La Semántica Formal Estratégica como herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental, un diseño para el nivel educativo superior

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Tesis presentada por Diana Lizbeth Ruiz Rincón para la obtención del grado de Doctora en Filosofía

Director:

Francisco Salto Alemany
Universidad de León

Co-director:

Alberto Cuauhtémoc Mayorga Madrigal
Universidad de Guadalajara

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE EJERCICIOS

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en primer lugar a Francisco Salto Alemany quien, sin haber tenido conocimiento previo de mí o de mi existencia, tuvo a bien aceptar dirigirme en esta tesis y acompañarme durante toda la travesía del Doctorado en Filosofía de la Universidad de Salamanca donde, a través de diversos encuentros presenciales o virtuales, no hizo más que guiarme de la forma más dignificante y cobijarme bajo el manto de su invaluable conocimiento y experiencia.

Agradezco también al Cuauhtémoc Mayorga Madrigal , investigador de mi alma mater, la Universidad de Guadalajara; quien, sabiendo de mí indirectamente hasta el encuentro que nos vinculó como responsables de los programas de filosofía tanto de la Universidad de Guadalajara como de la Universidad Autónoma de Chiapas, por el año 2016; me ha entregado desde entonces, un sinfín de apoyos, consideraciones y temas de mutuo interés, que nos han permitido generar productos de manera conjunta, ya sean proyectos postdoctorales, proyectos de investigación, artículos , capítulos de libros, o incluso la coordinación de los mismos. Por ello como mi codirector y gran amigo le dedico estas líneas.

Las palabras de motivación y de guía disciplinar al inicio de esta aventura por parte de la gran lógica de la Universidad Nacional Autónoma de México, Atocha Aliseda Llera, me impulsaron a seguir adelante con este compromiso motivado por el interés de ofrecer a mis estudiantes un modo más sencillo de aproximarse al conocimiento de la lógica y quizás, en algunos casos, como lo fue el mío en su momento, su estudio e investigación.

Aunque seguramente he omitido sin que sea esta la intención deliberada, muchos varios nombres a quienes debería estar agradecida por los comentarios que en distintos espacios me hicieran en los avances presentados de esta investigación: Ángel Nepomuceno, Hubert Marraud, Carlos Ramírez, Ángel González, Raymundo Morado, entre otros. Sin embargo, dedicaré estas últimas líneas para agradecer a mi amigo y actualmente jefe: Francisco Javier González Rivas, quién a través de puntuales críticas y sugerencias a este trabajo, me ha incentivado a culminarlo, aun cuando creí por un momento, que no llegaría el día.

DEDICATORIA

A la compañera de mi vida Giselle Paulina Domínguez Pérez,
por sostener mi mano y ser mi fuerza.

Este trabajo se lo dedico a quien me lo ha dado todo, incluso la vida misma: a mi señora madre Guadalupe Asunción Rincón Abadía (Q.E.P.D). Que donde quiera que se encuentre, si *Es*, en este universo de posibilidades, reciba el tiempo invertido y se vuelva un tiempo que haga menos dolorosa la espera del encuentro.

A mi padre que bajo su brazo y consejo me sostuvo cuando la angustia me desbordaba y a su esposa que me ha recibido bajo un cobijo materno, les dedico los frutos del acompañamiento: Mario Gabriel Ruiz Orozco y bárbara Cristina Benítez placeres, gracias siempre.

A la Universidad Autónoma de Chiapas, mi hogar y proyecto, le dedico el esfuerzo continuo para devolver todo lo que esta magnífica institución me ha brindado tonto. Al mi a mi Alma Mater, la Universidad de Guadalajara, también dedico este trabajo, espacio al que sé que siempre que lo necesite, puedo volver.

Doña Ely Abadía Sarmiento, a usted un beso al cielo.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se desarrolla en un ambiente lógico e histórico en el que se han presentado ya varios sistemas que se plantean como extensiones de la lógica clásica. En este sentido, nuestra hipótesis toma distancia respecto a las investigaciones cuyo objeto de estudio son los sistemas gramaticales del lenguaje ordinario o direcciones distintas a los axiomas básicos de la lógica clásica.

Hipótesis No. 1: La definición de la semántica formal estratégica para emplearse en la lógica elemental.

Hipótesis No. 2: La evaluación de las virtudes y limitaciones didácticas o pedagógicas de la semántica formal estratégica para emplearse en la enseñanza de la lógica elemental.

Hipótesis No. 3: El diseño y la implementación de herramientas didácticas basadas en la semántica formal estratégica para la enseñanza de la satisfacibilidad de expresiones proposicionales y cuantificacionales.

Hipótesis No. 4 La evaluación de las herramientas en espacios diversos permitirá el contraste de los resultados en el uso de herramientas didácticas basadas en la semántica formal estratégica para la enseñanza de la lógica elemental.

1. Teoría de Juegos y su semántica

Frente a situaciones reales que tienen una estructura de interés, el agente epistémico se desenvuelve a partir de un ´conjunto determinado´ de procedimientos en el contexto de una interacción, a la que denominaremos “juego”; en él deberán comportarse colaborativamente de acuerdo a la preferencia que les caracterice. En este sentido, de la teoría de juegos, emplearemos, para fines didácticos, la semántica estratégica. Esto es, no hablaremos en términos de verdad o falsedad, sino de una estrategia "adecuada". Una estrategia adecuada no es próxima a la noción de estrategia ganadora, en tanto la segunda supondría una dicotomía entre vencedores y perdedores. La semántica estratégica que planteamos, obedece a ser "adecuada" en tanto las condiciones y el contexto así lo permitan, dando como posibles resultados que, un proponente gane en un rol distinto al de inicio, es decir, falsando la sentencia enunciativa en juego; o, que el proponente resulte ganador en el rol de verificador de la fórmula lógica en juego. Aunque también puede darse que, el juego se gane por pura suerte o azar, sin que dependa de una estrategia adecuada, sino porque alguno de los jugadores no eligió adecuadamente sus movimientos.

La propuesta del tránsito de una semántica veritativa-funcional a una semántica basada en la estrategia adecuada, supone un modelo de análisis de las interacciones en el que, dado un conjunto de condiciones y acciones realizables, los agentes epistémicos, esto es, quienes ejecutan un tipo de racionalidad, habrán de interactuar a partir de funciones de utilidad, que sustituirán las funciones de verdad en el análisis lógico. En este sentido, se propone como una vía de acceso para el desarrollo de mecanismos didácticos que faciliten los procesos de enseñanza-aprendizaje de la lógica con lenguaje de orden cero.

En términos generales la relación entre la lógica y las matemáticas nos permite tender puentes en torno al análisis de los procesos demostrativos, y en particular una de las virtudes de la Teoría de Juegos consiste en que las matemáticas empleadas por la Teoría de Juegos plantean problemas y teoremas desconocidos en las matemáticas clásicas o en la física. (Von Neumann y Morgenstern, 1944, p. 346) Suscitándose con ello un amplio abanico de derroteros de investigación.

En torno a la noción de movimiento racional, será empleado de tal manera que, en cada movimiento realizado en el contexto de la interacción, se determine que la acción o movimiento se realizó "racionalmente", por parte del jugador implicado, pues se procuró las mayores ganancias o "ganancias máximas" con el menor esfuerzo posible: máximo-mínimo. La ´máxima ganancia´ se obtiene de las condiciones iniciales, dadas por las relaciones que marcan los conectivos; así, la explicitación de sus principios nos permitirá vincularlo a la lógica proposicional o al lenguaje de orden cero.

Habrá, en este sentido, que identificar tres principios: i) el principio de utilidad marginal, ii) el principio de ingreso marginal y, iii) el principio de beneficio marginal.

i) **Principio de utilidad marginal**: se refiere al beneficio obtenido, aquí, la noción de satisfacibilidad nos permitirá modelar las interpretaciones verdaderas como aquellas estrategias adecuadas.
ii) **Principio de ingreso marginal**: se refiere al ingreso por venta, es decir, al precio como una suma o adición de elecciones en el desarrollo de la estrategia que busca actuar racionalmente.
iii) **Principio de beneficio marginal**: será el resultado del contraste entre las condiciones iniciales (originales en cada juego) menos las elecciones realizadas.

> (…) una particularidad decisiva de todas las teorías que tratan del comportamiento racional; es que parte de la recomendación de comportarse de una manera determinada para poder alcanzar el objetivo propuesto (como por ejemplo de un máxim0 de utilidad o de ganancia), como parte de la suposición de que el individuo controla *todas las variables* de que depende el resultado de su comportamiento. (Von Neumann y Morgenstern, 1944, p. 348)

Suposición de la que no nos serviremos para esta investigación, pues los juegos lógicos a los que nos referiremos, que serán juegos bipersonales de suma cero con información completa, no pueden ser controladas todas las variables por parte de los jugadores, pues en el enfrentamiento, no tendrá lugar la cooperatividad.

Es importante rastrear la relación Juegos (economía) con la lógica. Como una modelación de los razonamientos, de los razonamientos estratégicos.

> El conflicto de interés o situación de toma de decisiones se presenta a todo nivel; en situaciones familiares, en nuestra casa de estudios, en la empresa para la que trabajamos o en el país en el que vivimos. Aunque parezcan demasiado diferentes, la coincidencia que tienen todos los agentes que participan, somos

> nosotros, las personas. Es por esto que la teoría de juegos busca apoyar la toma de decisiones (…), mediante el análisis del comportamiento racional de los sujetos, para conocer las posibles consecuencias de sus determinaciones, sabiendo de antemano que cada uno va a presentar el comportamiento más conveniente para sus intereses. Para lograrlo, analiza los comportamientos -económicos y sociales- utilizando juegos de estrategia. (Castiblanco Clavijo, 2018, p. 10)

Para teorizar respecto a cómo deben conducirse los jugadores para hablar de comportamiento racional,

> La teoría de juegos se adopta como disciplina gracias a los esfuerzos conjuntos del matemático estadounidense John Von Neumann y del economista alemán Oskar Morgenstern, quienes escriben el libro "*Theory of games and economic behavior*" (Teoría de juegos y comportamiento económico), donde se proponen analizar el comportamiento humano, buscando un equilibrio en juegos de suma cero, presentado como el juego en el que las ganancias de un jugador, son exactamente las pérdidas del otro. (Castiblanco Clavijo, 2018, p. 11)

Continuando con que, en los juegos de estrategia,

> (…) cada jugador desea ganar lo más posible; a menudo dispone de muy pocas informaciones (…) además, debe tener en cuenta que los demás jugadores contestarán por sus propias tácticas a la suya y tratarán de descubrir sus intenciones, exactamente como lo hace él mismo; y finalmente el resultado del juego no depende del comportamiento de un solo jugador, sino de la totalidad de ellos y cada uno de ellos *no domina sino una parte de las variables* que en su totalidad determinan el conjunto. (…) El jugador, si quiere ganar, debe comportarse "racionalmente". (Von Neumann y Morgenstern, 1944, p.350)

Axiomas:

1) Cada individuo tiene sus necedades clasificadas en un orden riguroso y,
2) Está en situación de representarse una combinación de por lo menos dos de esas necesidades. (Von Neumann y Morgenstern, 1944, p.351)

Una clasificación de los juegos, presentada por Vitoriano (2007, p. 42), nos permitirá identificar las categorías de análisis necesarias para una re-lectura de la *Teoría de la Elección Racional*, que nos plantea Elisabetta Di Castro (2009) en torno a los juegos.

La teoría de juegos "estudia las consecuencias de la interacción estratégica entre agentes racionales (jugadores) que persiguen objetivos propios dentro de un marco definido –la cooperatividad o no cooperatividad-. […] El juego se salda con una ganancia, positiva o negativa, que percibe cada individuo que ha participado en el mismo". (Blaise Mimbang, 2018, p. 12)

2. Planteamiento del problema

La semántica formal con la que se aprende y enseña lógica tradicionalmente es de naturaleza veritativa: las inferencias lógicamente válidas son aquellas que preservan formalmente la verdad de sus premisas. Este proyecto pretende explorar las virtualidades de una semántica formal distinta, que no está basada en la verdad sino en estrategias ganadoras de juegos o interacciones. Desde esta perspectiva semántica cada fórmula es un juego que puede perderse o ganarse, incluso si es tautológico o si es contradictorio. El antecedente inmediato de las semánticas estratégicas es el trabajo seminal de J. Hintikka (1983) (The game of language. Studies in Game-Theoretical Semantics and Its Applications), en el que el razonador juega frente a la naturaleza, es decir, frente a un rival que puede proponer cualquier contenido. El razonador puede ganar a la naturaleza si aprovecha la forma o estructura de cualquier contenido que la naturaleza proponga. Hintikka (1983) demostró que, determinada semántica estratégica es adecuada para la lógica clásica de primer orden y en la primera década del siglo se han estudiado profusamente diversas semánticas estratégicas (Hintikka & Sandu, 2011), que son alternativas a semánticas veritativas. Una segunda fuente de interés por las semánticas estratégicas proviene de sus aplicaciones en contextos modales, desarrolladas por van Benthem (Kontinen, Müller, Schnoor, y Vollmer, 2015). Ante situaciones reales (fórmulas lógicas expresadas en L_0 o L_1) que tienen una estructura de interés (forma lógica que buscará no caer o generar contradicción), el agente epistémico (quien ejecuta un tipo de racionalidad) se desenvuelve a partir de un conjunto determinado de procedimientos (funciones de utilidad –que sustituyen a las funciones de verdad-) en el contexto de un juego (interacción en la que los agentes epistémicos efectúan una acción o toman una decisión) en el que deberán comportarse, o bien cooperativamente (los juegos cooperativos con información completa, reparten el beneficio obtenido de la interacción, expresados en L0) de acuerdo a la preferencia (estrategia –descripción total del comportamiento de un jugador en una situación de interacción) común, o bien no cooperativamente (los juegos no cooperativos con información completa buscan, individualmente, obtener la mayor utilidad).

