Luis Ferragut Canals

Elementos de Análisis Funcional y Aplicaciones

Monografías de Análisis Numérico y Matemática Aplicada
Universidad de Salamanca
https://diarium.usal.es/ferragut/actividad-docente/

Preliminares

Estos apuntes son una revisión y extensión de la publicación del mismo autor y título Análisis Funcional y Aplicaciones (ISBN: 978-84-600-4235-8) de la colección Cuadernos de Análisis Numérico e Informática del antiguo Departamento de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid.

En aquellos tiempos las matemáticas ocupaban un lugar importante en los estudios de Ingeniería y las horas asignadas a esta disciplina en sus diferentes partes era mucho mayor de las que se disponen en los actuales planes de estudios. Los contenidos de aquel primer cuaderno se impartieron en cursos de doctorado, no solo en la Escuela de Minas sino también en la Universidad Politécnica de Las Palmas de Gran Canaria.

También parte de estos contenidos los incorporamos, con gran atrevimiento, a la asignatura Análisis Numérico de 4^o curso de los estudios de Ingeniero Superior de Minas. Me parecía entonces y me sigue pareciendo ahora que la enseñanza de las matemáticas en Física e Ingeniería no debería desvirtuarse renunciando al rigor y métodos de la misma. Las matemáticas aportan comprensión y los modelos matemáticos que se utilizan en Física, Ingeniería, Biología, Economía, etc. no se comprenden bien hasta que son analizados con las herramientas propias de las matemáticas.

En aquel entonces tratamos de cambiar la forma y los contenidos de la enseñanza de las Matemáticas en la Ingeniería. Por una parte incidiendo más en los conceptos, y por otra introduciendo las herramientas propias del momento en el que la informática y los ordenadores irrumpían de forma imparable. Veamos un ejemplo: En Ingeniería se ha visto siempre la integral de una función de una variable real como una herramienta que permite calcular el área asociada a la gráfica de la función. En un marco más abstracto la veríamos como una aplicación lineal, en este caso que asigna a una función un número real. Esto permite extender el concepto de integral de una manera sencilla y útil y el ejemplo paradigmático es la distribución δ de Dirac. Siempre me he preguntado que necesidad hay de introducir la distribución de Dirac como ‘‘una función extraña que no es función que sin embargo al integrarla vale la unidad” cuando tenemos a nuestra disposición la definición de la misma como aplicación lineal continua sobre un adecuado espacio de funciones. Si manejamos los conceptos con precisión podremos desarrollar los cálculos y demostraciones con sencillez y claridad.

Otro ejemplo son las series de Fourier. En los estudios de Ingeniería se solían introducir las series trigonométricas y estudiar sus propiedades directamente. Mientras que en el marco del Espacio de Hilbert podemos estudiar el concepto de base ortonormal de las que las series trigonométricas son solo un ejemplo entre otros muchos ejemplos que luego aparecen en las aplicaciones. Sin duda el marco más abstracto de los espacios de Hilbert aporta mayor claridad y comprensión ahorrando en definitiva esfuerzos innecesarios. El espacio de Hilbert es por otra parte el marco adecuado para introducir el Método de Elementos Finitos que era y sigue siendo el método más extendido para muchos cálculos en la Ingeniería.

Algunos años después cuando me trasladé a la Universidad de Salamanca, y enseñaba Análisis Numérico en la licenciatura de Matemáticas, el reto fue un poco el inverso. Se trataba de hacer ver que las matemáticas tenían sus aplicaciones. Esto permitía a muchos alumnos encontrar la motivación necesaria para estudiar matemáticas. Incluso los desarrollos y creaciones más abstractas de las matemáticas adquirían un sentido práctico. Aquí había que convencer a los alumnos de que el trabajo en matemáticas con un problema dado no terminaba con la demostración de que una determinada solución existe y eventualmente que esta era única, sino que había que encontrarla y en definitiva traducir la solución en algo tangible y cuantificable, lo que justifica la conexión del Análisis Numérico con el Análisis Matemático y el Álgebra.

Por aquel entonces había una discusión acerca de la diferencia entre matemática pura y aplicada y acerca de la cual conversábamos de vez en cuando con los compañeros de las diferentes áreas de la matemáticas. Algo en lo que estábamos bastante de acuerdo era en que las matemáticas que se conocían más tarde o más temprano encontraban su aplicación. Por mi parte pienso que esta discusión es un falso debate y que la diferencia entre lo uno y lo otro radica no en los contenidos sino en la forma de abordar los problemas. Por ejemplo, supongamos que queremos estudiar un problema físico. El matemático aplicado parte de este problema, construye un modelo matemático y trata de resolver este modelo con las herramientas matemáticas. Incluso si no las tiene las crea contribuyendo a desarrollar la matemática. Es el procedimiento habitual en mecánica de los medios continuos. Por otra parte un matemático puro empezaría buscando las estructuras matemáticas más adecuadas, las clasifica y contrasta con la realidad para ver cuáles elige la física del problema. Es el procedimiento más habitual de la mecánica cuántica y la física teórica.

Toda actividad científica requiere un buen uso del razonamiento lógico, que está en la base de las matemáticas. Mi conclusión es que si uno quiere trabajar en Ciencia, el conocimiento y métodos de las matemáticas, le ayudarán a ordenar las ideas, le aportarán comprensión a los problemas y en definitiva le ayudarán a resolverlos. Todo ello ahorrando esfuerzos innecesarios. O mejor, como señalaba el premio nobel Jacques Monod en su libro “El azar y la necesidad”:

La naturaleza es objetiva. La verdad del conocimiento no puede tener otra fuente que la confrontación sistemática de la lógica y de la experiencia.

Los contenidos de estos apuntes pretenden cubrir la mínima base teórica sobre ecuaciones en derivadas parciales, necesaria para poder luego abordar con rigor los métodos de resolución numérica de estas ecuaciones y que son en la práctica, me atrevo a decirlo esperando que nadie se ofenda, los únicos métodos para resolver estas ecuaciones.

Mi más sincero agradecimiento a quienes entonces fueron mis profesores, mis directores, mis mentores, compañeros, alumnos, a los que fueron primero alumnos y despues compañeros. Con ellos compartí mi vida universitaria, muchos momentos felices, también algunos momentos difíciles, en definitiva compartimos parte de nuestras vidas.

En Cabrerizos (Salamanca) y Palma de Mallorca. Febrero de 2021 - Junio de 2023.

Luis Ferragut Canals

Índice general

Capítulo 1
Preliminares sobre espacios topológicos y espacios métricos

Resumen

En este capítulo damos una breve introducción de la noción de espacio topológico, espacio métrico y espacio vectorial recordando las definiciones y propiedades básicas de estos espacios que serán necesarias en los capítulos siguientes sobre espacios vectoriales topológicos, espacios Normados y espacios de Banach y sobre el espacio de Hilbert que es el marco funcional básico en nuestras aplicaciones. Muchos de las nociones presentadas se proponen a través de ejercicios para el lector. Para un mayor comprensión de estos conocimientos se pueden consultar [6] en lo que respecta a los espacios topológicos y [4] para los espacios topológicos y métricos.

1.1. Espacios topológicos

Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Definición 1.1. *Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X define una topología en X si verifica las propiedades siguientes:*

- *A1: $\mathcal{A}$ contiene al conjunto vacío y al conjunto X.*
- *A2: La unión cualquiera de conjuntos de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$.*
- *A3: La intersección finita de conjuntos de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$.*

Los conjuntos de $\mathcal{A}$ se llaman abiertos del espacio topológico $(X,\mathcal{A})$.

Cuando no sea necesario, omitiremos $\mathcal{A}$ y nos referiremos referiremos únicamente mediante X para designar un espacio topológico $(X,\mathcal{A})$.

La siguiente noción resulta útil en los razonamientos.

Definición 1.2. *Base de abiertos: Una familia $\mathcal{B} = \{B_\nu; \nu \in \Theta\}$, con Θ un conjunto cualquiera de índices, de abiertos de un espacio topológico X, se dice que es un base de abiertos cuando todo conjunto abierto de X es unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

Damos aquí algunos de los conceptos topológicos básicos que utilizaremos habitualmente.

Un conjunto $B \subset X$ es cerrado si y solo si su complementario es abierto. A partir partir de las definiciones anteriores obtenemos las tres propiedades siguientes de los conjuntos cerrados, que son equivalentes a las propiedades A1, A2, A3 para los conjuntos abiertos y se obtienen tomando conjuntos complementarios:

- C1: El conjunto vacío y el conjunto X es cerrado.
- C2: Toda reunión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- C3: La intersección cualquiera de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Podríamos definir una topología en X definiendo la familia de subconjuntos cerrados mediante las propiedades C1, C2, y C3. Después definiendo conjunto abierto como los complementarios de los conjuntos cerrados.

Un subconjunto M de un espacio topológico X es a su vez un espacio topológico tomando como abiertos los subconjuntos de M de la forma $M \cap A$ donde A son los abiertos de X (ejercicio 1.1)

Entornos

Un entorno de un punto $x \in X$ es cualquier conjunto que contiene a un conjunto abierto que contiene a x. Un entorno de un conjunto $B \subset X$ es un conjunto que es entorno de todos los puntos de B.

Tenemos las siguiente caracterización de los conjuntos abiertos: Resulta inmediatamente de las definiciones anteriores que un conjunto abierto es entorno de todos sus puntos. Inversamente, si un conjunto A es entorno de todos sus puntos, es abierto. En efecto, para todo $x \in A$ existe un abierto ω_x que contiene a x y que está contenido en A. Tenemos pues

$$A = \cup_{x \in A} \omega_x$$

y esta unión de abiertos es un conjunto abierto.

En consecuencia los abiertos de un espacio topológico son conocidos una vez que son conocidos para todo punto $x \in X$ todos los entornos de x. Con otras palabras, dos topologías sobre un mismo conjunto X que tienen los mismos entornos son idénticas. Esto lleva a poder caracterizar una topología a partir de las siguientes propiedades de los entornos:

- E1: Todo entorno de x contiene a x y X es un entorno de x.
- E2: Todo conjunto que contenga un entorno de x es un entorno de x.
- E3: La intersección de dos entornos de x es un entorno de x.
- E4: Si E es un entorno de x, existe un subconjunto $U \subset E$, tal que E es entorno de todos los puntos de U.

Las dos primeras propiedades, E1 y E2, son inmediatas. E3 resulta de que la intersección de dos abiertos es un conjunto abierto. Veamos E4, sea E un entorno de x, por hipótesis existe un abierto ω tal que $x \in \omega$ y $\omega \subset E$. Como ω es un entorno de cada uno de sus puntos, E es entorno de cada punto x de ω. Basta tomar $U = \omega$.

Definida una topología a partir de las propiedes E1, E2, E3 y E4 podemos definir los conjuntos abiertos como los conjuntos que son entorno de todos sus puntos. Designaremos al conjunto de entornos de un punto x mediante la notación $\mathcal{E}(x)$. Análogamente a la noción de base de abiertos tenemos la siguiente noción de base de entornos.

Definición 1.3. *Base de entornos: Se dice que una parte $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}(x)$ es una base de entornos de $\mathcal{E}(x)$ si todo $E \in \mathcal{E}(x)$ contiene un elemento $U \in \mathcal{B}$.*

Punto de adherencia, punto interior, punto exterior, punto frontera, punto de acumulación y punto aislado

Definición 1.4. *Sea B un subconjunto de un espacio topológico X.*

- *Un punto $x \in X$ se dice que es un punto de adherencia de B si todo entorno de x contiene al menos un punto de B. Se llama adherencia de B y la designaremos mediante $\overline{B}$ al conjunto de puntos de adherencia de B.*
- *Un punto $x \in X$ se dice que es un punto interior de B cuando existe un entorno $E \in \mathcal{E}(x)$ que está incluido en B. El conjunto de puntos interiores de$B$ se llama conjunto interior de B y lo designamos* $\mathbf{Int}\, B$.
- *Un punto $x \in X$ se dice que es un punto exterior con relación a B, cuando existe un entorno $E \in \mathcal{E}(x)$ que está incluido enteramente en el complementario de B. El conjunto de puntos exteriores a B se llama conjunto exterior de B y lo designamos* $\mathbf{Ext}\, B$.
- *Se dice que un punto $x \in X$ es un punto frontera de un conjunto B cuando en cada entorno de x existen puntos que pertenecen a B y al complementario de B.*
- *Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de un conjunto B si todo entorno de x contiene al menos un punto $p \in B$ diferente de x.*
- *Un punto $x \in X$ es un punto aislado de un conjunto B si x pertenece a B pero no es un punto de acumulación de B.*

De las definiciones anteriores se deduce que un punto x de adherencia de B es un punto de acumulación de B o es un punto aislado de B. La adherencia de un conjunto B se obtiene añadiendo a B sus puntos de acumulación. Las siguientes propiedades de la adherencia y del interior las dejamos como ejercicios:

- La adherencia $\overline{B}$ de un conjunto $B \subset X$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a B (ejercicio 1.2). Por lo tanto la adherencia de un conjunto B es el cerrado más pequeño que contiene a B.
- El interior $\mathbf{Int}\, B$ de un conjunto $B \subset X$ es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en B (ejercicio 1.3). Por lo tanto el interior de un conjunto B es el abierto más grande contenido en B.
- $(\mathbf{Int}\, A)^c = \overline{A^c}$ (ejercicio 1.4).

- $\left(\overline{A}\right)^c = \textbf{Int}\,(A^c)$ (ejercicio 1.4).
- Un conjunto es cerrado si y solo si contiene todos sus puntos de acumulación (ejercicio 1.5).
- Un conjunto $B \subset X$ que no tiene puntos de acumulación es cerrado (ejercicio 1.6)

En el siguiente teorema veremos como aplicar la adherencia o el interior a la unión o intersección de conjuntos:

Teorema 1.1. *Sea Θ un conjunto de índices arbitrario y $\{A_\nu;\ \nu \in \Theta\}$ una familia arbitraria indexada mediante el índice ν. Se verifica:*

$$\overline{\cup_\nu A_\nu} \supset \cup_\nu \overline{A_\nu} \tag{1.1}$$

$$\overline{\cap_\nu A_\nu} \subset \cap_\nu \overline{A_\nu} \tag{1.2}$$

$$\textbf{Int}\left(\cup_\nu A_\nu\right) \supset \cup_\nu \left(\textbf{Int}\, A_\nu\right) \tag{1.3}$$

$$\textbf{Int}\left(\cap_\nu A_\nu\right) \subset \cap_\nu \textbf{Int}\, A_\nu \tag{1.4}$$

Demostración:

Demostración de (1.1): Sea $x \in \cup_\nu \overline{A_\nu}$, es decir $x \in \overline{A_{\nu_0}}$ para alún índice $\nu_0 \in \Theta$. Entonces todo entorno de x contiene algún punto de A_{ν_0} lo que implica que todo entorno de x contiene algún punto de $\cup_\nu A_\nu$ lo que quiere decir que $x \in \overline{\cup_\nu A_\nu}$.

Demostración de (1.2): Sea $x \in \overline{\cap_\nu A_\nu}$. Todo entorno de x contiene algún punto de $\cap_\nu A_\nu$. Entonces todo entorno de x contiene algún punto de A_ν para todo $\nu \in \Theta$, es decir $x \in \overline{A_\nu}$ para todo $\nu \in \Theta$. Por lo tanto $x \in \cap_\nu \overline{A_\nu}$

Demostración de (1.3): Sea $x \in \cup_\nu \left(\textbf{Int}\, A_\nu\right)$. Existe al menos un $\nu_0 \in \Theta$ tal que $x \in \textbf{Int}\, A_{\nu_0}$, es decir existe un entorno de x contenido todo él en A_{ν_0}. Por lo tanto existe un entorno de x contenido en $\cup_\nu A_\nu$, es decir $x \in \textbf{Int}\left(\cup_\nu A_\nu\right)$.

Demostración de (1.4): Sea $x \in \textbf{Int}\left(\cap_\nu A_\nu\right)$. Existe un entorno de x contenido todo él en $\cap_\nu A_\nu$. Por lo tanto, para todo $\nu \in \Theta$, existe un entorno de x contenido todo él en A_ν. Es decir $x \in \textbf{Int}\, A_\nu$ para todo $\nu \in \Theta$. Por lo tanto $x \in \cap_\nu \textbf{Int}\, A_\nu$.

■

Comentario 1.1. *La igualdad en general no es cierta.*

Por ejemplo, para la propiedad (1.3) si elegimos

$$A_1 = \{x;\ -1 \le x \le 0\} \quad A_2 = \{x;\ 0 \le x \le 1\}$$

tenemos

$$A_1 \cup A_2 = \{x;\ -1 \le x \le 1\}$$
$$\textbf{Int}\,(A_1 \cup A_2) = \{x;\ -1 < x < 1\}$$

Mientras que

$$\mathbf{Int}\, A_1 = \{x\,; -1 < x < 0\} \quad \text{y} \quad \mathbf{Int}\, A_2 = \{x\,; 0 < x < 1\}$$
$$\mathbf{Int}\, A_1 \cup \mathbf{Int}\, A_2 = \emptyset$$

y por tanto $\mathbf{Int}\,(A_1 \cup A_2) \neq \mathbf{Int}\, A_1 \cup \mathbf{Int}\, A_2$

■

Sin embargo tenemos las siguientes igualdades:

Teorema 1.2.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{1.5}$$
$$\mathbf{Int}\,(A \cap B) = \mathbf{Int}\, A \cap \mathbf{Int}\, B \tag{1.6}$$

Demostración:

Demostración de (1.5): Por la propiedad (1.3) tenemos que

$$\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$$

Por otra parte el conjunto $\overline{A \cup B}$ es el cerrado más pequeño que contiene a $A \cup B$. Puesto que $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado y contiene también a $A \cup B$, se verificará que

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

Demostración de (1.6): Por la propiedad (1.3) tenemos que

$$\mathbf{Int}\,(A \cap B) \subset \mathbf{Int}\, A \cap \mathbf{Int}\, B$$

Por otra parte el conjunto $\mathbf{Int}\,(A \cap B)$ es el mayor abierto contenido en $A \cap B$. Puesto que $\mathbf{Int}\, A \cap \mathbf{Int}\, B$ es un abierto también contenido en $A \cap B$, se verificará que

$$\mathbf{Int}\,(A \cap B) \supset \mathbf{Int}\, A \cap \mathbf{Int}\, B$$

■

En relación con las definiciones anteriores tenemos también la siguiente

Definición 1.5. *Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es denso en X si se verifica que*

$$\overline{A} = X$$

De la definición anterior se deduce que A es denso en X, cuando todo entorno de un punto de X contiene puntos de A. La siguiente propiedad nos da otra caracterización de la densidad.

Propiedad 1.1. *Un subconjunto A de un espacio topológico X es denso en X si y solo si todo subconjunto abierto y no vacío de X contiene puntos de A.*

Demostración:

Un abierto es entorno de todos su puntos por tanto si A es denso cualquier abierto de X tendrá que tener puntos de A. Recíprocamente si cualquier abierto no vacío de X contiene puntos de A, en particular cualquier entorno abierto de un punto de X tendrá que tener puntos de A.

■

Teorema 1.3. *Si un espacio topológico X posee una base numerable, X tiene un conjunto denso y numerable.*

Demostración:

Sea $\mathcal{B} = \{B_i; i = 1, 2, \ldots\}$ una base numerable de X. Elegimos en cada B_i un punto p_i. El conjunto de los puntos p_i es denso en X: En efecto, sea A un abierto, existe un $B_i \subset A$ y por tanto $p_i \in A$.

■

Definición 1.6. *Un espacio topológico en el que exista un conjunto numerable y denso se dice que es separable.*

Definición 1.7. *Un espacio topológico X se dice que es un espacio de Hausdorff cuando se cumple uno de los dos axiomas siguientes equivalentes entre sí:*

a) Si p y q son dos puntos distintos de X existen entornos E de p y F de q con $E \cap F = \emptyset$ (axioma de separación de Hausdorff).
b) La intersección de todos los entornos cerrados de un punto p contiene solo a p

Demostración de la equivalencia de los axiomas:

- a) $\Rightarrow$ b): Supongamos que se verifica a) y que p es un punto de X. Si $x \neq p$ recorre todos los puntos de X, en virtud del axioma a) existirán entornos E_x de p y F_x de x que supondremos abiertos, con $E_x \cap F_x = \emptyset$. El conjunto F_x^c es un conjunto cerrado que contiene a E_x y es por tanto un entorno de p que no contiene a x. La intersección de todos los entornos F_x^c contiene solo a p.
- b) $\Rightarrow$ a): Sean $p \neq q$ puntos de X. Gracias a b) tiene que existir algún entorno cerrado E de p que no contiene a q. Entonces E^c es abierto y como necesariamente $q \in E^c$ es un entorno de q; como $E \cap E^c = \emptyset$ queda demostrado a).

Tenemos también la siguiente propiedad en un espacio de Hausdorff:

Propiedad 1.2. *En un espacio de Hausdorff todo conjunto constituido por un único punto es cerrado.*

Demostración:

Sea X de Hausdorff y $p \in X$. Consideremos la intersección de todos los entornos cerrados de p. Por el axioma b) esta intersección es $\{p\}$ que es un conjunto cerrado pues es la intersección de conjuntos cerrados.

■

Aplicaciones continuas, límites

Definición 1.8. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y. Diremos que f es una aplicación continua en un punto $x_0 \in X$ si para cada entorno U de $f(x_0)$ existe un entorno V de x_0 tal que $f(V) \subseteq U$. La aplicación f se dice que es continua si es continua en todos los puntos de su dominio $D(f) = X$.*

El siguiente resultado es de la máxima importancia.

Teorema 1.4. *Sean X e Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación de X en Y. Entonces f es continua si y solo si la antimagen de todo abierto de Y es un abierto de X.*

Demostración:

Si f es continua y U es un conjunto abierto de Y, entonces $V = f^{-1}(U)$ es un entorno de cualquier punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \in U$. En efecto, sea $x_0 \in V$. Si f es continua, dado x_0 tal que $f(x_0) \in U$ existe un entorno E de x_0 tal que $f(E) \subset U$. Por lo tanto $V \supset E$ y V es un entorno de x_0. Como x_0 es un punto cualquiera de V, resulta que V es entorno de todos sus puntos y es por lo tanto un conjunto abierto de X.

Recíprocamente, dado un entorno U de $f(x_0)$, que podemos suponer abierto, como para cada conjunto abierto $U \ni f(x_0)$ de Y, el conjunto $V = f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto, entonces existe un entorno de x_0, el propio V, tal que $f(V) \subseteq U$.

■

Teorema 1.5. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y. Entonces f es continua si y solo si la antimagen de todo cerrado de Y es un cerrado de X.*

Demostración:

Se deduce del teorema anterior aplicando la relación

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$$

■

Cuando tenemos una biyección entre espacios topológicos la siguiente definición es natural.

Definición 1.9. *Dos espacios topológicos X e Y se dice que son homeomorfos, cuando existe una aplicación f biyectiva de X en Y tal que para todo abierto A de X, $f(A)$ es un abierto de Y y para todo abierto B de Y, $f^{-1}(B)$ es un abierto de X. La aplicación f recibe entonces el nombre de homeomorfismo.*

Evidentemente el inverso de un homeomorfismo es también un homeomorfismo. Vamos a definir ahora la noción de límite de una sucesión. Los espacios de Hausdorff aseguran la unicidad del límite.

Definición 1.10. *Un punto p de un espacio topológico se dice que es el límite de una sucesión de puntos $x_1, x_2, \ldots$ y escribiremos*

$$p = \lim_{n \to \infty} x_n$$

cuando para todo entorno $E \in \mathcal{E}(p)$ existe un $n_0 = n_0(E)$ tal que $x_n \in E$ para $n > n_0$. Cuando una sucesión tiene límite diremos que la sucesión es convergente.

Esta definición se puede también expresar así: Para todo entorno E de p , tenemos que $x_n \in E$ salvo eventualmente para un número finito de valores de n.

Teorema 1.6. *En un espacio de Hausdorff una sucesión tiene a lo sumo un límite.*

Demostración:

Sea p el límite de la sucesión $x_1, x_2, \ldots$ y $q \neq p$. Existirán entornos $E \in \mathcal{E}(p)$ y $F \in \mathcal{E}(q)$ con $E \cap F = \emptyset$. Para todo $n > n_0$ tendremos $x_n \in E$. Por tanto $x_n \notin F$ y q no puede ser límite de la sucesión.

■

Teorema 1.7. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua en $p \in X$, entre dos espacios de Hausdorff X e Y. Se verifica*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = p \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(p)$$

Demostración:

Sea $p \in X$ y F un entorno de $f(p)$. Por la continuidad de f en p, $E = f^{-1}(F)$ es un entorno de p. Existe un n_0 dependiente de E y en consecuencia también de F, tal que $x_n \in E$ cuando $n > n_0$. En consecuencia para estos valores de n será $f(x_n) \in F$, lo que demuestra la igualdad del segundo límite.

■

Otros espacios definidos mediante axiomas de separación

Vamos a introducir espacios topológicos con axiomas de separación más restrictivos que el axioma de Hausdorff.

Definición 1.11. *Un espacio topológico X se dice que es regular si es de Hausdorff y cumple una de la tres condiciones siguientes equivalentes entre sí.*

a) Para cada conjunto cerrado $C \subset X$ y cada punto $p \notin C$ existen entornos E de C y F de p tales que $E \cap F = \emptyset$.
b) Todo entorno de un punto $p \in X$ contiene un entorno cerrado de p. Dicho de otra manera, los entornos cerrados de p forman una base de entornos de p.
c) Todo entorno E de un punto p contiene un entorno abierto A de p con $\bar{A} \subset E$.

Demostarción de la equivalencia:

- a) $\Rightarrow$ b): Basta demostrar b) para un entorno abierto A de p. Entonces A^c es un conjunto cerrado que no contiene a p. Por a) existen entornos E de A^c y F de p con $E \cap F = \emptyset$; E y F pueden suponerse abiertos. Se verifica $F \subset E^c$; por tanto $\bar{F} \subset \overline{E^c} = (\mathbf{Int}\, E)^c = E^c$. Puesto que $E \supset A^c$ resulta $E^c \subset A$ y $\bar{F} \subset A$.
- b) $\Rightarrow$ c): El entorno E de p contiene si se verifica b) un entorno cerrado de F de p. Sabemos que todo entrono cerrado de p contiene un entorno abierto A de p. Por tanto $A \subset F = \bar{F} \subset E$ y en consecuencia $\bar{A} \subset E$.
- c) $\Rightarrow$ a): Si C es cerrado y $p \notin C$, entonces C^c es abierto y por lo tanto entorno de p. En virtud de c) existe un entorno abierto A de p tal que $\bar{A} \subset C^c$. El conjunto $\bar{A}^c$ es abierto y además $\bar{A}^c \supset C$ por lo que $\bar{A}^c$ es entorno de C. Tenemos pues que $E = \bar{A}^c$ y $F = A$ son los dos entornos buscados.

Definición 1.12. *Un espacio topológico X se dice que es normal si es de Hausdorff y cumple una de la tres condiciones siguientes equivalentes entre sí.*

a) Para cada par de conjuntos cerrados y disjuntos $P, C \subset X$ existen entornos E de P y F de C con $E \cap F = \emptyset$.
b) Todo entorno de un conjunto cerrado P contiene un entorno cerrado de P.
c) Todo entorno E de un conjunto cerrado P contiene un entorno abierto F con $\bar{F} \subset E$.

La equivalencia de estas tres condiciones se demuestra de un modo enteramente análogo a como se ha hecho con las condiciones de espacio regular de la defincIón anterior y se deja como ejercicio 1.7

De las definiciones anteriores se deduce inmediatamente que todo espacio normal es regular. Otra manera de caracterizar los espacios normales es el siguiente teorema de separación de Urysohn que tiene un gran interés en las aplicaciones y que utilizaremos más adelante en estos apuntes.

Teorema 1.8. *(De Uryshon) Un espacio de Hausdorff es normal si y solo si se cumple en él el siguiente axioma de Urysohn: Sea X un espacio de Hausdorff, si A y B son conjuntos cerrados y disjuntos de X existe una función continua a valores reales sobre X con $0 \leq f(x) \leq 1$ y $f(x) = 0$ sobre A y $f(x) = 1$ sobre B.*

Demostración:

Supongamos en primer lugar que se verifica el axioma de Urysohn. Consideremos los conjuntos
$$E = \{x;\ f(x) < \frac{1}{2}\} \quad F = \{x;\ f(x) > \frac{1}{2}\}$$

El conjunto E es abierto. En efecto sea $x_0 \in E$, por tanto $f(x_0) < 1/2$ y por la continuidad de f para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno W de x_0 tal que si $x \in W$ se verifica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Tomando ε suficientemente pequeño tendremos $f(x) < 1/2$. Análogamente demostramos que F es abierto. Claramente $A \subset E$ y $B \subset F$ y $E \cap F = \emptyset$ por lo que se verifica el axioma a) de la definción 1.12 de espacio normal.

Recíprocamente, sea X un espacio normal y A y B dos subconjuntos cerrados y disjuntos. Vamos a construir una sucesión de entornos $\{E_r;\ r \in D\}$ donde D es el conjunto de números diádicos (esto es $D = \{\frac{k}{2^n}\ ; n \in \mathbb{N}\ , k = 0, 1, 2, ..., 2^n\}$). La sucesión tendrá las propiedades siguientes:

1. $A \subset E_r$ y $\overline{E}_r \cap B = \emptyset$, para cada $r \in D$.
2. $\overline{E}_r \subset E_{r'}$ con $r, r' \in D$ con $r < r'$.

Procedermos por inducción: Sea $E_1 = B^c$. Como B es cerrado E_1 es un abierto que contiene a A y es por tanto un entorno de A. Por la normalidad de X (caracterización c) existe un entorno de A que llamaremos E_0 tal que

$$A \subset E_0 \subset \overline{E}_0 \subset E_1$$

Prosigamos con este procedimiento en sus primeros pasos: Para $n = 1$, los números diádicos en $[0, 1]$ son $0, 1/2, 1$; aplicamos el procedimiento anterior cambiando el papel de A por $\overline{E_0}$. Como $\overline{E}_0 \subset E_1$ existirá un entorno abierto de $\overline{E}_0$ al que llamaremos $E_{1/2}$ tal que

$$\overline{E}_0 \subset E_{1/2} \subset \overline{E}_{1/2} \subset E_1$$

Tenemos entonces la siguiente situación

$$E_0 \subset \overline{E}_0 \subset E_{1/2} \subset \overline{E}_{1/2} \subset E_1$$

Pasemos a $n = 2$: Los números diádicos son $0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$. Los nuevos valores son $1/4$ y $3/4$. Existirá por una parte un entorno $E_{1/4}$ de $\overline{E}_0$ y un entorno de $E_{3/4}$ de $\overline{E}_{1/2}$ de modo que

$$E_0 \subset \overline{E}_0 \subset E_{1/4} \subset \overline{E}_{1/4} \subset E_{1/2} \subset \overline{E}_{1/2} \subset E_{3/4} \subset \overline{E}_{3/4} \subset E_1$$

Pasemos al caso general: Supongamos que hemos construido la sucesión de entornos abiertos E_r para r de la forma $\frac{k}{2^{n-1}}$ de manera que la condición $\overline{E}_r \subset E_{r'}$ cuando $r < r'$ se satiface. Sea $k > 0$ un entero impar. Entonces $(k-1)/2^n$ y $(k+1)/2^n$ son números diádicos de la forma $k'/2^{n-1}$ con $0 \leq k' \leq 2^{n-1}$, y tendremos

$$\overline{E}_{\frac{k-1}{2^n}} \subset E_{\frac{k+1}{2^n}}$$

Por la normalidad de X existe un abierto G tal que $E_{\frac{k-1}{2^n}} \subset G$ y $\overline{G} \subset E_{\frac{k+1}{2^n}}$. Pondremos $E_{k/2^n} = G$ y el procedimiento de inducción está completo.

Definimos la función $f(x)$ mediante:

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in B$$
$$f(x) = \text{ínf}\{r;\ x \in E_r\} \quad \text{si} \quad x \notin B$$

Tenemos por lo lo tanto $f(x) = 0$ en A y $f(x) = 1$ en B.

Veamos que la función f es continua: Tenemos que demostrar que dado $x_0 \in X$ para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno W de x_0 tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para todo $x \in W$.

Consideremos primero el caso en el que $0 < f(x_0) < 1$; sabemos que el conjunto de números diádicos en $[0,1]$ es denso en $[0,1]$. En consecuencia para todo $\varepsilon > 0$ existen un números diádicos r y r' en $[0,1]$ con $r < r'$ tales que

$$r' < f(x_0) + \varepsilon$$
$$f(x_0) - \varepsilon < r$$

De modo que
$$f(x_0) - \varepsilon < r < r' < f(x_0) + \varepsilon$$

Consideramos entonces los entornos E_r y $E_{r'}$; como $r < r'$ se verifica $\overline{E}_r \subset E_{r'}$.

Tomemos $W = E_{r'} - \overline{E}_r = E_{r'} \cap \left(\overline{E}_r\right)^c$ es abierto y por lo tanto entorno de todos sus puntos.

Ahora sea $x \in E_{r'} - \overline{E}_r$, tendremos $f(x) \geq r$ y $f(x) \leq r'$. De modo que

$$f(x_0) - \varepsilon < r \leq f(x)$$
$$f(x_0) - f(x) < \varepsilon$$

y también

$$f(x) \leq r' < f(x_0) + \varepsilon$$
$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

De donde para todo $x \in W$,
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

En el caso en que $f(x_0) = 0$: Basta tomar como entorno $W = E_0$, pues $f(x) = 0$ para todo $x \in E_0$ y $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

En el caso $f(x_0) = 1$: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número diádico $r < 1$ tal que $f(x_0) - \varepsilon < r$. De modo que tomando $r' = 1$

$$f(x_0) - \varepsilon < r < r' = 1 < f(x_0) + \varepsilon$$

Tomemos como entorno de x_0 el conjunto abierto $W = X - \overline{E}_r$, tendremos para todo $x \in W$

$$f(x_0) - \varepsilon < r \leq f(x)$$
$$f(x_0) - f(x) < \varepsilon$$

y también

$$f(x) \leq r' = 1 < f(x_0) + \varepsilon$$
$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

de donde también en este caso

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

■

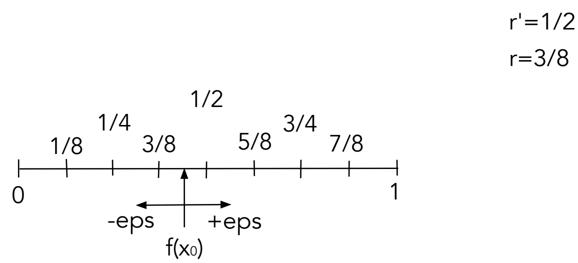

Figura 1.1 Ilustración de la demostración del teorema de Urysohn

La siguiente generalización del teorema de Urysohn es inmediata

Corolario 1.1. *Un espacio X es normal si y solo si dados A y B conjuntos cerrados y disjuntos de X existe una función continua a valores reales sobre X con $a \leq f(x) \leq b$ y $f(x) = a$ sobre A y $f(x) = b$ sobre B.*

Demostración:

Basta considerar la función $h(x) = (b-a)x + a$.

Si $f(x) = 0$ en A y $f(x) = 1$ en B, entonces la función $h \circ f$ verifica $(h \circ f)(x) = a$ en A y $(h \circ f)(x) = b$ en B. Recíprocamente si $f(x) = a$ en A y $f(x) = b$ en B, entonces $h^{-1} \circ f$ verifica $(h^{-1} \circ f)(x) = 0$ en A y $(h \circ f)(x) = 1$ en B.

■

Vamos a pasar ahora al teorema de extensión de Tietze que nos asegurará que podemos extender una función continua definida sobre un subconjunto cerrado a todo el espacio. Para agilizar la demostración consideremos primero el siguiente lema:

Lema 1.1. *Sea A un subconjunto cerrado de un espacio normal X y $f : A \to [-M, M]$ una función continua, entonces existe una función real y continua g definida en X tal que*

$$g(X) \subset [-\frac{M}{3}, +\frac{M}{3}] \quad \text{y} \quad |f(x) - g(x)| < \frac{2M}{3} \quad \text{para cada } x \in A \tag{1.7}$$

Demostración:

Consideremos los conjuntos

$$B = f^{-1}([\frac{M}{3}, M]) \quad \text{y} \quad C = f^{-1}([-M, \frac{-M}{3}])$$

ambos subconjuntos son cerrados y disjuntos. Aplicando el lema anterior 1.1 existe una función continua $g : X \longrightarrow [-M/3, M/3]$ tal que $g(x) = M/3$ para todo $x \in B$ y $g(x) = -M/3$ para todo $x \in C$ Tenemos pues

$$\begin{aligned} \text{si } x \in B \quad & f(x) \text{ y } g(x) \in [M/3, M] \\ \text{si } x \in C \quad & f(x) \text{ y } g(x) \in [-M, -M/3] \\ \text{si } x \notin B \cup C \quad & f(x) \text{ y } g(x) \in [-M/3, M/3] \end{aligned}$$

en cualquiera de los tres casos tenemos

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{2M}{3}$$

■

Pasamos ahora al teorema de extensión de Tietze:

Teorema 1.9. *(De extensión de Tietze) Si A es un conjunto cerrado no vacío de un espacio X normal y $f : A \longrightarrow [-1, 1]$ es una función continua, existe una función continua $g : X \longrightarrow [-1, 1]$ tal que la restricción de g al conjunto A coincide con f.*

Demostración:

Aplicamos sucesivamente el lema anterior 1.1. Existe una función continua $g_1 : X \longrightarrow [-1/3, 1/3]$ tal que

$$g_1 : X \longrightarrow [-1/3, 1/3] \text{ con } |f(x) - g_1(x)| \leq 2/3 \text{ para todo } x \in A$$

Repitiendo el argumento con la función continua $h_1 = f - g_1$ es $h_1 : A \longrightarrow [-2/3, 2/3]$ obenemos otra función continua g_2 definida en todo X tal que

$$g_2 : X \longrightarrow [-2/3^2, 2/3^2] \quad |h_1(x) - g_2(x)| \leq (2/3)^2 \text{ para todo } x \in A$$

hacemos $h_2 = h_1 - g_2$ y repetimos el procedimiento. Después de n pasos obtenemos una sucesiones $(g_n)_n$ y $(h_n)_n$ tales que

$$g_n : X \to [-2^{n-1}/3^n, 2^{n-1}/3^n] \quad |h_n| \le (2/3)^n \text{ para todo } x \in A$$

con $h_{n+1} = h_n - g_{n+1}$ y $h_1 = f - g_1$.

Tenemos $|g_n(x)| \le 2^{n-1}/3^n$ para todo $x \in X$ y $|h_n(x)| \le (2/3)^n$ para todo $x \in A$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{n-1}/3^n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 \quad \forall x \in X$$

y es por lo tanto absolutamente convergente. La sucesión de funciones $s_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$ converge uniformemente hacia una función g que será por tanto continua.

Por otra parte como $f - s_n = h_n$ y como $\lim_{n\to\infty} |h_n(x)| = 0$ para todo $x \in A$ concluimos que la restricción $g|_A = f$

■

De forma sencilla obtenemos las siguientes consecuencias:

Corolario 1.2. *En el teorema anterior naturalmente se puede sustituir el intervalo* $[-1,1]$ *por cualquier intervalo cerrado y acotado* $[a,b]$.

Demostración:

Si $f : A \to [a,b]$ es una función continua, tomemos por ejemplo la función $h : [a,b] \to [-1,1]$ donde para todo $x \in [a,b]$

$$h(x) = \frac{2x - a - b}{b - a}$$

Sea $g : X \to [-1,1]$ la extensión de $h \circ f$ a todo X, entonces $h^{-1} \circ g : X \to [a,b]$ es la función buscada.

■

Corolario 1.3. *El teorema de Tietze es también cierto si se sustituye el intervalo cerrado* $[-1,1]$ *por el intervalo abierto* $(-1,1)$.

Demostración:

Si $f : A \to (-1,1)$ también se puede considerar que $f : A \to [-1,1]$. Si g es la extensión de f a todo X, tendremos $g : X \to [-1,1]$. Sea $B = g^{-1}(\{-1,1\})$. A y B son dos cerrados disjuntos y aplicando el teorema de Uryshon a estos dos cerrados, existe una función h definida en X, tal que $0 \le h(x) \le 1$ para todo $x \in X$ y tal que $h(x) = 1$ para todo $x \in A$ y $h(x) = 0$ para todo $x \in B$. Finalmente la función $h.g$ cumple las condiciones buscadas; está definida en todo X, es continua y $h(x)g(x) = f(x)$ si $x \in A$.

■

Finalmente obtenemos la siguiente forma del teorema de Tietze:

Teorema 1.10. *(De Tietze) Si A es un conjunto cerrado no vacío de un espacio X normal y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que la restricción de g al conjunto A coincide con f.*

Demostración:

En efecto consideremos la aplicación $h : \mathbb{R} \to (-1,1)$, definida por $h(x) = x/(1+|x|)$ que es continua. La aplicación compuesta $h \circ f : \mathbf{A} \to (-1,1)$ es continua y por la propiedad anterior se prolonga a una aplicación continua g definida en todo X. La aplicación buscada es entonces $h^{-1} \circ g$. Fácilmente se comprueba que la aplicación $h^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ viene dada por $h^{-1}(x) = x/(1-|x|)$ que es continua en $(-1,1)$.

■

Observación 1.1. *Sea g la prolongación de f en cualquier de los casos anteriores. Observemos también que a g se le puede imponer la condición adicional de ser para cada $x \in X$*

$$\inf_{x\in A} f(x) \leq g(x) \leq \sup_{x\in A} f(x) \tag{1.8}$$

y también

$$|g(x)| \leq \sup_{x\in A} |f(x)| \tag{1.9}$$

Demostración:

Si g no cumple esta condición lo cumple la función $\varphi \circ g$ donde φ es la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} \inf_{x\in A} f(x) \quad \text{si} \quad t \leq \inf_{x\in A} f(x) \\ t \quad \text{si} \quad \inf_{x\in A} f(x) \leq t \leq \sup_{x\in A} f(x) \\ \sup_{x\in A} f(x) \quad \text{si} \quad t \geq \sup_{x\in A} f(x) \end{cases}$$

Finalmente si se cumple (1.8) y si $g(x) \geq 0$ entonces está claro que $|g(x)| \leq |\sup_{x\in A} f(x)| \leq \sup_{x\in A} |f(x)|$. Por otra parte si $g(x) < 0$, entonces si se cumple (1.8) $a = \inf_{x\in A} f(x) < g(x) < 0$, tenemos

$$|g(x)| = -g(x) < -a = -\inf_{x\in A} f(x) = -\sup_{x\in A} -f(x) \leq |\sup_{x\in A} -f(x)| \leq \sup_{x\in A} |f(x)|$$

■

Espacios y conjuntos conexos

Empezamos con la definición de espacio conexo.

Definición 1.13. *Se dice que un espacio topológico es conexo cuando no admita ninguna partición en dos subconjuntos abiertos, no vacíos.*

Con el término partición de un conjunto nos referimos nos referimos a la representación del conjunto como unión de subconjuntos disjuntos.

Teorema 1.11. *Sea X un espacio topológico. Las siguienes condiciones son equivalentes:*

a) *X es conexo*
b) *No existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que: $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$.*
c) *Si los conjuntos U y V de X son abiertos no vacíos y $X = U \cup V$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$.*
d) *Cuando los conjuntos U y V de X son abiertos y $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, entonces $U = X$ y $V = \emptyset$ o bien $U = \emptyset$ y $V = X$.*
e) *En la definición 1.13 y en las condiciones a), b), c) y d) se puede reemplazar la condición abierto por cerrado.*
f) *No existe ningún subconjunto U de X que sea abierto-cerrado distinto de X y de $\emptyset$.*

Demostración:

Se deja como ejercicio 1.8.

■

Definición 1.14. *Se dice que un subconjunto A de un espacio topológico X es conexo cuando A considerado como subespacio es conexo. Un subconjunto abierto y conexo se denomina dominio.*

Teorema 1.12. *Un subconjunto A de un espacio topológico X es conexo si se cumple una de las cuatro condiciones siguientes:*

a) *No existen subconjuntos abiertos U y V de X con las propiedades*

$$U \cap A \neq \emptyset,\ V \cap A \neq \emptyset,\ A \subset U \cup V \ \ y\, U \cap V \cap A = \emptyset$$

b) *Si los subconjuntos U y V de X son abiertos y verifican*

$$A \subset U \cup V,\ U \cap V \cap A = \emptyset$$

entonces necesariamente

$$A \subset U,\ V \cap A = \emptyset$$

o bien

$$U \cap A = \emptyset,\ A \subset V$$

.

c) No existen subconjuntos cerrados U y V de X con las propiedades

$$U \cap A \neq \emptyset,\ V \cap A \neq \emptyset,\ A \subset U \cup V\ U \cap V \cap A = \emptyset$$

d) Si los subconjuntos U y V de X son cerrados y verifican

$$A \subset U \cup V,\ U \cap V \cap A = \emptyset$$

entonces necesariamente

$$A \subset U,\ V \cap A = \emptyset$$

o bien

$$U \cap A = \emptyset,\ A \subset V$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 1.9.

■

Producto finito de espacios

Sea $\{X_i;\ i = 1,\ldots,n\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ el conjunto de sucesiones finitas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde $x_i \in X_i$ al que llamamos conjunto producto cartesiano. Entre todas las topologías posibles sobre X elegiremos aquellas para las que las aplicaciones proyección $\varphi_i : x \to x_i$ de X en X_i son continuas. Esta condición quiere decir que para cada abierto $\omega_i \subset X_i$ el conjunto $\varphi^{-1}(\omega_i)$ que no es otro que el conjunto

$$X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times \omega_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$$

es abierto en X. En consecuencia la unión cualquiera de tales conjuntos deberá ser un conjunto abierto y también toda intersección finita de estos conjuntos deberá ser un conjunto abierto. Estas consideraciones nos llevan a la siguiente definición:

Definición 1.15. *Sea $\{X_i;\ i = 1,\ldots,n\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ el conjunto producto cartesiano de los X_i. Sea la familia de conjuntos*

$$\mathcal{B} = \{P = \Pi_{i=1}^{n} \omega_i = \omega_1 \times \ldots \times \omega_n;\ con\ \omega_i\ abierto\ \ de\ X_i\}$$

Diremos que un conjunto $\omega \subset X$ es un abierto de X si es unión de conjuntos de $\mathcal{B}$. Dicho de otra manera elegimos $\mathcal{B}$ como base de abiertos de la topología de X.

El siguiente teorema justifica la anterior definición.

Teorema 1.13. *La familia de abiertos construida en la definición anterior 1.15 define una topología en X a la que llamamos topología producto y a X le llamamos espacio topológico producto.*

Demostración:

Tenemos que ver que la familia definida en 1.15 verifica los axiomas $A1$, $A2$ y $A3$ de la definición 1.1. La familia de estos abiertos satisface claramente $A1$ y $A2$. Verifiquemos $A3$: Si

$$A = \bigcup_{\nu} P_{\nu} \quad \text{y} \quad B = \bigcup_{\mu} P_{\mu}$$

donde ν y μ recorren un conjuno de índices cualesquiera y

$$P_{\nu} = \Pi_{i=1}^{n} \omega_i^{\nu} \quad \text{y} \quad P_{\mu} = \Pi_{i=1}^{n} \omega_i^{\mu}$$

Tenemos

$$A \cap B = (\bigcup_{\nu} P_{\nu}) \cap (\bigcup_{\mu} P_{\mu}) = \bigcup_{\nu} \Big(P_{\nu} \cap (\bigcup_{\mu} P_{\mu}) \Big) = \bigcup_{\nu,\mu} (P_{\nu} \cap P_{\mu})$$

donde $P_{\nu} \cap P_{\mu}$ es un abierto de $\mathcal{B}$ ya que

$$P_{\nu} \cap P_{\mu} = \Pi_{i=1}^{n} \omega_i^{\nu} \cap \Pi_{i=1}^{n} \omega_i^{\mu} = \Pi_{i=1}^{n} (\omega_i^{\nu} \cap \omega_i^{\mu})$$

■

Espacios compactos

Los espacios compactos se definen mediante propiedades de recubrimiento. Por recubrimiento de un espacio X entendemos una familia de conjuntos

$$\mathcal{D} = \{D_{\nu}; \nu \in I\}$$

de partes $D_{\nu} \subset X$, con índices en un conjunto arbitrario I para los que $\bigcup_{\nu \in I} D_{\nu} = X$. El recubrimiento $\mathcal{D}$ se dice finito o infinito, según que los D_{ν} sean un número finito o infinito. El recubrimiento $\mathcal{D}$ es abierto cuando todos los D_{ν} son abiertos. Empezamos con la definición de conjunto compacto.

Definición 1.16. *Se dice que un espacio topológico X es compacto si es de Hassdorff y si de todo recubrimiento abierto se puede extraer un subrecubrimiento finito.*

Tenemos las siguientes caracterizaciones de los espacios compactos.

Teorema 1.14. *En un espacio de Hausdorff X las tres propiedades siguientes son equivalentes*

- $K1$*: De todo recubrimiento abierto de X se puede extraer un subrecubrimiento finito.*
- $K2$*: Toda familia C de conjuntos cerrados de X de intersección vacía, posee una subfamilia finita de intersección vacía.*
- $K3$*: Toda familia C de subconjuntos cerrados de X, del cual toda subfamilia finita tiene intersección no vacía, tiene ella misma, intersección no vacía.*

Demostración:

$K2$ es la dual de $K1$, se obtienen una de otra tomando conjuntos complementarios. En efecto, si $\mathcal{D} = \{D_\nu; \nu \in I\}$ es recubrimiento abierto de X, tomando complementarios, $X = \cup_{\nu \in I} D_\nu$ equivale a

$$\emptyset = \cap_{\nu \in I} C_\nu \quad \text{donde} \quad C_\nu = D_\nu^c$$

Por otra parte $K3$ es la formulación recíproca de $K2$.

■

En general diremos que una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos de X tiene la propiedad de la intersección finita si toda subfamilia finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía. Veamos algunas de las propiedades más importantes de los espacios compactos.

Propiedad 1.3. *En un espacio X compacto, toda familia totalmente ordenada por inclusión de conjuntos cerrados no vacíos tiene una intersección no vacía. Por ejemplo toda sucesión decreciente de cerrados no vacíos tiene intersección no vacía.*

Demostración:

Toda subfamilia finita de una familia totalmente ordenada por inclusión de conjuntos posee un conjunto que es el más pequeño de todos y que es su intersección, que será no vacío en el caso considerado.

■

Tenemos la siguiente propiedad de las funciones continuas en un punto que es el análogo del teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}$:

Teorema 1.15. *Toda subconjunto infinito A de un espacio compacto X tiene al menos un punto de acumulación.*

Demostración:

Demostraremos el siguiente enunciado equivalente: Todo subconjunto A de un espacio compacto X que no tiene un punto de acumulación en X es finito.

En efecto, si ningún punto $x \in X$ es un punto de acumulación de A, todo $x \in X$ tiene un entorno E_x conteniendo a lo sumo un único punto de A, el propio x. Estos entornos E_x constituyen un recubrimiento abierto de X. Existirá un número finito de estos E_x, a saber, V_{x_i} para $i = 1,2,...n$ que recubren X. Así pues A contiene a lo sumo los n puntos x_i, $i = 1,...,n$.

■

Consideramos ahora el caso habitual de los subespacios compactos de un espacio topológico.

Definición 1.17. *Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es compacto, cuando A como subespacio es compacto.*

Tenemos la siguiente caracterización de la compacidad de A en los espacios de Hausdorff:

Teorema 1.16. *Sea A un subespacio de Hausdorff de un espacio topológico X. A es compacto si y solo si toda familia de abiertos de X que recubre A tiene un subrecubrimiento finito.*

Demostración:

Sea A compacto y sea $(\omega_i)_{i\in I}$ una familia de abiertos de X que recubre A. Los conjuntos $A\cap\omega_i$ constituyen una familia de abiertos de A recubriendo A. Como A es compacto existe un subconjunto finito de indices $J \subset I$ tal que $(A\cap\omega_i)_{i\in J}$ recubre A. A fortiori los $(\omega_i)_{i\in J}$ recubren también A.

Recíprocamente, supongamos que toda familia de abiertos de X que recubre A tiene un subrecubrimiento finito. Sea $(\omega_i{}')_{i\in I}$ una familia de abiertos de A que recubre A. Todo $\omega_i{}'$ es de la forma $\omega_i{}' = A\cap\omega_i$ con ω_i un abierto de X. Los ω_i recubren A, y existirá una parte finita J de I tal que $(\omega_i)_{i\in J}$ recubran también A. Como

$$\cup_{i\in J}(A\cap\omega_i) = A\cap(\cup_{i\in J}\omega_i) = A$$

la familia finita $(\omega_i{}')_{i\in J}$ recubre A.

Podemos pues afirmar que todo recubrimiento de A por abiertos $(\omega_i{}')$ de A, se puede extraer un subrecubrimiento finito. Es decir, A es compacto.

■

El siguiente teorema, válido en todo espacio de Hausdorff caracteriza una propiedad de los recubrimientos abiertos numerables.

Teorema 1.17. *En un espacio de Hausdorff X son equivalentes las siguientes propiedades:*

a) Todo recubrimiento abierto y numerable de X posee un subrecubrimiento finito.
b) Todo subconjunto infinito A de X tiene al menos un punto de acumulación.
c) Toda sucesión $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ decreciente de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, tiene intersección no vacía.

En particular los conjuntos compactos tienen las anteriores propiedades, pues los espacios compactos verifican en particular a).

Demostración:

- a) $\Rightarrow$ b): Por reducción al absurdo supongamos que el conjunto infinito A no tuviera ningún punto de acumulación. Sea $A_0 = \{x_i;\ i = 1, 2, \dots\}$ un subconjunto numerable de A formado por puntos x_i distintos. A_0 no tiene puntos de acumulación y será por tanto cerrado (ejercicio 1.6). El complementario A_0^c será un conjunto abierto de X. Para cada punto x_i existe un entorno abierto E_i de x_i que fuera de x_i no contiene ningún punto de A_0. El conjunto A_0^c y los entornos E_i constituyen un recubrimiento numerable de X que en virtud de a) posee un subrecubrimiento finito. Este subrecubrimiento finito estará necesariamente formado por A_0^c y por un número finito de los entornos E_i. Pero puesto que esto es claramente imposible pues A_0 tiene un número infinito de puntos distintos y los entornos E_i solo contienen un punto de A_0.
- b) $\Rightarrow$ c): Si en la sucesión dada $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ decreciente de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, a partir de un determinado índice todos los A_i son iguales, entonces $\cap A_i \neq \emptyset$. En caso contrario puede elegirse una sucesión parcial en la que todos los A_i sean distintos; podemos suponer que $A_i \neq A_{i+1}$ y elegimos un punto $a_i \in A_i - A_{i+1}$. Como el conjunto de las a_i es infinito, en virtud de b) tendrá un punto de acumulación a y todas las a_j con $j > i$ están en A_i. Por ser A_i cerrado, $a \in A_i$ y por lo tanto $a \in \cap A_i$ de donde $\cap A_i \neq \emptyset$.
- c) $\Rightarrow$ a): En primer lugar observemos que si tenemos una sucesión $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ decreciente de subconjuntos cerrados tales que su intersección es vacía c) implica que alguno de ellos, sea A_n, tendrá que ser vacío, pues si todos ellos fuesen no vacíos por c) su intersección sería no vacía. Sea ahora $\mathcal{D} = \{D_i; i = 1, 2, \dots\}$ un recubrimiento abierto y numerable de X. Los conjuntos $A_i = \left(D_i \cup D_2 \dots \cup D_i\right)^c$ para $i = 1, 2, \dots$ constituyen una sucesión decreciente de conjuntos cerrados de intersección vacía; por consiguiente existe un $A_n = \emptyset$. Por tanto,

  $$\emptyset = \left(D_1 \cup D_2 \dots \cup D_n\right)^c \quad X = D_1 \cup D_2 \dots \cup D_n$$

  y hemos obtenido un subrecubrimiento finito de X a partir del recubrimiento $\mathcal{D}$.

■

Se pueden encontrar ejemplos de espacios de Hausdorff que tengan las propiedades a), b) y c) y que no son compactos. Sin embargo tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.18. *Un espacio de Hausdorff con base numerable que posee alguna de las propiedades a), b) o c) del teorema anterior es compacto.*

Demostración:

Sea $\mathcal{B} = \{B_i; i = 1,2,...\}$ una base numerable de abiertos de un espacio de Hausdorff X y $\mathcal{D} = \{D_\nu; \nu \in \Theta\}$ un recubrimiento abierto de X siendo Θ un conjunto arbitrario de índices. Cada D_ν puede ponerse como la unión de ciertos $B_j \in \mathcal{B}$ de la base. El sistema formado por todos estos B_j forman un recubrimiento abierto y numerable de X. En virtud de la propiedad (1) existe un subrecubrimiento finito

$$\mathcal{D}' = \{B'_1, ..., B'_n\}$$

que recubre X. Cada uno de los B'_j; $j = 1,...,n$ está contenido , al menos en un conjunto D_ν. Estos D_ν constituyen un subrecubrimiento finito de X a partir del recubrimiento $\mathcal{D}$.

■

Veamos ahora la relación entre conjuntos compactos y conjuntos cerrados. En particular veremos que en un espacio compacto la noción de compacto y de cerrado coinciden. Más precisamente tenemos los dos resultados siguientes:

Teorema 1.19. *Todo conjunto cerrado perteneciente a un espacio compacto es compacto.*

Demostración:

Sea X un espacio compacto, $B \subset X$ y B cerrado. En la demostración haremos uso de la caracterización K2. Sea $\mathcal{B} = \{B_\nu; \nu \in I\}$ donde es I un conjunto arbitrario de índices, una familia de subconjuntos de B cerrados y de intersección vacía. Puesto que B es cerrado, los B_ν son también conjuntos cerrados de X. La caracterización K2 aplicada a X nos dice que $\mathcal{B}$ posee una subfamilia finita de intersección vacía. Pero esto también implica que K2 es cierto también para el espacio B, es decir, B es compacto.

■

Teorema 1.20. *En un espacio de Hausdorff todo conjunto compacto es cerrado.*

Demostración:

Sea B un conjunto compacto de un espacio de Hausdorff X. Demostraremos que B^c es abierto. Sea $p \notin B$ y veamos que existe un entorno de p contenido en B^c. Sea x un punto cualquiera B. Al ser X un espacio de Hausdorff existen entornos abiertos E_x de x y F_x de p tales que $E_x \cap F_x = \emptyset$. Cuando x recorre B, el conjunto de los E_x recubre B y existirá un subrecubrimiento finito $E_{x_1}, E_{x_2}, ..., E_{x_n}$ de abiertos que recubren B. Tendremos que los conjuntos

$$E = \cup_{i=1}^n E_{x_i} \quad F = \cap_{i=1}^n F_{x_i}$$

son abiertos y por tanto entornos de B y de p respectivamente, verificando $E \cap F = \emptyset$. En particular F es un entorno de p que es disjunto de B.

■

Observación 1.2. *De la demostración anterior se deduce también que B y p tienen entornos separados. Los dos teoremas anteriores nos dicen que en un espacio compacto los conceptos cerrado y compacto son equivalentes.*

Corolario 1.4. *Sea X un espacio de Hausdorff, $K \subset X$ un conjunto compacto y sea un punto $p \notin K$. Entonces existen conjuntos abiertos U y W tales que $p \in U$, $K \subset W$ y $U \cap W = \emptyset$.*

Demostración:

Si K es compacto es cerrado. La observación 1.2 a continuación del teorema 1.20 nos dice que existen entornos separados de K y de p disjuntos.

■

Teorema 1.21. *Todo espacio compacto es normal*

Demostración:

En primer lugar observemos que todo espacio compacto es regular. Sea X un espacio compacto, B un subconjunto cerrado de X y $p \notin B$. Por el teorema 1.19 B es compacto y según la observación del teorema anterior B y p tienen entornos E de B y F de p con $E \cap F = \emptyset$.

Sean ahora A y B subconjuntos disjuntos y cerrados de X y por tanto compactos en X. Sea $y \in B$. Existirán entornos abiertos E_y de A y F_y de y con $E_y \cap F_y = \emptyset$. Finalmente un número finito de de F_y, por ejemplo $F_{y_1}, ..., F_{y_n}$ bastan para recubrir B. En estas condiciones

$$E = \cap_{i=1}^{n} E_{y_i} \quad F = \cup_{i=1}^{n} F_{y_i}$$

son entornos abiertos de A y B con $E \cap F = \emptyset$. ■

Definición 1.18. *Un espacio topológico X se dice que es localmente compacto si todo punto p de X tiene un entorno cuya adherencia es compacta.*

El siguiente teorema será de utilidad en el estudio de las propiedades del espacio $L^2(\Omega)$ en el capítulo 5

Teorema 1.22. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y U un conjunto abierto en X tal que $K \subset U$, con K compacto. Entonces existe un conjunto abierto V de adherencia compacta tal que*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U$$

Demostración:

Como todo punto de K tiene un entorno con adherencia compacta y K está recubierto por un número finito de tales entornos, K está en la unión finita de estos entornos abiertos G que será de adherencia compacta. Si $U = X$ tomaremos $V = G$.

En el caso que $U \neq X$ sea $p \in C = U^c$. Por la observación al teorema 1.20 existen abiertos E_p y W_p que separa p y K es decir tal que $K \subset W_p$ y $p \in E_p$ con $W_p \cap E_p = \emptyset$ por lo que $p \notin \overline{W}_p$ (en efecto si, $p \in \overline{W_p}$, todo entorno de p tendrá puntos de W_p y E_p y W_p no podrían ser disjuntos). Está claro que $p \notin C \cap \overline{W}_p$ cualquiera que sea $p \in C = U^c$. Por lo tanto $\bigcap_{p\in C}(C \cap \overline{W}_p) = \emptyset$. Por otra parte C es cerrado, $\overline{W}_p$ es cerrado y $\overline{G}$ es compacto, $C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_p$ es cerrado y por lo tanto la intersección $\bigcap_{p\in C}(C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_p)$ también es cerrada y verifica

$$\bigcap_{p\in C}(C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_p) = \emptyset$$

Gracias al teorema 1.14 existe un número finito de puntos $p_1, p_2, ..., p_n$ para los que

$$C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \overline{W}_{p_2} \cap ... \cap \overline{W}_{p_n} = \emptyset$$

Entonces el conjunto

$$V = G \cap W_{p_1} \cap W_{p_2} \cap ... \cap W_{p_n}$$

tiene las propiedades requeridas pues:

V tiene adherencia compacta (pues $\overline{V}$ es un cerrado en el compacto $\overline{G}$) y gracias a la propiedad (1.3)

$$\overline{V} \subset \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \overline{W}_{p_2} \cap ... \cap \overline{W}_{p_n}$$

y como $C \cap \overline{V} = \emptyset$, o lo que es lo mismo $\overline{V} \subset U$ tenemos

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U$$

■

Veamos que la imagen de un compacto por una aplicación continua es un conjunto compacto.

Teorema 1.23. *Para toda aplicación continua f de un espacio compacto X en un espacio de Hausdorff Y, el subespacio $f(X)$ de Y es compacto.*

Demostración:

Primeramente observemos que $f(X)$ es de Hausdorff pues Y lo es. Sea ahora $(\omega_i)_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $f(X)$ mediante abiertos de $f(X)$. Los $f^{-1}(\omega_i)$ constituyen un recubrimiento abierto de X. Podemos extraer un subrecubrimirnto finito $f^{-1}(\omega_i)_{i\in J}$. Como $f(f^{-1}(\omega_i)) = \omega_i$, los $(\omega_i)_{i\in J}$ recubren también $f(X)$.

■

El siguiente corolario proporciona un caso importante donde la continuidad y la propiedad de ser biyectiva de una aplicación implican la bicontinuidad, es decir la continuidad de f y de f^{-1}.

Corolario 1.5. *Toda biyección continua f de un espacio compacto X en un espacio de Hausdorff Y es un homeomorfismo.*

Demostración:

Basta demostrar que f^{-1} es continua, es decir basta demostrar que para todo cerrado B de X, $f(B)$ es un conjunto cerrado de Y.

Como B es cerrado en X compacto, B es compacto. Su imagen $f(B)$ es entonces compacto en el espacio Y de Hausdorff y por lo tanto es un conjunto cerrado de Y.

■

1.2. Espacios métricos

En esta sección introducimos los espacios métricos y recordaremos sus principales propiedades. Veremos que tienen una estructura topológica asociada. Las nociones de convergencia y continuidad se trasladarán inmediatamente.

Definición 1.19. *Se llama espacio métrico a un conjunto M en el que se ha definido una aplicación*

$$\begin{aligned} d : M \times M &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to d(x, y) \end{aligned}$$

con las propiedades siguientes

- *M1:* $d(x,y) \geq 0 \quad \text{y } d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall\, x, y \in M$
- *M2:* $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x, y \in M$ *(Simetría)*
- *M3:* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x, y, z \in M$ *(Desigualdad triangular)*

La aplicación d se llama distancia y $d(x,y)$ se dice que es la distancia entre los puntos x e y.

A menudo, cuando sea conveniente, nos referiremos al espacio métrico mediante el par (M,d).

En el ejercicio 1.10 se proponen varios ejemplos de espacios métricos.

Bolas abiertas y Bolas cerradas

Definición 1.20. *En un espacio métrico (M,d), se llama bola abierta (resp. bola cerrada) de centro $a \in M$ y radio ρ ($\rho \geq 0$ o $\rho = \infty$) al conjunto $B(a,\rho)$ de puntos x de M tales que $d(x,a) < \rho$ (resp. $d(x,a) \leq \rho$).*

Por ejemplo en $\mathbb{R}^n$ con la distancia $d(x,y) = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$ la bola $B(a,\rho)$ es un cubo de centro a, de lados paralelos a los ejes y de longitud 2ρ.

Entre todas las topologías que se pueden definir sobre un espacio métrico M existe una que está directamente ligada a la distancia y que se llama topología del espacio métrico.

Definición 1.21. *En un espacio métrico (M,d) diremos que un subconjunto A de M es un abierto si es el conjunto vacío o bien si para todo $x \in A$ existe una bola abierta de centro x y radio no nulo contenida en A. Es inmediato verificar que los abiertos de (M,d) así definidos satisfacen las propiedades A1, A2 y A3 que caracterizan los abiertos de un espacio topológico. Esta topología definida sobre M por estos abiertos se llama topología del espacio métrico (M,d).*

Tenemos que toda reunión de bolas abiertas es un abierto. Inversamente, la definición de abierto implica que todo abierto es reunión de bolas abiertas. Tenemos pues coincidencia entre las familias de abiertos y la familia de conjuntos que son la unión de bolas abiertas. Y también una bola abierta $B(a,\rho)$ es un entorno abierto de a. En definitiva el conjunto de bolas abiertas es una base de abiertos de la topología del espacio métrico.

Propiedades de la topología asociada a un espacio métrico

Veamos las propiedades más importantes de la topología asociada a un espacio meétrico.

Propiedad 1.4. *La topología de un espacio métrico es de Hausdorff.*

Demostración:

Sea (M,d) un espacio métrico. Si x e y son dos puntos de M, las bolas abiertas $B(x,\rho)$ y $B(y,\rho)$ donde $0 < \rho \leq \frac{1}{2}d(x,y)$ son dos entornos disjuntos.

■

Como consecuencia, en un espacio métrico una sucesión tiene a lo sumo un punto límite (véase teorema 1.6).

Teorema 1.24. *Todo punto de un espacio métrico tiene una base numerable de entornos.*

Demostración:

Más precisamente, para toda sucesión $(\rho_n)_n$, $n = 1, 2, \ldots$ de números $\rho_n > 0$ y que tienen por límite 0, las bolas $B(a, \rho_n)$ abiertas o cerradas, constituyen una base de entornos de a. En efecto, todo abierto conteniendo a contiene una bola $B(a, \rho)$ con $\rho > 0$, y contiene pues una bola $B(a, \rho_n)$. Basta tomar n suficientemente grande. Por otra parte $B(a, \rho_n)$ es un entorno de a.

■

Teorema 1.25. *Un espacio métrico M posee una base (de abiertos) numerable si y solo si existe un conjunto numerable denso en M.*

Dicho de otra manera un espacio métrico M posee una base de abiertos numerable si y solo si es separable.

Demostración:

En el teorema 1.3 hemos visto que todo espacio topológico con una base numerable tiene un conjunto denso numerable. Falta pues demostrar que en un espacio métrico con un conjunto denso numerable tiene una base numerable.

Sea $D \subset M$ un conjunto numerable tal que $\overline{D} = M$. Para cada punto $p \in D$ elegimos una base de entornos numerable $\{B(p, \rho_n);\ n = 1, 2, \ldots\}$ como en el teorema anterior. Puesto que D es numerable el total de estas bolas cuando p recorre D también será numerable y constituyen una base de abiertos numerable en M. En efecto, hemos de ver que todo conjunto abierto $A \neq \emptyset$ de M es unión de bolas de centro $p \in D$ y radio ρ_n, $n = 1, 2, \ldots$. Sea A un conjunto abierto de M y $x \in A$; existe una bola $B(x, 2\rho_n)$ de centro x y radio $2\rho_n$ que pertenece enteramente a A. En $B(x, \rho_n)$ habrá un punto p de D tal que verifica $x \in B(p, \rho_n) \subset A$. En estas condiciones $A = \cup_{x \in A} B(p, \rho_n)$.

■

La propiedad de ser separable no es heredada en general por los subespacios de un espacio topológico separable. Sin embargo en un espacio métrico separable todos sus subespacios también lo son:

Propiedad 1.5. *Sea E un espacio métrico separable y sea F un subconjunto de E. Entonces F es separable.*

Demostración:

Si E es separable entonces por el teorema anterior 1.25 posee una base de abiertos numerable. Los abiertos de F son los conjuntos $A \cap F$ donde A es abierto de E. Por tanto si $(A_n)_n$ es una base de abiertos numerable de E, la familia $(A_n \cap F)_n$ será una base de abiertos numerable de F.

■

Hemos asociado a cada distancia una topología. Veamos como se traducen algunas propiedades topológicas en términos de la distancia. El hecho de que para todo punto

x de un espacio métrico M las bolas de centro x constituyen una base de entornos de x implican las siguientes propiedades:

Propiedad 1.6. *Para toda sucesión $(x_n)_n$ de puntos de M,*

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim d(a, x_n) = 0$$

Demostración:

$\lim x_n = a$ quiere decir que dado un entorno de a, que podemos tomar de la forma $B(a, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $x_n \in B(a, \varepsilon)$.

Por otra parte, $(d(a, x_n))_n$ es una sucesión de números reales y $\lim d(a, x_n) = 0$ quiere decir que para todo entorno E de $0 \in \mathbb{R}$ existe un n_0 tal que $d(a, x_n) \subset E$, para $n > n_0$. O lo que es lo mismo tomando como entornos de 0 los intervalos abiertos de centro 0 y radio $\varepsilon > 0$, $\lim d(a, x_n) = 0$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que $d(a, x_n) < \varepsilon$ para $n > n_0$, que es lo mismo que $x_n \in B(a, \varepsilon)$.

■

A diferencia de lo que ocurre en espacios topológicos generales, en los espacios métricos la noción de punto límite y punto de adherencia coinciden. Más precisamente tenemos el siguiente:

Teorema 1.26. *La condición necesaria y suficiente para que un punto p en un espacio métrico sea un punto de adherencia de un conjunto A es que exista una sucesión $(x_n)_n$ de puntos de A tal que* $\lim x_n = p$.

Demostración:

Sea $p \in \overline{A}$. Como todo entorno de p contiene puntos de A podemos elegir para cada $n = 1, 2, \ldots$, un punto $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(p, \frac{1}{n})$. Tendremos necesariamente que $\lim x_n = p$.

Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión $(x_n)_n$ de puntos de A tal que $\lim x_n = p$. Todo entorno de p contiene todos los puntos de la sucesión $(x_n)_n$ salvo eventualmente un número finito de ellos. En particular todo entorno de p contiene puntos de A por lo tanto p es un punto de adherencia de A.

■

Del mismo modo tenemos también la caracterización de la continuidad de una función en un punto.

Propiedad 1.7. *Para toda aplicación f de un espacio métrico (M, d_M) en otro espacio métrico (N, d_N), la continuidad de f en un punto $a \in M$ equivale a la condición siguiente:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tal que } d_M(a, x) < \eta \Rightarrow d_N(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

Demostración:

Podemos tomar como entornos de a en el espacio métrico (M,d_M) los puntos x tales que $d_M(a,x) < \eta$ con $\eta > 0$ y como entornos de $f(a)$ en el espacio métrico (N,d_N) por los puntos $y \in N$ tales que $d(f(a),y) < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

■

De forma más precisa en los espacios métricos tenemos la siguiente caracterización de la continuidad de una aplicación en un punto:

Teorema 1.27. *Sean M y N dos espacios métricos y sea $f : M \to N$ una aplicación de M en N. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) *f es continua en un punto a*
b) $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que $d(a,x) < \delta \Rightarrow d(f(a),f(x)) < \varepsilon$
c) *Para toda sucesión $(x_n)_n \subset M$ tal que* $\lim x_n = a \ \Rightarrow\ \lim f(x_n) = f(a)$

Demostración:

- a) $\Rightarrow$ b): Dado $\varepsilon > 0$ sea $B(f(a),\varepsilon)$ un entorno de $f(a)$, existirá un entorno de a que podemos tomar de la forma $B(a,\delta)$ tal que $f(B(a,\delta) \subset B(a,\varepsilon)$, que es lo mismo que b).
- b) $\Rightarrow$ c): Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ verificando b). Sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente en M, tal que $\lim x_n = a$. Para $\delta > 0$, existe n_0 tal que para $n > n_0$, $d(a,x_n) < \delta$ y por tanto $d(f(a),f(x_n)) < \varepsilon$
- c) $\Rightarrow$ a): Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que no se verifica a), construiremos una sucesión que no verifica c). Existe un entorno U de $f(a)$ tal que no existe ningún entorno V de a con $f(V) \subset U$. Por tanto el conjunto $f^{-1}(U)$ no es un entorno de a. Para todo n, $f^{-1}(U)$ no puede contener una bola abierta de centro a y radio $1/n$, así que existe $x_n \in M$ verificando $d(x_n,a) < 1/n$ y tal que $f(x_n) \notin U$. La sucesión $(x_n)_n$ verifica $\lim x_n = a$, pero $\lim f(x_n)$ no converge hacia $f(a)$.

■

En los espacios métricos podemos dar una definición de una continuidad más estricta y que se conoce como continuidad uniforme:

Definición 1.22. *Sean (M,d) y (N,d) dos espacios métricos. Dada una aplicación $f : M \to N$ diremos que es uniformemente continua, cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$d(x,x') < \delta \Rightarrow d(f(x),f(x')) < \varepsilon$$

La diferencia entre la continuidad y la continuidad uniforme radica en el hecho según el cual en la continuidad uniforme el valor de δ no depende de los puntos x y x'.

Teorema 1.28. *La distancia $d(x,y)$ en un espacio métrico es una función uniformemente continua de las dos variables x,y.*

Demostración:

La demostración es una consecuencia de la desigualdad triangular $M3$ a partir de la cual tenemos:

$$|d(x',y') - d(x,y)| \leq d(x',x) + d(y',y) \tag{1.10}$$

En efecto, utilizando $M3$ podemos escribir

$$d(x',y') \leq d(x',x) + d(x,y') \tag{1.11}$$

y también

$$d(x,y') \leq d(x,y) + d(y,y') \tag{1.12}$$

reordenando esta última desigualdad

$$-d(x,y) \leq -d(x,y') + d(y,y') \tag{1.13}$$

sumando (1.11) y (1.13)

$$d(x',y') - d(x,y) \leq d(x',x) + d(y,y')$$

Análogamente intercambiando x por x' e y por y' obtenemos

$$d(x,y) - d(x',y') \leq d(x',x) + d(y,y')$$

y de ahí la desigualdad (1.10).

■

Comentario 1.2. *El enunciado y la demostración del anterior teorema requiere un aclaración. Si (M,d) es el espacio métrico con la distancia d, estamos considerando la función distancia como una aplicación F del producto cartesiano $M \times M$ en $\mathbb{R}$, es decir*

$$\begin{aligned} F = d : M \times M &\to \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) &\to d(x,y) \end{aligned}$$

El producto cartesiano $M \times M$ es a su vez un espacio métrico con la distancia

$$D\big((x,y),(x',y')\big) = d(x,x') + d(y,y')$$

En el espacio de llegada la distancia es la habitual en $\mathbb{R}$, es decir la distancia entre dos números es el valor absoluto de la diferencia.

La continuidad uniforme se expresará de la siguiente manera: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$D((x,y),(x',y')) < \delta \Rightarrow |F(x,y) - F(x',y')| < \varepsilon$$

es decir,

$$d(x,x') + d(y,y') < \delta \Rightarrow |d(x,y) - d(x',y')| < \varepsilon$$

Basta tomar $\delta = \varepsilon$, más precisamente $d(x,x') < \varepsilon/2$ y $d(y,y') < \varepsilon/2$.

Definición 1.23. *Sea (M,d) un espacio métrico. Sea $A \subset M$ distinto del conjunto vacío y sea $p \in M$. Se define la distancia del punto p al conjunto A mediante*

$$d(p,A) = \inf_{x\in A} d(p,x) \tag{1.14}$$

Sea ahora otro conjunto $B \subset M$. Se define la distancia entre los dos subconjuntos A y B mediante

$$d(A,B) = \inf_{x\in A} d(x,B) = \inf_{y\in B} d(y,A) = \inf_{x\in A,\ y\in B} d(x,y) \tag{1.15}$$

Como consecuencia de esta definición tenemos la siguiente caracterización de los puntos de adherencia de un conjunto dado:

Teorema 1.29. *Sea (M,d) un espacio métrico. $A \subset M$ distinto del conjunto vacío y sea $p \in M$. La condición necesaria y suficiente para que $d(p,A) = 0$ es que $p \in \overline{A}$*

Demostración:

$p \in \overline{A}$ quiere decir que en todo entorno de p existen puntos de A. Por tanto para todo $\varepsilon > 0$ en la bola $B(p,\varepsilon)$ existen puntos de A lo que implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe al menos un $x \in A$ tal que $d(p,x) < \varepsilon$. Es decir $d(p,A) = \inf_{x\in A} d(p,x) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $d(p,A) = \inf_{x\in A} d(p,x) = 0$. Sea U un entorno de p cualquiera. Todo entorno de p contiene una bola de centro p. Sea $\varepsilon > 0$ el radio. Tendremos $B(p,\varepsilon) \subset U$. Si $d(p,A) = \inf_{x\in A} d(p,x) = 0$ existe un $x \in A$ tal que $d(p,x) < \varepsilon$. Lo que quiere decir que la bola $B(p,\varepsilon)$ y por lo tanto U contiene al menos un punto de A.

∎

Teorema 1.30. *Sea (M,d) un espacio métrico. $A \subset M$ distinto del conjunto vacío y $p \in M$. La fución distancia $d(x,A)$ es una función uniformemente continua de x.*

Demostración:

Sean x,x' puntos arbitrarios de M. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $y = y(\varepsilon) \in A$ tal que

$$\begin{aligned} d(x',y) &\le d(x',A) + \varepsilon \\ d(x,y) &\le d(x,x') + d(x',y) \le d(x,x') + d(x',A) + \varepsilon \end{aligned}$$

Por ser $d(x,A) \le d(x,y)$ resulta

$$d(x,A) \le d(x,x') + d(x',A) + \varepsilon$$

Puesto que la anterior desigualdad es válida para todo $\varepsilon > 0$ será cierta para $\varepsilon = 0$

$$d(x,A) - d(x',A) \leq d(x,x')$$

Intercambiando los papeles de x y x' tendremos también

$$d(x',A) - d(x,A) \leq d(x,x')$$

de donde finalmente

$$|d(x,A) - d(x',A)| \leq d(x,x')$$

de donde se deduce la continuidad uniforme de $d(x,A)$.

■

Teorema 1.31. *Un espacio métrico es normal.*

Demostración:

Daremos dos demostraciones:

Primera demostración:

Demostraremos que si A y B son conjuntos cerrados y disjuntos de un espacio métrico existen entornos abiertos U de A y V de B con $U \cap V = \emptyset$. Los conjuntos

$$U = \{x;\ d(x,A) < d(x,B)\}$$
$$V = \{x;\ d(x,A) > d((x,B)\}$$

debido a la continuidad de las aplicaciones $d(x,A)$ y $d(x,B)$, son abiertos (posponemos la demostración para el final). Para $x \in A$ tendremos $d(x,A) = 0$ y como $x \notin B = \overline{B}$ por el teorema 1.29 $d(x,B) > 0$, por consiguiente $A \subset U$. Análogamente demostramos $B \subset V$, lo que termina de la demostración.

Para completar la demostración veamos que U es abierto (y por tanto también V): Dado $x_0 \in U$ tenemos que encontrar un entorno de x_0 contenido en U, o bien, encontrar una bola $B(x_0,\delta) \subset U$.

- $$d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,x_0) + d(x_0,a) \quad \forall a \in A$$

  tomando el valor inferior para todo $a \in A$ obtenemos

  $$d(x,A) \leq d(x,x_0) + d(x_0,A) \tag{1.16}$$

- Por otra parte para $x_0 \in U$,

  $$d(x_0,A) < d(x_0,B)$$

  es decir existe $\varepsilon > 0$ tal que

  $$d(x_0,A) < d(x_0,B) - \varepsilon$$

  o bien

$$d(x_0,A) < d(x_0,b) - \varepsilon \quad \forall b \in B$$

- Utilizando de nuevo la desigualdad triangular

$$d(x_0,A) \leq d(x_0,x) + d(x,b) - \varepsilon \quad \forall b \in B$$

y tomando el inferior para todo $b \in B$

$$d(x_0,A) \leq d(x_0,x) + d(x,B) - \varepsilon$$

- Finalmente esta última desigualdad con la desigualdad (1.16) resulta

$$d(x,A) \leq 2d(x,x_0) + d(x,B) - \varepsilon$$

Tomando $\delta = \varepsilon/2$, tendremos si $x \in B(x_0,\delta)$ y por tanto $d(x,x_0) < \delta$

$$d(x,A) < d(x,B)$$

es decir $B(x_0,\delta) \subset U$

Segunda demostración:
Utilizamos la caracterización de espacios normales dada por el teorema de Urysohn 1.8. Basta dar una función continua que tome el valor 0 en A y el valor 1 en B. La función

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} \tag{1.17}$$

cumple las propiedades requeridas.

■

En un conjunto dado E podemos definir distintas distancias. Dos distancias pueden tener asociadas la misma topología y en este caso decimos que las dos métricas son equivalentes. En este caso las propiedades topológicas serán las mismas, p.e., los dos espacios métricos tendrán las mismas sucesiones convergentes. Más percisamente, tenemos la siguiente propiedad,

Propiedad 1.8. *Sean d_1 y d_2 dos distancias sobre un conjunto M. Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tales que $d_1(x,y) < \eta$ implica que $d_2(x,y) < \varepsilon$ y recíprocamente, las topologías asociadas a d_1 y d_2 son idénticas:*

Demostración:

Las aplicación idéntica $f : (M,d_1) \to (M,d_2)$ que a todo $x \in M$ con la topología asociada a d_1 le asigna $f(x) = x \in M$ con la topología asociada a d_2 es bicontinua, es pues un homeomorfismo.

■

Observemos también que dos distancias d_1 y d_2 sobre un conjunto M son equivalentes cuando para todo $x,y \in M$ existes dos constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que

$$C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y)$$

Espacios métricos compactos

En este apartado vamos a caracterizar los espacios métricos compactos de una manera más manejable. En particular veremos que en un espacio métrico compacto toda sucesión de puntos contiene un subsucesión convergente. Esta propiedad caracteriza además los espacios métricos compactos. Y es además de gran importancia en las aplicaciones pues es una de las herramientas utilizadas en análisis para demostrar la existencia de soluciones en problemas asociados a ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Empezamos con el siguiente lema:

Teorema 1.32. *Los espacios métricos compactos pueden definirse como los espacios métricos M que cumplen una de las tres condiciones equivalentes entre sí.*

a) Todo recubrimiento abierto y numerable de M posee un subrecubrimiento finito.
b) Todo subconjunto infinito de M tiene, al menos, un punto de acumulación.
c) Toda sucesión decreciente $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ de subconjuntos de M cerrados y no vacíos , tiene una intersección no vacía.

Demostración:

Hemos visto que en todo espacio de Hausdorff estas tres propiedades son equivalentes (teorema 1.17) y por la propia definición de espacio compacto, deducimos que los espacios compactos tienen estas propiedades. Recíprocamente, tenemos que demostrar que cualquiera de las tres propiedades a), b) y c) implican que M es compacto. Veamos que si M es un espacio métrico verificando b) tiene una base de abiertos numerable. El teorema 1.18 nos dice entonces que M es compacto.

Resulta que si M verifica b) tiene una base numerable. Para ello veamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un número finito de puntos $a_i \in M$ tales que

$$\forall x \in M \quad \text{existe algún } a_i \quad d(x,a_i) < \frac{1}{n} \tag{1.18}$$

Demostraremos esto por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier número finito de puntos $a_i \in M$ siempre hay un $x \in M$ cuya distancia a todos los a_i es mayor o igual que $1/m$. Entonces podemos construir recursivamente (ejercicio 1.11) una sucesión $(a_k)_k$ tal que

$$\forall\, k, k' \in \mathbb{N} \quad d(a_k, a_{k'}) \geq \frac{1}{m}$$

Esta sucesión no puede tener ningún punto de acumulación en contra de b). Por lo tanto existe la sucesión $(a_i)_i$ verificando (1.18). El conjunto de puntos

$\{a_i;\ i = 1, 2, ...\}$ es numerable y según la construcción es un conjunto denso en M. Finalmente, gracias al teorema 1.25, M tiene una base numerable.

■

El siguiente teorema nos da una importante caracterización de los espacios métricos compactos.

Teorema 1.33. *Un espacio métrico M es compacto si y solo si tiene la siguiente propiedad: Toda sucesión de puntos de M tiene una subsucesión convergente.*

Demostración:

Sea M un espacio métrico compacto y $(x_i)_{i=1,2,...}$ una sucesión de puntos de M. Se pueden presentar dos situaciones:

1. Que el número de puntos distintos de la sucesión $(x_i)_i$ sea finito. Entonces, al menos uno de ellos aparece un número infinito de veces en la sucesión. Dicho punto entonces representa una subsucesión convergente.
2. La sucesión tiene infinitos puntos distintos. Podemos pues extraer una subsucesión de términos distintos. Podemos pues suponer que todos los x_i son distintos. En este caso el número de términos de la sucesión es infinito y debido a la compacidad de M tendrá un punto de acumulación p. Para cada $n = 1, 2, \ldots$ consideremos una bola $B(p, 1/n)$ y elijamos en ella un punto x_i de la sucesión. Habremos construido una subsucesión convergente que tiene como límite p.

Recíprocamente, sea A un conjunto infinito; podemos obtener a partir de A una sucesión $(x_i)_i$ de términos distintos que contenga una sucesión parcial convergente hacia un punto p. Este punto p es punto de acumulación de A. En virtud de la condición b) del teorema 1.32, M es compacto.

■

En relación con la compacidad la definición siguiente nos resultará de utilidad.

Definición 1.24. *Diremos que un subconjunto A de un espacio topológico X es relativamente compacto si su adherencia $\overline{A}$ es compacta.*

Gracias al teorema anterior 1.33 tenemos la siguiente caracterización de los conjuntos relativamente compactos.

Corolario 1.6. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico M. Las dos propiedades siguentes son equivalentes.*

a) A es relativamente compacto.
b) Toda sucesión infinita de puntos de A contiene una subsucesión convergente en M

Demostración:

- Supongamos que se verifica a), es decir $\overline{A}$ es compacta. Toda sucesión infinita de puntos de A es también una sucesión infinita de puntos de $\overline{A}$ que tendrá una subsucesión convergente en $\overline{A}$.
- Recíprocamente supongamos que se verifica b) y sea $(x_n)_n$ una sucesión de puntos de $\overline{A}$. Para todo n existe $x'_n \in A$ tal que $d(x_n, x'_n) < 1/n$; la sucesión $(x'_n)_n$ contiene una subsucesión $(x'_{n_k})_{n_k}$ parcialmente convergente hacia un punto a de M. La sucesión $(x_{n_k})_{n_k}$ será también convergente hacia el punto a que será un punto de la adherencia de $\overline{A}$. En efecto,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \text{ tal que } \forall n_k > N,\ d(x'_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$d(x_{n_k}, a) \leq d(x_{n_k}, x'_{n_k}) + d(x'_{n_k}, a) < \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{2}$$

tomando $\frac{1}{n_k} < \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ tenemos

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \text{ tal que } \forall n_k > N,\ d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

■

Sucesiones de Cauchy y espacios completos

La noción de sucesión de Cauchy no es una noción topológica y no se puede definir esta noción en los espacios topológicos en general. Se puede definir la noción de sucesión de Cauchy en espacios uniformes aunque aquí no consideraremos este tipo de espacios. Alternativamente se puede definir fácilmente la noción de sucesión de Cauchy en espacios métricos que es lo que haremos a continuación.

Definición 1.25. *Sea (M, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_n$ una sucesión de puntos de M. Diremos que esta sucesión es de Cauchy si $d(x_p, x_q)$ tiende a* 0 *cuando p y q tienden a ∞. Más precisamente, $(x_n)_n$ es de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \forall p, q \geq n \text{ se tiene } d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

De forma casi inmediata tenemos la siguiente propiedad

Propiedad 1.9. *En un espacio métrico toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración:

En un espacio métrico una sucesión $(x_n)_n$ es convergente hacia un límite l si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow d(x_n, l) \leq \varepsilon$$

Aplicando la desigualdad triangular tendremos

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n_q, n_p > n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq d(x_p, l) + d(x_q, l) \leq 2\varepsilon$$

■

En general no toda sucesión de Cauchy es convergente. Veamos algunos ejemplos:

1. En el subespacio métrico $M = (0, \infty)$ de $\mathbb{R}$ la sucesión de puntos $x_n = 1/n$ para $n = 1, 2, \ldots$ es una sucesión de Cauchy que no es convergente.
2. Sea E un subespacio métrico de un espacio métrico F. Para todo $x \in \bar{E}$ existe una sucesión $(x_n)_n$ de puntos de E que converge hacia x. Esta sucesión es de Cauchy en E y sin embargo solo es convergente en E si $x \in E$.

Tenemos sin embargo que en $\mathbb{R}$ toda sucesión de Cauchy es convergente (ejercicio 1.12).

Definición 1.26. *Se dice que un espacio métrico M es completo si toda sucesión de Cauchy de puntos de M es convergente en M.*

Damos a continuación dos teoremas análogos a los teoremas 1.19 y 1.20

Teorema 1.34. *Un subespacio completo de un espacio métrico es siempre cerrado.*

Demostración:

Sea A un subespacio completo de un espacio métrico E. Demostraremos que A coincide con su adherencia $\overline{A}$. Sea p un punto arbitrario de $\overline{A}$. En virtud del teorema 1.26 existe una sucesión $(x_n)_n$ de puntos de A que tiene por límite p. Dicha sucesión es de Cauchy y por ser A completo tiene límite en A. Como el límite es único este límite tiene que ser p. Por tanto $p \in A$.

■

Teorema 1.35. *Un subconjunto cerrado de un espacio completo es también completo.*

Demostración:

Sea M un espacio métrico completo y A un subconjunto cerrado de M. Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en A tendrá un límite $p \in M$. Por tanto p es un punto de la adherencia de A. Y como A es cerrado $p \in A$ pues $A = \overline{A}$.

■

Observación 1.3. *De los dos teoremas anteriores se deduce que en un espacio completo, los conjuntos completos y cerrados coinciden.*

Diámetros, conjuntos acotados y totalmente acotados

Vamos a introducir en este apartado dos nociones de acotación. Un conjunto estará acotado si es subconjunto de alguna bola abierta. Empezamos con la definición de diámetro de un conjunto.

Definición 1.27. *Sea M un espacio métrico y A un subconjunto de M no vacío. Llamamos diámetro del conjunto A al número real*

$$Diám(A) = \sup\{d(x,y);\ x,y \in A\}$$

Definición 1.28. *Sea M un espacio métrico y A un subconjunto de M no vacío. Decimos que A es acotado si existe una bola abierta $B(p,r)$ en E tal que $A \subset B(p,r)$.*

Comentario 1.3. *Tendremos que A es acotado si y solo si el diámetro de A es menor que $+\infty$ (ejercicio 1.13).*

Teorema 1.36. *Para todo conjunto $A \neq \emptyset$ de un espacio métrico se tiene*

$$Diám(A) = Diám(\overline{A})$$

Demostración:

Es claro que $Diám(A) \leq Diám(\overline{A})$. Recíprocamente sean $x,y \in \overline{A}$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen puntos $x',y' \in A$ con $d(x,x') < \varepsilon$ y $d(y,y') < \varepsilon$, de manera que

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) < d(x',y') + 2\varepsilon \leq Diám(A) + 2\varepsilon$$

Puesto que esto es cierto para todo ε resulta

$$d(x,y) \leq Diám(A) \quad \forall x,y \in \overline{A}$$

y por lo tanto

$$Diám(\overline{A}) = \sup_{x,y\in\overline{A}} d(x,y) \leq Diám(A)$$

■

Vamos a dar ahora un concepto de acotación más estricto.

Definición 1.29. *Sea M un espacio métrico y A un subconjunto de M no vacío. Diremos que A es totalmente acotado cuando para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto A está contenido en la unión de un número finito de bolas abiertas de radio ε.*

Teorema 1.37. *Todo conjunto totalmente acotado es acotado.*

Demostración:

Sea M un espacio métrico y sea $A \subset M$ un conjunto totalmente acotado. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos $x_i \in A$, $i = 1,\dots,n$ tales que las bolas abiertas $B(x_i,\varepsilon)$ recubren A, es decir

$$A \subset \bigcup_{i=1,\dots,n} B(x_i,\varepsilon)$$

Sean $x, y \in A$ dos puntos cualesquiera. Necesariamente $x \in B(x_i,\varepsilon)$ e $y \in B(x_i,\varepsilon)$ para algún $i = 1,\dots,n$ y para algún $j = 1,\dots,n$. Tendremos

$$d(x,y) \leq d(x,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,y) \leq 2\varepsilon + \delta$$

donde $\delta = \text{máx}\{d(x_i,x_j);\ i,j = 1,\dots,n\} < \infty$. Por lo tanto

$$Diám(A) = \sup\{d(x,y);\ x,y \in A\} \leq 2\varepsilon + \delta < \infty$$

de donde A es acotado (comentario 1.3).

■

Comentario 1.4. *El recíproco del anterior teorema no es cierto, como se pondrá de manifiesto más adelante en el capítulo 4 (véase teorema 4.13). AllÃ veremos que en los espacios de dimensión infinita la bola unidad cerrada no es compacta. Por tanto obviamente es acotada y sin embargo no puede ser totalmente acotada.*

El siguiente teorema permite identificar los conjuntos totalmente acotados mediante una propiedad de las sucesiones.

Teorema 1.38. *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto A de un espacio métrico sea totalmente acotado es que toda sucesión en A tenga una subsucesión de Cauchy.*

Demostración:

Supongamos que A es totalmente acotado y sea una sucesión arbitraria $x_1, x_2, x_3, \dots$ de puntos de A. Consideremos sucesivamente el conjunto finito de bolas $\mathcal{B}_n$ de diámetro $\frac{1}{n}$ (es decir de radio $\frac{1}{2n}$) recubriendo A. Al menos alguna de las bolas de $\mathcal{B}_1$ deberá contener un número infinito de puntos de la sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots$ pues el conjunto de bolas $\mathcal{B}_1$ es finito. Dichos infinitos puntos de la sucesión constituirán una subsucesión $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots$ que tendrá diámetro menor que 1. Del mismo modo razonando con esta última sucesión, alguna de las bolas de $\mathcal{B}_2$ contendrá infinitos puntos de ella que constituirán una subsucesión $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots$ de diámetro menor que $1/2$. Prosiguiendo de este modo tendremos que para cada número natural n existe una subsucesión $S_n = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots$ de diámetro $1/n$ de manera que si $n > n'$ la sucesión parcial S_n es una subsucesión de la sucesión $S_{n'}$. Consideremos ahora la sucesión diagonal

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \dots$$

es una subsucesión de la sucesión de partida y además es de Cauchy. En efecto, la sucesión parcial de la anterior que comience por $x_k^{(k)}$ es una subsucesión cuyo diámetro es menor que $1/k$. Por lo tanto para todo $\varepsilon > 0$ tomando $n_0 > 1/\varepsilon$, si $n, n' > n_0$ se deduce que $d(x_n^{(n)}, x_{n'}^{(n')}) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Es decir la subsucesión diagonal antes construida es de Cauchy.

Recíprocamente supongamos que A no es totalmente acotado. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ para el que no existe un número finito de bolas abiertas de diámetro ε recubriendo A. Sea un punto $a_1 \in A$ elegido arbitrariamente. La bola B_1 de centro a_1 y radio $\varepsilon/2$, como $\varepsilon/2 < \varepsilon$ no puede cubrir totalmente A. Sea a_2 no perteneciente a esta bola. Llamemos B_2 a la bola de centro a_2 y radio $\varepsilon/2$. La unión $B_1 \cup B_2$ no puede recubrir totalmente A y podemos elegir a_3 no contenido en esta unión. Así sucesivamente vamos construyendo una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en la que dos puntos cualesquiera de ella distan entre sí más de $\varepsilon/2$. Una sucesión como ésta no puede tener una subsucesión parcial de Cauchy.

■

Corolario 1.7. *En un espacio métrico completo los subconjuntos relativamente compactos y los conjuntos totalmente acotados coinciden.*

Demostración:

Según el corolario 1.6 los conjuntos relativamente compactos son aquellos para los que toda sucesión infinita de puntos tiene una subsucesión convergente. En el teorema anterior 1.38 hemos visto que los conjuntos totalmente acotados son aquellos en los que toda sucesión infinita tiene una subsucesión de Cauchy. En un espacio métrico completo las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes coinciden lo que termina la demostración.

■

Corolario 1.8. *En un espacio métrico completo los conjuntos compactos son los conjuntos cerrados y totalmente acotados.*

Demostración:

Sea M un espacio métrico completo y $A \subset M$ cerrado y totalmente acotado. En un espacio métrico completo los conjuntos relativamente compactos y los conjuntos totalmente acotados coinciden. Por tanto A es relativamente compacto. Los conjuntos relativamente compactos son aquellos cuya adherencia es compacta. Si el conjunto A es cerrado el conjunto coincide con su adherencia y por lo tanto es compacto.

Recíprocamente, sea M un espacio métrico completo y $A \subset M$ compacto. Como A es compacto A es cerrado(véase teorema 1.20). Si A es compacto en particular es relativamente compacto y como el espoacio métrico es completo es totalmente acotado (véase corolario 1.7)

■

Teorema de Baire

El siguiente teorema será utilizado en el capítulo 3 para demostrar algunas propiedades fundamentales de los espacios normados allí estudiados.

Teorema 1.39. *(de Baire) : Sea M un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_n$ una sucesión conjuntos abiertos y densos en M. La intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es densa en M*

Demostración:

Sea p un punto arbitrario de M y B_0 una bola abierta arbitraria de centro p. Demostraremos que B_0 contiene al menos un punto $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. El conjunto $B_0 \cap A_1$ es abierto y por la densidad de A_1 es no vacío. Por consiguiente existe al menos un a_1 tal que $a_1 \in B_0 \cap A_1$. Tenemos que $B_0 \cap A_1$ es un entorno de a_1 y como M es en particular un espacio regular (ver la definición 1.11) se puede elegir una bola abierta B_1 entorno de a_1 de modo que la adherencia $\overline{B_1}$ esté contenida en $B_0 \cap A_1$. Podemos además elegir el radio de B_1 menor que 1. De nuevo $B_1 \cap A_2$ es abierto y por la densidad de A_2 no vacío, de modo que podemos elegir a_2 y B_2, de radio menor que $1/2$ de manera análoga. Procediendo recursivamente tenemos una sucesión de puntos $(a_n)_n$ y de bolas abiertas $(B_n)_n$ con las propiedades :

$$a_n \in B_n; \quad \overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap A_n$$

siendo la bola B_n de radio menor que $1/n$.

Finalmente, dado n_0, para $n, m > n_0$ tendremos a_n, $a_m \in B_{n_0}$ y por tanto será

$$d(a_n, a_m) < \frac{2}{n_0}$$

En consecuencia la sucesión $(a_n)_n$ es de Cauchy y por ser M completo tendrá un límite a. Para cualquier n, la subsucesión $a_n, a_{n+1}, \ldots$ tiene también como límite a y todos los términos de esta subsucesión están contenidos en $\overline{B}_n$ y como este es cerrado el límite a verifica $a \in \overline{B}_n$ para todo n. Finalmente tendremos

$$a \in \overline{B}_n \subset B_{n-1} \cap A_n \subset A_n$$

en consecuencia también $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ y puesto que claramente $a \in B_0$ también $a \in B_0 \bigcap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)$

■

Observación 1.4. *Tomando complementarios podemos enunciar el teorema de Baire de la siguiente manera:*

Sea M un espacio métrico completo y sea $(X_n)_n$ una sucesión de conjuntos cerrados de M tales que $\mathbf{Int}\, X_n = \emptyset$ *para todo n. Entonces*

$$\mathbf{Int}\left(\cup_{n=1}^{\infty} X_n \right) = \emptyset$$

Demostración:

En efecto basta poner $X_n = A_n^c$, entonces los conjuntos cerrados X_n verifican

$$\mathbf{Int}\, X_n = \mathbf{Int}\left(A_n^c\right) = \left(\overline{A_n}\right)^c = \emptyset$$

de donde los conjuntos A_n son abiertos y densos en M. En consecuencia la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es densa en M.

Aplicando el teorema de Baire 1.39 a A_n tendremos,

$$\begin{aligned} &\mathbf{Int}\left(\cup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \mathbf{Int}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \\ &= \mathbf{Int}\left(\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) = \left(\overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n}\right)^c = M^c = \emptyset \end{aligned}$$

■

Comentario 1.5. *El teorema de Baire lo utilizaremos de la siguiente manera: Sea M un espacio métrico completo no vacío. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de subconjuntos cerrados tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = M$. Entonces existe un n_0 tal que* $\mathbf{Int} X_{n_0} \neq \emptyset$.

Ejercicios del Capítulo 1

1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico y M un subconjunto de X, demostrar que la familia de conjuntos $\{A \cap M; A \in \tau\}$ constituyen una familia de abiertos de subconjuntos de M.

1.2. Demostrar que la adherencia $\overline{B}$ de un conjunto $B \subset X$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a B.

1.3. Demostrar:

- Que la relación $B = \overline{B}$ caracteriza a los conjuntos cerrados.
- Que el interior $\mathbf{Int}\, B$ es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en B

1.4. Demostrar:

- $(\mathbf{Int}\, A)^c = \overline{(A^c)}$
- $\left(\overline{A}\right)^c = \mathbf{Int}\left(A^c\right)$

1.5. Sea X un espacio topológico. Demostrar que un conjunto $B \subset X$ es un conjunto cerrado si y solo si contiene todos sus puntos de acumulación.

1.6. Sea X un espacio topológico. Demostrar que un conjunto $B \subset X$ que no tiene puntos de acumulación es cerrado.

1.7. Demostrar que las condiciones de la defnción 1.12 son equivalentes

1.8. Demostrar el teorema 1.11

1.9. Demostrar el teorema 1.12

1.10. Demostrar que las siguientes aplicaciones son una distancia:

(a) Sea E un conjunto cualquiera, con la aplicación $d(x,y) = 0$ si $x = y$ y $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$.
(b) En $\mathbb{R}$, la aplicación $d(x,y) = |x-y|$
(c) Sea G un grupo conmutativo y sea $x \to p(x)$ una aplicación de $G \to \mathbb{R}$ tal que

- $p(x) \geq 0$ y $p(x) = 0$ si y solo si $x = 0$
- $p(-x) = p(x)$
- $p(x,y) \leq p(x) + p(y)$

definimos entonces la distancia en G como $d(x,y) = p(x-y)$

1.11. Como en el teorema 1.32 supongamos que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier número finito de puntos $a_i \in M$ siempre hay un $x \in M$ cuya distancia a todos los a_i es mayor o igual que $1/m$. Construir recursivamente una sucesión $(a_k)_k$ tal que

$$\forall k, k' \in \mathbb{N} \quad d(a_k, a_{k'}) \geq \frac{1}{m}$$

1.12. Demostrar que en $\mathbb{R}$ toda sucesión de Cauchy es convergente

1.13. Sea M un espacio métrico y A un subconjunto de M no vacío. Demostrar que A es acotado si y solo si el diámetro de A es menor que $+\infty$

Capítulo 2
Espacios vectoriales topológicos

Resumen

En este capítulo damos una breve introdcucción de espacio vectorial y se introduce la noción de espacio vectorial topológico, en particular los espacios vectoriales topológicos localmente convexos y su caracterización mediante una familia de seminormas. Damos las definiciones y propiedades básicas de estos espacios que serán necesarias en los capítulos siguientes sobre espacios normados y espacios de Banach y espacios prehilbertianos y de Hilbert, que es el marco funcional básico en nuestras aplicaciones. Algunas de las nociones presentadas se proponen a través de ejercicios para el lector. Para un mayor comprensión de estos conocimientos se pueden consultar [12], [8], [14] y [15].

La mayor parte de los espacios vectoriales topológicos que serán utilizados en el resto del curso serán espacios normados y espacios de Hilbert, que serán tratados con más profundidad en el capítulo 3 de manera lo más autocontenida posible, por lo que este capítulo, salvo en lo que concierne a la introducción de los conceptos básicos de espacio vectorial, podría ser omitido en primera lectura. Solo puntualmente necesitaremos algunos espacios vectoriales topológicos que no son normados; en particular necesitaremos el espacio de funciones infinitas veces diferenciables y de soporte compacto para introducir el espacio de distribuciones como espacio dual del mismo.

2.1. Espacios vectoriales

Consideremos un cuerpo $\mathbb{K}$, que en general en nuestro caso será $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (cuerpo de los números reales) o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (cuerpo de los números complejos).

Definición 2.1. *Un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$ es un conjunto, cuyos elemento se llaman vectores, sobre el que están definidas dos operaciones, suma y multiplicación por escalares, con las propiedades algebraicas siguientes:*

1. *A cada par de vectores x e y corresponde un vector $x+y$, verificando*

$$x+y=y+x$$

y cualesquiera que sean los vectores $x, y, z \in X$

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

X contiene un único vector O (llamado vector nulo u origen de X) tal que $x+O=x$ para cada $x \in X$. Para cada $x \in X$ existe un único vector $-x$ tal que $x+(-x)=O$. Es decir X es un grupo abeliano para la suma $+$.

2. *A cada par (α, x) con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in X$ corresponde un vector αx de modo que*

$$1x=x$$

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in X$

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

y las dos propiedades distributivas

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$

El símbolo 0 *designará el elemento neutro del cuerpo de escalares.*

Definición 2.2. *n vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de un espacio vectorial X se dice que son linealmente independientes si la ecuación*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = O \tag{2.1}$$

implica $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$. Son linealmente dependientes si se verifica la anterior ecuación (2.1) con al menos un α_i distinto de 0. *Si X contiene n vectores linealmente independientes , pero cualquier sistema de $n+1$ vectores es linealmente dependiente diremos que X es de dimensión finita n. Si el número de vectores linealmente independientes es no finito decimos que X es de dimensión infinita. Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión n constituye una base para X*

Propiedad 2.1. *Sea $x_1, x_2, \ldots x_n$ una base de X. Cada vector $x \in X$ tiene una única representación de la forma $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$*

Demostración:

Se deja como ejercicio 2.1

∎

Definición 2.3. *Un subconjunto N de un espacio vectorial X sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice que es un subespacio vectorial de X, si N es a su vez un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.*

Propiedad 2.2. *Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto N de un espacio vectorial X sea un subespacio vectorial es que para todo $x, y \in N$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se verifique $\alpha x + \beta y \in N$.*

Demostración:

Se deja como ejercicio 2.2 ∎

Definiciones, propiedades y conjuntos especiales en un espacio vectorial

Veamos primero algunas definiciones elementales que conciernen a los conjuntos de un espacio vectorial. $A, B, \ldots$ subconjuntos de X. Λ un subconjunto del conjunto de escalares $\mathbb{K}$.

Definición 2.4. *Pondremos*

$$A + B = \{x \in X; \quad x = a + b, \quad \text{con} \quad a \in A \text{ y } b \in B\} \tag{2.2}$$

$$\Lambda A = \{x \in X; \quad x = \lambda a \quad \text{con} \quad a \in A \text{ y } \lambda \in \Lambda\} \tag{2.3}$$

Las siguientes propiedades son fáciles de demostrar y se dejan como ejercicio 2.3

Propiedad 2.3. *Sean A, B, A_i, B_i subconjuntos de un espacio vectorial X. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Sea Λ subconjunto de $\mathbb{K}$. Se verifican las siguientes propiedades*

a)

$$A + B = B + A \tag{2.4}$$
$$(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3) \tag{2.5}$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \tag{2.6}$$
$$\lambda(A \cap B) = \lambda A \cap \lambda B \tag{2.7}$$
$$\lambda(A \cup B) = \lambda A \cup \lambda B \tag{2.8}$$

b)

$$(\lambda + \mu)A \subset \lambda A + \mu A \tag{2.9}$$
$$\Lambda(A + B) \subset \Lambda A + \Lambda B \tag{2.10}$$

c)

$$\Lambda\Big(\bigcap_i A_i\Big) \subset \bigcap_i (\Lambda A_i) \tag{2.11}$$

$$\Big(\bigcap_i A_i\Big) + \Big(\bigcap_i B_i\Big) \subset \bigcap_i (A_i + B_i) \tag{2.12}$$

$$\Lambda\Big(\bigcup_i A_i\Big) \subset \bigcup_i (\Lambda A_i) \tag{2.13}$$

$$\lambda\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \bigcup_i (\lambda A_i) \tag{2.14}$$

Los conjuntos convexos juegan un papel muy importante en el análisis.

