

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA  
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

# Órbitas de las estrellas S2 y G2

AUTOR/AUTORA: Esther Padilla Expósito

TUTOR/TUTORES: Justo Hernán Ospino Zúñiga  
Luis A. Núñez de Villavicencio

Curso 2021-2022





VNiVERSiDAD  
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA  
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

# Órbitas de las estrellas S2 y G2

AUTOR/AUTORA:  
Esther Padilla Expósito

TUTOR/TUTORES:  
Justo Hernán Ospino Zúñiga  
Luis A. Núñez de Villavicencio

Curso 2021-2022



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Geometría Diferencial y Reatividad General</b>	<b>5</b>
1.1. Nociones de geometría diferencial	5
1.1.1. Espacio tangente	6
1.1.2. Campos vectoriales	7
1.1.3. 1-formas	8
1.1.4. Campos tensoriales	9
1.2. Métrica	11
1.3. Conexión de Levi-Civita	12
1.4. Derivadas de Lie y vectores de Killing	13
1.4.1. Flujo local y grupo 1-paramétrico de transformaciones	13
1.4.2. Derivada de Lie	14
1.4.3. Vectores de Killing	15
1.5. Geodésicas	15
1.6. El espacio-tiempo	16
1.7. Tensores de Riemman, Ricci y Weyl	18
1.8. Ecuación de Einstein	19
<b>2. Planteamiento del problema y objetivos</b>	<b>21</b>
2.1. Planteamiento del problema	21
2.2. Alternativas al problema	22
2.2.1. Modelo con materia oscura	22
2.2.2. Formalismo 1+3	23
2.3. Objetivos	23
<b>3. El nuevo enfoque</b>	<b>24</b>
3.1. Tétrada y escalares de estructura	24
3.1.1. Derivada Covariante de la Tétrada	25
3.1.2. Escalares de estructura	26
3.2. Soluciones en el vacío	27
3.3. Geodésicas	28

<b>4. Aplicación y Resultados</b>	<b>31</b>
4.1. Métrica de Schwarzschild . . . . .	31
4.1.1. Ajuste a los datos observacionales de S2 . . . . .	34
4.1.2. Ajuste a los datos observacionales de G2 . . . . .	37
4.2. Métrica de Kerr . . . . .	38
<b>5. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>6. Desarrollos futuros</b>	<b>44</b>
<b>Apéndice</b>	<b>45</b>
Datos observacionales de G2 . . . . .	45
Datos observacionales de S2 . . . . .	46
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

# Índice de figuras

2.1. Primera imagen de Sagitario A*, agujero negro de la Vía Lactea [19]. . . .	22
4.1. Solución elíptica de la función (4.19). . . . .	33
4.2. Ajuste de la órbita $r(\phi)$ a los datos observacionales de la estrella S2 con la métrica de Schwarzschild . . . . .	35
4.3. Ajuste de la órbita $r(\phi)$ a los datos observacionales de la estrella G2 con la métrica de Schwarzschild. . . . .	37
4.4. Órbita $r(\phi)$ , para la métrica de Kerr de un objeto que viene del exterior y se queda orbitando alrededor de la fuente. . . . .	41
4.5. Órbita $r(\phi)$ para la métrica de Kerr de un objeto que sale de la fuente y se queda orbitando alrededor de ella. . . . .	42

# Resumen

La teoría de la relatividad general se construye con la maquinaria matemática de la geometría diferencial, lo que hace que cualquier problema dentro de este ámbito de la física se formule usando un sistema de coordenadas local como base. Esta formulación dificulta la resolución de ecuaciones como las ecuaciones de campo de Einstein, que forman un sistema de 10 ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden no lineales.

El problema que aquí nos concierne, es el provocado por G2, uno de los objetos cuya órbita pasa cerca de la fuente compacta, situada en el centro de nuestra galaxia, Sagitario A\*. Según las mediciones más recientes, el movimiento de G2 ha sido algo inusual, y no explica la hipótesis, ya confirmada, de que Sagitario A\* sea un agujero negro, cosa que sí hace bastante bien la órbita de la estrella S2.

Abordaremos este problema mediante el formalismo 1+3, este es un formalismo de tétrada que con el que se ha podido clasificar todas las geodésicas posibles alrededor de objetos compactos axialmente simétricos en función de unos escalares de estructura, que están relacionados con las variables físicas de la fuente, y se han obtenido de la derivada covariante de los elementos de la tétrada.

Usando esa clasificación de geodésicas y los datos observacionales de S2 y G2, obtendremos las expresiones de sus órbitas, y trataremos de obtener las propiedades del agujero negro del centro de nuestra galaxia.

**Palabras Clave**— Geometría diferencial - Variedad diferenciable - Espacio tangente - Campo de vectores - Campo de tensores - Derivada covariante - Conexión de Levi-Civita - Derivada de Lie - Vectores de Killing - Tensor métrico - Variedad semi-Riemanniana - Variedad Lorentziana - Espacio-tiempo - Tensor de Riemann - Tensor de Ricci - Curvatura escalar - Tensor de Weyl - Tensor energía-impulso - Tensor de Einstein - Ecuación de Einstein - Relatividad General - Tétrada - Formalismo 1+3 - Escalares geométricos - Geodésicas - Soluciones de vacío - Órbita - Solución de Schwarzschild - Solución de Kerr



# Abstract

The general theory of relativity is built on the mathematical machinery of differential geometry, which means that any problem within this field is formulated using a local coordinate system as a basis. This formulation makes it difficult to solve equations such as the Einstein field equations, which form a system of 10 nonlinear second-order partial derivative equations.

The problem that concerns us is caused by G2, one of the objects whose orbit passes close to the compact source, located in the center of our galaxy, Sagittarius A\*. According to the most recent measurements, the movement of G2 has been somewhat unusual, and does not explain the hypothesis, already confirmed, that Sagittarius A\* is a black hole, which the orbit of the star S2 does quite well.

We will address this problem using the 1+3 formalism, this is a tetrad formalism with which it has been possible to classify all geodesics around axially symmetric compact objects based on some structure scalars, which are related to the physical variables of the source, and have been obtained from the covariant derivative of the elements of the tetrad.

Using that classification of geodesics and the observational data of S2 and G2, we will obtain the expressions of their orbits, and we will try to obtain the properties of the black hole at the center of our galaxy.

**Keywords**— Differential geometry - Differentiable manifold - Tangent space - Vector field - Tensor field - Covariant derivative - Levi-Civita connection - Lie derivative - Killing vectors - Metric tensor - Semi-Riemannian manifold - Lorentzian manifold - Space-time - Tensor Riemannian - Ricci Tensor - Scalar Curvature - Weyl Tensor - Energy-Impulse Tensor - Einstein Tensor - Einstein Equation - General Relativity - Tetrad - Formalism 1+3 - Geometric Scalars - Geodesics - Vacuum Solutions - Orbit - Solution of Schwarzschild - Kerr's solution

# Introducción

Poco más de un siglo hace que Einstein postuló su teoría de la relatividad general, que declara que un objeto masivo curva el espacio-tiempo, siendo la gravitación la manifestación de esa curvatura o distorsión, y quedando esto reflejado matemáticamente en las ecuaciones de campo de Einstein. A día de hoy es la teoría más vigente que tenemos sobre la gravitación, y a pesar de su complejidad intelectual, ha sido validada observacionalmente. Ha sido capaz de explicar el avance del perihelio de Mercurio, que hasta 1915, la conocida Ley de Gravitación Universal de Newton era incapaz de justificar. Además, ha pronosticado fenómenos como la curvatura de la luz al acercarse al campo gravitatorio de una fuente, la existencia de ondas gravitacionales y de agujeros negros, así como el movimiento de la estrella tipo S más cercana al centro de nuestra galaxia, la estrella S2.

[20] La órbita de S2 explica perfectamente que en el centro de la Vía Láctea yace un objeto compacto masivo, Sagitario A\*, siendo confirmado recientemente como un agujero negro. Sin embargo, en sus cercanías, se ha descubierto otro objeto, cuyo movimiento desafía a Einstein, y a su teoría de la relatividad, G2. La velocidad radial de G2 es más baja que la de un movimiento kepleriano en las inmediaciones de Sagitario A\*, lo que pone en duda la su naturaleza.

Distintas alternativas que tratan de explicar el comportamiento de G2 surgieron, antes de verificarse que fuera un agujero negro, ante este problema, como la de introducir la acción de una fuerza de arrastre ejercida por un flujo de acreción. Otra propuesta, fue la de Ruffini-Argüelles-Rueda [13], que radica en suponer que el objeto compacto es un núcleo de materia oscura hecho de fermiones. Esta hipótesis explicaba bastante bien las órbitas de S2 y G2, la de esta última sin introducir la fuerza de arrastre.

Lo que proponemos en este trabajo para abordar el problema, es reescribir las ecuaciones de la relatividad general, para los casos de campos gravitacionales generados por objetos estacionarios y axialmente simétricos: mediante el formalismo 1+3. Bajo este marco construiremos una tétrada a conveniencia, y escribiremos las ecuaciones en términos de esta tétrada y de los escalares de estructura, que obtenemos de derivarla covariantemente. [20] Con estos escalares será posible clasificar todas las geodésicas que describan la clase de campos gravitacionales con los que vamos a trabajar, y ayudándonos de esa clasificación obtendremos las órbitas de S2 y G2, con las que trataremos de caracterizar el agujero negro Sagitario A\*.

Este trabajo constará de seis capítulos: En el primero veremos un resumen de la base de geometría diferencial con la que se construye la teoría de la relatividad general. Empezaremos con el concepto de variedad diferenciable, y así, fijar la notación a seguir, e iremos avanzando hasta la formulación de la ecuación de Einstein. A continuación, seguiremos con el capítulo 2, en él se planteará el problema que ha motivado la realización de este trabajo, se explicará en qué consiste el enfoque con el que vamos a trabajar y fijaremos los objetivos tras los que vamos a ir. En el tercero, construiremos la tétrada, obtendremos los escalares de estructura, se reescri-

birá la ecuación de Einstein y clasificaremos las geodésicas. Seguiremos con el cuarto capítulo, aplicaremos las geodésicas a las métricas de Schwarzschild y Kerr, y obtendremos las órbitas de S2 y G2. Para finalizar, en el capítulo 5 se dará un resumen de las conclusiones a las que se ha llegado tras este estudio, y en el capítulo 6 se dará una idea de los desarrollos futuros que se podrían seguir a partir de lo visto aquí.

# Capítulo 1

## Geometría Diferencial y Relatividad General

Este capítulo puede dividirse en dos partes bien diferenciadas. La primera, intentará ser un resumen de conceptos básicos de geometría diferencial. Empezaremos fijando notación con la noción de variedad diferenciable, y a partir de ahí iremos introduciendo conceptos como el de espacio tangente, campo de vectores, o el de campo tensorial. En la segunda parte, y con la ayuda de lo visto anteriormente, iremos discutiendo todos los elementos matemáticos necesarios para el desarrollo de este trabajo, y terminaremos con la construcción de la ecuación de campo de Einstein.

El fin de este capítulo no es realizar un estudio exhaustivo de geometría diferencial, sino definir conceptos y edificar los cimientos sobre los que vamos a estudiar, de manera que este trabajo sea lo más autocompleto posible. Por ello, sólo se enunciarán los resultados más importantes prescindiendo de demostraciones. Para profundizar en el tema se puede consultar en [1], [3] y [5]

### 1.1. Nociones de geometría diferencial

Los objetos matemáticos básicos sobre los que se erige la teoría de la relatividad son las variedades diferenciables, estructuras geométricas que localmente se asemejan al espacio euclídeo, en los que las nociones de integración y diferenciación tienen sentido, y que nos permite escribir sus elementos a través de coordenadas. Por consiguiente comenzamos este capítulo fijando la noción de variedad diferenciable.

Sea  $(M, \mathcal{A})$  una **variedad diferenciable** de dimensión  $m$ , donde  $M$  es un espacio topológico de Hausdorff  $2^\circ$  numerable y  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$  un **atlas** de dimensión  $m$  sobre  $M$ . Para las **cartas locales** que conforman el atlas, tenemos que los  $U_i$  son abiertos de  $M$  y las aplicaciones  $\varphi_i: U_i \rightarrow \varphi_i(U_i)$  **homeomorfismos**, tales que  $\varphi_i(U_i)$  son abiertos de  $\mathbb{R}^m$ , para todo  $i \in A$ , siendo  $A$  un conjunto de índices. Además, si fijamos una de esas cartas  $(U, \varphi)$ , y tomamos un punto  $p \in U$  tenemos que  $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$ , con  $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$  la **i-ésima función coordenada** de  $\varphi$  que proyecta la coordenada i-ésima, y claramente es diferenciable.

Una vez definidos los espacios sobre los que vamos a trabajar podemos definir funciones en estas estructuras, las que requeriremos que sean diferenciables.

**Definición 1.1.1.** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente. Diremos que una aplicación continua  $F: M \rightarrow N$  es diferenciable en  $p \in M$  si para toda carta  $(W, \psi)$  de  $N$  con  $F(p) \in W$  existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  tal que  $p \in U$ , y se tiene que

$$\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap F^{-1}(W)) \rightarrow \psi(W) \quad (1.1)$$

es diferenciable en  $\varphi(p)$ , aplicación que obtenemos del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & W \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\tilde{F}} & \psi(W) \end{array}$$

Además,  $F$  será diferenciable si lo es para todo  $p \in M$ .

**Nota 1.1.1.**

1. La definición anterior no depende de las cartas elegidas para  $p$  y  $F(p)$ .
2. Denotaremos por  $\mathcal{F}(M, N)$  al conjunto de todas las funciones diferenciables que van de una variedad diferenciable  $M$  a otra  $N$ . Si  $N = \mathbb{R}$  se denotará como  $\mathcal{F}(M)$ .

### 1.1.1. Espacio tangente

Las variedades diferenciables no tienen, en general, estructura de espacio vectorial. Esto impide que los conceptos de derivada o diferenciabilidad puedan trasladarse directamente a una variedad. El primer paso para arreglarlo es asociar a cada punto de la variedad diferenciable, de dimensión  $m$ , un espacio vectorial con la misma dimensión, que contenga todos los vectores tangentes a la variedad en ese punto.

**Definición 1.1.2.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, y  $p \in M$ . Definimos un **vector tangente** a  $M$  en  $p$  a la función  $v: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$ , para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ ,
2.  $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ , para todo  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ .

**Definición 1.1.3.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ . El **espacio tangente** a  $M$  en  $p$ , que denotaremos como  $T_pM$ , es el conjunto de vectores tangentes a  $M$  en  $p$ . Además, llamaremos **fibrado tangente** a

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM. \quad (1.2)$$

**Nota 1.1.2.**

- A todo  $v \in T_pM$  lo llamaremos **vector contravariante**.
- El fibrado tangente  $TM$  tiene estructura de variedad diferenciable.

**Proposición 1.1.1.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta local de  $M$ . Tomando  $p \in U$  se puede definir una base ordenada  $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^m})_p\}$  de  $T_p U$  con la que todo vector tangente  $v \in T_p(U)$  puede expresarse como una combinación de elementos de la base

$$v = \sum_{i=1}^m v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \quad (1.3)$$

donde las componentes de  $v$  son las funciones  $v^i = v(x^i)$ .

**Definición 1.1.4.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Para cada  $p \in M$  se define la **diferencial** de  $f$  en  $p$  como la aplicación lineal

$$\begin{aligned} df_p: T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto df_p(v) = v(f). \end{aligned} \quad (1.4)$$

De la definición (1.1.4) se puede comprobar que  $df_p$  es una aplicación lineal, y por tanto un elemento de su espacio dual, el cual estudiaremos en la sección (1.1.3). Además, cada aplicación diferenciable  $F: M \rightarrow N$  entre variedades diferenciables induce aplicaciones lineales entre sus correspondientes espacios tangentes.

**Definición 1.1.5.** Sean  $F: M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable,  $f \in \mathcal{F}(N)$  y  $p \in M$ . Definimos la **diferencial** de  $F$  en  $p$  como la aplicación lineal

$$\begin{aligned} dF_p: T_p M &\longrightarrow T_{F(p)} N \\ v &\longmapsto dF_p(v) = v(f \circ F), \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde  $f \circ F \in \mathcal{F}(M)$  función diferenciable.

## 1.1.2. Campos vectoriales

En el apartado anterior vimos cómo asignarle a cada punto de la variedad diferenciable un espacio tangente. Ahora, con ayuda de esos espacios, queremos asignarle a cada punto de la variedad un vector tangente.