Respecto a la enseñanza de la lógica, podemos definir al juego como una interacción, lo que nos permitirá entonces relacionar a la interacción de tipo comunicativa o comunicacional con el dos (o más) agentes epistémicos habrán de comportarse, en este caso, colaborativamente. Así, podríamos afirmar que jugar es argumentar, por lo que para nuestra investigación se recurre a la teoría de juegos buscando solucionar el problema del "comportamiento racional".

> Aunque las aplicaciones mejor estudiadas de la teoría de juegos suponen que los agentes (personas, empresas, gobiernos, etc.) racionales (capacidad de razonamiento y de cálculo para identificar las acciones y estrategias que les conducen a resultados más deseables, es infinita) en otros casos los jugadores no necesitan ser personas ni grupos (pueden incluso ser programas de computador o minúsculos seres vivos), y tampoco necesitan ser racionales. (Cerdá Tena y otros, 2004, pág. 2)

El juego como interacción abre también derroteros de investigación que pueden llevarnos a pesquisas en torno a las interacciones argumentativas, a través del estudio de las estrategias y su modelación; así como a aproximaciones a los procesos argumentativos en contextos de competencia o cooperación.

3. Tesis

Defiendo que, la semántica formal basada en las formas del fin buscado en juegos o interacciones, es un método eficiente para la construcción de una propuesta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental, en la que ante situaciones reales –sentencia como actividad enunciativa- que tienen una estructura de interés, el agente epistémico se desenvuelve a partir de un conjunto determinado de procedimientos en el contexto de un juego en el que deberá actuar de acuerdo al rol que vaya a desarrollar; donde la decisión habrá de entenderse como un modo de probar la satisfacibilidad en una fórmula en juego.

Para comprender de mejor manera que la denominada Semántica Formal Estratégica posee un valor didáctico para la enseñanza de la lógica elemental, en la que ante situaciones reales –sentencia como actividad enunciativa- que tienen una estructura de interés, el agente epistémico se desenvuelve a partir de un conjunto determinado de procedimientos en el contexto de un juego en el que deberá comportarse, o bien cooperativamente de acuerdo a la preferencia común, o bien no cooperativamente; se precisarán los parámetros de la racionalidad estratégica, donde la decisión habrá de entenderse como un modo de probar la satisfacibilidad en una fórmula en juego.

La hipótesis general expone que: *Si en un juego basado en estrategias ganadoras como formas del fin buscado el movimiento es racional, entonces la Semántica Formal Estratégica constituirá un método eficiente para la enseñanza de la lógica elemental.*

Las hipótesis particulares exponen que:

i. Si la lógica elemental enseñada desde su enfoque sintáctico es problemática, entonces podemos partir del enfoque semántico basado en la Teoría de Juegos.
ii. Si la Teoría de Juegos fundamenta la elección racional, entonces se postula la importancia del razonamiento estratégico.

iii. Si definimos el razonamiento estratégico como un acto o movimiento dirigido que, se corresponde con la forma del fin buscado, entonces podemos representarlos como un conjunto de reglas estratégicas.
iv. Si las reglas estratégicas articulan la Semántica Formal Estratégica, entonces pueden emplearse como método eficiente para la enseñanza de la lógica elemental.

Planteando como objetivos de investigación:

(i) Reconocer que el enfoque semántico basado en la teoría de juegos constituye una alternativa a las dificultades en la enseñanza tradicional de la lógica elemental.
(ii) Determinar si la teoría de juegos fundamenta la elección racional que postula la importancia del razonamiento estratégico.
(iii) Estudiar al razonamiento estratégico como un acto o movimiento dirigido, factible de simplificación en un conjunto de reglas.
(iv) Evaluar si las reglas estratégicas articulan la Semántica Formal Estratégica para emplearse en la construcción de una herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental.

El argumento central de la presente investigación se articula de la siguiente manera:

Si la lógica elemental enseñada desde su enfoque sintáctico es problemática, entonces podemos partir del enfoque semántico basado en teoría de juegos. Si la teoría de juegos fundamenta la elección racional, entonces se postula la importancia del razonamiento estratégico. Por su parte, si el razonamiento estratégico es definido como un acto o movimiento dirigido que se corresponde con la forma del fin buscado o estrategia ganadora, entonces podemos representarlos como un conjunto de reglas estratégicas. Así, si las reglas estratégicas articulan la Semántica Formal Estratégica, entonces pueden emplearse como método eficiente para la enseñanza de la lógica elemental, a partir de una propuesta didáctica. Por lo tanto, si en un juego basado en estrategias ganadoras el movimiento es racional, entonces la Semántica Formal Estratégica es un método eficiente para la enseñanza de la lógica elemental.

4. Aclaraciones

Si bien la Teoría de Juegos ha encontrado diversos campos del conocimiento que emplean sus modelos predictivo-explicativos, como la economía, las relaciones internacionales, la estadística, las matemáticas, etc. Es también una fuerte herramienta conceptual para analizar los comportamientos racionales de estructuras sociales, biológicas y humanas en ámbitos de competencia y/o cooperatividad.

Dado que investigaciones como las de Jaakko Hintikka (1983, 1998, 2011) se han desarrollado en torno al análisis de interacciones en las que se compite, nuestra búsqueda parte de la cooperatividad, buscando así facilitar la apropiación y comprensión de la lógica en estudiantes que se inician en su estudio, a la vez de generar las condiciones que permitan vincular los modelos de análisis que propone esta teoría con investigaciones en torno a la teoría de la argumentación, recordando que, podemos bajo esta narrativa, definir a la argumentación como una interacción comunicativa entre dos agentes epistémicos que ejecutaran un tipo de racionalidad, la estratégica, con el objetivo de lograr un fin común: el consenso o, reducir las diferencias de opinión: disenso.

5. Estrategia

La investigación se ciñe en torno a la Semántica Formal Estratégica como herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica con lenguaje de orden cero para el nivel superior. En este sentido, se ubica el marco narrativo en torno a la Teoría de Juegos, de la que tomaremos su semántica estratégica y desde su formalización, plantearemos un modelo didáctico para la enseñanza de la lógica elemental. Una vez que se cuente con la Semántica Formal Estratégica con L_0, se desarrollará un programa de formación inicial para estudiantes de nivel superior quienes habrán de ejecutar una serie determinada de procedimientos en el contexto de un juego o interacción, en el que deberán comportarse colaborativamente. Ello permitirá realizar un posterior análisis de la estrategia desarrollada para evaluar si se trata de una ejecución adecuada o no.

6. Metodología

La presente investigación de carácter documental, siguiendo una metodología propia se ha determinado por conjuntar en un esquema deductivo, la fundamentación teórica del campo disciplinar, del que se desprendieran los marcos conceptuales que habrían de operar en el desarrollo de la propuesta de una herramienta didáctica pensada para el acompañamiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la lógica elemental.

Para ello, fue necesario establecer un parangón y punto nodal de apoyo teórico que permitiera aproximarnos a un análisis semántico de las estructuras lógicas, razón por la que "*The game of language. Studies in Game-Theoretical Semantics and Its"* de Hintikka (1983) y "*Game-Theoretical Semantics"*, de Hintikka y Sandu (2011), principalmente; dadas las dificultades para la enseñanza de la lógica clásica en contextos en los que la ausencia de una tradición lógico-filosófica consolidada, compromete su aprendizaje efectivo o significativo.

Con el instrumental conceptual de la Teoría de Juegos y, la experiencia de los Juegos Semánticos de Hintikka (2011), se incorporaron las reglas de los *Tableaux*, con un tratamiento adecuado, como medios para realizar pruebas semánticas que permitieran determinar la satisfacibilidad de determinadas sentencias enunciativas; siendo posible recuperar con ello el valor didáctico de la decidibilidad, así como del principio del mini-max.

La definición de la Semántica Formal Estratégica estuvo en todo momento orientada a constituir una herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental. Las posibilidades de su gamificación, así como los posibles derroteros de investigación que la misma provoquen, serán un complemento a las tareas que nos hemos propuesto.

7. Delimitación de la investigación

Si bien el campo de la lógica es sumamente amplio y, los distintos sistemas y modelos lógicos suponen un trabajo de preparación adecuado para el desarrollo de procedimientos e investigaciones que permitan construir más y mejores herramientas para optimizar la forma en la que razonamos, la manera en la que damos y pedimos razones, los modos en los que nos relacionamos e interactuamos en distintos ámbitos, contextos y con distintos tipos de agentes, la investigación se centra en la lógica proposicional o lógica con lenguaje de orden cero en tanto supone, dentro de las lógicas clásicas un conocimiento básico de las reglas, métodos y principios para evaluar argumentos; aunque las lógicas no clásicas antepongan un distanciamiento respecto a los principios lógicos supremos, no dejan de tener relación (de oposición) respecto a éstos.

Por otro lado, la Teoría de Juegos modela diversos tipos de interacciones o juegos: como los juegos que son estrictamente competitivos y se conocen como juegos de suma cero, donde lo que ´pierde´ un jugador, lo ´gana´ otro jugador; juegos en donde se tomas decisiones de forma simultánea o secuencial; hay juegos donde se controla el número de participantes; también juegos en donde se comparte u oculta información; hay juegos estáticos y con horizonte finito o tendientes al infinito; por último, hay juegos no cooperativos y, el tipo de juegos que resulta de nuestro interés, por su valor didáctico-pedagógico: los juegos cooperativos, al que le agregaríamos “con información completa”. Pues en este sentido es preciso que los jugadores conozcan las reglas y de forma colaborativa diseñen una estrategia adecuada para el fin perseguido, demostrar la satisfacibilidad de la expresión en juego.

8. Contenido

El cuerpo de la investigación se organiza en cuatro partes, con un apartado cada una. La introducción permite que el lector pueda conocer las hipótesis, objetivos, alcances y limitaciones de la investigación, con la finalidad de presentar un panorama general que le anticipe sin desvelar, los resultados de la investigación.

La primera parte se encuentra integrada por la presentación del marco teórico conceptual que emana de la teoría de juegos, siendo posible con ello situar el desarrollo de la propuesta de la Semántica Formal Estratégica; lo que da seguimiento a la hipótesis i) que sostiene que, si la lógica elemental enseñada desde su enfoque sintáctico es problemática, entonces podemos partir del enfoque semántico basado en la Teoría de Juegos.

En esta primera parte, denominada: “Contexto Teórico-Conceptual”, planteamos las nociones de juego y jugadores en el marco de la racionalidad estratégica; iniciando por el concepto de decisión y su relación con la decidibilidad, nos dirigimos al contexto del razonamiento para llegar a la idea de razonamiento estratégico de los jugadores; aspecto que nos ha permitido arribar a la idea de la Forma del Fin Buscado (FFB).

La segunda parte, se desarrolla propuesta de la Semántica Formal Estratégica, dando atención a las hipótesis ii) y iii), que suponen que: si la Teoría de Juegos fundamenta la elección racional, entonces se postula la importancia del razonamiento estratégico; y que si definimos el razonamiento estratégico como un acto o movimiento dirigido que se corresponde con la forma del fin buscado, entonces podemos representarlos como un conjunto de reglas estratégicas. A partir de la justificación de las reglas basada en los antecedentes de la Teoría de Juegos Semánticos de Hintikka (1983), se construye la SFE, definiendo sus reglas y planteando su utilidad como soporte para el desarrollo de una herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental.

La tercera parte titulada “Fundamentos y estructura de la propuesta didáctica”, no pretende exponer una fundamentación didáctico-pedagógica exhaustiva; sino que expone algunas dificultades en la enseñanza de la lógica desde un sistema tradicional, así como experiencias previas en el desarrollo de herramientas didácticas que, otorguen plausibilidad a la implementación de los resultados de esta investigación, a su aplicabilidad. Los juegos, nos permitirán probar, en este contexto, no solo que una interacción puede ser ganada o perdida, sino que la estrategia puede ser adecuada o no.

Como cuarta y última parte, la "Presentación del Material Didáctico", nos acerca a nuestra cuarta y última hipótesis, que plantea que, si las reglas estratégicas articulan la Semántica Formal Estratégica, entonces pueden emplearse como método eficiente para la enseñanza de la lógica elemental. En este apartado se presenta la herramienta lúdico-didáctica como tal, sus reglas, una descripción paso a paso para el desarrollo de los juegos y se incorpora el análisis semántico de sentencias enunciativas predicativas. Los ejercicios descritos plantean un acompañamiento en su exposición, la cual se corona con algunos ejercicios a resolver; y la sugerencia de modos de revisión.

Finalmente, los resultados y las conclusiones ofrecen, por un lado, una reflexión sobre la SFE en sí, y por el otro, los alcances de la investigación.

PRIMERA PARTE

APARTADO 1: CONTEXTO TEÓRICO-CONCEPTUAL

Jugadores y decisores: la racionalidad estratégica

El objetivo de este primer apartado denominado: “Jugadores y decisores. La racionalidad estratégica”, consiste en determinar si la teoría de juegos fundamenta la elección racional que postula la importancia del razonamiento estratégico. De esta manera, cuando hablamos de jugadores y decisores, nos referimos a agentes epistémicos que ejecutan una racionalidad estratégica para la obtención de un beneficio, a la que llamaremos “la forma del fin buscado”. Esta estrategia racional es implementada por los jugadores, en el contexto de una partida o interacción, para intervenir en el resultado. La referencia o metáfora del juego permite, de esta manera, simular una situación que puede tener cabida en el ámbito de la realidad; empero, antes de arribar a su definición, debemos esclarecer los términos fundamentales de nuestra investigación.

