

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Escalares de estructura en perturbaciones al campo gravitatorio de un agujero negro estacionario

AUTOR: Pablo Gutiérrez Benito

TUTORES: Justo Hernán Ospino Zúñiga

Luis A. Núñez de Villavicencio

Curso 2021-2022



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Escalares de estructura en perturbaciones al campo gravitatorio de un agujero negro estacionario

AUTOR:

Pablo Gutiérrez Benito

TUTORES:

Justo Hernán Ospino Zúñiga, Luis A. Núñez de Villavicencio

Curso 2021-2022

Índice general

Introducción	1
1. Conocimientos previos de geometría diferencial	4
1.1. Variedades semi-riemannianas	5
1.2. Conexiones lineales. Conexión de Levi-Civita	8
1.2.1. Conexión de Levi-Civita	12
1.3. Geodésicas	13
1.4. Operadores sobre una variedad semi-riemanniana	15
1.5. Curvatura en variedades semi-riemannianas	18
2. Conocimientos previos de física	21
2.1. Gravitación newtoniana	21
2.2. Relatividad General	24
2.2.1. La ecuación de campo de Einstein	25
2.2.2. Soluciones de vacío	26
2.2.3. Tensor de Weyl	29
2.3. Electromagnetismo	29
2.4. Agujeros negros	31
2.4.1. Perturbaciones debidas a un campo escalar alrededor de un agujero negro	32
2.5. Formalismo 1+3	33
2.5.1. Tétrada	34
2.5.2. Escalares de estructura	35
2.5.3. Derivada covariante de V, K, L, S	38
3. Objetivos	41
3.1. Estado del arte y contexto del trabajo desarrollado	41
3.2. Objetivos y metodología seguida	42
4. Resultados	43
4.1. La ecuación de Teukolsky en el formalismo 1+3	43
4.2. Integración de la ecuación de Teukolsky	45
4.2.1. Primera solución	47
4.2.2. Segunda solución	49
4.3. Soluciones de tipo onda	55
4.3.1. Métrica de Schwarzschild	59

4.3.2. Métrica de Kerr	60
4.3.3. Otras métricas	62
5. Conclusiones	66
5.1. Análisis de los resultados obtenidos	66
5.2. Desarrollos futuros	67
Bibliografía	69

Índice de figuras

4.1. Representación de la función S_1 para la métrica de Schwarzschild en unidades $\frac{r}{m}$, para diferentes valores de k_1	59
4.2. Representación de la función $S_1(\theta)$ en el intervalo $(-3\pi, 3\pi)$ con constantes de integración $k_2 = 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 2$	60
4.3. Representación de la función S_1 para la métrica de Kerr en unidades $\frac{r}{m}$, para diferentes valores de k_1	61

Introducción

La Teoría de la Relatividad General, formulada en 1915 por Albert Einstein, concibe la gravedad como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo debida a cuerpos masivos, estos cuerpos se atraen unos a otros porque deforman la geometría del espacio-tiempo. Entre estos cuerpos masivos cabe destacar los agujeros negros, cuyo campo gravitatorio es tan intenso que ni siquiera los rayos de luz pueden escapar de su atracción. La teoría de la perturbación del espacio-tiempo ha sido una de las herramientas más efectivas para comprender las propiedades físicas de los agujeros negros. Por medio de perturbaciones, podemos describir y entender la evolución de los campos en el exterior de los agujeros negros y analizar las ondas entrantes y salientes para así obtener información de la generación y propagación de ondas en el espacio-tiempo de un agujero negro, así como también el análisis de estabilidad del sistema.

Con el fin de estudiar la radiación electromagnética generada por partículas cargadas alrededor de un agujero negro en este trabajo se propone resolver la ecuación de la perturbación de un campo escalar Φ alrededor de un agujero negro.

$$\nabla_{\mu}(\nabla^{\mu}\Phi) = 0$$

Esta es una ecuación de segundo orden de tipo onda que ya ha sido tratada por diferentes autores entre los que destaca S. Teukolsky [15], [16] que fue capaz de resolverla para la métrica de Kerr y es por ello que habitualmente nos referimos a ella como la ecuación

de Teukolsky. El objetivo de la memoria es obtener soluciones de dicha ecuación para cualquier espacio-tiempo estacionario con simetría axial y así generalizar trabajos anteriores como [1], [5], [15], [16]. Para ello haremos uso del formalismo 1+3, que permitirá reescribir la ecuación en términos de unos escalares, denominados escalares de estructura, rebajando su dificultad y así proceder a su resolución.

La memoria que se presenta está estructurada en cinco capítulos que pasamos a detallar a continuación.

El primer capítulo recoge desde un punto de vista general los conceptos y resultados de geometría diferencial que son necesarios para desarrollar el trabajo. Como consecuencia en este capítulo se evitan demostraciones y ejemplos, todos ellos pudiendo ser encontrados en la bibliografía utilizada ([2], [10], [12]). En concreto en este primer capítulo se introduce la noción de variedad semi-riemanniana y de su caso particular más importante para este trabajo: la variedad espacio-tiempo. A continuación se incluye el concepto de conexión en una variedad semi-riemanniana, lo que nos permite definir la derivación covariante de tensores en dicha variedad, así como la noción de geodésica. Se tratarán también los operadores fundamentales en variedades semi-riemannianas y se concluirá el capítulo con uno de los pilares en la formulación de la Relatividad General, la noción de curvatura.

El segundo capítulo es un resumen de los conceptos de física más importantes sobre los que se cimienta la memoria y que pueden ser encontrados en [2], [17] [12], [13], [18]. Comienza con una introducción de gravitación clásica, para luego pasar al tema central del capítulo, la Relatividad General, donde se presenta la ecuación de campo de Einstein así como sus soluciones más conocidas y algunas de las trayectorias que estas producen. También se tratan, sin apenas detalles, algunas nociones sobre electromagnetismo y agujeros negros. El capítulo cierra con un desarrollo bastante completo del formalismo 1+3 de cálculo tetradial.

El tercer capítulo no es más que una recopilación de los objetivos perseguidos en este trabajo enmarcados dentro del contexto en el que se han desarrollado trabajos anteriores.

El cuarto capítulo recoge los principales resultados a los que se ha llegado en el desarrollo del trabajo motivados por estudios como [1], [5], [11], [15], [16], [20]. Primeramente se buscaron soluciones de la ecuación de Teukolsky para cualquier métrica estacionaria y axial simétrica, llegando únicamente a soluciones para casos particulares de esta métrica. Con la intención de hallar nuevas soluciones para métricas conocidas, se procedió a la integración de la ecuación para los espacios-tiempos de Schwarzschild y Kerr. La memoria se cierra con un capítulo destinado a comentar los resultados obtenidos y reflexionar sobre futuros proyectos de investigación a los que podría conducir este trabajo.

Capítulo 1

Conocimientos previos de geometría diferencial. Geometría semi-riemanniana

La geometría euclídea tridimensional se puede entender como la pareja formada por el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 y una métrica g que actúa sobre vectores del tangente de \mathbb{R}^3 en cada punto para llevar a cabo operaciones geométricas básicas como cálculo de longitudes de vectores y de ángulos entre ellos. En 1827 Gauss mostró que en el caso de una superficie S inmersa en \mathbb{R}^3 , su geometría intrínseca podía derivarse únicamente restringiendo la métrica a los vectores tangentes a S .

Es ya en 1854 cuando Riemann se da cuenta de que se pueden generalizar estos casos e introduce la geometría en variedades n -dimensionales arbitrarias. Surge así el concepto de variedad riemanniana (M, g) como la pareja formada por una variedad diferenciable M y un campo tensorial $g \in T_2(M)$ simétrico y definido positivo, denominado métrica riemanniana.

Finalmente, ante la aparición de la Teoría de la Relatividad General (1915), una generalización de la geometría riemanniana, más técnica pero con mayor alcance, fue desarrollada donde la positividad de la métrica se debilitaba a la no degeneratividad.

1.1. Variedades semi-riemannianas

Sea M una variedad diferenciable y denotemos por $\mathfrak{X}(M)$ al $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo de campos vectoriales sobre M por $\Lambda^p(M)$ al módulo de las p -formas en M y por $T_r^s(M)$ al de los campos tensoriales.

Definición 1.1.1. *Una variedad semi-riemanniana (o pseudo-riemanniana) (M, g) es una variedad diferenciable M dotada de un campo tensorial $g \in T_2(M)$ denominado métrica semi-riemanniana verificando lo siguiente:*

1. *Es simétrico: $g(X, Y) = g(Y, X) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*
2. *Es no degenerado: dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$ si $g_p(X_p, Y_p) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $X_p = 0$.*

Recordemos que el índice de una forma bilineal T_2 en un espacio vectorial E es el mayor entero igual a la dimensión de un subespacio $V \subset E$ en el cual $T_2|_E$ es definida negativa. Entonces dar una métrica semi-riemanniana es equivalente a dar un campo tensorial $(0, 2)$ simétrico de índice constante. En un sistema de coordenadas locales $\{x^1, \dots, x^n\}$ la métrica se escribe $g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$ con $g_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(M)$. A lo largo del capítulo denotaremos por \langle, \rangle tanto al producto de campos $g(\cdot, \cdot)$ como al producto de vectores $g_p(\cdot, \cdot)$.

Definición 1.1.2. *Una variedad semi-riemanniana (M, g) diremos que es riemanniana si el índice de g , $Ind(g)$, es igual a 0 y diremos que es Lorentziana si $Ind(g) = 1$ y $dim M \geq 2$.*

Ejemplo 1.1.1. El espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 + dz^2)$ es el caso más conocido de variedad riemanniana.

Por otro lado, \mathbb{R}^4 con la métrica $g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ es un ejemplo de variedad Lorentziana, conocida como *espacio de Minkowski*.

Definición 1.1.3. *Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ es*

- espacial si $\langle X, X \rangle > 0$ o $X = 0$.
- nulo o isótropo si $\langle X, X \rangle = 0$ y $X \neq 0$.
- temporal si $\langle X, X \rangle < 0$.

El conjunto de todos los vectores nulos en T_pM es llamado como nulo. En el caso de una variedad lorentziana a estos vectores se les llama también lumínicos.

Definición 1.1.4. Si M es una variedad lorentziana, una orientación en el tiempo en $p \in M$ es una elección para uno de los dos conos de luz en T_pM , cada uno de ellos formado por todos aquellos vectores $u, v \in T_pM$ que verifican la relación de equivalencia $\langle u, v \rangle < 0$. A la clase de equivalencia elegida se le llama como futuro y a la no elegida como pasado. Si se puede llevar a cabo una elección de orientaciones temporales en todo $p \in M$ que sea diferenciable, diremos que M es orientable en el tiempo.

Proposición 1.1.1. Una variedad lorentziana es orientable en el tiempo si y solo si admite un campo vectorial temporal global.

Definición 1.1.5. Una variedad espacio-tiempo (M, g) es una variedad lorentziana cuatridimensional, conexa y orientada en el tiempo. A los puntos de M se les denomina eventos y los observadores se representan por curvas temporales (esto es con campo de velocidades temporal).

Consideremos ahora la aplicación $q(X) = g(X, X)$ con $X \in \mathfrak{X}(M)$. En cada punto p de M , q da la forma cuadrática asociada a la métrica en T_pM , luego q determina el tensor métrico mediante la fórmula $g(X, Y) = \frac{1}{2}(q(X + Y) - q(X) - q(Y))$. Clásicamente q es llamado elemento de línea de M y denotado por ds^2 . En coordenadas locales $\{x^1, \dots, x^n\}$, $q = ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$.

Señalemos que dado que la métrica semi-riemanniana es no degenerada, el morfismo

de polaridad asociado a la métrica g establece un isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos

$$\begin{aligned} p_g : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Lambda^1(M) \\ X &\longmapsto p_g(X) = g(X, \cdot) = i_X g \end{aligned}$$

En coordenadas locales $\{x^1, \dots, x^n\}$ si $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ e $Y = Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}$, entonces $p_g(X)(Y) = g(X, Y) = g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$, luego la 1-forma $\omega = p_g(X)$ tiene componentes $\omega_\beta = g_{\alpha\beta} X^\alpha$. Su inversa $p_g^{-1}(\omega) = X$ tiene componentes $X^\alpha = g^{\alpha\beta} \omega_\beta$.

Este isomorfismo extiende a campos tensoriales de cualquier orden pues dado $T \in T_q^p(M)$ podemos asociarle el tensor $\downarrow_a^b T \in T_{q+1}^{p-1}(M)$ definido por

$$\downarrow_a^b T(\omega^1, \dots, \omega^{p-1}, X_1, \dots, X_{q+1}) = T(\omega^1, \dots, p_g(\overset{a}{X}_b), \dots, \omega^{p-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{q+1})$$

cuya inversa \uparrow_b^a consiste en extraer la a -ésima 1-forma e insertar $p_g^{-1}(\omega^a)$ en la posición b -ésima de los campos vectoriales. Si $T \in T_q^p(M)$ tiene componentes $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, entonces

$$(\downarrow_a^b T)_{j_1 \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = g_{i_b i_a} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad (\uparrow_b^a T)_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p+1}} = g^{i_b i_a} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad (1.1)$$

Una vez visto esto, podemos definir la contracción métrica de 2 índices como la composición de estos isomorfismos con la contracción habitual de índices, de tal manera que dado $T \in T_q^p(M)$ podemos asociarle los campos tensoriales $C_{ab}T \in T_{q-2}^p(M)$ y $C^{ab}T \in T_q^{p-2}(M)$ cuyas componentes son

$$(C_{ab}T)_{j_1 \dots j_{p-2}}^{i_1 \dots i_q} = g^{\alpha\beta} T_{j_1 \dots \overset{\alpha}{j_p} \dots \overset{\beta}{j_{p-2}} \dots j_q}^{i_1 \dots i_q} \quad (C^{ab}T)_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_{q-2}} = g_{\alpha\beta} T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots \overset{\alpha}{j_{q-2}} \dots \overset{\beta}{j_{q-2}} \dots i_q} \quad (1.2)$$

Observación 1.1.1. Fijado un tensor $T \in T_q^p(M)$, nos referiremos a todos aquellos tensores que se obtienen por composición de los isomorfismos anteriores, como tensores métricamente equivalentes a T . En la notación abstracta de índices o notación tensorial, los índices son usados no solo para denotar las componentes de un tensor sino también el tipo de tensor, de tal forma que el tensor T pasa a escribirse $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$ y se distingue de

todos sus tensores métricamente equivalentes por la posición de los índices.

Dado un abierto U de M siempre podemos encontrar campos vectoriales $\{E_1, \dots, E_n\}$ que generen el fibrado tangente TU , es decir, tales que $\{(E_1)_p, \dots, (E_n)_p\}$ es una base del espacio vectorial T_pU para todo $p \in U$. Diremos que esta base es *ortonormal* si se verifica que $g(E_i, E_i) = 1$ para $1 \leq i \leq n - \text{Ind}(g)$, $g(E_i, E_i) = -1$ para $n - \text{Ind}(g) + 1 \leq i \leq n$ y $g(E_i, E_j) = 0$ para $i \neq j$. Para cada base de campos vectoriales $\{E_i\}$ tenemos, vía la polaridad, su base dual, $\{\omega^i = i_g E_i\}$.

Si la variedad riemanniana (M, g) es orientable, existe un único elemento de volumen $\Omega_g \in \Lambda^n(M)$, denominado semi-riemanniano, caracterizado por el hecho de que para cualquier base ortonormal local de campos vectoriales $\{U_1, \dots, U_n\}$ se tiene que $\Omega_g(U_1, \dots, U_n) = \pm 1$. En coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$ se escribe $\Omega_g = \sqrt{\det(g)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Definición 1.1.6. Si $i : P \hookrightarrow M$ es una subvariedad de la variedad semi-riemanniana (M, g) y el pull-back $i^*(g)$ es un tensor métrico en P , entonces diremos que P es una subvariedad semi-riemanniana de M .

Definición 1.1.7. Sean $(M, g_M), (N, g_N)$ variedades semi-riemannianas y $\phi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Diremos que ϕ es una isometría si preserva los tensores métricos, es decir, $\phi^*(g_N) = g_M$. En ese caso diremos que M y N son isométricas.

Un objeto preservado en algún sentido por cualquier isometría es denominado invariante isométrico.

1.2. Conexiones lineales. Conexión de Levi-Civita

El objetivo de esta sección es ver como, dados 2 campos vectoriales en una variedad semi-riemanniana, podemos definir de forma natural un tercer campo cuyo valor en cada punto es la tasa de cambio del segundo con respecto al primero. Esta noción de cambio vendrá dada por lo que denominaremos una conexión.

Sea M una variedad diferenciable n-dimensional arbitraria

Definición 1.2.1. Una conexión lineal (afín) en M es una aplicación

$$\begin{aligned}\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

tal que el campo $\nabla_X Y$, denominado derivada covariante de X con respecto a Y , verifica:

1. $\nabla_X Y$ es $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal en X .
2. $\nabla_X Y$ es \mathbb{R} -lineal en Y .
3. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y un abierto $U \subseteq X$, la restricción $(\nabla_X Y)|_U$ solo depende de $X|_U$ y de $Y|_U$ por lo que ∇ define una conexión lineal en U que denotamos de igual manera. Si U está coordinado por $\{x^1, \dots, x^n\}$, cualquier campo puede escribirse en función de la base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$, en particular

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.3)$$

A estas n^2 funciones $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \in C^\infty(U)$, se les llama *símbolos de Christoffel* de la conexión respecto del sistema de coordenadas empleado.

Si $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ e $Y = Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}$ son campos vectoriales en el abierto U se tiene que

$$\nabla_X Y = (X(Y^\mu) + X^\alpha Y^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.4)$$

Dado un punto $p \in U$ la expresión anterior muestra que el vector $(\nabla_X Y)_p$ solo depende de X_p y del valor de Y a lo largo de una curva diferenciable arbitraria que pase por p con velocidad X_p .

Dada una curva parametrizada diferenciable $\gamma : I \rightarrow M$ un caso particular de campos son aquellos con soporte la curva γ y que forman un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo que denotaremos por $\mathfrak{X}(\gamma(t))$. La tasa con la que varía un campo V a lo largo de la curva viene determinada por el operador de derivación covariante a lo largo de γ que asocia a V el campo $\nabla_\gamma V \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$

donde $\dot{\gamma} = \gamma_{*,t}(\frac{d}{dt}) \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$ es el campo velocidad de la curva.

