int_0^{\frac{b-u}{c}}(1-G(u+cl))\,\mathrm{d}F(l)+\int_0^{\frac{b-u}{c}}\mathrm{d}F(l)\int_{u+cl-b}^{u+cl}P^{u+cl-y}_{E,0x-l}\,\mathrm{d}G(y)=$$

Teniendo en cuenta que se cumple $P^u_{E,\tau_1 x}\overset{d}{=}P^{u+c\tau_1-Y_1}_{E,0x-\tau_1}$, y que al ser $G(y)$ la función de distribución de los saltos se cumple:

$$\lim_{\alpha\to-\infty}G(\alpha)=0,\ \lim_{\alpha\to+\infty}G(\alpha)=1.$$

Por lo tanto,

$$=1-\int_0^{\frac{b-u}{c}}\mathrm{d}F(l)\int_{u+cl-b}^{u+cl}(1-P^{u+cl-y}_{E,0x-l})\,\mathrm{d}G(y).$$

Dando un cambio de variable, se obtiene de forma inmediata 4.26.

□

Si $x\le\frac{b-u}{c}$ se deduce:

Teorema 3.6.3. *La probabilidad de escape de la zona $[0,b]$ antes de $x>0$, $x\le\frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0=u,\tau_1=l,Y_1=y$, $P^u_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y}$ verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^u_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y}=I_{\{l\le x\}\cap\{y\notin[u+cl-b,u+cl]\}}+P^u_{E,lx}I_{\{l\le x\}\cap\{u+cl-b\le y\le u+cl\}}}\tag{3.211}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma (τ_1,Y_1):

- $x\le\dfrac{b-u}{c}<l$. Este caso, teniendo en cuenta que estamos estudiando la probabilidad de escape de la zona $[0,b]$ antes de un tiempo $x\in(0,+\infty)$ no lo vamos a considerar.
- $l\le x\le\dfrac{b-u}{c}$. Es necesario distinguir dos casos:
  - Supongamos que $u+cl-y\notin[0,b]$. Entonces obtenemos:

    $$u+cl-y\notin[0,b]\Rightarrow\{u+cl-y<0\}\cup\{u+cl-y>b\}\Rightarrow\{u+cl<y\}\cup\{y<u+cl-b\}.$$

    Es decir, que en el caso en que $\{l\le x\le\frac{b-u}{c}\}$ y $\{u+cl<y\}\cup\{y<u+cl-b\}$ se sale seguro de la zona. Por lo tanto, en este caso $P^u_{E,0x,l,y}=1$.
  - Supongamos que ahora $u+cl-y\in[0,b]$. Esto ocurre cuando

$$0 \le u + cl - y \le b \Rightarrow -(u + cl) \le -y \le b - (u + cl) \Rightarrow (u + cl) - b \le y \le (u + cl).$$

En este caso el proceso sigue dentro de la zona, se ha producido la primera renovación, y por lo tanto la probabilidad de escape en este caso será $P^u_{E,lx}$.

- $x \le l \le \dfrac{b-u}{c}$. Antes de l no se puede salir de la zona pues:

$$\forall t \le l \le \frac{b-u}{c} \ : \ X_t = u + ct < u + cl < u + c(\frac{b-u}{c}) = b.$$

Y al ser un proceso lineal creciente antes de la primera renovación tampoco puede salir por abajo. Para valores mayores que l intervendría la probabilidad $P^u_{E,lx}$, pero ya sería para valores $l > x$, con lo cual, en este caso $P^u_{E,0x,l,y} = 0$.

Por lo tanto, concluimos que efectívamente se verifica 3.211.

□

A continuación vamos a deducir una ecuación integral para la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0$, $x \le \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$.

Teorema 3.6.4. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$, antes de $x > 0$, $x \le \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, que denotamos por $P^u_{E,0x}$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^u_{E,0x} = F(x) - \frac{1}{c}\int_u^{u+cx} f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} (1 - P^{t-y}_{E,0x-\frac{t-u}{c}}) g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.212}$$

Demostración. Se verifica la siguiente igualdad de sucesos :

$$\{y \notin [u + cl - b, u + cl]\} = \{y < u + cl - b\} \cup \{y > u + cl\}.$$

Con lo cual:

$$\{l \le x\} \cap \{y \notin [u + cl - b, u + cl]\} = \{l \le x\} \cap \{\{y < u + cl - b\} \cup \{y > u + cl\}\} =$$

$$= \{\{l \le x\} \cap \{y < u + cl - b\}\} \cup \{\{l \le x\} \cap \{y > u + cl\}\}.$$

Teniendo en cuenta ahora el teorema de la probabilidad total, las propiedades de las funciones indicatrices y de la unión e intersección de conjuntos, el teorema 3.6.3 y la independencia entre las variables aleatorias tiempos de espera τ_i y los saltos Y_j, obtenemos:

$$P^u_{E,0x} = \int P^u_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y} \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y / X_0 = u) = \int_0^x \int_{-\infty}^{u+cl-b} \mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}F(l) + \int_0^x \int_{u+cl}^{+\infty} \mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}F(l) +$$

$$+ \int_0^x \mathrm{d}F(l) \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^u_{E,lx}\,\mathrm{d}G(y) =$$

$$= \int_0^x G(u+cl-b)\,\mathrm{d}F(l) + \int_0^x (1 - G(u+cl))\,\mathrm{d}F(l) + \int_0^x \mathrm{d}F(l) \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^{u+cl-y}_{E,0x-l}\,\mathrm{d}G(y) =$$

Teniendo en cuenta que se cumple $P^u_{E,\tau_1 x} \stackrel{d}{=} P^{u+c\tau_1-Y_1}_{E,0x-\tau_1}$, y que al ser $G(y)$ la función de distribución de los saltos se verifica:

$$\lim_{\alpha \to -\infty} G(\alpha) = 0, \ \lim_{\alpha \to +\infty} G(\alpha) = 1.$$

Por lo tanto,

$$= F(x) - \int_0^x \mathrm{d}F(l) \int_{u+cl-b}^{u+cl} (1 - P^{u+cl-y}_{E,0x-l})\,\mathrm{d}G(y).$$

De forma inmediata se obtiene 3.212.

□

A continuación vamos a estudiar la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de un tiempo $r \in (t_n, t_{n+1})$ que por simplicidad suponemos $r \in (0, t_1)$ pues ello no implica pérdida de generalidad en el razonamiento.

Teorema 3.6.5. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_r = u,\ \tau_1 = l,\ Y_1 = y$ siendo $r \in (0, \tau_1)$ satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^u_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{\frac{b-u}{c} < \mathscr{E}^+_r\} \cap \{Y_1 \in \mathbb{R}\}} + I_{\{\mathscr{E}^+_r \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{Y_1 \notin (u+c\mathscr{E}^+_r - b, u+c\mathscr{E}^+_r)\}} + P^u_{E,rlx} I_{\{\mathscr{E}^+_r \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{Y_1 \in (u+c\mathscr{E}^+_r - b, u+c\mathscr{E}^+_r)\}}} \tag{3.213}$$

Demostración. Teniendo en cuenta las hipótesis del enunciado, $0 < r < \tau_1$, vamos a condicionar por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1).

- $r + \frac{b-u}{c} < l$. En este caso se cumple que:

$$\forall t \in (r + \frac{b-u}{c}, l) \ : \ X^u_{t,r} = u + c(t-r) > u + c \cdot (r + \frac{b-u}{c} - r) = b.$$

Por lo tanto el proceso ha salido por arriba y $P^u_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y} = 1$ para cualquier valor que pudiera tomar Y_1. Esto ocurre cuando:

$$r+\frac{b-u}{c}<l\Rightarrow\frac{b-u}{c}<l-r\Rightarrow\frac{b-u}{c}<\mathscr{E}_r^+.$$

- $l\leq r+\frac{b-u}{c}<x$. Ahora es necesario diferenciar varios casos:
  - Sea $u+c(l-r)-y<0$. El proceso está fuera de la zona $[0,b]$, se verifica que

$$u+c(l-r)-y<0\Rightarrow u+cl'<y.$$

    Siendo $l'=l-r$, que se puede considerar como el valor tomado por la variable aleatoria $\mathscr{E}_r^+$. Por lo tanto, cuando $y>u+cl'$, $P^u_{E,rx,\tau1=l,Y_1=y}=1$.
  - Sea $u+c(l-r)-y>b$. El proceso está fuera de la zona $[0,b]$ y

$$u+c(l-r)-y>b\Rightarrow u+cl'-y>b\Rightarrow u+cl'-b>y.$$

    Con lo cual, cuando $y<u+cl'-b$, $P^u_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y}=1$.
  - Sea $0<u+c(l-r)-y<b$. En este caso sigue dentro de la zona, se ha producido una renovación y por lo tanto $P^u_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y}=P^u_{E,r\tau_1x}$, la probabilidad de salir de la zona $[0,b]$ por arriba a partir de τ_1. Esto ocurre cuando:

$$0<u+c(l-r)-y<b\Rightarrow 0<u+cl'-y<b\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(u+cl')<-y<b-(u+cl')\Rightarrow (u+cl')-b<y<u+cl'.$$

  Esto cuando $l\leq r+\frac{b-u}{c}\Rightarrow l'\leq\frac{b-u}{c}$.

Con lo cual, efectivamente se cumple 3.213.

□

Vamos a deducir ahora la ecuación integral que satisface la probabilidad de escape de la zona $[0,b]$ antes del tiempo $x\in(0,+\infty)$ partiendo de $\vec{\sigma}=(X_r=u,\mathscr{E}_r^-=z)$.

Teorema 3.6.6. *La probabilidad de escape de la zona $[0,b]$ antes de $x>r+\frac{b-u}{c}$ partiendo de $\vec{\sigma}=(X_r=u,\mathscr{E}_r^-=z)$, que denotamos por $P^u_{E,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{E,rx}=1-\frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t(1-P^{t-y}_{E,0x-\frac{t-u}{c}})g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}\tag{3.214}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total y el teorema 3.6.5:

$$P^u_{E,rx} = \int P^u_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y} \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}F(z+l')}{\bar{F}(z)} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}G(y) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \frac{\mathrm{d}F(z+l')}{\bar{F}(z)}) \int_{u+cl'}^{+\infty} \mathrm{d}G(y) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \frac{\mathrm{d}F(z+l')}{\bar{F}(z)} \int_{-\infty}^{u+cl'-b} \mathrm{d}G(y) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \frac{\mathrm{d}F(z+l')}{\bar{F}(z)} \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P^u_{E,rlx} \, \mathrm{d}G(y) = {}^{30}$$

$$= 1 - \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l') \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} (1 - P^u_{E,rlx}) g(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}l'.$$

Puesto que en el lema 3.6.2, en la página 139, demostramos que $P^u_{E,r\tau_1 x} \stackrel{d}{=} P^{u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1}_{E,0x-\mathscr{E}^+_r}$, y dando un cambio apropiado de variable, se cumple 3.214.

□

Si $x \leq r + \frac{b-u}{c}$ se deduce:

Teorema 3.6.7. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0$, $x \leq r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_r = u$, $\tau_1 = l$, $Y_1 = y$ siendo $r \in (0, \tau_1)$ satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^u_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{\mathscr{E}^+_r \leq x\} \cap \{Y_1 \notin (u+c\mathscr{E}^+_r - b, u+c\mathscr{E}^+_r)\}} + P^u_{E,rlx} I_{\{\mathscr{E}^+_r \leq x\} \cap \{Y_1 \in (u+c\mathscr{E}^+_r - b, u+c\mathscr{E}^+_r)\}}} \tag{3.215}$$

Demostración. Teniendo en cuenta las hipótesis del enunciado, $0 < r < \tau_1$, vamos a condicionar por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1).

- $r + \frac{b-u}{c} < l < x$. Este caso no lo vamos a considerar pues ahora $x \leq r + \frac{b-u}{c}$.
- $l \leq x \leq r + \frac{b-u}{c}$. Ahora hay que diferenciar según los valores que toma el proceso en el tiempo $t_1 = \tau_1$ pues para cualquier $t \in (0, l)$: $X^u_{t,r} = u + c(t-r) < u + c(r + \frac{b-u}{c} - r) = b \wedge X^u_{t,r} \in [0, b]$.
  - Sea $u + c(l-r) - y < 0$. El proceso está fuera de la zona $[0, b]$, se cumple que:

    $$u + c(l-r) - y < 0 \Rightarrow u + cl' < y.$$

    Siendo $l' = l - r$, que se puede considerar como el valor tomado por la variable aleatoria $\mathscr{E}^+_r$. Por lo tanto, cuando $y > u + cl'$, $P^u_{E,rx\tau 1=l,Y_1=y} = 1$.
  - Sea $u + c(l-r) - y > b$. El proceso está fuera de la zona $[0, b]$ y

[30] *Teniendo en cuenta el lema 3.3.1 en la página 57 y que:*

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) = \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l' \diagup \vec{\sigma}) \mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) = \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l' \diagup \vec{\sigma}) \mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y).$$

$$u + c(l - r) - y > b \Rightarrow u + cl' - y > b \Rightarrow u + cl' - b > y.$$

Con lo cual, cuando $y < u + cl' - b$, $P^u_{E,rx\tau_1=l,Y_1=y} = 1$.

- Sea $0 < u + c(l - r) - y < b$. En este caso sigue dentro de la zona, se ha producido una renovación y por lo tanto $P^u_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y} = P^u_{E,r\tau_1 x}$, la probabilidad de salir de la zona $[0, b]$ por arriba a partir de τ_1. Esto ocurre cuando:

$$0 < u + c(l - r) - y < b \Rightarrow 0 < u + cl' - y < b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(u + cl') < -y < b - (u + cl') \Rightarrow (u + cl') - b < y < u + cl'.$$

Esto cuando $l \leq x \leq r + \frac{b-u}{c} \Rightarrow l' \leq x - r \leq \frac{b-u}{c}$.

Con lo cual, efectivamente se cumple 3.215.

□

Vamos a deducir ahora la ecuación integral que satisface la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes del tiempo $x \in (0, +\infty)$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$.

Teorema 3.6.8. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0$, $x \leq r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$, que denotamos por $P^u_{E,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{E,rx} = 1 - \frac{\bar{F}(z + x)}{\bar{F}(z)} - \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^{u+cx} f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} (1 - P^{t-y}_{E,0x-\frac{t-u}{c}}) g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{3.216}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total y el teorema 3.6.7:

$$P^u_{E,rx} = \int P^u_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y} \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}F(z + l')}{\bar{F}(z)} \int_{u+cl'}^{+\infty} \mathrm{d}G(y) + {}^{31}$$

$$+ \int_0^x \frac{\mathrm{d}F(z + l')}{\bar{F}(z)} \int_{-\infty}^{u+cl'-b} \mathrm{d}G(y) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}F(z + l')}{\bar{F}(z)} \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P^u_{E,rlx}\, \mathrm{d}G(y) =$$

$$= 1 - \frac{\bar{F}(z + x)}{\bar{F}(z)} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}F(z + l')}{\bar{F}(z)} \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} (1 - P^u_{E,rlx})\, \mathrm{d}G(y).$$

Puesto que en el lema 3.6.2, en la página 139, demostramos que $P^u_{E,r\tau_1 t} \stackrel{d}{=} P^{u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1}_{E,0x-\mathscr{E}^+_r}$, dando un cambio adecuado de variable obtenemos 3.216.

□

[31] *Teniendo en cuenta el lema 3.3.1 en la página 57 y que:*

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) = \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l' / \vec{\sigma}) \mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) = \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l' / \vec{\sigma}) \mathbb{P}(Y_1 \in \mathrm{d}y).$$

Probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ en general, sin límite temporal.

Puesto que la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ sin límite temporal es uno (corolario 3.6.1, en la página 137) no tiene sentido estudiar las ecuaciones integrales que verifican.

3.6.2. Probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior.

Primeramente estudiaremos la probabilidad de que el primer escape sea a través de la barrera superior antes de un cierto $x \in \mathbb{R}^+$.

Probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea a través de la barrera superior antes de un cierto tiempo x.

A continuación vamos a estudiar la probabilidad de escapar de la zona $[0, b]$ antes de un tiempo arbitrario $x > 0$. Empezaremos el estudio suponiendo que el proceso ha alcanzado el valor $u \in [0, b]$ en un determinado tiempo de renovación t_n, que podemos suponer que es t_0 sin pérdida de generalidad.

Definición 3.6.6. (Probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior partiendo de $X_0 = u \in [0, b]$ antes de $x > 0$.) *Definimos la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior partiendo del valor $X_0 = u$ antes del tiempo $x > 0$ como:*

$$\boxed{P_{E,0x}^{u.s} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ t \leq x \ / \ [X_{t,0}^u > b] \wedge [X_{s,0}^u \in (0, b) \ \forall \ 0 < s < t < x])} \tag{3.217}$$

Definición 3.6.7. (Probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior partiendo de $X_0 = u$ antes de $x > 0$ después de τ_1). *Definimos la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior partiendo de $X_0 = u$ antes del tiempo $x > 0$ después de la primera renovación, después de τ_1, como:*

$$\boxed{P_{E,\tau_1 x}^{u.s} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \tau_1 + t \leq x \ / \ [X_{\tau_1+t,0}^u > b] \wedge [X_{\tau_1+s,0}^u \in (0, b) \ \forall \ \tau_1 < \tau_1 + s < \tau_1 + t \leq x])} \tag{3.218}$$

Ahora vamos a definir la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x > 0$ partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ y la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x > 0$ partiendo de $X_r = u$ después de τ_1.

Definición 3.6.8. (Probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x > 0$ partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$.) *Definimos la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes del tiempo $x > 0$ partiendo de $X_r = u,\ r$ cumpliendo las anteriores condiciones como:*

$$\boxed{P_{E,rx}^{u.s} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ r + t \leq x \ / \ [X_{r+t,r}^u > b] \wedge [X_{r+s,r}^u \in (0, b) \ \forall \ 0 < r + s < r + t < x])} \tag{3.219}$$

Definición 3.6.9. (Probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x > 0$ partiendo de $X_r = u,\ r \in (0, \tau_1)$ después de τ_1.) *Definimos la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x > 0$ partiendo de $X_r = u,\ r$ cumpliendo las condiciones del enunciado, después de τ_1 como:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,r\tau_1 x} = \mathbb{P}(\exists t > 0,\ \tau_1 - r + t \leq x \ / \ [X^u_{\tau_1+t,r} > b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0, b)\ \forall\ \tau'_1 < \tau'_1 + s < \tau'_1 + t \leq x])} \tag{3.220}$$

Siendo $\tau'_1 = \tau_1 - r$.

Los siguientes resultados son esenciales para nuestra investigación. Sus demostraciones siguen el mismo esquema de razonamiento que las de la sección 3.6.1.

Lema 3.6.3. *La probabilidad de escape de la zona* $[0, b]$ *a través de la barrera superior antes de* $x > 0$ *partiendo de* $X_0 = u$ *después de* τ_1, $P^{u.s}_{E,\tau_1 x}$, *pertenece a* $\mathcal{F}^+_2$ *y coincide en distribución con la probabilidad de escape de la zona a través de la barrera superior antes de* $x - \tau_1$ *partiendo de* $X_0 = u + X_{\tau_1}$, $P^{(u+X_{\tau_1}).s}_{E,0x-\tau_1}$.

Lema 3.6.4. *La probabilidad de escape de la zona* $[0, b]$ *a través de la barrera superior antes de* x *partiendo de* $X_r = u$, $r \in (0, \tau_1)$ *después de* τ_1, $P^{u.s}_{E,r\tau_1 t}$, *pertenece a* $\mathcal{F}^+_2$ *y coincide en distribución con la probabilidad de escape de la zona* $[0, b]$ *a través de la barrera superior antes de* $x - \mathscr{E}^+_r$ *partiendo de* $X_0 = u + c\mathscr{E}^+_r - Y_1$, $P^{(u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1).s}_{E,0x-\mathscr{E}^+_r}$.

A continuación vamos a estudiar la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de un cierto tiempo x; las demostraciones son inmediatas, siguiendo el esquema de las dadas para los resultados obtenidos en la sección 3.6.1, en la página 136.

Teorema 3.6.9. *La probabilidad de escape de la zona* $[0, b]$ *a través de la barrera superior antes de* $x > 0$, $x > \frac{b-u}{c}$ *partiendo de* $X_0 = u, \tau_1 = l, Y_1 = y$, $P^{u.s}_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y}$ *verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{\frac{b-u}{c} < l\} \cap \{y \in \mathbb{R}\}} + I_{\{l \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{y < u+cl-b\}} + P^{u.s}_{E,lx} I_{\{l \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{u+cl-b \leq y \leq u+cl\}}} \tag{3.221}$$

Teorema 3.6.10. *La probabilidad de escape de la zona* $[0, b]$ *a través de la barrera superior, antes de* $x > 0$, $x > \frac{b-u}{c}$ *partiendo de* $X_0 = u$, *que denotamos por* $P^{u.s}_{E,0x}$, *satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0x} = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_u^b G(t-b) f(\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}t + \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t P^{(t-y).s}_{E,0x-\frac{t-u}{c}} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.222}$$

En el caso en que $x \leq \frac{b-u}{c}$, se deduce:

Teorema 3.6.11. *La probabilidad de escape de la zona* $[0, b]$ *a través de la barrera superior antes de* $x > 0$, $x \leq \frac{b-u}{c}$ *partiendo de* $X_0 = u, \tau_1 = l, Y_1 = y$, $P^{u.s}_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y}$ *verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0x,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{l \leq x\} \cap \{y < u+cl-b\}} + P^{u.s}_{E,lx} I_{\{l \leq x\} \cap \{u+cl-b \leq y \leq u+cl\}}} \tag{3.223}$$

Teorema 3.6.12. *La probabilidad de escape de la zona* $[0, b]$ *a través de la barrera superior, antes de* $x > 0$, $x \leq \frac{b-u}{c}$ *partiendo de* $X_0 = u$, *que denotamos por* $P^{u.s}_{E,0x}$, *satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0x} = \frac{1}{c}\int_{u}^{u+cx} G(t-b)f(\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}t + \frac{1}{c}\int_{u}^{u+cx} f(\frac{t-u}{c}))\int_{t-b}^{t} P^{(t-y).s}_{E,0x-\frac{t-u}{c}} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.224}$$

Vamos a estudiar la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior partiendo de un tiempo $r \in (t_n, t_{n+1})$ que por simplicidad suponemos $r \in (0, t_1)$.

Teorema 3.6.13. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x > 0,\ x > r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_r = u,\ \tau_1 = l,\ Y_1 = y$ siendo $r \in (0, \tau_1)$ satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{\frac{b-u}{c}<\mathscr{E}^+_r\}\cap\{Y_1\in\mathbb{R}\}} + I_{\{\mathscr{E}^+_r\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{Y_1<u+c\mathscr{E}^+_r-b\}} + P^{u.s}_{E,rlx} I_{\{\mathscr{E}^+_r\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{Y_1\in(u+c\mathscr{E}^+_r-b,u+c\mathscr{E}^+_r)\}}} \tag{3.225}$$

Teorema 3.6.14. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x \in (0, +\infty),\ x > r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$, que denotamos por $P^u_{E,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u}_{E,rx} = \frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_{u}^{b} G(t-b)f(z+\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}t + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_{u}^{b} f(z+\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^{t} P^{(t-y).s}_{E,0x-\frac{t-u}{c}} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.226}$$

Si $x \leq r + \frac{b-u}{c}$ se deduce:

Teorema 3.6.15. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x > 0,\ x \leq r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_r = u,\ \tau_1 = l,\ Y_1 = y$ siendo $r \in (0, \tau_1)$ satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{\mathscr{E}^+_r\leq x\}\cap\{Y_1<u+c\mathscr{E}^+_r-b\}} + P^{u.s}_{E,rlx} I_{\{\mathscr{E}^+_r\leq x\}\cap\{Y_1\in(u+c\mathscr{E}^+_r-b,u+c\mathscr{E}^+_r)\}}} \tag{3.227}$$

Teorema 3.6.16. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x \in (0, +\infty),\ x \leq r + \frac{b-u}{c}$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$, que denotamos por $P^{u.s}_{E,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,rx} = \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_{u}^{u+cx} G(t-b)f(z+\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}t + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_{u}^{u+cx} f(z+\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^{t} P^{(t-y).s}_{E,0x-\frac{t-u}{c}} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.228}$$

En el siguiente apartado vamos a estudiar la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior, sin límite temporal. Empezaremos con unos resultados previos.

Probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea a través de la barrera superior en general, sin límite temporal.

Definición 3.6.10. (Probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u \in [0, b]$.) *Definimos la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo del valor $X_0 = u$ como:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0} = P(\exists t > 0/[X^u_{t,0} > b] \wedge [X^u_{s,0} \in [0, b] \ \forall \ s < t])} \tag{3.229}$$

Definición 3.6.11. (Probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u$ después de τ_1). *Definimos la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u$ después de la primera renovación, después de τ_1 como:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,\tau_1} = P(\exists t > 0/[X^u_{\tau_1+t,0} > b] \wedge [X^u_{\tau_1+s,0} \in [0, b] \ \forall \ \tau_1 < \tau_1 + s < \tau_1 + t])} \tag{3.230}$$

Vamos a definir la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u, \ r \in (0, \tau_1)$ y la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u$ después de τ_1.

Definición 3.6.12. (Probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u, \ r \in (0, \tau_1)$.) *Definimos la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u, \ r$ cumpliendo las anteriores condiciones como:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,r} = P(\exists t > 0/[X^u_{r+t,r} > b] \wedge [X^u_{r+s,r} \in (0, b) \ \forall \ 0 < r + s < r + t])} \tag{3.231}$$

Definición 3.6.13. (Probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u, \ r \in (0, \tau_1)$ después de τ_1.) *Definimos la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u, \ r$ cumpliendo las condiciones del enunciado, después de τ_1 como:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,r\tau_1} = P(\exists t > 0/[X^u_{\tau_1+t,r} > b \wedge [X^u_{\tau_1+s,r} \in (0, b) \ \forall \ \tau_1 - r < \tau_1 - r + s < \tau_1 - r + t])} \tag{3.232}$$

Los siguientes resultados son fundamentales para el resto de la investigación. Las demostraciones siguen el mismo esquema de razonamiento que las dadas en la sección 3.5.2, en la página 123.

Lema 3.6.5. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u$ después de τ_1, $P^{u.s}_{E,\tau_1}$, pertenece a $\mathcal{F}^+_2$ y coincide en distribución con la probabilidad de que el primer escape de la zona sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u + X_{\tau_1}$, $P^{(u+X_{\tau_1}).s}_{E,0}$.*

Lema 3.6.6. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u$, $r \in (0, \tau_1)$ después de τ_1, $P^u_{E,r\tau_1}$, pertenece a $\mathcal{F}_2^+$ y coincide en distribución con la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u + c\mathscr{E}_r^+ - Y_1$, $P_{E,0}^{(u+c\mathscr{E}_r^+ - Y_1).s}$.*

A continuación vamos a deducir una identidad que verifica la probabilidad de escape por la barrera superior; lo mismo que hemos hecho en otras ocasiones, vamos a condicionar por los valores que toma la variable bidimensional (τ_1, Y_1), el primer tiempo de renovación y la magnitud del salto que se produce en ese tiempo de primera renovación.

Teorema 3.6.17. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u$, τ_1, Y_1, $P^{u.s}_{E,0,\tau_1,Y_1}$ verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0,\tau_1,Y_1} = I_{\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\} \cap \{Y_1 \in \mathbb{R}\}} + I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{Y_1 < u + c\tau_1 - b\}} + P^{u.s}_{E,\tau_1} I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{u + c\tau_1 - b \leq Y_1 \leq u + c\tau_1\}}} \tag{3.233}$$

Ahora vamos a deducir una ecuación integral para la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ por la barrera superior.

Teorema 3.6.18. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior, partiendo de $X_0 = u, P^{u.s}_{E,0}$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0} = 1 - \frac{1}{c} \int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{+\infty} g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t + \frac{1}{c} \int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} P^{(t-y).s}_{E,0} g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{3.234}$$

Cuando el proceso ha alcanzado el valor u en un tiempo $r \in (0, \tau_1)$ deducimos:

Teorema 3.6.19. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u$, τ_1, Y_1, siendo $r \in (0, \tau_1)$, satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,r,\tau_1,Y_1} = I_{\{\mathscr{E}_r^+ > \frac{b-u}{c}\} \cap \{Y_1 \in \mathbb{R}\}} + I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{Y_1 < u + c\mathscr{E}_r^+ - b\}} + P^{u.s}_{E,r\tau_1} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{u + c\mathscr{E}_r^+ - b \leq Y_1 \leq u + c\mathscr{E}_r^+\}}} \tag{3.235}$$

Para la probabilidad de escape por la barrera superior partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$ tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.6.20. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$ $r \in (0, \tau_1)$, que denotamos por $P^{u.s}_{E,r}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,r} = 1 - \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{+\infty} g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} P^{t-y}_{E,0} g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{3.236}$$

3.6.3. Solución ecuaciones integrales. Probabilidad de escape a través de la barrera superior.

Una vez que hemos deducido las ecuaciones integrales que satisface la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior vamos a resolverlas en algunos casos en que sea posible. Para ello vamos a estudiar varios ejemplos.

1. **Caso general.**

   Para efectuar un estudio más detallado de las ecuaciones integrales, puesto que los saltos pueden tomar tanto valores positivos como negativos, vamos a sustituir la función de densidad de los saltos por una combinación convexa de funciones de densidad; es decir, que vamos a suponer $g(y) = pg_+(y) + qg_-(y),\ p + q = 1$, siendo $g_+(y)$ la función de densidad de los saltos $\forall y \in [0, +\infty)$ y $g_-(y)$ $\forall y \in (-\infty, 0)$. Sustituyendo obtenemos:

$$P_{E,0}^{u.s} = 1 - \frac{p}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_0^{+\infty} g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t - \frac{q}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^0 g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t+ \tag{3.237}$$

$$+\frac{p}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_0^t P_{E,0}^{(t-y).s} g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \frac{q}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^0 P_{E,0}^{(t-y).s} g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

   En el caso en que el tiempo inicial sea un tiempo de renovación. Para el caso en que no lo sea, se deduce la siguiente ecuación integral:

$$P_{E,r}^{u.s} = 1 - \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_0^{+\infty} g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t - \frac{q}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^0 g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t+ \tag{3.238}$$

$$+\frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_0^t P_{E,0}^{t-y} g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \frac{q}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_{t-b}^0 P_{E,0}^{t-y} g_-(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

   Se trata de ecuaciones integrales que en general no admiten solución de forma cerrada. Un estudio profundo y detallado se puede consultar en el artículo *Escape probabilities of compound renewal processes with drift*, de próxima publicación. Algunos casos en los cuales es posible obtener la solución cerrada son los siguientes:

   - *Caso favorable.*

     Denominamos caso favorable al caso en el cual la deriva es positiva y los saltos son negativos. El proceso estocástico, por lo tanto, se puede expresar de la siguiente forma: $\{X_t\}_{t>0}$ donde:

$$X_t = ct + \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k \;\forall\, t > 0,\; Y_k > 0 \;\forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Se trata de un proceso creciente y por lo tanto la probabilidad de que el primer escape sea por la barrera superior, tanto si el tiempo de partida es un tiempo de renovación t_n como un tiempo no de renovación $r \in (0, t_1)$ será 1.

- *Caso semifavorable.*

  Denominamos caso semifavorable a aquel caso en el cual los saltos negativos únicamente pueden tomar valores en $(-\infty, -b]$. En este caso la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de $X_0 = u,\ \tau_1 = l,\ Y_1 = y$ satisface la siguiente identidad:

Proposición 3.6.2. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u,\ \tau_1 = l,\ Y_1 = y,\ P^{u.s}_{\{E,0,\tau_1=l,Y_1=y\}}$ y los saltos tomando valores en $(-\infty, -b] \cup [0, +\infty)$ satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0,\tau_1=l,Y_1=y} = I_{\{l>\frac{b-u}{c}\}\cap\{y\in\mathbb{R}\}} + I_{\{l\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{y<-b\}} + P^{u.s}_{E,l} I_{\{l\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{0\leq Y_1\leq u+cl\}}} \tag{3.239}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) obtenemos:

- $l > \frac{b-u}{c}$. No ha habido renovaciones antes de $\frac{b-u}{c}$, y se cumple:

$$\forall t \in [\frac{b-u}{c}, l]\ :\ u + X_t = u + ct > u + c(\frac{b-u}{c}) = b\ \therefore\ u + X_t \notin [0, b].$$

  El proceso sale por arriba seguro, con lo cual $P^{u.s}_{E,0,\tau_1=l,Y_1=y} = 1$ con independencia del valor que tome Y_1.

- $l \leq \frac{b-u}{c}$. Ahora es necesario distinguir tres casos:
  - Si se cumple que $u + cl - y > b$ el proceso ha salido por la barrera superior, con lo cual $P^{u.s}_{E,0,\tau_1=l,Y_1=y} = 1$. Esto ocurre cuando $y < u + cl - b$, pero teniendo en cuenta las hipótesis, los saltos negativos únicamente pueden tomar valores en $(-\infty, -b]$, se cumple cuando $y < -b$.
  - Si $u + cl - y < 0$, ha salido por la barrera inferior de la zona $[0, b]$, con lo cual $P^{u.s}_{E,0,\tau_1=l,Y_1=y} = 0$.
  - Si $u + cl - y \in [0, b]$ el proceso está dentro de la zona y por lo tanto la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ por arriba será $P^{u.s}_{E,l}$, la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ por arriba a partir de l. Esto ocurre cuando:

$$0 \leq u + cl - y \leq b \Rightarrow -(u + cl) \leq -y \leq b - (u + cl) \Rightarrow (u + cl) - b \leq y \leq u + cl.$$

    Como los saltos negativos únicamente toman valores en $(-\infty, -b]$ y $u + cl - b \in (-b, 0)$, se cumplirá $P_{E,0,\tau_1=l,Y_1=y} = P^{u.s}_{E,l}$ cuando $y \in [0, u + cl]$.

Por lo tanto se cumple 3.239.

□

A continuación vamos a deducir una ecuación integral que satisface la probabilidad de escape por la barrera superior.

Proposición 3.6.3. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u \in [0, b]$ y los saltos tomando valores $Y_j \in (-\infty, -b] \cup [0, +\infty)\ \forall\ j \in \mathbb{N}$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0} = 1 - \frac{p}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}t + \frac{p}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c})\int_0^t P^{t-y}_{E,0}\, g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.240}$$

Demostración. Supongamos que la función de densidad de los saltos es una combinación convexa de funciones de densidad, $g(y) = pg_+(y)+qg_-(y),\ p+q = 1$ siendo $g_-(y)$ la función de densidad $\forall y \in (-\infty,-b]$ y $g_+(y)$ la función de densidad $\forall y \in [0,+\infty)$. Teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total y la proposición 3.6.2, obtenemos:

$$P^{u.s}_{E,0} = \int P^{u.s}_{E,0,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \mathrm{d}F(l)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}G(y)+$$

$$+\int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l)\int_{-\infty}^{-b} \mathrm{d}G(y) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l)\int_0^{u+cl} P^{u.s}_{E,l}\,\mathrm{d}G(y) =$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l)\int_0^{+\infty} \mathrm{d}G(y) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l)\int_0^{u+cl} P^{u.s}_{E,l}\,\mathrm{d}G(y) =$$

Teniendo en cuenta que los saltos no toman valores en $(-b,0)$ y que $P^{u.s}_{E,\tau_1} \overset{d}{=} P^{(u+c\tau_1-Y_1).s}_{E,0}$, se verifica:

$$= 1 - \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l)\int_0^{+\infty} \mathrm{d}G(y) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l)\int_0^{u+cl} P^{(u+cl-y).s}_{E,0}\,\mathrm{d}G(y).$$

Dando un cambio de variable adecuado obtenemos 3.240.

□

Esa ecuación integral se puede resolver de forma cerrada mediante la transformada de Laplace.

Proposición 3.6.4. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0,b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u \in [0,b]$ y los saltos tomando valores $Y_j \in (-\infty,-b]\cup [0,+\infty)$ $\forall\ j \in \mathbb{N}$ satisface la siguiente expresión:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0} = \mathbb{F}(b-u),\ u \in [0,b]} \tag{3.241}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{1-p\hat{f}(cs)}{s(1-p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s))}\right]\mathrm{d}s,\ y \in [0,+\infty)} \tag{3.242}$$

Un esquema de la demostración en D.2.1, en la página 298.

Vamos a estudiar el caso particular en que los tiempos de espera tienen una distribución exponencial y los saltos tienen una distribución que es combinación convexa de otras dos, una de las cuales es exponencial.

Ejemplo 3.6.1. *Si los tiempos de espera tienen una distribución exponencial de parámetro λ, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ y los saltos una distribución cuya función de densidad g es de la forma $g(t) = qg_-(t) + pg_+(t)$, $p + q = 1$ siendo*

$$g_-(t) = \begin{cases} h(t), & si\, t \in (-\infty, -b] \\ \\ 0, & si\, t \in (-b, +\infty) \end{cases} \quad g_+(t) = \begin{cases} 0, & si\, t \in (-\infty, 0) \\ \\ \gamma e^{-\gamma t}, & si\, t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

la probabilidad de que el primer escape sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u$ satisface la siguiente identidad:

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0} = P(u) = 1 - \frac{1}{cr_1r_2(r_1 - r_2)} \left[r_1 e^{r_2(b-u)}(cr_2 + q\lambda)(\gamma + r_2) - r_2 e^{r_1(b-u)}(cr_1 + q\lambda)(\gamma + r_1)\right]} \tag{3.243}$$

Con $u \in [0, b]$; siendo:

$$r_1 = \frac{-(\lambda + c\gamma) + \sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\gamma\lambda}}{2c}, \; r_2 = \frac{-(\lambda + c\gamma) - \sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\gamma\lambda}}{2c}. \tag{3.244}$$

Teniendo en cuenta la proposición 3.6.4 sabemos que:

$$\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sy} \left[\frac{1 - p\hat{f}(cs)}{s(1 - p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s))}\right] \mathrm{d}s, \; y \in [0, +\infty).$$

Teniendo en cuenta que ahora $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ y los saltos tienen la función de densidad g que acabamos de definir, con función de distribución $G(t)$ se cumple:

$$\hat{f}(cs) = \frac{\lambda}{\lambda + cs}, \; \hat{g}_+(s) = \frac{\gamma}{\gamma + s}.$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sy} \left[\frac{1 - \frac{p\lambda}{\lambda + cs}}{s(1 - \frac{p\lambda}{\lambda + cs} \cdot \frac{\gamma}{\gamma + s}}\right] \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sy} \frac{(cs + q\lambda)(\gamma + s)\, \mathrm{d}s}{sc(s - r_1)(s - r_2)}.$$

Para hallar los polos del integrando resolvemos la ecuación de segundo grado, $cs^2 + (\lambda + c\gamma)s + q\lambda\gamma = 0$, que tiene como soluciones:

$$r_1 = \frac{-(\lambda + c\gamma) + \sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\gamma\lambda}}{2c},\ r_2 = \frac{-(\lambda + c\gamma) - \sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\gamma\lambda}}{2c}.$$

El integrando tiene un polo de orden uno en $s = 0$, $s = r_1$ y $s = r_2$, por lo tanto

$$\mathbb{F}(y) = 1 - \frac{1}{cr_1r_2(r_1 - r_2)}\left[r_1e^{r_2y}(cr_2 + q\lambda)(\gamma + r_2) - r_2e^{r_1y}(cr_1 + q\lambda)(\gamma + r_1)\right].$$

Teniendo en cuenta ahora la definición de $\mathbb{F}(y)$, concluimos que

$$P_{E,0}^{u.s} = P(u) = 1 - \frac{1}{cr_1r_2(r_1 - r_2)}\left[r_1e^{r_2(b-u)}(cr_2 + q\lambda)(\gamma + r_2) - r_2e^{r_1(b-u)}(cr_1 + q\lambda)(\gamma + r_1)\right].$$

Vemos que r_1 y r_2 tienen parte real negativa, con lo cual:

$$\lim_{b \to +\infty} P_{E,0}^{u.s} = 1.$$

Un caso particular es cuando $\lambda = c\gamma$. En este caso obtenemos:

$$cs^2 + (\lambda + c\gamma)s + q\lambda\gamma = 0 \Rightarrow cs^2 + (c\gamma + c\gamma)s + q(c\gamma)\gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cs^2 + 2c\gamma s + qc\gamma^2 = 0 \rightarrow c(s^2 + 2\gamma s + q\gamma^2) = 0.$$

Que tiene como soluciones:

$$s = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4q\gamma^2}}{2} = \frac{-2\gamma \pm 2\gamma\sqrt{p}}{2} = -\gamma \pm \gamma\sqrt{p},$$

$$r_1 = -\gamma + \gamma\sqrt{p} = -\gamma(1 - \sqrt{p}),\ r_2 = -\gamma - \gamma\sqrt{p} = -\gamma(1 + \sqrt{p}).$$

Con lo cual

$$\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sy}\frac{(s + q\gamma)(s + \gamma)\,\mathrm{d}s}{s(s + \gamma(1 - \sqrt{p}))(s + \gamma(1 + \sqrt{p}))}.$$

El integrando tiene polos de orden uno en $s=0,\ s=-\gamma(1-\sqrt{p}),\ s=-\gamma(1+\sqrt{p})$ y por lo tanto:

$$\mathbb{F}(y)=1-\frac{e^{-\gamma(1-\sqrt{p})y}(\sqrt{p}-p)(1+\sqrt{p})-e^{-\gamma(1+\sqrt{p})y}(\sqrt{p}+p)(1-\sqrt{p})}{2q}.$$

De donde

$$P(u)=1-\frac{e^{-\gamma(1-\sqrt{p})(b-u)}(\sqrt{p}-p)(1+\sqrt{p})-e^{-\gamma(1+\sqrt{p})(b-u)}(\sqrt{p}+p)(1-\sqrt{p})}{2q}.$$

Vamos a estudiar ahora la probabilidad de que el primer escape sea por la barrera superior suponiendo el tiempo de partida no de renovación, es decir partiendo de $X_r=u,\ r\in(0,\tau_1)$.

Proposición 3.6.5. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0,b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r=u,\ \tau_1=l,\ Y_1=y,\ r\in(0,\tau_1)$ y los saltos tomando valores en $(-\infty,-b]\cup[0,+\infty)$ verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,r,\tau_1=l,Y_1=y}=I_{\{l'>\frac{b-u}{c}\}\cap\{y\in\mathbb{R}\}}+I_{\{l'\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{y<-b\}}+P^{u.s}_{E,rl}I_{\{l'\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{0\leq y\leq u+c(l-r)\}},\ l'=l-r} \tag{3.245}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1,Y_1) obtenemos:

- $l>r+\frac{b-u}{c}$. Se verifica:

$$\forall t\in(r+\frac{b-u}{c},l)\ :\ X_t=u+c(t-r)>u+c(r+\frac{b-u}{c}-r)=b.$$

  El proceso ha salido de la zona por arriba, por lo tanto $P^{u.s}_{E,r,\tau_1=l,Y_1=y}=1$ para cualquier valor que tome Y_1. Esto ocurre cuando:

$$l>r+\frac{b-u}{c}\Rightarrow l-r>\frac{b-u}{c}\Rightarrow l'>\frac{b-u}{c}.$$

- $l\leq r+\frac{b-u}{c}$. Hay que diferenciar varios casos:
  - $u+c(l-r)-y<0$. En este caso ha salido de la zona $[0,b]$ por la barrera inferior, $P^{u.s}_{E,r,\tau_1=l,Y_1=y}=0$.
  - $u+c(l-r)-y>b$. Ha salido de la zona $[0,b]$ por la barrera superior, con lo cual $P^{u.s}_{E,r,\tau_1=l,Y_1=y}=1$. Esto ocurre cuando

$$u+c(l-r)-y>b\Rightarrow y<u+cl'-b.$$

  Teniendo en cuenta que los saltos únicamente pueden tomar valores en $(-\infty,-b]$, se cumple que $P^{u.s}_{E,r,\tau_1=l,Y_1=y}=1$ cuando $y\leq -b$.

- $X^u_{l,r} \in [0,b]$. Está todavía dentro de la zona, se ha producido la primera renovación, con lo cual $P^{u.s}_{E,r,\tau_1=l,Y_1=y} = P^{u.s}_{E,rl}$. Esto ocurre cuando:

$$X^u_{l,r} \in [0,b] \Rightarrow 0 \leq u + c(l-r) - y \leq b \Rightarrow 0 \leq u + cl' - y \leq b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(u+cl') \leq -y \leq b-(u+cl') \Rightarrow (u+cl') - b \leq y \leq u+cl'.$$

Teniendo en cuenta las hipótesis, los saltos únicamente pueden tomar valores en $(-\infty,-b]\cup[0,+\infty)$ y como $u+cl'-y \in (-b,0)$ se cumple $P^{u.s}_{E,r,\tau_1=l,Y_1=y} \stackrel{d}{=} P^{u.s}_{E,rl}$ cuando $y \in [0, u+cl']$.

Esto cuando $l \leq r + \frac{b-u}{c} \Rightarrow l' \leq \frac{b-u}{c}$.

Con lo cual se cumple 3.245.

□

A continuación vamos a deducir la ecuación integral que satisface la probabilidad de que el primer escape sea por la barrera superior, para lo cual vamos a condicionar por $\vec{\sigma}$.

Proposición 3.6.6. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0,b]$ sea por la barrera superior partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$, $u \in [0,b]$, $r \in (0,\tau_1)$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,r} = 1 - \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}t + \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{t-u}{c})\int_0^t P^{(t-y).s}_{E,0}g_+(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.246}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total y la proposición 3.6.5, considerando la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}^+_r, Y_1)$, obtenemos:

$$P^{u.s}_{E,r} = \int P^{u.s}_{E,r,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) = \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} f(z+l')\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l' +$$

$$+\frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l')\int_{-\infty}^{-b} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l' + \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l')\int_0^{u+cl'} P^{u.s}_{E,r,(r+l')}g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l' =$$ [32]

$$= 1 - \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l')\int_0^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l' + \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l')\int_0^{u+cl'} P^{u.s}_{E,r(r+l')}g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l' =$$

Teniendo en cuenta que los saltos no toman valores en $(-b,0)$. En su momento se demostró que $P^{u.s}_{E,r\tau_1} \stackrel{d}{=} P^{(u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1).s}_{E,0}$, con lo cual:

[32] *Teniendo en cuenta que $\mathscr{E}^+_r = l' \Rightarrow \tau_1 - r = l' \Rightarrow \tau_1 = l' + r$.*

$$= 1 - \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l') \int_0^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l' + \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l') \int_0^{u+cl'} P_{E,0}^{(u+cl'-y).s} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l'.$$

Concluimos 3.246 dando un apropiado cambio de variable.

□

Esa ecuación se puede solucionar de forma cerrada mediante la transformada de Laplace.

Proposición 3.6.7. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u \in [0, b]$, $\mathscr{E}_r^- = z$ y los saltos tomando valores $Y_j \in (-\infty, -b] \cup [0, +\infty)\ \forall\ j \in \mathbb{N}$ satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{P_{E,r}^{u.s} = P(r, u, z) = \mathbb{F}(r, b-u, z),\ u \in [0, b]} \tag{3.247}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(r, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sy} \left[\frac{\bar{F}(z) - p\hat{f}_z(cs)[1 - s\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s)]}{s\bar{F}(z)} \right] \mathrm{d}s,\ y \in [0, +\infty)}^{33} \tag{3.248}$$

El esquema de la demostración se puede consultar en D.2.2, en la página 300.

Vamos a estudiar el caso particular en que los tiempos de espera tienen una distribución exponencial y los saltos tienen una distribución que es combinación convexa de otras dos, una de las cuales es exponencial.

Ejemplo 3.6.2. *Si los tiempos de espera tienen una distribución exponencial de parámetro λ, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ y los saltos una distribución cuya función de densidad g es de la forma $g(t) = qg_-(t) + pg_+(t),\ p + q = 1$ siendo*

$$g_-(t) = \begin{cases} h(t), & si\ t \in (-\infty, -b] \\ 0, & si\ t \in (-b, +\infty) \end{cases},\ g_+(t) = \begin{cases} 0, & si\ t \in (-\infty, 0) \\ \gamma e^{-\gamma t}, & si\ t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

la probabilidad de que el primer escape sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u$, $\mathscr{E}_r^- = z$, que denotamos por $P_{E,r}^{u.s} = P(r, u, z)$, satisface la siguiente identidad para $u \in [0, b]$:

$$\boxed{P(r, u, z) = 1 - \frac{e^{-\rho(b-u)} N(-\rho)}{\rho(\rho + r_1)(\rho + r_2)} + \frac{e^{r_1(b-u)} N(r_1)}{r_1(r_1 + \rho)(r_1 - r_2)} - \frac{e^{r_2(b-u)} N(r_2)}{r_2(r_2 + \rho)(r_1 - r_2)}} \tag{3.249}$$

[33] *Siendo:*

$$\hat{f}_z(cs) = \int_0^{+\infty} e^{-cst} f(z+t)\,\mathrm{d}t$$

Siendo:

$$r_1 = \frac{-(\lambda + c\gamma) + \sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\gamma\lambda}}{2c},\ r_2 = \frac{-(\lambda + c\gamma) - \sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\gamma\lambda}}{2c}. \quad (3.250)$$

En la proposición 3.6.7 habíamos deducido que:

$$\hat{\mathbb{F}}(r, s, z) = \frac{\bar{F}(z) - p\hat{f}_z(cs)[1 - s\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s)]}{s\bar{F}(z)},$$

$$\mathbb{F}(r, y, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sy}\left[\frac{\bar{F}(z) - p\hat{f}_z(cs)[1 - s\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s)]}{s\bar{F}(z)}\right] \mathrm{d}s.$$

Sabemos que:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ \hat{f}(cs) = \frac{\lambda}{\lambda + cs},\ \frac{\mathrm{d}[\hat{f}(cs)]}{\mathrm{d}s} = \frac{-c\lambda}{(\lambda + cs)^2},\ g_+(y) = \gamma e^{-\gamma y},\ \hat{g}_+(s) = \frac{\gamma}{\gamma + s},$$

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \frac{1 - p\hat{f}(cs)}{s(1 - p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s))} = \frac{1 - \frac{p\lambda}{\lambda + cs}}{s(1 - \frac{p\lambda}{\lambda + cs} \cdot \frac{\gamma}{\gamma + s})} = \frac{(cs + q\lambda)(\gamma + s)}{sc(s - r_1)(s - r_2)}.$$

Siendo:

$$r_1 = \frac{-(\lambda + c\gamma) + \sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\gamma\lambda}}{2c},\ r_2 = \frac{-(\lambda + c\gamma) - \sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\gamma\lambda}}{2c}.$$

Con lo cual:

$$\hat{\mathbb{F}}(r, s, z) = \frac{e^{-\lambda z} - p\left[\frac{\lambda e^{-\lambda z}}{cs + \lambda}\right]\left[1 - s\left[\frac{\gamma}{\gamma + s}\right]\left[\frac{(cs + q\lambda)(\gamma + s)}{sc(s - r_1)(s - r_2)}\right]\right]}{se^{-\lambda z}} = \frac{1 - \frac{p\lambda}{cs + \lambda}\left[1 - \frac{\gamma(cs + q\lambda)}{c(s - r_1)(s - r_2)}\right]}{s} =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{p\rho\left[(s - r_1)(s - r_2) - \gamma(s + q\rho)\right]}{s(s + \rho)(s - r_1)(s - r_2)},$$

$$\hat{\mathbb{F}}(r, s, z) = \frac{s^3 - [(1 + q)\rho + \gamma]s^2 + [p\rho\gamma - q\rho^2]s + q\gamma\rho^2}{s(s + \rho)(s - r_1)(s - r_2)}.$$

Siendo $\rho = \frac{\lambda}{c}$. Si aplicamos ahora la transformada inversa de Laplace obtenemos:

$$\mathbb{F}(r, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sy} \left[\frac{s^3 - [(1+q)\rho + \gamma]s^2 + [p\rho\gamma - q\rho^2]s + q\gamma\rho^2}{s(s+\rho)(s-r_1)(s-r_2)} \right] \mathrm{d}s.$$

De forma sencilla, mediante el teorema de los resíduos, obtenemos:

$$\mathbb{F}(r, y, z) = 1 - e^{-\rho y} \frac{N(-\rho)}{\rho(\rho + r_1)(\rho + r_2)} + e^{r_1 y} \frac{N(r_1)}{r_1(r_1 + \rho)(r_1 - r_2)} - e^{r_2 y} \frac{N(r_2)}{r_2(r_2 + \rho)(r_1 - r_2)}.$$

Siendo $N(s) = s^3 - [(1+q)\rho + \gamma]s^2 + [p\rho\gamma - q\rho^2]s + q\gamma\rho^2$. De forma inmediata obtenemos 3.249.

- *Caso actuarial.*

  Denominamos caso actuarial cuando los saltos pueden tomar únicamente valores positivos, quedando el proceso estocástico (teniendo en cuenta que el proceso parte de $X_0 = u$) $\{X_t\}_{t \geq 0}$, donde

$$X_t = u + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k, \ \forall \ t \geq 0, \ Y_k \geq 0 \ \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Tenemos los siguientes resultados:

Proposición 3.6.8. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u$, $\tau_1 = l$, $Y_1 = y$, $P^{u.s}_{E,0,\tau_1 = l, Y_1 = y}$ y los saltos tomando únicamente valores positivos satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0,\tau_1 = l, Y_1 = y} = I_{\{l > \frac{b-u}{c}\}} + P^{u.s}_{E,l} I_{\{l \leq \frac{b-u}{c}\} \cap \{0 \leq y \leq u + cl\}}} \tag{3.251}$$

Demostración. La demostración es inmediata, procediendo como en casos precedentes. □

Proposición 3.6.9. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_0 = u$ y los saltos tomando únicamente valores positivos satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0} = \frac{1}{c} \int_b^{+\infty} f(\frac{t-u}{c}) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{c} \int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_0^t P^{(t-y).s}_{E,0} g(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t} \tag{3.252}$$

$$\boxed{P(u) = \frac{1}{c} \int_b^{+\infty} f(\frac{t-u}{c}) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{c} \int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_0^t P(t-y) g(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t, \ u \in [0, b]} \tag{3.253}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total y la proposición 3.6.8, procediendo como en anteriores demostraciones, obtenemos 3.252. □

Lo mismo que ocurría para el caso favorable son ecuaciones integrales lineales, pero en este caso no podremos efectuar una integración cerrada aplicando la transformada directa e inversa de Laplace. Sin embargo se puede estudiar la existencia de soluciones y el carácter de estas, caso de existir. No vamos a efectuar un estudio en profundidad, pues no es el objeto de este trabajo.

Consideremos la ecuación integral 3.253. Es una ecuación integral lineal, aunque su estudio es bastante complicado. Supongamos, como caso particular, que los tiempos de espera tienen una distribución con función de densidad $f(t)$ que es solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes, y que las condiciones inciales quedan indeterminadas; es decir, las condiciones iniciales son unas ciertas constantes que no conocemos.

Proposición 3.6.10. *En el caso en que los tiempos de espera τ_i tienen una función de distribución F cuya función de densidad asociada es de clase C^n en $(0, +\infty)$ y existe un operador diferencial con coeficientes constantes $L \equiv L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(t)$ es solución de*

$$L(f) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \right) f(t) = 0, \ \textit{con las condiciones iniciales} \tag{3.254}$$

$$f^0(0) = b_0, \cdots, f^{n-2}(0) = b_{n-2}, f^{n-1}(0) = b_{n-1}, \tag{3.255}$$

entonces $P_{E,0}^{u.s} = P(u)$ es de clase C^n en $(0, b)$ y cualquier solución de la ecuación integral 3.253 debe ser solución de la ecuación integro-diferencial:

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} (-c)^k a_k \frac{\partial^k}{\partial u^k} \right) P(u) = \sum_{k=0}^{n-1} (-c)^k \left[\sum_{j=1+k}^{n} a_k f^{j-(1+k)}(0) \right] \int_0^u P^k(u-y) g(y) \, \mathrm{d}y +} \tag{3.256}$$

$$\boxed{+ \sum_{k=0}^{n-2} \left[\sum_{j=k+2}^{n} \left[\sum_{i=0}^{j-2} a_k (-1)^{2j-1-i} (c)^{1+i} f^{j-2-i}(0) P^i(0) \right] \right] g^k(u), \ u \in [0, b]}$$

con las condiciones de frontera:

$$P(b) = 1, \ P'(b) = \frac{1}{c} f(0) - \frac{1}{c} f(0) \Pi(b), \cdots, \tag{3.257}$$

$$\cdots \ P^k(b) = (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{c} \right)^k f^{k-1}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{c} \right)^{j+1} f^j(0) \Pi^{k-1-j}(b), \ k = 2 \cdots, n-1. \tag{3.258}$$

Siendo:

$$\Pi(u) = \int_0^u P(u-y)g(y)\,\mathrm{d}y,\ u \in [0,b]. \tag{3.259}$$

Un esbozo de la demostración se puede ver en D.2.3, en la página 301.

Ahora podemos hallar la solución de la ecuación integral 3.253.

Proposición 3.6.11. *En el caso en que los tiempos de espera τ_i tienen una función de distribución F cuya función de densidad asociada es de clase C^n en $(0, +\infty)$ y existe un operador diferencial con coeficientes constantes $L \equiv L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(t)$ es solución de*

$$L(f) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \right) f(t) = 0,\ \textit{con las condiciones iniciales} \tag{3.260}$$

$$f^0(0) = b_0, \cdots, f^{n-2}(0) = b_{n-2}, f^{n-1}(0) = b_{n-1}, \tag{3.261}$$

y con las condiciones de frontera:

$$P(b) = 1,\ P'(b) = \frac{1}{c} f(0) - \frac{1}{c} f(0)\Pi(b), \cdots, \tag{3.262}$$

$$\cdots\ P^k(b) = (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{c}\right)^k f^{k-1}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{c}\right)^{j+1} f^j(0)\Pi^{k-1-j}(b),\ k = 2 \cdots, n-1, \tag{3.263}$$

siendo:

$$\Pi(u) = \int_0^u P(u-y)g(y)\,\mathrm{d}y,\ u \in [0,b], \tag{3.264}$$

entonces se verifica:

$$\boxed{P(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sy} \hat{P}(s)\,\mathrm{d}s,\ u \in [0,b]}\,[34] \tag{3.265}$$

Siendo:

$$\boxed{\hat{P}(s) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \beta_k) s^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (-c)^k s^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k (-c)^k s^k \hat{g}(s)}} \tag{3.266}$$

[34] *Eligiendo α de modo adecuado.*

Un esbozo de la demostración D.2.4, en la página 304.

A continuación vamos a obtener una fórmula explícita de $P(u)$. Depende de las n indeterminadas, incógnitas, $\alpha_k,\ \beta_k,\ k = 0, \cdots, n-1$, las cuales determinaremos teniendo en cuenta las condiciones de frontera.