Más allá de establecer un debate filosófico en torno al razonamiento y los tipos de racionalidad, hemos de puntualizar que la racionalidad estratégica se entenderá preliminarmente como un modo de resolver un conflicto, un conflicto de interés, un conflicto de intención, un conflicto dilemático, e inclusive problemático. De esta manera, la decisión para determinar el curso de acción, habrá de constituir la clave central de este tipo de razonamiento. Un razonamiento que traza desde la meta, un recorrido que deberá realizarse para alcanzar la ganancia esperada, una utilidad o, para nuestros fines, la forma del fin buscado.

Ante un hecho, de carácter dilemático o problemático, esto es, con dos o más posibles resultados, los agentes epistémicos que entran en interacción, lo harán desde la acción decisional justificada en un razonamiento estratégico. A este razonamiento estratégico le sería entonces subyacente un determinado modo de organizar la información de la que se dispone para llevar a cabo el juego o interacción; de modo que, la organización de dicha información será mayormente comprensible desde los ámbitos de la lógica. Esto es, “todos nosotros, supuestos seres racionales, empleamos la lógica cuando razonamos, asimilamos o procesamos la información que recibimos del entorno…" (Manzano y Huertas, 2004, p. 4).

Para situar de mejor manera los ámbitos limítrofes de nuestra investigación, precisaremos que, Jaakko Hintikka y Gabriel Sandu, en el capítulo titulado "¿Qué es la lógica?", que se encuentra en el libro coordinado por María José Frápolli Sanz bajo el título "Filosofía de la Lógica", plantean que, una "distinción importante en el contexto de los diferentes aspectos estudiados en lógica proviene de la naturaleza misma del razonamiento lógico (formación de inferencia), como actividad orientada a un objetivo" (2008; 26). Por lo que, en el contexto de esta investigación, habremos de centrarnos en una de las dimensiones de su aproximación, su carácter semántico. Esto es, la relación entre el lenguaje y el mundo, en el marco de su expresividad, sea vista esta desde su posibilidad o imposibilidad. Pues independientemente de dichas discusiones, habremos de centrar nuestra atención en la afirmación que sostiene el presente apartado: si la función descriptiva de la teoría de juegos en torno a la toma de decisiones se fundamenta en el paradigma de la elección racional, entonces podemos sostener la relevancia del razonamiento estratégico frente a un problema de decisión.

1.1 Decisión: de la teoría o la decidibilidad

En torno a la teoría de la decisión podemos encontrarnos literatura cuyo origen nos remite a campos del conocimiento como la economía, las matemáticas, e inclusive la lógica, etc. En este trabajo, nos interesa la teoría de la decisión, por un lado, en tanto problema que permite describir los elementos presentes en el acto o acción de decidir, no como un simple mecanismo de respuesta ante determinado hecho o estado de la naturaleza, sino como un conjunto de criterios inmersos en el análisis de las condiciones iniciales, las vías, los riesgos y el tipo de resultado esperado.

Podemos encontrar desde Aristóteles, en su *Retórica*, planteamientos primigenios sobre la función deliberativa del discurso; sin embargo, en palabras de Vigo (2012),

> (…) el domino de lo que Aristóteles concibe como genuina “acción” y genuina “agencia” se extiende tanto como el dominio del peculiar tipo de capacidad que Aristóteles denomina προαίρεσις[1], vale decir, “elección”, “decisión” o, mejor aún, “decisión deliberada”. (p. 56)

En este sentido, se trata de enmarcar la decisión, sin llegar a la deliberación (justificación discursiva) de los movimientos o acciones que realiza un decisor. Considerando que, el ámbito teórico se distingue por las funciones tanto normativas como descriptivas que lo componen; de esta manera, la búsqueda por fundamentar la relevancia de un razonamiento estratégico en los marcos de la teoría de la decisión, supondría un manejo más eficiente de los alcances descriptivos al situarnos específicamente en los marcos electivos de la decisión. Marcos electivos que demandan un empleo de los recursos racionales para su justificación.

Si, en palabras de Romano (2013), los componentes de un problema de decisión son: “1) los actos que un agente cree que tiene a disposición, 2) los resultados que un agente cree que pueden ocurrir y 3) los estados del mundo que, conjuntamente con el acto ejecutado, determinan un resultado” (p. 416); entonces, podemos afirmar que la racionalidad instrumental se centra en el fin buscado, en tanto que no se trata de pasar por alto, en el seno de nuestra investigación, la acción concreta y específica que va realizándose en el contexto de cada decisión, la cual puede llegar a modificar el fin buscado. De esta manera, los actos de cada agente epistémico, que será el agente decisor, estarán situadas en el ámbito de la teoría de la elección racional, de la que hablaremos más adelante.

Hablar de la decisión, como determinaciones de acción orientadas a un fin buscado encuentran en el campo de la lógica un espacio de análisis sintáctico, pero

[1] *Proaíresis* o preferencia, se trata de los resultados de una acción o movimiento. Esto es, el agente decisor o jugador, actuará racionalmente si opta por una estrategia que le garantice un beneficio óptimo, de acuerdo a la forma del fin buscado.

también semántico y es allí, hacia donde nos dirigiremos; justificando el camino por el valor didáctico que aporta la afirmación de que: un movimiento o acción es racional sí y solo si, el agente epistémico o decisor actúa intencionalmente y, se corresponde con la forma del fin buscado.

Por su parte, el problema de la decisión en lógica, consiste en determinar si lo que se ha definido como una “Fórmula Bien Formada” (FBF), es decir, una expresión del lenguaje abstracto que sigue un conjunto de criterios gramaticales y sintácticos que es compartido por otros, es o no un teorema del sistema. Esto es, determinar si la FBF es recursivamente resoluble; lo que quiere decir que si existe un procedimiento con un número finito de pasos para resolverlo. O si, por el contrario, la FBF resulta recursivamente irresoluble; es decir, que no existe un procedimiento con un número finito de pasos que permita resolverlo. En la primera situación, estaríamos frente a una FBF decidible, lo que representa una solución positiva; mientras que, en el segundo caso, nos encontraríamos con una FBF indecidible, lo que significaría que estaríamos frente a una solución negativa.

Para los fines didácticos, la decidibilidad será fundamental. Dado que se trata de una investigación orientada al desarrollo de una herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental, es necesario aclarar que, al hablar de recursividad, nos referimos a que exista un procedimiento para resolver un problema relacionado con un conjunto determinado de símbolos, por ejemplo, desde la teoría de la recursión, donde se afirma que podemos entender a un problema de decisión como algo que es recursivamente resoluble, siempre y cuando se cuente con una serie de pasos que mecánicamente permitan resolverlo. Es decir que, al interior “del contexto de las lógicas formales, el *problema de decisión* consiste simplemente en determinar si una *fórmula bien formada* cualquiera del sistema es, o no, un teorema.” (Martínez y Piza, 2016, p. 12)

El trasladarnos de la teoría de la decisión al problema de la decisión o la decidibilidad, busca colocarnos en el ámbito de la lógica y situar su didáctica, empero, respecto a los problemas de decisión, podríamos agregar el problema de averiguar bajo qué condiciones una FBF o fórmula lógica sentencia, es satisfacible;

constituyendo justamente este aspecto el que forma parte de las aportaciones de nuestra investigación.

1.1.1 Componentes del problema de decisión, como preparación del juego

Ya hemos establecido que, los componentes o elementos presentes en un problema de decisión son, al menos preparatoriamente, tres. Sin embargo, en la propuesta del análisis de la teoría de juegos en el que Di Castro (2009) analiza las decisiones estratégicas podemos encontrarnos con un cuarto elemento a considerar:

a) El grupo de agentes,
b) La elecciones o estrategias posibles para cada uno de los agentes,
c) El estado del mundo producido por la elección de los agentes, y
d) Las preferencias sobre los estados del mundo de cada uno de los agentes. (2009, p. 58)

De forma sucinta, las relaciones entre ambas caracterizaciones a partir de la identificación de los componentes del problema de decisión, nos permite demarcar una relación comparativa que, lejos de generar divergencias entre las propuestas, nos permite establecer las convergencias, de fundamental importancia, especialmente para la función didáctica de nuestra propuesta.

Tenemos pues, en la siguiente tabla titulada: “Componentes del problema de decisión”; en ella podemos encontrar en la columna izquierda, los componentes: 1) actos a disposición, 2) creencias de consecuencia y 3) resultado. Por otro lado, la columna de la derecha, contendría los componentes: a) grupos de agentes, b) estrategias posibles, c) elección de los agentes y d) preferencias. Ubicados en relación de convergencia, es decir, alineados en filas que relacionan los términos con las funciones descriptivas dentro de las propuestas que caracterizan los componentes presentes en un problema de decisión, según los autores referidos:

Tabla 1: Componentes del Problema de Decisión

Romano (2013)	Di Castro (2009)
	a) Grupo de agentes
1) Actos a disposición	**b) Estrategias posibles**
2) Creencia de consecuencia	**c) Elección de los agentes**
3) Resultado	**d) Preferencias**

El componente distintivo lo propone Di Castro (2009) al hablar del grupo de agentes; pues estos estarían conformados por los jugadores, es decir, los agentes epistémicos y decisores que habrán de interactuar en el contexto de un juego o problema de decisión. Cabe resaltar que, dentro de la figura de agente o jugador, podremos encontrar también a la naturaleza, de la que hablaremos más adelante.

Por su parte, dentro de las convergencias presentes en los elementos conformativos del problema de decisión nos encontramos, en primer lugar, los componentes 1) y b), es decir, los actos a disposición y las estrategias posibles, respectivamente. Ambos componentes, hacen referencia al conjunto de restricciones interdependientes como rutas posibles que constituyen internamente las estrategias del sistema y se asumirán como los roles de cada jugador y que, van a permitir definir las condiciones iniciales para el juego. Ahora bien, los componentes 2) y c), creencia de consecuencia y elección de los agentes, cuentan con la particularidad que los vuelve símiles en tanto que, ambos componentes se refieren a los movimientos que los agentes decisores podrán realizar, sujeta a las características del rol que habrán de desempeñar en el juego en cuestión, ejecutando las reglas específicas para ello. Sobre los roles, hablaremos en el segundo apartado.

Por último, los componentes 3) y d), resultado y preferencia, respectivamente; estarán refiriéndose al resultado de la ruta de acción, es decir, el contraste entre lo que se esperaba demostrar y el resultado obtenido. El resultado, en este estado, estará enmarcado en las preferencias respectivas, siguiendo la búsqueda por llegar a la forma del fin buscado o, dicho, en otros términos, probar la satisfacibilidad de las fórmulas en juego.

En este momento, la racionalidad estratégica en el contexto de la Teoría de Juegos habrá de ofrecernos un conjunto de condiciones para el desarrollo del proceso de la interacción. Es decir, desde la propuesta de un proceso de decisión, basado en diversos autores como Quinn (1980); Mintzberg, Raisinghani y Théorêt (1976), las etapas o fases nos estarían ofreciendo las condiciones conceptuales para la construcción de una Semántica Formal Estratégica y con ello caracterizar los siguientes elementos conformativos en la preparación del juego. En consecuencia, al considerar en la contextualización de la herramienta didáctica basada en una Semántica Formal Estratégica para la didáctica de la lógica elemental, tenemos pues, la distinción de los elementos conformativos a considerar en dicha propuesta.

1.1.2 La decisión ligada a la satisfacibilidad en lógica

Esto es, la teoría de la decisión nos habrá de colocar en un marco conceptual inicial, fundamental para representar las interacciones que tendrán lugar en lo que denominaremos: *Semántica Formal Estratégica*.

Aguado (2007), señala que, al tomar una decisión, ésta tiene lugar a partir de un conjunto determinado de gustos y preferencias y que, las decisiones que son tomadas, lo son en tanto que buscan obtener la mayor utilidad, siempre partiendo de las condiciones iniciales; esto es, del punto de origen, constituido por los fines u objetivos. Este punto de origen puede estar, precisamente en la consideración o delimitación del resultado esperado; es decir, de aquello a lo que están dirigidos los esfuerzos o estrategias diseñadas.

Una manera de iniciarnos en la analítica de la decisión puede ser, como nos propone Aguado, siguiendo una metodología que parta de la “representación gráfica de los problemas de decisión” (2007, p. 5).

En primer lugar, nos encontraremos con distintos “estados de naturaleza”, o lo que denominaremos nosotros como: “condiciones iniciales”. Puntos de partida que nos permiten representar de forma gráfica extensiva, es decir, mediante árboles en los que pueden ubicarse nudos o nodos de decisión, así como nudos o nodos de probabilidad. Detallar las características diferenciadoras de cada uno de ellos no forma parte de los objetivos de nuestra investigación. Sin embargo, es necesario precisar que, a diferencia de la matriz de decisiones, como representación gráfica alterna para los problemas de decisión, los “árboles” nos permitirán representar de mejor forma la Semántica Formal Estratégica a la que dedicaremos páginas posteriores.

Empero, antes de continuar, debemos cerciorarnos de haber explicitado puntualmente los aspectos teóricos relevantes dentro de la Teoría de la Decisión. Éstos suelen presentársenos, colocados frente a una situación, un conjunto de opciones o caminos a tomar, para los cuales, en palabras de Vitoriano: “en su dimensión más básica, un proceso de toma de decisión puede entenderse como una elección de lo “mejor” entre lo “posible” (2007, p. 3). En este sentido, la autora ya nos introduce en una disyuntiva que nos invita a la reflexión y definición de los términos “mejor” y “posible”. Suscitándose con ello una necesidad de esclarecimiento de los términos. En este sentido y, en el marco de la Teoría de Juegos, sitúa de forma elemental los conceptos en un sentido pragmático, en el que el mejor objetivo será aquel que posea un carácter singular y se encuentre claramente determinado; mientras que, en relación a lo posible, serán aquellas vías elegibles de realizarse o llevarse a cabo sin dubitaciones. Así, de forma básica se bosquejan los criterios principales en la toma de decisiones: trazabilidad[2] y factibilidad.