Definición 2.5. *Un conjunto C de un espacio vectorial se llama convexo si para todo $x, y \in C$ se verifica*

$$\lambda x + (1-\lambda) y \quad \forall \lambda \in [0,1] \tag{2.15}$$

Propiedad 2.4. *Un conjunto C de un espacio vectorial es convexo si y solo si para todo $x_1, ..., x_n \in C$ se verifica*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C \quad \forall \lambda_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \tag{2.16}$$

Demostración:

Sea C convexo, es decir verificando (2.15). Veamos que se verifica (2.16). Procedemos por inducción: Para $n = 2$ es (2.15). Sean $x_1, ..., x_n$ y supongamos que(2.16) es cierta para $n-1$.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \in C \quad \forall \lambda_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1$$

Sea $0 \leq \lambda_n \geq 1$, entonces por (2.15)

$$z = \lambda_n \Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\Big) + (1-\lambda_n) x_n \in C$$

Veamos que z es de la forma

$$z = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \quad \text{con} \quad \mu_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$$

Tenemos

$$z = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \lambda_i x_i + (1-\lambda_n) x_n$$

y poniendo $\mu_i = \lambda_n \lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$ y $\mu_n = 1 - \lambda_n \geq 0$, resulta

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \lambda_i + 1 - \lambda_n = \lambda_n \big((\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i) - 1 \big) + 1 = 1$$

Recíprocamente, si en un conjunto C se verifica (2.16) entonces se verifica (2.15) pues es el caso $n = 2$.

■

Definición 2.6. *Sea A un conjunto de un espacio vectorial X. Llamamos envolvente convexa de A al conjunto convexo más pequeño que contiene a A.*

Propiedad 2.5. *Sea A un conjunto de un espacio vectorial X. La envolvente convexa de A es el conjunto*

$$B = \{z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A \quad x_i \in A, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

Demostración:

Llamemos $c(A)$ a la envolvente convexa de A y sea $z \in B$, es decir z es de la forma

$$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A \quad x_i \in A, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

como $c(A) \supset A$, $x_i \in c(A)$ y como $c(A)$ es convexo tendremos $z \in c(A)$. De modo que $B \subset c(A)$.

Recíprocamente veamos que $c(A) \subset B$. Para ello basta ver que B es convexo y como $c(A)$ es el convexo más pequeño que contiene a A tendremos necesariamente que $c(A) \subset B$ pues claramente $A \subset B$. Demostremos pues que B es convexo: Sea $x, y \in B$, es decir

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A \quad x_i \in A, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

e

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in A \quad y_i \in A, \quad \mu_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\begin{aligned} z =& \lambda x + (1-\lambda) y = \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i \\ =& \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} (1-\lambda) \mu_i y_i \end{aligned}$$

Para ver que $z \in B$ bastará ver que $\sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i + \sum_{i=1}^{n}(1-\lambda)\mu_i = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i + \sum_{i=1}^{n}(1-\lambda)\mu_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\lambda\lambda_i + \mu_i - \lambda\mu_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda(\lambda_i - \mu_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \\
&= \lambda(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1
\end{aligned}$$

■

Propiedad 2.6. *Sea C un conjunto convexo y $\lambda, \mu \geq 0$. Entonces*

$$(\lambda + \mu)C = \lambda C + \mu C \tag{2.17}$$

Demostración:

Si $\lambda = \mu = 0$ el resultado es trivial. En caso contrario, $x \in \lambda C + \mu C$ significa que $x = \lambda a + \mu b$ con $a, b \in C$. Resulta de la convexidad de C

$$x = (\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} a + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b) = (\lambda + \mu)c$$

para algún $c \in C$. Es decir $x \in (\lambda + \mu)C$. Hemos demostrado que si $x \in \lambda C + \mu C$ entonces $x \in (\lambda + \mu)C$. El recíproco si $x \in (\lambda + \mu)A$ entonces $x \in \lambda A + \mu A$ se cumple para todo conjunto A según la propiedad (2.9)

■

Definición 2.7. *Un conjunto A de un espacio vectorial se llama equilibrado si*

$$\lambda A \subset A \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ con } |\lambda| \leq 1 \tag{2.18}$$

Propiedad 2.7. *Si A es equilibrado en un espacio vectorial X y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces*

$$\lambda A = |\lambda| A$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 2.4 ■

Propiedad 2.8. *Si A es equilibrado en un espacio vectorial X la envolvente convexa de A es un conjunto equilibrado*

Demostración:

Se deja como ejercicio 2.5 ∎

Definición 2.8. *Un conjunto A de un espacio vectorial X se llama absorbente si verifica*

$$\text{Para todo } x \in X \text{ existe } \alpha > 0 \text{ tal que para todo } \lambda \in \mathbb{K} \text{ con } |\lambda| \leq \alpha,\ \lambda x \in A \tag{2.19}$$

Operadores lineales y formas lineales

Definición 2.9. *Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $T : x \longrightarrow y = T(x)$ definida en un subespacio $D = D(T)$ de X y tomando valores en Y se dice que es lineal si se verifica*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

$D(T)$ se llama el dominio de T. Llamamos imagen de T al conjunto

$$R(T) = \{y \in Y;\ y = T(x) \text{ para } x \in D(T)\}$$

y llamamos núcleo de T al conjunto

$$N(T) = \{x \in D(T);\ T(x) = O\}$$

En particular esta definición implica $T(O) = O$ y $T(-x) = -T(x)$

Definición 2.10. *Una forma lineal es una aplicación lineal para la que la imagen $R(T)$ es un subconjunto del cuerpo de escalares $\mathbb{K}$.*

Si un operador lineal T es una aplicación biyectiva de $D(T)$ en $R(T)$, la aplicación inversa T^{-1} es un operador lineal de $R(T)$ sobre $D(T)$ y tenemos $T^{-1}(T(x)) = x$ para todo $x \in D(T)$ y $T(T^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in R(T)$. Diremos que T^{-1} es el operador inverso de T.

Propiedad 2.9. *Un operador lineal admite un operador inverso T^{-1} si y solo si $T(x) = O$ implica $x = O$.*

Demostración:

La aplicación $T : D(T) \longrightarrow R(T)$ es biyectiva pues es obviamente suprayectiva y es inyectiva ya que $T(x_1 - x_2) = T(x_1) - T(x_2)$

∎

Definición 2.11. *Sean X e Y dos espacios vectoriales y sean T_1 y T_2 operadores lineales con dominios $D(T_1), D(T_2) \in X$, e imágenes $R(T_1), R(T_2) \in Y$. Entonces*

$T_1 = T_2$ si y solo si $D(T_1) = D(T_2)$ y $T_1(x) = T_2(x)$ para todo $x \in D(T_1) = D(T_2)$. Si $D(T_1) \subseteq D(T_2)$ y $T_1(x) = T_2(x)$ para todo $x \in D(T_1)$, entonces diremos que T_2 es una extensión de T_1 y que T_1 es una restricción de T_2. Se escribe tambien $T_1 \subseteq T_2$.

Mientras no lo indiquemos específicamente en estos apuntes consideraremos aplicaciones para las que $D(T) = X$ y escribiremos $T : X \to Y$ entendiendo que T está definidida para todos los elementos de X. Análogamente para las formas lineales pondremos $T : X \to \mathbb{K}$.

El conjunto $\mathcal{L}(X,Y)$ de aplicaciones lineales de X en Y es un espacio vectorial con la suma y producto por un escalar habitual de funciones. En efecto, definiendo para $T,S \in \mathcal{L}(X,Y)$ la suma $T+S$ mediante la aplicación que para todo $x \in X$ se tiene

$$(T+S)(x) = T(x)+S(x)$$

y el producto de T por un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ mediante la aplicación que para todo $x \in X$ se tiene

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$$

es inmediato comprobar que es un espacio vectorial.

Cuando $Y = \mathbb{K}$, el espacio vectorial $X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ recibe el nombre de dual algebraico de X.

Producto cartesisano de espacios vectoriales

Sean $\{X_i;\, i = 1,\ldots,n\}$ una familia de espacios vectoriales con el mismo conjunto de escalares $\mathbb{K}$ y sea $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ el conjunto de sucesiones finitas $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ donde $x_i \in X_i$ al que llamaremos espacio producto. Dotamos a este espacio producto X de estructura de espacio vectorial definiendo la suma y el producto escalar en X de la siguiente manera:

Sean $x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n) \in X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ se define la suma

$$x+y = (x_1+y_1,\ldots.,x_n+y_n)$$

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ se define el producto de x por el escalar λ mediante:

$$\lambda x = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

Se comprueba inmediatamente que con esta dos operaciones X es un espacio vectorial.

2.2. Espacios vectoriales topológicos

2.2.1. *Definición y caracterización de espacios vectoriales topológicos*

Definición 2.12. *Sea un espacio vectorial X y una familia de subconjuntos $\mathcal{A}$ de modo que $(X,\mathcal{A})$ define una topología sobre X. Diremos que X es un espacio vectorial topológico si se verifica la condición siguiente:*

Las operaciones de espacio vectorial, suma y producto por un escalar, son continuas respecto a la topología $(X,\mathcal{A})$.

Decir que la suma es continua significa, por definición que la aplicación

$$(x,y) \to x+y$$

del producto cartesiano $X\times X \to X$ es continua, más precisamente, si $x_1,x_2 \in X$ y E es un entorno de x_1+x_2, existen entornos E_1 de x_1 y E_2 de x_2 tales que

$$E_1+E_2 \subset E$$

.

Análogamente, decir que la aplicación producto por un escalar es continua significa que la aplicación

$$(\alpha,x) \to \alpha x$$

de $\mathbb{K}\times X$ en X es continua, más precisamente, si $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y E es un entorno de αx entonces para algún $r > 0$ y algún entorno V de x se verifica que $\beta V \subset E$ cuando $|\beta-\alpha| < r$.

Consideremos ahora un espacio vectorial topológico X, el operador de traslación T_a para $a \in X$ y el operador de multiplicación R_λ para $\lambda \in \mathbb{K}$ definidos por

$$T_a(x) = a+x \quad \forall x \in X$$

y

$$R_\lambda(x) = \lambda x \quad \forall x \in X$$

respectivamente. La siguiente propiedad es muy importante

Propiedad 2.10. *T_a y R_λ con $\lambda \neq 0$ son homeomorfismos de X en X.*

Demostración:

Los axiomas de espacio vectorial implican que T_a y R_λ son aplicaciones biyectivas de X en X y que sus inversas son T_{-a} y $R_{1/\lambda}$, respectivamente. En un espacio vectorial topológico las operaciones suma y producto por un escalar son continuas por definición y por tanto estas cuatro aplicaciones son continuas. Por tanto cada una de ellas es un homeomorfismo (es decir ella y su inversa es continua).

■

Una consecuencia de esta propiedad es que en todo espacio vectorial topológico la topología es invariante por traslaciones: Un conjunto A es abierto si y solo si cada uno de sus trasladados $a+A$ es abierto. Del mismo modo si A es abierto λA con $\lambda \neq 0$ es también abierto. En consecuencia también, si E es un entorno del origen, $x+E$ es un entorno de x, pues si E contiene un abierto que contiene al origen, $x+E$ contendrá un abierto que contiene a x. También si E es un entorno del origen λE para $\lambda \neq 0$ será un entorno del origen pues como E contiene un abierto que contiene al origen también sucederá esto con λE. Una base local $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial topológico será una colección de entornos del origen tal que cada entorno del origen contenga un elemento de la base $\mathcal{B}$. Los conjuntos abiertos de X son entonces los que se obtienen como uniones de trasladados de elementos de $\mathcal{B}$.

Veamos que en todo espacio vectorial topológico existe una base de entornos equilibrados y absorbentes, más precisamente tenemos las dos propiedades siguientes:

Propiedad 2.11. *Sea X un espacio vectorial topológico, $\mathcal{U}$ una base de entornos del origen de X. Entonces se verifica:*

a) Para todo $U \in \mathcal{U}$ existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que

$$V+V \subset U$$

b) Para todo $U \in \mathcal{U}$ existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leq 1$

$$\alpha V \subset U$$

c) Todo $U \in \mathcal{U}$ es un conjunto absorbente.

Demostración:

a) Resulta de la continuidad de la aplicación suma en el origen de $X \times X$, el punto (O,O) siendo O el origen de X. En efecto, dado un entorno U un entorno del origen existen entornos E_1 y E_2 del origen tales que $E_1+E_2 \subset U$. Tomando $V = E_1 \cap E_2$, V será un entorno de O tal que $V+V \in U$.
b) De la continuidad de la aplicación producto por un escalar, en $(0,O) \in \mathbb{K} \times X$ tenemos que para todo entorno $U \in \mathcal{U}$, existe $\varepsilon > 0$ y existe $W \in \mathcal{U}$ tal que para todo $|\alpha| < \varepsilon$
$$\alpha W \subset U$$
Tomando $V = \varepsilon W$ tenemos la propiedad buscada.
c) Por reducción al absurdo supongamos que $U \in \mathcal{U}$ no es absorbente. Existirá un $x \in X$ tal que para todo $n \in N$,
$$\frac{1}{n}x \notin U$$

Pero esto contradice la continuidad de la aplicación $(\lambda, x) \to \lambda x$ en el punto $(0, x)$. En efecto, sea U un entorno de $0x = O$, la continuidad dice que existe un entorno V de x y un entorno de $0 \in \mathbb{R}$ (sea éste $\{\lambda \in \mathbb{R};\ |\lambda| < \varepsilon\}$) de modo que $\forall |\lambda| < \varepsilon$ tenemos $\lambda V \subset U$, y por lo tanto $\lambda x \in U$. Tomando $n > 1/\varepsilon$ llegamos a una contradicción.

■

Corolario 2.1. *De la propiedad c) anterior se deduce que todo entorno del origen es un conjunto absorbente.*

Demostración:

Todo entorno del origen V contiene un entorno U de la base de entornos del origen que es un conjunto absorbente. Por tanto dado x cualquiera existe un $\alpha > 0$ tal que para todo λ con $|\lambda| \leq \alpha$ resulta $\lambda x \in U$ y por tanto también $\lambda x \in V$.

■

De la propiedad b) de 2.11 se deduce la siguiente:

Propiedad 2.12. *Un espacio vectorial topológico X posee siempre una base de entornos del origen formada por conjuntos equilibrados.*

Demostración:

Si $\mathcal{U}$ es una base de entornos del origen de X. Según la propiedad b) anterior cada $U \in \mathcal{U}$ contiene un conjunto $V \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha V \subset U$ para cualquier $|\alpha| \leq 1$. Por lo tanto también

$$\bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha V \subset U$$

Recíprocamente, todo conjunto de la forma

$$\bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha U$$

donde $U \in \mathcal{U}$ contiene al propio U (basta tomar $\alpha = 1$) y es por lo tanto un entorno.

Por lo tanto los conjuntos de la forma

$$\bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha U$$

con $U \in \mathcal{U}$ constituyen una base de entornos pues según acabamos de ver todo elemento de la base de entornos $\mathcal{U}$ contiene un entorno de esta forma. Además son conjuntos equilibrados pues para todo $|\lambda| \leq 1$

$$\lambda \bigcup_{|\alpha|\leq 1} \alpha U = \bigcup_{|\alpha|\leq 1} \lambda\alpha U = \bigcup_{|\alpha|\leq 1} \alpha U$$

■

Las propiedades 2.11 y 2.12 caracterizan de hecho la topología de los espacios vectoriales topológicos. El teorema siguiente precisa esta caracterización:

Teorema 2.1. *Sea X un espacio vectorial. Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de partes de X que tiene las siguientes propiedades:*

a) Si V pertenece a $\mathcal{B}$ entonces V es equilibrado y absorbente.
b) Si V_1 y V_2 pertenecen $\mathcal{B}$, existe un elemento $V_3 \in \mathcal{B}$ que verifica $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.
c) Si V pertenece a $\mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W + W \subset V$.

Sea ahora la familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X definida mediante: $A \in \mathcal{A}$, si y solo si, para cada $x \in A$, existe un $V \in \mathcal{B}$ que depende de x, de manera que

$$x + V \subset A$$

Entonces la familia $\mathcal{A}$ define una topología sobre X compatible con la estructura de espacio vectorial.

Recíprocamente, si X es un espacio vectorial topológico existe una base de entornos del origen $\mathcal{B}$ verificando las propiedades a), b) y c).

Demostración:

Descomponemos la demostración en varias partes

- Parte 1: En primer lugar veamos que las propiedades a) y b) implican que la familia $\mathcal{A}$ verifica las propiedades A1, A2 y A3 de la definición 1.1 que define una topología de abiertos.
A1: El conjunto X está en $\mathcal{A}$ pues evidentemente cualquier conjunto de $V \in \mathcal{B}$, verifica $x + V \in X$. El conjunto vacío $\emptyset$ está en $\mathcal{A}$, pues se verifica que para todo $x \in \emptyset$ y cualquiera que sea $V \in \mathcal{B}$, que $x + V \subset \emptyset$ ya que $\emptyset$ no tiene elementos x.
A2: Sea ahora una subfamilia $\{A_\nu \in \mathcal{A};\ \nu \in \Theta\}$, con Θ una conjunto cualquiera de índices. Sea
$$\bigcup_{\nu\in\Theta} A_\nu$$
Sea $x \in \bigcup_{\nu\in\Theta} A_\nu$. Existirá un indice i_0 tal que $x \in A_{i_0}$. Por tanto podemos hallar un $V_0 \in \mathcal{B}$ de manera que
$$x + V_0 \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{\nu\in\Theta} A_\nu$$
de donde se deduce que
$$\bigcup_{\nu\in\Theta} A_\nu \in \mathcal{A}$$

A3: Sea ahora A_1 y A_2 elementos de $\mathcal{A}$ y $x \in A_1 \cap A_2$, hallamos V_1 y V_2 elementos de $\mathcal{B}$ tales que

$$x + V_1 \subset A_1 \quad \text{y} \quad x + V_2 \subset A_2$$

Por la definición de $\mathcal{B}$ existe un elemento $V_3 \in \mathcal{B}$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$, entonces

$$x + V_3 \subset A_1 \quad \text{y} \quad x + V_3 \subset A_2$$

y por consiguiente

$$x + V_3 \subset A_1 \cap A_2$$

de donde

$$A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$$

- Parte 2: La familia $\mathcal{B}$ constituyen una base de entornos del origen para esta topología: En efecto, dada una topología definida por una familia de abiertos, los entornos de un punto x son los conjuntos que contiene a un abierto que contiene al punto. Si $A \in \mathcal{A}$, y $x \in A$ entonces existe $V \in \mathcal{B}$ de manera que

$$x + V \subset A$$

de modo que A es un entorno de x.
También, para todo $V \in \mathcal{B}$, tenemos $O \in V$ pues V es equilibrado. De modo que

$$O + V = V \subset V$$

de modo que $V \in \mathcal{A}$ y V es abierto y por tanto es un entorno del origen. Por otra parte si E es un entorno del origen $O \in X$, existe un abierto $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$O \in A \subset E$$

y como $A \in \mathcal{A}$

$$V = O + V \subset A \subset X$$

Por tanto $\mathcal{B}$ es una base de entornos del origen.
- Parte 3: La aplicación

$$\begin{aligned} X \times X &\to X \\ (x, y) &\to x + y \end{aligned}$$

es continua. En efecto, dado un punto $(x_0, y_0) \in X \times X$. Sea un entorno E de $x_0 + y_0$ y sean dos conjuntos V y W de $\mathcal{B}$ tales que

$$W + W \in V, \quad x_0 + y_0 + V \subset X$$

Entonces $(x_0 + W, y_0 + W)$ es un entorno de (x_0, y_0) en $X \times X$. Si

$$(x, y) \in (x_0 + W, y_0 + W)$$

o lo que es lo mismo

$$x \in x_0 + W, \quad y \in y_0 + W$$

resulta que

$$x + y \in x_0 + W + y_0 + W \subset x_0 + y_0 + V \subset E$$

- Parte 4: La aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K} \times X &\to X \\ (\lambda, x) &\to \lambda x \end{aligned}$$

es continua. En efecto, sea $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times X$.
Dado un entorno de $f(\lambda_0, x_0) = \lambda_0 x_0$, sea éste $\lambda_0 x_0 + U$ con $U \in \mathcal{B}$. Tenemos que demostrar que existe un entorno $E \subset (\mathbb{K} \times X)$ de $(\lambda_0, x_0) \in (\mathbb{K}, X)$, es decir un entorno B de $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ y un entorno $x_0 + V$ de $x_0 \in X$, de modo que para todo $(\lambda, x) \in E$ se verifica $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + U$.
Sea $B = \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda - \lambda_0| < \alpha\}$ y sea $x_0 + V$, con $V \in \mathcal{B}$ el entorno de x_0. Vamos a elegir α y V de modo que que se cumpla la condición requerida.
Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$, se tiene:

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0) x_0 + \lambda_0 (x - x_0) \tag{2.20}$$

Por una parte, para $\lambda \in B$ y $x - x_0 \in V$ eligiendo $\alpha < 1$ tenemos

$$(\lambda - \lambda_0)(x - x_0) \in (\lambda - \lambda_0) V \subset V$$

pues V es equilibrado.
Por otra parte, como $V \in \mathcal{B}$ es absorbente, existe $\alpha > 0$ tal que si $|\lambda - \lambda_0| < \alpha < 1$

$$(\lambda - \lambda_0) x_0 \in V$$

Finalmente, para $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ existirá un entero n tal que $|\lambda_0| \leq 2^n$; como V es equilibrado, resulta $\frac{\lambda_0}{2^n} V \subset V$ o lo que es lo mismo $\lambda_0 V \subset 2^n V$ de modo que

$$\lambda_0 (x - x_0) \in \lambda_0 V \subset 2^n V$$

Utilizando (2.20)

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 \in V + V + 2^n V$$

como $2^n V \subset V + \ldots (2^n \text{sumandos}) \ldots + V$. Utilizando recursivamente la propiedad c) del enunciado podemos elegir $V \in \mathcal{B}$ de modo que

$$V + \ldots (2^2 + 2^{n+1} \text{sumandos en total}) \ldots + V \subset U$$

(ver al respecto ejercicio 2.6) y obtenemos

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 \in V + \ldots (2^2 + 2^{n+1} \text{sumandos en total}) \ldots + V \subset U$$

El recíproco se obtiene a partir de las propiedades 2.11 y 2.12. En efecto, si X es un espacio vectorial topológico la propiedad 2.12 nos dice que existe una base de entornos del origen formada por conjuntos equilibrados y las propiedades 2.11 nos dicen que los elementos de esta base son conjuntos absorbentes y verifican c). Finalmente si V_1 y V_2 son elementos de esta base de entornos, su intersección $E = V_1 \cap V_2$ es en particular un entorno del origen y E contendrá al menos un elemento V_3 de esta base. Por tanto $V_3 \subset E = V_1 \cap V_2$ y se verifica b).

■

Propiedad 2.13. *Sea X un espacio vectorial topológico y $\mathcal{B}$ una base de entornos equilibrados del origen. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Si $U \in \mathcal{B}$, se tiene λU es un entorno del origen.*

Demostración:

Dado un entero no negativo cualquiera n, veamos que existe un entorno $V_n \in \mathcal{B}$ tal que

$$2^n V_n \subset U \tag{2.21}$$

En efecto, procedemos por inducción. Para $n = 0$, tomamos $V_0 = U$. Veamos ahora que si la propiedad es cierta para un n también lo es para $n+1$. En efecto, sea $V_n \in \mathcal{B}$ con

$$2^n V_n \subset U$$

Hallamos $V_{n+1} \in \mathcal{B}$ tal que

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$$

Entonces,

$$2^{n+1} V_{n+1} = 2^n.2V_{n+1} \subset 2^n (V_{n+1} + V_{n+1}) \subset 2^n V_n \subset U$$

y por tanto la propiedad 2.21 es cierta para todo n.

Sea ahora n el entero positivo tal que

$$(2^n |\lambda|)^{-1} \leq 1$$

Por ser V_n equilibrado se tiene que

$$(2^n |\lambda|)^{-1} V_n \subset V_n$$

de donde

$$V_n \subset 2^n |\lambda| V_n \subset 2^n |\lambda| 2^{-n} U = |\lambda| U = \lambda U$$

donde en el último paso hemos utilizado la propiedad 2.7 de los conjuntos equilibrados. Tenemos pues que λU es por tanto un entorno del origen.

■

Tenemos inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 2.2. *Sea X un espacio vectorial topológico y V es un entorno del origen, para $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$ se tiene λV es un entorno del origen.*

Demostración:

Si V es un entorno del origen, existe un entorno U de una base de entornos equilibrados tal que $U \subset V$. Como λU es un entorno del origen y $\lambda V \supset \lambda U$ resulta que λV es un entorno del origen.

■

A continuación damos una condición necesaria y suficiente para que un espacio vectorial topológico sea de Hausdorff :

Proposición 2.1. *Para que un espacio vectorial topológico X sea de Hausdorff es necesario y suficiente que para todo $x \neq O$, exista un entorno U del origen O tal que $x \notin U$.*

Demostración:

La condición es necesaria pues si X es de Hausdorff dado $x \neq O$ existe un entorno U de O y un entorno W de x tales que $U \cap W = \emptyset$ de modo que necesariamente $x \notin U$.

Recíprocamente, dado $x \neq O$, sea un entorno U del origen O tal que $x \notin U$. por la invarianza de la topología por traslación basta demostrar que para todo $x \neq O$ existe un entorno V del origen O y un entorno W de x tal que $V \cap W = \emptyset$. Por la propiedad a) en 2.11 existe un entorno equilibrado del origen tal que $V + V \subset U$. Como V es equilibrado $V = -V$, así pues $V - V \subset U$. Pongamos $x + V = W$ y demostremos que $V \cap W = \emptyset$. En efecto, razonando por reducción al absurdo supongamos $V \cap W \neq \emptyset$, existirá $z \in V \cap W$ y así $z = x + x'$ con $x' \in V$ (pues $z \in W = x + V$) y en consecuencia, $x = z - x' \in V - V$ (pues $z \in V$ y $x' \in V$) lo que contradice la hipótesis $x \notin U$. ■

2.2.2. Conjuntos acotados

Definición 2.13. *En un espacio vectorial topológico X, un conjunto A se dice que es acotado si dado un entorno cualquiera del origen V, existe un número real positivo α de manera que*

$$\alpha A \subset V$$

Obviamente un conjunto $A \subset X$ es acotado si dado un entorno cualquiera del origen V existe un número real positivo β de manera que $A \subset \beta V$. Basta tomar en la definición $\beta = \alpha^{-1}$.

Veremos ahora algunas propiedades de los conjuntos acotados. Algunas de ellas las dejamos como ejercicios.

Proposición 2.2. *Todo conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de un espacio vectorial topológico X es acotado.*

Demostración:

Para cada entorno del origen U existen $\alpha_i \geq 0$; $i = 1, \ldots, n$ tal que $\lambda x_i \in U$ con $\lambda \in \mathbb{K}$ y $|\lambda| \leq \alpha_i$; $i = 1, \ldots, n$. Tomando $\alpha = \text{mín}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ se tiene que $\lambda x_i \in U$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $|\lambda| \leq \alpha$; $i = 1, \ldots, n$. Por tanto tomando en particular $\lambda = \alpha$

$$\alpha x_i \in V; \; i = 1, \ldots, n$$

■

En los ejercicios 2.7, 2.8, 2.9 se dan varias propiedades de los conjuntos acotados. Más precisamente, el producto por un escalar de un conjunto acotado es acotado, la unión de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado y la suma de dos conjuntos acotados también es un conjunto acotado.

El teorema siguiente caracteriza los conjuntos acotados en un espacio vectorial topológico.

Teorema 2.2. *Un conjunto A en un espacio vectorial topológico X es acotado si y solo si, dada una sucesión cualquiera $(x_n)_n$ en A y una sucesión $(\alpha_n)_n$ de números reales positivos que tienden a cero , la sucesión $(\alpha_n x_n)_n$ tiende al origen en X.*

Demostración:

Supongamos que A es acotado y que $(x_n)_n$ es una sucesión contenida en A. Sea una sucesión $(\alpha_n)_n$ de números reales positivos que tienden a cero. Si V es un entorno del origen en X hemos de demostrar que existe un n_0 tal que para $n \geq n_0$ resulta $\alpha_n x_n \in V$.

Sea pues V es un entorno del origen, consideremos un entorno equilibrado W del origen en X tal que W está contenido en V. Sea α un número real positivo que verifique

$$\alpha A \subset W$$

Utilizando la convergencia a cero de $(\alpha_n)_n$, existe un entero positivo n_0 tal que

$$\alpha_n < \alpha \quad \text{para} \quad n \geq n_0$$

entonces

$$\alpha_n A \subset \alpha_n \alpha^{-1} W \subset W \subset V$$

Por tanto

$$\alpha_n x_n \in V \quad \text{para} \quad n \geq n_0$$

de donde $(\alpha_n x_n)$ converge hacia el origen de X.

Recíprocamente, razonemos por reducción al absurdo y supongamos que A no es acotado. Existe un entorno U en X tal que

$$\beta A \not\subset U \quad \text{para todo} \quad \beta > 0$$

Dado un entero positivo n tomamos $\beta = 1/n$ y obtenemos el vector x_n en A tal que

$$\frac{1}{n}x_n \notin U$$

Entonces la sucesión $(\frac{1}{n})_n$ converge a cero y la sucesión $(\frac{1}{n}x_n)_n$ no converge al origen en X.

■

Sucesiones convergentes

Las sucesiones convergentes en un espacio vectorial topológico son las que corresponden a su topología. Por lo tanto tendremos que una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio vectorial topológico X converge hacia $x \in X$ si verifica:

Para todo entorno V de x existe un n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $x_n \in V$. Escribimos entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

En un espacio vectorial topológico los entornos de x son de la forma $x + W$ donde W es un entorno del origen. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si y solo si para todo entorno del origen W existe un n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $x_n \in x + W$.

Como $x_n \in x + W$ si y solo si $(x_n - x) \in W$, deducimos inmediatamente que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si y solo si $\lim_{n\to\infty}(x_n - x) = O$

Tenemos la siguiente propiedad para las sucesiones convergentes:

Propiedad 2.14. *En un espacio vectorial topológico X toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración:

Sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente en X y sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Sea V un entorno del origen y sea W un entorno equilibrado tal que $W + W \subset V$. Sea ahora n_0 tal que para $n > n_0$, $x_n - x \in W$.

El conjunto $\{x, x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$ es finito y por lo tanto acotado. Existirá un $\alpha > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\alpha x_i \in W; \quad i = 1, 2, \ldots, n_0 \\ &\alpha x \in W \end{aligned}$$

Sea $\beta = \min\{1, \alpha\}$. Tendremos por una parte

$$\beta x_n \in \beta\alpha^{-1}W \subset W \subset V; \quad n = 1,2,\ldots,n_0$$
$$\beta x \in \beta\alpha^{-1}W \subset W \subset V$$

por otra parte

$$\beta(x_n - x) \in \beta W \subset W; \quad n > n_0$$

de modo que

$$\beta x_n \in \beta x + W \subset W + W \subset V; \quad n > n_0$$

por consiguiente

$$\beta x_n \in \beta x + W \subset W + W \subset V; \quad n = 1,2,\ldots$$

■

2.2.3. Aplicaciones lineales continuas

Consideremos ahora aplicaciones lineales $T : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios vectoriales topológicos. Observemos que las aplicaciones multiplicación por un escalar R_λ definidas antes son lineales, sin embargo las aplicaciones traslación T_a no lo son (excepto cuando $a = 0$). La siguiente propiedad nos dice que en un espacio vectorial topológico basta estudiar la continuidad en el origen.

Teorema 2.3. *Sea X e Y dos espacios vectoriales topológicos. Si $T : X \longrightarrow Y$ es lineal y continua en O, entonces T es continua. De hecho es uniformemente continua en el sentido siguiente: Para cada entorno W de O en Y, existe un entorno V de O en X tal que*

$$y - x \in V \quad \Rightarrow \quad T(y) - T(x) \in W$$

Demostración:

Elegido W, entorno de O en Y, la continuidad de T en el O prueba que existe un entorno V de O en X tal que $T(V) \in W$. Para ver la continuidad en $x \in X$, consideremos $T(x) \in Y$. Un entorno de $T(x)$ será de la forma $T(x) + W$ con W entorno de 0 en Y. Sea $y \in x + V$. Tenemos que $x + V$ será un entorno de x en X. La linealidad de T implica que $T(y - x) = T(y) - T(x) \in W$. Es decir T aplica el entorno de x, $x + V$ en el entorno prefijado $T(x) + W$ de $T(x)$, lo que nos dice que T es continua en x.

■

El conjunto $\mathcal{L}_c(X,Y)$ de aplicaciones lineales continuas de X en Y es un subespacio vectorial del espacio de aplicaciones lineales $\mathcal{L}(X,Y)$ con la suma y producto habitual de funciones. En efecto, recordemos para $T,S \in \mathcal{L}(X,Y)$ la suma $T + S$ se define mediante mediante la aplicación que para todo $x \in X$ se tiene

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x)$$

y el producto de T por un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ mediante la aplicación que para todo $x \in X$ se tiene

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$$

Si T y S son continuas las aplicaciones así definidas son también continuas, pues para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la aplicación $x \to \lambda T(x) + \mu S(x)$ de X en Y es continua pues T y S son continuas y la aplicación $(u, v) \to \lambda u + \mu v$ de $Y \times Y$ en Y es también continua.

Las aplicaciones lineales continuas más importantes son las formas lineales continuas, es decir aquellas cuya imagen es el cuerpo $\mathbb{K}$ de escalares. Denotamos al espacio de aplicaciones lineales continuas de X en $\mathbb{K}$, mediante $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, y se llama el espacio dual topológico de X. Este espacio es un subespacio del dual algebraico X^*. En general X' es un subespacio propio de X^*. Veremos a continuación una caracterización de las formas lineales continuas. Para ello necesitaremos la propiedad 2.13 y su corolario 2.2.

Teorema 2.4. *Sea f una forma lineal en un espacio vectorial topológico. f es continua, si y solo si, existe un entorno del origen U y una constante $k > 0$ tales que*

$$|f(x)| \leq k \quad \forall x \in U \tag{2.22}$$

Demostración:

Supongamos que la forma lineal $f : X \to \mathbb{K}$ es continua. De la definición de continuidad se deduce que dado un entorno B de $0 \in \mathbb{K}$, existe un entorno U del origen $O \in X$ tal que $f(x) \in B$ para todo $x \in U$. Tomando $B = \{r \in \mathbb{K};\ |r| \leq k\}$, resulta que existe un entorno U del origen $O \in X$ tal que

$$|f(x)| \leq k$$

para todo $x \in U$.

Recíprocamente, sea un entorno del origen U y sea $k > 0$ verificando (2.22). Tenemos que demostrar que la forma f es continua. Es decir que para todo $\varepsilon > 0$, existe un entorno del origen V_ε tal que

$$|f(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in V_\varepsilon \tag{2.23}$$

En efecto tendremos $V_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k} U$ es un entorno del origen gracias al corolario 2.2. Tendremos

$$|f(\frac{\varepsilon}{k} x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in U$$

y por tanto poniedo $y = \frac{\varepsilon}{k} x \in \frac{\varepsilon}{k} U$, podemos escribir

$$|f(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in \frac{\varepsilon}{k} U = V_\varepsilon$$

Por lo tanto hemos demostrado que para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno V_ε tal que se verifica (2.23)

■

Comentario 2.1. *Las formas lineales que verifican (2.22) en algún entorno del origen se dice que son acotadas. El teorema anterior nos dice pues, que en un espacio vectorial topológico una forma lineal es continua, si y solo si, es acotada.*

De manera más general tenemos el siguiente teorema de caracterización de formas lineales continuas:

Teorema 2.5. *Sea f una forma lineal en un espacio vectorial topológico X. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) f es continua.
b) El núcleo de f, es decir el conjunto $N(f) = \{x \in X;\ f(x) = 0\}$ es cerrado.
c) f es acotada en algún entorno del origen.

Demostración:

- a) $\Rightarrow$ b) Si f es continua está claro que $N(f)$ es cerrado pues es la antimagen del conjunto $0 \in \mathbb{K}$ que es cerrado.
- b) $\Rightarrow$ c): Si f es idénticamente nula es obvio que f es acotada en cualquier entorno del origen. Si existe un $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$ haciendo $z = x/f(x)$ tenemos $z \notin N(f)$ y $|f(z)| = 1$. Como $N(f)$ es cerrado, el complementario es abierto y en todo punto del complementario existirá un entorno abierto contenido todo él en este complementario. Por tanto existe un entorno de z, de la forma $z+U$ con U entorno equilibrado del origen y $(z+U)\cap N(f) = \emptyset$. Si $f(U) = \{f(x) \in \mathbb{K};\ x \in U\}$ es acotado es la propiedad c). Si $f(U)$ no fuera acotado, entonces existe un $u \in U$ tal que $|f(u)| \geq 1$. Tendremos $|-\frac{1}{f(u)}| \leq 1$. Como U es equilibrado $w = -\frac{u}{f(u)} \in U$, entonces

$$f(z+w) = f(z) + f(w) = f(z) - \frac{f(u)}{f(u)} = 1 - 1 = 0$$

  de donde $z+w \in N(f)$ lo que contradice $(z+U)\cap N(f) = \emptyset$. Por tanto $f(U)$ es necesariamente acotado.
- La implicación c) $\Rightarrow$ a) se ha demostrado en el teorema 2.4.

■

Teorema de Hahn-Banach

Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Este resultado concierne a la prolongación a todo el espacio X de una forma lineal definida sobre un subespacio vectorial de X. Este importante resultado será utilizado en el capítulo siguiente en el que se estudiarán los espacios normados y de Banach. Por otra parte es de gran importancia en la parte del Análisis Funcional dedicado al estudio de las funciones convexas, aunque en estos apuntes no trataremos en profundidad estos temas.

Teorema 2.6. *Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y $p : X \to \mathbb{R}$ una aplicación verificando*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda > 0 \tag{2.24}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X \tag{2.25}$$

Por otra parte sea $S \subset X$ un subespacio vectorial y $g : S \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in S$$

Entonces existe una forma lineal f definida sobre X que prolonga g, es decir,

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in S$$

y tal que

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

Para demostrar el siguiente teorema de Hahn-Banach (forma analítica), necesitamos recurrir al siguiente lema de Zorn (que es equivalente al axioma de elección de Zermelo de la teoría de conjuntos). Recordemos algunas nociones sobre las relaciones de orden, conjuntos totalmente ordenados y conjunto inductivo.

Definición 2.14. *(Subconjuntos totalmente ordenados, elemento mayorante, elemento maximal, conjunto inductivo)*

1. *Sea P un conjunto provisto de una relación de orden parcial $\leq$. Diremos que un subconjunto $Q \subset P$ es totalmente ordenado si para todo par a, b de elementos de Q se tiene al menos una de las dos relaciones $a \leq b$ o $b \leq a$.*
2. *Sea $Q \subset P$ un subconjunto de P. Se dice que $c \in P$ es un elemento mayorante de Q si para todo $a \in Q$ se tiene $a \leq c$.*
3. *Se dice que $m \in P$ es un elemento maximal de P si para todo $x \in P$ tal que $m \leq x$ se tiene necesariamente $x = m$.*
4. *Finalmente, se dice que P es inductivo si todo subconjunto totalmente ordenado de P admite un mayorante.*

El lema de Zorn que damos sin demostración es el siguiente:

Lema 2.1. *Todo conjunto ordenado, inductivo, no vacío, admite un elemento maximal.*

Diremos solamente que la demostración del lema de Zorn se puede obtener a partir del axioma de elección de Zermelo y se puede encontrar en obras o tratados de ámbito más general.

Demostración del teorema 2.6:

Sea P el conjunto de aplicaciones lineales h definidas en un subespacio de X y tales que h prolonga g, es decir

$$P = \{h : D(h) \subset X \to \mathbb{R}; \quad D(h) \text{ subespacio de } X, \ h \text{ lineal} \\ S \subset D(h); \quad h \text{ prolonga } g \quad h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(h)\}$$

Podemos dotar a P con la relación de orden

$$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subset D(h_2) \text{ y } h_2 \text{ proplonga } h_1$$

El conjunto P es no vacío pues $g \in P$. Por otra parte P es inductivo. En efecto, sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado. Denotemos $Q = (h_i)_{i \in I}$. Definimos

$$D(h) = \cup_{i \in I} D(h_i) \quad \text{y} \quad h(x) = h_i(x) \quad \text{si} \quad x \in D(h_i)$$

Esta definición tiene sentido, $h \in P$ y h es un mayorante de Q. Resulta del lema de Zorn que P admite un elemento maximal f. Vamos a ver que f es la proplongación buscada. Es decir basta ver que $D(f) = X$ pues ya sabemos que como $f \in P$, f es lineal, f prolonga g, es decir, $f(x) = g(x)$ $\forall x \in S$ y $f(x) \leq g(x)$. Demostraremos $D(f) = X$ por reducción al absurdo. Supongamos $D(f) \neq X$. Sea $x_0 \notin D(f)$, pongamos $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$ y para todo $x \in D(f)$, $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$ $t \in \mathbb{R}$ donde α será una constante que será determinada ulteriormente de manera que $h \in P$. Queremos por tanto que

$$h(x + t\alpha) = f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \quad \forall x \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.26}$$

Veamos que para tener (2.26) basta tener

$$f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \quad \forall x \in D(f) \tag{2.27}$$

$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \quad \forall x \in D(f) \tag{2.28}$$

En efecto si tenemos (2.27) tomando en lugar de x, x/t con $t > 0$ resulta

$$f(\frac{x}{t}) + \alpha \leq p(\frac{x}{t} + x_0)$$

utilizando la hipótesis (2.24)

$$\frac{1}{t} f(x) + \alpha \leq \frac{1}{t} p(x + tx_0)$$

multiplicando por t obtenemos (2.26) para $t > 0$. Análogamente tomando en (2.28) en lugar de x, $-x/t$ con $t < 0$

$$f(-\frac{x}{t}) - \alpha \leq p(-\frac{x}{t} - x_0)$$

utilizando de nuevo la hipótesis (2.24) con $\lambda = -1/t > 0$

$$-\frac{1}{t}f(x) - \alpha \leq \frac{-1}{t}p(x+tx_0)$$

y multiplicando por $-t > 0$ obtenemos (2.26) para $t < 0$. Para $t = 0$ (2.26) se cumple pues $f \in P$

Dicho de otra forma queremos elegir α de manera que

$$\sup_{y\in D(f)}\{f(y) - p(y-x_0)\} \leq \inf_{y\in D(f)}\{p(x+x_0) - f(x)\}$$

lo cual es posible ya que

$$f(y) - p(y-x_0) \leq \alpha \leq p(x+x_0) - f(x) \quad \forall x \in D(f) \quad \forall y \in D(f)$$

en efecto gracias a la hipótesis (2.25)

$$f(x) + f(y) \leq p(x+y) \leq p(x+x_0) + p(y-x_0)$$

Concluimos que f está mayorada por h y que $f \neq h$. Esto contradice que f sea maximal.

■

El teorema de Hahn-Banach se puede generalizar al caso de espacios sobre los números complejos (ejercicio 2.10)

2.3. Espacios localmente convexos y seminormas

2.3.1. Espacios localmente convexos

Entre las topologías de los espacios vectoriales, desempeñan un papel especial aquellas que poseen una base de entornos del origen formada por conjuntos convexos. De ahí la siguiente definición:

Definición 2.15. *Se dice que un espacio vectorial topológico X es un espacio localmente convexo cuando posee una base de entornos del origen formada por conjuntos convexos. También se dice que la topología de X es localmente convexa.*

Como todo entorno del origen de un espacio vectorial topológico X contiene un entorno equilibrado, todo entorno convexo del origen contiene la envoltura convexa de un entorno equilibrado del origen que es a su vez un conjunto equilibrado (ejercicio 2.5). Por lo tanto un espacio localmente convexo posee una base de entornos formada por conjuntos convexos equilibrados.

Utilizando el teorema 2.1 se obtiene el siguiente

Teorema 2.7. *Sea X un espacio vectorial. Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de partes de X que tiene las siguientes propiedades:*

a) Si V pertenece a $\mathcal{B}$ entonces V es convexo, equilibrado y absorbente.
b) Si V_1 y V_2 pertenecen $\mathcal{B}$, existe un elemento $V_3 \in \mathcal{B}$ que verifica $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.
c) Para todo $V \in \mathcal{B}$, y para todo $\rho > 0$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset \rho V$.

Entonces la familia $\mathcal{B}$ es una base de entornos del origen para una topología localmente convexa compatible con la estructura de espacio vectorial.

Recíprocamente, si X es un espacio vectorial localmente convexo existe una base de entornos $\mathcal{B}$ verificando las propiedades a), b) y c).

Demostración:

Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de partes de X con las propiedades del enunciado. Veamos que verifica todas las hipótesis del teorema 2.1 de caracterización de una base de entornos del origen en un espacio vectorial topológico. En efecto:

- Sea $V \in \mathcal{B}$, entonces V es equilibrado y absorbente que es la propiedad a) del teorema 2.1.
- la propiedad b) es la misma en los dos teoremas.
- Por la propiedad c) existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset \frac{1}{2}V \in \mathcal{B}$. De modo que

$$W + W \subset \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V$$

  y por ser V convexo se verifica

$$\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V$$

  Hemos encontrado un $W \in \mathcal{B}$ tal que $W + W \subset V$ que es la propiedad c) del teorema 2.1.

Recíprocamente, sea X es un espacio vectorial localmente convexo y sea $\mathcal{B}$ una base de entornos del origen formada por conjuntos convexos y equilibrados. Tenemos:

- Propiedad a): Los elementos de $\mathcal{B}$ son convexos, equilibrados y absorbentes
- Propiedad b): Se cumple en todos los espacios vectoriales topológicos (véase teorema 2.1)
- Propiedad c): Si $V \in \mathcal{B}$, en particular es un entorno del origen y también ρV será un entorno del origen para todo $\rho > 0$ (pues la multiplicación por un escalar es un homeomorfismo). Como $\mathcal{B}$ es una base de entornos del origen $\rho V \supset W$ para algún $W \in \mathcal{B}$.

∎

2.3.2. Seminormas

Entre los espacios vectoriales topológicos más habituales están los espacios vectoriales en los que se define una topología a partir de una familia de seminormas y los espacios normados que estudiaremos en el capítulo siguiente. Por una parte veremos que la topología generada por una familia de seminormas es una topología localmente convexa y recíprocamente veremos que la topología de un espacio vectorial localmente convexos puede ser generada siempre por una familia de seminormas.

La seminorma de un vector en un espacio vectorial da una idea de la longitud del vector. Veremos a continuación como a partir de una familia de seminormas se puede definir una topología en un espacio vectorial y construir así espacios vectoriales topológicos. Damos en primer lugar la noción de seminorma y alguna de sus principales propiedades y vemos como se puede introducir una topología a partir de una familia de seminormas.

Definición 2.16. *Sea X un espacio vectorial. Una función real definida sobre X, $p : X \to \mathbb{R}$ se dice que es una seminorma si verifica las dos propiedades siguientes:*

1. $p(x+y) \leq p(x)+p(y) \quad \forall x, y \in X$ *(desigualdad triangular)*
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Veamos algunas propiedades inmediatas de las seminormas.

Propiedad 2.15. *Una seminorma $p : X \to \mathbb{R}$ satisface*

a) $p(O) = 0$
b) $p(x-y) \geq |p(x)-p(y)| \quad \forall x, y \in X$*, en particular* $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$
c) Una seminorma p es una aplicación convexa

Demostración:

1. $p(O) = p(0.x) = 0.(p(x) = 0$
2. Primero observemos que para todo x, $p(-x) = p(-1.x) = |-1|p(x) = p(x)$. La desigualdad triangular la podemos escribir $p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y)+p(y)$, de donde $p(x)-p(y) \leq p(x-y)$. Cambiando el papel de x e y, como $p(x-y) = p(y-x)$ resulta también $p(y)-p(x) \leq p(y-x) = p(x-y)$. De ahí el resultado buscado. Tomando en la desigualdad anterior $y = 0$, resulta en particular $p(x) \geq |p(x)-p(0)| = |p(x)| \geq 0$
3. Para todo $\lambda \in [0,1]$ y para todo $x, y \in X$, tenemos

$$p(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq p(\lambda x)+p((1-\lambda)y) = \lambda p(x)+(1-\lambda)p(y)$$

■

Veamos un primer ejemplo de seminorma: Si f es una forma lineal sobre un espacio vectorial X, $|f|$ es una seminorma sobre X. En efecto, tenemos

$$|f(x+y)| = |f(x)+f(y)| \leq |f(x)|+|f(y)|$$

$$|f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda|.|f(x)|$$

Si una seminorma p verifica además que $p(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$ diremos que p es una norma. Observemos que para que esta seminorma $|f|$ sea una norma, es necesario que $f(x)$ solo se anule para $x = 0$ y por tanto que X sea de dimensión 1 (Ejercicio 2.11).

Bolas asociadas a una seminorma y a una familia de seminormas

Consideraremos ahora un espacio vectorial X y sea $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$ una familia, finita o infinita, de seminormas sobre X.

Definición 2.17. *Sea p una seminorma sobre un espacio vectorial X. Llamaremos p-bola abierta (resp. cerrada) de centro $a \in X$ y radio $\rho > 0$ al conjunto $B(a, \rho)$ de puntos $x \in X$ tales que $p(x - a) < \rho$ (resp. $p(x - a) \leq \rho$).*

Definición 2.18. *Se llamará $\mathcal{P}$-bola abierta de centro a toda intersección finita de n bolas abiertas de centro a, $\{p_i,\ i = 1, \ldots, n\}$*

Según la definición anterior está claro que la intersección de dos $\mathcal{P}$-bolas abiertas es una $\mathcal{P}$-bola. Por tanto la intersección finita de $\mathcal{P}$-bolas es una $\mathcal{P}$-bola. Una $\mathcal{P}$-bola abierta de centro a es pues un conjunto de la forma $\{x \in X;\ p_i(x-a) < \rho_i,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Claramente toda $\mathcal{P}$-bola es un conjunto convexo (Ejercicio 2.12).

Topología asociada a una familia de seminormas

Vamos ahora a introducir una topología asociada a una familia de seminormas: Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{P}$ una familia de seminormas definidas en X. Diremos que un subconjunto A de X es un conjunto abierto si $A = \emptyset$ o bien para todo $x \in A$ existe una $\mathcal{P}$-bola abierta de centro x contenida en A.

Es inmediato comprobar que familia de abiertos así definidos cumplen con las propiedades $A1, A2yA3$ de la definicón 1.1, en efecto,

- $A1$: El conjunto $\emptyset$ es abierto. Y el conjunto X es abierto pues toda $\mathcal{P}$-bola abierta está contenida en X.
- $A2$: Sea $A = \cup A_{i \in \mathcal{I}}$ siendo $\mathcal{I}$ un conjunto cualquiera y siendo los A_i conjuntos para los que existe una $\mathcal{P}$-bola abierta de centro x contenida en A_i. Sea $x \in A$, tendremos $x \in A_i$ para algún $i \in \mathcal{I}$. Existe una $\mathcal{P}$-bola abierta de centro x contenida en A_i y por tanto esta $\mathcal{P}$-bola estará contenida en A.
- $A3$: Sea $A = \cap A_{j \in \mathcal{J}}$ siendo $\mathcal{J}$ un conjunto finito. Sea $x \in A$, para todo $j \in \mathcal{J}$ existe una $\mathcal{P}$-bola abierta B_j de centro x contenida en A_j. La intersección finita $\cap B_{j \in \mathcal{J}}$ es una $\mathcal{P}$-bola contenida en A y por lo tanto A verifica $A3$.

Estamos pues en condiciones de dar la siguiente definición:

Definición 2.19. *Sea X un espacio vectorial y sea $\mathcal{P}$ una familia cualquiera de seminormas en X. Se llama $\mathcal{P}$-topología, o topología asociada a la familia $\mathcal{P}$, la* *topología sobre X donde los abiertos son los conjuntos A para los cuales todo punto x es centro de una $\mathcal{P}$-bola abierta contenida en A.*

En definitiva una bola abierta de centro el origen es un conjunto de la forma $U = \{u \in X;\ p_i(u) < \varepsilon_i,\ i = 1,...,n\}$. Y una bola abierta de centro $V(a)$ es un conjunto de la forma $V(a) = a + U = a + \{u \in X;\ p_i(u) < \varepsilon_i,\ i = 1,...,n\}$ o bien

$$V(a) = \{v \in X;\ p(v-a) < \varepsilon_i;\ i = 1,...,n\}$$

Veamos que para esta topología, toda p_i-bola abierta es un conjunto abierto. En efecto, sea $x \in B_i(a,\rho)$; la bola abierta $B_i(x,\varepsilon)$ donde $\varepsilon = \rho - p_i(a-x)$ está contenida en $B_i(a,\rho)$ pues si $y \in B_i(x,\varepsilon)$, es decir

$$p_i(x-y) < \varepsilon = \rho - p_i(a-x)$$

implica

$$p_i(a-y) \leq p_i(a-x) + p_i(x-y) < \rho$$

En consecuencia toda $\mathcal{P}$-bola abierta es un abierto pues es intersección finita de p_i-bolas por el axioma $A3$. De donde por el axioma $A2$ toda unión de $\mathcal{P}$-bolas será un conjunto abierto.

Por otra parte todo abierto de la topología antes definida es unión de $\mathcal{P}$-bolas abiertas. En definitiva los abiertos en X son las uniones de $\mathcal{P}$-bolas abiertas.

La definición de la $\mathcal{P}$-topología muestra que todo entorno de un punto a contiene una $\mathcal{P}$-bola abierta de centro a. Por lo tanto todo punto $a \in X$ tiene por base de entornos las $\mathcal{P}$-bolas abiertas de centro a, es decir, los conjuntos de la forma $a + B$, donde B es una $\mathcal{P}$-bola abierta de centro el origen de X. Como las $\mathcal{P}$-bolas son conjuntos convexos, las $\mathcal{P}$-bolas abiertas de centro el origen son una base de entornos del origen formada por conjuntos convexos por lo que la topología así definida es una topología localmente convexa.

Finalmente veamos que toda $\mathcal{P}$-topología es compatible con la estructura de espacio vectorial, es decir X con la $\mathcal{P}$-topología es un espacio vectorial topológico.

Propiedad 2.16. *Sea X un espacio vectorial con la topología definida por una familia de seminormas $\mathcal{P}$ según la definición 2.19. Entonces X es un espacio vectorial topológico con esta topología, es decir las operaciones suma y producto por un escalar son aplicaciones continuas en esta topología*

Demostración:

- Continuidad de la suma: $x, y \in X \times X \to x + y \in X$ es continua. Sean $a, b \in X$. Hemos de ver que dado un entorno de $a + b$, que podemos tomar de la forma $(a+b)+B$ con B una $\mathcal{P}$-bola de centro el origen, tenemos que encontrar un entorno V_a de a y un entorno de V_b de b tales que la suma $V_a + V_b$ esté contenido en $(a+b)+B$. Las bolas $a + \frac{1}{2}B$ y $b + \frac{1}{2}B$ son entornos de a y de b. Teniendo en cuenta que B es convexo

$$(a+\frac{1}{2}B)+(b+\frac{1}{2}B)=(a+b)+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}B=(a+b)+B$$

- Continuidad de la aplicación producto por un escalar: $\lambda, x \in \mathbb{K}\times X \longrightarrow \lambda x \in X$. Veamos primero los casos más sencillos siguientes:

  I) $f:\lambda \in \mathbb{K} \longrightarrow \lambda a \in X \quad \forall a \in X$ es continua en $\lambda = 0$:
  Sea un entorno de $0.a = O \in X$: $U = \{u \in X;\ p_i(u) < \varepsilon_i,\ i = 1,\ldots,n\}$. Queremos encontrar un entorno de $0 \in \mathbb{K}$, es decir encontrar $\delta > 0$ de modo que para todo $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| < \delta\}$, $f(\lambda) = \lambda a \in U$. Eligiendo $0 < \delta < \varepsilon_i/p_i(a)$ tenemos $p_i(\lambda a) = |\lambda| p_i(a) < \delta p_i(a) < \varepsilon_i$. Es decir, $\lambda a \in U$.

  II) $f: x \in X \longrightarrow \lambda x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ es continua en $x = O$:
  Sea un entorno de $\lambda.O = O \in X$: $U = \{u \in X;\ p_i(u) < \varepsilon_i,\ i = 1,\ldots,n\}$. Queremos encontrar un entorno V de $O \in X$ de modo que para todo $x \in V$, $f(x) = \lambda x \in U$. Sea $V = \{x \in X;\ p_i(x) < \delta_i,\ i = 1,\ldots,n\}$, eligiendo $\delta_i < \varepsilon_i/|\lambda|$ tenemos para $x \in V$ $p_i(\lambda x) = |\lambda| p_i(x) < |\lambda|\delta_i < \varepsilon_i$. Es decir, $\lambda x \in U$.

  III) $f:(\lambda, x) \in \mathbb{K}\times X \longrightarrow \lambda x \in X$ es continua en $(0, O)$:
  Sea un entorno de $0.O = O \in X$: $U = \{u \in X;\ p_i(u) < \varepsilon_i,\ i = 1,\ldots,n\}$. Queremos encontrar un entorno $I \times V$ de $(0, O) \in \mathbb{K}\times X$ de modo que para todo $(\lambda, x) \in (I \times V)$, resulte $f(x) = \lambda x \in U$. Sea $I = \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| < \delta\}$ y $V = \{x \in X;\ p_i(x) < \delta_i,\ i = 1,\ldots,n\}$. Eligiendo $\delta < 1$ y $\delta_i < \varepsilon_i$ para todo $(\lambda, x) \in (I \times V)$ tenemos $p_i(\lambda x) = |\lambda| p_i(x) < \delta\delta_i < \varepsilon_i$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Es decir, $\lambda x \in U$.

  Demostraremos ahora que la aplicación $f:(\lambda, x) \in \mathbb{K}\times X \longrightarrow \lambda x \in X$ es continua en un punto genérico $(\alpha, x) \in (\mathbb{R}\times X)$.
  Pongamos
  $$\lambda x = \alpha a + (\lambda - \alpha)a + \alpha(x - a) + (\lambda - \alpha)(x - a) \tag{2.29}$$
  Hemos de demostrar que dado un entorno W de αa, sea éste $W = \alpha a + U$ donde $U = \{u \in X;\ p_i(u) < \varepsilon_i,\ i = 1,\ldots,n\}$, existe un entorno I de α, sea éste $I = \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda - \alpha| < \delta\}$ y un entorno V de a, sea éste $V = a + B$ con $B = \{v \in X;\ p_i(u) < \delta_i,\ i = 1,\ldots,n\}$ de modo que $f(I \times V) \subset W$. Es decir hay que encontrar $\delta > 0$ y $\delta_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$ de modo que si $(\lambda, x) \in I \times V$ tengamos $\lambda x \in W$ es decir $p_i(\lambda x - \alpha a) < \varepsilon_i$, $i = 1,\ldots,n$.
  Eligiendo $\delta = \text{mín}\{\frac{\varepsilon_i}{3p_i(a)}, 1\}$ y $\delta_i = \text{mín}\{\frac{\varepsilon_i}{3|\alpha|}, \frac{\varepsilon_i}{3}\}$, utilizando (2.29) y las propiedades 1 y 2 de la definición de seminorma, tenemos que para $i = 1,\ldots,n$
  $$\begin{aligned} p_i(\lambda x - \alpha a) &\le |\lambda - \alpha| p_i(a) + |\alpha| p_i(x - a) + |\lambda - \alpha| p_i(x - a) \\ &\le \delta p_i(a) + |\alpha|\delta_i + \delta\delta_i \\ &\le \frac{\varepsilon_i}{3} + \frac{\varepsilon_i}{3} + \frac{\varepsilon_i}{3} = \varepsilon_i \end{aligned}$$
  lo que prueba la continuidad de la aplicación.

■

Propiedad 2.17. *Sea X un espacio vectorial con la topología definida por una familia de seminormas $\mathcal{P}$ según la definición 2.19. Toda seminorma $p_i \in \mathcal{P}$ es una aplicación continua.*

Demostración:

Sea $x_0 \in X$. Toda seminorma $p \in \mathcal{P}$ verifica (propiedad b de 2.15)

$$|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0)$$

Dado un entorno I de $p(x_0) \in \mathbb{R}$, sea éste $I = (p(x_0) - \varepsilon, p(x_0) + \varepsilon)$ y sea el entorno $x_0 + B$ de $x_0 \in X$, donde $B = \{u \in X;\ p(u) < \delta\}$. Haciendo $\delta = \varepsilon$ resulta que para $x \in x_0 + B$,

$$|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0) < \delta = \varepsilon$$

■

Proposición 2.3. *Criterio de separación: Para que una topología generada por una familia de seminormas $\mathcal{P}$ sea de Hausdorff es necesario y suficiente que para todo $x \neq 0$ exista una seminorma $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.*

Demostración:

Si existe un $x \neq 0$ de X tal que $p(x) = 0$ para toda $p \in \mathcal{P}$, toda $\mathcal{P}$-bola abierta de centro el origen O contiene a x, de modo que no podemos separar los puntos x y O.

Por otra parte supongamos que para todo $x \neq 0$ de X, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$. Entonces las p-bolas abiertas $B(O,\rho)$ y $B(x,\rho)$ donde $\rho = 1/2p(x)$ son disjuntas. En efecto, si tuviesemos $y \in B(O,\rho) \cap B(x,\rho)$, tendriamos $p(y) < \rho = p(x)/2$ y también $p(y-x) < \rho = p(x)/2$, es decir $p(y-x) + p(y) < p(x)$, pero esto contradice la propiedad b) de (2.15) $p(y-x) \geq |p(y) - p(x)| \geq p(x) - p(y)$

■

Aunque existen espacios vectoriales topológicos cuya topología no está generada por una familia de seminormas, estos hasta hoy no parecen jugar un papel esencial en las aplicaciones del análisis funcional.

Los espacios vectoriales cuya topología está generada por una familia de seminormas son espacios vectoriales topológicos localmente convexos pues en tales espacios el origen tiene una base de entornos convexos. Inversamente, se puede demostrar que la topología de un espacio vectorial topológico localmente convexo (es decir que el origen tiene una base de entornos convexos) puede ser generada por una familia de seminormas. Vamos a precisar esto. Empezamos definiendo la funcional de Minkowski asociada a un conjunto.

Definición 2.20. *Funcional de Minkowski: Sea X un espacio vectorial. Sea $M \subset X$. Para todo $x \in X$ definimos*

$$p_M(x) = \text{ínf}\{\alpha > 0;\ x \in \alpha M\} \tag{2.30}$$

p_M se llama la funcional de Minkowski de M.

Con el fin de asegurar que $p_M(x)$ es siempre un número real necesitaremos alguna propiedad del conjunto M, por ejemplo que M es absorbente. Pues observemos que para un conjunto M cualquiera, el conjunto $\text{ínf}\{\alpha > 0;\ x \in \alpha M\}$ puede ser vacío en cuyo caso $p_M(x)$ sería ∞

Consideraremos ahora las propiedades de la función de Minkowski de conjuntos convexos, equilibrados y absorbentes.

Lema 2.2. *Sea X un espacio vectorial topológico. Sea M un conjunto de X que contiene al origen. La funcional de Minkowski p_M definida en (2.30) verifica las siguientes propiedades*

a) Si M es un conjunto convexo y abierto, $M = \{x \in X;\ p_M(x) < 1\}$
b) Si M es un conjunto absorbente $p_M(\lambda x) = \lambda p_M(x)$ para todo $\lambda > 0$, (propiedad 2.24). Además $p_M(O) = 0$.
c) Si M es un conjunto convexo y absorbente $p_M(x+y) \leq p_M(x) + p_M(y)$ (propiedad 2.25 y propiedad 1 de la definición 2.16).
d) Si M es un conjunto absorbente y equilibrado $p_M(\lambda x) = |\lambda| p_M(x)$, propiedad 2 de la definición 2.16.

Demostración:

a) Supongamos $x \in M$. Como M es abierto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño $(1+\varepsilon)x \in M$ (véase ejercicio 2.13). Entonces $p(x) < \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Recíprocamente, si $p(x) < 1$ existe $0 < \alpha < 1$ tal que $x \in \alpha M$ y claramente $O \in M$, de modo que $\alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)O \in M$.

b) p_M verifica (2.24): En efecto para un conjunto M cualquiera, las condiciones $\lambda x \in \alpha M$ y $x \in \frac{\alpha}{\lambda} M$ son equivalentes.
Tenemos
$$p_M(x) = \text{ínf}\{\alpha;\ \alpha > 0;\ x \in \alpha M\}$$
y también para $\lambda > 0$
$$\begin{aligned} p_M(\lambda x) &= \text{ínf}\{\alpha;\ \alpha > 0;\ \lambda x \in \alpha M\} \\ &= \lambda\, \text{ínf}\{\frac{\alpha}{\lambda}; \alpha > 0;\ \lambda x \in \alpha M\} \\ &= \lambda\, \text{ínf}\{\frac{\alpha}{\lambda};\ \frac{\alpha}{\lambda} > 0;\ x \in \frac{\alpha}{\lambda} M\} \\ &= \lambda p_M(x) \end{aligned}$$
Por otra parte de $O \in 0.M$ resulta
$$p_M(0.x) = p_M(O) = \text{ínf}\{\alpha;\ \alpha > 0;\ O \in \alpha M\} = 0$$

c)
$$p_M(x) = \text{ínf}\{\alpha;\ \alpha > 0;\ x \in \alpha M\}$$
$$p_M(y) = \text{ínf}\{\beta;\ \beta > 0;\ y \in \beta M\}$$
es decir, para todo $\varepsilon > 0$

$$x \in (p_M(x)+\varepsilon)M \quad \text{y} \quad y \in (p_M(y)+\varepsilon)M$$

de modo que

$$\frac{x}{p_M(x)+\varepsilon} \in M \quad \text{y} \quad \frac{y}{p_M(y)+\varepsilon} \in M$$

Como M es convexo para todo $t \in [0,1]$

$$\frac{tx}{p_M(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p_M(y)+\varepsilon} \in M$$

En particular para

$$t = \frac{p_M(x)+\varepsilon}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon}$$

tenemos

$$1-t = \frac{p_M(y)+\varepsilon}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon}$$

por lo que

$$\frac{x+y}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon} \in M$$

de donde

$$p_M(x+y) \leq p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon$$

donde hemos utilizado la propiedad b). Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario resulta

$$p_M(x+y) \leq p_M(x)+p_M(y)$$

d) Observemos que si M es equilibrado, para todo $\gamma \in \mathbb{K}$ tal que $|\gamma| = 1$ resulta

$$M = \gamma M$$

En efecto, tenemos $\gamma M \subset M$ y también $|1/\gamma| = 1$ por lo que $\frac{1}{\gamma}M \subset M \Rightarrow M \subset \gamma M$. La proiedad $M = \gamma M$ también podemos escribirla de la forma

$$x \in M \Leftrightarrow \gamma x \in M$$

. De modo que

$$\{\alpha;\ \alpha > 0;\ x \in \alpha M\} = \{\alpha;\ \alpha > 0;\ \gamma x \in \alpha M\}$$

y en consecuencia $p(x) = p(\gamma x)$ para todo $\gamma \in \mathbb{K}$ con $|\gamma| = 1$. Finalmente para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ utilizando la propiedad $b)$,

$$p_M(\lambda x) = |\lambda| p_M(\frac{\lambda}{|\lambda|}x) = |\lambda| p_M(x)$$

■

Hemos demostrado la siguiente:

Propiedad 2.18. *La funcional de Minkowski p_M de un conjunto M convexo, equilibrado y absorbente de un espacio vectorial X es una seminorma en X.*

En el siguiente teorema resumimos la relación entre espacios vectoriales topológicos localmente convexos y espacios vectoriales topológicos cuya topología está generada por una familia de seminormas.

Teorema 2.8. *Un espacio vectorial X cuya topología está generada por un familia de seminormas $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$ es un espacio localmente convexo en el cual toda seminorma p_i es continua. Si la familia de seminormas satisface el criterio de separación 2.3 la topología es de Hausdorff. Recíprocamente, la topología de un espacio vectorial localmente convexo, está generada por la familia de seminormas obtenidas por la funcionales de Minkowski de los conjuntos convexos, absorbentes y equilibrados que constituyen la base de entornos del origen que definen la topología de X.*

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la definición de una topología asociada a una familia de seminormas y de las propiedades 2.2 de la funcional de Minkowski.

■

Vamos a dar una caracterización de la base de entornos del origen en un espacio vectorial localmente convexo. Empezamos con la siguiente propiedad inmediata y cuya demostración dejamos como ejercicio:

Propiedad 2.19. *Sea X un espacio vectorial topológico cuya topología está definida por la familia de seminormas $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$. Para cada conjunto finito de seminormas $p_{i_1},\dots,p_{i_n} \in \mathcal{P}$ se tiene que*

$$p_{i_1\dots i_n} = sup\{p_{i_s};\ s = 1,\dots,n\}$$

es también una seminorma en X.

Demostración:

Se deja como ejercicio 2.14.

■

Esta propiedad nos permite dar una descripción de la base de entornos del origen de una forma más condensada.

Teorema 2.9. *Sea la familia $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}$-bolas abiertas, de centro el origen de X, asociada a la familia de seminormas $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$ y que constituyen una base de entornos del origen.*

Sea ahora la familia de seminormas del tipo $p_{i_1\dots i_n} = sup\{p_{i_s};\ s = 1,\dots,n\}$. Entonces familia $\mathcal{V}$ de conjuntos de la forma

$$\{x \in X;\ p_{i_1\dots i_n}(x) < \varepsilon\}$$

donde $\varepsilon > 0$ y $i_1, \ldots, i_n \in I$ constituyen una base de entornos abiertos del origen.

Demostración:

Tomando la familia finita de seminormas de un solo elemento ($n = 1$) vemos que

$$U_1 = \{x \in X;\ p_{i_1}(x) < \varepsilon\}$$

es elemento de la familia $\mathcal{B}$. Es decir $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$.

Por otra parte veamos que todo entorno $U \in \mathcal{B}$ contiene a un entorno del tipo $\{x \in X;\ p_{i_1 \ldots i_n}(x) < \varepsilon\}$. En efecto, un conjunto $U \in \mathcal{B}$ es de la forma

$$U = \{x \in X;\ p_{i_s}(x) < \varepsilon_s\ s = 1, \ldots, n\} = \bigcap_{s=1}^{n} U_s$$

donde hemos llamado $U_s = \{x \in X;\ p_{i_s}(x) < \varepsilon_s\}$.

Tomando $\varepsilon = \text{mín}_{s=1,\ldots,n}\{\varepsilon_s\}$ y $p_{i_1 \ldots i_n} = \sup\{p_{i_s};\ s = 1, \ldots, n\}$ tenemos que si $y \in V = \{x \in X;\ p_{i_1 \ldots i_n}(x) < \varepsilon\}$, entonces se verifica $p_{i_s}(y) < p_{i_1 \ldots i_n}(y) < \varepsilon < \varepsilon_s$ para todo $s = 1, \ldots, n$. Por consiguiente $y \in \bigcap_{s=1}^{n} U_s = U$.

Es decir para todo entorno $U \in \mathcal{U}$ existe un $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset U$. ■

Corolario 2.3. *Los entornos del origen $\{x \in X;\ p_{i_1 \ldots i_n}(x) < \varepsilon\}$ definidos en el teorema anterior, constituyen una base de entornos abiertos del origen.*

Definición 2.21. *Dados dos seminormas cualesquiera p y q en un espacio vectorial X pondremos $p \leq q$ si $p(x) \leq q(x)$ para todo $x \in X$.*

Se dice que una familia de seminormas $\{p_i;\ i \in I\}$ es filtrante si dados dos índices culesquiera i_1 e i_2 en I, existe un $i_3 \in I$ tal que

$$p_{i_1} \leq p_{i_3}, \quad p_{i_2} \leq p_{i_3}$$

i

Observaciones 2.1. *La familia de seminormas construida en el teorema anterior 2.9 es claramente una familia filtrante de seminormas.*

Procediendo como en el teorema 2.9 sea X un espacio vectorial localmente convexo cuya topología está generada por una familia filtrante de seminormas $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$. Para una familia finita $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}$ tendremos que existe una seminorma $p_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ tal que $p_{i_s} \leq p_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Entonces la familia de entornos del origen

$$\{x \in X;\ p_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x) < \varepsilon\}$$

constituyen una base de entornos abiertos del origen.

Veamos ahora como podemos caracterizar los conjuntos acotados mediante seminormas:

Teorema 2.10. *Sea X un espacio vectorial topológico, cuya topología está definida por una familia de seminormas $\mathcal{P}$. Un conjunto A de X es acotado si y solo si toda seminorma $p \in \mathcal{P}$ es acotada sobre A, es decir, existe $k < \infty$ tal que*

$$p(x) < k; \quad \forall x \in A \quad \forall p \in \mathcal{P} \tag{2.31}$$

Demostración:

Supongamos que $A \subset X$ es acotado. Sea $p \in \mathcal{P}$ y $V(p,1) = \{x \in X;\ p(x) < 1\}$ el entorno del origen asociado a p de radio 1 . Tendremos como A es acotado que existe $k < \infty$ tal que

$$A \subset kV(p,1)$$

por lo tanto si $x \in A$, existe un $y \in V(p,1)$ tal que $x = ky$ y por tanto $p(x) = kp(y) < k$.

Recíprocamente, supongamos que A satisface la condición (2.31) y sea U un entorno del origen, tal que

$$U \supset V(p_1,\varepsilon_1) \cap V(p_2,\varepsilon_2) \cap \ldots \cap V(p_n,\varepsilon_n)$$

donde $V(p_i,\varepsilon_i) = \{x \in X;\ p_i(x) < \varepsilon_i\}$. Si todas las p_i son acotadas en A, entonces para todo $x \in A$ y para cada i, se tiene $p_i(x) < k_i$ para algún $k_i > 0$. Tenemos que demostrar que existe un número $\alpha > 0$ tal que $\alpha A \subset U$.

Sea $x \in A$,

$$p_i(\alpha x) = \alpha p_i(x) < \alpha k_i$$

eligiendo α de manera que $\alpha k_i < \varepsilon_i$ para todo $i = 1,\ldots,n$, tendremos

$$p_i(\alpha x) < \varepsilon_i \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

y finalmente,

$$\alpha x \in V(p_1,\varepsilon_1) \cap \ldots, \cap V(p_n,\varepsilon_n) \subset U$$

Basta pues elegir $\alpha = \text{mín}_{i=1,\ldots,n} \frac{\varepsilon_i}{k_i}$.

■

Vamos a caracterizar ahora las sucesiones convergentes en espacios cuya topología está definida por una familia de seminormas.

Teorema 2.11. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio vectorial X cuya topología está definida mediante una familia de seminormas $\mathcal{P}$. Decir que* $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = a$ *equivale a decir que para todo $p \in \mathcal{P}$ tenemos* $\text{lím}_{n\to\infty} p(x_n - a) = 0$.

Demostración:

Las $\mathcal{P}$-bolas abiertas B de centro a constituyen una base de entornos de a. Decir que $(x_n)_n$ converge hacia a equivale a decir que para toda $\mathcal{P}$-bola abierta B de centro a, existe un n_0 tal que si $n > n_0$, entonces $x_n \in B$. Por otra parte decir que

$\lim_{n\to\infty} p(x_n - a) = 0$ equivale a decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $x_n \in \{x;\ p(x_n - a) < \varepsilon\}$.

Entonces decir que $\lim_{n\to\infty} p(x_n - a) = 0$ para todo $p \in \mathcal{P}$ equivale a decir que que para toda familia finita de bolas abiertas de la forma $\{x;\ p_i(x_n - a) < \varepsilon_i,\ i = 1,\dots,I\}$ existe un n_0 tal que para $n > n_0$ entonces $x_n \in \{x;\ p_i(x_n - a) < \varepsilon_i\}$ para cada valor de i y por lo tanto $x_n \in B = \bigcap_{i=1,\dots,I}\{x;\ p_i(x_n - a) < \varepsilon_i\}$. Como toda $\mathcal{P}$-bola abierta de centro x es una intersección finita como la anterior tenemos la equivalencia buscada. ∎

Aplicaciones lineales continuas en los espacios localmente convexos

Vamos a caracterizar las aplicaciones lineales continuas en los espacios vectoriales localmente convexos o lo que es equivalente en los espacios vectoriales topológicos cuya topología está definida por una familia de seminormas.

Teorema 2.12. *Sea X y Y espacios vectoriales topológicos cuya topología está definida por las familias filtrantes de seminormas $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$ en X y $\mathcal{Q} = (q_j)_{j\in J}$ en Y.*

Una aplicación lineal $f : X \to Y$ es continua, si y solo si, para toda seminorma q_j existe una constante C y una seminorma p_i tal que

$$q_j\big(f(x)\big) \le C p_i(x); \quad \forall x \in X \tag{2.32}$$

Demostración:

Primero observemos que gracias al teorema 2.9 siempre podemos suponer que la familia de seminormas es filtrante.

La condición es suficiente: Supongamos que se verifica (2.32), veamos que f es continua en el origen $O \in X$. Dado un entorno V del origen de Y, que podemos elegir de la forma $V = \{y \in Y;\ q_j(y) < \varepsilon\}$, y dada la seminorma p_i en X verificando

$$q_j\big(f(x)\big) \le C p_i(x); \quad \forall x \in X$$

tomamos el entorno del origen en X

$$U = \{x \in X;\ p_i(x) < \frac{\varepsilon}{C}\}$$

Tendremos para todo $x \in U$,

$$q_j(f(x)) \le C p_i(x) \le C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

es decir, $f(x) \in V$ y por lo tanto f es continua en el origen y al ser lineal es continua en todo X.

La condición es necesaria: La continuidad de f en $x = O$ implica que para toda seminorma $q_j \in \mathcal{Q}$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe una seminorma $p_i \in \mathcal{P}$ y un $\delta > 0$ tal que

$$p_i(x) < \delta \Rightarrow q_j(f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Sea cualquier $x \in X$ y tomemos un número positivo λ tal que $\lambda p_i(x) < \delta$. Entonces tendremos $p_i(\lambda x) < \delta$ y por consiguiente $q_j(f(\lambda x)) < \varepsilon$. De donde $q_j(f(x)) < \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Si $p_i(x) = 0$, podemos tomar λ arbitrariamente grande lo que demuesta que en este caso tambien $q_j(f(x)) = 0$. Si $p_i(x) \neq 0$, podemos tomar $\lambda = \frac{\delta}{p_i(x)}$ y por lo tanto, tendremos en cualquier caso

$$q_j(f(x)) \leq C p_i(x)$$

tomando $C = \frac{\varepsilon}{\delta}$.

■

Corolario 2.4. *Sea X un espacio vectorial topológico cuya topología está definida por la familias filtrante de seminormas $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$.*

Una forma lineal $f : X \to \mathbb{K}$ es continua, si y solo si, existe una constante C y una seminorma p_i tal que

$$|f(x)| \leq C p_i(x); \quad \forall x \in X \tag{2.33}$$

Demostración:

Tomamos en $\mathbb{K}$ el valor absoluto si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o el módulo en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ como familia de seminormas (de un único elemento) definiendo la topología en el cuerpo de los números reales o de los números complejos respectivamente.

■

Corolario 2.5. *Sea X un espacio vectorial topológico cuya topología está definida por la familias no necesariamente filtrante de seminormas $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$*

Una forma lineal $f : X \to \mathbb{K}$ es continua, si y solo si, existe una constante C y una subfamilia finita $(p_i)_{i \in J}$ tal que

$$|f(x)| \leq C sup_{i \in J} p_i(x); \quad \forall x \in X \tag{2.34}$$

Demostración:

A partir de la familia de seminormas generamos una familia filtrante como en el teorema 2.9 y tomamos esta familia filtrante como base de entornos.

■

Topología débil y convergencia débil

En un espacio vectorial X consideremos la familia de formas lineales $\{f_i\}$; la familia de seminormas $\{|f_i|\}$ definen sobre X una $\mathcal{P}$-topología que se llama topología débil asociada a la familia de formas lineales $\{f_i\}$. Aplicando el teorema 2.11 deducimos que dada $(x_n)_n$ una sucesión en X decir que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ en esta topología débil equivale a decir que para toda f_i

$$\lim_{n\to\infty} |f_i(x_n - a)| = 0 \quad \text{o bien} \quad \lim_{n\to\infty} f_i(x_n - a) = 0$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} f_i(x_n) = f(a)$$

Metrizabilidad de espacios localmente convexos

En este apartado vamos a dar una condición suficiente de metrizabilidad de espacios localmente convexos. Ya hemos visto que todo espacio métrico es un espacio topológico. En general existen espacios topológicos cuya topología no está generada por ninguna métrica. La metrizabilidad de un espacio topológico, es decir si dado un espacio topológico se puede encontrar una métrica que induzca esta topología, está ligado al hecho de que exista una base de abiertos numerable. Por ejemplo un espacio topológico normal que posea una base numerable es metrizable. También un espacio topológico compacto es metrizable si y solo si posee una base numerable (ver por ejemplo [6]).

La metrizabilidad es importante desde el punto de vista práctico pues permite caracterizar las aplicaciones continuas mediante la continuidad secuencial (teorema 1.27)

Aquí nos vamos a limitar, pues es suficiente para nuestros propósitos, a dar una condición suficiente de metrizabilidad de espacios localmente convexos.

Teorema 2.13. *Sea X un espacio localmente convexo y cuya topología está definida por una familia numerable de seminormas separante, es decir, que cumplen el criterio de separación 2.3. Entonces existe una distancia invariante por traslaciones que define su topología.*

Demostración:

Sea $(p_n)_n$ una sucesión separante de seminormas que genera la topología de X. Definimos la distancia entre dos puntos $x, y \in X$ mediante

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \tag{2.35}$$

Tenemos que la distancia así definida verifica las propiedades requeridas:

- $M1$: $d(x,y) \geq 0 \quad$ y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall\, x,y \in M$
- $M2$: $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y \in M$ (Simetría)
- $M3$: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in M$ (Desigualdad triangular)

En efecto, $M1$ se verifica pues $p_n(x,y) \geq 0$ para todo n y la familia $(p_n)_n$ es separante por lo que dado $x \neq O$, siempre existe al menos un n tal que $p_n(x) \neq 0$, de donde, si $d(x,y) = 0$ implica $p_n(x-y) = 0$ para todo n, lo que solo puede ocurrir si $x = y$.

$M2$ se verifica pues $p_n(x-y) = p_n(y-x)$ para cualquier seminorma.

Finalmente verificamos $M3$: Sean $x,y,z \in X$. Teniendo en cuenta

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

que es cierto para $a,b \geq 0$ y también como la función $x \to \frac{x}{1+x}$ es creciente para $x \geq 0$, podemos escribir para cada seminorma p_n

$$\frac{p_n(x-z+z-y)}{1+p_n(x-z+z-y)} \leq \frac{p_n(x-z)+p_n(z-y)}{1+p_n(x-z)+p_n(z-y)}$$
$$\leq \frac{p_n(x-z)}{1+p_n(x-z)} + \frac{p_n(z-y)}{1+p_n(z-y)}$$

multiplicado por 2^{-n} y sumando para todo n

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Por otra parte es inmediato que $d(.,.)$ es invariante por traslaciones.

Veamos ahora que la distancia (2.35) genera la topología de X. En primer lugar la aplicación $(x,y) \to d(x,y)$ es continua pues cada seminorma es continua y la serie en (2.35) es uniformemente convergente (pues cada término $d_n(x,y) = \frac{1}{2^n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$ de la serie verifica $|d_n(x,y)| \leq 2^{-n}$ y $\sum 2^{-n} = 1$). Si W es un entorno del origen para la topología generada por la distancia existe una bola de centro el origen y radio r, $B(O,r) = \{x \in X;\ d(O,x) < r\}$ tal que $W \supset B(O,r)$. Como la aplicación $x \to d(O,x)$ es continua y $B(O,r)$ es la antimagen del conjunto abierto $(-\infty, r) \in \mathbb{R}$ por esta aplicación, $B(O,r)$ es un abierto para la topología (original) de X. Por tanto W es también un entorno del origen para la topología original de X.

Recíprocamente, sea V un entorno del origen para la topología de X. Hemos de hallar una bola $B(O,r)$ tal que $V \supset B(O,r)$. Un entorno del origen V contendrá un conjunto de la forma (intersección finita de bolas asociadas a un número finito de seminormas)

$$V(O,\rho_1,p_{i_1}) \cap V(O,\rho_2,p_{i_2}) \cap \ldots \cap V(O,\rho_n,p_{i_n})$$

con $\rho_1,\ldots,\rho_n > 0$. Elijamos

$$r < \min_{j=1,\dots,n} \{\frac{\rho_j}{2^{i_j}(1+\rho_j)}\}$$

Si $x \in B(O,r)$, quiere decir que $d(O,x) < r$ y por tanto $\frac{p_{i_j}x)}{2^{i_j}(1+p_{i_j}(x))} < r$ para $j = 1,\dots,n$. De donde $\frac{p_{i_j}(x)}{1+p_{i_j}(x)} < \frac{\rho_j}{1+\rho_j}$. Finalmente la función $y \to f(y) = \frac{y}{1+y}$ es creciente y verifica $f(y) \leq 1$ para $y \geq 0$. Por otra parte la función inversa $z \to f^{-1}(z) = \frac{z}{1-z}$ es creciente para $0 \leq z \leq 1$. Por lo tanto $\frac{p_{i_j}(x)}{1+p_{i_j}(x)} \leq \frac{\rho_j}{1+\rho_j}$ implica $p_{i_j}(x) \leq \rho_j$. En consecuencia $x \in V(O,\rho_j,p_{i_j})$ para $j = 1,\dots,n$, es decir $B(O,r) \subset \bigcap_{j=1}^{n} V(O,\rho_j,p_{i_j})$.

■

Comentario 2.2. *El concepto de conjunto acotado ha sido definido para los espacios métricos (definición 1.28) y para los espacios vectoriales topológicos (definición 2.13). Cuando un espacio topológico X es metrizable la noción de conjunto acotado con respecto a esa métrica dice que A es acotado si existe $M < \infty$ tal que $d(x,y) \leq M$ para cualesquiera $x,y \in A$. Los conjuntos acotados según la definición 2.13) no son necesariamente los mismos que los conjuntos acotados respecto a la definición 1.28) dada para los espacios métricos. Por ejemplo si $d(\cdot,\cdot)$ es la distancia 2.35 construida en el teorema anterior 2.13 tendremos que todo X es acotado con $M = 1$ sin embargo X no es acotado según la definición dada para los espacios vectoriales topológicos a no ser que $X = \{O\}$ (ejercicio 2.15). Sin embargo si X es un espacio normado (véase capítulo 3) y $d(\cdot,\cdot)$ la distancia inducida por la norma los dos conceptos coinciden.*

2.3.3. Topología límite inductiva

Definición 2.22. *Sea X un espacio vectorial. Sea $(X_\alpha)_\alpha$ una familia de subespacios vectoriales de X tales que $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$. Supongamos que cada X_α es un espacio vectorial topológico localmente convexo de manera que si $X_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_2}$ entonces la topología de X_{α_1} es idéntica a la topología de X_{α_1} inducida por la de X_{α_2}. Consideramos X con la topología localmente convexa más fina para la que todas las inyecciones $I_\alpha : X_\alpha \to X$ son continuas. De este modo X con esta topología recibe el nombre de límite inductivo (estricto) de los X_α.*

Tenemos la siguiente caracterización de la topología límite inductiva de X:

Propiedad 2.20. *Sea $(X_\alpha)_\alpha$ una familia de espacios localmente convexos, como en la definición 2.22 para los que $\mathcal{U}_\alpha$ es una base de entornos del origen de X_α. Una base de entornos del origen para el límite inductivo X de los X_α está constituida por todos los conjuntos convexos equilibrados $V \subset X$ con la propiedad*

$$V \cap X_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha \quad \forall\alpha \tag{2.36}$$

Demostración:

Demostraremos por una parte que si se verifica la condición (2.36) entonces las inyecciones $I_\alpha : X_\alpha \to X$ son continuas, es decir la topología de X es la topología límite inductiva de la familia $(X_\alpha)_\alpha$. Recíprocamente demostraremos que si la topología de X es la topología límite inductiva de la familia $(X_\alpha)_\alpha$, es decir si las inyecciones $I_\alpha : X_\alpha \to X$ son continuas entonces se verifica la condición (2.36).

Condición suficiente: Sea $V \in X$ un entorno del origen, convexo y equilibrado verificando la propiedad (2.36). Tenemos $I_\alpha^{-1}(V) = \{x \in X_\alpha;\ I_\alpha(x) \in V\} = V \cap X_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ y como $I_\alpha\big(I_\alpha^{-1}(V)\big) = I_\alpha(V \cap X_\alpha) = V \cap X_\alpha \subset V$, la función I_α es continua.

Veamos que la condición (2.36) es necesaria. Sea $\mathcal{V}$ una base de entornos del origen de X, convexos y equilibrados. Sea $V \in \mathcal{V}$, si la aplicación I_α es continua, existe un entorno U_α del origen en X_α tal que $I_\alpha(U_\alpha) \subset V$ y como $I_\alpha(U_\alpha) = U_\alpha$, tenemos $U_\alpha \subset V$. Obviamente $U_\alpha \subset V \cap X_\alpha$ y por tanto $V \cap X_\alpha$ es un entorno del origen de X_α.

Tenemos además que $V \cap X_\alpha$ es convexo y también es equilibrado pues para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| \leq 1$ se verifica

$$\alpha(V \cap X_\alpha) = \alpha V \cap X_\alpha = V \cap X_\alpha$$

Así pues $V \cap X_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$.

■

La siguiente propiedad relaciona los entornos de X_α y de X.

Propiedad 2.21. *Sea $(X_\alpha)_\alpha$ una familia de subespacios vectoriales y X el límite inductivo. Sea V un convexo de X. Entonces las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) V es un entorno del origen de X
b) Para todo α, $V \cap X_\alpha$ es un entorno (convexo) del origen en X_α.

Demostración:

Sea V un convexo entorno del origen en X; V contiene un convexo equilibrado absorbente B tal que $B \cap X_\alpha$ es un entorno del origen en X_α. Pero entonces $V \cap X_\alpha \supset B \cap X_\alpha$ es un entorno del origen en X_α.

Recíprocamente, sea V un convexo de X tal que $V_\alpha = V \cap X_\alpha$ es un entorno del origen en X_α; V_α es convexo y contiene un entorno equilibrado del origen E_α en X_α. Pongamos

$$E = \bigcup_\alpha E_\alpha$$

E es equilibrado (ejercicio 2.16). Entonces la envolvente convexa de $c(E)$ verifica:

- Es un conjunto convexo, pues es la envolvente convexa de E.
- Es un conjunto equilibrado, pues es la envolvente convexa de un conjunto equilibrado (ejercicio 2.5).

- Es un conjunto absorbente, pues $c(E)$ contiene a los E_α que son todo ellos absorbentes (recordemos que los entornos de una base de entornos del origen en un espacio vectorial topológico son conjuntos absorbentes).

Entonces $c(E)$ es un entorno del origen para la topología de X ya que es un convexo, equilibrado, absorbente y $c(E) \cap X_\alpha \supset E_\alpha$.

Por otra parte tenemos $E \subset V$ ya que $E \cap X_\alpha = E_\alpha \subset V \cap X_\alpha$ para cualquier α. En consecuencia tenemos que $c(E) \subset V$ pues V es convexo.

Así pues V es un entorno del origen para X.

■

Comentario 2.3. *Como consecuencia de la propiedad 2.20 resulta que la topología límite inductiva de X inducida por la familia de espacios localmente convexos $(X_\alpha)_\alpha$ es la topología localmente convexa en X más fina que hace continuas todas las inyecciones $I_\alpha : X_\alpha \to X$.*

Demostración:

En efecto, si las inyecciones $I_\alpha : X_\alpha \to X$ son continuas se verifica la condición (2.36) por tanto una base de entornos del origen para la topología localmente convexa en X está formada por los conjuntos convexos y equilibrados cuyas anti-imágenes por las aplicaciones I_α son entornos del origen en X_α.

■

La siguiente propiedad caracteriza las aplicaciones lineales continuas definidas en un espacio límite inductivo.

Propiedad 2.22. *Sea X el límite inductivo estricto de una familia de espacios localmente convexos $(X_\alpha)_\alpha$ como en la definición 2.22. Sea Y un espacio localmente convexo. $f : X \to Y$ una aplicación lineal de X en Y.*

Entonces la aplicación f es continua si y solo si las aplicaciones $f_\alpha = f \circ I_\alpha$, es decir las restricciones de f a X_α son continuas.

Demostración:

Primero, si f es continua está claro que todas las aplicaciones $f_\alpha = f \circ I_\alpha$ son continuas pues son compuestas de aplicaciones continuas.

Recíprocamente, supongamos que $f_\alpha = f \circ I_\alpha$ es continua para todo α. Queremos demostrar que f es continua. Sea V un entorno del origen en Y, basta demostrar que $f^{-1}(V)$ es un entorno del origen de X. Como Y es localmente convexo podemos suponer que V es convexo. Entonces $f^{-1}(V)$ es convexo (pues f es lineal, ver ejercicio 2.17). Para cada α

$$
\begin{aligned}
& f^{-1}(V) \cap X_\alpha \\
& = \{x \in X;\ f(x) \in V\} \cap X_\alpha \\
& = \{x \in X_\alpha;\ f(x) \in V\} \\
& = \{x \in X_\alpha;\ f_\alpha(x) \in V\} = f_\alpha^{-1}(V)
\end{aligned}
$$

Como las f_α son continuas, $f_\alpha^{-1}(V)$ es un entorno de X_α, en consecuencia tenemos $f^{-1}(V) \cap X_\alpha$ es un entorno de X_α para todo α. Esta es la condición para que $f^{-1}(V)$ sea un entorno de X según la propiedad 2.21. ■

Tenemos de forma inmediata el siguiente corolario:

Corolario 2.6. *Sea X el límite inductivo estricto de una familia de espacios localmente convexos $(X_\alpha)_\alpha$ como en la definición 2.22. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una forma lineal en X.*

Entonces la forma lineal f es continua si y solo si las formas lineales $f_\alpha = f \circ I_\alpha$, es decir las restricciones de f a X_α son continuas.

Demostración:

Aplicamos la propiedad 2.22 con $Y = \mathbb{R}$.

■

En el capítulo 6 sección 6.1 veremos un ejemplo de esta construcción, aunque solo haremos uso de esta topología en lo que concierne a la caracterización de la convergencia de sucesiones.

Ejercicios del Capítulo 2

2.1. Demostrar la propiedad 2.1.

2.2. Demostrar la propiedad 2.2.

2.3. Demostrar las propiedades 2.3.

2.4. Demostrar la propiedad 2.7.

2.5. Demostrar que si A es un conjunto equilibrado entonces la envolvente convexa de A es un conjunto equilibrado.

2.6. Demostrar que si se verifica la propiedad c) del enunciado del teorema 2.1 entonces dado $U \in \mathcal{B}$ existe un $V \in \mathcal{B}$ tal que para todo n entero, se verifica $V + V + \ldots (2^n \text{sumandos}) \ldots + V \subset U$

2.7. Demostrar que si A es un conjunto acotado en un espacio vectorial topológico X y $\lambda \in \mathbb{K}$, el conjunto λA es acotado.

2.8. Demostrar que si A y B son dos conjuntos acotados en un espacio vectorial topológico X, $A \cup B$ tambiés es acotado.

2.9. Demostrar que si A y B son dos conjuntos acotados en un espacio vectorial topológico X, $A + B$ tambiés es acotado.

2.10. Este ejercicio extiende el teorema de Hahn-Banach a espacios vectoriales definidos sobre el cuerpo de los números complejos.

Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos y $p : X \to \mathbb{R}$ una aplicación verificando

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.37}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X \tag{2.38}$$

Es decir, p es una seminorma sobre X. Por otra parte sea $S \subset X$ un subespacio vectorial y $g : S \to \mathbb{C}$ una forma lineal tal que

$$|g(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in S$$

Entonces existe una forma lineal f definida sobre X que prolonga g, es decir,

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in S$$

y tal que

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

2.11. Sea f una forma lineal. Demostrar que para la seminorma $|f|$ sea una norma, es necesario que $f(x)$ solo se anule para $x = 0$ y por tanto que X sea de dimensión 1. Recíprocamente si X es de dimensión 1 y si $f \neq 0$, demostrar que $|f|$ es un norma.

2.12. Sea X un espacio vectorial.

a) Sea p una seminorma y $B = \{x \in X;\ p(x-a) < \rho\}$. Demostrar que B convexo.
b) Demostrar que la intersección de conjuntos convexos es convexo y concluir que toda $\mathcal{P}$-bola es un conjunto convexo.

2.13. Sea X un espacio vectorial topológico. Si M es abierto y $x \in M$ demostrar que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño $(1+\varepsilon)x \in M$.

2.14. Sea X un espacio vectorial topológico cuya topología está definida por la familia de seminormas $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$. Demostrar que para cada conjunto finito de indices $i_1, \ldots, i_n \in I$ se tiene que

$$p_{i_1 \ldots i_n} = sup\{p_{i_s};\ s = 1, \ldots, n\}$$

es también una seminorma en X.

2.15. Sea X un espacio vectorial topológico. Demostrar que ningún subespacio distinto de $\{O\}$ puede ser acotado.

2.16. Demostrar que si E_α son conjuntos equilibrados entonces

$$E = \bigcup_\alpha E_\alpha$$

es un conjunto equilibrado

2.17. Sean X e Y espacios vectoriales. Sea $f : X \to Y$ una aplicación lineal. Sea $V \subset Y$ convexo. Demostrar que $f^{-1}(V)$ es convexo.

Capítulo 3
Espacios normados y de Banach

Resumen

La seminorma de un vector en un espacio vectorial da una idea de la longitud del vector. En el capítulo anterior se ha visto que mediante una familia de seminormas se puede definir una topología en un espacio vectorial y construir así espacios vectoriales topológicos. Una norma es una caso particular de seminorma. Si la familia de seminormas para definir la topología de un espacio vectorial se reduce a una única norma tendremos un espacio normado y si el espacio es completo se llama entonces espacio de Banach.

Introducimos la noción de espacio Normado y de espacio de Banach, que es el marco funcional básico en nuestras aplicaciones. Damos los primeros ejemplos y estudiamos sus principales propiedades, en particular las relacionadas con las aplicaciones lineales continuas. Para un mayor comprensión de los conocimientos se pueden consultar [1] para una introducción sencilla y también [4]. Para una visión más profunda y extensa,[3], [12] y [15].

3.1. Espacios normados

Definición 3.1. *Un espacio normado E es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ será el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ o el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$ en que se ha definido una aplicación $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que cumple las siguientes propiedades:*

- $N1$*:* $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E \quad y \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $N2$*:* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad x, y \in E$
- $N3$*:* $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E$

La aplicación $\|\cdot\|$ se llama norma y $\|x\|$ se lee norma del vector x. Cuando sea necesario especificar el espacio escribiremos $\|\cdot\|_E$ y escribiremos simplemente $\|\cdot\|$ cuando se sobreentienda el espacio al que nos referimos.

Un norma es pues una seminorma que tiene además la propiedad $N1$. Tenemos pues que un espacio normado es un espacio localmente convexo cuya topología está generada por esta norma. Esta topología es de Hausdorff pues claramente por la propiedad $N1$ esta topología cumple con el criterio de separación 2.3.

Todo espacio normado es un espacio métrico con la distancia $d(x,y) = \|x-y\|$. La demostración se deja para el lector (ejercicio 3.1). Todos los conceptos métricos y topológicos tendrán aquí su significado. Hablaremos pues de conjuntos cerrados y conjuntos abiertos, sucesiones convergentes, sucesiones de Cauchy, conjuntos compactos, etc.

Un conjunto A de un espacio normado E es acotado, en virtud del teorema 2.10 de caracterización de conjuntos acotados en los espacios cuya topología está generada por una familia de seminormas, si y solo si existe $M < \infty$ tal que

$$\|x\| < M; \quad \forall x \in A \tag{3.1}$$

Por lo tanto tenemos que A es acotado si y solo si existe una bola abierta $B(p,M)$ en E tal que $A \subset B(p,M)$, en efecto eligiendo $p = O$ tenemos $A \subset B(O,M)$ si y solo si se verifica (3.1). Resulta que en un espacio normado las dos definiciones de conjunto acotado (definición 1.28 y definición 2.13) son equivalentes.

Mientras no digamos lo contrario el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ será el de los números reales $\mathbb{R}$, aunque la mayor parte de las definiciones y resultados a continuación son aplicables en ambos casos.

En el ejercicio 3.3 se proponen diversos ejemplos de espacios normados.

Sean E y F dos espacios vectoriales. Recordemos que una aplicación $T : E \to F$ se dice que es lineal si verifica

- $T(x+y) = T(x)+T(y) \quad \forall x,y \in E$
- $T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall \lambda \in E \quad \forall x \in E$

Vimos en el capítulo 1 que en los espacios métricos la continuidad en un punto de una aplicación se puede caracterizar por la continuidad secuencial. Retomamos estas propiedades en los espacios normados. Como espacios métricos que son, tendremos la siguiente caracterización de la continuidad en un punto de una aplicación que la podemos tomar como definición.

Definición 3.2. *Sean E y F dos espacios normados. Una aplicación $T : E \to F$ se dice que es continua en un punto $x \in E$ si para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ se verifica*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} = Tx$$

Naturalmente al escribir $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ queremos decir $\|x_n - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Si T es una aplicación continua en todo punto $x \in E$ diremos que T es una aplicación continua.

Utilizando las propiedades de la norma y esta caracterización de la continuidad de las aplicaciones en espacios métricos obtenemos directamente que la suma y el producto por un escalar son aplicaciones continuas para la distancia asociada (ejercicio 3.2).

En el capítulo anterior se vió (teorema 2.3) que en general en los espacios vectoriales topológicos la continuidad en el origen de una aplicación lineal implica la continuidad en todo punto. En los espacios normados tenemos la siguiente caracterización.

Teorema 3.1. *Sean E y F espacios normados y $T : E \to F$ una aplicación lineal. Entonces si T es continua en el punto $O \in E$ es continua en todo punto y existe una constante $M \geq 0$ tal que*

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in E \tag{3.2}$$

Cuando escribimos $\|\cdot\|$ (resp. $\|T(x)\|$) la norma es la definida en el espacio E (resp. F)

Demostración:

El recíproco de este teorema es trivial (ejercicio 3.4). Demostraremos pues que si T es continua en O es continua en todo punto y se verifica (3.2).

Si T es continua en $O \in E$, para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = O$ se tiene $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(O) = O$

Sea ahora un elemento cualquiera $y \in E$ y $(y_n)_n \subset E$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in E$. Evidentemente $\lim_{n\to\infty}(y_n - y) = O$. Como T es continua en $O \in E$, resulta $\lim_{n\to\infty} T(y_n - y) = O$ y por ser T una aplicación lineal $\lim_{n\to\infty} T(y_n) = T(y)$.

Veamos ahora la segunda parte del teorema. Demostremos primero que si $\|x\| \leq 1$ existe $M \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M$. En efecto, supongamos por el contrario que el conjunto $\{\|T(x)\|; \|x\| \leq 1\}$ no es acotado. Para cada n podemos elegir un vector x_n tal que $\|x_n\| \leq 1$ y $\|T(x_n)\| \geq n$. Definamos $y_n = \frac{1}{n}x_n$. Resulta $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|x_n\| = 0$ pues $\|x_n\| \leq 1$. Es decir $\lim_{n\to\infty} y_n = O$. Por otra parte $\|T(y_n)\| = \frac{1}{n}\|T(x_n)\| \geq 1$ en contradicción con $\lim_{n\to\infty} T(y_n) = T(O) = O$.

Sea finalmente un elemento cualquiera $x \in E$. El elemento $\frac{x}{\|x\|}$ tiene norma 1 y por lo tanto

$$\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M$$

es decir (3.2)

■

Definición 3.3. *Sean E y F dos espacios normados y $T : E \to F$ una aplicación lineal continua. El número real no negativo*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| \tag{3.3}$$

se llama norma de T.

El siguiente teorema proporciona la justificación de esta definición. En el ejercicio 3.5 se estudian diversas propiedades de $\|T\|$.

Recordemos que si E y F son espacios vectoriales el conjunto de aplicaciones lineales de E en F es un espacio vectorial que denotamos $\mathcal{L}(E;F)$

Teorema 3.2. *Sean E y F dos espacios normados. El conjunto $\mathcal{L}_c(E,F)$ de aplicaciones lineales continuas de E en F es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E,F)$ y además es un espacio normado con la norma*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| \tag{3.4}$$

Demostración:

Veamos primero que $\mathcal{L}_c(E,F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E,F)$. En efecto, sean $T,S \in \mathcal{L}_c(E,F)$, la suma y el producto por un escalar de aplicaciones lineales es evidentemente lineal. Por otra parte,

$$\|(T+S)(x)\| = \|T(x)+S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq (\|T\|+\|S\|).\|x\| \tag{3.5}$$

$$\|(\lambda T)(x)\| = \|\lambda T(x)\| = |\lambda|.\|T(x)\| \leq |\lambda|.\|T\| \cdot \|x\| \tag{3.6}$$

Utilizando la caracterización dada por el teorema (3.1) resulta que la suma de aplicaciones lineales continuas y el producto por un escalar son aplicaciones continuas.

Tenemos además que la aplicación nula $T = 0$ pertenece evidentemente a $\mathcal{L}_c(E,F)$. Finalmente $\|T\|$ definida por (3.4) es una norma ya que se verifica

- $N1$: $\|T\| \geq 0$ y $\|T\| = 0$ solo si $T = 0$
- $N2$: $\|T+S\| \leq \|T\|+\|S\|$ se deduce de (3.5) tomando el supremo en el conjunto $\{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$
- $N3$: $\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\lambda T(x)\| = |\lambda|.\sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| = |\lambda|.\|T\|$

■

Recordemos la definición de núcleo de una aplicación.

Definición 3.4. *Sea E y F dos espacios vectoriales y T una aplicación $T : E \longrightarrow F$. Al conjunto*

$$N = \{x \in E;\ T(x) = 0\}$$

se le llama núcleo de la aplicación T.

Inmediatamente tenemos

Teorema 3.3. *Sea E y F dos espacios normados y T una aplicación $T : E \longrightarrow F$ lineal continua. Entonces el núcleo de T es un subespacio vectorial cerrado de E.*

Demostración:

Es inmediato demostrar que si la aplicación T es lineal el núcleo es un subespacio vectorial. Por otra parte el núcleo de T es la antimagen de un punto de E (el origen O) que es un conjunto cerrado y la antimagen de un conjunto cerrado por una aplicación continua es un conjunto cerrado.

■

En el caso de las formas lineales tenemos la siguiente propiedad inmediata.

Propiedad 3.1. *Sea un espacio normado E, y sea $f : E \to \mathbb{K}$ una forma lineal, entonces f es continua si y solo si existe una constante $C \geq 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq C\|x\| \quad \forall x \in E$$

Demostración:

Aplicar el teorema (3.1)

■

En el ejercicio (3.6) se proponen diversos ejemplos de formas lineales continuas. Asimismo a lo largo del curso se tendrá ocasión de manejar muchas de ellas.

Aplicaciones bilineales y formas bilineales

Definición 3.5. *Sean E, F y G espacios normados, una aplicación $B(\cdot,\cdot) : E \times F \to G$ se llama bilineal si se verifica*

$$B(\lambda x + \mu y, z) = \lambda B(x,z) + \mu B(y,z) \quad \forall x, y \in E,\ \forall z \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \tag{3.7}$$

$$B(x, \lambda y + \mu z) = \lambda B(x,y) + \mu B(x,z) \quad \forall x \in E,\ \forall y, z \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \tag{3.8}$$

El concepto de continuidad se aplica aquí sin dificultad y decimos que una forma bilineal es continua en el origen $(0,0)$ de $E \times F$ si para cada par de sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ tales que $\lim x_n = 0$ en E y $\lim y_n = 0$ en F se tiene $\lim B(x_n, y_n) = 0$ en G.

Es inmediato demostrar que una aplicación bilineal continua en el origen es continua en todo punto $(x,y) \in E \times E$, es decir, para cada par de sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ tales que $\lim x_n = x$ en E y $\lim y_n = y$ en F se tiene $\lim B(x_n, y_n) = B(x,y)$ en G. Hablaremos pues siempre de aplicaciones bilineales continuas.

Definición 3.6. *Sean E y F espacios normados y una aplicación $B(\cdot,\cdot) : E \times F \to G$ una aplicación bilineal; diremos que $B(\cdot,\cdot)$ está acotada si existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|B(x,y)\|_G \leq C\|x\|_E . \|y\|_F \tag{3.9}$$

Propiedad 3.2. *Sean E, F y G espacios normados y $B(\cdot,\cdot) : E \times F \to G$ una aplicación bilineal. La siguientes propiedades son equivalentes*

a) $B(\cdot,\cdot)$ *es continua*
b) $B(\cdot,\cdot)$ *es acotada*

Demostración:

Es análoga a la de la propiedad 3.1 y se deja como ejercicio 3.7.

■

A la más pequeña de las constantes C verificando (3.9) la llamamos norma de la aplicación $B(\cdot,\cdot)$ y la denotamos mediante $\|B\|$. Análogamente al caso de aplicaciones lineales continuas tenemos

$$\|B\| = \sup_{x\in E,\, y\in F} \frac{\|B(x,y)\|_G}{\|x\|_E \cdot \|y\|_F} = \sup_{\|x\|_E \leq 1,\, \|y\|_F \leq 1} \|B(x,y)\|_G \tag{3.10}$$

El conjunto $\mathcal{B}_c(E\times F;G)$ de todas las aplicaciones bilineales continuas es un espacio vectorial normado con la norma (3.10).