Proposición 3.6.12. *En el caso en que los tiempos de espera τ_i tienen una función de distribución F cuya función de densidad asociada es de clase C^n en $(0, +\infty)$ y existe un operador diferencial con coeficientes constantes $L \equiv L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(t)$ es solución de*

$$L(f) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}\right) f(t) = 0, \text{ con las condiciones iniciales} \tag{3.267}$$

$$f^0(0) = b_0, \cdots, f^{n-2}(0) = b_{n-2}, f^{n-1}(0) = b_{n-1}, \tag{3.268}$$

y con las condiciones de frontera:

$$P(b) = 1,\ P'(b) = \frac{1}{c} f(0) - \frac{1}{c} f(0)\Pi(b), \cdots, \tag{3.269}$$

$$\cdots\ P^k(b) = (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{c}\right)^k f^{k-1}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{j+1} f^j(0)\Pi^{k-1-j}(b),\ k = 2\cdots, n-1, \tag{3.270}$$

siendo:

$$\Pi(u) = \int_0^u P(u-y) g(y)\,\mathrm{d}y,\ u \in [0, b], \tag{3.271}$$

entonces se verifica:

$$\boxed{P(u) = \frac{\Theta(u, b)}{\Delta(b)}} \tag{3.272}$$

Siendo:

$$\Theta(u, b) = (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} \pi^0(u) & \pi^1(u) & \cdots & \pi^{n-1}(u) & 0 \\ a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} & 1 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & \frac{f(0)}{c} \\ \vdots & & & & \\ a_{j0} & a_{j1} & \cdots & a_{jn-1} & f^{j-1}(0)\left(\frac{1}{c}\right)^j \\ \vdots & & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & f^{n-2}(0)\left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} \end{pmatrix}, \tag{3.273}$$

$$\Delta(b) = \det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}. \tag{3.274}$$

La demostración, esbozada, en D.2.5 , en la página 306.

A la hora de resolver la ecuación integral 3.253 es esencial el siguiente corolario, un caso particular de la proposición 3.6.10, en la página 163:

Corolario 3.6.2. *En el caso en que los tiempos de espera τ_i tienen una función de distribución F cuya función de densidad asociada es de clase C^n en $(0, +\infty)$ y existe un operador diferencial con coeficientes constantes $L \equiv L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(t)$ es solución de*

$$L(f) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}\right) f(t) = 0, \text{ con las condiciones iniciales} \tag{3.275}$$

$$f^0(0) = 0, \cdots, f^{n-2}(0) = 0, f^{n-1}(0) = a_0. \tag{3.276}$$

entonces $P_{E,0}^{u.s} = P(u)$ es de clase C^n en $(0, b)$ y cualquier solución de la ecuación integral 3.253 debe ser solución de la ecuación integro-diferencial

$$\boxed{\left(\sum_{j=0}^{n} (-c)^j a_j \frac{\partial^j}{\partial u^j}\right) P(u) = a_0 \int_0^u P(u-y) g(y)\, \mathrm{d}y, \ 0 \le u < b} \tag{3.277}$$

con las condiciones de frontera:

$$P(b) = 1, \ P^i(b) = 0, \ i = 1, \cdots, n-1. \tag{3.278}$$

La demostración es inmediata, teniendo en cuenta la proposición 3.6.10, en la página 163.

A continuación vamos a deducir una solución de la ecuación 3.277.

Corolario 3.6.3. *Supongamos que F tiene una función de densidad f, de clase C^n en $(0, +\infty)$ para la cual se cumple 3.275 y 3.276, entonces la solución de la ecuación integro diferencial 3.277 satisface:*

$$\boxed{P(u) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} Q_k(b) \sigma_k(u)}{\Delta(b)}} \tag{3.279}$$

Donde:

$$Q_k(b) = \det \begin{pmatrix} \sigma_0^0(b) & \cdots & \sigma_{k-1}^0(b) & 1 & \sigma_{k+1}^0(b) & \cdots & \sigma_{n-1}^0(b) \\ \sigma_0^{'}(b) & \cdots & \sigma_{k-1}^{'}(b) & 0 & \sigma_{k+1}^{'}(b) & \cdots & \sigma_{n-1}^{'}(b) \\ \vdots & & & & & & \\ \sigma_0^{n-1}(b) & \cdots & \sigma_{k-1}^{n-1}(b) & 0 & \sigma_{k+1}^{n-1}(b) & \cdots & \sigma_{n-1}^{n-1}(b) \end{pmatrix}, \tag{3.280}$$

$$\sigma_k(u) = \sum_{i=1}^{n-k} b_{i+k}\pi_i(u), \ \Delta(b) = \begin{vmatrix} \sigma_0^0(b) & \sigma_1^0(b) & \cdots & \sigma_{n-1}^0(b) \\ \sigma_0^{'}(b) & \sigma_1^{'}(b) & \cdots & \sigma_{n-1}^{'}(b) \\ \vdots & & & \\ \sigma_0^{n-1}(b) & \sigma_1^{n-1}(b) & \cdots & \sigma_{n-1}^{n-1}(b) \end{vmatrix}. \tag{3.281}$$

Demostración. La demostración es inmediata teniendo en cuenta las proposiciones 3.6.11 y 3.6.12.

□

Como ejemplo, supongamos que los tiempos de espera siguen una distribución exponencial de parámetro λ, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$.

Proposición 3.6.13. *En el caso en que $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ y los saltos tienen una función de distribución $G(y)$, con función de densidad $g(y)$, se verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{\hat{P}(s) = \frac{P(0)}{\frac{\lambda}{c}(\hat{g}(s) - 1) + s}} \tag{3.282}$$

En el caso en que los tiempos de espera tengan una distribución exponencial de parámetro λ, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda), \forall\, i \in \mathbb{N}$ y los saltos sigan una distribución exponencial de parámetro γ, $Y_j \rightsquigarrow \epsilon(\gamma), \forall\, j \in \mathbb{N}$ se deduce de forma inmediata el siguiente corolario:

Corolario 3.6.4. *Cuando los tiempos de espera tienen una distribución exponencial de parámetro λ y los saltos siguen también una distribución exponencial de parámetro γ se cumple:*

$$\boxed{P(u) = \frac{\gamma - \frac{\lambda}{c} e^{(\frac{\lambda}{c} - \gamma)u}}{\gamma - \frac{\lambda}{c} e^{(\frac{\lambda}{c} - \gamma)b}}, \ si\ \lambda \neq c\gamma} \tag{3.283}$$

$$\boxed{P(u) = \frac{1 + \gamma u}{1 + \gamma b}, \ si\ \lambda = c\gamma} \tag{3.284}$$

Las demostraciones son triviales teniendo en cuenta los resultados previos.

Vamos a estudiar ahora la probabilidad de que el primer escape sea por la barrera superior suponiendo el tiempo de partida no de renovación, es decir, partiendo de $X_r = u, \ r \in (0, \tau_1)$. Las demostraciones siguen el mismo razonamiento que para el caso en que el tiempo inicial es un tiempo de renovación.

Proposición 3.6.14. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u,\ \tau_1 = l,\ Y_1 = y,\ r \in (0, \tau_1)$ y los saltos tomando valores en $[0, +\infty)$ verifica la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,r,\tau_1=l,Y_1=y} = P^{u.s}_{E,r,\mathscr{E}^+_r=l',Y_1=y} = I_{\{l'>\frac{b-u}{c}\}\cap\{y\in\mathbb{R}\}} + P^{u.s}_{E,rl} I_{\{l'\leq\frac{b-u}{c}\}\cap\{0\leq y\leq u+cl'\}},\ l' = l - r} \tag{3.285}$$

Demostración. Condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1), razonando como en la proposición 3.6.5 en la página 158, obtenemos 3.285. □

Proposición 3.6.15. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $X_r = u \in [0, b],\ \mathscr{E}^-_r = z,\ r \in (0, \tau_1)$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,r} = \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z + \frac{t-u}{c}) \int_0^t P^{(t-y).s}_{E,0} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.286}$$

$$\boxed{P(r, u, z) = \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z + \frac{t-u}{c}) \int_0^t P(t-y) g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{3.287}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total, la proposición 3.6.14 y razonando como en la proposición 3.6.6 en la página 159, obtenemos 3.287. □

Se trata de una ecuación integral que, aunque tiene solución única, en general no es posible resolver de forma cerrada. Es interesante la siguiente proposición.

Proposición 3.6.16. *Supongamos que F tiene función de densidad f, de clase C^n en $(0, \infty)$ y que existe un operador diferencial lineal con coeficientes constantes $L = L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que f resuelve:*

$$L(f) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}\right) f(z + t) = 0 \tag{3.288}$$

con condiciones iniciales:

$$f^j(z) = b_j,\ \textit{para } j = 0, \cdots, n-1. \tag{3.289}$$

Entonces $P(r, u, z) \in C^n$ y es solución de la siguiente ecuación integro diferencial:

$$\boxed{\left[\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i \frac{\partial^i}{\partial u^i}\right] P(r,u,z) = A + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Pi^k(u)} \text{ donde:} \tag{3.290}$$

$$A = a_0 - \frac{1}{\bar{F}(z)} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1}, \tag{3.291}$$

$$B_k = (-c)^k \left[\sum_{i=k+1}^{n} a_i f^{i-k-1}(z)\right],\ \Pi(u) = \int_0^u P(u-y)g(y)\,\mathrm{d}y,\ \Pi^k(u) = \frac{\partial^k \Pi(u)}{\partial u^k}. \tag{3.292}$$

Con condiciones de frontera en $x = b$:

$$P(r,b,z) = 1,\ P'(r,b,z) = \frac{1}{c\bar{F}(z)} - \frac{1}{\bar{F}(z)c} f(z)\Pi(b), \tag{3.293}$$

$$P''(r,b,z) = -\frac{1}{\bar{F}(z)c^2} f'(z) + \frac{1}{\bar{F}(z)c^2} f'(z)\Pi(b) - \frac{1}{\bar{F}(z)c} f(z)\Pi'(b), \tag{3.294}$$

$$P^k(r,b,z) = (-1)^{k+1} \frac{1}{\bar{F}(z)c^k} f^{k-1}(z) - \frac{1}{\bar{F}(z)} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{c}\right)^{k-i} f^{k-1-i}(z)\Pi^i(b),\ \text{para } k = 1, \cdots, n-1. \tag{3.295}$$

O más brevemente:

$$P^k(r,b,z) = (-1)^{k+1} \frac{1}{\bar{F}(z)c^k} f^{k-1}(z) - \frac{1}{c\bar{F}(z)} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{c}\right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(z)\Pi^i(b),\ \text{para } k = 0, \cdots, n-1, \tag{3.296}$$

si asumimos que $f^{-1}(z) = -\bar{F}(z)$ y $\sum_{i=0}^{-1} = 0$. $P(u)$ es la solución de la ecuación integro-diferencial 3.256 obtenida en la proposición 3.6.10, en la página 163.

A partir de la anterior proposición es sencillo encontrar una solución de 3.287.

Corolario 3.6.5. *Supongamos que F tiene una función de densidad f, de clase C^n en $(0, \infty)$ para la cual se cumple 3.288 y 3.289, entonces la solución de la ecuación integro diferencial 3.290 satisface la expresión:*

$$\boxed{P(r,u,z) = \frac{\Theta(b,u)}{\Delta(b)}} \text{ donde :} \tag{3.297}$$

$$\Theta(b,u) = \begin{vmatrix} (A\pi(u)+\Gamma(u)) & -\pi_1(u) & -\pi_2(u) & \dots & -\pi_n(u) \\ \sigma_0(b) & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0(n-1)} \\ \sigma_1(b) & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{n-1}(b) & a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{3.298}$$

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \; a_{ij} = \pi_{j+1+i}(b), \; \textit{para } i = 0, \cdots, n-1, \tag{3.299}$$

$$\pi(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{sL(s)}, \; \pi_k(u) = \frac{\partial^k \pi(u)}{\partial u^k}, \; \Gamma(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{su}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{B_i s^i \hat{P}(s)\hat{g}(s)}{L(s)}\right]\mathrm{d}s, \tag{3.300}$$

$$\sigma_j(b) = \frac{(-1)^{i+1}}{\bar{F}(z)}\left(\frac{1}{c}\right)^i f^{i-1}(z) - A\pi^i(b) - \Gamma^i(b) - \frac{1}{c\bar{F}(z)}\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{i-1-j} f^{i-1-j}(z)\Pi^j(b), \tag{3.301}$$

para $j = 0, \cdots, n-1$.

En los artículos *Escape probabilities of compound renewal processes with drift*, de próxima publicación, *The two barrier escape problem for compound renewal processes with two-sided jumps*, [153], *A semi-deterministic random walk with resetting*, [151], y *Escape Probabilities from an Interval for Compound Poisson Processes with Drift*, [152], realizamos un estudio exhaustivo de las probabilidades de escape de la zona $[0, b]$, obteniendo resultados relevantes para una amplia variedad de casos. El estudio de la probabilidad de escape de un determinado intervalo es de suma importancia, no únicamente desde un punto de vista teórico, en diferentes disciplinas científicas. Un ejemplo evidente son las ciencias actuariales y financieras en las cuales el estudio de las probabilidades de “ruina” y de “supervivencia” son uno de los temas destacados de estudio; en el anterior artículo obtenemos dichas probabilidades a partir de las expresiones obtenidas para la probabilidad de escape del intervalo $[0, b]$ haciendo $b \to +\infty$, lo cual nos proporciona la “probabilidad de supervivencia” $(N(u))$, la probabilidad de que el proceso no salga del intervalo por la barrera inferior; evidentemente, la “probabilidad de ruina” será $R(u) = 1 - N(u)$. Recordando el corolario 3.6.4, en la página 167, si en la fórmula 3.283 hacemos $b \to +\infty$ obtenemos para la probabilidad de supervivencia:

$$\boxed{N(u) = 1 - \frac{\lambda}{c\gamma} e^{\frac{(\lambda - c\gamma)}{c} u}} \tag{3.302}$$

Con lo cual, la probabilidad de ruina será:

$$\boxed{R(u) = 1 - N(u) = \frac{\lambda}{c\gamma} e^{\frac{-(c\gamma-\lambda)}{c}u}} \tag{3.303}$$

Resultados clásicos son, también, el estudio de la probabilidad de ruina en el caso en que $\tau_i \rightsquigarrow \varepsilon_r(2, \lambda)$ y $Y_i \rightsquigarrow \epsilon(\gamma)$. Siguiendo el mismo razonamiento obtenemos:

$$\boxed{N(u) = 1 - \left(1 + \frac{r_2}{\gamma}\right)e^{r_2 u},\ R(u) = \left(1 + \frac{r_2}{\gamma}\right)e^{r_2 u}}$$

siendo r_2 la única raíz negativa de la conocida en la literatura especializada como *ecuacion de Lundberg*. Son interesantes los artículos [8] de A. I. Bergel, R. M. R. Cardoso, A. D. R. Dos Reis and E. V. Rodríguez-Martínez donde estudian la probabilidad de primera llegada a la barrera superior y de ruina, [24] de D. C. M. Dickson y C. Hipp y [25] de D. C. M. Dickson y G. E. Willmot donde se obtienen, siguiendo otros razonamientos, las fórmulas anteriores para las probabilidades de supervivencia y ruina. Manuales de referencia imprescindibles donde se estudian la probabilidad de ruina, la de supervivencia y otros temas relacionados en un amplio contexto teórico son [2] de S. Asmussen, [107] de T. Mikosch entre otros.

3.6.4. Relación con los procesos de difusión.

En la proposicion 3.2.6, en la página 55, y en el corolario 3.2.2, en la página 54, se demostró que los procesos estocasticos de renovación compuestos con deriva, en general, no son procesos markovianos con probabilidades de transición estacionarias.

En la definición 3.6.1, en la página 136, habíamos definido el suceso "escape de la zona $[0, b]$ en un tiempo t, $\{X_t \notin [0, b]\}$" y deducido su probabilidad:

$$\mathbb{P}(X_t \notin [0, b]) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} G^{*n}(u + ct)p_n + \sum_{n=0}^{+\infty} G^{*n}(u + ct - b)p_n.$$

Para los procesos compuestos de Poisson y los pseudo-poisonnianos es conocida la expresión para las probabilidades de transición:[35]

$$\mathbb{P}(X_{t+\tau} \in A / X_\tau = x) = e^{-xt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} K^n(x, A),\ t > 0,$$

siendo K un núcleo estocástico que proporciona las probabilidades de transición del proceso de Markov, $A \in \mathscr{A}$ un suceso cualquiera, α el parámetro de las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (exponenciales de parámetro α, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\alpha)$ que definen el proceso de Poisson ordinario $N(t)$).

Si consideramos $A = \neg[0, b]$ la semejanza entre las dos fórmulas es evidente, pero hay una diferencia fundamental: el hecho de que no sea un proceso de Markov con probabilidades de transición estacionarias impide usar las ecuaciones prospectiva y retrospectiva de Kolmogorov para hallar las

[35] *Hay un estudio muy interesante en Feller, Introducción a la teoría de la probabilidad, Vol II, pag. 366 y siguientes.*

probabilidades de transición. Otra es que, mientras en los procesos de salto las trayectorias entre dos saltos permanecen constantes, en los procesos de renovación compuestos con deriva se produce un incremento lineal, que viene dado por la deriva; no obstante es fácil considerar un proceso estocástico de saltos puro dado por $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ / $Y_t = X_t - ct \; \forall \; t \geq 0$.

Pese a las diferencias que acabamos de señalar entre los procesos de difusión (en particular el movimiento browniano) y el proceso de renovación compuesto con deriva, es notable la "semejanza" de resultados obtenidos. Por ejemplo, habíamos obtenido en la proposición 3.5.2, en la página 134, para la probabilidad de llegada a la barrera superior (sin antes haber llegado a la inferior o haber salido de la zona $[0, b]$) partiendo de $X_0 = u$, suponiendo distribución exponencial tanto para los tiempos de espera como para los saltos la siguiente fórmula:

$$P^u_{b,0} = \frac{c}{\sqrt{(\lambda + c\gamma)^2 - 4qc\lambda\gamma}} \left[e^{r_1(b-u)}(\gamma + r_1) - e^{r_2(b-u)}(\gamma + r_2)\right], \; u \in [0, b].$$

Fórmula que podemos expresar como:

$$P^u_{b,0} = \frac{1}{r_1 - r_2} \left[e^{r_1(b-u)}(\gamma + r_1) - e^{r_2(b-u)}(\gamma + r_2)\right], \; u \in [0, b].$$

Vamos a definir una función escala ("scale function", en terminología habitual en el movimiento browniano), que mida la "escala" de un determinado punto x al punto de partida u:

$$s(x, u) = e^{r_1(x-u)}(\gamma + r_1) - e^{r_2(x-u)}(\gamma + r_2).$$

Teniendo en cuenta que hemos definido $P^u_{b,0}$ como la probabilidad de llegar a b sin antes haber llegado a 0 partiendo de $X_0 = u$, se puede interpretar como la "probabilidad de llegar a b antes que a 0 partiendo de $X_0 = u$" y por lo tanto, la probabilidad de llegar a 0 antes que a b, $P^u_{0,0}$, condicionada por $X_0 = u$ será su complementaria. Tenemos:

$$P^u_{0,0} = 1 - P^u_{b,0} = 1 - \frac{1}{r_1 - r_2} \left[e^{r_1(b-u)}(\gamma + r_1) - e^{r_2(b-u)}(\gamma + r_2)\right] =$$

$$= \frac{r_1 - r_2 - \left[e^{r_1(b-u)}(\gamma + r_1) - e^{r_2(b-u)}(\gamma + r_2)\right]}{r_1 - r_2} = \frac{\left[e^{r_1(b-u)}(\gamma + r_1) - e^{r_2(b-u)}(\gamma + r_2)\right] - (r_1 - r_2)}{r_2 - r_1}.$$

Y teniendo en cuenta que

$$s(u, u) = e^{r_1(u-u)}(\gamma + r_1) - e^{r_2(u-u)}(\gamma + r_2) = r_1 - r_2,$$

podemos concluir que

$$P^u_{0,0} = \frac{s(b, u) - s(u, u)}{r_2 - r_1},$$

que nos lleva a la conclusión de que la probabilidad de llegar a 0 antes que a b empezando en u es proporcional a la distancia entre b y u (si interpretamos $s(b, u) - s(u, u)$ como la distancia entre b y u) , la conocida propiedad del movimiento browniano.

Capítulo 4

Procesos de renovación compuestos con correlación salto-tiempo y con deriva. Estudio markovianidad.

En este capítulo vamos a estudiar los procesos de renovación compuestos con deriva asumiendo la existencia de correlación entre los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y los saltos $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. En la sección 3.1 definimos los procesos de renovación compuestos con deriva (definición 3.1.1 en la página 50) asumiendo independencia entre los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y los saltos $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$; sin embargo, en un estudio general, se puede considerar la existencia de correlación entre ambos. Esa es la hipótesis que asumiremos a lo largo de todo el capítulo, vamos a suponer dependencia (posible) entre τ_i y $Y_i,\ i\in\mathbb{N}$; es decir, el tamaño del salto Y_i depende del anterior tiempo de espera τ_i. Salvo que se indique lo contrario, denotamos por $h(x,y)$ la función de densidad de la variable aleatoria $(\tau_i, Y_i)\ \forall\ i\in\mathbb{N}$, $H(x,y)$ su función de distribución, $f(x)$ la función de densidad de la variable aleatoria $\tau_i\ \forall i\in\mathbb{N}$, $F(x)$ su función de distribución, $g_{\tau_i}(y)$ la función de densidad de la variable aleatoria $Y_i\ \forall\ i\in\mathbb{N}$ condicionada por el valor que tome la variable aleatoria τ_i, $G_{\tau_i}(y)$ su función de distribución condicionada, $g_{\tau(t)}(y)$ la función de densidad de la variable aleatoria $Y_i\ \forall\ i\in\mathbb{N}$ condicionada por el valor que tome la variable aleatoria $\tau_i - z,\ z>0$ y $G_{\tau(t)}(y)$ su función de distribución condicionada.

Aunque la literatura suponiendo correlación entre tiempos de espera y saltos no es tan abundante como en el caso no correlacionado, merecen ser citados estudios como [1] de H. Albrecher y O. J. Boxmab, en el cual se estudia un modelo de riesgo asumiendo dependencia entre el tiempo de espera para la siguiente "reclamación" y el tamaño de la anterior "reclamación"; con nuestra notación, asumen dependencia de τ_{k+1} con Y_k. También es interesante el artículo [115], de M. Montero y J. Masoliver donde se estudia CTRW con dependencia entre tiempos de espera y saltos, y también modelos con dependencia entre tiempos de espera consecutivos. Otros articulos interesantes son [56] de G. Giacomin, [103] de J. Masoliver, M. Montero, J. Perelló y G. H. Weiss, [109] de E. W. Montroll y G. H. Weiss, [111] y [112] de J. Villarroel y M. Montero, [137] de V. P. Shkilev, [145] de F. L. Toninelli, [147] de J. Velázquez and A. Robledo, [156] de K. C. Yuen, J. Guob and X. Wu,...

El capítulo está estructurado de la siguiente forma:

- En la primera sección deduciremos la ley de probabilidad del proceso, tanto condicionada como no condicionada.
- En la segunda sección estudiaremos los tiempos de escape y de primera llegada a la barrera superior, deduciendo las ecuaciones integrales.
- En la tercera sección estudiaremos la probabilidad de primera llegada a la barrera superior. Deduciremos sus ecuaciones integrales, aunque no las resolveremos.
- En la cuarta sección estudiaremos la probabilidad de escape de la zona $[0,b]$, deduciendo sus ecuaciones integrales.

4.1. Ley de probabilidad no condicionada. Ley de probabilidad condicionada. Estudio markovianidad.

En esta sección vamos a estudiar la ley de probabilidad del proceso. Las demostraciones, dada la semejanza con las aportadas en el caso no correlacionado, se suprimen por razones de brevedad.

4.1.1. Ley de probabilidad no condicionada.

Vamos a deducir la ley de probabilidad no condicionada. En la sección 2.2, en la página 42, definimos los procesos de renovación compuestos, asumiendo la independencia entre los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y los saltos $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ (definición 2.2.1). Siguiendo el mismo esquema de razonamiento y recordando la proposición 2.2.1, en la página 42, obtenemos:

Proposición 4.1.1. *La función de densidad de la variable aleatoria $S_t,\ t > 0$ se puede descomponer en la suma:*

$$\boxed{f_{S_t}(x) = \delta_0(x)\cdot(1-F(t)) + \frac{1}{4\pi^2 i}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\,\mathrm{d}p\cdot\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\cdot(1-\hat{f}(s))\cdot\frac{\hat{f}(s)\cdot\psi(p/k)}{s(1-\hat{f}(s)\cdot\psi(p/k))}\,\mathrm{d}s} \tag{4.1}$$

siendo $\delta_0(x)$ la función Delta de Dirac y $\psi(p/k)$ la función característica de la variable aleatoria Y_1 condicionada por $N(t) = k,\ k = 0, \cdots$.

Una vez que hemos hallado la función de densidad de la variable aleatoria $S_t,\ t > 0$ es trivial deducir la de $X_t,\ t > 0$ (por simplicidad en los razonamientos, sin pérdida de generalidad, consideramos $X_t = ct + S_t,\ \forall t \geq 0$). Tenemos la siguiente proposicion:

Proposición 4.1.2. *La variable aleatoria $X_t,\ t > 0$ tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{X_t}(x) = f_{S_t}(x-ct)} \tag{4.2}$$

A continuación vamos a deducir la ley de probabilidad condicionada.

4.1.2. Ley de probabilidad condicionada.

Cuando el tiempo inicial $r \in [t_n, t_{n+1}),\ n \in \mathbb{N}$ no es un tiempo de renovación se deduce la siguiente proposición:

Proposición 4.1.3. *La variable aleatoria $S_{r+h},\ h > 0$ condicionada por $S_r = x$ tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{S_{r+h}\diagup S_r=x}(y) = \delta_0(y-x)\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ > h)+} \tag{4.3}$$

$$\boxed{+\frac{1}{4\pi^2 i}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(y-x)}\psi(p/k)\int_0^h\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{s(h-l)}[1-\hat{f}(s)]}{s[1-\hat{f}(s)\psi(p/k)]}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\phi(l\diagup r)\,\mathrm{d}p}$$

siendo $\delta(y-x)$ la función δ de Dirac, $\psi(p/k)$ la función característica de la variable aleatoria Y_1 condicionada por $N(r+h)-N(r)=k,\ k=1,\cdots,\ \phi(l\diagup r)$ la función de distribución de $\mathscr{E}_r^+$ y eligiendo $\gamma\in\mathbb{R}$ de forma adecuada.

Si el tiempo de partida es un tiempo de renovación t_n es trivial deducir el siguiente corolario:

Corolario 4.1.1. *La variable aleatoria $S_{t_n+h},\ h>0$ condicionada por $S_{t_n}=x$ tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{S_{t_n+h}\diagup S_{t_n}=x}(y)=\delta_0(y-x)[1-F(h)]+\frac{1}{4\pi^2 i}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ip(y-x)}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{sh}\frac{[1-\hat{f}(s)]\hat{f}(s)\psi(p/k)}{s[1-\hat{f}(s)\psi(p/k)]}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p} \tag{4.4}$$

siendo $\delta(y-x)$ la función δ de Dirac, $\psi(p/k)$ la función característica de la variable aleatoria Y_1 condicionada por $N(h)=k,\ k=0,\cdots$ y eligiendo $\gamma\in\mathbb{R}$ de forma adecuada.

A continuación vamos a estudiar la ley de probabilidad del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ condicionada por $X_0=u$, donde vamos a considerar el proceso $X_t=u+ct+\sum_{k=0}^{N(t)}Y_k\ \forall\ t\geq 0$ cuando partimos de $X_0=u$ (teniendo en cuenta los razonamientos de la sección 2.2, página 42).

Proposición 4.1.4. *La variable aleatoria $X_t,\ t>0$, condicionada por $X_0=u,\ u\in\mathbb{R}$, tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{X_t}(x)=f_{S_t}(x-u-ct)} \tag{4.5}$$

Para la función de densidad de la variable aleatoria $X_t,\ t>0$ condicionada por $X_r=y,\ y\in\mathbb{R},\ r\in(0,t_1)$ es inmediata la deducción del siguiente resultado:

Proposición 4.1.5. *La variable aleatoria $X_t,\ t>r$, condicionada por $X_r=y,\ y\in\mathbb{R},\ r\in(0,t_1)$ tiene la siguiente función de densidad:*

$$\boxed{f_{X_t\diagup X_r=y}(x)=f_{S_t\diagup S_r=y-cr}(x-ct)} \tag{4.6}$$

La demostración es semejante a la de la proposición 3.1.3, en la página 51.

4.1.3. Estudio markovianidad.

De forma inmediata se comprueba (siguiendo los mismo razonamientos) que todos los resultados de la sección 3.2, en la página 53, son válidos en el caso de que asumamos correlación entre los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y los saltos $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

4.2. Tiempos de escape. Tiempos de primera llegada a la barrera superior. Correlación entre tiempo de espera y salto.

En esta sección vamos a estudiar los denominados tiempos de escape aceptando como hipótesis la existencia de correlación entre los tiempos de espera τ_i y los saltos $Y_i,\ i \in \mathbb{N}$.

Se deduce el siguiente lema (razonando de modo semejante al lema 3.3.1, en la página 57):

Lema 4.2.1. *La distribución del vector* $(\mathscr{E}_r^+, Y_{N(r)+1})$ *condicionada por* $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$ *satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) = \frac{1}{\bar{F}(z)} f(z+l) g_{\tau(l)}(y)\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}y, \ \textit{donde}\ \tau(l) \equiv \tau_1 - z = l - z} \tag{4.7}$$

Siendo $g_{\tau(l)}(y)$ *la función de densidad de* Y_1 *condicionada por el valor que tome* $\tau_1 - z$.

Demostración. En efecto, tenemos:(denotamos $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$)

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y \diagup N(r) = k, X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z) \mathbb{P}(N(r) = k \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y \diagup N(r) = k, X_r = u, t_{N(r)} = r - z, \tau_{N(r)+1} > z) \mathbb{P}(N(r) = k \diagup \vec{\sigma}) =^{1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(\tau_{k+1} - z \in \mathrm{d}l, Y_{k+1} \in \mathrm{d}y, N(r) = k, X_r = u, t_k = r - z, \tau_{k+1} > z)}{\mathbb{P}(N(r) = k, X_r = u, t_k = r - z, \tau_{k+1} > z)} \mathbb{P}(N(r) = k \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(\tau_{k+1} \in [l+z, l+z+\Delta l), Y_{k+1} \in \mathrm{d}y) \mathbb{P}(N(r) = k, X_r = u, t_k = r - z)}{\mathbb{P}(N(r) = k, X_r = u, t_k = r - z) P(\tau_{k+1} > z)} \mathbb{P}(N(r) = k \diagup \vec{\sigma}) =^{2}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\tau_1 \in [l+z, l+z+\Delta l), Y_1 \in \mathrm{d}y)}{\mathbb{P}(\tau_1 > z)} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N(r) = k \diagup \vec{\sigma}) = \frac{\mathbb{P}(\tau_1 \in [l+z, l+z+\Delta l), Y_1 \in \mathrm{d}y)}{\mathbb{P}(\tau_1 > z)} =^{3}$$

$$= \frac{1}{\bar{F}(z)} f(z+l) g_{\tau_1 - z = l}(y)\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\bar{F}(z)} f(z+l) g_{\tau(l)}(y)\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}y.^{4}$$

□

A continuación vamos a estudiar los *tiempos de primera llegada* a un nivel dado b, y salvo que se indique lo contrario partimos de $X_r = u,\ u \in [0, b]$, pudiendo ser el tiempo inicial un tiempo de renovación o no. Las demostraciones siguen el mismo esquema de razonamiento que en el caso no correlacionado (sección 3.3, en la página 56) y por lo tanto se dan de forma abreviada o se suprimen en los casos triviales.

[1] *Teniendo en cuenta resultados ya conocidos respecto a la variable* $\mathscr{E}_r^-$*, lema 2.1.3, en la página 24.*

[2] *Teniendo en cuenta que* τ_{k+1} *es independiente de* $(N(r) = k, X_r = u, t_k = r - z)$*, y lo mismo ocurre con* (τ_{k+1}, Y_{k+1})*.*

[3] *Teniendo en cuenta que* $P(N(r) = k \diagup \vec{\sigma})$ *es una probabilidad, y por lo tanto el sumatorio da la unidad.*

[4] *Denotamos* $\tau(l) \equiv \tau_1 - z = l - z$ *por comodidad. Evidentemente, cuando* $z = 0$, $g_{\tau(l)}(y) = g_{\tau_1}(y)$.

4.2.1. Tiempos de primera llegada a la barrera superior. Ecuaciones integrales.

Vamos a calcular el tiempo medio de primera llegada a un nivel dado $b > 0$, para lo cual haremos uso de las definiciones y resultados obtenidos en la subsección 3.3.1, en la página 57. Teniendo en cuenta la definición de la función media para los tiempos de primera llegada (definición 3.3.7, en la página 63) obtenemos:

Teorema 4.2.1. *El tiempo medio de primera llegada al nivel $b > 0$, partiendo de $X_0 = u,\ u \in [0, b]$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{M(u) = \frac{b-u}{c}\overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_u^b\int_{t-b}^t[\frac{t-u}{c} + M(t-y)]h(\frac{t-u}{c}, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.8}$$

Demostración. En efecto, teniendo en cuenta el teorema 3.3.1, en la página 59 obtenemos:

$$\mathbb{E}(t_u^b \diagup X_0 = u) = \frac{b-u}{c}\mathbb{E}[I_{\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\}} \diagup X_0 = u] + \mathbb{E}[(\tau_1 + t_u'^b)I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u + c\tau_1 - b \le Y_1 \le u + c\tau_1\}} \diagup X_0 = u] =$$

$$= \frac{b-u}{c}\int \mathbb{E}[I_{\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\}} \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u]P(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) +$$

$$+ \int \mathbb{E}[(\tau_1 + t_u'^b)I_{\{\tau_1 \le \frac{b-u}{c}, u + c\tau_1 - b \le Y_1 \le u + c\tau_1\}} \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u]P(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) =$$

$$= \frac{b-u}{c}\int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} f(l)\,\mathrm{d}l + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl}(l + \mathbb{E}(t_u'^b \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)h(l, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta que $t_u'^b \stackrel{d}{=} t_{u+X_{\tau_1}}^b$ y dando un cambio adecuado de variable obtenemos 4.8. □

En el caso en que el tiempo de partida no sea un tiempo de renovación obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.2. *El tiempo medio de primera llegada al nivel $b > 0$, partiendo de $0 < r < \tau_1, X_r = u,\ u \in [0, b],\ \mathscr{E}_r^- = z$, satisface la siguiente ecuación integral (donotamos $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$):*

$$\boxed{M(r, u, z) = \frac{b-u}{c}\cdot\frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_u^b\int_{t-b}^t[\frac{t-u}{c} + M(t-y)]f(z + \frac{t-u}{c})g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.9}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la identidad obtenida en el teorema 3.3.2, en la página 63, calculando la media condicionando por los valores que toma $(\mathscr{E}_r^+, Y_1)$, obtenemos:

$$\mathbb{E}(t^b_{r,u}\diagup\vec{\sigma}) = \mathbb{E}(\frac{b-u}{c} I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}}\diagup\vec{\sigma}) + \mathbb{E}[(\mathscr{E}^+_r + t'^b_{r,u}) I_{\{\mathscr{E}^+_r \leq \frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}^+_r - b \leq Y_1 \leq u + c\mathscr{E}^+_r\}}\diagup\vec{\sigma}] =$$

$$= \frac{b-u}{c} \int \mathbb{E}[I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}}\diagup\mathscr{E}^+_r = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}]\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y\diagup\vec{\sigma}) +$$

$$+ \int \mathbb{E}[(\mathscr{E}^+_r + t'^b_{r,u}) I_{\{\mathscr{E}^+_r \leq \frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}^+_r - b \leq Y_1 \leq u + c\mathscr{E}^+_r\}}\diagup\mathscr{E}^+_r = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}]\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}l\diagup\vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{b-u}{c} \int I_{\{l > \frac{b-u}{c}\}}\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y\diagup\vec{\sigma}) +$$

$$+ \int I_{\{l \leq \frac{b-u}{c}, u+cl-b \leq y \leq u+cl\}}[l + \mathbb{E}(t'^b_{r,u}\diagup\mathscr{E}^+_r = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})]\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y\diagup\vec{\sigma}) = {}^5$$

$$= \frac{b-u}{c} \cdot \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} [l + \mathbb{E}(t^b_{u+cl-y}\diagup X_0 = u + cl - y)] \frac{f(z+l)}{\bar{F}(z)} g_{\tau(l)}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta la equidistribución e independencia de $t^b_{u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1}$ y $t'^b_{r,u}$, y dando un cambio adecuado de variable, obtenemos 4.9.

□

4.2.2. Tiempos de escape de la zona $[0, b]$. Ecuaciones integrales.

A continuación vamos a estudiar los *tiempos de escape.* Lo mismo que en el estudio de los tiempos de primera llegada, salvo que se indique lo contrario el proceso parte de $X_r = u,\ u \in [0, b]$, pudiendo ser el tiempo inicial un tiempo de renovación o no. Teniendo en cuenta las definiciones y resultados obtenidos en la subsección 3.3.2, en la página 67, obtenemos:

Teorema 4.2.3. *El tiempo medio de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de $t_0 = 0, X_0 = u,\ u \in [0, b]$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{M(u) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} (1 - F(t))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{c}\int_u^b \int_{t-b}^t M(t-y) h(\frac{t-u}{c}, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.10}$$

Demostración. Que $u + X_{\tau_1} \in [0, b]$ implica:

$$0 \leq u + c\tau_1 - Y_1 \leq b \Rightarrow -u - c\tau_1 \leq -Y_1 \leq b - u - c\tau_1 \Rightarrow u + c\tau_1 - b \leq Y_1 \leq u + c\tau_1.$$

Con lo cual, teniendo en cuenta el teorema 3.3.5 en la página 68 obtenemos:

[5] *Teniendo en cuenta que $I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}}$, $I_{\{\mathscr{E}^+_r \leq \frac{b-u}{c}, u+c\mathscr{E}_r - b \leq Y_1 \leq u+c\mathscr{E}^+_r\}}$ son $\sigma(\mathscr{E}^+_r, Y_1, \vec{\sigma})-$ medibles.*

$$\mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \diagup X_0 = u) = \frac{b-u}{c}\mathbb{E}(I_{\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\}} \diagup X_0 = u) +$$

$$+\mathbb{E}(\tau_1 I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\}} \diagup X_0 = u) + \mathbb{E}[\mathbf{t}_{\mathbf{u}}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\tau_1-b \leq Y_1 \leq u+c\tau_1\}} \diagup X_0 = u] =$$

$$= \frac{b-u}{c}\int I_{\{l > \frac{b-u}{c}\}} P(\tau_1 \in \mathrm{d}l) + \int l I_{\{l \leq \frac{b-u}{c}\}} P(\tau_1 \in \mathrm{d}l) +$$

$$+ \int I_{\{l \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+cl-b \leq y \leq u+cl\}} \mathbb{E}[\mathbf{t}_{\mathbf{u}}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = 0] P(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y).$$

Razonando como en el teorema 3.3.7, en la página 72, obtenemos 4.10.

□

En el caso de que el tiempo inicial, r, no sea un tiempo de renovación deducimos:

Teorema 4.2.4. *El tiempo medio de escape de la zona* $[0, b]$ *partiendo de* $X_r = u \in [0, b]$, $\mathscr{E}_r^- = z,\ 0 < r < \tau_1$ *satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{M(r,u,z) = \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} (1 - F(z+t))\ \mathrm{d}t + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_u^b \int_{t-b}^t M(t-y) f(z + \frac{t-u}{c}) g_{\tau(t)}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}\ [6] \tag{4.11}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la identidad obtenida en el teorema 3.3.6, en la página 70 obtenemos:

$$\mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \diagup \vec{\sigma}) = \frac{b-u}{c}\mathbb{E}(I_{\{\mathscr{E}_r^+ > \frac{b-u}{c}\}} \diagup \vec{\sigma}) + \mathbb{E}(\mathscr{E}_r^+ I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} \diagup \vec{\sigma}) + \mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\mathscr{E}_r^+ - b \leq Y_1 \leq +c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{b-u}{c}\int \mathbb{E}[I_{\{\mathscr{E}_r^+ > \frac{b-u}{c}\}} \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}] \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int \mathbb{E}[\mathscr{E}_r^+ I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}] \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int \mathbb{E}[\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} I_{\{u+c\mathscr{E}_r^+ - b \leq Y_1 \leq u+c\mathscr{E}_r^+\}} \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}] \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}).$$

Razonando como en el teorema 3.3.8, en la página 73, obtenemos 4.11.

□

[6] *Siendo* $g_{\tau(t)}(y)$, *la función de densidad de los saltos condicionada por el valor que toma la variable aleatoria* $\tau_1 - z,\ \tau(t) \equiv \tau_1 - z = t - z$.

4.2.3. Ley de probabilidad de los tiempos de primera llegada a la barrera superior. Ecuaciones integrales.

A continuación vamos a estudiar la ley de probabilidad de los tiempos de primera llegada y de escape. Razonando igual que en la subsección 3.3.3, en la página 74, deducimos:

Teorema 4.2.5. *La ley de probabilidad del tiempo de primera llegada al nivel $b > 0$ partiendo del origen, con $X_0 = u,\ u \in [0, b]$, satisface la siguiente ecuación integral:*

- *Si* $x > \dfrac{b-u}{c}$ *obtenemos:*

$$\boxed{P(u;x) = \overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_u^b \int_{t-b}^t P(t-y; x - \frac{t-u}{c})h(\frac{t-u}{c}, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.12}$$

- *Si* $x \leq \dfrac{b-u}{c}$ *obtenemos:*

$$\boxed{P(u;x) = \frac{1}{c}\int_u^{u+cx} \int_{t-b}^t P(t-y; x - \frac{t-u}{c})h(\frac{t-u}{c}, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.13}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.3.1, en la página 59:

- Si $x > \dfrac{b-u}{c}$:

$$P(t_u^b \leq x \diagup X_0 = u) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(t_u^b \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l = {}^7$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\frac{b-u}{c} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} P(\tau_1 + t_u^{'b} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l =$$

$$= \overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} P(t_{u+cl-y}^b \leq x - l \diagup X_0 = u + cl - y)h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

[7] *Pues, como vimos anteriormente, se cumplirá que*

$$P(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = P(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y).$$

Dando un cambio adecuado de variable obtenemos 4.12.

- Si $x \leq \dfrac{b-u}{c}$:

$$P(t_u^b \leq x \diagup X_0 = u) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(t_u^b \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\frac{b-u}{c} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} P(\tau_1 + t_u'^b \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l =$$

$$= \int_0^{x}\int_{u+cl-b}^{u+cl} P(t_{u+cl-y}^b \leq x - l \diagup X_0 = u + cl - y) h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

Dando un cambio de variable se obtiene de forma inmediata 4.13.

□

En el caso en que el tiempo de partida es un tiempo r, no de renovación, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 4.2.6. *La ley de probabilidad del tiempo de primera llegada al nivel $b > 0$, partiendo de $X_r = u,\ u \in [0,b],\ 0 < r < \tau_1,\ \mathscr{E}_r^- = z$ satisface la siguiente ecuación integral:*

- *Si $x > \frac{b-u}{c}$ se verifica:*

$$\boxed{P(r,u,z;x) = \frac{\overline{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z + \frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t P(t-y; x - \frac{t-u}{c}) g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.14}$$

- *Si $x \leq \frac{b-u}{c}$ se verifica:*

$$\boxed{P(r,u,z;x) = \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_u^{u+cx} f(z + \frac{t-u}{c})\int_{t-b}^t P(t-y; x - \frac{t-u}{c}) g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.15}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el teorema 3.3.2, en la página 63, y razonando como en 3.3.10, en la página 76, obtenemos

- Si $x > \frac{b-u}{c}$ condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}_r^+, Y_1)$ tenemos (como de costumbre denotamos $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$)

$$\mathbb{P}(t^b_{r,u} \leq x / \vec{\sigma}) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(t^b_{r,u} \leq x / \mathscr{E}^+_r = l, Y_{N(r)+1} = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \leq x / \mathscr{E}^+_r = l, Y_{N(r)+1} = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r + t'^b_{r,u} \leq x / \mathscr{E}^+_r = l, Y_{N(r)+1} = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{\overline{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t'^b_{r,u} \leq x - l / \mathscr{E}^+_r = l, Y_{N(r)+1} = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}).$$

Mediante un cambio adecuado de variable se concluye trivialmente 4.14.

- Si $x \leq \frac{b-u}{c}$ condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}^+_r, Y_1)$ obtenemos

$$\mathbb{P}(t^b_{r,u} \leq x / \vec{\sigma}) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(t^b_{r,u} \leq x / \mathscr{E}^+_r = l, Y_{N(r)+11} = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \leq x / \mathscr{E}^+_r = l, Y_{N(r)+1} = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r + t'^b_{r,u} \leq x / \mathscr{E}^+_r = l, Y_{N(r)+1} = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_0^{x} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(t'^b_{r,u} \leq x - l / \mathscr{E}^+_r = l, Y_{N(r)+1} = y, \vec{\sigma}) \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l, Y_{N(r)+1} \in \mathrm{d}y / \vec{\sigma}).$$

Dando un cambio de variable adecuado obtenemos 4.15.

$\square$

4.2.4. Ley de probabilidad de los tiempos de escape de la zona $[0, b]$. Ecuaciones integrales.

A continuación vamos a deducir la ley de probabilidad de los tiempos de escape de la zona $[0, b]$. Teniendo en cuenta la definición 3.3.14 y razonando como en la subsección 3.3.4 obtenemos:

Teorema 4.2.7. *La ley de probabilidad de los tiempos de escape de la zona* $[0, b]$ *partiendo del origen con* $X_0 = u,\ u \in [0, b]$ *satisface la siguiente ecuación integral:*

- *Si* $x > \frac{b-u}{c}$ *se verifica:*

$$\boxed{P(u; x) = 1 - \frac{1}{c} \int_u^b \int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y; x - \frac{t-u}{c})\right] h(\frac{t-u}{c}, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t} \tag{4.16}$$

- *Si* $x \leq \frac{b-u}{c}$ *se verifica:*

$$\boxed{P(u; x) = F(x) - \frac{1}{c} \int_u^{u+cx} \int_{t-b}^t \left[1 - P(t-y; x - \frac{t-u}{c})\right] h(\frac{t-u}{c}, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t} \tag{4.17}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.26, en la página 68, obtenemos:

- Si $x > \frac{b-u}{c}$ condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) y haciendo uso del teorema de la probabilidad total tendremos:

$$P(\mathbf{t_u^{[0,b]}} \leq x \diagup X_0 = u) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{t_u^{[0,b]}} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}l =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\frac{b-u}{c} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}l + {}^{8}$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{y \notin [u+cl-b, u+cl]} P(\tau_1 \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}l +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} P(\tau_1 + \mathbf{t_u'^{[0,b]}} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}l =$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} \left[1 - P(\mathbf{t_{u+cl-y}^{[0,b]}} \leq x - l \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\right] h(l, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}l.$$

[8] *Pues se cumple*

$$P(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = P(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y).$$

De forma inmediata, dando un cambio adecuado de variable, obtenemos 4.16.

- Si $x \leq \frac{b-u}{c}$ condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) y haciendo uso del teorema de la probabilidad total tendremos:

$$P(\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \leq x \diagup X_0 = u) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\frac{b-u}{c} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{y \notin [u+cl-b, u+cl]} P(\tau_1 \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} P(\tau_1 + \mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{\prime[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \leq x \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u) h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l =$$

$$= F(x) - \int_0^{x}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \left[1 - P(\mathbf{t}_{\mathbf{u+cl-y}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \leq x - l \diagup \tau_1 = l, Y_1 = y, X_0 = u)\right] h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

De forma inmediata se obtiene 4.17.

□

En el caso en que el tiempo de partida sea un tiempo no de renovación $r \in (0, t_1)$ tenemos el siguiente resultado (como de costumbre denotamos $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$):

Teorema 4.2.8. *La ley de probabilidad del tiempo de escape de la zona $[0,b]$ partiendo de $X_r = u,\ u \in [0,b], 0 < r < \tau_1,\ \mathscr{E}_r^- = z$ satisface la siguiente ecuación integral:*

- *Si $x > \frac{b-u}{c}$ se cumple:*

$$\boxed{P(r,u,z;x) = 1 - \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_u^b\int_{t-b}^{t}\left[1 - P(t-y; x - \frac{t-u}{c})\right] f(z + \frac{t-u}{c}) g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}\;^{9} \tag{4.18}$$

- *Si $x \leq \frac{b-u}{c}$ se cumple:*

$$\boxed{P(r,u,z;x) = 1 - \frac{\bar{F}(z+x)}{\bar{F}(z)} - \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_u^{u+cx}\int_{t-b}^{t}\left[1 - P(t-y; x - \frac{t-u}{c})\right] f(z + \frac{t-u}{c}) g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.19}$$

[9] *Siendo, como es habitual, $g_{\tau(l)}(y)$ la función de densidad de los saltos condicionada por el valor que tome la variable aleatoria $\tau_1 - z$.*

Demostración. En efecto, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el teorema 3.3.6, en la página 70, y razonando como en el teorema 3.3.12, en la página 80, obtenemos:

- Si $x > \frac{b-u}{c}$, condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}_r^+, Y_1)$ (por comodidad usamos $Y_1 \overset{d}{=} Y_{N(r)+1}$):

$$\mathbb{P}(\mathbf{t}_{\mathbf{r,u}}^{[\mathbf{0,b}]} \le x \diagup \vec{\sigma}) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{t}_{\mathbf{r,u}}^{[\mathbf{0,b}]} \le x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \le x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{y \notin [u+cl-b, u+cl]} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \le x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(l + \mathbf{t}_{\mathbf{r,u}}^{\prime[\mathbf{0,b}]} \le x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$1 - \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \left[1 - \mathbb{P}(\mathbf{t}_{\mathbf{u+cl-y}}^{[\mathbf{0,b}]} \le x - l \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\right] f(z+l) g_{\tau(l)}(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta la correlación existente entre $\mathscr{E}_r^+$e Y_1 y que $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \le x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) = I_{\{l \le x\}}$.

Trivialmente concluimos que efectívamente se verifica 4.18.

- Si $x \le \frac{b-u}{c}$, condicionando por los valores que toma la variable aleatoria bidimensional $(\mathscr{E}_r^+, Y_1)$:

$$\mathbb{P}(\mathbf{t}_{\mathbf{r,u}}^{[\mathbf{0,b}]} \le x \diagup \vec{\sigma}) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{t}_{\mathbf{r,u}}^{[\mathbf{0,b}]} \le x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{b-u}{c} \le x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{y \notin [u+cl-b, u+cl]} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \le x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \mathbb{P}(l + \mathbf{t}_{\mathbf{r,u}}^{\prime[\mathbf{0,b}]} \le x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= 1 - \frac{\bar{F}(z+x)}{\bar{F}(z)} - \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{x}\int_{u+cl-b}^{u+cl} \left[1 - P(\mathbf{t}_{\mathbf{u+cl-y}}^{[\mathbf{0,b}]} \le x - l \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma})\right] g_{\tau(l)}(y) f(z+l)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta la correlación existente entre $\mathscr{E}_r^+$ e Y_1 y que $\mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \le x \diagup \mathscr{E}_r^+ = l, Y_1 = y, \vec{\sigma}) = I_{\{l \le x\}}$. De forma inmediata, dando un cambio de variable adecuado, obtenemos 4.19.

□

4.3. Probabilidades de primera llegada a la barrera superior. Caso correlacionado.

Una vez que hemos estudiado los tiempos medios de primera llegada a la barrera superior y de escape, en el caso de existencia de correlación entre τ_i, y Y_i, $i \in \mathbb{N}$, vamos a estudiar la probabilidad de escape y de primera llegada a la barrera superior suponiendo correlación y partiendo de $X_0 = u$ o $X_r = u$, $u \in [0, b] \wedge r \in (0, t_1)$.

4.3.1. Probabilidad de llegar a la barrera superior antes de un cierto tiempo x.

A continuación vamos a estudiar la probabilidad de que el proceso llegue a la barrera superior b sin previamente haber llegado a la barrera inferior, antes de un cierto tiempo $x > 0$. Las demostraciones siguen un esquema de razonamiento idéntico al de la subseccion 3.5.1, en la página 115.

Vamos a deducir una ecuación integral para la probabilidad de llegar a b antes de $x \in \mathbb{R}^+$ partiendo de $X_0 = u$.

Teorema 4.3.1. *La probabilidad de llegar a b, antes de $x \in \mathbb{R}^+$, $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, que denotamos por $P^u_{b,0x}$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^u_{b,0x} = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_u^b \int_{t-b}^t P^{t-y}_{b,0x-\frac{t-u}{c}} h(\frac{t-u}{c}, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.20}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.5.1, en la página 117 y razonando como en el teorema 3.5.2, obtenemos:

$$P^u_{b,0x} = \int P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^u_{b,lx} h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l =^{10}= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} f(l)\,\mathrm{d}l + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cxl-b}^{u+cl} P^{u+cl-y}_{E,0x-l} h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta que se cumple $P^u_{b,\tau_1 x} \overset{d}{=} P^{u+c\tau_1-Y_1}_{b,0x-\tau_1}$, deducimos mediante cálculos triviales 4.20.

□

En el caso en que $x \leq \frac{b-u}{c}$, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 4.3.2. *La probabilidad de llegar a b, antes de $x \in \mathbb{R}^+$, $x \leq \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, que denotamos por $P^u_{b,0x}$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^u_{b,0x} = \frac{1}{c}\int_u^{u+cx} \int_{t-b}^t P^{t-y}_{b,0x-\frac{t-u}{c}} h(\frac{t-c}{c}, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.21}$$

[10] *Teniendo en cuenta que la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) es independiente de $X_0 = u$.*

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.5.3, en la página 118, y razonando como en el teorema 3.5.4 obtenemos:

$$P^u_{b,0x} = \int P^u_{b,0x,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) =^{11} \int_0^x \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^u_{b,lx} h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l =$$

Teniendo en cuenta que se cumple $P^u_{b,\tau_1 x} \overset{d}{=} P^{u+c\tau_1-Y_1}_{b,0x-\tau_1}$, obtenemos:

$$= \int_0^x \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^{u+cl-y}_{b,0x-l} h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

Dando un cambio de variable adecuado obtenemos efectívamente 4.21.

□

Vamos a estudiar la probabilidad de llegar a b partiendo de un tiempo $r \in (0, t_1)$ antes de un tiempo $x \in \mathbb{R}^+$:

Teorema 4.3.3. *La probabilidad de llegar a b antes de $x \in (0, +\infty)$, $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_r = u$, $\mathscr{E}^-_r = z$, que denotamos por $P^u_{b,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{b,rx} = \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} P^{t-y}_{b,0x-\frac{t-u}{c}} g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.22}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.5.5, en la página 119, el teorema de la probabilidad total y el lema 4.2.1, en la página 176 (y razonando como en el teorema 3.5.6, en la página 120) obtenemos:

$$P^u_{b,rx} = \int P^u_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) = \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(z+l')}{\bar{F}(z)} g_{\tau(l')}(y)\,\mathrm{d}l'\,\mathrm{d}y +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P^u_{b,rlx} \frac{f(z+l')}{\bar{F}(z)} g_{\tau(l')}(y)\,\mathrm{d}l'\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(z+l')}{\bar{F}(z)} g_{\tau(l')}(y)\,\mathrm{d}l'\,\mathrm{d}y + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P^{u+cl'-y}_{b,0x-l'} \frac{f(z+l')}{\bar{F}(z)} g_{\tau(l')}(y)\,\mathrm{d}l'\,\mathrm{d}y.$$

Puesto que en el lema 3.5.2, en la página 116, demostramos que $P^u_{b,r\tau_1 x} \overset{d}{=} P^{u+c\mathscr{E}^+_r-Y_1}_{b,0x-\mathscr{E}^+_r}$, obtenemos trivialmente 4.22.

□

En el caso en que $x \leq \frac{b-u}{c}$:

[11] *Teniendo en cuenta que la variable aleatoria bidimensional (τ_1, Y_1) no se ve influenciada por el valor que toma $X_0 = u$.*

Teorema 4.3.4. *La probabilidad de llegar a b antes de $x \in (0, +\infty)$, $x \leq \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_r = u$, $\mathscr{E}_r^- = z$, que denotamos por $P^u_{b,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{b,rx} = \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^{u+cx} f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} P^{t-y}_{b,0x-\frac{t-u}{c}} g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}y} \tag{4.23}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.5.7, en la página 121, el teorema de la probabilidad total y el lema 4.2.1 (y razonando como en los teoremas 4.3.3 y 3.5.8, en la página 122) obtenemos 4.23.

□

4.3.2. Probabilidad de llegar a la barrera superior en general.

A continuación vamos a estudiar las probabilidades de llegar a la barrera superior, sin fijar un horizonte finito de tiempo. Razonando como en la sección 3.5.2, en la página 123, se deducen de forma trivial los siguientes resultados:

Teorema 4.3.5. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_0 = u, P^u_{b,0}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{b,0} = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c} \int_u^b \int_{t-b}^{t} P^{t-y}_{b,0} h(\frac{t-u}{c}, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{4.24}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.5.9, en la página 124, el teorema de la probabilidad total y la correlación existente entre τ_i y Y_i, razonando como en el teorema 3.5.10, en la página 125, obtenemos:

$$P^u_{b,0} = \int P^u_{b,0,\tau_1=l,Y_1=y} \mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u) = {}^{12} \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} h(l,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}l + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^u_{b,\tau_1} h(l,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}l =$$

$$= \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^u_{b,\tau_1} h(l,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta que se cumple $P^{u.s}_{b,\tau_1} \stackrel{d}{=} P^{u+c\tau_1-Y_1}_{b,0}$ se verifica:

$$P^u_{b,0} = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl-b}^{u+cl} P^{u+cl-y}_{b,0} h(l,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}l.$$

Dando un cambio de variable adecuado obtenemos 4.24.

□

Si partimos de $X_r = u$, $r \in (0, \tau_1)$ se deduce de forma trivial el siguiente teorema:

[12]Teniendo en cuenta la independencia entre (τ_1, Y_1) y $X_0 = u$.

Teorema 4.3.6. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u$, $r \in (0, \tau_1)$, $\mathscr{E}_r^- = z$, que denotamos por $P_{b,r}^u$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P_{b,r}^u = \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} P_{b,0}^{t-y} g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{4.25}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.5.11, en la página 126, el teorema de la probabilidad total y el lema 4.2.1, en la página 176, (razonando como en el teorema 3.5.12, en la página 127), obtenemos:

$$P_{b,r}^u = \int P_{b,r,\tau_1=l,Y_1=y}^u \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P_{b,r\tau_1}^u \mathbb{P}(E_r^+ \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P_{b,r\tau_1}^u \frac{f(z+l')}{\bar{F}(z)} g_{\tau(l')}(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}l'.$$

Hemos denotado $l' = l - r$. Teniendo en cuenta que $P_{b,r\tau_1}^u \stackrel{d}{=} P_{b,0}^{u+c\mathscr{E}_r^+ - Y_1}$ se obtiene de modo inmediato 4.25.

□

4.4. Probabilidades de escape de la zona $[0, b]$, caso correlacionado.

Vamos a estudiar la probabilidad de que el proceso escape de la zona $[0.b]$, $b \in \mathbb{R}^+$ suponiendo correlación entre el tiempo de espera τ_i y el salto Y_i $i \in \mathbb{N}$ partiendo de $X_0 = u$ o $X_r = u$, $u \in [0, b]$ $\wedge$ $r \in (0, t_1)$. Los razonamientos son semejantes a los empleados en las demostraciones de la sección 3.6.