En coordenadas locales la derivada covariante del campo $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ a lo largo de γ es

$$\nabla_{\dot{\gamma}} V = \frac{dV^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + V^\mu \nabla_{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{dV^\alpha}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d(x^\alpha \circ \gamma)}{dt} V^\beta \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.5)$$

Si $\nabla_{\dot{\gamma}} V = 0$ diremos que V es paralelo a lo largo de γ . Si $V = \dot{\gamma}$, diremos que $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ es el campo aceleración de la curva γ .

Proposición 1.2.1. *Dada una curva $\gamma : I \rightarrow M$, $t_0 \in I$ y $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe un único campo V paralelo sobre γ tal que $V(t_0) = v$. A este campo se le llama transporte paralelo de v a lo largo de γ . La aplicación transporte paralelo de $T_{\gamma(t_0)}M$ en $T_{\gamma(t_1)}M$ es una isometría lineal.*

Definición 1.2.2. *Dada una conexión ∇ en M , se llama torsión de dicha conexión a la aplicación $Tor_\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida para todo $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ por $Tor_\nabla(X_1, X_2) = \nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1 - [X_1, X_2]$.*

Definición 1.2.3. *Una conexión lineal ∇ se dice simétrica si no tiene torsión, $Tor_\nabla = 0$*

Definición 1.2.4. *Se define el endomorfismo curvatura asociado a una conexión lineal ∇ como la aplicación*

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \text{End}_{C^\infty(M)} \mathfrak{X}(M) = T_1^1(M) \\ (X_1, X_2) &\longrightarrow R_{(X_1, X_2)} := \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} - \nabla_{[X_1, X_2]} \end{aligned}$$

y denominamos tensor de curvatura de ∇ al campo tensorial $R \in T_1^3(M)$ definido por

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M)^3 &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X_1, X_2, X_3) &\longrightarrow R(X_1, X_2)X_3 := R_{(X_1, X_2)}(X_3) \end{aligned}$$

Tanto la aplicación torsión como el endomorfismo de curvatura son $C^\infty(M)$ -lineales en cada factor y antisimétricos. Además si ∇ no tiene torsión, el tensor de curvatura verifica

la denominada primera identidad de Bianchi

$$R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_3)X_1 + R(X_3, X_1)X_2 = 0 \quad \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M) \quad (1.6)$$

En un carta local con coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$ el tensor de curvatura verifica

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\mu} = R_{\alpha\beta\mu}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left[\frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^\nu}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^\nu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\nu - \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu \right] \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (1.7)$$

Dada una conexión lineal ∇ en la variedad diferenciable M , el operador de derivación covariante se extiende a los $C^\infty(M)$ -módulos de los campos tensoriales de tipo (r,s) diferenciables $T_r^s(M)$ de la variedad M mediante

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times T_r^s(M) &\longrightarrow T_r^s(M) \\ (X, T_r^s) &\longrightarrow \nabla_X T_r^s \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} [\nabla_X T_r^s](X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s) &= X [T_r^s(X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s)] - \\ &- \sum_{i=1}^r T_r^s(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s) - \sum_{j=1}^s T_r^s(X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \nabla_X \omega_j, \dots, \omega_s) \end{aligned}$$

y definimos $\nabla_X \omega$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ como $(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$.

Es también habitual encontrar el operador de derivación covariante como la aplicación

$$\nabla : T_r^s(M) \longrightarrow T_{r+1}^s(M)$$

donde $(\nabla T_r^s)(X, X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s) := (\nabla_X T_r^s)(X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s)$

En particular, si $f \in C^\infty(M)$ se verifica que $\nabla f = df$.

Proposición 1.2.2 (Segunda identidad de Bianchi). *El endomorfismo de curvatura ve-*

rifica para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_X R_{(Y,Z)} + \nabla_Y R_{(Z,X)} + \nabla_Z R_{(X,Y)} = 0 \quad (1.8)$$

Observación 1.2.1. En notación tensorial si $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \in T_q^p(M)$, denotamos su derivada direccional en la dirección del campo $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ por $T_{j_1 \dots j_q, \mu}^{i_1 \dots i_p}$ y su derivada covariante por $\nabla_\mu T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ o por $T_{j_1 \dots j_q; \mu}^{i_1 \dots i_p}$.

1.2.1. Conexión de Levi-Civita

Hasta ahora estábamos considerando conexiones lineales únicamente en una variedad diferenciable M arbitraria, sin embargo, si dotamos a M de una métrica semi-riemanniana, g , entonces podemos dotarla también de una conexión particular. El siguiente teorema es uno de los resultados más trascendentes de la geometría semi-riemanniana.

Teorema 1.2.1. *Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana. Existe una única conexión lineal ∇ en M que cumple:*

1. *La conexión ∇ es simétrica, esto es, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.*
2. *La conexión es compatible con la métrica, esto es, $\nabla g = 0$ o equivalentemente $X[\langle X_1, X_2 \rangle] = \langle \nabla_X X_1, X_2 \rangle + \langle X_1, \nabla_X X_2 \rangle \quad \forall X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$*

Dicha conexión ∇ se denomina conexión de Levi-Civita asociada a (M, g) y viene caracterizada por la fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{X_1} X_2, X_3 \rangle &= \langle \nabla_{X_1} X_2 + X_2, X_3 \rangle + \langle \nabla_{X_2} X_3, X_1 \rangle - \langle \nabla_{X_3} X_1, X_2 \rangle \\ &\quad - \langle X_1, [X_2, X_3] \rangle + \langle X_2, [X_3, X_1] \rangle + \langle X_3, [X_1, X_2] \rangle \end{aligned} \quad (1.9)$$

Si U es un abierto de M con coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$, la fórmula de Koszul permite demostrar que los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita vienen dados por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\mu} g^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) \quad (1.10)$$

Si $\Omega_g \in \Lambda^n(M)$ es el elemento de volumen semi-riemanniano de la variedad, entonces $\nabla \Omega_g = 0$. Además, se cumple la siguiente igualdad: $\nabla_X p_g(Y) = p_g(\nabla_X Y)$.

1.3. Geodésicas

La geodésica es uno de los conceptos fundamentales de la geometría semi-riemanniana así como de la Relatividad General.

Definición 1.3.1. *Una curva diferenciable parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica si su campo de velocidades es paralelo, o equivalentemente si su campo de aceleración es nulo.*

De la definición se sigue que si γ es una geodésica, $\|\dot{\gamma}\| = cte$ pues por la compatibilidad de la conexión con la métrica $\frac{d}{dt}\|\dot{\gamma}\|^2 = 2\langle \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$. Además si ϕ es un difeomorfismo, $\gamma \circ \phi$ será geodésica $\Leftrightarrow \phi$ es una función afín.

En un abierto $U \subseteq M$ con coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$ consideremos una curva parametrizada $\gamma(t) = ((x^1 \circ \gamma)(t), \dots, (x^n \circ \gamma)(t)) \equiv (x^1(t), \dots, x^n(t))$, entonces γ será geodésica si y solo si

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2}(t) - \frac{dx^\alpha}{dt}(t) \frac{dx^\beta}{dt}(t) \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(\gamma(t)) = 0 \quad \mu = 1, \dots, n \quad (1.11)$$

Por el teorema de existencia y unicidad de solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales, se deduce que dados $p \in M$ y $v \in T_p M$ existe una única geodésica a la que denotaremos por $\gamma_{(p,v)}$, definida en un entorno abierto maximal del 0, $I_{(p,v)}$, cumpliendo que $\gamma_{(p,v)}(0) = p$ y $\dot{\gamma}_{(p,v)}(0) = v$.

Ejemplo 1.3.1. A) En \mathbb{R}^n con la métrica euclídea las geodésicas son las rectas recorridas con velocidad constante $\gamma_{(p,v)}(t) = vt + p$.

B) En la esfera unidad $S^n(1)$ con la métrica euclídea restringida las geodésicas son los círculos máximos $\gamma_{(p,v)}(t) = p \cos(\|v\|t) + \frac{v}{\|v\|} \text{sen}(\|v\|t)$.

La importancia de las geodésicas radica en que son las curvas de energía mínima que unen dos puntos de cualesquiera de la variedad.

Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana y sea $\mathcal{L} : TM \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Denotemos $\Gamma_{pq} := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M / \gamma \text{ es diferenciable a trozos y } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$. Consideremos el funcional de acción $A : \Gamma_{pq} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$A(\gamma) = \int_0^1 \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \quad (1.12)$$

Vamos a ver a continuación que el problema variacional consistente en encontrar un punto crítico de la acción es equivalente a encontrar una trayectoria solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para dicho lagrangiano. Fijemos coordenadas $\{q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n\}$ en un abierto de TM y consideremos una familia admisible de curvas $\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ de modo que a cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ le asociemos una curva $\gamma_s \in \Gamma_{pq}$. Para encontrar un punto crítico de la acción A tenemos que calcular

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} A[s] = \int_0^1 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\gamma_s, \dot{\gamma}_s) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(\gamma_s, \dot{\gamma}_s) \right] \Big|_{s=0} \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \Big|_{s=0} dt \quad (1.13)$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, n \quad (1.14)$$

Estas son las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano \mathcal{L} .

Es bien conocido que las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange cuando $\mathcal{L}(p, v) = \frac{1}{2}g_p(v, v)$ son las geodésicas. El funcional de acción asociado a este lagrangiano es

$$E[\gamma] = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \quad (1.15)$$

denominado energía (cinética). Como consecuencia las geodésicas son puntos críticos del funcional de la energía. De hecho se puede demostrar que este punto crítico es un mínimo, es decir, las geodésicas minimizan la energía.

Las geodésicas también minimizan la distancia. En efecto, definamos el funcional longitud

$L : \Gamma_{pq} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$L[\gamma] = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (1.16)$$

que asocia a cada curva uniendo p, q su longitud. Por la desigualdad de Schwarz

$$L[\gamma]^2 = \left(\int_0^1 1 \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 dt \right) \left(\int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \right) = 2E[\gamma] \quad (1.17)$$

y se da la igualdad si y solo si $\|\dot{\gamma}\|$ es proporcional a 1, es decir, si γ es una geodésica, de donde se deduce que encontrar un mínimo para el funcional de la energía es equivalente a encontrar un mínimo para el funcional de longitud.

Los puntos críticos de E dan lugar a un flujo $\tau_t^G : TM \rightarrow TM$ llamado *flujo geodésico* y cuyo generador ξ^G viene dado en coordenadas locales $\{q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n\}$ por

$$\xi^G = \dot{q}^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} - \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \circ \pi) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu} \quad (1.18)$$

1.4. Operadores sobre una variedad semi-riemanniana

Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana n -dimensional y ∇ su conexión de Levi-Civita asociada.

Definición 1.4.1. *El gradiente de una función $f \in C^\infty(M)$ es el campo vectorial, $\text{grad } f \in \mathfrak{X}(M)$, métricamente equivalente a la diferencial $df \in \Lambda^1(M)$*

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = df(X) = Xf \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Dado un abierto coordenado por $\{x^1, \dots, x^n\}$, el gradiente puede escribirse

$$\text{grad } f = g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} f \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (1.19)$$

Definición 1.4.2. Se llama *divergencia del campo vectorial* $X \in \mathfrak{X}(M)$ a la función diferenciable

$$\operatorname{div} X := C_1^1(\nabla X)$$

donde $C_1^1 : T_1^1(M) \longrightarrow T_0^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ es el operador de contracción de índices.

Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base de campos vectoriales en un abierto U de la variedad (M, g) , se tiene que

$$\operatorname{div} X = \sum_i \|E_i\|^2 \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \quad (1.20)$$

Si $\{x^1, \dots, x^n\}$ es un sistema de coordenadas en el abierto U entonces

$$\operatorname{div} X = \nabla_\alpha X^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha X^\beta = \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial \sqrt{|\det(g)|}}{\partial x^\alpha} X^\alpha \right) \quad (1.21)$$

Se puede demostrar que la derivada de Lie del elemento de volumen satisface

$$L_X \Omega_g = (\operatorname{div} X) \Omega_g \quad (1.22)$$

Así pues la divergencia del campo X puede considerarse como una medida de la variación del volumen a lo largo de las curvas integrales de X .

La definición de divergencia puede extenderse a los campos tensoriales. Recordemos que $\nabla : T_q^p(M) \longrightarrow T_{p+1}^q(M) \simeq \Lambda^1(M) \otimes T_q^p(M)$. Por otro lado tenemos la aplicación $p_g^{-1} \otimes Id_{T_q^p(M)} : \Lambda^1(M) \otimes T_q^p(M) \simeq T_{q+1}^p(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \otimes T_q^p(M) \simeq T_q^{p+1}(M)$. Componiendo esta aplicación con el operador C_1^1 obtenemos una aplicación de T_{q+1}^p en T_{q-1}^p .

Definición 1.4.3. Llamamos *divergencia del campo tensorial* $T \in T_q^p(M)$, $q \geq 1$, al campo tensorial $\operatorname{div} T \in T_{q-1}^p(M)$ dado por

$$\operatorname{div} T = C_1^1[(p_g^{-1} \otimes Id_{T_q^p(M)})(\nabla T)]$$

En coordenadas locales si $T \in T_q^p(M)$ tiene componentes $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ entonces $(\operatorname{div} T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p-1}} =$

$T_{j_1 \dots j_q; \mu}^{i_1 \dots i_{p-1} \mu}$. De la condición $\nabla g = 0$ se deduce que $\text{div } g = 0$.

Definición 1.4.4. El hessiano de una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es su derivada covariante segunda, $\text{Hess } f := \nabla(\nabla f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$

Definición 1.4.5. El laplaciano de una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, Δf , es la divergencia de su gradiente, $\Delta f := \text{div}(\text{grad } f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

En coordenadas locales

$$\Delta f = \nabla_\alpha(\nabla^\alpha f) = g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \quad (1.23)$$

Definición 1.4.6. Dado un campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$, llamamos rotacional de V a la 2-forma $\text{rot } V := d(p_g(V))$. Equivalentemente, $\text{rot } V(X, Y) = \langle \nabla_X V, Y \rangle - \langle \nabla_Y V, X \rangle$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

La diferencial exterior de Cartan puede definirse en variedades diferenciables de cualquier tipo, sin embargo si nos encontramos en una variedad semi-riemanniana (M, g) esta puede definirse utilizando la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica, de manera que dada $\omega \in \Lambda^k(M)$ su diferencial exterior $d\omega \in \Lambda^{k+1}(M)$ viene descrita por

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} (\nabla_{X_i} \omega)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \quad (1.24)$$

Un conjunto de campos vectoriales de suma importancia son aquellos para los cuales el tensor métrico no cambia bajo el flujo que crean, es decir, son isometrías infinitesimales de la métrica. Estos campos se dominan campos de Killing

Definición 1.4.7. Un campo vectorial $K \in \mathfrak{X}(M)$ es Killing si la derivada de Lie de g por K se anula, esto es, $L_K g = 0$.

Proposición 1.4.1. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $L_K g = 0$.

$$2. K\langle X, Y \rangle = \langle [K, X], Y \rangle + \langle X, [K, Y] \rangle.$$

$$3. \langle \nabla_X K, Y \rangle + \langle \nabla_Y K, X \rangle = 0.$$

Lema 1.4.1. *Sea K un campo Killing en M y γ una geodésica en M . Entonces la función $\langle K, \dot{\gamma} \rangle$ es constante a lo largo de γ .*

Existe una generalización de los campos Killing para tensores de orden $m \geq 1$.

Definición 1.4.8. *Diremos que $K \in T_m(M)$ es un campo tensorial de Killing en M si sus componentes verifican que*

$$\nabla_\alpha K_{\beta_1 \dots \beta_m} + \nabla_{\beta_m} K_{\alpha \beta_1 \dots \beta_{m-1}} + \dots + \nabla_{\beta_1} K_{\beta_2 \dots \beta_m \alpha} = 0 \quad (1.25)$$

1.5. Curvatura en variedades semi-riemannianas

Gauss demostró con su famoso teorema egregio que la curvatura de Gauss de una superficie era un invariante isométrico de la propia superficie. Ello motivó a Riemann a generalizar la noción de curvatura a variedades riemannianas. Posteriormente sus resultados fueron generalizados a variedades semi-riemannianas.

Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita asociada.

Definición 1.5.1. *Se llama tensor de curvatura de Riemann de (M, g) al campo tensorial $R \in T_4(M)$ definido por:*

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) := \langle R(X_1, X_2)X_3, X_4 \rangle = \langle \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 + \nabla_{[X_1, X_2]} X_3, X_4 \rangle$$

Dicho tensor satisface :

1. $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_2, X_1, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_4, X_3) = R(X_3, X_4, X_1, X_2)$.
2. $R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_2, X_3, X_1, X_4) + R(X_3, X_1, X_2, X_4) = 0$.

Estas relaciones reducen el número de componentes independientes a $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ que vienen determinadas por la expresión

$$R_{\alpha\beta\gamma\mu} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\nu} g_{\nu\mu} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\nu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^{\nu} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu} \right) g_{\nu\mu} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} \right) \quad (1.26)$$

Veamos ahora como se generaliza la noción de curvatura seccional de una superficie a cualquier variedad semi-riemanniana. Consideremos un plano Π en el espacio tangente $T_p M$ y para vectores v, w de Π definamos $Q(v, w) = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2$.

Definición 1.5.2. *La curvatura seccional de la variedad M en el punto $p \in M$ es el número real*

$$\kappa(p) = \frac{R(v, w, w, v)}{Q(v, w)}$$

donde u, v es una base del plano $\Pi \subseteq T_p M$ y $\kappa(p)$ es independiente de u y v

Definición 1.5.3. *Sea R el tensor de curvatura, se denomina tensor de Ricci de M al campo tensorial $Ric \in T_2(M)$ definido por $Ric := C_2^1(R)$, donde R es el tensor de curvatura, o equivalentemente $Ric(X, Y) = \text{tr}(R(X, \cdot)Y)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

En coordenadas locales $Ric = R_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^{\mu} dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} = R_{\alpha\mu\beta\nu} g^{\mu\nu} dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}$.