Begoña Vitoriano comienza a describir los tres grandes bloques que superan la descripción clásica del problema de decisión, y en la ampliación de dicha teoría se encuentran:

a) La *teoría de la decisión con incertidumbre o riesgo,* en la que se analiza la toma de decisiones con aleatoriedad o incertidumbre en los resultados, de modo que las consecuencias de una decisión no están determinadas de antemano, sino que están sujetas al azar. (Begoña Vitoriano, 2007, p. 3)

[2] Por trazabilidad entenderemos al mejor objetivo diseñado. Aquel resultado esperado en torno al cual se habrá de diseñar una estrategia, la mejor o más adecuada disponible.

b) La *decisión multicriterio,* en la que, si bien dada una decisión sus consecuencias están perfectamente determinadas, lo que no está definido tan claramente es qué es lo mejor existiendo viarios objetivos en conflicto. (Begoña Vitoriano, 2007, p. 3)
c) La *Teoría de Juegos,* en la que las consecuencias de una decisión no dependen únicamente de la decisión adoptada, sino, también de la que elijan otros jugadores. En este contexto, los problemas de decisión con aleatoriedad del bloque anterior suelen ser denominados juegos frente a la naturaleza. (Begoña Vitoriano, 2007, p. 3)

De esta manera, antes de dirigir nuestros esfuerzos al análisis de los elementos involucrados en el juego, del cual retomaremos su semántica, en una tarea por describir la Semántica Formal Estratégica como herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental, a partir de un diseño para el nivel educativo superior.

No dejemos pues, de revisar el problema de la decisión, ahora desde un punto de vista lógico: para Mosterín,

> "Desde un punto de vista lógico nos interesan especialmente los problemas que se plantean a nivel lingüístico […], es decir, problemas relacionados con filas de signos o expresiones sobre un alfabeto determinado". Agrupándolos en tres problemas principales: "problemas de computación, problemas de decisión y problemas de generación" (1973, pp. 5-6).

Definiendo al problema de decisión como "aquellos en que se nos pide que averigüemos si una determinada expresión tiene cierta propiedad[3] (o pertenece a un cierto conjunto) o si varias expresiones están en una determinada relación[4]". Determinar, en un sentido veritativo-funcional si determinada expresión o afirmación es o no es el caso, es un problema de decisión. A esto continua Mosterín:

---

[3] Veritativa funcional, o que pertenezca al conjunto de las tautologías, aquellas que bajo cualquier interpretación serán siempre verdaderas.
[4] Proposicionalmente estas relaciones estarán determinadas por los conectivos lógicos, tanto diádicos como monádico.

> También son problemas de decisión el problema de averiguar (o decidir) si una determinada fórmula de la lógica sentencial –o proposicional- es una tautología o no, o si una determinada formula de la lógica de primer orden es (lógicamente) válida o no, o si una determinada fila de signos del alfabeto de nuestra lengua constituye una oración castellana gramaticalmente correcta o no, etc. (1973, p. 6)

Respecto al problema de la decisión en la lógica de predicados, Mosterín refiere que el problema de la decisión puede plantearse respecto a la validez o la satisfacibilidad, de acuerdo al objetivo que se persiga; esto es, ya se trate de una regla o conjunto de reglas que nos permitan decidir el "conjunto de todas las sentencias válidas o de las sentencias satisfacibles" (1973, p. 7), en donde al solucionar cualquiera de las dos, se soluciona la otra y viceversa. Y líneas adelante nos precisa: "Una fórmula ϕ es satisfacible si y sólo sí su negación, $\neg\phi$, no es válida" (1973, p. 7) (T. de completud), "una fórmula ϕ es válida si y sólo sí su negación, $\neg\phi$, no es satisfacible" (1973, p. 7) (T. de Correctud). En este sentido, es posible ubicar que, para Mosterín, "el problema de la decisión se entiende en el sentido de la decisión respecto a la satisfacibilidad" (1973, p. 7); esto es, respecto a su interpretación, a su semántica.

Por otro lado, aunque Hilbert reconoce el valor del problema de la decisión en la lógica de primer orden, no es sino Church quien, en 1936 lo desarrolla en un sentido negativo, esto es, demostrando la indecibilidad de la lógica de predicados, que en palabras de Mosterín precisaría: "No hay (no puede haber) un algoritmo para decidir de cada sentencia dada si es satisfacible o no, o si se prefiere, la función característica del conjunto de sentencias satisfacible no es computable (o recursiva)" (Mosterín; 1973, p. 7).

De esta manera, el problema de la decisión, en lógica, estaría ligada a la satisfacibilidad de las fórmulas o sentencias expresadas formalmente, por lo que más allá de las investigaciones dirigidas a demarcar las clases de sentencias decidibles de las indecidibles, debemos recordar que el objeto de nuestra investigación, tiene más bien un valor didáctico. Esto es, en tanto recurso que permita proponer formas alternativas para la enseñanza de la lógica elemental, empleando para ello la analogía del juego, a manera de representación de un problema de decisión.

La relación de nuestra investigación con el espacio teórico de la decisión, tendrá lugar desde la noción de juego como interacción; en el que dicho conjunto de interacciones habrán de ser aquellas desde la que los agentes epistémicos habrán de desplegar sus estrategias, basadas en un razonamiento estratégico. Recordemos pues que, desde el apartado introductorio, cuando planteamos las nociones elementales de la Teoría de Juegos como una forma de estudiar el comportamiento racional, centrándonos en el estudio de las "situaciones de interdependencia; situaciones en las que tanto las acciones que realicen los individuos como los resultados que quepan esperar de ellas dependen de las acciones que otros puedan llevar a cabo" (Aguado Franco, 2007, p. 51); logrando, de esta manera, bosquejar el establecimiento de la antesala para la justificación del tipo de juego al que habremos de apelar, así como la teoría del aprendizaje desde donde basaremos la fundamentación del diseño de la herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental.

1.1.3 Hacia el valor didáctico de la decidibilidad

El plantear el tema del paso de la teoría de juegos al problema de la decisión que este enmarca, se ha hecho con la finalidad de resaltar el valor didáctico de la decidibilidad. Esto es, el llevar a cabo un juego como problema de decisión que permita resolver, mediante un numero finito de pasos si una cierta sentencia o FBF es satisfacible; es decir, si una fórmula en juego, tiene al menos una estrategia ganadora que fundamente un tipo de preferencia sobre otra.

Por valor didáctico asumiremos entonces, a aquel conjunto de propiedades que permitan trasladar contenidos formativos o educacionales a los agentes involucrados de forma tal que se reconozca en éstos la capacidad de captar, comprender y aplicar los modelos ofrecidos a situaciones similares, acumulando así experiencias que permitan eficientar los movimientos o acciones dirigidas y que estos se correspondan con la forma del fin buscado.

En este sentido, el valor didáctico de la decidibilidad, preliminarmente ofrece tres criterios que nos permiten establecer el carácter de la revisión en torno a la relación creencia-evidencia en las interacciones. Esto es, la racionalidad presente en la conjunción entre las reglas que determinan los movimientos y restricciones, respecto a los resultados de juegos previos. En primer lugar, las acciones factibles, constituidas por las reglas de formación y representación de la interacción; en segundo lugar, nos encontramos con las creencias racionales, dichas creencias serán descritas en el segundo apartado de esta investigación, como las reglas semánticas que habrán de regular los movimientos y marcar las restricciones interdependientes entre los agentes decisores. Por último, las preferencias viables, que se conformarán por los resultados de la ruta de acción, en el contraste entre la forma del fin buscado y el resultado obtenido.

El contar, entonces, en un juego con un número finito de pasos, permite centrarnos en un método de enseñanza a través del cual podemos vincular la práctica docente y la didáctica, en contenidos que suelen dificultarse para los estudiantes de nivel superior, específicamente en el grado de filosofía. Considerando entonces que,

> La docencia como práctica profesional y la didáctica como el puente entre los contenidos y la intencionalidad es el enfoque que nos propone la otrora escuela nueva. Y su valor recordemos, radica precisamente en el cambio de direccionalidad: debemos ir a ellos, considerar a los sujetos de la educación. Aunque, si bien el modelo centrado en el estudiante, se coloca como un esfuerzo por presentar un enfoque sostenible, ello resulta inviable ante la insistencia de mantener una centralidad. La centralidad genera fronteras, construye periferias que norman, legitiman e institucionalizan unas formas o elementos sobre otros. El esbozar una centralidad, supone relegar a los otros actores que participan de los procesos de enseñanza-aprendizaje; la centralidad desconecta, verticaliza las relaciones de poder, ejerce un dominio

> entre los agentes epistémicos que entran en una relación dialéctica en el ámbito áulico dentro de los espacios educativos, ya sean formales, no formales, informales, mixtos, mediados por tecnologías, etcétera. (Ruiz-Rincón, 2022, 153)

Así, la insistencia en el valor didáctico de la decidibilidad, estriba en que a partir de la consideración de un numero finito de pasos, es factible diseñar una herramienta didáctica que facilite la comprensión de las reglas semánticas que ofrecen una vía de acceso al estudio de las inferencias no ya desde su estructura, sino de los resultados que las relaciones que los conectivos lógicos van generando. Para no perder a nuestro lector en los detalles y dificultades en la enseñanza de la lógica, adelantamos que, en nuestro tercer apartado, lo dedicaremos a la enseñanza de la lógica y la propuesta didáctica específica de nuestra investigación.

1.2 El contexto del razonamiento

Si bien hemos realizado algunas precisiones respecto a la teoría de juegos y, sin el afán de superar los alcances de nuestra investigación profundizando en torno a ésta, es inevitable presentar el tipo de interacción o juego específico con el que estaremos desarrollando la herramienta y con ello justificar su valor didáctico. Pero previo a su elucidación, resulta menester contextualizar la racionalidad estratégica dentro de la Teoría de la Elección Racional (TER).

1.2.1 Teoría de la Elección Racional

Como toda teoría, la TER goza de dos dimensiones, una normativa y otra explicativa. Esto es, un marco que define idealmente el modelo y las relaciones que representa, a través de los denominados *imperativos condicionales*[5]; mientras que la segunda ofrece un contexto funcional en el que tiene lugar la caracterización de los elementos que constituyen un movimiento o acto racional. Di Casto nos plantea que, “la *racionalidad* de un acto depende de su relación con los fines y las creencias, y la *racionalidad* de una creencia de su relación con las evidencias [resultados y/o información de juegos previos] disponibles”. (2009, p. 49)

Tenemos pues, dos modos o estadios de relaciones; por un lado, la relación fines-creencia y, por otro lado, la relación creencia-evidencia. La dimensión normativa de la racionalidad estratégica dentro Teoría de la Elección Racional (TER) nos ofrece pues un parámetro conformativo en tanto nos permite construir una representación esquemática de las relaciones antes señaladas y, desde la caracterización de los elementos que la conforman, nos permitirá arribar a la construcción de una conceptualización que resulte pertinente para los fines de esta investigación.

En este sentido, los fines serán definidos como los objetivos que se persiguen en el despliegue de las estrategias en las interacciones planteadas, es decir, la forma del fin buscado (el resultado esperado en la ejecución del juego). Dichos fines establecen una relación en el contexto de la interacción, con la creencia. Por su parte, la creencia será comprendida como los estados mentales que permitirán diseñar una ruta de acción a partir de un conjunto de reglas, movimientos y restricciones internas del sistema que resultan interdependientes, es decir, restricciones que dependen de las decisiones de los agentes implicados en la interacción o juego.

Si, en la racionalidad paramétrica[6] las restricciones son externas, en tanto es el agente quien se enfrenta a la naturaleza y, por plantearlo de algún modo, el camino o ruta está dado, lo son también las restricciones. Por su parte, para la racionalidad estratégica, las restricciones son internas pues dependen de las decisiones de los

[5] Por imperativo condicional entenderemos la relación de implicación (antecedente y consecuente) que debe cumplirse para no generar invalidez, fundamental para pruebas sintácticas.
[6] Di Castro (2009), sostiene que “En la racionalidad paramétrica, el agente cree que el medio en el que actúa está conformado por objetos y otros agentes que obedecen leyes causales.” (p. 52)

agentes epistémicos, restricciones interdependientes que irán construyendo una ruta en el contexto de la interacción o juego.

La teoría (TER) se ocupa de los medios que despliega el agente decisor para alcanzar sus fines, aquí se trata de "tomar decisiones estratégicamente: es decir, anticipando qué harán los otros agentes, los que, a su vez, también decidirán a partir de lo que harán los demás". (Di Castro, 2009, p. 57) La TER, del que depende la racionalidad estratégica, "también puede emplearse para fines explicativos" (p. 50), en el que se afirma que, la acción o movimiento realizado es racional, siempre y cuando quede evidenciado que: i) el agente decisor actuó intencionalmente y, ii) se corresponden de forma adecuada deseos, creencias y evidencias (forma del fin buscado).

Así, la relación creencia-evidencia, principia por las creencias (como los estados mentales que permitirán diseñar una ruta de acción a partir de un conjunto de reglas, movimientos y restricciones internas del sistema que resultan interdependientes; mencionado líneas arriba) y conduce a la evidencia, conformada por los resultados obtenidos y las experiencias de juegos previos (experiencias que serán de interés para la propuesta didáctica).

Para Di Castro (2009), en este contexto, el dominio de la explicación que ofrece la TER posee tres elementos básicos: i) el conjunto de acciones factibles, ii) el conjunto de creencias racionales y, iii) el conjunto de preferencias viables. Elementos que nos recuerdan los componentes presentes en el problema de decisión.

Ahora bien, a partir de este momento, estamos en condiciones de caracterizar cada uno de estos elementos. Respecto a las acciones factibles, como las reglas de formación y representación; en tanto que entenderemos a las creencias racionales, como el conjunto de acciones racionales que satisfacen las restricciones lógicas, es decir, las reglas semánticas; para finalmente identificar a las preferencias viables, como la jerarquización subjetiva de los resultados esperados de cada acción, es decir, las consecuencias de la estrategia implementada para el logro (o no) de la forma del fin buscado.