4.4.1. Probabilidades de escape de la zona $[0, b]$ en general.

En el estudio de la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ en general vamos a diferenciar los casos en los cuales nos interesa conocer la probabilidad antes de un cierto tiempo x, $x > 0$ y aquellos en los cuales nos interesa la probabilidad sin fijar un tiempo, sin límite temporal.

Probabilidades de escape de la zona $[0, b]$ en general antes de un cierto tiempo x.

A continuación vamos a deducir una expresión para la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x > 0$ partiendo de $X_0 = u$.

Teorema 4.4.1. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$, antes de $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, que denotamos por $P_{E,0x}^u$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^u_{E,0x} = 1 - \frac{1}{c}\int_u^b \int_{t-b}^t (1 - P^{t-y}_{E,0x-\frac{t-u}{c}})h(\frac{t-u}{c}, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.26}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.6.1, en la página 140, el teorema de la probabilidad total, y razonando como en el teorema 3.6.2, en la página 141, obtenemos:

$$P^u_{E,0x} = \int P^u_{E,0,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u)^{13} = \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{-\infty}^{u+cl-b} h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l +$$

$$+\int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl}^{+\infty} h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} P^u_{E,lx}h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty}\mathrm{d}F(l) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} G_{\tau_1}(u+cl-b)\,\mathrm{d}F(l) + \int_0^{\frac{b-u}{c}}(1-G_{\tau_1}(u+cl))\,\mathrm{d}F(l) + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+cl-b}^{u+cl} P^{u+cl-y}_{E,0x-l}h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta que se cumple $P^u_{E,\tau_1 x} \overset{d}{=} P^{u+c\tau_1-Y_1}_{E,0x-\tau_1}$. Dando un cambio trivial de variable obtenemos 4.26.

□

En el caso en que $x \leq \frac{b-u}{c}$:

Teorema 4.4.2. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$, antes de $x \in \mathbb{R}$, $x \leq \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, que denotamos por $P^u_{E,0x}$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^u_{E,0x} = F(x) - \frac{1}{c}\int_u^{u+cx}\int_{t-b}^t (1 - P^{t-y}_{E,0x-\frac{t-u}{c}})h(\frac{t-u}{c}, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.27}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.6.3, en la página 142, el teorema de la probabilidad total, las propiedades de las funciones indicatrices y de la unión e intersección de conjuntos, la correlación entre las variables aleatorias tiempos de espera τ_i y los saltos Y_i, y razonando como en los teoremas 4.4.1 y 4.27, en la página 190, obtenemos:

$$P^u_{E,0x} = \int P^u_{E,0,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}l, Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup X_0 = u)^{14} = \int_0^x\int_{-\infty}^{u+cl-b} h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l + \int_0^x\int_{u+cl}^{+\infty} h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l +$$

$$+\int_0^x\int_{u+cl-b}^{u+cl} P^u_{E,lx}h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l =$$

$$= \int_0^x G_{\tau_1}(u+cl-b)\,\mathrm{d}F(l) + \int_0^x (1 - G_{\tau_1}(u+cl))\,\mathrm{d}F(l) + \int_0^x\int_{u+cl-b}^{u+cl} P^{u+cl-y}_{E,0x}h(l,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}l.$$

[13] Pues la variable aleatoria (τ_1, Y_1) no se ve influenciada por el valor $X_0 = u$.

[14] *Teniendo en cuenta la independencia entre la variable aleatoria (τ_1, Y_1) y el valor tomado por $X_0 = u$.*

Teniendo en cuenta que se cumple $P^u_{E,\tau_1 x} \stackrel{d}{=} P^{u+c\tau_1-Y_1}_{E,0x-\tau_1}$. Mediante un cambio adecuado de variable y tras cálculos triviales obtenemos 4.27.

□

Vamos a estudiar la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ partiendo de un tiempo $r \in (0, t_1)$.

Teorema 4.4.3. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x \in (0, +\infty)$, $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$, que denotamos por $P^u_{E,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{E,rx} = 1 - \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t (1 - P^{t-y}_{E,0x-\frac{t-u}{c}}) g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{4.28}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.6.5, en la página 144, el teorema de la probabilidad total y el lema 4.2.1, en la página 176, y razonando como en el teorema 3.6.6, en la página 145, obtenemos:

$$P^u_{E,rx} = \int P^u_{E,r,\tau_1=l,Y_1=y} \mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) =$$

$$= \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\bar{F}(z)} f(z + l') g_{\tau(l')}(y)\, \mathrm{d}l'\, \mathrm{d}y + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl'}^{+\infty} \frac{1}{\bar{F}(z)} f(z + l') g_{\tau(l')}(y)\, \mathrm{d}l'\, \mathrm{d}y +$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{-\infty}^{u+cl'-b} \frac{1}{\bar{F}(z)} f(z + l') g_{\tau(l')}(y)\, \mathrm{d}l'\, \mathrm{d}y + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P^u_{E,rlx} \frac{1}{\bar{F}(z)} f(z + l') g_{\tau(l')}(y)\, \mathrm{d}l'\, \mathrm{d}y =$$

$$= 1 - \frac{1}{\bar{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z + l') \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} (1 - P^u_{E,rlx}) g_{\tau(l')}(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}l'.$$

Puesto que en el lema 3.6.4, en la página 149, demostramos que $P^u_{E,r\tau_1 x} \stackrel{d}{=} P^{u+c\mathscr{E}^+_r-Y_1}_{E,0x-\mathscr{E}^+_r}$, dando un cambio de variable apropiado obtenemos de forma inmediata 4.28.

□

Si $x \leq \frac{b-u}{c}$:

Teorema 4.4.4. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ antes de $x \in (0, +\infty)$, $x \leq \frac{b-u}{c}$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$, que denotamos por $P^u_{E,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{E,rx} = 1 - \frac{\bar{F}(z+x)}{\bar{F}(z)} - \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^{u+cx} f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t (1 - P^{t-y}_{E,0x-\frac{t-u}{c}}) g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t} \tag{4.29}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.6.7, en la página 146, el teorema de la probabilidad total y el lema 4.2.1, en la página 176, razonando como en los teoemas 4.28 y 3.6.8, en la página 147, obtenemos:

$$P^u_{E,rx} = \int P^u_{E,rx,\tau_1=l,Y_1=y}\mathbb{P}(\mathscr{E}^+_r \in \mathrm{d}l', Y_1 \in \mathrm{d}y \diagup \vec{\sigma}) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}F(z+l')}{\bar{F}(z)} \int_{u+cl'}^{+\infty} \mathrm{d}G_{\tau(l')}(y) +$$

$$+ \int_0^x \frac{\mathrm{d}F(z+l')}{\bar{F}(z)} \int_{-\infty}^{u+cl'-b} \mathrm{d}G_{\tau(l')}(y) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}F(z+l')}{\bar{F}(z)} \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} P^u_{E,rlx}\, \mathrm{d}G_{\tau(l')}(y) =$$

$$= 1 - \frac{\bar{F}(z+x)}{\bar{F}(z)} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}F(z+l')}{\bar{F}(z)} \int_{u+cl'-b}^{u+cl'} (1 - P^u_{E,rlx})\, \mathrm{d}G_{\tau(l')}(y).$$

Puesto que en el lema 3.6.4, en la página 149, demostramos que $P^u_{E,r\tau_1 x} \stackrel{d}{=} P^{u+c\mathscr{E}^+_r - Y_1}_{E,0x-\mathscr{E}^+_r}$, obtenemos de forma trivial 4.29.

□

Probabilidad de escape de la zona $[0,b]$ en general, sin límite temporal.

En su momento vimos que la probabilidad de salir de la zona $[0,b]$ sin límite temporal es uno.

4.4.2. Probabilidad de que el primer escape de la zona $[0,b]$ sea por la barrera superior.

A continuación vamos a estudiar la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0,b]$ sea por la barrera superior, suponiendo correlación entre los tiempos de espera y los saltos (entre τ_i y Y_i $\forall\, i \in \mathbb{N}$), razonando como en la subseccion 3.6.2, en la página 148.

Probabilidad de que el primer escape de la zona $[0,b]$ sea a través de la barrera superior antes de un cierto tiempo x.

Primeramente estudiaremos la probabilidad de que el primer escape sea a través de la barrera superior antes de un cierto $x \in \mathbb{R}^+$. Las demostraciones son inmediatas siguiendo el mismo esquema de razonamiento que en 4.4.1, en la página 189.

Teorema 4.4.5. *La probabilidad de escape de la zona $[0,b]$ a través de la barrera superior, antes de $x > 0$, $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, que denotamos por $P^{u.s}_{E,0x}$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0x} = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_u^b G_{\tau_1(\frac{t-u}{c})}(t-b) f(\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}t + \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{t} P^{(t-y).s}_{E,0x-\frac{t-u}{c}} g_{\tau_1(\frac{t-u}{c})}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.30}$$

Teorema 4.4.6. *La probabilidad de escape de la zona $[0,b]$ a través de la barrera superior, antes de $x > 0$, $x \leq \frac{b-u}{c}$ partiendo de $X_0 = u$, que denotamos por $P^{u.s}_{E,0x}$, satisface la siguiente ecuacion integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0x} = \frac{1}{c}\int_u^{u+cx} G_{\tau_1(\frac{t-u}{c})}(t-b) f(\frac{t-u}{c})\,\mathrm{d}t + \frac{1}{c}\int_u^{u+cx} f(\frac{t-u}{c})) \int_{t-b}^{t} P^{(t-y).s}_{E,0x-\frac{t-u}{c}} g_{\tau_1(\frac{t-u}{c})}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \tag{4.31}$$

Vamos a estudiar la probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior partiendo de un tiempo $r \in (0, t_1)$.

Teorema 4.4.7. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x \in (0, +\infty)$, $x > \frac{b-u}{c}$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$, que denotamos por $P^u_{E,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^u_{E,rx} = \frac{\bar{F}(z + \frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b G_{\tau(\frac{t-u}{c})}(t-b) f(z + \frac{t-u}{c}) \,\mathrm{d}t +} \tag{4.32}$$

$$\boxed{+\frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t P^{(l-y).s}_{E,0x-\frac{t-u}{c}} g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t}$$

Teorema 4.4.8. *La probabilidad de escape de la zona $[0, b]$ a través de la barrera superior antes de $x \in (0, +\infty)$, $x \leq \frac{b-u}{c}$ partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$, que denotamos por $P^{u.s}_{E,rx}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,rx} = \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^{u+cx} G_{\tau(\frac{t-u}{c})}(t-b) f(z + \frac{t-u}{c}) \,\mathrm{d}t + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^{u+cx} f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t P^{(t-y).s}_{E,0x-\frac{t-u}{c}} g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t} \tag{4.33}$$

Probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea a través de la barrera superior en general, sin límite temporal.

A continuación vamos a estudiar la probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior en general, sin límite temporal. Las demostraciones son inmediatas siguiendo el esquema de las dadas en la subsección 4.3.2, en la página 188.

Teorema 4.4.9. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior, partiendo de $X_0 = u, P^{u.s}_{E,0}$ satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0} = 1 - \frac{1}{c} \int_u^b \int_{t-b}^{+\infty} h(\frac{t-u}{c}, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t + \frac{1}{c} \int_u^b \int_{t-b}^t P^{(t-y).s}_{E,0} h(\frac{t-u}{c}, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t} \tag{4.34}$$

Cuando el proceso ha alcanzado el valor u en un tiempo $r \in (0, \tau_1)$ se deduce :

Teorema 4.4.10. *La probabilidad de que el primer escape de la zona $[0, b]$ sea por la barrera superior partiendo de $\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}_r^- = z)$ $r \in (0, \tau_1)$, que denotamos por $P^{u.s}_{E,r}$, satisface la siguiente ecuación integral:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,r} = 1 - \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^{+\infty} g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t + \frac{1}{c\bar{F}(z)} \int_u^b f(z + \frac{t-u}{c}) \int_{t-b}^t P^{t-y}_{E,0} g_{\tau(\frac{t-u}{c})}(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t} \tag{4.35}$$

Capítulo 5

Conclusiones.

- Hemos estudiado la ley de probabilidad del proceso deduciendo las ecuaciones integrales que verifican y las hemos resuelto para algunos casos interesantes, cuando no hay correlación entre tiempos de espera y saltos.

- En el estudio de la markovianidad del proceso hemos comprobado que aunque en general no cumple la propiedad markoviana, cuando condicionamos por $\mathscr{F} = \sigma(X_r,\ r \leq t_n)$, sí la cumple. El mismo resultado hemos obtenido en cuanto a la estacionariedad del tiempo y del espacio.

- Hemos definido unas variables aleatorias, que hemos denominado "tiempos de primera llegada" y "tiempos de escape" deduciendo las ecuaciones integrales que satisface su media; las hemos resuelto en algunos casos interesantes cuando no existe correlación entre tiempos de espera y saltos. Tambíen hemos estudiado la ley de probabilidad de ambas variables aleatorias deduciendo sus ecuaciones integrales.

- Se ha estudiado la probabilidad de que el proceso llegue a la barrera superior y la probabilidad de que el proceso salga de la zona $[0, b]$, deduciendo sus ecuaciones integrales y resolviéndolas en algunos casos destacados (asumiendo que no existe correlacion tiempo de espera/salto). Tambien, de forma somera, hemos visto la relación con los procesos de difusión.

Debido a lo ambicioso del tema de estudio, quedan diversas líneas de investigación pendientes, algunas de las cuales son:

- Profundizar el estudio para el caso en que exista correlación entre los tiempos de espera y los saltos.

- Aplicar los resultados obtenidos al estudio de diversos problemas en ámbitos como las ciencias económicas y actuariales (un artículo en este sentido, estudiando las probabilidades de escape, con la clara implicación al estudio de la "probabilidad de ruina" y la "probabilidad de supervivencia" está en preparación), la física, la meteorología,... a los cuales el modelo esbozado en este trabajo puede aportar un enfoque novedoso.

Apéndice A

Preliminares.

En este capítulo vamos a contextualizar la investigación enumerando objetos y propiedades matemáticas necesarios para la elaboración de la tesis. No se pretende un estudio profundo y detallado, y por lo tanto prescindimos de las demostraciones y matices que en muchos casos sería necesario tener en cuenta. Manuales básicos sobre la materia son J. L. Doob [33], W. Feller [44], M. de Guzmán y B. Rubio [60], A. Lentin y J. Rivaud [83], V. Quesada y A. García [127]...

La estructura del capítulo es la siguiente:

- En la primera sección definiremos y enunciaremos resultados fundamentales del Álgebra, la Topología y el Análisis matemático.
- En la segunda sección resumiremos los contenidos de la Teoría de la Medida más relevantes para nuestro estudio.
- En la tercera sección definiremos los espacios de probabilidad y enunciaremos los resultados básicos de la Teoría de la Probabilidad.

A.1. Álgebra, Topología y Análisis matemático.

En esta sección enunciaremos resultados básicos del álgebra, de la topología y del cálculo infinitesimal que son necesarios en el desarrollo de la investigación. La noción de conjunto, como noción primitiva, no intentaremos definirla y del mismo modo las operaciones, los cuantificadores y la notación propia de la teoría de conjuntos serán empleados sin definición previa. Usaremos el negador $\neg$ para referirnos al complementario de un subconjunto $B \subset A$; es decir: $\neg B = A - B$. Para una lectura más profunda y detallada, son interesantes M. García y J. Margalef [52], M. Garrido [53], A. Lentin y J. Rivaud [83], G. Skandalis [138],....

A.1.1. Álgebra.

Consideramos como noción primitiva el concepto de “conjunto”; salvo que se especifique lo contrario lo denotamos por letras latinas mayúsculas. Consideramos como noción primitiva el concepto de “elemento de un conjunto”; salvo que se especifique lo contrario lo denotamos por letras latinas minúsculas.

Definición A.1.1. Subconjunto. *Dados dos conjuntos $\{A, B\}$ decimos que “B es un subconjunto de A” si todo elemento del conjunto B lo es del conjunto A.*

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall a \in B \ : \ a \in A.$$

Definición A.1.2. Conjunto de las partes de un conjunto. *Dado un conjunto A definimos el "conjunto de las partes de A", y lo denotamos por $\mathscr{P}(A)$, al conjunto formado por todos los subconjuntos de A.*

Definición A.1.3. Par ordenado. *Dado un conjunto A y dos elementos $\{a, b\} \in A$ definimos "par ordenado (a, b)" al conjunto $\{a, \{a, b\}\}$. Decimos que "a es el primer elemento del par" y que "b es el segundo elemento del par".*

Definición A.1.4. Terna ordenada. *Dado un conjunto A y tres elementos $\{a, b, c\} \in A$ definimos "terna ordenada (a, b, c)" al conjunto $\{a, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$. Decimos que "$a$ es el primer elemento", que "b es el segundo elemento" y que "c es el tercer elemento".*

Definición A.1.5. Producto cartesiano. *Dados dos conjuntos $\{A, B\}$ definimos "producto cartesiano de A por B", y lo denotamos por $A \times B$, al conjunto formado por los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A \ \wedge \ b \in B$.*

$$A \times B = \{(a, b) \ / \ a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Definición A.1.6. Correspondencia entre conjuntos. *Dado el objeto f y los conjuntos $A \wedge B$, decimos que "f es una correspondencia entre los conjuntos A y B", y lo denotamos por $f : A \to B$, si es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Al conjunto A le denominamos "conjunto inicial de la correspondencia" y al conjunto B le denominamos "conjunto final de la correspondencia". Si $a \in A$ denominamos "imagen de a", y la denotamos por $f(a)$, al subconjunto de B formado por los puntos $b_i \in B \ / \ (a, b_i) \in \ f$. Decimos que "$f$ hace corresponder al punto $a \in A$ el punto $b \in B$" si $(a, b) \in \ f$. Se denomina "origen de la correspondencia" o "dominio de definición de la correspondencia" al subconjunto de A cuya imagen por f es distinta del conjunto vacío.*

Definición A.1.7. Correspondencia inversa entre conjuntos. *Dada una correspondencia $f : A \to B$ entre dos conjuntos A, B, denominamos "correspondencia inversa", y la denotamos por f^{-1} al subconjunto del producto cartesiano $B \times A \ / \ (b, a) \in \ f^{-1}$ sii $(a, b) \in f$. Si $b \in B$ se denomina "imagen inversa de b", y se denota por $f^{-1}(b) = \{a \in A \ / \ (a, b) \in f\}$.*

Definición A.1.8. Composición de correspondencias. *Dados los conjuntos $\{A, \ B, \ C\}$ y las correspondencias $f : A \to B, \ g : B \to C$ definimos la "composición de f con g", y la denotamos por $g \circ f$, al subconjunto del producto cartesiano $A \times C, \ g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \ / \ \exists b \in B \ : \ (a, b) \in f \wedge \ (b, c) \in g\}$.*

Definición A.1.9. Aplicación entre conjuntos. *Dado el objeto f y los conjuntos $A \wedge B$, decimos que "f es una aplicación entre los conjuntos A y B", y lo denotamos por $f : A \to B$, cuando a todo elemento de A le hace corresponder un único elemento de B. Decimos que f es una "aplicación inyectiva" cuando $\forall \{\omega_1, \omega_2\} \in A, \ \omega_1 \neq \omega_2 \ : \ f(\omega_1) \neq f(\omega_2)$; decimos que f es una "aplicación suprayectiva" cuando $\forall \omega' \ \in B \ \exists! \ \omega \in A \ / \ f(\omega) = \omega'$; decimos que f es una "aplicación biyectiva" cuando es inyectiva y suprayectiva.*

Definición A.1.10. Relación. *Dado un conjunto A definimos una "relación R en A" como una correspondencia del conjunto A en sí mismo. Si dos elementos $\{a, b\} \in A$ están relacionados, $(a, b) \in R$, lo denotamos aRb.*

Definición A.1.11. Relación reflexiva. *Dado un conjunto A una relación R en A decimos que "es reflexiva" cuando $\forall \ a \in A \ : \ (a, a) \in R$.*

Definición A.1.12. Relación antirreflexiva. *Dado un conjunto A una relación R en A decimos que "es antirreflexiva" cuando* $\forall\, a \in A\ :\ (a, a) \notin R$.

Definición A.1.13. Relación simétrica. *Dado un conjunto A una relación R en A decimos que "es simétrica" cuando* $\forall\, \{a, b\} \in A\ :\ (a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$.

Definición A.1.14. Relación antisimétrica. *Dado un conjunto A una relación R en A decimos que "es antisimétrica" cuando* $\forall\, \{a, b\} \in A\ :\ (a, b) \in R\ \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$.

Definición A.1.15. Relación transitiva. *Dado un conjunto A una relación R en A decimos que "es transitiva" cuando* $\forall\, \{a\ , b\ , c\} \in A\ :\ (a, b) \in R\ \wedge\ (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Definición A.1.16. Relación total. *Dado un conjunto A una relación R en A decimos que "es total" cuando* $\forall\, \{a, b\} \in A\ :\ (a, b) \in R\ \vee\ (b, a) \in R$.

Definición A.1.17. Relación de orden. *Dado un conjunto A y una relación R en A, decimos que es "una relación de orden" cuando es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Lo denotamos por* $\leq$ *entendiendo que* $\forall\, \{a, b\} \in A\ a \leq b$ *siginifica "a es menor que b o a es igual que b".*

Definición A.1.18. Relación de orden estricto. *Dado un conjunto A y una relación R en A, decimos que "es una relación de orden estricto" si es antirreflexiva, antisimétrica y transitiva. Lo denotamos por* $<$ *entendiendo que* $\forall\, \{a, b\} \in A\ a < b$ *significa "a es menor que b".*

Definición A.1.19. Relación de orden total. *Dado un conjunto A y una relación de orden R en A decimos que "es una relación de orden total" si R es una relación total. Al par ordenado* (A, R) *lo denominamos "conjunto ordenado con la relación R".*

Definición A.1.20. Aplicación monótona creciente. *Sean dos conjuntos ordenados* $(A, \leq),\ (B, \leq')$ *y* $f : A \to B$ *una aplicación de A en B. Decimos que "f es una aplicación monótona creciente" sii* $\forall\, \{a_1, a_2\} \in A\ /\ a_1 \leq a_2\ :\ f(a_1) \leq' f(a_2)$.

Definición A.1.21. Aplicación estrictamente monótona creciente. *Sean dos conjuntos ordenados* $(A, \leq),\ (B, \leq')$ *y* $f : A \to B$ *una aplicación de A en B. Decimos que "f es una aplicación estrictamente monótona creciente" sii* $\forall\, \{a_1, a_2\} \in A\ /\ a_1 < a_2\ :\ f(a_1) <' f(a_2)$.

Definición A.1.22. Aplicación monótona no decreciente. *Sean dos conjuntos ordenados* $(A, \leq),\ (B, \leq')$ *y* $f : A \to B$ *una aplicación de A en B. Decimos que "f es una aplicación monótona no decreciente" sii* $\forall\, \{a_1, a_2\} \in A\ /\ a_1 < a_2\ :\ f(a_1) \leq' f(a_2)$.

Las definiciones para las aplicaciones monótonas decrecientes, estrictamente monótonas decrecientes y monótonas no crecientes son inmediatas.

Definición A.1.23. Isomorfismo de orden. *Sean dos conjuntos ordenados* $(A, \leq),\ (B, \leq')$ *y* $f : A \to B$ *una aplicación de A en B. Decimos que "f es un isomorfismo de orden" sii* $\exists\ f^{-1} : B \to A\ \wedge\ \{f,\ f^{-1}\}$ *son aplicaciones monótonas crecientes.*

Definición A.1.24. Intervalo cerrado. *Dado un conjunto A dotado de una relación de orden* $\leq$ *y dos elementos* $\{a, b\} \in A\ /\ a \leq b\ \wedge\ a \neq b$*, definimos "intervalo cerrado de extremos a y b", y lo denotamos por* $[a, b]$*, como el conjunto* $[a, b] = \{x \in A\ :\ a \leq x \leq b\}$.

Definición A.1.25. Intervalo abierto. *Dado un conjunto A dotado de una relación de orden* $\leq$ *y dos elementos* $\{a, b\} \in A\ /\ a \leq b\ \wedge\ a \neq b$*, definimos "intervalo abierto de extremos a y b", y lo denotamos por* (a, b)*, como el conjunto* $(a, b) = \{x \in A\ :\ a \leq x \leq b\} \cap \neg\{a, b\}$.

Definición A.1.26. Intervalo semiabierto/semicerrado. *Dado un conjunto A dotado de una relación de orden $\leq$ y dos elementos $\{a, b\} \in A \;/\; a \leq b \;\wedge\; a \neq b$, definimos "intervalo semiabierto por la izquierda y semicerrado por la derecha de extremos a y b", y lo denotamos por $(a, b]$, como el conjunto $(a, b] = \{x \in A \;:\; a \leq x \leq b\} \cap \neg\{a\}$.*

Las restantes definiciones de intervalos semiabierto/semicerrado son triviales.

Definición A.1.27. Cota superior de un subconjunto. *Dado un conjunto A con una relación de orden $\leq$ y un subconjunto $B \in \mathscr{P}(A)$ decimos que un elemento $a \in A$ es una "cota superior de B" sii $\forall\, b \in B \;:\; b \leq a$.*

Definición A.1.28. Supremo de un subconjunto. *Dado un conjunto A con una relación de orden $\leq$ y un subconjunto $B \in \mathscr{P}(A)$ decimos que un elemento $a \in A$ es "el supremo de B", y lo denotamos por $\sup(B)$, sii es cota superior de B y es menor o igual que cualquier otra cota superior de B. Si $a = \sup(B) \;\wedge\; a \in B$ decimos que "a es el máximo de B" y lo denotamos por $\max(B)$.*

Definición A.1.29. Cota inferior de un subconjunto. *Dado un conjunto A con una relación de orden $\leq$ y un subconjunto $B \in \mathscr{P}(A)$ decimos que un elemento $a \in A$ es una "cota inferior del conjunto B" sii $\forall\, b \in B \;:\; a \leq b$.*

Definición A.1.30. Ínfimo de un subconjunto. *Dado un conjunto A con una relación de orden $\leq$ y un subconjunto $B \in \mathscr{P}(A)$ decimos que un elemento $a \in A$ es "el ínfimo de B", y lo denotamos por $\inf(B)$, sii es cota inferior de B y es mayor o igual que cualquier otra cota inferior de B. Si $a = \inf(B) \;\wedge\; a \in B$ decimos que "a es el mínimo de B" y lo denotamos por $\min(B)$.*

Definición A.1.31. Relación de equivalencia. *Dado un conjunto A y una relación R en A decimos que es "una relación de equivalencia" cuando es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Definición A.1.32. Clase de equivalencia. *Dado un conjunto A, un elemento $a \in A$ y una relación de equivalencia R en A denominamos "clase de equivalencia de a respecto de la relación R" al subconjunto $\{b \in A \;/\; (a, b) \in R\}$. Lo denotamos por $[a]$.*

Definición A.1.33. Ley de composición interna. *Dado un conjunto E definimos "ley de composición interna sobre E" como cualquier aplicación $E \times E \to E$.*

Definición A.1.34. Propiedades de una ley de composición interna. *Sea E un conjunto; sean $*, \circ$ dos leyes de composición internas definidas en el conjunto E.*

- **Asociativa**. *Decimos que "$*$ cumple la propiedad asociativa" sii. $\forall\{a, b, c\} \in E \;:\; (a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$.*
- **Conmutativa**. *Decimos que "$*$ cumple la propiedad conmutativa" sii. $\forall\{a, b\} \in E \;:\; a * b = b * a$.*
- **Distributiva a la izquierda**. *Decimos que "$\circ$ cumple la propiedad distributiva por la izquierda respecto de $*$" sii. $\forall\{a, b, c\} \in E \;:\; a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$.*
- **Distributiva a la derecha**. *Decimos que "$\circ$ cumple la propiedad distributiva por la derecha respecto de $*$" si $\forall\{a, b, c\} \in E \;:\; (a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$.*
- **Distributiva**. *Decimos que "$\circ$ cumple la propiedad distributiva respecto de $*$" si es distributiva por la izquierda y por la derecha.*
- **Existencia de elemento neutro**. *Un elemento $e \in E$ decimos que "es el elemento neutro respecto de la ley $*$" sii. $\forall a \in E \;:\; e * a = a * e = a$.*

- **Existencia de elemento inverso**. *Si existe el elemento neutro $e \in E$, dado $a \in E$ decimos que un elemento $a' \in E$ "es el inverso a la izquierda de a" sii. $a' * a = e$. Del mismo modo decimos que "es el inverso a la derecha de a" sii. $a * a' = e$. Decimos que "es el inverso de a" si lo es a la derecha y a la izquierda.*

- **Elemento regular**. *Un elemento $a \in E$ decimos que "es regular a la izquierda para $*$" sii. $\forall \{b, c\} \in E \ : \ a * b = a * c \Rightarrow b = c$. Del mismo modo decimos que "es regular a la derecha para $*$" sii. $\forall \{b, c\} \in E \ : \ b * a = c * a \Rightarrow b = c$. Decimos que "es regular" cuando lo es a la izquierda y a la derecha.*

Definición A.1.35. Ley de composición externa. *Dados dos conjuntos $\{A, B\}$ denominamos "ley de composición externa sobre B con dominio de operadores A" como cualquier aplicación de $A \times B \to B$.*

Definición A.1.36. Propiedades de una ley de composición externa. *Sean A, B dos conjuntos; sea $*$ una ley de composición interna definida en el conjunto A; sea $\circ$ una ley de composición interna definida en el conjunto B; sea $\otimes$ una ley de composición externa sobre B con dominio de operadores A.*

- **Asociativa respecto de la ley de composición interna en** A. *Decimos que "$\otimes$ cumple la propiedad asociativa respecto de la ley de composición interna $*$" sii. $\forall \{\alpha, \beta\} \in A \wedge b \in B \ :$ $(\alpha * \beta) \otimes b = \alpha \otimes (\beta \otimes b)$.*

- **Distributiva respecto de la ley de composición interna en** B. *Decimos que "$\otimes$ cumple la propiedad distributiva respecto de la ley de composición interna $\circ$ en B" sii. $\forall \ \alpha \in A \ \wedge$ $\forall \{a, b\} \in B \ : \ \alpha \otimes (a \circ b) = (\alpha \otimes a) \circ (\alpha \otimes b)$.*

- **Distributiva respecto de la ley de composición interna en** A. *Decimos que "$\otimes$ cumple la propiedad distributiva respecto de la ley de composición interna $*$ en el dominio de operadores A" sii. $\forall \{\alpha, \beta\} \in A \ \wedge \ \forall a \in A \ : \ (\alpha * \beta) \otimes b = (\alpha \otimes b) \circ (\beta \otimes b)$.*

Definición A.1.37. Estructura algebraica. *Dado un conjunto A decimos que "se le ha dotado de una estructura algebraica" cuando se han definido en él una cantidad finita de leyes de composición (internas y/o externas).*

Definición A.1.38. Homomorfismo. *Dados dos conjuntos A, B dotados de unas determinadas estructuras algebraicas y una aplicación $f : A \to B$, decimos que "f es un homomorfismo" cuando:*

- *Para cada ley de composición interna $*$ definida en el conjunto A existe una única ley de composición interna $\circ$ definida en el conjuto B tal que $\forall \{a, b\} \in A \ : \ f(a * b) = f(a) \circ f(b)$.*

- *Para cada ley de composición externa $\times$ definida en el conjunto A con dominio de operadores K existe una única ley de composición externa $\otimes$ definida en el conjunto B con el mismo dominio de operadores K tal que $\forall \ \alpha \in K \ \wedge \forall a \in A \ : \ f(\alpha \times a) = \alpha \otimes f(a)$.*

Cuando $f : A \to B$ es un homomorfismo y es biyectiva, decimos que "es un isomorfismo".

Definición A.1.39. Estructura de semigrupo. *Sea un conjunto S; sea $*$ una ley de composición interna definida en S que cumple la propiedad asociativa. Decimos que la estructura algebraica $(S, *)$ "es un semigrupo".*

Definición A.1.40. Estructura de grupo. *Sea un conjunto G; sea $*$ una ley de composición intena definida en G que cumple las propiedades:*

- *Asociativa (es un semigrupo),* $\forall\{a,\ b,\ c\} \in G\ :\ (a*b)*c = a*(b*c) = a*b*c$.
- *Existe elemento neutro e,* $\exists e \in G\ /\ \forall a \in G\ :\ a*e = e*a = A$.
- *Para todo* $a \in G$ *existe elemento inverso,* $\forall\ a \in G\ \exists a' \in G\ /\ a*a' = a'*a = e$.

Decimos que la estructura algebraica $(G,*)$ *es "un grupo". Si* $*$ *cumple la propiedad conmutativa,* $\forall\{a,b\} \in G\ :\ a*b = b*a$, *decimos que* $(G,*)$ *es "un grupo conmutativo" o "un grupo abeliano".*

Definición A.1.41. Estructura de semianillo. *Sea un conjunto A; sean* $\{*,\circ\}$ *dos leyes de composición internas definidas en el conjunto A que cumplen las propiedades:*

- $(A,*)$ *es un semigrupo conmutativo.*
- $(A,\circ)$ *es un semigrupo.*
- $\forall\ \{a,b,c\} \in A\ :\ a*(b\circ c) = (a*b)\circ(a*c)\ \wedge\ (b\circ c)*a = (b*a)\circ(c*a)$.

Decimos que la estructura algebraica $(A,*,\circ)$ *es "un semianillo". Si* $\circ$ *cumple la propiedad conmutativa decimos que* $(A,*,\circ)$ *es "un semianillo conmutativo". Si existe elemento neutro para la ley de composición interna* $\circ$ *decimos que "es un semianillo unitario".*

Definición A.1.42. Estructura de anillo. *Sea un conjunto A; sean* $\{*,\circ\}$ *dos leyes de composición interna definidas en el conjunto A que cumplen las propiedades:*

- $(A,*)$ *es un grupo abeliano.*
- $(A,\circ)$ *es un semigrupo.*
- $\forall\ \{a,b,c\} \in A\ :\ a\circ(b*c) = (a\circ b)*(a\circ c)\ \wedge\ (b*c)\circ a = (b\circ a)*(c\circ a)$.

Decimos que la estructura algebraica $(A,*,\circ)$ *es "un anillo". Si* $\circ$ *cumple la propiedad conmutativa decimos que* $(A,*,\circ)$ *es "un anillo conmutativo". Si existe elemento neutro para la ley de composición interna* $\circ$ *decimos que "es un anillo unitario".*

Definición A.1.43. Anillo ordenado. *Dado un anillo* $(A,*,\circ)$ *en el cual tenemos definida una relación de orden* $<$, *decimos que es un "anillo ordenado" si* $\exists\ A^+ \subset A$ *que cumple:*

- *Sea* 0 *el elemento neutro para la ley de composición interna* $*$. $0 \notin A^+$.
- *Sea* $-a$ *el opuesto del elemento* $a \in A$ *para la ley de composición interna* $*$. $\forall\ a \in A\ :\ a \in A^+\ \vee\ a = 0\ \vee -a \in A^+$.
- $\forall\ \{a,b\} \in A^+\ :\ a*b \in A^+\ \wedge\ a\circ b \in A^+$.

Definición A.1.44. Estructura de cuerpo. *Sea un conjunto C; sean* $\{*,\circ\}$ *dos leyes de composición internas definidas en el conjunto C que cumplen las propiedades:*

- $(C,*,\circ)$ *es un anillo unitario.*
- *Sea* $e \in C$ *el elemento neutro para* $*$*; sea* e' *el elemento neutro para* $\circ$. *Se verifica que* $e \neq e'$.
- $\forall\ a \in C\ \exists\ a^{-1} \in C\ /\ a\circ a^{-1} = a^{-1}\circ a = e'$.

Decimos que la estructura algebraica $(G,*,\circ)$ *"es un cuerpo"; "cuerpo conmutativo" si* $\circ$ *cumple la propiedad conmutativa.*

Definición A.1.45. El cuerpo de los números reales. *El conjunto* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*, siendo* $+$ *la ley de composición interna "suma de números reales" y* $\cdot$ *la ley de composición interna "producto de números reales", entendidas en el sentido habitual (A. Lentin et J. Rivaud [83]), tiene estructura de cuerpo conmutativo.*

Definición A.1.46. El cuerpo de los números complejos. *El conjunto* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$*, siendo* $+$ *la ley de composición interna "suma de números complejos" y* $\cdot$ *la ley de composición interna "producto de números complejos", entendidas en el sentido habitual (A. Lentin et J. Rivaud [83]), tiene estructura de cuerpo conmutativo.*

Definición A.1.47. Espacio vectorial. *Sea un conjunto* V*; sea un cuerpo conmutativo* $(C, *, \circ)$*; sea* $\oplus$ *una ley de composición interna definida en* V*; sea* $\otimes$ *una ley de composición externa definida en* V *con dominio de operadores el conjunto* C*. Decimos que la estructura algebraica* $(V, \oplus, \otimes)$ *"es un espacio vectorial con dominio de operadores el cuerpo* C*" o "espacio vectorial sobre el cuerpo* C*" sii.*

- $(V, \oplus)$ *es un grupo abeliano. Al elemento neutro lo denotamos por* $\vec{0}$*.*
- $\forall \{\alpha,\ \beta\} \in C \ \wedge\ \forall\, a \in V \ :\ (\alpha \circ \beta) \otimes a = \alpha \otimes (\beta \otimes a)$.
- $\forall \{\alpha,\ \beta\} \in C \ \wedge\ \forall\, a \in V \ :\ (\alpha * \beta) \otimes a = (\alpha \otimes a) \oplus (\beta \otimes a)$.
- $\forall\, \alpha \in C \ \wedge\ \forall \{a, b\} \in V \ :\ \alpha \otimes (a \oplus b) = (\alpha \otimes a) \oplus (\alpha \otimes b)$.
- *Sea* e' *el elemento neutro para la ley de composición* $\circ$ *en el cuerpo* C*;* $\forall\, a \in V \ :\ e' \otimes a = a$

A los elementos $\alpha \in C$ *los denominamos "escalares"; al elemento neutro para la ley de composición interna* $*$ *en* C *lo denotamos por* 0*; a los elementos* $v \in V$ *los denominamos "vectores" y los denotamos por* $\vec{v}$*.*

Definición A.1.48. Combinación lineal de vectores. *Dado un espacio vectorial* $(V, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(C, *, \circ)$ *y un subconjunto* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \in V,\ n \in \mathbb{N}$ *de vectores dados en un cierto orden; denominamos a* S *como un "sistema de vectores de* V*", o "sistema de* n *vectores de* V*". Denominamos "combinación lineal de los vectores de* S*" a los vectores de la forma* $\vec{v} = \alpha_1 \otimes \vec{v}_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \otimes \vec{v}_n,\ \alpha_i \in C\ \forall\, i = 1, \cdots, n$*.*

Definición A.1.49. Subespacio engendrado por un sistema. *Dado un espacio vectorial* $(V, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(C, *, \circ)$ *y un sistema de vectores* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \in V,\ n \in \mathbb{N}$ *definimos "subespacio engendrado por el sistema* S*", y lo denotamos por* $\mathscr{V}(S)$*, al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de los vectores de* S*,* $\mathscr{V}(S) = \{\alpha_1 \otimes \vec{v}_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \otimes \vec{v}_n,\ \alpha_i \in C\ \forall\, i = 1, \cdots, n\}$*. Decimos que "*$S$ *es un sistema generador de* $\mathscr{V}(S)$*"*

Definición A.1.50. Sistema de vectores linealmente independientes. *Dado un espacio vectorial* $(V, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(C, *, \circ)$ *y un sistema de vectores* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \in V,\ n \in \mathbb{N}$*, decimos que "*$S$ *es un sistema de vectores linealmente independientes" sii.* $\alpha_1 \otimes \vec{v}_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \otimes \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow\ \alpha_1 = 0, \cdots, \alpha_n = 0\ \forall\, i = 1, \cdots, n$*.*

Definición A.1.51. Sistema de vectores linealmente dependiente. *Dado un espacio vectorial* $(V, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(C, *, \circ)$ *y un sistema de vectores* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \in V,\ n \in \mathbb{N}$*, decimos que "*$S$ *es un sistema de vectores linealmente dependientes" si no es un sistema de vectores linealmente independientes.*

Definición A.1.52. Dependencia lineal respecto de un sistema de vectores. *Dado un espacio vectorial* $(V, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(C, *, \circ)$*, un sistema de vectores* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \in V$*,* $n \in \mathbb{N}$ *y un vector* $\vec{v} \in V$*, decimos que "*$\vec{v}$ *depende linealmente de los vectores del sistema* S*" sii.* $\vec{v} \in \mathscr{V}(S)$*.*

Definición A.1.53. Espacio vectorial de tipo finito. *Dado un espacio vectorial* $(V, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(C, *, \circ)$ *y un sistema de vectores* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \in V$*,* $n \in \mathbb{N}$ *decimos que "*V *es un espacio vectorial de tipo finito" si* $V = \mathscr{V}(S)$*.*

Definición A.1.54. Base de un espacio vectorial de tipo finito. *Dado un espacio vectorial* $(V, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(C, *, \circ)$ *y un sistema de vectores* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \in V$*,* $n \in \mathbb{N}$ *decimos que "*S *es una base del espacio vectorial* V*" si* $V = \mathscr{V}(S)$ *y* S *es un sistema de vectores linealmente independientes. Denominamos "dimensión del espacio vectorial* V*" a la cantidad de vectores que forman el sistema* S*;* $\dim(V) = Card(S) = n$*.*

Proposición A.1.1. *Dado un espacio vectorial* $(V, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(C, *, \circ)$ *y una base* $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \in V$*,* $n \in \mathbb{N}$ *definida en* V*, para cualquier vector* $\vec{v} \in V$ $\exists! \ \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \ / \ \vec{v} = \alpha_1 \otimes \vec{v}_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \otimes \vec{v}_n$ *. La sucesión* $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ *se denomina "coordenadas del vector* $\vec{v}$ *respecto de la base* S*" y asumimos que* $\vec{v} \equiv (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$*.*

Definición A.1.55. Norma de un vector. *Sea el espacio vectorial* $(V, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(C, +, \cdot)$*; sea la la aplicación* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *que cumple las propiedades:*

- $\|\vec{u}\| \geq 0, \ \forall \, \vec{u} \in V$.
- $\|\vec{u}\| = 0$ *sii.* $\vec{u} = \vec{0}$.
- $\|\alpha \otimes \vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|, \ \forall \alpha \in C \ \wedge \forall \, \vec{u} \in V$.
- **(Desiguald de Minkowski)** $\|\vec{u} \oplus \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \ \forall \{\vec{u}, \vec{v}\} \in V$.

Siendo $C = \mathbb{R} \ \vee \ C = \mathbb{C}$ *y entendiendo las operaciones en* C *como las operaciones respectivas en* $\mathbb{R}$ *o en* $\mathbb{C}$*. Decimos que "*$\|\cdot\|$ *es una norma definida en el espacio vectorial* V*".*

Definición A.1.56. Espacio vectorial euclídeo. *Sea el espacio vectorial* $(V, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*; sea la la aplicación* $f : V \times V \to \mathbb{R}$ *que cumple las propiedades:*

- **Simétrica:** $f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u}), \ \forall \ \{\vec{u}, \vec{v}\} \in V$.
- **Distributiva:** $f(\vec{u}, \vec{v} \oplus \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{u}, \vec{w}), \forall \ \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \in V$.
- $f(\alpha \otimes \vec{u}, \vec{v}) = \alpha \cdot f(\vec{u}, \vec{v}) \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \forall \ \{\vec{u}, \vec{v}\} \in V$.
- $f(\vec{u}, \vec{u}) > 0 \ \forall \ \vec{u} \in V \ / \ \vec{u} \neq \vec{0} \ \wedge \ f(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ *sii.* $\vec{u} = \vec{0}$*. Es una forma bilineal simétrica definida positiva.*

Decimos que "f *es un producto escalar definido en el espacio vectorial real* V*". Definimos "espacio vectorial euclídeo" como todo espacio vectorial real* V *dotado de un producto escalar.*

Definición A.1.57. Espacio vectorial hermítico. *Sea el espacio vectorial* $(H, \oplus, \otimes)$ *con dominio de operadores el cuerpo* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$*, donde consideramos* $+$ *como suma de números complejos y* $\cdot$ *como producto de números complejos; sea la la aplicación* $g : H \times H \to \mathbb{C}$ *que cumple las propiedades:*

- **Simétrica(hermítica):** $g(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{g(\vec{v}, \vec{u})}, \ \forall \ \{\vec{u}, \vec{v}\} \in H$.

- **Distributiva:** $g(\vec{u}, \vec{v} \oplus \vec{w}) = g(\vec{u}, \vec{v}) + g(\vec{u}, \vec{w}), \forall \; \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \in H$.
- $g(\alpha \otimes \vec{u}, \vec{v}) = \alpha \cdot g(\vec{u}, \vec{v}) \; \forall \; \alpha \in \mathbb{C} \; \wedge \; \forall \; \{\vec{u}, \vec{v}\} \in H$.
- $g(\vec{u}, \vec{u}) > 0 \; \forall \; \vec{u} \in H \; / \; \vec{u} \neq \vec{0} \; \wedge \; g(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ *sii.* $\vec{u} = \vec{0}$*, siendo* 0 *el elemento neutro para la suma de complejos:* $(0, 0)$*. Forma bilineal hemisimétrica definida positiva.*

Decimos que "g es un producto hermítico definido en el espacio vectorial complejo H". Definimos "espacio vectorial hermítico" como todo espacio vectorial complejo H dotado de un producto hermítico.

Proposición A.1.2. *Dado un espacio vectorial euclídeo* $(V, \oplus, \otimes)$ *con el producto escalar* f *definimos la aplicación*

$$\| \cdot \| : V \to [0, +\infty) \; / \; \|\vec{u}\| = \sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})}, \; \forall \; \vec{u} \in V.$$

Es una norma.

Definición A.1.58. Espacio normado. *Definimos "espacio normado sobre el cuerpo* C $(\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C})$*" como un par ordenado* $(V, \| \cdot \|)$*, siendo* V *un espacio vectorial sobre el cuerpo* C *y* $\| \cdot \|$ *una norma definida en* V*.*

Definición A.1.59. Distancia entre dos vectores. *Dado un espacio vectorial euclídeo* $(V, \oplus, \otimes)$ *con el producto escalar* f*, definimos "distancia entre los vectores* $\{\vec{u}, \vec{v}\} \in V$*" a la aplicación*

$$d : V \times V \to [0, +\infty) \; / \; d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|, \; \forall \; \{\vec{u}, \vec{v}\} \in V.$$

Definición A.1.60. Espacio afín n-dimensional. *Sea* E *un conjunto de puntos y* V *un espacio vectorial de dimensión* n *sobre un cuerpo* C*. Decimos que "*E *es un espacio afín sobre el cuerpo* C *asociado al espacio vectorial* V*" cuando al conjunto* E *se le ha dotado de una ley de composición externa* $+_V$ *con dominio de operadores* V *de forma que se verifica:*

- $\forall \; \{P, Q\} \in \; E \; \exists! \; \vec{v} \in \; V \; / \; P +_V \vec{v} = Q$*. Se denota* $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$*.*
- $\forall \; P \in \; E \; \wedge \; \forall \; \{\vec{u}, \vec{v}\} \in \; V \; : \; (P +_V \vec{u}) +_V \vec{v} = P +_V (\vec{u} + \vec{v})$*, siendo* $+$ *la suma de vectores.*

Definición A.1.61. Espacio euclideo n-dimensional. *Definimos "espacio euclideo* n*-dimensional" como un espacio afín* n*-dimensional cuyo espacio vectorial asociado es un espacio vectorial euclideo.*

Definición A.1.62. Espacio hermítico n-dimensional. *Definimos "espacio hermítico* n*-dimensional" como un espacio afín* n*-dimensional cuyo espacio vectorial asociado es un espacio vectorial hermítico.*

Textos fundamentales donde ampliar los conceptos aquí enunciados son, entre otros [35] de P. Dubreil y M. L. Dubreil-Jacotin, [81] de S. Lang, [83] de A. Lentin y J. Rivaud, ...

A.1.2. Topología.

Siguiendo la tradición en Topología usaremos "elemento de un conjunto" y "punto de un conjunto" como equivalentes.

Definición A.1.63. Topología. *Sea X un conjunto. Definimos "topología en X", y la denotamos por $\mathscr{T}$, como una familia de subconjuntos de X, $\mathscr{T} = \{G_i \in \mathscr{P}(X),\ i \in I \subset \mathbb{N}\}$ que verifica los siguientes axiomas:*

- $\emptyset \in \mathscr{T} \ \wedge \ X \in \mathscr{T}$.
- $\forall J \subset I,\ J \neq \emptyset \ : \ \bigcup_{j\in J} G_j \in \mathscr{T}$.
- $\forall \ \{i,j\} \in \ I \ : \ G_i \cap G_j \in \mathscr{T}$.

Definición A.1.64. Espacio topológico. *Dado un conjunto X y una topología $\mathscr{T}$ en X definimos "espacio topológico" al par ordenado $(X,\mathscr{T})$. Los elementos de $\mathscr{T}$ los denominamos "abiertos del espacio topológico $(X,\mathscr{T})$".*

Definición A.1.65. El espacio topológico de los números reales. *Si en el conjunto $\mathbb{R}$ con la relación de orden consideramos la "topología usual", que denotamos por $\mathscr{T}_u$, como la familia $\mathscr{T}_u = \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \ / \ \forall \ x \in A \ \exists\{a,b\} \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b \ \wedge \ \{y \in \mathbb{R} : a < y < b\} \subset A\}$, al espacio topológico $(\mathbb{R},\mathscr{T}_u)$ lo denominamos "espacio topológico real con la topología usual".*

Definición A.1.66. Conjunto finito. *Dado un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$ y un subconjunto $A \in \mathscr{P}(X)$ decimos que "A es un conjunto finito" sii $\exists \ n \in \mathbb{N} \wedge f : A \to N_n \subset \mathbb{N}$, siendo f una correspondencia biyectiva. Denominamos a n "cardinal de A", o "cantidad de elementos de A".*

Definición A.1.67. Conjunto infinito numerable. *Dado un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$ y un conjunto $A \in \mathscr{P}(X)$ decimos que "A es un conjunto infinito numerable" sii. $\exists \ f : A \to \mathbb{N}$ siendo f una correspondencia biyectiva.*

Definición A.1.68. Conjunto infinito no numerable. *Dado un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$ y un conjunto $A \in \mathscr{P}(X)$ decimos que es un "conjunto infinito no numerable" sii no es finito y no es infinito numerable.*

Definición A.1.69. Conjunto numerable. *Dado un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$ y un conjunto $A \in \mathscr{P}(X)$ decimos que es un "conjunto numerable" si es un conjunto finito o un conjunto infinito numerable.*

Definición A.1.70. Entorno de un punto. *Dado un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$, y un elemento $x \in X$ definimos "entorno del punto x", y lo denotamos por $E(x)$, como todo conjunto $U \in \mathscr{P}(X) \ / \ \exists \ G \in \mathscr{T} \ / \ x \in G \subset U$.*

Definición A.1.71. Entorno reducido de un punto. *Dado un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$, y un elemento $x \in X$ definimos "entorno reducido del punto x", y lo denotamos por $E^*(x)$, como el conjunto $E(x) \cap (\neg\{x\})$.*

Teorema A.1.1. *Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico y $A \in \mathscr{P}(X)$. A es abierto en el espacio topológico $(X,\mathscr{T})$ sii. es entorno de cada uno de sus puntos.*

Definición A.1.72. Conjunto cerrado. *Dado un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$ definimos "conjunto cerrado" como todo conjunto $C \in \mathscr{P}(X) \ / \ \neg C$ es abierto.*

Definición A.1.73. Punto de acumulación. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y un conjunto* $A \in \mathscr{P}(X)$ *definimos "punto de acumulación de* A*" como todo elemento* $x \in X$ *tal que todo entorno de* x *contiene elementos de* A *distintos de* x *(todo entorno reducido de* x *contiene puntos de* A*).*

Teorema A.1.2. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y un conjunto* $A \in \mathscr{P}(X)$*,* A *es cerrado sii. contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Definición A.1.74. Adherencia de un conjunto. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y un conjunto* $A \in \mathscr{P}(X)$*, definimos "adherencia de* A*", y la denotamos por* $Ad(A)$*, a la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a* A*.*

Teorema A.1.3. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y un conjunto* $A \in \mathscr{P}(A)$*, la adherencia de* A *es la unión de* A *con el conjunto de todos sus puntos de acumulación.*

Definición A.1.75. Punto interior de un conjunto. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y un conjunto* $A \in \mathscr{P}(X)$ *definimos "punto interior del conjunto* A*" como todo elemento* $x \in A$ *tal que* A *es entorno de* x*. El conjunto formado por todos los puntos interiores de* A *se denomina "interior de* A*".*

Definición A.1.76. Frontera de un conjunto. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y un conjunto* $A \in \mathscr{P}(X)$ *definimos "frontera de* A*" como el conjunto formado por todos los puntos* x *que no son interiores de* A *ni de* $\neg A$*. Equivalentemente, todo entorno de* x *tiene intersección no vacía tanto con* A *como con* $\neg A$*.*

Definición A.1.77. Base de una topología. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *definimos "base de la toplogía* $\mathscr{T}$*" como cualquier familia de conjuntos* $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ *que verifica:* $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ *y para todo entorno* U *de* $x \in X \; \exists \, V \in \mathscr{B} \; / \; x \in V \subset U$*.*

Definición A.1.78. Base de entornos de un punto. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y un punto* $x \in X$ *definimos "base de entornos de* x*" como cualquier familia formada por entornos de* x *tal que cualquier entorno de* x *contiene algún elemento de esa familia.*

Definición A.1.79. Primer axioma de numerabilidad. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *decimos que "satisface el primer axioma de numerabilidad" si la familia de subconjuntos formada por los entornos de cada punto tiene una base numerable.*

Definición A.1.80. Segundo axioma de numerabilidad. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *decimos que "satisface el segundo axioma de numerabilidad" si la topología* $\mathscr{T}$ *tiene alguna base numerable.*

Definición A.1.81. Conjunto denso. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y un conjunto* $A \in \mathscr{P}(X)$ *decimos que "*A *es denso en el espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$*" sii la adherencia de* A *es* X*.*

Definición A.1.82. Espacio topológico separable. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *decimos que "es separable" sii existe un subconjunto de* X *numerable que es denso en* X*.*

Definición A.1.83. Conjuntos separados. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y dos conjuntos* $\{A, \; B\} \in \mathscr{P}(X)$ *decimos que "están separados" sii. se verifica* $Ad(A) \cap B = \emptyset \; \wedge \; A \cap Ad(B) = \emptyset$*.*

Definición A.1.84. Espacio topológico conexo. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *decimos que "es conexo" sii.* X *no es unión de dos conjuntos separados no vacíos.*

Definición A.1.85. Espacio de Hausdorff. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$*, decimos que es un "espacio de Hausdorff" sii.* $\forall \{x, \; y\} \in X \; / \; x \neq y \; \exists \, \{E(x), \; E(y)\} \; / \; E(x) \cap E(y) = \emptyset$*.*

Definición A.1.86. Cubrimiento de un conjunto. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y un conjunto* $A \in \mathscr{P}(X)$*, decimos que una familia* $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ *es "un cubrimiento de* A*" sii* $A \subset \bigcup_{\mathscr{F}} B$*. Decimos que es un "cubrimiento abierto" sii todos los elementos de la familia* $\mathscr{F}$ *son abiertos. Definimos "subcubrimiento de* A *por elementos de* $\mathscr{F}$*" como toda subfamilia de* $\mathscr{F}$ *que es un cubrimiento de* A*.*

Definición A.1.87. Espacio topológico compacto. *Dado el espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *decimos que "es compacto" sii. todo cubrimiento abierto de* X *tiene un subcubrimiento finito (abierto).*

Definición A.1.88. Conjunto compacto. *Dado el espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y un conjunto* $A \in \mathscr{P}(X)$ *decimos que "es un conjunto compacto" sii. todo cubrimiento de* A *por conjuntos abiertos en* $(X, \mathscr{T})$ *tiene un subcubrimiento finito (equivalentemente, que* A *es compacto con la topología inducida en* A*,* $\mathscr{T}_A = \{A \cap G \ \forall \ G \in \mathscr{T}\}$*).*

Definición A.1.89. Sucesión en un conjunto X. *Dado un conjunto* X *definimos "sucesión en el conjunto* X*", y la denotamos por* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$*, como una aplicación* $s : \mathbb{N} \to X, \ s(i) = a_i \in X$*.*

Definición A.1.90. Serie asociada a una sucesión en un conjunto X. *Dada una sucesión* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *en un conjunto* X *denominamos "suma parcial n-ésima asociada a la sucesión* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$*", y la denotamos por* s_n*, a la suma finita* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$*. Denominamos "serie asociada a la sucesión* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$*", y la denotamos por* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*, a la sucesión* $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$*.*

Definición A.1.91. Sucesión monótona en un conjunto X. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$*, en el cual tenemos definida una relación de orden* $\leq_X$ *definimos "sucesión monótona creciente" como cualquier sucesión* $s : \mathbb{N} \to X$ *que es monótona creciente; definimos "sucesión monótona decreciente" como cualquier sucesión* $s : \mathbb{N} \to X$ *que es monótona decreciente; definimos "sucesión monótona" como cualquier sucesión* $s : \mathbb{N} \to X$ *que es monótona creciente o monótona decreciente.*

Definición A.1.92. Sucesión acotada en un conjunto X. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$*, en el cual tenemos definida una relación de orden* $\leq_X$ *definimos "sucesión acotada superiormente" como cualquier sucesión* $s : \mathbb{N} \to X$ *que cumple la propiedad* $\exists \ x \in X \ / \ s(n) \leq_X x \ \forall \ n \in \mathbb{N}$*; definimos "sucesión acotada inferiormente" como cualquier sucesión* $s : \mathbb{N} \to X$ *que cumple la propiedad* $\exists \ x \in X \ / \ x \leq_X s(n) \ \forall \ n \in \mathbb{N}$*; definimos "sucesión acotada" como cualquier sucesión* $s : \mathbb{N} \to X$ *que está acotada superior e inferiormente.*

Definición A.1.93. Límite de una sucesión $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. *Dado el espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y una sucesión de puntos de* X*,* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$*, decimos que* $p \in X$ *es "el límite de la sucesión* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$*", y lo denotamos por* $a_n \to p$*, si dado cualquier entorno* $E(p)$ *de* p $\exists \ m \in \mathbb{N} \ / \ \forall \ i \geq m \ : \ a_i \in \ E(p)$*.*

Definición A.1.94. Suma de una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. *Dado el espacio topológico* $(X, \mathscr{T})$ *y una sucesión de puntos de* X*,* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$*, y la serie asociada* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *denominamos "suma de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*" al límite de la sucesión* $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$*, cuando existe. Si no existe, decimos que "la serie no tiene suma", o que "es divergente".*

Definición A.1.95. Espacio métrico. *Sea* X *un conjunto no vacío y sea* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *una aplicación que cumple las siguientes propiedades:*

- $\forall \ \{x_1, x_2\} \in \ X \ : \ d(x_1, x_2) \geq 0, \ d(x_1, x_2) = 0$ *sii.* $x_1 = x_2$*.*
- $\forall \ \{x_1, x_2\} \in \ X \ : \ d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$*.*

- $\forall \{x_1, x_2, x_3\} \in X : d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$.

Decimos que la aplicación d "es una métrica" y el par ordenado (X, d) decimos que "es un espacio métrico".