Si tenemos una base de campos vectoriales $\{E_1, \dots, E_n\}$,

$$Ric(X, Y) = \sum_m \|E_m\|^2 R(X, E_m, Y, E_m) \quad (1.27)$$

De aquí se deduce que el tensor de Ricci es simétrico. Si $Ric = 0$, diremos que M es *Ricci plana*. Dado que la curvatura seccional determina el tensor de curvatura, también determina el tensor de Ricci. Además si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal de $T_p M$ con $u_1 = u$, entonces $Ric(u, u) = \langle u, u \rangle \sum_m \kappa(u, u_m)$. Es decir $Ric(u, u)$ es, salvo por el signo $\langle u, u \rangle = \pm 1$, la suma de las curvaturas seccionales de $n - 1$ planos ortogonales que contienen a u .

Definición 1.5.4. *La curvatura escalar S de M es la función $S = C_{12}(Ric) \in C^{\infty}(M)$*

En coordenadas locales $S = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu}^{\mu}$. Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una referencia de campos vectoriales

$$S = \sum_{i \neq j} \frac{Ric(E_i, E_j)}{\langle E_i, E_j \rangle} = \sum_{i \neq j} R(E_i, E_j, E_i, E_j) = 2 \sum_{i < j} \kappa(E_i, E_j) \quad (1.28)$$

La siguiente consecuencia de la segunda identidad de Bianchi es crucial en los fundamentos de la teoría de la Relatividad

Proposición 1.5.1. $dS = 2 \operatorname{div}(Ric)$.

Observación 1.5.1. Todos los tensores relacionados con la curvatura son métricamente equivalentes, y es por ello que en notación indicial todos se denotan por R . Entonces el tensor de Riemann es $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, el tensor de curvatura es $R_{\alpha\beta\mu}^{\nu}$, el tensor de Ricci es $R_{\alpha\beta}$ y la curvatura escalar es simplemente R .

Capítulo 2

Conocimientos previos de física.

Relatividad General

2.1. Gravitación newtoniana

La física newtoniana es indispensable en lo que se refiere a la modelización de los fenómenos físicos que nos rodean. Aquí la gravedad viene descrita por una función escalar ϕ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , denominada potencial gravitatorio. A $\text{grad } \phi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ se le llama campo gravitatorio y a la fuerza que este campo vectorial ejerce sobre una masa m se denomina fuerza gravitatoria $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ y viene descrita por la ecuación

$$F = -m \text{grad } \phi \tag{2.1}$$

Determinar la trayectoria de la masa m debida al potencial gravitatorio ϕ equivale a resolver la ecuación de Newton $F = m a$ para la fuerza gravitatoria descrita por (2.1).

El potencial gravitatorio ϕ está determinado por la densidad de masa, ρ , que crea el campo gravitatorio según la ecuación de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (2.2)$$

donde G es la constante de gravitación universal.

Ejemplo 2.1.1. El problema de Kepler. Es un caso particular del problema de 2 cuerpos y el ejemplo paradigmático de la gravitación newtoniana.

Queremos describir las trayectorias de dos masas m_1 (masa del sol) y m_2 (masa de un planeta) que interactúan entre sí debido al potencial gravitatorio

$$\phi(t) = \frac{-Gm_1m_2}{\|x_1(t) - x_2(t)\|} \quad (2.3)$$

donde $x_1(t)$ es la posición de m_1 y $x_2(t)$ la posición de m_2 . La ecuación de Newton para este potencial viene descrita por el sistema hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(m_1\|x_1\|^2 + m_2\|x_2\|^2) + \phi \quad (2.4)$$

Llamemos ahora $M = m_1 + m_2$ a la partícula situada en el centro de masas y $m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ a la partícula (relativa) situada en $x = x_2 - x_1$. Dado que $M \gg m$, la trayectoria de un planeta alrededor del sol es aproximadamente la trayectoria de m , cuyo hamiltoniano en coordenadas polares viene dado por

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} \quad (2.5)$$

Dado que el momento angular $L = mr^2\dot{\theta}$ es una integral primera del sistema, despejando θ en función de r obtenemos el sistema unidimensional equivalente

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} := \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{ef}(r) \quad (2.6)$$

Este sistema ya es resoluble por cuadraturas pudiendo así obtener una parametrización $x(t) = (r(t), \theta(t))$ de la trayectoria de m . Sin embargo, nuestro interés radica en el tipo de

trayectoria descrita (que dependerá del valor de E), para hallarla hacemos la sustitución

$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ en la ecuación de la energía obteniendo

$$E = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \frac{L^2}{2mr^4} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (2.7)$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ se reescribe

$$E = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \frac{L^2}{2m} + \frac{L^2 u^2}{2m} - GMmu \quad (2.8)$$

Derivando respecto del ángulo θ resulta

$$0 = \frac{du}{d\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{L^2}{m} + \frac{du}{d\theta} \frac{L^2 u}{m} - \frac{du}{d\theta} GMm \quad (2.9)$$

Suponiendo ahora que no se tratan de trayectorias circulares y que el momento angular no se anula, dividiendo por $L^2 \frac{du}{d\theta}$ se obtiene la denominada ecuación de Binet

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} \quad (2.10)$$

que es una ecuación lineal de segundo orden con solución analítica

$$u = \frac{1}{p}(1 - \epsilon \cos(\theta - \theta_0)) \quad (2.11)$$

donde $\epsilon^2 = 1 - \left(\frac{GMm^2}{L}\right)^2$, $p = \frac{L^2}{GMm^2}$ y θ_0 depende de las condiciones iniciales. Desahaciendo el cambio de variable y tomando $\theta_0 = 0$ resulta la ecuación de la órbita solución

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \theta} \quad (2.12)$$

que será una circunferencia si $\epsilon = 0$ ($E = \min V_{ef}$), una elipse si $\epsilon < 1$ ($\min V_{ef} < E < 0$), una parábola si $\epsilon = 1$ ($E = 0$) o una hipérbola si $\epsilon > 1$ ($E > 0$).

Ejemplo 2.1.2. Momentos multipolares. Supongamos que tenemos una distribución

de masa no puntual con densidad ρ y queremos hallar el campo gravitatorio en un punto $x \in \mathbb{R}^3$. Entonces

$$\phi(x) = \int_V \frac{1}{R} \rho(y) dy \quad (2.13)$$

donde V es el volumen de la masa que genera el campo y $R = \|x - y\|$. Entonces si la distribución de masa tiene simetría axial se cumple que

$$\phi(x) = -G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (2.14)$$

donde $r = \|x\|$, θ es la coordenada esférica horizontal de x , P_n es el polinomio de Lebesgue n -ésimo y $D_n = 2\pi \int \int \|y\|^{n+2} \rho(y, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta dy$.

Llamamos momento multipolar 2^n -ésimo al término $(n+1)$ -ésimo del desarrollo en serie anterior. Los momentos multipolares determinan la deformación de un objeto con respecto a la simetría esférica. Observemos que si el objeto es completamente esférico la serie se trunca en $n = 0$ obteniendo $\phi = -\frac{GD_0}{r}$ que es el potencial gravitatorio de Newton.

2.2. Relatividad General

En 1905 Einstein, apoyado en los trabajos de Lorentz, Poincaré, Minkowski y otros, introdujo la teoría de la relatividad especial cuya esencia matemática consistía en una novedosa forma de modificar las coordenadas espaciales y temporales juntando el espacio, \mathbb{R}^3 , y el tiempo, \mathbb{R} , en una única variedad \mathbb{R}^{1+3} , llamada espacio de Minkowski. Por desgracia esta teoría no tenía forma de englobar la gravitación. En los años posteriores a 1905, Einstein llegó a estar convencido de que la gravedad podía ser expresada en términos de la curvatura. Finalmente, en 1915 encontró una forma de hacerlo dando lugar a la Teoría de la Relatividad donde el espacio plano de Minkowski daba paso a variedades Lorentzianas 4-dimensionales con curvatura.

2.2.1. La ecuación de campo de Einstein

En la física newtoniana la única fuente de gravitación es la materia. En Relatividad, la gravedad emana del tensor de energía-impulso (o energía-momento) T de la materia, una cantidad tensorial que describe el flujo lineal de energía y de momento lineal. No existe una receta general para construir este tensor T , pero sí hay ciertas reglas: T es un tensor $(0,2)$, la densidad de energía en un punto p es $T(p,p) \geq 0$ y finalmente, por la conservación de la energía-momento, $div T = 0$. Veremos más adelante que este tensor suele venir dado (en forma canónica) por la expresión (2.55).

Einstein quería una relación entre este tensor, fuente de la gravitación, y la curvatura, así que propuso la fórmula $G = kT$ donde G es alguna variante de la curvatura de Ricci y k una constante. Ahora bien como $div T$ es nula esto significa que $div G = 0$, pero sabemos que $div Ric = \frac{1}{2}dS$, con lo que restar este término a G produce un buen resultado.

Definición 2.2.1. Sea (M, g) una variedad espacio-tiempo con tensor de energía impulso T . Llamamos tensor gravitacional de Einstein a

$$G = Ric - \frac{1}{2}Sg \quad (2.15)$$

y llamamos ecuación de campo de Einstein al sistema

$$G = 8\pi T \quad (2.16)$$

A grandes rasgos la ecuación $G = 4\pi T$ nos dice cómo la materia curva el espacio y la ecuación $div T = 0$ nos dice cómo el espacio mueve esta materia. Resolver la ecuación de campo Einstein equivale a encontrar una métrica g cuya curvatura satisfaga dicho sistema. Existen múltiples soluciones para las ecuaciones de Einstein, en este texto nos centraremos en las soluciones de vacío, aquellas para las cuales $T = 0$ y por tanto M es Ricci plana.

2.2.2. Soluciones de vacío

Habitualmente nuestro interés se centra tanto en el estudio del campo gravitatorio exterior a una fuente como en el estudio de las trayectorias de las partículas debidas a la acción de dicho campo. En los puntos exteriores a la fuente no tenemos materia, razón por la cual el tensor de energía-impulso se anula. A pesar de esta simplificación las ecuaciones de Einstein siguen siendo demasiado complejas y es por ello que se suelen llevar a cabo suposiciones que rebajen su dificultad. Lo más habitual es suponer que la fuente del campo gravitatorio tiene simetría axial y temporal. De esta forma tenemos dos campos Killing que ayudan a la integración. En coordenadas esféricas $\{t, r, \theta, \phi\}$ estos son $\tau = \partial_t$ (Killing temporal) y $\xi = \partial_\phi$ (Killing axial).

Ejemplo 2.2.1. La métrica de Schwarzschild. Fue la primera solución de las ecuaciones de Einstein que apareció y describe el campo gravitatorio producido por un objeto estático con simetría esférica. En coordenadas esféricas viene dada por el elemento de línea

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (2.17)$$

Ejemplo 2.2.2. La métrica de Kerr. Describe un espacio-tiempo estacionario con la aparición de un parámetro a que representa la razón entre el momento angular y la masa de la fuente. Es una generalización de la métrica de Schwarzschild para una fuente en rotación y viene dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right)dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \sin^2\theta\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\Sigma}\right)d\phi^2 - \frac{4mr}{\Sigma}a\sin^2\theta dt d\phi \quad (2.18)$$

donde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$, $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$.

Ejemplo 2.2.3. La familia de métricas de Weyl. Vienen dadas, en coordenadas cilíndricas, por el elemento de línea

$$ds^2 = -e^{2\psi}dt^2 + e^{2(\gamma-\psi)}(d\rho^2 + dz^2) + e^{-\psi}\rho^2d\phi^2$$

donde $\psi(\rho, z)$ y $\gamma(\rho, z)$ son dos potenciales métricos verificando ciertas condiciones.

En la física newtoniana hallar la trayectoria de una partícula bajo la acción de un campo gravitatorio era equivalente a resolver la ecuación de Newton para dicha fuerza gravitatoria. En relatividad la ecuación de Newton se transforma en la ecuación de las geodésicas al suprimir el término de la fuerza gravitatoria y considerar que este solo afecta a la geometría de la variedad.

En el siguiente ejemplo se calculan las geodésicas correspondientes a la métrica de Schwarzschild, es decir, las trayectorias relativistas debidas al campo gravitatorio generado por un objeto estático con simetría esférica.

Ejemplo 2.2.4. Geodésicas para la métrica de Schwarzschild. Las coordenadas esféricas de Schwarzschild $\{x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi\}$ son ortogonales, luego la ecuación de las geodésicas (1.11) resulta

$$\frac{d}{ds} \left[g_{ii} \left(\frac{dx^i}{ds} \right) \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} \left(\frac{dx^j}{ds} \right) \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

donde $g_{00} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) := -h$, $g_{11} = h^{-1}$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$. Simplificando las ecuaciones para $i = 1, 2, 3$ queda

$$i = 1 \quad \frac{d}{ds}(ht) = 0 \Rightarrow ht = E \quad (2.20)$$

$$i = 2 \quad \frac{d}{ds}(r^2\dot{\theta}) = \frac{1}{2}r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \Rightarrow 2r^2\dot{\theta}(1 - \cos 2\theta\dot{\phi}^2) = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \quad (2.21)$$

$$i = 3 \quad \frac{d}{ds}(r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \Rightarrow r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L \quad (2.22)$$

De las ecuaciones para $i = 1, 3$ se deduce que se conserva la energía E y el momento angular L . De la ecuación $i = 2$ se deduce que las órbitas son planas con lo que, sin pérdida de generalidad, se puede tomar $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Entonces el campo de velocidades de las geodésicas es de la forma, $\dot{\gamma} = \frac{E}{h} \partial_t + \dot{r} \partial_r + \frac{L}{r^2} \partial_\phi$.

Vamos a calcular las geodésicas temporales, es decir, aquellas para las que $\|\dot{\gamma}\|^2 = -1$ y

por tanto, $-1 = (E^2/h^2)(-h) + \dot{r}h^{-1} + (L^2/r^4)r^2$. Despejando obtenemos la ecuación de la energía en función únicamente de r .

$$E^2 = \dot{r}^2 + \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)h(r) = \dot{r}^2 + 1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} \quad (2.23)$$

Haciendo primero la sustitución $\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$ y después el cambio $u = \frac{1}{r}$ la ecuación de la energía pasa a escribirse

$$E^2 = L^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + (1 + L^2 u^2)(1 - 2Mu) \quad (2.24)$$

que puede simplificarse aún más derivando con respecto de ϕ y dividiendo la ecuación resultante por $2\frac{du}{d\phi}$ hasta obtener finalmente

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3Mu^2 = \frac{M}{L^2} \quad (2.25)$$

denominada ecuación de Binet relativista y cuya solución determina las geodésicas de la métrica de Schwarzschild.

Observación 2.2.1. La ecuación de Binet relativista difiere de la ecuación de Binet clásica en el término cuadrático, lo que muestra que las trayectorias que produce un objeto esférico estático en Relatividad no son las mismas que en gravitación newtoniana. Este término cuadrático también hace que la ecuación solo pueda ser resuelta de forma numérica, no obstante, si tomamos $\tilde{u} = \frac{M}{L^2}(1 + \epsilon \cos \phi)$ una solución newtoniana del problema de Kepler la ecuación

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{L^2} + 3M\tilde{u}^2 \quad (2.26)$$

proporciona una solución analítica próxima a la relativista cuya expresión es

$$u = \frac{M}{L^2}(1 + \epsilon \cos \phi) + \frac{3M^3}{L^4} \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^2}{6} \cos 2\phi + \epsilon\phi \sin \phi\right) \quad (2.27)$$

que es una órbita aproximadamente elíptica con un avance angular del perihelio.

2.2.3. Tensor de Weyl

El tensor de Weyl en una variedad semi-riemanniana n -dimensional es una medida de la curvatura que surge con la idea de poder expresar el tensor de curvatura en términos que dependen únicamente de su traza, esto es el tensor de Ricci, más un tensor sin contracciones no triviales. En notación tensorial viene dado por

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{n-2}(R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \quad (2.28)$$

Al igual que el tensor de Riemann, el tensor de Weyl expresa la fuerza de marea que siente un cuerpo cuando se mueve a lo largo de una geodésica, pero este no transmite información sobre el cambio de volumen del cuerpo, sino solo de cómo se deforma. Recordemos que la fuerza de marea es un efecto gravitacional que estira un cuerpo en la dirección de la fuente del campo gravitatorio debido a la diferencia de fuerza a lo largo de su diámetro.

El tensor de Weyl es el tensor de Riemann sin traza y es por ello que posee sus mismas propiedades algebraicas y además verifica que $C^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = 0$.

Para $n = 2, 3$ el tensor de Weyl es idénticamente cero y para $n \geq 4$ nunca lo es si el tensor de Ricci es nulo, es decir, si $T = 0$. Para este caso el tensor de Riemann y el de Weyl coinciden, por tanto, el tensor de Weyl describe completamente la curvatura debida a las soluciones de vacío.

2.3. Electromagnetismo

A pesar de la simplicidad de la teoría del electromagnetismo, sus aplicaciones son casi infinitas. Como en este trabajo solo necesitamos la teoría como base, tan solo trataremos en esta sección los conceptos básicos.

Sea M una variedad espacio-tiempo. Formalmente una densidad de carga-corriente (o cuadricorriente) en M no es más que un campo vectorial $J \in \mathfrak{X}(M)$, pero históricamente hablando, J reemplaza y unifica dos conceptos básicos: la carga eléctrica por unidad de volumen y la densidad de corriente eléctrica. En analogía con el tensor energía-impulso, fuente de la gravitación, el campo J puede entenderse como una fuente de electromagnetismo.

Un campo magnético en M será una 2-forma $F \in \Lambda^2(M)$. Esta definición reemplaza y engloba las definiciones clásicas de campos eléctrico y magnético. De esta forma dados un campo eléctrico $E = (E_x, E_y, E_z) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ y un campo magnético $B = (B_x, B_y, B_z) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, su campo electromagnético asociado viene dado por el tensor de Faraday

$$F = E_x dt \wedge dx + E_y dt \wedge dy + E_z dt \wedge dz - B_z dx \wedge dy + B_y dx \wedge dz - B_x dy \wedge dz \quad (2.29)$$

Dado un campo electromagnético F podemos asociarle el tensor energía impulso $T \in T_2(M)$ cuyas componentes son

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} [F_{\alpha\mu} F_{\beta}^{\mu} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \quad (2.30)$$

El tensor de Faraday suele venir dado a partir de un potencial gauge $A \in \Lambda^1(M)$ de forma que $F = dA$.