Cabe resaltar, en este punto que, “La meta que guía la acción está ausente, todavía no se realiza; solamente se imagina o se representa” (Di Castro, 2009, p. 50). Lo anterior hace referencia a que, la forma del fin buscado, en el contexto de la teoría de juegos, se asocia con la noción de ganancia o utilidad; por lo que, continuando con el planteamiento de la autora, el postergar la gratificación, se refiere a que “el ser humano puede esperar, es decir, rechazar en un momento opciones favorables para acceder más adelante a opciones aún más favorables” (p. 50). Así, actuar racionalmente, habrá de consistir en “elegir la acción que se cree llevará al *mejor* resultado posible [según lo que se espera.].” (p. 51)

Lo anterior implica i) identificar una meta, fin u objetivo; que será la preferencia establecida, y ii) el control de variables implicadas en la realización de la misma. En este sentido, en una racionalidad estratégica, la acción intencional es racional cuando optimiza la estrategia. Dicha racionalidad estratégica se despliega en juegos con o sin estrategia dominante; en el primer caso puede contarse con resultados máximos (óptimos) o mínimos (subóptimos), mientras que, en el segundo caso, se puede contar o no con una solución.

Como acción (o movimiento) dirigida desde una racionalidad estratégica (en tanto optimizadora), trabajaremos con juegos con estrategia dominante que buscan soluciones óptimas. Por estrategia dominante, entenderemos entonces a aquella estrategia óptima de un jugador que es independiente a las acciones de los demás. Al respecto, hablaremos más a profundidad en el siguiente apartado. Sin embargo, Di Casto, plantea que es posible jugar respecto a la verdad de ciertos enunciados, es decir, “el agente al actuar realiza una serie de apuestas sobre un conjunto de enunciados y sus posibles relaciones”. (2009, p. 57) Donde los enunciados, sentencias o fórmulas (FBF) a las que nos referimos serán las condiciones iniciales para la interacción o juego. Haciendo patente, pues, la relación presente en torno a la lógica, los juegos y la racionalidad estratégica.

El modelo, como ideal que representa un estado del mundo o cosas, serán los juegos no cooperativos con información completa, modelo que buscará armonizarse con el aprendizaje colaborativo para el posterior diseño de la estrategia didáctica para la enseñanza de la lógica elemental.

1.2.2 El teorema del mini-max desde la Teoría de Juegos

Pues bien, se ha mencionado páginas atrás que, la Teoría de juegos es una teoría que fue creada por John Von Neumann y en la que el matemático y economista Oskar Morgenster contribuyó también a la axiomatización de la teoría; mientas que Von Neumann fue el responsable de la formalización de este tipo de interacción, en la que el concepto de juego adquiere una dimensión no necesariamente recreativa, sino que permite modelar las interacciones entre dos o más agentes epistémicos que, desde los parámetros de la racionalidad (estratégica) habrán de desarrollar una partida o, dicho en otros términos, realizar una serie de acciones intencionales de acuerdo al el fin esperado.

Dicha teoría, habrá de tratar de definir estrategias y realizar la formalización de la toma de decisiones frente a un problema específico. Esta teoría, caracteriza el perfil ideal de jugador como egoísta, entendiendo este adjetivo no en un sentido peyorativo, sino como una figura que busca eficientar el proceso, buscando, racionalmente, obtener el mejor resultado posible, es decir, ganar la partida o juego.

Así, en la búsqueda del mejor resultado, nos encontramos, al menos inicialmente y, para los objetivos que persigue la presente investigación; con los juegos bipersonales de suma cero. Aquí,

> (…) un juego es una dinámica en la que intervienen dos o más jugadores y que se desarrolla en un marco de reglas bien definidas. Los participantes pueden tomar decisiones que configuren un tipo particular de estrategia capaz de interferir en el desarrollo del juego. El objetivo del juego es obtener algún tipo de beneficio (…) (Gracián Rodríguez, 2017, p. 73)

En este sentido,

> Los juegos bipertonales de suma cero son todo o nada, a muerte, de manera que el juego termina cuando uno de los jugadores gana y el otro pierde. Dicho de ota forma, no existe la posibilidad de que los jugadores colaboren entre sí. (Gracián Rodríguez, 2017, p. 74)

En virtud que, la forma del fin buscado se asocia con la noción de ganar y ésta con la de estrategia ganadora, podemos puntualizar que en una interacción o juego, los agentes decisores habrán de desplegar sus acciones o movimientos en beneficio propio, esto es, cada uno buscará obtener el mayor beneficio o la menor pérdida posible. Dado que, el juego termina cuando alguno de los agentes involucrados presenta una estrategia ganadora que le lleva a lograr la forma del fin buscado o su mayor aproximación.

Lo anterior permite precisar que la regla del *mini-max* "garantiza que siempre hay una estrategia óptima disponible para un jugador [; pues] La decisión de cada uno, al igual que la recompensa, depende de la decisión de todos". (Di Castro, 2009, p. 48) Es decir, que siempre será posible que, en una interacción bipersonal, alguno de los agentes involucrados desarrolle una estrategia ganadora siempre y cuando ésta le reporte la mayor ganancia o la menor pérdida, respecto a la forma del fin buscado.

El valor mínimo, en este sentido, y para los fines que se tienen en la presente investigación será el 0 (cero), es decir, el mayor mínimo; mientras que el valor máximo será el 1 (uno), es decir, el menor máximo. Aquí es posible observar el planteamiento que Van Neumann y Morgenstern (1953) desarrollan en *Theory of Games and Economic Behavior*, respecto al que será denominado como el Teorema del Minimax.

Para que el juego se realice siguiendo el teorema del minimax, no debe perderse de vista que debe cumplir con una serie de requisitos: en primer lugar, no pueden participar (frente al problema de decisión) más de dos jugadores o agentes; en segundo lugar, la toma de decisiones se realiza por turnos (aunque estos no necesariamente habrán de ser alternadamente, pues, las reglas semánticas que precisaremos en el siguiente apartado las definirán); en tercer lugar, no debe dejar de considerarse que, el juego debe desarrollarse siempre con información completa, esto es, que ambos jugadores conozcan todo lo que sucede o va sucediendo en el juego, sin ocultarse ninguna información relevante a los movimientos realizados y restricciones posibles; en cuarto y último lugar, deberá tratarse de un juego de suma cero, es decir, lo que gana uno lo pierde otro (teniendo como particularidad que, en nuestra propuesta de herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental, no podrá presentarse como tal, la posibilidad de empate).

1.2.3 El valor didáctico del principio del minimax

Así como abordamos el valor didáctico de la decidibilidad en el punto 1.1.3., resulta menester señalar a su vez, el valor didáctico de lo que consideraremos como el principio del minimax. Si bien la demostración matemática del teorema del minimax que Von Neumann demostrará en 1928 (Morgenstern, 1955) ha resultado en un parteaguas en el estudio formal de los juegos de estrategia y sus posteriores ramificaciones. Para nuestros objetivos, habremos de recurrir al minimax en la modalidad de principio, en tanto, se plantea como criterio para "comparar las *peores consecuencias* y escoger la opción cuya *peor consecuencia* sea mejor que la *peor consecuencia* de las otras opciones". (Di Castro, 2009, p. 54) Como principio, el minimax ofrece las condiciones semánticas para afrontar la tradicional semántica veritativa funcional de la lógica clásica; a saber: verdadero y falso.

El principio del minimax nos aproxima a una semántica estratégica, donde hablaremos de estrategia ganadora y sus criterios; contando con los valores relativos al rol década jugador. Es decir, en cada juego o interacción bipersonal de suma cero, se contará con un proponente y un oponente. Las funciones a desempeñar en cada uno de los roles habrán de ser establecidos de manera más exhaustiva en el siguiente apartado; sin embargo, debe considerarse que, el proponente será el responsable de buscar una estrategia que permita verificar si la fórmula o expresión en juego constituye una estrategia ganadora; mientras que el oponente buscará falsar o evitar que el verificador gane.

El principio del minimax en su valor didáctico, nos permite establecer el mínimo como 0 (cero) y el máximo como 1 (uno); esto es, los rangos límite de valores se encontrarían se la siguiente manera:

Min = 0 = falsador

Max = 1 = verificador

Como un principio, el minimax permite la aproximación conceptual a los principios de la lógica clásica como: identidad, no contradicción y tercero excluso, entre otros. Por ejemplo, no admite otros valores que no sean: 1,0; de acuerdo a los criterios del principio del tercero excluso, eliminando así las posibilidades de un empate que, dicho sea de paso, habría de contravenir los rasgos del juego de suma cero, como un juego que establece que la ganancia de un jugador en un juego bipersonal, supone la pérdida del otro jugador.

Didácticamente hablando, el establecimiento de los elementos constitutivos de la herramienta didáctica que habrán de permitir estructurar la experiencia de aprendizaje de acuerdo a objetivos específicos como, en este particular caso, la enseñanza de la lógica elemental; es decir, de la lógica clásica, desde la definición de los roles hasta la asignación de los valores en juego para el desarrollo de la interacción y el objetivo que se busca, estamos en condiciones de considerar que un movimiento o jugada será racional si y sólo sí el jugador actúa intencionalmente y se corresponde de forma adecuada al fin buscado.

1.3 Razonamiento estratégico de los jugadores

El llevar a cabo una toma de decisiones (movimiento o acción) tienen lugar sobre la base de una forma específica de razonar, por lo que, continuando con nuestro primer capítulo, resulta necesario plantear los rasgos que conforman esa forma específica de razonar. Es decir, cuando razonamos, lo hacemos por diversos motivos, con diferentes sentidos e intenciones; y nuestros razonamientos concatenados se van hilando para cumplir con diversos objetivos.

El paradigma de la elección racional de la que nos habla Di Castro (2009), surge y se configura bajo la preocupación en el campo de la economía, por seguir y modelar la estructura interna que tiene lugar en el proceso de la toma de decisiones; “en el paradigma de la elección racional, el sujeto económico, descrito por un conjunto de creencias y por un conjunto de deseos o preferencias, dispone de un conjunto de estrategias disponibles, dadas determinadas restricciones” (pp. 46-47). Lo anterior permite establecer el tratamiento que la teoría de juegos plantea en el contexto de este paradigma, el cual será tratado más a detalle en el siguiente apartado. Empero, siguiendo con Di Castro, “La teoría de juegos se preocupa por establecer los principios que deben guiar la toma de decisiones en determinados contextos que corresponden a una gran cantidad de situaciones (no sólo económicas)” (2009, p. 47).

En este sentido, el contexto de la racionalidad estratégica estaría situada en el paradigma de la teoría de la elección racional, la cual será considerada para los objetivos de nuestra investigación, desde su función normativa y no tanto descriptiva e incluso explicativa, pues desde los imperativos condicionales será posible identificar o esbozar un modelo que permita fundamentar el desarrollo de la herramienta didáctica para la lógica elemental, basada en una Semántica Formal Estratégica.

Retomando el planteamiento anterior, el decidir racionalmente podemos definirlo como el acto de “elegir la estrategia que *mejor* satisface los deseos del agente dadas sus creencias y restricciones” (Di Castro, 2009, p. 47). Es decir, podemos concebir la racionalidad estratégica como el acto de decidir, dada una situación inicial, ante un conjunto de condiciones y restricciones, que permitan al agente decisor ponderar una ruta de acción o movimiento, de acuerdo a sus metas e intereses, llevando a cabo la acción tomando en cuenta también cómo el movimiento del decisor α, habrá de impactar o afectar el movimiento de β y viceversa.

La racionalidad, como problema social, nos plantea ya una toma de distancia respecto a la propuesta clásica de la concepción del juego, en la que lógicos como Hintikka, Sandu y Acero conciben al par de jugadores en interacción como integrados por un agente epistémico y la naturaleza; siendo ésta última concebida como responsable de plantear una oposición. En el contexto de nuestra investigación, la interacción habrá de tener lugar en binas, pero necesariamente respecto a dos agentes decisores, agentes epistémicos que, inmersos en los procesos de enseñanza-aprendizaje, habrán de desenvolverse a través del uso de una herramienta didáctica determinada, para realizar las experiencias de aprendizaje de la lógica elemental.

Sin dejar de considerar que,

> (…) en un entorno real de decisión, no es posible disponer de toda la información ni conocer todas las alternativas, no es posible conocer a priori con certeza el resultado de una decisión antes de implantarla y no siempre se elige la alternativa que maximiza los resultados, sino que se opta por una alternativa que satisface suficientemente el logro de los objetivos propuestos. (Navas López, Guerras Martín, y Montero Navarro, 2010, p. 185)

Un modelo racional de decisión estratégica supone que la racionalidad se relaciona con la maximización del resultado u objetivos planteados. Dicho modelo racional estaría planteando una suposición de sus elementos constitutivos y la caracterización de sus criterios objetivos. En este sentido, se propone un proceso de decisión, basado en diversos autores como Quinn (1980); Mintzberg, Raisinghani y Théorêt (1976), las siguientes etapas o fases:

a) Necesidad o motivos de la decisión
b) Información de que se dispone
c) Análisis de alternativas

d) Ponderación
e) Ruta de elección/acción
f) Revisión

Lo que los autores como Navas López, Guerras Martín, y Montero Navarro, plantean es que Herbert Simón (economista de mediados del siglo XX) fue quien:

> (…) abrió el camino a la crítica al proceso racional, poniendo de manifiesto cómo, dada la racionalidad limitada del decisor, el proceso de decisión estratégica no es lineal, sino que, en la práctica, se producen ciclos de realimentación en los cuales los objetivos son reajustados conforme el proceso avanza. (2010, p. 191)

Al respecto, llevamos, en tanto se plantea un modelo como ideal, con fines didácticos, un proceso lineal, pero de revisión final. Lo que permitirá, en su momento, identificar mediante mecanismos de prueba y error, mejor conocido como el “incrementalismo lógico” de Quinn (1980), para aprender de la experiencia y que, desde el aprendizaje colaborativo, sea posible desarrollar nuestra herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental.