A una aplicación bilineal cuando el espacio imagen es el cuerpo $\mathbb{K}$ la llamaremos forma bilineal.

El concepto de continuidad se aplica aquí sin dificultad y decimos que una forma bilineal bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es continua en el origen $(0,0)$ de $E\times E$ si para cada par de sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ en E tales que $\lim x_n = 0$ y $\lim y_n = 0$ se tiene $\lim a(x_n, y_n) = 0$.

Es inmediato demostrar que una forma bilineal continua en el origen es continua en todo punto $(x,y) \in E\times F$, es decir para cada par de sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ tales que $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$ se tiene $\lim a(x_n, y_n) = a(x,y)$. Hablaremos pues siempre de formas lineales continuas.

Del mismo modo diremos que una forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es acotada si existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$|a(x,y)| \leq C\|x\|.\|y\|$$

En particular, tenemos la propiedad

Propiedad 3.3. *Sea E y F espcios normados y $a(\cdot,\cdot) : E\times F \to \mathbb{K}$ una forma bilineal. La siguientes propiedades son equivalentes*

a) $a(\cdot,\cdot)$ es continua
b) $a(\cdot,\cdot)$ es acotada

Demostración:

Es un caso particular de la propiedad 3.2.

■

Separación de conjuntos convexos

En lo que sigue E será un espacio vectorial normado sobre el cuerpo de los reales aunque algunas definiciones y resultados de esta subsección son generalizables a espacios más generales. Veremos a continuación algunas propiedades de separación entre convexos como consecuencia del teorema de Hahn-Banach. Empezamos con la definición de hiperplano.

Definición 3.7. *Un hiperplano es un conjunto de la forma*

$$H = \{x \in E;\ f(x) = \alpha\} \tag{3.11}$$

donde f es una forma lineal sobre E no idénticamente nula.

Propiedad 3.4. *Un hiperplano H de ecuación $f(x) = \alpha$ es cerrado si y solo si f es continua.*

Demostración:

Si f es continua, H es cerrado pues es la antimagen de un conjunto cerrado. Recíprocamente, supongamos que H es cerrado. El complementario H^c es abierto y no vacío (pues $f \not\equiv 0$). Sea $x_0 \in H^c$ tal que $f(x_0) < \alpha$ (el razonamiento es análogo con $f(x_0) > \alpha$). Sea $r > 0$ tal que la bola de centro x_0 y radio r, $B(x_0,r) = \{x \in E;\ \|x - x_0\| < r\} \subset H^c$. Tendremos

$$f(x) < \alpha \quad \forall x \in B(x_0,r) \tag{3.12}$$

En efecto, supongamos que $f(x_1) > \alpha$ para algún $x_1 \in B(x_0,r)$. El segmento

$$\{x_t = (1-t)x_0 + t x_1;\ t \in [0,1]\}$$

está contenido en $B(x_0,r)$ de modo que $f(x_t) \neq \alpha$ para todo $t \in [0,1]$. Por otra parte $f(x_t) = \alpha$ para $t = \bar{t} = (\alpha - f(x_0))/(f(x_1) - f(x_0))$, resulta

$$\begin{aligned} f(x_{\bar{t}}) &= f\Big(\frac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)}x_0 + \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}x_1\Big) \\ &= \frac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)}f(x_0) + \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}f(x_1) = \alpha \end{aligned}$$

lo que es absurdo. Así pues (3.12) es cierto. Tenemos además a partir de (3.12) que

$$f(x_0 + rz) < \alpha \quad \forall z \in B(0,1)$$

En consecuencia, f es acotada y por tanto continua. Además se tiene

$$\begin{aligned} \|f\| &= \frac{1}{r}\sup_{\|z\|<1} f(rz) = \frac{1}{r}\sup_{\|z\|<1}\Big(\big(f(x_0+rz) - f(x_0)\big)\Big) \\ &\le \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0)) \end{aligned}$$

∎

Definición 3.8. *Sean $A \subset E$ y $B \subset E$. Diremos que un hiperplano H de ecuación $f(x) = \alpha$ separa A y B en sentido amplio si*

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad y \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B$$

Diremos que un hiperplano H de ecuación $f(x) = \alpha$ separa A y B en sentido estricto si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \quad y \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B$$

Antes de pasar a los teorema de separación necesitamos algunos resultados previos.

Lema 3.1. *Sea E un espacio normado. Sea C un conjunto convexo y abierto de E que contiene al origen. La funcional de Minkowski p_C definida en (2.30) verifica las siguientes propiedades*

a) *Existe M tal que* $0 \leq p_C(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in E$
b) $C = \{x \in E;\ p_C(x) < 1\}$
c) $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$ *para todo* $\lambda > 0$*, propiedad (2.24)*
d) $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$*, propiedad (2.25)*

Demostración:

Las propiedades b), c) y d) han sido demostradas para los espacios vectoriales topológicos en general (Lema 2.2). Solo resta demostrar la propiedad a). Sea $r > 0$, como C es abierto y contiene a O existe $r > 0$ tal que $B(O,r) \subset C$. Sea $x \in E$, tendremos para todo $\varepsilon > 0$, $\frac{r}{\|x\|+\varepsilon} x \in B(0,r)$ y por tanto

$$x \in \frac{\|x\| + \varepsilon}{r} C \quad \Rightarrow p_C(x) \leq \frac{1}{r}(\|x\| + \varepsilon)$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$ tendremos

$$p_C(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$$

∎

Veamos una primera propiedad de separación.

Lema 3.2. *Sea E un espacio normado. $C \subset E$ un convexo abierto no vacío y $x_0 \in E$ con $x_0 \notin C$. Entonces existe $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$. En particular el hiperplano de ecuación $f(x) = f(x_0)$ separa $\{x_0\}$ y C en sentido amplio.*

Demostración:

Por traslación podemos suponer que $O \in C$. Consideramos $G = \mathbb{R}x_0$ y la forma lineal g definida sobre G por $g(tx_0) = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Veamos que

$$g(x) \leq p_C(x) \quad \forall x \in G$$

En efecto, para $t > 0$, resulta

$$p_C(tx_0) = tp_C(x_0) \geq t = g(tx_0)$$

ya que $x_0 \notin C$ y en consecuencia $p_C(x_0) \geq 1$. Si $t \leq 0$, está claro que $g(tx_0) = t \leq p_C(tx_0)$, pues p_C es siempre un número mayor o igual que cero. Gracias al teorema de Hahn-Banach 2.6 existe una forma lineal f que prolonga g y tal que

$$f(x) \leq p_C(x) \quad \forall x \in E$$

En particular tenemos $f(x_0) = 1$ y f es continua gracias a la propiedad a) del lema 3.1. Por la misma propiedad b) del mismo lema obtenemos que $f(x) \leq p_C(x) < 1$ para todo $x \in C$.

■

Teorema 3.4. *(de Hahn-Banach, primera forma geométrica) Sea E un espacio normado y $A \subset E$ y $B \subset E$ dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Supongamos que A es abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en sentido amplio.*

Demostración:

Pongamos $C = A - B$ de manera de manera que C es convexo (ejercicio 3.8). C es abierto pues $C = \bigcup_{y \in B}(A - y)$. $O \notin C$ pues $A \cap B = \emptyset$. Por el lema 3.2 existe $f \in E'$ tal que

$$f(z) < f(O) = 0 \quad \forall z \in C$$

es decir como

$$f(x - y) < 0 \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B$$

resulta

$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B$$

Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ con

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$$

de donde el hiperplano de ecuación $f(x) = \alpha$ separa A y B en sentido amplio.

■

Teorema 3.5. *(de Hahn-Banach, segunda forma geométrica) Sea E un espacio normando y $A \subset E$ y $B \subset E$ dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Supongamos que A es cerrado y que B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en sentido estricto.*

Demostración:

Para $\varepsilon > 0$ introducimos $A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon)$ y $B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$ de manera que A_ε y B_ε son convexos, abiertos y no vacíos.

Veamos primero que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño A_ε y B_ε son disjuntos. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que dado $\varepsilon > 0$ existe $z_\varepsilon \in A_\varepsilon \cap B_\varepsilon$; existirá $x \in A$ e $y \in B$ tales que

$$\|x - y\| = \|x - z_\varepsilon + z_\varepsilon - y\| \le \|x - z_\varepsilon\| + \|y - z_\varepsilon\| \le 2\varepsilon$$

Consideremos ahora una sucesión $\varepsilon_n \to 0$ y las correspondientes $x_n \in A$ e $y_n \in B$ tales que $\|x_n - y_n\| \le 2\varepsilon_n$; Como B es compacto existe una subsucesión y_ν convergente. Sea $y_\nu \to z \in B$ y tendremos $\|x_\nu - z\| = \|x_\nu - y_\nu + y_\nu - z\| \le \|x_\nu - y_\nu\| + \|y_\nu - z\|$, de modo que también $x_\nu \to z$. Como A es cerrado también $z \in A$. Tendríamos pues que A y B no serían disjuntos.

Según el teorema 3.4 existe un hiperplano cerrado de escuación $f(x) = \alpha$ que separa A_ε y B_ε en sentido amplio. Tenemos pues,

$$f(x + \varepsilon z) \le \alpha \le f(y + \varepsilon z) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(0,1)$$

o bien,

$$f(x) + \varepsilon f(z) \le \alpha \le f(y) + \varepsilon f(z) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(0,1)$$

De la primera desigualdad, tomando el valor supremo en $\{z; \|z\| \le 1\}$,

$$f(x) + \varepsilon \sup_{\|z\| \le 1} f(z) \le \alpha \quad \text{es decir} \quad f(x) + \varepsilon \|f\| \le \alpha \quad \forall x \in A$$

En la segunda desigualdad, tomando $-z$ en el lugar de z, tenemos $\alpha \le f(y) - \varepsilon f(z)$, o bien $\alpha + \varepsilon f(z) \le f(y)$ y tomando el valor supremo en $\{z; \|z\| \le 1\}$ y reordenando

$$\alpha \le f(y) - \varepsilon \|f\| \quad \forall y \in B$$

finalmente podemos escribir

$$f(x) + \varepsilon \|f\| \le \alpha \le f(y) - \varepsilon \|f\| \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

y concluimos que el hiperplano $f(x) = \alpha$ separa A y B en sentido estricto.

■

El siguiente corolario es muy útil para demostrar que un subespacio vectorial es denso.

Corolario 3.1. *Sea $F \subset E$ un subespacio de un espacio normado E tal que $\bar{F} \neq E$. Entonces existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tal que*

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in F \tag{3.13}$$

Demostración:

Sea $x_0 \in E$, $x_0 \notin \bar{F}$. Aplicamos el teorema 3.5 con $A = \bar{F}$ y $B = \{x_0\}$. Existe pues una forma lineal $f \in E'$ y un número α tal que el hiperplano de ecuación $f(x) = \alpha$ separa en sentido estricto $\bar{F}$ y $\{x_0\}$, en particular tendremos

$$f(x) < \alpha \leq f(x_0) \quad \forall x \in F$$

como F es un subespacio, en particular para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tomando en lugar de x, λx $\lambda f(x) < \alpha \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, de donde

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in F$$

■

Comentario 3.1. *Para demostrar que un subespacio F de un espacio E es denso aplicamos el corolario 3.1 de la siguiente manera: Se considera una forma lineal continua $f \in E'$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ y se demuestra que necesariamente f es idénticamente nula sobre E. A modo de ejemplo ver el ejercicio 4.10 en el capítulo siguiente.*

3.2. Cociente de espacios normados y criterio de completitud de un espacio normado

En general dado un espacio vectorial E y un subespacio $N \subset X$ se define el espacio vectorial cociente E/N como el conjunto de clases de vectores definidos por la relación de equivalencia $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N$. Dotamos a este conjunto de clases cociente de estructura de espacio vectorial definiendo la suma de clases $\tilde{u} + \tilde{v}$ y producto por un escalar de una clase $\lambda\tilde{u}$ tomando elementos cualesquiera de la clase. Ahora si E es un espacio normado y N es un subespacio cerrado, entonces se puede dotar a E/N de una estructura de espacio normado definiendo la norma de $\tilde{u} \in E/N$ mediante

$$\|\tilde{u}\| = inf_{u \in \tilde{u}} \|u\| \tag{3.14}$$

Observemos que para $u \in E$ la norma de su clase de equivalencia $\tilde{u}$ es la distancia de u a N, pues

$$\|\tilde{u}\|_{E/N} = \inf_{v \in N} \|u + v\| = \inf_{v \in N} \|u - v\| = \inf\{\|u - v\|;\ v \in N\} = d(u, N)$$

En el siguiente teorema verificamos que (3.14) define una norma en E/N si N es un subespacio cerrado.

Teorema 3.6. *Sea E un espacio normado y N un subespacio de E. Si N es un subespacio cerrado la aplicación (3.14) define una norma en E/N.*

Demostración:

Vamos a verificar las condiciones $N1$, $N2$ y $N3$ de una norma.

- $N1$: Está claro que para $\tilde{u} \in E/N$, $\|\tilde{u}\|_{E/N} \geq 0$. Si $\|\tilde{u}\|_{E/N} = 0$ entonces para todo $u \in \tilde{u}$, $d(u,N) = 0$, es decir $u \in \bar{N} = N$ pues N es cerrado.
- $N2$: Sean $u_1, u_2 \in E$ y $u, v \in N$

$$\|\tilde{u_1} + \tilde{u_2}\|_{E/N} \leq \|u_1 + u + u_2 + v\| \leq \|u_1 + u\| + \|u_2 + v\|$$

como esto es válido para todo $v \in N$ resulta tomando el ínf para $v \in N$,

$$\|\tilde{u_1} + \tilde{u_2}\|_{E/N} \leq \|u_1 + u\| + \|\tilde{u_2}\|_{E/N}$$

y como a su vez esta última desigualdad es válida para todo $u \in N$, tendremos

$$\|\tilde{u_1} + \tilde{u_2}\|_{E/N} \leq \|\tilde{u_1}\|_{E/N} + \|\tilde{u_2}\|_{E/N}$$

- $N3$: Sea $\lambda \in K$ y $u \in E$. Para todo $v \in N$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \|\lambda\tilde{u}\|_{E/N} &= \inf_{v \in N}\{\|\lambda u + v\|\} = \inf_{w \in N}\{\|\lambda u + \lambda w\|\} \\ &= \inf_{w \in N}\{|\lambda|.\|u + w\|\} = |\lambda| \inf_{w \in N}\{\|u + w\|\} = |\lambda|.\|\tilde{u}\|_{E/N} \end{aligned}$$

■

Propiedad 3.5. *La aplicación*

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow E/N \\ v &\longrightarrow \tilde{v} \end{aligned}$$

es lineal y continua.

Demostración:

p es evidentemente lineal. Y p es también continua pues por la definición de norma cociente

$$\|\tilde{v}\|_{E/N} \leq \|v\| \quad \forall v \in E$$

■

Para terminar este apartado vamos a ver un criterio sencillo para ver cuando un espacio normado es completo. Los espacios normados completos se llaman espacios de Banach y los estudiamos en la sección siguiente.

Teorema 3.7. *Un espacio normado E es completo si y solo si se verifica que toda serie absolutamente convergente de vectores de E es convergente.*

Demostración:

Sea $\sum_{n\geq 1} u_n$ una serie en E. Que esta serie es convergente quiere decir que

$$\sum_{n\geq 1} u_n \in E$$

y que esta serie es absolutamente convergente quiere decir

$$\sum_{n\geq 1} \|u_n\| < \infty$$

Sea pues $\sum_{n\geq 1} u_n$ una serie absolutamente convergente en E. Escribiremos para las sumas parciales

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{y} \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|$$

Veamos primero que si E es completo implica que la serie es convergente.

Para m y n enteros positivos con $m < n$, y la desigualdad triangular

$$\|S_n - S_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} u_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|u_k\| = A_n - A_m = |A_n - A_m|$$

Si la serie es absolutamente convergente ello implica que la sucesión de números reales $(A_n)_n$ es de Cauchy y por tanto también será de Cauchy la sucesión $(S_n)_n$ y si E es completo será convergente.

Recíprocamente, supongamos que E es un espacio normado en el que toda serie absolutamente convergente es convergente. Y sea $(u_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_k$, entonces $\|u_n - u_m\| < 2^{-k}$. Definimos por inducción, $r(1) = n_1$, $r(k+1) = \text{máx}\{n_{k+1}, r(k)+1\}$. Para todo k tendremos, $r(k+1) > r(k) \geq n_k$, por lo tanto tendremos

$$\|u_{r(k+1)} - u_{r(k)}\| < 2^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Tomando $v_1 = u_{r(1)}$, $v_{k+1} = u_{r(k+1)} - u_{r(k)}$ para todo k, resulta que la serie $\sum_{k\geq 1} v_k$ es absolutamente convergente, luego por hipótesis es convergente. Pero dicha serie coincide con la sucesión $u_{r(n)}$, en efecto

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = u_{r(1)} + \sum_{k=2}^{n} (u_{r(k)} - u_{r(k-1)}) = u_{r(n)}$$

Así pues la sucesión $(u_{r(n)})_{r(n)}$ es convergente. Por tanto toda la sucesión $(u_n)_n$ es también convergente, puesto que toda sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente es convergente.

■

Como aplicación de este último resultado veamos que el cociente E/N de un espacio normado E, con N subespacio cerrado de E, es completo si este es completo.

Teorema 3.8. *Sea E un espacio normado y N un subespacio cerrado. Si E es completo, entonces E/N es completo.*

Demostración:

Utilizaremos el teorema anterior 3.7. Sea $\sum_{k\geq 1}\tilde{u}_k$ una serie absolutamente convergente en E/N. Para cada k podemos elegir $u_k \in \tilde{u}_k$ tal que

$$\|u_k\| \leq \|\tilde{u}_k\| + 2^{-k}$$

De modo que

$$\sum_{k\geq 1}\|u_k\| \leq \sum_{k\geq 1}\|\tilde{u}_k\| + \sum_{k\geq 1} 2^{-k} < \infty$$

Luego la serie $\sum_{k\geq 1} u_k$ es absolutamente convergente y por lo tanto, aplicando el teorema 3.7 como E es completo la serie es también es convergente.

Finalmente como la aplicación $v \to \tilde{v}$ es lineal y continua (propiedad 3.5) , si una sucesión $(v_n)_n$ es convergente en E, entonces la correspondiente sucesión de clases $(\tilde{v}_n)_n$ es también convergente en E/N y también si la serie en E, $\sum_{k\geq 1} u_k$ es convergente, también la serie correspondiente de las clases $\sum_{k\geq 1}\tilde{u}_k$ es convergente en E/N.

Hemos demostrado que toda serie absolutamente convergente en E/N es también convergente. Por lo tanto aplicando el teorema anterior 3.7 resulta que E/N es completo.

■

3.3. Espacios de Banach

Definición 3.9. *Un espacio normado completo se llama espacio de Banach*

Ver el ejercicio (3.9) sobre diversos ejemplos. Ver también el ejercicio (3.10) sobre un ejemplo de un espacio normado que no es de Banach.

Sean ahora dos espacios normados E y F. En la sección anterior 3.1 consideramos el espacio de aplicaciones lineales continuas de E en F, que designamos mediante $\mathcal{L}_c(E,F)$ y vimos que podiamos dotar a este espacio de la estructura de espacio normado definiendo para una aplicación $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ la norma (3.3). El siguiente teorema nos dice que este espacio normado es un espacio de Banach si F es de Banach.

Teorema 3.9. *Si E es un espacio normado y F un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}_c(E,F)$ es un espacio de Banach.*

Observemos que no es necesario que E sea de Banach.

Demostración:

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_c(E,F)$, es decir

$$\|T_m - T_n\| \to 0 \quad \text{cuando } n,m \to \infty$$

Se trata de construir una aplicación $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ tal que

$$\|T_n - T\| \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Para todo $x \in E$ tendremos

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\|.\|x\| \to 0 \quad \text{cuando } n,m \to \infty$$

es decir $(T_n(x))_n \subset F$ es una sucesión de Cauchy, siendo F completo, $(T_n(x))_n$ tendrá un límite que llamaremos $T(x)$. Demostraremos ahora que la aplicación así definida es lineal y continua verificando $\|T_n - T\| \to 0 \quad$ cuando $n \to \infty$. En efecto,

a) T es lineal:

$$T(\lambda x + \mu y) = \text{lím} T_n(\lambda x + \mu y) = \text{lím}(\lambda T_n(x) + \mu T_n(y)) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

b) T es continua: Como toda sucesión de Cauchy es acotada, existe una constante $C \geq 0$ tal que para todo n, $\|T_n\| \leq C$. Cualquiera que sea n tendremos

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_n\|.\|x\| \leq C\|x\|$$

c) $\|T - T_n\| \to 0 \quad$ cuando $n \to \infty$: Cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que si $n,m > n_0$ se tiene

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\|.\|x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

tomando $\|x\| \leq 1$ y $\|T_m - T_n\| \leq \varepsilon$. Fijando n y pasando al límite cuando $m \to \infty$

$$\|T(x) - T_n(x)\| \leq \varepsilon$$

tomando el sup para $\|x\| \leq 1$

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x) - T_n(x)\| = \|T - T_n\| \leq \varepsilon$$

■

Definición 3.10. *Sea E un espacio normado sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. El espacio $E' = \mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$ de las formas lineales continuas definidas sobre E se llama espacio dual de E.*

Para $f \in E'$ y $x \in E$, habitualmente utilizaremos la notación $f(x) = \langle f, x\rangle$.
Observación: Distinguir el espacio E' del dual algebraico $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$

Teorema 3.10. *El espacio dual E' de un espacio normado es un espacio de Banach para la norma*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| \tag{3.15}$$

Demostración:

Es un corolario inmediato del teorema (3.9)

■

Al espacio dual $E'' = (E')'$ del espacio dual de E se le denomina bidual. Veamos que todo elemento de E define una forma lineal continua sobre E', es decir, se puede considerar en la práctica un elemento del bidual E''. En efecto, dado $x \in E$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \rho_x : E' &\to \mathbb{R} \\ f &\to \langle f, x\rangle \end{aligned}$$

Es inmediato demostrar que ρ_x es una forma lineal continua sobre E' (ver ejercicio 3.11, es decir es un elemento de E''. Veamos que se puede identificar E como subespacio de E''.

Teorema 3.11. *La aplicación*

$$\begin{aligned} T : E &\to E'' \\ x &\to \rho_x \end{aligned}$$

es lineal, continua e inyectiva. De hecho se verifica $\|x\|_E = \|\rho_x\|_{E''}$. Tenemos pues que la aplicación $E \to T(E) \subset E''$ es una isometría.

Estas propiedades permiten identificar E como un subespacio de E''. Para la demostración necesitaremos varios corolarios del teorema de Hahn-Banach 2.6).

Corolario 3.2. *(del teorema de Hahn-Banach 2.6)*

Sea S un subespacio vectorial de un espacio normado E y sea $g : S \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua de norma

$$\|g\|_{S'} = \sup_{x\in S, \|x\|\leq 1} |g(x)| = \sup_{x\in S, \|x\|\leq 1} g(x)$$

Existe $f \in E'$ que prolonga g y tal que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{S'}$$

Demostración:

Aplicamos el teorema 2.6 con $p(x) = \|g\|_{S'}\|x\|$. La función p verifica las hipótesis (2.24) y (2.25). Tendremos pues que existe una aplicación lineal continua $f : E \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x\rangle \leq p(x) = \|g\|_{S'}\|x\| \quad \forall x \in E$$

$$\langle f, x\rangle = g(x) \quad \forall x \in S$$

Resulta

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E; \|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \|g\|_{S'}$$

y por otra parte

$$\|g\|_{S'} = \sup_{x\in S, \|x\|\leq 1} |g(x)| = \sup_{x\in S, \|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|f\|_{E'}$$

de donde $\|f\|_{E'} = \|g\|_{S'}$

■

Corolario 3.3. *Para todo $x_0 \in E$ existe $f_0 \in E'$ tal que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad y \quad \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2$$

Demostración:

Aplicamos el corolario 3.2 con $S = \mathbb{R}x_0$ y $g(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|^2$. Tendremos

$$\|g\| = \sup_{\lambda\in\mathbb{R},\ \|\lambda x_0\|\leq 1} g(\lambda x_0) = \sup_{\lambda\leq 1/\|x0\|} \lambda\|x_0\|^2 = \|x_0\|$$

La proplongación f_0 de g a todo E resuelve el problema, pues tenemos $\|f_0\| = \|g\| = \|x_0\|$ y como $x_0 \in S$,

$$\langle f_0, x_0\rangle = g(x_0) = \|x_0\|^2$$

■

Corolario 3.4. *Para todo $x \in E$ tenemos*

$$\|x\| = \sup_{f\in E',\ \|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \max_{f\in E',\ \|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle|$$

Demostración:

Tenemos

$$\sup_{f\in E';\ \|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \|x\| \tag{3.16}$$

Por otra parte el corolario anterior 3.2 dado $x \in E$, existe un $f_0 \in E'$ tal que $\|f\| = \|x\|$ y $\langle f, x\rangle = \|x\|^2$. Poniendo $f_1 = f/\|x\|$ resulta $\|f_1\| = 1$ y $< f_1, x >= \|x\|$. De donde se deduce que en (3.16) se verifica la igualdad pues

$$\|x\| = \langle f_1, x\rangle \le \sup_{f\in E';\ \|f\|\le 1} |\langle f, x\rangle| \le \|x\|$$

■

Corolario 3.5. *Sea E un espacio normado y $x \in E$ tal que*

$$\langle f, x\rangle = 0 \quad \forall f \in E'$$

entonces $x = 0$.

Demostración:

Según el corolario 3.2 dado x existe $f_0 \in E'$ tal que $\langle f_0, x\rangle = \|x\|^2$ por tanto $\|x\| = 0$ y $x = 0$.

■

Demostración del teorema 3.11:

Sea la aplicación

$$\begin{aligned} T: E &\to E'' \\ x &\to \rho_x \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde $\langle \rho_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \quad \forall f \in E'$. La aplicación T verifica:

1. Es lineal: Pongamos $T(\lambda x + \mu y) = \rho_{\lambda x+\mu y}$. Tendremos para todo $f \in E'$

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\lambda x+\mu y}, f\rangle &= \langle f, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda\langle f, x\rangle + \mu\langle f, y\rangle \\ &= \lambda\langle \rho_x, f\rangle + \mu\langle \rho_y, f\rangle = \langle \lambda\rho_x + \mu\rho_y, f\rangle \end{aligned}$$

   Por lo tanto
$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

2. Es inyectiva: Sean x_1, x_2 dos vectores de E, con $T(x_1) = T(x_2)$, es decir, para todo $f \in E'$, $\langle f, x_1\rangle = \langle f, x_2\rangle$, o bien,

$$\langle f, x_1 - x_2\rangle = 0, \quad \forall f \in E'$$

   Aplicando el corolario 3.5 resulta $x_1 = x_2$.
3. La aplicación $E \to T(E) \subset E''$ es una isometría (y por tanto continua): Aplicando el corolario 3.4 tenemos

$$\|\rho_x\| = \sup_{\|f\|\le 1} |\langle \rho_x, f\rangle| = \sup_{\|f\|\le 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|$$

■

En general $E \neq E''$. En efecto, consideramos el caso en el que E es un espacio normado pero no de Banach. Por el teorema 3.9 los espacios duales son siempre de Banach de modo que E'' es de Banach. Se puede ver con contraejemplos que incluso en el caso en que E sea de Banach no siempre se tiene $E = E''$. Los espacios de Banach que verifican $E = E''$ se llaman reflexivos. Tenemos pues la siguiente definición:

Definición 3.11. *Sea E un espacio de Banach, se dice que E es reflexivo si* $T(E) = E''$ *siendo T la aplicación definida en el enunciado del teorema 3.11*

Independientemente se puede definir también los espacios de Banach uniformemente convexos:

Definición 3.12. *Un espacio de Banach se dice que es uniformemente convexo si verifica la siguiente propiedad: Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\forall x, y \quad \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \quad y \quad \|x - y\| > \varepsilon$$

implica

$$\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$$

En la práctica quiere decir que las bolas son "redondeadas". Se puede demostrar (ver por ejemplo [3]) que todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo (el recíproco no es cierto). En muchas ocasiones es más fácil verificar la convexidad uniforme que la reflexividad.

Teoremas de Banach-Steinhaus, de la aplicación abierta y del grafo cerrado

En este apartado veremos tres teoremas fundamentales de los espacios de Banach y algunas de sus consecuencias que por otra parte son de gran utilidad en las aplicaciones

El siguiente teorema expresa la deducción de una estimación uniforme a partir de estimaciones puntuales.

Teorema 3.12. *(de Banach-Steinhaus) Sean E y F dos espacios de Banach. Sea* $(T_i)_{i \in I}$ *una familia cualquiera de operadores lineales continuos de E en F. Supongamos que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in E \tag{3.18}$$

entonces

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty \tag{3.19}$$

dicho de otra manera, existe una constante C tal que

$$\|T_i x\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in E \quad \forall i \in I \tag{3.20}$$

Demostración:

Primero veamos que (3.19) es equivalente a (3.20). En efecto, si se verifica (3.19), tendremos llamando $C = \sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$

$$\|T_i x\| \leq \|T_i\|.\|x\| \leq \sup_{i\in I} \|T_i\|.\|x\| = C\|x\|$$

Recíprocamente, si se verifica (3.20), tomando el $\sup_{\|x\|\leq 1}$ en (3.20) tendremos para todo i,

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|T_i x\| = \|T_i\| \leq C$$

Pasemos a la demostración del teorema: Para cada entero $n \geq 1$ pongamos

$$X_n = \{x \in E; \forall i \in I,\ \|T_i x\| \leq n\}$$

de modo que X_n es un conjunto cerrado y gracias a (3.18)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E$$

resulta del teorema de Baire 1.39 que $\mathbf{Int}\, X_{n_0} \neq \emptyset$ para algún $n_0 \geq 1$. Existen $x_0 \in E$ y $r > 0$ tales que la bola $B(x_0, r)$ verifica $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$. Tendremos

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0 \quad \forall i \in I, \quad \forall z \in B(0,1)$$

en consecuencia teniendo en cuenta la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
&|\ \|T_i(rz)\| - \|T_i x_0\|\ | \leq \|T_i(rz) - T_i x_0\| = \|T_i(rz - x_0)\| = \|T_i(x_0 - rz)\| \\
&\|T_i(rz)\| \leq \|T_i(x_0 - rz)\| + \|T_i x_0\| \\
&r\|T_i z\| \leq \|T_i(x_0 - rz)\| + \|T_i x_0\| \\
&r \sup_{\|z\|\leq 1} \|T_i z\| \leq \sup_{\|z\|\leq 1} \|T_i(x_0 - rz)\| + \|T_i x_0\|
\end{aligned}$$

de donde finalmente para $c < \infty$ independiente de i, utilizando (3.18)

$$r\|T_i\| \leq n_0 + \|T_i x_0\| \leq n_0 + c$$

o bien

$$\|T_i\| \leq \frac{n_0 + c}{r} = C$$

donde C es una constante independiente de i.

■

Vamos a ver algunas consecuencias inmediatas del teorema de Banach-Steinhaus. Antes recordemos la definición de límite inferior y límite superior de una sucesión cualquiera de números reales: Sea $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ poniendo

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

y

$$\beta = \text{ínf}\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$$

β recibe el nombre límite superior de $(a_n)_n$ y escribimos

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$$

Tendremos las propiedades siguientes: primero $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \ldots$ de modo que $(b_k)_k$ es una sucesión decreciente que o bien no está acotada inferiormente y entonces $\beta = -\infty$ o bien está acotada en cuyo caso tiene un límite en $\mathbb{R}$. En ambos casos $\beta = \text{lím}_{k\to\infty} b_k$.

El límite inferior se define análogamente: Sea $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ poniendo

$$b_k = \text{ínf}\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

y

$$\gamma = sup\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$$

γ recibe el nombre límite inferior de $(a_n)_n$ y escribimos

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \text{ínf}\, a_n$$

En este caso $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \ldots$ de modo que $(b_k)_k$ es una sucesión creciente que o bien no está acotada superiormente y entonces $\beta = +\infty$ o bien está acotada en cuyo caso tiene un límite en $\mathbb{R}$. En ambos casos $\beta = \text{lím}_{k\to\infty} b_k$.

Naturalmente tendremos

$$\text{lím}\,\text{ínf}\, a_n \leq \text{lím}\sup a_n$$

y si $(a_n)_n$ es convergente

$$\text{lím}\, a_n = \text{lím}\,\text{ínf}\, a_n = \text{lím}\sup a_n$$

Para una ampliación de estos conceptos ver [4].

Corolario 3.6. *Sean E y F dos espacios de Banach. Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores lineales y continuos de E en F tales que para cada $x \in E$ la sucesión $(T_n x)_n$ converge cuando $n \longrightarrow \infty$ hacia un límite que llamaremos Tx. Entonces*

a) $\sup_n \|T_n\| < \infty$
b) $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$
c) $\|T\| \leq \text{lím}\,\text{ínf}\, \|T_n\|$

Demostración:

Si $(T_n x)_n$ es convergente también es convergente $(\|T_n x\|)_n$ y por tanto acotada, es decir $\sup_n \|T_n x\| < \infty$ para todo x, y aplicando el teorema de Banach-Steinhaus 3.12 obtenemos a)

Ahora si se verifica a) existe pues una constante C tal que

$$\|T_n x\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in E$$

Claramente T es lineal. Por otra parte tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in E$$

por lo que T es continua.

Para ver c) como

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\|.\|x\| \quad \forall x \in E$$

para $\|x\| \leq 1$

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \quad \forall x \in E \quad \text{con} \quad \|x\| \leq 1$$

tomando el límite inferior obtenemos

$$\|Tx\| = \text{lím}\,\|T_n x\| \leq \text{lím}\inf\|T_n\| \quad \forall x \in E \quad \text{con} \quad \|x\| \leq 1$$

tomando el $\sup_{\|x\|\leq 1}$ obtenemos c)

■

Corolario 3.7. *Sea G un espacio de Banach y sea B un subconjunto de G. Si para todo $f \in G'$ el conjunto $f(B) = \bigcup_{x\in B}\langle f, x\rangle$ está acotado (en $\mathbb{R}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) entonces B es acotado.*

Demostración:

Aplicamos el teorema 3.12 con $E = G'$, $F = \mathbb{R}$ y el conjunto de indices $I = B$. Para cada índice $b \in B$ escribimos

$$T_b(f) = \langle f, b\rangle, \quad f \in E = G'$$

de manera que

$$\sup_{b\in B} |T_b(f)| = \sup_{b\in B}\langle f, b\rangle < \infty \quad \forall f \in E = G'$$

pues $\sup_{b\in B}\langle f, b\rangle$ está acotado según la hipótesis para todo $f \in E = G'$. Aplicando el teorema 3.12 existe una constante C tal que

$$|\langle f, b\rangle| \leq C\|f\| \quad \forall f \in E = G' \quad \forall b \in B$$

por consiguiente (ver corolario 3.4)

$$\|b\| = \sup_{f\in E',\, \|f\|\leq 1} |\langle f, b\rangle| \leq C \quad \forall b \in B$$

■

En espacios de dimensión finita para determinar si un conjunto está acotado basta examinar las funciones coordenadas (que son formas lineales continuas) de cada punto y ver si el valor que toman las coordenadas si está acotado. Aquí para un espacio de Banach no necesariamente de dimensión finita el conjunto de las formas lineales continuas juega el papel de las coordendas en un espacio de dimensión finita. El corolario 3.7 expresa que un conjunto débilmente acotado es también fuertemente acotado (es decir, acotado para la norma).

Para el espacio dual tenemos el corolario análogo siguiente:

Corolario 3.8. *Sea G un espacio de Banach y sea B' un subconjunto del espacio dual G'. Si para todo $x \in G$ el conjunto $\bigcup_{f \in B'} \langle f, x\rangle$ está acotado (en $\mathbb{R}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) entonces B' es acotado.*

Demostración:

Aplicamos el teorema 3.12 con $E = G$, $F = \mathbb{R}$, $I = B'$. Para cada $b \in B'$ escribimos

$$T_b(x) = \langle b, x\rangle \quad x \in E = G$$

Existirá una constante c tal que

$$|\langle b, x\rangle| \leq C\|x\| \quad \forall b \in B' \quad \forall x \in G$$

de donde por la definición de la norma en el espacio dual

$$\|b\| = \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} |\langle b, x\rangle| \leq C \quad \forall b \in B'$$

■

Pasamos ahora al estudiar el teorema de la aplicación abierta debido a Banach.

Teorema 3.13. *(De la aplicación abierta) Sean E y F dos espacios de Banach y T un operador lineal continuo y sobreyectivo de E sobre F. Entonces existe una constante $r > 0$ tal que*

$$T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,r) \tag{3.21}$$

Antes de demostrar el teorema observemos que la propiedad (3.21) nos dice que la aplicación T transforma los abiertos de E en abiertos de F. De ahí el nombre de teorema de la aplicación abierta. En efecto, sea U un abierto de E y veamos que $T(U)$ es un abierto de F. Sea $y_0 \in T(U)$ con $y_0 = Tx_0$ para $x_0 \in U$. Sea $s > 0$ tal que $B_E(x_0, s) \subset U$, es decir $x_0 + B_E(0, s) \subset U$. Entonces

$$y_0 + T(B_E(0, s)) \subset T(U)$$

Por (3.21)

$$T(B_E(0, s) \supset B_F(0, sr)$$

y por consiguiente

$$B_F(y_0, sr) = y_0 + B_F(0, sr) \subset y_0 + T(B_E(0, s)) \subset T(U)$$

Hemos demostrado que para todo punto y_0 de $T(U)$ existe una bola abierta de centro y_0 contenida en $T(U)$, por lo tanto $T(U)$ es un abierto de F.

Demostración:

Primero recordemos que en todo espacio vectorial topológico la aplicación $x \longrightarrow \lambda x$ con $\lambda \neq 0$ es un homeomorfismo (ver propiedad 2.10) por lo tanto la aplicación y su inversa son continuas.

También recordemos (véase teorema 1.26) que en un espacio métrico la condición necesaria y suficiente para que un punto sea punto de adherencia de un conjunto A es que sea punto límite de A.

Pasemos a la demostración que se hace en dos etapas.

- Primera etapa: Sea T un operador lineal sobreyectivo de E sobre F. Entonces existe $r > 0$ tal que
$$\overline{T(B_E(0,1))} \supset B_F(0, 2r) \tag{3.22}$$
Demostración: Tomemos $X_n = n\overline{T(B_E(0,1))}$. Como T es sobreyectivo $\cup_{n=1}^{\infty} X_n = F$. Gracias al teorema de Baire 1.39 existe un n_0 tal que $\mathbf{Int}\, X_{n_0} \neq \emptyset$. De donde resulta
$$\mathbf{Int}\left(n_0\overline{T(B_E(0,1))}\right) \neq \emptyset$$
Sea $p \in \mathbf{Int}\left(n_0\overline{T(B_E(0,1))}\right)$. Existe un abierto A en F que contiene a p y tal que $p \in A \subset n_0\overline{T(B_E(0,1))}$. Por tanto también
$$y = \frac{p}{n_0} \in \frac{1}{n_0} A \subset \overline{T(B_E(0,1))}$$
Como $\frac{1}{n_0}A$ es un abierto podemos elegir una bola de centro y y radio $4r$ tal que
$$B_F(y, 4r) \subset \frac{1}{n_0} A \subset \overline{T(B_E(0,1))}$$
En particular $y \in \overline{T(B_E(0,1))}$ de modo que $y = \lim y_\nu$ con $(y_\nu)_\nu$ una sucesión de puntos de $T(B(0,1))$; es decir $y = \lim T(z_\nu)$ con $\|z_\nu\| < 1$. Por lo tanto $-y = \lim T(-z_\nu)$ y como $\|-z_\nu\| = \|z_\nu\| < 1$ es también límite de una sucesión de puntos de $T(B(0,1))$. Tenemos pues
$$-y \in \overline{T(B_E(0,1))} \tag{3.23}$$
Sumando (3.23) con
$$B_F(y, 4r) \subset \overline{T(B_E(0,1))} \tag{3.24}$$

resulta

$$B_F(0,4r) \subset \overline{T(B_E(0,1))} + \overline{T(B_E(0,1))}$$

y como $\overline{T(B_E(0,1))}$ es convexo (ver propiedad 2.17)

$$B_F(0,4r) \subset 2\overline{T(B(0,1))}$$

de donde dividiendo por 2

$$\frac{1}{2}B_F(0,4r) = B_F(0,2r) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$$

- Segunda etapa: Sea T un operador lineal continuo de E en F verificando (3.22) entonces existe $r > 0$ tal que

$$T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,r) \tag{3.25}$$

<u>Demostración</u>: Sea $y \in F$ con $\|y\| < r$. Hemos de hallar un $x \in E$ tal que

$$\|x\| < 1 \quad \text{y} \quad Tx = y$$

La propiedad (3.22) se puede escribir

$$\overline{T(B_E(0,1/2))} \supset B_F(0,r)$$

y significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{existe} \quad z \in E \quad \text{con} \quad \|z\| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \|y - Tz\| < \varepsilon$$

que es una manera de escribir que dado un elemento $y \in B_F(0,r)$, para todo entorno de y existe un elemento $z \in T(B_E(0,1/2)$.
Elegimos $\varepsilon = \frac{r}{2}$ y obtenemos de esta manera un $z_1 \in E$ con

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \|y - Tz_1\| < \frac{r}{2}$$

Repetimos el mismo procedimiento tomando $y - Tz_1$ en el lugar de y. La propiedad (3.22) se puede escribir

$$\overline{T(B_E(0,1/4))} \supset B_F(0,\frac{r}{2})$$

eligiendo $\varepsilon = \frac{r}{4}$ obtenemos $z_2 \in E$ tal que

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \|y - Tz_1 - Tz_2\| < \frac{r}{4}$$

Construimos así recursivamente una sucesión $(z_n)_n$ tal que

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{y} \quad \|y - T(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)\| < \frac{r}{2^n} \quad \forall n$$

La sucesión $(x_n)_n$, con $x_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ es de Cauchy, pues $\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m} \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Sea $x = \lim x_n$. Tenemos $\|x\| < 1$ y $\lim T(x_n) = Tx = y$, puesto que T es continua.

■

Vamos a ver algunas consecuencias inmediatas del teorema de la aplicación abierta.

Corolario 3.9. *Sean E y F dos espacios de Banach y T un operador lineal continuo y biyectivo de E en F. Entonces T^{-1} es continuo de F en E.*

Demostración:

La expresión (3.21) quiere decir que para todo $x \in E$ tal que $\|Tx\| < r$, resulta $\|x\| < 1$. Dicho de otra manera, si $\|x\| \geq 1$ entonces $\|Tx\| \geq r$. En particular si $\|x\| = 1$ entonces $\|Tx\| \geq r$. Entonces para todo $x \in E$, tendremos $\|T(x/\|x\|)\| \geq r$. De modo que finalmente

$$\|x\| \leq \frac{1}{r}\|Tx\| \quad \forall x \in E$$

Lo que quiere decir que T^{-1} es un operador continuo.

■

Corolario 3.10. *Sea un espacio vectorial con dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Siendo E un espacio de Banach para cada una de las dos normas. Supongamos que existe una constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \quad \forall x \in E$$

Entonces existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 \quad \forall x \in E$$

O dicho de otra manera, las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Demostración:

Aplicamos el corolario anterior 3.9 tomando $E = (E, \|\cdot\|_1)$ y $F = (E, \|\cdot\|_2)$ y como operador T la identidad, $Tx = x$. ■

Corolario 3.11. *En un espacio vectorial E de dimensión finita todas las normas son equivalentes.*

Demostración:

Sea E de dimensión finita d y sea $\{e_i;\ i = 1,\dots,d\}$ una base de E. Consideremos sobre E la norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \quad \forall x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$$

Para cualquier otra norma $\|\cdot\|$ definida sobre E tendremos

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{d} x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|.\|e_i\| \leq C_1 \sum_{i=1}^{d} |x_i| = C_1\|x\|_1$$

donde $C_1 = \text{máx}_{i=1,\dots,d} \|e_i\|$. El corolario anterior 3.10 nos dice que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq C_2\|x\| \quad \forall x \in E$$

■

El siguiente teorema es también una aplicación inmediata del teorema de la aplicación abierta. Dado un operador $T : E \longrightarrow F$ se define el grafo $G(T)$ de T como el subespacio de $E \times F$,

$$G(T) = \{(x, y) \in (E \times F);\ y = Tx\}$$

Teorema 3.14. *(del grafo cerrado): Sean E y F dos espacios de Banach. Sea T un operador lineal continuo de E en F. Supongamos que el grafo $G(T)$ de T es cerrado, entonces T es un operador continuo.*

Demostración:

Sobre E consideramos las normas

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$$

llamada norma del grafo $G(T)$ y

$$\|x\|_2 = \|x\|_E$$

Como $G(T)$ es cerrado, E con la norma $\|\cdot\|_1$ es un espacio de Banach. Por otra parte, claramente $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. En consecuencia (ver 3.10) las dos normas son equivalentes, es decir existe una constante $C > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$. Finalmente

$$\|Tx\|_F \leq \|x\|_E + \|Tx\|_F = \|x\|_1 \leq C\|x\|_E$$

y T es continuo.

■

Observación 3.1. *El recíproco de este teorema es también cierto para cualquier operador (lineal o no): Si T es un operador continuo el grafo $G(T)$ es un subespacio cerrado de $E \times F$ (ejercicio 3.12)*

3.4. Álgebras de Banach

En esta sección presentamos algunos conceptos básicos de la teoría de álgebras de Banach que serán útiles al estudiar la descomposición espectral de operadores que limitaremos a operadores autoadjuntos compactos en el espacio de Hilbert y que desarrollaremos en el capítulo 4.

Definición 3.13. *Un álgebra de Banach (real o compleja) es un espacio de Banach A (resp. real o complejo) en el que está definido un producto que satisface para todo $x, y, z \in A$ y para todo escalar α:*

- $A1$: $x.(y.z) = (x.y).z$
- $A2$: $(x+y).z = x.z + y.z \quad x.(y+z) = x.y + x.z$
- $A3$: $\alpha(x.y) = (\alpha x).y = x.(\alpha y)$
- $A4$: $\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\|$
- $A5$: *Existe un elemento e tal que $x.e = e.x = x \quad \forall x \in A$ y $\|e\| = 1$ al que se le llama elemento unidad.*

Comentario 3.2. *Si A es un espacio vectorial verificando $A1$, $A2$ y $A3$ recibe el nombre de álgebra. Si A es un espacio normado verificando además $A4$ se le llama álgebra normada. A las álgebras normadas completas se les llama muchas veces álgebras de Banach sin necesidad de exigir la existencia de un elemento unidad. El elemento unidad si existe es único: En efecto, si e' verifica $A5$, $e' = e'e = e$. No se exige que el producto sea conmutativo. Un álgebra que verifica $x.y = y.x$ para todo $x, y \in A$ se dice que es un álgebra conmutativa.*

Comentario 3.3. *Sea A es un espacio vectorial verificando $A1$, $A2$, $A3$, $A4$ y $A5$ con la salvedad que $||e|| \neq 1$. Siempre tendremos $||e|| \geq 1$ y podemos siempre reemplazar la norma de A por una equivalente $\|\cdot\|_{eq}$ para la cual $\|e\|_{eq} = 1$. Véase al respecto el ejercicio 3.13*

Ejemplos de álgebras de Banach :

1. El cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ y el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ con la suma y el producto con $\|x\| = |x|$. Ambos son álgebras conmutativas con elemento unidad $e = 1$.
2. El espacio de funciones continuas $C^0[0,1]$. Sabemos que es un espacio de Banach con la norma del máximo $\|f\|_\infty = \text{máx}_{t\in[0,1]} |f(t)|$ (ejercicio 3.9). Se define el producto mediante el producto de funciones $(f.g)(t) = f(t)g(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Es obvio que es un álgebra conmutativa con elemento unidad e, función dada por $e(t) = 1 \; \forall t \in [0,1]$. También para $f, g \in C^0[0,1]$ se tiene

$$\|f.g\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t).g(t)| \le \|f\|.\|g\|$$

Entonces $C^0[0,1]$ es un álgebra de Banach.

3. Sea $\mathcal{M}(n)$ el conjunto de matrices $n\times n$, $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ con la suma $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$, con el producto por un escalar $\lambda A=(\lambda a_{ij})$ y el producto de matrices habitual $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^n = a_{ik}b_{kj}$. Esto hace que $\mathcal{M}$ sea un álgebra. Con cualquier norma inducida por una norma vectorial

$$\|A\| = \sup_{v\neq 0}\frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

es un álgebra de Banach, por ejemplo con la norma

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

El elemento unidad es la matriz identidad.

4. Sea B un espacio de Banach y $\mathcal{L}_c(B)$ el espacio de aplicaciones lineales continuas de B en sí mismo, que es un espacio de Banach. Definimos el producto como la composición de funciones, es decir para $A_1, A_2 \in \mathcal{L}_c(B)$, $(A_1\circ A_2)(x)=A_1(A_2(x))$. Sabemos que $A_1\circ A_2\in\mathcal{L}_c(B)$ y

$$\|(A_1\circ A_2)(x)\| \le \|A_1\|.\|A_2(x)\| \le \|A_1\|.\|A_2\|.\|x\|$$

y por tanto

$$\|A_1\circ A_2\| \le \|A_1\|.\|A_2\|$$

Además tiene elemento unidad $e=I$ que es la aplicación idéntica.

En lo que sigue cuando nos referimos a un álgebra de Banach suponemos que es un álgebra de Banach con elemento unidad.

Definición 3.14. *En un álgebra de Banach (con e el elemento unidad) diremos que z es el inverso de x si*

$$z.x = x.z = e$$

Al inverso de x si existe le designaremos mediante la notación x^{-1}.

Propiedades 3.1. *(de las inversas)*

a) Sea A un álgebra de Banach y sean $x,y\in A$. *Si x e y tienen inversas entonces* $x.y$ *tiene inversa y* $(x.y)^{-1}=y^{-1}.x^{-1}$.

b) Si $x.y$ *tiene inversa y x tiene inversa entonces y tiene inversa que viene dada por* $y^{-1}=(x.y)^{-1}.x$

c) Si $x.y$ *tiene inversa e y tiene inversa entonces x tiene inversa que viene dada por* $x^{-1}=y(x.y)^{-1}$

Demostración:

a) Tenemos $y^{-1}.x^{-1}.x.y = y^{-1}.y = e$ y también $x.y.y^{-1}.x^{-1} = x.x^{-1} = e$
b) Sea $z = x.y$ que tiene inversa. Como x tiene inversa podemos escribir $x^{-1}.z = y$ Como x^{-1} y z tienen inversa, y tiene inversa e $y^{-1} = z^{-1}.x = (x.y)^{-1}.x$
c) Demostración análoga al caso b)

■

Definición 3.15. *Un álgebra de división es un álgebra con elemento unidad en el que todos los elementos distinto del elemento O tiene elemento inverso.*

Vamos a ver a continuación algunas propiedades importantes y que tienen una demostración sencilla en el contexto de las álgebras de Banach. La siguiente propiedad es bien conocidas para las álgebras de matrices.

Teorema 3.15. *Sea A un álgebra de Banach, sea $e \in A$ el elemento unidad y sea $x \in A$ tal que $\|x\| < 1$. Entonces*

a) $e - x$ *es invertible y la inversa es* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
b) $\|(e-x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}$
c) $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$

Demostración:

a) Como $\|x\| < 1$ y $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ verifica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n < \infty$$

por lo tanto es absolutamente convergente y por tanto es convergente (véase teorema 3.7), es decir, la sucesión $(s_n)_n$ donde $s_n = e + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ es convergente. Sea $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Tendremos

$$s_n.(e-x) = (e-x).s_n = e - x^{n+1}$$

por la propiedad del producto

$$\|s_n.(e-x) - s.(e-x)\| = \|(s_n - s).(e-x)\| \leq \|s_n - s\|.\|e-x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

y también $\|x^{n+1}\| \leq \|x\|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, pasando al límite cuando $n \to \infty$ resulta

$$s(e-x) = (e-x)s = e$$

de donde $s = (e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

b)

$$\|s_n\| = \|e + x + x^2 + \ldots + x^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n \leq \frac{1}{1-\|x\|}$$

y pasando al límite obtenemos b)

c)

$$\|s_n - e - x\| = \|x^2 + \ldots + x^n\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$$

y de nuevo pasando al límite obtenemos c)

■

Corolario 3.12. *Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$) y $x \in A$ con $\|x\| < |\lambda|$, entonces $\lambda e - x$ es invertible.*

Demostración:

Tenemos

$$\|\lambda e - x\| = |\lambda|.\|e - \frac{1}{\lambda}x\|$$

entonces $\|\frac{1}{\lambda}x\| < 1$ y aplicamos el teorema 3.15.

■

Corolario 3.13. *Sea A un álgebra de Banach, sea $e \in A$ el elemento unidad y $x \in A$ tal que $\|e - x\| < 1$. Entonces x es invertible y el inverso de x es $e + \sum_{n=1}^{\infty}(e - x)^n$*

Demostración:

Tenemos $x = e - (e - x)$. Aplicamos el teorema anterior 3.15 a $e - x$ en lugar de x.

■

Teorema 3.16. *El conjunto U de todos los elementos invertibles de un álgebra de Banach A es abierto.*

Demostración:

Sea $x \in U$. Veamos que existe un bola abierta de centro x contenido en U. En efecto consideremos la bola

$$B(x) = \{y \in A\ ;\|y - x\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}\}$$

Sea $y \in B(x)$, poniendo $\|e - y.x^{-1}\| = \|(x - y).x^{-1}\| \leq \|x - y\|.\|x^{-1}\| < 1$, aplicando el corolario 3.13 deducimos que $y.x^{-1} \in U$. De donde $y \in U$ siendo la inversa $y^{-1} = x^{-1}.(y.x^{-1})^{-1}$ (véanse las propiedades 3.1). ■

Teorema 3.17.

La siguiente propiedad se deja como ejercicio:

Propiedad 3.6. *Sea A un álgebra de Banach y sea $x \in A$ con $\|x\| < 1$. Entonces existe un $y \in A$ tal que*

$$x.y = x + y \tag{3.26}$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 3.14. ∎

Espectro, conjunto resolvente

Definición 3.16. *Espectro y conjunto resolvente:*

Sea A un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea $x \in A$, el espectro $\sigma(x)$ es el conjunto de todos los escalares $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda e - x$ no es invertible.

El complementario es el conjunto resolvente $\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{K}\,; (\lambda e - x)$ es invertible$\}$.

Definición 3.17. *Radio espectral: El radio espectral de x es el número*

$$\mathbb{R}_{esp}(x) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\} \tag{3.27}$$

Veamos ahora una propiedad esencial del espectro:

Teorema 3.18. *Sea A un álgebra de Banach compleja y sea $x \in A$. Entonces el espectro $\sigma(x)$ es un conjunto compacto de $\mathbb{C}$. Tenemos además que $\sigma(x)$ está contenido en la bola de centro el origen y radio $\|x\|$.*

Demostración:

Probaremos que $\sigma(x)$ es cerrado y acotado. Si $|\lambda| > \|x\|$ entonces $\|\frac{1}{\lambda}x\| < 1$ y por el teorema 3.15 $e - \frac{1}{\lambda}x$ es inversible y por lo tanto también $\lambda e - x = \lambda(e - \frac{1}{\lambda}x)$ es invertible. De modo que $\lambda \notin \sigma(x)$. Esto prueba que $\sigma(x)$ es un conjunto acotado contenido en el disco del plano complejo de centro el origen y radio $\|x\|$.

Para probar que es cerrado demostraremos que su complementario, el conjunto resolvente $\rho(x)$ es abierto. Sea $\lambda_0 \in \rho(x)$, por tanto $x - \lambda_0 e$ es invertible. Sea U el conjunto de los elemento invertibles de A, que sabemos que es abierto según el teorema 3.16, y consideremos la función $g : \mathbb{C} \to A$ definida por $g(\lambda) = x - \lambda e$. Como U es abierto existe un entorno $S(g(\lambda_0)) \subset U$ de $g(\lambda_0) = x - \lambda_0 e$. Como g es continua existe un entorno $B_\varepsilon(\lambda_0) = \{\lambda\,; |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$ de λ_0 tal que $g(\lambda) \in S(g(\lambda_o)) \subset U \quad \forall \lambda \in B_\varepsilon$.

Hemos demostrado que dado un elemento $\lambda_0 \in \rho(x)$ existe un entorno $B_\varepsilon(\lambda_0)$ de λ_0 tal que $\lambda \in \rho(x)$ para todo $\lambda \in B_\varepsilon$. Es decir $\rho(x)$ es un conjunto abierto.

∎

Comentario 3.4. *En la anterior demostración hemos utilizado el hecho que g es continua. En efecto g es continua pues es una aplicación afín (traslación + producto por un escalar) de modo que si $\lambda_n \to \lambda$ cuando $n \to \infty$ tenemos*

$$\|g(\lambda_n) - g(\lambda)\| \leq |\lambda_n - \lambda| \to 0$$

Se puede demostrar que en un ágebra de Banach compleja el espectro es siempre un conjunto no vacío (ver por ejemplo [12]). Sin embargo en el caso de álgebras reales el espectro puede ser vacío, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Consideremos el álgebra de Banach real con elemento identidad $\mathcal{M}(2)$ de las matrices reales 2×2. Veamos cuál es el espectro de $A \in \mathcal{M}(2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}\, ; A - \lambda Id \quad \text{no tiene inversa}\,\}$. Sabemos del curso de álgebra lineal que esto ocurre si y solo si el determinante $det(A - \lambda Id) = 0$. Aquí $det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0$ no tiene solución real. Por lo tanto $\sigma(A) = \emptyset$.

En cambio si consideramos el álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ de las matrices $\mathcal{M}(2)$ complejas tendremos $\sigma(A) = \{i, -i\}$.

Valores propios de un operador

Definición 3.18. *Sea E un espacio normado y $T \in \mathcal{L}_c(E)$ una aplicación lineal continua de E en si mismo. Entonces un escalar λ se dice que es un valor propio de T si y solo si existe un $x \neq O$ en E tal que $Tx = \lambda x$. Denotaremos $VP(T)$ al conjunto de valores propios de T.*

El espacio normado $\mathcal{L}_c(E)$ es un álgebra con elemento unidad con la composición de operadores como producto del álgebra. El elemento unidad es claramente la aplicación idéntica Id. Podemos hablar pues del espectro $\sigma(T)$ de una aplicación de $\mathcal{L}_c(E)$. Si E es un espacio de Banach también lo es $\mathcal{L}_c(E)$ que es entonces un álgebra de Banach.

Teorema 3.19. *El conjunto de valores propios $VP(T)$ de $T \in \mathcal{L}_c(E)$ es un subconjunto del espectro $\sigma(T)$.*

Demostración:

Sea $\lambda \in VP(T)$ implica que existe un $x_0 \neq O$ tal que $Tx_0 = \lambda x_0$. Entonces $(T - \lambda Id)x_0 = O$. Ahora bien, si la aplicación $(T - \lambda Id)^{-1}$ existe entonces

$$(T - \lambda Id)^{-1}(T - \lambda Id)x_0 = (T - \lambda Id)^{-1} O = O$$

es decir $x_0 = O$ lo que contradice la definición de valor propio. Queda probado que $VP(T) \subset \sigma(T)$.

■

La inclusión anterior puede ser estricta como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Sea el espacio de las sucesiones $l^2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots); \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$ con la norma $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2\right)^{1/2}$ que es un espacio de Banach (de hecho es un espacio de Hilbert, véase el ejercicio 4.7 del capítulo 4). Consideremos el operador $T : l^2 \to l^2$ definido por

$$Tx = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$. Claramente T es lineal y acotado. Veamos que $VP(T) = \emptyset$ y sin embargo $0 \in \sigma(T)$. En efecto:

Si $0 \in VP(T)$ entonces $Tx = 0x$ para algún $x \neq 0$, es decir $(0, x_1, x_2, \ldots) = 0x = (0, 0, \ldots)$ lo cual es imposible, por lo que 0 no puede ser valor propio. Por otra parte, si $\lambda \in VP(T)$ no nulo, entonces existe $x \neq O$ tal que

$$T(x) = (0, x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$$

Entonces $0 = x_1,\ x_1 = \lambda x_2,\ x_2 = \lambda x_3, \ldots$ por lo que $x = O$, lo que contradice la definición de valor propio. De donde $VP(T) = \emptyset$.

Por otra parte veamos que $0 \in \sigma(T)$. En efecto $0 \in \sigma(T)$ significa que T no tiene inversa. Veamos que efectivamente T no tiene inversa. Si T^{-1} existiese entonces $T(T^{-1}x) = x$ para todo $x \in l^2$. Pero la imagen por T de cualquier vector tiene la primera coordenada nula, por tanto $T(T^{-1}(x)$ no puede ser igual a x si la primera coordenada $x_1 \neq 0$. Concluimos que T no puede tener inversa y $0 \in \sigma(T)$.

Observación 3.2. *La definición de resolvente de un operador es*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ T - \lambda Id \text{ es invertible}\}$$

La definición nos dice pues que si $\lambda \in \rho(T)$ la aplicación $T - \lambda Id$ es invertible y por lo tanto sobreyectiva. Pero también necesariamente es inyectiva pues si $Tx - \lambda x = 0$ con $x \neq 0$ resultaria que λ es valor propio y por lo tanto no podría estar en el conjunto resolvente. Tenemos pues que el conjunto resolvente es

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ T - \lambda Id \text{ es biyectiva}\}$$

Ejercicios del Capítulo 3

3.1. Demostrar que todo espacio normado es un espacio métrico con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$.

3.2. Demostrar utilizando las propiedades de la norma y la caracterización de la continuidad de una aplicación que en todo espacio normado la suma y el producto por un escalar son aplicaciones continuas.

3.3. Verificar que los siguientes espacios son normados con la norma que se indica.

(a)) $C^0[a,b]$ con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
(b) Todo subespacio vectorial S de un espacio normado con la norma inducida.
(c) $\mathbb{R}^d$ con la norma $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \quad x = (x_1,...,x_n)$
(d) $\mathbb{R}^d$ con la norma $\|x\|_\infty = \text{máx}_{i=1,...,n} |x_i| \quad x = (x_1,...,x_n)$

3.4. Demostrar el recíproco del teorema 3.1: Sean E y F espacios normados y $T : E \to F$ una aplicación lineal. Si T es acotada, es decir verifica

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in E$$

entonces T es continua.

3.5. Sea E y F dos espacios normados y T una aplicación $T : E \to F$ lineal continua. Demostrar las siguientes propiedades de $\|T\|$.

(a) $\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\|$
(b) Si $E \neq 0$, $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$
(c) $\|T(x)\| \leq \|T\|.\|x\|$
(d) Si $M \geq 0$ y $\|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in E$, entonces $\|T\| \leq M$

3.6. Verificar que las siguientes aplicaciones $\psi : E \to \mathbb{R}$ son formas lineales continuas sobre E

(a) $E = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ y $\psi(x) = x_1 \quad x = (x_1,...,x_d)$
(b) $E = (C^0[a,b], \|\cdot\|_\infty)$. Dada $g \in E$ definimos

$$\psi(f) = \int_a^b g(x)f(x)\,dx$$

(c) $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ y $\psi(x) = x_1 + x_2 \quad x = (x_1,x_2)$

3.7. Demostrar la propiedad 3.2.

3.8. Si A es convexo y B es convexo demostra que $C = A - B$ es convexo.

3.9. Demostrar que los siguientes espacios normados son de Banach

1. $E = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$
2. $E = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$, donde

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\Big)^{1/p}$$

para $p \geq 1$

3. $E = (C^0[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, donde

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

3.10. Demostrar que $E = (C^0[a,b], \|\cdot\|_p)$, donde

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\Big)^{1/p}$$

es un espacio normado pero no es de Banach.

3.11. Demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned} \rho_x :&E' \to \mathbb{R} \\ &f \to \langle f, x\rangle \end{aligned}$$

es lineal y continua.

3.12. Sean E y F espacios normados y T un operador de E en F continuo. Demostrar que el grafo $G(T) = \{(x,y) \in E\times F;\ y = Tx\}$ es un subespacio cerrado de $E\times F$

3.13. Sea A es un espacio vectorial verificando $A1$, $A2$, $A3$, $A4$ y $A5$ con la salvedad que $||e|| \neq 1$.

- Demostrar que $||e|| \geq 1$.
- Demostrar que en A existe una norma $\|\cdot\|_{eq}$ equivalente a la norma $\|\cdot\|$ en la que $\|e\|_{eq} = 1$

3.14. Demostrar la propiedad 3.6.

Capítulo 4
Espacios prehilbertianos y de Hilbert

Resumen

El espacio de Hilbert es la generalización a dimensión cualquiera del espacio euclídeo n-dimensional, es decir un espacio vectorial en el que se ha definido un producto escalar. Al producto escalar se le asocia una norma de modo que un espacio con producto escalar en particular es un espacio normado. Los espacios de Hilbert son los espacios con producto escalar que son además completos. La bibliografía recomendada es [1] para una introducción sencilla y también [3].

4.1. Espacios prehilbertianos

En lo que sigue consideraremos espacios prehilbertianos y de Hilbert definidos a partir de un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, puesto que son los que utilizaremos a lo largo de estos apuntes. No obstante indicaremos brevemente la extensión de algunas definiciones y propiedades al caso de espacios vectoriales definidos sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Definición 4.1. *Un espacio prehilbertiano E es un espacio vectorial en el que se ha definido una aplicación*

$$\begin{aligned}(\cdot,\cdot) : E \times E &\to \mathbb{R}\\ x \times y &\to (x\,,y)\end{aligned}$$

llamado producto escalar y que cumple las siguientes propiedades

- *$P1$: Simetría*

$$(x,y) = (y,x) \quad \forall x,y \in E$$

- *$P2$: Linealidad respecto al primer factor*

$$(x+y,z) = (x,y)+(y,z) \quad \forall x,y,z \in E$$
$$(\lambda x,y) = \lambda(x,y) \quad \forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- *P3: Carácter definido positivo*

$$(x,x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

De las propiedades $P1$ y $P2$ se deduce también que el producto escalar es lineal respecto al segundo factor:

$$(x,y+z) = (x,y)+(y,z) \quad \forall x,y,z \in E$$
$$(x,\lambda y) = \lambda(x,y) \quad \forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

es decir, el producto escalar (cuando E es un espacio vectorial real) es una aplicación bilineal.

Todo espacio prehilbertiano es un espacio normado con la norma $\|x\| = (x,x)^{1/2}$. En efecto, las propiedades $N1$ y $N2$ de la definición 3.1 son inmediatas y la demostración de $N3$ se basa en la siguiente desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Teorema 4.1. *En todo espacio prehilbertiano E se cumple*

$$|(x,y)| \leq \|x\|.\|y\| \quad \forall x,y \in E \tag{4.1}$$

donde $\|x\| = (x,x)^{1/2}$

Demostración:

Para todo $x,y \in E$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(x-\lambda y, x-\lambda y) \geq 0$$

de donde $\|y\|^2\lambda^2 - 2\lambda(x,y)+\|x\|^2 \geq 0$. El primer miembro de la desigualdad es un polinomio de segundo grado en λ; para que sea positivo o nulo, su discriminante deberá ser negativo o nulo

$$4(x,y)^2 - 4\|x\|^2.\|y\|^2 \leq 0$$

de donde se obtiene (4.1)

■

Ver el ejercicio 4.1 para el caso de espacios sobre los complejos $\mathbb{C}$.

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz podemos demostrar sin dificultad la propiedad $N3$ de los espacios normados. En efecto,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2$$
$$\|x+y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$$

y sacando la raiz cuadrada positiva obtenemos $N3$.

En el ejercicio 4.2 se dan varios ejemplos de espacios prehilbertianos.

Una propiedad de las normas en un espacio prehilbertiano es la siguiente ley del paraleogramo:

Teorema 4.2. *(Ley del paralelogramo)*
En un espacio prehilbertiano E, para todo $x, y \in E$ se verifica

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{4.2}$$

Demostración:

Tenemos

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \tag{4.3}$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2 \tag{4.4}$$

y restando se obtiene (4.2).

■

La igualdad (4.2) permite expresar el producto escalar en función de la norma. En efecto, restando (4.3) y (4.4) se obtiene

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \tag{4.5}$$

La igualdad (4.2) permite caracterizar los espacios prehilbertianos, más precisamente, un espacio normado cuya norma cumpla (4.2) es un espacio prehilbertiano donde el producto escalar estará definido por (4.5). Véase al respecto el ejercicio 4.3

Comentario 4.1. *En el caso complejo la expresión del producto escalar en función de la norma se conoce como identidad de polarización y es*

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) \tag{4.6}$$

Véase ejercicio 4.4

4.2. Ortogonalidad y Ortonormalidad

El producto escalar permite introducir la noción de ángulo entre dos vectores, en particular la ortogonalidad.

Definición 4.2. *Sea $x, y \in E$ dos elementos de un espacio prehilbertiano. Se dice que x es ortogonal a y si*

$$(x, y) = 0 \tag{4.7}$$

Si x e y tienen norma unidad se les llama ortonormales.

Teorema 4.3. *(de Pitágoras)*

Sea E un espacio prehilertiano y sean x e y dos elementos ortogonales. Entonces se verifica

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \tag{4.8}$$

Más generalmente, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son ortogonales dos a dos, se verifica

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \tag{4.9}$$

Demostración:

Aplicando la definición de ortogonalidad 4.2

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Para demostrar (4.9) procedemos por inducción. Para $n = 2$ es el caso (4.8). Suponiendo válido (4.9) para $n-1$ y aplicando (4.8) a $x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ y a $y = x_n$ resulta

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n-1} x_i\|^2 + \|x_n\|^2$$

y aplicando la hipótesis de inducción obtenemos (4.9)

∎

Naturalmente, de forma inmediata tenemos que si x e y verifican (4.8) entonces x e y son ortogonales.

Definición 4.3. *Una sucesión $(x_n)_n \subset E$ (finita o infinita) de vectores de E se llama sucesión ortogonal si $(x_i, x_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Una sucesión se llama ortonormal cuando es ortogonal y $\|x_n\| = 1$ para todo n.*

Ver el ejercicio 4.5 para varios ejemplos.

Como consecuencia del teorema de Pitágoras 4.3 resulta el siguiente corolario para las sucesiones de vectores ortogonales.

Corolario 4.1. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión de vectores ortogonales y no nulos de un espacio prehilbertiano. Entonces el conjunto de vectores $\{x_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.*

Demostración:

Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = O$. Los vectores $\lambda_i x_i$, $i = 1,2,3,\dots$ son también ortogonales entre sí. Aplicando (4.9),

$$0 = \|O\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \|x_i\|^2$$

Como $\|x_i\| > 0$ para todo i, necesariamente $\lambda_i = 0$ para todo i. ■

Teorema 4.4. *(Desigualdad de Bessel)*

Sea $(x_n)_n$ una sucesión de vectores ortonormales en un espacio prehilbertiano E. Para todo vector $x \in E$ se verifica

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x, x_i)^2 \leq \|x\|^2 \tag{4.10}$$

Demostración:

Para todo $n \in N$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x - \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) x_i\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2(x, \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) x_i) + (\sum_{i=1}^{n} (x, x_i) x_i, \sum_{j=1}^{n} (x, x_j) x_j) \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} (x, x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x, x_i)(x, x_j)(x_i, x_j) \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} (x, x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)^2
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} (x, x_i)^2 \leq \|x\|^2$$

Finalmente tomando el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos (4.10)

■

En el ejercicio 4.6 se generaliza la desigualdad de Bessel para espacios prehilbertianos sobre el cuerpo de los complejos.

Veamos unas primeras relaciones entre conjuntos ortogonales. Empezamos precisando la definición de vector ortogonal a un conjunto dado y de conjuntos ortogonales.

Definición 4.4. *Sea S un subconjunto de un espacio prehilbertiano E. Diremos que $x \in E$ es ortogonal a S si $(x,s) = 0$ para todo $s \in S$ y designaremos mediante $S^{\perp}$ (ortogonal de S) al conjunto de estos puntos x, es decir*

$$S^{\perp} = \{x \in E; \quad (x,s) = 0 \quad \forall s \in S\}$$

Asimismo, si S e I son subconjuntos de un espacio prehilbertiano E, diremos que S es ortogonal a I si

$$(x,y) = 0 \quad \forall x \in S \, \forall y \in I$$

A continuación vemos algunas propiedades de los conjuntos ortogonales.

Teorema 4.5. *Si S es un subconjunto cualquiera de un espacio prehilbertiano E, $S^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de E*

Demostración:

Primero veamos que $S^{\perp}$ es un subespacio vectorial de E. En efecto, $0 \in S^{\perp}$ y además, si $x, y \in S^{\perp}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene para todo $s \in S$

$$(\lambda x + \mu y, s) = \lambda(x,s) + \mu(x,s) = 0$$

Demostremos ahora que $S^{\perp}$ es cerrado: Sea $(x_n)_n$ una sucesión de $S^{\perp}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

tendremos $(x_n, s) = 0$ para todo $s \in S^{\perp}$ y para todo n. De donde pasando al límite $0 = \lim_{n\to\infty}(x_n,s) = (x,s)$ ya que $|(x_n,s) - (x,s)| = |(x_n - x, s)| \leq \|x_n - x\|.\|s\|$.

■

Teorema 4.6. *Si S e I son subconjuntos de un espacio prehilbertiano E, se verifican las siguientes propiedades:*

a) $S \subset S^{\perp\perp}$
b) $S \subset I \Rightarrow I^{\perp} \subset S^{\perp}$
c) $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp}$

Hemos utilizado la notación $(S^{\perp})^{\perp} \equiv S^{\perp\perp}$

Demostración:

a) Sea $x \in S$; para todo $y \in S^{\perp}$ se tiene $(x,y) = 0$ lo que implica que $x \in S^{\perp\perp}$
b) Supongamos $S \subset I$; si $x \in I^{\perp}$ se tiene $(x,y) = 0$ para todo $y \in I$, en particular para todo $s \in S$ tendremos $(x,s) = 0$, es decir $x \in S^{\perp}$.
c) Por la propiedad a) $S \subset S^{\perp\perp}$, aplicando b) $S^{\perp\perp\perp} \subset S^{\perp}$. Por otra parte por a) $S^{\perp} \subset (S^{\perp})^{\perp\perp} = S^{\perp\perp\perp}$

■

En las líneas que siguen nos ocuparemos de la descomposición de un espacio en suma de otros dos.

Teorema 4.7. *Si M y N son subespacios vectoriales de un espacio prehilbertiano E. Si además M y N son ortogonales, entonces todo vector $x \in M+N$ tiene una representación única*

$$x = y + z \quad y \in M \quad z \in N$$

Demostración:

Supongamos que existen dos descomposiciones de $x \in M+N$,

$$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \quad y_1, y_2 \in M \quad z_1, z_2 \in N$$

poniendo $w = y_1 - y_2 = z_2 - z_1$. Resulta que $w \in M$ y también $w \in N$. Como M y N son ortogonales

$$(w,w) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0$$

■

Cuando tengamos una descomposición única como la que se presenta en el anterior teorema, pondremos

$$E = M \oplus N$$

y diremos que E es suma directa de M y N.

4.3. Espacios de Hilbert

4.3.1. Definiciones y propiedades. Proyección sobre un convexo cerrado. Teorema de Riesz-Fréchet

Definición 4.5. *Un espacio prehilbertiano completo se llama espacio de Hilbert.*

En el ejercicio 4.7 se dan varios ejemplos de espacios de Hilbert.

Las líneas que siguen tiene por finalidad el siguiente objetivo: Dado un espacio de Hilbert H y un subespacio N cerrado del mismo queremos descomponer H de la forma $H = N \oplus M$; veremos que M es precisamente el ortogonal de N, $N^{\perp}$. Veremos además que la completitud de H juega un papel esencial.

El siguiente teorema nos asegura la existencia de la proyección de un vector sobre un conjunto convexo cerrado en un espacio de Hilbert.

Teorema 4.8. *Sea K un conjunto convexo y cerrado en un espacio de Hilbert H. Dado $x \in H$ existe un elemento $y_0 \in K$ único tal que*

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in K \tag{4.11}$$

Dicho de otra manera, dado $x \in H$ existe un elemento y_0 de K único cuya distancia a x es mínima, es decir

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$$

A este teorema se le conoce como el de la existencia de la mejor aproximación de un elemento x en un convexo. A esta mejor aproximación y_0 se le llama también proyección de x sobre K.

Demostración:

Llamemos $\delta = \inf_{y \in K} \|x - y\|$ y elijamos una sucesión $(y_n)_n \subset K$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \delta$. Vamos a demostrar que $(y_n)_n$ es una sucesión de Cauchy.

$$\|y_m - y_n\|^2 = \|(y_m - x) + (x - y_n\|^2$$

Aplicando la ley del paralelógramo (4.2)

$$\begin{aligned} &\|(y_m - x) + (x - y_n)\|^2 + \|(y_m - x) - (x - y_n)\|^2 \\ &= 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\|\frac{y_m + y_n}{2} - x\|^2$$

Como K es convexo $1/2(y_m + y_n) \in K$ y por lo tanto

$$\|y_m - y_n\|^2 \le 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\delta^2$$

y pasando al límite cuando $n, m \to \infty$

$$\lim_{n,m\to\infty} \|y_m - y_n\|^2 = 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

La sucesión es de Cauchy y siendo H un espacio de Hilbert la sucesión es convergente. Sea $y_0 = \lim y_n$, como K es cerrado $y_0 \in K$ y

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = \delta = \|y_0 - x\|$$

Finalmente veamos que y_0 es único: Supongamos que z_0 verifica también

$$\|x - z_0\| \le \|x - y\| \quad \forall y \in K \quad z_0 \in K$$

entonces $1/2(y_0 + z_0) \in K$ y podemos poner, utilizando de nuevo la ley del paralelógramo,

$$\begin{aligned}\|y_0 - z_0\|^2 &= 2\|y_0 - x\|^2 + 2\|x - z_0\|^2 - \|y_0 + z_0 - 2x\|^2\\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\|\frac{y_0 + z_0}{2} - x\|^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0\end{aligned}$$

de donde $z_0 = y_0$ ■

El siguiente teorema caracteriza la proyección sobre un convexo.

Teorema 4.9. *Sea K un conjunto convexo y cerrado en un espacio de Hilbert H. Sea y_0 la mejor aproximación de $x \in H$ en K. y_0 está caracterizado por*

$$y_0 \in K \tag{4.12}$$

$$(x - y_0, y - y_0) \leq 0 \quad \forall y \in K \tag{4.13}$$

Denotaremos $y_0 = P_K x$ y llamamos a y_0 proyección de x sobre K.

Demostración:

Sea y un elemento cualquiera de K. Para todo $\lambda \in (0,1)$ pongamos $v = (1-\lambda)y_0 + \lambda y \in K$, resulta

$$\begin{aligned}\|x - y_0\|^2 &\leq \|x - (1-\lambda)y_0 - \lambda y\|^2 = \|(x - y_0) + \lambda(y_0 - y)\|^2\\ &= \|x - y_0\|^2 + 2\lambda(x - y_0, y_0 - y) + \lambda^2\|y_0 - y\|^2\end{aligned}$$

reordenando y dividiendo por λ

$$2(x - y_0, y - y_0) - \lambda\|y_0 - y\|^2 \leq 0$$

pasando al límite cuando $\lambda \longrightarrow 0$

$$(x - y_0, y - y_0) \leq 0 \quad \forall y \in K$$

Recíprocamente, supongamos que y_0 verifica (4.12)- (4.13) Tenemos,

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|(x - y_0) + (y_0 - y)\|^2\\ &= \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 + 2(x - y_0, y_0 - y)\end{aligned}$$

reordenando los términos,

$$\|x - y\|^2 - \|x - y_0\|^2 = \|y_0 - y\|^2 + 2(x - y_0, y_0 - y)$$

Los dos términos en el segundo miembro son mayores o iguales que 0, de donde

$$\|x - y_0\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad \forall y \in K$$

■

Veamos ahora que la proyección sobre un convexo no aumenta las distancias:

Corolario 4.2. *Con las hipótesis del teorema 4.8 se tiene*

$$\|P_K x_1 - P_K x_2\| \leq \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in H \tag{4.14}$$

Demostración:

Aplicando la caracterización (4.12)-(4.13) a $P_K x_1$ y a $P_K x_2$ tendremos para todo $y \in K$

$$(x_1 - P_K x_1, y - P_K x_1) \leq 0$$
$$(x_2 - P_K x_2, y - P_K x_2) \leq 0$$

Eligiendo en la primera en $y = P_K x_2$ y en la segunda $y = P_K x_1$, sumando las desigualdades

$$(x_1 - x_2 + P_K x_2 - P_K x_1, P_K x_2 - P_k x_1) \leq 0$$

reordenando

$$\|P_K x_2 - P_K x_1\|^2 = (P_K x_2 - P_K x_1, P_K x_2 - P_k x_1) \leq (x_1 - x_2, P_K x_1 - P_K x_2)$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|P_K x_2 - P_K x_1\|^2 \leq (x_1 - x_2, P_K x_1 - P_K x_2) \leq \|x_1 - x_2\|.\|P_K x_1 - P_K x_2\|$$

Dividiendo por $\|P_K x_2 - P_K x_1\|$ obtenemos (4.14)

■

En el caso en que el conjunto convexo sea un subespacio cerrado tenemos la siguiente caracterización:

Corolario 4.3. *Sea N un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Sea $x \in N$. Entonces la proyección $y_0 = P_N x$ está caracterizada por*

$$y_0 \in N \tag{4.15}$$
$$(x - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in N \tag{4.16}$$

Además P_K es un operador lineal.

Demostración:

A partir de la caracterización (4.12)- (4.13) tenemos que $y_0 \in N$ verifica

$$(x - y_0, y - y_0) \leq 0 \quad \forall y \in N$$

tomando en lugar de y, $y + y_0 \in N$, resulta

$$(x - y_0, y) \leq 0 \quad \forall y \in N$$

En esta última tomando en el lugar de y, $-y \in N$

$$(x - y_0, y) \geq 0 \quad \forall\, y \in N$$

y de las dos últimas resulta 4.16

Finalmente la linealidad se obtiene de (4.15)- (4.16), en efecto: Sea $y_1 = P_N x_1$ y $y_2 = P_N x_2$, tendremos

$$(x_1 - y_1, y) = 0 \quad \forall\, y \in N$$
$$(x_2 - y_2, y) = 0 \quad \forall\, y \in N$$

sumando

$$((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), y) = 0 \quad \forall\, y \in N$$

es decir $y_1 + y_2 = P_N(x_1 + x_2)$.

Análogamente sea $y_0 = P_N x$ y $\lambda \in R$, tendremos

$$(x - y_0, y) = 0 \quad \forall\, y \in N$$

multiplicando por $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda x - \lambda y_0, y) = 0 \quad \forall\, y \in N$$

de donde $\lambda y_0 = P_N(\lambda x)$

■

En un espacio prehilbertiano vimos que se cumple $S \subset S^{\perp\perp}$ para todo subconjunto del espacio. En general la igualdad no será cierta incluso en el caso en el que S sea un subespacio cerrado. Para tener la igualdad debemos suponer que estamos en un espacio de Hilbert.

Teorema 4.10. *Sea N un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces*

$$H = N \oplus N^{\perp} \quad \text{y} \quad N^{\perp\perp} = N$$

Demostración:

Sea un elemento $x \in H$. Vamos a demostrar que existe una descomposición de la forma

$$x = y_0 + z \quad \text{con} \quad y_0 \in N \quad \text{y} \quad z \in N^{\perp}$$

Esta descomposición será necesariamente única según lo visto en el teorema (4.7) Como N es cerrado y convexo, podemos elegir $y_0 = P_N x \in N$. Hagamos $z = x - y_0$ y demostremos que $z \in N^{\perp}$. Aplicamos el corolario (4.3), tenemos por (4.16)

$$(x - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in N$$

es decir $z = x - y_0 \in N^{\perp}$.

Veamos ahora que $N^{\perp\perp} = N$. Sabemos ya que $N \subset N^{\perp\perp}$. Sea ahora $x \in N^{\perp\perp}$, por la primera parte de este teorema podemos descomponer x de la forma

$$x = y + z \quad \text{con } y \in N \quad z \in N^{\perp}$$

entonces $y \in N \subset N^{\perp\perp}$ y como $x \in N^{\perp\perp}$ resulta $z = x - y \in N^{\perp\perp}$. Por lo tanto z es ortogonal a si mismo, es decir $z = 0$, lo que implica $x = y \in N$.

■

El teorema anterior se puede demostrar en el marco de un espacio prehilbertiano a condición de exigir que N sea un subespacio completo (ejercicio 4.8)

Corolario 4.4. *Si S es un subespacio cualquiera de un espacio de Hilbert, $\overline{S} = S^{\perp\perp}$*

Demostración:

Por una parte $S \subset S^{\perp\perp}$ (véase teorema 4.6). Por otra parte $S \subset \overline{S}$, tomando ortogonales, $(\overline{S})^{\perp} \subset S^{\perp}$. Tomando de nuevo ortogonales, $S^{\perp\perp} \subset (\overline{S})^{\perp\perp} = \overline{S}$ pues $\overline{S}$ es un subespacio cerrado (véase teorema 4.10). Tenemos pues

$$S^{\perp\perp} \subset \overline{S}$$

y como $\overline{S}$ es el subespacio cerrado mínimo que contiene a S,

$$\overline{S} \subset S^{\perp\perp}$$

De donde $\overline{S} = S^{\perp\perp}$.

■

Consideremos ahora el espacio dual $H' = \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R})$ de un espacio de Hilbert H, es decir el espacio vectorial de las aplicaciones lineales continuas de H en $\mathbb{R}$. En un espacio de Banach tenemos en general $E \subset E''$ y a los espacios que cumplen la igualdad los llamamos reflexivos. Todo ello es aplicable a un espacio de Hilbert , es más podemos demostrar que todo espacio prehilbertiano es reflexivo demostrando que es uniformemente convexo (ejercicio 4.9). En un espacio de Hilbert podemos demostrar un resultado mucho más fuerte pues veremos que $H = H'$ en un sentido que tendremos que precisar. Veamos primeramente que $H \subset H'$. Para ello, a todo elemento $y \in H$ le asociamos una forma lineal continua $f_y \in H'$ del modo siguiente,

$$\begin{aligned} f_y : & H \to \mathbb{R} \\ & x \to (x, y) \end{aligned}$$

La aplicación continua así definida es evidentemente lineal, además es continua ya que para todo $x \in H$

$$|f_y(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|.\|y\| = C\|x\| \tag{4.17}$$

Podemos identificar f_y e y (es decir $H \subset H'$) en el siguiente sentido,

$$\begin{aligned} T : & H \to H' \\ & y \to f_y \end{aligned} \tag{4.18}$$

Tenemos que T es lineal. T es inyectiva pues si $f_y = f_z \Rightarrow (x, y) = (x, z)$ para todo $x \in H$ lo que implica que $y = z$. T es además una isometría de H en $T(H)$ ya que (4.17) implica que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} f_y(x) \leq \|y\|$$

tomando

$$x = \frac{y}{\|y\|}$$

obtenemos

$$f_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left(\frac{y}{\|y\|}, y\right) = \|y\|$$

de donde

$$\|f_y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} f_y(x) = \|y\|$$

En el siguiente teorema demostraremos que la aplicación T definida por (4.18) es suprayectiva, y por tanto biyectiva, lo que permite identificar H y H'. La identificación anterior de un espacio de Hilbert con su dual se hará siempre que interese, pero no obligatoriamente. En algunos casos en los que intervengan varios espacios de Hilbert relacionados entre sí, no será posible la identificación de todos ellos con su dual (véase al respecto el ejercicio 4.10).

Teorema 4.11. *(de Riesz-Frechet)*
Si f es una forma lineal continua definida sobre un espacio de Hilbert, existe un único elemento $y \in H$ tal que

$$\langle f, x \rangle = (x, y) \quad \forall x \in H$$

Demostración:

Para mayor claridad en la escritura utilizaremos aquí la notación clásica $f(x)$ para designar $\langle f, x \rangle$. Sea N el núcleo de la forma lineal f que es un subespacio vectorial cerrado de H. Si $N = H$, entonces $f = 0$ y basta tomar $y = 0$. Supongamos pues que $N \neq H$. Por el teorema 4.10 sabemos $H = N \oplus N^\perp$ y por lo tanto $N^\perp \neq 0$; podemos elegir $\tilde{z} \neq 0$ tal que $\tilde{z} \in N^\perp$. Tomando $z = \tilde{z}/f(\tilde{z})$ resulta

$$\begin{aligned} z &\neq 0 \\ z &\in N^\perp \\ f(z) &= 1 \end{aligned}$$

Vamos a construir ahora el elemento y buscado. Dado un elemento cualquiera $x \in H$, se tiene

$$x - f(x)z \in N$$

pues $f(x - f(x)z) = f(x) - f(x) = 0$ y como $z \in N^\perp$, resulta

$$(x - f(x)z, z) = 0$$

de donde

$$f(x) = (x, \frac{z}{(z,z)}) \quad \forall x \in H$$

El elemento buscado es entonces $y = z/(z,z)$ que no depende de x.

Verifiquemos finalmente que y es único. En efecto, sean y_1 e y_2 en H verificando

$$(x, y_1) = (x, y_2) = f(x) \quad \forall x \in H$$

resulta $(x, y_1 - y_2) = 0$ para todo $x \in H$, de donde $y_1 = y_2$.

■

Otras aplicaciones del teorema de proyección

Veamos algunas consecuencias que se pueden obtener de forma sencilla a partir del teorema de proyección. Obtendremos en particular que en un espacio de Hilbert H en el que la bola unidad $B_H = \{v \in H;\ \|v\| \leq 1\}$ sea compacta el espacio es de dimensión finita.

Empezamos con una propiedad de los espacios cociente. Sea H un espacio de Hilbert y N un subespacio cerrado de H. Consideramos el espacio cociente H/N con la norma cociente: Para $\tilde{u} \in H/N$

$$\|\tilde{u}\|_{H/N} = \inf_{u \in \tilde{u}} \|u\| \tag{4.19}$$

Sabemos gracias al teorema 3.8 que si H es completo y N un subespacio cerrado entonces H/N es completo. Veremos que si H es de Hilbert entonces H/N es isométrico al espacio de Hilbert $N^\perp$ y en consecuencia es un espacio de Hilbert con la norma (4.19).

Teorema 4.12. *Sea H un espacio de Hilbert y N un subespacio cerrado de H, la aplicación*

$$H/N \to N^\perp \tag{4.20}$$

$$\tilde{u} \to P_{N^\perp}(u) \quad \forall u \in \tilde{u} \tag{4.21}$$

es una isometría biyectiva.

Demostración:

- La aplicación (4.20)-(4.21) está bien definida:

No depende del representante elegido $u \in \tilde{u}$, en efecto sean $u_1, u_2 \in \tilde{u}$. Consideramos la suma directa $H = N \oplus N^{\perp}$ y la representación de u_1 y u_2

$$u_1 = x_1 + z_1 \quad x_1 \in N \text{ y } z_1 \in N^{\perp}$$
$$u_2 = x_2 + z_2 \quad x_2 \in N \text{ y } z_2 \in N^{\perp}$$

Como u_1 y u_2 pertenecen a la misma clase $\tilde{u}$, $u_1 - u_2 \in N$ y por lo tanto las proyecciones $z_1 = P_{N^{\perp}}(u_1)$ y $z_2 = P_{N^{\perp}}(u_2)$ verifican por una parte $z_1 - z_2 \in N^{\perp}$ y por otra

$$z_1 - z_2 = u_1 - x_1 - u_2 + x_2 = u_1 - u_2 + x_2 - x_1 \in N$$

por lo que necesariamente $z_1 - z_2 = 0$, es decir cualquiera que sea el elemento u de la clase $\tilde{u}$ elegido, su proyección sobre $N^{\perp}$ es la misma.

- La aplicación es una isometría: Sea $u \in \tilde{u}$, y $P_{N^{\perp}}(u)$ la imagen de $\tilde{u}$ por la aplicación (4.20)-(4.21), tenemos

$$\|\tilde{u}\|_{H/N} = \operatorname*{inf}_{v \in N} \|u + v\| = \operatorname*{inf}_{v \in N} \|u - v\| = \|u - P_N(u)\| = \|P_{N^{\perp}}(u)\|$$

Al ser una isometría la aplicación es necesariamente inyectiva y como obviamente es suprayectiva (pues todo $u \in N^{\perp}$ es imagen de la clase que lo contiene) es biyectiva.

■

De forma inmediata obtenemos el siguiente

Corolario 4.5. *H/N es un espacio de Hilbert.*

Demostración:

Como H es de Hilbert y $N^{\perp}$ es un subespacio cerrado, $N^{\perp}$ es un espacio de Hilbert. Para todo $\tilde{u} \in H/N$ la norma cociente (4.19) verifica $\|\tilde{u}\|_{H/N} = \|P_{N^{\perp}}(u)\|$ para todo $u \in \tilde{u}$ y por tanto es una norma hilbertiana.

■

Lema 4.1. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $N \subset H$ un subespacio cerrado tal que $N \neq H$. Entonces*

$$\text{Existe} \quad u \in H \quad \text{tal que} \quad \|u\| = 1 \quad y \quad dist(u, N) \geq 1 \tag{4.22}$$

Demostración:

Sea $v \in H$ con $v \notin N$. Como N es cerrado $d = dist(v, N) > 0$. Elegimos $m_0 \in N$ la proyección sobre N de v. Tendremos

$$d = \|v - m_0\|$$

y tomemos
$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$
u verifica las condiciones requeridas, en efecto si $m \in N$ tenemos

$$\|u - m\| = \|\frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m\| = \frac{1}{\|v - m_0\|}\|v - (m_0 + \|v - m_0\|m)\| \geq \frac{d}{d} = 1$$

ya que $m_0 + \|v - m_0\|m \in N$.

■

Ver el ejercicio 4.11 para una generalización del lema anterior en espacios vectoriales normados.

El teorema de Heine-Borel (véase [10] o el ejercicio 4.12) en $\mathbb{R}$ y su extensión a $\mathbb{R}^d$ o $\mathbb{C}^d$ nos dice que un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ (o $\mathbb{C}^d$) es compacto si y solo si es cerrado y acotado. Un espacio normado E (o más generalmente un espacio vectorial topológico) sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) es homeomorfo a $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{C}^d$). De modo que en un espacio normado de dimensión finita los conjuntos compactos son los conjuntos cerrados y acotados. El siguiente teorema nos dice que esta propiedad es característica de los espacios de dimensión finita. Demostramos el teorema para un espacio de Hilbert y dejamos como ejercicio 4.13 la demostración en espacios normados. De manera general todo espacio vectorial topológico localmente compacto, es decir en el que el origen tiene un entorno cuya adherencia es compacta, tiene dimensión finita (la demostración se puede encontrar en [12]).

Teorema 4.13. *(de Riesz)*
Sea H un espacio de Hilbert en el que la bola unidad $B_H = \{v \in H;\ \|v\| \leq 1\}$ es compacta, entonces H es de dimensión finita.

Demostración:

Razonamos por reducción al absurdo. Si H es de dimensión infinita, existe una sucesión $(H_n)_n$ de subespacios de dimensión finita tales que $H_{n-1} \subsetneq H_n$. Gracias al lema anterior 4.1 se puede construir una sucesión $(u_n)_n$ con $u_n \in H_n$, $\|u_n\| = 1$, y $dist(u_n, H_{n-1}) \geq 1$. En particular tendremos $\|u_n - u_m\| \geq 1$ para $m < n$. Así pues la sucesión no admite ninguna subsucesión convergente y B_H no puede ser un conjunto compacto.

■

4.3.2. Teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram

Teorema 4.14. *(de Stampacchia)*
Sea H un espacio de Hilbert y $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal con las siguientes propiedades

a) Es continua: Existe una constante C tal que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|.\|v\| \quad \forall u,v \in H \tag{4.23}$$

b) Es elíptica: Existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in H \tag{4.24}$$

Sea K un conjunto convexo, cerrado y no vacío de H. Dada $\varphi : H \to \mathbb{R}$ una forma lineal continua, existe un único elemento $u \in K$ tal que

$$a(u,v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad \forall v \in K \tag{4.25}$$

Para demostrar el teorema de Stampacchia haremos uso del siguiente teorema de punto fijo de Banach.

Teorema 4.15. *(de punto fijo de Banach)*
Sea (M,d) un espacio métrico completo y $F : M \to M$ una aplicación tal que

$$d(F(x_1),F(x_2)) \leq L d(x_1,x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in M \quad \text{con } L < 1 \tag{4.26}$$

Entonces F admite un punto fijo único, $x = F(x)$

Demostración:

Sea x_0 un elemento cualquiera del espacio métrico M. Sea $(x_n)_n \subset M$ la sucesión generada de la siguiente forma $x_{n+1} = F(x_n)$ para $n = 0,1,2,\ldots$ Vamos a ver que esta sucesión es de Cauchy, en efecto tenemos

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_n) &= d\big(F(x_n),F(x_{n-1})\big) \leq L d(x_n,x_{n-1}) \\ &\leq L^n d(x_1,x_0) \end{aligned}$$

Sea $m > n$,

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m-1}) + d(x_{m-1},x_{m-2}) + \ldots + d(x_{n+1},x_n) \\ &\leq (L^{m-1} + L^{m-2} + \ldots + L^n) d(x_1,x_0) = L^n (L^{m-1-n} + L^{m-2-n} + \ldots + 1) d(x_1,x_0) \\ &\leq \frac{L^n}{1-L} d(x_1,x_0) \end{aligned}$$

Por tanto cuando $n,m \to \infty$ resulta $d(x_m,x_n) \to 0$ y la sucesión es de Cauchy. Como M es completo la sucesión es convergente. Sea $\lim x_n = x^*$. Pasando al límite en $x_{n+1} = F(x_n)$ como F es continua, $x^* = F(x^*)$. Resulta que x^* es un punto fijo de F. Además es único pues si x^{**} es otro punto fijo tendremos

$$d(x^*,x^{**}) = d\big(F(x^*),F(x^{**})\big) \leq L d(x^*,x^{**})$$

y como $L < 1$ necesariamente $x^* = x^{**}$.

■

Demostración del teorema 4.14:

Por el teorema de representación de Riesz-Fréchet 4.11 existe $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H$$

Por otra parte, para todo $u \in H$ fijado de antemano, la aplicación $v \to a(u, v)$ es una forma lineal continua sobre H, y gracias al teorema de representación de Riesz-Fréchet existe un elemento de H, que denotaremos mediante Au, tal que $a(u, v) = (Au, v)$ para todo $v \in H$. Claramente A es un operador lineal de H en H verificando

$$\|Av\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in H$$
$$(Av, v) \geq \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in H$$

El problema 4.25 consiste ahora en hallar $u \in K$ tal que

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \tag{4.27}$$

Sea $\rho > 0$ una constante que elegiremos adecuadamente más tarde. La desigualdad 4.27 equivale a

$$(\rho(f - Au) + u - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K \tag{4.28}$$

utilizando la caracterización del teorema 4.9 podemos escribir

$$u = P_K(\rho(f - Au) + u)$$

Para todo $v \in K$, definimos la aplicación $Tv = P_K(\rho(f - Av) + v)$. La solución u buscada es un punto fijo de T. Veamos que para $\rho > 0$ convenientemente elegido T es una contracción estricta, es decir existe $L < 1$

$$\|T(v_1) - T(v_2)\| \leq L\|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in K$$

En efecto, gracias a (4.14) tenemos

$$\|T(v_1) - T(v_2)\| \leq \|v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2)\|$$

de donde

$$\begin{aligned}
\|T(v_1) - T(v_2)\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2\|Av_1 - Av_2\|^2 \\
&\leq \|v_1 - v_2\|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2)
\end{aligned}$$

Eligiendo $\rho > 0$ tal que $L^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2 < 1$ (tomando $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$) resulta que T tiene un único punto fijo que es la solución buscada.

Finalmente veamos que la solución de 4.25 es única (y por tanto no depende del valor de ρ). En efecto sean $u_1 \in K$ y $u_2 \in K$ dos soluciones de 4.25

$$a(u_1, v-u_1) \geq \langle \varphi, v-u_1 \rangle \quad \forall v \in K$$
$$a(u_2, v-u_2) \geq \langle \varphi, v-u_2 \rangle \quad \forall v \in K$$

Eligiendo $v = u_2$ en la primera y $v = u_1$ en la segunda y sumando

$$a(u_1 - u_2, u_2 - u_1) \geq 0$$

de donde

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

de donde $u_1 = u_2$.

■

Observación 4.1. *El valor óptimo de ρ es $\rho_{opt} = \frac{\alpha}{C^2}$ que es donde la parábola $L^2(\rho) = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2$ alcanza su valor mínimo $L^2(\rho_{opt}) = 1 - \frac{\alpha^2}{C^2}$.*

Cuando la aplicación $a(\cdot,\cdot)$ del teorema 4.14 es además simétrica el problema (4.25) equivale a un problema de optimización. Más precisamente tenemos el siguiente

Teorema 4.16. *Sea H un espacio de Hilbert y $a(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal verificando las propiedades del teorema 4.14 y que además es simétrica, es decir*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H \tag{4.29}$$

entonces (4.25) es equivalente a

$$\begin{aligned} J(u) &= \min_{v \in K} J(v) \\ u &\in K \end{aligned} \tag{4.30}$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H \tag{4.31}$$

Demostración:

Supongamos que $u \in K$ es solución de (4.30). Para todo $v \in K$ podemos escribir para $0 < \lambda < 1$

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle \leq \frac{1}{2} a(u + \lambda(v-u), u + \lambda(v-u)) - \langle \varphi, u + \lambda(v-u) \rangle$$
$$= \frac{1}{2} a(u, u) + \lambda a(u, v-u) + \frac{1}{2} \lambda^2 a(v-u, v-u) - \langle \varphi, u \rangle - \lambda \langle \varphi, v-u \rangle$$

simplificando y dividiendo por λ

$$0 \leq a(u, v-u) + \frac{\lambda}{2} a(v-u, v-u) - \langle \varphi, v-u \rangle$$

pasando al límite cuando $\lambda \to 0^+$ obtenemos (4.25).

Recíprocamente, supongamos que $u \in K$ verifica (4.25), tenemos

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad \forall v \in K \tag{4.32}$$

$$a(v, v-u) = a(v-u, v-u) + a(u, v-u) \geq a(u, v-u) \quad \forall v \in K \tag{4.33}$$

de donde

$$a(v, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad \forall v \in K \tag{4.34}$$

sumando (4.32) e (4.34) resulta

$$a(u+v, v-u) \geq 2\langle \varphi, v-u \rangle$$
$$a(v,v) - a(u,u) \geq 2\langle \varphi, v \rangle - 2\langle \varphi, u \rangle$$

reordenando obtenemos

$$\frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle \leq \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in K$$

que es (4.30)

■

Observemos que para la demostración de la equivalencia entre (4.25 y (4.30) solo se necesita la propiedad

$$a(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in K$$

que es menos estricta que la elipticidad.

En el caso en el que el conjunto convexo K es todo el espacio obtenemos como corolario del teorema 4.14 el siguiente teorema

Teorema 4.17. *(de Lax-Milgram)*

Sea H un espacio de Hilbert y $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal con las siguientes propiedades:

a) Es continua, es decir verifica (4.23)
b) Es elíptica, es decir verifica (4.24)

Dada $\varphi : H \to \mathbb{R}$ una forma lineal continua, existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H \tag{4.35}$$

Demostración:

Vamos a dar dos demostraciones. La primera es un corolario del teorema de Stampacchia. La segunda es una demostración directa.

Demostración 1:

En (4.27) podemos tomar en lugar de $v \in H$, $2v \in H$ resultando

$$a(u,v) \geq \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Tomando en la anterior en el lugar de v, $-v$

$$a(u,v) \leq \langle \varphi, v\rangle \quad \forall\, v \in H$$

de las dos anteriores deducimos finalmente (4.35)

Demostración 2:

Sea A definido por $a(u,v) = (Au, v) \quad \forall\, v \in H$ como en teorema 4.14. Con las mismas notaciones que en el teorema 4.14 la ecuación (4.35) se puede escribir como: Dada $f \in H$ hallar $u \in H$ tal que $Au = f$. Veremos que A es biyectiva con inversa continua. Tenemos $\|Av\| \geq \alpha\|v\|$, en efecto

$$\|Av\| = \sup_{w\neq 0} \frac{(Av, w)}{\|w\|} \geq \frac{(Av, v)}{\|v\|} \geq \alpha\|v\|$$

por lo que claramente A es inyectiva. Veamos que la imagen de A, $R(A) = \{v \in H;\ v = Az\}$ es cerrada. Sea $w \in \overline{R(A)}$. Sea $(Av_n)_n$ una sucesión en $R(A)$ convergente en H tal que $w = \lim_{n\to\infty} Av_n$. Tenemos

$$\|Av_n - Av_m\| \geq \alpha\|v_n - v_m\|$$

de modo que $(v_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en H. Sea v su límite. Por la continuidad de A tendremos

$$w = \lim_{n\to\infty} Av_n = Av$$

por lo que $w \in R(A)$, lo que prueba que $R(A)$ es cerrado en H.

Veamos ahora que $R(A)^{\perp} = \{0\}$. Sea $v \in R(A)^{\perp}$, tendremos por la definición de A

$$\alpha\|v\|^2 \leq a(v,v) = (Av, v) = 0$$

de donde $v = 0$.

Esto demuestra que A es también sobreyectivo y por lo tanto biyectivo. La relación

$$\|Av\| \geq \alpha\|v\|$$

determina finalmente

$$\|A^{-1}v\| \leq \frac{1}{\alpha}\|v\|$$

de donde A^{-1} es continuo.

■

Comentario 4.2. *En el caso en que $a(\cdot,\cdot)$ sea simétrica el problema de minimización equivalente es*

$$\begin{aligned} J(u) &= \min_{v\in H} J(v) \\ u &\in H \end{aligned} \tag{4.36}$$

con $J(\cdot)$ dada por (4.31).

El teorema de Lax-Milgram es una herramienta útil para resolver ecuaciones en derivadas parciales elípticas, como veremos en el capítulo 7.

4.3.3. Bases Hilbertianas

Consideraremos ahora sucesiones ortonormales en un espacio de Hilbert. Observemos primeramente el siguiente

Lema 4.2. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión ortonormal de vectores en un espacio prehilbertiano y $(\lambda_n)_n$ una sucesión de escalares tales que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$$

Definimos $y_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Entonces la sucesión $(y_n)_n$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración:

Para $p > 0$

$$\begin{aligned} \|y_{n+p} - y_n\|^2 &= \|\sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+p} \|\lambda_i x_i\|^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+p} |\lambda_i|^2 \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty \end{aligned}$$

■

En un espacio de Hilbert, teniendo en cuenta que es un espacio completo tendremos el siguiente corolario:

Corolario 4.6. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión ortonormal de vectores en un espacio Hilbert y $(\lambda_n)_n$ una sucesión de escalares tales $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$ entonces la sucesión $y_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ es convergente a un límite $x \in H$. Escribiremos $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$*

De manera general escribiremos para series convergentes

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

Las propiedades básicas de las sumas infinitas en el espacio de Hilbert están recogidas en el siguiente teorema:

Teorema 4.18. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión ortonormal de vectores en un espacio Hilbert. Supongamos que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ e $y = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i y_i$. Entonces*

a)

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu_i \tag{4.37}$$

b)

$$(x, x_i) = \lambda_i \tag{4.38}$$

c)

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i)|^2 \tag{4.39}$$

Demostración:

a) Consideremos las sumas parciales $s_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ y $t_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i$. Tenemos $s_n \to x$ y $t_n \to y$.

$$\begin{aligned}(s_n, t_n) &= (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (x_i, x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} (\mu_i)^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i)^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (\mu_i)^2\Big)^{1/2} < \infty$$

podemos pasar al límite y obtenemos $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu_i$.

b) (4.38) se obtiene tomando en (4.37) $\mu_i = 1$ y $\mu_j = 0$ para todo $j \neq i$.

c) (4.39) se obtiene haciendo en (4.37) $x = y$.

∎

Definición 4.6. *(Base Hilbertiana)*

Se llama base Hilbertiana a toda sucesión $(e_n)_n$ de elementos de un espacio de Hilbert H tales que

a) $(e_n)_n$ es una sucesión de vectores ortonormales.
b) El espacio engendrado por $(e_n)_n$ es denso en H.

Como consecuencia de esta definición y del teorema 4.18 tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.19. *Sea H un espacio de Hilbert y* $(e_n)_n$ *una base Hilbertiana. Entonces para todo vector* $x \in H$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \tag{4.40}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \tag{4.41}$$

Demostración:

Como el espacio engendrado por $(e_n)_n$ es denso en H, cualquier $x \in H$ se puede expresar como límite de elementos que son combinación lineal finita de elementos de $(e_n)_n$, es decir,

$$x = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n$$

Aplicando el teorema 4.18 de la propiedad (4.38) obtenemos $\lambda_n = (x, e_n)$. De la propiedad (4.39) se obtiene (4.41).

■

El siguiente teorema nos asegura la existencia de bases Hilbertianas para espacios separables.

Teorema 4.20. *Todo espacio de Hilbert separable admite una Base Hilbertiana.*

Demostración:

Sea $(v_n)_n$ un subconjunto numerable denso en un espacio de Hilbert H separable. Sea F_k el subespacio engendrado por $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Los espacios F_k constituyen una sucesión de subespacios de dimensión finita tal que $\cup_{k=1}^{\infty} F_k$ es un conjunto denso en H. Construimos una sucesión ortonormal de la siguiente manera: $e_1 = v_1/\|v_1\|$, es una base ortonormal de F_1. Completamos esta base con un elemento e_2 de F_2 de manera que $\{e_1, e_2\}$ sea una base ortonormal de F_2 y así sucesivamente (utilizando por ejemplo el procedimiento de Gram-Schmidt, ejercicio 4.14). Obtenemos así una Base Hilbertiana de H.