El culmen de la teoría del electromagnetismo son las ecuaciones de Maxwell que describen completamente las propiedades de los campos electromagnéticos. Diremos que J es la fuente de un campo electromagnético F si verifica

$$dF = 0 \quad (2.31)$$

$$div \uparrow_1^1 F = 4\pi J \quad (2.32)$$

denominadas ecuaciones de Maxwell. Si nos encontramos en el vacío sin carga ni corriente, esto es, $J = 0$, entonces las ecuaciones de Maxwell pasan a escribirse, en notación tensorial,

$$F_{\alpha\beta;\gamma} - F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0 \quad F_{\alpha;\mu}^{\mu} = 0 \quad (2.33)$$

2.4. Agujeros negros

La formación de un agujero negro se produce cuando la materia colapsa a dimensiones tan pequeñas que el campo gravitatorio atrapa cualquier cosa dentro de una cierta región. Esta región está delimitada por el denominado *horizonte de sucesos*, una superficie tridimensional en M que separa los eventos que pueden comunicarse con observadores lejanos y los eventos que no. Para saber si un evento comunica con un observador lejano se comprueba si este puede enviar rayos de luz (fotones) arbitrariamente lejos. Girando alrededor de los agujeros negros suele haber una estructura en forma de disco, compuesta de gas y polvo, denominada *disco de acreción*.

Ejemplo 2.4.1. Agujero negro de Schwarzschild. Observando la expresión de la métrica de Schwarzschild (2.17), vemos que esta presenta singularidades en $r = 0$ y $r = 2m$. Un agujero negro de Schwarzschild viene dado por una esfera estática de radio $2m$ (radio de Schwarzschild). Es por ello que cuanto mayor es la masa del agujero negro mayor es el radio del horizonte de sucesos.

Consideremos ahora una partícula que se mueve en caída libre (trayectoria geodésica) en un entorno del agujero negro. De la ecuación (2.23) se sigue que

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = E^2 - 1 + \frac{2m}{r} \quad (2.34)$$

cuando se mueve radialmente, pues $L = 0$. Como consecuencia

$$\Delta s = - \int_R^{2m} \frac{dr}{\sqrt{E^2 - 1 + 2M/r}} \quad (2.35)$$

Como la integral es finita independientemente de si E^2 es mayor, menor o igual que 1, la partícula alcanza el horizonte de sucesos en tiempo propio finito.

¿Pero qué le ocurre a la partícula cuando $r = 2m$? Si calculamos el tensor de curvatura, vemos que sus componentes son finitas así que podemos concluir que la partícula seguirá cayendo. Para $r < 2m$, si t, θ, ϕ son constantes, entonces $ds^2 < 0$ y como consecuencia r disminuirá hasta alcanzar $r = 0$ donde hay una auténtica singularidad de curvatura.

¿Y qué ocurre si la partícula dentro de $r = 2m$ intenta mandar un fotón a un observador fuera de $R = 2m$? Este fotón independientemente de su trayectoria debe avanzar en el tiempo lo que se significa que debe disminuir r . Como consecuencia ni siquiera la luz puede salir de la superficie $r = 2m$.

Ejemplo 2.4.2. Agujero negro de Kerr. Se forma cuando un objeto masivo, axial simétrico y en rotación tiene un radio inferior a cierta magnitud (radio de Kerr). El horizonte de sucesos viene descrito (con las notaciones de (2.18)) por la superficie $\Delta = 0$ que da lugar a dos esferas cuyo radio llamamos radio de Kerr. La métrica de Kerr presenta otra singularidad en $\Sigma = 0$ dando lugar a 2 superficies denominadas *ergoesferas*.

2.4.1. Perturbaciones debidas a un campo escalar alrededor de un agujero negro

Cuando tratamos con interacciones en agujeros negros generalmente consideramos su campo gravitatorio, descrito por g , y un campo no gravitatorio, Φ , producido por una fuente J (por ejemplo, Φ podría ser el tensor de Faraday y J la cuadricorriente) que perturba la métrica g . Dado que la masa de las partículas elementales puede ser medida tan solo con medir su aceleración gravitatoria Gm/r^2 , se puede concluir que la constante gravitatoria G podría estar relacionada con el valor medio de un campo escalar Φ . La ecuación más simple para describir dicho campo escalar sería la ecuación de ondas

$$\Delta_\mu \Phi = 4\pi \lambda T_{M\mu}^\mu \quad (2.36)$$

donde Δ_μ es el laplaciano, $T_M^{\mu\nu}$ es el tensor energía-impulso de la materia y λ es una constante adimensional. En este caso en la ecuación de campo para la relatividad se reemplazaría G por $\frac{1}{\Phi}$ y se incluiría un tensor energía-impulso $T_\Phi^{\mu\nu}$ generado por Φ , resultando la ecuación de campo perturbada

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\frac{8\pi}{\Phi}[T_M^{\mu\nu} + T_\Phi^{\mu\nu}] \quad (2.37)$$

La aparición de campos escalares en la ecuación de Einstein viene motivada por la necesidad de construir teorías alternativas a la gravitación relativista. Si la existencia de estos campos escalares en el entorno de un agujero negro dieran lugar a un espacio-tiempo diferente que el predicho por la relatividad, este fenómeno debería poder ser detectado en las observaciones astrofísicas. Por otro lado, uno podría estar interesado únicamente en la detección de campos escalares, para lo cual los agujeros negros actuarían como el escenario ideal. Por último, la teoría de perturbaciones alrededor de un agujero negro es un mecanismo para la generación de ondas gravitacionales, de tal manera que podemos describir y entender la evolución de los campos en el exterior del agujero negro, analizar las ondas salientes y entrantes en el espacio-tiempo de un agujero negro y estudiar la estabilidad del sistema.

2.5. Formalismo 1+3

El formalismo 1+3 consiste en la construcción de una base ortonormal de campos de vectores covariantes y contravariantes en la variedad espacio-tiempo de tal forma que las componentes de cualquier cantidad tensorial puedan escribirse en términos de estos campos. En escenarios de geometría espacio-temporal y relatividad suele darse la existencia de un campo vectorial temporal predilecto, es por ello que primeramente fijaremos un campo unitario, V , y a continuación construiremos los campos totalmente ortogonales a él. Denotaremos por $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + V_\alpha V_\beta$ al tensor que permite proyectar cualquier campo vectorial en el espacio ortogonal a V .

2.5.1. Tétrada

Consideremos coordenadas espacio-temporales esféricas $\{t, r, \theta, \phi\}$. Para este sistema de coordenadas el elemento de línea más general para fuentes estacionarias y con simetría axial viene dado por

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + B^2 dr^2 + C^2 d\theta^2 + R^2 d\phi^2 + 2\omega_3 dt d\phi \quad (2.38)$$

donde A, B, C, R y ω_3 son funciones de r y θ . Es decir, la métrica viene dada por

$$g = \begin{pmatrix} -A(r, \theta)^2 & 0 & 0 & \omega_3(r, \theta) \\ 0 & B(r, \theta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(r, \theta)^2 & 0 \\ \omega_3(r, \theta) & 0 & 0 & R(r, \theta)^2 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora una base ortonormal de campos de vectores (covariantes o contravariantes), V, K, L, S , con respecto de esta métrica cuyas componentes respecto de la base $\{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi\}$ son

$$\begin{aligned} V^\alpha &= \left(\frac{1}{A}, 0, 0, 0\right) & V_\alpha &= \left(-A, 0, 0, \frac{\omega_3}{A}\right) \\ K^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta}} (0, \Delta_1, 0, 0) & K_\alpha &= \left(0, \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}, 0, 0\right) \\ L^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} (0, 0, \Delta_2, 0) & L_\alpha &= \left(0, 0, \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}}, 0\right) \\ S^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}} \left(\frac{\omega_3}{A}, 0, 0, A\right) & S_\alpha &= \left(0, 0, 0, \frac{\sqrt{\Delta_2}}{A}\right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde Δ, Δ_1 y Δ_2 son

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(g) = A^2 B^2 C^2 R^2 + B^2 C^2 \omega_3^2 \\ \Delta_1 &= A^2 C^2 R^2 + C^2 \omega_3^2, \quad \Delta_2 = A^2 R^2 + \omega_3^2 \end{aligned}$$

Entonces se verifica que

$$\begin{aligned} -V_\alpha V^\alpha &= K_\alpha K^\alpha = L_\alpha L^\alpha = S_\alpha S^\alpha = 1 \\ V_\alpha K^\alpha &= V_\alpha L^\alpha = V_\alpha S^\alpha = K_\alpha L^\alpha = K_\alpha S^\alpha = L_\alpha S^\alpha = 0 \end{aligned}$$

Juntos los 4 campos de vectores forman lo que se conoce como una *tétrada* en la variedad espacio-tiempo.

V es el campo vectorial temporal.

K es el campo vectorial espacial en la dirección radial.

L es el campo vectorial espacial en la dirección del ángulo horizontal θ .

S es el campo vectorial en la dirección del ángulo azimutal ϕ .

Observemos que $\Delta = B^2 \Delta_1$ y que $\Delta_1 = C^2 \Delta_2$. Si además consideramos la función ψ definida por

$$\omega_3 = A^2 \psi \tag{2.40}$$

entonces la tétrada puede escribirse de manera más elegante como

$$\begin{aligned} V^\alpha &= \left(\frac{1}{A}, 0, 0, 0\right) & V_\alpha &= (-A, 0, 0, A\psi) \\ K^\alpha &= \left(0, \frac{1}{B}, 0, 0\right) & K_\alpha &= (0, B, 0, 0) \\ L^\alpha &= \left(0, 0, \frac{1}{C}, 0\right) & L_\alpha &= (0, 0, C, 0) \\ S^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + A^2 \psi^2}} (\psi, 0, 0, 1) & S_\alpha &= (0, 0, 0, \sqrt{R^2 + A^2 \psi^2}) \end{aligned} \tag{2.41}$$

2.5.2. Escalares de estructura

Al expresar ciertas magnitudes físicas en términos de la tétrada aparecen algunos escalares, denominados *escalares de estructura*, con interpretaciones no solo físicas sino también geométricas, y de suma importancia a la hora de llevar a cabo operaciones de cálculo tensorial en términos de la tétrada. Algunas de estas magnitudes físicas son:

- La cuadiaceleración: Es una medida de la aceleración en la dirección de la velocidad.

$$a_\alpha = V_{\mu;\nu}V^\nu = a_1K_\alpha + a_2L_\alpha + a_3S_\alpha \quad (2.42)$$

donde

$$a_1 = a_\alpha K^\alpha \quad ; \quad a_2 = a_\alpha L^\alpha \quad ; \quad a_3 = a_\alpha S^\alpha \quad (2.43)$$

En términos de la métrica (2.38) estos escalares son

$$a_1 = \frac{A_{,r}}{AB} \quad ; \quad a_2 = \frac{A_{,r}}{AB} \quad ; \quad a_3 = 0 \quad (2.44)$$

- El tensor de vorticidad: Determina la rotación de un medio continuo

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(V_{\alpha;\beta} - V_{\beta;\alpha} + a_\alpha V_\beta - a_\beta V_\alpha) = \\ &= \Omega_1(K_\alpha L_\beta - K_\beta L_\alpha - K_\beta L_\alpha) + \Omega_2(K_\alpha S_\beta - K_\beta S_\alpha) + \Omega_3(L_\alpha S_\beta - L_\beta S_\alpha) \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde

$$\Omega_1 = \Omega_{\alpha\beta} K^\alpha L^\beta \quad ; \quad \Omega_2 = \Omega_{\alpha\beta} K^\alpha S^\beta \quad ; \quad \Omega_3 = \Omega_{\alpha\beta} L^\alpha S^\beta \quad (2.46)$$

En términos de la métrica (2.38) estos escalares son

$$\Omega_1 = 0 \quad ; \quad \Omega_2 = -\frac{A\psi_{,r}}{2B\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \quad ; \quad \Omega_3 = -\frac{A\psi_{,\theta}}{2C\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \quad (2.47)$$

- La razón de expansión escalar: Mide la variación de volumen de un medio continuo.

$$\Theta = V_{;\alpha}^\alpha \quad (2.48)$$

- El tensor de cizalladura: Mide la distribución de tensiones y esfuerzos internos de un medio continuo.

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_\alpha V_\beta + a_\beta V_\alpha + V_{\alpha;\beta} + V_{\beta;\alpha}) - \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta} \quad (2.49)$$

- Los escalares j_i : No tienen interpretación física.

$$\begin{aligned}
j_1 &= L^\alpha K_{\alpha;\beta} K^\beta & ; & & j_2 &= L^\alpha K_{\alpha;\beta} L^\beta & ; & & j_3 &= L^\alpha K_{\alpha;\beta} S^\beta \\
j_4 &= S^\alpha K_{\alpha;\beta} K^\beta & ; & & j_5 &= S^\alpha K_{\alpha;\beta} L^\beta & ; & & j_6 &= S^\alpha K_{\alpha;\beta} S^\beta \\
j_7 &= S^\alpha L_{\alpha;\beta} K^\beta & ; & & j_8 &= S^\alpha L_{\alpha;\beta} L^\beta & ; & & j_9 &= S^\alpha L_{\alpha;\beta} S^\beta
\end{aligned} \tag{2.50}$$

En términos de la métrica (2.38) estos escalares son

$$\begin{aligned}
j_1 &= -\frac{B_{,\theta}}{BC} & j_2 &= \frac{C_{,r}}{BC} & j_3 &= 0 \\
j_4 &= 0 & j_5 &= 0 & j_6 &= \frac{(\log(R^2 + A^2\psi^2))_{,r}}{2B} \\
j_7 &= 0 & j_8 &= 0 & j_9 &= \frac{(\log(R^2 + A^2\psi^2))_{,\theta}}{2C}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

- Las partes eléctrica, $E_{\alpha\beta}$, y magnética $H_{\alpha\beta}$, del tensor de Weyl

$$\begin{aligned}
E_{\alpha\beta} &:= C_{\alpha\mu\beta\nu} V^\mu V^\nu = E_1 K_\alpha K_\beta + E_2 L_\alpha L_\beta - (E_1 + E_2) S_\alpha S_\beta + \\
&+ E_3 \frac{1}{2} (K_\alpha L_\beta + K_\beta L_\alpha) + E_4 \frac{1}{2} (K_\alpha S_\beta + K_\beta S_\alpha) + E_5 \frac{1}{2} (L_\alpha S_\beta + L_\beta S_\alpha)
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
H_{\alpha\beta} &:= *C_{\alpha\mu\beta\nu} V^\mu V^\nu = H_1 K_\alpha K_\beta + H_2 L_\alpha L_\beta - (H_1 + H_2) S_\alpha S_\beta + \\
&+ H_3 \frac{1}{2} (K_\alpha L_\beta + K_\beta L_\alpha) + H_4 \frac{1}{2} (K_\alpha S_\beta + K_\beta S_\alpha) + H_5 \frac{1}{2} (L_\alpha S_\beta + L_\beta S_\alpha)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

donde $*C_{\alpha\mu\beta\nu}$ es el dual del tensor de Weyl y

$$\begin{aligned}
E_1 &= K^\alpha a_{1,\alpha} - a_2 j_1 + a_1^2 + \Omega_2 & H_1 &= -K^\alpha \Omega_{3,\alpha} - (a_2 + j_1) \Omega_2 - a_1 \Omega_3 \\
E_2 &= -E_1 - a_1 j_6 - a_2 j_9 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2 & H_2 &= K^\alpha \Omega_{3,\alpha} + (a_2 + j_1 - j_9) \Omega_2 + j_6 \Omega_3 \\
E_3 &= -L^\alpha a_{1,\alpha} + a_1 a_2 - a_2 j_2 + \Omega_2 \Omega_3 & H_3 &= -L^\alpha \Omega_{3,\alpha} - j_2 \Omega_2 - 2a_2 \Omega_3
\end{aligned} \tag{2.54}$$

- El tensor energía-impulso:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) V_\alpha V_\beta + p g_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta} + q_\alpha V_\beta + q_\beta V_\alpha \tag{2.55}$$

donde $\rho = T_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta$ es la densidad de masa-energía, $p = \frac{1}{3}h^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ es la presión hidrostática, $q_\alpha = -\rho V_\alpha - T_{\alpha\beta}V^\beta$ es el tensor de flujo de energía y $\Pi_{\alpha\beta} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (T_{\mu\nu} - ph_{\mu\nu})$ es el tensor de anisotropía.

Por último cabe destacar que las métricas estacionarias y axial simétricas verifican en general (ver [9]) que

$$A^2 R^2 + \omega_3^2 = f^2 \sin^2 \theta \quad (2.56)$$

$$C = Bf \quad (2.57)$$

$$a_1 + j_6 = \frac{f'}{Bf} \quad (2.58)$$

$$a_2 + j_9 = \frac{\cotg \theta}{C} \quad (2.59)$$

donde $f(r) = \sqrt{r^2 - 2mr + Q}$, con $Q \in \mathbb{R}$.

2.5.3. Derivada covariante de V, K, L, S

Como todo campo tensorial puede expresarse en términos de la tétrada V, K, L, S ; con el fin de obtener una expresión simplificada de la derivada covariante de cualquier campo tensorial en nuestra variedad espacio-tiempo, vamos a dar una expresión simplificada de las derivadas covariantes de V, K, L, S de forma que estas queden en términos de los escalares de estructura anteriores y no en función de los símbolos de Christoffel de la conexión.