En este sentido surge las siguientes interrogantes: ¿se busca un modelo que nos permita decidir entre un conjunto de fórmulas válidas o se busca un modelo que nos permita decidir entre un conjunto de fórmulas satisfacibles?

En el primero de los casos, supondría la existencia o construcción de un modelo o conjunto de reglas a aplicar que nos permitan una manipulación mecánica de los símbolos para evaluar la sintaxis de una fórmula dada; siendo para ello preciso demostrar que se trata de un modelo completo, esto es, que todas las consecuencias lógicas se pueden representar de una forma sintáctica. En otras palabras, si pensamos que hay una serie de expresiones (atómicas o moleculares) que pertenecen a un conjunto, tal que en cualquier lugar (o mundo posible) donde las expresiones de ese conjunto tengan una interpretación; en este caso la interpretación será: *adecuada*, la expresión o fórmula que tenga como consecuencia lógica, también será *adecuada*.

Por otro lado, la búsqueda de un modelo que nos permita decidir entre un conjunto de fórmulas satisfacibles, resulta más plausible en el marco de la construcción de una propuesta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental. Dado que todo lo que deducimos, sí corresponde a consecuencias lógicas, ello pues una expresión o fórmula –en juego- será consecuencia lógica de un conjunto de expresiones aceptadas como adecuadas si, en cualquier mundo donde las expresiones que están en el conjunto de expresiones aceptadas, son adecuadas, también la expresión o fórmula en juego (su estrategia), será adecuada.

La figura de un agente idealmente racional explicaría dentro del paradigma de la elección racional, la relación preferencias-estrategia; en este sentido, la explicación, se realiza mediante la demostración de que "con su comportamiento los individuos maximizan su función de utilidad". (Di Castro, 2009, p. 47)

Luego de las elucidaciones respecto a los aspectos constitutivos del razonamiento estratégico que habrá de ser característico en la toma de decisiones, resulta menester precisar el contexto del razonamiento; esto es, el espacio teórico en el que tendrá lugar la fundamentación del desarrollo de la herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental; mientras que, respecto a la forma del fin buscado, resulta necesario establecer su caracterización.

1.3.1 Forma del fin buscado

El razonamiento estratégico como actividad orientada a un objetivo que consiste en elegir la estrategia que mejor satisface los deseos del agente, siendo ésta consistente con la forma del fin buscado. Así, por la forma del fin buscado noción vamos a entender al resultado de la ruta de acción que habrá de consistir en el desarrollo de una estrategia que permita obtener el mejor resultado entre los posibles peores, la menor pérdida o la mayor ganancia, en el contexto de un juego o interacción.

Y en este sentido, ganará el juego, quien logre la forma del fin buscado, en el caso del falsador, ganará cuando la fórmula atómica resultante sea equivalente al 0, mientras que el verificador, ganará cuando la fórmula atómica resultante sea igual a 1. El juego se puede ganar o perder; no hay un punto medio o empate y, para quien logre desarrollar una estrategia ganadora, deberá hacerlo a partir de un conjunto de pautas o reglas que van a describir los movimientos y sus restricciones.

Retomando, en torno a los juegos o interacciones, nos habremos de encontrar con los siguientes estadios: i) condiciones iniciales, constituidas por el tipo de interacción (en este caso juegos bipersonales de suma cero); ii) la preferencia, la cual habrá de definir los roles y reglas en la selección y diseño de estrategia de inicio; iii) la prueba de estrategia, que consiste en el desarrollo del juego, la resistencia de los movimientos y las respuestas; y iv) la conclusión del juego, que trata de evaluar cuál de los dos jugadores ha generado la estrategia ganadora, según, como hemos señalado párrafos arriba, la forma del fin buscado.

En el siguiente apartado, nos concentraremos al desarrollo de la Semántica Formal Estratégica, es decir, la revisión de las preferencias y con ello la generación de las reglas semánticas que habrán de regular los movimientos y restricciones de los juegos semánticos que serán propuestos para la herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica básica.

SEGUNDA PARTE

APARTADO 2: SEMÁNTICA FORMAL ESTRATÉGICA

Semántica Formal Estratégica: justificación de las reglas

Si el razonamiento estratégico es definido como un acto o movimiento que se corresponde con la forma del fin buscado, entonces podemos representarlos como un conjunto de reglas estratégicas. Así, desde la decisión, entendida ésta como la acción o movimiento del agente epistémico; en el contexto de un juego, los jugadores habrán de razonar estratégicamente.

Para expresar esa racionalidad estratégica, la semántica formal estratégica se propone para emplearse en la lógica elemental, al definirse desde la semántica de juegos a partir de su distinción respecto a la noción de juego semántico que nos plantea Acero (1990), donde: “Los juegos semánticos (…) son formas de usar ciertas parcelas o fragmentos de una lengua en las que el objetivo que las preside es el de determinar qué valor [veritativo o de otra índole][7] posee una oración cuando sus términos primitivos se interpretan de un cierto modo”. (pp. 68-69)

Por otro lado, para Acero (1990), la semántica que, como área del conocimiento humano que tiene por objeto de estudio los términos y lo que representan, esto es, sus valores semánticos; puede comprenderse de mejor manera, en un sentido plural, no en un sentido singular. Hay, luego, semánticas del léxico, oración y discurso; y en este sentido “una teoría semántica para una lengua natural es una teoría de la verdad para dicha lengua”; [apuntando que, la tesis principal de Hintikka es que,][8] “ciertas relaciones entre lenguaje y realidad pueden ser investigadas analizando ciertas actividades humanas gobernadas por reglas”. (p. 68)

Definir, para nuestros fines, la semántica de juegos como una semántica formal estratégica, supone entonces, situar los usos del lenguaje en el contexto de un juego o tipo de interacción específica, que permita aportar didácticamente a la enseñanza de la lógica elemental. Pero sobre este punto volveremos más adelante, ya que

[7] Los corchetes son nuestros.
[8] Los corchetes son nuestros.

posteriormente debemos llevar a cabo un conjunto de precisiones respecto a las acciones o movimientos de los jugadores, en este tipo especial de interacción, así como del valor que la estrategia tendrá en la semántica de nuestro lenguaje específico, pues luego de definir la semántica de juegos como una semántica formal estratégica, nos centraremos en la importancia y configuración de las reglas.

2.1 Antecedentes: Jaakko Hintikka

Jaakko Hintikka, de acuerdo a la *Encyclopadeia Herder*, fue un filósofo y lógico finlandés nacido el 12 de enero de 1929, en Vaanta al sur de Finlandia; y fallecido el 12 de agosto de 2015 en Porvoo, ciudad situada en la zona costa sur también de Finlandia.

> Estudió en esta misma ciudad y en Harvard, y fue alumno de G.H. von Wright, el sucesor de Wittgenstein en Cambridge; ha sido profesor en Helsinki, Standford y Florida. Sus estudios versan sobre lógica, epistemología, filosofía del lenguaje y de las matemáticas, pero también sobre historia de la filosofía, en la que ha llevado a cabo interpretaciones importantes sobre varios de los principales filósofos. Sus aportaciones más características versan sobre la «lógica epistémica», directamente relacionada con el concepto de creencia, la cuestión de las actitudes proposicionales y los mundos posibles, y sobre la lógica modal. (Herder Editorial, S.L., 2017)

Filósofo perteneciente a la tradición analítica, Hintikka “se distinguió desde muy joven justamente como lógico” (Barrero y Rey, 2016, p. 331), con una inclinación al análisis semántico, principalmente de los mundos posibles, generando contribuciones importantísimas a la semántica de la lógica modal. Los trabajos desarrollados entorno al “enfoque semántico formal (inspirado en la teoría de juegos que Hintikka denominó *game-theoretical semantics*)” (Barrero y Rey, 2016, p. 331), son los que constituirán los vínculos lógicos con la propuesta didáctica que pretendemos establecer en esta investigación.

Del ámbito relativo a la teoría de juegos, de la que se inspira Hintikka, "creó un marco teórico para la semántica formal, en el que las nociones semánticas tradicionales son definidas empleando la semántica de teoría de juegos…"(Barrero y Rey, 2016, p. 333); de esta manera, procuró "destacar las virtudes de su semántica de juegos, explorando sus posibles aplicaciones en diversas áreas" (Barrero y Rey, 2016, p. 333), siendo en este sentido que nuestra investigación pretende generar un aporte.

> "Su conocimiento de la teoría de juegos, desde sus años de formación como matemático, resultó ahora determinante. La intuición básica fue la de considerar que el significado de una oración (declarativa) se exhibe en un juego de lenguaje (bipersonal, de suma cero e ingormación perfecta) a lo largo del cual un jugador busca individuos del universo del discurso que ejemplifiquen determinadas propiedades y el otro opone contraejemplo tras contraejemplo" (Acero J. , 2016, p. 142)

En palabras de Juan José Acero, "El desarrollo de la teoría de juegos semánticos le permitió aportar nuevas ideas sobre numerosas cuestiones de lógica (…)"(2016, p. 142); por ello, nuestro intrerés, en este sentido, será en torno a una aportación didáctica, que se encuentre basada, justamente en esta semántica. Por lo que, antes de introducirnos a la Semántica Formal Estratégica, precisamos de identificar los términos que nos serán relevantes de la teoría de juegos; así como del tipo de juego en el que nos situaremos, dentro de la amplia gama de juegos que estudia esta teoría.

2.1.1 Semántica Estratégica: términos relevantes de la Teoría de Juegos

Dependiente de la teoría de juegos, la semántica estratégica parte de la pregunta respecto a cómo deben conducirse los jugadores para hablar de comportamiento racional. En este sentido, si un juego es:

> (…) un instrumento que nos permite analizar situaciones en que existe un conjunto de jugadores, cada uno con ciertas preferencias definidas, los cuales tienen que tomar una decisión entre varias estrategias posibles bajo la siguiente premisa central: el bienestar de cada jugador depende no solamente de la decisión que tome, sino también de lo que haga el resto de los jugadores. (Fernández Ruiz, 2006, p. 81)

Tendríamos pues, nociones como las de preferencia, utilidad, ganancia, estrategia, situaciones reales, agente y, el concepto mismo de juego, como constitutivos para la construcción de la propuesta de la herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental; situando cada uno de ellos en alguno de los momentos de su construcción.

Hemos establecido anteriormente que, frente a situaciones reales que tienen una estructura de interés, el agente epistémico se desenvuelve a partir de un conjunto determinado de procedimientos en el contexto de una interacción, al que denominaremos “juego”; en él deberá comportarse colaborativamente de acuerdo a la preferencia que les caracterice. En este sentido, de la teoría de juegos, echaremos mano, para fines didácticos, de la semántica estratégica. Esto es, no hablaremos en términos de verdad o falsedad, sino de una estrategia “adecuada”. Una estrategia adecuada no es próxima a la noción de estrategia ganadora, en tanto la segunda supondría una dicotomía entre vencedores y perdedores. La semántica estratégica que planteamos, obedece a ser “adecuada” en tanto las condiciones y el contexto así lo permitan; es decir, se considerará que una estrategia es adecuada sí y solo si satisface las condiciones que el juego o interacción establecen, de acuerdo a la función o rol que desempeña cada jugador o agente.

El resultado del juego puede arrojar como ganador a cualquiera de los dos jugadores, distinguibles precisamente por la preferencia que cada uno de ellos tenga, de acuerdo a la forma del fin buscado, determinado por el rol que ejecutan en cada interacción.

La noción de estrategia, en este sentido, será considerada como cualquier secuencia o conjunto ordenado de acciones, a las que nos dedicaremos más adelante en este mismo apartado, pero que identificaremos como reglas. Luego, si la teoría de juegos se encarga de escudriñar:

> (…) qué hará un jugador racional (entendido como aquél que realiza las acciones que cree que resultarán en su beneficio) en este tipo de contextos. Vale la pena resaltar que estas decisiones dependerán tanto de la información que posea el jugador al momento de tomarlas como de sus conjeturas sobre lo que harán los demás. (Fernández Ruiz, 2006, p. 81)

Es decir, en situaciones reales, la motivación inicial, asociada ésta con la finalidad del juego que, en el caso específico de la propuesta didáctica que buscamos plantear, consistirá en aquello que se busca demostrar, esto es, la estrategia que mejor satisfaga los deseos del agente. Dicha satisfacibilidad puede ser también comprendida desde el ámbito de la lógica, pero de ello hablaremos enseguida.

Como agente (epistémico) o jugador, podrán considerarse tanto individuos naturales como artificiales. En el primer caso, podemos encontrarnos con personas, organismos, instituciones, etcétera; mientras que los agentes artificiales bien podrán estar constituidos por programas, softwares, Inteligencia Artificial, etc.; siendo fundamental su caracterización pues nos permite incluso considerar que, en un juego, se encuentre un agente natural frente a un agente artificial. Un agente será mínimamente racional si y sólo si elige la acción o movimiento que le reporte la mayor utilidad; es decir, un comportamiento puede considerarse como mínimamente racional si entre los movimientos y restricciones disponibles, opta por aquella que le reporte mayor utilidad o preferencia.

Por su puesto que, la utilidad habrá de responder a la forma del fin buscado, lo que estará determinado a su vez por la preferencia que el jugador posea, de acuerdo al rol que tiene asignado desempeñar en la interacción. Se trata de establecer cuáles son las estrategias que maximizan la utilidad de agencias, partiendo de los conceptos relevantes de teoría de juegos para nuestra Semántica Formal Estratégica. Términos que no podemos hacer otra cosa más que situarlos en el contexto de un tipo de interacción en específico.