**Definición 1.1.6.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Denominaremos **campo vectorial** sobre la variedad  $M$  a toda aplicación de la forma  $X: M \rightarrow TM$  que asocia a cada  $p \in M$  un vector tangente  $X_p \in T_p M$ .

**Nota 1.1.3.** El campo vectorial también lo podemos definir como una aplicación entre el conjunto de todas las funciones diferenciables de  $M$  en  $\mathbb{R}$ , en sí mismo, es decir,  $X: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ , de tal manera que  $(X(f))(p) = X_p(f)$  para toda  $p \in M$ , donde  $X_p \in T_p M$ .

Dado que el fibrado tangente  $TM$  tiene estructura de variedad diferenciable, como hemos mencionado en la nota (1.1.2), podemos interpretar un campo de vectores  $X$  como una aplicación de la variedad diferenciable  $M$  en su fibrado tangente  $TM$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ & \searrow \pi \circ X = Id & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

donde  $\pi$  es la proyección del fibrado en la variedad diferenciable  $M$ , y  $\pi \circ X$  es la identidad sobre  $M$ . Sabiendo esto, parece razonable exigirle al campo de vectores que sea diferenciable.

**Definición 1.1.7.** Sea  $M$  una variedad diferenciables. Diremos que el campo vectorial  $X$  sobre  $M$  es diferenciable si  $X(f)$  es diferenciable para toda  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Al conjunto formado por todos los campos vectoriales diferenciables sobre  $M$  se denotará como  $\mathfrak{X}(M)$ .

En la proposición (1.1.1) pudimos escribir los vectores del espacio tangente en función de una base generada a partir del sistema de coordenadas locales que habíamos fijado. Con los campos vectoriales pasa lo mismo.

**Proposición 1.1.2.** Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$ ,  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta local en  $M$  y  $X$  un campo vectorial sobre  $M$ . Podemos definir una base  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$  de  $\mathfrak{X}(U)$  de tal manera que  $X \in \mathfrak{X}(U)$  puede expresarse como

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (1.6)$$

donde  $X^i$  son funciones diferenciables definidas en  $U$ .

Por la nota (1.1.3) sabemos que si  $X$  e  $Y$  son dos campos de vectores diferenciables y  $f \in \mathcal{F}(M)$  es una función diferenciable, entonces  $X(Y(f))$  e  $Y(X(f))$  son funciones diferenciables. Sin embargo, no son nuevos campos de vectores diferenciables. Con la siguiente definición podemos establecer la diferencia de ambas iteraciones como un nuevo campo de vectores.

**Definición 1.1.8.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $X$  e  $Y$  dos campos de vectores diferenciables sobre  $M$ . Definimos como **producto corchete**, o **corchete de Lie**, a la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] = XY - YX. \end{aligned} \quad (1.7)$$

verificando las siguientes propiedades:

- Antisimetría  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- La identidad de Jacobi  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ ,
- La regla de Leibnitz  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

para cualquier  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ .

### 1.1.3. 1-formas

Como mencionamos en el apartado (1.1.1), a los espacios tangentes, y por ende, al fibrado tangente les corresponden sus respectivos espacios duales.

**Definición 1.1.9.** Sean  $M$  una variedad diferencial y  $p \in M$ . Definimos el **espacio cotangente** como el espacio dual del espacio tangente  $T_p(M)$ , esto es

$$T_p M^* = \{\omega : T_p M \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ es lineal}\}. \quad (1.8)$$

Se denomina **fibrado cotangente** a

$$TM^* = \bigcup_{p \in M} T_p M^*. \quad (1.9)$$

**Nota 1.1.4.** A todo  $\omega \in T_p M^*$  lo vamos a denominar **vector covariante** o **covector**.

Y al igual que asignamos a cada punto de una variedad diferenciable un vector mediante un campo de vectores, podemos asignar a cada punto un covector.

**Definición 1.1.10.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ . Llamaremos **1-forma** a cualquier aplicación  $\omega : M \rightarrow TM^*$  que a cada  $p \in M$  le asocia un vector covariante  $\omega_p \in T_p(M)^*$ .

**Nota 1.1.5.** Las 1-formas también se pueden definir de manera equivalente como las aplicaciones  $\omega : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  que asocian  $X$  a  $\omega(X)$  para cada  $p \in M$ , donde  $\omega(X)$  envía cada  $p \in M$  a  $\omega_p(X_p)$ .

**Definición 1.1.11.** Una 1-forma  $\omega$  sobre la variedad diferenciable  $M$  se dice **diferenciable** si  $\omega(X)$  es diferenciable para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Al conjunto de todas las 1-formas diferenciables sobre  $M$  se denotará por  $\mathfrak{X}(M)^*$ .

**Definición 1.1.12.** Dado  $M$  una variedad diferenciable, llamamos **diferencial** a la aplicación  $d : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^*$  que envía cada función diferenciable  $f$  a  $df$ , donde  $(df)(X) = X(f)$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Proposición 1.1.3.** Fijada una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  en una variedad diferenciable  $M$ , el conjunto de 1-formas coordenadas  $\{dx^1, \dots, dx^m\}$  es una base de  $\mathfrak{X}(U)^*$  y por tanto, cada  $\omega \in \mathfrak{X}(U)^*$  puede expresarse como

$$\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i dx^i. \quad (1.10)$$

donde las componentes de  $\omega$  son las funciones  $\omega_i = \omega \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

## 1.1.4. Campos tensoriales

Con todos los conceptos que hemos ido enunciando, podemos darnos cuenta de que a un mismo punto de una variedad diferenciable le estamos asignando varios objetos algebraicos. El concepto de tensor trata de sintetizar todas esas asignaciones en una sola, a la vez que cumple el requisito de que esa asignación sea diferenciable.

**Definición 1.1.13.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  de dimensión finita, y sean  $r, s \geq 0$  enteros que no se anulan simultáneamente. Un **tensor** tipo  $(r, s)$  sobre  $V$  será la forma **multilineal**

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \quad V^r \times (V^*)^s &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s) &\longmapsto T(v_1, \dots, v_r, u^1, \dots, u^s). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Al conjunto de todos los tensores sobre  $V$  de tipo  $(r, s)$  lo denotaremos por  $\mathfrak{T}_s^r(V)$ .

Ahora, generalizando la definición de tensor a variedades diferenciables, tenemos:

**Definición 1.1.14.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un **campo tensorial** de tipo  $(r, s)$  en  $M$  es la forma **multilineal**

$$\begin{aligned} T : \quad (\mathfrak{X}(M))^r \times (\mathfrak{X}(M)^*)^s &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ (X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) &\longmapsto T(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Se denotará al conjunto de todos los campos tensoriales de tipo  $(r, s)$  sobre  $M$  como  $\mathfrak{T}_s^r(M)$ .



**Nota 1.1.6.**

1. Si  $r = 0$  tenemos un campo tensorial covariante de orden  $s$ , por otro lado, si  $s = 0$  el campo tensorial será contravariante.
2. Las 1-formas pueden interpretarse como tensores de tipo  $(0, 1)$ , y los campos de vectores diferenciables como tensores de tipo  $(1, 0)$ .

El concepto de campo tensorial que hemos dado en la definición (1.1.14) es global, pero pueden particularizarse a un punto.

**Definición 1.1.15.** Sean  $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$  y  $p \in M$ . La aplicación

$$\begin{aligned} T_p: \quad (T_p M)^r \times (T_p M^*)^s &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_r, \theta^1, \dots, \theta^s) &\longrightarrow T_p(x_1, \dots, x_r, \theta^1, \dots, \theta^s), \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde  $T_p(x_1, \dots, x_r, \theta^1, \dots, \theta^s) = T(X_1(p), \dots, X_r(p), \omega^1(p), \dots, \omega^s(p))$  es un tensor de tipo  $(r, s)$  sobre  $T_p M$ , siendo  $\theta^1, \dots, \theta^s \in \mathfrak{X}(M)^*$  y  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ , tales que  $\theta^i(p) = \omega^i$  y  $X_j(p) = x_j$ , para todo  $1 \leq i \leq r$  y  $1 \leq j \leq s$ .

A continuación definimos las componentes tensoriales, que nos ayudarán a identificar unívocamente el campo tensorial del que proceden y nos permiten dar en coordenadas a los tensores.

**Definición 1.1.16.** Fijada una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  de la variedad diferenciable  $M$ , y  $T \in \mathfrak{T}_s^r(U)$ , llamamos componentes de  $T$  relativos a  $\varphi$  a las funciones

$$T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = T \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_s} \right) \in \mathcal{F}(U), \quad (1.14)$$

donde  $i_k, j_l \in \{1, \dots, m\}$  para cada  $k = 1, \dots, r$  y  $l = 1, \dots, s$ .

El producto tensorial de dos tensores, no necesariamente del mismo tipo, nos permite obtener un nuevo tensor

**Definición 1.1.17.** Dados  $T_1 \in \mathfrak{T}_{s_1}^{r_1}(M)$  y  $T_2 \in \mathfrak{T}_{s_2}^{r_2}(M)$ . El **producto tensorial** de  $T_1$  y  $T_2$  lo definimos como

$$T_1 \otimes T_2: (\mathfrak{X}(M)^{r_1+r_2}) \times \mathfrak{X}((M)^{s_1+s_2})^* \longrightarrow \mathcal{F}(M) \quad (1.15)$$

y vendrá dado por:

$$\begin{aligned} (T_1 \otimes T_2)(X_1, \dots, X_{r_1+r_2}, \omega^1, \dots, \omega^{s_1+s_2}) = \\ T_1(X_1, \dots, X_{r_1}, \omega^1, \dots, \omega^{s_1}) \cdot T_2(X_{r_1+1}, \dots, X_{r_1+r_2}, \omega^{s_1+1}, \dots, \omega^{s_1+s_2}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

**Nota 1.1.7.** A raíz de empezar a trabajar con tensores, aprovecharemos para introducir el **convenio de suma de Einstein**. Este convenio consiste en omitir el símbolo sumatorio cuando haya un subíndice y un superíndice repetidos.

**Proposición 1.1.4.** Dados  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  carta de  $M$  y  $T \in \mathfrak{T}_s^r(U)$ , se tiene que

$$T = T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}. \quad (1.17)$$

Otra operación que podemos hacer con tensores es la que nos permite contraer índices, transforma un tensor de tipo  $(r, s)$  en un tensor de tipo  $(r-1, s-1)$ .

**Definición 1.1.18.** Sean  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta de  $M$  y  $T \in \mathfrak{J}_s^r(U)$ . Llamamos *contracción*  $(i, j)$  del tensor  $T$  al campo tensorial  $C_j^i(T) \in \mathfrak{J}_{s-1}^{r-1}(U)$  tal que

$$C_j^i(T)(X_1, \dots, X_{r-1}, \omega^1, \dots, \omega^{s-1}) = \sum_{k=1}^m T(X_1, \dots, X_{i-1}, \frac{\partial}{\partial x^k}, X_i, \dots, X_{r-1}, \omega^1, \dots, \omega^{j-1}, dx^k, \omega^j, \dots, \omega^{s-1}). \quad (1.18)$$

Además, como la relación entre 1-formas y campos vectoriales es unívoca, podemos definir otra operación que nos permita bajar y subir índices a un tensor, esto no es otra cosa que un cambio de tipo de tensor.

**Definición 1.1.19.** Sean  $M$  una variedad,  $r, s, a$  y  $b$  enteros positivos con  $1 \leq a \leq r$  y  $1 \leq b \leq s$ . Definimos la operación bajar índice como la aplicación  $\downarrow_b^a: \mathfrak{J}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{J}_{s+1}^{r-1}(M)$  dada por

$$(\downarrow_b^a T)(X_1, \dots, X_{r+1}, \omega^1, \dots, \omega^{s-1}) = T(X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{r+1}, \omega^1, \dots, X_b^*, \dots, \omega^{s-1}), \quad (1.19)$$

y la operación subir índice  $\uparrow_b^a: \mathfrak{J}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{J}_{s-1}^{r+1}(M)$  viene dada por

$$(\uparrow_b^a T)(X_1, \dots, X_{r-1}, \omega^1, \dots, \omega^{s+1}) = T(X_1, \dots, \omega_*^a, \dots, X_{r-1}, \omega^1, \dots, \omega^{a-1}, \omega^{a+1}, \dots, \omega^{s+1}). \quad (1.20)$$

## 1.2. Métrica

Una vez tenemos claro la estructura sobre la que vamos a trabajar, el siguiente paso será dotar a la variedad diferenciable de una métrica, una idea de medida como lo que tenemos en  $\mathbb{R}^m$ , pero generalizada.

**Definición 1.2.1.** Sea  $\mathcal{B}: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial  $\mathcal{V}$ . Definimos  $\nu$  como el **índice** de  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{V}$ , siendo este la dimensión del mayor subespacio  $W \subset \mathcal{V}$  tal que la restricción de  $\mathcal{B}$  a  $W$  es definida negativa.

Recordemos el concepto de producto vectorial sobre un espacio vectorial.

**Definición 1.2.2.** Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial finito dimensional. Diremos que la aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  es un **producto escalar** en  $\mathcal{V}$  si es una forma bilineal simétrica y definida positiva.

**Definición 1.2.3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un **tensor métrico**, o **métrica**  $g$  sobre  $M$  es un campo tensorial covariante  $g \in \mathfrak{J}_2^0(M)$  que a cada punto  $p \in M$  le asocia un producto escalar  $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  en  $T_p M$  tal que el índice  $\nu_p$  de  $g_p$  es el mismo para cada  $p$ . Si fijamos una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  de  $M$ , el tensor métrico vendrá determinado de la siguiente forma por las funciones coordenadas

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (1.21)$$

donde los  $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$ , denominados **coeficientes métricos**, son las componentes de la matriz asociada a  $g$  en el sistema de coordenadas elegido.

Hemos definido un tensor métrico como un producto escalar, generalmente al producto escalar se le requiere ser definido positivo, en este caso no es necesario, solamente nos bastará con que sea no degenerado. De ese modo, si  $g$  es una métrica definida positiva, diremos que  $g$  es una **métrica Riemanniana**, por el contrario, si  $g$  solamente es no degenerada, diremos que  $g$  es una **métrica semi-Riemanniana**, o **pseudo-Riemanniana**.

**Definición 1.2.4.** Sea  $M$  una variedad. Fijada una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  de  $M$ , llamaremos **elemento de línea** a la siguiente forma cuadrática asociada al producto escalar  $g_p$  para cada  $p \in U$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.22)$$

**Definición 1.2.5.** Denominaremos **variedad semi-Riemanniana** al par  $(M, g)$ , donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $g$  es una métrica semi-Riemanniana en  $M$ .

### 1.3. Conexión de Levi-Civita

En esta sección trataremos de generalizar el concepto de derivada parcial a una variedad semi-Riemanniana.

**Definición 1.3.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Se denomina **conexión lineal** en  $M$  a toda aplicación  $\mathcal{D}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f \in \mathcal{F}(M)$  verifica

1.  $\mathcal{D}_X(Y + Z) = \mathcal{D}_X Y + \mathcal{D}_X Z$ ,
2.  $\mathcal{D}_{X+Y} Z = \mathcal{D}_X Z + \mathcal{D}_Y Z$ ,
3.  $\mathcal{D}_{fX} Y = f \mathcal{D}_X Y$ ,
4.  $\mathcal{D}_X(fY) = X(f)Y + f \mathcal{D}_X Y$

Para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , llamaremos **derivada covariante** de  $Y$  con respecto de  $X$  para la conexión lineal  $\mathcal{D}$  a cada  $\mathcal{D}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Además, si se verifica  $\mathcal{D}_X Y = \mathcal{D}_Y X$ , diremos que  $\mathcal{D}$  es simétrica.

**Teorema 1.3.1.** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-Riemanniana. Entonces existe una única conexión lineal  $\nabla$  sobre  $M$  libre de torsión y compatible con la métrica  $g$ , es decir, para cada  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  se tiene que

1.  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ ,
2.  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ .

A la conexión dada por el teorema anterior se le denomina **conexión de Levi-Civita** de  $g$  y está determinada por la **formula de Koszul**:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(Y, [Z, X]) + g(Y, [Z, X]) + g(X, [X, Y]). \quad (1.23)$$

**Definición 1.3.2.** Sea  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta local de  $M$ . Llamamos **símbolos de Christoffel** a las funciones de la forma  $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F}(U)$ , que serán las componentes de  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$  con respecto a la base  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ , esto es

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (1.24)$$

Sea  $(M, g)$  una variedad semi-Riemanniana y  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta local de  $M$ , si  $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  y sustituimos en la fórmula de Koszul (1.23)  $X = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  y  $Z = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$  tenemos que

$$g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (1.25)$$

y por lo tanto

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left( \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (1.26)$$

Luego, la conexión de Levi-Civita viene determinada por el tensor métrico a través de los símbolos de Christoffel. Si además, fijada la carta local  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  en  $M$ , tomamos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  como  $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  e  $Y = Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ . De las propiedades de la conexión lineal, llegamos a

$$\nabla_X Y = \left( X^\mu \frac{\partial Y^\sigma}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma X^\mu Y^\nu \right) \frac{\partial}{\partial x^\sigma}. \quad (1.27)$$

Podemos dar una definición más amplia de derivada covariante que permita actuar sobre campos tensoriales en general

**Definición 1.3.3.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $V \in \mathfrak{X}(M)$ . La derivada covariante  $\nabla_V$  es la única derivada tensorial  $\nabla_V: \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$  tal que

1.  $\nabla_V f = V(f)$  para todo  $f \in \mathcal{F}(M)$ ,
2.  $\nabla_V X$  es la derivada covariante de  $X$  respecto de  $V$  para la conexión de Levi-Civita para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

## 1.4. Derivadas de Lie y vectores de Killing

Otra noción de derivada que vamos a tratar es el de Derivada de Lie, esta derivada nos mide el cambio de un campo vectorial a lo largo del flujo de otro campo. Este último elemento, el flujo de un campo, es un concepto muy ligado al de campo de vectores, y nos determina el grupo local uniparamétrico de transformaciones asociado al campo de vectores.

### 1.4.1. Flujo local y grupo 1-paramétrico de transformaciones

Empezamos recordando brevemente que una **curva sobre una variedad diferenciable**  $M$  es una aplicación diferenciable  $\alpha: I \rightarrow M$ , con  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.4.1.** Diremos que una curva  $\alpha: I \rightarrow M$  es una **curva integral** de un campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  si  $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$  para todo  $t \in I$ . Al conjunto de curvas integrales de un campo vectorial lo llamaremos **congruencia**.

**Definición 1.4.2.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, y  $X$  un campo de vectores en  $M$ . Llamaremos **flujo local** del campo de vectores  $X$  a la función

$$\begin{aligned} \Psi: \quad I \times M \subset \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longrightarrow \Psi(t, p) \end{aligned} \quad (1.28)$$

tal que para cada  $p \in M$  la curva  $\Psi_p(T): I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$  es una curva integral de  $X$  verificando las condiciones  $\Psi_p(0) = p$  y  $\Psi'_p(0) = X_p$ .

**Definición 1.4.3.** Diremos que un campo de vectores  $X$  es **completo** si todas sus curvas integrales están definidas en todo  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.4.4.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Llamaremos **grupo 1-paramétrico de transformaciones** de  $M$  a la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longmapsto \Phi_t(p) \end{aligned} \quad (1.29)$$

de tal forma que:

1. para cada  $t, s \in \mathbb{R}$  y  $p \in M$ ,  $\Phi_{t,s}(p) = \Phi_t \circ \Phi_s(p)$ ,
2. para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_t: M \longrightarrow M$  es un difeomorfismo.

**Definición 1.4.5.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $X$  un campo de vectores. Fijado  $p \in M$ , denotaremos como  $\Phi_t$  al grupo 1-paramétrico local de transformaciones que induce entre los espacios vectoriales  $T_p M$  y  $T_{\Phi_t(p)} M$  un isomorfismo a través de su diferencial

$$(\Phi_t)_*: T_p M \longrightarrow T_{\Phi_t(p)} M. \quad (1.30)$$

## 1.4.2. Derivada de Lie

**Definición 1.4.6.** Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $X$  e  $Y$  dos campos de vectores sobre  $M$ , y  $p \in M$  un punto. Llamaremos **derivada de Lie** de  $Y$  respecto a  $X$  al campo de vectores

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - (\Phi_t)_* Y)_p \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_p - (\Phi_t)_*(\Phi_{-t}(p)) Y_{\Phi_{-t}(p)}). \end{aligned} \quad (1.31)$$

donde  $\Phi_t$  es el grupo 1-paramétrico de transformaciones locales de  $M$  determinado por  $X$ .

Esta derivada de campo de vectores la podemos caracterizar en función del corchete de Lie (1.1.8).

**Proposición 1.4.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, y  $X$  e  $Y$  dos campos de vectores sobre  $M$ . Tenemos que

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]. \quad (1.32)$$

### 1.4.3. Vectores de Killing

**Definición 1.4.7.** Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $T$  un campo de tensores y  $X$  un campo de vectores sobre  $M$ . Diremos que  $X$  es una **transformación infinitesimal** sobre  $M$  para  $T$  si el campo de tensores  $T$  es invariante por el grupo 1-paramétrico de transformaciones de  $X$ , esto es

$$\tilde{\Phi}_t T = T. \quad (1.33)$$

donde  $\tilde{\Phi}_t$  es el automorfismo de  $\mathfrak{I}_s^r(TM)$ .

Una caracterización de este resultado sería el siguiente

**Definición 1.4.8.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $X$  un campo de vectores sobre  $M$ . Definimos la derivada de Lie para todo campo de tensores  $T$  con respecto a  $X$  como

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_p - (\tilde{\Phi}_t T)_p). \quad (1.34)$$

**Teorema 1.4.1.** Un campo de tensores  $T$  es invariante por un grupo 1-paramétrico de transformaciones  $\Phi_t$  si y solo si  $\mathcal{L}_X T = 0$ , donde  $X$  es el campo de vectores asociado a  $\Phi_t$ .

Sea  $(M, g)$  una variedad dotada con una métrica, y  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  cualesquiera dos campos de vectores en  $M$ . Una transformación infinitesimal del tensor métrico  $g$  es un campo de vectores  $X$  verificando  $\mathcal{L}_X g = 0$ , donde

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)(Y, Z) &= \mathcal{L}_X g(Y, Z) - g(\mathcal{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_X Z) \\ &= Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]). \end{aligned} \quad (1.35)$$

A las transformaciones infinitesimales de  $g$  las denominaremos **campos de vectores de Killing**, y representarán las direcciones en las que el tensor métrico es constante.

**Nota 1.4.1.** La expresión dada en el teorema (1.4.1) es equivalente a

$$\nabla_\mu X^\nu + \nabla_\nu X^\mu = 0. \quad (1.36)$$

## 1.5. Geodésicas

El vector velocidad de una curva sobre una variedad  $\alpha: I \rightarrow M$  es

$$\alpha'(t) = d\alpha \left. \frac{d}{dt} \right|_p \in T_p M. \quad (1.37)$$

dando lugar a un campo vectorial sobre  $\alpha$ . Denotaremos por  $\mathfrak{X}(\alpha)$  al conjunto de todos los campos vectoriales sobre  $\alpha$ . Además, podemos cuantificar el cambio de un campo vectorial sobre  $\alpha$  a lo largo de la curva.

**Proposición 1.5.1.** Sea  $\alpha: I \rightarrow M$  una curva en  $(M, g)$  una variedad semi-Riemanniana. Entonces existe una única aplicación

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}: \mathfrak{X}(\alpha) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\alpha) \\ Z &\longmapsto Z' = \frac{DZ}{dt}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

denominada **derivada covariante inducida**, tal que si  $Z, Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$  verifica:

1.  $(aZ + bY)' = aZ' + bY'$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
2.  $(fZ)' = \frac{df}{dt}Z + fZ'$  para todo  $f \in \mathcal{F}(I)$ ,
3.  $(V|_{\alpha})'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}(V)$  para todo  $t \in I$ ,  $V \in \mathfrak{X}(M)$ ,
4.  $\frac{d}{dt}g(Z, Y) = g(Z', Y) + g(Z, Y')$ .

La derivada covariante inducida  $Z'$  viene determinada por la conexión de Levi-Civita. Esto quiere decir que podemos dar la expresión de  $Z'$  en función de los símbolos de Christoffel. Por tanto, fijada una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  de  $M$

$$Z' = \frac{DZ}{dt} = \left( \frac{dZ^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (1.39)$$

donde  $\alpha: I \rightarrow U$  una curva sobre  $U$  y  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ .

**Definición 1.5.1.** Sean  $\alpha: I \rightarrow M$  una curva en  $M$  y  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ . Se dice que  $Z$  es paralelo si  $Z' \equiv 0$ .

**Nota 1.5.1.** Observamos que al ser los vectores  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^m$  linealmente independientes implica que el paralelismo de  $Z$  es equivalente a un sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Definición 1.5.2.** Una geodésica de una variedad  $M$  es una curva  $\gamma: I \rightarrow M$  cuyo campo de velocidades  $\gamma'$  es paralelo.

Sea  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta local de  $M$ , una curva  $\gamma$  es una geodésica si sus funciones coordenadas  $x^i \circ \gamma$  verifica las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0 \quad (1.40)$$

para todo  $k = 1, \dots, m$ .

Para finalizar, daremos un resultado importante que relaciona los vectores de Killing, estudiados en la sección anterior, y las geodésicas.

**Proposición 1.5.2.** Sea  $M$  una variedad semi-Riemanniana,  $Z \in \mathfrak{X}\gamma$  un vector tangente a  $\gamma$  una curva geodésica de  $M$  y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Diremos que  $X$  es constante a lo largo de  $Z$ , si  $XZ = k$ , donde  $k$  es constante.

## 1.6. El espacio-tiempo

Desde 1905 el espacio y el tiempo dejaron de ser dos nociones independientes, con la formulación de la Teoría de la Relatividad Especial de Albert Einstein, y pasaron a formar parte como el espacio-tiempo, el ‘tejido’ en el que tienen lugar todos los sucesos físicos del Universo. En esta sección terminaremos de dar los elementos para la construcción del modelo matemático de ese ‘tejido’.

**Definición 1.6.1.** Diremos que  $(M, g)$  es una **variedad Lorentziana** si  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión 4, y  $g$  es una métrica semi-Riemanniana de índice  $\nu = 1$ . A esta última la denominaremos **métrica de Lorentz**.

**Definición 1.6.2.** Sea  $(M, g)$  una variedad Lorentziana y  $p$  un punto de  $M$ . Un vector  $v \in T_p M$  puede ser:

- **espacial** si  $g(v, v)_p > 0$ ,
- **temporal** si  $g(v, v)_p < 0$ ,
- **luminoso** si  $g(v, v)_p = 0$ .

Además, decimos que  $v$  es **causal** si no es espacial.

**Nota 1.6.1.** Denominaremos  $\mathfrak{C}$  al conjunto de vectores causales y  $\mathfrak{T}$  al conjunto de vectores temporales.

Para una variedad de Lorentz  $(M, g)$ , podemos definir en cada punto  $p \in M$  el siguiente subconjunto de  $T_p M$

$$C_p = \{v \in T_p M : v \text{ es temporal}\}. \quad (1.41)$$

conocido como **cono de los vectores temporales**. Además, este subconjunto posee dos componentes conexas:  $C_p^+$  **cono futuro**, y  $C_p^-$  **cono pasado**.

**Definición 1.6.3.** Diremos que una variedad Lorentziana  $(M, g)$  es orientable respecto del tiempo si para cada  $p \in M$  podemos elegir una componente conexa  $C_p^+$  de  $C_p$  de tal manera que en toda carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  existe un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(U)$  tal que  $X_q \in C_q^+$  para todo  $q \in U$ . Asimismo, denominaremos **orientación temporal** en  $M$  a la elección de la componente conexa  $C_p^+$  en cada  $T_p M$  verificando lo enunciado anteriormente.

**Definición 1.6.4.** Un **espacio-tiempo** es una variedad de Lorentz  $(M, g)$  con una orientación temporal.

Llamaremos espacio vectorial de Lorentz al par  $(V, g)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial de dimensión 2 y  $g$  un producto escalar con índice  $\nu = 1$ . Además, el **cono causal** de  $v \in \mathfrak{T}$  será conjunto

$$C(v) = \{u \in \mathfrak{C} : g(v, u) < 0\}. \quad (1.42)$$

De esta manera, fijado en un espacio vectorial de Lorentz  $(V, g)$  y un cono causal  $C(v)$  con  $v \in V$ , decimos que un vector  $u \in V$  apunta al futuro si  $u \in C(v)$ .

**Definición 1.6.5.** En una variedad Lorentziana  $(M, g)$  orientada temporalmente diremos que una curva  $\alpha: I \rightarrow M$  **apunta al futuro** si  $\alpha'(t)$  apunta al futuro en cada  $T_{\alpha(t)} M$  para todo  $t \in I$ .

**Definición 1.6.6.** Sea  $(M, g)$  un espacio-tiempo. Definimos una **partícula** como una curva diferenciable  $\alpha: I \rightarrow M$  que apunta al futuro tal que  $g(\alpha'(u), \alpha'(u)) = -m^2$ , con  $m \geq 0$  para todo  $u \in I$ .

De esta manera, según el valor de  $m$  tenemos que:

- Si  $m > 0$ , decimos que  $m$  es la masa en reposo de la partícula material.
- Si  $m = 0$ , decimos que es una partícula sin masa.
- Si  $m = 1$ , decimos que la partícula es un observador y en este caso el parámetro  $u$  se denomina tiempo propio.



## 1.7. Tensores de Riemann, Ricci y Weyl

**Definición 1.7.1.** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana. Llamaremos **tensor de curvatura de Riemann** de  $g$  al tensor de tipo  $(3, 1)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}: \mathfrak{X}(M)^3 &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \mathfrak{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned} \quad (1.43)$$

que verifica las siguientes propiedades de simetría:

1.  $\mathfrak{R}(X, Y)Z = -\mathfrak{R}(Y, X)Z$ ,
2.  $g(\mathfrak{R}(X, Y)Z, W) = -g(\mathfrak{R}(X, Y)W, Z) = g(\mathfrak{R}(Z, W)X, Y)$ .

**Lema 1.7.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  una carta local, y  $\mathfrak{R}$  su tensor de curvatura de Riemann. Entonces, si tomamos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  tal como  $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,  $Y = Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  y  $Z = Z^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$ , podemos escribir:

$$\mathfrak{R}(X, Y)Z = X^\mu Y^\nu Z^\sigma R_{\sigma\mu\nu}^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}. \quad (1.44)$$

donde  $R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \mathfrak{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$ , que pueden expresarse en función de los símbolos de Christoffel como sigue

$$R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\lambda - \Gamma_{\mu\sigma}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\lambda. \quad (1.45)$$

En variedades como en la que estamos trabajando, el tensor de Riemann puede llegar a descomponerse, como vemos a continuación, en tres componente irreducibles: el tensor de Ricci, la curvatura escalar y el tensor de Weyl [8].

$$R_{\sigma\lambda\mu\nu} = C_{\sigma\lambda\mu\nu} + \frac{1}{m-2}(g_{\lambda\mu}R_{\sigma\nu} - g_{\lambda\nu}R_{\sigma\mu} + g_{\sigma\nu}R_{\lambda\mu} - g_{\sigma\mu}R_{\lambda\nu}) + \frac{R}{(m-2)(m-1)}(g_{\lambda\nu}g_{\sigma\mu} - g_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu}), \quad (1.46)$$

donde  $C_{\sigma\lambda\mu\nu}$  son las componentes del tensor de Weyl en su forma completamente covariante,  $R_{\sigma\mu}$  las componentes del tensor de Ricci y  $R$  el escalar de curvatura. En (1.46) se están expresando las componentes del tensor de Riemann en su forma completamente covariante.