La derivada covariante del campo temporal V , en el formalismo 1 + 3 puede escribirse de la siguiente manera

$$V_{\alpha;\beta} = -a_\alpha V_\beta + \sigma_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta} \quad (2.60)$$

La derivada covariante de K en el formalismo 1+3 puede escribirse de la siguiente

manera

$$K_{\alpha;\beta} = -a_\mu K_\mu V_\alpha V_\beta + V_\alpha(\sigma_{\nu\beta} + \Omega_{\nu\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\nu\beta})K^\nu - \tilde{a}_\alpha^{(k)} + J_{\alpha\beta}^{(k)} \quad (2.61)$$

donde

$$\tilde{a}_\alpha^{(k)} = h_\alpha^\mu K_{\mu;\nu} V^\nu = -\Omega_1 L_\alpha - \Omega_2 S_\alpha \quad (2.62)$$

$$J_{\alpha\beta}^{(k)} = h_\alpha^\mu h_\alpha^\nu K_{\mu;\nu} = (j_1 K_\beta + j_2 L_\beta + j_3 S_\beta)L_\alpha + (j_4 K_\beta + j_5 L_\beta + j_6 S_\beta)S_\alpha \quad (2.63)$$

La derivada covariante de L en el formalismo 1+3 viene dada por

$$L_{\alpha;\beta} = -a_\mu L^\mu V_\alpha V_\beta + V_\alpha(\sigma_{\nu\beta} + \Omega_{\nu\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\nu\beta})L^\nu - a_\alpha^{(l)}V_\beta + J_{\alpha\beta}^{(l)} \quad (2.64)$$

donde

$$\tilde{a}_\alpha^{(l)} = h_\alpha^\mu L_{\mu;\nu} V^\nu = \Omega_1 K_\alpha - \Omega_3 S_\alpha \quad (2.65)$$

$$J_{\alpha\beta}^{(l)} = h_\alpha^\mu h_\alpha^\nu K_{\mu;\nu} = -(j_1 K_\beta + j_2 L_\beta + j_3 S_\beta)K_\alpha + (j_7 K_\beta + j_8 L_\beta + j_9 S_\beta)S_\alpha \quad (2.66)$$

La derivada covariante de S puede escribirse

$$S_{\alpha;\beta} = -a_\mu S^\mu V_\alpha V_\beta + V_\alpha(\sigma_{\nu\beta} + \Omega_{\nu\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\nu\beta})S^\nu - a_\alpha^{(s)}V_\beta + J_{\alpha\beta}^{(s)} \quad (2.67)$$

donde

$$\tilde{a}_\alpha^{(s)} = h_\alpha^\mu S_{\mu;\nu} V^\nu = \Omega_2 K_\alpha + \Omega_3 L_\alpha \quad (2.68)$$

$$J_{\alpha\beta}^{(s)} = h_\alpha^\mu h_\alpha^\nu S_{\mu;\nu} = -(j_4 K_\beta + j_5 L_\beta + j_6 S_\beta)K_\alpha - (j_7 K_\beta + j_8 L_\beta + j_9 S_\beta)L_\alpha \quad (2.69)$$

Finalmente, simplificando las expresiones anteriores, obtenemos

$$V_{\alpha;\beta} = a_{\alpha}V_{\beta} + \Omega_2(K_{\alpha}S_{\beta} - K_{\beta}S_{\alpha}) + \Omega_3(L_{\alpha}S_{\beta} - L_{\beta}S_{\alpha}) \quad (2.70)$$

$$K_{\alpha;\beta} = -a_1V_{\alpha}V_{\beta} + \Omega_2(V_{\alpha}S_{\beta} + V_{\beta}S_{\alpha}) + (j_1K_{\beta} + j_2L_{\beta})L_{\alpha} + j_6S_{\alpha}S_{\beta} \quad (2.71)$$

$$L_{\alpha;\beta} = -a_2V_{\alpha}V_{\beta} + \Omega_3(V_{\alpha}S_{\beta} + V_{\beta}S_{\alpha}) - (j_1K_{\beta} + j_2L_{\beta})K_{\alpha} + j_9S_{\alpha}S_{\beta} \quad (2.72)$$

$$S_{\alpha;\beta} = -\Omega_2(K_{\alpha}V_{\beta} + K_{\beta}V_{\alpha}) - \Omega_3(L_{\alpha}V_{\beta} + L_{\beta}V_{\alpha}) - (j_6K_{\alpha} + j_9L_{\alpha})S_{\beta} \quad (2.73)$$

Capítulo 3

Objetivos

3.1. Estado del arte y contexto del trabajo desarrollado

La teoría de la perturbación del espacio-tiempo ha sido una de las herramientas más efectivas para entender las propiedades físicas de los objetos compactos de nuestro universo, incluyendo los agujeros negros. Numerosos estudios en la teoría de la perturbación de agujeros negros como [6], [14], [20] han sido realizados con el fin de investigar la estabilidad del espacio-tiempo de los agujeros negros así como estudiar las ondas gravitacionales. El problema fue tratado en los trabajos pioneros de S. Teukolsky [15], [16] en los cuales se logró un sistema de ecuaciones lineales para la ecuación de la perturbación (2.36) en el espacio-tiempo de Kerr. Previamente esta ecuación ya había sido resuelta para la métrica de Schwarzschild en [11] y [19], sin embargo, en este caso las dependencias temporal y angular eran fácilmente separables de la ecuación. Para el caso de Kerr, Teukolsky recurrió al formalismo de Newman-Penrose (N-P), que puede ser entendido como un tipo espacial de cálculo tetradial caracterizado por la elección de una base de campos vectoriales nulos l, n, m, \bar{m} de los cuales l y n son reales y m y \bar{m} son complejos conjugados entre sí. En

términos de una base ortonormal $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ vienen dados por

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_0 - U_2) \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_0 + U_2) \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_1 + iU_3) \quad \bar{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_1 - iU_3)$$

En el formalismo de N-P el tensor de Weyl se sustituye por 5 escalares complejos, ψ_n , de los cuales $\psi_0 = -C_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha m^\beta l^\gamma m^\delta$ y $\psi_4 = -C_{\alpha\beta\gamma\delta}n^\alpha \bar{m}^\beta n^\gamma \bar{m}^\delta$ son los únicos con interés gravitatorio. Con este enfoque Teukolsky fue capaz de escribir las ecuaciones para ψ_0 y ψ_4 desacopladas, llegando a encontrar soluciones de la forma $\Phi = S(\theta)R(r)e^{-i\omega t}e^{im\phi}$ para la ecuación (2.36) en el vacío. Los trabajos posteriores ([1], [5], [14], [20]) se han basado en las ideas de Teukolsky para estudiar las perturbaciones en otros espacios-tiempos y es por ello que nos referiremos habitualmente a la ecuación (2.36) como la ecuación de Teukolsky .

3.2. Objetivos y metodología seguida

En este trabajo se busca llevar a cabo un análisis de la radiación electromagnética generada por partículas cargadas cayendo hacia el centro de un agujero negro estático con simetría axial mediante un esquema de perturbación. Es por ello que el objetivo principal de la memoria es resolver la ecuación de la perturbación (2.36) en el vacío, esto es con $T = 0$, para una métrica de la forma (2.38) y así generalizar los trabajos de Teukolsky y posteriores. Esta es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden nada trivial, que puede ser abordada desde diferentes enfoques. Nosotros, en vez de recurrir al formalismo de Newman-Penrose, haremos uso del formalismo 1+3 descrito en el capítulo anterior y que ya ha sido utilizado previamente en trabajos como [8] o [9] con buenos resultados. El formalismo 1+3 conduce a la descomposición ortogonal del tensor de Riemann en términos de los escalares de estructura, lo que nos permitirá escribir la ecuación (2.36) en términos de dichos escalares, pasando de una ecuación de segundo orden a un sistema de ecuaciones de primer orden.

Capítulo 4

Resultados

4.1. La ecuación de Teukolsky en el formalismo 1+3

Consideremos un campo escalar Φ en una variedad espacio-tiempo M , con conexión de Levi-Civita ∇ . Las perturbaciones del espacio-tiempo en el vacío debidas a Φ vienen descritas por la ecuación de tipo ondas

$$\nabla_\mu(\nabla^\mu\Phi) = 0 \quad (4.1)$$

Sabiendo que la diferencial de Φ puede escribirse en términos de la tétrada como

$$\nabla_\mu\Phi = \Phi_0V_\mu + \Phi_1K_\mu + \Phi_2L_\mu + \Phi_3S_\mu \quad (4.2)$$

entonces la divergencia del gradiente pasa a escribirse

$$\nabla_\mu(\nabla^\mu\Phi) = \nabla_\mu(g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\Phi) = \nabla_\mu(g^{\mu\alpha}(\Phi_0V_\alpha + \Phi_1K_\alpha + \Phi_2L_\alpha + \Phi_3S_\alpha)) \quad (4.3)$$

Debido a la compatibilidad de la conexión de Levi-Civita con la métrica, esto es $\nabla g = 0$, se cumple que

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\nabla^\mu\Phi) = & g^{\mu\alpha}\nabla_\mu(\Phi_0V_\alpha + \Phi_1K_\alpha + \Phi_2L_\alpha + \Phi_3S_\alpha) = g^{\mu\alpha}[\Phi_{0,\mu}V_\alpha + \Phi_{1,\mu}K_\alpha + \\ & + \Phi_{2,\mu}L_\alpha + \Phi_{3,\mu}S_\alpha + \Phi_0V_{\alpha;\mu} + \Phi_1K_{\alpha;\mu} + \Phi_2L_{\alpha;\mu} + \Phi_3S_{\alpha;\mu}]\end{aligned}\quad (4.4)$$

Sustituyendo ahora las expresiones de las derivadas covariantes de V , K , L , S , por las de (2.70) nos queda

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\nabla^\mu\Phi) = & g^{\mu\alpha}[\Phi_{0,\mu}V_\alpha + \Phi_{1,\mu}K_\alpha + \Phi_{2,\mu}L_\alpha + \Phi_{3,\mu}S_\alpha + \\ & + \Phi_0(- (a_1K_\alpha + a_2L_\alpha + a_3S_\alpha)V_\mu + \Omega_2(K_\alpha S_\mu - K_\mu S_\alpha) + \Omega_3(L_\alpha S_\mu - L_\mu S_\alpha)) + \\ & + \Phi_1(- a_1V_\alpha V_\mu + \Omega_2(V_\alpha S_\mu + V_\mu S_\alpha) + (j_1K_\mu + j_2L_\mu)L_\alpha + j_6S_\alpha S_\mu) + \\ & + \Phi_2(- a_2V_\alpha V_\mu + \Omega_3(V_\alpha S_\mu + V_\mu S_\alpha) - (j_1K_\mu + j_2L_\mu)K_\alpha + j_9S_\alpha S_\mu) + \\ & + \Phi_3(- \Omega_2(K_\alpha V_\mu + K_\mu V_\alpha) - \Omega_3(L_\alpha V_\mu + L_\mu V_\alpha) - (j_6K_\alpha + j_9L_\alpha)S_\mu)]\end{aligned}\quad (4.5)$$

Por otra parte, como la base V, S, K, L es ortonormal tenemos que $-V_\alpha g^{\mu\alpha}V_\mu = K_\alpha g^{\mu\alpha}K_\mu = L_\alpha g^{\mu\alpha}L_\mu = S_\alpha g^{\mu\alpha}S_\mu = 1$ y que $V_\alpha g^{\mu\alpha}K_\mu = V_\alpha g^{\mu\alpha}L_\mu = V_\alpha g^{\mu\alpha}S_\mu = K_\alpha g^{\mu\alpha}L_\mu = K_\alpha g^{\mu\alpha}S_\mu = S_\alpha g^{\mu\alpha}L_\mu = 0$. Entonces la ecuación se simplifica, obteniendo

$$\nabla_\mu(\nabla^\mu\Phi) = \Phi_{0,\mu}V_\alpha + \Phi_{1,\mu}K_\alpha + \Phi_{2,\mu}L_\alpha + \Phi_{3,\mu}S_\alpha + \Phi_1(a_1 + j_2 + j_6) + \Phi_2(a_2 - j_1 + j_9) \quad (4.6)$$

Sustituyendo, los términos de esta ecuación por los de (2.41) llegamos finalmente a la ecuación

$$\begin{aligned}0 = & \Phi_{0,t}\frac{1}{A} + \Phi_{3,t}\frac{\omega_3}{A\sqrt{\Delta_2}} + \Phi_{3,\phi}\frac{A}{\sqrt{\Delta_2}} + \Phi_{1,r}\frac{1}{B} + \left(\frac{A_{,r}}{AB} + \frac{C_{,r}}{BC} + \frac{(\log(R^2 + A^2\psi^2))_{,r}}{2B}\right)\Phi_1 + \\ & + \Phi_{2,\theta}\frac{1}{C} + \left(\frac{A_{,\theta}}{AC} + \frac{B_{,\theta}}{BC} + \frac{(\log(R^2 + A^2\psi^2))_{,\theta}}{2C}\right)\Phi_2\end{aligned}\quad (4.7)$$

que es una generalización de la ecuación de Teukolsky para métricas estacionarias con simetría axial.

4.2. Integración de la ecuación de Teukolsky

Con el fin de resolver la ecuación (4.7) debemos determinar la expresión de las funciones Φ_i . Para ello vamos a separar y tratar de manera independiente los términos correspondientes Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 .

Con respecto a Φ_1 y Φ_2 obtenemos dos ecuaciones lineales homogéneas

$$0 = \Phi_{1,r} \frac{1}{B} + \left(\frac{A_{,r}}{AB} + \frac{C_{,r}}{BC} + \frac{(\log(R^2 + A^2\psi^2))_{,r}}{2B} \right) \Phi_1 \quad (4.8)$$

$$0 = \Phi_{2,\theta} \frac{1}{C} + \left(\frac{A_{,\theta}}{AC} + \frac{B_{,\theta}}{BC} + \frac{(\log(R^2 + A^2\psi^2))_{,\theta}}{2C} \right) \Phi_2 \quad (4.9)$$

que son fácilmente integrables. Sus soluciones vienen dadas por

$$\Phi_1 = \frac{\hat{\Phi}_1(t, \theta, \phi)}{AC \sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \quad (4.10)$$

$$\Phi_2 = \frac{\hat{\Phi}_2(t, r, \phi)}{AB \sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \quad (4.11)$$

donde $\hat{\Phi}_1(t, \theta, \phi)$ y $\hat{\Phi}_2(t, r, \phi)$ son funciones arbitrarias.

La ecuación correspondiente a Φ_3 es

$$0 = \Phi_{0,t} \frac{1}{A} + \frac{\psi}{\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \Phi_{3,t} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \Phi_{3,\phi} \quad (4.12)$$

Supongamos que $\Phi_3 = \tilde{\Phi}_3(t, r, \theta)e^{k\phi}$ y que $\Phi_0 = \tilde{\Phi}_0(t, r, \theta)e^{k\phi}$ con $k \in \mathbb{R}$. Entonces la ecuación resulta

$$0 = \frac{1}{A} \tilde{\Phi}_{0,t} e^{k\phi} + \frac{\psi}{\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \tilde{\Phi}_{3,t} e^{k\phi} + \frac{k}{\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \tilde{\Phi}_3 e^{k\phi} \quad (4.13)$$

Eliminando el factor común $e^{k\phi}$ nos queda una ecuación lineal no homogénea con solución

$$\tilde{\Phi}_3 = e^{-\frac{kt}{\psi}} \left(\hat{\Phi}_3(r, \theta) - \frac{\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}}{A\psi} \int e^{\frac{kt}{\psi}} \tilde{\Phi}_{0,t} dt \right) \quad (4.14)$$

con $\hat{\Phi}_3(r, \theta)$ una función arbitraria. Entonces,

$$\Phi_3 = e^{k(\phi - \frac{t}{\psi})} \left(\hat{\Phi}_3(r, \theta) - \frac{\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}}{A\psi} \int e^{\frac{kt}{\psi}} \tilde{\Phi}_{0,t} dt \right) \quad (4.15)$$

Finalmente de la ecuación $\nabla_\mu \Phi = \Phi_0 V_\mu + \Phi_1 K_\mu + \Phi_2 L_\mu + \Phi_3 S_\mu$ se sigue que

$$\Phi_{,t} = -A\Phi_0 \quad (4.16)$$

$$\Phi_{,r} = \frac{\hat{\Phi}_1 B}{AC\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \quad (4.17)$$

$$\Phi_{,\theta} = \frac{\hat{\Phi}_2 C}{AB\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \quad (4.18)$$

$$\Phi_{,\phi} = \Phi_0 A\psi + \sqrt{R^2 + A^2\psi^2} e^{k(\phi - \frac{t}{\psi})} \left(\hat{\Phi}_3 - \frac{\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}}{A\psi} \int e^{\frac{kt}{\psi}} \tilde{\Phi}_{0,t} dt \right) \quad (4.19)$$

El método habitual para resolver este sistema es recurrir al teorema de Frobenius para la integración de distribuciones de campos vectoriales, de tal forma que hallar una solución $z = \Phi(t, r, \theta, \phi)$ equivale a integrar la distribución de campos vectoriales $H := \langle X_0, X_1, X_2, X_3 \rangle$ donde

$$X_0 = \partial_t - A\Phi_0 \partial_z \quad (4.20)$$

$$X_1 = \partial_r + \frac{\hat{\Phi}_1 B}{AC\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \partial_z \quad (4.21)$$

$$X_2 = \partial_\theta + \frac{\hat{\Phi}_2 C}{AB\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}} \partial_z \quad (4.22)$$

$$X_3 = \partial_\phi + \left[\Phi_0 A\psi + \sqrt{R^2 + A^2\psi^2} e^{k(\phi - \frac{t}{\psi})} \left(\hat{\Phi}_3 - \frac{\sqrt{R^2 + A^2\psi^2}}{A\psi} \int e^{\frac{kt}{\psi}} \tilde{\Phi}_{0,t} dt \right) \right] \partial_z \quad (4.23)$$

Previamente debemos asegurarnos de que el sistema puede ser integrado. La distribución H será completamente integrable si y solo si es involutiva, es decir, si los paréntesis de Lie de X_0, X_1, X_2, X_3 están en H . Operando es fácil comprobar que $[X_i, X_j] \in H$ para $0 \leq i, j \leq 3$ si y solo si $[X_i, X_j] = 0$, para lo cual es condición necesaria y suficiente que Φ satisfaga el lema de Schwarz de las derivadas cruzadas.