2.1.2 *Tipo de juego relevante: bipersonales con información completa*

Los trabajos de Jaakko Hintikka en *The Game of Lenguage: Studies in Game-Theoretical Semantics and Its Applications* (1983), han establecido justamente que su propuesta parte de los juegos bipersonales con información completa. Se trata de una interacción entre dos agentes que habrán de desplegar, desde una racionalidad estratégica, un conjunto de acciones o movimientos que les permitan lograr la forma del fin buscado.

> *A two-person zero-sum game G(S) is associated with each well-formed sentence S of any language L', where L' is L extended by adjoining to it a finite number of names of members of D. We shall call the two players Myself (or t) and Nature.* (Hintikka, 1983, p.3)

Los juegos semánticos como juegos de suma cero, significan que lo que un jugador gana uno lo pierde el otro, esto es, en la bina jugador-naturaleza (donde el jugador será el agente natural y la naturaleza, o bien otro agente natural o bien un agente artificial) no pueden ganar al mismo tiempo, en palabras de Hintikka serían uno mismo y la naturaleza.

La información completa estará constituida por el conjunto de restricciones interdependientes sobre las que cada jugador, o agente decisor, irá desarrollando sus movimientos. Dichas reglas serán las que determinarán las acciones factibles y los significados en juego.

La revolucionaria propuesta de la semántica de juegos de Hintikka nos permite suponer que, las oraciones o fórmulas en juego, desde el supuesto que constituye una interpretación del lenguaje, su significado no estaría ya circunscrito a la verdad o falsedad de sus oraciones, sino a la mayor o menor utilidad; resultando desde el principio del minimax, del cual hemos hablado anteriormente, plausible reconocer que un jugador desarrolla una estrategia ganadora cuando ésta se acompaña de una preferencia que logra la forma del fin buscado, de acuerdo al rol desempeñado en la interacción.

Es decir, si partimos de la interpretación clásica de la definición veritativa funcional de las oraciones, la estrategia ganadora dependerá de si la oración atómica es falsa o verdadera; en el primer caso ganaría la naturaleza, quien siempre habría jugado a falsar, es decir, buscando la mayor utilidad en oposición al agente epistémico; mientras que estaría ganando el jugador, o agente epistémico, que haya verificado la expresión inicial. En otras palabras, si la oración atómica resultante fuese verdadera, ganaría el jugador; mientras que, si la oración atómica resultante llegara a ser falsa, habría ganado la naturaleza.

En esta secuencia de ideas, la forma del fin buscado para el jugador, proponente o verificador será: 1; mientras que la forma del fin buscado para la naturaleza, oponente o falsador será: 0 (cero). De esta manera y, a partir de un conjunto de reglas que se presentarán a continuación, el juego habrá de desarrollarse de forma tal que los agentes en interacción elijan, en un número finito de pasos, los movimientos que los lleven a lograr la forma del fin buscado. Así, desde el supuesto que ningún agente mínimamente racional, juegue para perder, la interacción habrá de realizarse como estrategia didáctica para la enseñanza de la lógica elemental.

2.2 Construcción de la Semántica Formal Estratégica

La construcción de la Semántica Formal Estratégica, habrá de partir de la relación profunda que guarda con la lógica clásica, desde una exposición concreta que permita ir transitando el recorrido desde cada uno de los conectivos lógicos y su semántica veritativa funcional hasta la semántica estratégica y su definición formal.

Tomando en cuenta que, una proposición expresa una afirmación que se hace respecto de algo, puede expresarse de forma simple como “llueve”, o de forma compuesta como “llueve y graniza”. Las proposiciones compuestas se distinguen por el conectivo que *conecta* a dos o más proposiciones, determinando el tipo de relación que habrá entre ellas. Cabe precisar que, en este sentido, la verdad, como un atributo de las proposiciones, será corroborada en función de la correspondencia entre la expresión y aquello a lo que haga referencia. Por su parte, la validez será un atributo de los argumentos, o, mejor dicho, de las formas argumentales. Sin embargo, de estas propiedades, hablaremos en el apartado 2.3.1.

Un juego, por su parte, entendido como un problema de decisión interactivo con múltiples bifurcaciones[9], podría bien llevarse a cabo en torno a un solo agente en relación a una situación o motivación inicial, en la que desde la elección jugador unipersonal frente a determinada situación, dicho jugador, al que identificaremos como jugador 1 o J1, deberá elegir constantemente, por ejemplo, entre dos posibles alternativas: caminar a la escuela o tomar el autobús.

Partiendo del supuesto que cuenta con $10.00 para ir y regresar de la escuela, caminar implicaría, por un lado, salir más temprano de casa, y por otro, llegar a la escuela con la necesidad de hidratarse, pero aquello implicaría un ahorro de $5.00. Dicho ahorro representaría la ganancia o *utilidad* resultado de dicha elección. Mientras que, si toma el autobús, por el cual deberá pagar los mismos $5.00, no tendría que salir temprano de casa, ni deberá hidratarse al llegar a la escuela; ello significa que su ganancia o utilidad será igual a $0.00.

La anterior descripción puede mostrarse bajo la siguiente matriz de pago que representa la forma estratégica[10], con la finalidad de marcar la caracterización inicial de la relación entre el modelo de la teoría de juegos y la lógica:

Tabla 2: Juego de un solo jugador

J	C	$5.00
1	A	$0.00

[9] Entiéndase por bifurcaciones, las posibilidades variables de elección que, en dado momento, dependerán y se modificarán de acuerdo a las decisiones de los distintos jugadores.

[10] Para representar un juego en forma estratégica necesitamos partir del concepto de estrategia de un jugador. Una estrategia es un plan contingente, completo o regla de decisión, para un jugador, que especifica cómo actuará el jugador en cada circunstancia posible que le corresponda mover. (Pérez y otros, 2013, p. 36)

Un solo jugador, frente a un problema de decisión, no resulta realmente interactivo, ni atractivo para los objetivos de nuestra investigación, pues la interacción supondría la incorporación de, al menos, otro jugador (J2), o condiciones resultantes que varíen oponiéndose a cada estrategia del J1[11]. Visto como una *estrategia inicial*, cada uno de los jugadores (J1 y J2) se coloca frente a una "situación común" o "como problema de decisión interactivo", identificando entonces como agentes al *mayself* y *nature* de los que nos habla Hintikka (1983).

A manera de preludio ejemplificador, consideremos el siguiente juego para representar lo antes expuesto:

Dos compañeros buscan asistir a la premier de una película de súper héroes, aquí deben existir pues, condiciones de cooperatividad[12], esto es: donde se analicen las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones va a tomar cada uno. (Pérez y otros, 2013, p. 3) La teoría de juegos, en torno a los juegos cooperativos supondría que:

> (…) los posibles modos de cooperar de los jugadores (de tomar acuerdos vinculantes) son muy variados y complejos, (…). El enfoque cooperativo es, por tanto, asumir de entrada que los jugadores van a cooperar y a actuar de modo socialmente óptimo y centrarse más bien en cómo repartirse los jugadores los beneficios de su cooperación. (Casas Méndez y otros, 2012, pp. vii-viii)

La entrada a la premier de una película de súper héroes tiene un valor de $7.00 para ambos asientos. Si cada uno eligió caminar a la escuela, y al terminar de tomar sus clases, la suma de sus ganancias sería de $10.00, con lo que podrían pagar la entrada a la sala de cine. Sin embargo, si uno de ellos o ambos, elige no caminar a la escuela, entonces ninguno de los dos chicos podrá entrar a ver la tan esperada película.

[11] Puede imaginarse un escenario en el que el J1 (ser humano) juegue con alguna máquina o software, sin embargo, a lo que se alude es a un solo jugador frente a las bifurcaciones generándosele cada vez que elige un movimiento o estrategia; ya que el J1 –ser humano- frente al J2 –maquina-, ya supone un problema de decisión interactivo.

[12] Existen dos tipos de juegos, expresados de forma general, juegos cooperativos y juegos no cooperativos, de los cuales se puntualizará más adelante.

La siguiente forma estratégica representa la estrategia que deben seguir ambos jugadores y que, para efectos del presente trabajo denominaremos “preferencia estricta”, el objetivo es situar y diferenciar las relaciones de conjunción que estarán modelando dichas interacciones.

Tabla 3: Matriz de pago con dos jugadores

		J2	
		C	A
J	C	5,5	5,0
1	A	0,5	0,0

Es claro que la estrategia que deben seguir ambos jugadores será la denominada *estrategia común*. Ahora bien, resulta necesario contrastar ambos modelos formales de expresión, por un lado, la proposicional, y por otro, el juego.

Tabla 4: Tabla de verdad “Conjuntiva”

P	Q	P ^ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 5: Estrategia común

		J2	
		C	A
J	C	5,5	5,0
1	A	0,5	0,0

Teniendo ambas tablas representadas, correspondiéndose la **Tabla 4** a la representación formal de una proposición compuesta con la conjunción como conectivo principal, denominada tabla de verdad y, en la que puede observarse la semántica veritativa funcional de la conjunción; mientras que la **Tabla 5** representa esquemáticamente el conjunto de estrategias para dos jugadores frente a un problema de decisión interactivo descrito arriba. En este sentido, cada línea perteneciente a la **Tabla 4** será equivalente al conjunto de estrategias de la **Tabla 5**, tal como a continuación se enlistan:

a) Línea 1 = Estrategia superior izquierda

b) Línea 2 = Estrategia superior derecha
c) Línea 3 = Estrategia inferior izquierda
d) Línea 4 = Estrategia inferior derecha

Otro modo de representar las equivalencias sería:

a) V-V = 5,5
b) V-F = 5,0
c) F-V = 0,5
d) F-F = 0,0

A partir de la anterior representación, es posible distinguir el valor de verdad (proposicional) con la mayor utilidad (ganancia en estrategia), como equivalencias. Por lo que es posible deducir que, en “un juego de estrategia común o conjuntiva”, ambos jugadores deben realizar un juego cooperativo con ganancia o utilidad mayor a 0 (U>0), de preferencia común. Así, la preferencia del decisor estará supeditada “preferencia estricta”, la cual estará en función de la máxima utilidad para cada jugador[13].

A continuación, se describirán cada una de las estrategias conjuntivas (5,5), (5,0), (0,5) y (0,0); buscando construir una regla o principio básico que permita resaltar las propiedades tautológicas de una estrategia con utilidad máxima, respecto a una estrategia con utilidad mayor o igual a 0, pero menor que la utilidad máxima. No sin antes incorporar un apartado aclaratorio del que se partirá para definir formalmente dichas reglas, prescindiendo de la semántica veritativa, para migrar a una semántica estratégica.

> “Una **asignación** es una función que asigna a cada una de las letras proposicionales del lenguaje el valor *verdadero* o el valor *falso*. A estos valores los llamamos **valores de verdad**. (…) Para referirnos a las asignaciones usaremos la letra <<*v*>> (con subíndices cuando sea necesario). La expresión:

[13] De manera anticipada, y a manera de hipótesis, para los fines del presente trabajo, supondremos que, entre más conectivos, las reglas de cooperatividad se deberán aplicar a partir de las estrategias más cercanas a los “nodos de decisión”, hacia las más alejadas; de manera similar que en las tablas de verdad de la lógica proposicional.

$v(p) = \mathrm{V}$

significa entonces que la asignación *v* atribuye el valor V a la letra proposicional *p* o, dicho informalmente, que *p* es verdadera con la asignación *v*". (Badesa y otros, 1998, p. 133)

De esta manera "una **función veritativa** (…) [es una] función que asigna valores de verdad a combinaciones de valores de verdad"[14]. (Badesa y otros, 1998, p. 134) De forma que, "una **tautología** es una fórmula tal que toda asignación la hace verdadera" (Badesa y otros, 1998, p. 138); esto es, los valores resultantes, independientemente de los valores asignados (*v*) serán todos verdaderos.

Podemos representar la Estrategia Común en su relación proposicional, de la siguiente manera, en donde cada línea de la **Tabla 5** (L1, L2, L3 y L4) se encontrarán con su respectiva estrategia (E1, E2, E3 y E4) presentes en la **Tabla 6**:

a) L1 = E1
b) L2 = E2
c) L3 = E3
d) L4 = E4

[14] Siguiendo con los autores antes referidos, un modo sintético de expresar las condiciones que cada conectivo poseerá son las siguientes:

1. la negación de una fórmula es verdadera cuando la fórmula es falsa y falsa cuando la fórmula es verdadera;
2. una conjunción es verdadera cuando las dos fórmulas que la componen son verdaderas y falsa cuando alguna [o ambas] de las componentes lo es;
3. una disyunción es verdadera cuando al menos una de las fórmulas que la componen es verdadera, y falsa cuando las dos fórmulas que la componen son falsas;
4. un condicional es verdadero cuando el antecedente es falso o el consecuente es verdadero, y es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso;
5. un bicondicional es verdadero cuando las dos fórmulas que lo componen toman el mismo valor de verdad y falso cuando las fórmulas que lo componen tienen distinto valor de verdad. (Badesa y otros, 1998, p. 135)

Si en cada estrategia se debe buscar la *U* mayor (utilidad mayor) para ambos jugadores, para el caso de las estrategias conjuntivas de los juegos. Así, la E1, retomando el problema de decisión interactivo o juego en el que ambos jugadores (J1 y J2) deben elegir entre caminar a la escuela (*a*) o tomar el autobús (*b*); para obtener la mayor utilidad (*U*), y donde el resultado beneficiará a ambos en condiciones de cooperatividad, deberán realizar una *estrategia común*[15].