Definición A.1.96. Topología asociada a una métrica. *Sea el espacio métrico (X, d) y sea la familia de subconjuntos de X:*

$$\mathscr{T}_d = \{G \subset X \;/\; \forall\, x \in G,\ \exists\, r \in \mathbb{R}^+ \;/\; B_r^d(x) \subset G\},\ \textit{siendo}$$

$$B_r^d(x) = \{y \in X \;/\; d(x, y) < r\}.$$

Decimos que $\mathscr{T}_d$ es "la topología asociada a la métrica d".

Definición A.1.97. Sucesión de Cauchy. *Sea el espacio métrico (X, d) y sea $s : \mathbb{N} \to X$ una sucesión. Decimos que "s es una sucesión de Cauchy" si se verifica la condición de Cauchy:*

$$\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \;/\; d(s(p), s(q)) < \epsilon\ \forall\, \{p, q\} \in \mathbb{N} \;/\; p \geq \nu\ \wedge\ q \geq \nu.$$

Definición A.1.98. Espacio métrico completo (de Banach). *Dado un espacio métrico (X, d) decimos que "es un espacio métrico completo" sii. toda sucesión de Cauchy $s : \mathbb{N} \to X$ es convergente.*

Definición A.1.99. Espacio métrico polaco. *Dado un espacio métrico (X, d) decimos que "es un espacio métrico polaco" si es completo y separable.*

Definición A.1.100. Aplicaciones continuas en un punto $p \in X$. *Dados dos espacios topológicos $(X_1, \mathscr{T}_1)$, $(X_2, \mathscr{T}_2)$, una aplicación $f : X_1 \to X_2$ y un punto $p \in X_1$, decimos que "f es continua en el punto p" cuando dado un entorno cualquiera $E(f(p))$ de $f(p)$ existe un entorno $E(p)$ de p / $f(E(p)) \subset E(f(p))$. Cuando f no es continua en $p \in X_1$ decimos que "es discontinua en $p \in X_1$".*

Definición A.1.101. Aplicaciones continuas en un subconjunto A de un espacio topológico. *Dados dos espacios topológicos $(X_1, \mathscr{T}_1)$, $(X_2, \mathscr{T}_2)$, una aplicación $f : X_1 \to X_2$ y un subconjunto $A \subset X_1$, decimos que "f es continua en el subconjunto $A \subset X_1$" cuando f es continua en todos los puntos $p \in A$. Cuando es continua en todo $p \in X_1$ decimos que "es continua en X_1".*

Definición A.1.102. Homeomorfismos entre espacios topológicos. *Dados dos espacios topológicos $(X_1, \mathscr{T}_1)$, $(X_2, \mathscr{T}_2)$, una aplicación $f : X_1 \to X_2$, decimos que "f es un homeomorfismo" cuando f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son aplicaciones continuas.*

Axioma A.1.1. Axioma de elección. *Si C_i es un conjunto no vacio para cada punto i de un conjunto de índices I, entonces hay una función f de I tal que $f(i) \in C_i$ para cada $i \in I$.*

Manuales cuya lectura es recomendable para profundizar en los conceptos enunciados son, entre otros, [52] de M. García y J. Margalef, [71] de J. L. Kelley...

A.1.3. Análisis matemático.

Aunque no es el objeto de esta tesis, es imprescindible construir el sistema de los números reales pues son los elementos primitivos fundamentales en toda investigación matemática. También construimos el sistema de los números complejos pues aunque básicamente las variables aleatorias que vamos a investigar son variables aleatorias $\mathbb{R}$-valoradas, pueden considerarse procesos estocásticos con variables aleatorias $\mathbb{C}$-valoradas, para lo cual puede ser conveniente considerar espacios hermíticos.

Números naturales.

Sea $\mathbb{N}$ un conjunto; sea $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación.

Definición A.1.103. Sistema de los números naturales. *Denominamos "sistema de los números naturales" al par ordendo* $(\mathbb{N}, s)$ *que verifica los siguientes axiomas (axiomas de Peano):*

- *s es una aplicación inyectiva.*
- *Existe un único elemento, que denotamos por* $1,\ 1 \in \mathbb{N}\ /\ s(n) \neq 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- *Si $U \subset \mathbb{N}$ verifica: (axioma de inducción)*
  - $1 \in U$.
  - $n \in U \Rightarrow s(n) \in U$.

  se cumple que $U = \mathbb{N}$.

  Al sistema de los números naturales $(\mathbb{N}, s)$ *lo denotamos por* $\mathbb{N}$.

Definición A.1.104. Suma de números naturales. *En el sistema de los números naturales definimos la siguiente ley de composición interna:*

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m, n) \stackrel{+}{\to} m + n \text{ cumpliendo:}$$

$$\forall\, \{m, n\} \in \mathbb{N}\ :\ m + 1 = s(m),\ m + s(n) = s(m + n).$$

Definición A.1.105. Producto de números naturales. *En el sistema de los números naturales definimos la siguiente ley de composición interna:*

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m, n) \stackrel{\cdot}{\to} m \cdot n \text{ cumpliendo:}$$

$$\forall\, \{m, n\} \in \mathbb{N}\ :\ m \cdot 1 = m,\ m \cdot s(n) = m \cdot n + m.$$

Definición A.1.106. Relación de orden estricto en $\mathbb{N}$. *En el sistema de los números naturales definimos la siguiente relación:* $\forall\, \{m, n\} \in \mathbb{N}$ *decimos que "m es menor que n", y lo denotamos por* $m < n$, *si* $\exists\, p \in \mathbb{N}\ /\ m + p = n$. *Es una relación de orden estricto.*

Proposición A.1.3. *Sea* $\mathbb{N}$ *el conjunto de los números naturales con la relación de orden* $<$, *se cumple para todo* $\{m, n\} \in \mathbb{N}$ *una y sólo una de las siguientes relaciones:* $m < n,\ m = n,\ n < m$.

Definición A.1.107. Relación de orden en $\mathbb{N}$. *En el sistema de los números naturales definimos la siguiente relación:* $\forall\, \{m, n\} \in \mathbb{N}$ *decimos que "m es menor o igual que n", y lo denotamos por* $m \leq n$, *si* $m < n\ \vee\ m = n$. *Es una relación de orden.*

Proposición A.1.4. *El sistema de los números naturales* $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ *tiene estructura de semianillo ordenado conmutativo y con elemento unidad.*

Números enteros.

En $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definimos la siguiente relación $\equiv \ / \ \forall\{(a,b),(c,d)\} \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \ : \ (a,b) \equiv (c,d)$ sii. $a+d = b+c$, siendo $+$ la suma en $\mathbb{N}$. La relación $\equiv$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Definición A.1.108. Sistema de los números enteros. *Denominamos "sistema de los números enteros", y lo denotamos por $\mathbb{Z}$, al conjunto formado por todas las clases de equivalencia inducidas en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ por la relación de equivalencia $\equiv$.*

Definición A.1.109. Suma de números enteros. *Sean $\{\alpha,\beta\} \in \mathbb{Z}$ y sean $(a_1,a_2) \in \alpha \wedge (b_1,b_2) \in \beta$; definimos la "suma de los números enteros α y β", y la denotamos por $\alpha +_{\mathbb{Z}} \beta$, como la clase de equivalencia a la cual pertenece (a_1+b_1, a_2+b_2). Siendo $+$ la suma de números naturales.*

Definición A.1.110. Producto de números enteros. *Sean $\{\alpha,\beta\} \in \mathbb{Z}$ y sean $(a_1,a_2) \in \alpha \ \wedge \ (b_1,b_2) \in \beta$; definimos el "producto de los números enteros α y β", y lo denotamos por $\alpha \cdot_{\mathbb{Z}} \beta$, como la clase de equivalencia a la cual pertenece $(a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2, a_1\cdot b_2 + a_2\cdot b_1)$. Siendo $+, \ \cdot$ la suma y producto de números naturales.*

Definición A.1.111. Enteros positivos. *Definimos "entero positivo" como todo $\alpha \in \mathbb{Z} \ / \ \forall \ (a_1,a_2) \in \alpha \ : \ a_2 < a_1$, siendo $<$ la relación de orden en $\mathbb{N}$. Denotamos por $\mathbb{Z}^+$ al conjunto formado por todos los enteros positivos.*

Definición A.1.112. Relación de orden estricto en $\mathbb{Z}$. *En el sistema de los números enteros definimos la siguiente relación: $\forall \ \{\alpha,\beta\} \in \mathbb{Z}$ decimos que "α es menor que β", y lo denotamos por $\alpha <_{\mathbb{Z}} \beta$ si $\beta +_{\mathbb{Z}} (-_{\mathbb{Z}}\alpha) \in \mathbb{Z}^+$, siendo $-_{\mathbb{Z}}\alpha$ el opuesto de $\alpha \in \mathbb{Z}$ respecto de la ley de composición interna $+_{\mathbb{Z}}$. Es una relación de orden estricto.*

Proposición A.1.5. *Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros con la relación de orden $<_{\mathbb{Z}}$, se cumple $\forall \ \{\alpha,\beta\} \in \mathbb{Z}$ una y sólo una de las siguientes relaciones: $\alpha <_{\mathbb{Z}} \beta, \ \alpha = \beta, \ \beta <_{\mathbb{Z}} \alpha$.*

Definición A.1.113. Relación de orden en $\mathbb{Z}$. *En el sistema de los números enteros definimos la siguiente relación: $\forall \ \{\alpha,\beta\} \in \mathbb{Z}$ decimos que "α es menor o igual que β", y lo denotamos por $\alpha \leq_{\mathbb{Z}} \beta$ si $\alpha <_{\mathbb{Z}} \beta \ \vee \ \alpha = \beta$. Es una relación de orden.*

Proposición A.1.6. *El sistema de los números enteros $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}, \leq_{\mathbb{Z}})$ tiene estructura de anillo ordenado, conmutativo y con elemento unidad.*

Números racionales.

Definición A.1.114. Sistema de los números racionales. *En $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ definimos el conjunto $\frac{p}{q} = \{(h\cdot p, h\cdot q) \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}, \ h \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$, siendo $\cdot$ el producto en $\mathbb{Z}$, y lo denominamos "número racional $\frac{p}{q}$". Al conjunto de todos los números racionales lo denotamos por $\mathbb{Q}$.*

Definición A.1.115. Suma de números racionales. *En $\mathbb{Q}$ definimos la siguiente ley de composición interna:*

$$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \stackrel{+_{\mathbb{Q}}}{\to} \mathbb{Q} \ / \ (\frac{p}{q}, \frac{r}{s}) \to \frac{p\cdot s + q\cdot r}{q\cdot s}$$

siendo $+, \ \cdot$ la suma y el producto en $\mathbb{Z}$. La denotamos por $\frac{p}{q} +_{\mathbb{Q}} \frac{r}{s}$.

Definición A.1.116. Producto de números racionales. *En $\mathbb{Q}$ definimos la siguiente ley de composición interna:*

$$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\xrightarrow{\cdot_{\mathbb{Q}}}\mathbb{Q}\ /\ (\frac{p}{q},\frac{r}{s})\to\frac{p\cdot r}{q\cdot s}$$

siendo $\cdot$ *el producto en* $\mathbb{Z}$. *La denotamos por* $\frac{p}{q}\cdot_{\mathbb{Q}}\frac{r}{s}$.

Definición A.1.117. Relación de orden en $\mathbb{Q}$. *En el sistema de los números racionales definimos la siguiente relación:* $\forall\ \{\frac{p}{q},\frac{r}{s}\}\in\mathbb{Q}$ *decimos que "*$\frac{p}{q}$ *es menor o igual que* $\frac{r}{s}$*", y lo denotamos por* $\frac{p}{q}\leq\frac{r}{s}$, *sii.* $p\cdot s\leq q\cdot r$, *siendo* $\leq$, $\cdot$ *la relación de orden y el producto en* $\mathbb{Z}$ *respectívamente.*

Proposición A.1.7. *El sistema de los números racionales* $(\mathbb{Q},+_{\mathbb{Q}},\cdot_{\mathbb{Q}},\leq_{\mathbb{Q}})$, *dotado de las leyes de composición interna* $+_{\mathbb{Q}},\cdot_{\mathbb{Q}}$ *y la relación de orden* $\leq_{\mathbb{Q}}$ *cumple las siguientes propiedades (por comodidad, usaremos* $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ *en vez de* $(\mathbb{Q},+_{\mathbb{Q}},\cdot_{\mathbb{Q}},\leq_{\mathbb{Q}})$*):*

- $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ *tiene estructura de cuerpo conmutativo, siendo* 0, 1 *los elementos nulo y unidad; el opuesto de* $\frac{p}{q}$ *es* $\frac{(-p)}{q}$; *el inverso de* $\frac{p}{q}\neq 0$ *es* $\frac{q}{p}$.
- $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ *es un cuerpo ordenado.*
- $\forall\ \{\alpha,\beta\}\in\mathbb{Q},\ \alpha<\beta$ *existen infinitos* $\gamma\in\mathbb{Q}\ /\ \alpha<\gamma<\beta$. *(*$\mathbb{Q}$ *es un conjunto denso).*
- $\forall\ \{\alpha,\beta\}\in\mathbb{Q}\ /\ \alpha>0,\exists\ n\in\mathbb{N}\ /\ n\cdot\alpha>\beta$. *((*$\mathbb{Q},+,\cdot,\leq$*) es arquimediano).*
- $\forall\ \alpha\in\mathbb{Q}$ *denominamos "valor absoluto de* α*", y lo denotamos por* $|\alpha|$, *al número racional* $\max\{\alpha,-\alpha\}$. *Cumple las propiedades:*
  - $\forall\ \alpha\in\mathbb{Q}\ /\ \alpha\neq 0\ :\ |\alpha|>0;\ \wedge\ |0|=0$.
  - $\forall\ \{\alpha,\beta\}\in\mathbb{Q}\ :\ |\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|\ \wedge\ |\alpha\cdot\beta|=|\alpha||\beta|$.
- *El conjunto* $\mathbb{Q}$ *es infinito numerable (*$\exists\ f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$, *siendo* f *biyectiva).*

Números reales.

El conjunto de los números reales se puede construir a partir de $\mathbb{Q}$ de diversas maneras. Consideramos una cualquiera de esas ampliaciones que cumple una determinada axiomática:

Definición A.1.118. Sistema de los números reales. *Definimos el sistema de los números reales como un conjunto, que denotamos por* $\mathbb{R}$, *dotado de las leyes de composición internas* $+_{\mathbb{R}},\cdot_{\mathbb{R}}$ *y una relación de orden total* $\leq_{\mathbb{R}}$ *que cumplen los siguientes axiomas:*

- $(\mathbb{R},+_{\mathbb{R}},\cdot_{\mathbb{R}})$ *tiene estructura algebraica de cuerpo conmutativo.*
- $(\mathbb{R},+_{\mathbb{R}},\cdot_{\mathbb{R}},\leq_{\mathbb{R}})$ *es un cuerpo ordenado.*
- *Toda sucesión monótona creciente y acotada de números reales tiene límite real (Axioma de completitud).*

Se puede identificar $\mathbb{Q}$ *con un subconjunto de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. *Los elementos de* $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ *los denominamos "números irracionales".*

Proposición A.1.8. *Sea el espacio topológico* $(\mathbb{R},\mathscr{T}_u)$ *con la topología usual. Se verifica:*

- $(\mathbb{R},\mathscr{T}_u)$ *verifica el primer axioma de numerabilidad.*

- $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ *verifica el segundo axioma de numerabilidad.*
- $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ *es un espacio topológico separable.*
- $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ *es un espacio de Hausdorff.*

Proposición A.1.9. *El sistema de los números reales* $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}})$ *cumple las siguientes propiedades (consideramos, por comodidad,* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$*como* $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}})$*):*

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *es arquimediano.*
- $\forall\, r \in \mathbb{R}\ \exists!\ z \in \mathbb{Z}\ /\ z \leq r < z + 1$. *Al número* $z \in \mathbb{Z}$ *lo denominamos "parte entera de* r*".*
- $\forall\ \{r, s\} \in \mathbb{R}\ /\ r < s$ *existen infinitos* $\alpha \in \mathbb{Q}\ /\ r < \alpha < s$. *(*$\mathbb{Q}$ *es denso en* $\mathbb{R}$*). También se verifica que* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es denso en* $\mathbb{R}$.
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ *denominamos "valor absoluto de* α*", y lo denotamos por* $|\alpha|$*, al número real* $\max\{\alpha, -\alpha\}$*. Cumple las propiedades:*
    - $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ /\ \alpha \neq 0\ :\ |\alpha| > 0;\ \wedge\ |0| = 0.$
    - $\forall\ \{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R}\ :\ |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|\ \wedge\ |\alpha - \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$
    - $\forall\ \{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R}\ :\ |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|\ \wedge\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}\ :\ |\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}.$
- *La aplicación* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ d(x, y) = |x - y|\ \forall\ \{x, y\} \in \mathbb{R}$ *es una métrica (métrica del "valor absoluto").*
- $\forall\ C \subset \mathbb{R},\ C \neq \emptyset$ *que esté acotado superiormente (inferiormente) existe supremo (ínfimo) en* $\mathbb{R}$ *(axioma del supremo).*
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *con la métrica del valor absoluto es un espacio métrico de Banach y polaco.*

Números complejos.

El sistema de los números complejos se puede construir de varias formas. Lo más habitual es hacerlo a partir de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Definición A.1.119. Sistema de los números complejos. *Sea el conjunto* $\mathbb{R}^2 = \{(a, b)\ :\ a \in \mathbb{R}\ \wedge\ b \in \mathbb{R}\}$. *Sean las leyes de composición internas definidas en* $\mathbb{R}^2$

$$(a, b) +_{\mathbb{C}} (c, d) = (a + c, b + d)\ \forall\ \{(a, b), (c, d)\} \in \mathbb{R}^2.$$

$$(a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)\ \forall\ \{(a, b), (c, d)\} \in \mathbb{R}^2,$$

siendo $+,\ -,\ \cdot$ *las operaciones habituales en el cuerpo* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. *Se verifica:*

- $(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{C}})$ *tiene estructura de grupo abeliano, con elemento neutro* $(0, 0)$.
- *La ley de composición interna* $\cdot_{\mathbb{C}}$ *cumple las propiedades asociativa, conmutativa, distributiva respecto de* $+_{\mathbb{C}}$*, existencia de elemento inverso* $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ *(siendo las potencias y fracciones las habituales en* $\mathbb{R}$*). El elemento neutro para la ley de composición interna* $\cdot_{\mathbb{C}}$ *es* $(1, 0)$.

- *Denominamos a* $(0,1) = i$.
- $\forall\ z = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *denominamos "conjugado de z", y lo denotamos por* $\bar{z}$*, al par ordenado* $(a,-b) \in \mathbb{R}^2$.
- $\forall\ z = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *denominamos "módulo de z", y lo denotamos por* $|z|$*, a* $\sqrt{a^2+b^2}$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ *dotado de las leyes de composición internas* $+_{\mathbb{C}}$, $\cdot_{\mathbb{C}}$ *tiene estructura de cuerpo conmutativo, lo denominamos "cuerpo de los números complejos" y lo denotamos por* $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$.

Variable real.

En todo lo que sigue consideramos el sistema de los números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ con la topología usual $\mathscr{T}_u$ y la métrica del valor absoluto. Cuando hacemos referencia a funciones, en todos los casos, salvo que se especifique lo contrario, asumimos que son funciones reales de variable real.

Definición A.1.120. Intervalo de números reales. *Sea* $I \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ *un subconjunto de números reales. Decimos que "I es un intervalo de números reales" sii.*

$$\forall\ \{x,y\} \in I\ :\ (x,y) \in I.$$

Definición A.1.121. Límite de una función en un punto. *Sean* $\{a,l\} \in \mathbb{R}$*; sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función definida al menos en un entorno reducido del punto a,* $E^*(a)$*. Decimos que "f tiene límite l en el punto a (o cuando x tiende a a)", y lo denotamos por* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *sii. se cumple cualquiera de las dos propiedades equivalentes:*

- *Propiedad de Cauchy*

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ /\ \forall\ x \in E^*(a)\ /\ |x-a| < \delta\ :\ |f(x) - l)| < \epsilon.$$

- *Propiedad de Heine*

$$\forall\ \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in E^*(a)\ /\ x_n \to a\ :\ f(x_n) \to l.$$

Definición A.1.122. Continuidad uniforme de una función en un intervalo. *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo; sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función definida al menos en el intervalo I. Decimos que "f es uniformemente continua en I" sii.*

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ /\ \forall\ \{x,y\} \in I\ /\ |x-y| < \delta\ :\ |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Proposición A.1.10. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función; sea* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo. Si f es uniformemente continua en I entonces f es continua en I.*

Si f es continua en I y I es compacto entonces f es uniformemente continua en I (teorema de Heine).

Definición A.1.123. Continuidad seccional. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo finito. Decimos que "f es seccionalmente continua en el intervalo $[a, b]$" si $\exists\ \{I_i\}_{i=1}^n\ /I_i \cap I_j = \emptyset\ \forall\ \{i, j\} \in \{1, \cdots, n\},\ i \neq j\ \wedge\ \bigcup_{i=1}^n I_j = [a, b]$, siendo $I_i \subset [a, b]$ intervalo $\forall\ i = 1, \cdots, i = n$, y f es continua en cada uno de los subintervalos I_i existiendo límites por la izquierda y por la derecha respectívamente en los extremos de cada subintervalo $I_i\ \forall\ i = 1, \cdots, i = n$.*

Definición A.1.124. Derivada de una función real en un punto. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo; sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en I; sea $a \in I$. Definimos "derivada de f en a", y la denotamos por $f'(a)$, $\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}$, al límite (cuando existe y es finito):*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Definición A.1.125. Función derivable en un punto. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo; sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en I; sea $a \in I$. Decimos que "f es derivable en el punto a" sii. existe la derivada de f en el punto $a \in I$. Al conjunto de todas las funciones derivables en el punto $a \in I$ lo denotamos por $\mathscr{D}(a)$. Decimos que "f es derivable en el intervalo I" sii. existe la derivada para todo punto $a \in I$. Al conjunto de todas las funciones derivables en I lo denotamos por $\mathscr{D}(I)$.*

Proposición A.1.11. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo; sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en I; sea $a \in I$. Si f es derivable en a entonces f es continua en a. Al conjunto de todas las funciones continuas en $a \in I$ lo denotamos por $\mathscr{C}(a)$. Al conjunto de todas las funciones continuas en I lo denotamos por $\mathscr{C}(I)$.*

Definición A.1.126. Diferencial de una funcion en un punto. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo; sea $a \in I$; sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en I y derivable en a. Definimos "diferencial de f en el punto a", y lo denotamos por $\mathrm{d}f(a)$, a la aplicación lineal*

$$\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ \Delta x \to f'(a)\Delta x,\ \forall\ \Delta x \in \mathbb{R}\ /\ a + \Delta x \in I.$$

Definición A.1.127. Primitiva de una función. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo; sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en I; sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en I. Decimos que "F es una primitiva de la función f" sii. $F \in \mathscr{D}(I)\ \wedge\ F'(a) = f(a)\ \forall\ a \in I$.*

Definición A.1.128. Partición de un intervalo compacto $[a, b]$. *Dado un intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definimos "partición del intervalo $[a, b]$" a cualquier conjunto finito $P = \{x_0, \cdots, x_n\}\ /\ x_i \in [a, b]\ \forall i \in \{0, \cdots, n\}\ /\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Decimos que $[x_{i-1}, x_i]$ es "el intervalo i-ésimo para la partición P". Denotamos por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ a la amplitud de dicho intervalo. Denominamos "diámetro de la partición P", y lo denotamos por $|P|$, al mayor de los diámetros $|P| = \max\{\Delta x_i\}_{i=1}^n$.*

Definición A.1.129. Sumas de Darboux. *Sea el intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$; sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada; sea P una partición del intervalo compacto $[a, b]$. Definimos $m_i = \inf\{f(x)\ :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \sup\{f(x)\ :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Definimos:*

- *"Suma inferior de Darboux de f correspondiente a P", y lo denotamos por $s(f, P)$, como:*

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

- *"Suma superior de Darboux de f correspondiente a P", y lo denotamos por $S(f,P)$, como:*

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Definición A.1.130. Integral inferior y superior de una función acotada en un intervalo compacto. *Sea el intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$; sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:*

- *"Integral inferior de f en $[a,b]$", y la denotamos por $\underline{\int_a^b} f$, como:*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,P)\ \forall \text{ partición } P \text{ de } [a,b]\}.$$

- *"Integral superior de f en $[a,b]$", y la denotamos por $\overline{\int_a^b} f$, como:*

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{S(f,P)\ \forall \text{ partición } P \text{ de } [a,b]\}.$$

Definición A.1.131. Integral de Riemann de una función acotada en un intervalo compacto. *Sea el intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$; sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Decimos que "la función f es R-integrable (integrable en el sentido de Riemann)" sii. se verifica:*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Definimos la "integral de f en $[a,b]$ en el sentido de Riemann", y la denotamos por $\int_a^b f$, como $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Teorema A.1.4. Condición de integrabilidad de Riemann. *Sea el intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$; sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es R-integrable en $[a,b]$ sii. $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ P\ /\ S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$, siendo P una partición del intervalo compacto $[a,b]$.*

Teorema A.1.5. Teorema fundamental del cálculo. *Sea el intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$; sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y R-integrable.*

- *Definimos la función $F:[a,b] \to \mathbb{R}\ /\ F(x) = \int_a^x f$. La denominamos "integral indefinida de f correspondiente al punto a". F es continua en $[a,b]$.*
- **Teorema fundamental del cálculo**. *Si f es continua en $[a,b]$, es integrable, F es derivable en $[a,b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$.*

Teorema A.1.6. Regla de Barrow. *Sea el intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$; sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ (y por lo tanto acotada e integrable); sea $G:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función primitiva cualquiera de f en $[a,b]$. Se verifica que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

La integral de Riemann requiere acotación de la función y del intervalo. Para extenderla a intervalos no acotados, o funciones no acotadas, se usa el paso al límite. Son las "integrales impropias" o "integrales de Cauchy-Riemann".

Definición A.1.132. Integrales impropias. *Sea el intervalo* $[a, +\infty) \subset \mathbb{R}$*; sea* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una función acotada e integrable en todo* $[a, T] \subset [a, +\infty)$*. Definimos*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to+\infty} \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En el caso en que el límite exista, pudiendo ser infinito, decimos que la integral es "convergente". Cuando no existe decimos que es "oscilante".

Si f *está definida en un intervalo de la forma* $[a, b)$*, acotada e integrable en todo* $[a, x] \subset [a, b)$ *y existe el límite cuando* $x \to b^-$ *de* $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$*, definimos:*

$$\int_a^{b^-} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Variable compleja.

En todo lo que sigue (en esta subsección) consideramos el sistema de los números complejos $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$, con la métrica inducida por el módulo ($d : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R},\ d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|,\ \forall\, \{z_1, z_2\} \in \mathbb{C}$) y la topoloía $\mathscr{T}_d$ asociada a la métrica del módulo. Siempre que hacemos referencia a funciones entendemos funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, "funciones complejas de variable compleja".

Las definiciones de límite, continuidad, derivada,... son las mismas que en el sistema de los números reales.

Definición A.1.133. Función analítica en un conjunto abierto. *Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*; sea* $S \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$ *abierto respecto de la topología* $\mathscr{T}_d$*. Decimos que "*f *es analítica en* S*" si tiene derivada en todo punto* $a \in S$*.*

Definición A.1.134. Función analítica en un punto. *Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*; sea* $a \in \mathbb{C}$*. Decimos que "*f *es analítica en* $a \in \mathbb{C}$*" si* f *es analítica en un entorno de* a*.*

Definición A.1.135. Punto singular. *Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*; sea* $a \in \mathbb{C}$*. Decimos "*a *es un punto singular (una singularidad) de* f*" cuando* f *no es analítica en* a *pero es analítica en algún punto de todo entorno de* a*. Se dice que "es un punto singular aislado" si además existe un entorno* $E = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \epsilon,\ \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$ *en el que* f *es analítica.*

Definición A.1.136. Arco. *Sea* $C \subset \mathbb{C}\ /\ C = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \wedge \{x(t), y(t)\} \in \mathscr{C}([a, b])$*. Decimos que "*$C$ *es un arco", y lo denotamos por* $z(t),\ t \in [a, b]$*. Decimos que el arco es "simple (o de Jordan)" cuando se verifica que* $z(t_1) \neq z(t_2),\ si\ t_1 \neq t_2,\ \{t_1, t_2\} \in [a, b]$*. Si* C *es simple y* $z(a) = z(b)$ *decimos que "*C *es una curva cerrada simple (o curva de Jordan)".*

Definición A.1.137. Arco suave. *Sea* $C \subset \mathbb{C}$ *un arco. Decimos que "es un arco suave" cuando* $\exists\ z'(t)\ \forall\, t \in [a, b]\ \wedge\ z'(t) \neq 0\ \forall\, t \in (a, b)$*.*

Definición A.1.138. Contorno (arco suave a trozos). *Sea $C \subset \mathbb{C}$ un arco; decimos que "es un contorno", o "un arco suave a trozos" si está formado por una cantidad finita de arcos suaves unidos por sus extremos.*

Teorema A.1.7. Teorema de Laurent. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$; sea f una función analítica en un dominio $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ R_1 < |z - z_0| < R_2, \ \{R_1, R_2\} \in \mathbb{R}^+\}$; sea C cualquier contorno cerrado simple en torno de z_0 orientado positivamente (H. Cartan,[15]) contenido en el dominio D. Entonces, en todo z de ese dominio D, $f(z)$ admite la representación en serie:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \ R_1 < |z - z_0| < R_2, \ \textit{siendo:}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(z - z_0)^{n+1}}, \ b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{(z - z_0)^{-n+1}}.$$

La serie anterior es la denominada "serie de Laurent". Las integrales son las integrales de línea habituales del análisis real (N. Piskunov,[126]).

Definición A.1.139. Residuo de una función en un punto singular aislado. *Sea la función f; sea z_0 un punto singular aislado de la función f. Denominamos "residuo de f en el punto z_0" al término b_1 en cualquier representación de la función f en serie de Laurent en el dominio $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < R, \ R > 0\}$.*

Teorema A.1.8. Teorema de los residuos. *Si $C \subset \mathbb{C}$ es un contorno cerrado simple positivamente orientado, dentro del cual y sobre el cual una función f es analítica a excepción de una cantidad finita de puntos singulares $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ interiores a C, entonces se verifica:*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res} f(z).$$

Definición A.1.140. Contorno de Bromwich. *Se $L_R = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z = \gamma + it, \ \{\gamma, R\} \in \mathbb{R}^+ \wedge t \in [-R, R]\}$. Sea $C_R = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z = \gamma + Re^{i\theta}, \ \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\}$. Denominamos "contorno de Bromwich relativo a R", o abreviadamente "contorno de Bromwich ", y lo denotamos por Γ_R, a la curva de Jordan $\Gamma_R = L_R \cup C_R$ recorrida en sentido positivo (sentido "contrario a las agujas del reloj").*

Transformada de Fourier.

Definición A.1.141. Transformada de Fourier. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos la "transformada de Fourier de la función f", y la denotamos por $\mathscr{F}(f)(\omega)$, o por $\bar{f}(\omega)$, a la función:*

$$\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ / \ \bar{f}(\omega) = \mathscr{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x, \ \forall \ \omega \in \mathbb{R},$$

cuando dicha integral converja (sea finita). Decimos que "f admite transformada de Fourier".

Proposición A.1.12. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cumpliendo las siguientes condiciones:*

- *Tanto f como f' tienen una cantidad finita de discontinuidades de primera especie (finitas) en todo intervalo finito.*
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$. *Al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen esta propiedad lo denotamos por $L^1(\ell)$ (definición A.2.48, página 232).*

f admite transformada de Fourier.

Definición A.1.142. Transformada inversa de Fourier. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumpliendo las anteriores condiciones. Definimos la "transformada inversa de Fourier de la función $\bar{f}(\omega)$", y la denotamos por $\mathscr{F}^{-1}(\bar{f}(\omega))$, a la función:*

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}(\bar{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\bar{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega,\ x \in \mathbb{R}.$$

Algunas de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier son:

Lema A.1.1. ***(Riemann-Lebesgue).*** *Si $f \in L^1(\ell)$ y*

$$\bar{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x)dx$$

entonces $\bar{f}(\omega) \to 0$ conforme $|\omega| \to +\infty$.

Teorema A.1.9. *Si $f \in L^1(\ell)$ se verifica:*

- *$\bar{f}$ está acotada $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$.*
- *$\bar{f}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.*
- *$\bar{f}(-\omega) = \widetilde{(\bar{f}(\omega))}$ (el conjugado de $\bar{f}(\omega)$).*

Teorema A.1.10. Teorema de inversión. *Si $\{f, \bar{f}\} \in L^1(\ell)$; si $x \in \mathbb{R}\ \wedge\ f \in \mathscr{C}(x)$, se verifica:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\bar{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

Corolario A.1.1. *Si $f \in L^1(\ell),\ \bar{f} \geq 0\ \wedge\ \bar{f} \in \mathscr{C}(0)\ :\ \bar{f} \in L^1(\ell)$ y*

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

Algunas de las propiedades más importantes son:

- $\forall\ \{f, g\} \in L^1(\ell) \wedge\ \forall\{c_1, c_2\} \in \mathbb{R}\ :\ \mathscr{F}(c_1 f + c_2 g) = c_1\mathscr{F}(f) + c_2\mathscr{F}(g)$.
- $\forall\ \{f, g\} \in L^1(\ell)\ :\ \mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f)\cdot\mathscr{F}(g)$, siendo $*$ la operación convolución de funciones.
- $\forall\ f \in L^1(\ell)\ \wedge\ a \in \mathbb{R}\ :\ \mathscr{F}[e^{-iax}f(x)] = \bar{f}(\omega - a)$, siendo $\bar{f} = \mathscr{F}(f)$.
- $\forall\ f \in L^1(\ell)\ \wedge\ a \in \mathbb{R}\ :\ \mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\bar{f}(\frac{\omega}{a})$, siendo $\bar{f} = \mathscr{F}(f)$.
- $\forall\ f \in L^1(\ell)\ \wedge\ a \in \mathbb{R}\ :\ \mathscr{F}[f(x - a)] = e^{i\omega a}\bar{f}(\omega)$, siendo $\bar{f} = \mathscr{F}(f)$.
- Sea $n \in \mathbb{N},\ \{f, f^n\} \in L^1(\ell)\ \wedge\ f^n \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$; supongamos que se cumple $\lim_{x\to\pm\infty} f^k(x) = 0\ \forall\ k = 0, \cdots, n-1$. Entonces se verifica que $\mathscr{F}(f^n) = (-i\omega)^n\mathscr{F}(f)$.
- $\forall\ f \in L^1(\ell) \wedge\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ :\ \mathscr{F}(x^n f(x)) = i^n\bar{f}^n(\omega)$, siendo $\bar{f} = \mathscr{F}(f)$.
- $\forall\ f \in L^1(\ell),\ \bar{f} = \mathscr{F}(f)\ :\ \mathscr{F}(\bar{f}(x)) = 2\pi f(-\omega)$.

Transformada de Laplace.

Definición A.1.143. Transformada de Laplace. *Sea* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *. Definimos la "transformada de Laplace de* f*", y la denotamos por* $\mathcal{L}(f)$ *o por* $\hat{f}(s)$ *a la función:*

$$\mathcal{L}(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ / \ \mathcal{L}(f)(s) = \hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x, \ \forall\ s \in \mathbb{C}$$

cuando la integral converja (sea finita). Decimos que "f *admite transformada de Laplace".*

Proposición A.1.13. *Sea* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una función cumpliendo las siguientes condiciones:*

- f *es seccionalmente continua en cada intervalo finito* $[0, \alpha]$*.*
- $\exists \{\gamma, M\} \in \mathbb{R},\ M > 0 \ / \ |f(x)| < Me^{\gamma x},\ \forall\ x > \alpha$ *(*f *es "de orden exponencial* γ *para* $x > \alpha$*").*

f *admite transformada de Laplace* $\forall\ s \ / \ \Re(s) > \gamma$*, incluyendo los puntos de la recta* $x = \gamma$ *en los que la integral converge. A* γ *la denominamos "abscisa de convergencia".*

Definición A.1.144. Transformada inversa de Laplace. *Sea una función* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *y sea* $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f)$*. Definimos la "transformada inversa de Laplace de la función* $\hat{f}(s)$*", y la denotamos por* $\mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(s))$*, a la función:*

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} e^{sx} \hat{f}(s)\,\mathrm{d}s,\ x \in [0, +\infty)$$

cuando dicha integral tiene sentido. β *se elige de forma que todas las singularidades de la función* $\hat{f}$ *queden a la izquierda de la recta* $x = \beta$*.*

Proposición A.1.14. *Sea* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$*; Sea* $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(x))$*. Si* $\exists\ \{M, k, R\} \in \mathbb{R}^+ \ / \ |\hat{f}(s)| < \frac{M}{R^k}$ *se verifica que*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} e^{sx} \hat{f}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Eligiendo β *de forma que todas las singularidades de la función* $\hat{f}(s)$ *queden a la izquierda de la recta* $x = \beta$*.*

Teorema A.1.11. Teorema de Lerch. *Sea una función* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *y sea* $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f)$*. Si* f *satisface las condiciones de la proposición A.1.13 la transformada inversa de Laplace de* $\hat{f}(s)$ *es única y se verifica* $f(x) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(s))$*.*

Teorema A.1.12. Teorema de unicidad. *Sean dos funciones* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \wedge g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *que admiten transformada de Laplace. Si tienen la misma transformada de Laplace* $\hat{f}(s)\ \forall\ s \in \mathbb{C} \ / \ \Re(s) > a,$ *siendo* $a > 0 \wedge a > \gamma$*, con* γ *la abscisa de convergencia de la transformada de Laplace* $\hat{f}(s)$*, entonces* $f(x) = g(x)$ *para casi todo* $x > 0$*.*

Algunas de las propiedades más importantes de la transformada de Laplace son (en todas las propiedades suponemos funciones reales definidas en $[0, +\infty)$ para las cuales existe la transformada de Laplace):

- $\forall \, \{c_1, c_2\} \in \mathbb{R} \, : \, \mathcal{L}[c_1 f + c_2 g] = c_1 \mathcal{L}(f) + c_2 \mathcal{L}(g)$.
- $\forall \, a \in \mathbb{R} \, : \, \mathcal{L}(e^{ax} f(x)) = \hat{f}(s-a)$ siendo $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f)(s)$.
- Se verifica:

$$\forall \, a > 0 \text{ si } g(x) = \begin{cases} f(x-a), & \text{si } x > a \\ 0, & \text{si } x < a \end{cases} \, , \; \hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(x)) \text{ entonces: } \mathcal{L}(g(x)) = e^{-as} \hat{f}(s).$$

- $a > 0 \; \wedge \; \hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(x)) \Rightarrow \mathcal{L}(f(ax)) = \frac{1}{a} \hat{f}(\frac{s}{a})$.
- Si $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(x)) \, : \, \mathcal{L}(f'(x)) = s\hat{f}(s) - f(0)$.
- Si $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(x)) \, : \, \mathcal{L}(f^n(x)) = s^n \hat{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0), \; n \in \mathbb{N}$.
- Si $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(x))$ se verifica:

$$\mathcal{L}\Big(\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t \Big) = \frac{\hat{f}(s)}{s}.$$

- Si $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(x)) \, : \, \mathcal{L}(x^n f(x)) = (-1)^n f^n(s), \; n \in \mathbb{N}$.
- Si $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(x))$ se verifica:

$$\mathcal{L}\Big(\frac{f(x)}{x} \Big) = \int_s^{+\infty} \hat{f}(u) \, \mathrm{d}u.$$

- Si $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(x)) \, : \, \lim_{s \to +\infty} \hat{f}(s) = 0$.

Teorema A.1.13. Teorema del valor inicial. *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \; / \; \exists \; \mathcal{L}(f) = \hat{f}$. Se verifica*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{s \to +\infty} s\hat{f}(s)$$

cuando los límites existen.

Teorema A.1.14. Teorema del valor final. *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \; / \; \exists \; \mathcal{L}(f) = \hat{f}$. Se verifica*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{s \to 0} s\hat{f}(s)$$

cuando los límites existen.

Transformada Z.

Definición A.1.145. Transformada Z de una sucesión numérica. *Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} \in \mathbb{C}$ (también cualquier sucesión de números reales), denominamos "transformada Z de la sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$", y la denotamos por $\mathscr{Z}(a) = \hat{a}$, al par ordenado $(\mathscr{Z}(a), \mathbb{D}(a))$, $\mathbb{D}(a) \subset \mathbb{C}$, siendo:*

$$\mathscr{Z}(a) : \mathbb{D}(a) \to \mathbb{C} \;/\; \mathscr{Z}(a)(z) = \hat{a}(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n z^{-n},\ \forall\ z \in \mathbb{D}(a).$$

$\mathbb{D}(a)$ es el dominio de convergencia de la anterior serie (serie de Laurent).

Definición A.1.146. Transformada Z inversa. *Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in \mathbb{C}$ y su transformada Z, $(\hat{a}(z), \mathbb{D}(a))$ definimos la transformada Z inversa como*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{\hat{a}(z)\,\mathrm{d}z}{z^{n+1}},\ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Siendo C_r cualquier circunferencia con centro el origen ($z_0 = 0$) y radio r incluida en el dominio de convergencia $\mathbb{D}(a)$.

Algunas de las propiedades de la transformada Z son:

Teorema A.1.15. *Dadas dos sucesiones numéricas $\{a_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} \in \mathbb{C} \wedge \{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in \mathbb{C}$ y sus respectivas transformadas Z , $(\hat{a}(z), \mathbb{D}(a))$, $(\hat{b}(z), \mathbb{D}(b))$ se verifica:*

- *Sean $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{C}$, entonces $\mathscr{Z}(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) = (\alpha\hat{a}(z) + \beta\hat{b}(z), \mathbb{D}(a) \cap \mathbb{D}(b))$.*
- *Sea $m \in \mathbb{Z}$ fijo, entonces la transformada Z de la sucesión numérica $\{a_{n-m}\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ es $(z^{-m}\hat{a}(z), \mathbb{D}(a))$ (puede ocurrir que en $\mathbb{D}(a)$ haya que incluir 0 o ∞).*
- *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ fijo, entonces la transformada Z de la sucesión numérica $\{\alpha^n \cdot a_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ es $(\hat{a}(\frac{z}{\alpha}), |\alpha|\mathbb{D}(a))$.*
- *Se cumple la propiedad de convolución, es decir $\mathscr{Z}(a_n * b_n) = (\hat{a}(z) \cdot \hat{b}(z), \mathbb{D}(a) \cap \mathbb{D}(b))$.*

Sucesiones y series de funciones.

Consideramos una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones definidas en un mismo conjunto $C \subset \mathbb{R}$.

Definición A.1.147. Convergencia puntual de una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Decimos que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ "converge puntualmente en C hacia una función $f : C \to \mathbb{R}$", que denominamos "función límite", si para cada $x \in C$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $f(x)$.*

Definición A.1.148. Serie asociada a una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Dada la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denominamos "suma parcial n-ésima de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$" a la función $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Denominamos "serie asociada a la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$", y la denotamos por $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, a la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definición A.1.149. Convergencia puntual de una una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. *Sea la sucesión* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y sea la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *asociada. Decimos que la serie "converge puntualmente hacia la función* $s : C \to \mathbb{R}$*", que denominamos función suma, si para cada* $x \in C$ *la serie numérica* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *tiene por suma* $s(x)$.

Definición A.1.150. Convergencia uniforme de una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Dada la sucesión* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *decimos que "converge uniformemente en* C *hacia una función* $f : C \to \mathbb{R}$*" si*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N}\ /\ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon,\ \forall\, x \in C\ \wedge\ \forall\, n > \nu.$$

Definición A.1.151. Convergencia uniforme de una serie de funciones $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. *Dada la sucesión* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y la serie asociada* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$*, decimos que "la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente en* C *hacia una función* $s : C \to \mathbb{R}$*" cuando la sucesión de sumas parciales* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente en* C *hacia la función* $s : C \to \mathbb{R}$.

Proposición A.1.15. ***(Criterio M de Convergencia Uniforme de Weierstrass).*** *Dada una serie funcional* $\sum f_n$ *que converge puntualmente hacia una función* f *en un conjunto* $C \subseteq \mathbb{R}$*. Si existe una serie numérica convergente de términos positivos* $\sum M_n$ *tal que :*

$$0 \leq |\ f_n(x)\ | \leq M_n \text{ para todo } n \geq 0 \text{ y para todo } x \in C$$

entonces la serie funcional $\sum f_n$ *es uniformemente convergente en* C.

Proposición A.1.16. ***(Criterio de Dirichlet).*** *Sea* $C \subseteq \mathbb{R}$ *y* $\sum f_n$ *una serie de funciones de* C *en* $\mathbb{R}$ *y para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y cada* $x \in C$*, sea* $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$*. Si la sucesión* $\{s_n\}$ *está uniformemente acotada en* C *y* $\{g_n\}$ *es una sucesión de funciones de* C *en* $\mathbb{R}$ *tales que* $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $x \in C$ *que converge uniformemente a 0 en* C*, entonces la serie* $\sum f_n \cdot g_n$ *converje uniformemente en* C.

Proposición A.1.17. ***(Criterio de Abel).*** *Sea* $C \subseteq \mathbb{R}$ *y* $\sum f_n$ *una serie de funciones de* C *en* $\mathbb{R}$ *que converge uniformemente en* C*. Sea* $\{g_n\}$ *una sucesión de funciones de* C *en* $\mathbb{R}$*, tales que* $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $x \in C$ *uniformemente acotada en* C*. Entonces la serie* $\sum f_n \cdot g_n$ *converge uniformemente en* C.

Proposición A.1.18. *Sea* $C \subseteq \mathbb{R}$ *y* $\sum f_n$ *una serie de funciones de* C *en* $\mathbb{R}$*. Si las funciones* f_n *tienen derivada continua* $f_n^{'}$ *en* $C \subseteq \mathbb{R}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, si la serie* $\sum f_n(x)$ *converje en* $C \subseteq \mathbb{R}$ *y si la serie* $\sum f_n^{'}$ *de sus derivadas converje uniformemente, entonces la serie* $\sum f_n$ *puede ser derivada termino a término. Es decir:*

$$\left(\sum f_n(x)\right)^{'} = \sum f_n^{'}(x).$$

Referencias clásicas son [15] de H. Cartan, [126] de N. Piskunov, [140] de M. Spivak, ...

A.2. Teoría de la medida.

La teoría de la medida se puede desarrollar de forma abstracta a partir de unos objetos esenciales y una axiomática apropiada. En esta sección, salvo que se especifique lo contrario, usamos las notaciones, propiedades y lenguaje habituales de la teoría de conjuntos. Entre otros, son muy interesantes los textos [71] de J. L. Kelley, y [116] de R. L. Moore.

A.2.1. Estructuras, medidas y espacios de medida.

Definición A.2.1. Espacio. *Definimos "Espacio" y lo denotamos por Ω, como cualquier conjunto Ω no vacío fijo, con independencia de la naturaleza de los elementos que forman parte de ese conjunto, que pertenecen a Ω; a esos elementos que forman parte de Ω los denominamos "puntos" y los denotamos por ω.*

Definición A.2.2. Subconjunto de un espacio. *Dado un espacio cualquiera Ω, definimos "subconjunto de Ω", y lo denotamos por letras latinas mayúsculas (salvo que se especifique lo contrario), como cualquier conjunto formado por elementos del espacio Ω. A es subconjunto del espacio Ω sii $\omega \in \Omega \; \forall \; \omega \in A$. Decimos que un subconjunto A de Ω es un "subconjunto impropio" cuando $A = \emptyset \vee A = \Omega$.*

Definición A.2.3. Conjunto de las partes de un espacio. *Dado un espacio cualquiera Ω, definimos el "conjunto de las partes de Ω", y lo denotamo por $\mathscr{P}(\Omega)$, como la familia formada por todos los subconjuntos de Ω.*

Definición A.2.4. Sucesión de conjuntos. *Dado un espacio Ω cualquiera definimos "sucesión de conjuntos de Ω" (por comodidad no usamos "sucesión de subconjuntos"), y lo denotamos por $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a toda aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathscr{P}(\Omega)$.*

Definición A.2.5. Sucesión monotona. *Dada una sucesión de conjuntos de Ω, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, decimos que es una "sucesión monótona creciente", y lo denotamos por $A_n \uparrow$, cuando:*

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \; \forall \; n \in \mathbb{N}.$$

Decimos que es una "sucesión monótona decreciente", y lo denotamos por $A_n \downarrow$, cuando:

$$A_n \supseteq A_{n+1}, \; \forall \; n \in \mathbb{N}.$$

Decimos que es "estrictamente creciente" cuando $A_n \subset A_{n+1} \; \forall \; n \in \mathbb{N}$; decimos que es "estrictamente decreciente" cuando $A_n \supset A_{n+1} \; \forall \; n \in \mathbb{N}$.

Definición A.2.6. Límite inferior de una sucesión. *Dada una sucesión de conjuntos (de Ω) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definimos "límite inferior de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$", y lo denotamos por $\liminf(A_n)$, como el conjunto de puntos $\omega \in \Omega$ que pertenecen a todos los A_n, $n > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ de la sucesión. Es decir, el conjunto de puntos $\omega \in \Omega$ que pertenecen a todos los A_n excepto a una cantidad finita.*

Definición A.2.7. Límite superior de una sucesión. *Dada una sucesión de conjuntos (de Ω) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definimos "límite superior de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$", y lo denotamos por $\limsup(A_n)$, como el conjunto de puntos $\omega \in \Omega$ que pertenecen a infinitos A_n de la sucesión.*

Definición A.2.8. Límite de una sucesión. *Dada una sucesión de conjuntos de* Ω, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *decimos que "tiene límite" cuando* $\text{lím}\inf(A_n) = \text{lím}\sup(A_n)$. *Al conjunto* $\text{lím}\inf(A_n) = \text{lím}\sup(A_n)$ *lo denominamos "límite de la sucesión" y lo denotamos por* $\text{lím}(A_n)$, $\text{lím}(A_n) = \text{lím}\inf(A_n) = \text{lím}\sup(A_n)$.

Proposición A.2.1. *Dada una sucesión cualquiera de conjuntos de* Ω, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *cualquiera, se verifica:*

- $\text{lím}\inf(A_n) = \bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n\right)$.
- $\text{lím}\sup(A_n) = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right)$.
- *Toda sucesión de conjuntos de* Ω, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *monótona decreciente tiene límite y se cumple:*

$$\text{lím}(A_n) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

- *Toda sucesión de conjuntos de* Ω, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *monótona creciente tiene límite y se cumple:*

$$\text{lím}(A_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Definición A.2.9. Clase monótona. *Dada una familia* $\mathscr{M}$ *de subconjuntos de* Ω *decimos que tiene estructura de "clase monótona" sii* $\forall\ \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M} \subset \mathscr{P}(\Omega)\ /\ A_n \downarrow\ \vee\ A_n \uparrow:\ \text{lím}(A_n) \in \mathscr{M}$.

Definición A.2.10. π**-sistema(Dynkin)**. *Dada una familia* $\mathscr{C}$ *de subconjuntos de* Ω *decimos que "tiene estructura de* π*-sistema" si* $\forall\{A, B\} \in \mathscr{C}$ *se verifica que* $A \cap B \in \mathscr{C}$.

Definición A.2.11. Semianillo. *Dada una familia* $\mathbb{S}$ *de subconjuntos de* Ω *decimos que "tiene estructura de semianillo" si verifica:*

- $\emptyset \in \mathbb{S}$.
- $\forall\{A, B\} \in \mathbb{S}$ *se cumple que* $A \cap B \in \mathbb{S}$.
- $\forall\{A, B\} \in \mathbb{S}\ \exists\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{S},\ C_i \cap C_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ *tal que* $A - B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

Definición A.2.12. Anillo. *Dada una familia* $\mathcal{R}$ *de subconjuntos de* Ω *decimos que "tiene estructura de anillo" si verifica:*

- $\forall\ \{A, B\} \in \mathcal{R}\ :\ A \cap B \in \mathcal{R}$.
- $\forall\ \{A, B\} \in \mathcal{R}\ :\ A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{R}$.

Definición A.2.13. Anillo generado por un semianillo. *Dada una familia $\mathbb{S}$ de subconjuntos de Ω con la estructura de semianillo denominamos "anillo generado por el semianillo $\mathbb{S}$", y lo denotamos por $\mathcal{R}(\mathbb{S})$, al menor de los anillos $\mathcal{R} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ que contiene al semianillo $\mathbb{S}$.*

Proposición A.2.2. *Dado un semianillo $\mathbb{S} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, sea $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ la familia de subconjuntos de Ω formada por las uniones finitas de subconjuntos disjuntos de $\mathbb{S}$; se verifica que el anillo generado por $\mathbb{S}$ coincide con la familia $\mathscr{F}$, $\mathcal{R}(\mathbb{S}) = \mathscr{F}$.*

Definición A.2.14. σ-anillo. *Dada una familia $\mathscr{R}$ de subconjuntos de Ω decimos que "tiene estructura de σ-anillo" si verifica:*

- *$\mathscr{R}$ es anillo.*
- $\forall \, \{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathscr{R} \; : \; \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathscr{R}$.

Definición A.2.15. Semiálgebra. *Dada una familia $\mathbb{A}$ de subconjuntos de Ω decimos que "tiene estructura de semiálgebra" si verifica:*

- $\Omega \in \mathbb{A}$.
- $\forall \, \{A, B\} \in \mathbb{A} \; : \; A \cap B \in \mathbb{A}$.
- $\forall \, A \in \mathbb{A} \; \exists \, \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{A}, \; A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall \, \{i, j\} \in \{1, \cdots, n\} \; / \; i \neq j \; : \; \neg A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Definición A.2.16. Álgebra. *Dada una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω decimos que "tiene estructura de álgebra" si verifica:*

- $\Omega \in \mathcal{A}, \; \emptyset \in \mathcal{A}$.
- *Si $\{A, B\} \in \mathcal{A}$ se cumple que $A - B \in \mathcal{A}$.*

Usaremos el símbolo $\neg$ para indicar el complementario de un subconjunto $A \subset \Omega$; es decir denotamos $\neg A = \Omega - A$.

Definición A.2.17. σ-álgebra. *Dada una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de Ω decimos que "tiene estructura de σ-álgebra" si verifica:*

- $\Omega \in \mathscr{A}$.
- *$\forall A \in \mathscr{A}$ se cumple que $\neg A \in \mathscr{A}$.*
- *Si $\{A_k\}_{k=1,2,\cdots} \in \mathscr{A}$ se cumple que $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathscr{A}$.*

Definición A.2.18. σ-álgebra generada. Álgebra generada.

Dada una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de un espacio Ω definimos como "σ-álgebra generada por $\mathscr{F}$", y la denotamos por $\sigma(\mathscr{F})$, a la menor de las σ-álgebras de subconjuntos de Ω que contienen a $\mathscr{F}$. Definimos el "álgebra generada por $\mathscr{F}$" como la menor de las álgebras de subconjuntos de Ω que contienen a $\mathscr{F}$, la denotamos por $\mathbb{A}(\mathscr{F})$.

Definición A.2.19. σ-álgebra de Borel. *Definimos "σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$", y la denotamos por $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, a la generada por todos sus conjuntos abiertos (con la topología usual, definición A.1.65, en la página 204). Los conjuntos $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ los denominamos "conjuntos de Borel".*

Lema A.2.1. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$, $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, está generada por cualquiera de las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$:*

- *La familia formada por todos los intervalos (entendiendo "intervalo" en el sentido habitual en $\mathbb{R}$ con la topología usual).*
- *La familia de todos los intervalos con extremos racionales.*
- *La familia $\mathscr{F}_1 = \{(-\infty, c),\ c \in \mathbb{Q}\}$.*
- *La familia $\mathscr{F}_2 = \{(-\infty, c],\ c \in \mathbb{Q}\}$.*
- *La familia $\mathscr{F}_3 = \{(c, +\infty),\ c \in \mathbb{Q}\}$.*
- *La familia $\mathscr{F}_4 = \{[c, +\infty),\ c \in \mathbb{Q}\}$.*

El lema también se cumple si en vez de números racionales tomamos puntos de cualquier conjunto denso (definición A.1.81, página 205).

Proposición A.2.3. *Dado un espacio Ω y una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de Ω cualquiera, existe una única σ-álgebra generada por $\mathscr{F}$. Existe una única álgebra generada por $\mathscr{F}$.*

Lema A.2.2. *Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia de subconjuntos de un espacio Ω y sea f una aplicación entre un conjunto E y el espacio Ω. Se verifica:*

$$\neg\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} \Big(\neg A_i\Big),\ \neg\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{n} \Big(\neg A_i\Big).$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i),\ f^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i).$$

Corolario A.2.1. *Sea $\mathscr{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos del espacio Ω; sea f una aplicación cualquiera de un conjunto E en el espacio Ω, se verifica que la clase $f^{-1}(\mathscr{A})$ de todos los conjuntos de la forma $f^{-1}(A),\ A \in \mathscr{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de E.*

Para cualquier σ-álgebra $\mathscr{B}$ de subconjuntos de E, la familia de subconjuntos $\{A \subset \Omega\ :\ f^{-1}(A) \in \mathscr{B}\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Para cualquier familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de Ω se verifica que $\sigma(f^{-1}(\mathscr{F})) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{F}))$.

Definición A.2.20. Espacio medible. *Un par $(\Omega, \mathscr{A})$ donde Ω es un espacio y $\mathscr{A}$ es una familia de subconjuntos de Ω con la estructura de σ-álgebra decimos que "es un espacio medible".*

Definición A.2.21. Función real de conjunto. *Dada una familia cualquiera de subconjuntos $\mathscr{F}$ del espacio Ω, $F \in \mathscr{P}(\Omega)\ \forall\ F\ \in\ \mathscr{F}$, definimos "función (aplicación) real de conjunto" como la aplicación que a cada conjunto $F \in \mathscr{F}$ le hace corresponder un número real; f es una función real de conjunto sii $f \in \mathscr{F} \times \mathbb{R}\ \wedge\ \forall\ F \in \mathscr{F}\ \exists!\ b \in \mathbb{R}\ /\ f(F) = b$. Si $f(F) \geq 0\ \forall\ F \in\ \mathscr{F}$ decimos que es una "función de conjunto".*

Definición A.2.22. Función real de conjunto aditiva. *Dada una familia cualquiera $\mathscr{F}$ de subconjuntos del espacio Ω y una función real de conjunto $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ decimos que es una "función real de conjunto aditiva" si*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i),\ n \in \mathbb{N}$$

$$\forall\ \{F_i\}_{i=1}^{n}\ \in\ \mathscr{F}\ /\ F_i \cap F_j = \emptyset\ \forall\ \{i,j\},\ i \neq j\ i \leq n \wedge j \leq n.$$

Si $\mu(F) \geq 0\ \forall\ F \in \mathscr{F}$ decimos que es una función de conjunto aditiva.

Definición A.2.23. Función real de conjunto σ-aditiva. *Dada una familia cualquiera $\mathscr{F}$ de subconjuntos del espacio Ω y una función real de conjunto $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ decimos que es una "función real de conjunto σ-aditiva" si*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i\Big) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(F_i)$$

$$\forall\ \{F_i\}_{i=1}^{+\infty}\ \in\ \mathscr{F}\ /\ F_i \cap F_j = \emptyset\ \forall\ \{i,j\},\ i \neq j.$$

Si $\mu(F) \geq 0\ \forall\ F \in \mathscr{F}$ decimos que es una función de conjunto σ-aditiva.