4.2.1. Primera solución

Con el fin de poder simplificar el sistema anterior vamos a realizar las suposiciones habituales donde $A^2 R^2 + \omega_3^2 = f^2 \text{sen}^2 \theta$ y $C = Bf$ con $f(r) = \sqrt{r^2 - 2mr + Q}$ (ver subsección 2.5.2). El sistema resultante es

$$\Phi_{,t} = -A\tilde{\Phi}_0 e^{k\phi} \quad (4.24)$$

$$\Phi_{,r} = \frac{\hat{\Phi}_1}{f^2 \text{sen} \theta} \quad (4.25)$$

$$\Phi_{,\theta} = \frac{\hat{\Phi}_2}{\text{sen} \theta} \quad (4.26)$$

$$\Phi_{,\phi} = A\psi\tilde{\Phi}_0 e^{k\phi} + \frac{f \text{sen} \theta}{A} e^{k(\phi - \frac{t}{\psi})} \left(\hat{\Phi}_3(r, \theta) - \frac{f \text{sen} \theta}{\psi A^2} \int e^{\frac{kt}{\psi}} \tilde{\Phi}_{0,t} dt \right) \quad (4.27)$$

Sabemos que la solución Φ debe satisfacer que $\Phi_{,r\theta} = \Phi_{,\theta r}$, es decir,

$$\left(\frac{\hat{\Phi}_2}{\text{sen} \theta} \right)_{,r} = \left(\frac{\hat{\Phi}_1}{f^2 \text{sen} \theta} \right)_{,\theta} \quad (4.28)$$

Despejando $\hat{\Phi}_{2,r} = \frac{\text{sen} \theta}{f^2} \left(\frac{\hat{\Phi}_1}{f^2 \text{sen} \theta} \right)_{,\theta}$. Dado que $\hat{\Phi}_2$ no depende de θ tiene que ocurrir que $\left(\frac{\hat{\Phi}_1}{f^2 \text{sen} \theta} \right)_{,\theta} = \frac{\tilde{\Phi}_1(t, \phi)}{\text{sen} \theta}$ con $\tilde{\Phi}_1$ una función arbitraria. Como consecuencia $\hat{\Phi}_1$ debe ser de la forma

$$\hat{\Phi}_1 = \text{sen} \theta \left(\tilde{\Phi}_1(t, \phi) \int \frac{d\theta}{\text{sen} \theta} + \bar{\Phi}_1(t, \phi) \right) \quad (4.29)$$

con $\bar{\Phi}_1(t, \phi)$ una función arbitraria. De aquí se sigue que

$$\hat{\Phi}_2 = \tilde{\Phi}_1 \int \frac{dr}{f(r)^2} + \bar{\Phi}_2(t, \phi) \quad (4.30)$$

donde $\bar{\Phi}_2(t, \phi)$ es una función cualquiera.

Llamemos

$$\bar{g}(\theta) = \int \frac{d\theta}{\text{sen } \theta} = \log(\text{tg}(\frac{\theta}{2})) \quad (4.31)$$

$$\bar{f}(r) = \int \frac{dr}{f(r)^2} = \frac{1}{\sqrt{Q-m^2}} \text{arc tg} \left(\frac{r-m}{\sqrt{Q-m^2}} \right) \quad (4.32)$$

Por lo que acabamos de ver las ecuaciones correspondientes a r y θ pasan a escribirse

$$\Phi_{,r} = \frac{\tilde{\Phi}_1 \bar{g} + \bar{\Phi}_1}{f^2} \Rightarrow \Phi = \bar{f}(\tilde{\Phi}_1 \bar{g} + \bar{\Phi}_1) + \tilde{\Phi}(t, \theta, \phi) \quad (4.33)$$

$$\Phi_{,\theta} = \frac{\tilde{\Phi}_1 \bar{f} + \bar{\Phi}_2}{\text{sen } \theta} \Rightarrow \Phi = \bar{g}(\tilde{\Phi}_1 \bar{f} + \bar{\Phi}_2) + \bar{\Phi}(t, r, \phi) \quad (4.34)$$

de donde se deduce que Φ es de la forma

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = \bar{g}(\theta) \bar{f}(r) \tilde{\Phi}(t, \phi) + \bar{\Phi}(t, \phi) \quad (4.35)$$

siendo $\tilde{\Phi}(t, \phi)$, $\bar{\Phi}(t, \phi)$ funciones arbitrarias. Al haber separación entre las variables r, θ y ϕ, t , se garantiza que $\Phi_{,rt} = \Phi_{,tr}$, $\Phi_{,\theta t} = \Phi_{,t\theta}$, $\Phi_{,r\phi} = \Phi_{,\phi r}$, $\Phi_{,\theta\phi} = \Phi_{,\phi\theta}$, de tal forma que el sistema será completamente integrable si se cumple que $\Phi_{,t\phi} = \Phi_{,\phi t}$, es decir si se verifica que

$$\begin{aligned} A\psi \tilde{\Phi}_{0,t} e^{k\phi} - \frac{f \text{sen } \theta}{A} \frac{k}{\psi} e^{k(\phi - \frac{t}{\psi})} \left(\hat{\Phi}_3(r, \theta) - \frac{f \text{sen } \theta}{\psi A^2} \int e^{\frac{kt}{\psi}} \tilde{\Phi}_{0,t} dt \right) + \\ + \frac{f \text{sen } \theta}{A} e^{k(\phi - \frac{t}{\psi})} \left(- \frac{f \text{sen } \theta}{\psi A^2} e^{\frac{kt}{\psi}} \tilde{\Phi}_{0,t} \right) = -Ak \tilde{\Phi}_0 e^{k\phi} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Tomemos $\Phi_0(t, r, \theta, \phi) = \tilde{\Phi}_0(r, \theta, \phi) e^{k\phi} = \bar{\Phi}_0(r, \theta) e^{ct} e^{k\phi}$, con $c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int e^{\frac{kt}{\psi}} \tilde{\Phi}_{0,t} dt = c \bar{\Phi}_0 \int e^{\frac{kt}{\psi} + ct} dt = \frac{c \bar{\Phi}_0 \psi}{c\psi + k} e^{(\frac{k}{\psi} + c)t} \quad (4.37)$$

Sustituyendo en la expresión anterior y tomando $\hat{\Phi}_3 = 0$ resulta que el sistema será integrable si y solo si la métrica satisface la igualdad

$$A\psi - c \frac{f^2 \text{sen}^2 \theta}{A^3 (c\psi + k)} + \frac{k}{c} A = 0 \quad (4.38)$$

Utilizando esta condición, las ecuaciones correspondientes a t y ϕ pasan a escribirse

$$\Phi_{,t} = -A\bar{\Phi}_0 e^{ct+k\phi} \quad (4.39)$$

$$\Phi_{,\phi} = -\frac{k}{c}A\bar{\Phi}_0 e^{ct+k\phi} \quad (4.40)$$

Como consecuencia Φ debe ser de la forma

$$\Phi = -\frac{1}{c}A\bar{\Phi}_0 e^{ct+k\phi} + \hat{\Phi}(r, \theta) \quad (4.41)$$

donde $\bar{\Phi}_0(r, \theta)$ y $\hat{\Phi}(r, \theta)$ son funciones arbitrarias. Para hacer que esta expresión de Φ coincida con la ya obtenida en (4.35) tomamos $\Phi_0 = -\frac{c}{A}\bar{g}\bar{f}$ y $\hat{\Phi} = \bar{\Phi} = cte$ llegando finalmente a que la solución que buscábamos es

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = \bar{g}(\theta)\bar{f}(r)e^{ct+k\phi} + cte \quad (4.42)$$

Observación 4.2.1. Es fácil ver que el caso particular en el que $c = k = 0$, y por tanto $\Phi = \bar{g}\bar{f}$, proporciona una solución general del sistema con $\Phi_0 = 0$. Esta solución aunque no depende de las variables t y ϕ no impone la restricción (4.38) sobre la métrica.

4.2.2. Segunda solución

El objetivo es encontrar una solución que no restrinja la métrica, con este objetivo en mente en esta subsección intentaremos dar con otra solución. Utilizando las identidades $A^2R^2 + \omega_3^2 = f^2 \sin^2 \theta =: F^2$, $a_1 + j_6 = \frac{F_{,r}}{BF}$ y $a_2 + j_9 = \frac{F_{,\theta}}{CF}$ (ver subsección 2.5.2) la ecuación (4.6) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\nabla_\mu(\nabla^\mu\Phi) = \frac{\Phi_{0,t}}{A} + \frac{\omega_3\Phi_{3,t}}{AF} + \frac{\Phi_{3,\phi}A}{F} + \frac{(\Phi_1FC)_{,r}}{FCB} + \frac{(\Phi_2FB)_{,\theta}}{FCB} = 0 \quad (4.43)$$

Con el fin de integrar esta ecuación, hacemos la siguiente separación

$$\frac{\Phi_{0,t}}{A} + \frac{\omega_3 \Phi_{3,t}}{AF} + \frac{\Phi_{3,\phi} A}{F} = 0 \quad (4.44)$$

$$(\Phi_1 FC)_{,r} + (\Phi_2 FB)_{,\theta} = 0 \quad (4.45)$$

Observemos que la ecuación correspondiente a t y ϕ es la misma que en la sección anterior, pero ahora solo tenemos una ecuación para r y θ lo que no obligará a separar estas dos variables más adelante. Para integrar (4.44) suponemos que

$$\Phi_0 = \tilde{\Phi}_0(r, \theta) e^{k_1(r, \theta)t + k_2(r, \theta)\phi} + \hat{\Phi}_0(r, \theta) \quad (4.46)$$

$$\Phi_3 = \tilde{\Phi}_3(r, \theta) e^{k_1(r, \theta)t + k_2(r, \theta)\phi} + \hat{\Phi}_3(r, \theta) \quad (4.47)$$

Sustituyendo (4.46) y (4.47) en (4.44) se obtiene que

$$\frac{k_1(r, \theta)}{A} \tilde{\Phi}_0 + \left(\frac{k_1(r, \theta)\omega_3}{AF} + \frac{k_2(r, \theta)A}{F} \right) \tilde{\Phi}_3 = 0. \quad (4.48)$$

Luego

$$\tilde{\Phi}_3 = \frac{-k_1 F}{k_1 \omega_3 + k_2 A^2} \tilde{\Phi}_0 \quad (4.49)$$

Por otro lado, la ecuación (4.45) se puede integrar de manera general, como sigue

$$\Phi_1 FC = S_{,\theta} \Rightarrow \Phi_1 = \frac{S_{,\theta}}{FC} \quad (4.50)$$

$$\Phi_2 FB = -S_{,r} \Rightarrow \Phi_2 = -\frac{S_{,r}}{FB} \quad (4.51)$$

donde $S = S(t, r, \theta, \phi)$ es una función cualquiera. A partir de las ecuaciones (4.46), (4.47),

(4.50) y (4.51) encontramos las siguientes expresiones para las derivadas primeras de Φ

$$\Phi_{,t} = -A\tilde{\Phi}_0 e^{k_1(r,\theta)t+k_2(r,\theta)\phi} - A\hat{\Phi}_0 \quad (4.52)$$

$$\Phi_{,\phi} = \tilde{k}_3\tilde{\Phi}_0 e^{k_1(r,\theta)t+k_2(r,\theta)\phi} + \hat{k}_3 \quad (4.53)$$

$$\Phi_{,r} = \frac{S_{,\theta}}{f^2 \sin \theta} \quad (4.54)$$

$$\Phi_{,\theta} = -\frac{S_{,r}}{\sin \theta} \quad (4.55)$$

donde $\tilde{k}_3 = \tilde{k}_3(r, \theta) := \left(\frac{\omega_3}{A} - \frac{k_1 F^2}{A(k_1 \omega_3 + k_2 A^2)}\right)$ y $\hat{k}_3 = \hat{k}_3(r, \theta) := \frac{\omega_3}{A} \hat{\Phi}_0 + \frac{F}{A} \hat{\Phi}_3$.

A continuación vamos a ver las expresiones que deben tener $\tilde{\Phi}_0(r, \theta)$, $k_1(r, \theta)$, $k_2(r, \theta)$, $\hat{k}_3(r, \theta)$ y $S(t, r, \theta, \phi)$ para garantizar que Φ satisfaga el lema de Schwarz de las derivadas cruzadas y así el sistema pueda ser integrado.

■ $\Phi_{,tr} = \Phi_{,rt}$

$$\begin{aligned} \frac{S_{,\theta t}}{f^2 \sin \theta} &= [(-A\tilde{\Phi}_0)_{,r} - A\tilde{\Phi}_0(k_{1,r}t + k_{2,r}\phi)] e^{k_1 t + k_2 \phi} - (A\hat{\Phi}_0)_{,r} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{,\theta} &= f^2 \sin \theta \frac{1}{k_1^2} [k_1((-A\tilde{\Phi}_0)_{,r} - A\tilde{\Phi}_0(k_{1,r}t + k_{2,r}\phi)) + A\tilde{\Phi}_0 k_{1,r}] e^{k_1 t + k_2 \phi} \quad (4.56) \\ &\quad - f^2 \sin \theta (A\hat{\Phi}_0)_{,r} t + S_1(r, \theta, \phi) \end{aligned}$$

■ $\Phi_{,t\theta} = \Phi_{,\theta t}$

$$\begin{aligned} \frac{-S_{,rt}}{\sin \theta} &= [(-A\tilde{\Phi}_0)_{,\theta} - A\tilde{\Phi}_0(k_{1,\theta}t + k_{2,\theta}\phi)] e^{k_1 t + k_2 \phi} - (A\hat{\Phi}_0)_{,\theta} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{,r} &= -\sin \theta \frac{1}{k_1^2} [k_1((-A\tilde{\Phi}_0)_{,\theta} - A\tilde{\Phi}_0(k_{1,\theta}t + k_{2,\theta}\phi)) + A\tilde{\Phi}_0 k_{1,\theta}] e^{k_1 t + k_2 \phi} \quad (4.57) \\ &\quad + \sin \theta (A\hat{\Phi}_0)_{,\theta} t + S_2(r, \theta, \phi) \end{aligned}$$

- $\Phi_{,\phi r} = \Phi_{,r\phi}$

$$\begin{aligned} \frac{S_{,\theta\phi}}{f^2 \text{sen } \theta} &= [(\tilde{k}_3 \tilde{\Phi}_0)_{,r} + \tilde{k}_3 \tilde{\Phi}_0(k_{1,r}t + k_{2,r}\phi)] e^{k_1 t + k_2 \phi} + \hat{k}_{3,r} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{,\theta} &= f^2 \text{sen } \theta \frac{1}{k_2^2} [k_2((\tilde{k}_3 \tilde{\Phi}_0)_{,r} + \tilde{k}_3 \tilde{\Phi}_0(k_{1,r}t + k_{2,r}\phi)) - \tilde{k}_3 \tilde{\Phi}_0 k_{2,r}] e^{k_1 t + k_2 \phi} \quad (4.58) \\ &+ f^2 \text{sen } \theta \hat{k}_{3,r} \phi + S_3(t, r, \theta) \end{aligned}$$

- $\Phi_{,\phi\theta} = \Phi_{,\theta\phi}$

$$\begin{aligned} \frac{-S_{,r\phi}}{\text{sen } \theta} &= [(\tilde{k}_3 \tilde{\Phi}_0)_{,\theta} + \tilde{k}_3 \tilde{\Phi}_0(k_{1,\theta}t + k_{2,\theta}\phi)] e^{k_1 t + k_2 \phi} + \hat{k}_{3,\theta} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{,r} &= -\text{sen } \theta \frac{1}{k_2^2} [k_2((\tilde{k}_3 \tilde{\Phi}_0)_{,\theta} + \tilde{k}_3 \tilde{\Phi}_0(k_{1,\theta}t + k_{2,\theta}\phi)) - \tilde{k}_3 \tilde{\Phi}_0 k_{2,r}] e^{k_1 t + k_2 \phi} \quad (4.59) \\ &- \text{sen } \theta \hat{k}_{3,\theta} \phi + S_4(t, r, \theta) \end{aligned}$$

- $\Phi_{,t\phi} = \Phi_{,\phi t}$

$$\begin{aligned} -Ak_2 \tilde{\Phi}_0 e^{k_1 t + k_2 \phi} &= \tilde{k}_3 k_1 \tilde{\Phi}_0 e^{k_1 t + k_2 \phi} \Rightarrow \\ \Rightarrow -Ak_2 &= \left(\frac{\omega_3}{A} - \frac{k_1 F^2}{A(k_1 \omega_3 + k_2 A^2)} \right) k_1 \quad (4.60) \end{aligned}$$

- $\Phi_{,r\theta} = \Phi_{,\theta r}$

$$\left(\frac{S_{,\theta}}{f^2 \text{sen } \theta} \right)_{,\theta} = \left(\frac{-S_{,r}}{\text{sen } \theta} \right)_{,r} \quad (4.61)$$

Tomando $k_1 = k_2 = k$, $S_1 = f^2 \text{sen } \theta \hat{k}_{3,r} \phi$, $S_2 = -\text{sen } \theta \hat{k}_{3,\theta} \phi$, $S_3 = -f^2 \text{sen } \theta (A \tilde{\Phi}_0)_{,r} t$ y $S_4 = \text{sen } \theta (A \hat{\Phi}_0)_{,\theta} t$, y suponiendo que la métrica verifica que

$$-A = \left(\frac{\omega_3}{A} - \frac{F^2}{A(\omega_3 + A^2)} \right) \quad (4.62)$$

entonces es fácil ver que (4.56) es igual a (4.58) y que (4.57) es igual a (4.59) y como

consecuencia

$$S_{,\theta} = f^2 \operatorname{sen} \theta \frac{1}{k^2} [k((-A\tilde{\Phi}_0)_{,r} - A\tilde{\Phi}_0 k_{,r}(t + \phi)) + A\tilde{\Phi}_0 k_{,r}] e^{k(t+\phi)} + \quad (4.63)$$

$$+ f^2 \operatorname{sen} \theta [\hat{k}_{3,r} \phi - (A\hat{\Phi}_0)_{,r} t]$$

$$S_{,r} = - \operatorname{sen} \theta \frac{1}{k^2} [k((-A\tilde{\Phi}_0)_{,\theta} - A\tilde{\Phi}_0 k_{,\theta}(t + \phi)) + A\tilde{\Phi}_0 k_{,\theta}] e^{k(t+\phi)} + \quad (4.64)$$

$$- \operatorname{sen} \theta [\hat{k}_{3,\theta} \phi - (A\hat{\Phi}_0)_{,\theta} t]$$

Operando se comprueba que para estas expresiones de $S_{,\theta}$ y $S_{,r}$ se cumple la condición (4.61). Además por la condición (4.62) impuesta sobre la métrica se cumple (4.60).