**Definición 1.7.2.** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana y  $\mathfrak{R}$  el tensor de curvatura de Riemann. Denominamos **tensor de curvatura de Ricci**, *Ric*, de  $M$  a la contracción  $C_3^1(\mathfrak{R}) \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ , cuyas componentes relativas a una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  son

$$R_{\sigma\mu} = R_{\sigma\mu\nu}^\nu. \quad (1.47)$$

**Definición 1.7.3.** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana y *Ric* el tensor de Ricci de  $M$ . Llamamos **curvatura escalar**  $R$  de  $M$  a la contracción  $C(\text{Ric}) \in \mathfrak{T}_0^0$ , cuyas componentes relativas a una carta local  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$  de  $M$  son

$$R = g^{\sigma\mu} R_{\sigma\mu}. \quad (1.48)$$

Por último el tensor de Weyl, que denotaremos por  $C$  al tensor de tipo  $(3,1)$  que expresa la fuerza de marea que siente un cuerpo cuando se mueve a lo largo de una geodésica, siendo la única parte de la curvatura que existe en el espacio libre y gobierna la propagación de las ondas gravitacionales. Además, puede descomponerse en dos partes, la parte eléctrica y parte magnética. Para dimensiones 2 o 3, el tensor de curvatura de Weyl se desvanece. A partir de 4, la curvatura de Weyl generalmente es distinta de cero. Como nuestro problema se define en una variedad de 4 dimensiones, el tensor de Weyl nos quedaría de la siguiente manera

$$C_{\sigma\lambda\mu\nu} = R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}(g_{\lambda\mu}R_{\sigma\nu} - g_{\lambda\nu}R_{\sigma\mu} + g_{\sigma\nu}R_{\lambda\mu} - g_{\sigma\mu}R_{\lambda\nu}) + \frac{R}{6}(g_{\lambda\nu}g_{\sigma\mu} - g_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu}). \quad (1.49)$$

## 1.8. Ecuación de Einstein

Terminamos este capítulo con la formulación de la ecuación de campo de Einstein. La idea de Einstein consistía en que, visto el espacio-tiempo como una variedad, la curvatura en el espacio-tiempo debería ser originada por un objeto con masa, y a su vez esa curvatura debería indicar cómo de mueve ese objeto con masa. Esta idea le llevó a tratar de relacionar la ecuación de Poisson <sup>1</sup>

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \quad (1.50)$$

cuya solución es el campo gravitatorio causado por una determinada distribución de densidad de masa, con la métrica de la variedad. Esto nos lleva a buscar una expresión tensorial, y si efectivamente la masa curva el espacio-tiempo, deberíamos tener un tensor que codifique la distribución de materia en la variedad. Pero toda esta teoría es una extensión de la teoría de la relatividad especial, donde la masa y la energía son esencialmente lo mismo. Por tanto, podríamos pensar en la densidad de energía como la fuente del campo. Además, en la teoría sobre medios continuos encontramos el tensor momento-energía, en cuyas componentes quedan representadas las densidades de energía y momento, lo que nos lleva a generalizar este concepto para nuestro propósito.

**Definición 1.8.1.** Sea  $(M, g)$  un espacio-tiempo. Denominamos tensor **momento-energía**, o **energía-impulso**  $T$  al campo tensorial simétrico de tipo  $(0,2)$  en  $M$  que verifica las siguientes propiedades:

1.  $T(v, v) \geq 0$  para todo vector causal de  $T_pM$ ,  $p \in M$ ,
2.  $\text{div}T = 0$ .

Ahora, solamente nos queda determinar un tensor construido a partir de la métrica que esté relacionado con el tensor energía-impulso, es decir, que verifique

$$G_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta}. \quad (1.51)$$

$G_{\alpha\beta}$  será un tensor que describa la curvatura del espacio, al que definiremos como **tensor de Einstein** y  $T_{\alpha\beta}$  el tensor de energía-impulso, y  $k$  una constante de proporcionalidad.

Para obtener la expresión de  $G_{\alpha\beta}$  en (1.51), se debe tener en cuenta que:  $G_{\alpha\beta}$  debe ser un tensor simétrico de tipo  $(0,2)$  por la definición (1.8.1), debe venir dado en función de la métrica y

---

<sup>1</sup> $G = 6.67 \times 10^{11} Nm^2/kg^2$  es la constante de gravitación universal

debemos poder recuperar la ecuación de Poisson (1.50). Además, su divergencia debe ser cero, al igual que el tensor energía-impulso, y debe ser lineal en el tensor de curvatura de Riemann para obtener una ecuación diferencial de segundo orden en los potenciales gravitatorios. La suma de todas estas condiciones nos lleva a que la expresión para el tensor de Einstein sea

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}. \quad (1.52)$$

Finalmente, al comparar con la formulación newtoniana, podemos obtener el valor de la constante de proporcionalidad de (1.51) como  $k = 8\pi G$ . Así, llegamos a que la ecuación de campo de Einstein sea

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\alpha\beta}. \quad (1.53)$$

# Capítulo 2

## Planteamiento del problema y objetivos

Antes de meternos de lleno en este capítulo, remarcaremos que tanto el planteamiento del problema, como gran parte del estudio teórico, se realizaron antes de ser mostrada al mundo la primera imagen de Sagitario A\* como agujero negro [19].

### 2.1. Planteamiento del problema

Por años el objeto que habita en el centro de nuestra galaxia ha sido, y sigue siendo, de gran interés de estudio. Dado que los primeros telescopios con los que se realizaron las observaciones del centro galáctico no tenían la suficiente resolución, y que el polvo interestelar bloqueaba nuestra línea de visión hacia el centro de la galaxia, la naturaleza de Sgr A\* ha sido todo un misterio.

En los últimos años, para tratar de aclarar ese misterio, ha sido indispensable el monitoreo continuo del movimiento de las estrellas más cercanas al centro galáctico, llamadas estrellas S. Pues si sabemos cómo se mueven podemos obtener información sobre la fuente que genera el campo gravitacional. De entre todas las estrellas que conforman el grupo de estrellas S destaca una, S2. Sus 30 años de datos observacionales confirman una precisión de Schwarzschild en su camino alrededor de Sagitario A\*. Esto verifica una de las predicciones de la teoría de la relatividad general, las órbitas no están cerradas, como en la gravedad newtoniana, sino que avanzan hacia adelante en el plano de movimiento. De esta manera, S2 nos evidencia que Sagitario A\* debe ser un agujero negro supermasivo de cuatro millones de veces la masa del Sol.

Sin embargo, en las cercanías de Sagitario A\* fue descubierto hace una década un nuevo objeto al que han llamado G2. Inicialmente se pensó que era una nube de gas, pero al acercarse al objeto compacto, contra todo pronóstico, no fue destruida. Además, su velocidad radial disminuye al acercarse a esta fuente, poniendo en duda la naturaleza de Sagitario A\* como agujero negro y a la teoría de la relatividad general.

## 2.2. Alternativas al problema

### 2.2.1. Modelo con materia oscura

Si al desconocimiento sobre la naturaleza del objeto compacto del centro de la galaxia, y a que la existencia de un agujero negro no explica la dinámica de G2, le sumamos que en 1932 J.H.Oort se percató, estudiando la dinámica de las estrellas limítrofes de la Vía Láctea, que la cantidad de masa necesaria para que las estrellas permanezcan gravitacionalmente en sus órbitas debe ser un 200 % más que la materia luminosa, y que F.Zwicky y Vera Rubin, al estudiar las velocidades radiales y la masa de las galaxias que componen el cúmulo de Coma, y darse cuenta que para la dispersión de velocidad de este grupo, la densidad media debía ser mucho mayor que la obtenida de la materia luminosa, sugirió la existencia de la materia oscura. Se tienen argumentos suficientes para desarrollar una teoría alternativa donde la fuente central de la Vía Láctea no sea un agujero negro, sino un núcleo de materia oscura. [14]

Una de esas alternativas se ha visto a la par que se desarrollaba este trabajo, el modelo de Ruffini - Argüelles-Rueda (RAR). En él se identifica la naturaleza del objeto compacto supermasivo con un núcleo altamente concentrado de materia oscura compuesto de fermiones, a los que referiremos como darkinos. Este núcleo denso fermiónico está rodeado por una atmósfera de materia oscura diluida que se extiende hacia el exterior de la galaxia, conocida esa parte exterior que rodea a la Vía Láctea como halo galáctico. Este modelo no descarta la existencia de agujeros negros, más bien propone que las regiones de origen fermiónico colapsan cuando alcanzan masas mayores a 100 millones de masas solares y son la semilla para la formación de los agujeros negros supermasivos.

Las ecuaciones de equilibrio del modelo RAR consisten en la Ecuaciones de Einstein en simetría esférica para el tensor de energía-momento para un fluido perfecto, donde la presión y la densidad están dados por la estadística de Fermi-Dirac y teniendo en cuenta las condiciones de Klein y Tolman de la termodinámica.

Con las soluciones obtenidas se lograron ajustar bastante bien los datos observacionales de S2 y G2, además de explicar otra serie de características. Sin embargo, el 12 de mayo de este año 2022 fue mostrada al mundo la primera imagen de Sagitario A\* oficialmente como agujero negro, quedando así descartado cualquier teoría que no tenga como fuente a un agujero negro.

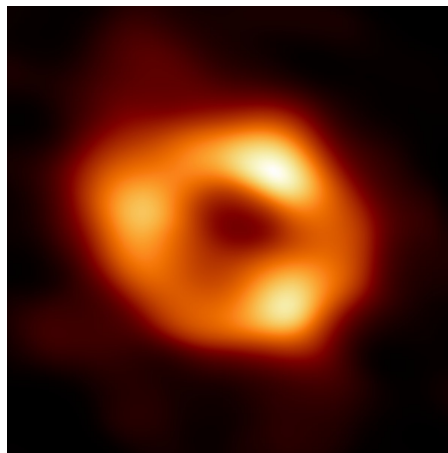


Figura 2.1: Primera imagen de Sagitario A\*, agujero negro de la Vía Láctea [19].

## 2.2.2. Formalismo 1+3

Como bien pudimos comprobar en el capítulo 1 la teoría de la relatividad general se basa en la geometría diferencial, donde todo trata de escribirse en función de una base formada a partir de un sistema de coordenadas locales dado. Al formular ecuaciones como la de Einstein de esta manera, nos lleva a obtener un sistema de 10 ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales de difícil resolución. Una alternativa a esta base es una tétrada formada por cuatro elementos linealmente independientes que logran simplificar las ecuaciones de la relatividad general, siendo muy útil a la hora de calcular soluciones analíticas a diferentes problemas en este área de la física, de ahí nuestro interés en usarlo para nuestro cometido.

Esta tétrada la construiremos dentro del marco basado en el formalismo 1+3 [15]. Partimos de una congruencia temporal de la variedad Lorentziana de nuestro espacio-tiempo, y tomamos un vector temporal, denotaremos por  $V$ , tangente a esa congruencia, de tal manera que  $V_\alpha V^\alpha = 1$ , cuyo proyector a su espacio ortogonal es  $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + V_\alpha V_\beta$ , donde  $g$  es la métrica de nuestro espacio-tiempo. Este vector temporal será el primer elemento que conforma nuestra tétrada, y a partir de ahí obtenemos el resto, que serán tres vectores espaciales ortogonales a  $V$ , y denotaremos por  $K$ ,  $L$  y  $S$ .

Vamos a trabajar con las ecuaciones de campo en el vacío, pues sus soluciones son las que sirven para estudiar el campo gravitatorio exterior de una fuente y las órbitas descritas por cualquier objeto con y sin masa. Además, por la naturaleza del problema, vamos a considerar campos gravitatorios generados por fuentes estacionarias y axialmente simétricas. De esta forma el elemento de línea más general con el que vamos a trabajar tendrá la siguiente forma

$$ds^2 = -A^2(r, \theta)dt^2 + B^2(r, \theta)dr^2 + C^2(r, \theta)d\phi^2 + R^2(r, \theta)d\varphi^2 + 2\omega_3(r, \theta)dtd\varphi \quad (2.1)$$

## 2.3. Objetivos

En lo que ha este trabajo respecta nos centraremos en obtener los siguientes resultados:

- Mediante la imposición de una tétrada, reescribir tanto la ecuación de Einstein, como para la ecuación de una geodésica, en términos de los escalares geométricos  $a_i$ ,  $\Omega_i$  y  $j_i$ .
- Una vez encontrada esa formulación, trataremos de clasificar los distintos tipos de geodésicas.
- De esa clasificación nos centraremos en el caso que describa órbitas coplanarias no circulares, y utilizaremos las métricas de Kerr y Schwarzschild.
- Tras el paso anterior, ser capaces de encontrar la expresión explícita para el radio que describe el tipo de órbitas con las que estamos trabajando.
- Obtenida la expresión del radio, lo ajustaremos a los datos observacionales de las estrellas S2 y G2.
- Para finalizar, y si es posible, con los parámetros obtenidos del ajuste tratar de obtener las propiedades físicas de Sagitario A\*.

# Capítulo 3

## El nuevo enfoque

Como adelantábamos en la sección (2.2.2) del capítulo anterior, ante el problema planteado, la alternativa que aquí vamos a tratar es la de reescribir las ecuaciones que modelizan los problemas de la relatividad general de una forma más sencilla esto lo haremos bajo el marco teórico del formalismo 1+3. Comenzaremos este capítulo definiendo la tétrada y calculando sus derivadas covariantes, con las que obtendremos unos escalares de estructura, claves para la resolución de las ecuaciones. Una vez tengamos estos elementos, empezaremos a reescribir las ecuaciones, no de una forma general, sino bajo imposiciones de ciertas simetrías que tienen fuentes como Sagitario A\*. [16]

### 3.1. Tétrada y escalares de estructura

Dada una métrica descrita por el elemento de línea (2.1) comenzaremos a construir nuestra tétrada con la elección del vector temporal, que denotaremos  $V^\alpha$ . Esta elección la haremos convenientemente, tomando como su primera, y única, componente distinta de cero la inversa del coeficiente métrico  $A$

$$V^\alpha = \left( \frac{1}{A}, 0, 0, 0 \right). \quad (3.1)$$

A partir de aquí tomamos el resto de vectores de la tétrada, los vectores espaciales  $K^\alpha$ ,  $S^\alpha$  y  $L^\alpha$ , teniendo en cuenta que deben satisfacer las siguientes propiedades para formar una base ortonormal

$$V^\alpha V_\alpha = -K^\alpha K_\alpha = -L^\alpha L_\alpha = -S^\alpha S_\alpha = -1, \quad (3.2)$$

$$V^\alpha K_\alpha = V^\alpha L_\alpha = V^\alpha S_\alpha = K^\alpha L_\alpha = L^\alpha S_\alpha = 0. \quad (3.3)$$

Así, tenemos que

$$K^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \cdot \Delta}} (0, \Delta_1, 0, 0), \quad (3.4)$$

$$L^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \cdot \Delta}} (0, 0, \Delta_2, 0), \quad (3.5)$$

$$S^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}} \left( \frac{\omega_3}{A}, 0, 0, A \right), \quad (3.6)$$

donde

$$\Delta = A^2 B^2 C^2 R^2 + B^2 C^2 \omega_3^2, \quad (3.7)$$

$$\Delta_1 = A^2 C^2 R^2 + C^2 \omega_3^2 \quad y \quad (3.8)$$

$$\Delta_2 = A^2 R^2 + \omega_3^2. \quad (3.9)$$

que al verificarse  $\Delta_1 = C^2 \Delta_2$  y  $\Delta = B^2 C^2 \Delta_2$ , podemos escribir la tétrada de la siguiente manera

$$V^\alpha = \left( \frac{1}{A}, 0, 0, 0 \right), \quad (3.10)$$

$$K^\alpha = \left( 0, \frac{1}{B}, 0, 0 \right), \quad (3.11)$$

$$L^\alpha = \left( 0, 0, \frac{1}{C}, 0 \right) \quad y \quad (3.12)$$

$$S^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}} \left( \frac{\omega_3}{A}, 0, 0, A \right). \quad (3.13)$$

### 3.1.1. Derivada Covariante de la Tétrada

En lo que sigue denotaremos a la derivada covariante por ; .Comenzamos con la del vector temporal de la tétrada, que tendrá la siguiente descomposición irreducible en el formalismo 1+3

$$V_{\alpha;\beta} = -a_\alpha V_\beta + \sigma_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta}, \quad (3.14)$$

donde aparecen los siguientes campos cinemáticos:  $a_\alpha$  es el **vector aceleración**,  $\Theta$  representa la **razón de expansión escalar**,  $\sigma_{\alpha\beta}$  es el **tensor de cizalladura** con magnitud  $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$  y  $\Omega_{\alpha\beta}$  es el **vector de vorticidad** con magnitud  $\Omega^2 := \Omega_\alpha\Omega^\alpha = \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}$ . Estos campos cinemáticos quedan expresados de la siguiente manera

$$a_\alpha = V_{\mu;\nu}V^\nu h_\alpha^\mu = a_1 K_\alpha + a_2 L_\alpha + a_3 S_\alpha, \quad (3.15)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_1 K_\alpha K_\beta + \sigma_2 L_\alpha L_\beta - (\sigma_1 + \sigma_2) S_\alpha S_\beta, \quad (3.16)$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_1 (K_\alpha L_\beta - K_\beta L_\alpha) + \Omega_2 (K_\alpha S_\beta - K_\beta S_\alpha) + \Omega_3 (L_\alpha S_\beta - L_\beta S_\alpha) \quad y \quad (3.17)$$

$$\Omega_\alpha = \Omega_3 K_\alpha - \Omega_2 L_\alpha + \Omega_1 S_\alpha. \quad (3.18)$$

En cuanto a las derivadas covariantes, en el formalismo 1+3, de cualquier otro vector no temporal  $X$ , donde  $X_{\alpha;\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x^\beta}$ , vendrá dada por:

$$X_{\alpha;\beta} = X_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu X_\mu, \quad (3.19)$$

Así, para el resto de elementos de la tétrada tenemos que sus derivadas covariantes son:

$$K_{\alpha;\beta} = -a_\mu K^\mu V_\alpha V_\beta + V_\alpha (\sigma_{\nu\beta} + \Omega_{\nu\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\nu\beta}) K^\nu - a_\alpha^{(k)} V_\beta + J_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad (3.20)$$

$$L_{\alpha;\beta} = -a_\mu L^\mu V_\alpha V_\beta + V_\alpha (\sigma_{\nu\beta} + \Omega_{\nu\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\nu\beta}) L^\nu - a_\alpha^{(l)} V_\beta + J_{\alpha\beta}^{(l)}, \quad (3.21)$$

$$S_{\alpha;\beta} = -a_\mu S^\mu V_\alpha V_\beta + V_\alpha (\sigma_{\nu\beta} + \Omega_{\nu\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\nu\beta}) S^\nu - a_\alpha^{(s)} V_\beta + J_{\alpha\beta}^{(s)}, \quad (3.22)$$



con las que han aparecido dos elementos nuevos

$$a_\alpha^{(k)} = h_\alpha^\mu K_{\mu;\nu} V^\nu, \quad (3.23)$$

$$J_{\alpha\beta}^{(k)} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu K_{\mu;\nu}. \quad (3.24)$$

Además, como hemos mencionado anteriormente en la sección (2.2.2), estamos considerando una solución en el vacío, por tanto los tensores físicos que dependen de la materia se anulan, es decir  $\Theta = 0$  y  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ .

### 3.1.2. Escalares de estructura

Podemos descomponer en función de los vectores de la tétrada tanto a las variables cinemáticas, como a las dos nuevas componentes que aparecieron al hacer la derivada covariante en el apartado anterior (3.1.1).

- La cuadriaceleración

$$a_\alpha = V_{\alpha;\beta} V^\beta = a_1 K_\alpha + a_2 L_\alpha + a_3 S_\alpha, \quad (3.25)$$

donde

$$a_1 = a_\alpha K^\alpha = V_{\alpha;\beta} V^\alpha K^\alpha, \quad (3.26)$$

$$a_2 = a_\alpha L^\alpha = V_{\alpha;\beta} V^\beta L^\alpha \text{ y} \quad (3.27)$$

$$a_3 = a_\alpha S^\alpha = V_{\alpha;\beta} V^\beta S^\alpha. \quad (3.28)$$

- La vorticidad

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= V_{\alpha;\beta} - V_{\beta;\alpha} + a_\alpha V_\beta - a_\beta V_\alpha \\ &= \Omega_1 (K_\alpha L_\beta - K_\beta L_\alpha) + \Omega_2 (K_\alpha S_\beta - K_\beta S_\alpha) + \Omega_3 (L_\alpha S_\beta - L_\beta S_\alpha), \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde

$$\Omega_1 = (V_{\alpha;\beta} K^\alpha L^\beta) = \Omega_{\alpha\beta} L^\beta K^\alpha, \quad (3.30)$$

$$\Omega_2 = (V_{\alpha;\beta} K^\alpha S^\beta) = \Omega_{\alpha\beta} K^\beta S^\alpha \text{ y} \quad (3.31)$$

$$\Omega_3 = (V_{\alpha;\beta} L^\alpha S^\beta) = \Omega_{\alpha\beta} L^\beta S^\alpha. \quad (3.32)$$

- Los términos  $J_{\alpha\beta}^{(i)}$

$$J_{\alpha\beta}^{(k)} = j_1 L_\alpha K_\beta + j_2 L_\alpha L_\beta + j_3 L_\alpha S_\beta + j_4 S_\alpha K_\beta + j_5 S_\alpha L_\beta + j_6 S_\alpha S_\beta, \quad (3.33)$$

$$J_{\alpha\beta}^{(l)} = -j_1 K_\alpha K_\beta - j_2 K_\alpha L_\beta - j_3 K_\alpha S_\beta + j_7 S_\alpha K_\beta + j_8 S_\alpha L_\beta + j_9 S_\alpha S_\beta, \quad (3.34)$$

$$J_{\alpha\beta}^{(s)} = -j_4 K_\alpha K_\beta - j_5 K_\alpha L_\beta - j_6 K_\alpha S_\beta - j_7 L_\alpha K_\beta - j_8 L_\alpha L_\beta - j_9 L_\alpha S_\beta. \quad (3.35)$$

Por tanto los escalares  $j_i$  se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} j_1 &= K_{\alpha;\beta}K^\beta L^\alpha, & j_2 &= K_{\alpha;\beta}L^\beta L^\alpha, & j_3 &= K_{\alpha;\beta}S^\beta L^\alpha, \\ j_4 &= K_{\alpha;\beta}K^\beta S^\alpha, & j_5 &= K_{\alpha;\beta}L^\beta S^\alpha, & j_6 &= K_{\alpha;\beta}S^\beta S^\alpha, \\ j_7 &= L_{\alpha;\beta}K^\beta L^\alpha, & j_8 &= L_{\alpha;\beta}L^\beta S^\alpha \text{ y } & j_9 &= L_{\alpha;\beta}S^\beta S^\alpha. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Si posteriormente desarrollamos las expresiones de los escalares  $a_i, \Omega_j$  y  $j_k$  en términos de los coeficientes métricos, conseguimos que se anulen la mayoría, excepto

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A_{,r}}{AB}, & a_2 &= \frac{A_{,\theta}}{AB}, \\ j_1 &= \frac{B_{,\theta}}{BC}, & j_2 &= \frac{C_{,r}}{BC}, \\ j_6 &= \frac{-\omega_3^2 A_{,r} + A^3 RR_{,r} + A\omega_3 \omega_{3,r}}{AB(A^2 R^2 + \omega_3^2)}, & j_9 &= \frac{-\omega_3^2 A_{,\theta} + A^3 RR_{,\theta} + A\omega_3 \omega_{3,\theta}}{AB(A^2 B^2 + \omega_3^2)}, \\ \Omega_2 &= \frac{-2\omega_3 A_{,r} + A\omega_{3,r}}{2AB\sqrt{A^2 R^2 + \omega_3^2}} \text{ y } & \Omega_3 &= \frac{2\omega_3 A_{,\theta} - A\omega_{3,\theta}}{2AB\sqrt{A^2 R^2 + \omega_3^2}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Si a todo esto hacemos  $\omega_3 = A^2\Psi$ , y lo sustituimos en (3.37), conseguimos expresar estos escalares geométricos de una forma más sencilla

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A_{,r}}{AB}, & a_2 &= \frac{A_{,\theta}}{AC}, \\ j_1 &= \frac{-B_{,\theta}}{BC}, & j_2 &= \frac{C_{,r}}{BC}, \\ j_6 &= \frac{(\ln(R^2 + A^2\Psi^2))_{,r}}{2B}, & j_9 &= \frac{(\ln(R^2 + A^2\Psi^2))_{,\theta}}{2C}, \\ \Omega_2 &= \frac{A\Psi_{,r}}{2B\sqrt{R^2 + A^2\Psi^2}} \text{ y } & \Omega_3 &= \frac{A\Psi_{,\theta}}{2C\sqrt{R^2 + A^2\Psi^2}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

## 3.2. Soluciones en el vacío

Las soluciones que se estudian en el campo gravitatorio externo de la fuente que crea ese campo, serán solución en vacío. En esta situación el tensor de energía-impulso se hace cero  $T_{\alpha\beta} = 0$ , lo que lleva a que el tensor de Einstein sea cero, y al irnos a las ecuaciones de Einstein (1.53) el tensor de Ricci se hace cero. Lo que nos lleva a que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = C_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (3.39)$$

siendo  $C_{\alpha\beta\mu\nu}$  el tensor de Weyl, que puede descomponerse en dos partes, una parte eléctrica  $E_{\alpha\beta}$  y otra magnética  $H_{\alpha\beta}$  como sigue

$$E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\mu\nu}V^\gamma V^\delta \text{ y} \quad (3.40)$$

$$H_{\alpha\beta} = *C_{\alpha\beta\mu\nu}V^\gamma V^\delta. \quad (3.41)$$

Estos campos los podemos reescribir como una combinación de los elementos de la tétrada. Por ende, la parte eléctrica nos quedaría

$$E_{\alpha\beta} = E_1 K_\alpha K_\beta + E_2 L_\alpha L_\beta - (E_1 + E_2) S_\alpha S_\beta + E_3 K_{(\alpha} L_{\beta)} + E_4 K_{(\alpha} S_{\beta)} + E_5 L_{(\alpha} S_{\beta)}, \quad (3.42)$$

y la parte magnética del tensor de Weyl sería

$$H_{\alpha\beta} = H_1 K_\alpha K_\beta + H_2 L_\alpha L_\beta - (H_1 + H_2) S_\alpha S_\beta + H_3 K_{(\alpha} L_{\beta)} + H_4 K_{(\alpha} S_{\beta)} + H_5 L_{(\alpha} S_{\beta)}. \quad (3.43)$$

A los escalares  $E_i$  y  $H_i$ , que aparecen en (3.42) y (3.43) respectivamente, los denominamos **escalares de Weyl**.

Aunque hemos conseguido reescribir las dos partes del tensor de Weyl en función de la tétrada, siguen siendo expresiones complicadas. Esto nos lleva a imponer algunas restricciones, a parte de trabajar en el vacío, exigiremos simetría temporal y axial. Estas dos simetrías en el espacio-tiempo nos proveerá de dos vectores de Killing, un vector temporal  $\tau^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ , que podremos descomponer como

$$\tau^\alpha = \tau_0 V^\alpha \Rightarrow \tau_0 = A, \quad (3.44)$$

y un vector axial  $\xi^\alpha = (0, 0, 0, 1)$ , que nos quedaría

$$\xi^\alpha = \xi_0 V^\alpha + \xi_3 S^\alpha, \quad (3.45)$$

donde

$$\xi_0 = -\frac{\omega_3}{A} \quad \text{y} \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{\Delta_2}}{A} \quad (3.46)$$

y verifican siguientes identidades, como hemos visto en la sección (1.4.3)

$$\tau_{\alpha;\beta} + \tau_{\beta;\alpha} = 0 \quad \tau^\mu \tau_{\alpha;\beta;\mu} = 0 \quad (3.47)$$

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 \quad \xi^\mu \xi_{\alpha;\beta;\mu} = 0 \quad (3.48)$$

De esta manera, conseguimos que La parte eléctrica (3.42) y la parte magnética (3.43) del tensor de Weyl nos queden en términos de los escalares de estructura, de los que solamente sobrevivirán seis

$$\begin{aligned} E_1 &= a_1^\dagger - a_2 j_1 + a_1^2 + \Omega_2^2, & H_1 &= -\Omega_3^\dagger - (a_2 + j_1)\Omega_2 - a_1\Omega_3, \\ E_2 &= -E_1 - a_1 j_6 - a_2 j_9 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2, & H_2 &= \Omega_3^\dagger + (2a_2 + j_1 - j_9)\Omega_2 + j_6\Omega_3, \\ E_3 &= -a_1^\ominus + a_1 a_2 - a_2 j_2 + \Omega_2\Omega_3 \quad \text{y} & H_3 &= -\Omega_3^\ominus - j_2\Omega_2 - 2a_2\Omega_3. \end{aligned} \quad (3.49)$$

### 3.3. Geodésicas

Para reescribir las ecuaciones de las geodésicas en función de los elementos de la tétrada y de los escalares de estructura, bastará con recordar de la sección (1.5), que una geodésica está determinada por un vector tangente a ella. Si tomamos la contracción de ese vector tangente como una combinación lineal de los vectores  $V$ ,  $K$ ,  $L$  y  $S$ .

$$Z_\alpha = z_0 \cdot V_\alpha + z_1 \cdot K_\alpha + z_2 \cdot L_\alpha + z_3 \cdot S_\alpha. \quad (3.50)$$

Al desarrollar ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dt}{d\lambda}, \frac{dr}{d\lambda}, \frac{d\theta}{d\lambda}, \frac{d\phi}{d\lambda} \right) &= z_0 \left( \frac{1}{A}, 0, 0, 0 \right) + z_1 \left( 0, \frac{1}{B}, 0, 0 \right) + z_2 \left( 0, 0, \frac{1}{C}, 0 \right) + z_3 \left( \frac{\omega_3}{A\sqrt{\Delta_2}}, 0, 0, \frac{A}{\sqrt{\Delta_2}} \right) \\ &= \left( z_0 \frac{1}{A} + z_3 \frac{\omega_3}{A\sqrt{\Delta_2}}, z_1 \frac{1}{B}, z_2 \frac{1}{C}, z_3 \frac{A}{\sqrt{\Delta_2}} \right). \end{aligned}$$

Lo que es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{d\lambda} = z_0 \frac{1}{A} + z_3 \frac{\omega_3}{A\sqrt{\Delta_2}}, \\ \frac{dr}{d\lambda} = z_1 \frac{1}{B}, \\ \frac{d\theta}{d\lambda} = z_2 \frac{1}{C} \text{ y} \\ \frac{d\phi}{d\lambda} = z_3 \frac{A}{\sqrt{\Delta_2}}. \end{array} \right. \quad (3.51)$$

A continuación, debemos tener en cuenta que el producto escalar de los dos vectores de Killing con el vector  $Z_\alpha$  es una constante, por la proposición (1.5.2), tenemos

$$Z_\alpha \cdot \tau^\alpha = cte = e \Rightarrow Z_{\alpha;\beta} \tau^\alpha + Z_\alpha \tau_{;\beta}^\alpha = 0, \quad (3.52)$$

$$Z_\alpha \cdot \xi^\alpha = cte = l \Rightarrow Z_{\alpha;\beta} \xi^\alpha + Z_\alpha \xi_{;\beta}^\alpha = 0, \quad (3.53)$$

donde la constante de la ecuación (3.52) es la **energía**  $e$  y la constante de la ecuación (3.53) es el **momento angular**  $l$ . Además, de (3.52) y (3.53) obtenemos respectivamente las siguientes expresiones para  $z_0$  y  $z_3$

$$z_0 = -\frac{e}{A} \text{ y} \quad (3.54)$$

$$z_3 = \frac{A^2 l + e \omega_3}{A \sqrt{A^2 R^2 + \omega_3^2}}. \quad (3.55)$$

En consecuencia, para poder resolver las ecuaciones de las geodésicas nos basta con encontrar las expresiones de  $z_1$  y  $z_2$ . Para este propósito nos apoyaremos en las dos condiciones que tenemos sobre el vector tangente  $Z_\alpha$ : *transporte paralelo y módulo constante*.