■

4.4. Operadores acotados en el espacio de Hilbert

En este apartado E y F designarán espacios de Hilbert reales. Los resultados se extienden sin dificulad al caso de espacios sobre el cuerpo de los complejos.

Dada una aplicación $T : E \longrightarrow F$ lineal continua vamos a empezar introduciendo la noción de aplicación adjunta.

Teorema 4.21. *Sean E y F espacios de Hilbert y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua de E en F. Entonces existe una única aplicación $T^* : F \longrightarrow E$ lineal y continua tal que*

$$(Tx, y)_F = (x, T^* y)_E \quad \forall x \in E, \; \forall y \in F \tag{4.42}$$

Demostración:

Veamos que T^* está bien definida: Sea $y \in F$ fijo. Consideremos la forma lineal y continua $\varphi_y \in E'$ definida por

$$\begin{aligned} \varphi_y : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \langle \varphi_y, x \rangle = (Tx, y)_F \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Riesz-Frechet 4.11 sabemos que existe un $z \in E$ que depende de y tal que

$$\langle \varphi_y, x \rangle = (z, x)_E = (x, z)_E \quad \forall x \in E$$

Llamamos $z = T^* y$, por lo que finalmente tenemos

$$(Tx, y)_F = (x, T^* y)_E \quad \forall x \in E, \; \forall y \in F$$

T^* así definida es evidentemente lineal y también continua con $\|T^*\| = \|T\|$ ya que

$$\sup_y \sup_x \frac{(T^* y, x)_E}{\|y\|_F . \|x\|_E} = \sup_x \sup_y \frac{(y, Tx)_F}{\|y\|_F . \|x\|_E}$$

■

Dejamos la demostración de las siguientes propiedades como ejercicio.

Propiedad 4.1. *Sean E y F espacios de Hilbert. $T : E \longrightarrow F$ y $S : F \longrightarrow G$ aplicaciones lineales continuas, $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $(T^*)^* = T$
2. $\|T^* T\| = \|T T^*\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$
3. $T^* T = 0$ *si y solo si* $T = 0$
4. $(ST)^* = T^* S^*$
5. *Si T es biyectivo,* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Demostración:

Se deja como ejercicio 4.15

■

Queremos ahora ver las relaciones entre el núcleo de una aplicación y la imagen de la aplicación adjunta (análogamente a las que tenemos en dimensión finita). Estas relaciones son de gran utilidad en las demostraciones de existencia de solución de ecuaciones en espacios de Hilbert. Empezamos con dos lemas previos.

Lema 4.3. *Sean E y F espacios de Hilbert. Sea $T : E \to F$ un aplicación lineal continua. $S \subset E$ y $R \subset F$ verificando*

$$T(S) \subset R$$

entonces

$$T^*(R^\perp) \subset S^\perp$$

Demostración:

Dado $z \in F$ con $z \perp R$, tenemos que demostrar que $T^*z \perp S$. En efecto tendremos si $x \in S$ entonces $Tx \in R$ de donde $0 = (Tx, z) = (x, T^*z)$.

■

Lema 4.4. *Sean E y F espacios de Hilbert. Sea $T : E \to F$ un aplicación lineal continua. M un subespacio cerrado de E y N un subespacio cerrado de F. Entonces*

$$T(M) \subset N \Leftrightarrow T^*(N^\perp) \subset M^\perp \tag{4.43}$$

Demostración:

Sea $T(M) \subset N$ aplicando el lema anterior 4.3

$$T^*(N^\perp) \subset M^\perp$$

Recíprocamente si $T^*(N^\perp) \subset M^\perp$ aplicamos de nuevo el lema 4.3 tomando T^* en el lugar de T,

$$(T^*)^*(M^{\perp\perp}) \subset N^{\perp\perp}$$

Como $(T^*)^* = T$ y $M^{\perp\perp} = M$ y $N^{\perp\perp} = N$ resulta

$$T(M) \subset N$$

■

Teorema 4.22. *Sean E y F espacios de Hilbert. Sea $T : E \to F$ un aplicación lineal continua. Sea $N(T) = \{x \in E;\ Tx = 0\}$ el núcleo de T y $R(T) = \{y \in F;\ y = Tx\}$ el conjunto imagen de T. Se verifican las siguientes propiedades:*

a) $N(T) = R(T^*)^\perp$
b) $N(T^*) = R(T)^\perp$
c) $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$

d) $N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}$

Demostración:

a) Tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
&\forall x \in N(T) \quad Tx = 0 \\
\Leftrightarrow &(Tx, y)_F = 0 \quad \forall x \in N(T) \quad \forall y \in F \\
\Leftrightarrow &(x, T^* y)_E = 0 \quad \forall x \in N(T) \quad \forall y \in F \\
\Leftrightarrow &\forall x \in N(T) \quad x \perp T^* y \quad \forall y \in F \\
\Leftrightarrow &R(T^*)^\perp = N(T) \quad \forall x \in N(T)
\end{aligned}$$

b) Se demuestra como el caso a) intercambiando los roles de T y T^*.
c) Tomando ortogonales en la propiedad a)

$$N(T)^\perp = R(T^*)^{\perp\perp} = \overline{R(T^*)}$$

donde hemos aplicado el corolario 4.4.
d) resulta de c) sustituyendo T por T^*.

■

Del teorema anterior se deducen de forma inmediata las siguientes propiedades:

Corolario 4.7. *Sean E y F espacios de Hilbert. Sea $T : E \to F$ un aplicación lineal continua y sea $T^* : F \to E$ la aplicación adjunta. Se verifica*

a) *T inyectiva $\Rightarrow T^*$ sobreyectiva.*
b) *T^* inyectiva $\Rightarrow T$ sobreyectiva.*
c) *Si $R(T^*)$ es denso en E, entonces T es inyectiva. En particular si T^* es sobreyectiva T es inyectiva.*
d) *Si $R(T)$ denso en F, entonces T^* es inyectiva. En particular si T es sobreyectiva T^* es inyectiva.*
e) *T es biyectiva si y solo si T^* es biyectiva.*

Demostración:

Es inmediato a partir del 4.22

■

El siguiente es un caso particular del teorema de la imagen cerrada de Banach cuando se aplica a operadores acotados en espacios de Hilbert y cuya demostración se deduce a partir del teorema 4.22 y del teorema de la aplicación abierta 3.13.

Teorema 4.23. *Sean E y F espacios de Hilbert. Sea $T : E \to F$ un aplicación lineal continua y sea $T^* : F \to E$ la aplicación adjunta. La siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $R(T)$ *es cerrada en* F
b) $R(T^*)$ *es cerrada en* E
c) $R(T) = N(T^*)^\perp$
d) $R(T^*) = N(T)^\perp$

Demostración:

Aplicando el teorema 4.22:

a) implica c): Si $R(T)$ es cerrada en F, aplicando $N(T^*)^\perp = \overline{R(T)} = R(T)$

c) implica a): Si $N(T^*)^\perp = R(T)$, tenemos que $R(T)$ es cerrada pues el núcleo de una aplicación y su ortogonal son siempre cerrados.

Del mismo modo demostramos b) es equivalente a d)

Falta por demostrar que a) y b) son equivalentes:

Supongamos que se verifica a), es decir $R(T)$ es cerrada. Entonces se verifica c) $R(T) = N(T^*)^\perp$. Representamos E mediante la suma directa $E = N(T) \oplus N(T)^\perp$ y consideremos la restricción de T a $N(T)^\perp$

$$T_1 = T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \to R(T) = N(T^*)^\perp \subset F$$

con $T_1 x = Tx$ para todo $x \in N(T)^\perp$. T_1 es biyectiva (véase ejercicio 4.16) y como es continua la inversa es también continua (véase el corolario 3.9 del teorema de la aplicación abierta 3.13). Entonces para $y = Tx$ con $x \in N(T)^\perp$ tendremos que existe $\beta > 0$ tal que

$$\|y\|_F = \|Tx\|_F = \|T_1 x\|_F \geq \beta \|x\|_E \quad \forall x \in N(T)^\perp$$

Sea ahora,

$$\|y\|_F^2 = (y, y)_F = (Tx, y)_F = (x, T^* y)_E \leq \|x\|_E . \|T^* y\|_E \leq \frac{1}{\beta} \|y\|_F . \|T^* y\|_E$$

de donde finalmente

$$\|y\|_F \leq \frac{1}{\beta} \|T^* y\|_E \tag{4.44}$$

Consideremos ahora la aplicación adjunta $T^* : F \to E$ y su restricción a $N(T^*)^\perp = R(T)$ (pues $(R(T)$ es cerrada)

$$T_1^* = T^*|_{N(T^*)^\perp} : R(T) = N(T^*)^\perp \to R(T^*) \subset E$$

Para todo $y \in R(T)$, tenemos $T_1^* y = T^* y$. También $R(T_1^*) = R(T^*)$ pues para todo $y = y^{(1)} + y^{(2)} \in E$ con $y^{(1)} \in N(T^*)^\perp$ e $y^{(2)} \in N(T^*)$, tenemos $T^* y = T^* y^{(1)} = T_1^* y^{(1)}$.

Vamos a demostrar que $R(T^*) = R(T_1^*)$ es cerrada. En efecto, sea una sucesión $(T^* y_n)_n$ en $R(T^*)$ convergente en E con $y_n \in N(T^*)^\perp = R(T)$ y sea $x = \lim T^* y_n$. Queremos demostrar que $x = T^* y$ para algún $y \in F$. La sucesión $(T^* y_n)_n$ es en particular de Cauchy, utilizando (4.44)

$$\|y_n - y_m\|_F \leq \frac{1}{\beta}\|T^* y_n - T^* y_m\|_E$$

vemos que la sucesión $(y_n)_n$ es de Cauchy en F. Sea $y = \text{lím}\, y_n$. Como T^* es continua

$$x = \text{lím}\, T^* y_n = T^* y$$

lo que prueba que $R(T^*)$ es cerrada.

Del mismo modo demostramos que b) implica a) intercambiando T y T^* en la demostración.

■

Comentario 4.3. *El teorema anterior generaliza el resultado bien conocido en espacios de dimensión finita. En dimensión finita las imágenes de una aplicación lineal continua son siempre cerradas por lo que el teorema anterior es una consecuencia inmediata del teorema 4.22. La condición de imagen cerrada es lo que necesitamos para que en el caso de espacios de Hilbert de dimensión infinita tengamos las mismas propiedades que en el caso de dimensión finta.*

Comentario 4.4. *Con los resultados del teorema 4.22 podemos dar una demostración directa sencilla del teorema de Lax Milgram 4.17:*

Con las mismas hipótesis y notaciones del teorema 4.14 se trata de resolver el problema: Dado $f \in H$ hallar $u \in H$ tal que $Au = f$. Donde $A : H \longrightarrow H$ es el operador lineal continuo definido por las relaciones

$$(Au, v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in H$$

El operador adjunto $A^* : H \longrightarrow H$ estará definido por

$$(u, A^* v) = (Au, v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in H$$

y tenemos inmediatamente las propiedades, para todo $v \in H$:

$$\|Av\| = \sup_{w \in H} \frac{(Av, w)}{\|w\|} \geq \frac{(Av, v)}{\|v\|} = \frac{a(v, v)}{\|v\|} \geq \alpha\|v\| \tag{4.45}$$

y análogamente tendremos

$$\|A^* v\| \geq \alpha\|v\| \tag{4.46}$$

Resulta inmediatamente de (4.45) que A es injectiva y de (4.46) que A^* es inyectiva, es decir $N(A^*) = \{0\}$. Por la propiedad b) del teorema 4.22 $R(A)^{\perp} = \{0\}$, por lo que $R(A) = H$. Es decir A es también suprayectiva y por lo tanto biyectiva. Finalmente la continuidad de A y el teorema de la aplicación abierta 3.13 nos dice que A^{-1} es continua.

4.4.1. Teorema generalizado de Lax-Milgram y problemas cuadráticos con restricciones lineales

En este apartado vamos a considerar dos generalizaciones de teorema de Lax-Milgram utilizando fundamentalmente los resultados de los teoremas 4.22 y 4.23. Empezamos considerando el marco abstracto siguiente: Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert con producto escalar $(\cdot,\cdot)_1$ y $(\cdot,\cdot)_2$ y sus correspondientes normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y sea

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot) : H_1 \times H_2 &\to \mathbb{R} \\ u\ ,\ v &\to a(u,v) \end{aligned}$$

una forma bilineal y continua sobre $H_1 \times H_2$ y

$$\begin{aligned} \varphi : H_2 &\to \mathbb{R} \\ v &\to \langle \varphi, v \rangle \end{aligned}$$

una forma lineal continua sobre H_2.

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Hallar} \quad u \in H_1 \quad \text{tal que} \\ &a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H_2 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Este problema se puede reformular de la siguiente manera utilizando el teorema de representación de Riesz-Frechet 4.11. Definimos el operador $A : \mathcal{L}(H_1, H_2)$ mediante

$$(Au, v)_2 = a(u,v) \quad \forall u \in H_1 \quad \forall v \in H_2$$

y $f \in H_2$ definido por

$$(f, v)_2 = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H_2$$

Entonces el problema (4.47 se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\text{Hallar} \quad u \in H_1 \quad \text{tal que} \\ &Au = f \quad \text{en} \quad H_2 \end{aligned}$$

Teorema generalizado de Lax-Milgram

Teorema 4.24. *Sea el problema 4.47 y supongamos que la aplicación bilineal continua $a(\cdot,\cdot)$ verifica además las propiedades siguientes:*

a) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sup_{v \in H_2;\, v \neq 0} \frac{a(u,v)}{\|v\|_2} \geq \alpha \|u\|_1 \quad \forall u \in H_1 \tag{4.48}$$

b)

$$\sup_{u \in H_1} a(u,v) > 0 \quad \forall v \in H_2 \quad v \neq 0 \tag{4.49}$$

Entonces dada $\varphi \in H_2'$ existe un único $u \in H_1$ verificando (4.47) y además

$$\|u\|_1 \leq \frac{1}{\alpha}\|\varphi\|_{H_2'} \tag{4.50}$$

Demostración:

Por la propiedad a) tenemos

$$\|Au\|_2 = \sup_{v \in H_2;\, v \neq 0} \frac{(Au,v)_2}{\|v\|_2} = \sup_{v \in H_2;\, v \neq 0} \frac{a(u,v)}{\|v\|_2} \geq \alpha\|u\|_1 \quad \forall u \in H_1$$

Razonando como en la segunda demostración del teorema 4.17, obtenemos que A es inyectiva y de imagen $R(A)$ cerrada. Tendremos $\{0\} = N(A) = R(A^*)^\perp$ (propiedad a del teorema 4.22), es decir A^* es sobreyectiva.

Por otra parte de la propiedad b) resulta

$$\sup_{u \in H_1} (u, A^*v)_1 = \sup_{u \in H_1} (Au,v)_2 = \sup_{u \in H_1} a(u,v) > 0 \quad \forall v \in H_2 \; v \neq 0$$

por lo tanto esto implica que si $v \neq 0$, $A^*v \neq 0$, es decir A^* es inyectiva. De modo que A^* es biyectiva y también A es biyectiva (propiedad b del corolario 4.7).

Finalmente como A es continua y biyectiva la inversa de A es continua (corolario del teorema de la aplicación abierta 3.9). Deducimos además de $\|Au\|_2 \geq \alpha\|u\|_1$ que la inversa A^{-1} (poniendo $Au = f$ y $u = A^{-1}f$) verifica

$$\|A^{-1}f\|_1 \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_2 = \frac{1}{\alpha}\|\varphi\|_{H_2'}$$

donde hemos tenido en cuenta la isometría entre un espacio de Hilbert y su dual (véase teorema 4.11).

La unicidad de la solución se sigue de la inyectividad de A.

■

Problemas con restricciones lineales

En este apartado consideraremos dos espacios de Hilbert H y Q con producto escalar $(\cdot,\cdot)_H$ y $(\cdot,\cdot)_Q$ y normas asociadas $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_Q$ respectivamente. Sea $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y continua definida en $H \times H$ de modo que

$$|a(u,v)| \leq \|a\|.\|u\|_H.\|v\|_H \quad \forall u,v \in H$$

A esta forma bilineal le asociamos de la forma habitual un operador lineal continuo $A : H \to H$ definido mediante:

$$(Au, v) = a(u, v) \quad \forall u \in H \quad \forall v \in H$$

de modo que que $\|A\| = \|a\|$, para las normas respectivas en $\mathcal{L}_c(H,H)$ y $\mathcal{B}_c(H\times H, \mathbb{R})$.

Por otra parte sea $b(\cdot,\cdot) : H \times Q \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua definida en $H\times Q$ con

$$|b(v,q)| \leq \|b\|.\|v\|_H.\|q\|_Q \quad \forall v \in H \quad \forall q \in Q$$

Igualmente a esta forma bilineal le asociamos el operador lineal y continuo $B : H \to Q$ definido por

$$(Bv, q)_Q = b(v, q) \quad \forall v \in H \quad \forall q \in Q$$

El operador adjunto de B es el operador lineal continuo $B^* : Q \to H$ definido por

$$(v, B^*q)_H = (Bv, q)_Q = b(v, q) \quad \forall v \in H \quad \forall q \in Q$$

y tenemos $\|B\| = \|B^*\| = \|b\|$ para la normas respectivas $\mathcal{L}_c(H,Q)$, $\mathcal{L}_c(Q,H)$ y $\mathcal{B}_c(H\times Q,\mathbb{R})$.

El problema planteado es ahora el siguiente: Sean $\varphi \in H^{'}$ dual de H y $\chi \in Q'$ dual de Q. Queremos hallar $u \in H$ y $p \in Q$ tales que

$$a(u,v) + b(v,p) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H \tag{4.51}$$

$$b(u,q) = \langle \chi, q \rangle \quad \forall q \in Q \tag{4.52}$$

Gracias al teorema de Riesz-Frechet 4.11 sabemos que existen isometrías $\mathcal{R}_{\mathcal{H}} : H \to H'$ y $\mathcal{R}_Q : Q \to Q'$. Llamemos $f = R_H^{-1}\varphi$ y $g = R_Q^{-1}\chi$. Las ecuaciones (4.51)-(4.52) se pueden escribir de la forma

$$a(u,v) + b(v,p) = (f, v)_H \quad \forall v \in H \tag{4.53}$$

$$b(u,q) = (g,q)_Q \quad \forall q \in Q \tag{4.54}$$

o bien utilizando los operadores asociados

$$Au + B^*p = f \quad \text{en} \quad H \tag{4.55}$$

$$Bu = g \quad \text{en} \quad Q \tag{4.56}$$

La forma anterior generaliza a dimensión infinita el problema asociado a un sistema algebraico de ecuaciones con restricciones lineales.

Veremos ahora bajo que condiciones tenemos existencia y unicidad de solución del anterior problem (4.51)-(4.52). Naturalmente una condición inmediata para que exista solución es que $g \in R(B)$. Primero vamos a considerar un problema reducido asociado: Sea $V = N(B) = \{v \in H;\ Bv = 0\}$ el núcleo de B. Tenemos la siguiente:

Proposición 4.1. *Supongamos que $a(\cdot,\cdot)$ es V-elíptica es decir, existe un $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V \tag{4.57}$$

y que $g \in R(B)$. Entonces existe un único $u \in V$ solución de

$$a(u,v) = (f,v)_H \quad \forall v \in V \tag{4.58}$$

$$Bu = g \tag{4.59}$$

Demostración:

La condición $g \in R(B)$ es obviamente necesaria. Sea $u_g \in H$ tal que $Bu_g = g$ y procedemos por traslación poniendo $u_0 = u - u_g$. Tenemos $Bu_0 = Bu - Bg = 0$, por lo que $u_0 \in V = N(B)$. Sustituyendo en (4.58) el problema es ahora encontrar u_0 tal que

$$a(u_0,v) = (f,v)_H - a(u_g,v) \quad \forall v \in V$$

El teorema de Lax-Milgram 4.17 nos da la solución única u_0. Finalmente $u = u_0 + u_g$ es solución de (4.58)-(4.59) y solo falta verificar la unicidad, es decir que esta solución no depende de la elección de u_g. Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones de (4.58)-(4.59). Tenemos $B(u_1 - u_2) = 0$ por lo que $u_1 - u_2 \in V$. Escribiendo (4.58) para $u = u_1$ y $u = u_2$ y restando

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

tomado $v = u_1 - u_2$,

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_H^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$$

de ahí que $u_1 = u_2$.

■

Queda ahora por resolver el problema de obtener $p \in Q$ en (4.51)-(4.52). Para ello necesitaremos una condición sobre la forma bilineal $b(\cdot,\cdot)$.

Condición **Inf − Sup**

Sea $b(\cdot,\cdot) : H \times Q \to \mathbb{R}$ bilineal continua. Diremos que $b(\cdot,\cdot)$ satisface la condición **Inf − Sup** si existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{v \in H} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q \tag{4.60}$$

Observar que la anterior condición se puede escribir como

$$\inf_{q \in Q} \sup_{v \in H} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H . \|q\|_Q} \geq \beta \tag{4.61}$$

de ahí su nombre. Esta condición se conoce como la condición de Babuška-Brezzi (BB). Observemos que utilizando el operador B^* tenemos

$$\sup_{v\in H} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} = \sup_{v\in H} \frac{(v,B^*q)}{\|v\|_H} = \|B^*q\|_H$$

por lo que la condición 4.60 se puede escribir

$$\|B^*q\|_H \geq \beta\|q\|_Q \quad \forall q \in Q \tag{4.62}$$

El siguiente lema nos da distintas formas equivalentes para esta condición.

Lema 4.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) Existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{v\in H} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} \geq \beta\|q\|_q \quad \forall q \in Q \tag{4.63}$$

b) B^* es un isomorfismo (biyección continua) de Q en $N(B)^\perp$ verificando: Existe $\beta > 0$ tal que

$$\|B^*q\|_H \geq \beta\|q\|_Q \quad \forall q \in Q \tag{4.64}$$

c) B es un isomorfismo (biyección continua) de $N(B)^\perp$ sobre Q verificando: Existe $\beta > 0$ tal que

$$\|Bv\|_H \geq \beta\|v\|_H \quad \forall v \in N(B)^\perp \tag{4.65}$$

Demostración:

Demostraremos a) $\Leftrightarrow$ b) y que b) $\Leftrightarrow$ c)

- a) $\Rightarrow$ b): Supongamos que existe $\beta > 0$ verificando (4.63). Esta condición es equivalente a (4.64). Falta demostrar que B^* es un isomorfismo de Q en $N(B)^\perp$. La condición (4.62) implica que B^* es inyectiva (pues $B^*q = O$ implica que $q = O$) y $R(B^*)$ es cerrado, en efecto: Sea $(B^*q_n)_n$ una sucesión en $R(B^*)$ convergente hacia un elemento $v \in H$. En particular es de Cauchy y tendremos

$$\|q_n - q_m\| \leq \frac{1}{\beta}\|B^*q_n - B^*q_m\| \to 0 \quad \text{para} \quad n,m \to \infty$$

  De modo que la sucesión $(q_n)_n$ es de Cauchy en Q y por tanto convergente hacia un elemento $q \in Q$. Por la continuidad del operador B^*, $v = \lim B^*q_n = B^*q$ de modo que $v \in R(B^*)$. Es decir, $R(B^*)$ es cerrada. Por el teorema de la imagen cerrada de Banach 4.23 resulta $R(B^*) = N(B)^\perp$. Entonces B^* es una biyección bicontinua de Q en $N(B)^\perp$.
- b) $\Rightarrow$ a): Tenemos que existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{v\in H} \frac{b(v,q)}{\|v\|_H} = \sup_{v\in H} \frac{(v,B^*q)}{\|v\|_H} = \|B^*q\| \geq \beta\|q\|_Q \quad \forall q \in Q$$

que es (4.63)

- b) $\Rightarrow$ c): Si B^* es un isomorfismo de Q en $N(B)^\perp$, tendremos $N(B^*) = \{O\}$ y $R(B^*) = N(B)^\perp$ es cerrada, entonces (véase teorema 4.23) B verifica $R(B) = N(B^*)^\perp = Q$, es decir B es suprayectiva. Concluimos que B es un isomorfismo de $N(B)^\perp$ en Q. Ahora la propiedad (4.64) implica poniendo para todo $v \in N(B)^\perp$, $v = B^*q$

$$\|v\|_H \geq \beta \|(B^*)^{-1}v\|_Q$$

de donde

$$\|(B^*)^{-1}\| = \sup_{v \in N(B)^\perp,\, v\neq 0} \frac{\|(B^*)^{-1}v\|}{\|v\|_H} \leq \frac{1}{\beta}$$

y finalmente

$$\|B^{-1}\| = \|(B^{-1})^*\| = \|(B^*)^{-1}\| \leq \frac{1}{\beta}$$

de ahí que

$$\|B^{-1}q\|_H \leq \frac{1}{\beta}\|q\|_Q$$

es decir, renombrando $v = B^{-1}q$,

$$\|Bv\|_Q \geq \beta\|v\|_H \quad \forall v \in N(B)^\perp$$

- c) $\Rightarrow$ b): Basta intercambiar los papeles de B y B^* en la demostración del paso anterior. Si B es un isomorfismo de $N(B)^\perp$ en Q, tenemos que B^* es un isomorfismo Q en $N(B)^\perp$. Ahora la propiedad (4.65) implica para todo $q \in Q$ poniendo $q = Bv$

$$\|q\|_Q \geq \beta\|B^{-1}q\|_H$$

de donde

$$\|B^{-1}\| = \sup_{q\neq 0} \frac{\|B^{-1}q\|_H}{\|q\|_Q} \leq \frac{1}{\beta}$$

y finalmente

$$\|(B^*)^{-1}\| = \|(B^{-1})^*\| = \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\beta}$$

de ahí que

$$\|(B^*)^{-1}v\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\|v\|_H$$

es decir, renombrando $q = (B^*)^{-1}v$,

$$\|B^*q\|_H \geq \beta\|q\|_Q \quad \forall q \in Q$$

■

Estamos en disposición de demostrar la existencia y unicidad de solución del problema (4.51)-(4.52).

Teorema 4.25. *Supongamos que la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ verifica la propiedad de V-elipticidad (4.57) y la forma bilineal $b(\cdot,\cdot)$ verifica la condición* **Inf − Sup** *(4.60). Entonces el problema (4.51)-(4.52) tiene solución única.*

Demostración:

Utilizando el teorema 4.11 podemos escribir el problema de la forma: Dada $f \in H$ y $g \in Q$ hallar $u \in H$ y $p \in Q$ tales que

$$a(u,v) + b(v,p) = (f,v)_H \quad \forall v \in H \tag{4.66}$$

$$b(u,q) = (g,q)_Q \quad \forall q \in Q \tag{4.67}$$

Por la condición **Inf − Sup** (4.60) y el lema 4.5 existe un $u_0 \in N(B)^\perp$ tal que

$$Bu_0 = g \quad \text{y} \quad \|u_0\|_H \leq \frac{1}{\beta}\|g\|_Q$$

Poniendo $w = u - u_0 \in V = N(B)$ la ecuación (4.66) se escribe como

$$a(w,v) = (f,v) - a(u_0,v) \quad \forall v \in V \tag{4.68}$$

Procediendo como en la proposición (4.1), por la V-elipticidad de $a(\cdot,\cdot)$ aplicando el teorema de Lax-Milgram 4.17, existe un único $w \in V$ solución de (4.68). Entonces $u = w + u_0$ es solución de (4.66) que además es única (no depende de la elección de u_0, véase proposición 4.1).

Falta obtener p: Observemos que $f - Au \in N(B)^\perp$. En efecto, para todo $v \in N(B)$

$$(f - Au, v) = (f,v) - a(u,v) = b(v,p) = (Bv,p) = 0$$

La ecuación (4.66) se puede escribir

$$B^* p = f - Au \in N(B)^\perp$$

Utilizando la condición **Inf − Sup** (4.60) y el lema 4.5 sabemos que B^* es un isomorfismo de Q en $N(B)^\perp$ por tanto tiene solución única p y verifica además que $\|p\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\|f - Au\|_H$.

■

En la siguiente proposición se establece la continuidad de la solución respecto a los datos del problema.

Proposición 4.2. *La solución (u,p) del problema (4.51)-(4.52) verifica*

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|\varphi\|_{H'} + \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right)\|\chi\|_{Q'} \tag{4.69}$$

$$\|p\|_q \leq \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right)\|\varphi\|_{H'} + \frac{\|a\|}{\beta^2}\left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right)\|\chi\|_{Q'} \tag{4.70}$$

Demostración:

La demostración se deja como ejercicio 4.17

■

En el caso en que la forma bilineal sea además simétrica, el problema (4.51)-(4.52) equivale a un problema de optimización, más precisamente a un problema de búsqueda de un punto silla. Introducimos la siguientes funcionales $J : H \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{L} : H \times Q \to \mathbb{R}$ definidas por

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v\rangle \tag{4.71}$$

$$\mathcal{L}(v,q) = J(v) + b(v,q) - \langle \chi, q\rangle \tag{4.72}$$

tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.26. *(Equivalencia con un problema de punto silla)*
Si la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica y semidefinida positiva en H, es decir

$$a(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in H$$

entonces el problema de hallar $(u,p) \in H \times Q$ verificando (4.51)-(4.52) es equivalente al siguiente problema de búsqueda de un punto silla: Hallar $(u,p) \in H \times Q$ tales que

$$\mathcal{L}(u,q) \leq \mathcal{L}(u,p) \leq \mathcal{L}(v,p) \quad \forall v \in H \, \forall q \in Q \tag{4.73}$$

Demostración:

Primero veamos que si (u,p) verifica (4.73) entonces verifica (4.51)-(4.52): La primera desigualdad de (4.73) se puede escribir como

$$b(u,q-p) \leq \langle \chi, q-p\rangle \quad \forall q \in Q$$

tomando $q+p$ en el lugar de q, resulta

$$b(u,q) \leq \langle \chi, q\rangle \quad \forall q \in Q$$

tomando $-q$ en el lugar de q

$$b(u,q) \geq \langle \chi, q\rangle \quad \forall q \in Q$$

y de ahí

$$b(u,q) = \langle \chi, q\rangle \quad \forall q \in Q$$

que es (4.52). Recíprocamente, si se verifica (4.52) obviamente se verifica la primera desigualdad de (4.73).

Veamos ahora que la segunda desigualdad de (4.73) equivale a (4.51). En efecto esta desigualdad es

$$J(u)+b(u,p)-\langle\varphi,u\rangle \le J(v)+b(v,p)-\langle\varphi,v\rangle \quad \forall v\in H$$

es decir se trata de obtener el mínimo de la función

$$v\in H \to \frac{1}{2}a(v,v)-\langle\varphi,v\rangle+b(v,p)\in\mathbb{R}$$

que es una función suma de una parte cuadrática $v\to\frac{1}{2}a(v,v)$ y una parte lineal $v\to-\langle\varphi,v\rangle+b(v,p)$. Procediendo como en el teorema (4.16) y teniendo en cuenta que en este caso estamos minimizando en todo el espacio H obtenemos que este problema de minimización es equivalente a (4.51).

■

4.5. Teoría espectral de operadores autoadjuntos compactos

En muchas aplicaciones del análisis funcional la noción de operador compacto y operador autoadjunto juegan un papel esencial. En particular en los problemas de valores propios asociados a ecuaciones diferenciales (problema de Sturm-Liouville) y ecuaciones en derivadas parciales son de gran importancia en física e ingeniería, por ejemplo en mecánica, los problemas de vibraciones de una estructura. En el capítulo 3 se han estudiado en el marco abstracto de un álgebra de Banach las nociones de espectro, conjunto resolvente y la noción de valor propio de un operador. En particular se ha visto que el espectro es un conjunto compacto y que el conjunto de valores propios de un operador está contenido en el espectro. Sin embargo hay operadores que no tienen valores propios como se pone de manifiesto en el ejemplo a continuación del teorema 3.19. Los operadores autoadjuntos compactos serán suficientes para nuestros propósitos en este libro.

En lo que sigue trabajaremos con espacios de Hilbert aunque las definiciones y buena parte de los resultados son válidos en espacios más generales, en particular en espacios de Banach.

Definición 4.7. *Sean E y F espacios de Banach. Sea $B_E=\{x\in E;\ \|x\|\le 1\}$. Diremos que un operador $T\in\mathcal{L}_c(E,F)$ es compacto si $T(B_E)$ es relativamente compacto en F, es decir la adherencia de $T(B_E)$ es un conjunto compacto en F.*

Observación 4.2. *La definición anterior es equivalente a decir que $T\in\mathcal{L}_c(E,F)$ es compacto si y solamente si toda sucesión acotada $(x_n)_n$ en E la sucesión $(Tx_n)_n$ en F contiene una subsucesión $(Tx_{n_k})_{n_k}$ convergente hacia un punto de F.*

Demostración:

Aplicamos el corolario 1.6 a $T(B_E)$.

■

Comentario 4.5. *Los operadores compactos se llaman también operadores completamente continuos.*

Observaciones 4.1. *Tenemos:*

- *El operador cero es compacto, en efecto sea $T : E \longrightarrow F$ tal que $T(x) = 0\ \forall x \in E$ y tenemos que el conjunto $\{0\}$ es compacto en F.*
- *Si E es de dimensión infinita el operador identidad I no es compacto. En efecto, $I(B_E) = B_E$ no es compacto (teorema 4.13 si E es de Hilbert o el ejercicio 4.13 si E es de Banach)*

Teorema 4.27. *El conjunto de operadores compactos es un subespacio cerrado de $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$*

Demostración:

Tenemos que el operador cero es compacto.

Si T es compacto λT es compacto para todo escalar λ pues si $Tx_{n_k} \longrightarrow y$, tendremos $(\lambda T)x_{n_k} = \lambda T(x_{n_k}) \longrightarrow \lambda y$.

Si T y S son compactos $T+S$ es compacto: En efecto sea $(x_n)_n$, tal que $\|x_n\| \leq 1$, el problema consiste en hallar una subsucesión parcial convergente de $(Tx_n + Sx_n)_n$. Pasando a una subsucesión $(x_{n_k})_{n_k}$ podemos suponer que $Tu_{n_k} \longrightarrow u$ y pasando una subsucesión de la anterior (que llamaremos también $(x_{n_k})_{n_k}$) podemos suponer que $Su_{n_k} \longrightarrow v$, de modo que $(T+S)x_{n_k} \longrightarrow u+v$.

Veamos finalmente que es un subespacio cerrado: Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores compactos tales que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ para algún $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$. Queremos demostrar que T es compacto. Sea B_E la bola unidad de centro el origen de E. Basta demostrar que $T(B_E)$ es relativamente compacto y como estamos en un espacio métrico completo basta demostrar que $T(B_E)$ es totalmente acotado (véase corolario 1.7) es decir basta ver que $T(B_E)$ se puede recubrir con un número finito de bolas abiertas $B_F(y_i,\varepsilon)$; $i = 1,\ldots,n$. Tenemos por una parte que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $\|T_n - T\| < \varepsilon/2$. Fijemos $n > n_0$, como T_n es un operador compacto, $T_n(B_E)$ es relativamente compacto y por estar en un espacio métrico completo es totalmente acotado, por lo tanto se puede recubrir con un número finito de bolas abiertas $B_F(y_i,\varepsilon/2)$; $i = 1,\ldots,n$. Dado ahora un elemento cualquiera $x \in B_E$,

$$\begin{aligned}\|T(x) - y_i\| &= \|T(x) - T_n(x) - y_i + T_n(x)\| \leq \|T_n(x) - T(x)\| + \|T_n(x) - y_i\| \\ &\leq \|T_n - T\| + \|T_n(x) - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

por lo tanto $T(B_E)$ está recubierto por un número finito de bolas, a saber $B_F(y_i,\varepsilon)$; $i = 1,\ldots,n$

■

Teorema 4.28. *Un operador con imagen de dimensión finita es compacto.*

Demostración:

Sea $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$. La adherencia de $T(B_E)$ es cerrada y acotada y si el espacio imagen de T es de dimensión finita, $T(B_E)$ es relativamente compacta pues en un espacio de dimensión finita los conjuntos cerrados y acotados son compactos(véase ejercicio 4.12).

■

Corolario 4.8. *Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores con imagen de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ tales que $\|T_n - T\| \to 0$, entonces T es compacto.*

Demostración:

Demostración inmediata a partir del teorema 4.27 y el teorema 4.28.

■

Teorema 4.29. *Si $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ es un operador compacto y $S \in \mathcal{L}_c(F,G)$ entonces $S \circ T$ es compactos. (Respectivamente si $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ y $S \in \mathcal{L}_c(F,G)$ es un operador compacto, $S \circ T$ es compacto)*

Demostración:

Supongamos T compacto y S no necesariamente compacto. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en B_E y $(x_{n_k})_{n_k}$ una subsucesión tal que $Tx_{n_k} \to y \in F$ (esta sucesión existe pues T es compacto). Como S es continua, $S(Tx_{n_k}) \to Sy$, por tanto $S \circ T$ es una aplicación compacta de E en G.

Respectivamente sea $(x_n)_n$ una sucesión en B_E de modo que $(Tx_n)_n$ es una sucesión acotada en F. Como S es compacto existe una subsucesión $(Tx_{n_k})_{n_k}$ tal que $S(Tx_{n_k})$ es convergente en G.

■

En el contexto más general de las álgebras de Banach ya vimos que el espectro $\sigma(T)$ de un operador es compacto y verifica que $\sigma(T)$ está contenido en la disco del plano complejo de centro el origen y radio $\|T\|$ (véase el teorema 3.18). En el caso en el que cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$ entonces $\sigma(T) \in [-\|T\|, +\|T\|]$.

Terminamos con un teorema relativo a los operadores compactos y que generaliza a estos espacios las propiedades de los operadores lineales en dimensión finita. Las siguientes propiedades conocidas como alternativa de Fredholm las demostraremos para el caso de espacios de Hilbert, aunque es también válida en espacios de Banach

Teorema 4.30. *(Alternativa de Fredholm)*

Sea H de Hilbert y $T \in \mathcal{L}_c(H)$ un operador compacto de H en H. Entonces

a) $N(I-T)$ *es de dimensión finita.*
b) $R(I-T)$ *es cerrada y en consecuencia* $R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$
c) $N(I-T) = O \Leftrightarrow R(I-T) = E$

Demostración:

a) Sea $H_1 = N(I-T)$ entonces $B_{H_1} \subset T(B_H)$. En efecto si $x \in B_{H_1}$, tenemos $\|x\| \leq 1$ y $x = Tx$ por lo que $x \in T(B_H)$. Por lo que B_{H_1} es compacta y $H_1 = N(I-T)$ es de dimensión finita gracias al teorema de Riesz 4.13.
b) Si $R(I-T)$ es cerrada, $R(I-T) = N(I-T^*)^\perp$ gracias al teorema 4.23. Veamos que $R(I-T)$ es cerrada: Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $f_n = u_n - Tu_n \to f$. Queremos demostrar que $f \in R(I-T)$. Pongamos $d_n = dist(u_n, N(I-T))$. Como $N(I-T)$ es de dimensión finita (en particular es un subespacio cerrado de H) existe $v_n \in N(I-T)$ tal que $d_n = \|u_n - v_n\| = dist(u_n, N(I-T))$. Tenemos, ya que $v_n = Tv_n$,

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n) \tag{4.74}$$

Veamos que $\|u_n - v_n\|$ permanece acotada. Razonando por reducción al absurdo supongamos que existe una subsucesión tal que $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \to \infty$. Poniendo

$$w_n = \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$$

tendremos utilizando (4.74)

$$\begin{aligned} w_{n_k} - Tw_{n_k} &= \frac{u_{n_k} - v_{n_k} - T(u_{n_k} - v_{n_k})}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} \\ &= \frac{f_{n_k}}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} \to 0 \quad \text{cuando } n_k \to \infty \end{aligned}$$

ya que f_n es una sucesión convergente y por lo tanto acotada.
Extrayendo de nuevo una subsucesión que llamaremos también $(w_{n_k})_{n_k}$, podemos suponer que $Tw_{n_k} \to z$ (pues $\|w_{n_k}\| = 1$ y T es compacto). De modo que

$$\text{lím}(w_{n_k} - Tw_{n_k}) = 0 \Rightarrow \text{lím}\, w_{n_k} = \text{lím}\, Tw_{n_k} = z$$

de modo que $\text{lím}\, Tw_{n_k} = Tz$ de modo que $z = Tz$ es decir, $z \in N(I-T)$.
Por otra parte por la caracterización de la proyección en un subespacio, v_n está caracterizado por

$$(u_n - v_n, s) = 0 \quad \forall s \in N(I-T)$$

de donde

$$\left(\frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}, s\right) = (w_n, s) = 0 \quad \forall s \in N(I-T)$$

pasando al límite resulta

$$(z, s) = 0 \quad \forall s \in N(I-T)$$

es decir $z \in N(I-T)^{\perp}$ y como $z \in N(I-T)$ necesariamente $z = 0$ lo que está en contradicción con $\text{lím}\, w_{n_k} = z$, pues $\|w_{n_k}\| = 1$.
Por tanto $\|u_n - v_n\|$ permanece acotado y como T es compacto se puede extraer una subsucesión tal que $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \to l$. Deducimos de (4.74) $u_{n_k} - v_{n_k} \to f + l$. Poniendo $g = f + l$ y resumiendo tenemos

$$\text{lím}(u_{n_k} - v_{n_k}) = f + \text{lím}\, T(u_{n_k} - v_{n_k}) = f + l = g$$
$$l = \text{lím}\, T(u_{n_k} - v_{n_k}) = T(\text{lím}(u_{n_k} - v_{n_k})) = Tg$$

así que $l = Tg$ y finalmente $g - l = g - Tg = f$, es decir $f \in R(I-T)$.

c) Demostremos primeramente $N(I-T) = \{0\} \Rightarrow R(I-T) = H$:
Razonamos por reducción al absurdo y supongamos que

$$H_1 = R(I-T) \neq H$$

H_1 es un subespacio de Hilbert (pues por la propiedad b, $R(I-T)$ es cerrada). Veamos que $T(H_1) \subset H_1$, en efecto

$$\text{si } x \in T(H_1) \Rightarrow x = Ty \quad \text{con } y \in H_1$$

$y \in H_1$ quiere decir $y = z - Tz$ de donde

$$x = T(z - Tz) = Tz - T(Tz) = (I-T)(Tz) \in H_1$$

La restricción de T a H_1 es también un operador compacto (la restricción de un operador compacto a un subespacio es obviamente compacta). Pongamos $H_2 = (I-T)(H_1)$ es un subespacio cerrado de H_1. Además $H_2 \neq H_1$, en efecto si $H_2 = H_1$ tendríamos

$$H_1 = (I-T)(H_1)$$
$$H_1 = (I-T)(H)$$

es decir, como $(I-T)$ es inyectiva, pues el núcleo es cero, $I-T$ es biyectiva de H_1 en H_1. Entonces si elegimos $x \in H$ tal que $x \notin H_1$ y ponemos $y = (I-T)x \in H_1$, tomando la inversa de esta imagen $x = (I-T)^{-1}y \in H_1$ pues $I-T$ es biyectiva sobre H_1, lo que contradice la elección de x. Así pues tendremos $H_2 \subsetneq H_1$.
Reiteramos el procedimiento, construyendo $H_n = (I-T)^n(H)$ y obtenemos una sucesión estrictamente decreciente de subespacios cerrados. Gracias al lema 4.1 existe una sucesión $(u_n)_n$ tal que $u_n \in H_n$, $\|u_n\| = 1$ y $dist(u_n, H_{n+1}) \geq 1/2$. Tenemos

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m)$$

para $n > m$, $H_{n+1} \subset H_n \subset H_{m+1} \subset H_m$ y por lo tanto

$$z = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in H_{m+1}$$

de manera que

$$\|Tu_n - Tu_m\| = \|z - u_m\| \geq dist(u_m, H_{m+1}) \geq \frac{1}{2}$$

lo cual es absurdo pues T es compacto. Así pues $R(I-T) = H$.
Recíprocamente, demostremos $R(I-T) = H \Rightarrow N(I-T) = \{0\}$:
Si $R(I-T) = H$ entonces $N(I-T^*) = R(I-T)^\perp = \{0\}$ (teorema 4.22). Admitamos provisionalmente que T^* es compacto (véase la observación 4.3 a continuación). Aplicando el razonamiento anterior a T^* concluimos que $R(I-T^*) = H$ y aplicando el teorema 4.22 concluimos $N(I-T) = R(I-T^*)^\perp = \{0\}$.

■

Observación 4.3. *En general si $T : E \to F$ es un operador compacto $T^* : F \to E$ es también compacto. La demostración general para operadores compactos entre espacios de Banach se puede encontrar en [3]. En el ejercicio 4.18 se propone la demostración para operadores $T \in \mathcal{L}_c(H)$ normales y compactos. Un operador $T \in \mathcal{L}_c(H)$ es normal si $TT^* = T^*T$.*

Espectro y valores propios de los operadores compactos

En este apartado H será un espacio de Hilbert sobre el cuerpo de los números reales y $T \in \mathcal{L}_c(H)$ un operador lineal continuo de H en H.

Recordemos que si $T \in \mathcal{L}_c(H)$ es un operador y λ es un escalar tal que existe $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$, λ se dice que es un valor propio de T y x un vector propio. El núcleo $N_T(\lambda)$ del operador $T - \lambda I$ es un subespacio cerrado de H.

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la propiedad a) vista en el teorema 4.30).

Corolario 4.9. *Sea $T \in \mathcal{L}_c(H)$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$ un escalar tal que $Tx = \lambda x$ entonces $N_T(\lambda) = \{x \in H\ ; Tx = \lambda x\}$ es de dimensión finita.*

Demostración:

Si T es compacto, $\frac{1}{\lambda}T$ es compacto de donde el núcleo de $I - \frac{1}{\lambda}T$ que es el mismo que el núcleo $N_T(\lambda) = \{x \in H\ ; Tx = \lambda x\}$ es de dimensión finita (teorema 4.30)

■

En el ejercicio 4.19 se propone una demostración directa del anterior corolario utilizando la caracterización mediante subsucesiones de un conjunto compacto.

Tenemos también que vectores propios asociados a valores propios diferentes son linealmente independientes, más precisamente:

Propiedad 4.2. *Sean e_i, $i = 1, \ldots, n$, n vectores propios asociados respectivamente a los valores propios λ_i, $i = 1, \ldots, n$ todos ellos diferentes entre sí, entonces $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son linealmente independientes.*

Demostración:

Procedemos por inducción sobre n:

- Sean e_1 y e_2, tales que $Te_1 = \lambda_1 e_1$ y $Te_2 = \lambda_2 e_2$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Supongamos por reducción al absurdo que $e_2 = \alpha e_1$. Tendremos

$$Te_2 = \lambda_2 e_2 = T(\alpha e_1) = \alpha T e_1 = \alpha \lambda_1 e_1$$

de donde $\lambda_2 e_2 = \alpha \lambda_2 e_1 = \alpha \lambda_1 e_1$ y entonces $\alpha(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$, lo que implica $\alpha = 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y entonces $e_2 = 0$, no sería un vector propio.
- Supongamos que la propiedad es cierta para n. Vamos a demostrar que entonces es cierta para $n+1$: Sean $e_1, e_2, ..., e_n$ como en el enunciado y supongamos que hemos demostrado que son independientes. Sea ahora e_{n+1} y λ_{n+1} tales que $Te_{n+1} = \lambda_{n+1} e_{n+1}$ con $\lambda_{n+1} \neq \lambda_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Supongamos por reducción al absurdo que

$$e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

tendremos,

$$Te_{n+1} = \lambda_{n+1} e_{n+1} = \lambda_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+1} \alpha_i e_i$$

y también

$$Te_{n+1} = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_i) \alpha_i e_i = 0$$

Como los $e_1, \ldots, e_n$ son linealmente independientes, se tiene necesariamente que

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_i)\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

de ahí que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces $e_{n+1} = 0$ y no puede ser vector propio.

■

En el caso de un espacio sobre el cuerpo de los reales tendremos que el conjunto resolvente es (observación 3.2)

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R};\ (T - \lambda I) \text{ es biyectivo de } H \text{ sobre } H\}$$

El espectro $\sigma(T)$ es el complementario del conjunto resolvente

$$\sigma(T) = (\rho(T))^c$$

Decimos que λ es un valor propio de T si

$$N(T-\lambda I)=\{\lambda\in\mathbb{R};\ Tx=\lambda x\}\neq\{0\}$$

Por la propias definiciones $VP(T)\subset\sigma(T)$, aunque en general la inclusión es estricta (véase el ejemplo a continuación del teorema 3.19).

En el teorema 3.18 hemos demostrado que en toda álgebra compleja se verifica que el espectro $\sigma(x)$ está contenido en el disco del plano complejo de centro el origen y radio $\|x\|$. En el caso en que H es un espacio sobre $\mathbb{R}$ tendremos igualmente que $\sigma(T)$ es un conjunto compacto y

$$\sigma(T)\subset[-\|T\|,+\|T\|]$$

Ver al respecto en el ejercicio 4.20 una demostración directa en el caso de un álgebra de operadores.

Pasamos ahora a estudiar las propiedades del espectro y de los valores propios de un operador compacto. Empezamos con un lema.

Lema 4.6. *Sea H un espacio de Hilbert real de dimensión infinita. Sea $T\in\mathcal{L}_c(H)$ un operador compacto de H en H. Sea una sucesión $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de valores propios todos distintos y $\lambda_n\neq 0$ para todo n tales que*

$$\lambda_n\to\lambda\quad\text{cuando}\quad n\to\infty$$

Entonces $\lambda=0$.

Demostración:

Sea e_n un vector propio asociado al valor propio λ_n, y sea H_n el espacio vectorial engendrado por $[e_1,e_2,...,e_n]$. Tenemos que $H_n\subsetneq H_{n+1}$ para todo n. En efecto, sabemos por la propiedad 4.2 que los vectores $e_1,e_2,...e_n$ son linealmente independientes. Por otra parte $(T-\lambda_n I)H_n\subset H_{n-1}$ ya que para $x\in H_n$, $x=\sum_{i=1}^n\alpha_i e_i$ y tendremos

$$Tx-\lambda_n x=T(\sum_{i=1}^n\alpha_i e_i)-\lambda_n\sum_{i=1}^n\alpha_i e_i=\sum_{i=1}^n\alpha_i(\lambda_i-\lambda_n)e_i=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(\lambda_i-\lambda_n)e_i\in H_{n-1}$$

Aplicando el lema 4.1 construimos una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $x_n\in H_n$ y $\|x_n\|=1$ y la distancia $d(x_n,H_{n-1})\geq\frac{1}{2}$ para $n\geq 2$. Sean $2\leq m<n$ de manera que

$$H_{m-1}\subset H_m\subset H_{n-1}\subset H_n$$

Tenemos,

$$\begin{aligned}&\|\frac{Tx_n}{\lambda_n}-\frac{Tx_m}{\lambda_m}\|=\|\frac{Tx_n-\lambda_n x_n}{\lambda_n}-\frac{Tx_m-\lambda_m x_m}{\lambda_m}+x_n-x_m\|\\&\geq dist(x_n,H_{n-1}\geq\frac{1}{2}\end{aligned}$$

pues

$$\frac{Tx_n - \lambda_n x_n}{\lambda_n} - \frac{Tx_m - \lambda_m x_m}{\lambda_m} - x_m \in H_{n-1}$$

Por una parte como T es compacto y $\|x_n\| = 1$ para todo n, existe una subsucesión convergente $(Tx_\nu)_\nu$. Tendremos $Tx_\nu \to y$ para algún $y \in H$. Por otra parte si $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, tendríamos también $\lambda_\nu \to \lambda \neq 0$ y en consecuencia la sucesión

$$\frac{Tx_\nu}{\lambda_\nu} \to \frac{y}{\lambda}$$

En particular $(\frac{Tx_\nu}{\lambda_\nu})_\nu$ es de Cauchy en contradicción con

$$\|\frac{Tx_n}{\lambda_n} - \frac{Tx_m}{\lambda_m}\| \geq \frac{1}{2}$$

De modo que necesariamente $\lambda = 0$.

■

Teorema 4.31. *Sea H un espacio de Hilbert real de dimensión infinita. Sea $T \in \mathcal{L}_c(H)$ un operador compacto de H en H. Tenemos las siguientes propiedades*

a) $0 \in \sigma(T)$
b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$
c) Tenemos una de las situaciones siguientes

- *Bien* $\sigma(T) = \{0\}$
- *o bien* $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$ *es finito*
- *o bien* $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$ *es una sucesión que tiende a* 0.

Demostración:

a) Supongamos que $0 \notin \sigma(T)$, es decir $0 \in \rho(T)$, que quiere decir que $T - 0I = T$ es biyectiva. Por tanto $I = T \circ T^{-1}$ es compacto según el teorema 4.29. Entonces la bola unidad $B_H = \{x \in H;\ \|x\| \leq 1\}$ será compacta en contradicción con que H sea de dimensión infinita.
b) Si λ es un valor propio sabemos que $\lambda \in \sigma(T)$. Sea $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $\lambda \neq 0$. Veamos que λ es un valor propio. Procedemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que $N(T - \lambda Id) = \{O\}$. Entonces por el teorema 4.30 tendremos $R(T - \lambda Id) = H$ es decir $T - \lambda I$ es biyectiva y $\lambda \in \rho(T)$ lo que es absurdo.
c) Por la propiedad b) si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, entonces λ es valor propio. Podemos pues aplicar el lema 4.6. Para todo entero $n \geq 1$ consideremos el conjunto

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{R};\ |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

Este conjunto es o bien vacío o finito, pues si contuviese una infinidad de puntos distintos, al ser $\sigma(T)$ compacto, tendría un punto de acumulación en contradicción con el lema 4.6.

Si $\sigma(T) = \{0\}$ entonces $\sigma(T) \setminus \{0\} = \emptyset$. En caso contrario, consideremos el conjunto $\Lambda_n = \{\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\};\ |\lambda_n| \geq \frac{1}{n}\}$. Si a partir de un n determinado Λ_n es vacío estamos en la situación en el que $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es finito. Si ninguno de los conjuntos Λ_n es vacío, podemos ordenar estos conjuntos, $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots$. Cada uno de estos conjuntos es finito. Entonces ordenamos el conjunto de valores de $\sigma(T) \setminus \{0\}$, poniendo, ordenados de mayor a menor, primero los valores de Λ_1, a continuación los de Λ_2 que no están en Λ_1, a continuación los de Λ_3 que no están en Λ_2, y así sucesivamente. Construimos así una sucesión de los elementos de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ ordenados de mayor a menor que tiende a 0.

■

Observación 4.4. *En la demostración de la parte b) y con referencia al teorema 4.30 hemos utilizado que si T es compacto también $\frac{1}{\lambda}T$ es compacto. Además $N(T - \lambda Id) = N(\frac{1}{\lambda}T - Id)$ y $R(T - \lambda Id) = R(\frac{1}{\lambda}T - Id)$.*

Espectro y valores propios de los operadores autoadjuntos

Definición 4.8. *Sea H un espacio de Hilbert. Decimos que un operador $T \in \mathcal{L}_c(H)$ es autoadjunto si $T = T^*$ es decir,*

$$(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H$$

Veamos algunas propiedades del espectro y de los valores propios de un operador autoadjunto:

Teorema 4.32. *Sea H un espacio de Hilbert real o complejo. Si T es un operador autoadjunto entonces*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Tx, x)|$$

Demostración:

Lo demostraremos en el caso de un espacio H de Hilbert real. Llamemos $M = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Tx, x)|$. Para todo $x \in H$ con $\|x\| \leq 1$,

$$|(Tx, x)| \leq \|T\|.\|x\|^2 \leq \|T\|$$

tomando el supremo para todo $x \in H$ con $\|x\| \leq 1$ obtenemos $M \leq \|T\|$.

Demostremos ahora que $\|T\| \leq M$: Como T es autoadjunto $(Tx, y) = (x, Ty)$, de donde

$$(T(x+y),x+y) = (Tx,x)+2(Tx,y)+(Ty,y)$$
$$(T(x-y),x-y) = (Tx,x)-2(Tx,y)+(Ty,y)$$

restando obtenemos la igualdad (del tipo igualdad de polarización)

$$(Tx,y) = \frac{1}{4}\big((T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)\big)$$

de donde

$$|(Tx,y)| \le \frac{1}{4}\big(|(T(x+y),x+y)|+|(T(x-y),x-y)|\big) \tag{4.75}$$

Por definición de M, para cualquier x,

$$|(T(\frac{x}{\|x\|}),\frac{x}{\|x\|})| \le M$$

de donde $|(Tx,x)| \le M\|x\|^2$ de modo que para $x+y$ y para $x-y$

$$|(T(x+y),x+y)| \le M\|x+y\|^2 \quad \text{y} \quad |(T(x-y),x-y)| \le M\|x-y\|^2$$

sustituyendo estas últimas desigualdades en (4.75)

$$|(Tx,y)| \le \frac{1}{4}(M\|x+y\|^2+M\|x-y\|^2)$$

y aplicando la igualdad del paralelógramo

$$|(Tx,y)| \le \frac{M}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

y para x e y con $\|x\| \le 1$ y $\|y\| \le 1$,

$$|(Tx,y)| \le M$$

Finalmente tomando el supremo para todos los vectores y con $\|y\| \le 1$

$$\|Tx\| = \sup_{\|y\|\le 1} |(T(x,y)| \le M$$

y tomando el supremo para todos los vectores x con $\|x\| \le 1$

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \le M$$

■

Observación 4.5.

$$\sup_{\|x\|\le 1} |(Tx,x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)|$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 4.21.

■

En lo que sigue H será un espacio de Hilbert sobre el cuerpo de los reales. Empezamos con una sencilla propiedad de los núcleos de $T - \lambda I$:

Propiedad 4.3. *Sean λ un escalar y sea $N(\lambda) = \{x \in H;\ Tx = \lambda x\}$. Para cada par de escalares λ y μ distintos $N(\lambda) \perp N(\mu)$, es decir, $(x, y) = 0$ para todo $x \in N(\lambda)$ y para todo $y \in N(\mu)$*

Demostración:

Dado $x \in N(\lambda)$ e $y \in N(\mu)$, con $\lambda \neq \mu$ se trata de demostrar que $(x, y) = 0$: Tenemos por ser T autoadjunto $(Tx, y) = (x, Ty)$. En consecuencia $(\lambda x, y) = (x, \mu y)$ y finalmente $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$ de donde $(x, y) = 0$.

■

Teorema 4.33. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}_c(H)$ autoadjunto. Designamos*

$$m = \inf_{x \in H\ ;\|x\|=1} (Tx, x) \quad y \quad M = \sup_{x \in H\ ;\|x\|=1} (Tx, x)$$

entonces $\sigma(T) \subset [m, M]$ con $m \in \sigma(T)$ y $M \in \sigma(T)$.

Demostración:

Sea $\lambda > M$, demostremos que $\lambda \in \rho(T)$. Tenemos

$$(Tx, x) \leq M\|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

en consecuencia,

$$(\lambda x - Tx, x) \geq (\lambda - M)\|x\|^2 = \alpha\|x\|^2 \quad \forall x \in H \quad \text{con} \quad \alpha > 0$$

Aplicando el teorema de Lax-Milgram 4.17 deducimos que el operador $\lambda I - T$ tiene inverso, es decir $\lambda \in \rho(T)$. De modo que todo elemento $\lambda \in \sigma(T)$ necesariamente verifica $\lambda \leq M$. La demostración se completa si $M \in \sigma(T)$. Veamos, la forma bilineal $a(x, y) = (Mx - Tx, y)$ es bilineal, simétrica y semidefinida positiva ya que

$$a(x, x) = (Mx - Tx, x) = M\|x\|^2 - (Tx, x) \geq 0 \quad \forall x \in H$$

aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a la forma $a(\cdot, \cdot)$ resulta (repasando la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz 4.1 observamos que es cierta también para formas bilineales, simétricas y semidefinidas positivas)

$$|(Mx-Tx,y)| \leq (Mx-Tx,x)^{1/2}(My-Ty,y)^{1/2} \quad \forall x,y \in H \tag{4.76}$$

por otra parte para $\|y\|=1$ tenemos aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}(My-Ty,y) &\leq |(My-Ty,y)| \leq \|My-Ty\|.\|y\| \\ &= \|My-Ty\| \leq M\|y\| + \|T\|.\|y\| = (M+\|T\|)\end{aligned}$$

y sustituyendo en (4.76) obtenemos

$$|(Mx-Tx,y)| \leq C(Mx-Tx,x)^{1/2}$$

para una constante $C=(M+\|T\|)^{1/2}$. Tomando el supremo para $\|y\|=1$ obtenemos

$$\|Mx-Tx\| = \sup_{\|y\|=1} |(Mx-Tx,y)| \leq C(Mx-Tx,x)^{1/2} \quad \forall x \in H \tag{4.77}$$

Como $|(Tx,x)| \leq \|T\|.\|x\|^2$, el conjunto $\{(Tx,x) \in \mathbb{R};\ \|x\|=1\}$ está acotado superiormente por $\|T\|$ e inferiormente por $-\|T\|$, por tanto podemos construir una sucesión $(x_n)_n$ tal que $\|x_n\|=1$ y $(Tx_n,x_n) \to M$ cuando $n \to \infty$ (ejercicio 4.22). Utilizando (4.77) vemos que

$$\|Mx_n - Tx_n\| \leq C\big(M-(Tx_n,x_n)\big)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

de donde $M \in \sigma(T)$ ya que si no fuera así, es decir si $M \in \rho(T)$ tendriamos que $MId-T$ es invertible y $x_n = (MId-T)^{-1}(Mx_n-Tx_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, que contradice el hecho $\|x_n\|=1$.

Para obtener $m = \text{ínf}_{x\in H\,;\|x\|=1}(Tx,x)$, consideremos el operador $-T$ que es obviamente autoadjunto y pongamos aplicando la primera parte de la demostración $-m = \sup_{\|x\|=1}(-Tx,x)$ tendremos que $-m \in \sigma(-T)$ y obviamente $m \in \sigma(T)$ (pues si $\lambda Id-T$ no tiene inverso tampoco lo tiene $-(\lambda Id-T) = (-\lambda)Id-(-T)$). Como

$$-m = \sup_{\|x\|=1}(-Tx,x) = \sup_{\|x\|=1} -(Tx,x) = -\inf_{\|x\|=1}(Tx,x)$$

resulta $m = \text{ínf}_{\|x\|=1}(Tx,x)$.

■

Corolario 4.10. *Si T es autoadjunto y semidefinido positivo entonces $\|T\| \in \sigma(T)$.*

Demostración:

Si T es semidefinido positivo $(Tx,x) \geq 0$ y por lo tanto

$$M = \sup_{x\in H\,;\|x\|=1}(Tx,x) = \sup_{x\in H\,;\|x\|=1}|(Tx,x)| = \|T\|$$

(Véase teorema 4.32 y observación 4.5)

■

Corolario 4.11. *Si T es autoadjunto y definido positivo, es decir $(Tx,x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ entonces todos los valores propios son positivos.*

Demostración:

Sea λ un valor propio y sea x un vector propio asociado correspondiene a λ, es decir $x \neq 0$ y $Tx = \lambda x$. De donde

$$\lambda(x,x) = (Tx,x) > 0$$

lo que implica $\lambda > 0$. ■

Corolario 4.12. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}_c(H)$ autoadjunto tal que $\sigma(T) = 0$. Entonces $T = 0$.*

Demostración:

Por el teorema 4.33

$$(Tx,x) = 0 \quad \forall x \in H$$

de donde

$$(T(x+y), x+y) = (Tx,x) + 2(Tx,y) + (Ty,y)$$

reordenando

$$2(T(x,y) = (T(x+y), x+y) - (Tx,x) - (Ty,y) = 0 \quad \forall x,y \in H$$

de ahí que $T = 0$.

■

En el ejercicio 4.23 se estudian algunas propiedades de los operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert complejos.

Descomposición espectral de operadores autoadjuntos compactos

Consideraremos ahora la descomposición espectral de operadores autoadjuntos compactos que generaliza la diagonalización de operadores en dimesión finita.

Resumiendo resultados anteriores tenemos que si T es compacto entonces $0 \in \sigma(T)$ y el conjunto de valores propios distintos de 0 coincide con el conjunto de valores del espectro distintos de 0. Además los valores propios distintos de 0 se pueden ordenar de mayor a menor formando una sucesión que necesariamente tiene como límite 0. También hemos visto que en el caso de operadores autoadjuntos, los valores $M = \sup_{\|x\|=1}(Tx,x)$ y $m = \text{ínf}_{\|x\|=1}(Tx,x)$ pertenecen a $\sigma(T)$. En el caso de operadores autoadjuntos compactos podemos precisar este resultado:

Teorema 4.34. *Sea T un operador autoadjunto compacto tal que $\|T\| > 0$. Existe un valor propio λ de T tal que $|\lambda| = \|T\|$ y existe el correspondiente vector propio x con $\|x\| = 1$, de modo que $Tx = \lambda x$ y $|(Tx,x)| = \|T\|$.*

Demostración:

Sabemos que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$ (véase teorema 4.32 y observación 4.5). Por la definición de supremo existirá una sucesión $(x_n)_n$ con $\|x_n\| = 1$ tal que

$$|(Tx_n,x_n)| \to \|T\| \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

La sucesión de números reales $((Tx_n,x_n))_n$ es entonces una sucesión acotada que contiene por lo tanto una subsucesión convergente $((Tx_\nu,x_\nu))_\nu$. Tendremos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(Tx_\nu,x_\nu) \to \lambda \quad \text{cuando} \quad \nu \to \infty$$

Esto implica que $|(Tx_\nu,x_\nu)| \to |\lambda|$ cuando $\nu \to \infty$, de modo que necesariamente $|\lambda| = \|T\|$.

Consideremos ahora las dos posibilidades, $\lambda = \|T\|$ o bien $\lambda = -\|T\|$:

- Si $\lambda = \|T\|$, entonces por una parte

$$M = \sup_{\|x\|=1}(Tx,x) \le \sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)| = \|T\| = \lambda$$

  y por otra parte como $(Tx_\nu,x_\nu) \le \sup_{\|x\|=1}(Tx,x) = M$ pasando al límite resulta $\|T\| = \lambda \le M$. De donde $\|T\| = M \in \sigma(T)$. Como $\|T\| \ne 0$, entonces $\|T\|$ es valor propio.
- Si $\lambda = -\|T\|$, entonces por una parte

$$m = \text{ínf}_{\|x\|=1}(Tx,x) \le (Tx_\nu,x_\nu)$$

  y pasando al límite cuando $\nu \to \infty$, resulta $m \le \lambda$. Por otra parte

$$-m = -\text{ínf}_{\|x\|=1}(Tx,x) = \sup_{\|x\|=1} -(Tx,x) \le \sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)| = \|T\| = |\lambda| = -\lambda$$

  de donde $\lambda \le m$. De modo que finalmente $-\|T\| = \lambda = m \in \sigma(T)$. Como $\|T\| \ne 0$, $-\|T\|$ es un valor propio en este caso.

Para terminar, si λ con $|\lambda| = \|T\| \ne 0$, existe $y \ne 0$ tal que $Ty = \lambda y$. Dividiendo por $\|y\|$, $x = \frac{y}{\|y\|}$ será también vector propio asociado a λ, es decir $Tx = \lambda x$. De donde $(Tx,x) = \lambda(x,x) = \lambda$. Tomando valor absoluto $|(Tx,x)| = \|T\|$.

∎

Teorema 4.35. *Sea H un espacio de Hilbert separable y T un operador autoadjunto compacto. Entonces H admite una base hilbertiana formada por vectores propios de T.*

Demostración:

Sea $(\lambda_n)_n$, $n \geq 1$ la sucesión de valores propios de T distintos exceptuando eventualmente el 0. Denotamos $\lambda_0 = 0$ y pongamos $H_0 = N(T)$ y $H_n = N(T - \lambda_n Id)$. Recordemos que

$$0 \leq \dim H_0 \leq \infty \quad \text{y que} \quad 0 < \dim H_n < \infty$$

Demostraremos que el espacio vectorial generado por $(H_n)_{n\geq 0}$ es denso en H: Tenemos por una parte que los espacios $(H_n)_{n\geq 0}$ son dos a dos ortogonales (propiedad 4.3). Sea $F = \{x \in H;\ x \in H_n \text{ para algún } n \geq 0\}$ el espacio generado por $(H_n)_{n\geq 0}$. Veamos que F es denso en H. Tenemos que $T(F) \subset F$ (pues si $Tx = \lambda_n x$ también $T(Tx) = \lambda_n Tx$). De donde $T(F^\perp) \subset F^\perp$, en efecto, si $x \in F^\perp$ e $y \in F$ entonces $(Tx, y) = (x, Ty) = 0$. El operador $T_0 = T|_{F^\perp}$ es autoadjunto compacto, en efecto para $x, y \in F^\perp$, $(T_0 x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, T_0 y)$ por lo que T_0 es autoadjunto y también si $(x_n)_n \subset F^\perp$ es una sucesión acotada en $F^\perp$, también lo será en H por lo que como $T_0 x_n = Tx_n$, la sucesión $(Tx_n)_n$ tendrá una subsucesión convergente; sea $y = \lim Tx_\nu$, como $T_0 x_\nu = Tx_\nu \in F^\perp$ para todo ν, resulta que $y \in F^\perp$ pues $F^\perp$ es un subespacio cerrado, de modo que la sucesión $(T_0 x_n)_n$ tiene una subsucesión convergente en $F^\perp$.

Por otra parte tenemos que $\sigma(T_0) = \{0\}$. En efecto si

$$\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\} \qquad \lambda \in VP(T_0)$$

y existe $x \in F^\perp$ con $x \neq 0$ tal que $T_0 x = \lambda x$. En consecuencia λ es uno de los valores propios λ_n de T por lo que $x \in F^\perp \cap H_n$, por lo que $x = O$ lo que es una contradicción. Resulta pues como consecuencia del corolario 4.12 que $T_0 = O$. De donde deducimos para $x \in F^\perp$, $Tx = T_0 x = 0$, es decir

$$F^\perp \subset N(T) \subset F$$

pues $N(T) = H_0 \subset F$. De modo que $F^\perp = \{O\}$ y como $\overline{F} = F^{\perp\perp} = H$ resulta que F es denso en H.

Finalmente elegimos una base hilbertiana en cada H_n (que será finita para $n > 0$). La reunión de estas bases forma una base hilbertiana en H de vectores propios de T.

■

Corolario 4.13. *Con las mismas notaciones del teorema anterior cualquier $x \in H$ se puede expresar de la forma*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \textit{con} \quad x_n \in H_n$$

con los x_n ortogonales entre sí, de manera que

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$$

donde λ_n son los valores propios de T y x_n son vectores propios correspondientes, es decir, $Tx_n = \lambda_n x_n$.

Además definiendo

$$T_k x = \sum_{n=0}^{k} \lambda_n x_n$$

tenemos que T_k es un operador de imagen de dimensión finita y

$$\|T - T_k\| \to 0 \quad \textit{cuando} \quad k \to \infty$$

Demostración:

Utilizando la base hilbertiana construida en el teorema anterior 4.35, dado $x \in H$ se puede expresar como

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

donde $x_n \in N(T - \lambda_n Id)$, con $\lambda_0 = 0$ y x_n es la proyección ortogonal de x sobre el espacio H_n, es decir el elemento de H_N caracterizado por

$$(x - x_n, z) = 0 \, \forall z \in H_n$$

(véase comentario 4.1

Entonces utilizando la continuidad de T y que $Tx_0 = 0$

$$\begin{aligned} Tx = T(\sum_{n=0}^{\infty} x_n) &= T(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} x_n) \\ = \lim_{k\to\infty} T(\sum_{n=1}^{k} x_n) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} Tx_n \\ = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \lambda_n x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \end{aligned}$$

Vamos a demostrar ahora que $\|T_k - T\| \to 0 \quad$ cuando $\quad k \to \infty$, es decir para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $k > n_0$ entonces $\|T - T_k\| < \varepsilon$:

La sucesión de valores propios $(\lambda_n)_n$ verifica $|\lambda_n| \to 0$, es decir para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $|\lambda_n| < \varepsilon$. Entonces

$$\|Tx - T_k x\|^2 = \|\sum_{n>k}^{\infty} \lambda_n x_n\|^2 = \sum_{n>k}^{\infty} \|\lambda_n x_n\|^2$$
$$= \sum_{n>k}^{\infty} |\lambda_n|^2 \|x_n\|^2$$

Para $n > k > n_0$ tendremos

$$\|Tx - T_k x\|^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{n>k}^{\infty} \|x_n\|^2 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2$$

por lo tanto

$$\|T - T_k\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx - Tx_k\|}{\|x\|} \leq \varepsilon$$

■

Comentarios 4.1. -

- *Dado $x \in H$ hemos puesto $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ donde $x_n \in H_n$ es la proyección ortogonal de x sobre H_n. A su vez esta proyección se expresa de forma única en función de la base hilbertiana en cada H_n, sea ésta $(e_{n_k};\ k = 1, \ldots, d_n)$ donde d_n es la dimensión de H_n (que puede ser ∞ para $n = 0$). Así tendremos en cada H_n*

  $$(x - x_n, e_{n_k}) = 0 \text{ para } k = 1, \ldots, d_n$$

  de modo que cada proyección x_n viene dada por

  $$x_n = \sum_{n_k = 1, \ldots, d_n} (x_n, e_{n_k}) e_{n_k} = \sum_{n_k = 1, \ldots, d_n} (x, e_{n_k}) e_{n_k}$$

  siendo $(x_n, e_{n_k}) = (x, e_{n_k})$ la n_k-componente de x en la base hilbertiana de H.
- *El teorema anterior generaliza el resultado bien conocido del álgebra lineal sobre diagonalización de matrices simétricas.*
- *El teorema de descomposición espectral para operadores autoadjuntos compactos se generaliza a operadores normales compactos en espacios de Hilbert complejos. Véase al respecto [1]*

Ejercicios del Capítulo 4

4.1. Un espacio prehilbertiano complejo es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ donde a cada par de vectores x e y se le asigna un número complejo llamado producto escalar, designado (x, y) verificando las siguientes propiedades

- $P1 : (x, y) = \overline{(y, x)}$ donde la barra designa el complejo conjugado.

- $P2$:

$$(x+y,z) = (x,y)+(y,z) \quad \forall x,y,z \in E$$
$$(\lambda x,y) = \lambda(x,y) \quad \forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

- $P3$: $(x,x) > 0$ cuando $x \neq 0$

Demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio prehilbertiano complejo.

4.2. Verificar que los siguiente espacios son prehilbertianos.

a) $\mathbb{R}^d$ con $(x,y) = \sum_{i=1,\dots,d} x_i y_i$
b) $C^0[a,b]$ con $(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)\,dx$
c) $C^1[a,b]$ con $(u,v) = \int_a^b \big(u(x)v(x) \ + u'(x)v'(x)\big)\,dx$
d) $C_0^1[a,b] = \{u \in C^1[a,b];\ u(a) = u(b) = 0\}$ con $(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx$

4.3. Demostrar que un espacio normado es prehilbertiano si su norma verifica la igualdad del paralelógramo (4.2) y donde el producto escalar viene dado por (4.5)

4.4. En un espacio prehilbertiano complejo demostrar

$$(x,y) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big) \tag{4.78}$$

4.5. Verificar la ortogonalidad de las sucesiones:

a) En el espacio prehilbertiano de las sucesiones finitamente no nulas la sucesión definida por

$$\begin{aligned} x_1 &= (\lambda_1,0,0,\dots) \\ x_2 &= (0,\lambda_2,0,\dots) \\ x_3 &= (0,0,\lambda_3,0,\dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

b) En el espacio de funciones continuas en $[-\pi,\pi]$ con el producto escalar

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\,dx$$

la suseción de funciones $(u_n)_n$; $n = 1,2,\dots$ definidas por la expresión

$$u_n(x) = \sin(nx)$$

c) En el espacio anterior para la sucesión $(v_n)_n$; $n = 0,1,2,\dots$

$$v_n(x) = \cos(nx)$$

d) Demostrar además que u_n es ortogonal a v_m para todo n y m.

4.6. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de vectores ortonormales en un espacio prehilbertiano E complejo. Probar que para todo vector $x \in E$ se verifica

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

4.7. Verificar que los siguientes espacios son de Hilbert:

a) Ejemplo a) del ejercicio 4.2.
b) $l^2 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_i, ...); \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$ con el producto escalar

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

c) ¿Son de Hilbert los ejemplos b), c) y d) del ejercicio 4.2 ?

4.8. Demostrar el teorema 4.10 para espacios prehilbertianos suponiendo que N es un subespacio completo.

4.9. Demostrar que todo espacio prehilbertiano es uniformemente convexo.

4.10. Sean V y H dos espacios de Hilbert de producto escalar $((\cdot,\cdot))$ y $(\cdot,\cdot)$ respectivamente, tales que $V \subset H$ en el sentido siguiente: Existe una aplicación inyectiva y continua de V en H. Suponemos además que V es denso en H. Identificamos H con su dual H' en el sentido de la aplicación (4.18). Demostrar que entonces $H = H'$ se identifica con un subespacio de V' y además H es denso en V'.

4.11. Sea E un espacio vectorial normado y sea $N \subset E$ un subespacio cerrado tal que $N \neq E$. Entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists u \in E \quad \text{tal que} \quad \|u\| = 1 \quad \text{y} \quad dist(u, N) \geq 1 - \varepsilon$$

4.12. -

a) Demostrar que un intervalo acotado en $\mathbb{R}$ es totalmente acotado.
b) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado, demostrar que I es compacto (teorema de Heine-Borel).
c) Sea $I \subset \mathbb{R}^d$ una d-celda cerrada, es decir un conjunto de la forma

$$I = \{x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d;\ a_i \leq x_i \leq b_i\ , i = 1, ..., d\}$$

demostrar que es un conjunto compacto.
d) Demostrar que en $\mathbb{R}^d$ los conjuntos compactos son los conjuntos cerrados y acotados.
e) Demostrar que en un espacio normado de dimensión finita los conjuntos compactos son los conjuntos cerrados y acotados.

4.13. Sea E un espacio de vectorial normado tal que la bola unidad $B_E = \{v \in E\ \|v\| \leq 1\}$ es compacta, entonces E es de dimensión finita.

4.14. Sean $(y_1, y_2, y_3, ...)$ una sucesión de vectores linealmente independientes de un espacio prehilbertiano. Demostrar mediante construcción que existe una sucesión ortonormal $(x_1, x_2, x_3, ...)$ de vectores tales que el espacio generado por $\{y_1, y_2, y_3, ..., y_n\}$ es el mismo que el generado por $\{x_1, x_2, x_3, ...x_n\}$ cualquiera que sea $n \in N$

4.15. Demostrar las propiedades 4.1

4.16. Sean E y F espacios de Hilbert. Sea $T : E \longrightarrow F$ un aplicación lineal continua con $R(T)$ cerrada y sea $T^* : F \longrightarrow E$ la aplicación adjunta, como en el teorema 4.23. Demostrar que la aplicación

$$T_1 = T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \longrightarrow R(T) = N(T^*)^\perp \subset F$$

es biyectiva.

4.17. Demostrar la proposición 4.2

4.18. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}_c(H)$. Sea $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ el operador adjunto, es decir el operador definido por

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \quad \forall x, y \in H$$

Demostrar

a) Si T es un operador normal, es decir que verifica $T^*T = TT^*$, entonces $\|T^*x\| = \|Tx\| \quad \forall x \in H$
b) Demostrar que si T es un operador normal y compacto entonces T^* es compacto.

4.19. Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}_c(H)$.
Demostrar el corolario 4.9 razonando por reducción al absurdo: Suponer que $N_T(\lambda)$ es de dimensión infinita y construir una sucesión acotada que no es convergente.

4.20. Sea H un espacio de Hilbert (o más generalmente un espacio de Banach) sobre $\mathbb{R}$ y sea $T \in \mathcal{L}_c(H)$. Demostrar que el espectro $\sigma(T)$ es un conjunto compacto y

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|]$$

Indicación:

1. Para $\lambda > \|T\|$, utilizar el teorema de punto fijo de Banach para demostrar que la ecuación
$$Tx - \lambda x = f$$
tiene solución única.
2. Dado λ próximo a λ_0 demostrar aplicando de nuevo el teorema del punto fijo de Banach que
$$Tx - \lambda_0 x = f + (\lambda - \lambda_0)x$$
tiene solución única.

4.21. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}_c(H)$. Demostrar

$$\sup_{\|x\|\leq 1} |(Tx,x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)|$$

4.22. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}_c(H)$ autoadjunto. Designamos

$$M = \sup_{x\in H\ ;\|x\|=1} (Tx,x)$$

como en el teorema 4.33. Construir una sucesión $(x_n)_n$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $(Tx_n,x_n) \to M$ cuando $n \to \infty$.

4.23. Sea H un espacio de Hilbert complejo. Demostrar:

a) Si S y T son dos operadores lineales continuos en H tales que $(Sx,x) = (Tx,x)$ para todo $x \in H$ entonces $S = T$
b) T es autoadjunto si y solo si (Tx,x) es real para todo $x \in H$.
c) Los valores propios de un operador autoadjunto son siempre reales.

Capítulo 5
Integral de Lebesgue y el espacio $L^2(\Omega)$

Resumen

En este capítulo sintetizamos las nociones de la teoría de la medida para a continuación introducir la integral de Lebesgue y algunos de los teoremas relacionados más importantes que nos serán útiles en los capítulos siguientes. Lo importante es retener los teoremas de paso al límite bajo al signo integral y saber aplicarlos. La parte correspondiente al espacio $L^2(\Omega)$ es de especial importancia pues es el punto de partida para la construcción de los espacios funcionales que utilizaremos en las aplicaciones.

La bibliografía recomendada es [10] y [11] para la teoría de la medida y para la teoría de Lebesgue y [3] para las propiedades del espacio $L^2(\Omega)$

5.1. Nociones sobre teoría de la medida

En esta sección veremos los conceptos fundamentales de la teoría de la medida y la integración de Lebesgue. Empezaremos introduciendo los conceptos generales de anillo y σ-anillo de conjuntos. En muchos ocasiones se parte del concepto ligeramente más restrictivo de σ-álgebra.

Definición 5.1. *Se dice que una familia $\mathcal{E}$ de conjuntos es un anillo si para $A \in \mathcal{E}$ y $B \in \mathcal{E}$ se tiene*

$$A \cup B \in \mathcal{E} \tag{5.1}$$

$$A - B \in \mathcal{E} \tag{5.2}$$

Un anillo $\mathcal{E}$ se llama σ-anillo si se verifica además

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E} \quad \forall A_n \in \mathcal{E} \text{ con } n = 1, 2, \ldots \tag{5.3}$$

Hemos utilizado la notación $A - B = \{x;\ x \in A,\ x \notin B\}$. En un σ-anillo $\mathcal{E}$, como $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n)$, tendremos también

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$$

Si a un σ-anillo $\mathcal{E}$ le añadimos la propiedad de que el conjunto total X pertenezca a la familia $\mathcal{E}$ tenemos una σ-álgebra. Concretamente, tenemos la siguiente

Definición 5.2. *Sea $\mathcal{M}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X. Designamos al complementario de un conjunto A mediante $A^c = \{x \in X;\ x \notin A\}$. Diremos que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra si tiene las siguientes propiedades:*

a) $X \in \mathcal{M}$
b) *Si* $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$
c) *Si* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con } A_n \in \mathcal{M} \ \Rightarrow A \in \mathcal{M}$

Propiedad 5.1. *En una σ-álgebra $\mathcal{M}$ se verifica*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con } A_n \in \mathcal{M} \ \Rightarrow A \in \mathcal{M}$$

Demostración:

Basta tener en cuenta la ley de Morgan de conjuntos: Si $A_n \in \mathcal{M}$ para $n = 1, 2, \ldots$ tendremos que $A_n^c \in \mathcal{M}$ para $n = 1, 2, \ldots$ de donde

$$A^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

por tanto $A^c \in \mathcal{M}$ lo que implica que $A \in \mathcal{M}$.

■

Dejamos como ejercicio 5.1 elemental demostrar que una σ-álgebra es un σ-anillo al que se le ha añadido la condición $X \in \mathcal{M}$ de la definición.

Si $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en X, éste recibe el nombre de espacio medible y los elementos de $\mathcal{M}$ son conjuntos medibles de X.

Funciones medibles

Definición 5.3. *Si X es un espacio medible, Y un espacio topológico y f una aplicación de X en Y, se dice que f es medible si $f^{-1}(V)$ es un conjunto medible en X para todo conjunto abierto V de Y.*

Tendremos también que la antiimagen de una función medible de un conjunto cerrado es medible, ver al respecto el ejercicio 5.2.

Supongamos ahora que X es también un espacio topológico. Será interesante asegurar que toda función $f : X \to Y$ continua es medible para ello buscaremos la menor σ-álgebra que contengan los conjuntos abiertos de X (no es difícil demostrar que dicha álgebra existe (ejercicio 5.3)

Para esta σ-álgebra naturalmente, todos los conjuntos cerrados (A^c, con A abierto) de X pertenecen a la σ-álgebra, así como la unión numerable de conjuntos cerrados y la intersección numerable de conjuntos abiertos. A esta σ-álgebra mínima la designaremos mediante la letra gótica $\mathcal{B}$ y a sus conjuntos le llamaremos conjuntos de Borel de X.

A continuación veremos algunas propiedades elementales de las funciones medibles.

Sea ahora una función f definida sobre un espacio medible X y con valores en el sistema ampliado de números reales $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Queremos dar una caracterización sencilla de cuando f es medible. Recordemos que el sistema ampliado de los números reales está constituido por el conjunto de los números reales al que se la han añadido los puntos $+\infty$ y $-\infty$ con las propiedades siguientes: Si a es un número real,

a) $x + \infty = +\infty$, $\quad x - \infty = -\infty$, $\quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$

b) Si $x > 0$

$$x.(+\infty) = +\infty, \quad x.(-\infty) = -\infty$$

c) Si $x < 0$

$$x.(+\infty) = -\infty, \quad x.(-\infty) = +\infty$$

Si $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto no acotado superiormente, es decir para cada número real y existe un $x \in E$ tal que $y < x$, decimos que $+\infty$ es el extremo superior de E. Del mismo modo decimos que el extremo inferior de un conjunto E no acotado inferiormente es $-\infty$. De este modo en el sistema ampliado de números reales $\overline{\mathbb{R}}$ todo conjunto tiene extremo superior y extremo inferior.

Por otra parte un conjunto U es un entorno de $+\infty$ si y solo si contiene un conjunto $\{x;\ x > a\}$ para algún número real a (respectivamente un conjunto U es un entorno de $-\infty$ si y solo si contiene un conjunto $\{x;\ x < a\}$ para algún número real a). $\overline{\mathbb{R}}$ es un espacio de Hausdorff compacto homeomorfo al intervalo unidad $[0, 1]$.

Empezamos con el siguiente lema:

Lema 5.1. *Sea X un espacio medible y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Cada una de las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $\{x \in X;\ f(x) > a\}$ *es medible para todo a real.*
b) $\{x \in X;\ f(x) \geq a\}$ *es medible para todo a real.*
c) $\{x \in X;\ f(x) < a\}$ *es medible para todo a real.*
d) $\{x \in X;\ f(x) \leq a\}$ *es medible para todo a real.*

Demostración:

- a) $\Rightarrow$ b):
$$\{x \in X;\ f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ f(x) > a - \frac{1}{n}\}$$
- b) $\Rightarrow$ c):
$$\{x \in X;\ f(x) < a\} = \{x \in X;\ f(x) \geq a\}^c$$
- c) $\Rightarrow$ d):
$$\{x \in X;\ f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ f(x) < a + \frac{1}{n}\}$$
- d) $\Rightarrow$ a):
$$\{x \in X;\ f(x) > a\} = \{x \in X;\ f(x) \leq a\}^c$$

■

Corolario 5.1. *Si se cumple alguna de las condiciones equivalentes del lema anterior 5.1 los conjuntos*
$$\{x \in X;\ a \leq f(x) \leq b\} \quad \forall\, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$\{x \in X;\ a < f(x) < b\} \quad \forall\, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$\{x \in X;\ a \leq f(x) < b\} \quad \forall\, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$$
y
$$\{x \in X;\ a < f(x) \leq b\} \quad \forall\, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$$
son medibles.

Demostración:

Si $a = -\infty$ y $b = \infty$ tenemos $X = \{x \in X;\ a \leq f(x) \leq b\}$ que es medible. Si $a = -\infty$ o $b = \infty$ estamos en alguno de los casos del lema 5.1. Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces,
$$\{x \in X; \quad a \leq f(x) \leq b\} = \{x \in X; \quad f(x) \geq a\} \cap \{x \in X;\ f(x) \leq b\}$$
que es por lo tanto un conjunto medible. Análogamente tendremos también,
$$\{x \in X;\ a < f(x) < b\} = \{x \in X;\ f(x) > a\} \cap \{x \in X;\ f(x) < b\}$$
$$\{x \in X;\ a \leq f(x) < b\} = \{x \in X;\ f(x) \geq a\} \cap \{x \in X;\ f(x) < b\}$$
$$\{x \in X;\ a < f(x) \leq b\} = \{x \in X;\ f(x) > a\} \cap \{x \in X;\ f(x) \leq b\}$$
que serán entonces medibles.

■

Corolario 5.2. *Si f es medible, $|f|$ es medible.*

Demostración:

$$\{x;\ |f(x)| < a\} = \{x;\ f(x) < a\} \cap \{x;\ f(x) > -a\}$$

■

Teorema 5.1. *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, una función definida en un espacio medible X y con valores en el sistema ampliado de números reales. Entonces f es medible si y solo si $\{x \in X;\ f(x) > a\}$ es medible para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Demostración:

Pongamos $B = \{x \in X;\ f(x) > a\}$. Si f es medible B es la antiimagen de un conjunto abierto por tanto B es medible.

Recíprocamente, supongamos que B es medible. Sea A un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ (los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ son los mismos que los de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Existen dos sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ tales que

$$a_n \leq b_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

Gracias al corolario 5.1

$$f^{-1}(a_n, b_n) = \{x \in X;\ a_n < f(x) < b_n\}$$

es medible por lo que

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(a_n, b_n)$$

es medible y concluimos que f es medible.

■

Comentario 5.1. *En la demostración hemos aplicado la propiedad siguiente de la topología en $\mathbb{R}$: Todo conjunto abierto $A \subset R$ es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos (ejercicio 5.4)*

Comentario 5.2. *Obviamente en el teorema anterior gracias al lema 5.1 podemos sustituir el conjunto $B = \{x \in X;\ f(x) > a\}$ por cualquiera de los conjuntos*

$$\{x \in X;\ f(x) \geq a\}$$

$$\{x \in X;\ f(x) < a\}$$

$$\{x \in X;\ f(x) \leq a\}$$

Teorema 5.2. *Si $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una sucesión de funciones medibles para $n = 1, 2, 3, \ldots$ se tiene:*

a) $g = \sup_{n\geq 1} f_n \quad y \quad g = \text{ínf}_{n\geq 1} f_n$ son medibles
b) $h = \text{lím}_{n\to\infty} \sup f_n \quad h = \text{lím}_{n\to\infty} \text{ínf}\, f_n$ son medibles
c) Si $f(x) = \text{lím}\, f_n(x) \quad \forall x \in X\ f$ es medible

Antes de demostrar el teorema aclaremos que para una sucesión de funciones $(f_n)_n$ definidas sobre un conjunto X y a valores sobre $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ nos referimos mediante $\sup f_n$ y $\text{lím}_{n\to\infty} \sup f_n$ a las funciones definidas sobre X de la siguiente manera

$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n (f_n(x))$$

$$(\lim_{n\to\infty} \sup_n f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_n (f_n(x))$$

Análogamente,

$$(\inf_n f_n)(x) = \inf_n (f_n(x))$$

$$(\lim_{n\to\infty} \inf_n f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_n (f_n(x))$$

Si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

donde el límite se supone que existe en todo $x \in X$, llamaremos a f límite puntual de la sucesión $(f_n)_n$.

Demostración del teorema 5.2:

Demostración de a): Sea $g = \sup_{n\geq 1} f_n$ tenemos

$$\{x \in X;\ g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ f_n(x) > a\}$$

de donde g es medible.

Sea $g = \text{ínf}_{n\geq 1} f_n$ tenemos

$$\{x \in X;\ g(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ f_n(x) < a\}$$

de donde g es medible.

Demostración de b):

$$h = \lim_{n\to\infty} \sup f_n = \inf_{i\geq n} \sup_{i\geq n} f_i$$

es medible.

$$h = \lim_{n\to\infty} \inf f_n = \sup_{i\geq n} \inf_{i\geq n} f_i$$

es medible.

Finalmente c) se deduce de b). ■

Corolario 5.3. *Si f y g son medibles, entonces* $\text{máx}(f,g)$ *y* $\text{mín}(f,g)$ *son medibles. En particular si*

$$f^+ = \max(f,0) \quad f^- = -\min(f,0)$$

son medibles.

Demostración:

Es inmediato aplicando el teorema 5.2.

■

Corolario 5.4. *Si f y g son medibles y c una constante, entonces*

$$f+c,\ cf,\ f+g,\ f^2,\ f^{1/2}, fg$$

son medibles.

Demostración:

- $f+c$ es medible: $\{x;\ f(x)+c > a\} = \{x;\ f(x) > a-c\}$ es medible para todo a real.
- cf es medible: $\{x;\ cf(x) > a\} = \{x;\ f(x) > a/c\}$ para todo $c \neq 0$. Para $c = 0$, la función cf es la función nula que es medible.
- $f+g$ es medible:

$$\{x;\ f(x)+g(x) > a\} = \cup_{t\in\mathbb{Q}}\big(\{x;\ f(x) > a\} \cap \{x;\ g(x) > a-t\}\big)$$

  de modo que es unión numerable de conjuntos medibles.
- f^2 es medible: Si $a \geq 0$,

$$\{x;\ f^2(x) > a\} = \{x;\ f(x) > a^{1/2}\} \cup \{x;\ f(x) > -a^{1/2}\}$$

  Si $a < 0$, entonces $\{x;\ f^2(x) > a\} = X$ que es medible.
- $f^{1/2}$ es medible: Si $a \geq 0$,

$$\{x;\ f^{1/2}(x) > a\} = \{x;\ f(x) > a^2\}$$

- fg es medible: Se sigue de la identidad $fg = ((f+g)^2 - f^2 - g^2)/2$.

■

Vamos a introducir ahora la noción de medida. La teoría de la medida es una forma precisa de dar significado al tamaño de un conjunto. Se busca pues entre otras propiedades que la medida de un conjunto no sea menor que la medida de un subconjunto y que la medida de la unión de dos conjuntos disjuntos sea la suma de las medidas de cada conjunto.

Funciones de conjuntos y medidas

Definición 5.4. *Se dice que φ es una función de conjuntos definida en una familia de conjuntos $\mathcal{E}$ si φ asigna a cada $A \in \mathcal{E}$ un número $\varphi(A)$ del sistema ampliado de números reales.*

$$\varphi : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}$$

Diremos que φ es aditiva si para todo par de conjuntos $A, B \in \mathcal{E}$ tales que $A \cap B = \emptyset$ se tiene

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

Diremos que φ es aditiva en forma numerable si para todo familia $(A_n)_n$ numerable de conjuntos de $\mathcal{E}$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ se tiene

$$\varphi\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

Tenemos las siguientes propiedades elementales

Teorema 5.3. *Sea φ una función de conjuntos aditiva. Se verifica:*

a) $\varphi(\emptyset) = 0$
b) $\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \varphi(A_1) + \ldots, +\varphi(A_n)$, *si* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$.
c) $\varphi(A_1 \cup A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$
d) Si $\varphi(A) \geq 0$ *para todo* A *y* $A_1 \subset A_2$ *implica* $\varphi(A_1) \leq \varphi(A_2)$
e) $\varphi(A - B) = \varphi(A) - \varphi(B)$ *si* $B \subset A$ *y* $|\varphi(B)| < +\infty$.

Demostración:

a) Tenemos $A \cap \emptyset = \emptyset$, de donde

$$\varphi(A) = \varphi(A \cup \emptyset) = \varphi(A) + \varphi(\emptyset)$$

de donde $\varphi(\emptyset) = 0$.

b) Procedemos por inducción: Primero tenemos $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$ si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Supongamos que la propiedad es cierta para $n-1$. Podemos escribir

$$\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \varphi\big((A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n\big)$$

Si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ tenemos $(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n = \emptyset$ de donde

$$\varphi\big((A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n\big) = \varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + \varphi(A_n)$$

y por la hipótesis de inducción obtenemos el resultado.

c) Expresando $A_1 \cup A_2$ como unión de conjuntos disjuntos podemos escribir

$$\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1 \cap A_2) + \varphi(A_1 - A_2) + \varphi(A_2 - A_1)$$
$$\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2 - A_1)$$
$$\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_2) + \varphi(A_1 - A_2)$$

Reordenando y sumando las dos últimas

$$\varphi(A_2 - A_1) + \varphi(A_1 - A_2) = 2\varphi(A_1 \cup A_2) - \varphi(A_1) - \varphi(A_2)$$

sustituyendo en la primera

$$\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1 \cap A_2) + 2\varphi(A_1 \cup A_2) - \varphi(A_1) - \varphi(A_2)$$

de donde

$$\varphi(A_1 \cup A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$$

d) $\varphi(A_2) = \varphi(A_2 - A_1) + \varphi(A_1) \geq \varphi(A_1)$.
e) Si $B \subset A$ tenemos $A = (A - B) \cup B$ y $(A - B) \cap B = \emptyset$. Entonces

$$\varphi(A) = \varphi(A - B) + \varphi(B)$$

de donde obtenemos la conclusión buscada si $|\varphi(B)| < +\infty$.

■

Teorema 5.4. *Si φ es aditiva en forma numerable en un anillo $\mathcal{E}$ y $(A_n)_n$ es una sucesión de conjuntos de $\mathcal{E}$ tales que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ....$ y*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$$

algo que ocurre si $\mathcal{E}$ es un σ-anillo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$$

Demostración:

Hagamos,

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 - A_1$$
$$\dots$$
$$B_n = A_n - A_{n-1}$$

entonces $B_i \cap B_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$ y $A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, y también $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Por tanto

$$\varphi(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(B_i)$$

y también

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(B_i)$$

pues φ es aditiva en forma numerable, por tanto

$$\varphi(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n)$$

■

Teorema 5.5. *Si φ es aditiva en forma numerable en un anillo $\mathcal{E}$ y $(A_n)_n$ es una sucesión de conjuntos de $\mathcal{E}$ tales que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ....$ con $\varphi(A_1) < \infty$ y*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$$

algo que ocurre si $\mathcal{E}$ es un σ-anillo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$$

Demostración:

Pongamos $B_n = A_1 - A_n \quad n = 1, 2, ...$ La sucesión $(B_n)_n$ es monótona creciente, es decir, $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset ....$ y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n) = A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

por consiguiente podemos aplicar el teorema anterior. Obtenemos

$$\varphi\big(A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \varphi\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_1 - A_n)$$

Finalmente , puesto que $\varphi(A_1) < \infty$ utilizando la propiedad e) del teorema 5.3

$$\varphi(A_1) - \varphi\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\varphi(A_1) - \varphi(A_n)\big) = \varphi(A_1) - \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n)$$

de donde

$$\varphi\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} (A_n)$$

■

En la siguiente definición se introduce la noción de medida definida en una σ-álgebra.

Definición 5.5. *Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra. Una medida positiva sobre $\mathcal{M}$ es una aplicación $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que*

a)

$$\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{M} \tag{5.4}$$

b)

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{5.5}$$

para toda colección numerable $\{A_i;\ i = 1,2,3,\ldots\}$ de conjuntos disjuntos de $\mathcal{M}$

Un espacio de medida es una σ-álgebra en la que se ha definido una medida positiva sobre sus conjuntos medibles. Con frecuencia nos referimos a un espacio de medida como una terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ donde X es un conjunto, $\mathcal{M}$ una σ-álgebra en X y μ una medida positiva sobre $\mathcal{M}$.

En el siguiente teorema recogemos algunas propiedades elementales de las medidas.

Teorema 5.6. *Sea una medida positiva sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$. Se tiene*

a) $\mu(\emptyset) = 0$
b) Si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos disjuntos dos a dos en $\mathcal{M}$, entonces

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$$

c) Sean $A, B \in \mathcal{M}$ con $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$
d) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

e) Si $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ y $\mu(A_1) < \infty$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

Demostración:

Demostración de a): Tomamos $A = A_1$ y $\emptyset = A_2 = A_3 = \ldots$ entonces

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(\emptyset)$$

de donde $\mu(\emptyset) = 0$.

Demostración de b): Sea $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos disjuntos dos a dos. Hacemos $A_i = \emptyset$ para $i > n$ y aplicamos (5.5) de la definición de medida y la parte a) de este teorema.

Demostración de c): Si $A \subset B$, se tiene $B = A \cup (B - A)$ y $A \cap (B - A) = \emptyset$ de donde aplicando la parte b)

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$$

La parte d) se ha demostrado en el teorema 5.4

La parte e) se ha demostrado en el teorema 5.5 ■

5.2. Integración de Lebesgue

A continuación, exponemos la teoría de la integración en un espacio medible X en el que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y μ es una medida positiva. En la práctica aplicaremos estos resultados a la medida de Lebesgue que construiremos en la sección siguiente.

En esta sección $\mathcal{M}$ será una σ-álgebra de conjuntos en X y μ una medida sobre $\mathcal{M}$ en el sentido de la definición 5.5. Dado $A \in \mathcal{M}$ llamamos función característica χ_A de A a la función

$$\chi_A : A \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Asimismo diremos que una función $s : X \to \mathbb{R}$ es simple si es una combinación lineal de funciones características, es decir,

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ son los distintos valores de s en cada A_i

Definición 5.6. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $E \in \mathcal{M}$, definimos la integral de una función en E en distintos casos como sigue:*

a) Si s es una función simple

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \tag{5.6}$$

b) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función medible no negativa

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{0<s<f} \int_E s \, d\mu \tag{5.7}$$

c) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *una función medible*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu \tag{5.8}$$

Al primer miembro de (5.8) se le llama integral de Lebesgue respecto de la medida μ. Observemos que una integral puede tomar el valor ∞. A una función medible f, para la que las dos integrales en (5.8) son finitas, entonces $\int_E f\, d\mu < \infty$ y decimos que f es integrable según Lebesgue respecto de la medida μ y escribiremos $f \in L(\mu, E)$ o bien si $E = X$ simplemente pondremos $f \in L(\mu)$.

Observación 5.1. *Sea* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida. Podemos considerar para cualquier subconjunto* $E \subset X$ *el espacio de medida* $(E, \mathcal{M}', \mu)$*, tomando como conjuntos medibles de* $\mathcal{M}'$ *los conjuntos de la forma* $E \cap M$ *donde* $M \in \mathcal{M}$*. Diremos que* $(E, \mathcal{M}', \mu)$ *es un subespacio de* $(X, \mathcal{M}, \mu)$*.*

Las definiciones de medida e integral se trasladan sin dificultad a cualquier subespacio de medida.

En el siguiente teorema recogemos las propiedades elementales de la integral.

Teorema 5.7. *Tenemos las siguientes propiedades de la integral:*

a) Si $0 \le f \le g$*,*
$$\int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu$$
b) Si $A \subset B$ *y* $f \ge 0$*,*
$$\int_A f\, d\mu \le \int_B f\, d\mu$$
c) Si $f > 0$ *y* c *es una constante tal que* $0 < c < \infty$
$$\int_E cf\, d\mu = c \int_E f\, d\mu$$
d) Si $f(x) = 0$ *para todo* $x \in E$*,*
$$\int_E f\, d\mu = 0$$
e) Si $\mu(E) = 0$*,*
$$\int_E f\, d\mu = 0$$
f) Si $f > 0$*,*
$$\int_E f\, d\mu = \int_X \chi_E f\, d\mu$$

Demostración:

Se deducen inmediatamente a partir de la definición 5.6.

■

El siguiente teorema permite definir una función de conjuntos a partir de la integral de una función dada.

Teorema 5.8. *Supongamos que f es medible y no negativa en X. Sea $A \in \mathcal{M}$ definimos*

$$\varphi(A) = \int_A f \, d\mu$$

Entonces φ es aditiva en forma numerable.

Demostración:

Hay que demostrar que

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

para $A_n \in \mathcal{M}, \quad n = 1, 2, \ldots$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Si f es una función característica de un conjunto E, la aditividad numerable de φ es la aditividad numerable de μ pues

$$\int_A \chi_E \, d\mu = \mu(A \cap E)$$

Si $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ es una función simple con $\alpha_i \geq 0$ se reduce también a la aditividad numerable de μ.

En el caso general, tenemos para cada función simple medible s tal que $0 \leq s \leq f$:

$$\int_A s \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

por tanto tomando el extremo superior para toda $0 \leq s \leq f$

$$\varphi(A) = \operatorname{extr\,sup} \int_A s \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

Por otra parte si $\varphi(A_n) = +\infty$ para algún n entonces $\varphi(A) \geq \varphi(A_n)$ pues $A \supset A_n$ y la conclusión es trivial. Supongamos pues que $\varphi(A_n) < +\infty$ para todo n: Dado $\varepsilon > 0$ existe una función medible s tal que $0 \leq s \leq f$ tal que

$$\int_{A_1} s \, d\mu \geq \int_{A_1} f \, d\mu - \varepsilon$$

$$\int_{A_2} s \, d\mu \geq \int_{A_2} f \, d\mu - \varepsilon$$

de donde

$$\begin{aligned}\varphi(A_1 \cup A_2) &\geq \int_{A_1 \cup A_2} s\ d\mu = \int_{A_1} s\ d\mu + \int_{A_2} s\ d\mu \\ &\geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - 2\varepsilon\end{aligned}$$

como ε es arbitrario

$$\varphi(A_1 \cup A_2 \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$$

Del mismo modo para cualquier n,

$$\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geq \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_1) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i)$$

y como $A \supset A_1 \cup \ldots \cup A_n$ para todo n, pasando al límite cuando $n \to \infty$

$$\varphi(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$$

de donde finalmente concluimos

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$$

■

Corolario 5.5. *Si f es medible no negativa y $A \in \mathcal{M}$ es*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ con } A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

entonces

$$\int_A f\ d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f\ d\mu$$

Demostración:

Aplicamos el teorema 5.4 a la función de conjuntos $\varphi(A) = \int_A f\ d\mu$

■

Corolario 5.6. *Si $A \in \mathcal{M}$ y $B \subset A$ tal que $\mu(A - B) = 0$, entonces*

$$\int_A f\ d\mu = \int_B f\ d\mu$$

Demostración:

$A = B \cup (A - B)$. Como $A \cap (A - B) = \emptyset$, aplicando el teorema 5.8

$$\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu + \int_{A-B} f\,d\mu = \int_B f\,d\mu$$

■

El corolario anterior demuestra que los conjuntos de medida nula son despreciables en la integración. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. f y g dos funciones integrables, diremos que $f \backsim g$ si el conjunto $\{x \in X; \quad f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula. La relación $\backsim$ es claramente una relación de equivalencia. Si $f \backsim g$ en X tendremos

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$$

para todo conjunto $A \in \mathcal{M}$. Si una propiedad P se cumple para todo $x \in X - A$ con $\mu(A) = 0$ diremos que P se cumple en casi todas partes (c.t.p.) de X. Una función $f \in L(\mu)$ tiene que ser finita en casi todas partes de X.

Teorema 5.9. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in L(\mu)$ entonces $|f| \in L(\mu)$ y*

$$|\int_X f\,d\mu| \leq \int_X |f|\,d\mu$$

Demostración:

Escribamos $X = A \cup B$ donde $A = \{x \in X;\ f(x) \geq 0\}$ y $B = \{x \in X;\ f(x) < 0\}$. Por el teorema 5.8

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu + \int_B |f|\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu < \infty$$

Esto prueba que $|f| \in L(\mu)$. Como $f \leq |f|$ y $-f \leq |f|$, vemos que

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu \quad \text{y} \quad -\int_X f\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu$$

lo que termina la demostración.

■

Hemos visto pues que la integrabilidad de f implica la integrabilidad de $|f|$. Por esto se dice que la integral de Lebesgue es absolutamente convergente.

En los teoremas que siguen teniendo en cuenta la observación 5.1 se puede sustituir el espacio medible X por un subconjunto medible del mismo $E \in \mathcal{M}$.

Teorema 5.10. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Supongamos que f es medible en X y $|f| \leq g$ con $g \in L(\mu)$. Entonces $f \in L(\mu)$.*

Demostración:

Tenemos $f^+ \leq g$ y $f^- \leq g$.

■

Hemos visto que las funciones simples intervienen directamente en la definición de la integral de una función. El siguiente teorema será necesario para demostrar algunas propiedades fundamentales de la Teoría de la Integración de Lebesgue.

Teorema 5.11. *Sea $f : X \to [0,\infty]$ una función medible. Existen funciones simples medibles s_n definidas sobre X tales que*

a) $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f$
b) $s_n(x) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$ *para todo* $x \in X$
c) Si la función f es acotada entonces la convergencia es uniforme.

Demostración:

Para $n = 1,2,3,\ldots$ y para $1 \le i \le n2^n$ definimos

$$E_{n,i} = f^{-1}\Big(\big[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\big)\Big) \quad \text{y} \quad F_n = f^{-1}\big([n,\infty]\big)$$

Las funciones simples buscadas son

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n} \tag{5.9}$$

Los conjuntos $E_{n,i}$ y F_n

$$E_{n,i} = f^{-1}\Big(\big[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\big)\Big) = \{x \in X;\ \frac{i-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i}{2^n}\}$$

y

$$F_n = f^{-1}\big([n,\infty]\big) = \{x \in X;\ f(x) \ge n\}$$

son medibles como consecuencia del lema 5.1, del corolario 5.1 y del teorema 5.1.