Una vez asegurada la integrabilidad del sistema, solo queda determinar la expresión de $S(t, r, \theta, \phi)$. Primeramente debemos asegurarnos de que satisface que $S_{,\theta r} = S_{,r\theta}$. Con la intención de simplificar la expresión de S vamos a dar a la función arbitraria $\tilde{\Phi}_0$ el valor $\tilde{\Phi}_0 = -\frac{k}{A}$, de tal forma que

$$S_{,\theta r} = e^{k(t+\phi)} [f^2 \operatorname{sen} \theta k_{,r}^2 (t + \phi)^2 + 2f f' \operatorname{sen} \theta k_{,r}(t + \phi) + f^2 \operatorname{sen} \theta k_{,rr}(t + \phi)] \quad (4.65)$$

$$+ 2f f' \operatorname{sen} \theta (\hat{k}_{3,r} \phi - (A\hat{\Phi}_0)_{,r} t) + f^2 \operatorname{sen} \theta (\hat{k}_{3,rr} \phi - (A\hat{\Phi}_0)_{,rr} t)$$

$$S_{,r\theta} = e^{k(t+\phi)} [- \operatorname{sen} \theta k_{,\theta}^2 (t + \phi)^2 - \cos \theta k_{,\theta}(t + \phi) - \operatorname{sen} \theta k_{,\theta\theta}(t + \phi)] \quad (4.66)$$

$$- \cos \theta (\hat{k}_{3,\theta} \phi - (A\hat{\Phi}_0)_{,\theta} t) - \operatorname{sen} \theta (\hat{k}_{3,\theta\theta} \phi - (A\hat{\Phi}_0)_{,\theta\theta} t)$$

Como k no depende de t y ϕ para que se dé la igualdad tiene que ocurrir

$$f^2 k_{,r}^2 = -k_{,\theta}^2 \quad (4.67)$$

$$2f f' k_{,r} + f^2 k_{,rr} = - \cotg \theta k_{,\theta} - k_{,\theta\theta} \quad (4.68)$$

$$2f f' \hat{k}_{3,r} + f^2 \hat{k}_{3,rr} = - \cotg \theta \hat{k}_{3,\theta} - \hat{k}_{3,\theta\theta} \quad (4.69)$$

$$2f f' (-A\hat{\Phi}_0)_{,r} + f^2 (-A\hat{\Phi}_0)_{,rr} = - \cotg \theta (-A\hat{\Phi}_0)_{,\theta} - (-A\hat{\Phi}_0)_{,\theta\theta} \quad (4.70)$$

De la ecuación (4.67) se deduce que

$$k_{,\theta} = ifk_{,r} \quad (4.71)$$

Sustituyendo esta condición en la ecuación (4.68) llegamos a que k debe satisfacer la ecuación diferencial

$$2ff'k_{,r} + f^2k_{,r,r} = -\cotg\theta ifk_{,r} - ifk_{,r,\theta} \quad (4.72)$$

que haciendo la sustitución $\bar{k} = k_{,r}$ equivale a la ecuación lineal no homogénea

$$(2f' + i\cotg\theta)\bar{k} + i\bar{k}_{,\theta} + f\bar{k}_{,r} = 0 \quad (4.73)$$

Su solución viene dada por la función

$$\bar{k} = \tilde{k}(\theta - \tilde{f}(r)) e^{\int_1^r -\frac{i\operatorname{cosec}(\theta - \tilde{f}(r) + \tilde{f}(\lambda))(\cos(\theta - \tilde{f}(r) + \tilde{f}(\lambda)) - 2i\operatorname{sen}(\theta - \tilde{f}(r) + \tilde{f}(\lambda))f'(\lambda))}{f(\lambda)} d\lambda} \quad (4.74)$$

con \tilde{k} una función cualquiera y $\tilde{f}(r) = i \log(r - m\sqrt{r^2 - 2mr + Q})$.

Entonces,

$$k(r, \theta) = \int \bar{k}(r, \theta) dr \quad (4.75)$$

Para resolver la ecuación (4.69) buscaremos una \hat{k}_3 que sea suma de una función de r y una función de θ . De esta forma resultan 2 ecuaciones de variables separadas

$$2f'\hat{k}_{3,r} + f\hat{k}_{3,rr} = 0 \Rightarrow \hat{k}_{3,r} = -f^2 \quad (4.76)$$

$$\cotg\theta\hat{k}_{3,\theta} + \hat{k}_{3,\theta\theta} = 0 \Rightarrow \hat{k}_{3,\theta} = -\operatorname{sen}\theta \quad (4.77)$$

Por lo tanto,

$$\hat{k}_3 = -\frac{1}{3}r^3 + mr^2 - Qr + \cos\theta \quad (4.78)$$

La ecuación (4.70) es igual a la ecuación (4.69) con lo que una solución será

$$\hat{\Phi}_0 = -\frac{\hat{k}_3}{A} \quad (4.79)$$

Una vez determinadas todas las funciones arbitrarias y tras realizar las sustituciones pertinentes el sistema resulta finalmente

$$\Phi_{,t} = -ke^{k(t+\phi)} + \hat{k}_3 \quad (4.80)$$

$$\Phi_{,\phi} = -ke^{k(t+\phi)} + \hat{k}_3 \quad (4.81)$$

$$\Phi_{,r} = -k_{,r}(t+\phi)e^{k(t+\phi)} + \hat{k}_{3,r}(t+\phi) \quad (4.82)$$

$$\Phi_{,\theta} = -k_{,\theta}(t+\phi)e^{k(t+\phi)} + \hat{k}_{3,\theta}(t+\phi) \quad (4.83)$$

Cuya solución es

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = -e^{k(r,\theta)(t+\phi)} + \hat{k}_3(r, \theta)(t + \phi) + c \quad (4.84)$$

Observación 4.2.2. Si tomamos $\Phi_0 = 0$, obtenemos la solución particular $\Phi = \hat{k}_3(t + \phi)$, que no requiere de la condición (4.62) sobre la métrica. Además por la linealidad del laplaciano a esta solución podemos sumarle la solución de la observación (4.2.1) y obtener la solución

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = \hat{k}_3(r, \theta)(t + \phi) + \bar{g}(\theta)\bar{f}(r) + c \quad (4.85)$$

sin restricciones sobre la métrica.

4.3. Soluciones de tipo onda

Al estar trabajando con métricas estacionarias y axial simétricas, resulta natural hacer la separación de las variables t y ϕ por un lado y las variables r y θ por otro, una separación que ya nos ha surgido anteriormente, pero que solo nos ha permitido hallar (4.85) como solución de la ecuación de Teukolsky para todo tipo de métricas estacionarias y axial

simétricas. A continuación buscaremos explícitamente soluciones de la forma

$$\Phi = S(r, \theta)e^{k_1(r, \theta)t + k_2(r, \theta)\phi} \quad (4.86)$$

que son soluciones de tipo onda donde k_1 es la frecuencia en t , k_2 la frecuencia en ϕ y S la amplitud de la onda. Estas soluciones tienen gran interés físico y son las que tienden a aparecer en trabajos anteriores como [1], [15] o [16].

Entonces sustituyendo la expresión de Φ resulta,

$$\Phi_0 = -\frac{k_1}{A}Se^{k_1t + k_2\phi} \quad (4.87)$$

$$\Phi_3 = \left(\frac{k_2A}{F} + \frac{\omega_3k_1}{FA}\right)Se^{k_1t + k_2\phi} \quad (4.88)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{B}[(k_{1,r}t + k_{2,r}\phi)S + S_{,r}]e^{k_1t + k_2\phi} \quad (4.89)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{Bf}[(k_{1,\theta}t + k_{2,\theta}\phi)S + S_{,\theta}]e^{k_1t + k_2\phi} \quad (4.90)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.43) obtenemos un polinomio de grado 2 en t y ϕ cuyos coeficientes son funciones de r y θ . Con el objetivo de simplificar dicho polinomio se pueden seguir dos caminos

- Tomar k_1, k_2 constantes. Entonces se verifica la ecuación (4.43) si y solo si S satisface la ecuación diferencial

$$S\frac{B^2}{A^2}(-f^2k_1^2 + \operatorname{cosec}^2\theta(A^2k_2 + \omega_3k_1)^2) + S_{,\theta}\cotg\theta + S_{,r}2ff' + S_{,\theta\theta} + S_{,rr}f^2 = 0 \quad (4.91)$$

- Tomar $k_1 = k_2 = k(r, \theta)$, entonces la ecuación (4.43) resulta

$$x_0 + x_1(t + \phi) + x_2(t + \phi)^2 = 0 \quad (4.92)$$

donde x_0, x_1 y x_2 son funciones de r y θ que debemos conseguir que se anulen.

Primeramente

$$x_2 = A^3 S(k_{,\theta}^2 + f^2 k_{,r}^2) \quad (4.93)$$

Por lo tanto, $x_2 = 0$ si y solo si

$$k_{,\theta} = i f k_{,r} \quad (4.94)$$

Por otro lado,

$$x_1 = A^3 (2(k_{,\theta} S_{,\theta} + f^2 k_{,r} S_{,r}) + S(\cotg \theta k_{,\theta} + k_{,\theta\theta} + 2f f' k_{,r} + f^2 k_{,rr})) \quad (4.95)$$

Entonces $x_1 = 0$ si se cumple

$$S_{,\theta} = i f S_{,r} \quad (4.96)$$

$$0 = k_{,r} (i \cotg \theta + 2f') + i k_{,r\theta} + f k_{,rr} \quad (4.97)$$

Por último $x_0 = 0$ si y solo si S satisface la ecuación diferencial

$$S B^2 k^2 (\operatorname{cosec}^2 \theta (A^2 + \omega_3)^2 - f^2) + S_{,r} i A^2 \cotg \theta f + S_{,r\theta} i A^2 f + S_{,rr} A^2 f^2 = 0 \quad (4.98)$$

En este trabajo nos centraremos en el primer caso por ser el más prometedor de ser resuelto y el que se puede encontrar en los trabajos anteriormente citados.

Observación 4.3.1. La ecuación (4.91) puede ser hallada también utilizando que el laplaciano es la divergencia del gradiente. Por la expresión (1.21) la divergencia de un campo X^μ es $\nabla_\mu X^\mu = (\sqrt{|det(g)|} X^\mu)_{,\mu}$. Sustituyendo X^μ por el gradiente de Φ , $\nabla \Phi^\mu = \Phi_0 V^\mu + \Phi_1 K^\mu + \Phi_2 L^\mu + \Phi_3 S^\mu$, y el determinante de la métrica por $|det(g)| = B^2 C^2 (A^2 R^2 + \omega_3^2) = B^2 C^2 F^2$, entonces la ecuación de Teukolsky pasa a escribirse

$$\left(\frac{BCF}{A} \Phi_0 \right)_{,t} + (CF \Phi_1)_{,r} + (BF \Phi_2)_{,\theta} + (ABC \Phi_3)_{,\phi} + \left(\frac{\omega_3 BC}{A} \Phi_3 \right)_{,t} = 0 \quad (4.99)$$

Teniendo en cuenta que

$$\Phi_0 = -\frac{1}{A}\Phi_{,t} \quad (4.100)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{B}\Phi_{,r} \quad (4.101)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{C}\Phi_{,\theta} \quad (4.102)$$

$$\Phi_3 = \frac{\omega_3}{AF}\Phi_{,t} + \frac{A}{F}\Phi_{,\phi}, \quad (4.103)$$

la ecuación de Teukolsky termina escribiéndose

$$\left(\frac{\omega_3^2 BC}{A^2 F} - \frac{BCF}{A^2}\right)\Phi_{,tt} + \frac{A^2 BC}{F}\Phi_{,\phi\phi} + 2\frac{BC\omega_3}{F}\Phi_{,t\phi} + (f^2 \operatorname{sen} \theta \Phi_{,r})_{,r} + (\operatorname{sen} \theta \Phi_{,\theta})_{,\theta} = 0 \quad (4.104)$$

Buscando soluciones de la forma $\Phi = S(r, \theta)e^{k_1 t + k_2 \phi}$ con k_1 y k_2 constantes, llegamos a la ecuación (4.91), como queríamos demostrar.

A pesar de todas estas simplificaciones, la ecuación (4.91) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden nada trivial. El método habitual para resolver ecuaciones de este tipo es el método de separación de variables, consistente en buscar soluciones de la forma $S(r, \theta) = S_1(r)S_2(\theta)$. Para poder aplicarlo es condición necesaria y suficiente que el término

$$X(r, \theta) := \frac{B^2}{A^2}(-f^2 k_1^2 + \operatorname{cosec}^2 \theta (A^2 k_2 + \omega_3 k_1)^2) \quad (4.105)$$

admita la separación $X(r, \theta) = X_1(r) + X_2(\theta)$. En este caso obtenemos dos ecuaciones de segundo orden independientes

$$X_1 S_1 + 2f f_{,r} S_{1,r} + f^2 S_{1,rr} = 0 \quad (4.106)$$

$$X_2 S_2 + \cotg \theta S_{2,\theta} + S_{2,\theta\theta} = 0 \quad (4.107)$$

A continuación estudiaremos en qué casos los coeficientes métricos A , B y ω_3 permiten una separación que resuelva estas dos ecuaciones.

4.3.1. Métrica de Schwarzschild

Para la métrica de Schwarzschild (2.17), la ecuación (4.91) pasa a escribirse

$$X(r, \theta)S + \cotg \theta S_{,\theta} + S_{,\theta\theta} + 2(r - m)S_{,r} + (r^2 - 2mr)S_{,rr} = 0 \quad (4.108)$$

con

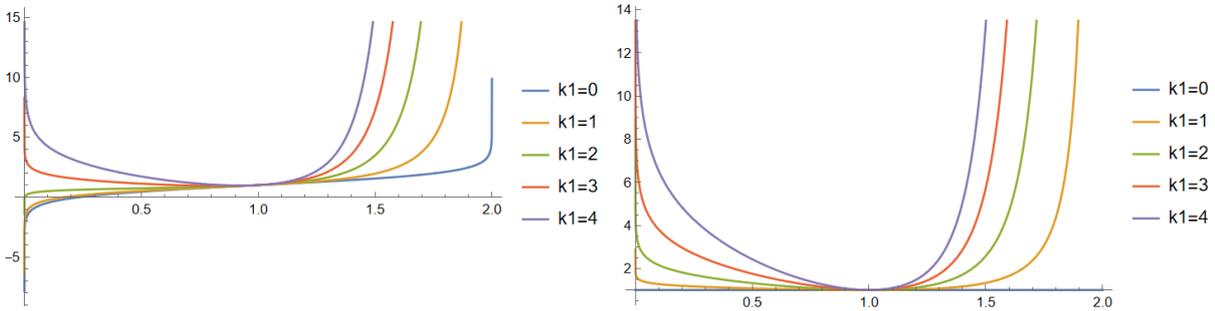
$$X(r, \theta) = \left(k_1^2 \frac{r^3}{2m - r} + k_2^2 \operatorname{cosec}^2 \theta \right) \quad (4.109)$$

Por lo tanto, podemos aplicar el método de separación de variables. De tal manera que si $S = S_1(r)S_2(\theta)$, entonces resolver la ecuación equivale a resolver el sistema

$$0 = k_1^2 \frac{r^3}{2m - r} S_1 + 2(r - m)S_{1,r} + (r^2 - 2mr)S_{1,rr} \quad (4.110)$$

$$0 = k_2^2 \operatorname{cosec}^2 \theta S_2 + \cotg \theta S_{2,\theta} + S_{2,\theta\theta} \quad (4.111)$$

La primera ecuación solo puede resolverse numéricamente.



(a) Con condiciones iniciales $S(1) = 1$, $S'(1) = 1$ (b) Con condiciones iniciales $S(1) = 1$, $S'(1) = 0$

Figura 4.1: Representación de la función S_1 para la métrica de Schwarzschild en unidades $\frac{r}{m}$, para diferentes valores de k_1

La segunda ecuación tiene solución analítica

$$S_2(\theta) = c_1 \cos\left(k_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(k_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (4.112)$$

Observación 4.3.2. $S_1(r)$ es una función que presenta dos singularidades, en $r = 0$

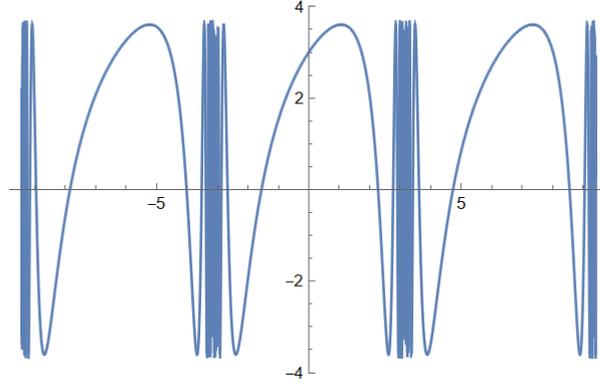


Figura 4.2: Representación de la función $S_1(\theta)$ en el intervalo $(-3\pi, 3\pi)$ con constantes de integración $k_2 = 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 2$.

y en $r = 2m$ (radio de Schwarzschild), en analogía con lo mostrado en la sección 2.4, por otra parte $S_2(\theta)$ es una función de tipo onda y como consecuencia está acotada por las constantes de integración c_1 y c_2 . De todo esto se deduce que la amplitud S de la perturbación depende sobre todo de la variable r siendo una función que se anula cuando lo hace S_2 y que tiende a infinito en $r = 0, 2m$.

4.3.2. Métrica de Kerr

Para la métrica de Kerr (2.18), la ecuación (4.91) pasa a escribirse

$$X(r, \theta)S + \cotg \theta S_{,\theta} + S_{,\theta\theta} + 2(r - m)S_{,r} + (r^2 - 2mr)S_{,rr} = 0 \quad (4.113)$$

donde

$$X(r, \theta) = \frac{-k_1^2 \Delta \Sigma^2 + ((\Sigma - 2mr)k_2 - 4ak_1mr \sen^2 \theta)^2 \operatorname{cosec}^2 \theta}{\Delta(\Sigma - 2mr)}$$

con $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ y $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$.