- **Transporte paralelo:**  $Z^\alpha \cdot Z_{\beta;\alpha} = 0$

$$z_1 z_1^\dagger + z_2 z_1^\ominus = j_1 z_1 z_2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2 + j_2 z_2^2 + j_6 z_3^2, \quad (3.56)$$

$$z_1 z_2^\dagger + z_2 z_2^\ominus = -j_2 z_1 z_2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2 + j_1 z_1^2 + j_9 z_3^2. \quad (3.57)$$

- **Módulo constante:**  $Z_\alpha \cdot Z^\alpha = -1 \Rightarrow Z_{\alpha;\beta} \cdot Z^\alpha = 0$

$$z_1 z_1^\dagger + z_2 z_2^\dagger = j_6 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_1 z_0^2 \text{ y} \quad (3.58)$$

$$z_1 z_1^\ominus + z_2 z_2^\ominus = j_9 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2. \quad (3.59)$$

Restando (3.56) a (3.58), y (3.57) a (3.59) tenemos

$$z_2(z_2^\dagger - z_1^\ominus + j_1 z_1 + j_2 z_2) = 0 \text{ y} \quad (3.60)$$

$$z_1(z_2^\dagger - z_1^\ominus + j_1 z_1 + j_2 z_2) = 0. \quad (3.61)$$

Estas dos ecuaciones las deberán cumplir  $z_1$  y  $z_2$  para obtener las geodésicas. Entonces, podemos clasificar las geodésicas según los valores que tomen  $z_1$  y  $z_2$

▪ **Caso 1: Órbitas circulares y coplanarias**

Si  $z_1 = 0$  y  $z_2 = 0$ , al sustituir en (3.51) tenemos que  $r$  y  $\theta$  son constantes, pues sus derivadas son cero. De las ecuaciones (3.56)-(3.59) llegamos a que  $z_0$  y  $z_3$  deben verificar:

$$j_6 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2 = 0, \quad (3.62)$$

$$j_9 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2 = 0 \text{ y} \quad (3.63)$$

$$\epsilon + z_0^2 - z_3^2 = 0. \quad (3.64)$$

▪ **Caso 2: Órbitas coplanarias no circulares.**

En este caso  $z_2 = 0$  y  $z_1^\ominus = j_1 z_1$ , al sustituir en (3.51) la única derivada que se anula es la de  $\theta$ , por tanto  $\theta$  es constante. De las ecuaciones (3.56)-(3.59) llegamos a que  $z_0$ ,  $z_1$  y  $z_3$  deben verificar:

$$, j_9 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2 - j_1 z_1^2 = 0, \quad (3.65)$$

$$z_1^\ominus - j_1 z_1 = 0 \text{ y} \quad (3.66)$$

$$\epsilon + z_0^2 - z_3^2 - z_1^2 = 0. \quad (3.67)$$

▪ **Caso 3: Órbitas circulares y no coplanarias.**

Tenemos que  $z_1 = 0$  y  $z_2^\dagger = -j_2 z_2$ . Al anularse  $z_1$  vamos a tener órbitas de radio constante, pero no pertenecen a un plano. De las ecuaciones (3.56)-(3.59) llegamos a que  $z_0$ ,  $z_2$  y  $z_3$  deben verificar:

$$j_6 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2 + j_2 z_2^2 = 0, \quad (3.68)$$

$$z_2^\dagger + j_2 z_2 = 0 \text{ y} \quad (3.69)$$

$$\epsilon + z_0^2 - z_3^2 - z_2^2 = 0. \quad (3.70)$$

▪ **Caso 4: Caso general**

Con  $z_2^\dagger - z_1^\ominus + j_1 z_1 + j_2 z_2 = 0$  obtenemos un caso general que contiene a los tres vistos anteriormente. Los escalares  $z_0$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$  deben verificar:

$$z_1 z_1^\ominus + z_2 z_2^\ominus - j_9 z_3^2 + 2z_0 z_3 \Omega_3 + a_2 z_0^2 = 0, \quad (3.71)$$

$$z_2^\dagger - z_1^\ominus + j_1 z_1 + j_2 z_2 = 0 \text{ y} \quad (3.72)$$

$$\epsilon + z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 0. \quad (3.73)$$

Ahora bien, sea  $f$  una función escalar arbitraria, solución de la ecuación (3.73), que puede ser escrita como:

$$z_1 = f^\dagger \quad \text{y} \quad z_2 = f^\ominus \quad (3.74)$$

De esta última ecuación (3.72) obtenemos la siguiente expresión

$$(f^\dagger)^2 + (f^\ominus)^2 = \epsilon + z_0^2 - z_3^2. \quad (3.75)$$

De esta forma hemos reducido el problema de encontrar las expresiones de  $z_1$  y  $z_2$ , a simplemente buscar un término  $f$ .

# Capítulo 4

## Aplicación y Resultados

Una vez desarrollado todo el entramado teórico de nuestro nuevo enfoque, volvemos a focalizarnos en el objetivo que nos concierne, la obtención de las órbitas de las estrellas *S2* y *G2*. Para ello, de los cuatro tipos de soluciones que llegamos a clasificar en el capítulo anterior, nos centraremos en el segundo caso, órbitas en un plano de radio no constante. Además, nos apoyaremos con dos de las soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein: La solución de Schwarzschild y la solución de Kerr.

### 4.1. Métrica de Schwarzschild

La primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein con la que vamos a trabajar es la solución de Schwarzschild. Esta métrica nos describe la geometría del espacio - tiempo distorsionada por el campo gravitacional fuera de un cuerpo aislado, esféricamente simétrico, estático y sin carga. La expresión de esta solución es:

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + B^2 dr^2 + C^2 d\theta^2 + R^2 d\phi^2, \quad (4.1)$$

donde los coeficientes métricos son

$$A = \sqrt{\frac{r-2m}{r}}, \quad B = \sqrt{\frac{r}{r-2m}}, \quad C = r, \quad R = r \sin \theta \quad \text{y} \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0. \quad (4.2)$$

Teniendo en cuenta que  $z_2 = 0$ , y sustituyendo (4.2) y (3.54)-(3.55) en (3.51), nos queda el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{er}{r-2m} \\ \frac{dr}{d\lambda} = \frac{f^\dagger}{B} \\ \frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\ \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{l}{R^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{er}{r-2m} \\ \frac{dr}{d\lambda} = \frac{f^\dagger}{B} \\ \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{l}{R^2} \end{cases} \quad (4.3)$$

Como la derivada de  $\theta$  es cero, por tanto constante, fijaremos su valor como  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . El único término que nos queda por calcular es  $f^\dagger$ . Así que, sustituyendo en (3.75) las expresiones (3.54) y (3.55), y suponiendo  $\epsilon = -1$ , tenemos

$$(f^\dagger)^2 = -1 + \frac{e^2 r}{r-2m} - \frac{l^2}{r^2}. \quad (4.4)$$

A continuación, despejamos  $f^\dagger$  de (4.4)

$$f^\dagger = \sqrt{\frac{-r^2(r-2m) + e^2r^3 - l^2(r-2m)}{(r-2m)r^2}}. \quad (4.5)$$

A partir de las dos últimas ecuaciones de (4.3) podemos calcular la órbita

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{d\lambda} &= \frac{f^\dagger}{B} \\ \frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{l}{R^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dr}{d\phi} = \frac{f^\dagger R^2}{Bl} = \sqrt{\frac{(e^2-1)}{l^2}r^4 + \frac{2m}{l^2}r^3 - r^2 + 2mr} \quad (4.6)$$

En (4.6), podemos escribir el polinomio de grado cuatro que nos queda dentro de la raíz cuadrada como  $P_4(r) = a_0r^4 + a_1r^3 + a_2r^2 + a_3r + a_4$ , de coeficientes

$$a_0 = \frac{(e^2-1)}{l^2}, \quad a_1 = \frac{2m}{l^2}, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 2m \quad \text{y} \quad a_4 = 0. \quad (4.7)$$

Así, (4.6) nos queda de la siguiente manera

$$\frac{dr}{d\phi} = \sqrt{P_4(r)}. \quad (4.8)$$

Esta última expresión tenemos que integrarla, pero antes de eso, con el propósito de facilitar el cálculo integral, hacemos el cambio de variable  $r = x + b$  en  $P_4(r)$

$$P_4(x) = a_0(x+b)^4 + a_1(x+b)^3 + a_2(x+b)^2 + a_3(x+b), \quad (4.9)$$

que a su vez podemos reescribir como:

$$P_4(x) = (\sqrt{a_0}x + b_1)^2(x + b_3)(x + b_2), \quad (4.10)$$

donde los  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , se determinan a partir de las siguientes relaciones entre los coeficientes

$$a_3b + a_2b^2 + a_1b^3 + a_0b^4 = b_1^2b_2b_3, \quad (4.11)$$

$$a_3 + 2a_2b + 3a_1b^2 + 4a_0b^3 = b_1^2(b_2 + b_3) + 2\sqrt{a_0}b_1b_2b_3, \quad (4.12)$$

$$a_2 + 3a_1b + 6a_0b^2 = b_1^2 + 2\sqrt{a_0}b_1(b_2 + b_3) + a_0b_2b_3 \quad \text{y} \quad (4.13)$$

$$a_1 + 4a_0b = 2\sqrt{a_0}b_1 + a_0(b_2 + b_3). \quad (4.14)$$

Ahora sí, con nuestro polinomio (4.10), y separando variables, tenemos

$$d\phi = \frac{dx}{(\sqrt{a_0}x + b_1)\sqrt{(x + b_3)(x + b_2)}}, \quad (4.15)$$

y al integrarla obtenemos

$$\phi - \phi_0 = \frac{2}{\beta_1} \arctan \left( \sqrt{\beta_2} \sqrt{\frac{b_2 + x}{b_3 + x}} \right), \quad (4.16)$$

donde

$$\beta_1 = \sqrt{b_1 - \sqrt{a_0}b_2} \sqrt{\sqrt{a_0}b_3 - b_1} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{a_0}b_3 - b_1}{b_1 - \sqrt{a_0}b_2}. \quad (4.17)$$

Por último, sólo nos queda deshacer el cambio de variable, es decir  $x = r - b$ , y despejar  $r$  en función de  $\phi$ , tenemos que

$$r(\phi) = \frac{b\beta_2 - b_2\beta_2 - b \tan^2(\frac{\beta_1}{2}(\phi - \phi_0)) + b_3 \tan^2(\frac{\beta_1}{2}(\phi - \phi_0))}{\beta_2 - \tan^2(\frac{\beta_1}{2}(\phi - \phi_0))}. \quad (4.18)$$

Asimismo, para trabajar con una expresión más sencilla de (4.18), tomamos  $F = (b - b_2)\beta_2$  y  $G = (b_3 - b)$ . Conseguimos así, la expresión explícita del radio de nuestra órbita

$$r(\phi) = \frac{F + G \tan^2(\frac{\beta_1}{2}(\phi + \phi_0))}{\beta_2 - \tan^2(\frac{\beta_1}{2}(\phi + \phi_0))}. \quad (4.19)$$

con  $\phi_0$  una coordenada angular fija. De (4.19) deberíamos poder sacar una órbita elíptica, que es el tipo de órbita que describe la mayoría de cuerpos que orbitan otro. Con esa motivación procedemos a estudiar (4.19) antes de tratar graficarla. Como (4.19) es el radio de la órbita, necesariamente tiene que ser una función positiva para cualquier valor de su dominio, que vendrá marcado por las funciones tangentes de la expresión. Como las tangentes están elevadas al cuadrado, estos términos serán positivos en todo el intervalo  $(0, 2\pi)$ . Las tangentes no están acotadas, luego no hay forma de controlar el signo negativo de la tangente del denominador por el parámetro  $\beta_2$ . Por este motivo, los parámetros  $F$  y  $G$  deben ser negativos.

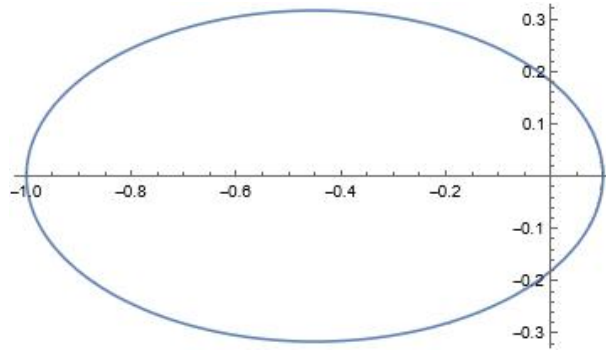


Figura 4.1: Solución elíptica de la función (4.19).

Ahora sí, teniendo en cuenta cómo deben ser los parámetros de (4.19) tratamos de dibujarla en el plano polar, consiguiendo que  $r(\phi)$  positivo y formando una elipse, como podemos ver en la figura 2.1, para los parámetros  $F = -1$ ,  $G = -1$ ,  $\beta_2 = -10$ ,  $\beta_1 = 1$ , en el intervalo  $(0, 2\pi)$ . Otras propiedades que tienen los parámetros, y que se ven al representar gráficamente (4.19) son: Para obtener una elipse, necesariamente  $\beta_1 = 1$ ;  $\beta_2$  está relacionado con la excentricidad de la elipse;  $F$  y  $G$  están relacionados con la escala y deformación de (4.19), y para el caso de una elipse necesariamente tienen que ser iguales. Debido a esto último tomamos  $\beta_3 = G = F$

$$r(\phi) = \frac{1 + \tan^2(\frac{\phi + \phi_0}{2})}{\beta_2 - \tan^2(\frac{\phi + \phi_0}{2})} \beta_3. \quad (4.20)$$

Como consecuencia a haber encontrado una expresión en coordenadas polares para la elipse, la escribiremos en términos de la función coseno, que es lo más habitual. Para ello tendremos en cuenta las identidades trigonométricas

$$1 + \tan^2(\phi) = \frac{1}{\cos^2(\phi)} \quad \text{y} \quad \tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}. \quad (4.21)$$

Así que, al aplicar (4.21) en (4.20) nos queda



$$r(\phi) = \frac{\beta_3}{\beta_2 \cos^2(\frac{\phi+\phi_0}{2}) - \sin^2(\frac{\phi+\phi_0}{2})}. \quad (4.22)$$

Ahora, usando las siguientes identidades trigonométricas del ángulo doble

$$\cos(2\phi) = 2 \cos^2(\phi) - 1 \quad \text{y} \quad \cos(2\phi) = 1 - 2 \sin^2(\phi), \quad (4.23)$$

nos queda que

$$r(\phi) = \frac{2\beta_3}{(1 - \beta_2) - (\beta_2 + 1) \cos(\phi + \phi_0)}. \quad (4.24)$$

Por último, definiendo

$$p = \frac{2\beta_3}{(1 - \beta_2)} \quad \text{y} \quad \epsilon = \frac{\beta_2 + 1}{\beta_2 - 1}, \quad (4.25)$$

llegamos a la que sería la expresión estandar

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\phi + \phi_0)}. \quad (4.26)$$

#### 4.1.1. Ajuste a los datos observacionales de S2

Para poder realizar el ajuste, hacemos un cambio de coordenadas, pasando de polares a cartesianas de la siguiente manera

$$x = r(\phi) \cdot \cos(\phi) \quad \text{y} \quad y = r(\phi) \cdot \sin(\phi). \quad (4.27)$$

Así, tras realizar cambios de escala, rotación y traslación nos queda las siguientes coordenadas  $x'$  e  $y'$

$$x' = \frac{-1 - \tan^2(\frac{\phi}{2} + \frac{23\pi}{96})}{-11.1 - \tan^2(\frac{\phi}{2} + \frac{23\pi}{96})} 175.5 \cos(\phi) - 10.3 \quad \text{y} \quad (4.28)$$

$$y' = \frac{-1 - \tan^2(\frac{\phi}{2} + \frac{23\pi}{96})}{-11.1 - \tan^2(\frac{\phi}{2} + \frac{23\pi}{96})} 175.5 \sin(\phi) + 5.7. \quad (4.29)$$

Una vez realizado el ajuste de órbitas a los datos observacionales, procedemos a obtener el valor de la masa  $m$  del objeto a partir de los parámetros del ajuste, deshaciendo el camino andado. Empezamos sustituyendo  $\beta_1 = 2$  en [4.17](#)

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{2}{\sqrt{b_1 - \sqrt{a_0 b_2}} \sqrt{\sqrt{a_0 b_3} - b_1}}, \\ 1 &= \sqrt{(b_1 - \sqrt{a_0 b_2})(\sqrt{a_0 b_3} - b_1)}, \\ 1 &= (b_1 - \sqrt{a_0 b_2})(\sqrt{a_0 b_3} - b_1), \end{aligned}$$

quedándonos la siguiente expresión en función de  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$

$$\sqrt{a_0 b_3} b_1 - a_0 b_3 b_2 - b_1^2 + \sqrt{a_0} b_2 b_1 = 1. \quad (4.30)$$

Hacemos lo mismo con  $\beta_2 = -11.1$  en [\(4.17\)](#)