Definición A.2.24. Medida real. *Dada una σ-álgebra $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ y una función real de conjunto $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ decimos que es una "medida real" (V. I. Bogachev,[11]), "medida con signo(signada)" (M. de Guzman y B. Rubio, [60]) si es σ-aditiva y verifica $\mu(\emptyset) = 0$. Decimos que μ es "finita" si $\mu(\Omega) \neq \pm\infty$; decimos que es "$\sigma$-finita" si Ω es la unión de una familia numerable de subconjuntos de $\mathscr{A}$ con medida finita.*

Definición A.2.25. Medida. *Dada una σ-álgebra $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ y una función de conjunto $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ decimos que es una "medida" si es σ-aditiva y verifica $\mu(\emptyset) = 0$. Decimos que es "finita" si $\mu(\Omega) < +\infty$; decimos que es "σ-finita" si Ω es la unión de una familia numerable de subconjuntos de $\mathscr{A}$ con medida finita; decimos que es "completa" si todo subconjunto B de un conjunto $A \in \mathscr{A}\ /\ \mu(A) = 0$ es medible, $B \in \mathscr{A}$.*

Definición A.2.26. Espacio de medida real. *Definimos "espacio de medida real" como la terna ordenada $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, siendo Ω un espacio, $\mathscr{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ una medida real.*

Definición A.2.27. Espacio de medida. *Definimos "espacio de medida" como la terna ordenada $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, siendo Ω un espacio, $\mathscr{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ una medida.*

Definición A.2.28. Proposición verdadera para μ-casi todo $\omega \in \Omega$. *Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y una proposición (propiedad, enunciado, en el sentido habitual de la lógica simbólica, M. Garrido [53]) P relativa a los puntos $\omega \in \Omega$ decimos que "es μ-verdadera para casi todo $\omega \in \Omega$" o que "se cumple para μ-casi todo $\omega \in \Omega$", y lo denotamos por "μ.c.t .$\omega \in \Omega$", (μ.c.t. cuando resulte superfluo añadir $\omega \in \Omega$) cuando $\mu\Big(\neg\{\omega \in \Omega\ :\ \omega \text{ cumple } P\}\Big) = 0$.*

Definición A.2.29. Funciones equivalentes. *Dado el espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y dos funciones $\{f, g\}\ /\ f : \Omega \to \mathbb{R}^* \wedge\ g : \Omega \to \mathbb{R}^*(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ decimos que "son equivalentes", y lo denotamos por $f \equiv g$, sii $f(\omega) = g(\omega)$ μ.c.t. Es decir sii*

$$\mu(\{\omega \in \Omega \ : \ f(\omega) \neq g(\omega)\} = 0.$$

Definición A.2.30. Convergencia en casi todos los puntos. *Dado el espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ / $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^*$, decimos que "converge en casi todos los puntos $\omega \in \Omega$ hacia una función $g : \Omega \to \mathbb{R}^*$", y lo denotamos por $f_n \overset{\mu.c.t.}{\to} g$, sii*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) = g(\omega) \ \mu.c.t.$$

Teorema A.2.1. *Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ / $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^* \ \wedge \ f_n \overset{\mu.c.t.}{\to} g$, f_n $\mathscr{A}$-medible $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ g$ $\mathscr{A}$-medible.*

Definición A.2.31. Convergencia en medida. *Dado el espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^* \ \wedge \ f_n$ $\mathscr{A}$-medible $\forall\, n \in \mathbb{N}$, decimos que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ "converge en medida hacia la función $g : \Omega \to \mathbb{R}^*$", y lo denotamos por $f_n \overset{\mu}{\to} g$ sii $\forall\, \epsilon > 0$ se verifica*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{\omega \in \Omega \ : \ |f_n(\omega) - g(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

Teorema A.2.2. *Dado el espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ / $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^* \ \wedge$ f_n $\mathscr{A}$-medible $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n \overset{\mu.c.t.}{\to} g \Rightarrow f_n \overset{\mu}{\to} g$.*

Teorema A.2.3. *Dado el espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ / $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^* \ \wedge$ f_n $\mathscr{A}$-medible $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n \overset{\mu}{\to} g \Rightarrow \exists\, \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ / $f_{n_k} \overset{\mu.c.t.}{\to} g$.*

Teorema A.2.4. *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida real. Para cada $E \in \mathscr{A}$ definimos:*

$$\mu^+(E) = \sup\{\mu(P) \ : \ P \subset E, \ P \in \ \mathscr{A}\}.$$

$$\mu^-(E) = -\inf\{\mu(P) \ : \ P \subset E, \ P \in \ \mathscr{A}\}.$$

Se verifica

- *μ^+ es una medida finita o σ-finita si μ es finita o σ-finita respectívamente.*
- *μ^- es una medida finita.*
- *$\mu = \mu^+ - \mu^-$ (descomposición de Jordan de μ).*

Definición A.2.32. Variación total de una medida real μ. *Dado un espacio de medida real $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y la descomposición de Jordan de la medida $\mu = \mu^+ - \mu^-$, definimos "variación total de μ", y la denotamos por $|\mu|$, como la suma de μ^+ y μ^-; $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.*

Definición A.2.33. Continuidad de una medida real ν respecto de otra medida real μ. *Dada una σ-álgebra de subconjuntos de un espacio Ω, $\mathscr{A}$, y dos medidas reales $\{\nu,\ \mu\}$ definidas sobre $\mathscr{A}$ decimos que "ν es absolutamente continua respecto de μ", y lo denotamos por $\nu \ll \mu$, cuando $|\nu|(A) = 0\ \forall\ A \in \mathscr{A}\ /\ |\mu|(A) = 0$.*

Teorema A.2.5. Teorema de Hahn para medidas reales. *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida real, siendo μ una medida real σ- finita. Existen $\{A, B\} \in \mathscr{A},\ A \cap B = \emptyset\ \wedge A \cup B = \Omega\ /\ \mu(E) \geq 0\ \forall\ E \subset A,\ E \in \mathscr{A}\ \wedge\ \mu(E) \leq 0\ \forall\ E \subset B,\ E \in \mathscr{A}$. Además, $\forall\ C \in \mathscr{A}$ se verifica*

$$\mu^+(C) = \mu(C \cap A) \text{ y } \mu^-(C) = -\mu(C \cap B).$$

Definición A.2.34. Medidas reales singulares entre sí. *Dada una σ-álgebra de subconjuntos del espacio Ω, $\mathscr{A}$, y dos medidas reales definidas sobre $\mathscr{A}, \{\alpha, \beta\}$. Decimos que "son singulares entre sí", y lo denotamos por $\alpha \prec \beta$, si $\exists\ \{A, B\} \in \mathscr{A}\ /\ A \cap B = \emptyset\ \wedge\ A \cup B = \Omega$ y $:\ |\alpha|(B) = 0\ \wedge |\beta|(A) = 0$. También si $\exists\ A \in \mathscr{A}\ /\ |\alpha|(A) = 0\ \wedge\ |\beta|(\neg A) = 0$*

Teorema A.2.6. Teorema de descomposición de Lebesgue para medidas reales. *Sea un espacio de medida real $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y ν una medida real σ-finita definida sobre $\mathscr{A}$. Existen dos medidas reales $\{\alpha, \beta\}$ definidas sobre $\mathscr{A}$, singulares entre sí, tales que α es absolutamente continua respecto de μ, β es singular respecto de μ y se verifica $\nu = \alpha + \beta$.*

Definición A.2.35. Átomo respecto de una medida μ. *Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, denominamos "átomo respecto de la medida μ" a todo subconjunto $C \in \mathscr{A}\ /\ \mu(C) > 0\ \wedge\ \forall D \subset C,\ D \in \mathscr{A}\ :\ \mu(D) = 0\ \vee\ \mu(D) = \mu(C)$.*

Definición A.2.36. Continuidad de una medida ν respecto de otra medida μ. *Dada una σ-álgebra de subconjuntos de un espacio Ω, $\mathscr{A}$, y dos medidas $\{\nu,\ \mu\}$ definidas sobre $\mathscr{A}$ decimos que "ν es absolutamente continua respecto de μ" cuando $\nu(A) = 0\ \forall\ A \in \mathscr{A}\ /\ \mu(A) = 0$.*

Definición A.2.37. Medida exterior en un espacio Ω. *Sea Ω un espacio, definimos "medida exterior en el espacio Ω" a una aplicación $\mu_e : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty)$ que verifica:*

- $\mu_e(\emptyset) = 0$.
- $\mu_e(A) \leq \mu_e(B)\ \forall\{A, B\} \in \mathscr{P}(\Omega)\ /\ A \subset B$.
- *Es σ-subaditiva; es decir*

$$\mu_e\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_e(A_i)\ \forall\ \{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathscr{P}(\Omega).$$

Teorema A.2.7. *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Definimos*

$$\mu_\Omega : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty)\ /\ \mu_\Omega(A) = \inf\{\mu(B) :\ B \in \mathscr{A}\ \wedge\ A \subset B\}.$$

Se verifica que la aplicación μ_Ω es una medida exterior en el espacio Ω.

Teorema A.2.8. Caratheodory. *Sea Ω un espacio y μ_e una medida exterior en Ω. Sea la familia*

$$\mathscr{C} = \{A \in \mathscr{P}(\Omega) \ : \ \mu_e(A \cap B) + \mu_e(\neg A \cap B) \leq \mu_e(B) \ \forall \ B \in \mathscr{P}(\Omega)\}.$$

Sea μ la restricción de μ_e a $\mathscr{C}$. Se verifica que $\mathscr{C}$ es una σ-álgebra, μ es una medida completa y $(\Omega, \mathscr{C}, \mu)$ es un espacio de medida.

Definición A.2.38. Compleción de una σ-álgebra. *Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ definimos la "compleción de la σ-álgebra $\mathscr{A}$", y la denotamos por $\overline{\mathscr{A}}$, a la familia de subconjuntos de Ω*

$$\overline{\mathscr{A}} = \{N \cup A \ : \ A \in \mathscr{A}, \ N \in \mathscr{P}(\Omega) \ \wedge \ \exists \ N_1 \subset N, \ N_1 \in \mathscr{A} \ / \ \mu(N_1) = 0\}.$$

Teorema A.2.9. *Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, sea $\overline{\mathscr{A}}$ la compleción de la σ-álgebra $\mathscr{A}$. Se verifica:*

- $\mathscr{A} \subset \overline{\mathscr{A}}$.
- $\overline{\mathscr{A}}$ *tiene estructura de σ-álgebra.*

Teorema A.2.10. *Sea $\mathbb{S} \in \mathscr{P}(\Omega)$ un semianillo en el espacio Ω, sea $\mu : \mathbb{S} \to [0, +\infty)$ una medida y sea $\mathcal{R}(\mathbb{S})$ el anillo generado por el semianillo $\mathbb{S}$. Existe una única medida $\mu^* : \mathcal{R}(\mathbb{S}) \to [0, +\infty)$ que es una extensión de μ sobre $\mathcal{R}(\mathbb{S})$ (siendo $\mathcal{R}(\mathbb{S})$ el anillo generado por $\mathbb{S}$):*

$$\mu^*(C) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \text{ para cualquier } \{C_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{S}, \ C_i \cap C_j = \emptyset \ \forall i \neq j \ / \ C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i, \ C \in \mathcal{R}(\mathbb{S}).$$

Teorema A.2.11. Teorema de extensión de Caratheodory. *Si $\mathcal{R}$ es un anillo de subconjuntos del espacio Ω y μ es una medida σ-finita definida sobre $\mathcal{R}$, existe una única medida μ^* sobre la σ-álgebra generada por $\mathcal{R}$, $\sigma(\mathcal{R})$, que extiende a μ. Es la obtenida considerando como medida exterior*

$$\forall \ A \in \mathscr{P}(\Omega), \ \mu_e(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(B_i) \ \forall \ \{B_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathcal{R} \ / \ A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\}.$$

Se verifica que la compleción de la σ-álgebra $\sigma(\mathcal{R})$, $\overline{\sigma(\mathcal{R})}$ coincide con la σ-álgebra $\mathscr{C}$ obtenida mediante la medida exterior μ_e, $\overline{\sigma(\mathcal{R})} = \mathscr{C}$. El espacio de medida $(\Omega, \overline{\sigma(\mathcal{R})}, \bar{\mu})$, siendo $\bar{\mu}$ la restricción de μ_e a $\overline{\sigma(\mathcal{R})}$, es un espacio de medida completo.

Definición A.2.39. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. *Dado el espacio $\mathbb{R}^n$ definimos la "medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, y la denotamos por ℓ^n, a la medida obtenida considerando el semianillo $\mathbb{S}^n = \{I^n = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \ a_i \in \mathbb{R} \wedge b_i \in \mathbb{R} \ \forall \ i = 1, \cdots, n\}$, la medida definida en $\mathbb{S}^n, |I^n| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$, el anillo generado por $\mathbb{S}^n$, $\mathcal{R}(\mathbb{S}^n) = \{\bigcup_{i=1}^{n} I_i^n \ : \ I_i^n \in \mathbb{S}^n \ \forall \ i = 1, \cdots, n \ \wedge I_i^n \cap I_j^n = \emptyset \ \forall i \neq j\}$ y la medida exterior*

$$\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n), \ \mu_e(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i^n|, \ A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_j^n, \ I_i^n \in \mathbb{S}^n \ \forall \ i = 1, \cdots, +\infty \ \wedge I_i^n \cap I_j^n = \emptyset \ \forall i \neq j\}.$$

La σ-álgebra $\mathscr{C}$ obtenida mediante la medida exterior μ_e la denominamos "σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$" y la denotamos por $\mathscr{L}^n$; verifica $\mathscr{L}^n = \overline{\sigma(\mathcal{R}(\mathbb{S}^n))}$. La restricción de μ_e a $\mathscr{L}^n$ la denominamos "medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$", y la denotamos por ℓ^n.

Teorema A.2.12. *El espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}^n, \ell^n)$ es un espacio completo.*

Definición A.2.40. Medida de Lebesgue-Stieltjes. *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona no decreciente y continua a la izquierda (entendiendo "monótona no decreciente" y "continua a la izquierda" en el sentido habitual en el análisis matemático, N. Piskunov, [126]) cumpliendo $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Para cada intervalo real $(a, b]$ definimos*

$$\mu((a, b]) = g(b) - g(a).$$

Para cada $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ definimos

$$\mu_g^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{+\infty} \mu((a_i, b_i]) \ : \ A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} (a_i, b_i]\}.$$

Se verifica que μ_g^* es una medida exterior en $\mathbb{R}$. La medida μ_g que se obtiene a partir de ella teniendo en cuenta el teorema de Caratheodory se denomina "medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a g".

A.2.2. Funciones medibles. Integral de Lebesgue y de Lebesgue-Stieltjes.

En esta subsección enumeraremos algunos de los resultados relacionados con la integral de Lebesgue y la integral de Lebesgue-Stieltjes, sin pretensión de ser exhaustivo. Vamos a considerar la "recta real ampliada", $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{B}(\mathbb{R}^*)$, considerando la topología usual en $\mathbb{R}^*$. Es decir, $B^* \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^*)$ sii $B^* = B \cup \{-\infty\} \vee B^* = B \cup \{+\infty\} \vee B^* = B \cup \{-\infty, +\infty\}$, $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. También, salvo que se indique lo contrario, se entiende que las operaciones estan bien definidas (por ejemplo, cuando hablamos de la suma de dos funciones definidas en un mismo espacio medible $(\Omega, \mathscr{A})$ y $\mathscr{A}$-medibles se entiende que $\nexists\, \omega \in \Omega \ / \ f(\omega) = +\infty \wedge g(\omega) = -\infty \vee f(\omega) = -\infty \wedge g(\omega) = +\infty$)

Definición A.2.41. Aplicaciones medibles respecto de las σ-álgebras $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$. *Dados dos espacios medibles $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ y una aplicación $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ decimos que "f es medible respecto a las σ-álgebras $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$" sii $f^{-1}(A_2) \in \mathscr{A}_1 \ \forall\, A_2 \in \mathscr{A}_2$.*

Definición A.2.42. Aplicaciones $\mathscr{A}$-medibles. *Dado el espacio medible $(\Omega, \mathscr{A})$ y una aplicación (función) $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ decimos que es "$\mathscr{A}$-medible" o "medible respecto a la σ-álgebra $\mathscr{A}$" sii $f^{-1}(B^*) \in \mathscr{A} \ \forall\, B^* \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^*)$.*

Proposición A.2.4. *Dado un espacio medible $(\Omega, \mathscr{A})$, una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ y una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^*)$ que genera $\mathbb{B}(\mathbb{R}^*)$, $\sigma(\mathscr{F}) = \mathbb{B}(\mathbb{R}^*)$, f es $\mathscr{A}$-medible sii $f^{-1}(F) \in \mathscr{A} \ \forall\, F \in \mathscr{F}$.*

Definición A.2.43. Función indicadora. *Dado un espacio medible $(\Omega, \mathscr{A})$ y $A \in \mathscr{A}$ definimos la "función indicadora de A", y la denotamos por I_A, como*

$$I_A : \Omega \to \mathbb{R}^* \ / \ I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\, \omega \in A \\ 0 & si\, \omega \notin A \end{cases}$$

Definición A.2.44. Función simple. *Dado un espacio medible* $(\Omega, \mathscr{A})$ *y una función* $f : \Omega \to \mathbb{R}^* \ / \ f = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}, \ a_i \in \mathbb{R}^* \wedge A_i \in \mathscr{A} \ \forall i = 1, \cdots, n \ n \in \mathbb{N}$ *decimos que es una "función simple".*

Proposición A.2.5. *Dado un espacio medible* $(\Omega, \mathscr{A})$*, dos funciones simples* $f : \Omega \to \mathbb{R}^* \ \wedge \ g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *se verifica que* $f + g$*,* af *y* fg *son funciones simples.*

Proposición A.2.6. *Toda función simple* $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ *verifica* $f = \sum_{i=1}^{n} b_i I_{B_i}, \ b_i \in \mathbb{R}^* \ \forall \ i = 1, \cdots, n, \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ \{B_i\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{A} \ / \ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega, \ B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall \ i \neq j, \ \{i, j\} \in \{1, \cdots, n\}$.

Proposición A.2.7. *Dado un espacio medible* $(\Omega, \mathscr{A})$ *se verifica:*

- *La función indicadora* $I_A : \Omega \to \mathbb{R}^*, \ A \in \mathscr{A}$ *es una función* $\mathscr{A}$*-medible.*
- *Toda función simple* $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ *es* $\mathscr{A}$*-medible.*
- *Dadas dos funciones* $f : \Omega \to \mathbb{R}^* \ \wedge \ g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ $\mathscr{A}$*-medibles y* $c \in \mathbb{R}$ *se verifica:* $cf, \ f + c, \ f + g, \ fg, \ \frac{1}{f}, \ \text{mín}\{f, g\}, \ \text{máx}\{f, g\}, \ |f|$ *son* $\mathscr{A}$*-medibles.*
- *Si* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^*$ $\mathscr{A}$*-medibles se verifica:* $\text{ínf}\{f_n\}, \ \sup\{f_n\}, \ \text{lím inf}\{f_n\} \ \wedge \ \text{lím sup}\{f_n\}$ *son* $\mathscr{A}$*-medibles.*

Proposición A.2.8. *Sea un espacio medible* $(\Omega, \mathscr{A})$ *y una función* $f : \Omega \to [0, +\infty], \ \mathscr{A}$*-medible. Existe una sucesión monótona no decreciente* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \ f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ *de funciones simples tal que* $\text{lím} f_n(\omega) = f(\omega) \ \forall \ \omega \in \Omega$.

Teorema A.2.13. *Sea* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida, con* μ *completa y* σ*-finita. Sea* $\mathscr{S} = \{f = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}, \ a_i \in \mathbb{R} \ \forall \ i = 1, \cdots, n \ \wedge \ \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{A} \ / \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \ \wedge \ A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall \ i \neq j \ \{i, j\} \in \{1, \cdots, n\}, \ \mu(A_i) < +\infty \ \forall \ i = 1, \cdots, n\}$*. Definimos*

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Se verifica

- *Sea* $f : \Omega \to [0, +\infty], \mathscr{A}$*-medible.* $\exists \ \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{S} \ / \ f_n \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \wedge \text{lím}(f_n) = f \ \mu.c.t. \ \omega \in \Omega$*. Existe (finito o infinito)*

$$\text{lím} \left[\int_{\Omega} f_n \, \mathrm{d}\mu \right].$$

- *Para cualquier otra* $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{S} \ / \ g_n \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ \text{lím}(g_n) = f \ \mu.c.t. \ \omega \in \Omega$ *se cumple*

$$\text{lím} \left[\int_{\Omega} f_n \, \mathrm{d}\mu \right] = \text{lím} \left[\int_{\Omega} g_n \, \mathrm{d}\mu \right].$$

Definición A.2.45. "Parte positiva" y "parte negativa" de una función $\mathscr{A}$-medible. *Sea un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función $\mathscr{A}$-medible. Definimos la "parte positiva de f", y la denotamos por f^+, como $f^+ = \text{máx}\{0, f\}$; definimos la "parte negativa de f", y la denotamos por f^-, como $f^- = -\text{mín}\{0, f\}$.*

Definición A.2.46. Integral de Lebesgue. *Sea un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, siendo μ completa y σ-finita. Sea $\mathscr{S} = \{f = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i},\ a_i \in \mathbb{R}\ \forall\ i = 1, \cdots, n\ \wedge\ \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{A}\ /\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega\ \wedge\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall\ i \neq j\ \{i, j\} \in \{1, \cdots, n\},\ \mu(A_i) < +\infty\ \forall\ i = 1, \cdots, n\}$. Definimos:*

- *Integral de Lebesgue de una función simple $f = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i},\ a_i \in \mathbb{R}\ \forall\ i = 1, \cdots, n,\ A_i \in \mathscr{A}\ \forall\ i = 1, \cdots, n,\ A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j\ \wedge\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ como*

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

- *Integral de Lebesgue de una función $f : \Omega \to [0, +\infty]$ $\mathscr{A}$-medible como*

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \text{lím}\left[\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu\right].$$

Siendo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}\ \wedge\ f_n \geq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ una sucesión monótona no decreciente tal que $\text{lím}(f_n) = f$ μ.c.t.$\omega \in \Omega$.

- *Integral de Lebesgue de una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-medible como*

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^-\,\mathrm{d}\mu.$$

En todos los casos que las expresiones tienen sentido, pudiendo ser la integral infinita.

Definición A.2.47. Función integrable en el sentido de Lebesgue respecto de una medida μ. *Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, siendo μ completa y σ-finita, y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathscr{A}$-medible decimos que "es integrable en el sentido de Lebesgue respecto de la medida μ" si*

$$\int_\Omega f^-\,\mathrm{d}\mu < +\infty,\ \int_\Omega f^+\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Definición A.2.48. El conjunto $L^1(\mu)$. *Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, siendo μ completa y σ-finita, definimos el conjunto $L^1(\mu)$ como el formado por todas las funciónes $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathscr{A}$-medibles y que son integrables en el sentido de Lebesgue respecto de la medida μ.*

Proposición A.2.9. *Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, siendo μ completa y σ-finita, y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathscr{A}$-medible, es integrable en el sentido de Lebesgue respecto de la medida μ, $f \in L^1(\mu)$ sii*

$$\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega [f^- + f^+] \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Proposición A.2.10. *Sea el espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, siendo μ completa y σ-finita; sean $f : \Omega \to \mathbb{R}^*,\ g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ $\mathscr{A}$-medibles / $\{f, g\} \in L^1(\mu)\ \wedge\ \{a, b\} \in \mathbb{R}$. Se verifica:*

- **Linealidad**. $af + bg \in L^1(\mu)$ *y*

$$\int_\Omega [af + bg] \, \mathrm{d}\mu = a \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu + b \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

- **Monotonía**.$f \geq g \Rightarrow$

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

- $\{A, B\} \in \mathscr{A}\ /\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$$\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

- $|f| \in L^1(\mu)$ *y*

$$\left| \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

- f *$\mathscr{A}$-medible y* $A \in \mathscr{A}\ /\ \mu(A) = 0 \Rightarrow fI_A \in L^1(\mu)$ *y*

$$\int_\Omega fI_A \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

- $h : \Omega \to \mathbb{R}^*$ *$\mathscr{A}$-medible y* $h = 0$ $\mu.c.t.\omega \in \Omega \Rightarrow\ h \in L^1(\mu)$ *y*

$$\int_\Omega h \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

- $f = g$ $\mu.c.t.\omega \in \Omega \Rightarrow$

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

- **Desigualdad de Markov**. $f : \Omega \to [0, +\infty)$, *$\mathscr{A}$-medible,* $f \in L^1(\mu), \forall\, a > 0$

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

- $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0.$
- $f \geq 0 \ \wedge \ \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0 \Rightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0.$

Teorema A.2.14. Teorema de convergencia monótona en μ.c.t.$\omega \in \Omega$. *Sea el espacio de medida* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *y la sucesión* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to [0, +\infty)$, *$\mathscr{A}$-medible* $\forall\, n \in \mathbb{N} \ \wedge \ \{f_n\} \uparrow$ *μ.c.t.*$\omega \in \Omega$, $\exists\, f : \Omega \to [0, +\infty)$ *$\mathscr{A}$-medible* / $f_n \uparrow f$ *μ.c.t.*$\omega \in \Omega \wedge$ *se verifica*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Corolario A.2.2. *Si se cumplen las hipótesis del teorema de convergencia monótona y* $g : \Omega \to [0, +\infty)$, $g \in L^1(\mu)$ / $f_n \uparrow g$ *μ.c.t.*$\omega \in \Omega$: $f = g$ *μ.c.t.*$\omega \in \Omega \wedge$ *se verifica*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

Lema A.2.3. Lema de Fatou en μ.c.t.$\omega \in \Omega$. *Sea el espacio de medida* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *y sea la sucesión* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to [0, +\infty)$ *μ.c.t.*$\omega \in \Omega, \vee\, f_n \geq g$ *μ.c.t.*$\omega \in \Omega$, $g \in L^1(\mu)$ *siendo* f_n *$\mathscr{A}$-medible* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *se verifica*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Sea la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to (-\infty, 0]$ *μ.c.t.*$\omega \in \Omega, \vee\, f_n \leq h$ *μ.c.t.*$\omega \in \Omega$, $h \in L^1(\mu)$ *siendo* f_n *$\mathscr{A}$-medible* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *se verifica*

$$\int_\Omega \limsup_{n\to+\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Corolario A.2.3. *Si se cumplen las hipótesis del lema de Fatou y* $|f_n| \leq g$ *μ.c.t.*$\omega \in \Omega$ *se verifica*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \limsup_{n\to+\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema A.2.15. Teorema de convergencia dominada en μ.c.t.$\omega \in \Omega$. *Sea el espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ y sea la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, f_n $\mathscr{A}$-medible $\forall\, n \in \mathbb{N}$ / $|f_n| \leq g$ μ.c.t.$\omega \in \Omega$, $g : \Omega \to [0, +\infty)$, $g \in L^1(\mu)$; sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathscr{A}$-medible / $f_n \to f$ μ.c.t.$\omega \in \Omega$ se verifica que $f \in L^1(\mu)$ y*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Teorema A.2.16. *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida siendo μ σ-finita, σ-aditiva y positiva(también se cumple en el caso de medidas reales (signadas)). Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathscr{A}$-medible e integrable (integral finita) definimos la función de conjunto*

$$\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R} \;/\; \nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f I_A \,\mathrm{d}\mu, \ \forall\, A \in \mathscr{A}.$$

ν es σ-aditiva, σ-finita, real y absolutamente continua respecto de μ, $\nu \ll \mu$.

Teorema A.2.17. Teorema de Radon-Nikodym. *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida con μ σ-finita, σ-aditiva y no negativa. Sea $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ una medida σ-aditiva, σ- finita y real absolutamente continua respecto de μ. Existe una única (μ.c.t.$\omega \in \Omega$) función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathscr{A}$-medible, integrable, con integral finita, tal que*

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

El siguiente teorema relaciona la integral de Lebesgue con la de Riemann.

Teorema A.2.18. *Sea f una función acotada definida sobre el intervalo $[a, b]$. La condición necesaria y suficiente para que sea integrable en "el sentido de Riemann", R-integralbe, es que el conjunto de sus puntos de discontinuidad tenga medida de Lebesgue cero. Además, si f es integrable en el sentido de Riemann (R-integrable), también lo es en el de Lebesgue (L-integrable).*

Definición A.2.49. Integral de Lebesgue-Stieltjes. *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona no decreciente, continua por la izquierda, cumpliendo $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \wedge \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos la integral de Lebesgue-Stieltjes de g respecto de la medida de Lebesgue-Stieltjes inducida por la función F como*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \,\mathrm{d}F(t) \approx \int_\mathbb{R} g(t)\mu(\,\mathrm{d}t).$$

A.2.3. Espacios de medida producto.

A continuación vamos a definir los espacios medida producto, de importancia capital para el estudio de los espacios de probabilidad producto y los procesos estocásticos. Mediante el teorema de Fubini relacionaremos la integración en el espacio producto con la integración en los espacios de partida.

Definición A.2.50. Rectángulos medibles. *Sean los espacios de medida* $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$, *definimos "rectángulo medible" como todo subconjunto* $A_1 \times A_2 \subset \mathscr{P}(\Omega_1 \times \Omega_2) \ / \ A_1 \in \mathscr{A}_1 \ \wedge \ A_2 \in \mathscr{A}_2$.

Definición A.2.51. σ-álgebra producto. *Sean los espacios de medida* $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$, *definimos la "$\sigma$-álgebra producto de las σ-álgebras $\mathscr{A}_1 \ \wedge \ \mathscr{A}_2$", y la denotamos por $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$, como la σ-álgebra generada por la familia de los rectángulos medibles,* $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 \ / \ A_1 \in \mathscr{A}_1 \ \wedge \ A_2 \in \mathscr{A}_2\})$.

Proposición A.2.11. *Sean los espacios de medida* $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ *y sea* $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ *la σ-álgebra producto. Se verifica:*

- $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \Rightarrow \forall \ \omega_1 \in \Omega_1 \ : \ A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 \ / \ (\omega_1, \omega_2) \in A\} \in \mathscr{A}_2$; *del mismo modo* $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \Rightarrow \forall \ \omega_2 \in \Omega_2 \ : \ A_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 \ / \ (\omega_1, \omega_2) \in A\} \in \mathscr{A}_1$.

- $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R} \ / \ f$ *$\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$-medible* $\Rightarrow \forall \omega_1 \in \Omega_1 \ : \ f(\omega_1, \cdot) : \Omega_2 \to \mathbb{R} \ / \ \omega_2 \to f(\omega_1, \omega_2) \ \forall \omega_2 \in \Omega_2$ *es $\mathscr{A}_2$-medible; del mismo modo* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R} \ / \ f$ *$\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$-medible* $\Rightarrow \forall \omega_2 \in \Omega_2 \ : \ f(\cdot, \omega_2) : \Omega_1 \to \mathbb{R} \ / \ \omega_1 \to f(\omega_1, \omega_2) \ \forall \omega_1 \in \Omega_1$ *es $\mathscr{A}_1$-medible.*

- *Sea $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Si μ_2 es una medida σ- finita la función* $\omega_1 \to \mu_2(A_{\omega_1}) \ \forall \omega_1 \in \Omega_1$ *es $\mathscr{A}_1$-medible, la denotamos por $\mu_2(A_{\omega_1})$; del mismo modo si μ_1 es una medida σ- finita la función* $\omega_2 \to \mu_1(A_{\omega_2}) \ \forall \omega_2 \in \Omega_2$ *es $\mathscr{A}_2$-medible, la denotamos por $\mu_1(A_{\omega_2})$.*

- *Sea $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Si $\{\mu_1, \mu_2\}$ son medidas σ- finitas se verifica*

$$\int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1}) \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} \mu_1(A_{\omega_2}) \, \mathrm{d}\mu_2, \ \forall \ A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2.$$

Definición A.2.52. Medida producto. *Sean los espacios de medida* $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$, *con $\{\mu_1, \mu_2\}$ σ-finitas (y no negativas) y sea $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ la σ-álgebra producto. Definimos la "medida producto en la σ-álgebra producto $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$", y la denotamos por $\mu_1 \otimes \mu_2$, como*

$$\forall A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \to \mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1}) \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} \mu_1(A_{\omega_2}) \, \mathrm{d}\mu_2.$$

Teorema A.2.19. *Sean los espacios de medida* $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$, *con $\{\mu_1, \mu_2\}$ σ-finitas (y no negativas) y sea $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ la σ-álgebra producto. Sea $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ definida en $\mu_1 \otimes \mu_2.c.t.(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ y $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$-medible.*

- *Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty)$ las funciones*

$$\phi(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \, \mathrm{d}\mu_2, \ \psi(\omega_2) = \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, \mathrm{d}\mu_1.$$

definidas en $\mu_1.c.t.\omega_1 \in \Omega_1$ la función ϕ y en $\mu_2.c.t.\omega_2 \in \Omega_2$ la función ψ, son no negativas y $\mathscr{A}_1$-medible y $\mathscr{A}_2$-medible respectívamente. Se verifica

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \phi(\omega_1) \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} \psi(\omega_2) \, \mathrm{d}\mu_2 \leq +\infty.$$

- **Teorema de Fubini**. *Si* $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$: $\psi \in L^1(\mu_2)$ $\mu_1.c.t.\omega_1 \in \Omega_1 \wedge \phi \in L^1(\mu_1)$ $\mu_2.c.t.\omega_2 \in \Omega_2$. *Se verifica*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \phi(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} \psi(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2 < +\infty.$$

Teorema A.2.20. *Sea* $\{(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de espacios de medida, siendo* μ_i, σ*-finita* $\wedge$ $\mu_i(\Omega_i) = 1\ \forall\ i \in \mathbb{N}$, *existe una única medida* μ *definida en la* σ*-álgebra producto* $\prod_{i=1}^{+\infty} \mathscr{A}_i$ *que cumple la propiedad de que para todo cilindro* $C = \prod_{i=1}^{n} A_i \times \prod_{i=n+1}^{+\infty} \Omega_i$ *se verifica*

$$\mu(C) = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n(\prod_{i=1}^{n} A_i).$$

La medida μ *es la "medida producto" de las medidas* μ_i $i \in \mathbb{N}$. *El espacio de medida*

$$(\prod_{i=1}^{+\infty} \Omega_i, \prod_{i=1}^{+\infty} \mathscr{A}_i, \mu).$$

es el "producto cartesiano" de los espacios de medida $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$.

Teorema A.2.21. Teorema de la medida producto (Andersen y Jessen). *Sean* $\{(\Omega_t, \mathscr{A}_t, \mu_t)\}_{t\in T}$, $T \subset \mathbb{R}$ *espacios de medida normada* ($\mu_t(\Omega_t) = 1\ \forall t \in T$). *Sean*

- $\Omega_T = \prod_{t\in T} \Omega_t$.
- $\mathscr{A}_T = \prod_{t\in T} \mathscr{A}_t$ *la* σ*-álgebra producto.*
- $\mu_t = \prod_{t\in T} \mu_t$ *la medida producto.*
- *El conjunto de los "cilindros medibles" :*

$$\mathscr{C}_T = \{\prod_{t\in T_n} A_t \times \prod_{t\in (T-T_n)} \Omega_t,\ A_t \in \mathscr{A}_t\ \forall\ t \in T_n\}.$$

- *La medida sobre el conjunto de los cilindros medibles:*

$$\mu_T\Big(\prod_{t\in T_n} A_t \times \prod_{t\in (T-T_n)} \Omega_t\Big) = \prod_{t\in T_n} \mu_t(A_t).$$

Se verifica:

- $\mathscr{A}_T = \sigma(\mathscr{C}_T)$, *la* σ*- álgebra generada por las uniones finitas de elementos de* $\mathscr{C}_T$.
- *La medida* μ_T *definida sobre la familia* $\mathscr{C}_T$ *puede extenderse a una medida normada sobre* $\mathscr{A}_T$, *que denotaremos por* μ_T.
- $(\Omega_T, \mathscr{A}_T, \mu_T)$ *es un espacio de medida normada.*

La teoría de la medida es esencial en toda investigación probabilística; en esta sección nos hemos limitado a enumerar resultados, ideas y conceptos esenciales para el desarrollo de la tesis, sin pretender ser exhaustivo. Para ampliar o consultar contenidos de una forma más detallada, son recomendables [11] de V. I. Bogachev, [33] de J. L Doob, [60] de M. de Guzman y B. Rubio, [61] de P. R. Halmos,...

A.3. Teoría de la probabilidad.

En esta sección enunciaremos los conceptos fundamentales de la teoría de la probabilidad que necesitamos para la elaboración de la tesis. Como en las secciones anteriores, para profundizar contenidos será necesario recurrir a los textos específicos, como pueden ser [44] de W. Feller, [77] de A. N. Kolmogorov, [90] de M. Loève, [127] de V. Quesada y A. García,...

A.3.1. Espacio de probabilidad.

Un espacio de probabilidad es un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, donde $\mathbb{P}$ es una "medida normada"; es decir, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Todas las definiciones, proposicones, teoremas, etc. de la teoría de la medida son válidas también en la teoría de la probabilidad. Las principales propiedades que cumple la medida de probabilidad $\mathbb{P} : \Omega \to [0, 1]$ son:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Se verifica:

$$\forall \, \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{A} \; / \; A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall \, \{i, j\} \in \{1, \cdots, n\}, \; i \neq j \; : \; \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

- $\forall \, A \in \mathscr{A} \; : \; \mathbb{P}(\neg A) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $\forall \, \{A, B\} \in \mathscr{A} \; / \; A \subset B \; : \; \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- $\forall \, A \in \mathscr{A} \; : \; \mathbb{P}(A) \leq 1$.
- $\forall \, \{A, B\} \in \mathscr{A} \; : \; \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Se verifica:

$$\forall \, \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{A} \; : \; \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^n A_i\Big).$$

- $\forall \, \{A, B\} \in \mathscr{A} \; : \; \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- Se verifica:

$$\forall \, \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{A} \; : \; \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

- Se verifica:

$$\forall \, \{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathscr{A} \; : \; \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

- Se verifica (desigualdad de Bonferroni):

$$\forall \; \{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathscr{A} \;:\; \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) \geq 1 - \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\neg A_i).$$

Teorema A.3.1. Continuidad secuencial de la probabilidad. *Sea* $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \in \mathscr{A}$ *una sucesión monótona (creciente o decreciente), se verifica:*

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Definición A.3.1. Independencia de sucesos. *Dados dos sucesos* $\{A, B\} \in \mathscr{A}$ *decimos que "son independientes" sii se verifica* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$*.*

Definición A.3.2. Independencia por pares. *Dada una familia no vacía* $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ *de sucesos, decimos que sus sucesos "son independientes dos a dos" sii* $\forall \; \{A, B\} \in \mathscr{F}, \; / \; A \neq B \;:\; \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$*.*

Definición A.3.3. Familia de sucesos mutuamente independientes. *Dada una familia* $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ *de sucesos distintos, decimos que "es una familia de sucesos mutuamente independientes (o completamente independientes)" sii* $\forall \; \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{F}, \; A_i \neq A_j \; \forall \; \{i, j\} \in \{1, \cdots, n\} \;:\; \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$*.*

Definición A.3.4. Familias de sucesos independientes. *Dadas dos familias* $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{A} \wedge \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{A}$ *de sucesos, decimos que "son independientes" sii* $\forall \; A_1 \in \mathscr{F}_1 \wedge A_2 \in \mathscr{F}_2 \;:\; \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$*.*

A.3.2. Variable aleatoria.

Variable aleatoria unidimensional (real).

Definición A.3.5. Variable aleatoria unidimensional. *Sea el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *y el espacio medible* $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$*; decimos que* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *es "una variable aleatoria real" sii* $\forall \; B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \;:\; X^{-1}(B) \in \mathscr{A}$*. A la familia* $\sigma(X) = \{A \in \mathscr{A} \;:\; \exists \; B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \; / \; X^{-1}(B) = A\}$ *la denominamos "σ-álgebra generada por la variable aleatoria X".*

Una variable aleatoria es, por lo tanto, una aplicación real $\mathscr{A}$-medible, y cumple las propiedades de las funciones medibles.

Definición A.3.6. Ley de probabilidad de una variable aleatoria. *Sea* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variable aleatoria real; definimos "ley de probabilidad inducida por X", y la denotamos por* $\mathbb{P}_X$*, a la medida* $\mathbb{P}_X : \mathbb{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1] \;:\; \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \; \forall \; B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$*. Dada una variable aleatoria real X cualquiera, definimos su "espacio probabilístico asociado" como* $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$*.*

Definición A.3.7. Función de masa de una variable aleatoria. *Dada la variable aleatoria* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *definimos la "función de masa de la variable aleatoria X", y la denotamos por* p_X*, a la función:*

$$p_X : \mathbb{R} \to [0, 1], \; / \; p_X(x) = \mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega \;:\; X(\omega) = x).$$

Proposición A.3.1. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria real; sea $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ su función de masa. Definimos $D_x = \{x \in \mathbb{R} \ : \ p_X(x) > 0\}$. Se verifica que D_X es un conjunto numerable (definición A.1.67, página 204).*

Definición A.3.8. Variable aleatoria discreta. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria real; sea $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ su función de masa; sea $D_X = \{x \in \mathbb{R} \ : \ p_X(x) > 0\}$. Decimos que la variable aleatoria X "es discreta" sii $D_X \neq \emptyset \ \wedge \ \sum_{x \in D_X} p_X(x) = 1$. Al conjunto D_X lo denominamos "soporte de la variable aleatoria X".*

Definición A.3.9. Función de densidad sobre $\mathbb{R}$. *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que "es una función de densidad" sii cumple:*

- $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.
- *f es R-integrable (integrable en el sentido de Riemann, definición A.1.131, página 214).*
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Proposición A.3.2. *Sea el espacio probabilizable $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$; sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de densidad sobre $\mathbb{R}$. Entonces f induce una medida de probabilidad en el espacio probabilizable $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$.*

Definición A.3.10. Función de distribución sobre $\mathbb{R}$. *Dada una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que "es una función de distribución" sii cumple:*

- *F es monótona no decreciente (definición A.1.22, página 197).*
- *F es continua por la derecha ([126]).*
- *Se verifica $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \ \wedge \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ ([126]).*

Teorema A.3.2. *Sea el espacio probabilístico $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$. Se cumple que la función $F : \mathbb{R} \to [0,1] \ : \ F(x) = \mathbb{P}(-\infty, x])$ es una función de distribución en $\mathbb{R}$. Se la denomina "función de distribución asociada a la medida de probabilidad $\mathbb{P}$".*

Teorema A.3.3. *Sea $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función de distribución en $\mathbb{R}$. F induce una medida de probabilidad en el espacio probabilizable $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ tal que la función de distribución asociada a dicha medida de probabilidad es precisamente F.*

Definición A.3.11. Variable aleatoria continua. *Dada una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ decimos que "es continua" si su función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \ : \ F_X(x) = \mathbb{P}_X(-\infty, x]) \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ puede ser representada como:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

siendo $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de densidad, la "función de densidad de la variable aleatoria continua X".

Al conjunto $C_X = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f_X(x) > 0\}$ lo denominamos "soporte de la variable aleatoria continua X".

Teorema A.3.4. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$. Se verifica:*

- F_X *es continua.*
- *Si* f_X *es continua en un punto* $x \in \mathbb{R}$, F_X *es derivable en ese punto y se verifica* $F'_X(x) = f_X(x)$.
- $D_X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ p_X(x) > 0\} = \emptyset$.
- *Para todo intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *de extremos* $a < b$ *se verifica:*

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sea $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función de distribución con puntos de discontinuidad $\{a_n\}$ y saltos $p_n = F(a_n) - F(a_n - 0)$. Sea $\lambda = \sum_n p_n$. La función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ G(x) = \sum_n p_n \delta_{a_n}(x)$ es monótona creciente y continua por la derecha. La función $F_d(x) = \lambda^{-1} G(x)$ es una función de distribución discreta[1].

La función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ H(x) = F(x) - G(x)$ es monótona creciente y continua. Si $\lambda < 1$ la función $F_c(x) = (1-\lambda)^{-1} H(x)$ es una función de distribución continua. Si denominamos por μ_H, μ_G a las medidas asociadas a G y H, se cumple $\mu_F(A) = \mu_G(A) + \mu_H(A) \ \forall \ A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, siendo la medida μ_G discreta, y por lo tanto singular, respecto de la medida de Lebesgue (definición A.2.39, página 229). La medida μ_H, que es continua, se puede descomponer como suma $\mu_H(A) = \nu(A) + \tau(A) \ \forall \ A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, siendo ν una medida singular y τ una medida absolutamente continua. Definimos $N(x) = \nu((-\infty, x])$, $T(x) = \tau((-\infty, x])$, siendo N, T funciones monótonas crecientes continuas. Teniendo en cuenta que $\mu_F = \mu_G + \nu + \tau$, se verifica que $F(x) = G(x) + N(x) + T(x) \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Tenemos, por lo tanto, el siguiente importante teorema:

Teorema A.3.5. Descomposición de Lebesgue de una función de distribución. *Toda función de distribución* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *se puede descomponer como suma* $F(x) = G(x) + N(x) + T(x) \ \forall \ x \in \mathbb{R}$, *siendo* G *una función de distribución singular discreta,* N *singular continua y* T *absolutamente continua, respecto de la medida de Lebesgue.*

Definición A.3.12. Esperanza matemática de una variable aleatoria. *Dada una variable aleatoria* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, *definimos su "esperanza matemática", y la denotamos por* $\mathbb{E}(X)$, *como*

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(\,\mathrm{d}\omega).$$

Entendiendo la integral en el sentido de Lebesgue (definicion A.2.46, página 232).

Teorema A.3.6. *Sea* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variable aleatoria definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. *Sean* $\mathbb{P}_X$ *y* F_X *la ley de probabilidad y la función de distribución, respectívamente, asociadas a la variable aleatoria* X. *Se verifica:*

[1] *Recordamos la definición habitual:*

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ 1 & si\ x \geq a \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(\,\mathrm{d}\omega) = \int_\mathbb{R} \xi(x)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = \int_\mathbb{R} \xi(x)\,\mathrm{d}F_X(x).$$

Siendo $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función identidad (Borel medible) en $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$.

La esperanza matemática de una variable aleatoria X cumple las propiedades de la integral de Lebesgue de funciones medibles. Particularizados a los espacios probabilísticos son interesantes:

Teorema A.3.7. Teorema de Markov. *Si $g(X)$ es una función medible de la variable aleatoria X definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, siendo $g(X) \geq 0$ / $\exists\ \mathbb{E}(g(X))$, se verifica para todo $k > 0$*

$$\mathbb{P}(g(X) > k) \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{k}.$$

Corolario A.3.1. Desigualdad de Tchebycheff generalizada. *Sea g una función medible no negativa y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ tal que existe $\mathbb{E}[(g(X))^k]$, $k > 0$. Se verifica:*

$$\mathbb{P}(g(X) > t) \leq \frac{\mathbb{E}[(g(X))^k]}{t^k},\ \forall\, t > 0.$$

Definición A.3.13. Momento respecto del origen. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Definimos "momento de orden $k \in \mathbb{N}$ respecto del origen de la variable aleatoria X", y lo denotamos por α_k, a $\mathbb{E}[X^k]$, $\alpha_k = \mathbb{E}[X^k]$.*

Definición A.3.14. Momento respecto de la media de una variable aleatoria. *Sea una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$; sea $\alpha_1 = \mathbb{E}(X) < +\infty$. Definimos "momento de orden $k \in \mathbb{N}$ respecto de la media de la variable aleatoria X", y lo denotamos por μ_k, a $\mathbb{E}[(X - \alpha_1)^k]$, $\mu_k = \mathbb{E}[(X - \alpha_1)^k]$. A μ_2 lo denominamos "varianza de la variable aleatoria X".*

Definición A.3.15. Momento absoluto respecto del origen. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Definimos "momento absoluto de orden $k \in \mathbb{N}$ respecto del origen de la variable aleatoria X", y lo denotamos por β_k, a $\mathbb{E}[|X|^k]$, $\beta_k = \mathbb{E}[|X|^k]$.*

Variable aleatoria n-dimensional (vector aleatorio).

Consideramos los espacios probabilísticos $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R})^n, \mathbb{P}^n_\mathbb{R})$ y $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Definición A.3.16. Variable aleatoria n-dimensional. *Dada la aplicación vectorial $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ / $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$, $\forall\, \omega \in \Omega$ decimos que "es una variable aleatoria n-dimensional" sii $\mathbf{X}^{-1}(B) \in \mathscr{A}\ \forall\, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$.*

Teorema A.3.8. *Dado el vector n-dimensional $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$, $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$, es una variable aleatoria n dimensional sii $X_i : \Omega \to \mathbb{R}, \forall\, i = 1, \cdots, n$ son variables aleatorias unidimensionales.*

Definición A.3.17. Ley de probabilidad inducida por una variable aleatoria n-dimensional. *Sea $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ una variable aleatoria n-dimensional definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$; definimos la "ley de probabilidad inducida por X", y la denotamos por $\mathbb{P}_\mathbf{X} = \mathbb{P}_{X_1 \cdots X_n}$, a $\mathbb{P}_\mathbf{X}(B) = \mathbb{P}(\mathbf{X}^{-1}(B))$, $\forall\, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$*

Definición A.3.18. Función de distribución inducida por una variable aleatoria n-dimensional. *Dada la variable aleatoria n-dimensional* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$ *definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *definimos la "función de distribución inducida por* $\mathbf{X}$*", y la denotamos por* $F_{\mathbf{X}} = F_{X_1 \cdots X_n}$*, a la aplicación*

$$F_{X_1 \cdots X_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;/\; F_{X_1 \cdots X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \cdots, X_n(\omega) \leq x_n).$$

Definición A.3.19. Función de masa de una variable aleatoria n-dimensional. *Dada la variable aleatoria n-dimensional* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$ *definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *definimos la "función de masa de* $\mathbf{X}$*", y la denotamos por* $p_{\mathbf{X}} = p_{X_1 \cdots X_n}$*, a la aplicación*

$$p_{X_1 \cdots X_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;/\; p_{X_1 \cdots X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X_1(\omega) = x_1, \cdots, X_n(\omega) = x_n).$$

Denotamos $D_{\mathbf{X}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0\}$.

Definición A.3.20. Variable aleatoria n-dimensional discreta. *Dada la variable aleatoria n-dimensional* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$ *definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *decimos que "es una variable aleatoria n-dimensional discreta" sii* $D_{\mathbf{X}} \neq \emptyset \ \wedge \ \sum_{\mathbf{x} \in D_{\mathbf{X}}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1$.

Definición A.3.21. Función de densidad en $\mathbb{R}^n$. *Dada la función* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *decimos que "es una función de densidad en* $\mathbb{R}^n$*" sii cumple:*

- $f(\mathbf{x}) \geq 0 \ \forall \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- f *es R-integrable en* $\mathbb{R}^n$.
- *Se verifica:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = 1.$$

Definición A.3.22. Función de densidad marginal. *Dada la función de densidad* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definimos la "función de densidad marginal* f_1*" como:*

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

La definición de las restantes funciones de densidad son inmediatas. Las integrales, entendidas en el sentido de Lebesgue, nos sirven para definir la ley de probabilidad marginal para las variables aleatorias discretas.

Definición A.3.23. Función de densidad condicionada. *Dada la variable aleatoria n-dimensional* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$ *definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*, sea* $f_1 = f_{X_1}$ *la función de densidad marginal de la variable aleatoria real* X_1*; definimos la "función de densidad condicional de la variable aleatoria* $(n-1)$*-dimensional* $(X_2, \cdots, X_n)$ *condicionada por* $X_1 = a_1$*", y la denotamos por* $f_{X_2 \cdots X_n \diagup X_1}(x_2, \cdots, x_n \diagup a_1)$*, a:*

$$f_{X_2\cdots X_n/X_1}(x_2,\cdots,x_n/a_1)=\begin{cases}\frac{f_{X_1\cdots X_n}(a_1,x_2,\cdots,x_n)}{f_1(a_1)}, & \textit{si } f_1(a_1)\neq 0\\ \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso.}\end{cases}$$

Las funciones de densidad condicionadas en cualquier otro caso se definen de modo semejante.

Definición A.3.24. Variable aleatoria n-dimensional continua. *Dada la variable aleatoria n-dimensional $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{B}(\mathbb{R})^n$ definida en el espacio probabilístico $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ decimos que “es una variable aleatoria continua” sii su función de distribución es*

$$F_{X_1\cdots X_n}(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(t_1,\cdots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\cdots\,\mathrm{d}t_n.$$

Siendo $f(t_1,\cdots,t_n)$ una función de densidad en $\mathbb{R}^n$. A la función de densidad de la variable aleatoria n-dimensional $\mathbf{X}$ la denotamos por $f_{\mathbf{X}}=f_{X_1\cdots X_n}$.

Definición A.3.25. Función de distribución marginal. *Dada la función de distribución $F_{X_1\cdots X_n}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definimos la “función de distribución marginal F_1” como:*

$$F_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ :\ F_1(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X_1\cdots X_n}(t,x_2\cdots,x_n)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n.$$

$$F_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ :\ F_1(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1}f_{X_1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Siendo f_{X_1} la función de densidad marginal de la variable aleatoria unidimensional X_1. La definición para las restantes funciones de distribución marginales son evidentes. Las integrales entendidas en el sentido de Lebesgue nos sirven para definir las funciones de distribución marginales en el caso de variables aleatorias discretas.

Definición A.3.26. Función de distribución condicionada. *Dada la variable aleatoria n-dimensional $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{B}(\mathbb{R})^n$ definida en el espacio probabilístico $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, sea $f_1=f_{X_1}$ la función de densidad marginal de la variable aleatoria real X_1; definimos la “función de distribución condicional de la variable aleatoria $(n-1)$-dimensional $(X_2,\cdots,X_n)$ condicionada por $X_1=a_1$”, y la denotamos por $F_{X_2\cdots X_n/X_1}(x_2,\cdots,x_n/a_1)$, a:*

$$F_{X_2\cdots X_n/X_1}(x_2,\cdots,x_n/a_1)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f_{X_2\cdots X_n/X_1}(t_2,\cdots,t_n/a_1)\,\mathrm{d}t_2\cdots\,\mathrm{d}t_n, & \textit{si } f_1(a_1)\neq 0\\ \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso.}\end{cases}$$

Las funciones de distribución condicionadas en cualquier otro caso se definen de modo semejante.

Definición A.3.27. Familia de variables aleatorias independientes. *Dado el espacio probabilístico $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ y una familia $\{X_i\}_{i\in I}$, siendo $I\subset\mathbb{N}$ cualquier subconjunto de índices, decimos que “son independientes” sii para toda colección finita $\{X_i\}_{i=1}^n\subset\{X_i\}_{i\in I}$ de variables aleatorias se verifica que la familia de σ-álgebras $\{\sigma(X_i)\}_{i=1}^n$ engendradas por las variables aleatorias $\{X_i\}_{i=1}^n$ son independientes.*

Teorema A.3.9. *Dado el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *y una familia* $\{X_i\}_{i\in I}$*, siendo* $I \subset \mathbb{N}$ *cualquier subconjunto de índices, decimos que "son independientes" sii para toda colección finita* $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \{X_i\}_{i\in I}$ *de variables aleatorias se verifica cualquiera de las siguientes igualdades:*

$$F_{X_1\cdots X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i).$$

$$f_{X_1\cdots X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i).$$

Siendo $F_{X_1\cdots X_n}$, $f_{X_1\cdots X_n}$ *las funciones de distribución y densidad de la variable aleatoria* $(X_1, \cdots, X_n)$ *respectívamente.*

Definición A.3.28. Esperanza matemática de una variable aleatoria n**-dimensional**. *Dada la variable aleatoria n-dimensional* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$ *definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *con función de densidad* $f_{\mathbf{X}}$ *y una función* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Borel medible definimos la "esperanza matemática de la variable aleatoria* $g(\mathbf{X})$*" como*

$$\mathbb{E}[g(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \cdots, x_n) f_{X_1\cdots X_n}(x_1, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Entendiendo la integral en el sentido de Lebesgue (para el caso de variables aleatorias discretas será una serie) y suponiendo la anterior integral absolutamente integrable.

Definición A.3.29. Momentos respecto del origen de una variable aleatoria n**-dimensional**. *Dada la variable aleatoria n-dimensional* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$ *definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *con función de densidad* $f_{\mathbf{X}}$ *definimos "momento respecto del origen de órdenes* $\{m_i\}_{i=1}^n$ *de la variable aleatoria n-dimesional* $\mathbf{X}$*" a la esperanza matemática de la variable aleatoria* $g(\mathbf{X}) = X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}$*. Denotamos por* $\alpha_i = \mathbb{E}(X_i)\ \forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$ *y la denominamos "media marginal de la variable aleatoria* X_i*".*

Definición A.3.30. Momentos respecto de la media de una variable aleatoria n**-dimensional**. *Dada la variable aleatoria n-dimensional* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{B}(\mathbb{R})^n$ *definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *con función de densidad* $f_{\mathbf{X}}$ *definimos "momento respecto de la media de órdenes* $\{m_i\}_{i=1}^n$ *de la variable aleatoria n-dimensional* $\mathbf{X}$*" a la esperanza matemática de la variable aleatoria* $g(\mathbf{X}) = (X_1 - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X_n - \alpha_n)^{m_n}$*. Denotamos por* $\sigma_i^2 = \mathbb{E}[(X_1 - \alpha_i)^2], \forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$ *y la denominamos "varianza marginal de la variable aleatoria* X_i*".*

Proposición A.3.3. *Dada una familia de variables aleatorias* $\{X_i\}_{i\in I}$*, siendo* $I \subset \mathbb{N}$ *cualquier conjunto de índices, es una familia de variables aleatorias mutuamente independientes (independientes) sii para toda subfamilia finita* $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \{X_i\}_{i\in I}$ *se verifica* $\mathbb{E}\Big(\prod_{i=1}^n X_i\Big) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$.

A.3.3. Esperanza condicionada.