Tomando $k_1 = 0$ podemos aplicar de nuevo separación de variables pues

$$X(r, \theta) = k_2^2 \left(\frac{-a^2}{a^2 - 2mr + r^2} + \operatorname{cosec}^2 \theta \right) \quad (4.114)$$

Resultando las ecuaciones de segundo orden independientes

$$0 = \frac{-a^2 k_2^2}{a^2 - 2mr + r^2} S_1 + 2(r - m)S_{1,r} + (r^2 - 2mr)S_{1,rr} \quad (4.115)$$

$$0 = k_2^2 \operatorname{cosec}^2 \theta S_2 + \cotg \theta S_{2,\theta} + S_{2,\theta\theta} \quad (4.116)$$

La ecuación correspondiente a S_2 es igual que en la métrica de Schwarzschild, y por tanto, también su solución. La ecuación correspondiente a S_1 puede resolverse numéricamente

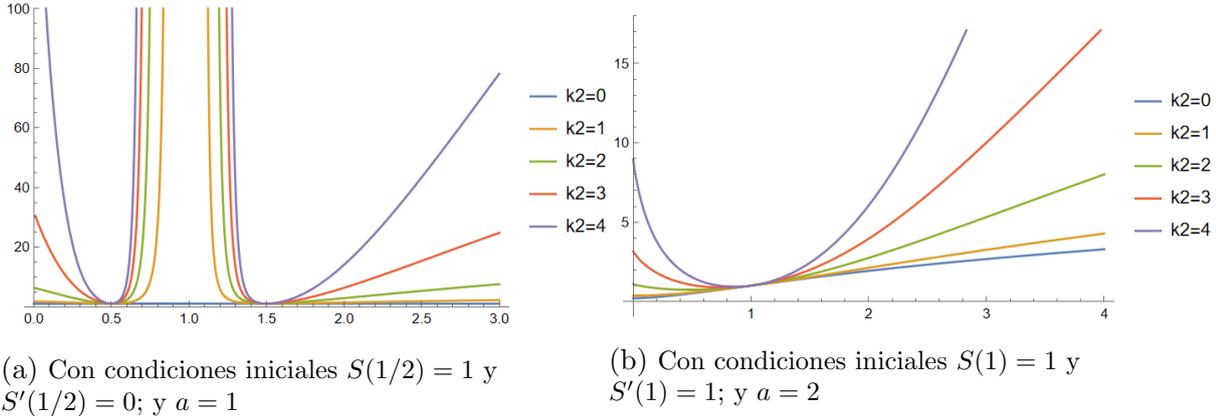


Figura 4.3: Representación de la función S_1 para la métrica de Kerr en unidades $\frac{r}{m}$, para diferentes valores de k_1

Observación 4.3.3. $S_1(r)$ es una función que presenta singularidades, en las raíces del polinomio $r^2 - 2mr + a^2$ que determinan el horizonte de sucesos de un agujero negro de Kerr, en analogía con lo mostrado en la sección 2.4. Como consecuencia cuando $a^2 > m$, es decir, cuando el momento angular es suficientemente grande, podemos eliminar las discontinuidades de S_1 . Por otra parte S_2 es como antes y como consecuencia podemos concluir de nuevo que S es una función que se anula cuando lo hace S_1 y que tiende a infinito cuando r tiende a infinito o a las raíces de $r^2 - 2mr + a^2$.

4.3.3. Otras métricas

Mediante los cambios $S_{1,r} = S_1(r)y_1(r)$, $S_{2,\theta} = S_2(\theta)y_2(\theta)$ de las ecuaciones, conseguimos reducir el orden de (4.106) y (4.107), resultando las ecuaciones de Ricatti

$$f^2 y_1' = -f^2 y_1^2 - 2ff'y_1 - X_1 \quad (4.117)$$

$$y_2' = -y_2^2 - \cotg \theta y_2 - X_2 \quad (4.118)$$

Si bien es cierto que no existe ningún método general que permita resolver una ecuación de Ricatti por cuadraturas, en [4] y [7] se muestran algunas posibles soluciones cuando los coeficientes de la ecuación satisfacen ciertas relaciones.

- **Soluciones de la ecuación (4.117)**

Utilizando el método 1.1 de [7], cuando $X_1 = 2(f_{,rr} - f_{,r}^2)$ se cumple que

$$y_1 = \frac{2(m-r)}{r^2 - 2mr + Q} + \frac{3(r^2 - 2mr + Q)}{r(3Q + r(r - 3m)) + cte} \quad (4.119)$$

Utilizando el método 1.3 de [7], cuando $X_1 = \frac{Q-m^2}{4 \arctg(\frac{m-r}{\sqrt{Q-m^2}})^2}$ se cumple que

$$y_1 = -\frac{\sqrt{Q-m^2} \left(1 + \frac{2}{cte + \log(\arctg(\frac{m-r}{\sqrt{Q-m^2}}))}\right)}{2(r^2 - 2mr + Q) \arctg(\frac{m-r}{\sqrt{Q-m^2}})} \quad (4.120)$$

Utilizando el método 1 de [4], cuando $X_1 = \frac{1}{4}f^2(f_1 - (-2\frac{f'}{f} - \int \frac{4(f'/f)^2 - f_1}{2} dr + cte)^2)$

para una función arbitraria $f_1 = f_1(r)$, se cumple que

$$y_1 = \frac{e^{\int \sqrt{f_1 - 4X_1/f^2} dr}}{c_1 + \int e^{\int \sqrt{f_1 - 4X_1/f^2} dr} dr} + \frac{1}{2} \left(\int \frac{4(f'/f)^2 - f_1}{2} dr + c_2 \right) \quad (4.121)$$

- **Soluciones de la ecuación (4.118)**

Aplicando el método 1.1 de [7], llegamos a que cuando $X_2 = \text{cosec}^2 \theta$

$$y_2 = \cotg \theta + \frac{\text{cosec} \theta}{cte + \log(\text{tg}(\frac{\theta}{2}))} \quad (4.122)$$

Aplicando el método 1.3 de [7], llegamos a que cuando $X_2 = \frac{-\text{cosec}^2 \theta}{4 \log(\text{tg}(\frac{\theta}{2}))}$

$$y_2 = \frac{1}{2} \frac{\text{cosec} \theta}{\log(\cotg \frac{\theta}{2})} \left(1 + \frac{1}{cte + \frac{1}{2} \log(\log(\cotg \frac{\theta}{2})) \frac{\text{cosec} \theta}{\log(\cotg \frac{\theta}{2})} \log(\text{tg} \frac{\theta}{2}) \text{sen} \theta} \right) \quad (4.123)$$

Utilizando el método 1 de [4], cuando $X_2 = \frac{1}{4}(f_2 - (-\cotg \theta - \int \frac{\cotg^2 \theta - f_2}{2} dr + cte)^2)$ para una función arbitraria $f_1 = f_2(\theta)$, se cumple que

$$y_2 = \frac{e^{\int \sqrt{f_2 - 4X_2} dr}}{c_1 + \int e^{\int \sqrt{f_2 - 4X_2} dr} dr} + \frac{1}{2} \left(\int \frac{\cotg^2 \theta - f_2}{2} dr + c_2 \right) \quad (4.124)$$

Combinando las 2 primeras soluciones de las ecuaciones (4.117) y (4.118) llegamos a las siguientes 4 soluciones de la ecuación (4.91):

1. Cuando la métrica cumple la condición

$$X(r, \theta) = 2 \frac{-r^2 + 2mr + Q - 2m^2}{r^2 - 2mr + Q} + \text{cosec}^2 \theta \quad (4.125)$$

la solución es

$$S = c_1 \left(\frac{c_2 + r(3Q + r(r - 3m))}{r^2 - 2mr + Q} \right) \left(\text{sen} \theta (c_3 - \log(\text{tg}(\frac{\theta}{2}))) \right) \quad (4.126)$$

2. Cuando la métrica cumple la condición

$$X(r, \theta) = 2 \frac{-r^2 + 2mr + Q - 2m^2}{r^2 - 2mr + Q} - \frac{\text{cosec}^2 \theta}{4 \log(\text{tg}(\frac{\theta}{2}))^2} \quad (4.127)$$

la solución es

$$S = c_1 \left(\frac{c_2 + r(3Q + r(r - 3m))}{r^2 - 2mr + Q} \right) \left(\frac{c_3 - \log(\log(\cotg \frac{\theta}{2}))}{\sqrt{\log(\cotg \frac{\theta}{2})}} \right) \quad (4.128)$$

3. Cuando la métrica cumple la condición

$$X(r, \theta) = \frac{Q - m^2}{4(-r^2 + 2mr - Q) \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m-r}{\sqrt{Q-m^2}}\right)^2} + \operatorname{cosec}^2 \theta \quad (4.129)$$

la solución es

$$S = c_1 \sqrt{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m-r}{\sqrt{Q-m^2}}\right) \left(c_2 + \log\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m-r}{\sqrt{Q-m^2}}\right)\right) \right)} \left(\operatorname{sen} \theta \left(c_3 - \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \right) \right) \quad (4.130)$$

4. Cuando la métrica cumple la condición

$$X(r, \theta) = \frac{Q - m^2}{4(-r^2 + 2mr - Q) \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m-r}{\sqrt{Q-m^2}}\right)^2} - \frac{\operatorname{cosec}^2 \theta}{4 \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} \quad (4.131)$$

la solución es

$$S = c_1 \sqrt{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m-r}{\sqrt{Q-m^2}}\right) \left(c_2 + \log\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m-r}{\sqrt{Q-m^2}}\right)\right) \right)} \left(\frac{c_3 - \log(\log(\cotg \frac{\theta}{2}))}{\sqrt{\log(\cotg \frac{\theta}{2})}} \right) \quad (4.132)$$

Utilizando las soluciones (4.121) y (4.124) podemos obtener 5 soluciones más de la ecuación (4.91) en términos de cuadraturas. Especial interés tiene la solución que atañe a (4.121) y (4.124) pues en la condición métrica

$$X = \frac{1}{4} f^2 \left(f_1 - \left(-2 \frac{f'}{f} - \int \frac{4(f'/f)^2 - f_1}{2} dr + cte \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \left(f_2 - \left(-\cotg \theta - \int \frac{\cotg^2 \theta - f_2}{2} dr + c_2 \right)^2 \right) \quad (4.133)$$

aparecen dos funciones arbitrarias $f_1(r)$, $f_2(\theta)$ que podemos intentar ajustar para que

se satisfaga dicha condición. Otra opción sería variar f_1 y f_2 para generar soluciones y después encontrar las métricas correspondientes.

Ejemplo 4.3.1. Tomando $f_1 = 4\frac{(f')^2}{f^2}$ y $f_2 = \cotg^2 \theta$ como casos sencillos, obtenemos la solución

$$S(r, \theta) = c_1 \left(c_2 \sqrt{Q - m^2} + \text{arc tg} \left(\frac{r - m}{\sqrt{Q - m^2}} \right) \right) \left(c_3 - \log \left(\text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right) \quad (4.134)$$

y la métrica correspondiente será aquella para la cual $X = 8(r - m)^2 + \frac{1}{2} \cotg^2 \theta$.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Análisis de los resultados obtenidos

A lo largo del capítulo anterior, haciendo uso del formalismo 1+3, se llevó a cabo un estudio de las soluciones de la ecuación de Teukolsky para métricas estacionarias y axial simétricas.

Primeramente la ecuación de segundo orden $\Delta_\mu T = 0$ pudo ser reducida a un sistema de ecuaciones de primer orden. Sin embargo, este sistema no podía ser resuelto de manera general sin imponer ciertas condiciones sobre los tipos de soluciones y/o los coeficientes métricos. Es por ello que a continuación se propuso encontrar soluciones de tipo onda, similares a las halladas por Teukolsky ([15], [16]) para diferentes espacios-tiempos. Aplicando el método de separación de variables se consiguió reducir el problema original a la resolución de dos ecuaciones de Ricatti independientes. A falta de un método general para resolverlas se propusieron diferentes espacios-tiempos donde las ecuaciones podían ser integradas completamente. Por desgracia estos no eran los casos de las métricas de Kerr y Schwarzschild, por lo que este método fracasó a la hora de intentar replicar los resultados de Teukolsky.

Si bien es cierto que, al no lograr el objetivo propuesto de obtener una solución de la ecuación de la perturbación para métricas más generales, no se han podido generalizar

trabajos anteriores como se esperaba, este nuevo enfoque a la hora de tratar esta ecuación ha permitido no solo encontrar de forma explícita nuevas soluciones, sino que ha proporcionado un procedimiento para generar futuras soluciones.

5.2. Desarrollos futuros

La solución más general de la ecuación de Teukolsky hallada en la memoria fue (4.85), válida para cualquier clase de espacio-tiempo estacionario y axial simétrico, y cuya expresión venía dada por un polinomio de grado 1 en t y ϕ con coeficientes dependientes de r y θ . Sin embargo, para soluciones de tipo $\Phi = S(r, \theta)e^{k_1(r, \theta)t + k_2(r, \theta)\phi}$, similares a las encontradas por otros autores, se han conseguido únicamente soluciones particulares. Cuando los coeficientes k_1 y k_2 son constantes no parece haber posibilidad de una solución general por lo visto en la sección 4.3, no obstante si k_1 y k_2 fueran ciertas funciones específicas sí que podría darse el caso. Con las notaciones y el planteamiento de la subsección 4.2.2, la condición métrica (4.62) fue impuesta debido a la necesidad de que se verificara la ecuación (4.60). Esta condición métrica puede obviarse tomando

$$k_2 = k_1 \frac{F - \omega_3}{A^2} \quad (5.1)$$

Para este valor de k_2 se cumple que (4.56) es igual a (4.58) y que (4.57) es igual a (4.59) de tal manera que las condiciones de integrabilidad del sistema (4.52) se verificarían con

$$S_{,\theta} = f^2 \sin \theta \frac{1}{k_1^2} [k_1 ((-A\tilde{\Phi}_0)_{,r} - A\tilde{\Phi}_0(k_{1,r}t + k_{2,r}\phi)) + A\tilde{\Phi}_0 k_{1,r}] e^{k_1 t + k_2 \phi} \quad (5.2)$$

$$S_{,r} = -\sin \theta \frac{1}{k_1^2} [k_1 ((-A\tilde{\Phi}_0)_{,\theta} - A\tilde{\Phi}_0(k_{1,\theta}t + k_{2,\theta}\phi)) + A\tilde{\Phi}_0 k_{1,\theta}] e^{k_1 t + k_2 \phi} \quad (5.3)$$

donde hemos tomado, por simplicidad, $\hat{\Phi}_0 = \hat{k}_3 = S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0$. El problema surge a la hora de determinar una función S tal que $S_{,\theta,r} = S_{,r\theta}$. Parece que una buena opción es tomar $\tilde{\Phi}_0 = k_1/A$ pues las expresiones se simplifican bastante. En ese caso el

problema se reduce a encontrar una función $k_1(r, \theta)$ tal que

$$\begin{aligned}
 -f^2(k_{1,r}t + k_{2,r}\phi)^2 - 2ff'(k_{1,r}t + k_{2,r}\phi) - f^2(k_{1,rr}t + k_{2,rr}\phi) = \\
 = (k_{1,\theta}t + k_{2,\theta}\phi)^2 + \cotg \theta(k_{1,\theta}t + k_{2,\theta}\phi) + (k_{1,\theta\theta}t + k_{2,\theta\theta}\phi)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Sin embargo, no se encontró ninguna k_1 que resolviera esta ecuación. Otra opción sería buscar otras expresiones para la función $\tilde{\Phi}_0$. En caso de encontrar k_1 y $\tilde{\Phi}_0$ verificando que $S_{,\theta r} = S_{,r\theta}$, la solución del sistema sería

$$\Phi = \frac{-A\tilde{\Phi}_0}{k_1} e^{k_1 t + k_2 \phi}$$

En los próximos trabajos que desarrollaremos buscaremos soluciones más generales de la ecuación de Teukolsky, para el caso de métricas estacionarias axial simétricas, haciendo uso del tensor de Killing que dichos espacio-tiempo admiten (ver [9]).

Bibliografía

- [1] Baines, Joshua, et al. “Killing Tensor and Carter Constant for Painlevé–Gullstrand Form of Lense–Thirring Spacetime”. *Universe* 7.12 (2021): 473.
- [2] B. O’Neill. “Semi-Riemannian Geometry”. Academic Press, 1983.
- [3] Guadalajara, Víctor Hugo. “Perturbaciones gravitacionales en el formalismo de Newman-Penrose”. Tesis. Universidad de Guadalajara, 2015.
- [4] Harko, Tiberiu, Francisco SN Lobo, and M. K. Mak. “Analytical solutions of the Riccati equation with coefficients satisfying integral or differential conditions with arbitrary functions”. arXiv preprint arXiv:1311.1150 (2013).
- [5] Kang, YuRi, and Sung-Won Kim. “The gravitational perturbation of a Morris–Thorne wormhole and the Newman–Penrose formalism”. *Classical and Quantum Gravity* 37.10 (2020): 105012.
- [6] Krivan, William, Pablo Laguna, and Philippos Papadopoulos. “Dynamics of scalar fields in the background of rotating black holes.” *Physical Review D* 54.8 (1996): 4728.
- [7] Moscoso, José Alfredo Jiménez. “La solución de algunas EDO de Riccati”. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet* 15.2 (2015).
- [8] Ospino, J., J. L. Hernández-Pastora, and L. A. Núñez. “An equivalent system of Einstein Equations.” *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 831. No. 1. IOP Publishing, 2017.

- [9] Ospino, J., Hernández-Pastora, J.L. & Núñez, L.A. “All analytic solutions for geodesic motion in axially symmetric space-times”. *Eur. Phys. J. C* 82, 591 (2022). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10544-1> .
- [10] Paternain, Gabriel P. “Geodesic flows.” Vol. 180. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] Regge, Tullio, and John A. Wheeler. “Stability of a Schwarzschild singularity.” *Physical Review* 108.4 (1957): 1063.
- [12] Sachs, Rainer Kurt, and H-H. Wu. “General relativity for mathematicians”. Vol. 48. Springer Science & Business Media, 2012.
- [13] Schutz, Bernard. “A first course in general relativity”. Cambridge university press, 2022.
- [14] Sotiriou, Thomas P. “Black holes and scalar fields”. arXiv preprint arXiv:1505.00248 (2015).
- [15] Teukolsky, Saul A. “Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations.” *Physical Review Letters* 29.16 (1972): 1114.
- [16] Teukolsky, Saul A. “Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations.” *The Astrophysical Journal* 185 (1973): 635-648.
- [17] Van Elst, Henk, and Claes Uggla. “General relativistic orthonormal frame approach”. *Classical and Quantum Gravity* 14.9 (1997): 2673.
- [18] Weinberg, Steven. “Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity.” (1972).

- [19] Zerilli, Frank J. “Effective potential for even-parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations.” *Physical Review Letters* 24.13 (1970): 737.
- [20] Zilberman, Noa, et al. “Two-point function of a quantum scalar field in the interior region of a Kerr black hole”. arXiv preprint arXiv:2203.07780 (2022).