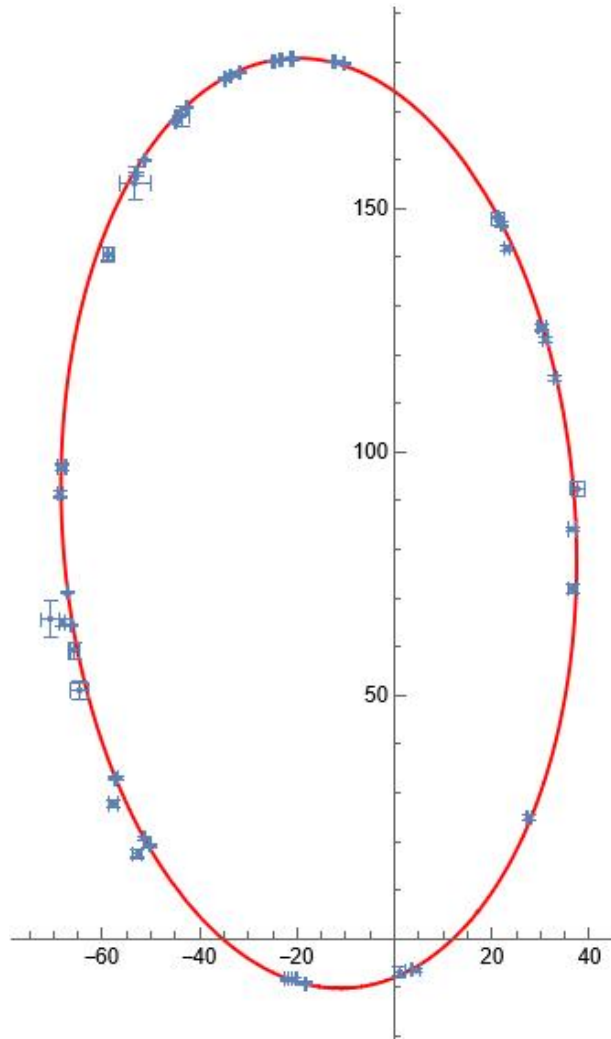


Figura 4.2: Ajuste de la órbita  $r(\phi)$  a los datos observacionales de la estrella S2 con la métrica de Schwarzschild

$$-11.1 = \frac{\sqrt{a_0 b_2} - b_1}{b_1 - \sqrt{a_0 b_3}}$$

y nos queda

$$-10.1b_1 = \sqrt{a_0}(b_3 - 11.1b_2). \quad (4.31)$$

Seguimos con los parámetros  $F = G = -175.5$ , con ellos obtendremos  $b_3$  y  $b_2$  en función de  $b$

$$F = (b - b_2)\beta_2 \Rightarrow b_2 = b - 15.8108 \quad (4.32)$$

y

$$G = (b_3 - b) \Rightarrow b_3 = b - 175.5. \quad (4.33)$$

Ahora, sustituyendo (4.32) y (4.33) en (4.31) obtenemos  $b_1$  en función de  $b$

$$-10.1b_1 = \sqrt{a_0}((-175.5 + b) - 11.1(b - 15.8108)) \quad (4.34)$$

$$b_1 = \sqrt{a_0}b \quad (4.35)$$

Con todo esto nos vamos a (4.30), y nos sale que el coeficiente director de  $P_4(r)$  es

$$a_0 = -3.6039 \times 10^{-4} \quad (4.36)$$

Ahora, de (4.14) tenemos que

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\sqrt{a_0}b_1 + a_0(b_3 + b_2) - 4a_0b \\ &= -191.3108 \cdot a_0 \end{aligned}$$

Así,

$$a_1 = 0.06895 \quad (4.37)$$

El siguiente parámetro que necesitamos calcular es  $b$ , para ello nos ayudamos de (4.13)

$$\begin{aligned} -1 + 3a_1b &= -573.9324a_0b + 2774.7954a_0 \\ b &= \frac{2774.7954a_0 + 1}{3a_1 + 573.9327a_0} \end{aligned}$$

y así

$$b = -0.8107. \quad (4.38)$$

Por último, de (4.11) sacamos el coeficiente  $a_3$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_0b(b - 175.5)(b - 15.8108) + b - a_1b^2 - a_0b^3 \\ &= (-191.3108 \cdot a_0 - a_1)b^2 + (2774.7954 - a_0 + 1)b \end{aligned}$$

quedándonos

$$a_3 = 0 \quad (4.39)$$

En (4.7) tenemos la siguiente relación  $a_3 = 2m$ , de ahí obtenemos finalmente

$$m = 0 \quad (4.40)$$

Al darnos una masa  $m = 0$ , aunque matemáticamente sea correcto, en el ámbito de la física no lo es, pues la masa para la fuente Sagitario A\* nos debería dar del orden de  $10^6$  en unidades geométricas.

### 4.1.2. Ajuste a los datos observacionales de G2

Procedemos de la misma manera que en el apartado anterior 4.1.1, haciendo el cambio a coordenadas cartesianas

$$x' = \frac{-1 - \tan^2(\frac{\phi}{2} + \frac{61\pi}{96})}{-26 - \tan^2(\frac{\phi}{2} + \frac{61\pi}{96})} 600 \cos(\phi) - 19, \quad (4.41)$$

$$y' = \frac{-1 - \tan^2(\frac{\phi}{2} + \frac{61\pi}{96})}{-26 - \tan^2(\frac{\phi}{2} + \frac{61\pi}{96})} 600 \sin(\phi). \quad (4.42)$$

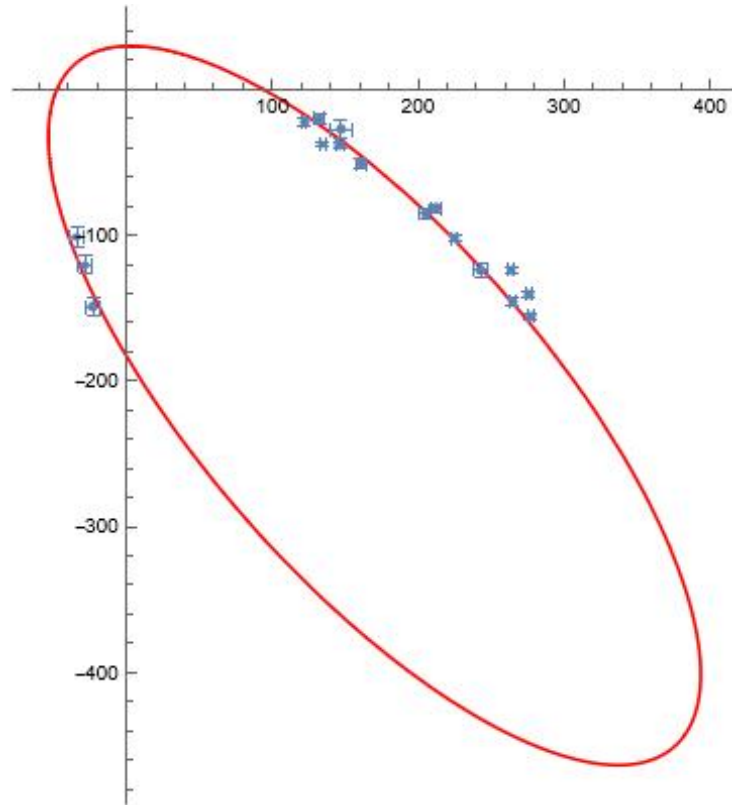


Figura 4.3: Ajuste de la órbita  $r(\phi)$  a los datos observacionales de la estrella G2 con la métrica de Schwarzschild.

El proceso para calcular la masa  $m$  tras el ajuste de la función  $r(\phi)$  a los datos observacionales de G2 es análogo al hecho con los datos de S2. Comenzamos poniendo los coeficientes  $b_2$  y  $b_3$  en función  $b$  con la ayuda de los parámetros  $F$  y  $G$ .

$$F = (b - b_2)\beta_2 \Rightarrow b_2 = b - 23.0769 \quad (4.43)$$

y

$$G = (b_3 - b) \Rightarrow b_3 = b - 600. \quad (4.44)$$

A continuación, sustituimos  $\beta_2 = -26$ , (4.43) y (4.44) en (4.17)

$$\begin{aligned}
-26b_1 &= \frac{\sqrt{a_0}b_3 - b_1}{b_1 - \sqrt{a_0}b_2}, \\
-25b_1 &= \sqrt{a_0}(b_3 - 26b_2), \\
-25b_1 &= -\sqrt{a_0}25b,
\end{aligned}$$

y nos queda una expresión de  $b_1$  en función de  $b$

$$b_1 = \sqrt{a_0}b. \quad (4.45)$$

Ahora, con  $\beta_1 = 2$  en 4.17 tenemos

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{2}{\sqrt{b_1 - \sqrt{a_0}b_2}\sqrt{\sqrt{a_0}b_3 - b_1}} \\
1 &= \sqrt{a_0}b_1b_3 - b_1^2 - a_0b_3b_2 + \sqrt{a_0}b_2b_1
\end{aligned}$$

y al sustituir las expresiones de los  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  nos queda

$$a_0 = -\frac{1}{13846.14} = -7.2222 \times 10^{-5} \quad (4.46)$$

Si nos vamos a (4.14) y sustituimos lo obtenido hasta el momento

$$a_1 = 0.0450. \quad (4.47)$$

El siguiente parámetro a calcular es  $b$ , desarrollando (4.13)

$$\begin{aligned}
-1 + 3a_1b &= 13846.14a_0 + 1869.2307a_0b \\
b &= \frac{13846.14a_0 + 1}{3a_1 - 1867.2307a_0}
\end{aligned}$$

nos queda directamente que  $b = 0$ . Así que, para finalizar calculamos  $a_3$  de (4.11), y obtenemos de nuevo que  $a_3 = 0$ . Por tanto, nos queda una masa  $m = 0$ , lo que físicamente es imposible.

## 4.2. Métrica de Kerr

En este apartado procederemos a calcular las órbitas usando la métrica de Kerr, siendo esta métrica la solución exacta para un agujero negro axialmente simétrico, giratorio, y sin carga, y viene dada por:

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + B^2 dr^2 + C^2 \theta^2 + R^2 d\phi^2 + 2\omega_3 d\phi dt. \quad (4.48)$$

donde los coeficientes métricos vienen definidos como sigue

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta}}, & C &= \rho, \\
\omega_3 &= -\frac{2mar \sin^2 \theta}{\rho^2}, & \omega_1 &= \omega_2 = 0, \\
A &= \sqrt{\frac{\rho^2 - 2mr}{\rho^2}} \quad \text{y} & R &= \sqrt{\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta}.
\end{aligned}$$

siendo  $a = \frac{J}{m}$ ,  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  y  $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ .

El procedimiento a seguir es parecido al que vimos con la métrica de Schwarzschild, comenzamos sustituyendo los coeficientes métricos de la métrica de Kerr y (3.74) en el sistema de ecuaciones diferenciales (3.51), quedandonos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{z_0}{A} + \frac{z_3 \omega_3}{A\sqrt{\Delta_2}} \\ \frac{dr}{d\lambda} = \frac{f^\dagger}{B} \\ \frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\ \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{z_3 A}{\sqrt{\Delta_2}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{z_0}{A} + \frac{z_3 \omega_3}{A\sqrt{\Delta_2}} \\ \frac{dr}{d\lambda} = \frac{f^\dagger}{B} \\ \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{z_3 A}{\sqrt{\Delta_2}} \end{array} \right. \quad (4.49)$$

De nuevo, debemos tener en cuenta que estamos en el caso en el que  $z_2 = 0$ , lo que nos lleva a que la derivada de  $\theta$  es cero, por tanto podemos tomar sin pérdida de generalidad  $\theta = \pi/2$ . Tras esto, necesitamos calcular  $f^\dagger$ , volviendo a suponer  $\epsilon = -1$ , y sustituyendo (3.75) tenemos

$$(f^\dagger)^2 = \frac{-(A^2 R^2 + \omega_3^2) + R^2 e^2 - A^2 l^2 - 2l e \omega_3}{(A^2 R^2 + \omega_3^2)}, \quad (4.50)$$

que al despejar  $f^\dagger$  nos queda

$$f^\dagger = \sqrt{\frac{(e^2 - 1)r^3 + 2mr^2 + (a^2 e^2 - a^2 - l^2)r + (2ml^2 + 2ma^2 e^2 + 4male)}{r(r^2 - 2mr + a^2)}}. \quad (4.51)$$

A partir de las dos últimas ecuaciones podemos calcular la órbita

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{f^\dagger}{B} \\ \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{z_3 A}{\sqrt{\Delta_2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{\Delta_2} f^\dagger}{z_3 A B} = \frac{\Delta_2 f^\dagger}{(A^2 l + e \omega_3) B} \quad (4.52)$$

Separando variables y desarrollando los términos podemos llegar a la siguiente expresión

$$d\phi = \frac{lr + (-2ml - 2mae)}{(r^2 - 2mr + a^2) \sqrt{\frac{(e^2 - 1)r^3 + 2mr^2 + (a^2 e^2 - a^2 - l^2)r + (2ml^2 + 2ma^2 e^2 + 4male)}{r}}} dr. \quad (4.53)$$

El polinomio de grado 3 dentro de la raíz del denominador de (4.53) podemos tomarlo como  $P_3(r) = c_0 r^3 + c_1 r^2 + c_2 r + c_3$ , donde

$$c_0 = (e^2 - 1), \quad c_1 = 2m, \quad c_2 = (a^2 e^2 - a^2 - l^2) \quad \text{y} \quad c_3 = (2ml^2 + 2ma^2 e^2 + 4male). \quad (4.54)$$

De nuevo, para que la integral sea más sencilla de integrar hacemos el cambio de variable  $r = x + b$ . El  $P_3(r)$  nos queda

$$P_3(x) = c_0(x + b)^3 + c_1(x + b)^2 + c_2(x + b) + c_3, \quad (4.55)$$

que podemos reescribir como

$$P_3(x) = (\sqrt{c_0}x + b_1)^2(x + b_2), \quad (4.56)$$

y la relación entre los coeficientes vendrá dada por

$$c_0b^3 + c_1b^2 + c_2b + c_3 = b_1^2b_2, \quad (4.57)$$

$$3c_0b^2 + 2c_1b + c_2 = b_1^2 + 2\sqrt{c_0}b_1b_2, \quad (4.58)$$

$$3c_0b + c_1 = 2\sqrt{c_0}b_1 + b_2c_0, \quad (4.59)$$

Al terminar de hacer el cambio de variable en (4.53), tenemos

$$d\phi = \frac{k_1x + k_2}{(x^2 + s_1x + s_2)\sqrt{\frac{(\sqrt{c_0}x+b_1)^2(x+b_2)}{(x+b)}}}dx, \quad (4.60)$$

donde el resto de coeficientes son:

$$k_1 = l, \quad k_2 = (lb - 2ml - 2mae), \quad s_1 = (2b - 2m) \quad \text{y} \quad s_2 = (b^2 + a^2 - 2mb) \quad (4.61)$$

Luego, integrando (4.60), llegamos a la siguiente resultado

$$\phi = \alpha_1 \operatorname{arctanh}(\gamma_1 \Gamma(x)) + \alpha_2 \operatorname{arctanh}(\gamma_2 \Gamma(x)) + \alpha_3 \operatorname{arctanh}(\gamma_3 \Gamma(x)), \quad (4.62)$$

que viene en función de

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt{b+x}}{\sqrt{b_2+x}} \quad (4.63)$$

multiplicado por los coeficientes

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{b_1 - b_2\sqrt{c_0}}}{\sqrt{b_1 - b\sqrt{c_0}}}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{-2b_2 + s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4s_2}}}{\sqrt{12b + s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4s_2}}}, \quad \gamma_3 = \frac{\sqrt{-2b_2 + s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_2}}}{\sqrt{-2b + s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_2}}} \quad (4.64)$$

Además, con  $\mu_1 = \sqrt{s_1^2 - 4s_2}$  los coeficientes multiplicando a las arcotangentes hiperbólicas son:

$$\alpha_1 = \frac{2\sqrt{b_1 - b\sqrt{c_0}}(b_1k_1 - \sqrt{c_0}k_2)}{\sqrt{b_1 - b_2\sqrt{c_0}}(b_1^2 - b_1\sqrt{c_0}s_1 + c_0s_2)} \quad (4.65)$$

$$\alpha_2 = \frac{-\sqrt{2b + s_1 - \mu_1}(b_1(2k_2 + k_1(-s_1 + \mu_1)) + \sqrt{c_0}(-k_2(s_1 + \mu_1) + 2k_1s_2))}{\sqrt{-2b_2 + s_1 - \mu_1}\mu_1(b_1^2 - b_1\sqrt{c_0}s_1 + c_0s_2)} \quad (4.66)$$

$$\alpha_3 = -\frac{\sqrt{-2b + s_1 + \mu_1}(b_1(-2k_2 + k_1(s_1 + \mu_1)) + \sqrt{c_0}(k_2(s_1 - \mu_1) - 2k_1s_2))}{\mu_1(b_1^2 - b_1\sqrt{c_0}s_1 + c_0s_2)\sqrt{-2b_2 + s_1 + \mu_1}} \quad (4.67)$$

Para poder despejar  $\Gamma(x)$  necesitamos imponer que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ . De esa manera, y usando la siguiente relación trigonométrica

$$\tanh(X_1 + Y_1) = \frac{\tanh(X_1) + \tanh(X_2)}{1 + \tanh(X_1)\tanh(X_2)} \quad (4.68)$$

llegamos a que

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{\tanh \phi - \tau_1}{\tau_2 - \tau_3 \tanh \phi}}, \quad (4.69)$$

con

$$\tau_1 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \quad \tau_2 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad \text{y} \quad \tau_3 = \gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 \quad (4.70)$$

Por último, deshaciendo el cambio  $x = r - b$ , y despejando la  $r$  en función de  $\phi$ , tenemos que nuestra solución tiene la siguiente forma

$$r(\phi) = \frac{\alpha \tanh \phi - \beta}{\epsilon - \delta \tanh \phi} \quad (4.71)$$

Como podemos apreciar, el signo de nuestro radio  $r(\phi)$  en (4.71) vendrá dado por el signo de los parámetros, pues la función  $\tanh$  en el intervalo  $(0, 2\pi)$  es positiva. Así pues, variando los parámetros somos capaces de conseguir dos tipos distintos de soluciones, como podemos ver en las figuras (4.4) y (4.5).