Se ve fácilmente que las funciones s_n satisfacen a): Basta observar la definición de los conjuntos E_n, i que se corresponden con particiones cada vez más finas y el valor constante de la correspondiente función sobre estos conjuntos es menor o igual que el valor de f.

Las funciones s_n satisfacen b): Si x es tal que $f(x) < \infty$, tendremos que para n suficientemente grande

$$|f(x) - s_n(x)| = f(x) - s_n(x) \le \frac{1}{2^n} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Si $f(x) = \infty$, entonces $s_n(x) = n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Demostración de c): Si la función f es acotada entonces la convergencia es uniforme ya que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 (independiente de x) tal que si $n > n_0$ tendremos $|f(x) - s_n(x)| = f(x) - s_n(x) \le \frac{1}{2^n}$. Basta tomar n_0 tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$

En la figura 5.1 representamos para $n = 3$ los conjuntos $E_{2,2}$, $E_{2,3}$ y F_2. En línea gruesa los valores de las correspondientes funciones simples.

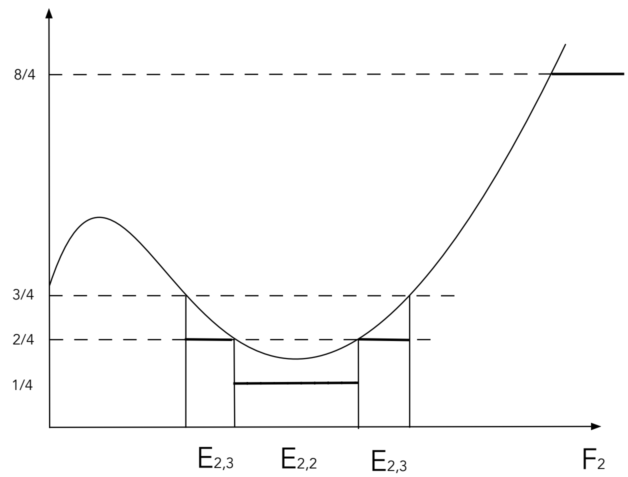

Figura 5.1 Ejemplo con $n = 3$

■

Comentario 5.3. *Para la aproximación mediante funciones simples de una función cualquiera aplicamos la construcción del teorema anterior a* $f = f^+ - f^-$.

A continuación demostraremos tres teoremas fundamentales de la Teoría de la Integración de Lebesgue y cuyas conclusiones serán de gran utilidad en la construcción de los espacios funcionales que aparecen en las aplicaciones. Estos teoremas nos dicen en que condiciones podemos pasar al límite bajo el signo integral.

Teorema 5.12. *(de la convergencia monótona de Lebesgue): Sea* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida. Sea* $(f_n)_n$ *una sucesión de funciones medibles e integrables sobre X tales que*

a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x), \ldots, \leq \infty \quad \forall x \in X$
b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \tag{5.10}$$

Demostración:

Pongamos

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \alpha$$

para algún α. Como

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

para todo n, pasando al límite tenemos

$$\alpha \leq \int_X f \, d\mu$$

Si $\alpha = \infty$ está claro que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Sea pues $\alpha < \infty$. Elijamos $0 < c < 1$ y sea s una función simple medible tal que $0 \leq s \leq f$. Pongamos

$$E_n = \{x;\ f_n(x) \geq cs(x)\} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Cada E_n es medible pues si $s(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \chi_{A_i}$, ya que

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{p} (\{x \in X;\ f_n(x) \geq c\alpha_i\} \cap A_i)$$

es decir E_n es la intersección finita de conjuntos medibles.

Además $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \subset X$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. En efecto, si $f(x) = 0$ como $0 \leq s(x) \leq f(x) = 0$, resulta $s(x) = 0$ y $x \in E_1$. Suponamos $f(x) > 0$, tendremos $cs(x) < f(x)$ pues $c < 1$ lo que implica que existe un n tal que $f_n(x) \geq cs(x)$, de donde $x \in E_n$.

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{E_n} s \, d\mu$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$

$$\alpha \geq c \int_X s \, d\mu \quad \text{para todo } c < 1$$

donde hemos utilizado el corolario 5.5. Pasando al límite cuando $c \to 1$

$$\alpha \geq \int_X s \, d\mu \quad \text{para todo } s \text{ tal que } 0 \leq s \leq f$$

y obtenemos finalmente

$$\alpha \geq \int_X f \, d\mu$$

lo que completa el teorema. ■

Corolario 5.7. *Supongamos que $f = f_1 + f_2$ donde $f_i \in L(\mu)$ para $i = 1, 2$. Entonces $f \in L(\mu)$ y*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f_1\, d\mu + \int_X f_2\, d\mu \tag{5.11}$$

Demostración:

Si f_1 y f_2 son funciones simples

$$f_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \chi_{A_i}$$
$$f_2 = \sum_{i=p+1}^{q} \alpha_i \chi_{A_i}$$
$$f = f_1 + f_2$$

tendremos

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{i=p+1}^{q} \alpha_i \mu(A_i)$$
$$= \int_X f_1\, d\mu + \int_X f_2\, d\mu$$

Supongamos $f_1 \geq 0$ y $f_2 \geq 0$, elijamos sucesiones monótonas crecientes $(s'_n)_n$ y $(s''_n)_n$ de funciones simples no negativas que converjan hacia f_1 y f_2 (véase al respecto teorema 5.11). Pongamos $s_n = s'_n + s''_n$. Tendremos

$$\int_X s_n\, d\mu = \int_X s'_n\, d\mu + \int_X s''_n\, d\mu$$

Aplicando el teorema de la convergencia monótona 5.12 obtenemos el resultado en este caso.

Supongamos ahora el caso en que $f_1 \geq 0$ y $f_2 \leq 0$. Pongamos $A = \{x;\ f(x) > 0\}$ y $B = \{x;\ f(x) < 0\}$ entonces f, f_1 y $-f_2$ son no negativas en A lo que implica

$$\int_A f_1\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A (-f_2)\, d\mu = \int_A f\, d\mu - \int_A f_2\, d\mu \tag{5.12}$$

De igual modo $-f$, f_1 y $-f_2$ son no negativas en B. Entonces,

$$\int_B (-f_2)\, d\mu = \int_B f_1\, d\mu + \int_B (-f)\, d\mu = \int_B f_1\, d\mu - \int_B f\, d\mu$$

$$\int_B f_1\, d\mu = \int_B f\, d\mu - \int_B f_2\, d\mu \tag{5.13}$$

sumando (5.12) y (5.13) y reordenando

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f_1\, d\mu + \int_X f_2\, d\mu$$

En el caso general descomponemos X en cuatro subconjuntos en los que f_1 y f_2 tienen signo constante, por ejemplo,

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X;\ f_1(x) \geq 0;\ f_2(x) \geq 0\} \\ B &= \{x \in X;\ f_1(x) < 0;\ f_2(x) \geq 0\} \\ C &= \{x \in X;\ f_1(x) \geq 0;\ f_2(x) < 0\} \\ D &= \{x \in X;\ f_1(x) < 0;\ f_2(x) < 0\} \end{aligned}$$

Tendremos

$$\int_X f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu + \int_C f\, d\mu + \int_D f\, d\mu$$

y en cada uno de estos casos aplicamos el caso anterior que corresponda.

■

Corolario 5.8. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones medibles no negativas y*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

entonces

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu \tag{5.14}$$

Demostración:

Las sumas parciales

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1 \\ g_2 &= f_1 + f_2 \\ &\dots \\ g_n &= \sum_{i=1}^{n} f_i \end{aligned}$$

verifican
$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots$$
y
$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$$
de donde
$$\int_X g_n \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{n} f_i \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_X f_i \, d\mu$$
y por el teorema de la convergencia monótona (5.12) pasando al límite obtenemos (5.14).

■

Teorema 5.13. *(de Fatou): Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones medibles no negativas y*
$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$
entonces
$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Demostración:

Hagamos $g_n(x) = ext \inf f_i(x)$ $(i \geq n)$, entonces g_n es medible y
$$\begin{aligned} 0 \leq & g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots \\ & g_n(x) \leq f_n(x) \\ & g_n(x) \to f(x) \quad \text{cuando } n \to \infty \end{aligned}$$
Por el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue 5.12
$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$
y también tenemos
$$\int_X g_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu$$
de donde finalmente,
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \\ \int_X f \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \end{aligned}$$

■

Teorema 5.14. *(de la convergencia dominada de Lebesgue) : Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles tales que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Si existe $g \in L(\mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \tag{5.15}$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n = \int_X f \, d\mu$$

Demostración:

La condición (5.15) y el teorema 5.10 implican que $f_n \in L(\mu)$ y que $f \in L(\mu)$. De nuevo la condición (5.15) implica $-g \leq f_n \leq g$, en particular $f_n + g \geq 0$ y gracias al teorema de Fatou 5.13 resulta

$$\int_X (f+g) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n + g) \, d\mu$$

de donde

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Por otra parte $g - f_n \geq 0$ y

$$\int_X (g - f) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n) \, d\mu$$

de donde

$$-\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} - \int_X f_n \, d\mu$$

multiplicando por -1 y teniendo en cuenta las relaciones entre el $\liminf$ y el $\limsup$

$$\int_X f \, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

juntando los dos resultados

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_x f \, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_x f_n \, d\mu$$

y puesto que el siempre tenemos $\liminf \leq \limsup$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n = \int_X f \, d\mu$$

■

Aplicando el teorema anterior obtenemos inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 5.9. *Si* $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \infty$, $(f_n)_n$ *es uniformemente acotada en* E*, y* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *en todo punto de* E *se verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_X f \, d\mu$$

Demostración:

Si $|f_n(x)| \leq C$ para todo x y para todo n, basta tomar $g(x) = C$ y aplicar el teorema anterior 5.14.

■

Terminamos con el siguiente teorema acerca de las funciones mayores o igual que 0 con integral nula:

Teorema 5.15. *Sea* $f \geq 0$ *medible en* X*. La condición necesaria y suficiente para que se tenga*

$$\int_X f d\mu = 0$$

es que f *se anule en casi todas partes de* X*.*

Demostración:

Si f se anula en todos los puntos de X salvo eventualmente en un conjunto de medida nula, llamemos $A = \{x \in X;\ f(x) > 0\}$ y $B = \{x \in X;\ f(x) = 0\}$. Como $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$, se tiene

$$\int_X f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

El primer sumando es nulo pues $\mu(A) = 0$ (propiedad e de 5.7) y el segundo es nulo pues $f = 0$ en B.

Recíprocamente, supongamos que $\int_x f d\mu = 0$. Llamemos para $n = 1, 2, \ldots$

$$A_n = \{x \in X;\ f(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

Entonces,

$$0 = \int_X f d\mu = n \int_X f d\mu = \int_X n f d\mu \geq \int_{A_n} n f d\mu \geq \int_{A_n} 1 d\mu = \mu(A_n)$$

es decir A_n es de medida nula cualquiera que sea n. Tenemos por una parte

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

también

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in X;\ f(x) > 0\}$$

y además (teorema 5.5)

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

de modo que como A es el conjunto de puntos de X en los que f es distinto de 0, hemos demostrado que el conjunto de puntos en los que f es distinto de 0 es de medida nula.

■

5.3. Construcción de la medida de Lebesgue

Definición 5.7. *Una d-celda en el espacio euclídeo d dimensional $\mathbb{R}^d$ es cualquiera de los conjuntos siguientes*

$$\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d; \quad a_i \le x_i \le b_i;\ i = 1, \ldots, d\}$$

$$\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d; \quad a_i < x_i < b_i;\ i = 1, \ldots, d\}$$

$$\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d; \quad a_i \le x_i < b_i;\ i = 1, \ldots, d\}$$

$$\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d; \quad a_i < x_i \le b_i;\ i = 1, \ldots, d\}$$

Si A es la unión de un número finito de d-celdas diremos que es un conjunto elemental en $\mathbb{R}^d$. Una 1-celda es un intervalo, una 2-celda es un rectángulo, etc.

Si I es una d-celda definimos la medida de esta celda mediante

$$m(I) = \Pi_{i=1}^{d}(b_i - a_i) \tag{5.16}$$

sin que importe si en cualquiera de las desigualdades está incluida o excluida la igualdad. Para $d = 1, 2, 3$ la medida corresponde a la longitud, área y volumen del intervalo, rectángulo y paralelepípedo rectángulo respectivamente.

Si $A = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ con $I_i \cap I_j = \emptyset$ pondremos

$$m(A) = m(I_1) + \ldots + m(I_n)$$

Sea $\mathcal{E}$ la familia de todos los subconjuntos elementales de $\mathbb{R}^d$. Tenemos las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{E}$ es un anillo pero no un σ-anillo. En efecto,
Si $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}$.
Sean $A = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ y $B = J_1 \cup \ldots \cup J_n$ tendremos

$$A - B = (I_1 \cup \ldots \cup I_n) - (J_1 \cup \ldots \cup J_n)$$
$$= \Big(\ldots\big((I_1 \cup \ldots \cup I_n) - J_1\big) - \ldots\Big)$$

pero $(I_1 \cup \ldots \cup I_n) - J_1 = (I_1 - J_1) \cup \ldots \cup (I_n - J_1) = K_1 \cup \ldots \cup K_n$ donde en los desarrollos anteriores I_i, J_i representan d-celdas y los conjuntos K_i son unión finita de d-celdas (ejercicio 5.5). Así pues resulta $A - B \in \mathcal{E}$
No es un σ-anillo pues, por ejemplo en $\mathbb{R}$, tomemos $I_n = [-n, n]$, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \mathbb{R} \notin \mathcal{E}$$

b) Si $A \in \mathcal{E}$, entonces A es la unión de un número finito de intervalos disjuntos:
Sea $A = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ con

$$I_1 = \{x_1 = (x_{1,i}); \quad a_{1,i} \leq x_{1,i} \leq b_{1,i};\ i = 1, \ldots, d\}$$
$$\ldots$$
$$I_n = \{x_n = (x_{n,i}); \quad a_{n,i} \leq x_{n,i} \leq b_{n,i};\ i = 1, \ldots, d\}$$

Tomemos para simplificar el caso $d = 1$. Tendremos n intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ definidos por sus extremos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2,]$, ... $[a_n, b_n]$. Podemos ordenar el conjunto de números a_i y b_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ y formar intervalos de forma que sean disjuntos. En la figura (5.2) los nuevos intervalos disjuntos serían

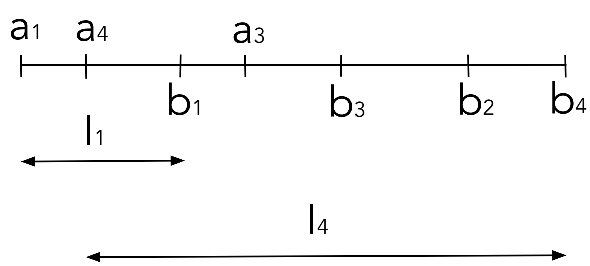

Figura 5.2 Disposición de intervalos

$[a_1, a_4), [a_4, b_1), [b_1, a_3], [a_3, b_3), [b_3, b_2), [b_2, b_4)$.

c) Si $A \in \mathcal{E}$, la medida de A está bien definida, es decir $m(A)$ no depende de la descomposición de A en celdas disjuntas. Por ejemplo en $\mathbb{R}$ consideremos el ejemplo de la figura (5.3) con dos descomposiciones, una constituida por un solo intervalo, el $A = J_0$ y otra en dos intervalos $A = I_1 \cup I_2$. Tendremos

$$m(A) = b_2 - a_1 = b_2 - a_2 + b_1 - a_1$$

pues $b_1 = a_2$

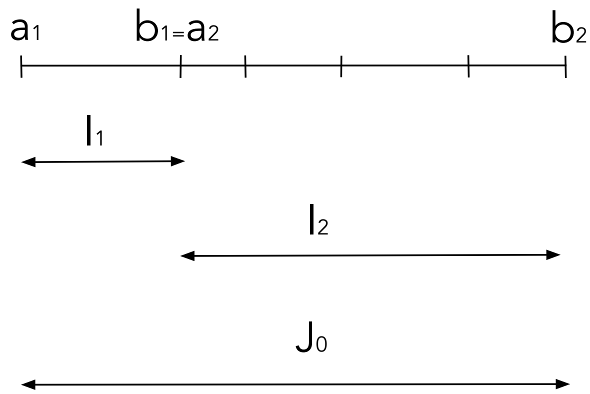

Figura 5.3 Independencia de la descomposición

d) m es aditiva en $\mathcal{E}$ es decir si $A \cap B = \emptyset$, $m(A \cup B) = m(a) + m(B)$: En efecto sean,

$$A = I_1 \cup I_2 \ldots \cup I_n$$
$$B = J_1 \cup J_2 \ldots \cup J_m$$

dos descomposiciones de A y B en intervalos disjuntos.

$$A \cup B = I_1 \cup I_2 \ldots \cup I_n \cup J_1 \cup J_2 \ldots \cup J_n$$

todos estos intervalos son disjuntos dos a dos, de modo que

$$m(A \cup B) = m(I_1) + m(I_2) + \ldots + m(I_n) + m(J_1) + m(J_2) + \ldots + m(J_m) = m(A) + m(B)$$

Definición 5.8. *Se dice que una función de conjuntos φ aditiva y no negativa definida sobre el anillo $\mathcal{E}$ es regular si verifica: Para cada $A \in \mathcal{E}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $F \in \mathcal{E}$ cerrado y un conjunto $G \in \mathcal{E}$ abierto con $F \subset A \subset G$ y*

$$\varphi(G) - \varepsilon \le \varphi(A) \le \varphi(F) + \varepsilon$$

Propiedad 5.2. *La función de conjuntos m definida en 5.7 es regular*

Demostración:

Si A es una d-celda, por ejemplo

$$A = \{x = (x_i); \quad a_i \le x_i < b_i;\ i = 1, \ldots, d\}$$

basta tomar

$$F = \{x = (x_i); \quad a_i + \delta/2 \leq x_i \leq b_i - \delta/2;\ i = 1, \ldots, d\}$$
$$G = \{x = (x_i); \quad a_i - \delta/2 < x_i < b_i + \delta/2;\ i = 1, \ldots, d\}$$

El caso general se deduce de la descomposición de A en d-celdas disjuntas, en este caso

$$m(F) = \Pi_{i=1}^{d}(b_i - a_i - \delta)$$
$$m(G) = \Pi_{i=1}^{d}(b_i - a_i + \delta)$$

■

El siguiente objetivo es demostrar que toda función de conjuntos regular en un anillo $\mathcal{E}$ puede ser extendida a una función de conjuntos aditiva en forma numerable en un σ-anillo que contiene a $\mathcal{E}$.

Definición 5.9. *Sea μ una función de conjuntos aditiva, regular, no negativa y finita en un anillo de conjuntos $\mathcal{E}$. Consideremos recubrimientos numerables de cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ por conjuntos abiertos elementales A_n:*

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Definimos

$$\mu^*(E) = \text{extr ínf} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{5.17}$$

tomando el extremo inferior sobre todos los recubrimientos numerables de E por conjuntos elementales abiertos. μ^* recibe el nombre de medida exterior de E correspondiente a μ.

Es evidente que $\mu^*(E) \geq 0$ para todo E de $\mathcal{E}$ y que $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$ si $E_1 \subset E_2$.

Recordemos que (5.17) quiere decir que si $\mu^*(E)$ es la medida exterior de E, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento numerable $(A_n)_n$ de E tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

Teorema 5.16. *μ^* verifica:*

a) Para todo $A \in \mathcal{E}$, tenemos $\mu^*(A) = \mu(A)$.
b) Si $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \tag{5.18}$$

La propiedad a) nos dice que μ^* es una proplongación de μ. La propiedad (5.18) se llama subaditividad.

Demostración:

Demostración de a): Elijamos $A \in \mathcal{E}$ y $\varepsilon > 0$. La regularidad de μ nos dice que A está contenido en un conjunto elemental abierto G tal que $\mu(G) \leq \mu(A)+\varepsilon$. Como $\mu^*(A) \leq \mu(G)$ resulta $\mu^*(A) \leq \mu(A)+\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. De ahí que

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) \tag{5.19}$$

Por otra parte la definición de μ^* nos dice que para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de conjuntos abiertos elementales $(A_n)_n$ cuya unión contiene a A tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A)+\varepsilon$$

La regularidad de μ demuestra que existe un conjunto elemental cerrado $F \subset A$ tal que $\mu(F) \geq \mu(A)-\varepsilon$. Como el conjunto de los A_n recubre A, recubre también F y como F es compacto (al ser un conjunto elemental es la unión finita de d-celdas y por tanto acotado y como es cerrado es compacto) existe un subrecubrimiento finito es decir, $F \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots, \cup A_N$, para algún N. Tendremos pues,

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu(F)+\varepsilon \leq \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_N)+\varepsilon \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)+\varepsilon \\ &\leq \mu^*(A)+2\varepsilon \end{aligned}$$

de donde $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ que con (5.19) implica $\mu^*(A) = \mu(A)$

Demostración de b): Sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Supongamos $\mu^*(E_n) < \infty$ para todo n. Dado $\varepsilon > 0$ existen recubrimientos $(A_{nk})_{nk} \quad k = 1,2,3\ldots$ de E tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk}) \leq \mu^*(E_n)+\frac{1}{2^n}\varepsilon$$

de donde

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)+\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ resultando

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

Si para algún n, tenemos $\mu^*(E_n) = \infty$, b) es evidente.

■

Prolongación de una función de conjuntos a una medida

Empezamos con una definción. $\mathcal{E}$ será un anillo de conjuntos en $\mathbb{R}^d$ y μ^* la medida exterior definida para cualquier conjunto en $\mathbb{R}^d$ según la definicón (5.17). Si A y B son dos conjuntos designamos mediante $A-B$ al conjunto de elementos $x\in A$ tales que $x\notin B$. Observemos que

$$A-B=A\cap B^c \tag{5.20}$$

Definición 5.10. *Para cada $A\subset\mathbb{R}^d$ y $B\subset\mathbb{R}^d$ definiremos la diferencia simétrica de A y B como el conjunto*

$$S(A,B)=(A-B)\cup(B-A) \tag{5.21}$$

$$d(A,B)=\mu^*(S(A,B)) \tag{5.22}$$

$S(A,B)$ se llama diferencia simétrica de A y B. Veremos que $d(A,B)$ definida por (5.22) es esencialmente una función distancia.

Escribiremos $A_n\to A$ si

$$\lim_{n\to\infty} d(A,A_n)=0$$

Veremos ahora alguna de las propiedades de $S(A,B)$ y de $d(A,B)$. Podemos también escribir la diferencia simétrica como

$$S(A,B)=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c) \tag{5.23}$$

En efecto, ambas expresiones de la diferencia simétrica, (5.21) y (5.23), dicen que la diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos de A y de B que no son comunes a los dos conjuntos.

Propiedad 5.3. *Se verifican las siguientes propiedades:*

a) $S(A,B)=S(B,A),\quad S(A,A)=0$
b) $S(A,B)=S(A^c,B^c)$
c) $S(A,B)\subset S(A,C)\cup S(C,B)$
d)
- $S(A_1\cup A_2,B_1\cup B_2)\subset S(A_1,B_1)\cup S(A_2\cup B_2)$
- $S(A_1\cap A_2,B_1\cap B_2)\subset S(A_1,B_1)\cup S(A_2\cup B_2)$
- $S(A_1-A_2,B_1-B_2)\subset S(A_1,B_1)\cup S(A_2\cup B_2)$

Demostración:

a) Es evidente.
b) Utilizando la fórmula 5.23 para la diferencia simétrica aplicada a A^c y B^c tenemos

$$S(A^c,B^c)=(A^c\cap B)\cup(B^c\cap A)$$

que es igual a la expresión 5.23 para $S(A,B)$.

c) Basta observar las dos inclusiones siguientes

$$A - B \subset (A - C) \cup (C - B)$$
$$B - A \subset (C - A) \cup (B - C)$$

ya que el primer término de la primera inclusión quiere decir que $x \in A$ pero $x \notin (A \cap B)$. El segundo término dice que $x \in A$ y $x \notin C$ o $x \in C$ pero $x \notin B$. El mismo razonamiento se aplica a la segunda inclusión.

d) Veamos la primera inclusión de esta apartado: Tenemos

$$S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) = \big((A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2)\big) \cup \big((B_1 \cup B_2) - (A_1 \cup A_2)\big)$$

Ahora bien
$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$$

En efecto, el primer término inclusión nos dice que $x \in A_1 \cup A_2$ pero no pertenece a B_1 ni a B_2. Mientras que el segundo término de la inclusión dice que $x \in A_1$ pero $x \notin B_1$ o bien , $x \in A_2$ pero $x \notin B_2$. Del mismo modo tenemos

$$(B_1 \cup B_2) - (A_1 \cup A_2) \subset (B_1 - A_1) \cup (B_2 - A_2)$$

Para la segunda inclusión de este apartado podemos escribir, tomando complementarios y utilizando la propiedad anterior

$$\begin{aligned} S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) &= S(A_1^c \cup A_2^c, B_1^c \cup B_2^c) \\ &\subset S(A_1^c, B_1^c) \cup S(A_2^c, B_2^c) = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2) \end{aligned}$$

Para la tercera, utilizando (5.20), aplicando las propiedades b) y la segunda de d).

$$\begin{aligned} S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) &= S(A_1 \cap A_2^c, B_1 \cap B_2^c) \\ &\subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2^c, B_2^c) = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2) \end{aligned}$$

■

Como consecuencia de las anteriores tenemos:

Propiedad 5.4. *La distancia entre conjuntos verifica:*

a) $d(A,B) = d(B,A)$ *y* $d(A,A) = 0$

b) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$

c)
- $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2 \cup B_2)$
- $d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2 \cup B_2)$
- $d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2 \cup B_2)$

Demostración:

La demostración es inmediata a partir de las propiedades 5.3 para la diferencia simétrica y de la propiedad (5.18) de la medida exterior μ^*.

■

Las propiedades a) y b) anteriores nos dicen que $d(A,B)$ satisfacen las propiedades de una distancia salvo que $d(A,B) = 0$ no implica que $A = B$ (ver al respecto el ejercicio 5.6). Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 5.11. *Diremos que dos conjuntos A y B son equivalentes si*

$$d(A,B) = 0$$

Antes de pasar al siguiente paso necesitamos otra propiedad más de $d(A,B)$.

Propiedad 5.5. *La medida exterior μ^* verifica*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A,B) \tag{5.24}$$

si al menos alguna de los valores $\mu^*(A)$ o $\mu^*(B)$ es finito.

Demostración:

Supongamos sin perder generalidad que $0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A)$, teniendo en cuenta la propiedad 5.4 b)

$$d(A,\emptyset) \leq d(A,B) + d(B,\emptyset)$$

es decir,

$$\mu^*(A) \leq d(A,B) + \mu^*(B)$$

como $\mu^*(B)$ es finita, se deduce que

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| = \mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d(A,B)$$

■

Vamos ahora a construir un medida aditiva en forma numerable sobre un σ-anillo: Si existe una sucesión de conjuntos elementales (es decir de conjuntos de $\mathcal{E}$) $(A_n)_n$ tal que $A_n \to A$ con $n \to \infty$ diremos que A es μ-medible finitamente y pondremos $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Si A es la unión numerable de conjuntos μ-medibles finitamente, diremos que A es μ-medible y escribiremos $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

Si consideramos los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ agrupados en clases de equivalencia según la definición 5.11 y extendemos y escribimos $d(\tilde{A},\tilde{B}) = d(A,B)$ donde $A \in \tilde{A}$ y $B \in \tilde{B}$ tenemos una distancia en el conjunto de clases. $\mathcal{M}_F$ es entonces el cerramiento de $\mathcal{E}$.

El siguiente teorema completa la construcción.

Teorema 5.17. $\mathcal{M}(\mu)$ *es un σ-anillo y μ^* es aditiva en forma numerable en* $\mathcal{M}(\mu)$

Demostración:

Primero veamos que $\mathcal{M}_F(\mu)$ es un anillo:

Sean $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$ y $B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Hay que verificar que $A \cup B \in \mathcal{M}_F$ y $A - B \in \mathcal{M}_F$. Tendremos que existen sucesiones $(A_n)_n \subset \mathcal{E}$ y $(B_n)_n \subset \mathcal{E}$ tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Deducimos gracias a las propiedades 5.4

$$A_n \cup B_n \to A \cup B \tag{5.25}$$

$$A_n \cap B_n \to A \cap B \tag{5.26}$$

$$A_n - B_n \to A - B \tag{5.27}$$

en efecto, por ejemplo para ver (5.25)

$$d(A_n \cup B_n, A \cup B) \leq d(A_n, A) + d(B_n, B) \to 0$$

y análogamente en los casos (5.26) y (5.27).

Por (5.25) y (5.27) $\mathcal{M}_F(\mu)$ es un anillo

Por otra parte también gracias a (5.24)

$$|\mu^*(A_n) - \mu^*(A)| \leq d(A_n, A) \to 0$$

por tanto se verifica

$$\mu^*(A) < \infty \tag{5.28}$$

y $\mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$.

Veamos que μ^* es aditiva en $\mathcal{M}_F(\mu)$ (recordemos que en $\mathcal{E}$, μ y μ^* coinciden):

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n)$$

Si $n \to \infty$ resulta

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B)$$

Si $A \cap B = \emptyset$, $\mu^*(A \cap B) = 0$ y en este caso $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Sea ahora $A \in \mathcal{M}(\mu)$, entonces A puede representarse como la unión numerable de conjuntos disjuntos de $\mathcal{M}_F(\mu)$; en efecto, si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{'}$ con $A_n^{'} \in \mathcal{M}_F(\mu)$, pongamos

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_1^{'} \\
A_2 &= (A_1^{'} \cup A_2^{'}) - A_1^{'} \\
&\dots \\
A_n &= (A_1^{'} \cup \ldots \cup A_n^{'}) - (A_1^{'} \cup \ldots \cup A_{n-1}^{'})
\end{aligned}$$

tendremos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ donde A_n son disjuntos entre ellos. Sabemos por la propiedad de subaditividad (5.18)

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \tag{5.29}$$

Por otra parte $A \supset A_1 \cup \ldots \cup A_n$, por la aditividad de μ^* en $\mathcal{M}_F$ obtenemos

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \ldots + \mu^*(A_n) \tag{5.30}$$

de (5.29) y de (5.30), haciendo en esta última $n \to \infty$ obtenemos

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \tag{5.31}$$

Observemos ahora que si $\mu^*(A) < \infty$, entonces necesariamente $A \in \mathcal{M}_F$: En efecto, supongamos $\mu^*(A) < \infty$ y pongamos $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, tendremos aplicando (5.31)

$$d(A, B_n) = \mu^*(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto $B_n \to A$ y como $B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ deducimos sin gran dificultad $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$ (ver al respecto el ejercicio 5.7).

Hasta aquí hemos demostrado que se verifica (5.31) cuando A es la unión numerable de conjuntos disjuntos de $\mathcal{M}_F$. Para demostrar que μ^* es aditiva en forma numerable en $\mathcal{M}(\mu)$, hemos de demostrar que (5.31) es cierto también cuando A es la unión numerable de conjuntos disjuntos de $\mathcal{M}$. Supongamos primero que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ donde A_n es una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathcal{M}(\mu)$, tales que $\mu^*(A_n) < \infty$ para todo n. Por la observación anterior $A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ para todo n y podemos aplicar (5.31). En caso de que para algún n tengamos $\mu^*(A_n) = \infty$ la igualdad (5.31) es evidente.

Para concluir la demostración del teorema solo resta probar que $\mathcal{M}(\mu)$ es un σ-anillo. Tenemos

- Sea $(A_n)_n$ con $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$, está claro que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ pues la unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
- Sea $A \in \mathcal{M}(\mu)$ y $B \in \mathcal{M}(\mu)$ de modo que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

donde $A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ y $B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ para todo n. Tendremos,

$$A_n \cap B = A_n \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i)$$

lo que implica

$$A_n \cap B \in \mathcal{M}(\mu)$$

Como $\mu^*(A_n \cap B) \leq \mu^*(A_n) < \infty$, tendremos $A_n \cap B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Por tanto,

$$A_n - B = A_n - (A_n \cap B) \in \mathcal{M}_F(\mu)$$

Finalmente

$$A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B) \in \mathcal{M}(\mu)$$

■

Las siguientes observaciones completan esta sección :

a) Si A es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ entonces $A \in \mathcal{M}(\mu)$ pues cada conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ es la unión numerable de d-celdas abiertas.
En particular tenemos, como $\mathbb{R}^d$ es abierto, $\mathbb{R}^d \in \mathcal{M}(\mu)$ y por lo tanto $\mathcal{M}(\mu)$ es una σ-álgebra.
En consecuencia si C es un conjunto cerrado, es el complementario de un abierto y por tanto $C \in \mathcal{M}(\mu)$.

b) Sea $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe F y G tales que $F \subset A \subset G$ con F cerrado y G abierto verificando

$$\mu^*(G - A) < \varepsilon \quad \mu^*(A - F) < \varepsilon \tag{5.32}$$

Consideremos primero el caso $\mu^*(A) < \infty$. La definición de μ^* quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento numerable $(A_n)_n$ de A mediante conjuntos elementales abiertos tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon$$

donde $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hagamos $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$. Tenemos

$$\mu^*(G) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon$$

Por la propiedad e) del teorema 5.3, válida para toda función de conjuntos aditiva, si $|\mu^*(A)| < \infty$, tenemos $\mu^*(G - A) = \mu^*(G) - \mu^*(A)$ de ese modo G es un conjunto abierto verificando

$$\mu^*(G - A) = \mu^*(G) - \mu^*(A) \le \varepsilon$$

Sea ahora el caso $\mu^*(A) = \infty$. Si $A \in \mathcal{M}(\mu)$ se puede poner como la unión numerable de conjuntos disjuntos de $\mathcal{M}_F$ y por tanto de medida finita, es decir $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Como ahora $\mu^*(A_n) < \infty$, para cada A_n existe un abierto G_n tal que $\mu^*(G_n - A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Pongamos $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Tenemos como $A_n \subset A$,

$$G - A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - A_n)$$

y finalmente

$$\mu^*(G-A) = \mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - A\big) \leq \mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n - A_n)\big)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(G_n - A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

La otra desigualdad se obtiene tomando complementos: Sea $A \in \mathcal{M}(\mu)$, el complementario $A^c \in \mathcal{M}(\mu)$. Para todo ε existe un abierto G tal que $A^c \subset G$ y $\mu^*(G - A^c) < \varepsilon$. Como $G - A^c = A - G^c$

$$\mu^*(A - G^c) = \mu^*(G - A^c) < \varepsilon$$

$F = G^c \subset A$ es el cerrado buscado.

c) Consecuencia del apartado anterior tendremos también: Sea $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe F y G tales que $F \subset A \subset G$ con F cerrado y G abierto verificando

$$\mu^*(G - F) < \varepsilon \tag{5.33}$$

En efecto, observando que $G - F = (G - A) \cup (A - F)$ y que $(G - A) \cap (A - F) = \emptyset$, pues $F \subset A \subset G$, aplicando el resultado anterior con $\varepsilon/2$ en el lugar de ε

$$\mu^*(G - F) = \mu^*(G - A) + \mu^*(A - F) \leq \varepsilon$$

d) Si E es un conjunto de Borel, entonces $E \in \mathcal{M}(\mu)$. En efecto recordemos que los conjuntos de Borel son los conjuntos de la menor σ-álgebra que contiene todos los conjuntos abiertos.

e) Si $A \in \mathcal{M}(\mu)$, existen conjuntos de Borel F y G tales que $F \subset A \subset G$ y

$$\mu^*(G - A) = \mu^*(A - F) = 0 \tag{5.34}$$

Además $A \in \mathcal{M}(\mu)$ es la unión de un conjunto de Borel y un conjunto de medida nula.

En efecto, por la observación b) para todo entero $n > 0$ existen F_n cerrado y G_n abierto con $F_n \subset A \subset G_n$ tales que

$$\mu^*(A - F_n) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \mu^*(G_n - A) < \frac{1}{n}$$

poniendo $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ y $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ tenemos G y F son de Borel pues son unión numerable de cerrados e intersección numerable de abiertos respectivamente. Para todo n tenemos que $G - A \subset G_n - A$ y $A - F_n \subset A - F$. Finalmente

$$\mu^*(G - A) \leq \mu^*(G_n - A) < \frac{1}{n} \quad \forall n$$

y

$$\mu^*(A - F) \leq \mu^*(A - F_n) < \frac{1}{n} \quad \forall n$$

de donde tomando límites cuando $n \to \infty$

$$\mu^*(A - F) = \mu^*(G - A) = 0$$

Como $A = F \cup (A - F)$, vemos que $A \in \mathcal{M}(\mu)$ es la unión de un conjunto de Borel y un conjunto de medida nula.

f) Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto medible, se tiene:

$$\mu^*(E) = \text{ínf}\{\mu^*(G);\ G \text{ abierto y } G \supset E\} \tag{5.35}$$

En efecto, si $G \supset E$ con G abierto, al ser medible es $\mu^*(G) \geq \mu^*(E)$ y por lo tanto

$$\text{ínf}\{\mu^*(G);\ G, \text{ abierto, } G \supset E\} \geq \mu^*(E)$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad (5.32) existe un abierto G con $G \supset E$ de forma que $\mu^*(G - E) < \varepsilon$, por lo que

$$\mu^*(G) = \mu^*(G - E) + \mu^*(E) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

de donde se sigue que para cada $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\text{ínf}\ \{\mu^*(G);\ G, \text{ abierto y } G \supset E\} \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

por lo que

$$\text{ínf}\ \{\mu^*(G);\ G, \text{ abierto y } G \supset E\} \leq \mu^*(E)$$

que con la anterior desigualdad, prueba el resultado buscado.

g) Si $\mu^*(E) < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe un compacto K con $K \subset E$ y

$$\mu^*(E - K) < \varepsilon \tag{5.36}$$

En efecto, utilizando la (5.32) sea F cerrado con $F \subset E$ y

$$\mu^*(E - F) < \varepsilon/2$$

Para cada natural m el conjunto $F_m = ([-m, m] \times \ldots \times [-m, m]) \cap F$ es un subconjunto compacto. Como $\text{lím}_{m\to\infty} \mu(F_m) = \mu(F) < \infty$, existe m_0 tal que si $m > m_0$ resulta

$$\mu^*(F) - \mu^*(F_m) = \mu^*(F - F_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

tomando $K = F_m$

$$\mu^*(E - K) = \mu^*(E - F_m) = \mu^*(E - F) + \mu^*(F - F_m) < \varepsilon$$

como queríamos demostrar.

Sustituiremos en lo que sigue $\mu^*(A)$ por $\mu(A)$ si $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Así definido, μ que inicialmente estaba únicamente definido para los conjuntos elementales $\mathcal{E}$, se ha prolongado a una función de conjuntos aditiva en forma numerable en la σ-álgebra $\mathcal{M}(\mu)$. En el caso particular en el que $\mu = m$ se llama medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$.

Para completar la construcción de la integral de Lebesgue en el ejercicio 5.8 se compara la integral de Lebesgue con la integral de Riemann.

Funciones medibles, funciones continuas y convergencia

En este apartado estudiaremos ciertas relaciones entre funciones medibles y funciones continuas así como algunos resultados sobre la convergencia de sucesiones de funciones medibles. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ será un espacio de medida.

El siguiente teorema nos dice que una sucesión de funciones medibles que sea convergente puntualmente es, en cierto sentido que se precisa en el enunciado, casi uniformemente convergente.

Teorema 5.18. *(de Egoroff)*

Sea $\mu(X) < \infty$ y $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones medibles que converge puntualmente en X a una función f. Dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $E \subset X$ con y $\mu(X - E) < \varepsilon$ tal que $(f_n)_n$ converge uniformemente a f en E.

Demostración:

Sean n y m números naturales. El conjunto

$$A_{nm} = \{x \in X;\ |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{n}\}$$

es medible: En efecto si f_m es medible, f es medible y $f_m - f$ es medible (véase corolario **??**). Entonces A_{nm} es medible (véase el corolario 5.2).

Pongamos

$$B_{np} = \bigcap_{m=p}^{\infty} A_{nm}$$

La sucesión $(B_{np})_{p=1}^{\infty}$ para cada n es monótona creciente, es decir

$$B_{n1} \subset B_{n2} \subset B_{n3} \subset \ldots \subset B_{np} \subset \ldots$$

Por otra parte, si $x \in X$, existe un entero positivo m_0 de manera que

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{n}, \quad m \geq m_0$$

por lo que $x \in B_{nm}$ para $m = m_0, m_0 + 1, \ldots$ de ahí que $x \in B_{nm_0}$ por consiguiente

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} B_{np} = X$$

La sucesión $(X - B_{np})_{p=1}^{\infty}$ es monótona decreciente, es decir

$$X - B_{n1} \supset X - B_{n2} \supset X - B_{n3} \supset \ldots \supset X - B_{np} \supset \ldots$$

y verifica

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} (X - B_{np}) = \emptyset$$

Ahora puesto que $\mu(X - B_{n1}) \leq \mu(X) < \infty$ resulta que, gracias a la propiedad e) en el teorema 5.6

$$\lim_{p \to \infty} \mu(X - B_{np}) = \mu(\emptyset) = 0 \tag{5.37}$$

Gracias a (5.37) tenemos que para cada entero positivo n, existe un entero positivo p_n tal que

$$\mu(X - B_{np_n}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

llamamos $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X - B_{np_n})$ y veamos que por una parte $\mu(B) < \varepsilon$ y que $(f_n)_n$ converge a f uniformemente en $X - B$. En efecto,

$$\mu(B) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X - B_{np_n})\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X - B_{np_n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Por otra parte dado un número positivo ν, existe un entero positivo r tal que $\frac{1}{r} < \nu$. Sea x un punto cualquiera de $X - B$. Como

$$X - B = B^c = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X - B_{np_n})\Big)^c = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{np_n})^c\Big)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{np_n}$$

Por lo tanto

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{np_n}$$

en particular $x \in B_{rp_r}$ de donde se deduce $x \in A_{rm}$ para $m \geq p_r$ y en consecuencia

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{r} < \nu \quad \text{para} \quad m \geq p_r$$

y esto cualquiera que sea $x \in X - B$ de ahí que la convergencia es uniforme en $X - B$. El conjunto buscado es pues $E = X - B$.

■

En los siguientes teoremas veremos que una función medible en cierto sentido se aproxima a una función continua. Nos referiremos a ellos como teoremas de Lusin.

Teorema 5.19. *(de Lusin) Sea* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida, siendo X un espacio topológico en el que los conjuntos medibles de X verifican la propiedad (5.32) . Sea* $E \in \mathcal{M}$ *con* $\mu(E) < \infty$ *y sea* $f : E \to \mathbb{R}$ *una función medible. Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un conjunto cerrado F contenido en E con* $\mu(E - F) < \varepsilon$ *y de forma que la restricción de f a F es continua.*

Observemos que la propiedad (5.32) se verifica por ejemplo si $X = \mathbb{R}^d$ y μ es la medida de Lebesgue.

Demostración:

Supongamos primero que f es una función simple medible es decir que admite la representación

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

con A_i, $i = 1, \ldots, n$ medibles y $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, con $E = \cup_{i=1}^n A_i$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ los distintos valores que toma f. Por ser los A_i medibles, existen conjuntos cerrados $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de X con $F_i \subset A_i$ y

$$\mu(A_i - F_i) < \frac{\varepsilon}{n}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces si

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

es un conjunto cerrado por ser la unión finita de cerrados, está contenido en E por estarlo cada uno de los F_i. La función f es continua en F por ser continua en cada F_i (ya que f es constante en cada F_i) y los conjuntos F_i, $i = 1, \ldots, n$ son disjuntos dos a dos. La restricción de f a F es por tanto continua. Además

$$\mu(E - F) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i - F_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i - F_i) < \varepsilon$$

Supongamos ahora que f es medible no negativa. Sea $(s_n)_n$ una sucesión creciente de funciones simples medibles con límite puntual f (teorema 5.11). Para cada número natural n existe un conjunto cerrado F_n contenido en E con

$$\mu(E - F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

de forma que s_n es continua en F_n. Sea ahora

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

es cerrado pues es intersección de conjuntos cerrados. Además

$$\mu(E-G) = \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E-F_n)\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E-F_n) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Por el teorema de Egoroff 5.18, dado el conjunto medible G (y como $\mu(G) < \infty$) existe un conjunto medible B contenido en G con

$$\mu(G-B) < \frac{\varepsilon}{4}$$

de forma que la sucesión de funciones $(s_n)_n$ converge uniformemente a f en B. Como cada función s_n es continua sobre B la propia función f será continua sobre B. Como $B \subset G \subset E$ tendremos también

$$\mu(E-B) = \mu(E-G) + \mu(G-B) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{4}$$

Para terminar sea F un cerrado con $F \subset B$ y

$$\mu(B-F) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Tendremos F cerrado $F \subset B \subset G \subset E$,

$$\mu(E-F) = \mu(E-G) + \mu(G-B) + \mu(B-F) < \varepsilon$$

y la restricción de f a F es continua.

Finalmente si f es una función medible arbitraria, basta descomponerla en la forma $f = f^+ - f^-$ y aplicar a cada sumando el proceso anterior.

■

Teorema 5.20. *(de Lusin): Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible. Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}^d$ con $\mu(A) < \infty$, verificando $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^d - A$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una función $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, continua y de soporte compacto tal que*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d; \varphi(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$$

y además

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\varphi(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| \tag{5.38}$$

Recordemos qué es lo que entendemos por soporte de una función continua. Llamamos abierto de anulación A_f de una función f continua al mayor abierto sobre el cual f se anula; el complementario de A_f recibe el nombre de soporte de f (o lo que es lo mismo, el soporte de una función continua es la adherencia del conjunto $\{x;\ f(x) \neq 0\}$).

Demostración:

Aplicamos el teorema 5.19 de forma existe un cerrado F tal que la restricción de f a F sea continua y $\mu(A-F) < \varepsilon/4$. Por otra parte sea K un conjunto compacto contenido en F verificando $\mu(F-K) < \varepsilon/4$ (propiedad 5.36). Por tanto tendremos que $K \subset A$ es un compacto tal que la restricción de f a K es continua y

$$\mu(A-K) = \mu(A-F) + \mu(F-K) = \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$$

Ahora utilizando teorema de Tietze 1.10 existe una función continua g prolongación de f a todo $\mathbb{R}^d$ verificando la propiedad (1.9)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)| \leq \sup_{x\in K} |f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$$

Sea ahora un abierto acotado G que contenga a K tal que

$$\mu(G-K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

(ver al respecto el ejercicio 5.9). Consideremos ahora la función $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = g(x)\frac{d(x,\mathbb{R}^d - G)}{d(x,\mathbb{R}^d - G) + d(x,K)}$$

verifica $\varphi(x) = g(x) = f(x)$ para todo $x \in K$. También $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^d - G$ (y también para todo $x \in \mathbb{R}^d - A$ por hipótesis).

El soporte de φ está contenido en $\overline{G}$ que es compacto y por tanto el soporte de φ que es la adherencia del conjunto $\{x;\ \varphi(x) \neq 0\} \subset G$ es un conjunto compacto.

Claramente tenemos

$$\{x \in \mathbb{R}^d;\ \varphi(x) \neq f(x)\} \subset (A-K) \cup (G-K)$$

por lo que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d;\ \varphi(x) \neq f(x)\}) \leq \mu(A-K) + \mu(G-K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Finalmente la propiedad (5.38) se verifica pues obviamente $|\varphi(x)| \leq |g(x)|$.

■

5.4. El espacio $L^2(\Omega)$

En esta sección introducimos el espacio de funciones de cuadrado integrable según Lebesgue y que será el punto de partida para construir los espacios de Sobolev que necesitaremos para construir los espacios de Hilbert adecuados en los que resolver los problemas asociados a las ecuaciones en derivadas parciales. A continuación Ω designará un conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$. En lo que sigue, se entenderá que estamos utilizando la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Para designar la medida de Lebesgue de un conjunto Ω escribiremos $\mu(\Omega)$.

Definición 5.12. *Llamamos $L^2(\Omega)$ al espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable según Lebesgue, es decir*

$$\{f : \Omega \to \mathbb{R};\ \int_\Omega |f|^2\, dx < \infty\} \tag{5.39}$$

con el producto escalar

$$(f,g)_{0,\Omega} = \int_\Omega f g\, dx \tag{5.40}$$

donde $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$, y dx designa la medida de Lebesgue.

En la definición anterior se sobreentiende que estamos hablando de clases de funciones, más precisamente, dos funciones pertenecen a la misma clase si difieren eventualmente en un conjunto de medida nula. Abusando del lenguaje, hablaremos de funciones en lugar de clases de funciones y a las funciones de una misma clase, las consideramos como iguales. De aquí en adelante y cuando no sea necesario o conveniente utilizaremos a la hora de expresar la integral de una función f la notación $\int f\, dx$ en lugar de $\int f(x)\, dx$ que es de hecho más correcta, pues se trata de clases de funciones.

Con el producto (5.40), $L^2(\Omega)$ es un espacio prehilbertiano (Ejercicio 5.10). Demostraremos a continuación que es además un espacio completo y por lo tanto un espacio de Hilbert. A la norma correspondiente al producto escalar (5.40) la designaremos mediante $\|f\|_{0,\Omega} = (f,f)_{0,\Omega}^{1/2}$. El subíndice $(0,\Omega)$ para la norma es una forma abreviada de la notación más general $(0,p,\Omega)$ para $p = 2$. Las razón de esta notación se verá más adelante cuando estudiemos los espacios de Sobolev.

Teorema 5.21. *El espacio $L^2(\Omega)$ es completo y por lo tanto un espacio de Hilbert.*

Demostración:

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n,m > n_0$ entonces

$$\|f_n - f_m\|_{0,\Omega} < \varepsilon$$

Se trata de demostrar que la sucesión es convergente.

Sea $(f_{n_i})_{n_i}$ una subsucesión que verifica

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| \le \frac{1}{2^i} \quad \forall i \ge 1$$

Esta sucesión la podemos construir del modo siguiente: Existe n_1 tal que $\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2}$ para $m,n \geq n_1$; a continuación tomamos $n_2 \geq n_1$ tal que $\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2^2}$ para $m,n \geq n_2$; luego $n_3 \geq n_2$ tal que $\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2^3}$ para $m,n \geq n_3$ y así sucesivamente. Vamos a demostrar que $(f_{n_k})_{n_k}$ converge en $L^2(\Omega)$. Definimos

$$g_k(x) = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$$

y

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$$

En principio $g(x)$ podría tomar el valor ∞. Tendremos

$$\begin{aligned}\|g_k\|_{0,\Omega} &\leq \|\big(\sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|\big)\|_{0,\Omega} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\|_{0,\Omega} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} < 1\end{aligned}$$

Aplicando a la sucesión $(g_k)_k$ el teorema de Fatou

$$\int_\Omega |g|^2\, dx \leq \liminf \int_\Omega |g_k|^2\, dx \leq 1$$

es decir, $\|g\|_{0,\Omega} \leq 1$ y en particular $g(x) < \infty$ en casi todas partes de Ω.

Tenemos pues que la serie $\sum_{i=1}^{k} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$ es absolutamente convergente c.t.p. en Ω y como

$$f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$$

resulta que

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad \text{cuando } n_k \to \infty \quad \text{c.t.p. en } \Omega$$

para alguna función f. Demostraremos a continuación que f es el límite de f_n en $L^2(\Omega)$.

En efecto, tenemos para cualquier $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n,m > n_0$, entonces

$$\|f_n - f_m\|_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega |f_n - f_m|^2\, dx < \varepsilon^2$$

Tomando $n = n_i > n_0$ y aplicando el teorema de Fatou para $n_i \to \infty$

$$\int_\Omega |f - f_m|^2\, dx \leq \liminf_{n_i \to \infty} \int_\Omega |f_{n_i} - f_m|^2\, dx < \varepsilon^2$$

De aquí que

$$f = (f - f_m) + f_m \in L^2(\Omega)$$

y

$$\|f - f_m\|_{0,\Omega} \to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty$$

■

En el curso de la demostración anterior también hemos demostrado el siguiente

Corolario 5.10. *Si $(f_n)_n$ es una sucesión convergente en $L^2(\Omega)$ se puede extraer una subsucesión convergente en c.t.p. de Ω*

Demostración:

La subsucesión $(f_{n_k})_{n_k}$ construida en la demostración del teorema anterior es convergente c.t.p.

■

Utilizaremos a continuación la siguiente notación para referirnos a funciones clásicas:

- $C(\Omega) = C^0(\Omega)$: El espacio de funciones continuas definidas sobre Ω.
- $C_c(\Omega) = C_c^0(\Omega)$: El espacio de funciones continuas definidas sobre Ω de soporte compacto.
- $C^k(\Omega)$ para $k = 1, 2, \ldots$: El espacio de funciones definidas sobre Ω que son k-veces diferenciables con continuidad.
- $C_c^k(\Omega)$: El espacio de funciones definidas sobre Ω de soporte compacto y que son k-veces diferenciables con continuidad.
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$: Funciones infinitas veces diferenciables con continuidad.
- $\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \bigcap C_c(\Omega)$: Funciones infinitas veces diferenciables con continuidad y soporte compacto.

A continuación nuestro objetivo será demostrar que el espacio vectorial $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$. Empezaremos estudiando la aproximación mediante funciones continuas en el caso más sencillo del espacio $L^2[a,b]$:

Teorema 5.22. *Las funciones continuas en $[a,b]$ son un subconjunto denso en $L^2[a,b]$. Más explícitamente, dada $f \in L^2[a,b]$ para todo $\varepsilon > 0$ existe una función g continua en $[a,b]$ tal que*

$$\|f - g\|_{0,[a,b]} = \Big(\int_a^b (f-g)^2\, dx\Big)^{1/2} < \varepsilon$$

Demostración:

a) Veamos primero que la función característica de un conjunto cerrado puede ser aproximada en $L^2[a,b]$ por una función continua. Sea A un conjunto cerrado en $[a,b]$ y χ_A su función característica. En efecto, pongamos

$$t(x) = \text{extr} \inf_{y \in A} |x-y|$$

y

$$g_n(x) = \frac{1}{1+nt(x)} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$g_n(x)$ es continua en $[a,b]$, $g_n(x) = 1$ en A y $g_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ en $B = [a,b] - A$. Por lo tanto utilizando el teorema de la convergencia dominada (5.14)

$$\|\chi_A - g_n\|_{0,[a,b]} = \Big(\int_a^b (\chi_A - g_n)^2 \, dx\Big)^{1/2} = \Big(\int_B g_n^2 \, dx\Big)^{1/2} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

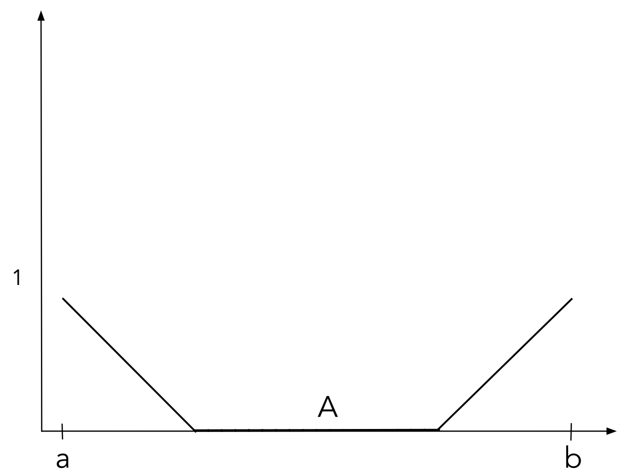

Figura 5.4 Función $t(x)$

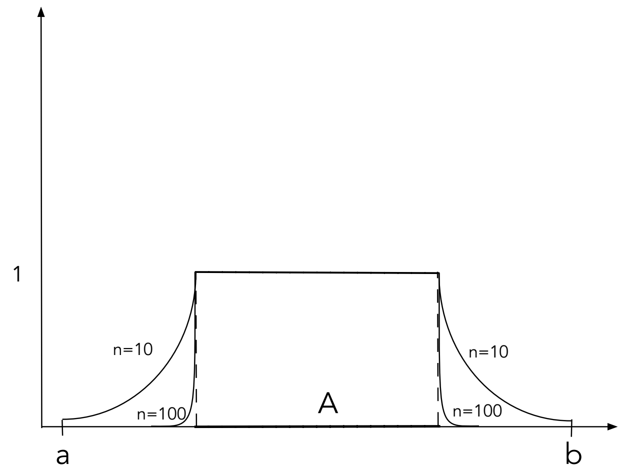

Figura 5.5 Función $g_n(x)$

b) Sea ahora $f = \chi_A$ la función característica de un conjunto medible $A \subset [a,b]$. Por la propiedad (5.32) para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjuntos cerrado $F \subset A$ con $\mu(A-F) < \varepsilon/2$. Tenemos

$$\|f-\chi_F\|^2_{0,[a,b]} = \int_a^b (\chi_A - \chi_F)^2\, dx = \int_{A-F} 1^2\, dx = \mu(A-F) < \varepsilon/2$$

Aplicando la parte a) a la función χ_F existe una función g continua tal que

$$\|\chi_F - g\|_{0,[a,b]} < \varepsilon/2$$

y tendremos finalmente que existe una función g continua tal que

$$\|f-g\|_{0,[a,b]} \leq \|f-\chi_F\|_{0,[a,b]} + \|\chi_F - g\|_{0,[a,b]} < \varepsilon$$

c) Sea ahora f es una función simple medible, es decir de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

con A_i, $i = 1,\ldots,n$ medibles y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ los distintos valores que toma f. Aplicando el paso b) existen una funciones g_i continuas tales que

$$\|\chi_{A_i} - g_i\|_{0,[a,b]} < \frac{\varepsilon}{n \sup_{i=1,\ldots,n} |a_i|}$$

de donde finalmente

$$\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\|_{0,[a,b]} = \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\chi_{A_i}-g_i)\|_{0,[a,b]} \le \sup_{i=1,\ldots,n}|\alpha_i|\sum_{i=1}^{n}\|\chi_{A_i}-g_i\|_{0,[a,b]} < \varepsilon$$

d) Sea $f \in L^2[a,b]$ y $f \ge 0$ c.t.p. en $[a,b]$. Sabemos que existe una sucesión de funciones simples no negativas $(s_n)_n$ tales que

- $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f$
- $s_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in X$

Como $|f-s_n|^2 \le f^2$ del teorema de la convergencia dominada 5.14 deducimos

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f-s_n|^2\,dx = 0$$

e) Sea $f \in L^2[a,b]$ para aproximar f mediante funciones simples, ponemos $f = f^+ - f^-$ y basta aplicar la parte d) anterior a f^+ y f^-.

■

En el caso general del espacio $L^2(\Omega)$ queremos demostrar que el espacio de funciones de clase C^∞ y soporte compacto $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso. Realizaremos la demostración en varias etapas: Sobre el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ y su topología volveremos posteriormente. De momento nos bastan algunas precisiones:

Ya hemos introducido anteriormente el soporte de una función continua. El soporte de una función continua es el complementario del mayor abierto sobre el cual la función se anula o lo que es lo mismo es la adherencia del conjunto $\{x;\ f(x) \neq 0\}$. En el caso de funciones medibles definidas en casi todas partes es necesario precisar la definición de soporte.

Definición 5.13. *Soportes de funciones definidas casi por todas partes: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto y f una función definida en casi todas partes de Ω a valores en $\mathbb{R}$. Consideramos la familia de todos los abiertos $(\omega_i)_{i\in I}$ $\omega_i \subset \Omega$ tales que para cada $i \in I$, $f = 0$ en c.t.p. de ω_i. Pongamos $\omega = \bigcup_{i\in I}\omega_i$. Definimos el soporte de f, como* $\mathrm{sop}(f) = \overline{\Omega} - \omega = \overline{\Omega} \cap \omega^c$

De la definición anterior se deduce que el soporte de una función definida c.t.p. en un conjunto abierto Ω es siempre un conjunto cerrado. De modo que si la función es continua esta definición de soporte coincide con la definición dada anteriormente (adherencia del conjunto de puntos donde $f \neq 0$). En [3] se define el soporte de una función f definida c.t.p. como $\mathrm{sop}(f) = \Omega - \omega$. En el caso que $\Omega = \mathbb{R}^d$ ambas definiciones coinciden. En la práctica cuando la frontera del abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es de medida nula no hay diferencia entre las funciones $L^p(\Omega)$ y $L^p(\overline{\Omega})$.

Para que la anterior definición de soporte tenga sentido necesitamos verificar que la función f es nula c.t.p. en ω puesto que la familia I no es numerable.

Propiedad 5.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto y f una función definida en casi todas partes de Ω a valores en $\mathbb{R}$. Consideramos la familia de todos los abiertos $(\omega_i)_{i\in I}$ $\omega_i \subset \Omega$ tales que para cada $i \in I$, $f = 0$ c.t.p. de ω_i. Pongamos $\omega = \bigcup_{i\in I}\omega_i$. Tenemos $f = 0$ c.t.p. en ω*

Demostración:

Nos vamos a trasladar al caso numerable. Sea $(K_n)_n$ una sucesión de conjuntos compactos tales que $\omega = \bigcup_n K_n$. Tomando por ejemplo

$$K_n = \{x \in \omega;\ dist(x, \omega^c) \geq \frac{1}{n},\ |x| \leq n\}$$

Tenemos que K_n es compacto pues es un subconjunto cerrado del conjunto compacto $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |x| \leq n\}$. Además para todo $x \in \omega$, por ser ω abierto, la distancia $d(x, \omega^c) \geq \varepsilon > 0$ por lo que para n suficientemente grande, $\varepsilon > \frac{1}{n}$. Es decir para n suficientemente grande $x \in K_n$. De ahí que $\omega = \bigcup_n K_n$ (figura 5.6)

Ahora bien para cada n el conjunto de los ω_i $i \in I$ recubre K_n. Como K_n es compacto cada K_n está recubierto por un número finito de los ω_i. Tendremos $K_n \subset \bigcup_{i \in I_n} \omega_i$ donde $I_n \subset I$ es un subconjunto de índices finito. Entonces el conjunto de indices $J = \bigcup_n I_n$ es numerable y tenemos $\omega = \bigcup_n K_n = \bigcup_{i \in J} \omega_i$. Es decir ω se puede poner como unión numerable los conjuntos ω_i; $i \in J$.

Finalmente como $f = 0$ c.t.p. de ω_i para todo $i \in J$, concluimos que $f = 0$ c.t.p. de ω.

Aclaración: Hemos utilizado el hecho de que la unión numerable de conjuntos de medida nula es de medida nula: Para cada $i \in I$ eventualmente f es distinta de cero en un subconjunto $A_i \subset \omega_i$ de medida nula. Por tanto f será eventualmente distinta de cero en la unión $\bigcup_{i \in J} A_i$ que es de medida nula.

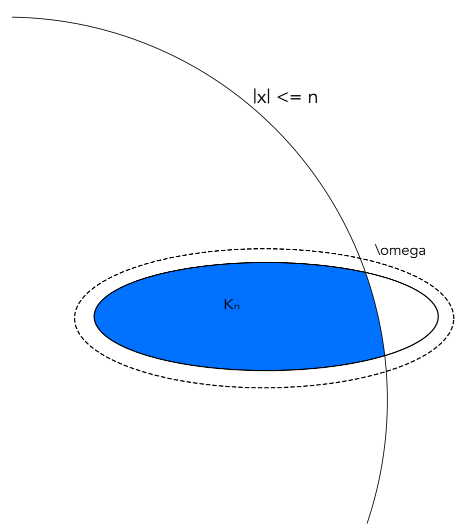

Figura 5.6 Aproximación por compactos

■

Pasemos ahora a la demostración de la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$. Las etapas a seguir son las siguientes:

a) Aproximación de una función medible mediante funciones simples.
b) El conjunto de funciones simples integrables es denso en $L^2(\Omega)$
c) Aproximación de una función simple mediante funciones continuas de soporte compacto.
d) $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$

La etapa a) es el teorema (5.11). Para la etapa b) utilizaremos el teorema (5.11) y el teorema de la convergencia dominada 5.14.

Teorema 5.23. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^d$ y sea $f \in L^2(\Omega)$, entonces existe una función $s : \Omega \to \mathbb{R}$ simple y medible tal que $\mu\{x \in \Omega;\ s(x) \neq 0\} < \infty$ y*

$$\|f - s\|_{0,\Omega} < \varepsilon$$

Demostración:

Supongamos en primer lugar que f es no negativa. Prolongando la función mediante el valor 0 a todo $\mathbb{R}^d$ podemos suponer que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Gracias al teorema 5.11 existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ con

$$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \ldots \leq s_n(x) \leq \ldots \leq f(x)$$

y tal que

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$$

Puesto que $0 \leq s_n \leq f$ tendremos $s_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y necesariamente $\mu\{x \in \Omega;\ s_n(x) \neq 0\} < \infty$. Como además $|f - s_n|^2 \leq f^2$ el teorema de la convergencia dominada 5.14 demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f - s_n|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} |f - s_n|^2\, dx = 0$$

es decir para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$

$$\|f - s_n\|_{0,\Omega} < \varepsilon$$

y basta tomar $s = s_n$; $n \geq n_0$ para obtener el resultado buscado.

Finalmente si f toma valores positivos y negativos basta descomponer f en la parte positiva y negativa, $f = f^+ - f^-$.

■

Para la parte c) utilizamos el teorema de Lusin 5.20 y tendremos el siguiente

Teorema 5.24. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^d$ y sea $f \in L^2(\Omega)$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ continua y de soporte compacto tal que*

$$\|f-g\|_{0,\Omega} < \varepsilon$$

Demostración:

Sin perder generalidad podemos considerar mediante extensión por 0 que $\Omega = \mathbb{R}^d$. Sea s una función simple, medible con soporte de medida finita tal que

$$\|f-s\|_{0,\mathbb{R}^d} < \frac{\varepsilon}{2}$$

función que existe en virtud del teorema anterior 5.23. Por el teorema de Lusin 5.20, existe $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ con g continua y de soporte compacto y coincidente con s salvo eventualmente en un conjunto medible B de medida menor que

$$\epsilon = \Big(\frac{\varepsilon}{4\sup|s|}\Big)^2$$

y con $|g(x)| \leq \sup|s(x)|$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\|g-s\|_{0,\mathbb{R}^d} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g-s|^2\,dx\Big)^{1/2} = \Big(\int_B |g-s|^2\,dx\Big)^{1/2}\\ &\leq \Big(\int_B (2\sup|s|)^2\,dx\Big)^{1/2} = 2\sup|s|(\mu(B))^{1/2} < 2\sup|s|\frac{\varepsilon}{4\sup|s|} = \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Se tiene de esta manera

$$\|f-g\|_{0,\mathbb{R}^d} \leq \|f-s\|_{0,\mathbb{R}^d} + \|s-g\|_{0,\mathbb{R}^d} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y finalmente tomando la restricción a Ω obtenemos el resultado deseado.

■

Para la parte d) utilizaremos la regularización mediante convolución. En la sección 5.6 más adelante se explica la noción de producto de convolución y sus principales propiedades. En el siguiente teorema utilizamos estas propiedades y nos referiremos a la mencionada sección cuando sea necesario.

Teorema 5.25. $\mathcal{D}(\Omega)$ *es denso en* $L^2(\Omega)$

Demostración:

Como ya hemos demostrado que $C_c(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$ basta verificar que para todo $v \in C_c(\Omega)$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\|v_\varepsilon - v\|_{0,\Omega} < \varepsilon$$

Utilizaremos el producto de convolución de funciones: Sea $v \in C_c(\Omega)$ y prolongamos v mediante 0 a todo $\mathbb{R}^d$

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}$$

Evidentemente $\tilde{v} \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Sea ahora una función $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\rho \geq 0$$
$$\rho(x) = 0 \quad \text{si } |x| \geq 1$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\, dx = 1$$

Por ejemplo

$$\rho(x) = k e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}$$

donde la constante k se ajusta para que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\ dx = 1$$

Para $\varepsilon > 0$ definimos $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ de la forma

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho(\frac{x}{\varepsilon}) \to \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1$$

donde el soporte de ρ_ε es $|x| \leq \varepsilon$.

Consideramos ahora

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon * \tilde{v} = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) v(y)\, dy$$

El producto $\rho_\varepsilon * \tilde{v}$ se llama producto de convolución.

Como ρ_ε es de clase $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, entonces gracias al teorema 5.37 y al corolario 5.12 la función $\rho_\varepsilon * \tilde{v}$ es de clase $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Demostraremos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{v}_\varepsilon = \tilde{v}$$

para la noma de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Empezamos demostrando que $\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{v}_\varepsilon = \tilde{v}$ uniformemente en todo compacto de $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} |\tilde{v}_\varepsilon(x) - \tilde{v}(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\tilde{v}(y)\, dy - \tilde{v}(x)| \\ &= |\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\tilde{v}(x-y)\, dy - \tilde{v}(x) \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\, dy| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y) |\tilde{v}(x-y) - \tilde{v}(x)|\, dy \end{aligned}$$

Si nos limitamos a un conjunto compacto K, como ρ_ε tiene soporte $|y| \leq \varepsilon$, para todo $x \in K$ resulta

$$\begin{aligned}
|\tilde{v}_\varepsilon(x) - \tilde{v}(x)| < \int_{x\in K;\ |y|\leq\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)|\tilde{v}(x-y) - \tilde{v}(x)|\, dy \\
\leq \sup_{x\in K;\ |y|\leq\varepsilon} |\tilde{v}(x-y) - \tilde{v}(x)| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)\, dy \\
= \sup_{x\in K;\ |y|\leq\varepsilon} |\tilde{v}(x-y) - \tilde{v}(x)| \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

Finalmente como $\tilde{v}$ y ρ_ε tiene soporte compacto, $\tilde{v}_\varepsilon$ tiene soporte compacto y el soporte de v_ε es el soporte de $v \pm |\varepsilon|$ (ver al respecto la sección 5.6), llamando también K a este soporte compacto,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{v} - \tilde{v}_\varepsilon\|^2_{0,\mathbb{R}^d} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{v} - \tilde{v}_\varepsilon|^2\, dx \\
&= \int_K |\tilde{v} - \tilde{v}_\varepsilon|^2\, dx \leq \mu(K) \sup|\tilde{v} - \tilde{v}_\varepsilon|^2 \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

Pasemos ahora a Ω; el soporte de v_ε es el soporte de $v \pm |\varepsilon|$ de modo que para ε suficientemente pequeño el soporte de $\tilde{v}_\varepsilon$ está incluido en Ω y tendremos llamando $v_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon|_\Omega$

$$\|v - v_\varepsilon\|_{0,\Omega} = \|\tilde{v} - \tilde{v}_\varepsilon\|_{0,\mathbb{R}^d} \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0$$

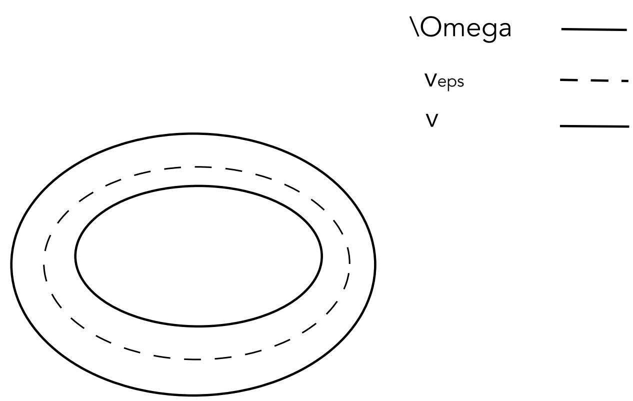

Figura 5.7 Disposicion de soportes

■

Observación 5.2. *En la demostración del teorema anterior hemos demostrado también que si $v \in C_c(\Omega)$ entonces para la correspondiente función ampliada $\tilde{v}$ a todo $\mathbb{R}^d$, tenemos en particular que $\rho_\varepsilon * \tilde{v} \to \tilde{v}$ uniformemente cuando $\varepsilon \to 0$. Para*

$\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño el soporte de $\tilde{v}_\varepsilon$ está incluido en Ω y tendremos llamando $v_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon|_\Omega$

$$\|v - v_\varepsilon\|_{0,\infty,\Omega} = \|\tilde{v} - \tilde{v}_\varepsilon\|_{0,\infty,\mathbb{R}^d} \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0$$

Es decir el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $C_c(\Omega)$ para la norma de la convergencia uniforme.

5.5. Los espacios $L^p(\Omega)$

De manera más general introducimos en esta sección los espacios de funciones de potencia p integrable según Lebesgue. Estos espacios y sus propiedades serán utilizados puntualmente en el resto de los apuntes. Como en la sección anterior Ω designará un conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$. La demostración de alguna de las propiedades de estos espacios son análogas a la del espacio $L^2(\Omega)$ o a las propiedades vistas en los ejemplos de espacios normados de funciones continuas en la sección 3.1 del capítulo 3 por lo que se dejarán como ejercicio.

Definición y propiedades elementales de los espacios $L^p(\Omega)$

Definición 5.14. *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \le p < \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ medible y } \int_\Omega |f|^p\, dx < \infty\}$$

Denotamos

$$\|f\|_{0,p,\Omega} = \Big(\int_\Omega |f|^p\, dx\Big)^{1/p} \tag{5.41}$$

Definición 5.15.

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ medible y existe } C \text{ tal que } |f(x)| \le C \quad \text{c.t.p. sobre } \Omega\}$$

Denotamos

$$\|f\|_{0,\infty,\Omega} = \text{ínf}\{C;\ |f(x)| \le C \quad \text{c.t.p. sobre}\,\Omega\} \tag{5.42}$$

Es inmediato verificar que $L^p(\Omega)$ con $1 \le p \le \infty$ son espacios vectoriales con las habituales suma y producto por un escalar. Veremos enseguida que $\|f\|_{0,p,\Omega}$ con $1 \le p \le \infty$ es una norma en el respectivo espacio. Veremos además que son espacios completos y por lo tanto espacios de Banach.

Teorema 5.26. *(Desigualdad de Hölder): Sea $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $1 \le p \le \infty$ donde p y q son números conjugados, es decir,*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Entonces $f.g \in L^1(\Omega)$ *y*

$$\int_\Omega |fg|\,dx \leq \|f\|_{0,p,\Omega}\|g\|_{0,q,\Omega} \tag{5.43}$$

Demostración:

Para $p=1$ y $q=\infty$ el resultado es inmediato. Supongamos pues $1<p<\infty$. Utilizamos la desigualdad de Young (7.141) como en el ejercicio 3.9: Para $a\geq 0$ y $b\geq 0$ tenemos

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

Tomando ahora $a=|f(x)|$ y $b=|g(x)|$

$$|f(x)|.|g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p+\frac{1}{q}|g(x)|^q$$

de donde $fg\in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |fg|\,dx \leq \frac{1}{p}\|f\|^p_{0,p,\Omega}+\frac{1}{q}\|g\|^q_{0,q,\Omega}$$

Como en el ejercicio 3.9 reemplazando f por λf con $\lambda>0$ resulta

$$\int_\Omega |fg|\,dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|^p_{0,p,\Omega}+\frac{1}{\lambda q}\|g\|^q_{0,q,\Omega}$$

Elegimos $\lambda=\|f\|^{-1}_{0,p,\Omega}\|g\|^{q/p}_{0,q,\Omega}$ obtenemos (5.43)

■

Teorema 5.27. *La aplicación (5.41) es una norma y $L^p(\Omega)$ es un espacio normado con esta norma.*

Demostración:

Recordemos que consideramos clases de funciones, es decir, identificamos las funciones que solo difieren en un conjunto de medida nula.

Las propiedades $N1$ y $N3$ de una norma se verifican sin dificultad. Para la propiedad $N2$ en el caso $p=1$ y $p=\infty$ es inmediato. Para el caso $1<p<\infty$ sean $f,g\in L^p(\Omega)$. Tenemos

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq (2\,\text{máx}\{|f(x)|,|g(x)|\})^p \leq 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p)$$

por consiguiente $f+g \in L^p(\Omega)$. Por otra parte

$$\|f+g\|_{0,p,\Omega}^p = \int_\Omega |f+g|^p\,dx \le \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f|\,dx + \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g|\,dx$$

Como $|f+g|^{p-1} \in L^q(\Omega)$ (observar que $(p-1)q = p$). Aplicando la desigualdad de Hölder (5.43) se obtiene

$$\|f+g\|_{0,p,\Omega}^p \le \|f+g\|_{0,p,\Omega}^{p-1}.\|f\|_{0,p,\Omega} + \|f+g\|_{0,p,\Omega}^{p-1}\|g\|_{0,p,\Omega}$$

es decir,

$$\|f+g\|_{0,p,\Omega} \le \|f\|_{0,p,\Omega} + \|g\|_{0,p,\Omega}$$

■

Teorema 5.28. $L^p(\Omega)$ *es un espacio de Banach para todo* $1 \le p \le \infty$

Demostración:

- Caso $p = \infty$: Sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\Omega)$. Dado un entero $k \ge 1$ existe n_k tal que
$$\|f_m - f_n\|_{0,\infty,\Omega} \le \frac{1}{k}$$
para $m, n \ge n_k$. Es decir, existe E_k de medida nula tal que
$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega - E_k, \quad \forall m, n \ge n_k \tag{5.44}$$
Poniendo $E = \bigcup_k E_k$, que es de medida nula, resulta que para todo $x \in \Omega - E$ la sucesión $(f_n(x))_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Siendo $\mathbb{R}$ completo, llamemos $f(x)$ al límite de $f_n(x)$ para $x \in \Omega - E$. Pasando al límite en (5.44) cuando $m \to \infty$ obtenemos
$$|f(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega - E_k, \quad \forall n \ge n_k$$
Así pues $f \in L^\infty(\Omega)$ y
$$\|f - f_n\|_{0,\infty,\Omega} \le \frac{1}{k} \quad \forall n \ge n_k$$
En consecuencia,
$$\|f - f_n\|_{0,\infty,\Omega} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

- Caso $1 \leq p < \infty$: La demostración es análoga que en el caso $p = 2$ (teorema 5.21) de la sección anterior, cambiando la norma L^2 por la norma L^p y se deja como ejercicio 5.11

■

Análogamente al caso $p = 2$ en el curso de la demostración anterior también hemos demostrado el siguiente

Corolario 5.11. *Si $(f_n)_n$ es una sucesión convergente en $L^p(\Omega)$ se puede extraer una subsucesión convergente en c.t.p. de Ω*

Demostración:

En el caso L^∞ es evidente. En el caso $1 \leq p < \infty$ se razona igual que en el caso $p = 2$.

■

Teorema 5.29. *Sea $f \in L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ continua y de soporte compacto tal que*

$$\|f - g\|_{0,p,\Omega} < \varepsilon$$

Es decir, $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

Demostración:

Se deja como ejercicio 5.12

■

Otras propiedades de aproximación análogas a las vistas en el caso $L^2(\Omega)$ las veremos en la sección siguiente 5.6.

Teorema 5.30. *$L^p(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración:

Sabemos que $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$. Demostraremos que dada $f \in C_c(\Omega)$ puede ser aproximada por funciones que son combinaciones lineales finitas del espacio vectorial E definido por combinaciones lineales finitas de coeficientes racionales $\alpha \in \mathbb{Q}$ de las funciones características de d-celdas abiertas $R = \Pi_{k=1}^{d}(a_k, b_k)$ con $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ y $R \subset \Omega$.

Para toda $f \in L^p(\Omega)$ y todo $\varepsilon > 0$ existe una función $f_1 \in C_c(\Omega)$ tal que $\|f - f_1\|_{0,p,\Omega} < \varepsilon$ (teorema 5.29). Sea Ω' un abierto acotado tal que $\mathrm{sop}(f_1) \subset \Omega' \subset \Omega$. Sea ahora una función $f_2 \in E$ construida de la siguiente manera:

Recubrimos $\mathrm{sop}(f_1)$ mediante un número finito de celdas abiertas R_i; $i = 1, \ldots N$, (algo que siempre podemos conseguir pues $\mathrm{sop}(f_1)$ es compacto, ejercicio 5.13) y tal que la oscilación de f_1 en cada celda sea

$$|\max_{x\in R_i} f_1(x) - \min_{x\in R_i} f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(\Omega')^{1/p}}$$

Construimos una función $f_2 \in E$ como la función que en cada celda R_i toma un valor racional constante comprendido entre $\max_{x\in R_i} f_1(x)$ y $\min_{x\in R_i} f_1(x)$. Claramente tenemos, $\mathrm{sop}(f_2) \subset \Omega'$ y $|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(\Omega')^{1/p}}$. De donde $\|f_2 - f_1\|_{0,p,\Omega} < \varepsilon$ y finalmente

$$\|f - f_2\|_{0,p,\Omega} \leq \|f - f_1\|_{0,p,\Omega} + \|f_2 - f_1\|_{0,p,\Omega} < 2\varepsilon$$

■

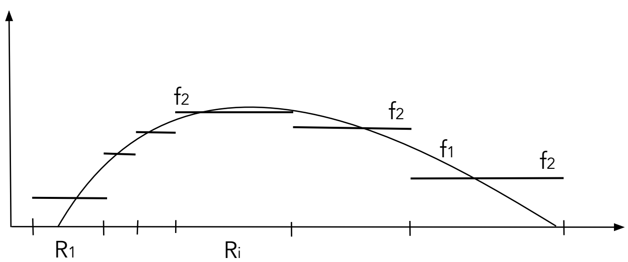

Figura 5.8 Ejemplo de funciones f_1 y f_2 con $d = 1$

Reflexividad

Daremos ahora una propiedad de los espacios $L^p(\Omega)$ que no demostraremos puesto que no serán utilizadas en el resto de los apuntes. La demostración se puede encontrar en [3].

Teorema 5.31. *Para* $1 < p < \infty$ *el espacio* $L^p(\Omega)$ *es reflexivo.*

El siguiente teorema generaliza el teorema de Riesz-Frechet de los espacios de Hilbert. Recordemos que este teorema permite identificar un espacio de Hilbert con su dual haciendo uso del producto escalar. Los espacios L^p para $p \neq 2$ no son de Hilbert por lo que no tenemos producto escalar pero tenemos el producto de una función de L^p por una función de L^q donde p y q son conjugados. Disponemos además de la desigualdad de Hölder en sustitución de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Tenemos el siguiente:

Teorema 5.32. *(de representación de Riesz): Sea* $1 < p < \infty$ *y sea* $\varphi \in (L^p(\omega))'$ *con* $1/p + 1/q = 1$. *Entonces existe una única función* $u \in L^q$ *tal que*

$$< \varphi, f >= \int_\Omega u f \, dx \quad \forall f \in L^p(\Omega) \tag{5.45}$$

Además se tiene

$$\|u\|_{0,q,\Omega} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$$

En la práctica identificamos $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$

Demostración:

Definimos el operador $T : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$ definido como sigue:
Para $u \in L^q(\Omega)$ fijado de antemano, la aplicación

$$Tu : f \in L^p(\Omega) \to \int_\Omega u f \, dx$$

es una forma lineal continua sobre $L^p(\Omega)$ (es decir $Tu \in (L^p(\Omega))'$) de manera que

$$\langle Tu, f\rangle = \int_\Omega u f \, dx \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

Utilizando la desigualdad de Hölder (5.43)

$$| < Tu, f > | \leq \|u\|_{0,q,\Omega} \|f\|_{0,p,\Omega} \tag{5.46}$$

y en consecuencia

$$\|Tu\|_{\left(L^p(\Omega)\right)'} \leq \|u\|_{0,q,\Omega}$$

Por otra parte eligiendo

$$f_0(x) = |u(x)|^{q-2} u(x), \quad (f_0(x) = 0 \text{ si } u(x) = 0)$$

se comprueba fácilmente $f_0 \in L^p(\Omega)$ pues

$$\|f_0\|_{0,p,\Omega} = \Big(\int_\Omega |f_0|^p \, dx\Big)^{1/p} = \Big(\int_\Omega (|u|^{q-2}|u|)^p \, dx\Big)^{1/p} = \Big(\int_\Omega |u|^q \, dx\Big)^{1/p} = \|u\|_{0,q,\Omega}^{q-1}$$

y

$$\langle Tu, f_0\rangle = \int_\Omega u f_0 \, dx = \int_\Omega |u|^q \, dx = \|u\|_{0,q,\Omega}^q$$

resulta

$$\|Tu\|_{\left(L^p(\Omega)\right)'} = \sup_{f \in L^p(\Omega)} \frac{\langle Tu, f\rangle}{\|f\|_{0,p,\Omega}} \geq \frac{\langle Tu, f_0\rangle}{\|f_0\|_{0,p,\Omega}} = \|u\|_{0,q,\Omega}$$

y por tanto junto con (5.46) obtenemos

$$\|Tu\|_{\left(L^p(\Omega)\right)'} = \|u\|_{0,q,\Omega}$$

Resulta que T es una isometría. Falta probar que T es sobreyectiva. Pongamos $E = T(L^q(\Omega))$. Como E es un subespacio cerrado, basta demostrar que E es denso en $(L^p(\Omega))'$. Para ello utilizamos el corolario 3.1 del teorema de

Hahn-Banach. Sea $h \in \left((L^p(\Omega))'\right)' = L^p(\Omega)$ (pues $L^p(\Omega)$ es reflexivo) tal que $\langle Tu, h\rangle = 0$ para todo $u \in L^q(\Omega)$; verifiquemos que $h = 0$. Tenemos

$$\int_\Omega uh\,dx =< Tu, h >= 0 \quad \forall u \in L^q(\Omega)$$

Eligiendo $u = |h|^{p-2}h$ concluimos

$$\int_\Omega |h|^p\,dx = 0 \Rightarrow h = 0$$

■

5.6. Convolución y regularización

En esta sección $\Omega = \mathbb{R}^d$.

A continuación damos sin demostración algunos resultados de la teoría de la integración que serán utilizados en el estudio de las propiedades del producto de convolución y cuya demostración se puede encontrar en los libros sobre teoría de la integración. Aunque se pueden formular en un marco más general de un producto de espacios de medida aquí lo haremos en e $\mathbb{R}^{d+s}$ puesto que este es el uso que haremos de ellos.

Teoremas de Tonelli y Fubini

Teorema 5.33. *(de Tonelli) Sea $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^d$ y $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^s$. Supongamos que*

$$\int_{\Omega_2} |f(x,y)|\,dy < \infty \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega_1$$

y que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |f(x,y)| dy < \infty$$

Entonces $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema 5.34. *(de Fubini) Supongamos $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces para casi todo punto $x \in \Omega_1$*

$$f(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

Del mismo modo para para casi todo punto $y \in \Omega_2$

$$f(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

Además tenemos

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Teorema 5.35. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \le p \le \infty$. La función $y \to f(x-y)g(y)$ es integrable c.t.p. en $\mathbb{R}^d$ y definimos*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy \tag{5.47}$$

Entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y

$$\|f * g\|_{0,p,\mathbb{R}^d} \le \|f\|_{0,1,\mathbb{R}^d}\|g\|_{0,p,\mathbb{R}^d} \tag{5.48}$$

Demostración:

El teorema es evidente para $p = \infty$. Supongamos primeramente que $p = 1$ y sea

$$F(x,y) = f(x-y)g(y)$$

para casi todo punto $y \in \mathbb{R}^d$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)|\,dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,dx = \|f\|_{0,1,\mathbb{R}^d}|g(y)| < \infty$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)|\,dx = \|f\|_{0,1,\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|dy = \|f\|_{0,1,\mathbb{R}^d}\|g\|_{0,1,\mathbb{R}^d} < \infty$$

Aplicando el teorema de Tonelli 5.33 tenemos $F \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Gracias al teorema de Fubini 5.34 se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,dy < \infty \quad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^d$$

Podemos ahora evaluar $\|f * g\|_{0,1,\mathbb{R}^d}$

$$
\begin{aligned}
\|f*g\|_{0,1,\mathbb{R}^d} &= \int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy \Big| \Big)\,dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f((x-y)g(y)|\,dy \Big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} |f((x-y)g(y)|\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,dx = \|f\|_{0,1,\mathbb{R}^d}\|g\|_{0,1,\mathbb{R}^d}
\end{aligned}
$$

Hemos obtenido (5.48) para $p = 1$.

Pasamos ahora a estudiar el caso $1 < p < \infty$: Despues de la parte anterior, sabemos que para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ fijado, la función $y \to |f(x-y)|.|g(y)|^p$ es integrable en $\mathbb{R}^d$, es decir la función $y \to |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|$ verifica

$$|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^d)$$

Como $|f(x-y)|^{1/q} \in L^q_y(\mathbb{R}^d)$ se deduce de la desigualdad de Hölder que

$$|f(x-y)|.|g(y)| = |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|.|f(x-y)|^{1/q} \in L^1_y(\mathbb{R}^d)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|.|g(y)|\,dy \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|.|g(y)|^p\,dy \Big)^{1/p} \|f\|^{1/q}_{0,1,\mathbb{R}^d}$$

es decir, elevando a la potencia p ambos miembros de la desigualdad

$$|(f*g)(x)|^p \leq \big(|f| * |g|^p\big)(x)\|f\|^{p/q}_{0,1,\mathbb{R}^d}$$

Aplicando el resultado obtenido para $p = 1$ a $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $|g|^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vemos

$$f*g \in L^p(\mathbb{R}^d) \quad \text{y} \quad \|f*g\|^p_{0,p,\mathbb{R}^d} \leq \|f\|_{0,1,\mathbb{R}^d}\|g\|^p_{0,p,\mathbb{R}^d}\|f\|^{p/q}_{0,1,\mathbb{R}^d}$$

es decir

$$\|f*g\|_{0,p,\mathbb{R}^d} \leq \|f\|_{0,1,\mathbb{R}^d}\|g\|_{0,p,\mathbb{R}^d}$$

■

La siguiente propiedad nos enseña conmo se comportan los soportes en el producto de convolución.

Propiedad 5.7. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Entonces los soportes guardan la siguiente relación*

$$\mathrm{sop}(f*g) \subset \overline{\mathrm{sop}(f) + \mathrm{sop}(g)}$$

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}^d$. La función $y \longrightarrow f(x-y)g(y)$ es integrable según el teorema 5.35. Tenemos

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{(x-\operatorname{sop}(f))\cap\operatorname{sop}(g)} f(x-y)g(y)\,dy$$

Si $x \notin \operatorname{sop}(f)+\operatorname{sop}(g)$ quiere decir que $x \neq z+y$ donde $z \in \operatorname{sop}(f)$ e $y \in \operatorname{sop}(g)$. Dicho de otro modo $x-z \neq y$ con $z \in \operatorname{sop}(f)$ e $y \in \operatorname{sop}(g)$. Es decir el conjunto de puntos $x-\operatorname{sop}(f)$ no tiene ningún punto comun con el conjunto de puntos $\operatorname{sop}(g)$. En resumen, si $x \notin \operatorname{sop}(f)+\operatorname{sop}(g)$ entonces $(x-\operatorname{sop}(f))\cap\operatorname{sop}(g)=\emptyset$. Por tanto si $x \notin \operatorname{sop}(f)+\operatorname{sop}(g)$ tendremos $(f*g)(x)=0$. De modo que

$$(f*g)(x)=0 \quad \text{c.t.p. de } \big((\operatorname{sop}(f)+\operatorname{sop}(g)\big)^c$$

y a fortiori

$$(f*g)(x)=0 \quad \text{c.t.p. de } \mathbf{Int}\Big(\big((\operatorname{sop}(f)+\operatorname{sop}(g)\big)^c\Big)$$

La definición de soporte (complementario del mayor abierto en el que la función se anula c.t.p.) dice que si $x \in \omega = (\operatorname{sop}(f*g))^c$ tenemos $(f*g)(x)=0$ c.t.p. de ω. Hemos visto que si $x \in \big(\operatorname{sop}(f)+\operatorname{sop}(g)\big)^c$, entonces $(f*g)(x)=0$ c.t.p. y por tanto $\mathbf{Int}\Big(\big((\operatorname{sop}(f)+\operatorname{sop}(g)\big)^c\Big) \subset \omega = (\operatorname{sop}(f*g))^c$. Tomando complementarios,

$$\operatorname{sop}(f*g) \subset \overline{\operatorname{sop}(f)+\operatorname{sop}(g)}$$

■

Corolario 5.12. *Si f y g son funciones de soporte compacto entonces $f*g$ tiene soporte compacto.*

Demostración:

Primero observemos que en $\mathbb{R}^d$ la suma de compactos es compacto (en efecto, basta utilizar la caracterización de la compacidad mediante subsucesiones convergentes). Si f y g tienen soporte compacto entonces la suma de soportes es compacta (y por tanto también cerrada) de modo que

$$\operatorname{sop}(f*g) \subset \operatorname{sop}(f)+\operatorname{sop}(g)$$

implica que el conjunto cerrado $\operatorname{sop}(f*g)$ al ser subconjunto de un compacto es compacto.

■

En general si solo una de las funciones f o g del producto tiene soporte compacto, el soporte de $f*g$ no es compacto.

Vamos a ver ahora las propiedades de regularización del producto de convolución.

Teorema 5.36. *Sea $\rho \in C_c(\mathbb{R}^d)$ (función continua de soporte compacto) y sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$\rho * f \in C(\mathbb{R}^d)$$

Demostración:

Consideremos una sucesión $(x_n)_n$ tal que $\text{lím}\, x_n = x$,

$$(\rho * f)(x_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x_n - y) f(y)\, dy$$

tenemos

$$\text{lím}\, \rho(x_n - y) f(y) = \rho(x - y) f(y)$$

Siendo ρ de soporte compacto, sea K un compacto tal que $x_n - \text{sop}(\rho) \subset K$. Si $y \notin K$ tendremos $f(x_n - y) = 0$ pues $y \notin x_n - \text{sop}(\rho) \subset K$. Entonces

$$|\rho(x_n - y) f(y)| \leq \|\rho\|_{0,\infty,\mathbb{R}^d} \chi_K |f(y)|$$

La función $\|\rho\|_{0,\infty,\mathbb{R}^d} \chi_K |f(y)|$ es una mayorante integrable pues

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_K |f(y)|\, dy \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p\, dy \Big)^{1/p} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_K|^q\, dy \Big)^{1/q}$$

utilizando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} (\rho * f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x_n - y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x - y) f(y)\, dy = (\rho * f)(x)$$

■

Teorema 5.37. *Sea $\rho \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$ (función k veces diferenciable con continuidad de soporte compacto) y sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$\rho * f \in C^k(\mathbb{R}^d)$$

Demostración:

Utilizando el principio de inducción bastará demostrar el caso $k = 1$. Sea ρ diferenciable y de soporte compacto. Vamos a demostrar que la diferencial de $\rho * f$ en un punto x es

$$D(\rho * f)(x) = (D\rho * f)(x)$$

Recordemos que la diferencial en un punto de una función $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}$ y por tanto es un elemento del espacio dual, de

$\mathbb{R}^d$ que se puede identificar con el propio espacio $\mathbb{R}^d$. En coordenadas cartesianas la diferencial de una función $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ se expresa mediante la matriz fila $D\,g(x) = (\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial g}{\partial x_d}(x))$ y el valor de $D\,g(x)$ en $h = (h_1, ..., h_d)^t \in \mathbb{R}^d$ es

$$D\,g(x)(h) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)h_1, ..., \frac{\partial g}{\partial x_d}(x)h_d$$

Aquí ρ diferenciable (en el punto $x-y$) quiere decir que el valor $D\rho(x-y)(h)$ de la diferencial en el punto $x-y$ aplicada a h, verifica para $h \in \mathbb{R}^d$ (con h destinado a tender a 0, por lo que podemos tomar$|h| < 1$)

$$|\rho(x+h-y) - \rho(x-y) - D\rho(x-y)(h)| \le |h|\varepsilon(h)$$

con $\varepsilon(h) \to 0$ cuando $h \to 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^d$. Sea K un compacto tal que $x + B(0,1) - \operatorname{sop}\rho \subset K$. Razonando con los soportes como en el teorema anterior tendremos

$$\rho(x+h-y) - \rho(x-y) - D\rho(x-y)(h) = 0 \quad \forall y \notin K \quad \forall h \in B(0,1)$$

en consecuencia para todo $y \in \mathbb{R}^d$ y para todo $h \in B(0,1)$ tendremos

$$|\rho(x+h-y) - \rho(x-y) - D\rho(x-y)(h)| \le |h|\varepsilon(h)\chi_K(y) \tag{5.49}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
&|(\rho * f)(x+h) - (\rho * f)x - (D\rho * f)(x)(h)| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\rho(x+h-y)f(y) - \rho(x-y)f(y) - (D\rho(x-y)(h)f(y)\Big)\,dy| \\
&= |\int_{Rd} \Big(\rho(x+h-y) - \rho(x-y) - D\rho(x-y)(h)\Big)f(y)\,dy| \\
&\le |h|\varepsilon(|h|)\int_K |f(y)|\,dy
\end{aligned}$$

Resulta que $\rho * f$ es diferenciable y su diferencial en x es $(D\rho * f)(x)$.

Finalmente supongamos que el teorema es cierto para $k-1$, tendremos

$$D^k(\rho * f)(x) = DD^{(k-1)}(\rho * f)(x) = D(D^{(k-1)}\rho * f)(x) = (D^k\rho * f)(x)$$

vemos que es cierto para k.

■

Teorema 5.38. *$\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \le p < \infty$.*

Demostración:

Se deja como ejercicio 5.14

■

Tenemos también la siguiente propiedad de aproximación del producto de convolución por una función regularizante:

Teorema 5.39. *Sea ρ_ε como en el teorema 5.25. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ entonces*

$$\rho_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^d)$$

para $1 \le p < \infty$.

Demostración:

Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ (teorema 5.38) se puede considerar una sucesión $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ en $L^p(\mathbb{R}^d)$ y escribir,

$$\rho_\varepsilon * f - f = \rho_\varepsilon * f - \rho_\varepsilon * f_n + \rho_\varepsilon * f_n - f_n + f_n - f$$

Tomando la norma $\|\cdot\|_{0,p,\mathbb{R}^d}$,

$$\|\rho_\varepsilon * f - f\|_{0,p,\mathbb{R}^d} \le \|\rho_\varepsilon * f - \rho_\varepsilon * f_n\|_{0,p,\mathbb{R}^d} + \|\rho_\varepsilon * f_n - f_n\|_{0,p,\mathbb{R}^d} + \|f_n - f\|_{0,p,\mathbb{R}^d}$$

Por un lado, obviamente

$$\|f_n - f\|_{0,p,\mathbb{R}^d} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Por otro lado, por las propiedades del producto de convolución (teorema 5.35) y por ser $\|\rho_\varepsilon\|_{0,1,\mathbb{R}^d} = 1$, tenemos,

$$\|\rho_\varepsilon * f - \rho_\varepsilon * f_n\|_{0,p,\mathbb{R}^d} = \|\rho_\varepsilon * (f - f_n)\|_{0,p,\mathbb{R}^d} \le \|\rho_\varepsilon\|_{0,1,\mathbb{R}^d}\|f - f_n\|_{0,p,\mathbb{R}^d} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Por último, multiplicando por $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy = 1$

$$\begin{aligned}
&(\rho_\varepsilon * f_n - f_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) f_n(y)\,dy - f_n(x) = \\
&\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) f_n(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) dy f_n(x) = \\
&\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)(f_n(y) - f_n(x))\,dy = \\
&\int_{|x-y|\le\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-y)(f_n(y) - f_n(x))\,dy
\end{aligned}$$

tomando valor absoluto,

$$\begin{aligned}
&|(\rho_\varepsilon * f_n - f_n)(x)| \le \int_{|x-y|\le\varepsilon} |\rho_\varepsilon(x-y)|.|f_n(y) - f_n(x)|\,dy \le \\
&\sup_{\{y;|x-y|\le\varepsilon\}} |f_n(y) - f_n(x)| \int_{|x-y|\le\varepsilon} |\rho_\varepsilon(x-y)|\,dy = \\
&\sup_{\{y;|x-y|\le\varepsilon\}} |f_n(y) - f_n(x)|
\end{aligned}$$

Tenemos que $\sup_{\{y;|x-y|\le\varepsilon\}} |(f_n(y) - f_n(x)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ uniformemente, por tanto $|(\rho_\varepsilon * f_n - f_n)(x)| \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0$ uniformemente. Además ρ_ε y f_n tienen soporte compacto, luego su producto de convolución también tiene soporte compacto. Sea $K = sop\,\rho_\varepsilon \cup sop\,f_n$, entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\rho_\varepsilon * f_n - f_n|^p\, dx \le \sup_{\{y;|x-y|\le\varepsilon\}} |\rho_\varepsilon * f_n(x) - f_n(x)|^p \int_K 1\, dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

es decir, también tiende a 0 el término que faltaba para completar la demostración.

$$\|\rho_\varepsilon * f_n - f_n\|_{0,p,\mathbb{R}^d} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

■

Ejercicios del Capítulo 5

5.1. Demostrar que una σ-álgebra es un σ-anillo al que se le ha añadido la condición $X \in \mathcal{M}$ de la definición.

5.2. Demostrar que la antiimagen de una función medible de un conjunto cerrado es medible.

5.3. Construir la menor σ-álgebra que hace que todas las funciones continuas sean medibles.

5.4. Demostrar que todo conjunto abierto $A \subset R$ es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos

5.5. Demostrar que si I y J son dos d-celdas $J - I$ es la unión finita de d-celdas

5.6. Sea A un conjunto numerable, $B = \emptyset$ y $\mu = m$. Demostrar que

$$d(A,B) = m^*(S(A,B)) = m^*(A) = 0$$

5.7. Demostrar que si $B_n \longrightarrow A$ con $B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ entonces $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

5.8. Sea f integrable según Riemann en un intervalo $[a,b]$ de la recta real $\mathbb{R}$ y llamemos $\mathcal{R}\int_a^b f\,dx$ a la integral. Demostrar que entonces f es integrable según Lebesgue y

$$\int_a^b f\,dm = \mathcal{R}\int_a^b f\,dx$$

5.9. Dado un conjunto compacto $K \in \mathbb{R}^d$ demostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto acotado G tal que $G \supset K$ y

$$\mu(G - K) < \varepsilon$$

5.10. Demostrar que $L^2(\Omega)$ con el producto (5.40) es un espacio prehilbertiano.

5.11. Demostrar que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p < \infty$

5.12. Demostrar el teorema 5.29

5.13. Construir el recubrimiento finito mediante celdas abiertas del soporte de la función f_1 en la demostración del teorema 5.30

5.14. Demostrar el teorema 5.38

Capítulo 6
Espacios de Sobolev

Resumen

En este capítulo primeramente se realiza una breve introdución de la teoría de distribuciones, viendo las nociones básicas que luego utilizaremos como es la noción de derivada de una distribución. Veremos que determinados espacios de funciones medibles integrables, particularmente los espacios L^p, se pueden considerar como distribuciones por lo que podremos hablar de derivadas de estas funciones en el sentido de distribuciones. Estos conceptos son la base para la construcción de los espacios de Sobolev. En particular consideraremos los espacios de Sobolev hilbertianos (espacios de Sobolev que son espacios de Hilbert) de orden 1 y más en general de orden m. Veremos algunas de sus propiedades más importantes y que serán utilizadas en el capítulo siguiente donde consideraremos la aplicación de todo lo anterior al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

La bibliografía recomendada para este capítulo es [3] y [9].

6.1. Nociones sobre teoría de distribuciones

Notaciones

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^d$. Un punto genérico de Ω será designado mediante $x = (x_1,...,x_d)$; la norma euclidiana de x será designada mediante $|x|$, es decir

$$|x|^2 = x_1^2 + ... + x_d^2$$

Denotaremos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ mediante dx.

Utilizaremos la siguiente notación para las derivadas parciales de una función φ: Si $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ es un multientero, con $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d$, denotamos

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_2^{\alpha_d}}$$

Espacios $\mathcal{D}_K(\Omega)$ y espacio $\mathcal{D}(\Omega)$

Definición 6.1. *$\mathcal{D}_K(\Omega)$ es el espacio de funciones de clase $C^\infty(\Omega)$ a valores en $\mathbb{R}$, con soporte compacto K subconjunto de Ω.*

Consideraremos en $\mathcal{D}_K(\Omega)$ la topología localmente convexa generada por la familia de seminormas

$$p_{K,m}(\varphi) = \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)| \tag{6.1}$$

donde K es el soporte de φ y m es un número entero positivo o nulo.

Observación 6.1. *En la anterior definición, como m recorre los números enteros, obtenemos una familia numerable de seminormas en $\mathcal{D}_K$ las cuales definen una topología localmente convexa metrizable en $\mathcal{D}_K$ (según el teorema 2.13).*

Definición 6.2. *La unión de todos los espacios $\mathcal{D}_K(\Omega)$ cuando K recorre todos los compactos $K \in \Omega$ es el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$. Explícitamente $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ y tiene soporte compacto en Ω. Se dota a $\mathcal{D}(\Omega)$ con la topología límite inductiva de las topologías $\mathcal{D}_K(\Omega)$.*

De esta topología nos interesa fundamentalmente la caracterización de las sucesiones convergentes. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 6.1. *Una sucesión $(\varphi_n)_n$ es una sucesión convergente en $\mathcal{D}(\Omega)$ si y solo si:*

a) El soporte de φ_n permanece en un compacto fijo K de Ω para todo n.
b) Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^d$ se tiene convergencia uniforme siguiente

$$\sup_{x\in\Omega,\, \alpha\in\mathbb{N}^d} |\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{6.2}$$

Observación 6.2. *Puesto que en la práctica la anterior caracterización es lo que utilizaremos, podríamos haber definido simplemente la convergencia de funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$ mediante las condiciones del teorema 6.1 sin hacer referencia a la topología límite inductiva de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Para demostrar el teorema 6.1 utilizaremos el lema siguiente:

Lema 6.1. *Si A es un subconjunto acotado de $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces existe un conjunto compacto K en Ω para el que $A \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$.*

Demostración:

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $A \not\subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ para ningún compacto $K \subset \Omega$. Veremos que A no puede ser acotado, es decir (según la definición 2.13) demostraremos que podemos construir un entorno W del origen en $\mathcal{D}(\Omega)$ de manera que $A \nsubseteq nW$ para cualquier n.

Sea una sucesión de conjuntos compactos $(K_n)_n$ tales que $K_n \subsetneq K_{n+1}$ y $\Omega = \bigcup_n K_n$. Existirá una sucesión $(\varphi_n)_n \in A$ y una sucesión $(x_n)_n \subset \Omega$ tal que $\varphi_n(x_n) \neq 0$ con $x_n \notin K_n$ y $x_n \in K_{n+1}$.

Sea

$$W = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| < \frac{|\varphi_n(x_n)|}{n};\ n = 1,2,3,...\}$$

W es un entorno del origen en $\mathcal{D}(\Omega)$ pues $W \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ es un entorno del origen de $\mathcal{D}_K(\Omega)$: En efecto, utilizando la propiedad (2.20), como cada K_n contiene un número finito de puntos, a saber, $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ de puntos entre los x_m; $m = 1,2,...,n,...$ tendremos

$$W \cap \mathcal{D}_{K_n}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}_{K_n}(\Omega);\ \sup_{x\in K_n} |\varphi(x)| < \frac{|\varphi_n(x_m)|}{m};\ m = 1,2,...,n-1\}$$

Por otra parte tenemos $\varphi_n \notin nW$, pues si $\phi \in nW$, es $\phi = n\varphi$ con $\varphi \in W$, es decir $\sup_{x\in\Omega} |\phi(x)| = n \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| < |\varphi_n(x_n)|$. Ahora bien $\varphi_n \notin nW$ pues si así fuera tendríamos

$$|\varphi_n(x_n)| \leq \sup_{x\in\Omega} |\varphi_n(x)| < |\varphi_n(x_n)|$$

que es una contradicción. Lo que demuestra que $A \nsubseteq nW$ para cualquier n y por lo tanto A no está acotado.

■

Demostración del teorema 6.1:
Sea $(\varphi_n)_n$ una sucesión convergente en $\mathcal{D}(\Omega)$, y sea φ el límite. Por la propiedad 2.14 la sucesión $(\varphi_n)_n$ es acotada y también el conjunto formado por todos los términos de la sucesión con su límite $\{\varphi_n;\ n = 1,2,...\} \bigcup \{\varphi\}$. Gracias al lema 6.1 existe un conjunto compacto K en Ω para el que $\{\varphi_n;\ n = 1,2,...\} \bigcup \{\varphi\} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$, por tanto el soporte de todas las funciones φ_n y el del límite φ están en K. Por otra parte si si $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, por el teorema 2.11 tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo entero m, existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces

$$p_{K,m}(\varphi_n - \varphi) < \varepsilon$$

o lo que es lo mismo para todo $\varepsilon > 0$ y todo multientero $\alpha \in \mathbb{N}^d$, existe n_0 tal que si $n > n_0$ se tiene

$$\sup_{x\in K\ \alpha\in\mathbb{N}^d} |\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)|$$
$$= \sup_{x\in \Omega\ \alpha\in\mathbb{N}^d} |\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| < \varepsilon$$

que es otra manera de escribir (6.2). Es decir se tiene la convergencia uniforme de la función y todas sus derivadas parciales.

Recíprocamente si se cumplen las propiedades a) y b) del enunciado del teorema se deduce que la sucesión $(\varphi_n)_n$ es convergente en $\mathcal{D}$ pues se verifica

$$p_{K,m}(\varphi_n - \varphi) < \varepsilon$$

y según el teorema 2.11 esto es equivalente a la convergencia en $\mathcal{D}_K(\Omega)$ y por lo tanto en $\mathcal{D}$ ya que todos los soportes están en K y todas las funciones están en $\mathcal{D}_K$.

■

Definición 6.3. *Se denomina espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$, sobre Ω, al dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, el espacio de las formas lineales continuas sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Según el corolario 2.6 una forma lineal continua $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ es una distribución si y solo si la restricción $T|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to \mathbb{R}$ es continua para cada K conjunto compacto de Ω.

Utilizaremos la siguiente notación usual para espacios duales: El valor de una distribución T cuando se aplica a la función φ, lo escribiremos $< T, \varphi >$.