Sea el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ y sean $A \in \mathscr{A}$ un suceso con $\mathbb{P}(A) > 0$, y $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ una sub σ-álgebra de $\mathscr{A}$. Definimos:

Definición A.3.31. Probabilidad condicionada por un suceso de probabilidad no nula. *Definimos* $\forall\, B \in \mathscr{A}$ *la "probabilidad de* B *condicionada por* A*", y la denotamos por* $\mathbb{P}(B/A)$*, como*

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Definición A.3.32. Esperanza condicionada por una σ-álgebra(Kolmogorov). *Sea* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variable aleatoria con* $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$*. Sea* $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ *una sub-*σ*-álgebra. Existe una única (c.t. en el sentido de la medida* $\mathbb{P}$*) variable aleatoria* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *cumpliendo:*

- Y *es* $\mathscr{F}$*-medible.*
- $\mathbb{E}(|Y|) < +\infty$*.*
- *Se verifica:*

$$\int_F X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F Y \, \mathrm{d}\mathbb{P}, \ \forall\, F \in \mathscr{F}.$$

Denominamos a Y *"esperanza condicionada de la variable aleatoria* X *por la* σ*-álgebra* $\mathscr{F}$ *(o condicionada por* $\mathscr{F}$*, abreviadamente)" y la denotamos por* $\mathbb{E}(X/\mathscr{F})$*. Si* $\mathscr{F} = \sigma(Z),\ Z : \Omega \to \mathbb{R}$ *la* σ*-álgebra generada por la variable aleatoria* Z*, se denota por* $\mathbb{E}(X/\sigma(Z)) = \mathbb{E}(X/Z)$*. Definimos la "probabilidad de* $A \in \mathscr{A}$ *condicionada por* $\mathscr{F}$*", y la denotamos por* $\mathbb{P}(A/\mathscr{F})$*, como* $\mathbb{E}(I_A/\mathscr{F})$*.*

Definición A.3.33. Esperanza condicionada por los valores que toma una variable aleatoria. *Sean* $\{X, Y\}$ *dos variables aleatorias reales definidas en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*, con* $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$*, denominamos "esperanza de* X *condicionada por los valores de* Y*", y la denotamos por* $\mathbb{E}(X/Y = y)$*, como la única (c.t. respecto de la medida* $\mathbb{P}$*) función* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Borel-medible que verifica:*

$$\int_{Y \in B} X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B g(y) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_Y, \ \forall\, B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}).$$

Teorema A.3.10. *Sean* $\{X_1,\ X_2,\ Y\}$ *variables aleatorias reales definidas en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*, con* $\mathbb{E}(|X_i|) < +\infty,\ i \in \{1, 2\}$*; sea* $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ *una sub* σ*-álgebra de* $\mathscr{A}$*. Se verifican:*

- $\mathbb{E}((a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2)/\mathscr{F}) = a_1\mathbb{E}(X_1/\mathscr{F}) + a_2\mathbb{E}(X_2/\mathscr{F}),\ \forall\, \{a_i\}_{i=1}^2 \in \mathbb{R}.$
- $\mathbb{E}((a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2)/Y = y) = a_1\mathbb{E}(X_1/Y = y) + a_2\mathbb{E}(X_2/Y = y),\ \forall\, \{a_i\}_{i=1}^2 \in \mathbb{R}.$
- *Si* $X_1 \leq X_2$ *c.t. respecto de* $\mathbb{P}$ *se cumple*

$$\mathbb{E}(X_1/\mathscr{F}) \leq \mathbb{E}(X_2/\mathscr{F}).$$

- *Si* $X_1 \leq X_2$ *c.t. respecto de* $\mathbb{P}$ *se cumple*

$$\mathbb{E}(X_1 \diagup Y = y) \leq \mathbb{E}(X_2 \diagup Y = y).$$

- $|\mathbb{E}(X_1 \diagup \mathscr{F})| \leq \mathbb{E}(|X_1| \diagup \mathscr{F})$.
- $|\mathbb{E}(X_1 \diagup Y = y)| \leq \mathbb{E}(|X_1| \diagup Y = y)$.
- *Si* X_1 *es* $\mathscr{F}$*-medible, entonces* $\mathbb{E}(X_1 \diagup \mathscr{F}) = X_1$.
- *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es* $\mathbb{B}(\mathbb{R})$*-medible, entonces* $\mathbb{E}(f(Y) \diagup Y = y) = f(y)$.
- *(Jensen) Sean* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variable aleatoria tal que* $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo tal que* $\mathbb{P}(X \in I) = 1$ *y* $f : I \to \mathbb{R}$ *una función convexa. Se cumple:*

$$\mathbb{E}(f(X) \diagup \mathscr{F}) \geq f(\mathbb{E}(X \diagup \mathscr{F})).$$

- $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X_1 \diagup \mathscr{F})] = \mathbb{E}(X_1)$.
- *Se cumple:*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(X_1 \diagup Y = y)\, \mathrm{d}\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{E}(X_1).$$

- *Si* $\mathscr{F}_1$ *es una sub* σ*-álgebra de* $\mathscr{A}$ *independiente de* $\mathscr{F}$ $(\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)\ \forall\ A \in \mathscr{F}_1 \wedge B \in \mathscr{F})$ *y* X_1 *es* $\mathscr{F}_1$*-medible, entonces* $\mathbb{E}(X_1 \diagup \mathscr{F}) = \mathbb{E}(X_1)$.
- *Si* Y *es independiente de* X_1 *entonces* $\mathbb{E}(X_1 \diagup Y = y) = \mathbb{E}(X_1)$.
- *Si* $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ *es una variable aleatoria tal que* $\mathbb{E}(|Z \cdot X_1|) < +\infty$ *y* Z *es* $\mathscr{F}$*-medible, entonces* $\mathbb{E}(Z \cdot X_1 \diagup \mathscr{F}) = Z \cdot \mathbb{E}(X_1 \diagup \mathscr{F})$.
- *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función* $\mathbb{B}(\mathbb{R})$*-medible, siendo* $\mathbb{E}(|f(Y) \cdot X_1|) < +\infty$, *entonces* $\mathbb{E}(f(Y) \cdot X_1 \diagup Y = y) = f(y)\mathbb{E}(X_1 \diagup Y = y)$.
- *Sean* $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{A}$ *dos sub* σ*-álgebras, entonces:*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X_1 \diagup \mathscr{F}_1) \diagup \mathscr{F}_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_1 \diagup \mathscr{F}_2) \diagup \mathscr{F}_1] = \mathbb{E}[X_1 \diagup \mathscr{F}_1].$$

- *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función* $\mathbb{B}(\mathbb{R})$*-medible, entonces:*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X_1 \diagup Y \diagup f(Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_1 \diagup f(Y) \diagup Y] = \mathbb{E}[X_1 \diagup f(Y)].$$

- *Si* $\mathscr{H} \subset \mathscr{A}$ *es una sub* σ*-álgebra independiente de* $\sigma(\sigma(X_1), \mathscr{F})$, *entonces* $\mathbb{E}(X_1 \diagup \sigma(\mathscr{F}, \mathscr{H})) = \mathbb{E}(X_1 \diagup \mathscr{F})$.
- *Se cumplen los teoremas de convergencia monótona, de convergencia dominada, y el lema de Fatou.*

A.3.4. Función característica de una variable aleatoria real.

Sea el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Definición A.3.34. Función característica de una variable aleatoria real. *Sea* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variable aleatoria real definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*, con función de distribución* F_X *y función de densidad (o de masa, si es discreta)* f_X*; definimos la "función característica de la variable aleatoria* X*", y la denotamos por* $\varphi_X(t)$*, a la transformada de Fourier-Stieltjes de la función de distribución* F_X*; o también a* $\mathbb{E}(e^{itX})$*.*

$$\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ / \ \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \, \mathrm{d}F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) \, \mathrm{d}x, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

La función característica existe para cualquier variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$*.*

Proposición A.3.4. *Dada una variable aleatoria* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *sea* $\varphi_X(t)$ *su función característica. Se cumplen las siguientes propiedades.*

- $\varphi_X(0) = 1$.
- $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
- $\varphi_X(t)$ *es uniformemente continua en todo* $\mathbb{R}$*.*
- $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$*(el número complejo conjugado de* $\varphi_X(t) \in \mathbb{C}$*,* $\forall \, t \in \mathbb{R}$*).*

Proposición A.3.5. *Dada una variable aleatoria* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *sea* $\varphi_X(t)$ *su función característica. Se verifica:*

- *Si* $\varphi_X(t)$ *es la función característica asociada a una función de distribución discreta, entonces:*

$$\limsup_{|t| \to +\infty} |\varphi_X(t)| = 1.$$

- *Si* $\varphi_X(t)$ *es la función característica asociada a una función de distribución absolutamente continua, entonces:*

$$\lim_{|t| \to +\infty} \varphi_X(t) = 0.$$

- *Si* $\varphi_X(t)$ *es la función característica asociada a una función de distribución singular, entonces:*

$$\limsup_{|t| \to +\infty} |\varphi_X(t)| = \lambda, \ \lambda \in (0, 1).$$

Proposición A.3.6. Descomposición de Lebesgue de una función característica. *Dada una variable aleatoria* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *sea* $\varphi_X(t)$ *su función característica. Se verifica:*

$$\varphi_X(t) = p_1\varphi_{X,d}(t) + p_2\varphi_{X,ac}(t) + p_3\varphi_{X,s}(t),\ \{p_i\}_{i=1}^3 \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{3} p_i = 1.$$

Siendo $\varphi_{X,d}(t)$ la función característica asociada a una función de distribución discreta; $\varphi_{X,ac}(t)$ la función característica asociada a una función de distribución absolutamente continua; $\varphi_{X,s}(t)$ la función característica asociada a una función de distribución singular.

Teorema A.3.11. *Dada una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sea $\varphi_X(t)$ su función característica y $F_X(x)$ su función de distribución. Si existe*

$$\alpha^n = \int_{\mathbb{R}} x^n \,\mathrm{d}F_X(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Entonces:

- $\exists\ \varphi_X^n(0) \wedge\ :\ \varphi_X^n(0) = i^n\alpha^n.$
- $\exists\ \varphi_X^n(t) \wedge\ :\ \varphi_X^n(t) = i^n \int_{\mathbb{R}} e^{itx}x^n \,\mathrm{d}F_X(x).$

Teorema A.3.12. *Dada una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sea $\varphi_X(t)$ su función característica y $F_X(x)$ su función de distribución. Se verifica $\forall\ n \in \mathbb{N}$:*

- *Si* $\exists\ \varphi_X^{2n}(t)$ *entonces* $\exists\ \alpha^{2n} = \dfrac{\varphi_X^{2n}(0)}{i^{2n}}.$
- *Si* $\exists\ \varphi_X^{2n-1}(t)$ *entonces* $\exists\ \alpha^{2n-2} = \dfrac{\varphi_X^{2n-2}(0)}{i^{2n-2}}.$

Teorema A.3.13. Fórmula de inversión. *Dada una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sea $\varphi_X(t)$ su función característica y $F_X(x)$ su función de distribución. Se verifica*

$$F_X(a+h) - F_X(a) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{1-e^{-ith}}{it} e^{-ita}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t.$$

Suponiendo que $a,\ a+h,\ h > 0$ son puntos de continuidad de $F_x(x)$.

Teorema A.3.14. *Dada una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sea $\varphi_X(t)$ su función característica y $F_X(x)$ su función de distribución. Si $\varphi_X(t)$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ entonces $F_X(x)$ es absolutamente continua, su función de densidad $f_X(x)$ es continua y se verifica*

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Teorema A.3.15. Teorema de Helly. *Toda sucesión $\{F_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones uniformemente acotadas, no decreciente, contiene una subsucesión $\{F_{nk}(x)\}_{nk\in\mathbb{N}} \subset \{F_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converje a alguna función no decreciente acotada $F(x)$ en los puntos de continuidad de $F(x)$ (en particular se cumple para sucesiones de funciones de distribución.)*

Teorema A.3.16. ***(Teorema de Continuidad).*** *Para que una sucesión de funciones de distribución de probabilidad $\{F_n\}$ converja propiamente a una distribución F de probabilidad, es necesario y suficiente que la sucesión $\{\varphi_n\}$ de sus funciones características converja puntualmente a un límite φ , y que φ sea continua en alguna vecindad del origen.*[2]

En este caso, φ es la función característica de F. (Por tanto, φ es continua en todas partes y la convergencia $\varphi_n \to \varphi$ es uniforme en todo intervalo finito).

Lema A.3.1. *Sean $\{F_n\}$ distribuciones de probabilidad con funciones características $\{\varphi_n\}$. Si $p_k \geq 0$ y $\sum p_k = 1$ se verifica:*

$$U = \sum p_k \cdot F_k \tag{A.1}$$

es una distribución de probabilidad con función característica:

$$\varphi = \sum p_k \varphi_k.$$

A.3.5. Función generatriz.

Definición A.3.35. Función generatriz. *Dada una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ si*

$$G(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i s^i$$

converge en algún $[-s_0, s_0] \subset \mathbb{R}$ decimos que "$G(s)$ es la función generatriz de la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$".

Definición A.3.36. Función generatriz de probabilidad. *Dada una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{N}$ definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que únicamente toma valores enteros positivos, definimos la "función generatriz de probabilidad de la variable aleatoria X", y la denotamos por $G(s)$, a $\mathbb{E}(s^X)$, $s \in [-1, 1]$, entendida como integral de Lebesgue.*

Teorema A.3.17. *Dada una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{N}$ definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, que únicamente toma valores enteros positivos; sea la sucesión $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, / $q_j = \mathbb{P}(X > j)$ de las colas de la distribución de X. Si denotamos por $Q(s)$, $s \in (-1, 1)$ a la función generatriz de la sucesión $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y por $G(s)$, $s \in [-1, 1]$ la funcion generatriz de probabilidad de la variable aleatoria X se verifica:*

$$Q(s) = \frac{1 - G(s)}{1 - s}, \ s \in (-1, 1).$$

Teorema A.3.18. *Dada una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{N}$ definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que únicamente toma valores enteros positivos con función generatriz de probabilidad $G(s)$ se verifica:*

[2] *Se dice que la convergencia es propia cuando F no es defectuosa. (Una distribución de probabilidad se denomina "defectuosa" cuando su masa total es menor que 1, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) < 1$).*

- *Si la serie* $\sum_{i=1}^{+\infty} ip_i,\ p_i = \mathbb{P}(X = i)$ *es convergente, se verifica* $\mathbb{E}(X) = G'(1)$.

- *Si* $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ *es una variable aleatoria definida en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*, independiente de* X*, con función generatriz de probabilidad* $G_1(s),\ s \in [-1, 1]$*, se verifica* $\mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^X) \cdot \mathbb{E}(s^Y)$*;es decir, la función generatriz de probabilidad de la variable aleatoria* $X + Y$ *es* $G(s) \cdot G_1(s)$.

A.3.6. Leyes de los grandes números. El teorema central del límite.

Sea el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Definición A.3.37. ***(Convergencia en probabilidad)***. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente independientes, definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Diremos que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *"converge en probabilidad hacia la variable aleatoria* X*" (definida en el mismo espacio probabilístico), y lo denotamos por* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *sii* $\forall\epsilon > 0 \wedge \forall\alpha > 0$ *arbitrariamente elegidos*

$$\exists n_0(\epsilon, \alpha)\ /\ \forall n > n_0 : \mathbb{P}(\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon) < \alpha.$$

O también que $\forall\epsilon > 0$*, se cumple*

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \mathbb{P}(\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon) = 0.$$

Definición A.3.38. ***(Convergencia casi segura)***. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente independientes, definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Diremos que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *"converge casi seguro hacia la variable aleatoria* X*" (definida en el mismo espacio probabilístico), y lo denotamos por* $X_n \xrightarrow{c.s} X$ *sii*

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \underset{n\to+\infty}{lim} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

Definición A.3.39. ***(Convergencia en distribución)***. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente independientes, definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Diremos que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *"converge en distribución (o en ley) hacia la variable aleatoria* X*" (definida en el mismo espacio probabilístico), y lo denotamos por* $X_n \xrightarrow{d} X$ *sii la correspondiente sucesión de funciones de distribución de las* X_n*,* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, converge hacia la función de distribución* F *de la variable aleatoria* X*, en todo punto de continuidad de* F.

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x_0) = F(x_0),\ \forall\ x_0 \in \mathbb{R}\ /\ F(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} F(x) = \lim_{x\to x_0^+} F(x).$$

Definición A.3.40. ***(Convergencia en media cuadrática)***. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente independientes, definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *tales que* $\mathbb{E}(|X_n|^2) < +\infty,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$*. Diremos que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *"converge en media cuadrática hacia la variable aleatoria* X*" (definida en el mismo espacio probabilístico), y lo denotamos por* $X_n \xrightarrow{m.c} X$ *sii*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0.$$

Son interesantes los siguientes teoremas:

Teorema A.3.19. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente independientes, definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Se verifica:*

$$X_n \overset{c.s}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$$

Teorema A.3.20. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente independientes, definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Se verifica:*

$$X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{d}{\to} X$$

Teorema A.3.21. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente independientes, definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Si* $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ *existe una subsucesión* $\{X_{ni}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ / $X_{ni} \overset{c.s}{\to} X$.

Definición A.3.41. ***(Ley débil de los grandes números)****. Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente independientes, definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *tales que existe* $\mathbb{E}(X_i) = \alpha_i < \infty, \forall i \in \mathbb{N}$*; sean*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(\overline{X_n}).$$

Diremos que la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *"cumple la ley débil de los grandes números" sii la sucesión* $\left\{\overline{X}_n - \mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilidad hacia 0; es decir, sii*

$$\overline{X}_n - \mu_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0.$$

Definición A.3.42. ***(Ley fuerte de los grandes números)****. Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente independientes, definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *tales que existe* $\mathbb{E}(X_i) = \alpha_i < \infty, \forall i \in \mathbb{N}$*; sean*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(\overline{X_n}).$$

Diremos que la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *"cumple la ley fuerte de los grandes números" sii la sucesión* $\left\{\overline{X}_n - \mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge hacia 0 casi seguro; es decir, sii*

$$\overline{X}_n - \mu_n \xrightarrow{c.s} 0.$$

Teorema A.3.22. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *tales que*

- *Las variables aleatorias de la sucesión están idénticamente distribuidas, con función de distribución* F.
- $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty \ \wedge \ \sigma^2(X_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$ *(media y varianza finitas).*

Entonces $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *cumple la ley débil de los grandes números.*

Teorema A.3.23. (Khintchine). *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *tales que*

- *Las variables aleatorias de la sucesión están idénticamente distribuidas, con función de distribución* F.
- $\mathbb{E}(X_n) = \mu < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *cumple la ley fuerte de los grandes números.*

Es de destacar que no se exige que tengan varianza.

El teorema central del límite.

Definición A.3.43. ***Teorema central del límite***. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias, no necesariamente independientes, definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *con media y varianza finitas. Diremos que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *"verifica el teorema central del límite" sii*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{E}[(S_n - \mathbb{E}(S_n))^2]}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Siendo $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Teorema A.3.24. ***(Levy-Lindeberg)***. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *independientes e idénticamente distribuidas, con media y varianza finita. Entonces* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *verifica el teorema central del límite.*

Textos de referencia son [94], de E. Lukacs, [135], de B.A. Shevastyanov, [136], de A.N. Shiryaev, [155], de D. Williams,...

A.4. Procesos estocásticos.

En esta sección vamos a enunciar algunos resultados básicos de la teoría de los procesos estocásticos. Intuitivamente, se puede interpretar un proceso estocástico como un "proceso" que se va desarrollando en el tiempo según unas determinadas leyes probabilísticas; las observaciones registradas en los tiempos $t_1, \ t_2, \ \cdots$ describen su evolución. Definiciones rigurosas de procesos estocásticos hay muchas, nosotros proporcionaremos dos, una inspirada en los trabajos pioneros de J. L. Doob, [32], y que es comúnmente aceptada. A lo largo de esta monografía usaremos ambas de forma indistinta.

A.4.1. Definiciones.

Sea el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Definición A.4.1. Proceso estocástico (J. L. Doob) *Definimos "proceso estocástico sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ con conjunto de índices T y conjunto de estados E" como una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t\in T}$ $\mathscr{A}$- medibles y valoradas en un espacio medible $(E, \mathcal{B})$.*

T puede ser cualquier conjunto, no necesariamente numérico, si bien se suele interpretar X_t como la observación en el tiempo t[3]. En el caso en que $T \subset \mathbb{R}$, que puede ser un subconjunto continuo o discreto, lo denominaremos *conjunto de tiempos*.

E, que denominaremos *conjunto de estados*, puede ser cualquier conjunto; tampoco hay una razón matemática para aceptar que sea un conjunto numérico, si bien lo más habitual es que $E \subset \mathbb{R} \vee E \subset \mathbb{C}$.

Un proceso estocástico también se puede interpretar como una aplicación de $\Omega \times T$ en un cierto espacio medible $(E, \mathcal{B})$:

Definición A.4.2. Proceso estocástico. *Definimos "proceso estocástico sobre el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ con conjunto de índices T y conjunto de estados E", y lo denotamos por $X(\omega, t)$, como la aplicación*

$$X : \Omega \times T \to E \ / \ (\omega, t) \to X_t(\omega).$$

En nuestro trabajo, salvo que se indique lo contrario, $T \subset \mathbb{R} \wedge E \subset \mathbb{R}$.

En el caso en que T sea un conjunto discreto (numerable), el proceso estocástico $X(\omega, t)$ se denomina "proceso estocástico de parámetro discreto". Cuando T no es numerable $X(\omega, t)$ se denomina "proceso estocástico de parámetro continuo".

Se verifica:

- $\forall t \in T$, t fijo, la función:

$$X(., t) = X_t(.) : (\Omega, \mathscr{A}, P) \to (E, \mathcal{B}) \ / \ \omega \to X_t(\omega)$$

  es una variable aleatoria. Una función $\mathscr{A}$-medible.

- $\forall \omega \in \Omega$, ω fijo, la función:

$$X(\omega, .) = X_.(\omega) : T \to E \ / \ t \to X_t(\omega)$$

  es función del tiempo; la denominada "trayectoria del proceso". También se suele denominar "función muestral", en el caso en que T es un conjunto no numerable, o "sucesión muestral", en el caso en que T es un conjunto numerable.

[3] *Kingman en [72], donde estudia las "medidas completamente aleatorias", considera $T = \mathfrak{G}$, siendo $\mathfrak{G}$ una σ-álgebra definida en un conjunto cualquiera S de forma que a cada $\omega \in \Omega$ se le asigna una medida Φ_ω definida en S.*

En lo que sigue, cuando hacemos referencia a un cierto proceso estocástico lo denotaremos por $X(\omega, t)$ o por $\{X_t\}_{t\in T}$, entendiendo que está definido en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, que tiene un conjunto de índices $T \subset \mathbb{R}$ y está valorado en un conjunto de estados $E \subset \mathbb{R}$.

Definición A.4.3. Proceso estocástico continuo. *Decimos que el proceso estocástico $X(\omega, t)$ es "continuo" si las funciones*

$$X(\omega, \cdot) : T \to E, \ \forall\, \omega \in \Omega$$

son funciones continuas. Es decir, las trayectorias muestrales son continuas.

Según las propiedades que cumplan las variables aleatorias $\{X(\cdot, t)\}_{t\in T}$ tenemos diversos tipos de procesos estocásticos.

Definición A.4.4. Procesos estocásticos con variables aleatorias mutuamente independientes. *Dado el proceso estocástico $X(\omega, t)$ decimos que "es un proceso con variables aleatorias mutuamente independientes" si las variables aleatorias $\{X(\cdot, t)\}_{t\in T}$ son mutuamente independientes.*

Sin embargo, debido a que en el caso continuo las trayectorias muestrales son demasiado irregulares, únicamente se estudian procesos estocásticos con variables aleatorias independientes en el caso discreto. El proceso queda caracterizado por la ley de probabilidad de las variables aleatorias individuales debido a la propiedad de independencia.

En el caso de variables aleatorias $\mathbb{C}$-valoradas son interesantes los siguientes tipos de procesos estocásticos:

Definición A.4.5. Procesos estocásticos con variables aleatorias mutuamente incorreladas. *Dado el proceso estocástico $X(\omega, t)$ decimos que "es un proceso con variables aleatorias mutuamente incorreladas" si:*

$$\forall\, \{X(\cdot, t_1), X(\cdot, t_2)\} \in \ \{X(\cdot, t)\}_{t\in T} \ / \ \mathbb{E}\Big[|X(\cdot, t_1)|^2\Big] < +\infty \ \wedge \ \mathbb{E}\Big[|X(\cdot, t_2)|^2\Big] < +\infty \ :$$

$$\mathbb{E}\Big[X(\cdot, t_1) \cdot \overline{X(\cdot, t_2)}\Big] = \mathbb{E}\Big[X(\cdot, t_1)\Big] \cdot \mathbb{E}\Big[\overline{X(\cdot, t_2)}\Big].$$

Definición A.4.6. Procesos estocásticos con variables aleatorias mutuamente ortogonales. *Dado el proceso estocástico $X(\omega, t)$ decimos que "es un proceso con variables aleatorias mutuamente ortogonales" si:*

$$\forall\, \{X(\cdot, t_1), X(\cdot, t_2)\} \in \ \{X(\cdot, t)\}_{t\in T} \ / \ \mathbb{E}\Big[|X(\cdot, t_1)|^2\Big] < +\infty \ \wedge \ \mathbb{E}\Big[|X(\cdot, t_2)|^2\Big] < +\infty \ :$$

$$\mathbb{E}\Big[X(\cdot, t_1) \cdot \overline{X(\cdot, t_2)}\Big] = 0.$$

Sin embargo, lo mismo que ocurría con los procesos estocásticos con variables mutuamente independientes, las trayectorias muestrales son demasiado discontinuas, con lo cual los procesos estocásticos con variables mutuamente ortogonales o incorreladas, únicamente se estudian en el caso de parámetro discreto.

Definición A.4.7. Procesos estocásticos con incrementos independientes. *Dado el proceso estocástico $X(\omega, t)$ decimos que "es un proceso con incrementos independientes" si $\forall\ t_1 < t_2 < \cdots < t_n,\ n \geq 3\ \wedge\ t_i \in T\ \forall i = 1, \cdots, n$ las variables aleatorias $X(\cdot, t_2) - X(\cdot, t_1), \cdots, X(\cdot, t_n) - X(\cdot, t_{n-1})$ son mutuamente independientes.*

Generalmente el término "proceso con incrementos independientes" se refiere a procesos de parámetro continuo, $T \subset \mathbb{R}$, y en este caso se asume que $\mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega, 0) = 0) = 1$.

Definición A.4.8. Procesos estocásticos con incrementos independientes estacionarios. *Dado el proceso estocástico $X(\omega, t)$, con incrementos independientes, decimos que "es un proceso estocástico con incrementos independientes estacionarios" si se verifica que $\forall\ \{t_1, t_2\} \in T\ \wedge\ \forall h > 0\ :\ X(\cdot, t_2 + h) - X(\cdot, t_1 + h) \stackrel{d}{=} X(\cdot, t_2) - X(\cdot, t_1)$. Se asume que $\{t_1 + h, t_2 + h\} \in T$.*

Definición A.4.9. Procesos estocásticos con incrementos incorrelados. *Dado el proceso estocástico $X(\omega, t)$ decimos que "es un proceso con incrementos incorrelados" si:*

$$\mathbb{E}\Big[|X(\cdot, t) - X(\cdot, s)|^2\Big] < +\infty\ \forall\{s, t\}$$

$$\forall\ s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2,\ \{s_1, t_1, s_2, t_2\} \in\ T\ \ :$$

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X(\cdot, t_2) - X(\cdot, s_2)\Big) \cdot \overline{\Big(X(\cdot, t_1) - X(\cdot, s_1)\Big)}\Big] = \mathbb{E}\Big[\Big(X(\cdot, t_2) - X(\cdot, s_2)\Big)\Big] \cdot \mathbb{E}\Big[\overline{\Big(X(\cdot, t_1) - X(\cdot, s_1)\Big)}\Big].$$

Definición A.4.10. Procesos estocásticos con incrementos ortogonales. *Dado el proceso estocástico $X(\omega, t)$ decimos que "es un proceso con incrementos ortogonales" si:*

$$\mathbb{E}\Big[|X(\cdot, t) - X(\cdot, s)|^2\Big] < +\infty\ \forall\{s, t\}$$

$$\forall\ s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2,\ \{s_1, t_1, s_2, t_2\} \in\ T\ \ :$$

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X(\cdot, t_2) - X(\cdot, s_2)\Big) \cdot \overline{\Big(X(\cdot, t_1) - X(\cdot, s_1)\Big)}\Big] = 0.$$

Aunque los procesos con incrementos incorrelados y ortogonales los hemos definido suponiendo variables aleatorias $\mathbb{C}$- valoradas, la definición para variables aleatorias $\mathbb{R}$-valoradas es trivial. En la práctica, ambos tipos de procesos se consideran de parámetro continuo, $T \subset \mathbb{R}$ no numerable.

Definición A.4.11. Procesos estocásticos estrictamente estacionarios de orden k. *Dado el proceso estocástico $X(\omega, t)$ decimos que "es un proceso estocástico estrictamente estacionario de orden k" si para cualesquiera k puntos $\{t_1, \cdots, t_k\} \in T$ y $h > 0\ : t_i + h \in\ T\ \forall\ i = 1, \cdots, i = k$ se verifica:*

$$\Big[X(\cdot,t_1+h),\cdots,X(\cdot,t_k+h)\Big] \stackrel{d}{=} \Big[X(\cdot,t_1),\cdots,X(\cdot,t_k)\Big].$$

Se dice que es "estrictamente estacionario" si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ es estrictamente estacionario de orden k.

Definición A.4.12. Procesos estocásticos evolutivos. *Dado el proceso estocástico $X(\omega,t)$ decimos que "es un proceso evolutivo" si no es estacionario (estrictamente estacionario).*

Cuando interpretamos un proceso estocástico como un sistema aleatorio que evoluciona en el tiempo es interesante el concepto de "información" que aporta el sistema; si observamos las trayectorias del proceso hasta un cierto tiempo $t \in T$ podemos decidir si un cierto suceso $A \in \sigma(X(\cdot,s)),\ s \leq t)$. Este concepto de información proporcionada por un proceso estocástico, desde un punto de vista matemático, viene modelada por las denominadas filtraciones.

Definición A.4.13. Filtración. *Dado el espacio probabilístico $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ definimos "filtración", y la denotamos por $\{\mathscr{A}_t\}_{t\geq 0}$, como una familia no decreciente de sub σ-álgebras de $\mathscr{A}$. Denominamos "filtración natural del proceso" a la filtración $\{\mathscr{A}_t\}_{t\geq 0}$ / $\mathscr{A}_t = \sigma(X(\cdot,s),\ s\leq t)$.*

Definición A.4.14. Proceso adaptado a una filtración. *Dado el proceso $X(\omega,t)$ y la filtración $\{\mathscr{A}_t\}_{t\geq 0}$ definida en el espacio probabilístico $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, decimos que "el proceso $X(\omega,t)$ está adaptado a la filtración $\{\mathscr{A}_t\}_{t\geq 0}$" si $\forall\ t\geq 0\ :\ X(\cdot,t)$ es $\mathscr{A}_t$-medible.*

En el estudio de los procesos estocásticos es conveniente, en determinadas circunstancias, considerar "procesos estocásticos modificados" o "procesos estocásticos equivalentes".

Definición A.4.15. Procesos estocásticos equivalentes. *Dados dos procesos estocásticos $X(\omega,t),\ \bar{X}(\omega,t)$ definidos en el espacio probabilístico $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ con conjunto de índices T decimos que "son equivalentes", o que "$\bar{X}(\omega,t)$ es una modificación del proceso estocástico $X(\omega,t)$", y lo denotamos por $\bar{X}(\omega,t)\equiv X(\omega,t)$, sii. $\forall t\in T\ :\ \mathbb{P}(\omega\in\Omega\ /\ X(\omega,t)=\bar{X}(\omega,t))=1$.*

Definición A.4.16. Proceso estocástico separable. *Dado un proceso estocástico $X(\omega,t)$ definido en el espacio probabilístico $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ decimos que "es separable" si $\exists\ N\subset\Omega\ /\ \mathbb{P}(N)=0\ \wedge\ \exists\ S\subset T$ numerable y denso en T tal que si $\omega\notin N\ \wedge\ t\in T\ \exists\ \{t_i\}_{i=1}^{+\infty}\subset S\ /\ t_i\to t\ \wedge\ X(\omega,t_i)\to X(\omega,t)$.*[4]

Dado un proceso estocástico $X(\omega,t)$ es necesario estudiarlo, caracterizarlo, para poder analizar el fenómeno que modeliza. Según la definición que adoptemos de proceso estocástico tendremos un modo de describirlo:

- Definimos el proceso estocástico $X(\omega,t)$, con conjunto de índices T y conjunto de estados $(E,\mathcal{B})$ como una aplicación $X:\Omega\times T\to E$.

  Si en el conjunto de índices T definimos una topología $\mathscr{T}$ podemos considerar el espacio de medida $(T,\mathcal{T})$, siendo $\mathcal{T}$ la σ-álgebra generada por los abiertos de la topología $\mathscr{T}$.

  Definición A.4.17. Proceso estocástico medible. *Decimos que el proceso estocástico $X(\omega,t)$ definido en el espacio probabilístico $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ con conjunto de índices T, y el conjunto de estados E es "medible respecto de las σ-álgebras $\mathscr{A}\otimes\mathcal{T}$ y $\mathcal{B}$" si*

$$\forall B\in\mathcal{B}\ :\ \{(\omega,t)\in\Omega\times T\ /\ X(\omega,t)\in B\}\in\mathscr{A}\otimes\mathcal{T}.$$

[4] *T es un espacio polaco, si consideramos en T la métrica del valor absoluto.*

Considerando el espacio de medida $(\Omega \times T, \mathscr{A} \otimes \mathcal{T})$ podemos definir una medida en T (si $T \subset \mathbb{R}$ no numerable, por ejemplo la medida de Lebesgue ℓ) y a continuación definir la medida producto $\mathbb{P} \otimes \ell$; de ese modo tendremos el espacio de medida $(\Omega \times T, \mathscr{A} \otimes \mathcal{T}, \mathbb{P} \otimes \ell)$ y podríamos estudiar el proceso a partir de él. Sin embargo, en general, no podemos afirmar que todos los procesos estocásticos sean medibles, aunque sí se puede demostrar el siguiente resultado parcial:

Proposición A.4.1. *Todo proceso estocástico $X(\omega, t)$ definido en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ con conjunto de índices T, y el conjunto de estados E, continuo, es medible.*

La importancia de los procesos estocásticos medibles se debe a que, si se cumplen ciertas condiciones de continuidad, todo proceso estocástico es equivalente a uno medible. Un interesante estudio siguiendo esta línea de investigación puede consultarse en el libro [90] de M. Loève.

Teniendo en cuenta el concepto de filtración y de información asociada a ella, aportada por el proceso de una forma "dinámica", es interesante considerar los procesos estocásticos "progresivamente medibles":

Definición A.4.18. Procesos estocásticos progresivamente medibles. *Dado un proceso estocástico $X(\omega, t)$ y una filtración $\{\mathscr{A}_t\}_{t\geq 0}$ definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, decimos que el proceso estocástico $X(\omega, t)$ es "progresivamente medible con respecto a la filtración $\{\mathscr{A}_t\}_{t\geq 0}$" si*

$$\forall\, t \geq 0 \ \wedge \ \forall\, B \in \mathcal{B} \ : \ \{(\omega, s) \in \ \Omega \times [0, t] \ / \ X(\omega, s) \in B\} \in \mathscr{A}_t \otimes \mathbb{B}([0, t]).$$

- Definimos el proceso estocástico $X(\omega, t)$, con conjunto de índices T y conjunto de estados $(E, \mathcal{B})$ como una aplicación $X : \Omega \to \bar{\Omega},\ X(\omega) = X(\omega, \cdot) = \bar{\omega}$, siendo $\bar{\Omega}$ el espacio (conjunto) de todas las funciones $\bar{\omega} : T \to \mathbb{R}$. En el conjunto $\bar{\Omega}$ definimos el denominado "conjunto de los cilindros":

$$\mathscr{C}_n = \{\bar{\omega} \in \bar{\Omega},\ \bar{\omega}(t_1) \in B_1, \cdots, \bar{\omega}(t_n) \in B_n,\ B_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \ \wedge \ t_i \in T \ \forall\, i = 1, \cdots, n\}.$$

Denotamos por $\overline{\mathscr{A}}$ la σ-álgebra generada por los cilindros $\mathscr{C}_n$, y obtenemos el espacio medible $(\bar{\Omega}, \overline{\mathscr{A}})$; es evidente que la aplicación $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\bar{\Omega}, \overline{\mathscr{A}})$ es $\mathscr{A}$-medible, con lo cual definiendo una medida μ en $(\bar{\Omega}, \overline{\mathscr{A}}),\ \mu(\bar{A}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\bar{A})),\ \forall\, \bar{A} \in \overline{\mathscr{A}}$, podemos describir el proceso, para lo cual se consideran equivalentes todos los procesos que inducen la misma medida μ en $(\bar{\Omega}, \overline{\mathscr{A}})$, y tomando como representante canónico de la misma al proceso estocástico definido sobre el espacio probabilístico $(\bar{\Omega}, \overline{\mathscr{A}}, \mu)$ tomando como $\bar{\omega}$ la identidad. Sin embargo, teniendo en cuenta la definición de $\overline{\mathscr{A}}$, no existe $\bar{A} \in \overline{\mathscr{A}}$ definido restringiendo los valores de sus elementos en más de una cantidad numerable de puntos de T, lo cual nos llevaría al concepto de "espacio estocástico separable" y al teorema que garantiza que dado cualquier proceso estocástico definido en un cierto espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ existe un proceso estocástico separable definido en el mismo espacio probabilístico equivalente (definición A.4.15).

Para estudiar de forma rigurosa un proceso estocástico, abordando este problema desde otra perspectiva, necesitamos determinar su ley de probabilidad. Desde un punto de vista físico la característica más importante de un proceso estocástico es el conjunto $\{\mu_{t_1, \cdots, t_n}\}$ de sus distribuciones finito dimensionales, que definimos:

Definición A.4.19. Distribuciones finito dimensionales del proceso $X(\omega,t)$. *Sea un proceso estocástico* $X(\omega,t)$ *definido en el espacio de probabilidad* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. *Definimos "distribución finito dimensional del proceso* $X(\omega,t)$, $\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\in T$*", y lo denotamos por* $\mu_{t_1,\cdots t_n}$, *a la distribución de probabilidad de la variable aleatoria (vector aleatorio)*

$$(X(\cdot,t_1),\cdots,X(\cdot,t_n)).$$

Es evidente que $\mu_{t_1,\cdots,t_n}$ es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^n$ y que si σ es una permutación del conjunto $\{1,\cdots,n\}$ se verifica:

$$\mu_{t_1,\cdots,t_n}(B_1\times\cdots\times B_n)=\mu_{t_{\sigma(1)},\cdots,t_{\sigma(n)}}(B_{\sigma(1)}\times\cdots\times B_{\sigma(n)}),\ \{B_i\}_{i=1}^n\in\mathbb{B}(\mathbb{R}). \tag{A.2}$$

$$\mu_{t_1,\cdots,t_n}(B_1\times\cdots\times B_{n-1}\times\mathbb{R})=\mu_{t_1,\cdots,t_{n-1}}(B_1\cdots B_{n-1}),\ \{B_i\}_{i=1}^{n-1}\in\mathbb{B}(\mathbb{R}). \tag{A.3}$$

Conocer las distribuciones finito dimensionales de un proceso estocástico $X(\omega,t)$ nos permite conocer la distribución conjunta de cualquier familia finita de variables aleatorias $\{X(\cdot,t_i)\}_{i=1}^n\subset\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$, y teniendo en cuenta la definición del espacio medible $(\bar{\Omega},\overline{\mathscr{A}})$, es inmediato que dos procesos estocásticos que tengan las mismas distribuciones finito dimensionales inducirán la misma probabilidad en $(\bar{\Omega},\overline{\mathscr{A}})$, con lo cual concluimos que podemos estudiar el proceso a partir de las distribuciones finito dimensionales.

Existen estudios profundos y muy interesantes (F. Baudoin ([7]), J. L. Doob ([32]), A. N. Kolmogorov ([77], [78]), M. Loève ([90])...) donde a partir de las denominadas "distribuciones finito dimensionales del proceso" y mediante teoremas sofisticados como el *teorema de extensión de Daniell-Kolmogorov*, el *teorema de continuidad de Kolmogorov*,...determinan, en cierto modo, la medida de probabilidad μ del proceso, o de un proceso equivalente (haciendo uso del controvertido *axioma de elección*, axioma A.1.1, en la página 207). [5] No es nuestra intención extendernos describiendo el procedimiento, que puede consultarse en la bibliografía, sin embargo, en relación con las distribuciones finito dimensionales del proceso es fundamental el siguiente teorema:

Teorema A.4.1. Teorema de existencia de un proceso estocástico (Kolmogorov). *Sea* $\{\mu_{t_1,\cdots,t_n}\}$, $t_i\in T\subset\mathbb{R}$, $t_1<t_2<\cdots<t_n$, $n\geq 1$ *una familia de distribuciones finito dimensionales satisfaciendo A.2 y A.3. Existe un espacio probabilístico* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ *y un proceso estocástico* $X(\omega,t)$ *definido en ese espacio probabilístico tal que las distribuciones finito dimensionales de* $X(\omega,t)$ *son* $\{\mu_{t_1,\cdots,t_n}\}$.

Teniendo en cuenta el anterior teorema de Kolmogorov, a partir de las distribuciones finito dimensionales se puede definir una medida de probabilidad $\overline{\mathbb{P}}$ en el espacio medible asociado $(\bar{\Omega},\overline{\mathscr{A}})$ y asociar como ley de probabilidad al proceso estocástico $X(\omega,t)$ (o a su equivalente $\bar{X}(\omega,t)$ separable) esa medida de probabilidad. [6]

[5] *Dos procesos estocásticos definidos en el mismo espacio probabilístico se dicen "equivalentes" o que uno es una "modificación del otro" si son iguales casi seguro para cada t perteneciente al conjunto de índices* T.

[6] *La extensión de la medida de probabilidad teniendo en cuenta el teorema A.4.1 a procesos no separables no es única.*

- Definimos el proceso estocástico $X(\omega, t)$, con conjunto de índices T y conjunto de estados $(E, \mathcal{B})$ como una aplicación $X : T \to \bar{T},\ X(t) = X(\cdot, t) = \bar{t}$, siendo $\bar{T}$ el espacio (conjunto) de todas las variables aleatorias $\bar{t} : \Omega \to \mathbb{R}$. Si conocemos, para cada instante $t \in T$, la variable aleatoria que describe la evolución del proceso este queda descrito conociendo la distribución de probabilidad de cada una de esas variables $X(\cdot, t) = X_t,\ \mathbb{P}_{X_t}$.

- Un proceso estocástico $X(\omega, t)$, con conjunto de índices T y conjunto de estados $(E, \mathcal{B})$ también queda descrito si para cada $t \in T$ la variable aleatoria $X(\cdot, t)$ se puede expresar como función de otras variables aleatorias de las cuales conocemos su ley de probabilidad.

  En nuestra investigación, el estudio de los procesos de renovación compuestos con deriva, esta es la opción que seguiremos a la hora de definir este tipo de procesos.

La teoría de los procesos estocásticos ha experimentado un desarrollo considerable desde sus orígenes y proporciona modelos de estudio apropiados para la investigación de diversos fenómenos en disciplinas como la física, la biología, la química... esos modelos matemáticos, en su mayor parte, están basados en unos procesos estocásticos tipo, o bien modificaciones de ellos. A continuación, brevemente, vamos a describir esos procesos que podríamos denominar “fundamentales”.

A.4.2. Procesos estocásticos fundamentales.

Uno de los procesos estocásticos más importantes es el proceso de Wiener, que recibe este nombre en honor de N. Wiener, uno de los pioneros en el estudio del movimiento browniano, y que proporciona modelos para el estudio de fenómenos tan diversos como el movimiento browniano (N. Wiener, [154]), las fluctuaciones de los precios en mercados de mercancías y suministros (L. Bachelier, [5]), en la mecánica cuántica (M. Kac, [69]),...

Definición A.4.20. Proceso de Wiener. *Dado un proceso estocástico $X(\omega, t)$ Decimos que "es un proceso de Wiener" si*

- *Es un proceso estocástico con incrementos independientes estacionarios.*
- $\forall\, t > 0\ :\ X(\cdot, t)$ *tiene distribución normal.*
- $\forall\, t > 0\ :\ \mathbb{E}(X(\cdot, t)) = 0.$
- $X(\cdot, 0) = 0.$

Hay fenómenos aleatorios que se pueden representar mediante una "función de conteo" que representa la cantidad de sucesos que han ocurrido durante un cierto período de tiempo, desde 0 hasta un determinado $t > 0$. Fenómenos de este tipo son la cantidad de clientes que llegan a una cola para que se les sirva, llegada a un contador Geiger de los rayos α emitidos por una fuente radiactiva... En la literatura esta función de conteo se suele representar por $N(t)$, que "cuenta" la cantidad de sucesos que han ocurrido en el intervalo temporal $(0, t]$, o la cantidad de veces que ha ocurrido un suceso en ese intervalo. $N(t)$ toma los valores, por lo tanto, en el conjunto $\mathbb{N}$. Uno de los procesos estocásticos más importantes (y usados) para estudiar estos fenómenos aleatorios es el denominado "proceso de Poisson", que se puede definir axiomáticamente:

Definición A.4.21. Proceso de Poisson con intensidad ν. *Dado un proceso estocástico $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ decimos que "es un proceso de Poisson con intensidad ν $(\nu > 0)$" si cumple las siguientes propiedades:*

- $N(t) \in \mathbb{N}\ \forall\, t \geq 0$. *Toma sus valores en el conjunto de los números naturales.*
- $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ *tiene incrementos independientes estacionarios.*
- $\forall\, 0 < s < t$ *la variable aleatoria $N(t) - N(s)$, que cuenta la cantidad de veces que ha ocurrido el suceso en el intervalo $(s, t]$, sigue una distribución de Poisson de media $\nu(t - s)$:*

$$\mathbb{P}(N(t) - N(s) = k) = \frac{[\nu(t - s)]^k}{k!} \cdot e^{-\nu(t-s)},\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

$$\mathbb{E}[N(t) - N(s)] = \nu(t - s),\ \sigma^2[N(t) - N(s)] = \nu(t - s).$$

Los procesos estocásticos de Poisson han sido utilizados para el estudio de modelos económicos (H. Cramér, [16]), poblacionales (A. Birnbaum, [10]),...

Otro de los procesos estocásticos fundamentales, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, son los procesos gaussianos. La importancia de los procesos estocásticos gausianos es clara teniendo en cuenta que dado cualquier proceso estocástico $X(\omega, t)$, ya sea de variables aleatorias $\mathbb{R}$-valoradas o $\mathbb{C}$-valoradas, es posible encontrar un proceso estocástico gaussiano $\bar{X}(\omega, t)$ equivalente con la misma media y covarianza. Con lo cual, en estudios en los cuales únicamente interese la media y la covarianza, se puede considerar que el proceso $X(\omega, t)$ es gaussiano. Un estudio muy interesante sobre este tipo de procesos puede consultarse en el libro de J. L. Doob [32].

Definición A.4.22. Proceso gaussiano. *Dado un proceso estocástico $X(\omega,t)$ decimos que "es un proceso gaussiano" si la distribución conjunta de cualquier familia finita de variables aleatorias $\{X(\cdot,t_i)\}_{i=1}^n \subset \{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ es gaussiana; o equivalentemente, su función característica conjunta es:*

$$\phi_{X(\cdot,t_1),\cdots,X(\cdot,t_n)}(p_1,\cdots,p_n) = e^{\displaystyle i\sum_{j=1}^n p_j\mathbb{E}[X(\cdot,t_j)] - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n p_jp_kCov[X(\cdot,t_j),X(\cdot,t_k)]}, \ \forall\ \{p_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}.$$

Es interesante destacar que el proceso de Wiener es un proceso gaussiano.

Existen fenómenos aleatorios, como ciertos sistemas físicos, en los cuales la probabilidad de que el sistema en un determinado tiempo t_2 permanezca en un estado dado se puede deducir del estado en un instante t_1 anterior cualquiera, y es independiente de toda la historia previa a t_1. Los procesos estocásticos que describen estos fenómenos se denominan "procesos de Markov". Deben su nombre a A. A. Markov ([102]) quien puede considerarse el pionero en la investigación en este tipo de procesos, que posteriormente desarrollaría la escuela de probabilistas rusos como E. B. Dynkin ([36]), A. N. Kolmogorov ([77]),...

Definición A.4.23. Proceso de Markov. *Dado un proceso estocástico $X(\omega,t)$, $T = [0,+\infty)$ decimos que "es un proceso de Markov" si cumple la siguiente propiedad (propiedad de Markov):*

$$\forall\ \{t_i\}_{i=1}^n \in\ T,\ t_1 < t_2 < \cdots t_n\ :\ \mathbb{P}(X(\cdot,t_n) \leq x_n \diagup X(\cdot,t_1) = x_1,\cdots,X(\cdot,t_{n-1}) = x_{n-1}) =$$

$$= \mathbb{P}(X(\cdot,t_n) \leq x_n \diagup X(\cdot,t_{n-1}) = x_{n-1}).$$

Un caso particular, y muy importante, de procesos de Markov son los denominados "procesos de difusión".

Definición A.4.24. Procesos de difusión. *Dado un proceso estocástico $X(\omega,t), t \geq 0$ con espacio muestral $\Omega = (a,b),\ -\infty \leq a < b \leq +\infty$ decimos que "es un proceso de difusión con coeficiente de deriva $\mu(u)$ y coeficiente de difusión $\sigma^2(u) > 0,\ u > 0$" si:*

1. *Es un proceso de Markov.*
2. *Tiene trayectoria muestral continua.*
3. *Para todo $u > 0$ se cumplen las siguientes relaciones cuando $t \to 0^+$, $\forall\epsilon > 0$:*
   - $\mathbb{E}[[X(\cdot,s+t) - X(\cdot,s)]I_{|X(\cdot,s+t)-X(\cdot,s)|\leq\epsilon} \diagup X(\cdot,s) = u] = t\mu(u) + o(t)$.
   - $\mathbb{E}[[X(\cdot,s+t) - X(\cdot,s)]^2 I_{|X(\cdot,s+t)-X(\cdot,s)|\leq\epsilon} \diagup X(\cdot,s) = u) = t\sigma^2(u) + o(t)$.
   - $\mathbb{P}(|X(\cdot,s+t) - X(\cdot,s)| > \epsilon \diagup X(\cdot,s) = u) = o(t)$.

Es interesante destacar que el movimiento browniano es el único proceso de Markov con trayectorias continuas que tiene incrementos independientes. El movimiento browniano al ser un proceso de difusión queda caracterizado por ser un proceso estocástico cumpliendo las condiciones de la anterior definición, pero podemos también caracterizarlo de la siguiente manera:

Definición A.4.25. Movimiento browniano. *Dado un proceso estocástico $X(\omega, t),\ t \geq 0$ decimos que "es un movimiento browniano con coeficiente de deriva μ y coeficiente de difusión $\sigma^2, \{\mu, \sigma\} \in \mathbb{R}$," si tiene trayectoria muestral continua y sus incrementos se distribuyen normalmente, $X(\cdot, s+t) - X(\cdot, s) \rightsquigarrow \mathscr{N}(t\mu, \sqrt{t}\sigma),\ \forall \{t, s\} \in \mathbb{R}^+$.*

Si consideramos caminatas al azar en las cuales las longitudes de los pasos individuales son pequeñas y los espacios entre un paso y el siguiente son tan pequeños en el tiempo que "parece" un movimiento continuo, mediante un paso al límite se llega a los procesos de difusión (en particular al movimiento browniano). [7]

Una caminata aleatoria se define como:

Definición A.4.26. Caminata aleatoria. *Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias definidas en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ cumpliendo las siguientes propiedades:*

1. $X_i = 1 \ \vee \ X_i = -1 \ \forall\, i \in \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{P}(X_i = 1) = p \ \wedge \ \mathbb{P}(X_i = -1) = q,\ p + q = 1,\ \forall i \in \mathbb{N}$.

Se denomina "caminata aleatoria" al proceso estocástico $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definido de la siguiente forma:

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Al proceso estocástico $\{S_n + u\}_{n \in \mathbb{N}},\ u > 0$ se le denomina "caminata aleatoria iniciada en u".

El concepto de "martingala" introducido y estudiado por J. L. Doob([32]) y P. Lèvy([84]), es, junto con los procesos de Markov, de los más importantes tipos de procesos estocásticos; las martingalas son imprescindibles a la hora de estudiar la teoría de la integración estocástica y el cálculo de Ito (K. Itô, [67]).

Definición A.4.27. Martingala, submartingala y supermartingala. *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espacio probabilístico y sea una filtración $\{\mathscr{A}_t\}_{t \geq 0}$ definida en él. Sea el proceso estocástico $X(\omega, t)$ definido en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ con conjunto de índices T y conjunto de estados E, adaptado a la filtración $\{\mathscr{A}_t\}_{t \geq 0}$ y tal que $\forall\, t \in T \ :\ \mathbb{E}(|X(\cdot, t)|) < +\infty$. Decimos que es:*

- *Submartingala si* $\forall t \geq s \geq 0 \ :\ \mathbb{E}(X(\cdot, t) / \mathscr{A}_s) \geq X(\cdot, s)$.
- *Supermartingala si* $\forall t \geq s \geq 0 \ :\ \mathbb{E}(X(\cdot, t) / \mathscr{A}_s) \leq X(\cdot, s)$.
- *Martingala si* $\forall t \geq s \geq 0 \ :\ \mathbb{E}(X(\cdot, t) / \mathscr{A}_s) = X(\cdot, s)$.

Otros procesos destacados son los denominados "procesos de saltos" y los "procesos de llegadas" o "procesos de conteo":

Definición A.4.28. Proceso de saltos. *Dado un proceso estocástico $X(\omega, t), t \geq 0$ definido sobre un espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ decimos que es un "proceso de saltos" si existe una sucesión de variables aleatorias $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidas sobre el espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ tal que:*

- $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión monótona creciente de variables aleatorias,* $t_n < t_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

[7] *Ver W. Feller Introducción a la teoría de la probabilidad, Tomo I, pag. 356, o R.N, Bhattacharya, Stochastic processes with applications, pag. 386.*

- *Las trayectorias permanecen constantes en los intervalos* (t_n, t_{n+1}) *y presentan saltos en los puntos* t_n.

- *Existen los límites*
$$\lim_{t\to t_n^{\pm}} X(\cdot, t),\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Cuando describimos los procesos de Poisson ya mencionamos la importancia de los procesos de conteo, con aplicaciones en diferentes disciplinas científicas.

Definición A.4.29. Proceso de conteo (de llegadas). *Dado un proceso estocástico* $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ *definido sobre un espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *decimos que es un "proceso de conteo" si :*

- *Es un proceso de saltos.*

- *Se verifica*

$$N(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n I_{\{t_n \leq t < t_{n+1}\}},\ \forall\ t \geq 0.$$

Siendo $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias definidas en el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *que cumple las hipótesis de la definición del proceso de saltos; las denominamos "tiempos de llegada". La sucesión de variables aleatorias* $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definida como* $\tau_1 = t_1,\ \tau_n = t_n - t_{n-1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ *las denominamos "tiempos entre llegadas".*

Es interesante destacar que un proceso de conteo satisfaciendo una cierta axiomática es un proceso de Poisson. Sea un proceso de conteo $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ que satisface los siguientes axiomas:

- *Axioma I.* Definimos $N(0) = 0$.

- *Axioma II.* El proceso $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes.

- Axioma III. Para todo $t \geq 0$ se verifica:

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2 \diagup N(t+h) - N(t) = 1) = 0.$$

- *Axioma IV.* El proceso de conteo $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ tiene incrementos estacionarios.

El proceso $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson. Si se suprime el Axioma III obtenemos los denominados "procesos de Poisson generalizados". Si se suprime el Axioma IV obtenemos los denominados "procesos de Poisson no homogéneos". Un estudio muy detallado se puede consultar en el libro de E. Parzen ([122]).

Es interesante el siguiente teorema:

Teorema A.4.2. *Los tiempos sucesivos entre llegadas* $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *de los procesos del tipo Poisson de intensidad* $\nu > 0$ *son variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente, que obedecen una ley de probabilidad exponencial con media* $\frac{1}{\nu}$.

Apéndice B

Estudio de casos particulares de distribuciones.

B.1. Tiempos de espera con distribución exponencial.

Proposición B.1.1. (Ley de probabilidad no condicionada). *En el caso de que las variables aleatorias tiempos de espera, $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tengan distribución exponencial de parámetro λ la función de densidad de $S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ verifica la siguiente igualdad:*

$$\boxed{f_{S_t}(x) = \delta_0(x)e^{-\lambda t} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx-\lambda t}\cdot\left(e^{\lambda t\psi(p)} - 1\right)\,\mathrm{d}p} \tag{B.1}$$

Demostración. Vamos a descomponer la distribución de probabilidad $\mathbb{P}_{S_t}$ en la suma de dos distribuciones de probabilidad, una discreta, $\mathbb{P}^D_{S_t}$, y una absolutamente continua, $\mathbb{P}^C_{S_t}$, siendo $\mathbb{P}^D_{S_t}$ la distribución de probabilidad de un átomo concentrado en el $\{0\}$.

$$\mathbb{P}_{S_t} = \mathbb{P}^D_{S_t} + \mathbb{P}^C_{S_t}.$$

Teniendo en cuenta que $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon(\lambda)$ obtenemos:

$$\mathbb{P}(S_t = 0) = \mathbb{P}(\tau_1 > t) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{-\lambda t},$$

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Con lo cual:

$$\mathbb{P}_{S_t} = \delta_0 e^{-\lambda t} + \mathbb{P}^C_{S_t}.$$

Aplicando la transformada de Fourier a los dos lados de la igualdad obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\,\mathrm{d}\mathbb{P}^C_{S_t}(x) = e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t\psi(p)} - e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t\psi(p)} - 1\right).$$

Siendo $\psi(p)$ la función característica de la variable aleatoria Y_i, los saltos. Aplicando la transformada inversa obtenemos efectívamente B.3.

□

Para la ley de probabilidad condicionada tenemos la siguiente proposición:

Proposición B.1.2. (Ley de probabilidad condicionada).*En el caso de que las variables aleatorias tiempos de espera, $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tengan distribución exponencial de parámetro λ la función de densidad de $S_{t+h} = \sum_{i=1}^{N(t+h)} Y_i$ condicionada por $S_t = x$ satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{f_{S_{t+h}/S_t=x}(y) = \delta_0(y-x)e^{-\lambda h} + \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(y-x)}\frac{e^{\lambda(\psi(p)-1)h}\left[1-e^{-\lambda\psi(p)h}\right]}{\lambda}\,\mathrm{d}p} \tag{B.2}$$

Demostración. Teniendo en cuenta las proposiciónes 2.2.2, en la página 44, 2.1.2, en la página 13, 2.1.10, en la página 21, y 2.1.11 en la página 22, obtenemos:

$$m(l) = \mathbb{E}(N(l)) = \lambda l,\ \hat{f}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

Vamos a calcular la función de densidad de la variable aleatoria excess life, $\mathscr{E}_t^+$:

$$f_{\mathscr{E}_t^+}(l) = \lambda e^{-\lambda(t+l)} + \int_0^t \lambda\left(\lambda e^{-\lambda(t+l-x)}\right)\mathrm{d}x = \lambda e^{-\lambda l}.$$

Teniendo en cuenta que los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tienen distribución exponencial de parámetro λ, se cumple:

$$F_{\tau_i}(t) = \mathbb{P}(\tau_i \leq t) = 1-e^{-\lambda t}.$$

y

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_t^+ > h) = 1-F(h+t) + \int_0^t \mathrm{d}m(l)\,[1-F(h+t-l)] = e^{-\lambda h}.$$

Vamos a calcular ahora $G_{N(h-l)}(z)$, la función generatriz de la variable aleatoria $N(h-l)$.

$$G_{N(h-l)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s(h-l)}\frac{1-\hat{f}(s)}{s\left(1-\hat{f}(s)z\right)}\mathrm{d}s = e^{\lambda(z-1)(h-l)}.$$

Hemos tenido en cuenta el teorema de los residuos, eligiendo γ de forma que el polo $\lambda(z-1)$ quede en el interior del recinto, $\lambda(z-1) < \gamma$.

A continuación vamos a calcular la integral

$$\int_0^h G_{N(h-l)}(\psi(p))\cdot\mathrm{d}\phi(l/t) = \int_0^h e^{\lambda(\psi(p)-1)(h-l)}\lambda e^{-\lambda l}\,\mathrm{d}l = \frac{e^{\lambda(\psi(p)-1)h}\left[1-e^{-\lambda(\psi(p)h}\right]}{\lambda\psi(p)}.$$

Tras diversos cálculos. Teniendo en cuenta estos resultados deducidos, concluimos que se verifica B.2.