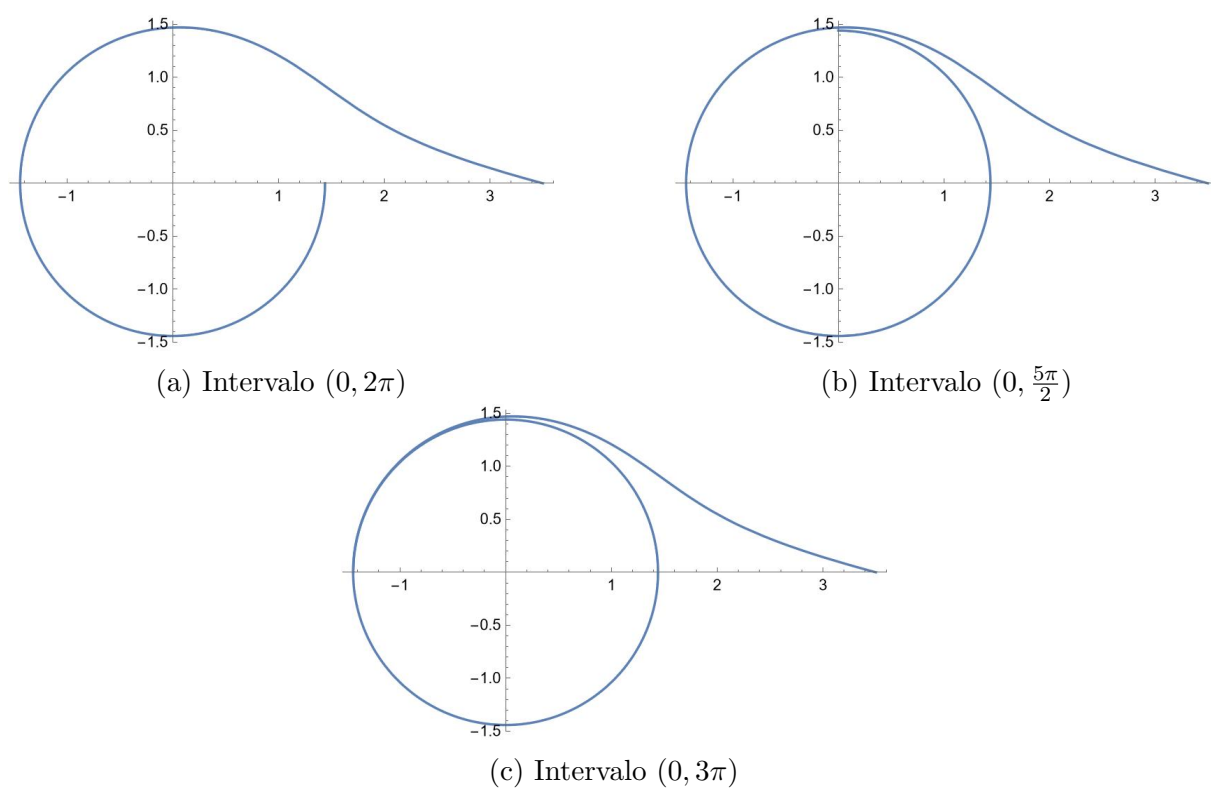
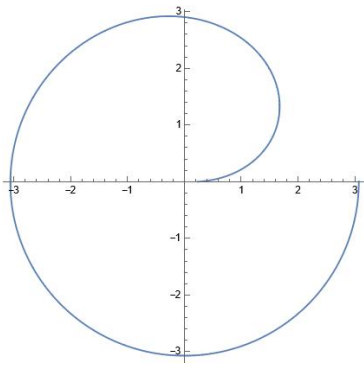


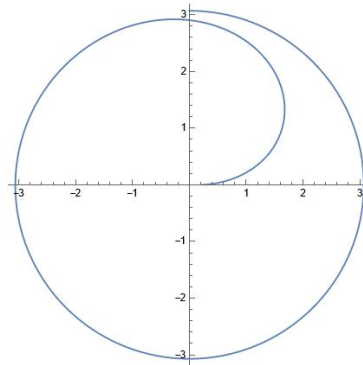
Figura 4.4: Órbita  $r(\phi)$ , para la métrica de Kerr de un objeto que viene del exterior y se queda orbitando alrededor de la fuente.

Para dibujar las órbitas de la figura 4.4 hemos tomado los siguiente valores para los parámetros:  $\alpha = 10.6$ ,  $\beta = -5.74$ ,  $\epsilon = 2$  y  $\delta = 8.8$ . En cuanto a las órbitas de la figura 4.5, los parámetros son:  $\alpha = 100$ ,  $\beta = -5.63$ ,  $\epsilon = 23.7$  y  $\delta = -10.7$ . Estas órbitas parecen dibujar el caso del problema de dos cuerpos.

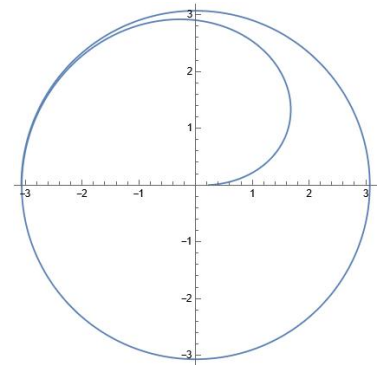




(a) Intervalo  $(0, 2\pi)$



(b) Intervalo  $(0, \frac{5\pi}{2})$



(c) Intervalo  $(0, 3\pi)$

Figura 4.5: Órbita  $r(\phi)$  para la métrica de Kerr de un objeto que sale de la fuente y se queda orbitando alrededor de ella.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo hemos sido capaces de obtener una clasificación de todas las geodésicas, para el caso de campos gravitacionales axialmente simétricas y estacionarias, mediante un formalismo de tétrada, que nos ha permitido reescribir las ecuaciones en términos de unos escalares de estructura que están físicamente ligados a la fuente.

De esa clasificación nos hemos centrado en el caso en el que las órbitas sean coplanarias pero no circulares. Al aplicar este resultado a las métricas de Schwarzschild y Kerr, hemos conseguido:

- En el caso de Schwarzschild, la expresión de una órbita elíptica.
- En el caso de Kerr, las expresiones de, las que parecen, las órbitas para el problema de dos cuerpos.

La ecuación obtenida con la métrica de Schwarzschild se ha ajustado a los datos observacionales de S2 y G2, que son las órbitas que nos conciernen. Con los parámetros del ajuste, hemos tratado de calcular la masa de la fuente central de la galaxia, obteniendo, de momento, resultados que en el ámbito de la física no son correctos. Nos planteamos que esto pueda ser ocasionado por los coeficientes que incluimos en (4.10).

# Capítulo 6

## Desarrollos futuros

En el capítulo (4) hemos calculado las expresiones de las órbitas para la métrica de Schwarzschild y Kerr. Logrando, para el primer caso, ajustar con los datos observacionales de S2 y G2.

A partir de aquí, si logramos que la masa de la fuente nos de algo razonable, podríamos continuar ajustando las órbitas para los datos observacionales del resto de estrellas S, usando la métrica de Schwarzschild. También, se podría plantear el obtener las expresiones para las órbitas usando cualquier otra métrica que sea axialmente simétrica y estacionaria.

# Apéndice A

A continuación se presentan los datos observacionales de S2 y G2 utilizados en este trabajo. Las columnas de las tablas representan: Fecha de observación en año juliano (Epoch); Ascensión Recta (R.A.); Incertidumbre de la Ascensión Recta ( $\sigma$ R.A.); Declinación (Dec.); Incertidumbre de la declinación ( $\sigma$ Dec.). Las medidas de posición están en unidades de milisegundos de arco (mas). Estos datos se han sacado de [14].

## Datos observacionales de G2

Epoch	R.A.	$\sigma$ R.A.	Dec.	$\sigma$ Dec.
2002.600	277.1	2.0	-155.7	2.0
2003.400	276.1	2.0	-140.5	2.0
2004.536	264.8	2.5	-145.5	2.7
2005.400	264.1	2.0	-123.7	2.0
2006.204	243.0	4.9	-123.9	4.4
2007.300	225.4	2.0	-102.1	2.0
2008.262	204.6	3.5	-84.9	3.4
2009.381	212.2	3.4	-81.3	2.7
2010.354	160.9	3.5	-51.0	3.6
2011.317	146.3	2.7	-38.2	2.7
2011.500	134.4	2.0	-37.6	2.0
2011.567	147.1	7.8	-27.5	6.3
2012.213	132.2	2.9	-20.1	3.1
2012.492	122.1	1.6	-22.4	2.9
2016.293	-33.6	4.9	-101.3	6.3
2017.469	-28.3	4.9	-120.5	6.3
2018.429	-22.8	4.9	-149.3	6.3

Cuadro 6.1: Medidas astrométricas de G2

## Datos observacionales de S2

Epoch	R.A.	$\sigma$ R.A.	Dec.	$\sigma$ Dec.
1995.439	-43.54	1.4	169.01	2.1
1996.485	-53.31	3.2	155.18	3.5
1997.367	-58.81	1.1	140.64	1.4
1999.333	-68.26	0.8	96.92	0.6
1999.559	-68.69	0.6	91.42	0.7
2000.305	-70.57	1.9	65.69	3.7
2000.381	-68.12	0.6	64.98	0.8
2000.548	-65.75	1.0	59.22	1.7
2000.797	-64.65	1.9	51.04	1.7
2001.351	-57.73	1.0	27.74	0.7
2001.572	-52.75	1.0	17.48	0.8
2003.303	36.60	0.9	71.97	0.9
2003.554	36.52	0.7	84.14	0.5
2003.682	37.66	1.4	92.56	1.5
2004.327	32.99	0.4	115.23	0.5
2004.564	31.12	0.6	123.00	0.6
2004.660	30.37	0.9	125.65	0.7
2005.312	23.13	0.5	141.79	0.5
2005.495	22.09	0.3	146.84	0.5
2005.566	21.23	1.2	147.93	1.3
2005.580	21.31	0.2	148.36	0.2
2008.371	-10.27	0.2	179.68	0.2
2008.562	-12.38	0.2	180.25	0.2

Epoch	R.A.	$\sigma$ R.A.	Dec.	$\sigma$ Dec.
2009.340	-21.02	0.2	180.75	0.2
2009.561	-23.34	0.2	180.53	0.2
2009.689	-24.78	0.2	180.33	0.2
2010.342	-31.87	0.1	177.88	0.2
2010.511	-33.67	0.2	177.15	0.2
2010.620	-34.82	0.2	176.61	0.2
2011.401	-42.62	0.2	170.75	0.2
2011.543	-44.08	0.2	169.01	0.2
2011.642	-44.93	0.2	167.80	0.3
2012.371	-51.21	0.1	159.94	0.2
2012.562	-53.02	0.2	157.13	0.3
2016.338	-67.14	0.2	71.08	0.2
2016.532	-66.21	0.2	64.49	0.2
2017.343	-57.42	0.2	32.89	0.2
2017.348	-57.17	0.3	33.10	0.3
2017.616	-51.33	0.3	20.61	0.3
2017.649	-50.22	0.3	19.22	0.3
2018.208	-22.14	0.3	-8.20	0.3
2018.222	-20.64	0.5	-8.27	0.4
2018.244	-18.20	0.3	-9.18	0.3
2018.380	1.07	1.1	-6.73	1.0
2018.394	4.38	0.8	-6.41	0.5
2018.674	27.66	0.4	24.86	0.5

Cuadro 6.2: Medidas astrométricas de S2

# Bibliografía

- [1] Montesdeoca, A. *Apuntes de Introducción a las Variedades diferenciables*. (1997).
- [2] Gudmundsson, S. *Introduction to Riemannian Geometry Lecture Notes*. Lund University, 2009.
- [3] Cabrera, K. *Una introducción a la Relatividad General*. Trabajo de fin de grado. Facultad de Ciencias, Sección de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, 2017.
- [4] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry*, New York: Academic Press, 1983.
- [5] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, San Diego, 1983.
- [6] Kühnel, Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds, Student Mathematical Library 16, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [7] Lee, J.M. *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer-Verlag. New York: 1997.
- [8] Dos Santos, Wytler. (2020). *Notes on the Weyl tensor, decomposition of Riemann tensor, Ruse-Lanczos identity and duality of the curvature tensor*. [10.5281/zenodo.3814369](https://doi.org/10.5281/zenodo.3814369)
- [9] Romero, A. *Geometría de Lorentz: de lenguaje a herramienta básica en Relatividad General*. Facultat de Matemàtiques i Estadística, UPC, Conferencies FME, Curs Einstein. (2005) 127-151.
- [10] Bert, J. *Teoría de la Relatividad General*, Dpto de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, 2013.
- [11] Becerra-Vergara, E. A. , Argüelles, C. R. , Krut, A. , Rueda, J. A. and Ruffini, R. *Geodesic motion of S2 and G2 as a test of the fermionic dark matter nature of our Galactic core*. *Astron. & Astrophys.*, 641: A34 (2020). [doi:10.1051/0004-6361/201935990](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935990)
- [12] Becerra-Vergara, E. A. , Argüelles, C. R. , Krut, A. , Rueda, J. A. and Ruffini, R. *Hinting a dark matter nature of Sgr A\* via the S-stars*, *MNRAS: Letters* 505, L64-L68 (2021). <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slab051>
- [13] Argüelles, C. R., Krut, A., Rueda, J. A., and Ruffini, R. *Novel constraints on fermionic dark matter from galactic observables II: Galaxy scaling relations*. *Phys. Dark Universe*, 24 (2019), 100278.[doi:10.1016/j.dark.2019.100278](https://doi.org/10.1016/j.dark.2019.100278).
- [14] Becerra-Vergara, E. A. (2021). *Geodesic motion in the spacetime of self-gravitating dark matter and its application to stellar orbits around Sgr A\**. (Tesis doctoral). Sapienza Università di Roma. Roma.

- [15] *General Relativistic 1 + 3 Orthonormal Frame Approach Revisited*. En: Classical and Quantum Gravity Vol 14. (1997).
- [16] Ospino, J. y Núñez, L. A. *Karmarkar scalar condition*. En: The European Physical Journal C 80.2 (2020), págs. 1-9. issn: 1434-6044. [doi:10.1140/epjc/s10052-020-7738-8](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7738-8). [arXiv:2001.09378](https://arxiv.org/abs/2001.09378).
- [17] Ospino, J. & Núñez, L.A. The European Physical Journal C 80 (2), 1-9.
- [18] Ospino, J., Hernández-Pastora, J. L., & Núñez, L. A. (2017, March). Series (Vol. 831, No. 1, p. 012011). IOP Publishing.
- [19] Ospino, J., Hernández-Pastora, J.L. & Núñez, L.A. All analytic solutions for geodesic motion in axially symmetric space-times. Eur. Phys. J. C 82, 591 (2022). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10544-1>
- [20] Kazunori and Akiyama and col. *First Sagittarius A\* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way* En: The Astrophysical Journal 930.2 (2022), pág. L12. [doi:10.3847/2041-8213/ac6674](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac6674).