Tenemos la siguiente caracterización la continuidad de la formas lineales en $\mathcal{D}$:

Teorema 6.2. *Una forma lineal de $T : \mathcal{D} \to K$ es continua, y por lo tanto $T \in \mathcal{D}'$, si y solo si, para toda sucesión $(\varphi_n)_n$ en $\mathcal{D}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$$

resulta

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle \tag{6.3}$$

Demostración:

Sabemos que una aplicación lineal $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ es continua, si y solo si, la restricción $T : \mathcal{D}_K \to \mathbb{R}$ es continua para todo compacto $K \subset \Omega$.

Sea $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ en $\mathcal{D}$. El soporte de las φ_n permanece en un compacto fijo K y $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ en $\mathcal{D}_K$.

Ahora bien $\mathcal{D}_K$ es metrizable, en consecuencia la restricción de T a $\mathcal{D}_K$ es una forma lineal que es continua, si y solo si, para toda sucesión $(\varphi_n)_n$ en $\mathcal{D}_K$ tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ resulta $\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

■

Dotaremos a $\mathcal{D}'(\Omega)$ con la topología débil (véase la noción de topología débil en la subsección 2.3.2 en el capítulo 2) generada por la familia $\{\langle ., \varphi \rangle;\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ de formas lineales siguientes:

$$\begin{aligned} \langle ., \varphi\rangle : & \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathbb{R} \\ & T \to \langle T, \varphi\rangle \end{aligned}$$

La familia de seminormas $\{|\langle ., \varphi\rangle|;\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ genera una topología localmente convexa sobre $\mathcal{D}'(\Omega)$. Para esta topología tendremos que una sucesión de distribuciones $(T_n)_n$ tiene como límite la distribución T si se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Ejemplos:

1. Delta de Dirac:
   Sea $a \in \Omega$. La delta de Dirac en a, δ_a se define mediante

   $$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

   En efecto, la aplicación es lineal y la continuidad se comprueba fácilmente. Sea $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Tenemos

   $$\langle \delta, \varphi_n\rangle = \varphi_n(a) \to \varphi(a) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

   pues el soporte de las φ_n está en un conjunto compacto K y la convergencia de la sucesión $(\varphi_n)_n$ es uniforme y por lo tanto también converge en cada punto, en particular en el punto a.
2. Espacio de funciones de cuadrado integrable $L^2(\Omega)$:
   Recordemos que $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medibles; } \int_\Omega f^2 dx < \infty\}$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(f, g)_{0,\Omega} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ y la correspondiente norma asociada $\|f\|_{0,\Omega} = \left(\int_\Omega f(x)^2 dx\right)^{1/2}$. Además $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$. A cada $f \in L^2(\Omega)$ le asociamos la distribución T_f definida por:

   $$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{6.4}$$

   Verifiquemos que T_f es efectivamente una distribución. Primero la T_f está bien definida pues al ser las funciones $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ de soporte compacto y de clase $C^\infty(\Omega)$ son funciones de $L^2(\Omega)$ y tenemos

   $$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx = \int_{sop(\varphi)} f(x)\varphi(x)\, dx < \infty$$

   Por otra parte es inmediato ver que es una aplicación lineal. También es continua. En efecto, sea $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$.

   $$|\langle T_f, \varphi_n - \varphi\rangle| = |\int_\Omega f(x)(\varphi_n(x) - \varphi(x))\, dx| \le ||f||_{0,\Omega}||\varphi_n - \varphi||_{0,\Omega} \to 0$$

pues, sea K un conjunto compacto conteniendo los soportes de φ_n y φ,

$$||\varphi_n - \varphi||_{0,\Omega}^2 = \int_K (\varphi_n(x) - \varphi(x))^2 \, dx \leq \sup_{x \in K} (\varphi_n(x) - \varphi(x))^2 \mu(K) \to 0$$

pues la convergencia en $\mathcal{D}(\Omega)$ implica en particular la convergencia uniforme de funciones.

Veamos cómo se puede identificar $L^2(\Omega)$ con un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir, consideraremos las funciones de $L^2(\Omega)$ como distribuciones.

Teorema 6.3. *La aplicación lineal*

$$T : L^2(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$
$$f \to T_f$$

que asigna a cada función f la correspondiente distribución asociada T_f definida mediante (6.4) es inyectiva y continua.

Demostración:

Es inmediato verificar que T es lineal. Por otra parte,

- T es inyectiva: Sean $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ tales que $T_{f_1} = T_{f_2}$. Entonces $\langle T_{f_1}, \varphi \rangle = \langle T_{f_1}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ es decir, $(f_1, \varphi)_{0,\Omega} = (f_2, \varphi)_{0,\Omega} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$ resulta $(f_1, v) = (f_2, v) \quad \forall v \in L^2(\Omega)$, de donde $f_1 = f_2$.
- T es continua: Utilizando el teorema 2.12, T es continua si y solo si para toda seminorma de $\mathcal{D}'(\Omega)$, $|\langle . , \varphi \rangle|$ donde $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tenemos

$$|\langle T(f), \varphi \rangle| = |\langle T_f, \varphi \rangle| \leq C||f||_{0,\Omega}$$

En efecto, sea $f \in L^2(\Omega)$ tenemos para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = |(f, \varphi)_{0,\Omega}| \leq ||\varphi||_{0,\Omega} ||f||_{0,\Omega} = C||f||_{0,\Omega}$$

donde $C = ||\varphi||_{0,\Omega}$.

■

Corolario 6.1. *Sea* $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$ en $L^2(\Omega)$ *entonces*

$$\text{lím} \, T_{f_n} = T_f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Demostración:

Si $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$ en $L^2(\Omega)$ tendremos en particular

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi)_{0,\Omega} = (f, \varphi)_{0,\Omega} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \langle T_f\, \varphi\rangle$$

que es lo mismo que decir

$$\lim T_{f_n} = T_f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

■

Estas propiedades permiten identificar las funciones de $L^2(\Omega)$ con un subespacio de las distribuciones.

Otros espacios de funciones se pueden identificar con un subespacio del espacio de las distribuciones. Por ejemplo el espacio de funciones localmente integrables:

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medibles; } \int_K |f(x)|\, dx < \infty \text{ para todo } K \text{ compacto de } \Omega\}$$

A cada $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ le asociamos la distribución

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

El espacio $L^1_{loc}(\Omega)$ es un espacio localmente convexo cuya topología está definida por la familia de seminormas

$$p_K(f) = \int_\Omega |f(x)|\, dx \tag{6.5}$$

Dejamos como ejercicio 6.1 el demostrar que la aplicación T_f está bien definida y es una distribución.

En particular las funciones continuas definidas en un abierto $C^0(\Omega)$ son funciones $L^1_{loc}(\Omega)$ pues las funciones continuas están acotadas en los compactos. Por lo tanto a cada función continua le podemos asociar una distribución de la manera antes indicada.

Derivación en el sentido de las distribuciones

Definición 6.4. *Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución, se define la derivada de T respecto a x_i en el sentido de las distribuciones, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, como la siguiente distribución:*

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

De manera general, sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución y $\alpha \in \mathbb{N}^d$ un multientero, se define:

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Observemos que esta definición generaliza el concepto clásico de derivada: Sea $f \in C^1(\Omega)$, podemos calcular $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en el sentido clásico o bien en el sentido de distribuciones, es decir, $\frac{\partial T_f}{\partial x_i}$ siendo T_f la distribución asociada a f por la aplicación

$$\begin{aligned} C^1(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega) \\ f &\to T_f \end{aligned}$$

donde

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx$$

y tendremos también

$$\begin{aligned} C^0(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega) \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} &\to T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \end{aligned}$$

Veamos que los dos conceptos coinciden:

Propiedad 6.1. *Si $f \in C^1(\Omega)$, su derivada clásica coincide con su derivada en el sentido de las distribuciones, es decir*

$$T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial T_f}{\partial x_i}$$

Demostración:

En efecto, para toda función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \\ &= -\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\, dx = \langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la fórmula de Green para funciones clásicas y hemos tenido en cuenta que φ se anula en la frontera de Ω

■

Una propiedad importante de la derivación de distribuciones es que la aplicación derivada es una aplicación continua.

Propiedad 6.2. *La aplicación*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{D}'(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\to \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{aligned}$$

es continua.

Demostración:

Utilizando el teorema 2.12, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ es continua, pues para toda seminorma $|\langle . ,\varphi\rangle|$; con $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, existe una seminorma $|\langle . ,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\rangle|$ en el espacio de partida $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$|\langle\frac{\partial T}{\partial x_i},\varphi\rangle| = |\langle T,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle|$$

Se verifica la hipótesis del teorema 2.12 con la constante $C = 1$.

■

De la propiedad anterior se deduce la continuidad secuencial, que también podemos comprobar directamente. Si $(T_n)_n$ es una sucesión en $\mathcal{D}'(\Omega)$ que converge hacia la distribución T, es decir, para toda función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tenemos

$$\langle T_n,\varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T,\varphi\rangle$$

Para la sucesión de derivadas resulta

$$\langle\frac{\partial T_n}{\partial x_i},\varphi\rangle = -\langle T_n,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} -\langle T,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle = \langle\frac{\partial T}{\partial x_i},\varphi\rangle$$

pues $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(\Omega)$.

De la definición se deduce inmediatamente que una distribución es infinitamente derivable en el sentido de las distribuciones. Y de la propiedad 6.2 se deduce también inmediatamente la propiedad

Propiedad 6.3. *La aplicación*

$$\begin{aligned}\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega)\\ T &\to \partial^\alpha T\end{aligned}$$

es continua para todo $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Por ejemplo para calcular la derivada de la distribución δ de Dirac procedemos del siguiente modo: Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle\delta',\varphi\rangle = -\langle\delta,\varphi'\rangle = -\varphi'(0)$$

de modo que δ' es la distribución que a toda función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ le hace correponder el número $-\varphi'(0)$. En los ejercicios 6.2, 6.3, 6.4 y 6.5 se proponen algunos ejercicios sobre derivación de distribuciones.

6.2. El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$

Sea $f \in L^2(\Omega)$ que puede ser o no derivable en el sentido clásico, pero entendida como distribución, $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, podemos derivarla en el sentido de las distribuciones $\frac{\partial T_f}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \leq i \leq d$. En general, esta distribución no está en $L^2(\Omega)$, pero si existe una función $g \in L^2(\Omega)$ tal que $T_g = \frac{\partial T_f}{\partial x_i}$ entonces ecribiremos $g = \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ en el sentido de las distribuciones, cumpliéndose

$$\int_\Omega g\varphi dx = \langle T_g, \varphi\rangle = \langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \varphi\rangle = -\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Definición 6.5. *Se llama espacio de Sobolev de orden 1 sobre* Ω *al espacio,*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\ 1 \leq i \leq d\}$$

donde las derivadas son en el sentido de las distribuciones.

Con las notaciones anteriores observemos que para las funciones de $H^1(\Omega)$ lo que estamos diciendo es

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

Se dota a este espacio del siguiente producto escalar,

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega (uv + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i})\, dx$$

y la correspondiente norma asociada,

$$\|u\|_{1,\Omega} = (u,u)_{1,\Omega}^{1/2} = \Big(\int_\Omega \big(u^2 + \sum_{i=1}^d (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2\big)\, dx\Big)^{1/2}$$

Teorema 6.4. $H^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert con la norma* $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Demostración:

Recordemos que un espacio de Hilbert es un espacio vectorial dotado de un producto escalar que es completo para la norma asociada, es decir en el que toda sucesión de Cauchy es convergente. Basta pues demostrar que en $H^1(\Omega)$ toda sucesión de Cauchy es convergente para la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Sea $(v_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$, por lo tanto,

$$\|v_n - v_m\|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega \big((v_n - v_m)^2 + \sum_{i=1}^d (\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v_m}{\partial x_i})^2\big)\, dx \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

lo cual implica,

$$\int_\Omega (v_n - v_m)^2 dx \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$
$$\int_\Omega \sum_{i=1}^d (\tfrac{\partial v_n}{\partial x_i} - \tfrac{\partial v_m}{\partial x_i})^2 dx \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto, las sucesiones $(v_n)_{n=1}^\infty$ y $(\frac{\partial v_n}{\partial x_i})_{n=1}^\infty$ para $i = 1, \ldots, d$, entendidas como sucesiones de $L^2(\Omega)$ son de Cauchy. Como $L^2(\Omega)$ es un espacio completo, estas sucesiones son convergentes en este espacio, es decir existen funciones v y v_i, $1 \leq i \leq d$, en $L^2(\Omega)$, tales que,

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$$
$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} v_i, \ 1 \leq i \leq d$$

Basta demostrar que $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq d$, en el sentido de las distribuciones. Puesto que la inclusión canónica de $L^2(\Omega)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es continua, la convergencia de las sucesiones en $L^2(\Omega)$ implica la convergencia en $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir,

$$T_{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} T_v,$$
$$T_{\frac{\partial v_n}{\partial x_i}} \xrightarrow[n\to\infty]{} T_{v_i}, \ 1 \leq i \leq d.$$

Por otro lado, la continuidad de la derivada en el sentido de las distribuciones implica,

$$\frac{\partial T_{v_n}}{\partial x_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial T_v}{\partial x_i}, \ 1 \leq i \leq d.$$

Como además $\frac{\partial T_{v_n}}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial v_n}{\partial x_i}}$, $1 \leq i \leq d$ por ser $v_n \in H^1(\Omega)$, pasando al límite y siendo el límite único tendremos $\frac{\partial T_v}{\partial x_i} = T_{v_i}$, $1 \leq i \leq d$ es decir $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq d$, en el sentido de las distribuciones.

■

Teorema 6.5. $H^1(\Omega)$ *es separable, es decir, tiene una parte densa numerable.*

Demostración:

La demostración de este resultado se basa en las siguientes propiedades de los espacios separables:

1. El producto cartesiano de espacios separables es separable.
2. Un subespacio de un espacio métrico separable es separable (Propiedad 1.5).

$L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable, entonces el espacio producto $(L^2(\Omega))^{d+1}$ con la estructura hilbertiana producto es separable. Por otro lado, la aplicación,

$$J : v \mapsto (v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_d})$$

de $H^1(\Omega)$ en $(L^2(\Omega))^{d+1}$ es una isometría, puesto que,

$$\|Jv\|_{(L^2(\Omega))^{d+1}} = (\|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{d} \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} = \|v\|_{1,\Omega}.$$

Identificando $H^1(\Omega)$ con $J(H^1(\Omega))$, al ser este un subespacio del espacio separable $(L^2(\Omega))^{d+1}$, es separable y por tanto $H^1(\Omega)$ es separable.

■

6.3. El espacio $H_0^1(\Omega)$

Sabemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ es un cierto subespacio de $L^2(\Omega)$. Nos preguntamos si $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H^1(\Omega)$. En general esto no es cierto, pero si $\Omega = \mathbb{R}^d$ entonces sí es cierto. Naturalmente cuando decimos que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$ nos referimos a $\mathcal{D}(\Omega)$ con la norma inducida por $L^2(\Omega)$ y cuando nos preguntamos si $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H^1(\Omega)$ nos referimos a $\mathcal{D}(\Omega)$ con la norma inducida por $H^1(\Omega)$.

Definición 6.6. *Se define $H_0^1(\Omega)$ como la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Lo escribiremos de la siguiente manera*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

Teorema 6.6. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^d)$, es decir, $H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración:

La demostración de este resultado se divide en dos partes: Truncamiento y regularización. Con la regularización demostramos que el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en el espacio de las funciones de $H^1(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto y con el truncamiento demostramos que este espacio es denso en $H^1(\mathbb{R}^d)$.

1- Truncamiento

Queremos aproximar las funciones de $H^1(\mathbb{R}^d)$ por funciones de $H^1(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto. Para ello introducimos una función $M \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que:

$$\begin{cases} M(x) = 1 & \text{para } |x| \leq 1 \\ 0 < M(x) < 1 & \text{para } 1 < |x| < 2 \\ M(x) = 0 & \text{para } |x| > 2 \end{cases}$$

Ahora, para todo número real $a > 0$, definimos la función $M_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dada por:

$$M_a(x) = M\Big(\frac{x}{a}\Big) \quad \text{donde } \frac{x}{a} = \Big(\frac{x_1}{a}, \dots, \frac{x_d}{a}\Big).$$

Entonces, si $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, la función $M_a \cdot v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ es de soporte compacto pues su soporte es el de M_a. Veamos ahora que $M_a \cdot v \xrightarrow[R\to\infty]{} v$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$ y habremos concluido. Para ello tenemos que demostrar dos cosas:

1. $M_a \cdot v \xrightarrow[a\to\infty]{} v \quad$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$
2. $\frac{\partial(M_a\cdot v)}{\partial x_i} \xrightarrow[a\to\infty]{} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad$ en $L^2(\mathbb{R}^d) \quad$ para $i = 1, \ldots, d$

1. Tenemos que ver que $\|M_a \cdot v - v\|_{0,\mathbb{R}^d} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, en efecto,

$$\begin{aligned}
&\|M_a \cdot v - v\|_{0,\mathbb{R}^d}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (M_a \cdot v - v)^2\, dx \\
&= \int_{|x|<a} (M_a \cdot v - v)^2 dx + \int_{|x|\geq a} (M_a \cdot v - v)^2\, dx \\
&= \int_{|x|\geq a} (M_a \cdot v - v)^2 dx \leq \int_{|x|\geq a} v^2\, dx \xrightarrow[a\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

2. Calculemos $\frac{\partial(M_a\cdot v)}{\partial x_i}$ en el sentido de las distribuciones.

$$\frac{\partial(M_a \cdot v)}{\partial x_i} = \frac{\partial M_a}{\partial x_i} \cdot v + M_a \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Veamos el primer término. Tenemos que $\frac{\partial M_a}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{a}\frac{\partial M}{\partial x_i}\left(\frac{x}{a}\right)$, por tanto para todo $i = 1, \ldots, d$, se tiene que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\frac{\partial M_a}{\partial x_i}(x)| \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$$

Así podemos concluir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial M_a}{\partial x_i} \cdot v\right)^2 dx \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\frac{\partial M_a}{\partial x_i}(x)|^2 \int_{\mathbb{R}^d} v^2 dx \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$$

Finalmente el segundo término, utilizando el mismo razonamiento que en la parte 1, tomando $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ en el lugar de v, resulta

$$M_a \frac{\partial v}{\partial x_i} \xrightarrow[a\to\infty]{} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^d)$$

2- Regularización

Queremos demostrar que toda función $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto se puede escribir como límite en $H^1(\mathbb{R}^d)$ de funciones $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Elegimos ρ_ε como en el teorema 5.25. Consideramos la función v_ε definida por

$$v_\varepsilon(x) = (v * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} v(y)\rho_\varepsilon(x-y)\, dy$$

Sabemos, utilizando el teorema 5.39 con $p = 2$

$$v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} v \text{ en } L^2(\mathbb{R}^d)$$

Por las propiedades del producto de convolución (véase teorema 5.37) y por ser $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tenemos que v_ε es C^∞. También aplicando el corolario 5.12, como v y ρ_ε son de soporte compacto, v_ε es de soporte compacto. Por lo tanto $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Aplicando el mismo razonamiento a $\frac{\partial v}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} * \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ en } L^2(\mathbb{R}^d)$$

Y así tenemos que $v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} v$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$.

■

Hemos utilizado la siguiente propiedad para la derivación de un producto de convolución en el sentido de las distribuciones:

Propiedad 6.4. *Sea $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ y $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, demostrar que para las derivadas en el sentido de distribuciones se verifica $v * u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\frac{\partial (v * u)}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} * u \tag{6.6}$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 6.6 ■

Teorema 6.7. *(de prolongación)*
Sea $v \in H_0^1(\Omega)$ la función

$$\tilde{v} = \begin{cases} v \text{ si } x \in \Omega \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega \end{cases}$$

pertenece a $H^1(\mathbb{R}^d)$. Es decir la función $\tilde{v}$, prolongación de v por 0 *de una función de $H_0^1(\Omega)$, es una función de $H^1(\mathbb{R}^d)$.*

Para la demostración utilizaremos el siguiente teorema de prolongación de aplicaciones lineales continuas entre espacios normados.

Teorema 6.8. *Sea E un subespacio de un espacio normado $\overline{E}$, con E denso en $\overline{E}$ y sea B un espacio de Banach. Consideremos una aplicación lineal y continua $T : E \longrightarrow B$. Existe una y solo una aplicación lineal continua $\tilde{T} : \overline{E} \longrightarrow B$ verificando $T(x) = \tilde{T}(x)$ para todo $x \in E$. Se tiene además que $||\tilde{T}|| = ||T||$.*

Demostración:

Sea $x \in \overline{E}$, existirá una sucesión $(x_n)_n$ en E tal que $x_n \to x$ en $\overline{E}$. Siendo T continua la sucesión $(T(x_n))_n \subset B$ es de Cauchy en B. Siendo B completo llamaremos $T(x)$ al límite de $(T(x_n))_n$ en B. La aplicación así definida es lineal y continua y prolonga a T de forma única (En el ejercicio 6.7 se completa la demostración).

■

Demostración del teorema 6.7

Para esta demostración utilizaremos el teorema de prolongación de aplicaciones lineales continuas 6.8

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la función $\tilde{\varphi}$ prolongación por 0 a $\mathbb{R}^d - \Omega$ de φ

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi \text{ si } x \in \Omega \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega \end{cases}$$

es una función de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pues φ en la frontera de Ω es 0. Por tanto $\tilde{\varphi}$ es de soporte compacto y C^∞ diferenciable en todo $\mathbb{R}^d$. Además $\|\tilde{\varphi}\|_{1,\mathbb{R}^d} = \|\varphi\|_{1,\Omega}$. Por tanto la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^d) \\ \varphi &\longmapsto \tilde{\varphi} \end{aligned}$$

es lineal y continua y es de hecho es una isometría. Por otro lado $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ y aplicando el teorema 6.8 esta aplicación se extiende por continuidad de forma única a todo el espacio $H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \tilde{T} : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^d) \\ v &\longmapsto \tilde{v} \end{aligned}$$

Vamos a comprobar finalmente que

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{c.t.p. de } \Omega \\ 0 & \text{c.t.p. de } \mathbb{R}^d \backslash \Omega \end{cases} \tag{6.7}$$

En efecto, sea $v \in H_0^1(\Omega)$; existe una sucesión $(\varphi_n)_n$ de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ que converge a v en $H_0^1(\Omega)$, y también en particular converge en $L^2(\Omega)$. Por la continuidad de la aplicación $\tilde{T}$, $(\tilde{\varphi_n})_n$ converge a $\tilde{v}$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$ y en particular en $L^2(\mathbb{R}^d)$. En consecuencia de la sucesión $(\tilde{\varphi_n})_n$ podemos extraer una subsucesión $(\tilde{\varphi_m})_m$ que converge a $\tilde{v}$ casi por todas partes en $\mathbb{R}^d$. Por tanto, $\tilde{\varphi_m} \to \tilde{v}$ c.t.p. en $\mathbb{R}^d$ y de ahí obtenemos (6.7).

■

Propiedad 6.5. *Fórmula de Green para funciones de $H_0^1(\Omega)$:*

$$\forall\, u, v \in H_0^1(\Omega) \textit{ se tiene } \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx \quad \forall\, i = 1, \ldots, d$$

Demostración:

La demostración de basa en la fórmula de Green para funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ (integración por partes) y la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$.

Por la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, existen sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ que convergen respectivamente a u y v en la norma de $H^1(\Omega)$, por tanto $\forall\, i = 1, \ldots, d$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{en} \quad L^2(\Omega),$$
$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{en} \quad L^2(\Omega).$$

Aplicando la fórmula de Green clásica a las funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n dx + \int_\Gamma u_n v_n \eta_i ds$$

donde η_i la i-ésima componente del vector normal unitario exterior de Ω. Como son funciones de soporte compacto, la integral sobre la frontera es nula y pasando al límite obtenemos el resultado buscado.

■

Podemos ver que en general $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$. En efecto, sea $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$\begin{aligned} v : (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Evidentemente para $a \neq \infty$ y $b \neq \infty$ resulta $v \in H^1(a,b)$. Derivando la función $\tilde{v} \notin H^1(\mathbb{R})$ obtenemos $\tilde{v}' = \delta_a - \delta_b$ lo que implica que $v \notin H_0^1(a,b)$.

Definición: Se define la siguiente seminorma sobre $H^1(\Omega)$:

$$v \mapsto |v|_{1,\Omega} = \Big(\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2\, dx\Big)^{1/2} \tag{6.9}$$

Esta aplicación es una seminorma pero no es una norma en $H^1(\Omega)$ porque hay funciones de $H^1(\Omega)$ que no son nulas pero sus derivadas si lo son, como por ejemplo la función (6.8). Sin embargo veremos a continuación que si Ω es un conjunto acotado, la seminorma (6.9) es una norma en $H_0^1(\Omega)$ equivalente a la norma inducida por $H^1(\Omega)$.

Teorema 6.9. *(Desigualdad de Poincaré)*
Si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$, existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que,

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega) \quad \|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega)(\sum_{i=1}^{d} \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \tag{6.10}$$

Demostración:

Por la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, basta demostrar este resultado para funciones $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, luego tomando sucesiones convergentes quedará demostrado para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Como Ω está acotado, podemos suponer que está contenido en una banda

$$\{x = (x', x_d),\, x' = (x_1, \ldots, x_{d-1}),\, a \le x_d \le b\}$$

Sea $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\widetilde{v}$ su prolongación por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Obviamente $\widetilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y se tiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\widetilde{v}(x', x_d) = \int_a^{x_d} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi)d\xi \le \Big(\int_a^{x_d} \big(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi)\big)^2 d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int_a^{x_d} 1^2 d\xi\Big)^{1/2}$$

Tomando el cuadrado del valor absoluto

$$|\widetilde{v}(x', x_d)|^2 \le (x_d - a)\int_a^{x_d} \Big|\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi)\Big|^2 d\xi \le (x_d - a)\int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x', \xi)\Big|^2 d\xi$$

integrando respecto a la variable x'

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\widetilde{v}(x', x_d)|^2 dx' \le (x_d - a)\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x)\Big|^2 dx$$

finalmente integrando respecto a la variable x_d

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{v}(x)|^2 dx = \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\widetilde{v}(x', x_d)|^2 dx' dx_d \le \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x)\Big|^2 dx$$

obteniendo

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,\Omega}^2 = \|\widetilde{v}\|_{0,\mathbb{R}^d}^2 &\le \tfrac{1}{2}(b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\tfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x)\Big|^2 dx = \tfrac{1}{2}(b-a)^2 \|\tfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}\|_{0,\Omega}^2 \\ &\le \tfrac{1}{2}(b-a)^2 \textstyle\sum_{i=1}^d \|\tfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2 = \tfrac{1}{2}(b-a)^2 |v|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada, concluimos

$$\|v\|_{0,\Omega} \le \frac{|b-a|}{\sqrt{2}} |v|_{1,\Omega}$$

■

Observar que en la demostración anterior basta exigir que Ω sea acotado en una dirección.

Supongamos que Ω es acotado y definimos v tal que $v(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$. Esta función es de $H^1(\Omega)$ pero no verifica la desigualdad de Poincaré. Por tanto, podemos concluir lo siguiente:

Corolario 6.2. *Si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$, entonces $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio propio de $H^1(\Omega)$, es decir $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$.*

Tenemos también

Corolario 6.3. *Si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$, entonces la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ es una norma sobre $H_0^1(\Omega)$ equivalente a la norma inducida por $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, es decir existen constantes C_1 y C_2 mayores que 0 tales que*

$$C_1\|v\|_{1,\Omega} \le |v|_{1,\Omega} \le C_2\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración:

1. Es evidente que $C_2 = 1$, en efecto,

$$|v|_{1,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 dx \leq \int_\Omega \big(u^2 + \sum_{i=1}^{d} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2\big)\, dx = \|v\|_{1,\Omega}^2$$

2. Como Ω es acotado y $v \in H_0^1(\Omega)$, utilizando la desigualdad de Poincaré obtenemos $C_1 = 1/\sqrt{C^2(\Omega)+1}$ despejando de:

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{d} \Big\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big\|_{0,\Omega}^2 \leq (C^2(\Omega)+1) \sum_{i=1}^{d} \Big\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big\|_{0,\Omega}^2 = (C^2(\Omega)+1)|v|_{1,\Omega}^2$$

donde $C(\Omega)$ es la constante de desigualdad de Poincaré.

■

Hemos visto en la propiedad 6.5 que las funciones de $H_0^1(\Omega)$ se comportan como funciones que en la frontera de Ω son nulas. Por otra parte sabemos que las funciones de $L^2(\Omega)$ (o más en general las funciones de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$) están definidas c.t.p. de Ω es decir que no podemos asignarles un valor preciso en conjuntos que sean de medida nula. Por tanto no tiene sentido hablar del valor de una función de $L^p(\Omega)$ en la frontera Γ de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, pues Γ es un conjunto de medida de Lebesgue nula en $\mathbb{R}^d$. Sin embargo vamos a ver, que si la frontera Γ de Ω verifica unas mínimas propiedades de regularidad, podemos dar un sentido preciso al valor sobre Γ de una función de $H^1(\Omega)$. Este es el objetivo de la siguiente sección.

6.4. Teorema de la traza

En esta sección seguimos esencialmente la exposición de [9].

Sea $\Gamma = \partial\Omega$ la frontera de Ω. Dada una función $v \in H^1(\Omega)$, queremos definir su valor en la frontera Γ. La idea fundamental es utilizar la prolongación por continuidad de funciones clásicas.

Para $d = 1$, se tiene $H^1(I) \subset C^0(\overline{I})$, más precisamente, toda función $v \in H^1(I)$ tiene un representante continuo en $\overline{I}$ (ver [3]) basta tomar el valor de este representante en los extremos del intervalo I para definir $v|_\Gamma$. Sin embargo para $d \geq 2$ las funciones de $H^1(\Omega)$ no son en general continuas y hacen falta argumentos más sofisticados para definir su valor en la frontera. La idea sigue siendo la prolongación por continuidad, pero para ello necesitamos un subespacio de funciones (clásicas) continuas que sea denso en $H^1(\Omega)$. Sabemos, por definición de $H_0^1(\Omega)$, que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ aunque hemos visto que en general $H^1(\Omega) \neq H_0^1(\Omega)$.

Definición 6.7. *Espacio $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$:*

Al conjunto de funciones reales φ definidas sobre $\overline{\Omega}$ tales que son la restricción a $\overline{\Omega}$ de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ le llamamos $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$

Es fácil ver que las funciones de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$son funciones de clase $C^\infty(\overline{\Omega})$ de soporte compacto en $\overline{\Omega}$

Nuestro objetivo es estudiar si $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ para así poder prolongar por continuidad la aplicación

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\Gamma) \\ v &\longmapsto \gamma_0 v = v|_\Gamma \end{aligned}$$

mediante la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0 : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ v &\longmapsto \tilde{\gamma}_0 v = v|_\Gamma \end{aligned}$$

y así dar sentido al valor de las funciones $v \in H^1(\Omega)$ en Γ. Esta aplicación prolongada se llama aplicación traza, y el valor de $\tilde{\gamma}_0$ de una función $v \in H^1(\Omega)$ se llama traza de v sobre Γ. Abusando de la notación a la aplicación extendida $\tilde{\gamma}_0$ la denotaremos también γ_0

$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ será denso en $H^1(\Omega)$ para Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera Γ *suficientemente regular*. Veamos cuáles son estas condiciones de regularidad suficientes.

6.4.1. Caso en que Ω es un semiespacio

Consideremos el caso $\Omega = \mathbb{R}^d_+$ donde

$$\mathbb{R}^d_+ = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > 0\}.$$

Entonces, la frontera de Ω es el hiperplano $\Gamma = \{x = (x', 0) \in \mathbb{R}^d, x' \in \mathbb{R}^{d-1}\}$.

Teorema 6.10. ***Teorema:*** *$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^d_+)$.*

Demostración:

De nuevo, esta demostración se divide en fase de truncamiento y fase de regularización.

<u>1- Truncamiento</u>

Queremos aproximar las funciones de $H^1(\mathbb{R}^d_+)$ por funciones de $H^1(\mathbb{R}^d_+)$ con soporte compacto en $\mathbb{R}^d_+$. La demostración es igual que en el teorema 6.6 utilizando la restricción a $\mathbb{R}^d_+$ de la función $M \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ introducida en la demostración de dicho teorema.

<u>2- Regularización</u>

Queremos demostrar que toda función de $H^1(\mathbb{R}^d_+)$ con soporte compacto se puede escribir como límite en $H^1(\mathbb{R}^d_+)$ de funciones $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^d_+})$. Se procede de nuevo mediante regularización por convolución, pero en este caso se plantean algunas dificultades.

Sea $v \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$ con soporte compacto en $\mathbb{R}^d_+$. Para aplicar convolución necesitamos que sea una función ampliada de todo $\mathbb{R}^d$ y luego volver a restringir a $\mathbb{R}^d_+$ el producto de convolución. Sin embargo, si prolongamos $v \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$ por 0 a todo $\mathbb{R}^d$, la función prolongada no pertenece a $H^1(\mathbb{R}^d)$. Para resolver esta dificultad trasladamos la función.

Sea w_h la siguiente función $w_h(x', x_d) = \tau_{-h} v = v(x', x_d + h)$, definida para $x_d \geq -h$, y consideremos $v_h = w_h|_{\mathbb{R}^d_+}$. Veamos que $v_h \xrightarrow[h\to 0]{} v$ en $H^1(\mathbb{R}^d_+)$, para ello basta ver que $v_h \xrightarrow[h\to 0]{} v$ en $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ y observar que $\tau_{-h}\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{-h} v)$. Para demostrar que $v_h \xrightarrow[h\to 0]{} v$ en $L^2(\mathbb{R}^d_+)$, basta demostrarlo para funciones $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d_+)$ y despues utilizar un razonamiento de densidad para las funciones de $L^2(\mathbb{R}^d_+)$.

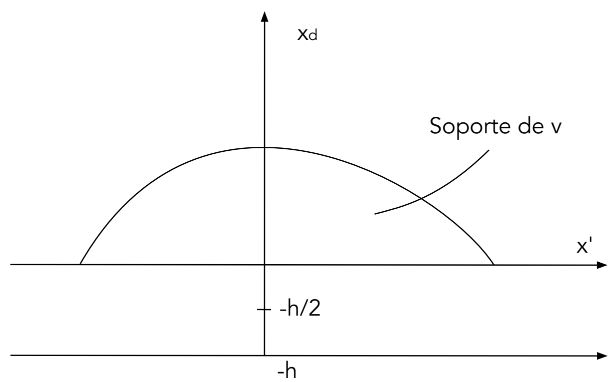

Figura 6.1 Funcion trasladada

Consideremos pues $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d_+)$, que por tanto tiene soporte compacto dentro de $\mathbb{R}^d_+$. Podemos ampliarla por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{R}^d_+$. Designemos mediante $\widetilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ la función ampliada. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta,

$$\begin{aligned}&\left(\tau_{-h}\widetilde{v} - \widetilde{v}\right)(x) = \widetilde{v}(x', x_d + h) - \widetilde{v}(x', x_d) = \int_0^1 h \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th)dt \\ &\leq \left(\int_0^1 h^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th)\right)^2 dt\right)^{1/2} = h\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th)\right)^2 dt\right)^{1/2}\end{aligned}$$

integrando el cuadrado en todo $\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\tau_{-h}\widetilde{v} - \widetilde{v}\right)^2(x)dx \leq h^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x', x_d + th)\right)^2 dt dx \\ &= h^2 \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x)\right)^2 dx = h^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_d}(x)\right)^2 dx \leq h^2 |\widetilde{v}|^2_{1,\mathbb{R}^d} \xrightarrow[h\to 0]{} 0\end{aligned}$$

y finalmente, siendo $v_h = \tau_{-h}\widetilde{v}|_{\mathbb{R}^d_+}$, tenemos,

$$\|v_h - v\|^2_{0,\mathbb{R}^d_+} = \int_{\mathbb{R}^d_+} (v_h - v)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d_+} (\tau_{-h}\widetilde{v} - \widetilde{v})^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{-h}\widetilde{v} - \widetilde{v})^2 dx \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Una vez que hemos demostrado que $v_h \xrightarrow[h\to 0]{} v$ en $H^1(\mathbb{R}^d_+)$, podemos limitar nuestro estudio a funciones v que son restricciones a $\mathbb{R}^d_+$ de funciones $w \in H^1(\mathbb{R}^d_{-h})$ y de soporte compacto.

Sea $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d_{-h})$ tal que $\psi = 1$ en el $sop(v)$ y $\psi = 0$ cuando $x_d \leq -h/2$.

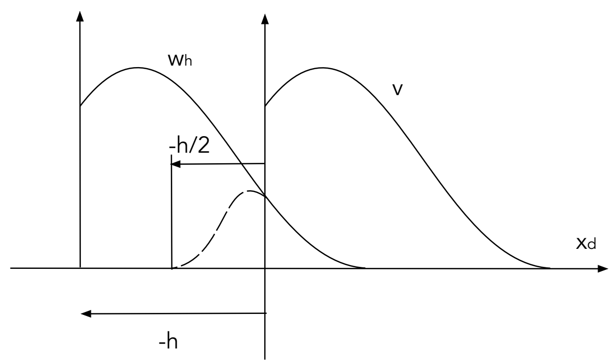

Figura 6.2 Disposicion de soportes de las funciones v, w_h y ψw_h

Naturalmente $\psi w_h \in H^1(\mathbb{R}^d_{-h})$, se anula en un entorno de la frontera de $\mathbb{R}^d_{-h}$ (ver en la figura 6.2 la disposición de soportes donde el trazo punteado corresponde a la función ψw_h. La prolongación $\widetilde{\psi w_h}$ por 0 a todo $\mathbb{R}^d$ de ψw_h pertenece a $H^1(\mathbb{R}^d)$. Ahora ya estamos en condiciones de aplicar la regularización por convolución.

Sea ρ_ε una sucesión regularizante como en el teorema 5.25. Existe una sucesión de funciones $\rho_\varepsilon * \widetilde{\psi w_h}$ tales que $\rho_\varepsilon * \widetilde{\psi w_h} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \widetilde{\psi w_h}$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$. Por las propiedades del producto de convolución, a partir de un ε suficientemente pequeño, se tiene,

$$sop(\rho_\varepsilon * \widetilde{\psi w_h}) \subset sop(\rho_\varepsilon) \cup sop(\widetilde{\psi\ w_h}) \subset \mathbb{R}^d_{-h}$$

por tanto tomando restricciones a $\mathbb{R}^d_{-h}$

$$\left(\rho_\varepsilon * \widetilde{\psi w_h}\right)|_{\mathbb{R}^d_{-h}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \psi w_h \text{ en } H^1(\mathbb{R}^d_{-h})$$

y tomando restricciones a $\mathbb{R}^d_+$

$$\left(\rho_\varepsilon * \widetilde{\psi w_h}\right)|_{\mathbb{R}^d_+} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \psi w_h|_{\mathbb{R}^d_+} \text{ en } H^1(\mathbb{R}^d_+)$$

donde naturalmente $\left(\rho_\varepsilon * \widetilde{\psi w_h}\right)|_{\mathbb{R}^d_+} \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^d_+})$

■

Lema 6.2. *Para toda función v de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ se tiene la desigualdad*

$$\|v(\cdot,0)\|_{0,\mathbb{R}^{d-1}} \le \|v\|_{1,\mathbb{R}^d_+}$$

Demostración:

Sea $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^d_+})$, por el teorema fundamental del cálculo integral,

$$|v(x',0)|^2 = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_d}|v(x',x_d)|^2\,dx_d = -2\int_0^\infty v(x',x_d)\frac{\partial v}{\partial x_d}(x',x_d)\,dx_d$$

utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$|v(x',0)|^2 \le 2\Big(\int_0^\infty |v(x',x_d)|^2 dx_d\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty |\frac{\partial v}{\partial x_d}(x',x_d)|^2\,dx_d\Big)^{1/2}$$

y la desigualdad $2ab \le a^2+b^2$,

$$|v(x',0)|^2 \le \int_0^\infty \Big(|v(x',x_d)|^2 + |\frac{\partial v}{\partial x_d}(x',x_d)|^2\Big)\,dx_d$$

de modo que concluimos integrando en x',

$$\begin{aligned}&\|v(\cdot,0)\|^2_{0,\mathbb{R}^{d-1}} = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(x',0)|^2\,dx' \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d_+}\Big(|v(x',x_d)|^2 + |\tfrac{\partial v}{\partial x_d}(x',x_d)|^2\Big)\,dx \le \|v\|^2_{1,\mathbb{R}^d_+}\end{aligned}$$

■

Como conclusión de lo anterior y aplicando el teorema de prolongación de aplicaciones lineales continuas 6.8 obtenemos el siguiente

Teorema 6.11. *Teorema de la Traza en $\mathbb{R}^d_+$:*
La aplicación lineal continua

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^d_+}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1}) \subset L^2(\mathbb{R}^{d-1}) \\ v &\longmapsto v(\cdot,0)\end{aligned}$$

se prolonga por continuidad a una aplicación lineal continua

$$\begin{aligned}H^1(\mathbb{R}^d_+) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{d-1}) \\ v &\longmapsto v(\cdot,0)\end{aligned}$$

verificándose además para toda $v \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$

$$\|v(\cdot,0)\|_{0,\mathbb{R}^{d-1}} \le \|v\|_{1,\mathbb{R}^d_+}.$$

Como hemos avanzado al principio de esta sección la aplicación así definida se llama aplicación traza y su valor γ_0 se llama valor de v sobre Γ que denotaremos también $v|_\Gamma$.

Vamos a generalizar los resultados anteriores al caso de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontera "suficientemente regular".

6.4.2. *Caso en el que* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *es un abierto de frontera "suficientemente regular"*

En primer lugar, dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ vamos a precisar la noción de frontera "suficientemente regular" de este abierto o más sencillamente la noción de abierto regular.

Definición 6.8. *Un abierto Ω de $\mathbb{R}^d$ se dice que es C^1-regular si*

a) *Ω es acotado*
b) *La frontera Γ es una variedad de clase C^1 de dimensión $d-1$.*

Recordemos suscintamente el significado de b): Decimos que Γ es una variedad de clase C^1 de dimensión $d-1$ si existe un número finito de abiertos acotados θ_i de $\mathbb{R}^d$, $0 \le i \le I$, tales que $\overline{\theta_0}$ está incluido en Ω, $\{\theta_i\}_{i=0}^I$ es un recubrimiento abierto de $\overline{\Omega}$ y para todo $i = 1,\dots,I$ existe una aplicación invertible de clase C^1, $\Phi_i : x \mapsto y = \Phi_i(x)$ de θ_i en B, bola abierta de $\mathbb{R}^d$ de radio 1, cuya aplicación inversa Φ_i^{-1} también es de clase C^1 y tal que

$$\Phi_i(\theta_i \cap \Omega) = B \cap \mathbb{R}^d_+ = \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^d, |y| < 1, y_d > 0\},$$

$$\Phi_i(\theta_i \cap \Gamma) = \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^d, |y'| < 1, y_d = 0\}.$$

Diremos que $\{\theta_i, \Phi_i\}_{i=1}^I$ es un *sistema de cartas locales* que definen Γ.

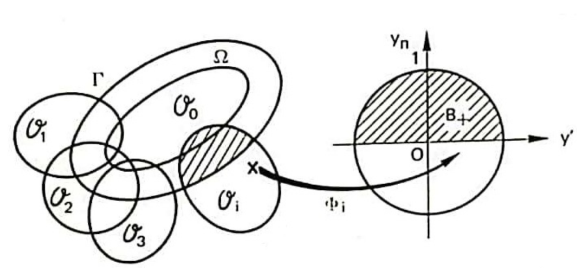

Figura 6.3 Recubrimiento abierto

Vamos a demostrar el teorema de la traza para $\Omega \in \mathbb{R}^d$ abierto C^1-regular. El resultado se puede generalizar a abiertos acotados con frontera de clase C^1 a trozos.

La demostración se hace en varias etapas, a través de los siguientes lemas:

Lema 6.3. *Si Ω es C^1-regular, existe un operador P lineal continuo llamado de* 1-prolongación *$P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$, tal que*

$$\forall\, v \in H^1(\Omega) \quad Pv = v \quad \textit{c.t.p. en } \Omega.$$

Demostración:

Veamos primero el caso de $\Omega = \mathbb{R}^d_+$ y luego por cartas locales y partición de la unidad lo extenderemos al caso de Ω un abierto C^1-regular.

Caso: $\Omega = \mathbb{R}^d_+$

Si $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^d_+})$, sea Pv su prolongación por reflexión,

$$Pv(x', x_d) = \begin{cases} v(x', x_d) & \text{si } x_d \geq 0 \\ v(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0 \end{cases}$$

Pv es continua, está en $H^1(\mathbb{R}^d)$ y se tiene,

$$\frac{\partial Pv}{\partial x_i}(x', x_d) = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', x_d) & \text{si } x_d \geq 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0 \text{ y } 1 \leq i \leq d-1 \\ -\frac{\partial v}{\partial x_d}(x', -x_d) & \text{si } x_d < 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que $\|Pv\|_{1,\mathbb{R}^d} = \sqrt{2}\|v\|_{1,\mathbb{R}^d_+}$ que nos da la continuidad de la aplicación $P : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^d_+}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset H^1(\mathbb{R}^d)$.

Como $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^d_+)$, esta aplicación se prolonga por continuidad a todo $H^1(\mathbb{R}^d_+)$, verificando que $Pv(x) = v(x)$ c.t.p. en $\mathbb{R}^d_+$.

Caso: Ω abierto C^1-regular:

Sea $\{\alpha_i\}_{i=0}^I$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{\theta_i\}_{i=0}^I$, es decir, $\alpha_i \in \mathcal{D}(\theta_i)$, para todo $i = 0, \ldots, I$ y $\sum_{i=0}^I \alpha_i = 1$. Si $v \in H^1(\Omega)$, escribimos,

$$v = \sum_{i=0}^{I} \alpha_i v,$$

y para cada $i = 0, 1, \ldots, I$ definimos $P(\alpha_i v)$ de modo que,

$$Pv = \sum_{i=0}^{I} P(\alpha_i v).$$

Por un lado, $P(\alpha_0 v) = \widetilde{\alpha_0 v}$, prolongación de $\alpha_0 v$ por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Por otro lado, para $i = 1, \ldots, I$, consideramos la función $w_i = (\alpha_i v) \circ (\Phi_i^{-1}|_{B_+})$, donde $B_+ = B \cap \mathbb{R}^d_+$. Se tiene que $w_i \in H^1(B_+)$ que es nula en un entorno de $\{y \in \partial B_+; y_d > 0\}$. Podemos prolongar w_i por 0 en $\mathbb{R}^d_+ \setminus B_+$ y obtener una función $\widetilde{w_i} \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$, y ésta a su vez prolongarla por reflexión a una función $P\widetilde{w_i} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ de soporte compacto en B. Finalmente, $P\widetilde{w_i} \circ \Phi_i$ definida en θ_i se prolonga por 0 en $\mathbb{R}^d \setminus \theta_i$ de modo que $\widetilde{P\widetilde{w_i} \circ \Phi_i}$ es una función de $H^1(\mathbb{R}^d)$. De este modo definimos $P(\alpha_i v) = \widetilde{P\widetilde{w_i} \circ \Phi_i}$ para $i = 1, \dots, I$.

Ahora es fácil verificar que la aplicación $P : v \longrightarrow \sum_{i=0}^{I} P(\alpha_i v)$ verifica las propiedades de un operador de prolongación.

■

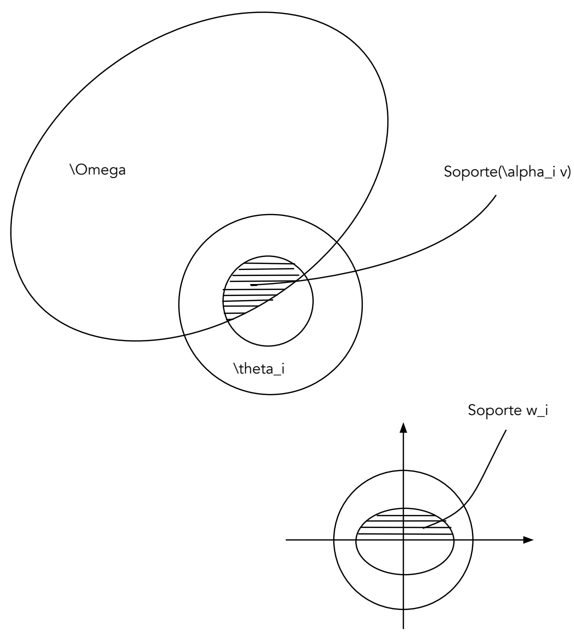

Figura 6.4 Disposicion de Soportes en Ω y en $\mathbb{R}^d_+$

Estamos en disposición de generalizar el teorema 6.6.

Teorema 6.12. *Si Ω es C^1-regular, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$.*

Demostración:

Sea $v \in H^1(\Omega)$ y $Pv \in H^1(\mathbb{R}^d)$ su prolongación a todo $\mathbb{R}^d$. Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^d)$ existe una sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Pv$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$. Sea $v_n = w_n|_{\Omega}$; la sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ en $H^1(\Omega)$.

■

A continuación utilizaremos la siguiente notación: $d\sigma$ denota la medida superficial sobre Γ, inducida por la medida Lebesgue dx. Así definimos $L^2(\Gamma)$ el conjunto de las funciones definidas sobre Γ medibles para la medida $d\sigma$ y de cuadrado integrable, con la norma $\|v\|_{0,\Gamma} = \left(\int_\Gamma v^2 d\sigma\right)^{1/2}$.

De manera equivalente, utilizando la partición de la unidad, podemos definir,

$$L^2(\Gamma) = \{v : \Gamma \to \mathbb{R}; \quad \widetilde{(\alpha_i v) \circ \Phi_i^{-1}}(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R}^{d-1}), \quad 1 \leq i \leq I\}$$

con la norma

$$[v]_{0,\Gamma} = \Big(\sum_{i=1}^{I} \|\widetilde{(\alpha_i v) \circ \Phi_i^{-1}}\|^2_{0,\mathbb{R}^{d-1}}\Big)^{1/2}$$

que es equivalente a la anterior, es decir, existen constantes C_1 y C_2 mayores que cero, tales que $C_1 [v]_{0,\Gamma} \leq \|v\|_{0,\Gamma} \leq C_2 [v]_{0,\Gamma}$.

Lema 6.4. *Si Ω es C^1-regular, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\forall\, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \quad \|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} \leq C\|v\|_{1,\Omega}.$$

Demostración:

Sea $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, utilizando la partición de la unidad $\{\alpha_i\}_{i=1}^I$ definimos en B_+ las funciones $w_i = (\alpha_i v) \circ \Phi_i^{-1}$, para $1 \leq i \leq I$. Sea $\widetilde{w_i}$ su prolongada por 0 a todo $\mathbb{R}^d_+$. Según el teorema de la traza en $\mathbb{R}^d_+$, se tiene que $\|\widetilde{w_i}(\cdot, 0)\|_{0,\mathbb{R}^{d-1}} \leq \|\widetilde{w_i}\|_{1,\mathbb{R}^d_+}$, y por las propiedades de α_i y Φ_i, se deduce $\|\widetilde{w_i}\|_{1,\mathbb{R}^d_+} \leq C_i\|v\|_{1,\Omega}$. Finalmente, por la equivalencia anterior de normas, se concluye,

$$\begin{aligned}
&\|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} \leq C_2[\gamma_0 v]_{0,\Gamma} = C_2\big(\textstyle\sum_{i=1}^I \|\widetilde{w_i(\cdot,0)}\|^2_{0,\mathbb{R}^{d-1}}\big)^{1/2} \leq \\
&\leq C_2\big(\textstyle\sum_{i=1}^I C_i^2\big)^{1/2}\|v\|_{1,\Omega} = C\|v\|_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

■

El teorema de la traza es consecuencia directa de estos tres resultados.

Teorema 6.13. *Teorema de la traza en Ω:*

Sea Ω un abierto C^1-regular de $\mathbb{R}^d$. Entonces $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ y la aplicación lineal continua $\gamma_0 : v \mapsto \gamma_0 v = v|_\Gamma$ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ en $L^2(\Gamma)$ se prolonga por continuidad a una aplicación lineal continua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$, que denotamos también γ_0, llamada aplicación traza.

Demostración:

El lema 6.4 demuestra que la aplicación lineal

$$\begin{aligned}
\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)\\
v &\longmapsto \gamma_0 v = v|_\Gamma
\end{aligned}$$

es continua de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ con la norma de $H^1(\Omega)$ en $C^0(\Gamma)$ con la norma de $L^2(\Gamma)$). Como $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$, según el teorema 6.12, aplicando el teorema de prolongación de aplicaciones lineales continuas 6.8, γ_0 se extiende con continuidad a una aplicación que llamaremos igualmente γ_0

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ v &\longmapsto \gamma_0 v = v|_\Gamma \end{aligned}$$

■

La aplicación traza $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ antes definida no es suprayectiva. Dada una función $g \in L^2(\Gamma)$ no siempre podemos encontrar una función de $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0 u = g$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 6.9. *Al espacio imagen por γ_0 de $H^1(\Omega)$ le llamamos $H^{1/2}(\Gamma)$. Dotamos al espacio $H^{1/2}(\Gamma)$ con la norma*

$$\|g\|_{1/2,\Gamma} = \operatorname*{ínf}_{u \in H^1(\Omega);\ \gamma_0 u = g} \|u\|_{1,\Omega} \tag{6.11}$$

Con esta norma el espacio $H^{1/2}(\Gamma)$ es un espacio de Hilbert. Más precisamente tenemos el siguiente

Teorema 6.14. *El espacio $H^{1/2}(\Gamma)$ es isomorfo a $H^1(\Omega)/H_0^1(\Omega)$ y a $H_0^1(\Omega)^\perp$. De hecho existe una isometría biyectiva entre los 3 espacios.*

Demostración:

$H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado. Según el teorema 4.12 existe una isometría biyectiva entre $H^1(\Omega)/H_0^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)^\perp$. Veamos que existe también una isometría biyectiva entre $H_0^1(\Omega)^\perp$ y $H^{1/2}(\Gamma)$. Sea $\tilde{u} \in H^1(\Omega)/H_0^1(\Omega)$ y sea u un elemento cualquiera de la clase $\tilde{u}$. Llamemos $u^\perp$ a la proyección ortogonal de u sobre $H_0^1(\Omega)^\perp$ (todos los elementos de $\tilde{u}$ tienen la misma proyección ortogonal sobre $H_0^1(\Omega)^\perp$, véase teorema 4.12), entonces la aplicación

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega)^\perp &\to H^{1/2}(\Gamma) \\ u^\perp \quad &\to \gamma_0 u \end{aligned}$$

donde u es un representante cualquiera de $\tilde{u}$ es una isometría biyectiva. En efecto, la aplicación está bien definida pues si u_1 y u_2 son dos elementos de la clase $\tilde{u}$, $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto $\gamma_0 u_1 = \gamma_0 u_2$. La aplicación es obviamente suprayectiva, pues dado $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ existe algún elemento $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0 u = g$ y como $\gamma_0 u = \gamma_0 u^\perp$ tendremos $u^\perp$ es la antiimagen de g.

La aplicación es inyectiva, pues sean $u_1 \in \tilde{u}_1$ y $u_2 \in \tilde{u}_2$ tales que $\gamma_0 u_1^\perp = \gamma_0 u_2^\perp$; entonces $\gamma_0 u_1 - \gamma_0 u_2 = \gamma_0 u_1^\perp - \gamma_0 u_2^\perp = 0$. Por ello $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ y por tanto $u_1^\perp = u_2^\perp$.

Finalmente veamos que es una isometría: Dada $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, todos los elementos del conjunto $V^g = \{u \in H^1(\Omega);\ \gamma_0 u = g\}$ se pueden poner de la forma $u+v$ donde u es una función fija de V^g y v recorre los elementos de $H_0^1(\Omega)$. En efecto si $u_1 \in V^g$ se puede poner siempre $u_1 = u + u_1 - u$ y tenemos que $v = u_1 - u \in H_0^1(\Omega)$. De modo que

$$\begin{aligned}\|g\|_{1/2,\Gamma} &= \inf_{u \in H^1(\Omega);\ \gamma_0 u = g} \|u\|_{1,\Omega} = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \|u+v\|_{1,\Omega} \\ &= \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)/H_0^1(\Omega)}\| = \|u^\perp\|_{1,\Omega}\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado el teorema 4.12.

En consecuencia la norma (6.11) es una norma hilbertiana.

■

Puntualmente utilizaremos la siguiente propiedad del espacio $H^{1/2}(\Gamma)$:

Propiedad 6.6. *El espacio $H^{1/2}(\Gamma)$ es denso en $L^2(\Gamma)$*

Aplicaciones del teorema de la traza

En esta subsección denotamos mediante η_i la i-ésima componente del vector normal unitario exterior a la frontera Γ de Ω.

Teorema 6.15. *Fórmula de Green para funciones de $H^1(\Omega)$:*

Sea Ω un abierto C^1-regular en $\mathbb{R}^d$. Entonces cualesquiera que sean las funciones $u, v \in H^1(\Omega)$ se tiene,

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx + \int_\Gamma u v \eta_i\, d\sigma \quad \forall i = 1, \ldots, d \tag{6.12}$$

Demostración:

Si $u, v \in H^1(\Omega)$, entonces existen sendas sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tales que convergen respectivamente a u y v en $H^1(\Omega)$.

Para $u_n, v_n \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es válida la fórmula de Green,

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n\, dx + \int_\Gamma u_n v_n \eta_i\, d\sigma, \quad \forall i = 1, \ldots, d.$$

Se concluye pasando al límite, puesto que por la continuidad de la aplicación traza $u_n|_\Gamma$ y $v_n|_\Gamma$ convergen respectivamente a $u|_\Gamma$ y $v|_\Gamma$ en $L^2(\Gamma)$.

■

El teorema de la traza también nos permite caracterizar de forma más sencilla el subespacio $H_0^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$.

Teorema 6.16. *Caracterización del espacio $H_0^1(\Omega)$:*

Sea Ω un abierto C^1-regular de $\mathbb{R}^d$. Entonces $H_0^1(\Omega)$ es el núcleo de la aplicación traza $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$, esto es

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0\}$$

Demostración:

Sea $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ en $H^1(\Omega)$. Por la continuidad de la aplicación traza, $\|\gamma_0\varphi_n - \gamma_0 v\|_{0,\Gamma} \leq C\|\varphi_n - v\|_{1,\Omega}$, de donde $\gamma_0\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma_0 v$ en $L^2(\Gamma)$. Como las funciones φ_n son de soporte compacto en Ω, entonces $\gamma_0\varphi_n = 0$ para todo n, y por tanto $\gamma_0 v = 0$ en Γ.

La demostración del recíproco es más delicada. Por cartas locales y partición de la unidad nos trasladamos al caso $\Omega = \mathbb{R}^d_+$.

Sea $v \in \{v \in H^1(\mathbb{R}^d_+); \gamma_0 v = v(\cdot,0) = 0\}$; observemos que $\widetilde{v}$, prolongación por 0 de v a todo $\mathbb{R}^d$ pertenece a $H^1(\mathbb{R}^d)$. En efecto, obviamente $\widetilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y también $\widetilde{\frac{\partial v}{\partial x_i}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, oara todo $i = 1,\dots,d$. Hay que verificar que

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$$

Basta demostrar que $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_i} = \widetilde{\frac{\partial v}{\partial x_i}}$, para todo $i = 1,\dots,d$. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, aplicando la fórmula de Green y teniendo en cuenta que $v(\cdot,0) = 0$, tenemos que para todo $i = 1,\dots,d$

$$\begin{aligned}&\langle \tfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial x_i}, \varphi\rangle = -\langle \widetilde{v}, \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle = -\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{v}\tfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^d_+} v\tfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d_+} \tfrac{\partial v}{\partial x_i}\varphi\,dx - \\ &\int_{\{(x',0),x'\in\mathbb{R}^{d-1}\}} v\varphi\eta_i\,d\sigma = \int_{\mathbb{R}^d_+} \tfrac{\partial v}{\partial x_i}\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\tfrac{\partial v}{\partial x_i}}\varphi\,dx = \langle \widetilde{\tfrac{\partial v}{\partial x_i}}, \varphi\rangle\end{aligned}$$

Finalmente hay que ver que $v \in H_0^1(\mathbb{R}^d_+)$, se puede aproximar por funciones $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d_+)$. Para ello buscamos una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d_+)$ tal que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ en $H^1(\mathbb{R}^d_+)$. Sea $\widetilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ la prolongación por 0 de v a todo $\mathbb{R}^d$. Como en los casos anteriores, utilizaremos la regularización por convolución introduciendo una sucesión regularizante, $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. La dificultad está en que el soporte de $\rho_\varepsilon * \widetilde{v}$ puede estar fuera de $\mathbb{R}^d_+$. Para solucionar este inconveniente nos trasladamos una magnitud h definiendo $\tau_h\widetilde{v}(x',x_d) = \widetilde{v}(x',x_d - h)$. Ya demostramos anteriormente (ver la demostración del teorema 6.10) que $\tau_h\widetilde{v} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \widetilde{v}$ y que además $sop\ \tau_h\widetilde{v} \subset \mathbb{R}^d_+$, por tanto
$\tau_h\widetilde{v}|_{\mathbb{R}^d_+} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \widetilde{v}|_{\mathbb{R}^d_+}$ en $H^1(\mathbb{R}^d_+)$. Por otro lado, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño $sop\,(\rho_\varepsilon * \tau_h\widetilde{v}) \subset \mathbb{R}^d_+$ y como ya vimos $\rho_\varepsilon * \tau_h\widetilde{v} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \tau_h\widetilde{v}$ en $H^1(\mathbb{R}^d)$. Combinando estas dos propiedades, $\varphi_\varepsilon * \tau_h\widetilde{v}|_{\mathbb{R}^d_+} \xrightarrow[\varepsilon\to 0, h\to 0]{} \widetilde{v}|_{\mathbb{R}^d_+} = v$ en $H^1(\mathbb{R}^d_+)$, siendo $\rho_\varepsilon * \tau_h\widetilde{v}|_{\mathbb{R}^d_+} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d_+)$ la sucesión buscada.

∎

En el el ejercicio 6.8 se indica como se pueden construir funciones de $H^1(\Omega)$ mediante funciones a "trozos". Esta técnica es de suma importancia a la hora de construir subespacios de $H^1(\Omega)$ de dimensión finita, más concretamente espacios de elementos finitos que se utilizan para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.

6.5. Los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$

Introducimos a continuación los espacios de Sobolev de orden superior a 1.

Definición 6.10. *Para todo entero $m \geq 1$ llamamos espacio de Sobolev de orden m sobre Ω al espacio*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

dotado del producto escalar

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \Big) dx$$

la norma asociada

$$\|u\|_{m,\Omega} = (u, u)_{m,\Omega}^{1/2} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u)^2 dx \Big)^{1/2}$$

y la seminorma

$$|u|_{m,\Omega} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = m} (\partial^\alpha u)^2 dx \Big)^{1/2}$$

Teorema 6.17. *$H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable para la norma*

$$\| \cdot \|_{m,\Omega}$$

.

Demostración:

La demostración es idéntica al caso $m = 1$.

■

Vamos a considerar ahora el caso $H^2(\Omega)$. En particular estudiemos el problema de las trazas de una función y de su derivada.

Si Ω es C^1-regular , se puede definir la traza de una función $v \in H^2(\Omega)$, $\gamma_0 v = v|_\Gamma$. Por otro lado, si $v \in H^2(\Omega)$ entonces $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$, para $1 \leq i \leq d$ y por tanto también se pueden definir las trazas de estas funciones $\gamma_0 \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}|_\Gamma$, $1 \leq i \leq d$, que pertenecen a $L^2(\Gamma)$. La función $\eta_i \frac{\partial v}{\partial x_i}|_\Gamma$ es entonces una función de $L^2(\Gamma)$ por ser producto de una función de $L^\infty(\Gamma)$ y otra de $L^2(\Gamma)$ y podemos definir la derivada normal

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}|_\Gamma = \sum_{i=1}^{d} \eta_i \frac{\partial v}{\partial x_i}|_\Gamma$$

como una función de $L^2(\Gamma)$. Podemos pues definir el operador γ_1 siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ v &\longmapsto \tfrac{\partial v}{\partial \nu}|_\Gamma = \textstyle\sum_{i=1}^d \tfrac{\partial v}{\partial x_i} \nu_i|_\Gamma \end{aligned}$$

Sea $\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ el operador Laplaciano de una distribución u. Entonces si $u \in H^2(\Omega)$, tenemos la siguiente fórmula de Green:

Teorema 6.18. *(Fórmula de Green en $H^2(\Omega)$)*
Para toda función u de $H^2(\Omega)$ y toda función $v \in H^1(\Omega)$ se tiene

$$-\int_\Omega (\Delta u) v \, dx = -\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dx = \sum_{i=1}^{d} \Big(\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} v \eta_i \, d\sigma \Big) \quad (6.13)$$

Demostración:

Se deja como ejercicio 6.9

■

La anterior fórmula de Green la escribiremos también con notación vectorial como:

$$-\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma \quad (6.14)$$

Resultados de compacidad

En ese apartado daremos un resultado de compacidad que será de utilidad en el estudio de algunos problemas de contorno asociados a las ecuaciones en derivadas parciales.

Recordemos la definición de operador compacto 4.7 y la observación 4.2: Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal continua de X en Y. Diremos que T es un operador compacto si para cualquier sucesión $(v_n)_n \subset X$ acotada la sucesión imagen $(Tv_n)_n \subset Y$ tiene una subsucesión convergente.

Teorema 6.19. *Si Ω es un conjunto acotado C^1-regular y $m \geq 1$ la aplicación*

$$T : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$$
$$v \to v$$

es compacta.

Demostración:

Se puede encontrar una demostración para $m = 1$ en [9]

■

El caso $m = 1$ se conoce con el nombre de teorema de Rellich, del cual se deduce que de toda sucesión acotada en $H^1(\Omega)$ se puede extraer una subsucesión convergente en $L^2(\Omega)$.

Propiedades de continuidad de los espacios de Sobolev

En esta subsección daremos sin demostración alguna propiedades de continuidad de los espacios de Sobolev.

Ya hemos mencionado que para $u \in H^1(a,b)$ se puede encontrar un representante continuo, es decir abusando del lenguaje, las funciones de $H^1(a,b)$ son continuas.

La continuidad de las funciones de los espacios de Sobolev depende de la dimensión. Tenemos en particular:

Para $m > d/2$ las funciones de $H^m(\Omega)$ son continuas, en particular si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, entonces $H^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$.

Para una demostración de estas propiedades ver por ejemplo [3].

Ejercicios del Capítulo 6

6.1. Sea el espacio de funciones localmente integrables:

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medibles; } \int_K |f(x)|\,dx < \infty \text{ para todo } K \text{ compacto de } \Omega\}$$

con la topología topología definida por la familia de seminormas

$$p_K(f) = \int_\Omega |f(x)|\,dx \tag{6.15}$$

A cada $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ le asociamos la distribución

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{6.16}$$

Demostrar que la aplicación T_f está bien definida y es realmente un distribución. Demostrar además que la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T: L^1_{loc}(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega) \\ f &\to T_f \end{aligned}$$

que asigna a cada función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ la correspondiente distribución asociada T_f definida mediante (6.16) es inyectiva y continua.

6.2. Demostrar que la derivada en el sentido de distribuciones de la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [0, \infty[\end{cases}$$

es la distribución δ de Dirac.

6.3. Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1[\\ |x| & \text{si} \quad x \in [-1, 1[\\ 0 & \text{si} \quad x \in [1, \infty[\end{cases}$$

a) Calcular la derivada primera de f en el sentido de las distribuciones.
b) Calcular la derivada segunda de f en el sentido de las distribuciones.

6.4. Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si} \quad x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si} \quad x \in [1, \infty[\end{cases}$$

a) Calcular la derivada primera de f en el sentido de las distribuciones.
b) Calcular la derivada segunda de f en el sentido de las distribuciones.

6.5. Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1[\\ 1-x & \text{si} \quad x \in [-1, 1[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [1, \infty[\end{cases}$$

a) Calcular la derivada primera de f en el sentido de las distribuciones.
b) Calcular la derivada segunda de f en el sentido de las distribuciones.

6.6. -

a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Demostrar

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f * g) h \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(\check{f} * h) \, dx$$

donde se utiliza la notación $\check{f}(x) = f(-x)$.

b) Sea $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ y $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, demostrar que para las derivadas en el sentido de distribuciones se verifica $v * u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ y

$$\frac{\partial(v * u)}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} * u$$

6.7. Completar la demostración del teorema 6.8

6.8. Sea $\overline{\Omega} = \cup_{r=1}^N \overline{\Omega}_r$ una descomposición de Ω tal que:

- Ω_r es un abierto de $\mathbb{R}^d$ contenido en Ω con frontera Γ_r de clase C^1, para todo $r = 1, \ldots, N$
- $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$ para $r \neq s$.

Sea $v \in C^0(\overline{\Omega})$ tal que la restricción $v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r)$ para todo $r = 1, \ldots, N$, entonces $v \in H^1(\Omega)$.

En definitiva si juntamos los “trozos” (funciones de $H^1(\Omega_r)$; $r = 1, \ldots, N$ de manera que haya continuidad al pasar de Ω_r a Ω_s la función que obtenemos estará en $H^1(\Omega)$.

6.9. Demostrar el teorema 6.18

Capítulo 7
Formulación débil de problemas elípticos

Resumen

En este capítulo estudiamos la formulación débil o variacional de algunos problemas elípticos lineales analizando la existencia y la unicidad de las soluciones. Esta formulación es esencial para la aproximación numérica de estos problemas, notablemente son la base de el Método de Elementos Finitos que se estudia en los cursos sobre Análisis Numérico de las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Este tipo de problemas tienen muchas aplicaciones en física y en ingeniería, en concreto estudiaremos con detalle problemas de potencial, la ecuación de calor estacionaria, el problema de la deformación elástica de un sólido, el problema de Stokes para fluidos viscosos, etc. Terminamos el capítulo con el estudio de algunos problemas espectrales asociados a operadores elípticos cuya principal motivación es su aplicación a la resolución de problemas de evolución en el tiempo.

La bibliografía recomendada para este capítulo es [3] y [9].

7.1. Formulación débil de problemas unidimensionales

A modo se introducción y para ilustrar el método de estudio de los problemas de contorno asociados a Ecuaciones en Derivadas Parciales empezamos resolviendo el caso de problemas unidimensionales (por lo tanto ecuaciones diferenciales ordinarias). Esto nos ayudará a comprender de una manera más sencilla los pasos a seguir y que esencialmente son: 1. Formulación clásica del problema. 2. Formulación débil. 3. Resolución del problema débil (existencia y unicidad) de solución débil. 4. Regularidad y retorno a la formulación clásica.

7.1.1. Problema de Dirichlet homogéneo asociado al operador $-d^2/dx^2$

Sea $I = (a,b) \in \mathbb{R}$ un intervalo de la recta real, $f \in L^2(I)$, consideremos el problema:

Hallar $u : \bar{I} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en} \quad I \tag{7.1}$$
$$u(a) = 0 \tag{7.2}$$
$$u(b) = 0 \tag{7.3}$$

En principio supondremos que $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ para que la ecuación anterior tenga sentido y de modo que se verifiquen las condiciones de contorno (7.2) y (7.3). Vamos a formular el problema anterior de otra manera. Elegimos una función $v \in H_0^1(I)$ cualquiera, multiplicamos los dos miembros de la ecuación (7.1) por v e integramos por partes,

$$\int_a^b u'v'\,dx - \big(u'(b)v(b) - u'(a)v(a)\big) = \int_a^b f v\,dx \tag{7.4}$$

como $v(a) = v(b) = 0$ el problema se reformula de la siguiente modo: Hallar $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$\int_a^b u'v'\,dx = \int_a^b f v\,dx \quad \forall v \in H_0^1(I) \tag{7.5}$$

Nos referiremos a (7.5) como la formulación débil o formulación variacional del problema de partida (7.1, 7.2, 7.3). Observemos que para que (7.5) tenga sentido no es necesario que $u \in H^2(I)$. Tenemos ahora que justificar la formulación anterior, es decir demostrar que el problema (7.5) tiene solución y verificar si ésta es única. Para ello utilizaremos el teorema de Lax Milgram 4.17.

Antes repasemos algunas propiedades del espacio $H_0^1(I)$.

Teorema 7.1. *Sobre $H_0^1(I)$ la seminorma $|v|_{1,I} = (\int_a^b (v')^2\,dx)^{1/2}$ y la norma de $L^2(I)$, $\|v\|_{0,I} = (\int_a^b v^2\,dx)^{1/2}$ verifican la siguiente desigualdad*

$$\|v\|_{0,I} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} |v|_{1,I}$$

Demostración:

Es un caso particular del teorema de Poincaré del capítulo anterior. Basta demostrar el teorema para funciones $v \in \mathcal{D}(I)$, pues $\mathcal{D}(I)$ es denso en $H_0^1(I)$.

$$v(x) = \int_a^x v'(x)\,dx$$

tomando valores absolutos y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(I)$ obtenemos para $x \in (a,b)$

$$|v(x)| \leq \Big(\int_a^x 1^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_a^x (v')^2\,dx\Big)^{1/2}$$

mayorando la segunda integral tomando $x = b$ como límite superior de la integral

$$|v(x)| \leq (x-a)^{1/2}\Big(\int_a^b (v')^2\,dx\Big)^{1/2} = (x-a)^{1/2}|v|_{1,I}$$

Elevando al cuadrado e integrando de nuevo en I

$$\|v\|_{0,I}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2}|v|_{1,I}^2$$

Finalmente tomando la raiz cuadrada positiva obtenemos el resultado buscado.

■

Corolario 7.1. *Sobre $H_0^1(I)$ la seminorma $|v|_{1,I}$ es una norma equivalente a la norma de $H^1(I)$.*

Demostración:

Puesto que

$$\|v\|_{1,I}^2 = \Big(\int_a^b (v^2 + (v')^2)\,dx = \|v\|_{0,I}^2 + |v|_{1,I}^2$$

Tenemos de forma inmediata

$$|v|_{1,I} \leq \|v\|_{1,I}$$

Por otra parte, utilizando la desigualdad demostrada en el teorema anterior

$$\|v\|_{1,I}^2 = \|v\|_{0,I}^2 + |v|_{1,I}^2 \leq \Big(\frac{(b-a)^2}{2} + 1\Big)|v|_{1,I}^2$$

de donde finalmente

$$\sqrt{\frac{2}{2+(b-a)^2}}\,\|v\|_{1,I} \leq |v|_{1,I} \leq \|v\|_{1,I}$$

■

Teorema 7.2. *El problema formulado en la pregunta anterior tiene solución única.*

Demostración:

Aplicamos el teorema de Lax-Milgram 4.17. La forma bilineal es

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot) : H_0^1(I) \times H_0^1(I) &\to \mathbb{R} \\ u, v \to a(u,v) &= \int_a^b u'v'\,dx \end{aligned} \tag{7.6}$$

La forma lineal es

$$\begin{aligned} L(\cdot) : H_0^1(I) &\to \mathbb{R} \\ v \to L(v) &= \int_a^b f v\,dx \end{aligned} \tag{7.7}$$

- La forma (7.6) es evidentemente bilineal.
- La forma (7.6) es continua, pues para todo $u, v \in H_0^1(I)$

$$|a(u,v)| = |\int_a^b u'v'\,dx| \leq |u|_{1,I}\,|v|_{1,I} \leq \|u\|_{1,I}\,\|v\|_{1,I}$$

- La forma (7.6) es elíptica, pues para todo $v \in H_0^1(I)$

$$a(v,v) = \int_a^b (v')^2\,dx = |v|_{1,I}^2 \geq \frac{2}{2+(b-a)^2}\,\|v\|_{1,I}^2$$

  donde hemos aplicado la equivalencia entre de la norma $\|.\|_{1,I}$ y la seminorma $|.|_{1,I}$ demostrada anteriormente.
- La forma (7.7) es evidentemente lineal.
- La forma (7.7) es continua, pues para todo $v \in H_0^1(I)$ resulta aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|L(v)| = |\int_a^b f v\,dx| \leq \|f\|_{0,I}\,\|v\|_{0,I} \leq \|f\|_{0,I}\,\|v\|_{1,I}$$

■

Teorema 7.3. *El problema débil (7.5) es equivalente al problema de optimización siguiente:*

Hallar $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$J(u) = \inf_{v \in H} J(v)$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_a^b (v')^2\,dx - \int_a^b f v\,dx$$

Demostración:

La forma bilineal (7.6) continua y elíptica es también simétrica (comentario 4.2).

■

Teorema 7.4. *La solución del problema débil (7.5) verifica la ecuación (7.1) en el sentido de las distribuciones y en consecuencia $u \in H^2(I)$. Además la solución u de (7.5) verifica las condiciones de contorno (7.2) y (7.3).*

Demostración:

Sea $u \in H_0^1(I)$ la solución del problema débil (7.5). Tomando en (7.5) en lugar de v cualquier función $\varphi \in \mathcal{D}(I) \subset H_0^1(I)$, funciones de clase $C^\infty(I)$ y de soporte compacto en I, tenemos

$$\int_a^b u'\varphi'\,dx = \int_a^b f\varphi\,dx \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

Podemos interpretar las integrales de la expresión anterior como el valor de las distribuciones u' y f en φ' y φ respectivamente, es decir,

$$\langle u', \varphi' \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

o bien

$$-\langle u'', \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

de donde

$$-u'' = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(I)$$

finalmente, como $f \in L^2(I)$

$$-u'' = f \quad \text{en } L^2(I) \quad \text{y} \quad u \in H^2(I)$$

además la igualdad en $L^2(I)$ implica

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en c.t.p. de } I$$

que es la ecuación (7.1).

Finalmente como $u \in H_0^1(I)$ verifica las condiciones de contorno (7.2) y (7.3).

■

7.1.2. Problema de Dirichlet no homogéneo asociado al operador $-d^2/dx^2$

Sea $I = (a,b) \in \mathbb{R}$ un intervalo de la recta real, $f \in L^2(I)$, consideremos el problema:

Hallar $u : \bar{I} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en} \quad I \tag{7.8}$$
$$u(a) = u_a \tag{7.9}$$
$$u(b) = u_b \tag{7.10}$$

Procedemos como en el problema anterior y elegimos una función $v \in H_0^1(I)$ cualquiera, multiplicamos los dos miembros de la ecuación (7.8) por v e integramos por partes,

$$\int_a^b u'v'\,dx - \big(u'(b)v(b) - u'(a)v(a)\big) = \int_a^b f v\,dx \tag{7.11}$$

como $v(a) = v(b) = 0$ el problema se reformula de la siguiente manera: Hallar $u \in V^{u_a,u_b} = \{H^1(I);\ v(a) = u_a,\ v(b) = u_b\}$ tal que

$$\int_a^b u'v'\,dx = \int_a^b f v\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(I) \tag{7.12}$$

Observemos que a diferencia del caso anterior la función incógnita u no está en $H_0^1(a,b)$. Por ello no podemos aplicar directamente el teorema de Lax-Milgram 4.17. En el siguiente teorema utilizamos la traslación para demostrar la existencia de solución. La unicidad se ha de demostrar directamente.

Teorema 7.5. *Existe un $u \in V^{u_a,u_b} = \{H^1;\ v(a) = u_a,\ v(b) = u_b\}$ único verificando (7.12). Además $u \in H^2(I)$ y verifica (7.8) en el sentido de las distribuciones y las condiciones de contorno (7.9) y (7.10).*

Demostración:

Para demostrar la existencia de solución procedemos por traslación al caso homogéneo:

Sea $\bar{u} \in V^{u_a,u_b}$, y buscaremos una función $w = u - \bar{u} \in H_0^1(I)$. Sustituyendo en (7.8), vemos que la función $w \in H_0^1(a,b)$ deberá verificar

$$\int_a^b w'v'\,dx = \int_a^b f v\,dx - \int_a^b \bar{u}'v'\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(I)$$

Podemos aplicar de nuevo el teorema de Lax-Milgram 4.17. En efecto, la forma bilineal es la misma que en el caso homogéneo; la forma lineal del segundo miembro es suma de la forma lineal que aparece en el caso homogéneo más la forma

$$L_2(\cdot) : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$$
$$v \to L_2(v) = -\int_a^b \bar{u}'v'\,dx$$

que:

- Es evidentemente lineal.

- Es continua, pues para todo $v \in H_0^1(I)$, resulta aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|L_2(v)| = |\int_a^b \bar{u}' v' \, dx| \le |\bar{u}|_{1,I} |v|_{1,I} \le \|\bar{u}\|_{1,I} \|v\|_{1,I}$$

Esto demuestra la existencia de w. De donde poniendo $u = w + \bar{u} \in V^{u_a,u_b}$, tenemos que u verifica (7.12) y es la solución buscada.

Falta por demostrar la unicidad, pues hemos construido u a partir de una elección arbitraria de $\bar{u}$. Vamos a ver que en realidad u no depende de la elección que hayamos hecho de $\bar{u}$: Supongamos que existen $u_1 \in V^{u_a,u_b}$ y $u_2 \in V^{u_a,u_b}$ verificando (7.12). Y sea $\bar{w} = u_1 - u_2 \in H_0^1(I)$, veamos que $\bar{w} = 0$. En efecto, sustituyendo sucesivamente u_1 y u_2 en el lugar de u en (7.12) y restando miembro a miembro tenemos que $\bar{w} \in H_0^1(I)$ verifica

$$\int_a^b \bar{w}' v' \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

tomando $v = \bar{w}$ resulta $|\bar{w}|_{1,I} = 0$ y por tanto $\bar{w} = 0$ pues la seminorma $|.|_{1,I}$ es una norma en $H_0^1(I)$.

Finalmente recuperamos la formulación de partida procediendo como en el caso homogéneo y obtenemos

$$-u'' = f \quad \text{en } L^2(I) \quad \text{y} \quad u \in H^2(I)$$

y en consecuencia también

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en c.t.p. de } I$$

Por otra parte como $u \in V^{u_a,u_b}$ obtenemos $u(a) = u_a$ y $u(b) = u_b$.

■

Tenemos aquí también la equivalencia con un problema de optimización:

Teorema 7.6. *El problema débil (7.12) es equivalente al problema de optimización siguiente:*

Hallar $u \in V^{u_a,u_b}$ tal que

$$J(u) = \inf_{v \in V^{u_a,u_b}} J(v) \tag{7.13}$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_a^b (v')^2 \, dx - \int_a^b f v \, dx$$

Demostración:

La forma bilineal en este problema (que es la misma que en el caso homogéneo) es simétrica. Sin embargo aquí la solución no está en el espacio $H_0^1(I)$ sino que está en la variedad afín V^{u_a,u_b}. En particular la variedad afín se puede considerar como un subconjunto convexo cerrado de $H^1(I)$ y la formulación débil del problema homogéneo se puede escribir de forma equivalente también como:

Hallar $u \in V^{u_a,u_b}$ tal que

$$\int_a^b u'(v-u)'\,dx \geq \int_a^b f(v-u)\,dx \quad \forall v \in V^{u_a,u_b} \tag{7.14}$$

pues por una parte si $u \in V^{u_a,u_b}$ y v recorre los elementos de V^{u_a,u_b}, entonces $v-u$ recorre los elementos de $H_0^1(I)$ y obtenemos (7.14) sustituyendo en (7.12) $v-u$ en lugar de v. Recíprocamente si $u \in V^{u_a,u_b}$ verifica (7.14) sustituyendo en el lugar de $v-u$ una función cualquiera de $H_0^1(I)$ obtenemos

$$\int_a^b u'v'\,dx \geq \int_a^b fv\,dx \quad \forall v \in H_0^1(I) \tag{7.15}$$

y como $H_0^1(I)$ es un espacio vectorial podemos sustituir v por $-v$ en (7.15) y obtenemos la desigualdad opuesta con lo que obtenemos la igualdad (7.12).

Finalmente esta formulación (7.14) entra dentro del marco abstracto del teorema de Stampacchia 4.14 y al ser la forma simétrica resulta del teorema 4.16 la equivalencia con (7.13)

■

7.1.3. Problema mixto Dirichlet-Neumann asociado al operador $-d^2/dx^2$

Para simplificar tomaremos el intervalo $I = (0,1)$ lo que no quita generalidad al problema y al desarrollo siguiente.

Sea $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $f \in L^2(I)$, $g \in \mathbb{R}$. Consideraremos el problema mixto Dirichlet-Neumann siguiente: Hallar $u : \bar{I} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-u''(x) = f(x) \text{ en } I \tag{7.16}$$

$$u(0) = 0 \tag{7.17}$$

$$u'(1) = g \tag{7.18}$$

Empezamos introduciendo el espacio de Sobolev adecuado para la formulación débil del problema.

Consideramos el espacio de Sobolev

$$H^1(I) = \{v \in L^2(I);\ v' \in L^2(I)\}$$

con el producto escalar

$$(u,v)_{1,I} = \int_0^1 (uv + u'v')\,dx$$

y la norma correspondiente

$$\|v\|_{1,I} = \Big(\int_0^1 (v^2 + (v')^2)\,dx\Big)^{1/2}$$

y el subespacio $H = \{v \in H^1(I);\ v(0) = 0\}$.

Lema 7.1. *Sobre* $H = \{v \in H^1(I);\ v(0) = 0\}$ *la seminorma* $|v|_{1,I} = \big(\int_0^1 (v')^2\,dx\big)^{1/2}$ *y la norma de* $L^2(I)$, $\|v\|_{0,I} = \big(\int_0^1 v^2\,dx\big)^{1/2}$ *verifican la siguiente desigualdad*

$$\|v\|_{0,I} \le \frac{1}{\sqrt{2}}|v|_{1,I} \tag{7.19}$$

Además en H *la seminorma* $|v|_{1,I}$ *es una norma equivalente a la norma de* $H^1(I)$.

Demostración:

Las clases de funciones v de $H^1(I)$ tienen un representante continuo. Llamando también v al representante continuo podemos escribir

$$v(x) = \int_0^x v'(x)\,dx$$

tomando valores absolutos y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(I)$ obtenemos para $x \in (0,1)$

$$|v(x)| \le \Big(\int_0^x 1^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^x (v')^2\,dx\Big)^{1/2}$$

mayorando la segunda integral tomando $x = 1$ como límite superior de la integral

$$|v(x)| \le x^{1/2}\Big(\int_0^1 (v')^2\,dx\Big)^{1/2} = x^{1/2}|v|_{1,I} \tag{7.20}$$

Elevando al cuadrado e integrando de nuevo en I

$$\|v\|_{0,I}^2 \le \frac{1}{2}|v|_{1,I}^2$$

y tomando la raiz cuadrada positiva obtenemos el resultado buscado.

Finalmente puesto que

$$\|v\|_{1,I}^2 = \int_0^1 \big(v^2 + (v')^2\big)\,dx = \|v\|_{0,I}^2 + |v|_{1,I}^2$$

tenemos de forma inmediata

$$|v|_{1,I} \leq \|v\|_{1,I}$$

Por otra parte, utilizando la desigualdad (7.19)

$$\|v\|_{1,I}^2 = \|v\|_{0,I}^2 + |v|_{1,I}^2 \leq (\frac{1}{2}+1)|v|_{1,I}^2$$

de donde

$$\sqrt{2/3}\,\|v\|_{1,I} \leq |v|_{1,I} \leq \|v\|_{1,I}$$

■

Introducimos ahora la formulación débil del problema anterior:

Supongamos $u \in H \cap H^2(I)$. Sea $v \in H$, multiplicando la ecuación (7.16) por v e integrando por partes en I

$$\int_0^1 u'v'\,dx - [u'v]_0^1 = \int_0^1 f v\,dx$$

teniendo en cuenta que $v \in H$ y por tanto $v(0) = 0$ y la condición (7.18), $u'(1) = g$ resulta sustituyendo y reordenando

$$\int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 f v\,dx + g v(1) \tag{7.21}$$

La expresión (7.21) tiene sentido para $u, v \in H$. La formulación débil es entonces: Hallar $u \in H$ tal que verifica (7.21) para todo $v \in H$.

Teorema 7.7. *El problema: Hallar $u \in H$ tal que verifica (7.21) para todo $v \in H$ tiene solución única.*

Demostración:

Aplicamos el teorema de Lax-Milgram 4.17. La forma bilineal es

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot) : H \times H &\to \mathbb{R} \\ u, v \to a(u,v) &= \int_0^1 u'v'\,dx \end{aligned} \tag{7.22}$$

La forma lineal es

$$\begin{aligned} L(\cdot) : H &\to \mathbb{R} \\ v \to L(v) &= \int_0^1 f v\,dx + g v(1) \end{aligned} \tag{7.23}$$

- La forma (7.22) es evidentemente bilineal.
- La forma (7.22) es continua, pues para todo $u, v \in H$

$$|a(u,v)| = |\int_0^1 u'v'\,dx| \le |u|_{1,I}\,|v|_{1,I} \le \|u\|_{1,I}\,\|v\|_{1,I}$$

- La forma (7.22) es elíptica, pues para todo $v \in H$

$$a(v,v) = \int_0^1 (v')^2\,dx = |v|^2_{1,I} \ge \frac{2}{3}\,\|v\|^2_{1,I}$$

  donde hemos aplicado la equivalencia entre de la norma $\|.\|_{1,I}$ y la seminorma $|.|_{1,I}$ del lema 7.1
- La forma (7.23) es evidentemente lineal.
- La forma (7.23) es continua, pues denotando $L(v) = L_1(v) + L_2(v)$ donde $L_1(v) = \int_0^1 f v\,dx$ y $L_2(v) = gv(1)$, resulta aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|L_1(v)| = |\int_0^1 f v\,dx| \le \|f\|_{0,I}\,\|v\|_{0,I} \le \|f\|_{0,I}\,\|v\|_{1,I}$$

  y por otra parte

$$|L_2(v)| = |gv(1)| \le |g| \sup_{x\in(0,1)} |v(x)| = |g|\,\|v\|_{0,\infty,I} \le |g|\,|v|_{1,I} \le |g|\,\|v\|_{1,I}$$

  donde la desigualdad $\sup_{x\in(0,1)} |v(x)| = \|v\|_{0,\infty,I} \le |v|_{1,I}$ se puede deducir razonando como en lema 7.1 tomado el valor $\sup_{x\in(0,1)} |v(x)|$ en la desigualdad (7.20)

$$\|v\|_{0,\infty,I} = \sup_{x\in(0,1)} |v(x)| \le \sup_{x\in(0,1)} x^{1/2}|v|_{1,I} = |v|_{1,I}$$

■

Comentario 7.1. *La constante de continuidad de la forma $L_1(\cdot)$ se puede mejorar utilizando la desigualdad (7.19)*

$$|L_1(v)| = |\int_0^1 f v\,dx| \le \|f\|_{0,I}\,\|v\|_{0,I} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,\|f\|_{0,I}\,|v|_{1,I} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,\|f\|_{0,I}\,\|v\|_{1,I}$$

Teorema 7.8. *El problema anterior es equivalente a:*
Hallar $u \in H$ tal que

$$J(u) = \inf_{v\in H} J(v)$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\,dx - \int_0^1 f v\,dx - gv(1)$$

Demostración:

La forma bilineal (7.22) continua y elíptica es también simétrica.

■

Teorema 7.9.
La solución débil del problema 7.7 verifica la ecuación 7.16 en el sentido de las distribuciones y en consecuencia $u \in H^2(I)$.

Además la solución débil del problema 7.7 verifica las condiciones de contorno 7.17 y 7.18.

Demostración:

Sea $u \in H$ la solución del problema débil (7.21). Tomando en (7.21) en lugar de v cualquier función $\varphi \in \mathcal{D}(I) \subset H$, funciones de clase $C^\infty(I)$ y de soporte compacto en I, tenemos

$$\int_0^1 u'\varphi'\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(I)$$

puesto que $\varphi(1) = 0$. Podemos interpretar las integrales de la expresión anterior como el valor de las distribuciones u' y f en φ' y φ respectivamente, es decir,

$$\langle u', \varphi' \rangle = \langle f, \varphi \rangle \;\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

o bien

$$-\langle u'', \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \;\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

de donde

$$-u'' = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(I)$$

finalmente, como $f \in L^2(I)$

$$-u'' = f \quad \text{en } L^2(I) \quad \text{y} \quad u \in H^2(I)$$

además la igualdad en $L^2(I)$ implica

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en c.t.p. de } I$$

que es la ecuación (7.16).

Por una parte la condición de contorno (7.17) $u(0) = 0$ se verifica pues $u \in H$. Por otra parte hemos deducido que $u \in H^2(I)$ y podemos aplicar la fórmula de integración por partes en (7.21). Tendremos

$$-\int_0^1 u''v\,dx + [u'v]_0^1 = \int_0^1 fv\,dx + gv(1) \quad \forall v \in H$$

Según hemos visto en el apartado anterior $-u'' = f$ de donde

$$u'(1)v(1) = gv(1) \quad \forall v \in H$$

tomando en particular una función $v \in H$ tal que $v(1) = 1$ resulta $u'(1) = g$ que es la condición (7.18).

■

Veamos un ejemplo (tomado de [2]) en el que la forma bilineal asociada no es simétrica y por lo tanto no se puede formular como un problema de optimización.

7.1.4. Problema con forma bilineal no simétrica

Sea $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $f \in L^2(I)$. Consideraremos el problema mixto Dirichlet-Neumann siguiente: Hallar $u : \bar{I} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-u''(x) + u'(x) + u(x) = f(x) \text{ en } I \tag{7.24}$$

$$u'(0) = 0 \tag{7.25}$$

$$u'(1) = 0 \tag{7.26}$$

Siguiendo el procedimiento de los casos anteriores mediante integración por partes la formulación débil resulta en este caso

$$u \in H^1(I) \tag{7.27}$$

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in H^1(I) \tag{7.28}$$

Teorema 7.10. *El problema (7.27)-(7.28) tiene solución única.*

Demostración:

Demostraremos que la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx$$

es continua y elíptica en $H^1(I)$.

- $a(\cdot,\cdot)$ es continua:

$$|a(u,v)| = |(u,v)_{1,I}| + |\int_0^1 u'v\,dx|$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\le \|u\|_{1,I}\|v\|_{1,I} + \|u'\|_{0,I}\|v\|_{0,I} \\ &\le 2\|u\|_{1,I}\|v\|_{1,I} \end{aligned}$$

- $a(\cdot,\cdot)$ es elíptica

$$
\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_0^1 (v')^2\,dx + \int_0^1 v'v\,dx + \int_0^1 v^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 v^2\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\,dx + \int_0^1 v'v\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 v^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 v^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (v+v')^2\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|v\|_{1,I}^2
\end{aligned}
$$

■

En los ejercicios 7.1, 7.2, 7.3 se proponen diversos ejemplos que son variantes de los problemas anteriores. En particular los ejercicios 7.2, 7.3 corresponden a ejemplos en los que la forma bilineal no es simétrica. El ejercicio 7.4 se refiere a una variante del problema (7.27)-(7.28) y es un ejemplo en el que la forma bilineal deja de ser elíptica según los valores que tome un parámetro.

7.2. Problemas de contorno elípticos de segundo orden en dimensión mayor que 1

En esta sección estudiaremos problemas de contorno asociados a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden que aparecen en numerosos ejemplos en física e ingeniería. El primer ejemplo es un modelo sencillo para los pequeños desplazamientos u de una membrana elástica relativos a su posición de equilibrio, como consecuencia de estar sometida a una fuerza por unidad de área f. Este modelo aparece también en electrostática donde la incógnita u es el potencial electrostático y f es la densidad de carga eléctrica. En otro contexto u representa la distribución de temperatura de un cuerpo cuya temperatura en el contorno es nula y el segundo miembro f representa una fuente de calor distribuida. Resolveremos este problema con ayuda del marco funcional introducido en los capítulos anteriores. Los siguientes ejemplos serán variantes de este primer ejemplo en los que consideramos distintas condiciones de contorno y distintas modificaciones del operador en derivadas parciales. El método que seguiremos es esencialmente el mismo que hemos utilizado en los ejemplos de la sección anterior dedicada a problemas en dimensión 1: Introducción de una formulación débil, resolución del problema débil (existencia y unicidad), retorno a la formulación clásica.

7.2.1. Problema de Dirichlet homogéneo asociado al operador $-\Delta$

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera Γ de clase C^1 a trozos. El problema a resolver es:

Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar u definida en Ω y solución de,

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega \tag{7.29}$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \tag{7.30}$$

Si buscásemos una solución u clásica, por ejemplo que fuese de clase C^2, observemos que este problema no tiene solución, pues se requerirá al menos que f sea continua. Para dar un significado preciso a la expresión (7.29) supondremos que u es suficientemente regular, por ejemplo $u \in H^2(\Omega)$, entendiendo las derivadas en el sentido de las distribuciones. Multiplicando la ecuación (7.29) por una función $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando en Ω,

$$\int_\Omega -\Delta u v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

Utilizando la fórmula de Green (teorema 6.18), teniendo en cuenta que $v|_\Gamma = 0$ tenemos,

$$\int_\Omega -\Delta u v\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

de modo que la ecuación anterior queda,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

Esta ecuación tiene sentido aunque u no esté en $H^2(\Omega)$, basta con que $u \in H^1(\Omega)$. Por otro lado, al ser $u = 0$ sobre Γ y por las propiedades de Γ tenemos que $u \in H_0^1(\Omega)$. Así podemos reemplazar el problema anterior por la siguiente formulación débil: Dada $f \in L^2(\Omega)$ hallar

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{tal que} \tag{7.31}$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{7.32}$$

Teorema 7.11. *El problema (7.31)-(7.32) tiene solución única.*

Demostración:

Basta demostrar que se verifican las condiciones del teorema de Lax-Milgram 4.17 siendo,

$$\begin{aligned} &H = H_0^1(\Omega),\\ &a(u,v) = \textstyle\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\\ &L(v) = \textstyle\int_\Omega f v\,dx \end{aligned}$$

Evidentemente $a(\cdot,\cdot)$ es bilineal. La continuidad se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz, en efecto,

$$\begin{aligned} &|a(u,v)| = |\textstyle\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx| = |\sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx|\\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^d |\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx| \leq \sum_{i=1}^d \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}.\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}\\ &\leq \left(\textstyle\sum_{i=1}^d \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^d \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2}\\ &= |u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

La elipticidad se obtiene por la equivalencia de normas en $H_0^1(\Omega)$, por ser Ω acotado, ya que en este caso se verifica la desigualdad de Poincaré (teorema 6.9), en efecto

$$a(v,v) = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\big)^2 dx = |v|_{1,\Omega}^2 \geq \alpha\|v\|_{1,\Omega}^2.$$

donde α es la constante C_1 del corolario 6.3 de la desigualdad de Poincaré.

Finalmente $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ con $L(v) = \int_\Omega f v dx$, es evidentemente lineal y además

$$L(v) = \int_\Omega f v dx \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}$$

es por tanto continua.

■

Observar que evidentemente una solución del problema de partida (7.29)-(7.30) es solución del problema débil (7.31)-(7.32). Recíprocamente, si $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución del problema débil (7.31)-(7.32) en un sentido apropiado. Más precisamente tenemos el siguiente:

Teorema 7.12. *La solución u de (7.31)-(7.32)verifica la ecuación (7.29) en el sentido de las distribuciones y la condición de contorno (7.30).*

Demostración:

Sea $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, podemos escribir

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

que interpretándolo como productos de dualidad entre $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$, equivale a,

$$\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

y aplicando la definición de derivada en el sentido de las distribuciones,

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

De este modo recuperamos la primera ecuación (7.29) en el sentido de las distribuciones.

En particular, como $f \in L^2(\Omega)$, se tiene

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \;\; L^2(\Omega),$$

y por las propiedades de las funciones de $L^2(\Omega)$

$$-\Delta u = f, \quad \text{en c.t.p. de } \Omega.$$

Por último, al ser $u \in H_0^1(\Omega)$, si Ω es C^1 regular o suficientemente regular de modo que sea aplicable el teorema de la traza entonces $u|_\Gamma = 0$.

■

Dada que la forma bilineal en (7.32) es simétrica tenemos el siguiente

Teorema 7.13. *El problema (7.31)-(7.32) es equivalente al siguiente problema de optimización,*

Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \tag{7.33}$$

donde $J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx - \int_\Omega f v dx.$

Demostración:

La forma bilineal asociada al problema (7.31)-(7.32) es simétrica.

■

Comentarios

- A diferencia de los problemas unidimensionales la regularidad de la solución u de la formulación débil no es inmediata. En este caso obtenemos $\Delta u \in L^2(\Omega)$ lo que nos asegura únicamente que esta combinación lineal de las derivadas segundas es de cuadrado integrable, pero no necesariamente que cada una de la derivadas parciales segundas lo es. Sin embargo bajo determinadas condiciones de regularidad de Ω, por ejemplo si Γ es de clase C^1, (o Ω convexo y de clase C^1 a trozos) entonces se puede demostrar que si f es una función de $L^2(\Omega)$ entonces $u \in H^2(\Omega)$. Aquí no trataremos el problema de la regularidad, remitiendo para ello a libros más especializados. Por ejemplo para un tratamiento no excesivamente técnico se puede consultar [3].
- Es sencillo obtener (ejercicio 7.5) la dependencia continua de la solución con respecto a los datos del problema, más precisamente: La solución u del problema (7.31)-(7.32) verifica

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{0,\Omega} \tag{7.34}$$

donde α es la constante de elipticidad.

- En mecánica, por ejemplo si estamos considerando la deformación de una membrana, la formulación clásica (7.29)-(7.30) expresa el equilibrio de las fuerzas internas con las fuerzas externas y es consecuencia inmediata de la ley de Newton del equilibrio de fuerzas. Por otra parte la formulación débil (7.31)-(7.32) se conoce en mecánica como el principio de trabajos virtuales. Por ejemplo, si estamos considerando la deformación de una membrana, las funciones v representan un desplazamiento virtual compatible con las restricciones, el término del primer miembro representa el trabajo virtual (producto de una fuerza por un desplazamiento) realizado por el total de fuerzas internas mientras que el segundo miembro representa el trabajo de las fuerzas externas. Así el principio de trabajos virtuales dice que el desplazamiento de equilibrio de la membrana ante la acción de un fuerza externa se obtiene cuando el trabajo de las fuerzas internas es igual al trabajo de las fuerzas externas cualquiera que sea el desplazamiento virtual compatible con las restricciones del sistema. Finalmente la formulación como problema de optimización (7.33) responde al principio de mínima energía, es decir, la funcional J representa la energía total de la membrana para un desplazamiento v compatible con las restricciones. El principio de mínima energía nos dice entonces que la situación de equilibrio se obtiene para un desplazamiento u que minimiza la energía J.

7.2.2. Problema de Neumann homogéneo asociado al operador $-\Delta + Id$

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera Γ de clase C^1 a trozos. El problema a resolver es:

Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar u definida en Ω solución de,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega \tag{7.35}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \tag{7.36}$$

Supongamos que u es suficientemente regular, por ejemplo $u \in H^2(\Omega)$. Multiplicamos la ecuación (7.35) por una función $v \in H^1(\Omega)$ e integramos en Ω

$$\int_\Omega -\Delta u v \, dx + \int_\Omega u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Utilizando la fórmula de Green (teorema 6.18), teniendo en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial \eta}|_\Gamma = 0$, tenemos

$$\int_\Omega -\Delta u v\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

de modo que la ecuación anterior queda

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Podemos reemplazar el problema anterior por la correspondiente formulación débil siguiente: Dada $f \in L^2(\Omega)$ hallar

$$u \in H^1(\Omega) \quad \text{tal que} \tag{7.37}$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{7.38}$$

Teorema 7.14. *El problema (7.37)-(7.38) tiene solución única.*

Demostración:

Se demuestra aplicando el teorema de Riesz-Frechet 4.11 eligiendo

$$\begin{aligned}
&H = H^1(\Omega),\\
&a(u,v) = \textstyle\sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega uv\, dx = (u,v)_{1,\Omega},\\
&L(v) = \textstyle\int_\Omega f v\, dx.
\end{aligned}$$

pues:

- La aplicación $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ donde $L(v) = \int_\Omega f v dx$, es lineal y verifica

  $$L(v) = \int_\Omega f v\, dx \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}$$

  es por tanto continua.
- La aplicación bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es el producto escalar en $H^1(\Omega)$.

■

Comentarios

1. Es evidente que una solución del problema (7.35)-(7.36) es solución del problema débil (7.37)-(7.38). Veamos en que medida una solución del problema débil (7.37)-(7.38) es también solución del problema (7.35)-(7.36). Si u es solución de (7.37)-(7.38), como $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, se verifica,

   $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx + \int_\Omega u\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

   Interpretando las integrales como productos de dualidad entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$, podemos escribir,

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

y como por definición de derivada en el sentido de las distribuciones

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = -\langle \Delta u, \varphi \rangle$$

podemos recuperar la ecuación de la formulación fuerte en el sentido de las distribuciones,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

De hecho, como $f \in L^2(\Omega)$, se tiene,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

Para recuperar la condición de contorno se necesita cierta regularidad en la solución. En efecto, si suponemos que $u \in H^2(\Omega)$ (por ejemplo si Γ es de clase C^1 o Ω convexo y de clase C^1 a trozos, se puede demostrar que si f es una función de $L^2(\Omega)$ entonces $u \in H^2(\Omega)$) y tiene sentido integrar por partes en la ecuación de la formulación débil,

$$\int_\Omega (-\Delta u + u) v\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v\, d\sigma = \int_\Omega f \varphi\, dx$$

pero como ya hemos recuperado $-\Delta u + u = f$ en $L^2(\Omega)$, entonces

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v\, d\sigma = 0 \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma)$$

Como $u \in H^2(\Omega)$ entonces $\frac{\partial u}{\partial \eta}|_\Gamma \in L^2(\Gamma)$, y al ser $H^{1/2}(\Gamma)$ denso en $L^2(\Gamma)$, se tiene que $\frac{\partial u}{\partial \eta}|_\Gamma = 0$ en $L^2(\Gamma)$.
Observar que para recuperar la condición de contorno es imprescindible la hipótesis de regularidad $u \in H^2(\Omega)$.

2. Al ser $a(\cdot,\cdot)$ el producto escalar en $H^1(\Omega)$, es simétrico, y tenemos la equivalencia del problema (7.37)-(7.38) con el problema de optimización:
Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que,

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

donde $J(v) = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Omega uv\, dx \right) - \int_\Omega f v\, dx$.

3. En el problema de Neumann las condiciones de contorno están recogidas implícitamente en la formulación débil, mientras que en el problema de Dirichlet aparecen impuestas por el espacio funcional elegido para resolver el problema.

7.2.3. Problema de Dirichlet no homogéneo asociado al operador $-\boldsymbol{\Delta}$

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera Γ de clase C^1 a trozos. El problema a resolver es:

Dada $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ (véase definición 6.9), hallar u definida en Ω solución de,

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega \tag{7.39}$$

$$u = g \quad \text{sobre } \Gamma \tag{7.40}$$

Supongamos que $u \in H^2(\Omega)$, multiplicamos la ecuación (7.39) por una función $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos en Ω. Aplicando la fórmula de Green (teorema 6.18) obtenemos que la función u verifica,

$$\text{Hallar} \quad u \in \{v \in H^1;\, u|_\Gamma = g\} \quad \text{tal que} \tag{7.41}$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{7.42}$$

Esta formulación no encaja en el marco abstracto del teorema de Lax-Milgram 4.17 puesto que $u \in H^1(\Omega)$ con $u|_\Gamma = g$ y $v \in H_0^1(\Omega)$. Para resolver este inconveniente procederemos mediante una traslación al caso homogéneo. Como $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, existe una función $u_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $u_0|_\Gamma = g$. Sea $w = u - u_0$, entonces $w|_\Gamma = 0$, y si u es solución de (7.41)-(7.42), entonces w lo es de

$$\text{Hallar} \quad w \in H_0^1(\Omega) \quad \text{tal que} \tag{7.43}$$

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx - \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{7.44}$$

donde $u_0 \in H^1(\Omega)$ con $u_0|_\Gamma = g$.

Teorema 7.15. *El problema (7.41)-(7.42)tiene solución única.*

Demostración:

Primero veamos que (7.43)- (7.44) tiene solución única. La forma bilineal en (7.44) es la del problema homogéneo, por tanto continua y elíptica en $H_0^1(\Omega)$. La forma lineal es suma de la forma lineal del problema homogéneo y de la aplicación lineal

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto -\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx \end{aligned}$$

que es también continua, en efecto

$$\begin{aligned}
&|\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx| = |\sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx| \\
&\leq \sum_{i=1}^d |\int_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx| \leq \sum_{i=1}^d \|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\|_{0,\Omega} \cdot \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^d \|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^d \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2} \\
&= |u_0|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} \leq |u_0|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

El teorema de Lax-Milgram 4.17 nos da la existencia y unicidad del problema trasladado.

Una vez resuelto (7.43)- (7.44) la solución de (7.41)-(7.42) que buscamos es $u = w + u_0$. Esto nos da la solución u. Sin embargo hay que verificar que esta solución u así obtenida es única, ya que en principio podría parecer que u depende del valor de u_0 elegido. La solución de (7.41)-(7.42) es única:

Sean u_1 y u_2 dos soluciones del problema(7.41)-(7.42). Se verifica

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\
&u_1|_\Gamma = g \\
&\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\
&u_2|_\Gamma = g
\end{aligned}$$

restando las dos expresiones

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\
&(u_1 - u_2)|_\Gamma = 0
\end{aligned}$$

tomando $v = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$, resulta con $\alpha > 0$ la constante de elipticidad

$$\alpha\|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}^2 \leq |u_1 - u_2|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \, dx = 0$$

por tanto $\|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}^2 = 0$ en $H^1(\Omega)$, luego $u_1 = u_2$ en $H^1(\Omega)$.

■

En el ejercicio 7.6 se estudia la formulación de (7.41)-(7.42) como problema de optimización.