□

B.2. Tiempos de espera con distribución Erlang.

Proposición B.2.1. Ley de probabilidad no condicionada. *En el caso de que los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tienen distribución Erlang, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon_r(n,\lambda)$, la función de densidad no condicionada satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{f_{S_t}(x) = \delta_0(x)e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}+} \tag{B.3}$$

$$\boxed{+\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx-\lambda t}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda r_i t}\left[\psi(p)-1\right]}{(r_i-1)\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(r_i-r_k)} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t\lambda)^i}{i!}\right]\mathrm{d}p}$$

Demostración. Es sabido que la transformada de Laplace de $f(x)$, siendo $f(x)$ la función de densidad de los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene la siguiente expresión:

$$\hat{f}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n.$$

Teniendo en cuenta la proposición 2.2.1, en la página 42, aplicando el teorema de los residuos obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\left(1-\hat{f}(s)\right)\frac{\hat{f}(s)\cdot\psi(p)}{s\left(1-\hat{f}(s)\cdot\psi(p)\right)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n\right)\frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n\cdot\psi(p)}{s\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n\psi(p)\right)}\,\mathrm{d}s =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda(r_i-1)t}\left[\psi(p)-1\right]}{(r_i-1)\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(r_i-r_k)} - e^{-t\lambda}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t\lambda)^i}{i!}.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\mathbb{P}(S_t=0)=\mathbb{P}(N(t)=0)=\mathbb{P}(t_1>t)=\mathbb{P}(\tau_1>t)=1-F(t)$, necesitamos calcular $\overline{F}(t)=1-F(t)$:

$$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_t^{+\infty} x^{n-1}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Tras diversos cambios de variable y cálculos aritméticos. Con lo cual concluimos B.3.

□

Para la ley de probabilidad condicionada:

Proposición B.2.2. Ley de probabilidad condicionada. *En el caso de que los tiempos de espera $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tienen distribución Erlang, $\tau_i \rightsquigarrow \epsilon_r(n,\lambda)$, la función de densidad condicionada satisface la siguiente igualdad:*

$$\boxed{f_{S_{t+h}/S_t=x}(y) = \delta_0(y-x)\sum_{k=1}^{n}(\lambda h)\frac{e^{-\lambda h}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\alpha_j(t)+} \tag{B.4}$$

$$\boxed{+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(y-x)}\left[\frac{\lambda\psi(p)\left[\psi(p)-1\right]}{(n-1)!}e^{-\lambda h}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda r_i h}}{(r_i-1)\prod_{k\neq i}^{n}(r_i-r_k)}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(t)\int_0^h(\lambda l)^{k-1}e^{-\lambda r_i l}dl\right)\right]\mathrm{d}p}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 2.2.7, en la página 48, necesitamos calcular $G_{N(h-l)}(z)$:

$$G_{N(h-l)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s(h-l)}\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n}{s\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n z\right)}ds = \sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda(r_i-1)(h-l)}\left[z-1\right]}{(r_i-1)\prod_{k\neq i}^{n}(r_i-r_k)}.$$

Por el teorema de los residuos.

Vamos a calcular ahora $m(t)$. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la proposición 2.1.5, en la página 15, obtenemos:

$$m(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}F^{*k}(t) = \lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^t\frac{(\lambda x)^{nk-1}}{(nk-1)!}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda\int_0^t\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\lambda x)^{nk-1}}{(nk-1)!}\right)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Teniendo en cuenta que es una serie de funciones integrables y que converge uniformemente (se puede aplicar el *criterio M de Weierstrass* para comprobarlo, proposición A.1.15, página 221) y por lo tanto la integral de la suma de la serie coincide con la suma de la serie formada por las integrales de las funciones.

Se puede demostrar (ver, por ejemplo, *Stochastic processes* de Parzen) que:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{u^{nk-1}}{(nk-1)!} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\epsilon^k e^{u\epsilon^k}, \forall u\in\mathbb{R}\wedge\forall n\in\mathbb{Z}.$$

$$\text{Siendo } \epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \epsilon^0 = 1, \epsilon^k = e^{\frac{2\pi ik}{n}}.$$

Por lo tanto:

$$m(t) = \lambda\int_0^t\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\epsilon^k e^{\lambda x\epsilon^k}\right)e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda t}{n}+\frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\epsilon^k}{\lambda\left(1-\epsilon^k\right)}\left[1-e^{-\lambda\left(1-\epsilon^k\right)t}\right].$$

Una vez que tenemos deducido $m(t)$ vamos a calcular $m'(t) = \frac{\mathrm{d}(m(t))}{\mathrm{d}t}$. Por cálculo directo, tenemos que:

$$m'(t) = \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\epsilon^k}{\lambda\left(1-\epsilon^k\right)}\left[-e^{-\lambda\left(1-\epsilon^k\right)t}\left(-\lambda\left(1-\epsilon^k\right)\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda\epsilon^k}{n}e^{-\lambda\left(1-\epsilon^k\right)t}.$$

Teniendo en cuenta que $\epsilon^n = e^{\frac{2\pi i n}{n}} = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\,\mathrm{sen}(2\pi) = 1$.

Siendo $\phi(t/r) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_r^+ \leq t)$ teniendo en cuenta la proposición 2.1.9, en la página 20, despues de cálculos laboriosos, obtenemos:

$$\phi(t/r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s(t+r)}\frac{1-\hat{f}(s)}{s}\int_r^{+\infty} e^{-sl}\,\mathrm{d}m(l)\,\mathrm{d}s.$$

Para hallar la función de densidad por cálculo directo, o teniendo en cuenta la proposición 2.1.11, en la página 22, sustituyendo la expresión que hemos obtenido para $\mathrm{d}m(l) = m'(l)\,\mathrm{d}l$:

$$f_{\mathscr{E}_r^+}(t) = \sum_{k=1}^{n}\lambda(\lambda t)^{k-1}\frac{e^{-\lambda t}}{(k-1)!}\alpha_k(r).$$

Siendo $\alpha_k(r) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon^{kj}e^{-r\lambda(1-\epsilon^j)}$.

Recordando el resultado anteriormente deducido para $G_{N(h-l)}(z)$ y usando el que acabamos de obtener se deduce:

$$\int_0^h G_{N(h-l)}(\psi(p))\,\mathrm{d}\phi(l/t) = \frac{\lambda\left[\psi(p)-1\right]}{(n-1)!}e^{-\lambda h}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda r_i h}}{(r_i-1)\prod_{k\neq i}^{n}(r_i-r_k)}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(t)\int_0^h(\lambda l)^{k-1}e^{-\lambda r_i l}\,\mathrm{d}l\right).$$

Para concluir, necesitamos calcular $\mathbb{P}(\mathscr{E}_t^+ > h)$. Teniendo en cuenta la proposición 2.1.10, en la página 21:

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_t^+ > h) = \sum_{k=1}^{n}(\lambda h)\frac{e^{-\lambda h}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\alpha_j(t).$$

Por ello concluimos que efectívamente se cumple B.4.

$\square$

Apéndice C

Solución ecuaciones integrales. Tiempos medios y ley de probabilidad.

C.1. Tiempos medios de primera llegada a la barrera superior.

- *El caso favorable. Solución general.*

  Proposición C.1.1. *La solución de la ecuación integral en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_0 = u$, satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{M(u) = \mathbb{F}(b-u),\ u \in [0,b]} \tag{C.1}$$

  Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{cs\hat{f}'(cs)(1-\hat{g}(s)) + 1 - \hat{f}(cs)}{cs^2(1-\hat{f}(cs)\hat{g}(s))}\right]\mathrm{d}s,\ y \in [0,+\infty)} \tag{C.2}$$

  Demostración. Razonando como hicimos en la proposición 3.3.1, en la página 59, condicionando por los valores que toma (τ_1, Y_1) obtenemos:

$$t_u^b = \frac{b-u}{c} I_{\left\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\right\}} + \left(\tau_1 + t_u'^b\right) I_{\left\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c},\, 0 < Y_1 < b-(u+c\tau_1)\right\}}.$$

  Para el tiempo medio se deduce de modo inmediato

$$M(u) = \frac{b-u}{c}\overline{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_0^{b-u}\int_0^t [\frac{b-t-u}{c}]g(v)f(\frac{b-t-u}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t +$$

$$+\frac{1}{c}\int_0^{b-u}\int_0^t M(b-t+v)g(v)f(\frac{b-t-u}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t.$$

Vamos a resolver la anterior ecuación integral, para lo cual vamos a definir el objeto auxiliar:

$$\mathbb{F}(y) = \frac{y}{c}\overline{F}(\frac{y}{c}) + \frac{1}{c}\int_0^y\int_0^t [\frac{y-t}{c}]g(v)f(\frac{y-t}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t +$$

$$+\frac{1}{c}\int_0^y\int_0^t \mathbb{F}(t-v)g(v)f(\frac{y-t}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t,\ y\in[0,+\infty).$$

A continuación vamos a aplicar la transformada de Laplace a los dos lados de la anterior igualdad, con lo cual:

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sy}\left[\frac{y}{c}\overline{F}(\frac{y}{c}) + \frac{1}{c}\int_0^y\int_0^t [\frac{y-t}{c}]g(v)f(\frac{y-t}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y +$$

$$+\int_0^{+\infty} e^{-sy}\left[\frac{1}{c}\int_0^y\int_0^t \mathbb{F}(t-v)g(v)f(\frac{y-t}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Laplace, y después de cambios de variable y diversos cálculos, obtenemos:

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \frac{\hat{f}'(cs)}{s} - \frac{\hat{f}(cs)}{cs^2} + \frac{1}{cs^2} - \frac{\hat{f}'(cs)\hat{g}(s)}{s} + \hat{f}(cs)\hat{g}(s),\ \hat{\mathbb{F}}(s) = \frac{cs\hat{f}'(cs)(1-\hat{g}(s)) + 1 - \hat{f}(cs)}{cs^2(1-\hat{f}(cs)\hat{g}(s))}.$$

Eligiendo ahora α de forma adecuada y aplicando la transformada inversa de Laplace concluimos C.2.

Teniendo en cuenta la definición de $\mathbb{F}(y)$, obtenemos que $M(u) = \mathbb{F}(b-u)$.

□

Para el caso en que el tiempo de partida no es de renovación, tendremos:

Proposición C.1.2. *La solución de la ecuación integral en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_r = u,\ 0 < r < \tau_1,\ \mathscr{E}_r^- = z$, satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{M(r,u,z) = \mathbb{F}(r, b-u, z),\ u\in[0,b]} \tag{C.3}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{cs\hat{f}_z'(cs)[1-\hat{g}(s)] + \bar{F}(z) - \hat{f}_z(cs)}{cs^2\bar{F}(z)} + \frac{\hat{f}_z(cs)\hat{g}(s)\hat{\mathbb{F}}(s)}{\bar{F}(z)}\right]\mathrm{d}s} \tag{C.4}$$

$$\textit{con } y \in [0, +\infty), \; \hat{f}_z(cs) = \int_0^{+\infty} e^{(-cs)x} f(z+x)\,\mathrm{d}x, \; \hat{f}'_z(cs) = \frac{\mathrm{d}(\hat{f}_z(cs))}{\mathrm{d}s}.$$

Demostración. Razonando igual que hicimos en la proposición 3.3.2, en la página 63, obtenemos:

$$t^b_{r,u} = \frac{b-u}{c} I_{\{\mathscr{E}^+_r > \frac{b-u}{c}\}} + (\mathscr{E}^+_r + t'^b_{r,u}) I_{\{0 \leq \mathscr{E}^+_r \leq \frac{b-u}{c}, 0 < Y_1 < b-(u+c\mathscr{E}^+_r)\}}.$$

Razonando de un modo equivalente a los anteriores. Despreciamos sucesos con probabilidad cero. A partir de esa expresión obtenemos para el tiempo medio de primera llegada ($\vec{\sigma} = (X_r = u, \mathscr{E}^-_r = z)$):

$$M(r,u,z) = \frac{b-u}{c}\frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_0^{b-u}\int_0^t [\frac{b-t-u}{c} + M(b-t+v)] g(v) f(z+\frac{b-t-u}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t.$$

Para resolver la anterior ecuación integral definimos el siguiente objeto, y a continuación aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad:

$$\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{y}{c}\frac{\bar{F}(z+\frac{y}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_0^y\int_0^t [\frac{y-t}{c} + \mathbb{F}(t-v)] g(v) f(z+\frac{y-t}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t, \; y \in [0,+\infty).$$

Que también podemos expresar como:

$$\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{y}{c}\frac{\bar{F}(z+\frac{y}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_0^y\int_0^t \frac{y-t}{c} g(v) f(z+\frac{y-t}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t +$$

$$+\frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_0^y\int_0^t \mathbb{F}(t-v) g(v) f(z+\frac{y-t}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t, \; y \in [0,+\infty).$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z) = \frac{cs\hat{f}'_z(cs)[1-\hat{g}(s)] + \bar{F}(z) - \hat{f}_z(cs)}{cs^2\bar{F}(z)} + \frac{\hat{f}_z(cs)\hat{g}(s)\hat{\mathbb{F}}(s)}{\bar{F}(z)}.$$

Eligiendo ahora α de forma adecuada y aplicando la transformada de Laplace inversa obtenemos C.4.

Teniendo en cuenta la definición de $\mathbb{F}(r,y,z)$, obtenemos que $M(r,u,z) = \mathbb{F}(r,b-u,z)$.

□

- *El caso desfavorable. Estudio y solución de casos posibles.*

  El caso actuarial.

  Proposición C.1.3. *Supongamos que F tiene una función de densidad f, de clase C^n en $(0,\infty)$ y que existe un operador diferencial de coeficientes constantes $L = L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que f resuelve:*

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}\right) f(t) = 0 \\ \left(\sum_{j=1}^{n} a_j j \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}\right) f(t) = 0 \end{cases} \tag{C.5}$$

Con las condiciones iniciales

$$f^j(0) = b_j, \text{ para } j = 0, \cdots, n-1. \tag{C.6}$$

Entonces:

1. *La función de renovación $m(t) = \mathbb{E}(N(t))$ tiene una derivada $\nu(t) = m'(t)$ que resuelve la ecuación diferencial con condiciones iniciales:*

$$(L - a_0)\,\nu = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}\right) \nu(t) = 0, \text{ y} \tag{C.7}$$

$$\nu^j(0) = 0 \text{ para } j = 0, \cdots, n-2, \ \nu^{n-1}(0) = a_0.$$

2. *$M(u) \in C^n(0,b)$[1] y cualquier solución $M(u)$ de la ecuación integral 3.50 en la página 89, debe también resolver la ecuación integro-diferencial:*

$$\left(\sum_{j=0}^{n} (-c)^j a_j \frac{\partial^j}{\partial u^j}\right) M(u) = A + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Pi^k(u) + \sum_{k=0}^{n-2} C_k \Gamma^k(u). \tag{C.8}$$

Cuando $b < +\infty$ satisface, además, las n condiciones de frontera:

[1] *Derivada continua de orden n en $(0,b)$.*

$$M(b) = 0,\ M'(b) = -\frac{1}{c} - \frac{1}{c}f(0)\Pi(b), \tag{C.9}$$

$$M''(b) = -\left(\frac{1}{c^2}\right)2f(0) + \left(\frac{1}{c^2}\right)f'(0)\Pi(b) - \frac{1}{c}f(0)\Pi'(b) + \left(\frac{1}{c^2}\right)f(0)\Gamma(b),$$

$$M^k(b) = -\left(\frac{1}{c^k}\right)kf^{k-2}(0) - \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(0)\Pi^i(b) +$$

$$+\frac{1}{c^2}\sum_{i=0}^{k-2}(k-1-i)\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-2-i} f^{k-2-i}(0)\Gamma^i(b). \textit{ Abreviadamente:}$$

$$M(b) = 0,\ M^k(b) = -\left(\frac{1}{c^k}\right)kf^{k-2}(0) - \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(0)\Pi^i(b) + \tag{C.10}$$

$$+\frac{1}{c^2}\sum_{i=0}^{k-2}(k-1-i)\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-2-i} f^{k-2-i}(0)\Gamma^i(b) \textit{ para } k = 1, \cdots, n-1,$$

si aceptamos $f^{-1}(0) = 1$, $\sum_{i=0}^{-1} = 0$. *Siendo:*

$$A = a_0\frac{b-u}{c} - \frac{b-u}{c}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1} + a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k k b_{k-2}, \tag{C.11}$$

$$B_k = (-c)^k\left[\sum_{i=k+1}^{n} a_i f^{i-k-1}(0)\right],\ \Pi(u) = \int_0^u M(u-v)g(v)\,\mathrm{d}v,\ \Pi^k(u) = \frac{\partial^k\Pi(u)}{\partial u^k}, \tag{C.12}$$

$$C_k = (-c)^k\left[\sum_{i=k+2}^{n} a_i(i-k-1)f^{i-k-2}(0)\right],\ \Gamma(u) = \int_0^u g(v)\,\mathrm{d}v,\ \Gamma^k(u) = \frac{\partial^k\Gamma(u)}{\partial u^k}. \tag{C.13}$$

Demostración. Vamos a demostrar el resultado.

1. Es conocida la siguiente relación:

$$\hat{m}'(s) = \frac{\hat{f}(s)}{1-\hat{f}(s)}, \text{ de donde:}$$

$$\hat{f}(s) = \frac{\hat{m}'(s)}{1+\hat{m}'(s)}.$$

También es conocida la relación que verifica la transformada de Laplace de la derivada n-ésima de una cierta función f:

$$\mathcal{L}(f^n(t)) = s^n\hat{f}(s) - [s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \cdots + f^{n-1}(0)].$$

Teniendo en cuenta las hipótesis de la proposición, se cumple que:[2]

[2] *Hemos supuesto, sin pérdida de generalidad, que* $a_n = 1$.

$$a_0 f(t) + a_1 f'(t) + \cdots + f^n(t) = 0,\ \forall t \in (0, +\infty).$$

Si aplicamos la transformada de Laplace a los dos lados de la igualdad, obtenemos:

$$a_0 \mathcal{L}(f(t)) + a_1 \mathcal{L}(f'(t)) + a_2 \mathcal{L}(f''(t)) + \cdots + \mathcal{L}(f^n(t)) = 0,$$

$$a_0 \hat{f}(s) + a_1 s \hat{f}(s) + a_2 s^2 \hat{f}(s) + \cdots + s^n \hat{f}(s) - f^{n-1}(0) = 0.$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales que por hipótesis verifica el operador diferencial y siendo $\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(t))$. De ahí obtenemos:

$$a_0 \frac{\hat{m}'(s)}{1 + \hat{m}'(s)} + a_1 s \frac{\hat{m}'(s)}{1 + \hat{m}'(s)} + a_2 s^2 \frac{\hat{m}'(s)}{1 + \hat{m}'(s)} + \cdots + s^n \frac{\hat{m}'(s)}{1 + \hat{m}'(s)} - a_0 = 0,$$ [3]

$$a_1 s \hat{m}'(s) + a_2 s^2 \hat{m}'(s) + \cdots + s^n \hat{m}'(s) - a_0 = 0.$$

Si hacemos $\nu(t) = m'(t)$ e imponemos las condiciones $\nu^j(0) = 0$ para $j = 0, \cdots, n-2$, $\nu^{n-1}(0) = a_0$ es evidente que la anterior identidad corresponde a

$$a_1 \mathcal{L}(\nu'(t)) + a_2 \mathcal{L}(\nu''(t)) + \cdots + \mathcal{L}(\nu^n(t)) = 0.$$

Con lo cual se cumple la igualdad C.7 y queda demostrada la primera parte de la proposición.

2. Vamos a demostrar la segunda parte. Sabemos que $M(u)$ satisface la siguiente igualdad:

$$M(u) = \frac{b-u}{c} \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c} \int_u^b \frac{t-u}{c} f(\frac{t-u}{c}) \int_0^t g(v)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{1}{c} \int_u^b f(\frac{t-u}{c}) \int_0^y M(t-v)) g(v)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}t.$$

Derivando respecto de u la anterior identidad obtenemos:

[3] *Recordamos que por hipótesis* $f^{n-1}(0) = a_0$.

$$-cM'(u) = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) - \frac{b-u}{c}f(\frac{b-u}{c})+$$

$$+\frac{1}{c}\int_u^b [(f(\frac{t-u}{c}) + \frac{t-u}{c}f'(\frac{t-u}{c})] \int_0^t g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{1}{c}\int_u^b f'(\frac{t-u}{c}) \int_0^t M(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t + b_0\Pi(u),\ \text{donde:}$$

$$\Pi(u) = \int_0^u M(u-v)g(v)\,\mathrm{d}v,\ \Gamma(u) = \int_0^u g(v)\,\mathrm{d}v.$$

Volvemos a derivar respecto de u:

$$c^2M''(u) = -2f(\frac{b-u}{c}) - \frac{b-u}{c}f'(\frac{b-u}{c})+$$

$$+\frac{1}{c}\int_u^b [2f'(\frac{t-u}{c}) + \frac{t-u}{c}f''(\frac{t-u}{c})] \int_0^t g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t + b_0\Gamma(u)+$$

$$+\frac{1}{c}\int_u^b f''(\frac{t-u}{c}) \int_0^t M(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t + b_1\Pi(u) - cb_0\Pi'(u).$$

Se comprueba que para $i = 1, \cdots, n,\ n \geq 2$ se verifica la siguiente igualdad:

$$(-c)^i\frac{\partial^i M(u)}{\partial u^i} = -if^{i-2}(\frac{b-u}{c}) - (\frac{b-u}{c})f^{i-1}(\frac{b-u}{c})+$$

$$+\frac{1}{c}\int_u^b [if^{i-1}(\frac{t-u}{c}) + \frac{t-u}{c}f^i(\frac{t-u}{c})] \int_0^t g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{i-2}[i-1-k](-c)^k b_{i-2-k}\Gamma^k(u)+$$

$$+\frac{1}{c}\int_u^b f^i(\frac{t-u}{c}) \int_0^t M(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{i-1}(-c)^k b_{i-1-k}\Pi^k(u).$$

Denotamos con $\bar{F}(\frac{b-u}{c}) \equiv -f^{-1}(\frac{b-u}{c})$, con $f^i(0) = b_i, i = 0, 1, \cdots, n-2,\ \forall n \in \mathbb{N} \wedge\ n \geq 1$. Si multiplicamos por a_i a los dos lados de las igualdades y sumamos desde 0 hasta n tendremos:

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i \frac{\partial^i}{\partial u^i}\right) M(u) = a_0\frac{b-u}{c} - a_0\frac{b-u}{c}F(\frac{b-u}{c}) + a_1 - a_1 F(\frac{b-u}{c})+$$

$$+\frac{1}{c}\int_u^b \frac{t-u}{c}\sum_{i=0}^{n} a_i f^i(\frac{t-u}{c})\int_0^t g(v)\,\mathrm{d}v + \frac{1}{c}\int_u^b \sum_{i=0}^{n} a_i f^i(\frac{t-u}{c})\int_0^t M(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{1}{c}\int_u^b \sum_{i=1}^{n} a_i i f^{i-1}(\frac{t-u}{c})\int_0^t g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t - \frac{b-u}{c}\sum_{i=1}^{n} a_i f^{i-1}(\frac{b-u}{c})-$$

$$-\sum_{i=2}^{n} a_i i f^{i-2}(\frac{b-u}{c}) + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Pi^k(u) + \sum_{k=0}^{n-2} C_k \Gamma^k(u), \text{ siendo:}$$

$$B_k = (-c)^k\left[\sum_{i=k+1}^{n} a_i b_{i-k-1}\right],\; C_k = (-c)^k\left[\sum_{i=k+2}^{n} a_i(i-k-1)b_{i-k-2}\right].$$

Tras diversos cálculos aritméticos obtenemos:

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i \frac{\partial^i}{\partial u^i}\right) M(u) = a_0\frac{b-u}{c} - \frac{b-u}{c}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1} + a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k k b_{k-2}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} B_k \Pi^k(u) + \sum_{k=0}^{n-2} C_k \Gamma^k(u),$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i \frac{\partial^i}{\partial u^i}\right) M(u) = A + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Pi^k(u) + \sum_{k=0}^{n-2} C_k \Gamma^k(u).$$

Donde:

$$A = a_0\frac{b-u}{c} - \frac{b-u}{c}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1} + a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k k b_{k-2},$$

$$B_k = (-c)^k\left[\sum_{i=k+1}^{n} a_i f^{i-k-1}(0)\right],\; \Pi(u) = \int_0^u M(u-v)g(v)\,\mathrm{d}v,\; \Pi^k(u) = \frac{\partial^k \Pi(u)}{\partial u^k},$$

$$C_k = (-c)^k\left[\sum_{i=k+2}^{n} a_i(i-k-1)f^{i-k-2}(0)\right],\; \Gamma(u) = \int_0^u g(v)\,\mathrm{d}v,\; \Gamma^k(u) = \frac{\partial^k \Gamma(u)}{\partial u^k}.$$

Si $b < +\infty$, teniendo en cuenta la identidad que satisface $M(u)$, es evidente que $M(b) = 0$. También vimos que

$$M'(u) = -(\frac{1}{c})\bar{F}(\frac{b-u}{c}) + (\frac{1}{c})\frac{b-u}{c}f(\frac{b-u}{c}) -$$

$$-\frac{1}{c^2}\int_u^b [(f(\frac{t-u}{c}) + \frac{t-u}{c}f'(\frac{t-u}{c})] \int_0^t g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t -$$

$$-\frac{1}{c^2}\int_u^b f'(\frac{t-u}{c}) \int_0^t M(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t - \frac{1}{c}f(0)\int_0^u M(u-v)g(v)\,\mathrm{d}v.$$

De donde $M'(b) = \frac{-1}{c} - \frac{1}{c}b_0\Pi(b)$. Y teniendo en cuenta las identidades obtenidas para $M^i(u), i = 2, \cdots, i = n-1$, se cumple que:

$$M(b) = 0,\ M^k(b) = -\left(\frac{1}{c^k}\right) k f^{k-2}(0) - \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(0)\Pi^i(b) +$$

$$+\frac{1}{c^2}\sum_{i=0}^{k-2}(k-1-i)\left(\frac{-1}{c}\right)^{k-2-i} f^{k-2-i}(0)\Gamma^i(b) \text{ para } k = 1, \cdots, n-1.$$

□

A partir de la anterior proposición es fácil obtener una solución de la ecuación C.8 en la página 273. Tenemos el siguiente corolario:

Corolario C.1.1. *Supongamos que F tiene una función de densidad f, de clase C^n en $(0, \infty)$ para la cual se cumple C.5 y C.6, entonces la solución de la ecuación integro diferencial C.8 satisface la identidad:*

$$M(u) = \frac{\Delta(b,u)}{\Delta(b)},\ donde: \tag{C.14}$$

$$\Delta(b,u) = \begin{vmatrix} \Theta(u) & -\pi_1(u) & -\pi_2(u) & \dots & -\pi_n(u) \\ \sigma_1(b) & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0(n-1)} \\ \sigma_2(b) & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{n-1}(b) & a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{C.15}$$

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{C.16}$$

$$\sigma_j(b) = -\Theta^j(b) - \frac{1}{c^j} j b_{j-2} + \sum_{i=0}^{j-1} \xi_{j-1-i} m_0^i(b) + \frac{1}{c^2} \sum_{i=0}^{j-2} (j-1-i) \left(\frac{-1}{c}\right)^{j-2-i} b_{j-2-i} \Gamma^i(b), \tag{C.17}$$

$$\pi_i(u) = \frac{\partial^{i+1}\pi_0(u)}{\partial u^{i+1}},\ \pi_0(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{s[\sum_{j=0}^n a_j(-cs)^j - a_0\hat{g}(s)]}, \tag{C.18}$$

$$\theta(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{su}\frac{\hat{\Gamma}(s)\,\mathrm{d}s}{L(s)},\ \theta_k(u) = \frac{\partial^k\theta(u)}{\partial u^k}, \tag{C.19}$$

$$a_{ij} = \pi_{j+1+i}(b) - \sum_{k=0}^{i-1} \xi_{i-1-k} m_{j+1}^k(b),\ \xi_{i-1-k} = (\frac{-1}{c})^{i-k} f^{i-1-k}(0),\ \Theta(b) = A\pi(b) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k\theta_k(b)\,\mathrm{d}y, \tag{C.20}$$

$$m_0(b) = \int_0^b \Theta(b-v)g(v)\,\mathrm{d}v,\ m_k(b) = \int_0^b \pi_k(b-v)g(v)\,\mathrm{d}v,\ m_k^j(u) = \frac{\partial^j m_k(u)}{\partial u^j},\ k = 1,\cdots,n. \tag{C.21}$$

Demostración. Para probar el enunciado vamos a resolver una versión auxiliar de C.8 extendida a $[0,+\infty)$ y desprovista de condiciones de frontera. Aplicando la transformada de Laplace a C.8 obtenemos

$$a_0\mathcal{L}(M(u)) + (-c)a_1\mathcal{L}(M^{'}(u)) + \cdots + (-c)^n a_n\mathcal{L}(M^n(u)) = \mathcal{L}(A) + B_0\mathcal{L}(\Pi(u)) + B_1\mathcal{L}(\Pi^{'}(u)) + \cdots$$

$$+ B_n\mathcal{L}(\Pi^n(u)) + C_0\mathcal{L}(\Gamma(u)) + C_1\mathcal{L}(\Gamma'(u)) + \cdots + C_n\mathcal{L}(\Gamma^n(u)).$$

Por las propiedades de la transformada de Laplace se sigue que:

$$\sum_{i=0}^n (-c)^i a_i s^i \hat{M}(s) - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{i=k+1}^n (-c)^i a_i M^{i-k-1}(0)\right] s^k =$$

$$= \frac{A}{s} + \sum_{i=0}^{n-1} B_i s^i \hat{\Pi}(s) - \sum_{k=0}^{n-2}\left[\sum_{i=k+1}^{n-1} B_i \Pi^{i-k-1}(0)\right] s^k + \sum_{i=0}^{n-1} C_i s^i \hat{\Gamma}(s) - \sum_{k=0}^{n-2}\left[\sum_{i=k+1}^{n-1} C_i \Gamma^{i-k-1}(0)\right] s^k.$$

Por simplicidad podemos expresarlo como:

$$\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i s^i \hat{M}(s) - \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k s^k = \frac{A}{s} + \sum_{i=0}^{n-1} B_i s^i \hat{\Pi}(s) - \sum_{k=0}^{n-2}\beta_k s^k + \sum_{i=0}^{n-1} C_i s^i \hat{\Gamma}(s) - \sum_{k=0}^{n-2}\delta_k s^k, \text{ donde:}$$

$$\alpha_k = \sum_{i=k+1}^{n}(-c)^i a_i M^{i-k-1}(0),\ \beta_k = \sum_{i=k+1}^{n-1} B_i \Pi^{i-k-1}(0),\ \delta_k = \sum_{i=k+1}^{n-1} B_i \Gamma^{i-k-1}(0)$$

$$k = 0, \cdots, n-1,\ \beta_{n-1} = 0,\ \delta_{n-1} = 0.$$

Por las propiedades de la transformada de Laplace, teniendo en cuenta la definición de $\Pi(u)$, sabemos que $\mathcal{L}(\Pi(u)) = \hat{M}(s)\hat{g}(s)$. Por lo tanto obtenemos:

$$\left[\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i s^i - \sum_{i=0}^{n-1} B_i s^i \hat{g}(s)\right]\hat{M}(s) = \frac{A}{s} + \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k - \beta_k - \delta_k)s^k + \sum_{i=0}^{n-1} C_i s^i \hat{\Gamma}(s).$$

Si denotamos

$$L(s) = \sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i s^i - \sum_{i=0}^{n-1} B_i s^i \hat{g}(s),$$

la anterior identidad la podemos escribir como:

$$\hat{M}(s) = \frac{A}{sL(s)} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha_k - \beta_k - \delta_k)s^k}{L(s)} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_k \hat{\Gamma}(s) s^k}{L(s)}.$$

Mediante la transformada inversa de Laplace obtenemos:

$$M(u) = A\pi(u) + \sum_{k=0}^{n-1}\mu_k \pi_{k+1}(u) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \theta_k(u), \text{ donde} \tag{C.22}$$

$$\pi(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{sL(s)},\ \pi_k(u) = \frac{\partial^k \pi(u)}{\partial u^k},\ \theta(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{su}\frac{\hat{\Gamma}(s)\,\mathrm{d}s}{L(s)},\ \theta_k(u) = \frac{\partial^k \theta(u)}{\partial u^k}. \tag{C.23}$$

Siendo $\mu_k = \alpha_k - \beta_k - \delta_k,\ k = 0, \cdots, n-1$ constantes indefinidias y eligiendo $\gamma \in \mathbb{R}$ de forma adecuada.

Ahora imponemos la dependencia de b y denotamos por $\mathbb{M}_b(u)$ al tiempo medio de primera llegada a $b,\ b < +\infty$ cuando el tiempo inicial es un tiempo de renovación. Sea $\Upsilon_b(u)$ una solución de la ecuación integro-diferencial C.8, debe cumplir las condiciones de frontera C.10, lo cual implica que las constantes $\mu_k,\ k = 0, \cdots, k = n-1$ deben satisfacer el sistema lineal:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \pi_{k+1}(b) = -\Theta(b) \\ \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \pi'_{k+1}(b) = -\frac{1}{c} - \frac{1}{c} b_0 \Pi(b) - \Theta'(b) \\ \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \pi''_{k+1}(b) = -\frac{1}{c} b_0 \Pi^{'}(b) - \frac{1}{c^2} 2b_0 + \frac{1}{c^2} b_1 \Pi(b) + \frac{1}{c^2} b_0 \Gamma(b) - \Theta''(b) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \pi^{n-1}_{k+1}(b) = \beta_{n-1}(b) - \Theta^{n-1}(b) \end{cases} \tag{C.24}$$

Donde:

$$\beta_{n-1}(b) = -\frac{1}{c^{n-1}}(n-1)b_{n-3} - \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{-1}{c}\right)^{n-2-i} b_{n-2-i}\Pi^i(b) +$$

$$+\frac{1}{c^2}\sum_{i=0}^{n-3}(n-2-i)\left(\frac{-1}{c}\right)^{n-3-i} b_{n-3-i}\Gamma^i(b),\ \Theta(b) = A\pi(b) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \theta_k(b).$$

Resolviendo el sistema se obtiene el resultado.

□

C.2. Tiempos medios de escape.

- *El caso favorable. Solución general.*

Proposición C.2.1. *La solución de la ecuación integral en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_0 = u$, satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{M(u) = \mathbb{F}(b-u),\ u \in [0, b]} \tag{C.25}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{sy}\frac{1}{cs^2} \cdot \frac{1 - \hat{f}(cs)}{1 - \hat{f}(cs)\hat{g}(s)}\,\mathrm{d}s,\ y \in [0, +\infty)}\ ^4 \tag{C.26}$$

[4] Eligiendo γ de forma adecuada

Demostración. Razonando como hicimos en la proposición C.1.1 obtenemos:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \frac{b-u}{c} I_{\{\tau_1 > \frac{b-u}{c}\}} + \tau_1 I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}\}} + \mathbf{t}_{\mathbf{u}}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\{\tau_1 \leq \frac{b-u}{c}, 0 < y_1 < b-u-c\tau_1\}}{}^{5}.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones indicatrices, de la unión e intersección de conjuntos.

Vamos a calcular ahora el tiempo medio de escape de la zona $[0,b]$. Teniendo en cuenta la anterior identidad:

$$\mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \diagup X_0 = u) = \frac{b-u}{c} \int_{\frac{b-u}{c}}^{+\infty} \mathrm{d}F(l) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} l \, \mathrm{d}F(l) + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l) \int_0^{b-u-cl} \mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{u}}'^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}) \, \mathrm{d}G(v) =$$

$$= \int_0^{\frac{b-u}{c}} [1-F(l)] \, \mathrm{d}l + \int_0^{\frac{b-u}{c}} \mathrm{d}F(l) \int_0^{b-u-cl} \mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{u+cl+v}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}) \, \mathrm{d}G(v).$$

Después de varios cambios de variable obtenemos:

$$\mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} \diagup X_0 = u) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} [1-F(t)] \, \mathrm{d}t - \frac{1}{c} \int_{b-u}^{0} \mathrm{d}F(\frac{b-u-t}{c}) \int_0^t \mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{b+v-t}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}) \, \mathrm{d}G(v).$$

Y por lo tanto:

$$M(u) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} (1-F(t)) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{c} \int_0^{b-u} f(\frac{b-u}{c} - \frac{t}{c}) \int_0^t \mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{b-t+v}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}) g(v) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t. \tag{C.27}$$

Para el caso en que partimos de un tiempo de renovación, en particular, del origen.

Vamos a solucionar la ecuación integral, para ello vamos a definir el objeto auxiliar:

$$\mathbb{F}(y) = \int_0^{\frac{y}{c}} [1-F(t)] \, \mathrm{d}t + \frac{1}{c} \int_0^y f(\frac{y-t}{c}) \int_0^t g(v) \mathbb{F}(t-v) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t, \; y \in [0,+\infty).$$

Teniendo en cuenta la definición de $\mathbb{F}$, es evidente que $\mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}) = \mathbb{F}(b-u)$. Por comodidad, vamos a representar $\mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}) = M(u)$. Es evidente que $\mathbb{E}(\mathbf{t}_{\mathbf{b-t+v}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}) = M(b-t+v) = \mathbb{F}(b-(b-t+v)) = \mathbb{F}(t-v)$. Por lo tanto:

[5] Teniendo en cuenta que por hipótesis $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ toma valores positivos únicamente.

$$M(u) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} [1 - F(t)] \, \mathrm{d}t + \frac{1}{c}\int_0^{b-u} f(\frac{b-u-t}{c}) \int_0^t M(b+v-t))g(v) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t, \ u \in [0,b].$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sy}\mathbb{F}(y) \, \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} e^{-sy} \, \mathrm{d}y \left[\int_0^{\frac{y}{c}} [1 - F(t)] \, \mathrm{d}t + \frac{1}{c}\int_0^y f(\frac{y-t}{c}) \int_0^t g(v)\mathbb{F}(t-v) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t\right]$$

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sy} \int_0^{\frac{y}{c}} [1 - F(t)] \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}y + \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} e^{-sy} \int_0^y f(\frac{y-t}{c}) \int_0^t g(v)\mathbb{F}(t-v) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}y.$$

Despues de cálculos triviales obtenemos:

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \frac{1}{cs^2} \cdot \frac{1 - \hat{f}(cs)}{1 - \hat{f}(cs)\hat{g}(s)}.$$

Aplicando ahora la transformada inversa de Laplace obtenemos $\mathbb{F}(y)$, con lo cual $M(u) = \mathbb{E}(\mathbf{t_u^{[0,b]}}) = \mathbb{F}(b-u)$.

□

A continuación vamos a estudiar el caso en que el tiempo inicial r no es un tiempo de renovación.

Proposición C.2.2. *Si $c > 0$ y $Y_k < 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ la solución de la ecuación integral 3.30, en la página 73, partiendo de $X_r = u$ y aceptando que $\mathscr{E}_r^- = z$, verifica para $0 \leq u \leq b$ la siguiente expresión:*

$$\boxed{M(r,u,z) = \mathbb{F}(r, b-u, z), \ u \in [0,b]} \tag{C.28}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy} \frac{1}{\overline{F}(z)cs^2} \left[1 - e^{scz}\hat{f}(cs) - F(z) + e^{scz}\int_0^z e^{-scl} f(l) \, \mathrm{d}l\right] \, \mathrm{d}s} + \tag{C.29}$$

$$+\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy} \frac{\hat{g}(s)\hat{\mathbb{F}}(s)}{\overline{F}(z)} \left[e^{scz}\hat{f}(cs) - e^{scz}\int_0^z e^{-scl} f(l) \, \mathrm{d}l\right] \, \mathrm{d}s, \ y \in [0, +\infty)}$$

Demostración. Se puede demostrar que el tiempo de escape satisface la siguiente identidad:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} = \frac{b-u}{c} I_{\{\mathscr{E}_r^+ > \frac{b-u}{c}\}} + \mathscr{E}_r^+ I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c}\}} + \mathbf{t'}_{\mathbf{r},\mathbf{u}}^{[\mathbf{0},\mathbf{b}]} I_{\{\mathscr{E}_r^+ \leq \frac{b-u}{c},\ 0 \leq Y_1 \leq b-u-c\mathscr{E}_r^+\}}.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones indicatrices, de la unión e intersección de conjuntos.

A partir de la anterior identidad obtenemos la siguiente ecuación integral:

$$M(r,u,z) = \frac{1}{\overline{F}(z)} \int_0^{\frac{b-u}{c}} [1-F(z+t)]\,\mathrm{d}t + \frac{1}{c\overline{F}(z)} \int_0^{b-u} f(z+\frac{b-u-t}{c}) \int_0^t M(b-t+v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t.$$

Definimos la función:

$$\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{1}{\overline{F}(z)} \int_0^{\frac{y}{c}} [1-F(z+t)]\,\mathrm{d}t + \frac{1}{c\overline{F}(z)} \int_0^{y} f(z+\frac{y-t}{c}) \int_0^t \mathbb{F}(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t.$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z) = \frac{1}{\overline{F}(z)} \int_0^{+\infty} e^{-sy} \left[\int_0^{\frac{y}{c}} [1-F(z+t)]\,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}y +$$

$$+ \frac{1}{c\overline{F}(z)} \int_0^{+\infty} e^{-sy} \left[\int_0^{y} f(z+\frac{y-t}{c}) \int_0^t \mathbb{F}(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}y.$$

Después de laboriososo cálculos obtenemos:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z) = \frac{1}{\overline{F}(z)cs^2} \left[1 - e^{scz}\hat{f}(cs) - F(z) + e^{scz} \int_0^z e^{-scl} f(l)\,\mathrm{d}l \right] +$$

$$+ \frac{\hat{g}(s)\hat{\mathbb{F}}(s)}{\overline{F}(z)} \left[e^{scz}\hat{f}(cs) - e^{scz} \int_0^z e^{-scl} f(l)\,\mathrm{d}l \right].$$

De lo cual se sigue C.29.

□

- *El caso desfavorable. Estudio y solución de casos posibles.*

El caso actuarial.

Proposición C.2.3. *Supongamos que F tiene una función de densidad f, de clase C^n en $(0,\infty)$ y que existe un operador diferencial lineal $L = L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que f resuelve:*

$$L(f) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}\right) f = 0. \tag{C.30}$$

Con las condiciones iniciales:

$$f^j(0) = b_j, \text{ para } j = 0, \cdots, n-1. \tag{C.31}$$

Entonces $M(u) \in C^n(0,b)$ y es solución de la siguiente ecuación integro diferencial:

$$\left[\sum_{i=0}^{n} (-c)^i a_i \frac{\partial^i}{\partial u^i}\right] M(u) = A + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Pi^k(u), \text{ donde:} \tag{C.32}$$

$$A = a_0 \frac{b-u}{c} - \frac{b-u}{c} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1} + a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k b_{k-2}, \tag{C.33}$$

$$B_k = (-c)^k \left[\sum_{i=k+1}^{n} a_i f^{i-k-1}(0)\right], \ \Pi(u) = \int_0^u M(u-v) g(v)\, \mathrm{d}v, \ \Pi^k(u) = \frac{\partial^k \pi(u)}{\partial u^k}. \tag{C.34}$$

Con las condiciones de frontera en el extremo $x = b$:

$$M(b) = 0, \ M'(b) = -\frac{1}{c} - \frac{1}{c} f(0)\Pi(b), \tag{C.35}$$

$$M''(b) = -\frac{1}{c^2} f(0) + \frac{1}{c^2} f'(0)\Pi(b) - \frac{1}{c} f(0)\Pi'(b) \tag{C.36}$$

$$M^k(b) = (-1)^{k+1} \frac{1}{c^k} f^{k-2}(0) - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{c}\right)^{k-i} f^{k-1-i}(0)\Pi^i(b), \text{ para } k = 2, \cdots, n-1. \tag{C.37}$$

O, de forma más simple:

$$M^k(b) = (-1)^{k+1} \frac{1}{c^k} f^{k-2}(0) - \frac{1}{c} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{c}\right)^{k-1-i} f^{k-1-i}(0)\Pi^i(b), \text{ para } k = 0, \cdots, n-1, \tag{C.38}$$

asumiendo que $f^{-2}(0)=0,\ f^{-1}(0)=-1$ *y* $\sum_{i=0}^{-1}=0.$

Demostración. Teniendo en cuenta las anteriores hipotesis, se cumple que $g(y)=g_+(y)$, y por lo tanto podemos escribir la ecuación integro diferencial 3.99, en la página 100 como:

$$M(u)=\int_0^{\frac{b-u}{c}}[1-F(t)]\,\mathrm{d}t+\frac{1}{c}\int_u^b f\left(\frac{t-u}{c}\right)\int_0^t M(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t.$$

Diferenciando con respecto a u obtenemos:

$$-cM'(u)=\left[1-F\left(\frac{b-u}{c}\right)\right]+\frac{1}{c}\int_u^b f'\left(\frac{t-u}{c}\right)\Pi(t)\,\mathrm{d}t+f(0)\Pi(u),\ \text{donde}$$

$$\Pi(t)=\int_0^t M(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v.$$

Del mismo modo:

$$(-c)^2M''(u)=-f\left(\frac{b-u}{c}\right)+\frac{1}{c}\int_u^b f''\left(\frac{t-u}{c}\right)\Pi(t)\,\mathrm{d}t+f'(0)\Pi(u)-cf(0)\Pi'(u),$$

$$\vdots$$

$$(-c)^kM^k(u)=-f^{k-2}\left(\frac{b-u}{c}\right)+\frac{1}{c}\int_u^b f^k\left(\frac{t-u}{c}\right)\Pi(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{i=0}^{k-1}(-c)^i f^{k-1-i}(0)\Pi^i(u).$$

Multiplicando las anteriores igualdades por $a_k,\ k=0,\cdots,n$ y sumándolas obtenemos:

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i\frac{\partial^i}{\partial u^i}\right)M(u)=a_0\int_0^{\frac{b-u}{c}}[1-F(t)]\ \mathrm{d}t+a_1\left[1-F\left(\frac{b-u}{c}\right)\right]-\sum_{j=0}^{n-2}a_{j+2}f^j\left(\frac{b-u}{c}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(-c)^k\left[\sum_{i=k+1}^{n}a_i f^{i-k-1}(0)\right]\Pi^k(u),$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i\frac{\partial^i}{\partial u^i}\right)M(u)=A+\sum_{k=0}^{n-1}B_k\Pi^k(u),\ \text{donde}$$

$$A = a_0 \int_0^{\frac{b-u}{c}} [1 - F(t)]\, \mathrm{d}t + a_1 \left[1 - F\left(\frac{b-u}{c}\right)\right] - \sum_{j=0}^{n-2} a_{j+2} f^j \left(\frac{b-u}{c}\right),$$

$$B_k = (-c)^k \left[\sum_{i=k+1}^{n} a_i f^{i-k-1}(0)\right].$$

Integrando la ecuación C.30 obtenemos:

$$\int_0^t \left(\sum_{j=0}^{n} a_j f^j(l)\right) \mathrm{d}l = a_0[F(t) - F(0)] + a_1[f(t) - f(0)] + \cdots + a_n[f^{n-1}(t) - f^{n-1}(0)] = 0,$$

$$a_0 F(t) + a_1 f(t) + \cdots a_{n-1} f^{n-2}(t) + a_n f^{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}(0) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1}.$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales y que $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0,\ F(0) = 0$. Integrando la anterior igualdad entre $[0, t]$ obtenemos:

$$a_0 \int_0^t F(l)\, \mathrm{d}l + a_1 F(t) + \cdots + a_n f^{n-2}(t) - \sum_{k=2}^{n} a_k f^{k-2}(0) - \int_0^t \left[\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1}\right] \mathrm{d}l = 0,$$

$$a_0 \int_0^t F(l)\, \mathrm{d}l + a_1 F(t) + \cdots + f^{n-2}(t) = \sum_{k=2}^{n} a_k b_{k-2} + t \left[\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1}\right].$$

Por lo tanto:

$$a_0 \int_0^{\frac{b-u}{c}} F(l)\, \mathrm{d}l + a_1 F(\frac{b-u}{c}) + \cdots + a_n f^{n-2}(\frac{b-u}{c}) = \sum_{k=2}^{n} a_k b_{k-2} + \frac{b-u}{c} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1}.$$

Con lo cual obtenemos que:

$$A = a_0 \frac{b-u}{c} - \frac{b-u}{c} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1} + a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k b_{k-2}.$$

Obviamente, haciendo tender $u \to b_-$ se deducen las condiciones de frontera.

$\square$

Teniendo en cuenta la anterior proposición es fácil obtener una solución de C.32, en la página 285.

Corolario C.2.1. *Supongamos que F tiene una función de densidad f, de clase C^n en $(0,\infty)$ para la cual se cumple C.30 y C.31, entonces la solución de la ecuación integro diferencial C.32 satisface la identidad:*

$$M(u) = \frac{\Delta(b,u)}{\Delta(b)},\ donde: \tag{C.39}$$

$$\Delta(b,u) = \begin{vmatrix} A\pi(u) & -\pi_1(u) & -\pi_2(u) & \dots & -\pi_n(u) \\ \sigma_1(b) & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0(n-1)} \\ \sigma_2(b) & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{n-1}(b) & a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{C.40}$$

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{C.41}$$

$$\sigma_k(u) = \sum_{i=1}^{n-k} b_{i+k}\pi_i(u),\ \pi_i(u) = \frac{\partial^{i+1}\pi_0(u)}{\partial u^{i+1}},\ \pi_0(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{s[\sum_{j=0}^{n} a_j(-cs)^j - a_0\hat{g}(s)]}, \tag{C.42}$$

$$a_{ij} = \pi_{j+1+i}(b) - \sum_{k=0}^{i-1} \xi_{i-1-k} m_{j+1}^k(b),\ \xi_{i-1-k} = (\frac{-1}{c})^{i-k} f^{i-1-k}(0),\ m_k(b) = \int_0^b \pi_k(v)g(b-v)\,\mathrm{d}v, \tag{C.43}$$

$$m_k^j(u) = \frac{\partial^j m_k(u)}{\partial^j u},\ para\ i = 0,\cdots,n-1. \tag{C.44}$$

Demostración. Para demostrar la afirmación resolvemos una versión auxiliar de C.32 extendida a $[0,+\infty)$ desprovista de condiciones de frontera. Aplicando la transformada de Laplace a C.32 obtenemos

$$a_0\mathcal{L}(M(u))+(-c)a_1\mathcal{L}(M^{'}(u))+\cdots+(-c)^n a_n\mathcal{L}(M^n(u)) = \mathcal{L}(A)+B_0\mathcal{L}(\Pi(u))+B_1\mathcal{L}(\Pi^{'}(u))+\cdots$$

$$+B_n\mathcal{L}(\Pi^n(u)).$$

Por las propiedades de la transformada de Laplace, tras una reordenación apropiada, obtenemos:

$$\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i s^i \hat{M}(s) - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{i=k+1}^{n}(-c)^i a_i M^{i-k-1}(0)\right] s^k =$$

$$= \frac{A}{s} + \sum_{i=0}^{n-1} B_i s^i \hat{\Pi}(s) - \sum_{k=0}^{n-2}\left[\sum_{i=k+1}^{n-1} B_i \Pi^{i-k-1}(0)\right] s^k.$$

Por simplicidad podemos expresar la anterior identidad como:

$$\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i s^i \hat{M}(s) - \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k s^k = \frac{A}{s} + \sum_{i=0}^{n-1} B_i s^i \hat{\Pi}(s) - \sum_{k=0}^{n-2}\beta_k s^k, \text{ donde:}$$

$$\alpha_k = \sum_{i=k+1}^{n}(-c)^i a_i M^{i-k-1}(0),\ \beta_k = \sum_{i=k+1}^{n-1} B_i \Pi^{i-k-1}(0),\ k = 0,\cdots,n-1,\ \beta_{n-1} = 0.$$

Por las propiedades de la transformada de Laplace, teniendo en cuenta la definición de $\Pi(u)$, sabemos que $\mathcal{L}(\Pi(u)) = \hat{M}(s)\hat{g}(s)$. Por lo tanto:

$$\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i s^i \hat{M}(s) - \sum_{i=0}^{n-1} B_i s^i \hat{M}(s)\hat{g}(s) = \frac{A}{s} + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k s^k - \sum_{k=0}^{n-1}\beta_k s^k.$$

Con lo cual:

$$\left[\sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i s^i - \sum_{i=0}^{n-1} B_i s^i \hat{g}(s)\right]\hat{M}(s) = \frac{A}{s} + \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k - \beta_k)s^k.$$

Si denotamos

$$L(s) = \sum_{i=0}^{n}(-c)^i a_i s^i - \sum_{i=0}^{n-1} B_i s^i \hat{g}(s)$$

la anterior identidad podemos expresarla como:

$$\hat{M}(s) = \frac{A}{sL(s)} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha_k - \beta_k)s^k}{L(s)}.$$

Por inversión obtenemos que:

$$M(u) = A\pi(u) + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \pi_{k+1}(u), \text{ donde } \pi(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{su}\,\mathrm{d}s}{sL(s)},\ \pi_k = \frac{\partial^k \pi(u)}{\partial u^k}. \tag{C.45}$$

Siendo $\mu_k = \alpha_k - \beta_k,\ k = 0, \cdots, n-1$ constantes indefinidas y eligiendo $\gamma \in \mathbb{R}$ de forma adecuada.

Ahora imponemos la dependencia en b y denotamos por $\mathbb{M}_b(u)$ al tiempo medio de escape de $[0, b],\ b < +\infty$ cuando partimos de un tiempo de renovación. Sea $\Upsilon_b(u)$ una solución de la ecuación integro diferencial C.32, deben cumplirse las condiciones de frontera C.35, esto implica que las constantes $\mu_k,\ k = 0, \cdots, k = n-1$ deben satisfacer el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \pi_{k+1}(b) = -A\pi(b) \\ \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \pi'_{k+1}(b) = -\frac{1}{c} - \frac{1}{c} f(0)\Pi(b) - A\pi'(b) \\ \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \pi''_{k+1}(b) = -\frac{1}{c} f(0)\Pi^{'}(b) - \frac{1}{c^2} f(0) + \frac{1}{c^2} f^{'}(0)\Pi(b) - A\pi''(b) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \pi_{k+1}^{n-1}(b) = (-1)^n \frac{1}{c^{n-1}} f^{n-3}(0) - \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{-1}{c}\right)^{n-2-i} f^{n-2-i}(0)\Pi^i(b) - A\pi^{n-1}(b) \end{cases} \tag{C.46}$$

De forma más simple:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \pi_{k+1}^i(b) = (-1)^{i+1}\left(\frac{1}{c}\right)^i f^{i-2}(0) - A\pi^i(b) - \frac{1}{c}\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{i-1-j} f^{i-1-j}(0)\Pi^j(b),\ i = 0, \cdots, n-1, \tag{C.47}$$

asumiendo que $\sum_{i=0}^{-1} = 0,\ f^{-1}(0) = -1$ y $f^{-2}(0) = 0$.

Resolviendo el sistema obtenemos el resultado.

□

C.3. Ley de probabilidad de los tiempos de primera llegada a la barrera superior.

- *El caso favorable. Solución general.*

Proposición C.3.1. *La solución de la ecuación integral de la ley de probabilidad de primera llegada a la barrera superior en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_0 = u$, satisface la siguiente identidad:*

- *Si* $x > \frac{b-u}{c}$*:*

$$\boxed{P(u;x) = \mathcal{P}(b-u;x),\ \textit{siendo}:} \tag{C.48}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(y;x) = \frac{-1}{4\pi^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy+px}\frac{[1-\hat{f}(cs)]}{sp[1-\hat{g}(s)\hat{f}(p+cs)]}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p} \tag{C.49}$$

- *Si* $x \leq \frac{b-u}{c}$
  En este caso la ecuación integral no admite solución cerrada en general.

Demostración. Razonando como hicimos en 3.3.1, en la página 59, obtenemos:
Si $x > \frac{b-u}{c}$

$$P(u;x) = \bar{F}\left(\frac{b-u}{c}\right) + \int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_0^{b-u-cl} P(u+cl+v;x-l)g(v)f(l)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l.$$

Despues de cambios triviales obtenemos:

$$P(u;x) = \bar{F}\left(\frac{b-u}{c}\right) + \frac{1}{c}\int_0^{b-u}\int_0^t P(b-t+v;x-\frac{b-t-u}{c})g(v)f\left(\frac{b-t-u}{c}\right)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t.$$

Vamos a resolver la anterior ecuación integral, para lo cual definimos el objeto auxiliar:

$$\mathcal{P}(y;x) = \bar{F}\left(\frac{y}{c}\right) + \frac{1}{c}\int_0^y\int_0^t \mathcal{P}(t-v;x-\frac{y-t}{c})g(v)f(\frac{y-t}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t,\ y\in[0,+\infty),\ x\in[0,+\infty).$$

Aplicando la transformada de Laplace bidimensional a los dos lados de la igualdad.

$$\hat{\hat{\mathcal{P}}}(s;p) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-sy-px}\mathcal{P}(y;x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-sy-px}\bar{F}(\frac{y}{c})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{c}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-sy-px}\left[\int_0^y\int_0^t \mathcal{P}(t-v;x-\frac{y-t}{c})g(v)f(\frac{y-t}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Después de cálculos laboriosos obtenemos:

$$\hat{\hat{\mathcal{P}}}(s;p) = \frac{1-\hat{f}(cs)}{sp} + \hat{g}(s)\hat{\hat{\mathcal{P}}}(s;p)\hat{h}(p) = \frac{[1-\hat{f}(cs)]}{sp[1-\hat{g}(s)\hat{h}(p)]} = \frac{[1-\hat{f}(cs)]}{sp[1-\hat{g}(s)\hat{f}(p+cs)]}.$$

A partir de ello obtenemos, para el caso en que $x > \frac{b-u}{c}$, que efectívamente se verifica C.49. Si $x \leq \frac{b-u}{c}$

$$P(u;x) = \int_0^x \int_0^{b-u-cl} P(u+cl+v; x-l) g(v) f(l)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}l.$$

Después de varios cambios de variable obtenemos:

$$P(u;x) = \frac{1}{c}\int_{b-u-cx}^{b-u} \int_0^t P(b-t+v; x - \frac{b-t-u}{c}) g(v) f(\frac{b-t-u}{c})\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}t.$$

No admite solución de forma cerrada en general, aunque sí para ciertos casos particulares.

□

C.4. Ley de probabilidad de los tiempos de escape.

- *El caso favorable. Solución general.*

Proposición C.4.1. *La solución de la ecuación integral de la ley de probabilidad del tiempo de escape de la zona $[0,b]$ en el caso en que la deriva es positiva y los saltos son negativos, partiendo de $X_0 = u$, satisface la siguiente identidad:*

- *Si $x > \frac{b-u}{c}$:*

$$\boxed{P(u;x) = \mathcal{P}(b-u;x), \textit{ siendo}:} \tag{C.50}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(y;x) = \frac{-1}{4\pi^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy+px}\frac{1-\hat{g}(s)\hat{f}(cs)}{sp[1-\hat{g}(s)\hat{f}(p+cs)]}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}p} \tag{C.51}$$

- *Si $x \leq \frac{b-u}{c}$:*
  En este caso la ecuación integral no admite solución cerrada en general y hay que estudiarla teniendo en cuenta las distribuciones de los tiempos de espera τ_i y de los saltos Y_j.

Demostración. Razonando como hicimos en 3.26 en la página 68 obtenemos

Si $x > \frac{b-u}{c}$

$$P(u;x) = 1 - \frac{1}{c}\int_0^{b-u} f(\frac{b-l-u}{c}) \int_0^l \left[1 - P(b-l+v; x - \frac{b-l-u}{c})\right] g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l.$$

Vamos a resolver la anterior ecuación integral, para lo cual definimos el objeto auxiliar:

$$\mathcal{P}(y;x) = 1 - \frac{1}{c}\int_0^{y} f(\frac{y-l}{c}) \int_0^l \left[1 - \mathcal{P}(l-v; x - \frac{y-l}{c})\right] g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l,\ y \in [0,+\infty),\ x \in [0,+\infty).$$

Aplicando la transformada de Laplace bidimensional a los dos lados de la igualdad:

$$\hat{\hat{\mathcal{P}}}(s;p) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-sy-px}\mathcal{P}(y;x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-sy-px}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x -$$

$$-\frac{1}{c}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-sy-px}\left[\int_0^{y} f(\frac{y-l}{c}) \int_0^l \left[1 - \mathcal{P}(l-v; x - \frac{y-l}{c})\right] g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Después de cálculos bastante laboriosos obtenemos:

$$\hat{\hat{\mathcal{P}}}(s;p) = \frac{1}{ps} - \frac{\hat{g}(s)\hat{f}(cs)}{ps} + \hat{g}(s)\hat{\hat{\mathcal{P}}}(s;p)\hat{h}(p) = \frac{1-\hat{g}(s)\hat{f}(cs)}{ps} + \hat{g}(s)\hat{\hat{\mathcal{P}}}(s;p)\hat{f}(p+cs).$$

Aplicando ahora la transformada inversa de Laplace bidimensional, despues de sencillos cálculos algebraicos, obtenemos C.51.

Si $x \leq \frac{b-u}{c}$ obtenemos la siguiente ecuación integral:

$$P(u;x) = F(x) - \frac{1}{c}\int_{b-u-cx}^{b-u}\int_0^l \left[1 - P(b-l+v; x - \frac{b-l-u}{c})\right] g(v) f(\frac{b-l-u}{c})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l.$$

No se puede obtener, en general, la solución de esa ecuación integral de forma cerrada.

□

Apéndice D

Solución ecuaciones integrales. Probabilidades primera llegada y escape.

D.1. Solución ecuaciones integrales. Probabilidad de primera llegada a la barrera superior.

- *Caso semifavorable.*

  Para el caso semifavorable, habíamos deducido las proposiciones:

Proposición D.1.1. *La probabilidad de llegar a la barrera superior b condicionada por $X_0 = u \in [0, b]$ y los saltos tomando valores en $(-\infty, -b] \cup [0, +\infty)$ satisface la siguiente expresión:*

$$\boxed{P_{b,0}^{u} = \mathbb{F}(b-u),\ u \in [0, b]} \tag{D.1}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{1-\hat{f}(cs)}{s(1-p\hat{f}(cs)\hat{g}_{+}(s))}\right] \mathrm{d}s,\ y \in [0, +\infty)} \tag{D.2}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 3.5.2, en la página 129, sabemos que

$$P_{b,0}^{u} = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{p}{c}\int_{u}^{b} f(\frac{l-u}{c})\int_{0}^{l} P_{b,0}^{l-v} g_{+}(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l,$$

que se puede expresar como

$$P_{b,0}^{u} = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_{u}^{b} f(\frac{l-u}{c})\int_{l-b}^{l} P_{b,0}^{l-v} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta la definición de $g(v)$, la función de densidad de los saltos.

Despues de varios cambios de variable obtenemos:

$$P_{b,0}^{u}=\bar{F}(\frac{b-u}{c})+\frac{p}{c}\int_0^{b-u}f(\frac{b-t-u}{c})\int_0^t P_{b,0}^{b-t+w}g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t.$$

Vamos a definir el objeto auxiliar:

$$\mathbb{F}(y)=\bar{F}(\frac{y}{c})+\frac{p}{c}\int_0^{y}f(\frac{y-t}{c})\int_0^t \mathbb{F}(t-w)g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t,\ y\in[0,+\infty).$$

Aplicando la transformada de Laplace a los dos lados de la anterior expresión, obtenemos:

$$\hat{\mathbb{F}}(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sy}\mathbb{F}(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}e^{-sy}\left[\bar{F}(\frac{y}{c})+\frac{p}{c}\int_0^{y}f(\frac{y-t}{c})\int_0^t \mathbb{F}(t-w)g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t\right]\,\mathrm{d}y.$$

Teniendo en cuenta la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace podemos calcular cada una de las integrales por separado:

$$\int_0^{+\infty}e^{-sy}\bar{F}(\frac{y}{c})\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}e^{-sy}\int_{\frac{y}{c}}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y.$$

Despues de un cambio del recinto de integración y tras sencillos cálculos, obtenemos:

$$\int_0^{+\infty}e^{-sy}\int_{\frac{y}{c}}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y=\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}(1-e^{-cst})f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}e^{-cst}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1-\hat{f}(cs)}{s}.$$

Para la última integral tenemos:

$$\frac{p}{c}\int_0^{+\infty}e^{-sy}\left[\int_0^{y}f(\frac{y-t}{c})\int_0^t \mathbb{F}(t-w)g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t\right]\,\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{p}{c}\int_0^{t}g_+(w)\,\mathrm{d}w\int_0^{y}\mathbb{F}(t-w)\,\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}e^{-sy}f(\frac{y-t}{c})\,\mathrm{d}y=$$

Tras cambio del recinto de integración, y teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Laplace, obtenemos:

$$= p \int_0^t g_+(w)\,\mathrm{d}w \int_0^{+\infty} \mathbb{F}(t-w)\,\mathrm{d}t \int_0^{+\infty} e^{-s(cl+t)} f(l)\,\mathrm{d}l =$$

$$= p\hat{f}(cs) \int_0^t g_+(w)\,\mathrm{d}w \int_0^{+\infty} e^{-st}\mathbb{F}(t-w)\,\mathrm{d}t = p\hat{f}(cs) \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^t \mathbb{F}(t-w) g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t =$$

$$= p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s).$$

Por lo tanto:

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \frac{1-\hat{f}(cs)}{s} + p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s).$$

Con lo cual:

$$\hat{\mathbb{F}}(s) = \frac{1-\hat{f}(cs)}{s(1-p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s))}.$$

Aplicando ahora la transformada inversa de Laplace, obtenemos (eligiendo adecuadamente la constante α) D.2.

□

Vamos a estudiar ahora la probabilidad de llegar a la barrera superior suponiendo el tiempo de partida no de renovación.

Proposición D.1.2. *La probabilidad de llegar a b partiendo de $X_r = u \in [0,b]$, $\mathscr{E}_r^{-} = z$ y los saltos tomando valores $Y_j \in (-\infty,-b] \cup [0,+\infty)$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$ satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P_{b,r}^u = \mathbb{F}(r, b-u, z),\ u \in [0,b]} \tag{D.3}$$

Siendo:

$$\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sy}\left[\frac{1}{s\bar{F}(z)}\left[1-F(z)-\hat{f}_z(cs)\right] + \frac{p\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s)\hat{f}_z(cs)}{\bar{F}(z)}\right]\mathrm{d}s,\ y \in [0,+\infty) \tag{D.4}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 3.5.5, en la página 132, sabemos que

$$P_{b,r}^{u} = \frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_{u}^{b} f(z+\frac{l-u}{c})\int_{0}^{l} P_{b,0}^{l-v} g_{+}(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l,$$

que se puede expresar como:

$$P_{b,r}^{u} = \frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_{u}^{b} f(z+\frac{l-u}{c})\int_{l-b}^{l} P_{b,0}^{l-v} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta la definición de $g(v)$, la función de densidad de los saltos. Sea la integral:

$$\frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_{u}^{b} f(z+\frac{l-u}{c})\int_{l-b}^{l} P_{b,0}^{l-v} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l.$$

Tras varios cambios de variable obtenemos:

$$= \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_{0}^{b-u} f(z+\frac{b-t-u}{c})\int_{-t}^{b-t} P_{b,0}^{b-t-v} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_{0}^{b-u} f(z+\frac{b-t-u}{c})\int_{t-b}^{t} P_{b,0}^{b-t+w} g(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_{0}^{b-u} f(z+\frac{b-t-u}{c})\int_{0}^{t} P_{b,0}^{b-t+w} g_{+}(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t.$$

Teniendo en cuenta que $t-b > -b \;\forall\, t \in [0, b-u]$ y la definición de la función de densidad $g(w)$. Por lo tanto, tenemos:

$$P_{b,r}^{u} = \frac{\bar{F}(z+\frac{b-u}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_{0}^{b-u} f(z+\frac{b-t-u}{c})\int_{0}^{t} P_{b,0}^{b-t+w} g_{+}(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t.$$

Vamos a definir el objeto auxiliar:

$$\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{\bar{F}(z+\frac{y}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_{0}^{y} f(z+\frac{y-t}{c})\int_{0}^{t} \mathbb{F}(t-w) g_{+}(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t,\ y \in [0,+\infty).$$

Aplicando la transformada de Laplace a los dos lados de la anterior expresión, tenemos:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z) = \int_0^{+\infty} e^{-sy}\mathbb{F}(r,y,z)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sy}\left[\frac{\bar{F}(z+\frac{y}{c})}{\bar{F}(z)} + \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_0^y f(z+\frac{y-t}{c})\int_0^t \mathbb{F}(t-w)g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y.$$

Teniendo en cuenta la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace y razonando de un modo semejante a la demostración de la proposición D.1.1, en la página 294, obtenemos:

$$\hat{\mathbb{F}}(r,s,z) = \frac{1}{s\bar{F}(z)}\left[1 - F(z) - e^{scz}\left[\hat{f}(cs) - \int_0^z e^{-scl}f(l)\,\mathrm{d}l\right]\right] +$$

$$+\frac{p\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s)}{\bar{F}(z)}\left[e^{scz}\hat{f}(cs) - e^{scz}\int_0^z e^{-scl}f(l)\,\mathrm{d}l\right] = \frac{1}{s\bar{F}(z)}\left[1 - F(z) - \hat{f}_z(cs)\right] + \frac{p\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s)\hat{f}_z(cs)}{\bar{F}(z)}.$$

Con lo cual, de modo inmediato, se obtiene D.4.

□

D.2. Solución ecuaciones integrales. Probabilidad de que el primer escape sea a través de la barrera superior.

- *Caso semifavorable.*

  Habíamos obtenido las proposiciones:

  Proposición D.2.1. *La probabilidad de que el primer escape de la zona* $[0,b]$ *sea por la barrera superior condicionada por* $X_0 = u \in [0,b]$ *y los saltos tomando valores* $Y_j \in (-\infty,-b] \cup [0,+\infty)$ $\forall\ j \in \mathbb{N}$ *satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P^{u.s}_{E,0} = \mathbb{F}(b-u),\ u \in [0,b]} \tag{D.5}$$

  Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{1-p\hat{f}(cs)}{s(1-p\hat{f}(cs)\hat{g}_+(s))}\right]\mathrm{d}s,\ y \in [0,+\infty)} \tag{D.6}$$

  Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 3.6.3, en la página 154, sabemos que

$$P_{E,0}^{u.s} = 1 - \frac{p}{c}\int_u^b f(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l + \frac{p}{c}\int_u^b f(\frac{l-u}{c})\int_{l-b}^{l} P_{E,0}^{l-v} g_+(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l,$$

mediante transformaciones inmediatas obtenemos:

$$P_{E,0}^{u.s} = 1 - \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(t)G(-b)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(t)\int_{u+ct-b}^{u+ct} P_{E,0}^{(u+ct-v).s} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t.$$

Consideramos la última integral:

$$\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(t)\int_{u+ct-b}^{u+ct} P_{E,0}^{(u+ct-v).s} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{l-u}{c})\int_{l-b}^{l} P_{E,0}^{(l-v).s} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l.$$

Mediante cambios de variable obtenemos:

$$\frac{1}{c}\int_0^{b-u} f(\frac{b-u-l}{c})\int_l^{l-b} P_{E,0}^{(b-l+w).s} g(w)(-\,\mathrm{d}w)\,\mathrm{d}l = \frac{1}{c}\int_0^{b-u} f(\frac{b-u-l}{c})\int_{l-b}^{l} P_{E,0}^{(b-l+w).s} g(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}l =$$

$$= \frac{p}{c}\int_0^{b-u} f(\frac{b-u-l}{c})\int_0^{l} P_{E,0}^{(b-l+w).s} g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta que $l-b > -b \;\forall\; l \in [0, b-u]$ y la definición de la función de densidad $g(w)$. Con lo cual:

$$P_{E,0}^{u.s} = 1 - \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(l)\,\mathrm{d}l + \int_0^{\frac{b-u}{c}} f(l)G(-b)\,\mathrm{d}l + \frac{p}{c}\int_0^{b-u} f(\frac{b-u-l}{c})\int_0^{l} P_{E,0}^{(b-l+w).s} g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}l.$$

Vamos a definir el objeto auxiliar:

$$\mathbb{F}(y) = 1 - \int_0^{\frac{y}{c}} f(l)\,\mathrm{d}l + \int_0^{\frac{y}{c}} f(l)G(-b)\,\mathrm{d}l + \frac{p}{c}\int_0^{y} f(\frac{y-l}{c})\int_0^{l} \mathbb{F}(l-w) g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}l,\; y \in [0, +\infty).$$

Aplicando la transformada de Laplace a la anterior igualdad, y razonando de forma muy parecida a la proposición D.1.1, en la página 294 obtenemos D.6.

□

Vamos a estudiar ahora la probabilidad de que el primer escape sea por la barrera superior suponiendo el tiempo de partida no de renovación.

Proposición D.2.2. *La probabilidad de que el primer escape de la zona* $[0,b]$ *sea por la barrera superior partiendo de* $X_r = u \in [0,b]$, $\mathscr{E}_r^- = z$ *y los saltos tomando valores* $Y_j \in (-\infty,-b] \cup [0,+\infty)\ \forall\ j \in \mathbb{N}$ *satisface la siguiente identidad:*

$$\boxed{P_{E,r}^{u.s} = P(r,u,z) = \mathbb{F}(r,b-u,z),\ u \in [0,b]} \tag{D.7}$$

Siendo:

$$\boxed{\mathbb{F}(r,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\left[\frac{\bar{F}(z) - p\hat{f}_z(cs)[1-s\hat{g}_+(s)\hat{\mathbb{F}}(s)]}{s\bar{F}(z)}\right]\mathrm{d}s,\ y \in [0,+\infty)}^{1} \tag{D.8}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 3.6.6, en la página 159, sabemos que:

$$P_{E,r}^{u.s} = 1 - \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l + \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{l-u}{c})\int_0^l P_{E,0}^{(l-v).s} g_+(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l.$$

Mediante transformaciones elementales obtenemos:

$$P_{E,r}^{u.s} = 1 - \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+t)G(-b)\,\mathrm{d}l +$$

$$+\frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+t)\int_{u+ct-b}^{u+ct} P_{E,0}^{(u+ct-v).s} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t.$$

Teniendo en cuenta que:

$$X_t \in [0,b] \Rightarrow (u+ct) - b \le v \le u+ct.$$

Siendo $t = l - r$ el valor que toma la variable aleatoria "excess life", $\mathscr{E}_r^+$.

Para la última integral:

[1] *Siendo:*

$$\hat{f}_z(cs) = \int_0^{+\infty} e^{-cst} f(z+t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+t)\int_{u+ct-b}^{u+ct} P_{E,r(r+t)}^{u.s} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c\bar{F}(z)}\int_u^b f(z+\frac{l-u}{c})\int_{l-b}^{l} P_{E,0}^{(l-v).s} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l.$$

Despues de varios cambios de variable obtenemos:

$$= \frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_0^{b-u} f(z+\frac{b-u-l}{c})\int_0^{l} P_{E,0}^{(b-l+w).s} g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}l.$$

Teniendo en cuenta que $l-b > -b\ \forall\ l \in [0, b-u]$ y la definición de la función de densidad $g(w)$. Por lo tanto:

$$P_{E,r}^{u.s} = 1 - \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l)\,\mathrm{d}l + \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{b-u}{c}} f(z+l)G(-b)\,\mathrm{d}l +$$

$$+\frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_0^{b-u} f(z+\frac{b-u-l}{c})\int_0^{l} P_{E,0}^{(b-l+w).s} g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}l.$$

Vamos a definir el objeto auxiliar:

$$\mathbb{F}(r,y,z) = 1 - \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{y}{c}} f(z+l)\,\mathrm{d}l + \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^{\frac{y}{c}} f(z+l)G(-b)\,\mathrm{d}l +$$

$$+\frac{p}{c\bar{F}(z)}\int_0^{y} f(z+\frac{y-l}{c})\int_0^{l} \mathbb{F}(l-w) g_+(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}l,\ y \in [0,+\infty).$$

Aplicando la transformada de Laplace a la anterior igualdad, y razonando igual que en la proposición D.1.2, en la página 296, obtenemos D.8.

□

- *Caso actuarial.*

  Se habían obtenido las siguientes proposiciones:

Proposición D.2.3. *En el caso en que los tiempos de espera τ_i tienen una función de distribución F cuya función de densidad asociada es de clase C^n en $(0,+\infty)$ y existe un operador diferencial con coeficientes constantes $L \equiv L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(t)$ es solución de*

$$L(f) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}\right) f(t) = 0, \text{ con las condiciones iniciales} \tag{D.9}$$

$$f^0(0) = b_0, \cdots, f^{n-2}(0) = b_{n-2}, f^{n-1}(0) = b_{n-1}. \tag{D.10}$$

Entonces $P_{E,0}^{u.s} = P(u)$ es de clase C^n en $(0,b)$ y cualquier solución de la ecuación integral 3.252, en la página 162, debe ser solución de la ecuación integro-diferencial:

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(-c)^k a_k \frac{\partial^k}{\partial u^k}\right) P(u) = \sum_{k=0}^{n-1}(-c)^k \left[\sum_{j=1+k}^{n} a_k f^{j-(1+k)}(0)\right] \int_0^u P^k(u-y)g(y)\,\mathrm{d}y + \tag{D.11}$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\left[\sum_{j=k+2}^{n}\left[\sum_{i=0}^{j-2} a_k(-1)^{2j-1-i}(c)^{1+i} f^{j-2-i}(0)P^i(0)\right]\right] g^k(u),\ u \in [0,b],$$

con las condiciones de frontera:

$$P(b) = 1,\ P'(b) = \frac{1}{c}f(0) - \frac{1}{c}f(0)\Pi(b), \cdots, \tag{D.12}$$

$$\cdots\ P^k(b) = (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{c}\right)^k f^{k-1}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{j+1} f^j(0)\Pi^{k-1-j}(b),\ k = 2\cdots, n-1. \tag{D.13}$$

Siendo:

$$\Pi(u) = \int_0^u P(u-y)g(y)\,\mathrm{d}y,\ u \in [0,b]. \tag{D.14}$$

Demostración. En la proposición 3.6.9, en la página 162, vimos que la probabilidad de que el primer escape sea por la barrera superior condicionada por $X_0 = u$ en el caso en que los saltos pueden tomar únicamente valor positivo verificaba la siguiente ecuación integral:

$$P_{E,0}^{u.s} = \frac{1}{c}\int_b^{+\infty} f(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l + \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{l-u}{c})\int_0^z P_{E,0}^{(l-v).s} g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l.$$

Si derivamos la anterior ecuación integral respecto de u, teniendo en cuenta la fórmula de la derivación paramétrica, obtenemos:

$$-cP'(u) = \frac{1}{c}\int_b^{+\infty} f'(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l + \frac{1}{c}\int_u^b f'(\frac{l-u}{c})\int_0^l P(l-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l +$$

$$+f(0)\int_0^u P(u-v)g(v)\,\mathrm{d}v,$$

$$c^2P''(u) = \frac{1}{c}\int_b^{+\infty} f''(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l + \frac{1}{c}\int_u^b f''(\frac{l-u}{c})\int_0^l P(l-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l+$$

$$+f'(0)\int_0^u P(u-v)g(v)\,\mathrm{d}v - cf(0)\int_0^u P'(u-v)g(v)\,\mathrm{d}v - cf(0)P(0)g(u),$$

En general $\forall\ 3 \leq k \leq n$ se verifica:

$$(-c)^kP^k(u) = \frac{1}{c}\int_b^{+\infty} f^k(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l + \frac{1}{c}\int_u^b f^k(\frac{l-u}{c})\int_0^l P(l-v)g(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}l+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}(-c)^i f^{k-(i+1)}(0)\int_0^u P^i(u-v)g(v)\,\mathrm{d}v+\sum_{j=0}^{k-2}\left[\sum_{i=0}^{k-2-j}(-1)^{2k-1-i-j}(c)^{1+i+j}f^{k-2-i-j}(0)P^i(0)\right]g^j(u).$$

Si multiplicamos cada una de las anteriores igualdades por $a_k,\ k = 0,\cdots,n$ y sumamos, tendremos:

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(-c)^k a_k\frac{\partial^k}{\partial u^k}\right)P(u) = \sum_{k=0}^{n-1}(-c)^k\left[\sum_{j=1+k}^{n} a_k f^{j-(1+k)}(0)\right]\int_0^u P^k(u-v)g(v)\,\mathrm{d}v+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\left[\sum_{j=k+2}^{n}\left[\sum_{i=0}^{j-2} a_k(-1)^{2j-1-i}(c)^{1+i}f^{j-2-i}(0)P^i(0)\right]\right]g^k(u).$$

Para imponer las condiciones de frontera, consideramos la ecuación integral:

$$P(u) = \frac{1}{c}\int_b^{+\infty} f(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l + \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l\int_0^l P(l-v)g(v)\,\mathrm{d}v.$$

Dando un cambio de variable obtenemos:

$$P(u) = \bar{F}(\frac{b-u}{c}) + \frac{1}{c}\int_u^b f(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l\int_0^l P(l-v)g(v)\,\mathrm{d}v.$$

Derivando respecto de u la anterior expresión, tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial u}P(u) = \frac{1}{c}f(\frac{b-u}{c}) - \frac{1}{c^2}\int_u^b f'(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l\int_0^l P(l-v)g(v)\,\mathrm{d}v - \frac{1}{c}f(0)\Pi(u),$$

donde hemos definido

$$\Pi(u) = \int_0^u P(u-v)g(v)\,\mathrm{d}v = P * g(u).$$

A partir de ahí obtenemos:

$$P^k(b) = (-1)^{k+1}\frac{1}{c^k}f^{k-1}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{j+1} f^j(0)\Pi^{k-1-j}(b).$$

□

Ahora podemos hallar la solución de la ecuación integral D.11.

Proposición D.2.4. *En el caso en que los tiempos de espera τ_i tienen una función de distribución F cuya función de densidad asociada es de clase C^n en $(0,+\infty)$ y existe un operador diferencial con coeficientes constantes $L \equiv L(\partial_u)$ de orden $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(t)$ es solución de*

$$L(f) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}\right) f(t) = 0,\ \textit{con las condiciones iniciales} \tag{D.15}$$

$$f^0(0) = b_0, \cdots, f^{n-2}(0) = b_{n-2}, f^{n-1}(0) = b_{n-1}. \tag{D.16}$$

Entonces se verifica:

$$\boxed{P(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sy}\hat{P}(s)\,\mathrm{d}s,\ u \in [0,b]^2} \tag{D.17}$$

Siendo:

$$\boxed{\hat{P}(s) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k - \beta_k)s^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(-c)^k s^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k(-c)^k s^k \hat{g}(s)}} \tag{D.18}$$

Demostración. En la proposición D.2.3, en la página 301, vimos que $P(u)$ debe ser solución de la ecuación integro diferencial:

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(-c)^k a_k \frac{\partial^k}{\partial u^k}\right) P(u) = \sum_{k=0}^{n-1}(-c)^k \left[\sum_{j=1+k}^{n} a_k f^{j-(1+k)}(0)\right] \int_0^u P^k(u-y)g(y)\,\mathrm{d}y +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\left[\sum_{j=k+2}^{n}\left[\sum_{i=0}^{j-2} a_k(-1)^{2j-1-i}(c)^{1+i} f^{j-2-i}(0)P^i(0)\right]\right] g^k(u).$$

Esa identidad la vamos a simplificar usando el objeto $\Pi(u)$, que habíamos definido en la proposición anterior.

$$\Pi(u) = \int_0^u P(u-y)g(y)\,\mathrm{d}y = G * P(u).$$

Teniendo en cuenta el anterior objeto las sucesivas derivadas de $P(u)$ verifican:

$$(-c)^k P^k(u) = \frac{1}{c}\int_b^{+\infty} f^k(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l +$$

$$+\frac{1}{c}\int_u^b f^k(\frac{l-u}{c})\,\mathrm{d}l \int_0^l P(l-y)g(y)\,\mathrm{d}y + \sum_{i=0}^{k-1}(-c)^i f^{k-1-i}(0)\Pi^i(u).$$

Multiplicando por $a_k,\ k=0,\cdots,n$ cada lado de la igualdad y sumando llegamos a:

$$\sum_{k=0}^{n}(-c)^k a_k P^k(u) = \sum_{k=0}^{n-1}(-c)^k\left[\sum_{i=k+1}^{n-1} a_i f^{i-1}(0)\right]\Pi^k(u)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-c)^k a_k P^k(u) = \sum_{k=0}^{n-1}(-c)^k b_k \Pi^k(u),\ \text{siendo: } b_k = \sum_{i=k+1}^{n-1} a_i f^{i-1}(0).$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Laplace, sabemos que:

$$\mathcal{L}(P^k(u)) = s^k\hat{P}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-1-i}P^i(0),\ \mathcal{L}(\Pi^k(u)) = s^k\hat{\Pi}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-1-i}\Pi^i(0).$$

Aplicando la transformada de Laplace a los dos lados de la anterior igualdad, tendremos:

$$\sum_{k=0}^{n}(-c)^k a_k\left[s^k\hat{P}(s)-\sum_{l=0}^{k-1}s^{k-1-l}P^l(0)\right]=\sum_{k=0}^{n}(-c)^k b_k\left[s^k\hat{\Pi}(s)-\sum_{i=0}^{k-1}s^{k-1-i}\Pi^i(0)\right].$$

Teniendo en cuenta la propiedad de convolución: $\hat{\Pi}(s)=\hat{P}(s)\hat{g}(s)$. De donde:

$$\left[\sum_{k=0}^{n}a_k(-c)^k s^k-\sum_{k=0}^{n-1}b_k(-c)^k s^k\hat{g}(s)\right]\hat{P}(s)=\sum_{k=0}^{n}(-c)^k a_k\left(\sum_{l=0}^{k-1}s^{k-1-l}P^l(0)\right)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}(-c)^k b_k\left(\sum_{l=0}^{k-1}s^{l-k-1}\pi^l(0)\right).$$

Sacando factores comunes y mediante transformaciones elementales podemos simplificar la anterior igualdad como:

$$\left[\sum_{k=0}^{n}a_k(-c)^k s^k-\sum_{k=0}^{n-1}b_k(-c)^k s^k\hat{g}(s)\right]\hat{P}(s)=\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k-\beta_k)s^k,\ \text{siendo:}$$

$$\alpha_k=\sum_{l=k+1}^{n-1}(-c)^l a_l P^{l-k-1}(0),\ \beta_k=\sum_{l=k+1}^{n-1}(-c)^l b_l\Pi^{l-k-1}(0),\ \beta_{n-1}=0.$$

Es evidente que $\alpha_k,\ \beta_k,\ k=0,\cdots,n-1$ son constantes. Despejando, eligiendo α de forma adecuada [3] y aplicando la transformada inversa de Laplace obtenemos D.17.

□

A continuación vamos a obtener una fórmula explícita de $P(u)$. Depende de las n indeterminadas, incógnitas, $\alpha_k,\ \beta_k,\ k=0,\cdots,n-1$, las cuales determinaremos gracias a las condiciones de frontera.

Proposición D.2.5. *En el caso en que los tiempos de espera τ_i tienen una función de distribución F cuya función de densidad asociada es de clase C^n en $(0,+\infty)$ y existe un operador diferencial con coeficientes constantes $L\equiv L(\partial_u)$ de orden $n\in\mathbb{N}$ tal que $f(t)$ es solución de*

$$L(f)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)f(t)=0,\ \textit{con las condiciones iniciales} \tag{D.19}$$

$$f^0(0)=b_0,\cdots,f^{n-2}(0)=b_{n-2},f^{n-1}(0)=b_{n-1}. \tag{D.20}$$

[3] *De forma que en el semiplano $\Re(s)\geq\alpha$ no haya ningún polo del integrando. Es decir, que todos los ceros de* $\sum_{k=0}^{n-1}(-c)^k a_k s^k\left[1-\left[\sum_{j=k+1}^{n}f^{j-(k+1)}(0)\right]\hat{g}(s)\right]+(-c)^n a_n s^n$ *esten a la izquierda de la recta $x=\alpha$.*

Entonces se verifica:

$$\boxed{P(u) = \frac{\Theta(u,b)}{\Delta(b)}} \tag{D.21}$$

Siendo:

$$\Theta(u,b) = (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} \pi^0(u) & \pi^1(u) & \cdots & \pi^{n-1}(u) & 0 \\ a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} & 1 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & \frac{f(0)}{c} \\ \vdots & & & & \\ a_{j0} & a_{j1} & \cdots & a_{jn-1} & f^{j-1}(0)\left(\frac{1}{c}\right)^j \\ \vdots & & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & f^{n-2}(0)\left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} \end{pmatrix}, \tag{D.22}$$

$$\Delta(b) = \det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}. \tag{D.23}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición D.2.4 y la propiedad de linealidad de la transformada inversa de Laplace, obtenemos (eligiendo α de forma adecuada):

$$P(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{su}\hat{P}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{su}\left[\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k-\beta_k)s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k(-c)^k s^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k(-c)^k s^k \hat{g}(s)})\right]\mathrm{d}s =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\delta_k\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{su}\frac{s^k}{D(s)}\,\mathrm{d}s\right).$$

Hemos definido

$$\delta_k = \alpha_k - \beta_k,\ D(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k(-c)^k s^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k(-c)^k s^k \hat{g}(s).$$

Definimos:

$$\pi(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{su}\frac{\mathrm{d}s}{D(s)},\ \pi_k(u) = \frac{\partial^k \pi(u)}{\partial u^k},\ \forall k = 1,\cdots,n-1.$$

Y tendremos para $P(u)$:

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n-1}\delta_k\pi_k(u),\ u \in [0,b].$$

Depende de las n incógnitas $\delta_k,\ k = 0,\cdots,n-1$. Para determinar esas incógnitas vamos a usar las condiciones de frontera:
$P(b) = 1,\ P^i(b) = (-1)^{i-1}f^{i-1}(0)\left(\frac{1}{c}\right)^i + \sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{-1}{c}\right)^{j+1}f^j(0)\Pi^{i-1-j}(b),\ i = 1,\cdots,n-1.$[4]

Vamos a obtener una identidad para $\Pi(b)$. Lo hemos definido como:

$$\Pi(b) = \int_0^b P(b-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^b\left[\sum_{k=0}^{n-1}\delta_k\pi_k(b-y)\right]g(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{n-1}\delta_k\int_0^b \pi_k(y)g(b-y)\,\mathrm{d}y.$$

Para cada $k = 0,\cdots,n-1$ se cumple que $\int_0^b \pi_k(y)g(b-y)\,\mathrm{d}y$ dada la función de densidad g es una constante que se puede calcular, y que denominaremos $m_k(b)$. Por lo tanto tenemos:

$$\Pi(b) = \sum_{k=0}^{n-1}\delta_k m_k(b),\ \Pi^j(b) = \sum_{k=0}^{n-1}\delta_k\frac{\partial^j m_k}{\partial u^j} = \sum_{k=0}^{n-1}\delta_k m_k^j(b).$$

Imponiendo las condiciones de frontera obtenemos:

$$P^i(b) = (-1)^{i-1}f^{i-1}(0)(\frac{1}{c})^i + \sum_{j=0}^{i-1}(\frac{-1}{c})^{j+1}f^j(0)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\delta_k m_k^{i-1-j}(b)\right].$$

Sacando factor común respecto de las δ_k tenemos:

$$P^i(b) = (-1)^{i-1}f^{i-1}(0)(\frac{1}{c})^i + \sum_{k=0}^{n-1}\delta_k C_{k,i}^b,\ \text{con } C_{k,i}^b = \sum_{j=0}^{i-1}(\frac{-1}{c})^{j+1}f^j(0)m_k^{i-1-j}(b).$$

Tenemos, por lo tanto, el siguiente sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

[4] *Evidentemente, se cumplen las condiciones que nos permiten derivar respecto de u bajo el signo integral.*

$$\begin{cases} P(b) = & 1 \\ P'(b) = & \frac{f(0)}{c} - \frac{f(0)}{c}\Pi(b) \\ \vdots & \\ P^{n-1}(b) = & (-1)^{n-2} f^{n-2}(0) \left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{-1}{c}\right)^{j+1} f^{j}(0)\Pi^{n-2-j}(b) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la definición de π_k podemos expresar el anterior sistema como:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \pi^k(b) = & 1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \pi^{k+1}(b) = & \frac{f(0)}{c} - \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k C_{k,1}^b \\ \vdots & \\ \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \pi^{k+n-1}(b) = & (-1)^{n-2} f^{n-2}(0) \left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k C_{k,n-1}^b \end{cases}$$

El anterior sistema, en forma matricial, nos quedará:

$$\begin{pmatrix} \pi^0(b) & \pi^1(b) & \cdots & \pi^{n-1}(b) \\ \pi^1(b) + C_{0,1}^b & \pi^2(b) + C_{1,1}^b & \cdots & \pi^n(b) + C_{n-1,1}^b \\ \vdots & & & \\ \pi^{n-1}(b) - C_{0,n-1}^b & \pi^n(b) - C_{1,n-1}^b & \cdots & \pi^{2n-2}(b) - C_{n-1,n-1}^b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{f(0)}{c} \\ \vdots \\ \frac{(-1)^{n-2} f^{n-2}(0)}{c^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Si adoptamos el convenio de que $C_{k,0}^b = 0$, para $k = 0, \cdots, n-1$, podemos expresar el anterior sistema de una forma más manejable, haciendo $a_{ij} = \pi^{j+i}(b) - C_{ji}^b$:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{f(0)}{c} \\ \vdots \\ (-1)^{n-2} f^{n-2}(0) (\frac{1}{c})^{n-1} \end{pmatrix}$$

Si denominamos por $\vec{\delta}$ al vector solución del anterior sistema, podemos expresarlo como la siguiente combinación lineal de vectores:

$$\vec{\delta} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f^{j-1}(0) \left(\frac{1}{c}\right)^j \vec{\delta}^j.$$

Siendo $\vec{\delta}^j$ el vector solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} \\ \vdots & & & \\ a_{k0} & a_{k1} & \cdots & a_{k,n-1} \\ \vdots & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_0^j \\ \vdots \\ \delta_j^j \\ \vdots \\ \delta_{n-1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema de Cramer de orden n. Definimos:

$$\Delta(b) = \det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} \\ & & & \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix},$$

$$\Theta_k^j(b) = \det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & 0 & \cdots & a_{0n-1} \\ \vdots & & & & & \\ a_{k0} & a_{k1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{k,n-1} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}.$$

Siendo $\Theta_k^j(b)$ la matriz obtenida sustituyendo en ella la columna k-ésima por el vector columna que tiene todas las componentes nulas, excepto la j-ésima que es la unidad. Es decir:

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 = a_{k,j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que, como es evidente, $\Delta(b) \neq 0$, teniendo en cuenta la regla de Cramer obtenemos:

$$\delta_k^j = \frac{\Theta_k^j(b)}{\Delta(b)},\ k = 0, \cdots, n-1.$$

Tendremos, por lo tanto, que

$$\vec{\delta} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f^{j-1}(0) \left(\frac{1}{c}\right)^j \frac{\Theta_k^j(b)}{\Delta(b)} \right] \vec{e}_k.$$

Siendo $\vec{e}_k$ el vector columna de orden n con todas sus componentes nulas excepto la k-ésima que es la unidad.

Y por lo tanto:

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(u) \left[\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f^{j-1}(0) \left(\frac{1}{c}\right)^j \frac{\Theta_k^j(b)}{\Delta(b)} \right] = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f^{j-1}(0) \left(\frac{1}{c}\right)^j \left[\sum_{k=0}^{n-1} \pi^k(u) \cdot \frac{\Theta_k^j(b)}{\Delta(b)} \right] =^{5}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f^{j-1}(0) \left(\frac{1}{c}\right)^j \frac{\Theta^k(u,b)}{\Delta(b)} = \frac{\Theta(u,b)}{\Delta(b)}.$$

Siendo:

$$\Theta^k(u,b) = \det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} \\ \vdots & & & \\ a_{k0} = \pi^0(u) & a_{k1} = \pi'(u) & \cdots & a_{kn-1} = \pi^{n-1}(u) \\ \vdots & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix},$$

$$\Theta(u,b) = (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} \pi^0(u) & \pi^1(u) & \cdots & \pi^{n-1}(u) & 0 \\ a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} & 1 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & \frac{f(0)}{c} \\ \vdots & & & & \\ a_{j0} & a_{j1} & \cdots & a_{jn-1} & f^{j-1}(0)\left(\frac{1}{c}\right)^j \\ \vdots & & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & f^{n-2}(0)\left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\Delta(b) = \det \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & & & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}.$$

□

[5] *Teniendo en cuenta que* $\pi_k(u) = \pi^k(u) = \frac{\partial^k \pi(u)}{\partial u^k}$

Bibliografía

[1] H. Albrecher and O. J. Boxmab 2004, A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insur. Math. Econ.*, **35**, 245254.

[2] S. Asmussen 2000, *Ruin probabilities.* World Scientific, Singapore.

[3] S. E. Andersen 1957, On the collective theory of risk in case of contagion between the claims. *Transactions XVth Intern. Cong. Actuar. New York, II*, 219-229.

[4] F. Avram, A. E. Kyprianou and M. R. Pistorius 2004, Exit problems for spectrally negative Lévy processes and applications to Russian, American and Canadized options. *Ann. Appl. Prob.*, **14(1)**, 215-238.

[5] L. Bachelier 1900, Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, **17**, 21-86.

[6] R. N. Bhattacharya and E. C. Waymire 1981, *Stochastic processes with Applications.* Wiley, New York.

[7] F. Baudoin 2014, *Diffusion processes and stochastic calculus.* European Mathematical Society, Zurich.

[8] A. I. Bergel, R. M. R. Cardoso, A. D. R. Dos Reis and E. V. Rodríguez-Martínez 2014, The Cramér-Lundberg and the dual risk models: Ruin, dividend problems and duality features. 30^{th} *International Congress of Actuaries.*

[9] J. Bertoin 1996, On the first exit time of a completely asymmetric stable process from a finite interval. *Bull. Lond. Math. Soc.*, **28**, 514520.

[10] A. Birnbaum 1953, Some procedures for comparing Poisson processes or populations. *Biometrika*, **45**, 447-449.

[11] V. I. Bogachev 2000, *Measure theory.* Springer-Verlag, New-York.

[12] A. A. Borovkov and A. A. Mogulskii 2018, Integro-local limit theorems for compound renewal processes under Cramér's condition I. *Sib. Math. J.*, **59**, 383-402.

[13] A. A. Borovkov and A. A. Mogulskii 2018, Integro-local limit theorems for compound renewal processes under Cramér's condition II. *Sib. Math. J.*, **59**, 578-597.

[14] D. Boyer and C. Solis-Salas 2014, Random walks with preferential relocations to places visited in the past and application to biology. *Phys. Rev. Lett.*, **112**, 240601.

[15] H. Cartan 1961, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann, Paris.

[16] H. Cramér 1994, On the mathematical theory of risk. *Collected Works*, **1 (Springer)**, 601-678.

[17] S. N. Chiu and C. Yin 2005, Passage times for a spectrally negative Lévy process with applications to risk theory. *Bernoulli*, **11(3)**, 511-522 .

[18] C. Constantinescu, G. Samorodnitsky and W. Zhu 2018, Ruin probabilities in classical risk models with gamma claims. *Scand. Actuar. J.*, **7**, 555-575.

[19] D. R. Cox 1959, A renewal problem with bulk ordering of components. *J. R. Statist. Soc.*B, **21**, 180-189.

[20] D. R. Cox 1965, *Renewal Theory.* John Wiley and Sons, New York.

[21] L. Dang, N. Zhu and H. Zhang 2009, Survival probability for a two-dimensional risk model. *Insur. Math. Econ.*, **44(3)**, 491-496.

[22] A. Dassios and P. Embrechts 1989, Martingales and insurance risk. *Stochastic Models.*, **5(2)**, 181-217.

[23] D. C. M. Dickson and C. Hipp 1998, A class of renewal risk process. *North Amer. Act. J.*, **7**, 1-12.

[24] D. C. M. Dickson and C. Hipp 1998, Ruin probabilities for Erlang(2) risk process. Insur. Math. Econ. **22**, 251.

[25] D. C. M. Dickson and G. E. Willmot 2005, The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model. *ASTIN Bull.*, **35**, 45-60.

[26] D. C. M. Dickson, B. D. Hughes and Z. Lianzeng 2005, The density of the time to ruin for Sparre Andersen process with Erlang arrivals and exponential claims. *Scand. Actuar. J.*, **5**, 358-376.

[27] D. C. M. Dickson and C. Hipp 2006, Finite time ruin problems for the Erlang(2) risk model. *Insur. Math. Econ.*, **29**, 529-539.

[28] D. C. M. Dickson and C. Hipp 2006, Some explicit solutions for the joint density of the time of ruin and the deficit at ruin. *ASTIN Bull.*, **38**, 25-276.

[29] D. C. M. Dickson 2006, The maximum surplus before ruin in an Erlang(n) risk process and related problems. *Insur. Math. Econ.*, **38**, 529-53.

[30] D. C. M. Dickson 2016, *Insurance Risk and Ruin.* Cambridge Univ. Press, New York.

[31] R. A. Doney 1997, Onesided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean. *Probab. Theory Relat. Fields*, **107**, 451-465.

[32] J. L. Doob 1953, *Stochastic processes.* John Wiley and Sons, New York.

[33] J. L. Doob 1994, *Measure theorry.* Springer-Verlag, New York.

[34] J. Duan 2015, *An Introduction to Stochastic Dynamics 2.* Cambridge University Press, New York.

[35] P. Dubreil et M. L. Dubreil-Jacotin 1961, *Leçons d'algèbre moderne.* Dunod, Paris.

[36] E. B. Dynkin 1963, *Markov processes.* Plenum, New York.

[37] A. Einstein 1905, Die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der Physik*, **17**, 549-560.

[38] M. R. Evans, S. N. Majumdar and K. Mallick 2020, Stochastic resetting and applications. *J. Phys. A: Math.Theor.* **53** 193001.

[39] W. Feller 1941, On the integral equation of renewal theory. *Ann. Math. Statist.*, **12**, 243-267.

[40] W. Feller 1948, On probability problems in the theory of counters. *Courant Anniversary Volume*, 105-115.

[41] W. Feller 1949, Fluctuation theory of recurrent events. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67**, 98-119.

[42] W. Feller 1954, Diffusion processes in one dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77**, 1-3.

[43] W. Feller 1954, On second order differential operators. *Ann. Math.*, **61**, 90-105.

[44] W. Feller 1968, *An introduction to probability theory and its applications.* **1**, John Wiley and Sons, New York.

[45] W. Feller 1968, *An introduction to probability theory and its applications.* **2**, John Wiley and Sons, New York.

[46] M. E. Fisher 1984, Walks, walls, wetting, and melting. *J. Statist. Phys.*, **34**, 667-729.

[47] J. B. Fraleigh 1977, *A first course in abstract algebra.* Addison-Wesley, Boston.

[48] A. Frolova, Y. Kabanov and S. Pergamenshchikov 2002, Furrer In the insurance business risky invesments are dangerous. *Finance and Stochastics.* **6**, 227-235.

[49] J. Gao, L. Wu and H. Liu 2016, Probability of ruin in a continuous risk model with two types of delayed claims. *Comm. Statistics - Th. Methods*, **45(13)** 3734-3750.

[50] J. M. Garcia 2005, Explicit solutions for survival probabilities in the classical risk model. *ASTIN Bull.*, **35**, 113-130.

[51] A. Garsia and J. Lamperti 1963, A discrete renewal theorem with infinite mean. *Comment. Math. Helv.*, **37**, 221-234.

[52] M. García y J. Margalef 1975, *Topología.* Editorial Alhambra, Madrid.

[53] M. Garrido 1986, *Lógica simbólica.* Editorial Tecnos, Madrid.

[54] H. U. Gerber and E .S. W. Shiu 2005, The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *N. Amer. Act. J.*, **9(2)**, 49-69.

[55] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu 2013, On the time value of ruin. *N. Amer. Act. J.*, **2(11)**, 48-72.

[56] G. Giacomin 2008, Renewal convergence rates and correlation decay for homogeneous pinning models. *Electronic Journal of Probability*, **13(2008)**, 513-529.

[57] C. Godrèche and J. M. Luck 2001, Statistics of the occupation time of renewal processes. *Journal of Statistical Physics*, **104**, 489-524.

[58] L. A. Goodman 1953, Methods of measuring useful life of equipment under operational conditions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **48**, 503-530.

[59] R. Grübel 1983, Functions of discrete probability measures: rate of convergence in the renewal theorem., *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, **64**, 341-357.

[60] M. de Guzman y B. Rubio 1979, *Integración: teoría y técnicas.* Editorial Alhambra, Madrid.

[61] P. R. Halmos 1964, *Measure Theory.* D.Van Nostrand Company, Inc., New York.

[62] W. He, N. de Saxcé 2022, Linear random walks on the torus. *Duke Math. J.*, **171(5)**, 1061-1133.

[63] A. Helmstetter and D. Sornette 2003, Diffusion of epicenters of earthquake aftershocks, Omori law and generalized continuous-time random walk models. *Phys. Rev. E*, **66**, 061104.

[64] T. Henks 2003, *First Course in Stochastic Models.* J. Wiley and Sons, New York.

[65] H. Hult and F. Lindskog 2009, Ruin probabilities under general investments and heavy-tailed claims. *Stochastic Processes in Insurance and Finance*, **15(2)**, 243-265.

[66] M. Huzak, M. Perman, S. Hrvoje and Z. Vondracek 2004, Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes. *Ann. Appl. Prob.*, **14**, 1378-1397.

[67] K. Itô 1946, On a stochastic integral equation. *Proc. Japan Acad.*, **22**, 32-35.

[68] S. Janson and Y. Peres 2012, Hitting times for random walks with restarts. *SIAM J. Discret. Math.*, **26** , 537-547.

[69] M. Kac 1959, *Probability and related topics in physical sciences.* Interscience, New York.

[70] S. Karlin and H. Taylor 1981. *A first course in stochastic processes.* Acad. Press, New York.

[71] J. L. Kelley 1962, *Topología general.* Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires.

[72] J. F. C. Kingman 1967, Completely random measures. *Pacific Journal of Mathematics*, **21(1)**, 59-78.

[73] C. Kluppelberg 1989, Estimation of ruin probabilities by means of hazard rates. *Insur. Math. Econ.*, **8**, 279-285.

[74] C. Kluppelberg and T. Mikosch 1995, Delay in claim settlement and ruin probability approximations. *Scand. Actuar. J.*, **1995(2)**, 154-168.

[75] C. Kluppelberg and U. Stadtmüller 1998, Ruin probabilities in the presence of heavy-tails and interest rates. *Scand. Actuar. J.*,**1998(1)**, 49-58.

[76] C. Kluppelberg, A. E. Kiprianou and R. A. Maller 2004, Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes. *Ann. Appl. Prob.*, **14(4)**, 1766-1801.

[77] A. N. Kolmogorov 1950, *Foundations of the theory of probability.* Chelsea Publishing Company, NewYork.

[78] A. N. Kolmogorov 1957, *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Graylock Press, **1**, Rochester, New York.

[79] G. Kou and H. Wang 2003, First passage times of jump diffusion process. *Adv. Appl. Prob.*, **35**, 504.

[80] L. Lavergnat and P. Gole 1998, Stochastic raindrop time distribution model. *J. Appl. Meteor.*, **37**, 805.

[81] S. Lang 2011, *Algebra.* Springer-Verlag, New York.

[82] C. Lefévre and S. Loisel 2007, Finite-time ruin probabilities for classical risk models. *Scand. Actuar. J.*, **2008(1)**, 41-60.

[83] A. Lentin et J. Rivaud 1965, *Leçons d'algèbre moderne.* Librairie Vuibert, Paris.

[84] P. Lévy 1951, Systèms markoviens et stationnaires. Cas dénombrable. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **68**, 40-381.

[85] P. Lévy 1965, *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Gauthier-Villars, Paris.

[86] S. Li and J. Garrido 2004, On ruin for the Erlang(n) risk process. *Insur. Math. Econ.* **34**, 391-408.

[87] S. Li and J. Garrido 2005, On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function. *Adv. Appl. Prob.*, **37(3)**, 836-856.

[88] S. Li 2008, A note on the maximum severity of ruin in an Erlang(n) risk process. *Swiss Assoc. Act.*,**1-2(2008)**, 167-180.

[89] P. Li, Ch. Yin and M. Zhou 2014, The compound Poisson risk model perturbed by diffusion with a hybrid dividend strategy. *J.M.S.*, **2(2)**, 8-20.

[90] M. Loève 1977, *Probability theory.* Springer-Verlag, **1**, New York.

[91] A. Logachov, A. Mogulskii, E. Prokopenko, and A. Yambartsev 2021, Local theorems for (multi-dimensional) additive functionals of semi-Markov chains. *Stoch. Process. and Their Appl.*, **137**, 149-166.

[92] S. Losidis and P. Kostas 2020, Moments of the forward recurrence time in a renewal process. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, **22**, 1591-1600.

[93] A. J. Lotka 1939, A contribution to the theory of self-renewing aggregates with special reference to industrial replacement. *Ann. Math. Statist.*, **10**, 1-25.

[94] E. Lukacs 1960, *Characteristic functions.* Griffin, London.

[95] F. Lundberg 1903, *I. Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. II. Aterförsäkering av kollektivrisker.* Almqvist & Wiksell, Uppsala.

[96] S. N. Majumdar, S. Sabhapandit and G. Schehr 2015, Random walk with random resetting to the maximum position. *Phys. Rev.* E, **92**, 052126.

[97] S. N. Majundar and B. Meerson 2020, Statistics of first-passage Brownian functionals. *J. Stat. Mech.* **2020** 023202.

[98] V. K. Malinovskii and K. V. Malinovskii 2017, On approximations for the distribution of first level crossing time. *arXiv preprint arXiv: 1708.08678v1*

[99] V. K. Malinovskii 2018, Approximations in the problem of level crossing by a compound renewal process. *Doklady Mathematics*, **98(3)**, 622-625.

[100] V. Malinovskii 2018, On approximations for the distribution of the time of first level crossing. *arXiv preprint arXiv: 1803.09801*

[101] S. Malmquist 1947, A statistical problem connected with the counting of radioactive particles. *Ann. Math. Statist.*, **18**, 255-264.

[102] A. A. Markov 1906, Extension of the law of large numbers to dependent events. *Bull. Soc. Phys. Math. Kazan(2)*, **15**, 135-156

[103] J. Masoliver, M. Montero, J. Perelló and G. H. Weiss 2006, The continuous time random walk formalism in financial markets. *Journal of Economic Behavior and Organization*, **61**, 577-598.

[104] V. Méndez and D. Campos 2016, Characterization of stationary states in random walks with stochastic resetting. *Phys. Rev.* E **93** 022106.

[105] R. C. Merton 1976, Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *J. Fin. Econ.*, **3**, 125-144.

[106] T. Mikosch and G. Samorodnitsky 2000, Ruin probability with claims modeled by a stationary ergodic stable process. *Ann. Prob.*, **28(4)**, 1814-1851.

[107] T. Mikosch 2006, *Non-Life Insurance Mathematics.* Springer Verlag, New York.

[108] L. Ming 1989, The Dirichlet problem of a discontinuous Markov process. *Acta Math. Sin.*, **5**, 9-15.

[109] E. W. Montroll and G. H. Weiss 1965, Random walks on lattices, II. *J. Math. Phys.*, **6**, 167-81.

[110] M. Montero and J. Villarroel 2010, Exit times in non-Markovian drifting random-walk processes. *Phys. Rev. E: Stat. Phys.*, **82**, 021102.

[111] M. Montero and J. Villarroel 2013, Monotonous continuous-time random walks with drift and stochastic reset events. *Phys. Rev.* E, **87**, 012116.

[112] M. Montero and J. Villarroel 2016, Directed random walk with random restarts: The Sisyphus random walk. *Phys. Rev.* E, **94**, 032132.

[113] M. Montero, A. Masó-Puigdellosas and J. Villarroel 2017, Continuous-time random walks with reset events. Historical background and new perspectives. *Eur. Phys. J.* B, **90**, 176

[114] M. Montero, A. Masó-Puigdellosas and J. Villarroel 2017, Continuous-time random walks with reset events. Historical background and new perspectives. *Eur. Phys. J.* B , **90**, 176.

[115] M. Montero and J. Masoliver 2017, Continuous-time random walks with memory and financial distributions. *Eur. Phys. J.*B, **90**, 207.

[116] R. L. Moore 1932, *Foundations of set points theory.* A. M. S. Colloquium Publication, **13.**

[117] P. Ney 1981, A refinement of the coupling method in renewal theory. *Stochastic Process. Appl.*, **11**, 11-26.

[118] A. C. Y. Ng 2010, On the upcrossing and downcrossing probabilities of a dual risk model with phase-type gains. *ASTIN Bulletin*, **40(1)**, 281-306.

[119] B. K. Oksendal 2005, *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions.* Springer Verlag, New York.

[120] A. Pal and S. Reuveni 2017, First passage under restart. *Phys. Rev. Lett.*, **118**, 030603.

[121] A. Pal , I. Eliazar and S. Reuveni 2019, First passage under restart with branching. *Phys. Rev. Lett.* **122** 020602.

[122] E. Parzen 1962, *Stochastic Processes.* Holden Day Series in Probability and Statistics, San Francisco.

[123] P. Perona, A. Porporato and L. Ridolf 2007, A stochastic process for the interannual snow storage and melting dynamics. *J.G.R*, **112**, D08107.

[124] P. Perona, E. Daly, B. Crouzy and A. Porporato 2012, Stochastic dynamics of snow avalanche occurrence by superposition of Poisson processes. *Proc. R. Soc. A.*, **468**, 4193-4208.

[125] V. V. Petrov 1975, *Sums of independent random variables.* Springer-Verlag, New York.

[126] N. Piskunov 1977, *Cálculo diferencial e integral.* Editorial Mir, Moscu.

[127] V. Quesada y A. García 1988, *Lecciones de cálculo de probabilidades.* Ediciones Díaz de Santos, Madrid.

[128] H. Quiao, X. Kan and J. Duan 2013, Escape probability for stochastic dynamical system with jumps. *Malliavin Calculus and Stochastic Analysis*, **34**, 15-216.

[129] S. Reuveni, M. Urbach and J. Klafter 2014, Role of substrate unbinding in Michaelis-Menten enzymatic reactions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **111**, 4391-4396.

[130] S. Reuveni 2016, Optimal stochastic restart renders fluctuations in first passage times. *Universal Phys. Rev. Lett.*, **116**, 170601.

[131] I. Rodriguez-Iturbe, D. R. Cox and V. Isham 1987, Some models for rainfall based on stochastic point processes. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A 410**, 269-288.

[132] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels 2006, *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* Wiley, New York.

[133] W. Rongming and L. Haifeng 2002, Ruin probability under a class of risk processes. *ASTIN Bull*, **32**, 81-90.

[134] D. J. Santana and L. Rincón 2020, Approximations of the ruin probability in a discrete time risk model. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, **7(3)(2020)**, 221-243.

[135] B. A. Sevastyanov 1982, *A course in the theory of probability and mathematical statistics.* Nauka, Moscu.

[136] A. N. Shiryaev 1996, *Probability.* Springer-Verlag, New York.

[137] V. P. Shkilev 2017, Continuous-time random walk under time-dependent resetting. *Phys. Rev.* E **96** 012126.

[138] G. Skandalis 2001, *Topologie et analyse.* Dunod, Paris.

[139] W. L. Smith 1958, Renewal theory and its ramifications. *J. R. Statist. Soc.*B, **20**, 243-302.

[140] M. Spivak 2012, *Cálculo infinitesimal.* Reverté, Barcelona.

[141] F. W. Steutel 1967, Note on the infinite divisibility of Exponential Mixtures. *Annals of Mathematical Statistics*, **38(4)**, 1303-1305.

[142] U. Sumita and Y. Masuda 1987, Classes of probability density functions having laplace transforms with negative zeros and poles. *Adv. Appl. Prob.*, **19(3)**, 632-651.

[143] B. A. Surya 2008, Evaluating scale functions of spectrally negative Lévy processes. *J. Appl. Prob.*, **45**, 135-149.

[144] L. Takacs 1970, On risk reserve processes. *Scand. Actuar. J.*, **1**, 64-75.

[145] F. L. Toninelli 2007, Correlation lengths for random polymer models and for some renewal sequences. *Elect. J. Probab.*, **12**, 613-636.

[146] D. Valenti, B. Spagnolo and G. Bonnano 2007, Hitting time distributions in financial markets. *Phys. A: Stat. Mech*, **382**, 311-320.

[147] J. Velázquez and A. Robledo 2011, Renewal stochastic processes with correlated events. Phase transitions along time evolution. *Phys. Rev.*E, **83**, 031103.

[148] J. Villarroel and M. Montero 2008, On properties of continuous-time random walks with non-Poissonian jump-times. *Chaos, Solitons and Fractals*, **42**, 128-137.

[149] J. Villarroel and M. Montero 2011, Poisson driven stochastic nonlinear Schrodinger equation. *Stud. Appl. Math.*, **127(4)**, 372-393.

[150] J. Villarroel and M. Montero 2018, Continuous-time ballistic process with random resets. *J. Stat. Mech.*, **140**, 78-130.

[151] J. Villarroel, M. Montero and J. A. Vega 2021, A semi-deterministic random walk with resetting. *Entropy*, **23(7)**, 825.

[152] J. Villarroel and J. A. Vega 2023, Escape probabilities from an interval for compound Poisson processes with drift. *Trends in Mathematical, Information and Data Sciences.*

[153] J. Villarroel and J. A. Vega 2023, The two barrier escape problem for compound renewal processes with two-sided jumps. *Stochastics and dynamics.*

[154] N. Wiener 1923, *Differential space.* J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech., **2**.

[155] D. Williams 1991, *Probability with martingales.* Cambridge University Press, Cambridge.

[156] K. C. Yuen, J. Guob and X. Wu 2002, On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk processes. *Insur. Math. Econ.*, **31**, 295-214.

[157] M. Zamparo 2021, Large deviations in discrete-time renewal theory. *Stoch. Process. Their Appl.*, **139**, 80-109.

[158] Y. Zhou and J. Dou 2013, The mean first passage time in an energy-diffusion controlled regime with power-law distributions. *J. Stat. Mech.*, 11005.

[159] X. Zhou 2004, When does surplus reach a level before ruin?. *Insur.Math.Econ.*, **35**, 553-561.