7.2.4. Problema de Neumann no homogéneo asociado al operador $-\Delta + Id$

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera Γ de clase C^1 a trozos. El problema a resolver es:

Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$ (o bien $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, donde $H^{-1/2}(\Gamma)$ designa el espacio dual de $H^{1/2}(\Gamma)$), hallar u definida en Ω y solución de

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega \tag{7.45}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g \quad \text{sobre } \Gamma \tag{7.46}$$

Supongamos que $u \in H^2(\Omega)$, multiplicamos la ecuación (7.45) por una función $v \in H^1(\Omega)$ e integramos en Ω. Aplicando la fórmula de Green (teorema 6.18) obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, d\sigma = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Utilizando la condición (7.46) el correspondiente problema variacional o formulación débil será

Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$, hallar u tal que

$$u \in H^1(\Omega) \tag{7.47}$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma gv \, d\sigma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{7.48}$$

Observación: Si $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ hay que sustituir el término $\int_\Gamma gv d\sigma$ por $\langle g, v\rangle_{1/2,\Gamma}$ donde $\langle .,.\rangle_{1/2,\Gamma}$ es el producto de dualidad entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$

Teorema 7.16. *El problema (7.47)-(7.48) tiene solución única.*

Demostración:

La demostración es como en el caso homogéneo, aplicando el teorema de Riesz-Frechet 4.11 donde,

$$H = H^1(\Omega),$$
$$a(u,v) = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega uv dx = (u,v)_{1,\Omega},$$
$$L(v) = \int_\Omega f v dx + \int_\Gamma gv d\sigma.$$

Basta demostrar que la siguiente aplicación es lineal y continua,

$$H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto \int_\Gamma gv d\sigma.$$

Evidentemente es lineal, veamos la continuidad que se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz y al teorema de la traza

$$\int_\Gamma gv d\sigma \le \left(\int_\Gamma g^2 d\sigma\right)^{1/2} \left(\int_\Gamma v^2 d\sigma\right)^{1/2} =$$
$$= \|g\|_{0,\Gamma} \|v\|_{0,\Gamma} \le C \|g\|_{0,\Gamma} \|v\|_{1,\Omega}$$

Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Riesz-Frechet 4.11 que nos asegura la existencia y unicidad de la solución.

■

Observación: Si $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, tenemos que para todo $v \in H^1(\Omega)$,

$$\langle g, \gamma_0 v\rangle_{1/2,\Gamma} \leq \|g\|_{-1/2,\Gamma}\|\gamma_0 v\|_{1/2,\Gamma} \leq \|g\|_{-1/2,\Gamma}\|v\|_{1,\Omega}$$

pues $\|\gamma_0 v\|_{1/2,\Gamma} \leq \|v\|_{1,\Omega}$ para todo $v \in H^1$ por la definición de la norma en $H^{1/2}(\Gamma)$.

Al ser la forma bilineal simétrica de nuevo la formulación débil es equivalente a un problema de optimización (ejercicio 7.7).

7.2.5. Problema de contorno asociado a un operador elíptico de segundo orden

En este apartado consideramos un problema de contorno asociado a un operador general elíptico de segundo orden. Siguiendo a [9] procederemos formulando inicialmente el problema débil para recuperar posteriormente la formulación clásica.

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera Γ de clase C^1 a trozos. Sea H un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ tal que,

$$H_0^1(\Omega) \subseteq H \subseteq H^1(\Omega).$$

Sean $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq d$ y a_0 funciones medibles y acotadas en Ω, es decir funciones de $L^\infty(\Omega)$ y la forma bilineal $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$

$$u, v \longrightarrow a(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \Big)\, dx \tag{7.49}$$

que es una forma bilineal y continua en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. En efecto, la bilinealidad es inmediata. Verifiquemos la continuidad:

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq |\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx| + |\int_\Omega a_0 uv\,dx| \\
&\leq \max_{ij}\|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega}\sum_{i,j=1}^{d}\Big(\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{0,\Omega}\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}\Big) + \|a_0\|_{0,\infty,\Omega}\|u\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \\
&= \max_{ij}\|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega}\Big(\sum_{j=1}^{d}\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{0,\Omega}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}\Big) + \|a_0\|_{0,\infty,\Omega}\|u\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \\
&\leq \max_{ij}\|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega}\Big(\sum_{j=1}^{d}1^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{d}\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{d}1^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{d}\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2} + \\
&\quad + \|a_0\|_{0,\infty,\Omega}\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \\
&\leq \big(d\max_{ij}\|a_{ij}\|_{0,\infty,\Omega} + \|a_0\|_{0,\infty,\Omega}\big)\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}
\end{aligned}
$$

Supongamos que $a_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq d$ y a_0 verifican las hipótesis de elipticidad siguientes:

1. Existe un número real $\alpha > 0$ tal que,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \ \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

2. Existe un número real α_0 tal que,

$$\forall x \in \Omega,\ a_0(x) \geq \alpha_0 \ \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

De estas hipótesis se deduce que $a(\cdot,\cdot)$ es elíptica si $\alpha_0 > 0$. En efecto

$$
\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial v_j}dx + \int_\Omega a_0 v^2 dx \\
&\geq \alpha\int_\Omega\sum_{i=1}^{d}(\frac{\partial v}{\partial x_i})^2 dx + \alpha_0\int_\Omega v^2 dx \\
&= \alpha|v|_{1,\Omega}^2 + \alpha_0\|v\|_{0,\Omega}^2
\end{aligned}
$$

Cuando $H = H^1(\Omega)$ la condición $\alpha_0 > 0$ es necesaria y suficiente para que la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ sea H-elíptica pues

$$a(v,v) \geq \min\{\alpha,\alpha_0\}\|v\|_{1,\Omega}$$

Por otra parte, cuando $H = H_0^1(\Omega)$, para que la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ sea elíptica basta que $\alpha_0 \geq 0$, o incluso es suficiente que $\alpha_0 > -\frac{\alpha}{C^2(\Omega)}$, donde $C(\Omega)$ es la constante de la desigualdad de Poincaré (6.10). En efecto si $\alpha_0 \geq 0$ la equivalencia de la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ y la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ en $H_0^1(\Omega)$ nos da la elipticidad. Si $0 > \alpha_0 > -\frac{\alpha}{C^2(\Omega)}$, de la desigualdad de Poincaré (6.10) deducimos

$$\alpha_0\|v\|_{0,\Omega}^2 \geq \alpha_0 C^2(\Omega)|v|_{1,\Omega}^2$$

de donde

$$a(v,v) \geq \alpha|v|_{1,\Omega}^2 + \alpha_0\|v\|_{0,\Omega}^2 \geq \big(\alpha + \alpha_0 C^2(\Omega)\big)|v|_{1,\Omega}^2 \geq \alpha'|v|_{1,\Omega}^2$$

siendo $\alpha' = \alpha + \alpha_0 C^2(\Omega) > 0$. De nuevo la equivalencia de la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ y la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ en $H_0^1(\Omega)$ nos da la elipticidad.

Finalmente, sea $f \in L^2(\Omega)$ y definamos,

$$\begin{aligned} L(\cdot) : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow L(v) = \int_\Omega f v\, dx \end{aligned} \tag{7.50}$$

que es lineal y continua en H.

Definimos ahora el siguiente problema: Dadas $a(\cdot,\cdot)$ y $L(\cdot)$ definidas sobre H hallar u tal que

$$u \in H \tag{7.51}$$

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H \tag{7.52}$$

Si la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es elíptica el teorema de Lax-Milgram 4.17 nos da la existencia y unicidad de la solución de (7.51)-(7.52).

Veamos como recuperar el problema fuerte a partir de esta formulación variacional. Si elegimos una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ en lugar de $v \in H$, utilizando las reglas de derivación en el sentido de las distribuciones, obtenemos,

$$a(u,\varphi) = \langle Au, \varphi\rangle,$$

donde A es el operador diferencial elíptico de segundo orden con coeficientes variables definido por

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\big) + a_0 u$$

Por otra parte $L(\varphi) = \langle f, \varphi\rangle$. Por tanto, se verifica la ecuación en derivadas parciales de segundo orden

$$Au = f$$

en el sentido de las distribuciones sobre Ω. Pero como $f \in L^2(\Omega)$, entonces la distribución $Au \in L^2(\Omega)$ y la igualdad anterior es cierta en $L^2(\Omega)$, en consecuencia,

$$Au(x) = f(x) \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

Teniendo en cuenta que $Au = f \in L^2(\Omega)$ deducimos también

$$a(u,v) = \int_\Omega Au\,v\,dx \quad \forall\, v \in H$$

relación que tenemos que traducir en términos de condiciones de contorno. Para esto es para lo que necesitamos suponer que la frontera Γ de Ω es de clase C^1 a trozos, es decir que estamos en condiciones de poder aplicar el teorema de la traza. Supongamos además que las funciones $a_{i,j}$, $1 \geq i,j \geq d$ son funciones de $C^1(\overline{\Omega})$ y que $u \in H^2(\Omega)$, por tanto las funciones $\sum_{j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $1 \leq i \leq d$ pertenecen a $H^1(\Omega)$. Entonces aplicando la fórmula de Green (teorema 6.15) tenemos que para toda $u \in H^2(\Omega)$ y para toda $v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega Au\,v\,dx = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) v\,dx + \int_\Omega a_0 uv\,dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Omega a_0 uv\,dx - \int_\Gamma \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\eta_i v\,d\sigma \\
&= a(u,v) - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta_A} v\,d\sigma
\end{aligned}$$

donde el operador $\frac{\partial}{\partial \eta_A} = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\eta_i$ se denomina derivada conormal asociada al operador A. Por lo tanto, despejando

$$a(u,v) = \int_\Omega Au\,v\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta_A} v\,d\sigma$$

por lo que podemos deducir que,

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta_A} v\,d\sigma = 0 \quad \forall v \in H \tag{7.53}$$

donde esta última relación tiene sentido si se dan las condiciones de regularidad supuestas.

Veamos que problema fuerte estamos resolviendo según la elección de H.

1. Si $H = H_0^1(\Omega)$ estamos resolviendo un problema de Dirichlet homogéneo.
   El problema resuelto es,

$$\begin{aligned} Au &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

   En este caso $\alpha_0 \geq 0$ o $\alpha_0 > \frac{-\alpha}{C^2(\Omega)}$ es suficiente para que el problema variacional tenga solución única.
2. Si $H = H^1(\Omega)$ estamos resolviendo un problema de Neumann homogéneo.
   El problema resuelto es,

$$\begin{aligned} Au &= f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_A} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

   En efecto, con las condiciones de regularidad supuestas veamos que (7.53) implica $\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = 0$. Con estas condiciones de regularidad la derivada conormal

$\frac{\partial u}{\partial \eta_A}$ de la solución pertenece a $H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$. Las traza de cualquier función $v \in H^1(\Omega)$ está en $H^{1/2}(\Gamma)$ y como este espacio de trazas es denso en $L^2(\Gamma)$ obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma$$

es cierto para todo $v \in L^2(\Gamma)$ y por lo tanto $\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = 0$ puesto que la integral en la expresión (7.53) es el producto escalar en $L^2(\Gamma)$ de $\frac{\partial u}{\partial \eta_A}$ y $v|_\Gamma$.
En este caso es necesario suponer $\alpha_0 > 0$ para que el problema débil tenga solución única. Estudiaremos la situación $\alpha_0 = 0$ con más detalle para el caso $A = -\Delta$ en el apartado 7.2.7.

3. Si Γ_0 y Γ_1 son dos partes complementarias de la frontera Γ de manera que

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad \text{y} \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$$

Si $H = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$ estamos resolviendo un problema mixto de Dirichlet-Neumann. Formalmente el problema resuelto es,

$$\begin{aligned} Au &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_A} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \end{aligned}$$

y donde la condición de contorno de tipo Neumann sobre Γ_1 se puede justificar con suficientes condiciones de regularidad.
La aplicación composición de la aplicación traza $H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ y de la aplicación restricción de $L^2(\Gamma)$ sobre $L^2(\Gamma_0)$ es evidentemente continua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma_0)$. Es sencillo comprobar que H es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ (ejercicio 7.8) y por lo tanto espacio de Hilbert con la norma inducida por la de $H^1(\Omega)$. Si suponemos que $\alpha_0 > 0$ entonces la aplicación bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es elíptica y el correspondiente problema variacional tiene solución única.
En el caso $\alpha_0 \geq 0$ si suponemos que Ω es conexo y la parte de la frontera con condiciones de tipo Dirichlet Γ_0, tiene medida $d-1$ dimensional no nula, entonces como H es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, la elipticidad de la aplicación bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 7.17. *Si Ω es un abierto acotado conexo de $\mathbb{R}^d$ con frontera Γ de clase C^1 a trozos y Γ_0 una parte de la frontera de medida $d-1$ dimensional no nula, entonces la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ es una norma sobre el espacio $H = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_0} = 0\}$ equivalente a la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.*

Demostración:

Veamos que la siguiente aplicación es una norma sobre H,

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto |v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{d} \| \tfrac{\partial v}{\partial x_i} \|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Basta demostrar que si $v \in H$ es tal que $|v|_{1,\Omega} = 0$ entonces $v = 0$. En efecto, si $|v|_{1,\Omega} = 0$ entonces $\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$ en Ω, para todo $i = 1, \ldots, d$, por tanto v es constante en Ω en virtud de su conexidad, pero como además $v|_{\Gamma_0} = 0$, entonces $v = 0$ en Ω.
Veamos ahora la equivalencia de las normas, es decir existen dos constantes C_1 y C_2 positivas tales que para toda $v \in H$,

$$C_1 \|v\|_{1,\Omega} \leq |v|_{1,\Omega} \leq C_2 \|v\|_{1,\Omega} \tag{7.54}$$

Evidentemente, la segunda desigualdad es cierta con $C_2 = 1$. La primera desigualdad se deduce por reducción al absurdo. Supongamos que esta desigualdad no es cierta, entonces para todo entero positivo n existe una función $w_n \in H$ tal que $\|w_n\|_{1,\Omega} > n|w_n|_{1,\Omega}$. Sea $v_n = w_n/\|w_n\|_{1,\Omega}$, así obtenemos una sucesión $(v_n)_n$ en H tal que $\|v_n\|_{1,\Omega} = 1$ y $|v_n|_{1,\Omega} < 1/n$. Por el teorema de Rellich 6.19, la inyección canónica de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, por tanto podemos extraer una subsucesión $\{v_\mu\}$ convergente en $L^2(\Omega)$,

$$v_\mu \xrightarrow[\mu\to\infty]{} v \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Pero tenemos que $|v_\mu|_{1,\Omega} < 1/\mu \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 0$, por tanto para $i = 1, \ldots, d$, se tiene $\|\frac{\partial v_\mu}{\partial x_i}\|_{0,\Omega} < 1/\mu \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 0$, es decir $\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$. Luego $v \in H^1(\Omega)$, como H es cerrado $v \in H$. Además v es constante en Ω y como $v|_{\Gamma_0} = 0$, entonces $v = 0$ en Ω, pero esto no es posible porque $\|v\|_{1,\Omega} = \lim_{\mu\to\infty} \|v_\mu\|_{1,\Omega} = 1$.

■

7.2.6. *Problema mixto asociado a la ecuación de transmisión de calor*

Consideremos el problema de la determinación de la distribución de la temperatura u de un cuerpo que ocupa una región Ω del espacio $\mathbb{R}^d$, siendo $d = 2$ ó 3. La frontera Γ de Ω está constituida por dos partes complementarias Γ_0 y Γ_1 de manera que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ y $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. En física e ingeniería se conoce con frecuencia la temperatura de una parte Γ_0 de la frontera de Ω y en el resto de la frontera Γ_1 se conoce, sino el flujo de calor, una relación que liga éste con la temperatura en Γ_1, que suele ser una condición de transmisión de calor por convección en la frontera y que depende de un coeficiente h de convección.

Las ecuaciones que rigen este ejemplo son

$$-\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f \quad \text{en } \Omega \tag{7.55}$$

$$-\sum_{i=1}^{d}k_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i=h(u-u_\infty) \quad \text{sobre } \Gamma_1 \tag{7.56}$$

$$u=g \text{ sobre } \Gamma_0 \tag{7.57}$$

donde $k_i \in L^\infty(\Omega)$ es la conductividad térmica en la dirección x_i. Si $k_i = k$ para $i = 1,...,d$, se dice que el medio es isótropo, es decir las propiedades de transmisión de calor del medio son las mismas en todas las direcciones. Supondremos que existe una constante $\alpha > 0$ tal que $k_i \geq \alpha$ para $i = 1,...,d$. También suponemos que el coeficiente de convección $h \in L^\infty(\Gamma_1)$ con $h \geq 0$. Finalmente u_∞ es la temperatura del ambiente que rodea Γ_1 y supondremos $hu_\infty \in L^\infty(\Gamma_1)$. Finalmente $f \in L^2(\Omega)$ es la fuente de calor y $g \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ es la temperatura en Γ_0.

La formulación débil del problema (7.55)-(7.56)-(7.57) es: Hallar u tal que

$$u \in H = \{v \in H^1(\Omega);\ v|_{\Gamma_0}=0\} \tag{7.58}$$

$$\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega k_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx+\int_{\Gamma_1}huv\,d\sigma=\int_\Omega fv\,dx+\int_{\Gamma_1}hu_\infty v\,d\sigma \ \forall v \in H \tag{7.59}$$

Dejamos como ejercicio 7.9 deducir la formulación débil (7.58)-(7.59) del problema (7.55)-(7.56)-(7.57).

Teorema 7.18. *El problema (7.58)-(7.59) tiene solución única*

Demostración:

Procediendo como en el problema de Dirichlet no homogéneo 7.2.3 nos trasladamos al caso en el que $g = 0$. Sea una función $u_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $u_0 = g$ sobre Γ_0. Resolvemos entonces el problema: Hallar $w \in H$ tal que

$$a(w,v)=L_1(v)+L_2(v) \quad \forall v \in H \tag{7.60}$$

donde

$$a(w,v)=\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega k_i\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx+\int_{\Gamma_1}hwv\,d\sigma \tag{7.61}$$

$$L_1(v)=\int_\Omega fv\,dx+\int_{\Gamma_1}hu_\infty v\,d\sigma$$

$$L_2(v)=-\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega k_i\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx-\int_{\Gamma_1}hu_0v\,d\sigma$$

La forma bilineal (7.61) es continua y elíptica. En efecto

- Continua: Para todo $u, v \in H$ tenemos

  $$|a(w,v)| \leq \max_{i=1,\dots,d} \|k_i\|_{0,\infty,\Omega}|u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} + \|h\|_{0,\infty,\Gamma_1}\|u\|_{0,\Gamma_1}\|v\|_{0,\Gamma_1} \leq C\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}$$

  donde hemos utilizado el teorema de la traza para la mayoración de los términos en la frontera Γ_1.
- Elíptica: Para todo $v \in H$ tenemos

  $$\begin{aligned} a(v,v) &\geq \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega k_i (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} h v^2 \, d\sigma \\ &\geq \alpha |v|_{1,\Omega}^2 \geq C\|v\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

  siendo aquí $C = \alpha C_1$ donde C_1 es la constante en (7.54) de equivalencia de la seminorma y la norma en el espacio H.
- De forma análoga a los casos anteriores se demuestra que las formas lineales L_1 y L_2 son continuas.

Obtenida la solución w, tendremos que $u = w + u_0$ es solución del problema (7.58)-(7.59). La unicidad se demuestra análogamente a lo realizado en el teorema 7.15 y observando que en H la seminorma $|.|_{1,\Omega}$ y la norma $\|.\|_{1,\Omega}$ son normas equivalentes (véase teorema 7.17).

■

7.2.7. *Un ejemplo sin unicidad*

Consideramos aquí el problema de Neumann asociado al operador de Laplace: Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$ hallar u definida en Ω y solución de

$$-\Delta u = f \quad en \;\; \Omega \tag{7.62}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g \quad sobre \;\; \Gamma \tag{7.63}$$

En caso de que tenga solución, ésta no sería única pues cualquier solución más una constante sería también solución. En ese caso podemos caracterizar el conjunto de soluciones.

Razonemos desde el punto de vista físico de la ecuación del calor; u representa la temperatura de un cuerpo, $f \in L^2(\Omega)$ son las fuentes volumétricas de calor y $g \in L^2(\Gamma)$ las fuentes superficiales de calor. Estamos buscando una solución estacionaria, es decir independiente del tiempo. Si el aporte global de calor al cuerpo es positivo (resp. negativo), la temperatura del mismo aumentará (resp. disminuirá) con el tiempo y por tanto la solución no sería estacionaria. Luego parece un requisito indispensable para que nuestro problema tenga al menos una solución, que el aporte global de calor sea nulo, lo que matemáticamente se expresa como

$$\int_\Omega f\,dx + \int_\Gamma g\,d\sigma = 0$$

Veremos que esta es una condición necesaria y suficiente para que el problema tenga solución. Empezamos introducuiendo una formulación débil. Procediendo como habitualmente

Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$, hallar u tal que

$$u \in H^1(\Omega) \tag{7.64}$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx + \int_\Gamma g v\,d\sigma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{7.65}$$

Primero observemos que tomando $v = 1$ obtenemos que la condición

$$\int_\Omega f\,dx + \int_\Gamma g\,d\sigma = 0 \tag{7.66}$$

es necesaria para la existencia de solución. Desde el punto de vista físico refleja el equilibrio de las fuentes externas (como hemos señalado, en un problema de transmisión de calor significa que el aporte total de las fuentes externas de calor al cuerpo que estamos estudiando debe ser nulo para tener una solución estacionaria). Veamos que también es condición suficiente. Inicialmente nuestro espacio de trabajo sería $H^1(\Omega)$. Sin embargo la forma bilineal $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$ no es elíptica sobre $H^1(\Omega)$, pues por ejemplo para la función no nula $v = 1$ en todo Ω tendremos $a(v,v) = 0$. Por lo tanto el teorema de Lax-Milgram 4.17 no es aplicable.

Sin embargo, el hecho de que una solución venga determinada salvo constantes, nos lleva a introducir un nuevo espacio de clases de funciones, el espacio cociente

$$H = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

cuyos elementos son clases de equivalencia $\widetilde{u}$, donde dos funciones $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia si $u_1 - u_2 \in \mathbb{R}$.

Siendo $\mathbb{R}$ un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, el espacio cociente H es un espacio vectorial normado con la suma, producto por escalares y norma habituales (teorema 3.6)

$$\begin{aligned}
&\widetilde{u} + \widetilde{v} = \widetilde{u+v}, \quad \text{con} \quad u \in \widetilde{u} \text{ y } v \in \widetilde{v}\\
&\lambda\widetilde{u} = \widetilde{\lambda u}, \quad \text{con} \quad u \in \widetilde{u}\\
&\|\widetilde{u}\|_H = inf_{u\in\widetilde{u}}\|u\|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

Además H es un espacio completo con la norma $\|\cdot\|_H$ por ser $H^1(\Omega)$ completo y $\mathbb{R}$ un subespacio cerrado (teorema 3.8).

Por otro lado, podemos definir un producto escalar en H,

$$(\widetilde{u},\widetilde{v})_H = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

con $u \in \widetilde{u}$ y $v \in \widetilde{v}$, y su correspondiente norma asociada,

$$|\widetilde{u}|_H = (\widetilde{u},\widetilde{u})_H^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^d \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 \, dx\Big)^{1/2}.$$

Claramente este producto escalar y la norma asociada están bien definidos pues su valor no depende del representante de la clase elegido. Además el producto escalar es definido positivo, es decir $(\widetilde{v},\widetilde{v})_H = 0$ si y solo si $\widetilde{v} = \widetilde{0}$, pues la clase $\widetilde{0}$ es la clase que contiene a las constantes, es decir $\widetilde{0} = \mathbb{R}$.

Teorema 7.19. *La norma* $|\widetilde{u}|_H = (\widetilde{u},\widetilde{u})_V^{1/2}$ *es equivalente a la norma cociente en* $H = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

Demostración:

En concreto, vamos a demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que

$$C\|\widetilde{u}\|_H \le |\widetilde{u}|_H \le \|\widetilde{u}\|_H$$

Primero observemos que para toda $u \in \widetilde{u}$ se tiene,

$$|\widetilde{u}|_H^2 = \sum_{i=1}^d \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 \, dx \le \sum_{i=1}^d \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 \, dx + \int_\Omega u^2 \, dx = \|u\|_{1,\Omega}^2$$

tomando el valor inferior para todo $u \in \widetilde{u}$,

$$|\widetilde{u}|_H^2 \le inf_{u\in\widetilde{u}}\|u\|_{1,\Omega}^2 = \|\widetilde{u}\|_H^2$$

Para la otra desigualdad razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que no es cierta de modo que para todo entero positivo n, existe una clase $\widetilde{w}_n$ tal que $|\widetilde{w}_n|_H < \|\widetilde{w}_n\|_H/n$. Denotemos $\widetilde{u}_n = \widetilde{w}_n/\|\widetilde{w}_n\|_H$, formando una sucesión $(\widetilde{u}_n)_n \subset H$ tal que $\|\widetilde{u}_n\|_H = 1$ y $|\widetilde{u}_n|_H < 1/n$. Como $\|\widetilde{u}_n\|_H = \text{ínf}_{u_n\in\widetilde{u}_n} \|u_n\|_{1,\Omega}$ existirá, cualquiera que sea n, un $\varepsilon > 0$ y un representante $u_n \in \widetilde{u}_n$ tales que $\|u_n\|_{1,\Omega} \le 1+\varepsilon$. Entonces la sucesión $(u_n)_n$ es una sucesión acotada en $H^1(\Omega)$, por tanto existe una subsucesión $(u_\mu)_\mu$ convergente en $L^2(\Omega)$, sea u su límite. Por otra parte, como $|\widetilde{u}_\mu|_H < 1/\mu \to 0$, tenemos que $\frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} \to 0$ en $L^2(\Omega)$ y por la continuidad de las derivadas en el sentido de las distribuciones $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ para todo $i = 1,\dots,d$. Por tanto $u_\mu \to u$ en $H^1(\Omega)$ y además u es constante de modo que

$$\|\widetilde{u}_\mu\|_H = \inf_{u_\mu\in\widetilde{u}_\mu} \|u_\mu\|_{1,\Omega} \le \|u_\mu - u\|_{1,\Omega} \to 0$$

pero esto no es posible porque $\|\widetilde{u}_\mu\|_H = 1$. Por lo tanto es cierta la desigualdad $|\widetilde{u}|_H \geq C\|\widetilde{u}\|_H$ para toda $\widetilde{u} \in H$.

■

Resumiendo $H = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ es un espacio de Hilbert en el que $\|\cdot\|_H$ y $|\cdot|_H$ son normas equivalentes.

Por otra parte, definamos la siguiente forma lineal,

$$\begin{aligned} L : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \widetilde{v} &\longrightarrow L(\widetilde{v}) = \int_\Omega f v\, dx + \int_\Gamma g v\, d\sigma \quad \forall v \in \widetilde{v} \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que está bien definida, en efecto sean $v_1, v_2 \in \widetilde{v}$, entonces $v_1 - v_2 = C \in \mathbb{R}$ y

$$\int_\Omega f(v_1 - v_2)dx + \int_\Gamma g(v_1 - v_2)d\sigma = C(\int_\Omega f dx + \int_\Gamma g d\sigma) = 0.$$

La linealidad es trivial y la continuidad se obtiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el teorema de la traza, en efecto

$$\begin{aligned} |L(\widetilde{v})| &\leq |\int_\Omega f v dx| + |\int_\Gamma g v d\sigma| \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Gamma}\|v\|_{0,\Gamma} \\ &\leq (\|f\|_{0,\Omega} + C\|g\|_{0,\Gamma})\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall\, v \in \widetilde{v} \end{aligned}$$

donde C es la constante de continuidad en el teorema de la traza. Tomando el valor inferior para $v \in \widetilde{v}$, tenemos

$$|L(\widetilde{v})| \leq (\|f\|_{0,\Omega} + C(\Omega)\|g\|_{0,\Gamma})\|\widetilde{v}\|_H$$

Por tanto, simplemente aplicando el teorema de Riesz-Frechet 4.11 en H, tenemos la existencia y unicidad del problema siguiente,

$$\text{Hallar} \quad \widetilde{u} \in H = H^1(\Omega)/\mathbb{R} \quad \text{tal que} \tag{7.67}$$

$$(\widetilde{u}, \widetilde{v})_H = L(\widetilde{v}), \quad \forall \widetilde{v} \in H \tag{7.68}$$

En definitiva hemos demostrado el siguiente:

Teorema 7.20. *Si se cumple la condición (7.66) el problema (7.64)-(7.65) tiene infinitas soluciones y todas ellas difieren en una constante. Si la condición (7.66) no se cumple entonces el problema (7.64)-(7.65) no tiene ninguna solución.*

7.2.8. Un problema de Convección-Difusión

- Sea $\Omega \in \mathbb{R}^d$ (con $d = 2$ o 3) abierto conexo y acotado de frontera Γ regular constituida por dos partes complementarias Γ_0 y Γ_1 de manera que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ y $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ y con medidas $d-1$ dimensionales $|\Gamma_0| > 0$ y $|\Gamma_1| > 0$.
- $f \in L^2(\Omega)$.
- $\vec{b} \in (C^1(\bar{\Omega}))^d$ verifica

$$\vec{\nabla}.\vec{b} = \sum_{i=1,\ldots,d} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

  y

$$\vec{b}.\vec{n} = \sum_{i=1,\ldots d} b_i n_i \geq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1$$

  donde $\vec{n}$ denota el campo vectorial unitario normal dirigido hacia el exterior en la frontera Γ.

Considerar el problema de contorno siguiente:

$$-\Delta u + \vec{b}.\vec{\nabla} u = f \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7.69}$$

$$u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \tag{7.70}$$

$$-\vec{\nabla} u.\vec{n} = \vec{b}.\vec{n}\, u \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \tag{7.71}$$

donde $\vec{b}.\vec{\nabla} u = \sum_{i=1,\ldots d} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\vec{\nabla} u.\vec{n} = \sum_{i=1,\ldots d} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i$.

Considerar el espacio $H = \{v \in H^1(\Omega);\ v|_{\Gamma_0}\}$. Sea $v \in H$, multiplicamos la ecuación (7.69) por v e integramos en Ω. Aplicando la fórmula de Green (teorema 6.18) al primer sumando obtenemos

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v\, dx - \int_\Gamma \vec{\nabla} u.\vec{n}\, v\, d\gamma + \int_\Omega \vec{b}.\vec{\nabla} u\, v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

teniendo en cuenta que $v = 0$ sobre Γ_0 y la condición (7.71) resulta

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v\, dx + \int_\Omega \vec{b}.\vec{\nabla} u\, v\, dx + \int_{\Gamma_1} \vec{b}.\vec{n}\, u\, v\, d\gamma = \int_\Omega f v\, dx \tag{7.72}$$

La formulación débil de (7.69)-(7.70)-(7.71) es entonces: Hallar $u \in H$ tal que verifica (7.72) para todo $v \in H$.

Teorema 7.21. *El problema: Hallar $u \in H$ tal que verifica (7.72) para todo $v \in H$ tiene solución única.*

Demostración:

Se deja como ejercicio 7.10

■

Observemos que en este caso la formulación débil no es equivalente a un problema de optimización pues la forma bilineal asociada no es simétrica.

7.3. Deformación elástica de un sólido

Un ejemplo de problema elíptico fundamental en la Mecánica de sólidos es el sistema de ecuaciones de la elasticidad. Consideremos un cuerpo sólido que se deforma elásticamente bajo la acción de fuerzas exteriores. El cuerpo ocupa una región Ω del espacio $\mathbb{R}^d$ con $(d = 2, 3)$. Supongamos que una parte de la frontera Γ_0, de medida no nula en $\mathbb{R}^{d-1}$, se mantiene fija. En el resto de la frontera $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$, supongamos que se ejercen unas fuerzas superficiales $\vec{g} = (g_1, \dots, g_d) \in \left(L^2(\Gamma_1)\right)^d$. En Ω se ejercen unas fuerzas volumétricas $\vec{f} = (f_1, \dots, f_d) \in \left(L^2(\Omega)\right)^d$. Debido a la acción de estas fuerzas exteriores $\vec{f}$ y $\vec{g}$, el cuerpo se deforma y cada punto sufre un desplazamiento $\vec{u} = (u_1, \dots, u_d)$. Al deformarse se generan en el cuerpo unas tensiones elásticas, caracterizadas por el tensor de tensiones $\sigma_{i,j}(\vec{u})$, hasta que se logra un equilibrio con las fuerzas exteriores. De manera general se puede demostrar, como consecuencia de la ley general de conservación de momento angular que el tensor de tensiones $\sigma = (\sigma_{i,j})$ es simétrico.

Las ecuaciones que rigen este problema se estudian en la teoría de la elasticidad y son

$$-\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{i,j}(\vec{u}) = f_i \text{ en } \Omega \quad i = 1, \dots, d \tag{7.73}$$

$$u_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \quad i = 1, \dots, d \tag{7.74}$$

$$\sum_{j=1}^{d} \sigma_{i,j}(\vec{u}) \eta_j = g_i \text{ sobre } \Gamma_1 \quad i = 1, \dots, d \tag{7.75}$$

Las ecuaciones (7.73) y (7.75) representan el equilibrio entre las fuerzas exteriores y las fuerzas elásticas y es una consecuencia de la ley de conservación del momento cinético. Las ecuaciones (7.74) significan que en la parte de la frontera Γ_0 no hay desplazamiento. Introduciendo el tensor de deformaciones

$$\varepsilon_{i,j}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad i, j = 1, \dots, d \tag{7.76}$$

el tensor de tensiones viene dado por la ley del comportamiento del material que expresa la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones. En el caso más sencillo suponiendo que el material es isótropo y para una aproximación lineal tenemos la ley de Hooke,

$$\sigma_{i,j}(\vec{u}) = \lambda\big(\sum_{k=1}^{d}\varepsilon_{kk}(\vec{u})\big)\delta_{i,j} + 2\mu\varepsilon_{i,j}(\vec{u}) \tag{7.77}$$

Los coeficientes $\lambda \geq 0$ y $\mu > 0$ se llaman coeficientes de Lamé, dependen del material y están directamente relacionados con el módulo de Young $E = \mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$ y el coeficiente de Poisson $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ del material. El tensor de deformaciones $\varepsilon_{i,j}(\vec{u})$ es obviamente simétrico.

La ley de Hooke (7.77) se puede invertir, y podemos expresar el tensor de deformaciones en función del tensor de tensiones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}(\sum_{l=1}^{d}\sigma_{ll})\delta_{ij} \tag{7.78}$$

Veamos la correspondiente formulación variacional. Consideramos el espacio $\left(H^1(\Omega)\right)^d = H^1(\Omega)\times \overset{d}{\cdots} \times H^1(\Omega)$, que es un espacio de Hilbert con el producto

$$(\vec{u},\vec{v})_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^{d}(u_i,v_i)_{1,\Omega}.$$

El espacio donde buscamos la solución, llamado espacio de desplazamientos admisibles es

$$H = \{\vec{v} \in \left(H^1(\Omega)\right)^d;\ v_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_0,\ i = 1,\ldots,d\}.$$

Sea $\vec{v} = (v_i)_{i=1,\ldots,d} \in H$. Multiplicando las ecuaciones (7.73) por v_i $i = 1,\ldots,d$ y sumando para todo $i = 1,\ldots,d$, integrando en Ω y aplicando la fórmula de Green (teorema 6.15) obtenemos,

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{i,j}(\vec{u})\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx - \int_{\Gamma_1}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{i,j}(\vec{u})\eta_j v_i d\sigma = \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} f_i v_i dx.$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_{i,j}(\vec{u})$ es simétrico, y utilizando las condiciones (7.75) resulta,

$$\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega \sigma_{i,j}(\vec{u})\varepsilon_{i,j}(\vec{v})dx = \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega f_i v_i dx + \sum_{i=1}^{d}\int_{\Gamma_1} g_i v_i d\sigma.$$

Por tanto, el correspondiente problema variacional a resolver es: Dadas $\vec{f} \in \left(L^2(\Omega)\right)^d$ y $\vec{g} \in \left(L^2(\Gamma_1)\right)^d$, hallar $\vec{u} \in H$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega \sigma_{i,j}(\vec{u})\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\,dx = \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega f_i v_i\,dx + \sum_{i=1}^{d}\int_{\Gamma_1} g_i v_i\,d\sigma \quad \forall \vec{v} \in H \tag{7.79}$$

Esto significa que la posición de equilibrio se obtiene para $\vec{u} \in H$ verificando esta ecuación para cualquiera que sea $\vec{v} \in H$. Es lo que se conoce en física como *principio* *de trabajos virtuales*: El primer miembro representa el trabajo de las fuerzas elásticas y el segundo miembro el trabajo de las fuerzas exteriores.

Para poder demostrar la existencia y unicidad de la solución de este problema necesitaremos los siguientes resultados:

Teorema 7.22. *(Desigualdad de Korn):*
Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ de frontera Γ de clase C^1 a trozos. Entonces

$$E = \{\vec{v} \in \left(L^2(\Omega)\right)^d;\ \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) \in L^2(\Omega),\ i,j = 1,\ldots,d\} = \left(H^1(\Omega)\right)^d,$$

y existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que para todo $\vec{v} \in \left(H^1(\Omega)\right)^d$ verifica

$$\sum_{i,j=1}^{d} \|\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 \geq C\|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2$$

Se utilizan los espacios $\left(L^2(\Omega)\right)^d$ y $\left(H^1(\Omega)\right)^d$ con las normas hilbertianas

$$\|\vec{v}\|_{0,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{d} \|v_i\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2}, \quad \|\vec{v}\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{d} \|v_i\|_{1,\Omega}^2\right)^{1/2}.$$

La desigualdad de Korn no es en absoluto trivial pues el primer miembro sólo hace intervenir ciertas combinaciones lineales de las primeras derivadas, mientras que en el segundo miembro intervienen todas las derivadas.

Demostración:

Daremos los pasos esenciales de la demostración. La demostración se realiza en tres etapas:

1. Sea $H_0^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$ su dual. Entonces si

$$w \in L^2(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$$

En efecto: Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ resulta

$$\langle \frac{\partial w}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle w, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\int_\Omega w \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx$$

de donde

$$|\langle \frac{\partial w}{\partial x_i}, \varphi \rangle| \leq \|w\|_{0,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega}$$

por tanto la aplicación

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_i} : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\to -\int_\Omega w \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \end{aligned}$$

se extiende por continuidad (véase teorema 6.8) a todo el espacio $H_0^1(\Omega)$ definiendo una forma lineal continua sobre $H_0^1(\Omega)$.

2. Si $w \in H^{-1}(\Omega)$ es tal que $\frac{\partial w}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$ $i = 1, \dots, d$ entonces $w \in L^2(\Omega)$. Demostración en [5].
3. Pongamos $E = \{\vec{v} \in (L^2(\Omega))^d ; \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \in L^2(\Omega)\}$. Está claro que $E \supset (H^1(\Omega))^d$. Veamos que $E \subset (H^1(\Omega))^d$. E es un espacio de Hilbert con la norma

$$\vec{v} \to \big(\|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2\big)^{1/2}$$

Para todo $\vec{v} \in E$ tenemos por una parte

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$$

por lo demostrado en la etapa 1. Por otra parte como $\vec{v} \in (L^2(\Omega))^d$ implica $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \in H^{-1}(\Omega)$ resultando $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \in L^2(\Omega)$ por lo visto en el paso 2, de modo que $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^d$. En definitiva $E = (H^1(\Omega))^d$.
Finalmente, la aplicación idéntica

$$\begin{aligned} (H^1(\Omega))^d &\to E \\ \vec{v} &\to \vec{v} \end{aligned}$$

es biyectiva y continua pues (véase ejercicio 7.11)

$$\|\vec{v}\|_E = \big(\sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2\big)^{1/2} \le \|\vec{v}\|_{1,\Omega}$$

Por el corolario 3.9 del teorema de la aplicación abierta 3.13, la inversa existe y es continua, es decir

$$\|\vec{v}\|_{1,\Omega} \le C\|\vec{v}\|_E = C\big(\sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v}\|_{0,\Omega}^2\big)^{1/2}$$

que es la desigualdad de Korn.

■

Como consecuencia de la desigualdad de Korn, tenemos el siguiente resultado que nos va a permitir demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema de la elasticidad.

Corolario 7.2. *Supongamos que Ω es un abierto acotado conexo de $\mathbb{R}^d$ ($d=2,3$) de frontera Γ de clase C^1 a trozos. Entonces existe una constante $C_0>0$ tal que para todo $\vec{v}\in H$,*

$$\sum_{i,j=1}^{d}\|\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \geq C_0\|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2.$$

Demostración:

Demostraremos primeramente que

$$\vec{v}\longrightarrow (\sum_{ij}\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})_{0,\Omega}^2\|^{1/2}$$

es una norma sobre H. En efecto, pongamos

$$\mathcal{R}=\{\vec{v}\in H^1(\Omega)^d;\ \varepsilon_{ij}(\vec{v})=0 \text{ para } 1\leq i,j\leq d\}$$

El conjunto $\mathcal{R}$ se llama conjunto de desplazamientos rígidos.

- Caso $d=2$, $\vec{v}=(v_1,v_2)$,

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=0\Rightarrow v_1(x_1,x_2)=g(x_2)$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0\Rightarrow v_2(x_1,x_2)=f(x_1)$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1})=0\Rightarrow g'(x_2)+f'(x_1)=0$$

que implica

$$g'(x_2)=\lambda \quad g(x_2)=\lambda x_2+a_1$$
$$f'(x_1)=-\lambda \quad f(x_1)=-\lambda x_1+a_2$$

de donde

$$v_1(x_1,x_2)=a_1+\lambda x_2$$
$$v_2(x_1,x_2)=a_2-\lambda x_1$$

es decir

$$\mathcal{R}=\{\vec{v}\in H^1(\Omega)^2;\ v_1(x_1,x_2)=a_1+\lambda x_2,\ v_2(x_1,x_2)=a_2-\lambda x_1\}$$

Si $\vec{v}\in\mathcal{R}$ se anula en 2 puntos distintos de $\mathbb{R}^2$ entonces $\vec{v}=0$. Como suponemos que la medida 1-dimensional de Γ_0 es mayor que cero, tenemos

$$H\cap\mathcal{R}=\{\vec{0}\}$$

- Caso $d=3$. Si $\varepsilon_{ij}=0$ para $1\le i,j\le 3$ tenemos

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}=\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k}-\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}=0$$

para $1\le i,j,k\le 3$, de modo que v_i es un polinomio de grado menor o igual que 1, es decir

$$v_i(x_1,x_2,x_3)=a_i+\sum_{k=1}^{3} b_{ik}x_k \quad 1\le i\le 3$$

además $\varepsilon_{ij}(\vec{v})=0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=0 \Leftrightarrow b_{ij}+b_{ji}=0$. Así pues,

$$b_{ii}=0, \quad 1\le i\le 3$$

$$b_{ij}=-b_{ji}, \quad 1\le i,j\le 3 \quad i\ne j$$

denotando

$$b_{12}=-b_{21}=-b_3$$
$$b_{23}=-b_{32}=-b_1$$
$$b_{31}=-b_{13}=-b_2$$

resulta

$$v_1(x_1,x_2,x_3)=a_1-b_3x_2+b_2x_3$$
$$v_2(x_1,x_2,x_3)=a_2-b_1x_3+b_3x_1$$
$$v_3(x_1,x_2,x_3)=a_3-b_2x_1+b_1x_2$$

o bien, con notación evidente

$$\vec{v}(x_1,x_2,x_3)=\vec{a}+\vec{b}\wedge\vec{x}$$

Entonces si $\vec{v}\in\mathcal{R}$ se anula en 3 puntos no alineados de $\mathbb{R}^3$ resulta $\vec{v}=0$. Como suponemos que la medida 2-dimensional de Γ_0 es mayor que cero, tenemos

$$H\cap\mathcal{R}=\{\vec{0}\}$$

y esto prueba que

$$\vec{v}\to\left(\sum_{ij}\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}$$

es una norma sobre H.

Demostramos ahora la equivalencia de las dos normas, es decir existen dos constantes $C_1>0$ y $C_2>0$ tales que

$$C_1\|\vec{v}\|_{1,\Omega}\le\left(\sum_{i,j=1}^{d}\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}\le C_2\|\vec{v}\|_{1,\Omega} \tag{7.80}$$

La segunda se obtiene con $C_2 = 1$ (ejercicio 7.11). Demostremos la otra por reducción al absurdo. Supongamos que no existe ninguna constante C_1 verificando la primera desigualdad de la expresión anterior, es decir, supongamos que para todo entero $n \geq 1$ existe un $\vec{w}_n \in H$ tal que

$$\frac{1}{n}\|\vec{w}_n\|_{1,\Omega} > (\sum_{i,j=1}^{d} \|\varepsilon_{ij}(\vec{w}_n)\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}$$

y tomemos $\vec{v}_n = \frac{\vec{w}_n}{\|\vec{w}_n\|_{1,\Omega}}$, resulta

$$\|\vec{v}_n\|_{1,\Omega} = 1 \tag{7.81}$$

$$(\sum_{i,j=1}^{d} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v}_n)\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} < \frac{1}{n} \tag{7.82}$$

Como la inclusión

$$\begin{aligned} I : (H^1(\Omega))^d &\to (L^2(\Omega))^d \\ \vec{v} &\to \vec{v} \end{aligned}$$

es compacta, y la sucesión $(\vec{v}_n)_n$ es acotada, existe una subsucesión $(\vec{v}_\mu)_\mu$ de $(\vec{v}_n)_n$ convergente en $(L^2(\Omega))^d$. Sea

$$\vec{v} = \lim_{\mu\to\infty} \vec{v}_\mu \quad \text{en } (L^2(\Omega))^d$$

Tenemos por la continuidad de la derivación en el sentido de las distribuciones

$$\lim_{\mu\to\infty} \varepsilon_{ij}(\vec{v}_\mu) = \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Por otra parte por (7.82) resulta

$$\lim_{\mu\to\infty} \varepsilon_{ij}(\vec{v}_\mu) = \varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0 \quad \text{en } L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

de donde el límite $\vec{v} \in E = (H^1(\Omega))^d$. Utilizando la desigualdad de Korn

$$\|\vec{v}_\mu - \vec{v}\|_{1,\Omega} \leq C\big(\sum_{ij} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v}_\mu - \vec{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v}_\mu - \vec{v}\|_{0,\Omega}^2\big)^{1/2} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 0$$

por lo que $\lim_{\mu\to\infty} \vec{v}_\mu = \vec{v}$ en $(H^1(\Omega))^d$. Además como H es un subespacio cerrado de $(H^1(\Omega))^d$ y $(\vec{v}_\mu)_\mu \subset H$, $\vec{v} \in H$. Finalmente como $\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0$ resulta $\vec{v} = 0$ lo que contradice (7.81).

■

Como consecuencia de estos dos resultados tenemos la existencia y unicidad de la solución del problema de la elasticidad.

Teorema 7.23. *El problema: Hallar $\vec{u} \in H$ verificando (7.79) tiene solución única.*

Demostración:

Denotemos,

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \sigma_{i,j}(\vec{u})\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\,dx$$
$$L(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega f_i v_i\,dx + \sum_{i=1}^{d} \int_{\Gamma_1} g_i v_i\,d\sigma.$$

y sustitutendo la ley de comportamiento (7.77) podemos escribir

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \lambda \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{d} \varepsilon_{kk}(\vec{u})\Big)\Big(\sum_{k=1}^{d} \varepsilon_{kk}(\vec{v})\Big)\,dx + 2\mu \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \varepsilon_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})\,dx$$

Por tanto el problema de la elasticidad se escribe ahora con su formulación débil,

$$\text{Hallar } \vec{u} \in V \text{ tal que } a(\vec{u},\vec{v}) = L(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in H.$$

Es fácil ver que $L(\cdot)$ es lineal y continua: $L(\cdot) = L_1(\cdot) + L_2(\cdot)$ con

$$L_1(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega f_i v_i\,dx$$

y

$$L_2(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{d} \int_{\Gamma_1} g_i v_i\,d\sigma$$

La linealidad es inmediata y la continuidad basta observar por una parte que $L_1(\cdot)$ es el producto escalar en $\big(L^2(\Omega)\big)^d$ de $\vec{f}$ por $\vec{v}$ de modo que

$$|L_1(v)| \le \|\vec{f}\|_{0,\Omega}\|\vec{v}\|_{0,\Omega} \le \|\vec{f}\|_{0,\Omega}\|\vec{v}\|_{1,\Omega}$$

y por otra parte que $L_2(\cdot)$ es el producto escara en $\big(L^2(\Gamma_1)\big)^d$ de $\vec{g}$ por $\vec{v}$ de modo que

$$|L_2(v)| \le \|\vec{g}\|_{0,\Gamma_1}\|\vec{v}\|_{0,\Gamma_1} \le C\|\vec{g}\|_{0,\Gamma_1}\|\vec{v}\|_{1,\Omega}$$

donde hemos aplicado la continuidad de la aplicación traza en Γ_1.

$a(\cdot,\cdot)$ es bilineal y continua (ejercicio 7.12). La elipticidad es consecuencia del corolario de la desigualdad de Korn 7.2, en efecto

$$a(\vec{v},\vec{v}) = \lambda \int_\Omega \big(\sum_{i,j=1}^{d} \varepsilon_{kk}(\vec{v})\big)^2 dx + 2\mu \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \big(\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\big)^2 dx \ge$$
$$\ge 2\mu \sum_{i,j=1}^{d} \|\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \ge 2\mu C_0 \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2.$$

Con estas propiedades, el teorema es consecuencia del teorema de Lax-Milgram 4.17.

∎

Observación 7.1. *La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ en el problema de la elasticidad es simétrica. En consecuencia la formulación débil (7.79) es equivalente a hallar $\vec{u} \in H$ tal que*

$$J(\vec{u}) = \min_{\vec{v} \in V} J(\vec{v}),$$

donde,

$$J(\vec{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(\vec{v}) \varepsilon_{i,j}(\vec{v}) dx - \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} f_i v_i dx - \sum_{i=1}^{d} \int_{\Gamma_1} g_i v_i d\sigma.$$

La formulación del problema de elasticidad de esta forma se conoce en física como el principio de mínima energía e indica que el estado de equilibrio de un cuerpo elástico se corresponde con el estado de mínima energía. La aplicación bilineal $a(\cdot,\cdot)$ representa el trabajo de deformación elástica, la aplicación lineal $L(\cdot)$ el trabajo de las fuerzas exteriores y el funcional $J(\vec{v})$ la energía total del sistema correspondiente al estado $\vec{v}$.

7.3.1. Elasticidad plana

Campo de deformaciones planas

Si en un cuerpo elástico el campo de desplazamientos es de la forma

$$u_1 = u_1(x_1, x_2),\ u_2 = u_2(x_1, x_2),\ u_3 = 0$$

el campo de deformaciones está dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}), \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{aligned}$$

decimos que tenemos un campo de deformaciones planas. Se observa que las únicas componentes no nulas de este tensor de deformaciones son las componentes ε_{ij}, $i, j = 1, 2$. Además las componentes solo dependen de x_1 y de x_2, pero no de x_3.

El tensor de tensiones asociado es de la forma

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

donde las componentes σ_{ij}, $i, j = 1, 2$ solo dependen de x_1 y de x_2 y vienen dadas por

$$\sigma_{ij} = \lambda(\sum_{l=1}^{2} \varepsilon_{ll})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{para} \quad i,j = 1,2$$

Por otra parte como $\varepsilon_{33} = 0$, resulta de la relación (7.78)

$$(1+\nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0$$

es decir,

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

El campo de tensiones es pues, como el campo de desplazamientos y de deformaciones, independiente de x_3.

Campo de tensiones planas

Un campo de tensiones planas es por definición un campo de tensiones σ_{ij} que solo depende de x_1 y de x_2 y tal que las componentes σ_{i3}, $i = 1,2,3$ son nulas. Si el cuerpo elástico es isótropo, el campo de deformaciones asociado ε_{ij} está relacionado con el tensor de tensiones por la ley de Hooke (7.77), es decir

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{para} \quad i,j = 1,2 \tag{7.83}$$

$$0 = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \tag{7.84}$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} \tag{7.85}$$

resulta de la última de estas relaciones que ε_{33} se expresa explícitamente en función de ε_{11} y de ε_{22} por

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \tag{7.86}$$

Se puede escribir la relación (7.83) como función únicamente de las componentes ε_{ij}, $i,j = 1,2$ obteniendo

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda^*(\sum_{l=1,2} \varepsilon_{ll})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\vec{u}) \quad i,j = 1,2 \tag{7.87}$$

donde

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$$

Resulta además que ε_{ij}, $i,j = 1,2$ solo dependen de x_1 y de x_2 y lo mismo ocurre con ε_{33} como consecuencia de (7.86).

Un problema de tensiones planas conduce pues a las mismas ecuaciones de equilibrio que un problema de deformaciones planas sin más que sustituir λ por λ^* en (7.87).

Formulación débil de problemas de elasticidad plana

Con las notaciones para las coordenadas cartesianas mediante $x = x_1$ e $y = x_2$, y para los desplazamientos $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ en elasticidad plana, teniendo en cuenta las observaciones de los apartados anteriores la expresión correspondiente a (7.79) se escribe para deformaciones planas:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})\,dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} f_i v_i\,dx + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_1} g_i v_i\,d\sigma \tag{7.88}$$

y desarrollando tendremos

$$\lambda \int_{\Omega} \Big(\sum_{k=1}^{2} \varepsilon_{kk}(\vec{v})\Big)^2 dx + 2\mu \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} \big(\varepsilon_{i,j}(\vec{v})\big)^2 dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} f_i v_i\,dx + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_1} g_i v_i\,d\sigma$$

debiendo sustituir el valor de λ por el de $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$ en el caso de tensiones planas.

7.4. Las ecuaciones de Stokes

Otro ejemplo de problema elíptico, en este caso en la Mecánica de Fluidos, es el sistema de Stokes que procede de la linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes, válida para números de Reynolds pequeños. El número de Reynolds expresa la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas. El número de Reynolds Re viene dado por

$$Re = \frac{|\vec{u}|L}{\nu}$$

donde $|\vec{u}|$ es la velocidad del fluido, L una longitud característica del dominio en el que estudiamos el movimiento del fluido y ν es la viscosidad cinemática.

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un abierto acotado, conexo y con frontera de clase C^1 a trozos. Queremos describir el movimiento lento de un fluido incompresible viscoso confinado en Ω y sometido a unas fuerzas exteriores $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_d) \in (L^2(\Omega))^d$. Las ecuaciones son

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u_i + \tfrac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i \quad \text{en } \Omega \quad i = 1, \ldots, d \\ \textstyle\sum_{i=1}^{d} \tfrac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u_i &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma \quad i = 1, \ldots, d \end{aligned}$$

donde $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_d)$. Con notación vectorial

$$-\nu\Delta\vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad \text{en } \Omega \tag{7.89}$$

$$div(\vec{u}) = 0 \quad \text{en } \Omega \tag{7.90}$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \tag{7.91}$$

donde escribirmos $div(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ para la divergencia de $\vec{v}$. Las incógnitas del problema son por una parte $\vec{u}$ que es la velocidad del fluido y por otra parte p que es la presión, siendo el parámetro $\nu > 0$ la viscosidad. Un fluido incompresible es aquel cuya densidad permanece constante a lo largo de todo el flujo. Por lo tanto, el volumen de todas las porciones del fluido permanece inalterado en su movimiento. En términos matemáticos esta condición se escribe $div(\vec{u}) = 0$.

El espacio en el que se escribe la formulación débil es

$$V = \{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d ; div(\vec{u}) = 0\}$$

que es un subespacio cerrado de $(H_0^1(\Omega))^d$. Por la desigualdad de Poincaré, V es un espacio de Hilbert con la norma

$$\vec{v} \mapsto |\vec{v}|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i,j=1}^{d} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

Multiplicando la primera ecuación por v_i, componente i-ésima de $\vec{v} \in V$, integrando en Ω y sumando para $i = 1, \ldots, d$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} \Big(-\nu \Delta u_i v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \Big) dx = \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} f_i v_i \, dx$$

Aplicando la fórmula de Green (teorema 6.15) y teniendo en cuenta que $v_i \in H_0^1(\Omega)$ y que $div(\vec{u}) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} \Big(-\nu \Delta u_i v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \Big) dx &= \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} \Big(-\nu \sum_{j=1}^{d} \big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\big) v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \Big) dx \\
= \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} \Big(\nu \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \Big) dx &- \sum_{i=1}^{d} \int_{\Gamma} \Big(\nu \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \eta_j v_i - p v_i \eta_i \Big) d\sigma \\
= \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\Omega} \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx &= \nu \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx
\end{aligned}$$

Por tanto la formulación débil (*PS1*) es: Dada $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^d$, hallar $\vec{u} \in V$ tal que,

$$\nu \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} f_i v_i \, dx \quad \forall \vec{v} \in V \tag{7.92}$$

La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ sobre $V \times V$ dada por

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \nu \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx$$

como $\nu > 0$ es un producto escalar en V cuya norma asociada es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ inducida por $(H^1(\Omega))^d$. Por otra parte la forma lineal

$$L(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} f_i v_i \, dx$$

es continua sobre V. Por tanto, aplicando el teorema de Riesz-Frechet 4.11 el problema débil (*PS1*) que consiste en hallar $\vec{u} \in V$ verificando (7.92) tiene solución única.

Formulación velocidad-presión de las ecuaciones de Stokes

El inconveniente de la formulación débil anterior es que en ella no aparece la presión p y por lo tanto no es inmediato recuperar la formulación clásica a partir de (7.92). Por ello es conveniente buscar una formulación en la que aparezca dicha variable. La formulación siguiente que entra en el marco de las formulaciones con restricciones lineales que se ha estudiado en el capítulo 4 resuelve esta dificultad. Poniendo

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &= \nu \textstyle\sum_{i,j=1}^{d} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx \\ b(\vec{u}, q) &= -\textstyle\int_{\Omega} q \, div(\vec{u}) \, dx \\ (\vec{f}, \vec{v}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} f_i v_i \, dx \end{aligned}$$

La formulación débil en velocidad-presión (*PS2*) es : Dada $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^d$, hallar $\vec{u} \in (H_0^1(\Omega))^d$ y $p \in L_0^2(\Omega)$ tales que

$$a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) = (\vec{f}, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d \tag{7.93}$$

$$b(\vec{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \tag{7.94}$$

donde $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega);\ \int_{\Omega} q \, dx = 0\}$. La presión p está determinada salvo una constante. Para asegurar la unicidad de p entre todas las posibles presiones buscamos la de media nula, de ahí la elección del espacio $L_0^2(\Omega)$ en lugar de $L^2(\Omega)$.

La primera ecuación (7.93) se obtiene mediante el procedimiento habitual, que consiste en multiplicar por una función $\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d$ la ecuación (7.89) e integrar por partes. La segunda ecuación (7.94) se obtiene multiplicando por una función $q \in L_0^2(\Omega)$ la ecuación (7.90) e integrando.

Para el estudio de la existencia y unicidad de la solución del problema (*PS2*) utilizaremos el teorema 4.25. En este caso los espacios apropiados son $H = H_0^1(\Omega)$, el espacio $Q = L_0^2(\Omega)$ y el espacio

$$V = \{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d;\ b(\vec{v}, q) = 0 \ \forall q \in L_0^2(\Omega)\} = \{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d;\ div(\vec{v}) = 0\}$$

Los operadores correspondientes son $A = -\nu\Delta$, $B = -div$ y $B^* = \vec{\nabla}(\cdot)$. El problema reducido asociado a (*PS2*) es (*PS1*) . La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es elíptica en $H_0^1(\Omega)$ y en particular V-elíptica. Falta verificar la condición **Inf − Sup**. Para ello necesitamos algunos resultados previos.

Lema 7.2. *Sea $\vec{g}$ una función de $(H^{1/2}(\Gamma))^d$ que satisface*

$$\int_\Gamma \vec{g}.\vec{\eta}\, d\sigma = 0$$

donde $\vec{\eta}$ es el vector normal unitario a la frontera Γ. Entonces existe una función $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^d$ tal que

$$div(\vec{u}) = 0 \quad y \quad \vec{u} = \vec{g} \; sobre \; \Gamma$$

Demostración:

La demostración se puede encontrar en [13]. Para una demostración en el caso $d = 2$ y frontera Γ suficientemente regular véase [7].

■

Lema 7.3. *El operador divergencia es un isomormismo de $V^\perp$ sobre $L_0^2(\Omega)$.*

Demostración:

Sea $\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d$. Por la fórmula de Green

$$\int_\Omega div(\vec{v})\, dx = \int_\Gamma \vec{v}.\vec{\eta}\, d\sigma = 0$$

Entonces el operador $div(\cdot)$ es claramente un operador lineal continuo de$(H_0^1(\Omega))^d$ en $L_0^2(\Omega)$. Veamos que $div(\cdot)$ es biyectiva de $V^\perp$ en $L_0^2(\Omega)$. Como V es el núcleo de $div(\cdot)$ basta demostrar que $div(\cdot)$ es sobreyectiva de $(H_0^1(\Omega))^d$ sobre $L_0^2(\Omega)$. Para ello sea $q \in L_0^2(\Omega)$; buscamos $\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d$ tal que $div(\vec{v}) = q$. Como Ω es acotado (y supondremos de frontera suficientemente regular) existe una función $u \in H^2(\Omega)$ tal que

$$\Delta u = q \quad \text{en} \quad \Omega$$

Sea $\vec{v}_1 = \vec{\nabla} u \in (H^1(\Omega)^d$. Entonces

$$div(\vec{v}_1) = \Delta u = q$$

Además utilizando la fórmula de Green

$$\int_\Gamma \vec{v}_1.\vec{\eta}\, d\sigma = \int_\Omega div(\vec{v}_1)\, dx = \int_\Omega q\, dx = 0$$

Pero para la traza de la función $\vec{v}_1$ se tendrá en general $\gamma_0 \vec{v}_1 \neq 0$. Para solventar esta dificultad observamos que la traza sobre la frontera $\gamma_0 \vec{v}_1$ de $\vec{v}_1$ está en $(H^{1/2}(\Gamma))^d$. Podemos aplicar el lema anterior 7.2. Existe una función $\vec{w} \in (H^1(\Omega))^d$ tal que

$\gamma_0\vec{w} = \gamma_0\vec{v}_1$ y $div(\vec{w}) = 0$. Además la función $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{w}$ es la función buscada ya que $\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d$ y $div(\vec{v}) = q$.

Finalmente utilizando el teorema de la aplicación abierta 3.13 la aplicación inversa de $div(\cdot)$ de $L_0^2(\Omega)$ en $V^\perp$ es también continua y se tiene para $q = div(\vec{v})$ que existe $\beta > 0$ tal que $\|\vec{v}\|_{1,\Omega} \le \frac{1}{\beta}\|q\|_{0,\Omega}$, es decir,

$$\|div(\vec{v})\|_{0,\Omega} \ge \beta\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall\vec{v} \in V^\perp \tag{7.95}$$

■

Consecuencia inmediata del lema anterior es la condición **Inf-Sup** para las ecuaciones de Stokes:

Lema 7.4. *Existe $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{\vec{v}\in(H_0^1(\Omega))^d} \frac{\int_\Omega q\, div(\vec{v})\, dx}{\|\vec{v}\|_{1,\Omega}} \ge \beta\|q\|_{0,\Omega} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \tag{7.96}$$

Demostración:

Aplicamos el lema 4.5 con

- $V = \{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d;\ div(\vec{v}) = 0\}$
- $Q = L_0^2(\Omega)$
- $B = div : V^\perp \to Q$ es un isomorfismo.
- $b(\vec{v}, q) = \int_\Omega q\, div(\vec{v})\, dx$

que nos dice que la condición (7.96) es equivalente a la condición (7.95)

■

Finalmente podemos enunciar el siguiente:

Teorema 7.24. *El problema de Stokes (PS2): Hallar $(\vec{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega)$ verificando (7.93)-(7.94) tiene solución única.*

Demostración:

Aplicamos el teorema general abstracto 4.25.

■

Problema de Stokes con condiciones de Dirichlet no homogéneas

Consideramos aquí el problema con condiciones de Dirichlet no homogéneas.

$$-\nu\Delta\vec{u}+\vec{\nabla}p = \vec{f} \quad \text{en } \Omega \tag{7.97}$$
$$div(\vec{u}) = 0 \quad \text{en } \Omega \tag{7.98}$$
$$\vec{u} = \vec{g} \quad \text{sobre } \Gamma \tag{7.99}$$

donde $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^d$ y $\vec{g} \in (H^{1/2}(\Gamma))^d$ tal que

$$\int_\Gamma \vec{g}.\vec{\eta}\, d\sigma = 0$$

La correspondiente formulación débil es: Hallar $\vec{u} \in \{\vec{v} \in (H^1(\Omega))^d \; \vec{v}|_\gamma = \vec{g}\}$ y $p \in L^2_0(\Omega)$ tales que

$$a(\vec{u},\vec{v})+b(\vec{v},p) = (\vec{f},\vec{v}) \quad \forall\vec{v} \in (H^1_0(\Omega))^d \tag{7.100}$$
$$b(\vec{u},q) = 0 \quad \forall q \in L^2_0(\Omega) \tag{7.101}$$

Teorema 7.25. *El problema de Stokes de Dirichlet no homogéneo (PSNH): Hallar $\vec{u} \in \{\vec{v} \in (H^1(\Omega))^d \; \vec{v}|_\gamma = \vec{g}\}$ y $p \in L^2_0(\Omega)$ verificando (7.100)-(7.101) tiene solución única.*

Demostración:

Para resolver este problema nos trasladamos al caso homogéneo. En virtud del lema 7.2 existe una función $u_0 \in (H^1(\Omega))^d$ tal que

$$div(\vec{u_0}) = 0, \quad \vec{u_0}|_\Gamma = \vec{g}$$

Ponemos entonces $\vec{w} = \vec{u} - \vec{u_0}$ y buscamos $\vec{w} \in (H^1_0(\Omega))^d$ y $p \in L^2_0(\Omega)$ verificando

$$a(\vec{w},\vec{v})+b(\vec{v},p) = (\vec{f},\vec{v}) - a(\vec{u_0},\vec{v}) \quad \forall\vec{v} \in (H^1_0(\Omega))^d \tag{7.102}$$
$$b(\vec{w},q) = 0 \quad \forall q \in L^2_0(\Omega) \tag{7.103}$$

La forma lineal en el segundo miembro de (7.102) es claramente continua. Aplicando el procedimiento del problema homogéneo resulta que el problema anterior tiene solución única. La solución de (7.100)-(7.101) es entonces $\vec{u} = \vec{w} + \vec{u_0}$. La unicidad se demuestra directamente suponiendo que hay dos soluciones $(\vec{u_1}, p_1)$ y $(\vec{u_2}, p_2)$ que verifican (7.100)-(7.101). Restando se deduce que la diferencia de soluciones $(\vec{u_1} - \vec{u_2}, p_1 - p_2)$ verifica

$$a(\vec{u}_1-\vec{u}_2,\vec{v})+b(\vec{v},p_1-p_2) = 0 \quad \forall\vec{v} \in (H^1_0(\Omega))^d \tag{7.104}$$
$$b(\vec{u}_1-\vec{u}_1,q) = 0 \quad \forall q \in L^2_0(\Omega) \tag{7.105}$$

tomando $\vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ en (7.104) y $q = p_1 - p_2$ en (7.105) resulta $\frac{1}{\nu}|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|^2_{1,\Omega} = a(\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) = 0$ de donde $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = 0$. Por otra parte sustituyendo en (7.104) queda $b(\vec{v}, p_1 - p_2) = 0$ para todo $\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d$ y utilizando la condición **Inf-Sup** (7.96) resulta

$$\beta \|p_1 - p_2\|_{0,\Omega} \leq \sup_{\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^d} \frac{b(\vec{v}, p_1 - p_2)}{\|v\|_{1,\Omega}} = 0$$

de donde $p_1 - p_2 = 0$ pues $\beta > 0$.

■

En el ejercicio 7.13 se formula el problema (*PSNH*) como un problema de búsqueda de punto silla.

7.5. Descomposición espectral y valores propios

7.5.1. Motivación

Ecuación del calor

Consideremos el siguiente problema de transmisión de calor con evolución temporal: Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ en la práctica $d = 1, 2, 3$ con frontera Γ suficientemente regular por ejemplo de clase C^1 a trozos. Y sea $T > 0$. Dadas las funciones $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ y $f : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ se trata de hallar la función $u : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}$ solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega \times (0, T) \tag{7.106}$$

$$u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times (0, T) \quad \text{condición de contorno} \tag{7.107}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{condición inicial} \tag{7.108}$$

Para resolver el problema anterior se puede utilizar el método de separación de variables. Supongamos primeramente que $f = 0$. En el espacio de Hilbert adecuado introduciremos el problema de valores y funciones propias asociadas al operador $-\Delta$, siendo$(e_n)_{n \geq 1}$ la base hilbertiana asociada correspondiente:

$$\begin{aligned} -\Delta e_n &= \lambda_n e_n \quad \text{en} \quad \Omega \\ e_n &= 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{aligned}$$

y buscamos una solución de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e_n(x)$$

sustituyendo en (7.106) tendremos necesariamente utilizando la ortonormalidad de la base hilbertiana

$$a_n'(t) + \lambda_n a_n(t) = 0$$

de donde

$$a_n(t) = a_n(0)e^{-\lambda_n t}$$

Las constantes $a_n(0)$ están determinadas por la condición inicial

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)e_n(x)$$

es decir $a_n(0) = (u_0, e_n)$

Finalmente la solución buscada se podrá expresar de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n(0)e^{-\lambda_n t}e_n(x)$$

En el caso $f \neq 0$, expresamos f mediane su desarrollo en serie en la base hilbertiana $(e_n)_n$, es decir $f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)e_n(x)$, entonces $a_n(t)$ es solución de

$$a_n'(t) + \lambda_n a_n(t) = f_n(t)$$

Ecuación de ondas

Consideremos el caso de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \tag{7.109}$$

$$u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,T) \quad \text{condición de contorno} \tag{7.110}$$

$$u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{condición inicial 1} \tag{7.111}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0) = v_0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{condición inicial 2} \tag{7.112}$$

Procediendo como en la ecuación de calor, introducimos una base hilbertiana constituida por funciones propias del operador $-\Delta$ y buscamos soluciones de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)e_n(x)$$

Sustituyendo en (7.109) vemos que necesariamente

$$a_n''(t) + \lambda_n a_n(t) = 0$$

de donde

$$a_n(t) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t)$$

Las constantes A_n y B_n quedan determinadas por las condiciones iniciales (7.111) y (7.112). En efecto tenemos $a_n(0) = A_n$ y derivando con respecto a t, $a_n'(0) = B_n\sqrt{\lambda_n}$, tendremos por una parte

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e_n(x)$$

y $A_n = (u_0, e_n)$. Por otra parte

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0) e_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} e_n(x)$$

y $B_n\sqrt{\lambda_n} = (v_0, e_n)$, de modo que $B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(v_0, e_n)$.

7.5.2. Aplicación de la descomposición espectral a problemas elípticos

Teoría espectral abstracta de problemas elípticos

La resolución de la ecuación del calor de evolución y la ecuación de ondas mediante el método de separación de variables, según hemos visto en los dos apartados anteriores, nos conduce a la resolución de un problema de valores y funciones propias asociadas al operador $-\Delta$. Más generalmente podemos considerar la teoría espectral asociada a operadores elípticos. En el siguiente teorema se resuelve el correspondiente problema espectral abstracto:

Teorema 7.26. *Sean V y H dos espacios de Hilbert separables de dimensión infinita, siendo $(\cdot,\cdot)$ y $|\cdot|$ el producto escalar y la norma respectiva en H y $\|.\|$ la norma en V, verificando:*

$V \subset H$ con V denso en H y la inyección de V en H continua (existe una constante $c \leq 0$ tal que para todo $v \in V$, $|v| \leq c\|v\|$) y compacta.

Sea $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal verificando:

- *Es continua:*
$$|a(u,v)| \leq C\|u\|.\|v\| \quad \forall u, v \in H$$
- *Es elíptica:*
$$\exists\, \alpha > 0 \quad a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in H$$
- *Es simétrica:*
$$a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u, v \in V$$

Consideramos el problema espectral siguiente: Hallar el par de valores $(u,\lambda) \in V \times \mathbb{R}$ tales que

$$a(u,v) = \lambda(u,v) \quad \forall v \in V \tag{7.113}$$

Entonces existe una sucesión numerable $(\lambda_n, u_n)_n$ de pares de valores propios y funciones propias solución de (7.113) tal que la sucesión de valores propios $(\lambda_n)_n$

forman una sucesión positiva y creciente que tiende a infinito

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

y existe una base hilbertiana de H formada por vectores propios $(e_n)_n$ *y tales*

$$a(e_n, v) = \lambda_n(e_n, v) \quad \forall v \in V$$

verificando además que $(w_n)_n$ *donde* $w_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n$ *es una base hilbertiana en V*

Demostración:

Recordemos el resultado visto en el capítulo 4 teorema 4.35 y sus corolarios sobre la descomposición espectral de un operador autoadjunto compacto definido positivo en un espacio de Hilbert H: Si $T \in \mathcal{L}_c(H)$ es un operador autoadjunto compacto sus valores propios son positivos y forman una sucesión decreciente que tiende a cero existiendo una base hilbertiana en H de vectores propios tales que

$$Te_n = \mu_n e_n$$

Dado $f \in H$ consideremos el problema: Hallar $Tf \in V$ solución de

$$a(Tf, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

Este problema tiene solución única gracias al teorema de Lax-Milgram 4.17 puesto que $a(\cdot,\cdot)$ es bilineal, continua y elíptica y la forma $\varphi : v \in V \longrightarrow (f, v) \in \mathbb{R}$ es lineal y continua. Veamos las propiedades del operador T así definido:

Consideremos el operador $T : H \longrightarrow V \subset H$ como operador de H en H: Es claramente lineal y es también es continuo como operador de H en H pues

$$\alpha\|Tf\|^2 \leq a(Tf, Tf) = (f, Tf) \leq |f|.|Tf| \leq c|f|.\|Tf\|$$

de donde

$$\|Tf\| \leq \frac{c}{\alpha}|f|$$

teniendo en cuenta de nuevo que la inyección de V en H es continua

$$|Tf| \leq c\|Tf\| \leq \frac{c^2}{\alpha}|f|$$

T es un operador compacto: En efecto, sea $(f_n)_n$ una sucesión acotada en H. Tenemos que ver que la sucesión $(Tf_n)_n$ tiene un subsucesión convergente en H. Veamos, la sucesión $(Tf_n)_n$ es acotada en V pues

$$\|Tf_n\| \leq \frac{c}{\alpha}|f_n|$$

Ahora, como la inyección de V en H es compacta, esto quiere decir que podemos extraer una subsucesión $(Tf_\nu)_\nu$ convergente en H. Esto prueba que T como operador de H en H es compacto.

El operador $T \in \mathcal{L}_c(H)$ es autoadjunto: Para $f, g \in H$ tenemos

$$(Tf, g) = (g, Tf) = a(Tg, Tf) = a(Tf, Tg) = (f, Tg)$$

El operador $T \in \mathcal{L}_c(H)$ es definido positivo: Tenemos que ver que $(Tf, f) > 0$ para todo $f \neq 0$, $f \in H$. Por una parte está claro que para cualquier $f \in H$

$$(Tf, f) = (f, Tf) = a(Tf, Tf) \geq 0 \quad \forall f \in H$$

Por otra parte veamos que si $(Tf, f) = 0$ necesariamente $f = 0$. En efecto si $\alpha\|Tf\|^2 \leq a(Tf, Tf) = (Tf, f) = 0$ necesariamente $Tf = 0$ y si $Tf = 0$, esto implica que $0 = a(Tf, v) = (f, v) = 0$ para todo $v \in V$ y como V es denso en H, resulta $f = 0$.

Recopilando, el operador $T : H \to H$ es lineal continuo, definido positivo, autoadjunto y compacto, en consecuencia existe una base hilbertiana $(e_n)_n$ en H de vectores propios tale que

$$Te_n = \mu_n e_n$$

donde los valores propios μ_n forman una sucesión decreciente de números positivos tendiendo a cero. Al ser $(e_n)_n$ una base hilbertiana en H se verifica $(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$. Además las funciones propias e_n de la base hilbertiana están en el espacio V pues $e_n = \frac{1}{\mu_n} Te_n \in V$. Poniendo $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$, como

$$a(Te_n, v) = (e_n, v) \quad \forall v \in V$$

resulta

$$a(\frac{1}{\lambda_n} e_n, v) = a(Te_n, v) = (e_n, v)$$

de donde

$$a(e_n, v) = \lambda_n (e_n, v) \quad \forall v \in V$$

de modo que (λ_n, e_n) resuelve el problema espectral planteado (7.113)

Los valores propios correspondientes al problema (7.113) son entonces

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$$

y $(e_n)_n$ es la base hilbertiana en H buscada.

Finalmente veamos que $(w_n)_n$ con $w_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n$ es un base hilbertiana en V con respecto al producto escalar $a(\cdot, \cdot)$: Primero veamos la ortonormalidad con respecto al producto escalar $a(\cdot, \cdot)$

$$a(w_n, w_m) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}} a(e_n, e_m) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}} \lambda_n (e_n, e_m) = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_m}} (e_n, e_m) = \delta_{n,m}$$

Falta verificar que el espacio engendrado por $(w_n)_n$ es denso en V: Sea $v \in V$ tal que $a(v,w_n) = 0$ para todo n. Veamos que $v = 0$. Como $a(v,w_n) = a(w_n,v) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} a(e_n,v) = \sqrt{\lambda_n}(e_n,v)$ resulta que $(e_n,v) = 0$ para todo n y como $(e_n)_n$ es una base hilbertiana en H implica que $v = 0$.

■

Comentario 7.2. *Véase el ejercicio 7.14 para una demostración considerando la restricción a V del operador T.*

Comentario 7.3. *Podemos considerar una hipótesis menos exigente que la elipticidad de $a(\cdot,\cdot)$. Es suficiente suponer que la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ verifica la condición*

$$a(v,v)+\lambda|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in V \tag{7.114}$$

Demostración:

Aplicamos el teorema 7.26 con la forma bilineal $\tilde{a}(u,v) = a(u,v)+\lambda(u,v)$. El correspondiente problema de valores y funciones propias es

$$\tilde{a}(e_n,v) = \tilde{\lambda}_n(e_n,v) \quad \forall v \in V$$

Los correspondientes valores propios verifican $0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \ldots$ y $(e_n)_n$ es una base hilbertiana en H. Tenemos pues

$$a(e_n,v)+\lambda(e_n,v) = \tilde{\lambda}_n(e_n,v) \quad \forall v \in V$$

de donde poniendo $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n - \lambda$ tendremos que el problema de hallar $(\lambda,u) \in \mathbb{R}\times V$ verificando

$$a(u,v) = \lambda(u,v) \quad \forall v \in V$$

tiene por solución

$$a(e_n,v) = \lambda_n(e_n,v) \quad \forall v \in V$$

donde $(e_n)_n$ es una base hilbertiana de H y los valores propios $(\lambda_n)_n$ verifican

$$-\lambda < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

■

Aplicación a un problema elíptico en dimensión 1

Sea $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Consideraremos el problema de Dirichlet de valores y funciones propias siguiente: Hallar $e_n : \bar{I} \to \mathbb{R}$ y $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$-e_n'' = \lambda_n e_n \text{ en } I \tag{7.115}$$

$$e_n(0) = e_n(1) = 0 \tag{7.116}$$

Desde un punto de vista físico esta ecuación modeliza los distintos modos de vibración de una cuerda tensa. Utilizando la técnica elemental de integración de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes obtenemos inmediatamente que las soluciones de (7.115)-(7.116) son

$$e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x) \quad \text{y} \quad \lambda_n = n^2\pi^2$$

Procediendo como en el problema 7.1.1, multiplicamos 7.115 por $v \in H_0^1(I)$ e integramos en I por partes y obtenemos que e_n es solución de

$$e_n \in H_0^1(I) \tag{7.117}$$

$$\int_0^1 e_n' v'\, dx = \lambda_n \int_0^1 e_n v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(I) \tag{7.118}$$

La aplicación de la teoría espectral del apartado anterior nos asegura que las funciones $(e_n)_n$ son una base hilbertiana en $L^2(I)$. Más precisamente tenemos el siguiente

Teorema 7.27. *Existe una sucesión $(\lambda_n)_n$ de números reales positivos que tiende a infinito y una base hilbertiana $(e_n)_n$ de $L^2(I)$ tales que $e_n \in H_0^1(I)$ verificando (7.118)-(7.117). Además las funciones $(w_n)_n$ donde $w_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n$ son una base hilbertiana de $H_0^1(I)$ con respecto al producto escalar*

$$(u,v)_{H_0^1(I)} = \int_0^1 u' v'\, dx$$

Demostración:

Aplicamos el teorema 7.26 con $V = H_0^1(I)$, $H = L^2(I)$ y la forma bilineal

$$a(u,v) = (u,v)_{H_0^1(I)} = \int_0^1 u' v'\, dx$$

■

Problema espectral asociado al operador $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet

Consideramos aquí el problema de valores y funciones propias que aparece a la hora de resolver la ecuación del calor y la ecuación de ondas mediante el método de separación de variables según hemos indicado en los dos primeros apartados de esta sección. Este problema se interpreta en mecánica como un modelo para los modos de vibración de una membrana delgada.

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un abierto acotado de frontera Γ. Consideramos

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n \text{ en } \Omega \tag{7.119}$$

$$e_n = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \tag{7.120}$$

Procediendo como habitualmente, integrando en Ω y aplicando la fórmula de Green correspondiente obtenemos que e_n tiene que ser solución de

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \tag{7.121}$$

$$\int_\Omega \nabla e_n \nabla v \, dx = \lambda_n \int_\Omega e_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{7.122}$$

Teorema 7.28. *Existe una sucesión $(\lambda_n)_n$ de números reales positivos que tiende a infinito y una base hilbertiana $(e_n)_n$ de $L^2(\Omega)$ tales que $e_n \in H_0^1(\Omega)$ verificando (7.121)-(7.122). Además las funciones $(w_n)_n$ donde $w_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n$ son una base hilbertiana de $H_0^1(I)$ con respecto al producto escalar*

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

Demostración:

Aplicamos el teorema 7.26 con $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ y la forma bilineal $a(u, v) = (u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$

■

Problema general elíptico

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un abierto acotado de frontera Γ constituida por dos partes complementarias Γ_0 y Γ_1 de manera que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ y $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Sean $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ $i, j = 1, \ldots, d$ verificando la condición de elipticidad: Existe un número real $\alpha > 0$ tal que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

y sea $a_0 \in L^\infty(\Omega)$

Consideramos el problema de valores y funciones propias

$$-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial e_n}{\partial x_j}\right) + a_0 e_n = \lambda_n e_n \quad \text{en} \quad \Omega \tag{7.123}$$

$$-\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial e_n}{\partial x_j} \eta_i = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \tag{7.124}$$

$$e_n = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \tag{7.125}$$

Si $\Gamma_0 = \Gamma$ tenemos un problema con condiciones de Dirichlet. En este caso el marco funcioneal es $V = H_0^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$.

Si $\Gamma_1 = \Gamma$ tenemos un problema con condiciones de Neumann. En este caso el marco funcioneal es $V = H^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$.

En el caso general en el que las medidas $d-1$ dimensional de Γ_0 y Γ_1 sean mayores que cero tenemos un problema con condiciones mixtas Dirichlet-Neumann. En este caso el marco funcioneal es $V = \{v \in H^1(\Omega);\ v|_{\Gamma_0} = 0\}$ y $H = L^2(\Omega)$.

En los tres casos puesto que $V \subset H^1(\Omega)$ la inyección de V en H es compacta (consecuencia inmeditata del teorema de Rellich 6.19).

Integrando y aplicando la correspondiente fórmula de Green obtenemos la forma débil del problema de valores y funciones propias: Hallar $(\lambda_n, e_n) \in \mathbb{R} \times V$ tales que

$$a(e_n, v) = \lambda_n (e_n, v) \quad \forall v \in V \tag{7.126}$$

donde

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \Big)\, dx$$

Teorema 7.29. *Existe una sucesión $(\lambda_n)_n$ de números reales y una sucesión $(e_n)_n$ de funciones en V verificando (7.126) y tales que la sucesión $(\lambda_n)_n$ tiende a infinito y la sucesión $(e_n)_n$ es una base hilbertiana de $L^2(\Omega)$.*

Tendremos $-\lambda < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ si $\lambda \ge \alpha + \|a_0\|_{0,\infty,\Omega}$. A su vez $(w_n)_n$ con $w_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n$ es una base hilbertiana en V. Además

- *Si $V = H_0^1(\Omega)$ y $a_0 \ge 0$ c.t.p. en Ω entonces $\lambda_n > 0$ para todo n.*
- *Si $V = H^1(\Omega)$ y $a_0 \ge 0$ c.t.p. en Ω entonces $\lambda_n \ge 0$ para todo n.*
- *Si las medidas $d-1$ dimensional de Γ_0 y Γ_1 son mayores que cero y*

$$V = \{v \in H^1(\Omega);\ v|_{\Gamma_0} = 0\} \quad y \quad a_0 \ge 0 \text{ c.t.p. en } \Omega$$

entonces $\lambda_n > 0$ para todo n.

Demostración:

Utilizamos el teorema general 7.26 con el comentario 7.3. Tenemos

$$a(v,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 v^2 \Big)\, dx \ge \alpha \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 dx - \|a_0\|_{0,\infty,\Omega} \int_\Omega v^2\, dx$$

de modo que si elegimos $\lambda \ge \alpha + \|a_0\|_{0,\infty,\Omega}$ tendremos

$$\tilde{a}(v,v) = a(v,v) + \lambda (v,v) \ge \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2$$

Aplicamos entonces el comentario 7.3.

En el caso en el que $a_0 \ge 0$ c.t.p. en Ω tendremos:

$$a(v,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 v^2 \Big)\, dx \geq \alpha \sum_{i=1}^{d} \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 dx$$

entonces

- Si $V = H_0^1(\Omega)$, $a(\cdot,\cdot)$ es elíptica en $V = H_0^1(\Omega)$ pues utilizando el corolario de la desigualdad de Poincaré 6.3, existe $C > 0$ tal que

  $$a(v,v) \geq \alpha \sum_{i=1}^{d} \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 dx \geq \alpha C \|v\|_{1,\Omega}^2$$

  y aplicamos directamente el teorema 7.26.
- Si $V = H^1(\Omega)$ elegimos $\lambda = \varepsilon > 0$, tendremos que

  $$a(u,v) + \varepsilon(u,v) \geq \varepsilon \|v\|^2$$

  en consecuencia existe una base hilbertiana en $L^2(\Omega)$ de funciones propias $(e_n)_n$ y una sucesión de valores propios $(\tilde{\lambda}_n)_n$ que tiende a ∞ con $0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \ldots$, verificando, $e_n \in V$ y

  $$a(e_n, v) + \varepsilon(e_n, v) = \tilde{\lambda}_n (e_n, v) \quad \forall v \in V$$

  Poniendo $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n - \varepsilon$, tenemos que $(e_n)_n$ y $(\lambda_n)_n$

  $$a(e_n, v) = \lambda_n (e_n, v) \quad \forall v \in V$$

  y $-\varepsilon < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ Como esto es cierto cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, haciendo tender ε hacia cero resulta

  $$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

- Si las medidas $d-1$ dimensional de Γ_0 y Γ_1 son mayores que cero y

  $$V = \{v \in H^1(\Omega);\ v|_{\Gamma_0} = 0\} \quad \text{y} \quad a_0 \geq 0 \text{ c.t.p. en } \Omega$$

  entonces $a(\cdot,\cdot)$ es elíptica en V, pues utilizando el teorema 7.17, existe $C > 0$ tal que

  $$a(v,v) \geq \alpha \sum_{i=1}^{d} \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 dx \geq \alpha C \|v\|_{1,\Omega}^2$$

  y aplicamos directamente el teorema 7.26

∎

Vibraciones en un sólido elástico

Consideramos en este apartado la aplicación de la teoría espectral al sistema de ecuaciones de la elasticidad. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un abierto acotado de frontera de frontera Γ constituida por dos partes complementarias Γ_0 y Γ_1 de manera que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ y $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ con medida $d-1$ dimendional de Γ_0 estrictamente positiva. El marco funcional será

$$V = \{\vec{v} \in \left(H^1(\Omega)\right)^d;\ v_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_0,\ i = 1, \ldots, d\}$$
$$H = \left(L^2(\Omega)\right)^d$$

La inyección de V en H es compacta (consecuencia inmeditata del teorema de Rellich 6.19). Con la mismas notaciones que en la sección 7.3 pondremos

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \sigma_{i,j}(\vec{u}) \varepsilon_{i,j}(\vec{v})\, dx$$

donde

$$\varepsilon_{i,j}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)$$

$$\sigma_{i,j}(\vec{u}) = \lambda\Big(\sum_{k=1}^{d} \varepsilon_{kk}(\vec{u})\Big)\delta_{i,j} + 2\mu\varepsilon_{i,j}(\vec{u}), \quad \lambda \geq 0\ \mu > 0$$

Teorema 7.30. *Existe una sucesión creciente de valores propios $(\lambda_n)_n$ estrictamente positivos y tendiendo a infinito y una base hilbertiana en $\left(L^2(\Omega)\right)^d$ de elementos en V formada por funciones propias $\vec{e}_n = (e_{n1}, e_{n2}, \ldots, e_{nd})$ verificando*

$$-\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{i,j}(\vec{e_n}) = \lambda_n e_{ni} \quad \text{en } \Omega \quad i = 1, \ldots, d$$

$$e_{ni} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \quad i = 1, \ldots, d$$

$$\sum_{j=1}^{d} \sigma_{i,j}(\vec{u})\eta_j = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad i = 1, \ldots, d$$

A su vez $(\vec{w}_n)_n$ con $\vec{w}_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\vec{e}_n$ es una base hilbertiana en V.

Demostración:

Se deja como ejercicio 7.15

■

En mecánica la interpretación es la siguiente: Las funciones $\vec{e}_n$ representan los modos propios de vibración del cuerpo elástico y las $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ representan las frecuencias angulares propias ($radian\ s^{-1}$) de vibración del sistema, que están relacionadas con las frecuencias ordinarias f_n en Hz (herzios) mediante $\omega_n = 2\pi f_n$

Ejercicios del Capítulo 7

7.1. Sea $I = (0,1) \in \mathbb{R}$, dada $f \in L^2(I)$ y $g \in$ R considerar el problema siguiente: Hallar $u : \bar{I} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \quad \text{en} \quad I \tag{7.127}$$
$$u(0) = 0 \tag{7.128}$$
$$u'(1) = g \tag{7.129}$$

a) Hallar una formulación débil del problema anterior.
b) Demostrar la existencia y unicidad de solución del problema débil.
c) Formular el problema de optimización equivalente.
d) Demostrar que la solución u del problema anterior verifica:

$$\|u\|_{1,I} \leq C(\|f\|_{0,I} + |g|)$$

para una constante $C \geq 0$.
e) Demostrar que la solución débil u del apartado a) verifica (7.127) en el sentido de las distribuciones, que $u \in H^2(I)$ y verifica también las condiciones de contorno (7.128) y (7.129).

7.2. Sea $I = (0,1) \in \mathbb{R}$, dada $f \in L^2(I)$, considerar el problema siguiente: Hallar $u : \bar{I} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-u''(x) + u'(x) + u(x) = f(x) \quad \text{en} \quad I \tag{7.130}$$
$$u(0) = 0 \tag{7.131}$$
$$u(1) = 0 \tag{7.132}$$

a) Hallar una formulación débil del problema anterior.
b) Demostrar la existencia y unicidad de solución del problema débil.
c) ¿Es equivalente a un problema de optimización ?
d) Demostrar que la solución u del problema anterior verifica:

$$\|u\|_{1,I} \leq C\|f\|_{0,I}$$

para una constante $C \geq 0$.
e) Demostrar que la solución débil u del apartado a) verifica (7.130) en el sentido de las distribuciones, que $u \in H^2(I)$ y verifica también las condiciones de contorno (7.131) y (7.135).

7.3. Sea $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}$. Considerar el problema mixto Dirichlet-Neumann siguiente: Hallar $u : \bar{I} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-u''(x) + u'(x) = 0 \text{ en } I \tag{7.133}$$
$$u(0) = 0 \tag{7.134}$$
$$u'(1) = -u(1) + g \tag{7.135}$$

a) En el espacio de Sobolev $H^1(I) = \{v \in L^2(I);\ v' \in L^2(I)\}$ con el producto escalar

$$(u,v)_{1,I} = \int_0^1 (uv + u'v')\,dx$$

y la norma correspondiente

$$\|v\|_{1,I} = \Big(\int_0^1 (v^2 + (v')^2)\,dx\Big)^{1/2}$$

considerar el subespacio $H = \{v \in H^1(I);$ tales que $v(0) = 0\}$.
Demostrar que el representante continuo de cualquier $v \in H$ verifica

$$|v(x)| \le x^{1/2}|v|_{1,I} \quad \forall x \in \bar{I}$$

y en particular

$$|v(1)| \le |v|_{1,I}$$

b) Demostrar que sobre H la seminorma $|v|_{1,I} = (\int_0^1 (v')^2\,dx)^{1/2}$ es una norma equivalente a la norma de $H^1(I)$. Es decir, hallar dos constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\|v\|_{1,I} \le |v|_{1,I} \le C_2\|v\|_{1,I} \quad \forall v \in H$$

c) Deducir la formulación débil del problema anterior (7.133)-(7.134)-(7.135).
d) Demostrar que el problema formulado en el apartado anterior c) tiene solución única.
e) Demostrar que la solución débil del problema formulado en la apartado c) verifica la ecuación (7.133) en el sentido de las distribuciones y en consecuencia $u \in H^2(I)$.
f) Demostrar que la solución débil del problema formulado en la apartado c) verifica las condiciones de contorno (7.134)-(7.135).

7.4. Considerar el problema siguiente:
Sea $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $f \in L^2(I)$, $g \in \mathbb{R}$ y $k > 0$. Hallar $u : \bar{I} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-u''(x) + ku'(x) + u(x) = f \text{ en } I \tag{7.136}$$

$$u'(0) = 0 \tag{7.137}$$

$$u'(1) = 0 \tag{7.138}$$

y su correspondiente formulación débil

$$u \in H^1(I) \tag{7.139}$$

$$\int_0^1 u'v'\,dx + k\int_0^1 u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in H^1(I) \tag{7.140}$$

Demostrar que para valores de k suficientemente grandes la forma bilineal (7.140) no es elíptica.

7.5. Demostrar que la solución u del problema (7.31)-(7.32) verifica

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\Omega}$$

7.6. Demostrar que (7.41)-(7.42) es equivalente al siguiente problema de optimización: Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in V^g = \{v \in H^1(\Omega);\ v|_\Gamma = g\}$ tal que

$$J(u) = \min_{v \in V^g} J(v)$$

donde $J(v) = \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^d \big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\big)^2\, dx\Big) - \int_\Omega f v\, dx.$

7.7. Demostrar que (7.47)-(7.48) es equivalente al siguiente problema de optimización: Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que,

$$J(u) = \min_{v \in H^1(\Omega)} J(v)$$

donde $J(v) = \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^d \big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\big)^2 dx + \int_\Omega uv dx\Big) - \int_\Omega f v dx - \int_\Gamma g v\, d\sigma.$

7.8. Verificar que

$$H = \{v \in H^1(\Omega);\ v|_{\Gamma_0}\}$$

es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$

7.9. Deducir la formulación débil (7.58)-(7.59) del problema (7.55)-(7.56)-(7.57).

7.10. Demostrar el teorema 7.21

7.11. Evaluar la constante C_2 en la desigualdad (7.80)

7.12. Demostrar que la forma bilineal

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \lambda \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^d \varepsilon_{kk}(\vec{u})\Big)\Big(\sum_{k=1}^d \varepsilon_{kk}(\vec{v})\Big)\, dx + 2\mu \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \varepsilon_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})\, dx$$

asociada al problema de la elasticidad es continua.

7.13. Demostrar que la solución de (7.100)-(7.101) es solución del problema de punto silla siguiente: Hallar $\vec{u} \in K = \{\vec{v} \in (H^1(\Omega))^d\ ; \vec{v}_\Gamma = \vec{g}\}$ y $p \in L_0^2(\Omega)$, tales que

$$\mathcal{L}(\vec{u},q) \leq \mathcal{L}(\vec{u},p) \leq \mathcal{L}(\vec{v},p) \quad \forall \vec{v} \in K \quad \forall q \in L_0^2(\Omega)$$

donde

$$\mathcal{L}(\vec{v},q) = J(\vec{v}) - b(q,\vec{v})$$
$$J(\vec{v}) = \frac{1}{2}a(\vec{v},\vec{v}) - \int_\Omega \vec{f}.\vec{v}\, dx$$

7.14. Con las notaciones del teorema 7.26 demostrar que el operador definido por

$$\begin{aligned} T :& H \to V \\ & f \to Tf \end{aligned}$$

definido mediante: Dado $f \in H, Tf \in V$ es la solución de

$$a(Tf, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

Demostrar:

- la restricción de T a V, es un operador lineal continuo, definido positivo, autoadjunto con respecto al producto escalar $a(\cdot, \cdot)$ y compacto.
- Concluir que existe una base hilbertiana de V y una sucesión de valores propios $(\lambda_n)_n$ tal que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ tendiendo a infinito, de modo que

$$a(u_n, v) = \lambda_n (u_n, v) \quad \forall v \in V$$

- Poniendo

$$e_n = \sqrt{\lambda} u_n$$

  demostrar que $(e_n)_n$ es un base hilbertiana en H.

7.15. Demostrar el teorema 7.30.

Soluciones de los ejercicios

Ejercicios del Capítulo 1

1.1 Sea $M \subset X$. Llamemos $\mathcal{M}$ a la familia de conjuntos de la forma $M \cap A$ donde $A \in \mathcal{A}$.

- $M \in \mathcal{M}$ pues $M = M \cap X$
- $\emptyset \in \mathcal{M}$ pues $\emptyset = M \cap \emptyset$
- Sea I un subconjunto cualquiera de elementos de $\mathcal{A}$:

$$\cup_{A \in I} (M \cap A) = M \cap (\cup_{A \in I} A)$$

- Sea I un subconjunto finito de elementos de $\mathcal{A}$

$$\cap_{A \in I} (M \cap A) = M \cap (\cap_{A \in I} A)$$

1.2 Caracterización de la adherencia: Primero observemos que la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a B es un conjunto cerrado y por tanto es el más pequeño cerrado que contiene a B. Llamemos a este conjunto $\tilde{B}$ y veamos que $\tilde{B} = \overline{B}$. Supongamos que $x \notin \tilde{B}$. Entonces x pertenece al complementario $\left(\tilde{B}\right)^c$ que es abierto. Por tanto x no puede ser un punto de adherencia de B, es decir $x \notin \overline{B}$. Recíprocamente, supongamos que $x \notin \overline{B}$, es decir x no es un punto de adherencia de B. Entonces existe un entorno de x que no contiene puntos de B es decir, existe un abierto, que contiene a x y que no tiene puntos comunes con B. Su complementario es un cerrado que contiene a B, por tanto x no puede pertenecer al más pequeño cerrado que contiene a B, es decir $x \notin \tilde{B}$.

1.3

- La relación $B = \overline{B}$ caracteriza a los conjuntos cerrados: Está claro que si $B = \overline{B}$, B es cerrado pues $\overline{B}$ es el más pequeño cerrado que contiene a B. Recíprocamente si B es cerrado entonces B es el más pequeño cerrado que contiene a B y por tanto $B = \overline{B}$.

- El interior $\mathbf{Int}\,B$ es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en B: Primero observemos que la unión de abiertos contenidos en B es el más grande abierto contenido en B, llamémosle $\underset{\sim}{B}$. Si $x \in \mathbf{Int}\,B$ entonces existe un entorno de x, que podemos tomar abierto, contenido todo él en B y por tanto $x \in \underset{\sim}{B}$. Recíprocamente si $x \in \underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{B}$ es un abierto que contiene a x y está contenido en B, por tanto $x \in \mathbf{Int}\,B$.

1.4

- $(\mathbf{Int}\,A)^c = \overline{(A^c)}$: En efecto, si $x \in (\mathbf{Int}\,A)^c$, $x \notin \mathbf{Int}\,A$, entonces x no pertenece a ningún abierto contenido en A, de donde todo entorno de x tiene puntos de A^c, es decir $x \in \overline{(A^c)}$. Recíprocamente, si $x \in \overline{(A^c)}$, todo entorno de x contiene puntos de A^c, por lo tanto $x \notin \mathbf{Int}\,A$, es decir, $x \in (\mathbf{Int}\,A)^c$.
- $\left(\overline{A}\right)^c = \mathbf{Int}\,(A^c)$: Se puede demostrar a partir de la anterior propiedad poniendo A^c en el lugar de A y tomando complementarios.

1.5 Hemos visto en el ejercicio 1.2 que B es cerrado si y solo si $B = \overline{B}$. Sea $\tilde{B}$ el conjunto de puntos de acumulación de B. De la definición de adherencia se deduce que $\overline{B} = B \cup \tilde{B}$. Decir que $B = \overline{B}$ equivale a decir que $B = B \cup \tilde{B}$ y por tanto $\tilde{B} \subset B$.

1.6 Si un conjunto de puntos de X no tiene puntos de acumulación entonces su adherencia coincide con el propio conjunto, pues la adherencia de un conjunto se obtiene añadiendo al conjunto sus puntos de acumulación. Finalmente si un conjunto coincide con su adherencia entonces es cerrado.

1.7

La demostración es igual que en la demostración de la equivalencia de las condiciones de la definición 1.11 que caracterizan a un espacio regular sustituyendo el punto p por el conjunto cerrado P.

1.8

- b) es una forma detallada de formular a).
- b) $\Leftrightarrow$ c): Si existen conjuntos U y V de X abiertos no vacíos y $X = U \cup V$ entonces b) obliga a que $U \cap V \neq \emptyset$. Es decir b) implica c). Recíprocamente, si los conjuntos U y V de X son abiertos no vacíos y $X = U \cup V$ entonces si se verifica c) tenemos $U \cap V \neq \emptyset$, lo que quiere decir que no existen conjuntos U y V abiertos no vacíos con $X = U \cup V$ tales que $U \cap V = \emptyset$, es decir se cumple b).
- b) $\Leftrightarrow$ d): Si existen conjuntos U y V de X abiertos tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces b) obliga a que $U = X$ y $V = \emptyset$ o bien $U = \emptyset$ y $V = X$. Es decir b) implica d). Recíprocamente si los conjuntos U y V de X son abiertos y $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces si se verifica d) tenemos $U = X$ y $V = \emptyset$ o bien $U = \emptyset$ y $V = X$, es decir se cumple b).
- e) Se deduce de la siguiente observación: Sean U y V como en la caracterización b). Como $U = V^c$ y $V = U^c$, los conjuntos U y V son abierto-cerrados.
- La equivalencia con f) se deduce de la misma observación según la cual U y V en la caracterización b) son abierto-cerrados.

1.9

Sea X un espacio topológico y sean U y V subconjuntos abiertos de X. Pongamos

$$U_A = U \cap A \text{ y} V_A = V \cap A$$

Tenemos

$$U_A \cup V_A = (U \cap A) \cup (V \cap A) = (U \cup V) \cap A$$

Entonces

$$A \subset U \cup V \Leftrightarrow U_A \cup V_A = A$$

y

$$U \cap V \cap A = \emptyset \Leftrightarrow U_A \cap V_A = \emptyset$$

De modo que podemos escribir la condición a) del teorema 1.12 en términos de U_A y V_A de la siguiente manera: No existen conjuntos abiertos, con respecto al subespacio topológico A, $U_A \neq \emptyset$ y $V_A \neq \emptyset$ tales que

$$U_A \cup V_A = A \text{ y } U_A \cap V_A = \emptyset$$

El teorema 1.11, aplicado al espacio topológico A, nos dice que esto es equivalente:

Si los conjuntos U_A y V_A son abiertos, con respecto al subespacio topológico A, y $U_A \cup V_A = A$ y $U_A \cap V_A = \emptyset$ entonces $U_A = A$ y $V_A = \emptyset$ o bien $U_A = \emptyset$ y $V_A = A$.

Lo que se traduce como: si U y V abiertos de X y $A \subset U \cup V$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ entonces necesariamente $A \subset U$ y $V \cap A = \emptyset$ o bien $U \cap A = \emptyset$ y $A \subset V$ que es la condición b) del teorema 1.12.

Las condiciones c) y d) del teorema 1.12 se obtienen cambiando abiertos por cerrados en A.

1.10

a) M1: $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$
M2: $d(x,y) = d(y,x)$
M3: Si $x = y$, $d(x,y) = 0$ y para todo z, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Si $x \neq y$, $d(x,y) = 1$ entonces para todo z: Si $x = z$, $d(x,z) = 0$, entonces $z \neq y$ y $d(z,y) = 1$; si$y = z$, $d(z,y) = 0$ entonces $x \neq z$ y $d(x,z) = 1$; si $x \neq z$ e $y \neq z$, entonces $d(x,z) = 1$ y $d(z,y) = 1$. En todos los casos se verifica M3.

b) M1: $d(x-y) = |x-y| \geq 0$ y $d(x,y) = |x-y| = 0$ si y solo si $x = y$
M2: $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$
M3: $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z|+|z-y| = d(x,z)+d(z,y)$

c) M1: $d(x,y) = p(x-y) \geq 0$ y $d(x,y) = p(x-y) = 0$ si y solo si $x = y$
M2: $d(x,y) = p(x-y) = p(y-x) = d(y,x)$
M3: $d(x,y) = p(x-y) = p(x-z+z-y) \leq p(x,z)+p(z,y) = d(x,z)+d(z,y)$

1.11 Construcción recursiva de una sucesión Como en el enunciado del ejercicio supongamos que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier número finito de puntos $a_i \in M$ siempre hay un $x \in M$ cuya distancia a todos los a_i es mayor o igual que $1/m$. Sea a_1 un punto tal que existe un $x \in M$ tal que $d(x,a_1) \geq 1/m$. Hagamos $a_2 = x$. Tenemos dos puntos a_1, a_2 tales que $d(a_1,a_2) \geq 1/m$. Procedemos recursivamente, supongamos que hemos construido un sucesión finita de puntos $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ tales que $d(a_k, a_{k'}) \geq 1/m \quad \forall k, k' = 1, \ldots n-1$. Existirá un $x \in M$ verificando $d(x, a_k) \geq 1/m \; \forall a_k \; k = 1, \ldots, n-1$. Hacemos $a_n = x$. Hemos construido así una sucesión $(a_n)_n$ tal que

$$k, k' \in \mathbb{N} \quad d(a_k, a'_k) \geq 1/m$$

1.12 $\mathbb{R}$ **es un espacio métrico completo**
Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Sea A_n el conjunto de puntos x_i de la sucesión verificando $i > n$. Si ponemos $\delta(A_n) = \sup_{x,y \in A_n} |x - y|$ tendremos $\delta(A_n)$ tiene por límite 0 cuando n tiende a ∞.

Sean α_n y β_n, $(\alpha_n \leq \beta_n)$ los extremos inferior y superior de A_n. Necesariamente la sucesión α_n es creciente y la sucesión β_n es decreciente. La sucesión creciente α_n está mayorada por β_1 y en consecuencia tendrá un límite α. Análogamente β_n tendrá un límite β. Como $\alpha_n \leq x_n \leq \beta_n$ y $|\beta_n - \alpha_n| \leq \delta(A_n) \to 0$, necesariamente $\operatorname{lím} x_n = \operatorname{lím} \alpha_n = \operatorname{lím} \beta_n = \alpha = \beta$

1.13 Sea M un espacio métrico y A un subconjunto de M no vacío. Supongamos que A es acotado según al definición 1.28 y sea $A \subset B(a, r)$. Sean x, y dos puntos cualesquiera de A, tendremos

$$d(x, y) \leq d(a, x) + d(a, y) \leq r + r = 2r$$

por lo tanto el diámetro de A es menor o igual que $2r < \infty$.

Recíprocamente, supongamos que el diámetro de A es $Diám(A) = D < \infty$. Como $A \neq \emptyset$ existe un punto $a \in A$. Tendremos para todo $x \in A$, eligiendo $\varepsilon > 0$ por ejemplo $\varepsilon = 1$, resulta

$$d(x, a) \leq Diám(A) \leq D < D + \varepsilon$$

por tanto $A \subset B(a, D + \varepsilon)$.

Ejercicios del Capítulo 2

2.1 Sea $x_1, x_2, \ldots x_n$ una base de X. Supongamos que un vector $x \in X$ tiene dos representaciones

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) x_i = 0$$

de donde $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$

2.2 Las condiciones son claramente necesarias pues se tienen que cumplir en cualquier espacio vectorial y por tanto también en N.

Además son suficientes pues tomando en $\alpha x+\beta y \in N$ los valores $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ tenemos $0 \in N$. También tomando en $\alpha x+\beta y \in N$ los valores $\alpha = -1$ y $\beta = 0$ tenemos $-x \in N$

2.3

Demostraremos la propiedad (2.7). Las otras son de comprobación inmediata.

Demostración de $\lambda(A\cap B) = \lambda A\cap\lambda B$: Por una parte,

$$\lambda(A\cap B) \subset \lambda A\cap\lambda B$$

en efecto si $x \in \lambda(A\cap B)$, $x = \lambda y$ con $y \in A$ y también $y \in B$, por lo que $x \in \lambda A$ y $x \in \lambda B$. Por otra parte,

$$\lambda A\cap\lambda B \subset \lambda(A\cap B)$$

en efecto si $\lambda = 0$ la inclusión es trivial y si $\lambda \neq 0$, sea $x \in \lambda A\cap\lambda B$ entonces $x = \lambda a$ con $a \in A$ y también $x = \lambda b$ con $b \in B$. Por lo que $x = \lambda a = \lambda b$ implica que $a = b$ y por tanto $a, b \in A\cap B$ y así $x \in \lambda(A\cap B)$.

2.4 Sea A es equilibrado en un espacio vectorial X y $\lambda \in K$ queremos demostrar que

$$\lambda A = |\lambda|A$$

Si $\lambda = 0$ la igualdad $\lambda A = |\lambda|A$ es trivial. Si $\lambda \neq 0$, supongamos primero que $x \in \lambda A$. Entonces

$$\frac{1}{\lambda}x \in A$$

puesto que A es equilibrado y $|\frac{\lambda}{|\lambda|}| = 1$, se tiene

$$\frac{\lambda}{|\lambda|}\frac{1}{\lambda}x \in A \Rightarrow \frac{x}{|\lambda|} \in A$$

Por lo tanto $x \in |\lambda|A$.

Supongamos ahora que $x \in |\lambda|A$. Entonces

$$\frac{1}{|\lambda|}x \in A$$

puesto que A es equilibrado y $|\frac{|\lambda|}{\lambda}| = 1$, resulta

$$\frac{|\lambda|}{\lambda}\frac{1}{|\lambda|}x \in A \Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in A$$

Por consiguiente $x \in \lambda A$.

2.5 Sea A un conjunto equilibrado y sea $c(A)$ la envolvente convexa. Si $z \in c(A)$, existen números reales positivos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tales que $\sum_{i=1,...,n} \alpha_i = 1$ y n vectores en A: $x_1, ..., x_n$ de manera que

$$z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

Si $\lambda \in K$ con $|\lambda| \leq 1$ se tiene

$$\lambda z = \alpha_1(\lambda x_1) + \alpha_2(\lambda x_2) + ... + \alpha_n(\lambda x_n)$$

de donde, teniendo en cuenta que

$$\lambda x_i \in A, \quad i = 1, ..., n$$

pues A es equilibrado, resulta que $\lambda z \in c(A)$, por lo que $c(A)$ es un conjunto equilibrado.

2.6

Demostrar que si se verifica la propiedad c) del enunciado del teorema 2.1 entonces dado $U \in \mathcal{B}$ existe un $V \in \mathcal{B}$ tal que para todo n entero, se verifica $V + \ldots (2^n \text{sumandos}) \ldots + V \subset U$

Utilizamos el principio de inducción. Para $n = 0$ tenemos $V_0 = U \subset U$.

Veamos que si la propiedad es cierta para n también lo es para $n+1$. Supongamos que hemos demostrado que existe $V_n \in \mathcal{B}$ tal que

$$V_n + \ldots (2^n \text{sumandos}) \ldots + V_n \subset U$$

Aplicando la hipótesis c) del enunciado del teorema 2.1 existe $V_{n+1} \in \mathcal{B}$ tal que $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ de modo que

$$V_{n+1} + \ldots (2^{n+1} \text{sumandos}) \ldots + V_{n+1} \subset U$$

2.7 Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda A = O$ está contenido en cualquier entorno del origen O y por lo tanto es acotado.

Si $\lambda \neq 0$, dado un entorno V del origen en X, tenemos que tambien $\lambda^{-1} V$ es un entorno del origen. Como A es acotado, existe un número real positivo α de manera que

$$\alpha A \subset \lambda^{-1} V$$

y por lo tanto

$$\alpha \lambda A \subset V$$

en consecuencia λA es acotado.

2.8 Si A y B son conjuntos acotados, en un espacio vectorial topológico X, entonces $A \cup B$ también es acotado. En efecto,

Sea V un entorno del origen en X, hallamos un entorno equilibrado W del origen de manera que $W \subset V$. Si α_1 y α_2 son dos números positivos tales que

$$\alpha_1 A \subset W, \quad \alpha_2 B \subset W$$

se tiene que

$$A \subset \alpha_1^{-1} W, \quad B \subset \alpha_2^{-1} W$$

si α es el mínimo de α_1 y α_2, como W es equilibrado y $|\alpha/\alpha_1| \leq 1$ y $|\alpha/\alpha_2| \leq 1$ tendremos

$$\frac{\alpha}{\alpha_1}W \subset W \quad \text{y} \quad \frac{\alpha}{\alpha_2}W \subset W$$

y por tanto

$$A \subset \alpha_1^{-1}W \subset \alpha^{-1}W$$

y también

$$B \subset \alpha_2^{-1}W \subset \alpha^{-1}W$$

de modo que

$$A \cup B \subset \alpha^{-1}W$$

de donde se deduce que

$$\alpha(A \cup B) \subset W \subset V$$

2.9 Si A y B son conjuntos acotados, en un espacio vectorial topológico X, entonces $A+B$ también es acotado. En efecto,

Sea V un entorno del origen en X, hallamos un entorno equilibrado del origen W tal que $W+W \subset V$.

Si α_1 y α_2 son dos números positivos tales que

$$\alpha_1 A \subset W, \quad \alpha_2 B \subset W$$

se tiene que

$$A \subset \alpha_1^{-1}W, \quad B \subset \alpha_2^{-1}W$$

si α es el mínimo de α_1 y α_2, razonando como en el ejercicio anterior, resulta que

$$A \subset \alpha^{-1}W, \quad B \subset \alpha^{-1}W$$

y por tanto

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \subset W + W \subset V$$

2.10

Damos una indicación de la demostración: Descomponer g en parte real e imaginaría, poniendo $g_1(x) = Re\, g(x)$ y $g_2(x) = Im\, g(x)$. Tendremos $g = g_1 + ig_2$ de manera que necesariamente

$$g_2(x) = Im(g(x)) = -Re(ig(x)) = -Re(g(ix)) = -g_1(ix)$$

g_1 y g_2 son formas lineales sobre S considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. También $g_1(x) \leq |g(x)| \leq p(x)$. Extender g_1 a una función f_1 con $f_1(x) \leq p(x)$ sobre X. Finalmente poner

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$$

de modo que para $f(ix)$ tendremos, $f(ix) = f_1(ix) - if_1(-x) = f_1(ix) + if_1(x) = if(x)$.

2.11
En efecto pues si x e y son dos vectores cualesquiera no nulos de E, tenemos

$$f(x - \frac{f(x)}{f(y)}y) = f(x) - f(x) = 0$$

lo que implica que

$$x = \frac{f(x)}{f(y)}y$$

y por tanto son linealmente dependientes, es decir E es de dimensión 1.

Recíprocamente si E es de dimensión 1 y si $f \neq 0$, vamos a demostrar demostrar que $|f|$ es un norma. En efecto, solo falta ver que $f(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$. Como $f \neq 0$, existe un x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$. Entonces para cualquier $x \in E$, no nulo tendremos $x = \lambda x_0$ con $\lambda \neq 0$, y por lo tanto $f(x) = \lambda f(x_0) \neq 0$.

2.12 Sea X un espacio vectorial.

a) Sea $B = \{x \in X;\ p(x-a) < \rho\}$. Veamos que es convexo. Sea $x, y \in B$, por tanto $p(x-a) < \rho$ y $p(y-a) < \rho$. Sea $\lambda \in (0,1)$, utilizando la convexidad de p resulta,

$$\begin{aligned} p(\lambda x + (1-\lambda)y - a) &= p(\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)) \\ &\leq \lambda p(x-a) + (1-\lambda)p(y-a) < \rho \end{aligned}$$

b) Sea $(A_\alpha)_\alpha$ una familia de conjuntos convexos y $A = \cap_\alpha A_\alpha$ su intersección. Si $A = \emptyset$ es convexo. En caso contrario, si $x, y \in A \neq \emptyset$ tenemos $x, y \in A_\alpha$ para todo α de modo que $\lambda x + (1-\lambda)y \in A_\alpha$ para todo α y en consecuencia

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \cap_\alpha A_\alpha$$

Finalmente toda $\mathcal{P}$-bola es intersección finita de conjuntos de la forma

$$B = \{x \in X;\ p(x-a) < \rho\}$$

que son convexos y por lo tanto toda $\mathcal{P}$-bola es convexa.

2.13 Sea X un espacio vectorial topológico. Dado $x \in M$ la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K} &\to X \\ \lambda &\to \lambda x \end{aligned}$$

es continua. En particular es continua en $\lambda = 1$. M al ser abierto es un entorno abierto de $x = 1x$. Como f es continua en $\lambda = 1$ existe un entorno de $\lambda = 1$, $I = \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda - 1| < \delta\}$ tal que $f(I) \subset M$. En particular tomando $\varepsilon < \delta$, tendremos $(1+\varepsilon)x \in M$.

2.14 Basta demostrarlo para $n = 2$. Sean p_1 y p_2 dos seminormas y $p = \sup\{p_1, p_2\}$. Para la subaditividad, supongamos que $p(x+y) = p_1(x+y)$

$$p(x+y) = p_1(x+y) \leq p_1(x) + p_1(y) \leq p(x) + p(y)$$

El el caso $p(x+y) = p_2(x+y)$

$$p(x+y) = p_2(x+y) \leq p_2(x) + p_2(y) \leq p(x) + p(y)$$

Para la propiedad 2 de la definición 2.16 tendremos

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \sup\{p_1(\lambda x), p_2(\lambda x)\} \\ &= \sup\{|\lambda| p_1(x), |\lambda| p_2(x)\} = |\lambda| \sup\{p_1(x), p_2(x)\} = |\lambda| p(x) \end{aligned}$$

2.15 Sea X un espacio vectorial topológico. Elegimos $x \neq O$ y un entorno V del origen O que no contiene a x (siempre es posible esto a menos que el único entorno del origen sea todo X). El conjunto $B = \{nx;\ n = 1,2,3,\ldots\}$ no es acotado ya que si $x \notin V$ entonces $nx \notin nV$. De donde nV no contiene a B.

Finalmente si S es un subespacio de X y $x \in S$ es distinto de O, entonces el conjunto $B = \{nx;\ n = 1,2,3,\ldots\} \subset S$ y como B no es acotado S no puede ser acotado.

2.16 Sea $(E_\alpha)_\alpha$ una familia cualquiera de conjuntos equilibrados y $E = \bigcup_\alpha E_\alpha$. Para $\lambda \in K$ con $|\lambda| \leq 1$ tenemos

$$\lambda E = \lambda \bigcup_\alpha E_\alpha = \bigcup_\alpha \lambda E_\alpha \subset \bigcup_\alpha E_\alpha = E$$

2.17

Tenemos $f^{-1}(V) = \{x \in X;\ f(x) \in V\}$. Sean $x, y \in f^{-1}(V)$. Es decir $f(x), f(y) \in V$ Como V es convexo para todo $\lambda \in (0,1)$ tenemos como f es lineal $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \in V$ pues V es convexo. De ahí que $\lambda x + (1-\lambda) y \in f^{-1}(V)$

Ejercicios del Capítulo 3

3.1 Hay que verificar que la aplicación $d(x,y) = \|x-y\|$ verifica $M1$, $M2$ y $M3$:

- $N1 \Rightarrow M1$
- $N3 \Rightarrow M2$: Para todo x tenemos $\|-x\| = |-1|\|x\| = \|x\|$ de donde

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = d(y,x)$$

- $N2 \Rightarrow M3$: $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$

3.2 La aplicación suma es

$$\begin{aligned} T : E \times E &\to E \\ x, y &\to x + y \end{aligned}$$

Entendemos que T es una aplicación definida en el espacio producto cartesiano $E\times E$. A su vez $E\times E$ es un espacio normado con la norma $\|(x,y)\| = \|x\|+\|y\|$. Entonces $\text{lím}(x_n, y_n) = (x,y)$ quiere decir $\text{lím}(\|x_n - x\| + \|y_n - y\|) = 0$, o lo que es lo mismo $\text{lím}\,\|x_n - x\| = 0$ y $\text{lím}\,\|y_n - y\| = 0$.

Sean $\text{lím}\, x_n = x$ y $\text{lím}\, y_n = y$, es decir $\text{lím}\,\|x_n - x\| = 0$ y $\text{lím}\,\|y_n - y\| = 0$

$$\text{lím}\,\|x_n + y_n - (x+y)\| \leq \text{lím}\,\|x_n - x\| + \text{lím}\,\|y_n - y\| = 0$$

es decir $\text{lím}(x_n + y_n) = x+y$

La aplicación producto por un escalar es

$$\begin{aligned} P:\mathbb{K}\times E &\to E \\ \lambda, x &\to \lambda x \end{aligned}$$

Entendemos que P es una aplicación definida en el espacio producto cartesiano $\mathbb{K}\times E$. A su vez $\mathbb{K}\times E$ es un espacio normado con la norma $\|(\lambda,x)\| = |\lambda| + \|x\|$. Entonces $\text{lím}(\lambda_n, x_n) = (\lambda, x)$ quiere decir $\text{lím}(|\lambda_n - \lambda\| + \|x_n - x\|) = 0$, o lo que es lo mismo $\text{lím}\,\|\lambda_n - \lambda\| = 0$ y $\text{lím}\,\|x_n - x\| = 0$, o lo que es lo mismo $\text{lím}\,\lambda_n = \lambda$ y $\text{lím}\, x_n = x$.

Sean $\text{lím}\, x_n = x$ y $\text{lím}\,\lambda_n = \lambda$, tendremos teniendo en cuenta que la sucesión $(\lambda_n)_n$ al ser convergente está acotada ($|\lambda_n| \leq C\ \forall n$)

$$\begin{aligned} &\text{lím}\,\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \text{lím}\,\|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| \\ &\leq \text{lím}\,\|\lambda_n(x_n - x)\| + \text{lím}\,\|(\lambda_n - \lambda)x\| = \text{lím}\,|\lambda_n|.\|x_n - x\| + \text{lím}\,|\lambda_n - \lambda|\|x\| \\ &\leq C\,\text{lím}\,\|x_n - x\| + \|x\|\,\text{lím}\,|\lambda_n - \lambda| = 0 \end{aligned}$$

3.3 Daremos la solución del ejemplo a). Para ello verificamos las propiedades $N1$, $N2$ y $N3$ de la definición de norma.

- $N1$: $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \geq 0$ y si $\|f\| = 0$ entonces
  $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$,
  es decir $f = 0$.
- $N2$: $\sup_{x\in[a,b]} |(f+g)(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$
- $N3$: $\sup_{x\in[a,b]} |(\lambda f)(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

En el ejemplo c) para demostrar la desigualdad triangular $N2$ utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz 4.1 del capítulo 4:

$$|\sum_{i=1}^{d} x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^{d} x_i^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{d} y_i^2)^{1/2}$$

3.4 Sea $(x_n)_n$ tal que $\text{lím}\, x_n = x$, entonces

$$\text{lím}\,\|T(x_n) - T(x)\| = \text{lím}\,\|T(x_n - x)\| \leq M\,\text{lím}\,\|x_n - x\| = 0$$

3.5

a) Llamemos $K = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\|$, evidentemente $K \leq \|T\|$. Sea $\|x\| \leq 1$ y $\varepsilon > 0$. Definamos $y = \frac{x}{\|x\|+\varepsilon}$. Tenemos $\|y\| < 1$, lo que implica $\|T(y)\| \leq K$. Como

$$\|T(x)\| \leq K(\|x\|+\varepsilon)$$

haciendo $\varepsilon \to 0$ resulta, $\|T(x)\| \leq K\|x\| \leq K$ y tomando el $\sup_{\|x\|\leq 1}$ obtenemos $\|T\| \leq K$.

b) Si $E \neq 0$, existe $x \in E$ con $\|x\| = 1$. Llamemos $K = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$. Tenemos $K \leq \|T\|$.
Sea x tal que $\|x\| \leq 1$. Si $x = 0 \to \|T(x)\| = 0 \leq K$
Si $x \neq 0$ tomamos $y = \frac{x}{\|x\|}$ lo que implica $\|T(y)\| \leq K$. De donde $\|T(x)\| \leq K\|x\| \leq K$. Finalmente, en cualquiera de los dos casos tomando el $\sup_{\|x\|\leq 1}$ resulta $\|T\| \leq K$.

c) Si $x = 0$, es trivial.
Si $x \neq 0$ tomamos $y = \frac{x}{\|x\|}$ con lo que $\|y\| = 1$. Aplicando el apartado anterior $\|T(y)\| \leq \|T\|$ de donde $\|T(x)\| \leq \|T\|.\|x\|$

d) Sea x con $\|x\| \leq 1$, tendremos $\|T(x)\| \leq M\|x\| \leq M$ y tomando el $\sup_{\|x\|\leq 1}$ implica $\|T\| \leq M$

3.6

a) $|\psi(x)| = |x_1| \leq \sup_{i=1,\ldots,d} |x_i|$
b) $|\psi(f)| = |\int_a^b g(x)f(x)\,dx| \leq \int_a^b |g(x).|f(x)|\,dx \leq (b-a)\|g\|_\infty \|f\|_\infty$
c) $|\psi(x)| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq 2\|x\|_\infty$

3.7

Demostraremos pues que si B es continua en $(O,O) \in E \times E$ es continua en todo punto y se verifica que existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$\|B(x,y)\| \leq C\|x\|.\|y\|$$

Tomamos en $E \times E$ la norma $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ o cualquier otra norma equivalente. Si B es continua en $(O,O) \in E \times E$, para toda sucesión $(x_n, y_n)_n \subset E \times E$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (O,O)$ se tiene $\text{lím}_{n\to\infty} B(x_n, y_n) = B(O,O) = O \in F$

Sea ahora un elemento cualquiera $(x,y) \in E \times E$ y $(x_n, y_n)_n$ una sucesión en $E \times E$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x,y) \in E \times E$. Evidentemente $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n - x, y_n - y) = (O,O)$. Como B es continua en $(O,O) \in E \times E$, resulta $\text{lím}_{n\to\infty} B\big((x_n, y_n) - (x,y)\big) = B(O,O) = O \in F$ y por ser B una aplicación bilineal

$$\lim_{n\to\infty} B(x_n - x, y_n - y) = \lim_{n\to\infty} \Big(B(x_n, y_n) - B(x_n, y) - B(x, y_n) + B(x,y)\Big) = O$$

Ahora bien las aplicaciones
para $y \in E$ fijo $x \in E \to B(x,y) \in F$
para $x \in E$ fijo $y \in E \to B(x,y) \in F$
son lineales continuas de $E \to F$ por lo que, aplicando el teorema 3.1
$\text{lím}_{n\to\infty} B(x_n, y) = B(x,y)$
$\text{lím}_{n\to\infty} B(x, y_n) = B(x,y)$

de donde $\lim_{n\to\infty} B(x_n, y_n) = B(x, y)$

Veamos ahora la segunda parte del teorema. Demostremos primero que si $\|x\| \leq 1$ y $\|y\| \leq 1$ existe $M \geq 0$ tal que $\|B(x,y)\| \leq M$. En efecto, supongamos por el contrario que el conjunto $\{\|B(x,y)\|; \|x\| \leq 1\ , \|y\| \leq 1\}$ no es acotado. Para cada n podemos elegir vectores x_n e y_n tales que $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ tales que $\|B(x_n, y_n)\| \geq n^2$. Definamos $u_n = \frac{1}{n}x_n$ y $v_n = \frac{1}{n}y_n$. Resulta $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|x_n\| = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|y_n\| = 0$ pues $\|x_n\| \leq 1$ y $\|y_n\| \leq 1$. Es decir $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Por otra parte $\|B(u_n, v_n)\| = \frac{1}{n^2}\|B(x_n, y_n)\| \geq 1$ en contradicción con

$$\lim_{n\to\infty} B(u_n, v_n) = B(O, O) = O$$

Sea finalmente un elemento cualquiera $(x, y) \in E \times E$ y apliquemos el resultado anterior a $\frac{x}{\|x\|}$ y $\frac{y}{\|y\|}$ que tienen norma 1 y por lo tanto

$$\|B(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|})\| \leq M$$

es decir

$$\|B(x,y)\| \leq M\|x\|.\|y\| \quad \forall x, y \in E$$

Recíprocamente si se verifica que B es acotada es inmediato que B es continua en el origen y por lo tanto es continua en todo punto.

3.8 Sean A y B conjuntos convexos y $C = A - B$. Sean $c_1 = a_1 - b_1$ y $c_2 = a_2 - b_2$ con $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$. Tendremos para todo $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned}(1-\lambda)c_1 + \lambda c_2 &= (1-\lambda)(a_1 - b_1) + \lambda(a_2 - b_2)\\ &= \big((1-\lambda)a_1 + \lambda a_2\big) - \big((1-\lambda)b_1 + \lambda b_2\big) \in A - B\end{aligned}$$

3.9

(a) Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $E = \mathbb{R}^d$. Tendremos $\|x_n - x_m\|_\infty \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Es decir, $\sup_{i=1,\ldots,d} |x_{n_i} - x_{m_i}| \to 0$. De modo que para cada $i = 1, \ldots, d$ la sucesión de numeros reales (x_{n_i}) es de Cauchy y por lo tanto convergente. Para cada $i = 1, \ldots, d$ existe $x_i \in \mathbb{R}$ tal que $x_{n_i} \to x_i$ cuando $n \to \infty$ y finalmente $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ y donde $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

(b) ▪ Veamos primero que $(R^d, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado, verificando la propiedad $N2$ ($N1$ y $N3$ son inmediatas). El caso $p = 1$ es trivial. Consideremos pues el caso $p > 1$. Procedemos en varias etapas,

- Desigualdad de Young: Para todo $a \geq 0$ y $b \geq 0$ tenemos

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad (7.141)$$

donde p y q son conjugados, es decir,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

En efecto la función logaritmo es cóncava sobre $(0, \infty)$, de donde

$$\log(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log(ab)$$

- Desigualdad de Hölder:

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leq \|x\|_p . \|x\|_q \tag{7.142}$$

Demostración: Aplicamos la desigualdad de Young (7.141) con $a = |x_i|$ y $b = |y_i|$.

$$|x_i y_i| = |x_i|.|y_i| \leq \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q$$

de donde sumando para todo $i = 1, ..., d$

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q$$

reemplazamos x por λx con $\lambda > 0$ y dividimos por λ

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{\lambda q}\|y\|_q^q$$

Finalmente tomando $\lambda = \frac{\|y\|_q^{q/p}}{\|x\|_p}$ obtenemos (7.142).

- Desigualdad triangular:

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{7.143}$$

Demostración:

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|$$

Llamando $|z_i| = |x_i + y_i|^{p-1}$ y aplicando la desigualdad (7.142)

$$\|x+y\|_p^p \leq \|x\|_p\|z\|_q + \|y\|_p\|z\|_q$$

pero

$$\|z\|_q = \big(\sum_{i=1}^{d} |z_i|^q\big)^{1/q} = \big(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\big)^{1/q} = \|x+y\|_p^{p-1}$$

donde hemos tenido en cuenta que $q(p-1)=p$ y $1/q=(p-1)/p$. Finalmente dividiendo ambos miembros de la desigualdad por $\|x+y\|_p^{p-1}$ obtenemos (7.143).

- Veamos ahora que $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach: Sea $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^d$ una sucesión de Cauchy, es decir, $\|x_n - x_m\|_p \to 0$ cuando $n,m \to \infty$. Tendremos $\sum_{i=1}^d |x_{n_i} - x_{m_i}|^p \to 0 \Rightarrow$ la sucesión de números reales $(x_{n_i})_{n_i}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente. Para cada $i = 1,\dots,d$ existe $x_i \in \mathbb{R}$ tal que $x_{n_i} \to x_i$ cuando $n \to \infty$ y finalmente $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ y donde $x = (x_1,\dots,x_d)$ para la norma $\|\cdot\|_p$

(c) En $(C^0[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ consideremos una sucesión de Cauchy $(f_n)_n$, es decir para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n,m > n_0$

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Tendremos que para todo $x \in [a,b]$ la sucesión $(f_n(x))_n$ es de Cauchy y por lo tanto convergente. Llamemos $f(x)$ al $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Tenemos que demostrar que f es continua y que la convergencia es uniforme, es decir en la norma $\|\cdot\|_\infty$.

- El límite f es una función continua: Tenemos que demostrar que $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$, es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que si} \quad |t-x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

Elegimos n_0 de modo que para $n > n_0$ tengamos $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon/3$ y $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. Elegimos $\delta > 0$ de modo que para $|t-x| < \delta$ tengamos $|f_n(t) - f_n(x)| < \varepsilon/3$. De modo que para $|t-x| < \delta$ tendremos

$$|f(t)-f(x)| \le |f(t)-f_n(t)|+|f_n(t)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

- Hemos de demostrar la convergencia de f_n a la función f en la norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir tenemos que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n,m > n_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$$

de donde para todo $x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon + |f_m(x) - f(x)|$$

y pasando al límite cuando $m \to \infty$ se tiene $|f_m(x) - f(x)| \to 0$ de donde

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$$

de modo que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

que es lo mismo que

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

3.10 $E = (C^0[a,b], \|\cdot\|_p)$, donde

$$\|f\|_p = \big(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\big)^{1/p}$$

es un espacio normado pero no es de Banach. Se verifica que es un espacio normado siguiendo pasos análogos a los del ejercicio 3.9. Veamos que sin embargo no es un espacio de Banach. Lo haremos en el caso $p = 2$ y $[a,b] = [-1,1]$. Consideremos la sucesión de funciones f_n de término general definido por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ nx & 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 1 & \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

Para $m > n$

$$\int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)|^2\, dx = \frac{(m-n)^2}{3m^2 n} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n,m \to \infty$$

por lo tanto la sucesión $(f_n)_n$ es de Cauchy. Supongamos que existe una función límite f y veamos que esta función no puede ser continua. En efecto,

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx \longrightarrow 0$$

y por tanto

$$\int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx = \int_{-1}^{0} |f(x)\, dx \longrightarrow 0$$

por lo que

$$\int_{-1}^{0} |f(x)\, dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [-1,0]$$

Sea ahora $0 < \varepsilon < 0$

$$\int_{\varepsilon}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx \longrightarrow 0$$

para $n > 1/\varepsilon$ tendremos

$$\int_{\varepsilon}^{1} |1 - f(x)|^2\, dx = 0$$

lo que implica $f(x) = 1$ para $x \in [\varepsilon, 1]$. Como $\varepsilon > 0$ se puede tomar arbitrariamente pequeño, necesariamente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

3.11

a) Es lineal:

$$\langle \rho_x, \lambda f_1 + \mu f_2 \rangle = \langle \lambda f_1 + \mu f_2, x \rangle = \lambda \langle f_1, x \rangle + \mu \langle f_2, x \rangle = \lambda \langle \rho_x, f_1 \rangle + \mu \langle \rho_x, f_2 \rangle$$

b) Es continua:

$$|\langle \rho_x, f \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\|.\|x\| = C\|f\|$$

donde $C = \|x\|$. Esto demuestra además que $\|\rho_x\| \leq \|x\|$. De hecho se tiene $\|\rho_x\| = \|x\|$ como corolario del teorema de Hanh-Banach. Ver el corolario (3.2)

3.12 Sean E y F espacios normados y T un operador de E en F continuo. Demostrar que el grafo $G(T) = \{(x, y) \in E \times F;\ y = Tx\}$ es un subespacio cerrado de $E \times F$

Sea una sucesión $(x_n, y_n)_n$ en $G(T)$ convergente en $E \times F$. Sea $x = \text{lím}\, x_n$ y $y = \text{lím}\, y_n$. Como $(x_n, y_n)_n \in G(T)$, tenemos $y_n = Tx_n$. Si T es continuo,

$$y = \text{lím}\, y_n = \text{lím}\, Tx_n = Tx$$

por lo tanto $(x, y) \in G(T)$.

3.13 Sea A es un espacio vectorial verificando $A1$, $A2$, $A3$, $A4$ y $A5$ con la salvedad que $||e|| \neq 1$:

- Como $e = e.e$ tenemos $\|e\| = \|e.e\| \leq \|e\|^2$, de donde $||e|| \geq 1$
- Basta tomar $\|x\|_{eq} = \frac{1}{\|e\|}\|x\|$. Tenemos para todo $x \in A$

$$\|x\|_{eq} \leq \|x\| = \|e\|.\|x\|_{eq}$$

3.14 Sea A un álgebra de Banach y sea $x \in A$ con $\|x\| < 1$. Entonces $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, la serie $-x - x^2 - x^3 - \ldots$ es absolutamente convergente. Siendo A un espacio de Banach la serie es convergente. Llamemos y a la suma de la serie, tendremos

$$x.y = -x^2 - x^3 - x^4 - \ldots = x + y$$

Ejercicios del Capítulo 4

4.1 Desigualdad de Cauchy Schwarz en espacios prehilbertianos complejos
Se trata de demostrar que $|(x, y)| \leq \|x\|.\|y\|$ para todo x, y. Si $x = 0$ o $y = 0$ la desigualdad es evidente. Supongamos pues que $y \neq 0$ y $z = y/\|y\|$, de modo que $\|z\| = 1$. La desigualdad se escribe entonces $|(x, z)| \leq \|x\|$.

Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tendremos

$$\begin{aligned}
\|x-\lambda z\|^2 &= \|x\|^2 - \bar{\lambda}(x,z) - \lambda(z,x) + \lambda\bar{\lambda}\|z\|^2 \\
&= \|x\|^2 - (x,z)\bar{\lambda} - \lambda\overline{(x,z)} + \lambda\bar{\lambda} \\
&= \|x\|^2 - (x,z)\overline{(x,z)} + (x,z)\overline{(x,z)} - (x,z)\bar{\lambda} - \lambda\overline{(x,z)} + \lambda\bar{\lambda} \\
&= \|x\|^2 - |(x,z)|^2 + \Big((x,z)-\lambda\Big)\overline{\Big((x,z)-\lambda\Big)} \\
&= \|x\|^2 - |(x,z)|^2 + |(x,z)-\lambda|^2
\end{aligned}$$

Tomando ahora $\lambda = (x,z)$ resulta

$$0 \le \|x-(x,z)z\|^2 = \|x\|^2 - |(x,z)|^2$$

es decir

$$|(x,z)| \le \|x\| = \|x\|.\|z\|$$

Finalmente sustituyendo el valor de z en función de y y multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $\|y\|$ obtenemos la desigualdad buscada.

4.2 Demostraremos la propiedad $P3$ en el ejemplo b) y d). Las demás propiedades son inmediatas debido a las propiedades de la integral.

$$(u,u) = \int_a^b u^2(x)\,dx \ge 0$$

Si $\int_a^b u^2(x)\,dx = 0$, como u es una función continua en $[a,b]$ necesariamente $u(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$

Para la propiedad $P3$, en el caso del ejemplo d), tenemos

$$(u,u) = \int_a^b (u'(x))^2\,dx \ge 0$$

Por otra parte si $\int_a^b (u'(x))^2\,dx = 0$, ello implica que $u'=0$ es decir u es constante en $[a,b]$ y como $u(a)=0$ esta constante tiene que ser nula.

4.3 Hay que demostrar que en un espacio normado cuya norma cumpla la ley del paralelogramo (4.2), el producto

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

verifica las propiedades $P1$, $P2$ y $P3$ del producto escalar.

Las propiedades $P1$ y $P3$ son inmediatas. Veamos que se verifica $P2$:

$$(x,z)+(y,z) = \frac{1}{4}\Big(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\Big)$$

De la ley del paralelogramo se deduce

$$\|x+z\|^2+\|y+z\|^2=\frac{1}{2}\|x+y+2z\|^2+\frac{1}{2}\|x-y\|^2$$
$$\|x-z\|^2+\|y-z\|^2=\frac{1}{2}\|x+y-2z\|^2+\frac{1}{2}\|x-y\|^2$$

restando

$$\begin{aligned}&\|x+z\|^2+\|y+z\|^2-\|x-z\|^2-\|y-z\|^2\\&=2\|\frac{x+y}{2}+z\|^2-2\|\frac{x+y}{2}-z\|^2\end{aligned}$$

de donde

$$(x,z)+(y,z)=2(\frac{x+y}{2},z) \tag{7.144}$$

Tomando $y=0$

$$(x,z)=2(\frac{x}{2},z) \quad \forall x,z$$

por lo que utilizando (7.144) resulta

$$(x,z)+(y,z)=2(\frac{x+y}{2},z)=(x+y,z) \tag{7.145}$$

Falta demostrar que $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ para todo $\lambda\in R$. Como el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ bastará demostrar que la propiedad es cierta para todo $\lambda\in\mathbb{Q}$ ya que la aplicación $(\cdot,\cdot)$ definida por la expresión (4.5) es continua.

Tomando en (7.145) $x=y$, tenemos $(x+x,z)=(2x,z)=2(x,z)$ y también aplicando recursivamente el mismo argumento $(nx,z)=n(x,z)$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

También $0=(x-x,z)=(x,z)+(-x,z)$ de donde $(-x,z)=-(x,z)$. Por tanto $(nx,z)=n(x,z)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Además $\frac{1}{n}(x,z)=\frac{1}{n}(\frac{nx}{n},z)=(\frac{x}{n},z)$. De ahí

$$\lambda(x,z)=(\lambda x,z) \quad \forall\lambda\in\mathbb{Q}$$

y por continuidad para todo $\lambda\in\mathbb{R}$

4.4 En un espacio prehilbertiano complejo demostrar

$$(x,y)=\frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\big) \tag{7.146}$$

Tenemos

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+(x,y)+(y,x)$$
$$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-(x,y)-(y,x)$$
$$\|x+iy\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-i(x,y)+i(y,x)$$
$$\|x-iy\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+i(x,y)-i(y,x)$$

La primera identidad se deduce fácilmente de las propiedades del producto escalar. La otras tres se deducen de la primera sustituyendo sucesivamente y por $-y$, iy e $-iy$. Reordenando y sumando se obtiene $4(x,y)$ y la identidad buscada.

4.5 Resolveremos el caso b). Es simplemente un ejercicio de integración. Para resover la integral transformar el producto de funciones trigonométricas en una suma y la integración es inmediata. En efecto en el caso b) tenemos para $n > m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((n-m)x\big)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((n+m)x\big)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{n-m}[\sin\big((n-m)x\big)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+m}[\sin\big((n+m)x\big)]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Los caso c) y d) son análogos.

4.6 Seguimos un procedimiento análogo al del ejercicio 4.1. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ números complejos cualesquiera. Para una sucesión $(x_k)_k$ de vectores ortonormales,

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_k x_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_k x_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_k|^2$$

gracias al teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_k x_k\|^2 \\
&= \|x\|^2 - (\sum_{i=1}^{n} \lambda_k x_k, x) - (x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_k x_k) + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_k|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \overline{(x,x_k)} - \sum_{i=1}^{n} (x,x_k)\overline{\lambda}_k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \overline{\lambda}_k \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x,x_k)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |(x,x_k) - \lambda_k|^2
\end{aligned}$$

Tomando $\lambda_k = (x,x_k)$ obtenemos el resultado para todo n. Haciendo $n \longrightarrow \infty$ obtenemos el resultado buscado.

4.7 El espacio del ejemplo a) es el espacio euclídeo d-dimensional que es completo y por lo tanto de Hilbert.

Estudiemos el espacio del ejemplo b)

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots); \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$$

con el producto escalar $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

Sea $(x^{(n)})_n$ una sucesión de Cauchy en l^2, con $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_i^{(n)}, \ldots)$. Si es de Cauchy quiere decir que $\|x^{(m)} - x^{(n)}\| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Tendremos para cada componente x_i

$$|x_i^m - x_i^n|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|^2 = \|x^{(m)} - x^{(n)}\|^2 \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$. Las sucesiones de números reales $(x_i^{(n)})_n$ son de Cauchy y por lo tanto convergentes. Sea $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}$. Entonces $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ es el límite buscado de la sucesión $(x^{(n)})_n$. En efecto verifiquemos que $x \in l^2$ y que $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$: Para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n, m \geq n_0$ entonces

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|^2 \leq \|x^{(m)} - x^{(n)}\| \leq \varepsilon$$

haciendo $m \to \infty$ resulta para $n \geq n_0$

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i - x_i^{(n)}|^2 \leq \varepsilon$$

Como k puede ser arbitrariamente grande, tendremos que para $n \geq n_0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^{(n)}|^2 \leq \varepsilon \tag{7.147}$$

En particular para $n = n_0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^{(n_0)}|^2 \leq \varepsilon$$

por lo tanto $x - x^{(n_0)}$ es un elemento de l^2 y si a este elemento le sumamos $x^{(n_0)}$ obtenemos x que será también un elemento de l^2. Finalmente la relación (7.147) válida para todo $n \geq n_0$ quiere decir que $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ en l^2.

Los ejemplos de c) no son de Hilbert. Basta encontrar una sucesión de Cauchy cuyo límite no sea continuo análogamente a lo hecho en el ejercicio 3.10.

4.8 Es una simple adaptación del caso hilbertiano. Solo se utiliza que N es completo.

4.9 Sean x, y con normas $\|x\| < 1$ y $\|y\| < 1$ y tales que $\|x - y\| > \varepsilon > 0$. De la igualdad del paralelogramo se deduce

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

haciendo $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} > 0$ tenemos

$$\|\frac{x+y}{2}\| < 1-\delta$$

Observación: Necesariamente $\varepsilon < 2$, en efecto si fuese $\|x-y\| > 2$ y por ejemplo $\|y\| < 1$ tendríamos $2 < \|x-y\| \le \|x\|+\|y\|$, de donde $\|x\| > 2-\|y\| > 2-1 = 1$ que contradice la elección de x.

4.10 Tenemos

$$V \subset H = H' \subset V'$$

Veamos que todo elemento $x \in H = H'$ define un elemento $\psi_x \in V'$. Definimos

$$\langle \psi_x, v\rangle = (x, v) \quad \forall v \in V$$

Ahora la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \psi : & H \to V' \\ & x \to \psi_x \end{aligned}$$

es

- Inyectiva: En efecto sean $x_1, x_2 \in H$ tales que $\psi_{x_1} = \psi_{x_2}$, es decir

  $$(x_1, v) = (x_2, v) \quad \forall v \in V$$

  Como V es denso en H

  $$(x_1, x) = (x_2, x) \quad \forall x \in H$$

  y por tanto $x_1 = x_2$
- Continua: Como $\|v\|_H \le C\|v\|_V$

  $$\begin{aligned} \|\psi_x\|_{V'} = \sup_{v\in V} \frac{\langle \psi_x, v\rangle}{\|v\|_V} &\le C \sup_{v\in V} \frac{\langle \psi_x, v\rangle}{\|v\|_H} \\ &\le C \sup_{v\in H} \frac{(x, v)}{\|v\|_H} \le C\|x\|_H \end{aligned}$$

  Falta demostrar que H es denso en V'. Para esto se haremos uso del corolario 3.1 del teorema de Hanh-Banach. Aplicamos el corolario con $E = V'$ y $F = H = H'$. Sea $f \in V''$ tal que ${}_{V''}\langle f, x\rangle_{V'} = 0$ para todo $x \in H \subset V'$. Como V es reflexivo, pues es un espacio de Hilbert, sea y el elemento de V definido por $T(y) = f$ donde T es la aplicación definida en (3.17). Es decir ${}_{V'}\langle x, y\rangle_V = {}_{V''}\langle f, x\rangle_{V'}$ para todo $x \in V'$. En particular para $x \in H$ podemos escribir $(x, y) = 0$ para todo $x \in H$. Es decir $y = 0$ y por lo tanto $f = 0$.

4.11 Sea $v \in E$ con $v \notin N$. Como N es cerrado $d = dist(v, N) > 0$. Elegimos $m_0 \in N$ tal que

$$d \le \|v - m_0\| \le \frac{d}{1-\varepsilon}$$

y tomemos

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

u verifica las condiciones requeridas, en efecto si $m \in N$ tenemos

$$\|u - m\| = \|\frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m\| = \frac{1}{\|v - m_0\|}\|v - (m_0 + \|v - m_0\|m)\| \geq \frac{1-\varepsilon}{d} d = 1 - \varepsilon$$

ya que $m_0 + \|v - m_0\|m \in N$.

4.12

- Demostración de a): Sea un intervalo acotado de extremos $a, b \in \mathbb{R}$. Tenemos que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ se puede recubrir el intervalo mediante un número finito de intervalos abiertos de radio menor que ε. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos n de manera que $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Dividimos el intervalo dado en n subintervalos mediante la partición
$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$
Los subintervalos de centro $x_{i+1/2} = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y radio $\frac{b-a}{n}$ recubren el intervalo dado.
- Demostración de b): En un espacio métrico completo los conjuntos totalmente acotados son los mismos que los conjuntos relativamente compactos (véase corolario 1.7). Un intervalo acotado por la parte a) del ejercicio es totalmente acotado, y si es cerrado coincide con su adherencia que es compacta por la definición de conjunto relativamente compacto.
- Demostración de c): Consideraremos $\mathbb{R}^d$ con la distancia asociada a la norma euclídea. Debido a la equivalencia de normas en espacios de dimensión finita el resultado será válido para cualquier distancia asociada a otra norma. Basta demostrar que
$$I = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d;\ a_i \leq x_i \leq b_i\ , i = 1, \ldots, d\}$$
es un conjunto totalmente acotado: Consideramos primero el caso en el que $b_i - a_i = \delta$ para todo $i = 1, \ldots, d$. Dado $\varepsilon > 0$ hemos de recubrir I mediante un número finito de bolas abiertas de radio menor igual a ε. Procedemos como en el apartado a). Elegimos n de manera que $\frac{\sqrt{d}\delta}{n} < \varepsilon$. Consideramos la partición de la celda I en n^d d-subceldas dividiendo cada intervalo $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, d$ en n subintervalos de lado δ/n. Sea c_s; $s = 1, \ldots, n^d$ el punto central de cada uno de estas n^d subceldas. El diámetro de cada una de estas c_s d-celdas es $\frac{\sqrt{d}\delta}{n}$. El conjunto finito de bolas abiertas $B(c_s, \frac{\sqrt{d}\delta}{n})$; $s = 1, \ldots, n^d$ de centro c_s y radio $\frac{\sqrt{d}\delta}{n}$ recubre I.
Si las dimensiones de la d-celda I son distintas, es decir $b_i - a_i = \delta_i$; $i = 1, \ldots, d$ entonces consideramos $\delta = \text{máx}\{\delta_i;\ i = 1, \ldots, d\}$ y cubrimos la celda I mediante una d-celda

$$J = \{x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d;\ c_i \le x_i \le d_i\ , i = 1, ..., d\}$$

cuyo centro es el mismo que el de la celda I y para la que $d_i - c_i = \delta$ para $i = 1, ..., d$. Procedemos entonces como en el caso anterior.

- Demostración de d): Sea A un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^d$. Si A es acotado existirá una d- celda I, que podemos suponer cerrada que lo contiene. Por la parte c) de este ejercicio I es compacto por lo que A si es cerrado será compacto pues todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto (véase teorema 1.19).
- Demostración de e): Sea E un espacio normado real de dimensión finita d. Como E es isomorfo a $\mathbb{R}^d$ podemos aplicar la parte d). Si E es un espacio normado complejo de dimensión finita d, E es isomorfo a $\mathbb{R}^{2d}$ y podemos aplicar de nuevo d).
  Nota: El isomorfismo obvio de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ está definido asociando el número complejo $a + bi$ con el par ordenado (a, b).

4.13

Razonamos por reducción al absurdo. Si E es de dimensión infinita, existe una sucesión $(E_n)_n$ de espacios de dimensión finita tales que $E_{n-1} \subsetneq E_n$. Gracias al resultado del ejercicio 4.11 se puede construir una sucesión $(u_n)_n$ con $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$, y $dist(u_n, E_{n-1}) \ge 1/2$. En particular tendremos $\|u_n - u_m\| \ge 1/2$ para $m < n$. Así pues la sucesión no admite ninguna subsucesión convergente y B_E no puede ser un conjunto compacto.

4.14 Sean $(y_1, y_2, y_3, ...)$ una sucesión de vectores linealmente independientes de un espacio prehilbertiano. Vamos a construir una sucesión ortonormal $(x_1, x_2, x_3, ...)$ de vectores tales que el espacio generado por $\{y_1, y_2, y_3, ..., y_n\}$ es el mismo que el generado por $\{x_1, x_2, x_3, ...x_n\}$ cualquiera que sea $n \in N$. Utilizaremos el procedimiento de Gram-Schmidt:

- $x_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- $$z_2 = y_2 - (y_2, x_1)x_1$$
  $$x_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|}$$
- ...
- $$z_n = y_n - \sum_{i=1}^{n-1} (y_n, x_i)x_i$$
  $$x_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$$

4.15

1. $$((T^*)^* x, y) = (x, T^* y) = (Tx, y) \quad \forall x\ , \forall y$$

de modo que $(T^*)^* = T$.

2. Observemos que $T^*T : E \to E$ y $TT^* : F \to F$. Si $\|x\| < 1$

$$\|Tx\|^2 = (Tx,Tx) = (T^*Tx,x) \leq \|T^*Tx\|.\|x\| \leq \|T^*T\|$$

y tomando el supremo para $\|x\| \leq 1$ resulta

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$$

Por otra parte como $\|T^*\| = \|T\|$

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\|.\|T\| = \|T\|^2$$

de donde

$$\|T^*T\| = \|T\|^2$$

Intercambiando los papeles de T y T^*,

$$\|TT^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|$$

3. De la anterior propiedad se deduce inmediatamente que $T^*T = 0$ si y solo si $T = 0$
4.
$$((ST)^*y,x) = (y,STx) = (S^*y,Tx) = (T^*S^*y,x) \quad \forall x\ ,\ \forall y$$
5. Tenemos $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

$$I = I^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*$$

y también

$$I = I^* = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*$$

de donde $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

4.16 T_1 es sobreyectiva pues para todo $Tx \in R(T)$, descomponiento $x = y+z$ con $y \in N(T)$ y $z \in N(T)^\perp$ tendremos $Tx = T_1z$. Por otra parte T_1 es inyectiva pues para $x \in N(T)^\perp$ y $T_1x = 0$, entonces $x \in N(T)^\perp \cap N(T) = \{0\}$.

4.17 Como $\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}$ y $\|g\|_Q = \|\chi\|_{H'}$ utilizaremos la equivalencia de (4.51)-(4.52) con el problema (4.53)-(4.54) y demostraremos que la solución (u,p) de este último verifica

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_H + \frac{1}{\beta}\big(1+\frac{\|a\|}{\alpha}\big)\|g\|_Q$$
$$\|p\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\big(1+\frac{\|a\|}{\alpha}\big)\|f\|_H + \frac{\|a\|}{\beta^2}\big(1+\frac{\|a\|}{\alpha}\big)\|g|_Q$$

De $Bu_0 = g$ deducimos $\|u_0\|_H \leq \frac{1}{\beta}\|g\|_Q$. Por otra parte tomando $v = w$ en

$$a(w,v) = (f,v) - a(u_0,v) \quad \forall v \in V$$

y aplicando la V-elipticidad,

$$\alpha\|w\|_H^2 \leq \|f\|_H.\|w\|_H + \|a\|.\|u_0\|_H.\|w\|_H$$

de donde

$$\|w\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_H + \frac{\|a\|}{\alpha\beta}\|g\|_Q$$

Ahora teniendo encuenta que $u = w + u_0$, resulta

$$\|u\|_H \leq \|w\|_H + \|u_0\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_H + \frac{1}{\beta}\big(1+\frac{\|a\|}{\alpha}\big)\|g\|_Q$$

lo que demuestra la estimación de $\|u\|_H$.

Pasemos a la estimación de $\|p\|_Q$. Tenemos $B^*p = f - Au$, de donde

$$\|p\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\|f - Au\|_H \leq \frac{1}{\beta}(\|f\| + \|a\|.\|u\|_H)$$

y utilizando la estimación de $\|u\|_H$ anterior y agrupando términos

$$\|p\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\big(1+\frac{\|a\|}{\alpha}\big)\|f\|_H + \frac{\|a\|}{\beta^2}\big(1+\frac{\|a\|}{\alpha}\big)\|g\|_Q$$

que es la estimación buscada.

4.18

a)

$$\|Tx\|^2 = (Tx,Tx) = (x,T^*Tx) = (x,TT^*x) = ((TT^*)^*x,x) = (TT^*x,x) = (T^*x,T^*x) = \|T^*x\|^2$$

b) Demostraremos que si T es normal y compacto entonces T^* es normal y compacto. Evidentemente si T es normal también lo es T^*. Veamos ahora que si T es compacto T^* también lo es. Sea $(x_n)_n$ una sucesión con $\|x_n\| \leq 1$. Entonces existe una subsucesión $(Tx_{n_k})_{n_k}$ convergente y por tanto de Cauchy. Entonces como

$$\|T^*x_{n_k} - T^*x_{n_l}\| = \|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\|$$

tenemos que $(T^*x_{n_k})_{n_k}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente.

4.19 Supongamos que $N_T(\lambda)$ es de dimensión infinta. $N_T(\lambda)$ tendrá una sucesión de vectores linealmente independientes $(x_n)_n$ y podemos suponer que es una sucesión de vectores ortonormales. Si $m \neq n$,

$$\|Tx_m - Tx_n\|^2 = \|\lambda x_m - \lambda x_n\|^2 = |\lambda|^2\|x_m - x_n\|^2 = |\lambda|^2(\|x_m\|^2 + \|x_n\|^2) = 2|\lambda|^2 > 0$$

por lo que $(Tx_n)_n$ no puede tener una subsucesión parcial convergente. Como $\|x_n\| = 1$ esto contradice la compacidad de T.

4.20

1. Sea $\lambda > \|T\|$. Demostremos que la aplicación $T - \lambda Id$ es inversible. Esto demostrará que $\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|]$. Dada $f \in H$, la ecuación $Tx - \lambda x = f$, se puede escribir de la forma $x = \frac{1}{\lambda}(Tx - f)$. Es decir, x es punto fijo de la aplicación

$$\begin{aligned} H &\to H \\ y &\to \frac{1}{\lambda}(Ty - f) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &\|\frac{1}{\lambda}(Ty_1 - f) - \frac{1}{\lambda}(Ty_2 - f)\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ty_1 - Ty_2\| \\ \leq &\frac{1}{\lambda}\|T\|.\|y_1 - y_2\| \leq C\|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

con $C = \frac{\|T\|}{\lambda} < 1$. Por lo tanto existe un único punto fijo x que es la solución buscada.

2. Veamos que el conjunto resolvente es abierto: Sea $\lambda_0 \in \rho(T)$. Veremos que existe un entorno de λ_0 tal que para todo λ de este entorno $\lambda \in \rho(T)$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ en un entorno de λ_0 cuyo radio determinaremos más adelante. Queremos resolver la ecuación

$$Tx - \lambda x = f$$

que podemos escribir de la forma

$$Tx - \lambda_0 x = f + (\lambda - \lambda_0)x$$

o en forma de ecuación de punto fijo

$$x = (T - \lambda_0 Id)^{-1}\big(f + (\lambda - \lambda_0)x\big)$$

Tendremos

$$\begin{aligned} &\|(T - \lambda_0 Id)^{-1}\big(f + (\lambda - \lambda_0)y_1\big) - (T - \lambda_0 Id)^{-1}\big(f + (\lambda - \lambda_0)y_2\big)\| \\ \leq &\|(T - \lambda_0 Id)^{-1}\|.|\lambda - \lambda_0|.\|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

La ecuación tendrá un punto fijo si

$$\|(T - \lambda_0 Id)^{-1}\|.|\lambda - \lambda_0| = C < 1$$

Basta pues elegir λ en un entorno de λ_0 tal que

$$|\lambda - \lambda_0| = \frac{C}{\|(T - \lambda_0 Id)^{-1}\|} < \frac{1}{\|(T - \lambda_0 Id)^{-1}\|}$$

para que $\lambda \in \rho(T)$.

4.21 Llamemos $M = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Tx, x)|$ y $S = \sup_{\|x\| = 1} |(Tx, x)|$

Tenemos por una parte $S \le M$. Por otra parte para cualquier $x \ne 0$ con $\|x\| \le 1$ tendremos

$$|(T(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|})| \le S$$

De modo que

$$|(Tx,x)| \le S\|x\|^2 \le S$$

y tomando el supremo para todo x con $\|x\| \le 1$

$$M = \sup_{\|x\|\le 1} |(Tx,x)| \le S$$

4.22 $M = \sup_{x\in H\ ;\|x\|=1}(Tx,x)$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un elemento x de norma $\|x\| = 1$ tal que $M - \varepsilon < (Tx,x)$. Basta elegir sucesivamente $\varepsilon = 1/n$ de modo que para n suficientemente grande sea $M - 1/n > -M$, resultando que para este n existirá x_n con $\|x_n\| = 1$ verificando

$$-M < M - \frac{1}{n} < (Tx_n, x_n) \le M$$

4.23

- Demostración de a): Consideramos las formas $\varphi, \psi : H \times H \to \mathbb{C}$ definidas por

  $$\varphi(x,y) = (Sx,y) \quad \text{y} \quad \psi(x,y) = (Tx,y) \quad \forall x,y \in H$$

  Tenemos $\varphi(x,x) = \psi(x,x)$ para todo $x \in H$. Bastará demostrar que $\varphi = \psi$. Tenemos que φ y ψ son sesquilineales:
  Una forma $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$ es sesquilineal si verifica

  1. $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in H$
  2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y) \quad \forall x,y \in H \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$
  3. $\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in H$
  4. $\varphi(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\varphi(x,y) \quad \forall x,y \in H \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

  Aplicamos la identidad de polarización

  $$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y) + i\varphi(x+iy,x+iy) - i\varphi(x-iy,x-iy)\Big)$$

  y lo mismo para ψ. La identidad de polarización para formas sesquilineales se demuestra de la misma forma que en el ejercicio 4.3 para el producto escalar en el caso de espacios complejos.
- Demostración de b):
  Si T es autoadjunto, $T = T^*$ y

  $$(Tx,x) = (x,T^*x) = (x,Tx) = \overline{(Tx,x)} \quad \forall x \in H$$

  por lo tanto (Tx,x) es real.
  Recíprocamente supongampos que (Tx,x) es real para todo $x \in H$ entonces

$$(Tx,x) = \overline{(Tx,x)} = (x,Tx) = (T^*x,x) \quad \forall x \in H$$

Resulta que $T = T^*$ aplicando la parte a)

- Demostración de c): Sea λ y x tales que $Tx = \lambda x$ con $\|x\| = 1$. Entonces,

$$\lambda = \lambda(x,x) = (\lambda x,x) = (Tx,x) = (x,Tx) = (x,\lambda x) = \bar{\lambda}(x,x) = \bar{\lambda}$$

Ejercicios del Capítulo 5

5.1 Veamos primero que si $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra es un σ-anillo. En efecto se verifican (5.1) y (5.3). También se verifica (5.2) pues si $A, B \in \mathcal{M}$ entonces

$$A - B = (A \cap B^c) \in \mathcal{M}$$

Por otra parte si a un σ-anillo $\mathcal{E}$ le añadimos la propiedad de que el conjunto total $X \in \mathcal{M}$ entonces para todo $A \in \mathcal{E}$ tenemos $A^c \in \mathcal{E}$ pues $A^c = X - A$ y es entonces una σ-álgebra.

5.2 Sea $B \subset X$ un conjunto cerrado y f una función medible. Pongamos $A = B^c$, que es abierto. Entonces el conjunto $f^{-1}(A) = \{x \in X;\ f(x) \in A\}$ es medible. El complemetario de $f^{-1}(A)$ es también medible. Pero el complemetario de $f^{-1}(A)$ es $\{x \in X;\ f(x) \notin A\} = \{x \in X;\ f(x) \in B\} = f^{-1}(B)$

5.3 Veamos que si $\mathcal{F}$ es una colección cualquiera de subconjuntos de X, existe una σ-álgebra mínima $\mathcal{M}^*$ en X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}^*$.

En efecto, sea Ξ la familia de todas las σ-álgebras $\mathcal{M}$ de X que contienen a $\mathcal{F}$. Como la familia de todos los subconjuntos de X es una σ-álgebra, Ξ es no vacía. Sea $\mathcal{M}^*$ la intersección de todas las $\mathcal{M} \in \Xi$. Tenemos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}^*$ y que $\mathcal{M}^*$ está en toda σ-álgebra de X que contiene a $\mathcal{F}$. Falta probar que $\mathcal{M}^*$ es una σ-álgebra. Comprobémoslo,

1. $X \in \mathcal{M}^*$ pues $X \in \mathcal{M}$ para toda $\mathcal{M} \in \Xi$
2. Si $A \in \mathcal{M}^*$, entonces $A \in \mathcal{M}$ para toda $\mathcal{M} \in \Xi$ y por tanto $A^c \in \mathcal{M}$ para toda $\mathcal{M} \in \Xi$; concluimos que $A^c \in \mathcal{M}^*$
3. si $A_n \in \mathcal{M}^*$ para $n = 1,2,3,\ldots$ y si $\mathcal{M} \in \Xi$, entonces $A_n \in \mathcal{M}$ y por tanto $\cup A_n \in \mathcal{M}$ porque $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Como $\cup A_n \in \mathcal{M}$ para toda $\mathcal{M} \in \Xi$ concluimos $\cup A_n \in \mathcal{M}^*$.

5.4 Sea A un abierto de $\mathbb{R}$. Para $x \in A$ existe un intervalo abierto (a_x, b_x) tal que $x \in (a_x, b_x) \subset A$. Sea $\alpha_x = \text{ínf}\{a_x;\ (a_x,b_x) \subset A\}$ y $\beta_x = \sup\{b_x;\ (a_x,b_x) \subset A\}$, es decir (α_x, β_x) es el mayor de los intervalos que contiene a x y está contenido en A. Sea $I_x = (\alpha_x, \beta_x) \subset A$. Si $I_x = A$ ya hemos terminado. En caso contrario existirá un $y \in A$ tal que $y \notin I_x$. Construimos para este y el correspondiente I_y. Naturalmente $I_x \cap I_y = \emptyset$ pues en caso contrario no sería I_x el máximo intervalo conteniendo a x e I_y el máximo intervalo conteniendo a y respectivamente.

Consideremos en A la relación de equivalencia siguiente: $x \sim y$ si y solo si $x, y \in I_x$. Claramente $\sim$ es un relación de equivalencia y clasifica los puntos de A en clases de equivalencia que llamaremos $\tilde{x}$. Renombramos $I_x = I_{\tilde{x}}$ de modo que si $x, y \in \tilde{x}$ tenemos $x, y \in I_{\tilde{x}} = I_x = I_{\tilde{y}} = I_y$ y podemos escribir

$$A = \bigcup_{\tilde{x}} I_{\tilde{x}}$$

Finalmente como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ para cada intervalo $I_{\tilde{x}}$ existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in I_{\tilde{x}} = I_{\tilde{q}} = I_q$. Por lo tanto podemos asociar a cada intervalo $I_{\tilde{x}}$ un número racional q. Como $\mathbb{Q}$ es numerable el conjunto de intervalos $I_{\tilde{x}}$ también lo es.

5.5 Lo demostraremos en el caso $d = 2$. En el caso general sería análogo. Sean

$$I = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ a_1 \le x_1 \le b_1,\ a_2 \le x_2 \le b_2\}$$

$$J = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ c_1 \le x_1 \le d_1,\ c_2 \le x_2 \le d_2\}$$

dos 2-celdas. Si son disjuntas $I - J = \emptyset$ y se termina la demostración. Si no son disjuntas supongamos por ejemplo

$$\begin{aligned} a_1 \le c_1 \le b_1 \le d_1 \\ a_2 \le c_2 \le b_2 \le d_2 \end{aligned}$$

Entonces $J - I$ es unión de las 2-celdas

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ c_1 \le x_1 \le d_1,\ b_2 \le x_2 \le d_2\}$$

y

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ b_1 \le x_1 \le d_1,\ c_2 \le x_2 \le b_2\}$$

5.6 Cubrimos el n-ésimo punto de A mediante una d-celda I_n tal que $m(I_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Tendremos que

$$m^*(A) \le \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2^2}\varepsilon + \frac{1}{2^3}\varepsilon + \ldots \le \varepsilon$$

5.7 Sea $B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ y $B_n \to A$ cuando $n \to \infty$. Queremos ver que $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$, es decir queremos ver que existe una sucesión de conjuntos elementales que tiene como límite A. Para cada n tendremos una sucesión de conjuntos $C_m^{(n)} \in \mathcal{E}$ tales que $d(C_m^{(n)}, B_n) \to 0$ cuando $m \to \infty$. Es decir

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } m_0 \text{ tal que si } m \ge m_0 \quad d(C_m^{(n)}, B_n) < \varepsilon \\ &\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } n_0 \text{ tal que si } n \ge n_0, \quad d(B_n, A) < \varepsilon \end{aligned}$$

tomemos $n_1 = \text{máx}\{n_0, m_0\}$; tendremos para todo $\varepsilon > 0$ existe n_1 tal que si $n \ge n_1$

$$d(C_n^{(n)}, A) \le d(C_n^{(n)}, B_n) + d(B_n, A) < 2\varepsilon$$

5.8 Recordemos la construcción de la integral de Riemann de una función acotada en un intervalo $[a,b]$ de la recta real $\mathbb{R}$.

Una partición P en $[a,b]$ es un conjunto finito de puntos ordenados de $[a,b]$ siendo el primero a y el último b:

$$P = \{x_i\}_{i=0}^{n} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

El conjunto de particiones de un intevalo lo designamos $\mathcal{P}([a,b])$. Una partición $P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$ diremos que es más fina que otra $P_1 \in \mathcal{P}([a,b])$ si $P_1 \subset P_2$.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada partición $P \in \mathcal{P}([a,b])$

$$M_i = \text{extr sup}\{f(x);\ x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \quad m_i = \text{extr ínf}\{f(x);\ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

llamaremos suma superior $U(P,f)$ y suma inferior $L(P,f)$ a

$$U(P,f) = \sum M_i(x_i - x_{i-1})$$
$$L(P,f) = \sum m_i(x_i - x_{i-1})$$

respectivamente. Tendremos

a) $L(P,f) \leq U(P,f)$ para toda $P \in \mathcal{P}([a,b])$

b) Si P y Q son particiones de $[a,b]$ tales que $P \subset Q$

$$L(P,f) \leq L(Q,f)$$

y

$$U(Q,f) \leq U(P,f)$$

c) Para todo par de particiones P y Q

$$L(P,f) \leq U(Q,f)$$

Se llama integral inferior de Riemann de f a

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \text{extr} \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} L(P,f)$$

e integral superior de Riemann de f a

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \text{extr} \inf_{P\in\mathcal{P}([a,b])} U(P,f)$$

Cuando la integral superior y la inferior coinciden decimos que f es integrable según Riemann y a este valor se le llama integral de Riemann de f. Escribiremos

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^b} f\,dx = \mathcal{R}\int_a^b f\ dx$$

Para compararla con la integral de Lebesgue, consideremos una sucesión de particiones $P_k \in \mathcal{P}([a,b])$ tales que $P_{k-1} \subset P_k$. Si f es integrable según Riemann tendremos cuando $k \to \infty$

$$U_k(P_k, f) \to \mathcal{R}\int_a^b f\ dx \quad L_k(P_k, f) \to \mathcal{R}\int_a^b f\ dx \tag{7.148}$$

pues las sucesiones $U_k(P_k, f)$ y $L_k(P_k, f)$ son monótonas acotadas, tiene límite y este límite tiene que coincidir con el extremo superior e inferior respectivamente.

Ahora para cada P_k definimos las funciones $U : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $L : [a,b] \to \mathbb{R}$ constantes a trozos siguientes $U_k(a) = L_k(a) = f(a)$ y

$$U_k(x) = M_i \quad L_k(x) = m_i \quad (x_{i-1} < x \le x_i,\ i = 1, \ldots, n)$$

Tenemos que la integral de Lebesgue de estas funciones coincide con la suma superior y suma inferior respectivamente, es decir

$$U(P_k, f) = \int_a^b U_k\ dm \quad L(P_k, f) = \int_a^b L_k\ dm \tag{7.149}$$

como P_{k+1} es una partición más fina que P_k, tenemos

$$U_1(x) \ge U_2(x) \ge \ldots \ge f(x) \ge \ldots \ge L_2(x) \ge L_1(x) \quad (a \le x \le b)$$

por lo que existen los límites

$$U(x) = \lim_{k\to\infty} U_k(x) \quad L(x) = \lim_{k\to\infty} L_k(x)$$

Aplicando el teorema de la convergencia monóntona

$$\int_a^b U_k\ dm \to \int_a^b U\ dm \quad \int_a^b L_k\ dm \to \int_a^b L\ dm \tag{7.150}$$

Aclaración: Supongamos primero que $f \ge 0$, entonces $L_k(x) \ge 0$ para todo k y podemos aplicar el teorema. Para las U_k aplicamos el teorema con $-U_k$ en lugar de U_k. Para una f general descomponemos primero la función en parte positiva y parte negativa, $f = f^+ - f^-$.

Juntando los resultados (7.148), (7.149) y (7.150) obtenemos

$$\int_a^b U\ dm = \int_a^b L\ dm = \mathcal{R}\int_a^b f\ dx \tag{7.151}$$

Como $L(x) \le f(x) \le U(x)$ en $[a,b]$, la primera igualdad de (7.151) demuestra que $L(x) = f(x) = U(x)$ en casi todas partes de $[a,b]$. Como L y U son medibles tenemos que f es medible y por tanto f es integrable según Lebesgue y tenemos la igualdad de las integrales.

5.9 Sea un conjunto compacto $K \in \mathbb{R}^d$. Dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe un abierto $V \supset K$ tal que

$$\mu(V - K) < \varepsilon$$

Si K es un compacto de $\mathbb{R}^d$ es cerrado y acotado. Por tanto existe una bola abierta B que contiene a K. Por tanto $\mu(K) \leq \mu(B)$. Tomemos $G = V \cap B$. Tenemos que G es un abierto acotado pues $V \cap B \subset B$. Además $G \supset K$. Y también $\mu(G - K) < \varepsilon$ pues $\mu(G - K) \leq \mu(V - K) < \varepsilon$ ya que $G - K \subset V - K$

5.10 Razonamos como en el ejercicio 4.2 parte b), teniendo en cuenta para la propiedad $P3$ que trabajamos con clases de funciones, donde las funciones de una misma clase difieren en conjuntos de medida nula. Es decir, si

$$\int_{\Omega} f^2\, dx = 0$$

implica $f = 0$ c.t.p. de Ω según el teorema 5.15

5.11 Seguir los mismos pasos que en el caso $p = 2$

5.12 Seguir los pasos de la demostración de los teoremas 5.23, 5.24 sustituyendo la norma L^2 por la norma L^p.

5.13 Como f_1 es continua y soporte compacto es uniformemente continua y para todo $x \in \text{sop}(f_1)$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe una bola $B(x, \delta')$ de centro x y radio $\delta' > 0$, tal que para todo $y \in (B(x, \delta')$ se tiene

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(\Omega')^{1/p}} \tag{7.152}$$

Sea ahora la d-celda R_x de centro x y diámetro $\delta = \text{mín}\{\delta', d(x, \varphi(\Omega'))\}$ (aquí $\varphi(\Omega')$ designa la frontera de Ω') tendremos a fortiori que (7.152) se cumple para todo $y \in R_x$ y también evidentemente $R_x \subset \Omega'$

Ahora el conjunto de celdas abiertas $\bigcup_{x \in \text{sop}(f_1)} R_x$ recubre $\text{sop}(f_1)$ y por tanto se puede extraer un recubrimiento finito R_i; $i = 1, \ldots, N$ que verifica para todo R_i

$$|\max_{x \in R_i} f_1(x) - \min_{x \in R_i} f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(\Omega')^{1/p}}$$

con las propiedades requeridas.

5.14 Seguir los pasos de la demostración de los teoremas 5.23, 5.24, 5.25

Ejercicios del Capítulo 6

6.1

a) La aplicación T_f está bien definida pues para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene

$$|\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx| = |\int_K f(x)\varphi(x)\,dx| \leq \sup_{x\in K}|\varphi(x)|\int_K |f(x)\,dx < \infty$$

donde K es el soporte de φ.

b) Por otra parte es inmediato ver que T_f es una aplicación lineal.

c) La aplicación T_f es continua: En efecto, sea $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Sea K un conjunto compacto conteniendo los soportes de φ_n y φ,

$$|\langle T_f, \varphi_n - \varphi\rangle| = |\int_\Omega f(x)(\varphi_n(x)-\varphi(x))\,dx| \leq \sup_{x\in K}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\int_K |f|\,dx \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

d) La aplicación lineal

$$\begin{gathered} T : L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega) \\ f \to T_f \end{gathered}$$

que asigna a cada función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ la correspondiente distribución asociada T_f definida mediante (6.16) es inyectiva: Demostraremos que si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{7.153}$$

entonces $f = 0$ c.t.p. en Ω

Según la observación 5.2 basta demostrar que (7.153) se verifica para toda función $\varphi \in C_c(\Omega)$. En efecto, según la observación 5.2 para toda $\varphi \in C_c(\Omega)$ existe una sucesión $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ cuando $n \to \infty$ uniformemente. De hecho existe un compacto $K \subset \Omega$ para el que el soporte de las φ_n y de la función φ está contenido en este compacto. De modo que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $n > n_0$ entonces

$$|\int_\Omega f(x)(\varphi(x)-\varphi_n(x)\,dx| \leq \sup_{x\in K}|\varphi(x)-\varphi_n(x)|\int_K |f(x)|\,dx < \varepsilon\int_K |f(x)|\,dx$$

de modo que si se verifica (7.153) para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $n > n_0$ entonces

$$|\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx| = |\int_\Omega f(x)(\varphi(x)-\varphi_n(x))\,dx| < \varepsilon\int_K |f(x)|\,dx$$

Como $\varepsilon > 0$ es cualquiera y el procedimiento es válido para toda $\varphi \in C_c(\Omega)$ resulta

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega) \tag{7.154}$$

Demostraremos que si se verifica (7.154) entonces $f = 0$ c.t.p. en Ω siguiendo la demostración dada en [3]. Procedemos en dos etapas:

1. Supongamos primero que f verifica $f \in L^1(\Omega)$ y que la medida de Ω es finita. Aplicando el teorema 5.29 sabemos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ tal que $\|f - f_1\|_{0,1,\Omega} < \varepsilon$. De donde utilizando (7.153) tenemos

$$\begin{aligned}
&|\int_{\Omega} f_1(x)\varphi(x)\,dx| = |\int_{\Omega} (f_1(x) - f(x))\varphi(x)\,dx| \\
&\leq \int_{\Omega} |(f_1(x) - f(x))|.|\varphi(x)|\,dx \leq \sup_{x \in sop(\varphi)} |\varphi(x)| \int_{\Omega} |(f_1(x) - f(x))|\,dx \\
&\leq \varepsilon \|\varphi\|_{0,\infty,\Omega}
\end{aligned} \tag{7.155}$$

para toda $\varphi \in C_c(\Omega)$.
Sean ahora,

$$K_1 = \{x \in \Omega;\ f_1(x) \geq \varepsilon\}$$
$$K_2 = \{x \in \Omega;\ f_1(x) \leq -\varepsilon\}$$

Como K_1 y K_2 son compactos disjuntos se puede construir gracias al corolario del teorema de Urysohn 1.1 una función continua

$$u_0(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x \in K_1 \\ -1 \text{ si } x \in K_2 \end{cases}$$

con $|u_0(x)| \leq 1$ para todo $x \in \Omega$. Podemos elegir u_0 de forma que sea de soporte compacto, por ejemplo multiplicando por una función continua con valores en $[0,1]$ que sea nula fuera de un compacto que contenga a $K_1 \cup K_2$ y que valga 1 en $K_1 \cup K_2$. Poniendo $K = K_1 \cup K_2$ tendremos,

$$\int_{\Omega} f_1 u_0\,dx = \int_{\Omega - K} f_1 u_0\,dx + \int_K f_1 u_0\,dx$$

y también

$$\int_K |f_1|\,dx = \int_K f_1 u_0\,dx = \int_{\Omega} f_1 u_0\,dx - \int_{\Omega - K} f_1 u_0\,dx$$

gracias a (7.155) y teniendo en cuenta que $|u_0(x)| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_K |f_1| &\leq |\int_{\Omega} f_1 u_0\,dx| + |\int_{\Omega - K} f_1 u_0\,dx| \\
&\leq \varepsilon \|u_0\|_{0,\infty,\Omega} + \int_{\Omega - K} |f_1 u_0|\,dx \leq \varepsilon + \int_{\Omega - K} |f_1|\,dx
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_1|\,dx &= \int_{\Omega-K} |f_1|\,dx + \int_K |f_1|\,dx \\ &\leq \varepsilon + 2\int_{\Omega-K} |f_1|\,dx = \varepsilon + 2\varepsilon\mu(\Omega)\end{aligned}$$

pues $|f_1| \leq \varepsilon$ en $\Omega - K$. Finalmente

$$\|f\|_{0,1,\Omega} \leq \|f - f_1\|_{0,1,\Omega} + \|f_1\|_{0,1,\Omega} \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon\mu(\Omega)$$

y como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$ concluimos que $f = 0$ c.t.p. en Ω.

2. Consideremos ahora el caso general $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Podemos considerar $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ como unión numerable de conjuntos abiertos Ω_n con $\overline{\Omega}_n$ compacto y $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$. Por ejemplo

$$\Omega_n = \{x \in \Omega;\ dist(x, \Omega^c) > \frac{1}{n} \text{ y } |x| < n\}$$

(Véase figura 5.6) Aplicando el paso anterior a $f|_{\Omega_n}$ tenemos que $f = 0$ c.t.p. en Ω_n y podemos concluir que $f = 0$ c.t.p. en Ω.

e) La aplicación T es continua: Utilizando el teorema 2.12, T es continua si y solo si para toda seminorma $|\langle .\,, \varphi\rangle|$; $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ existe una seminorma $p_K(.)$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$|\langle T(f), \varphi\rangle| = |\langle T_f\,, \varphi\rangle| \leq C p_K(f)$$

En efecto, sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tenemos para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$|\langle T_f\,, \varphi\rangle| = |\int_\Omega f\varphi\,dx| \leq \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |f|\,dx = C p_K(f)$$

donde K es el soporte de φ y $C = \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$.
En particular tendremos: Sea $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ entonces

$$\text{lím}\, T_{f_n} = T_f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

En efecto, si $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ quiere decir que para todo compacto $K \subset \Omega$

$$p_K(f_n - f) = \int_\Omega |f_n - f|\,dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

De donde para toda $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$|\langle T_{f_n} - T_f\,, \varphi\rangle| = |\int_\Omega (f_n - f)\varphi\,dx| \leq \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |f_n - f|\,dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

que es lo mismo que decir

$$\lim_{n\to\infty} T_{f_n} = T_f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

6.2 H es una función de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Llamemos T_H a la distribución asociada a la función de Heaviside, es decir

$$\langle T_H, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$$

La derivada de la distribución T_H es la distribución que para todo $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ verifica

$$\begin{aligned}\langle T_H', \varphi\rangle &= -\langle T_H, \varphi'\rangle\\ &= -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = -\big(\varphi(\infty)-\varphi(0)\big)\\ &= \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle\end{aligned}$$

T_H' es por lo tanto la distribución δ de Dirac.

6.3 Sea T_f la distribución asociada a f.

a)

$$\begin{aligned}\langle T_f', \varphi\rangle &= -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx\\ &= -\int_{-\infty}^{-1} \varphi'(x)\,dx + \int_{-1}^{0} x\varphi'(x)\,dx - \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx\end{aligned}$$

Calculamos cada uno de los términos,

$$\begin{aligned}&-\int_{-\infty}^{-1} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(-1)\\ &\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)\,dx = x\varphi\,|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx = \varphi(-1) - \int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx\\ &-\int_0^1 x\varphi'(x)\,dx = -x\varphi\,|_0^1 + \int_0^1 \varphi(x)\,dx = -\varphi(1) + \int_0^1\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

De donde finalmente,

$$\begin{aligned}\langle T_f', \varphi\rangle &= -\varphi(-1) + \varphi(-1) - \int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx - \varphi(1) + \int_0^1\varphi(x)\,dx\\ &= -\int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx - \varphi(1) + \int_0^1\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

Introduciendo la función

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\in]-\infty,-1[\\ -1 & \text{si} \quad x\in[-1,0[\\ 1 & \text{si} \quad x\in[0,1[\\ 0 & \text{si} \quad x\in[1,\infty]\end{cases}$$

y su distribución asociada T_g, podemos escribir para toda $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_f',\varphi\rangle=\langle T_g,\varphi\rangle-\langle\delta_1,\varphi\rangle$$

donde δ_1 es la distribución de Dirac en el punto 1. Por lo tanto

$$T_f'=T_g-\delta_1$$

b) Para calcular la derivada segunda de f en el sentido de las distribuciones, derivamos T_f' calculada en el apartado anterior. Tendremos $T_f''=T_g'-\delta_1'$. Para toda $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ escribimos,

$$\begin{aligned}\langle T_f'',\varphi\rangle&=\langle T_g',\varphi\rangle-\langle\delta_1',\varphi\rangle\\ &=-\langle T_g,\varphi'\rangle+\langle\delta_1,\varphi'\rangle\\ &=-\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\varphi'(x)\,dx+\varphi'(1)\\ &=\int_{-1}^{0}\varphi'(x)\,dx-\int_0^1\varphi'(x)\,dx+\varphi'(1)\\ &=\varphi\,|_{-1}^{0}-\varphi\,|_0^1+\varphi'(1)\\ &=\varphi(0)-\varphi(-1)-\varphi(1)+\varphi(0)+\varphi'(1)\\ &=\langle\delta,\varphi\rangle-\langle\delta_{-1},\varphi\rangle-\langle\delta_1,\varphi\rangle+\langle\delta,\varphi\rangle-\langle\delta_1',\varphi\rangle\end{aligned}$$

de modo que finalmente,

$$T_f''=-\delta_{-1}+2\delta-\delta_1-\delta_1'$$

6.4

a) Damos el resultado que se obtiene procediendo como en el ejercicio anterior: Se obtiene

$$T_f'=T_g-\delta_1$$

donde g es la derivada clásica en los puntos en los que es derivable clásicamente, es decir

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\in]-\infty,0[\\ 1 & \text{si} \quad x\in[0,1[\\ 0 & \text{si} \quad x\in[1,\infty]\end{cases}$$

b) La derivada segunda de f en el sentido de las distribuciones es

$$T''_f = T'_g - \delta'_1$$

donde $T'_g = \delta_0 - \delta_1$.

6.5 Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \in]-\infty,-1[\\ 1-x \quad \text{si} \quad x \in [-1,1[\\ 1 \quad \text{si} \quad x \in [1,\infty[\end{cases}$$

El resultado es:

a)

$$T'_f = T_g + 2\delta_{-1} + \delta_1$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \in]-\infty,-1[\\ -1 \quad \text{si} \quad x \in [-1,1[\\ 0 \quad \text{si} \quad x \in [1,\infty \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} T''_f &= T'_g + 2\delta'_{-1} + \delta'_1 \\ &= -\delta_{-1} + \delta_1 + 2\delta'_{-1} + \delta'_1 \end{aligned}$$

6.6

1. Primero observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)h|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\Big)\,dx < \infty$$

pues $f*g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y podemos aplicar la desigualdad de Hölder. Ahora,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} (f*g)h\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)h(x)\,dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)h(x)\,dx\Big)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \check{f}(y-x)h(x)\,dx\Big)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)(\check{f}*h)(y)\,dy \end{aligned}$$

2. Sea $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ y $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, queremos demostrar que para las derivadas en el sentido de distribuciones se verifica

$$\frac{\partial(v*u)}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} * u$$

Tenemos $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Aplicaremos con v y su derivada la propiedad de la primera parte con $p = 2$. Supongamos primero que además u

tiene soporte compacto. Vamos a calcular $\frac{\partial(v*u)}{\partial x_i}$ en el sentido de distribuciones. Más precisamente vamos a ver que

$$\langle\frac{\partial(v*u)}{\partial x_i},\varphi\rangle = \langle\frac{\partial v}{\partial x_i}*u,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

En efecto, para toda $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tendremos,

$$\begin{aligned}\langle\frac{\partial(v*u)}{\partial x_i},\varphi\rangle &= -\langle v*u,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d}(v*u)\frac{\partial\varphi}{\partial xi}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^d}v(\check{u}*\frac{\partial\varphi}{\partial x_i})\,dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d}v\frac{\partial(\check{u}*\varphi)}{\partial x_i}\,dx\end{aligned}$$

Si u tiene soporte compacto y φ tiene soporte compacto $\check{u}*\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y como $v\in H^1(\mathbb{R}^d)$ tenemos

$$\begin{aligned}&\langle\frac{\partial(v*u)}{\partial x_i},\varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^d}v\frac{\partial(\check{u}*\varphi)}{\partial x_i}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial v}{\partial x_i}(\check{u}*\varphi)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}(\frac{\partial v}{\partial x_i}*u)\varphi\,dx = \langle\frac{\partial v}{\partial x_i}*u,\varphi\rangle\end{aligned}$$

donde hemos aplicado en el penúltimo paso de nuevo la primera parte del ejercicio.
Hemos utilizado que u sea de soporte compacto pues en el desarrollo anterior necesitamos que $\check{u}*\varphi$ sea de soporte compacto.
En el caso general procedemos por densidad. Sea $(u_n)_n$ una sucesión de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$ (como en el teorema 5.38). Según lo visto anteriormente,

$$v*u_n\in H^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{y} \quad \frac{\partial(v*u_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}*u_n \tag{7.156}$$

Tenemos $v*u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v*u$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$: En efecto, por una parte $u_n,u\in L^1(\mathbb{R}^d)$ por lo que $v*u_n\in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\frac{\partial v}{\partial x_i}*u_n\in L^2(\mathbb{R}^d)$ y además gracias al teorema 5.35 y la propiedad (5.48)

$$\|v*u_n - v*u\|_{0,2,\Omega} \le \|v\|_{0,2,\Omega}.\|u_n-u\|_{0,1,\Omega}$$

de modo que

$$v*u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v*u$$

en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y con el mismo razonamiento

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} * u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial v}{\partial x_i} * u$$

en $L^2(\mathbb{R}^d)$ pasando al límite en (7.156) obtenemos

$$\frac{\partial (v*u)}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} * u$$

en el caso general.

6.7 Si $x \in E$, está claro que $\tilde{T}(x) = T(x)$, pues podemos siempre elegir la sucesión $(x_n)_n$ donde $x_n = x$ para todo n.

La aplicación $\tilde{T}$ está bien definida: En efecto, supongamos dos sucesiones $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ en E que convergen al mismo límite $x \in \overline{E}$. Tenemos que $(T(x_n))_n$ y $(T(y_n))_n$ son convergentes. Veamos que el límite es el mismo.

$$\|T(x_n) - T(y_n)\| \leq \|T\|.\|x_n - y_n\| \leq \|T\|(\|x_n - x\| + \|y_n - x\|)$$

y pasando al límite cuando $n \longrightarrow \infty$ obtenemos $\text{lím}\, T(x_n) = \text{lím}\, T(y_n)$.

Para la linealidad de T: Dados $x, y \in \overline{E}$, sean $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ dos sucesiones en E tales que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$. Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, basta pasar al límite en

$$T(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda T(x_n) + \mu T(y_n)$$

para obtener la linealidad de $\tilde{T}$.

Para verificar la continuidad de $\tilde{T}$ resulta que como $\tilde{T}$ es lineal la continuidad es equivalente a estar acotada: Como $\|T(x_n)\| \leq \|T\|.\|x_n\|$, haciendo $n \longrightarrow \infty$, resulta $\|\tilde{T}(x)\| \leq \|T\|.\|x\|$. Por lo tanto $\tilde{T}$ es acotada y en consecuencia continua. Además deducimos de lo anterior que $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Si además tenemos en cuenta $T(x) = \tilde{T}(x)$ para todo $x \in E$,

$$\|T\| = \sup_{x\in E;\, x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in \bar{E};\, x\neq 0} \frac{\|\tilde{T}(x)\|}{\|x\|} = \|\tilde{T}\|$$

tenemos $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$, y por lo tanto $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

Falta demostrar que $\tilde{T}$ es única: En efecto, sean $T : \overline{E} \longrightarrow B$ y $S : \overline{E} \longrightarrow B$ dos aplicaciones continuas tales que $T(x) = S(x)$ para todo $x \in E$. Sea ahora $x \in \overline{E}$ y $(x_n)_n$ una sucesión de elementos de E tal que $\text{lím}\, x_n = x$. Tenemos $T(x_n) = S(x_n)$ para todo n y pasando al límite cuando $n \longrightarrow \infty$ por la continuidad de T y S, resulta $T(x) = S(x)$ para todo $x \in \overline{E}$. Observemos que solo hemos utilizado aquí la continuidad de T y S. No es necesaria la linealidad.

6.8

Sea $v \in C^0(\overline{\Omega})$ con $v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r)$, para todo $r = 1, \ldots, N$. Evidentemente $v \in L^2(\Omega)$. Veamos que también las derivadas en el sentido de las distribuciones $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ son también funciones de $L^2(\Omega)$, para todo $i = 1, \ldots, d$. Definimos $v_i \in L^2(\Omega)$ tal que $v_i|_{\Omega_r} = \frac{\partial v}{\partial x_i}|_{\Omega_r}$, para todo $r = 1, \ldots, N$, veamos que $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ en el sentido de las distribuciones. En efecto, para toda función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se tiene:

$$\begin{aligned}\langle \tfrac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi\rangle &= -\langle v, \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle = -\textstyle\int_\Omega v \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} v \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^N \left(\int_{\Omega_r} \tfrac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx - \int_{\partial\Omega_r} v\varphi\eta_i d\sigma \right) = \sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} \tfrac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^N \int_{\Omega_r} v_i \varphi dx = \int_\Omega v_i \varphi dx = \langle v_i, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ y por tanto $v \in H^1(\Omega)$.

6.9

Utilizamos la fórmula de Green 6.12 tomando en el lugar de u su derivada $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, tendremos

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i d\sigma \quad \forall i = 1, \ldots, d \tag{7.157}$$

sumando en todos los términos para $i = 1, \ldots, d$ y reordenando obtenemos el resultado.

Ejercicios del Capítulo 7

7.1

a) Sea $I = (0,1)$ y $H = \{v \in H^1(I);\ v(0) = 0\}$ con el producto escalar inducido por $H^1(I)$. La formulación débil es: Hallar $u \in H$ tal que

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx + gv(1) \quad \forall v \in H \tag{7.158}$$

b) La forma bilineal es el producto escalar en $H^1(I)$. La forma lineal del segundo miembro es lineal y continua (ver el teorema 7.7). El teorema de Riesz-Frechet 4.11 nos da la existencia y unicidad de solución.

c) Como la forma bilineal es también simétrica (es un producto escalar) el problema es equivalente a hallar el mínimo en H de la funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left((v')^2 + v^2\right) dx - \int_0^1 fv\,dx - gv(1)$$

d) Tomando $v = u$ en (7.158) y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta

$$\|u\|_{1,I}^2 \le \|f\|_{0,I}\|u\|_{0,I} + |g|.|u(1)|$$

Como $|u(x)| \le x^{1/2}|u|_{1,I}$ (ver la demostración en el lema 7.1) para $x = 1$ tenemos $|u(1)| \le |u|_{1,I} \le \|u\|_{1,I}$. Lo que completa la demostración pues tenemos $\|u\|_{0,I} \le \|u\|_{1,I}$ y dividiendo por $\|u\|_{1,I}$ obtenemos

$$\|u\|_{1,I} \le \|f\|_{0,I} + |g|$$

que es el resultado buscado con $C = 1$.

e) Seguir los pasos del teorema 7.9.

7.2

a) Sea $I = (0,1)$ y $H_0^1(I) = \{v \in H^1(I);\ v(0) = v(1) = 0\}$ con el producto escalar inducido por $H^1(I)$. La formulación débil es: Hallar $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in H_0^1(I) \tag{7.159}$$

b) La forma bilineal en (7.159) es

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx$$

que es continua pues

$$\begin{aligned} a(u,v) = (u,v)_{1,I} + \int_0^1 u'v\,dx &\le \|u\|_{1,I}\|v\|_{1,I} + |u|_{1,I}\|v\|_{0,I} \\ &\le \|u\|_{1,I}\|v\|_{1,I} + \|u\|_{1,I}\|v\|_{1,I} = 2\|u\|_{1,I}\|v\|_{1,I} \end{aligned}$$

y es elíptica pues

$$a(v,v) = \|v\|_{1,I}^2 + \int_0^1 v'v\,dx = \|v\|_{1,I}^2$$

pues

$$\int_0^1 v'v\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dv^2}{dx}\,dx = \frac{1}{2}(v^2(1) - v^2(0)) = 0$$

La forma lineal en el segundo miembro de (7.159) es continua (véase problema 7.1.2).

c) No es equivalente a un problema de optimización pues la forma bilineal no es simétrica.

d) Tomando $v = u$ en (7.159)

$$\|u\|_{1,I}^2 + \int_0^1 u'u\,dx = \int_0^1 fu\,dx$$

teniendo en cuenta que

$$\int_0^1 u'u\,dx = 0$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\|u\|_{1,I}^2 \le \|f\|_{0,I}\|u\|_{0,I} \le \|f\|_{0,I}\|u\|_{1,I}$$

dividiendo por $\|u\|_{1,I}$ obtenemos el resultado buscado con $C = 1$.

e) La demostración es análoga a la realizada en el teorema 7.4

7.3

a) Ver el lema 7.1.
b) Ver el lema 7.1.
c) En el subespacio de $H^1(I)$ consideramos el subespacio

$$H = \{v \in H^1(I);\ v(0) = 0\}$$

La formulación débil es entonces: Hallar $u \in H$ tal que

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 u'v\,dx + u(1)v(1) = gv(1) \quad \forall v \in H \tag{7.160}$$

d) La forma bilineal asociada al problema es

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 u'v\,dx + u(1)v(1)$$

- Es continua: Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad 7.20 en el lema 7.1 para $x = 1$

$$|a(u,v)| \le |u|_{1,I}|v|_{1,I} + |u|_{1,I}|v|_{0,I} + |u|_{1,I}|v|_{1,I} \le 3\|u\|_{1,I}\|v\|_{1,I}$$

- Es elíptica:

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= |v|_{1,I}^2 + \int_0^1 v'v\,dx + v^2(1)\\
&= |v|_{1,I}^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dx}(v^2)\,dx + v^2(1)\\
&= |v|_{1,I}^2 + \frac{1}{2}v^2(1) + v^2(1) \ge |v|_{1,I}^2 \ge C_1^2\|v\|_{1,I}
\end{aligned}$$

e) La demostración es análoga a la realizada en el teorema 7.9
f) La demostración es análoga a la realizada en el teorema 7.9

7.4

La forma bilineal es:

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'\,dx + k\int_0^1 u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx$$

$a(\cdot,\cdot)$ será elíptica si existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) = \alpha\|v\|_{1,I}^2 \quad \forall v \in H^1(I)$$

Vamos a ver que existe $v \in H^1(I)$ tal que para valores de $k \ge 8/3$, $a(v,v) \le 0$. En efecto, tomemos $v = (1-x)$. Tenemos

$$a(v,v) = \|v\|_{1,I}^2 + k\int_0^1 v'v\,dx$$

sustituyendo el valor de v,

$$\begin{aligned}\|v\|_{1,I}^2 &= \int_0^1 v^2\,dx + \int_0^1 (v')^2\,dx\\ &= \int_0^1 (1-x)^2\,dx + \int_0^1 (-1)^2\,dx\\ &= (x - x^2 + \frac{x^3}{3})\mid_0^1 + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\int_0^1 v'v\,dx = \int_0^1 (-1)(1-x)\,dx = -(x - \frac{x^2}{2})\mid_0^1 = -\frac{1}{2}$$

De donde finalmente para esta v

$$a(v,v) = \frac{4}{3} - \frac{k}{2} = \frac{8-3k}{6}$$

por lo que para $k \geq 8/3$ tenemos $a(v,v) \leq 0$. La forma bilineal no es elíptica para estos valores de k.

7.5

Tomando $v = u$ en (7.32) y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$|u|_{1,\Omega}^2 \leq \|f\|_{0,\Omega}\|u\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}\|u\|_{1,\Omega}$$

Utilizando ahora la equivalencia de la norma $\|.\|_{1,\Omega}$ y la seminorma $|.|_{1,\Omega}$ en $H_0^1(\Omega)$ y simplificando

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{0,\Omega}$$

donde α es la constante de elipticidad.

7.6 Proceder como en el teorema 7.6

7.7 La forma bilineal es simétrica y aplicamos el comentario 4.2.

7.8 Hay que verificar que $H = \{v \in H^1(\Omega);\ v|_{\Gamma_0}\}$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$. Para ello, sea $(v_n)_n$ una sucesión de elementos de H convergente hacia una función $v \in H^1(\Omega)$, de modo que tenemos $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ en $H^1(\Omega)$ y tal que $v_n|_{\Gamma_0} = 0$. Por el teorema de la traza, tenemos

$$\|v|_{\Gamma_0}\|_{0,\Gamma_0} = \|v_n|_{\Gamma_0} - v|_{\Gamma_0}\|_{0,\Gamma_0} \leq C\|v_n - v\|_{1,\Omega} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

resulta $v|_{\Gamma_0} = 0$ y $v \in H$.

7.9 Sea $v \in V$, multiplicamos (7.55)por v y aplicamos la fórmula de Green 6.12 tomando en el lugar de u la función $k_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Tenemos en cuenta (7.56) y sustituimos los valores sobre Γ_1, reordenado obtenemos la formulación débil (7.58)-(7.59).

7.10

En primer lugar observemos que el subespacio $H = \{v \in H^1(\Omega);\ v|_{\Gamma_0}\}$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ (ejercicio 7.8) y que si Ω es un abierto acotado conexo de $\mathbb{R}^d$ con frontera Γ de clase C^1 a trozos y Γ_0 una parte de la frontera de medida superficial no nula, entonces la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ induce una norma sobre el espacio $H = \{v \in H^1(\Omega);\ v|_{\Gamma_0}\}$ equivalente a la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ (teorema 7.17).

Aplicamos el teorema de Lax-Milgram. La forma bilineal es

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot) &: V \times V \to \mathbb{R} \\ u\,,\ v &\to a(u,v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v\, dx + \int_\Omega \vec{b}.\vec{\nabla} u\, v\, dx + \int_{\Gamma_1} \vec{b}.\vec{n}\, u\, v\, d\gamma \end{aligned}$$

y la forma lineal es

$$\begin{aligned} l(\cdot) &: V \to \mathbb{R} \\ v &\to l(v) = \int_\Omega f\, v\, dx \end{aligned}$$

- La forma lineal $l(\cdot)$ es continua pues aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(\Omega)$ tenemos

$$|l(v)| = |\int_\Omega f\, v\, dx| \le \|f\|_{0,\Omega}\, \|v\|_{0,\Omega} \le \|f\|_{0,\Omega}\, \|v\|_{1,\Omega}$$

- La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es continua, en efecto,

$$|a(u,v)| \le |\int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v\, dx| + |\int_\Omega \vec{b}.\vec{\nabla} u\, v\, dx| + |\int_{\Gamma_1} \vec{b}.\vec{n}\, u\, v\, d\gamma|$$

  Mayoremos cada uno de los términos. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\int_\Omega \vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v\, dx| \le |u|_{1,\Omega}\, |v|_{1,\Omega} \le \|u\|_{1,\Omega}\, \|v\|_{1,\Omega}$$

  Para mayorar el segundo término denotemos $B = \sup_{i=1,\ldots,d} |b_i(x)|$, entonces

$$\begin{aligned} &|\int_\Omega \vec{b}.\vec{\nabla} u\, v\, dx| \le B \sum_{i=1,\ldots,d} |\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\, dx| = B\, \|v\|_{0,\Omega} \sum_{i=1,\ldots,d} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{0,\Omega} \\ &\le B\, \|v\|_{0,\Omega} \Big(\sum_{i=1,\ldots,d} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{0,\Omega} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1,\ldots,d} 1^2 \Big)^{1/2} = \sqrt{d}\, B\, |u|_{1,\Omega}\, \|v\|_{0,\Omega} \\ &\le \sqrt{d}\, B\, \|u\|_{1,\Omega}\, \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Y finalmente para el tercer término:

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\Gamma_1} \vec{b}.\vec{n}\, u\, v\, d\gamma| \le \int_{\Gamma_1} (\sum_{i=1,\ldots,d} |b_i|.|n_i|)\, |u|\, |v|\, d\gamma \\
&\le B \int_{\Gamma_1} (\sum_{i=1,\ldots,d} |n_i|)\, |u|\, |v|\, d\gamma \le B \int_{\Gamma_1} (\sum_{i=1,\ldots,d} 1^2)^{1/2} (\sum_{i=1,\ldots,d} |n_i|^2)^{1/2}\, |u|\, |v|\, d\gamma \\
&\le \sqrt{d}\, B \int_{\Gamma_1} |u|\, |v|\, d\gamma \le \sqrt{d}\, B\, \|u\|_{0,\Gamma_1} \|v\|_{0,\Gamma_1} \le \sqrt{d}\, B\, C^2 \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}
\end{aligned}
$$

pues $(\sum_{i=1,\ldots,d} |n_i|^2)^{1/2} = 1$ y donde C es la constante de continuidad del teorema de la traza. Recopilando las mayoraciones anteriores tenemos:

$$
|a(u,v)| \le (1 + \sqrt{d}\, B + \sqrt{d}\, B\, C^2)\, \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}
$$

- La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es elíptica, en efecto

$$
a(v,v) = \int_\Omega |\vec{\nabla} v|^2\, dx + \int_\Omega \vec{b}.\vec{\nabla} v\, v\, dx + \int_{\Gamma_1} \vec{b}.\vec{n}\, v^2\, d\gamma
$$

Por una parte,

$$
\int_\Omega |\vec{\nabla} v|^2\, dx = |v|^2_{1,\Omega} \ge C_1^2\, \|v\|^2_{1,\Omega}
$$

donde C_1 es la constante de equivalencia de la seminorma y de la norma. Por otra parte, aplicando la fórmula de Green (6.12), teniendo en cuenta que $\vec{\nabla}.\vec{b} = 0$ (por tanto $\vec{\nabla}.(\vec{b}v) = \vec{b}.\vec{\nabla} v$ y que $v = 0$ sobre Γ_0

$$
\int_\Omega \vec{b}.\vec{\nabla} v\, v\, dx = -\int_\Omega \vec{b}.\vec{\nabla} v\, v\, dx + \int_{\Gamma_1} \vec{b}.\vec{n}\, v^2\, d\gamma
$$

de donde

$$
\int_\Omega \vec{b}.\vec{\nabla} v\, v\, dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \vec{b}.\vec{n}\, v^2\, d\gamma
$$

y finalmente

$$
\int_\Omega \vec{b}.\vec{\nabla} v\, v\, dx + \int_{\Gamma_1} \vec{b}.\vec{n}\, v^2\, d\gamma = \frac{3}{2} \int_{\Gamma_1} \vec{b}.\vec{n}\, v^2\, d\gamma \ge 0
$$

pues $\vec{b}.\vec{n} \ge 0$ sobre Γ_1, por tanto

$$
a(v,v) \ge C_1^2\, \|v\|^2_{1,\Omega}
$$

y la elipticidad queda probada.

7.11 Vamos a mayorar los términos del primer miembro de la desigualdad

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{d} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2} \leq C_2\|\vec{v}\|_{1,\Omega}$$

Tenemos para todo $i,j = 1,...,d$

$$\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)\Big)^2 dx \leq \frac{1}{4}\int_\Omega \Big(\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)^2 + 2\Big|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big|.\Big|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big|\Big)\, dx$$
$$\leq \frac{1}{4}\int_\Omega \Big(2\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)^2\Big)\, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)^2 dx$$

Sumando para todo $i,j = 1,...,d$ tenemos

$$\sum_{i,j=1}^{d} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} \Big(\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)^2 dx\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big)^2 dx + \sum_{i,j=1\,;i\neq j}^{d}\int_\Omega \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big)^2 dx = |\vec{v}|_{1,\Omega}^2 \leq \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2$$

De modo que la constante $C_2 = 1$.

7.12 La forma bilineal es

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \lambda\int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{d}\varepsilon_{kk}(\vec{u})\Big)\Big(\sum_{k=1}^{d}\varepsilon_{kk}(\vec{v})\Big)\, dx + 2\mu\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega \varepsilon_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})\, dx$$

Tenemos por una parte

$$\begin{aligned}
&|\lambda\int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{d}\varepsilon_{kk}(\vec{u})\Big)\Big(\sum_{k=1}^{d}\varepsilon_{kk}(\vec{v})\Big)\, dx| \\
&\leq \lambda\Big(\int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{d}\varepsilon_{kk}(\vec{u})\Big)^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{d}\varepsilon_{kk}(\vec{v})\Big)^2 dx\Big)^{1/2} \\
&\leq \lambda d\Big(\sum_{k=1}^{d}\int_\Omega \big(\varepsilon_{kk}(\vec{u})\big)^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{d}\int_\Omega \big(\varepsilon_{kk}(\vec{v})\big)^2 dx\Big)^{1/2} \\
&\leq \lambda d\Big(\sum_{i,j=1}^{d}\|\varepsilon_{ij}(\vec{u})\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i,j=1}^{d}\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \lambda d\|\vec{u}\|_{1,\Omega}\|\vec{v}\|_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
&|2\mu \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})\,dx| \leq 2\mu \sum_{i,j=1}^{d} \|\varepsilon_{ij}(\vec{u})\|_{0,\Omega}\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega} \\
&\leq 2\mu\Big(\sum_{i,j=1}^{d} \|\varepsilon_{ij}(\vec{u})\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i,j=1}^{d} \|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2} \\
&\leq 2\mu\|\vec{u}\|_{1,\Omega}\|\vec{v}\|_{1,\Omega}
\end{aligned}
$$

donde hemos aplicado el resultado del ejercicio anterior 7.11

7.13

En el caso del problema homogéneo, es decir cuando $\vec{g} = \vec{0}$, aplicamos el teorema 4.26.

En el caso general para la primera desigualdad la demostración es la misma que en el caso homogéneo: Tenemos,

$$\mathcal{L}(\vec{u}, q) \leq \mathcal{L}(\vec{u}, p) \quad \forall\, q \in L_0^2(\Omega)$$

es

$$\int_{\Omega} div(\vec{u})(q-p)\,dx \leq 0 \quad \forall\, q \in L_0^2(\Omega)$$

tomando $q + p$ en el lugar de q,

$$\int_{\Omega} div(\vec{u})q\,dx \leq 0 \quad \forall\, q \in L_0^2(\Omega)$$

tomando $-q$ en el lugar de q

$$\int_{\Omega} div(\vec{u})q\,dx \geq 0 \quad \forall\, q \in L_0^2(\Omega)$$

que junto con la anterior da

$$\int_{\Omega} div(\vec{u})q\,dx = 0 \quad \forall\, q \in L_0^2(\Omega)$$

es decir $b(\vec{u}, q) = 0$ para todo $q \in L_0^2(\Omega)$ o lo que es lo mismo $div(\vec{u}) = 0$. Tenemos pues (7.101). Recíprocamente si se verifica (7.101) obviamente se verifica también

$$\int_{\Omega} div(\vec{u})(q-p)\,dx \leq 0 \quad \forall\, q \in L_0^2(\Omega)$$

La segunda desigualdad es

$$J(\vec{u}, p) + b(p, \vec{u}) \leq J(\vec{v}, p) + b(p, \vec{v}) \quad \forall\, \vec{v} \in K$$

donde $K = \{\vec{v} \in (H^1(\Omega))^d\ ; \vec{v}_\Gamma = \vec{g}\}$. Se trata de buscar el mínimo de una funcional que es suma de una funcional cuadrática $\vec{v} \to \frac{1}{2}a(\vec{v}, \vec{v})$ y de una funcional lineal

$\vec{v} \to b(\vec{v}, p) - \int_\Omega \vec{f}.\vec{v}\,dx$ en el conjunto convexo K. Por tanto es equivalente a hallar $\vec{u} \in K$ tal que

$$a(\vec{u}, \vec{v}-\vec{u}) \geq -b(\vec{v}-\vec{u}, p) + \int_\Omega \vec{f}.(\vec{v}-\vec{u})\,dx \quad \forall\,\vec{v} \in K$$

En este caso el convexo K es un espacio afín, entonces poniendo $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ resulta $\vec{w}|_\Gamma = \vec{0}$ y tenemos

$$a(\vec{u}, \vec{w}) + b(\vec{w}, p) \geq \int_\Omega \vec{f}.\vec{w}\,dx \quad \forall\,\vec{w} \in H_0^1(\Omega))^d$$

tomando $-\vec{w}$ en lugar de $\vec{w}$ en la anterior obtenemos la desigualdad opuesta de donde

$$a(\vec{u}, \vec{w}) + b(\vec{w}, p) = \int_\Omega \vec{f}.\vec{w}\,dx \quad \forall\,\vec{w} \in H_0^1(\Omega))^d$$

que es (7.100). Recíprocamente si se verifica (7.100), obviamente se verifica

$$a(\vec{u}, \vec{v}-\vec{u}) + b(\vec{v}-\vec{u}, p) = \int_\Omega \vec{f}.(\vec{v}-\vec{u})\,dx \quad \forall\,\vec{v} \in K$$

y a “fortiori”

$$a(\vec{u}, \vec{v}-\vec{u}) + b(\vec{v}-\vec{u}, p) \geq \int_\Omega \vec{f}.(\vec{v}-\vec{u})\,dx \quad \forall\,\vec{v} \in K$$

que es equivalente a la segunda desigualdad

$$\mathcal{L}(\vec{u}, p) \leq \mathcal{L}(\vec{v}, p) \quad \forall\,\vec{v} \in K$$

7.14

Como $T \in \mathcal{L}_c(H;V)$ la restricción a V es obviamente lineal y es continua ya que gracias a que la inyección de V en H es continua tenemos

$$\|Tv\| \leq \frac{c}{\alpha}|v| \leq \frac{c^2}{\alpha}\|v\| \quad \forall\,v \in V$$

La restricción $T \in \mathcal{L}_c(V)$ es autoadjunta con respecto al producto escalar $a(\cdot,\cdot)$ en V:

$$a(Tu, v) = (u, v) = (v, u) = a(Tv, u) = a(u, Tv)$$

La restricción $T \in \mathcal{L}_c(V)$ es definida positiva:

$$a(Tv, v) = (v, v) > 0 \quad \forall\,v \neq 0$$

La restricción a V del operador T es un operador compacto: Sea $(u_n)_n$ una sucesión acotada en V, como la inyección de V en H es compacta existe una subsucesión convergente en $(u_\nu)_\nu$ en H. Sea $\lim u_\nu = u \in H$, como T es continua $\lim Tu_\nu = Tu \in V$.

Por tanto dada la sucesión $(u_n)_n$ acotada en V hemos encontrado una subsucesión convergente de $(Tu_\nu)_\nu$ en V. Esto prueba que T como operador de V en V es compacto.

Recopilando, el operador $T : V \longrightarrow V$ es lineal continuo autoadjunto compacto, en consecuencia existe una base hilbertiana en V de vectores propios tales que

$$Tu_n = \mu_n u_n$$

donde los valores propios μ_n forman una sucesión decreciente de números positivos tendiendo a 0 y $(u_n)_n$ es una base hilbertiana en V, con respecto al producto escalar $a(\cdot,\cdot)$, es decir $a(u_n, u_m) = \delta_{n,m}$.

Poniendo $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ y como $a(Tu_n, v) = (u_n, v)$ para toda $v \in V$, resulta

$$a(\frac{1}{\lambda_n}u_n, v) = a(Tu_n, v) = (u, v)$$

de donde

$$a(u_n, v) = \lambda_n(u_n, v) \quad \forall v \in V$$

de modo que (λ_n, u_n) resuelve el problema espectral planteado (7.113)

Los valores propios correspondientes al problema (7.113) son entonces

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$$

son pues una sucesión creciente positiva y $(u_n)_n$ es una base hilbertiana en V con respecto al producto escalar $a(\cdot,\cdot)$.

Por otra parte poniendo

$$e_n = \sqrt{\lambda_n}u_n$$

resulta que $(e_n)_n$ es un base hilbertiana en H. En efecto, tenemos que $(e_n)_n$ es una sucesión ortonormal en H:

$$(e_n, e_m) = \sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}(u_n, u_m) = \frac{\sqrt{\lambda_m}}{\sqrt{\lambda_n}}a(u_n, u_m) = \delta_{n,m}$$

Además el espacio engendrado por $(e_n)_n$ es denso en H: Sea $f \in H$ tal que $(f, e_n) = 0$ para todo n, tendremos $\sqrt{\lambda_n}(f, e_n) = 0$ para todo n, es decir $(f, u_n) = 0$ para todo n, en consecuencia $(f, v) = 0$ para todo $v \in V$ pues $(u_n)_n$ es una base hilbertiana en V; como V es denso en H esto implica que $f = 0$.

7.15 Se aplica directamente el teorema 7.26.

Referencias

1. S.K. Berberian, Introducción al espacio de Hilbert, ed. Teide, (1970)
2. S.C. Brenner, L.Ridgway Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Ed Springer, (2008)
3. H. Brezis, Analyse fonctionelle. Theorie et applicactions, Ed. Masson, (1983)
4. G. Choquet, Cours d'Analyse Tome II. Topologie, Ed. Masson, (1973)
5. G. Duvaut, J.L. Lions, Les inéquations en Mécanique et en Physique, Ed. Dunod
6. Wolfgang Franz, Topología general y algebraica, Ed. Selecciones Científicas, (1968)
7. V.Girault, P.A.Raviart, Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Ed. Springer-Verlag, (1979)
8. Pflauman E., Hunger H.,Análisis funcional, Ed Alhambra (1974)
9. Raviart P.A., Thomas. J.M. , Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Ed. Masson, (1983)
10. Rudin W., Principios de Análisis Matemático, Ed. del Castillo (1967)
11. Rudin W., Análisis real y Complejo, Ed. Alhambra, (1979)
12. Rudin W., Análisis Funcional, Ed.
13. R. Temam , Navier-Stokes Equations, Ed. North-Holland,(1977)
14. Vo-Khac Khoan, Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux derivées partielles, Tome I, Ed. Vuibert (1972)
15. Yosida K.,Functional Analysis, Ed. Springer Verlag, (1965)