Precisando que, una estrategia adecuada habrá de ser definida como *U, y* debe ser >0[16]; y que una estrategia no adecuada ¬*U* debe ser ≥ 0 y < *U*[17], entonces los valores de la E1 serán los asignados de la siguiente manera[18]:

Bien, representemos pues la E1, en la que J1 y J2 han elegido C (caminar hacia la escuela) y por lo tanto reportan una ganancia individual de 5 cada uno. Al ser la mayor utilidad, en un juego, que presupone un margen de cooperatividad, en tanto se comparte información, ambos discurren respecto a qué hacer con las ganancias, que para dicha situación estaba claro: entrar al cine[19]. ¿Pero qué ocurre con las otras tres posibilidades de acción (E2, E3 y E4)?

Por su parte, la E2 (5,0) supone que el J1 eligió C, mientras el J2 eligió A (tomar el autobús a la escuela), y siguiendo las reglas dadas en las condiciones de juegos conjuntivos: *la preferencia estricta estará dada en función de la máxima utilidad para cada jugador, a partir de la estrategia común (1,1)*. Ello permite inferir que el resultado no representa la máxima utilidad, no generándose así una ganancia para ambos; y finalmente postulándose como una estrategia falsada. Y siguiendo el hilo de ejemplos surgidos de la misma interacción o juego, tenemos la E3 (0,5); donde para ésta estrategia podemos describir las decisiones del siguiente modo: en éste caso, el J1 eligió A, generando así una *U*=0, mientras el J2 optó por la opción C, generando una

[15] Esta *estrategia común*, es donde ambos obtienen la mayor utilidad. Que sería, en una traslación proposicional, donde el primer y el segundo conyunto tienen ambos, valores de verdad verdaderos.

[16] Léase utilidad mayor a 0.

[17] Léase utilidad mayor o igual a 0, pero menor que la estrategia verificada.

[18] Dado que ambos jugadores (J1 y J2) eligieron C (caminar a la escuela), y dicha elección representa una ganancia individual mayor a 0 (U>0); al tratarse de una interacción conjuntiva, el resultado como estrategia conjunta ganadora = U, es una estrategia verificada.

[19] Recordemos que la estrategia verificada cumple, en el sentido de una tautología, con la utilidad máxima esperada.

utilidad individual *U*=5, que sería la máxima utilidad, pero sería una utilidad mayor a la obtenida por el J1, violando con ello la regla de las condiciones conjuntivas del juego; impidiendo generar así la preferencia estricta de la estrategia común. Por último, en este conjunto de movimientos, nos encontramos con la E4, en ella los valores de decisión se representan como (0,0), esto es, ambos jugadores (J1 y J2) decidieron la posibilidad A que no genera ninguna ganancia, es decir, ninguna utilidad.

Tabla 6: Preferencia estricta de la *Estrategia Común*

a) E1 = *U*
b) E2 = ¬*U*
c) E3 = ¬*U*
d) E4 = ¬*U*

La **Tabla 6** denominada: "Preferencia estricta de la Estrategia Común", sintetiza la preferencia que respondería a las condiciones mínimas de racionalidad, paramétricas de la racionalidad estratégica racional por parte de ambos jugadores (J1 y J2), bajo los principios del minimax. De esta manera se puede apreciar que únicamente la E1, en las condiciones conjuntivas de un juego, se modela como una estrategia adecuada al reportar la mayor utilidad para los jugadores que decidieron individualmente por esa estrategia común. Mientras que para el resto de las estrategias: E2, E3 y E4, en ausencia de ganancias para ambos jugadores, dichas estrategias resultan no adecuadas.

Sucede lo mismo con las proposiciones compuestas conjuntivas (^), en donde el valor de verdad de la proposición será verdadero únicamente cuando los valores del primer y segundo conyunto, como se ha mencionado anteriormente, sean ambos verdaderos; y así, el resto de combinaciones de valores de verdad de las L2, L3 y L4, el valor resultante (en presencia del valor de verdad falso -0-), será falso.

Para desarrollar el siguiente conjunto de estrategias de las condiciones de juego denominadas, para los fines del presente trabajo como: *Condiciones Disyuntivas*; retomaremos el ejemplo del juego anterior, agregando algunas especificaciones que permitan precisar la disyunción.

Tenemos pues a dos jóvenes estudiantes, que deben decidir entre C y A, es decir, deben tomar de manera individual, pero con información completa, una decisión que les permita generar la mayor utilidad, cuyos beneficios serían traducibles a ver la premier de su película esperada. Pero las condiciones de este juego difieren de las condiciones conjuntivas, es decir, dado que es un día de descuento, la entrada a la sala de cine para ambos estudiantes es ahora de $5.00 y no ya de $7.00, lo que viene acompañado de ciertas implicaciones. Las condiciones iniciales son las mismas, pero la *preferencia cuasi-indiferente* estará dada de la siguiente manera (siguiendo los criterios de las proposiciones compuestas disyuntivas –v– de la lógica proposicional): siempre que al menos uno o ambos jugadores generen máximas utilidades, el beneficio mutuo producirá una estrategia adecuada, que habremos de denominar: *estrategia cuasi-indiferente. Cuasi,* pues únicamente la estrategia que reporte *U*=0, será la estrategia no adecuada.

Siendo así, la **Tabla 7** es una representación formal de los valores de verdad del conectivo lógico *disyunto*. Logrando así apreciar que, únicamente en la línea (L4) en la que ambas proposiciones simples (primer disyunto y segundo disyunto) con valor de verdad falso, resultan en la falsedad de la proposición.:

Tabla 7: Tabla de verdad "Disyuntiva"

P	Q	P v Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Del mismo modo, y antes de describir cada una de las estrategias disyuntas, la siguiente tabla representa las preferencias cuasi-indiferentes y sus específicas estrategias (E1, E2 y E3), como estrategias adecuadas. Las condiciones de juego permiten que los decisores (jugadores) decidan por generar o no una utilidad máxima de manera individual, pero cuidando, desde la información –y la comunicación- que al menos uno de ellos (o ambos) elijan la situación que le (s) genere mayor utilidad. En el juego específico mencionado, las estrategias adecuadas se amplían a tres, a diferencia de los juegos conjuntos que únicamente cuentan con una estrategia adecuada; y ello puede describirse del siguiente modo:

Si la E1 (5,5) es pues, de entrada, una estrategia adecuada al reportar la mayor utilidad de ambos jugadores en beneficio mutuo de acuerdo, las E2 (5,0) y E3 (0,5) no representan la negación de esa estrategia adecuada, es decir, no resultan en estrategias no adecuadas ($\neg\neg U = U$) en tanto, de acuerdo a las condiciones del juego, basta con que uno o ambos reporten una utilidad mayor o igual a 5 ($U \geq 5$) para que el beneficio de la estrategia pueda ser alcanzado en condiciones de juego disyuntas, con preferencia cuasi-indiferentes. Y resultan cuasi-indiferentes, ya que únicamente la E4 habrá de entenderse como la única estrategia que no cumple con las condiciones de adecuabilidad, resultando en una estrategia no adecuada. Es decir, si ninguno de los jugadores decide en función de su máxima utilidad individual (o mutua), no habrá ningún beneficio resultante.

Tabla 8: Preferencia cuasi-indiferente de la *Estrategia Cuasi-Indiferente*

a) E1 = U
b) E2 = U
c) E3 = U
d) E4 = $\neg U$

Para contrastar visualmente la representación formal del conectivo lógico *disyuntivo*, respecto a la representación gráfica del juego y la matriz de pago, las **Tablas 7** y **9**, respectivamente, permiten observar, por un lado, el modo en que se mantienen las condiciones iniciales del juego (**Tabla 9**) de acuerdo a la matriz de pago, y cómo serán caracterizadas las condiciones disyuntivas del mismo (**Tabla 7**).

Tabla 9: Estrategia cuasi-indiferente

		J2	
		C	A
J1	C	5,5	5,0
	A	0,5	0,0

Por otro lado, y manteniendo el contexto del problema de decisión interactivo, pero con las respectivas modificaciones, podemos transitar hacia las *Condiciones Implicativas* de un juego[20]. Esto es, para el conectivo lógico condicional (→), cuyas connotaciones pueden dirigirnos a diversos tópicos de análisis teórico, la relación de necesidad que guardan tanto el antecedente respecto al consecuente, así como su propiedad veritativa, guardan a su vez particular cercanía con la noción de validez/correctud, donde se define a un razonamiento válido a aquel razonamiento argumental (deductivo, preferentemente) con formado por premisas verdaderas y con una conclusión verdadera, esto es, una forma argumental con premisas verdaderas, se seguirá, necesariamente, una conclusión igualmente verdadera.

En la **Tabla 10**, puede apreciarse que, en la L1, efectivamente, el valor de verdad resultante de la relación de necesidad entre antecedente y consecuente, o en el caso de una proposición compuesta (condicional o implicativa), donde, si P es verdadera, Q necesariamente debe ser verdadera. Un ejemplo sencillo al respecto sería: *Si llueve, entonces hará frío.* En la proposición anterior es posible distinguir la relación de necesidad establecida (para que la proposición resulte verdadera, y en su caso –como forma argumental- válida) entre *llueve* y *hará frío*; es decir, si es verdad

[20] Las condiciones implicativas o condiciones “condicionales”, como preferencia estricta, plantea la relación de necesidad entre antecedente y consecuente. Es decir, el tipo de relación que determinará la máxima utilidad, en emparejamiento a los principios lógicos como el de razón suficiente, que resultará en una demarcación del cumplimiento de la necesidad lógica. La única situación en la que no puede haber una ganancia o utilidad, será en la que el J1 elija la máxima utilidad y el J2 no.

que *llueve*, entonces necesariamente debe ser verdadero que *hará frío*. Esto es, bien puede hacer frío, pero por otras muchas razones (causas) y no porque haya llovido (L3), o puede no llover y tampoco hacer frío (L4). Pero en relación a la referencia que hace el conectivo condicional, en el que, si P es verdadera, necesariamente Q debe ser verdadera, no viola o genera contradicción entre las posibilidades presentadas. Sin embargo, si *Llueve* y no *hace frío*, esto es, si *hace frío* no se sigue necesariamente de *Llueve*, como portador de verdad verdadero, entonces la relación de necesidad se rompe, suscitándose con ello la falsedad de lo que dicha proposición afirma.

La preferencia diferente plantea que la *preferencia diferente buscará evitar que, a una estrategia con mayor utilidad, le siga una estrategia con menor utilidad*, y que deben seguir ambos jugadores, la cual será la denominada *estrategia de consecuencia*. Ahora bien, resulta necesario contrastar ambos modelos formales de expresión, por un lado, la proposicional, y por otro, el juego.

Tabla 10: Tabla de verdad "Condicional"

P	Q	P → Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 11: Estrategia de consecuencia

		J2	
		C	A
J1	C	5,5	5,0
	A	0,5	0,0

En los problemas de decisión interactivos con *Condiciones Implicativas*, la regla mantendrá el mismo principio del conectivo lógico condicional. Por lo que habremos de precisar que la estrategia que reporte la interacción en la que J1 haya obtenido la mayor utilidad, mientras que el J2 no alcanza su mayor utilidad, será la única interacción falsada, pues: si J1 obtiene una mayor utilidad, el J2 necesariamente debe tener una mayor utilidad en los juegos ya precisados.

Tabla 12: Preferencia diferente de la *Estrategia de consecuencia*

a) E1 = U
b) E2 = ¬*U*
c) E3 = *U*
d) E4 = *U*

Por último, respecto a las condiciones de interacción concreta que regula el tipo de interacción en el que ambos jugadores (J1 y J2) deben tomar la misma decisión, será denominada como *preferencia bi-implicativa*. Lo anterior se traduce en que para que el beneficio sea el esperado, ambos jugadores deberán elegir la estrategia que tome el otro, esto es: si el juego ha sido generado con condiciones bi-implicativas, entonces supone que o ambos deben caminar a la escuela (C) si lo que realmente desean (considerando ese deseo como el beneficio a recibir como resultado de la estrategia de compromiso en el juego que realizan), o bien deben tomar el autobús (A), y poder así pagar las entradas para ambos.

Tabla 13: Tabla de verdad "Bi-condicional"

P	Q	P ↔ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 14: Estrategia de compromiso

		J2	
		C	A
J1	C	5,5	5,0
	A	0,5	0,0

La **Tabla 13** es la representación de los valores veritativo-funcionales de conectivo lógico bi-condicional o bi-implicativo, donde podemos observar que, *la preferencia de compromiso en juegos con condiciones bi-implicativas, marca que ambos jugadores tienen el compromiso de tomar la misma decisión.*

Tabla 15: Preferencia equivalente de la *Estrategia de compromiso*

a) E1 = U
b) E2 = ¬*U*
c) E3 = ¬*U*
d) E4 = *U*

Ahora bien, la **Tabla 16** representa las interacciones que, plantean las relaciones entre los valores de verdad, con las estrategias: En las columnas primera y segunda de la extrema izquierda, encontraremos los valores de verdad asignados según las interpretaciones de un juego bipersonal, mientras que las columnas (de izquierda a derecha) tres, cuatro, cinco y seis, corresponden a las estrategias común, cuasi-indiferente, de consecuencia y de compromiso, respectivamente. Identificándose la máxima utilidad con el valor de verdad.

Tabla 16: Interacciones de Valores de verdad con Estrategias

Valores de verdad		**E. C**	**E. CI**	**E. CON.**	**E. COMP.**
V	V	1,1	1,1	1,1	1,1
V	F		1,0		
F	V		0,1	0,1	
F	F			0,0	0,0

Ahora bien, la relevancia de la noción de *preferencias*, suponen, como lo señala Varoufakis (2002, p. 44), respecto a las preferencias: “una persona es racionalmente instrumental si aplica eficientemente sus recursos en orden para satisfacer sus preferencias”. Tal como se presenta en la siguiente tabla, las estrategias con máxima utilidad, se ubican en las celdas en las que responden alas condiciones de los conectivos lógicos de acuerdo a los valores de verdad definidos. Dichas utilidades estarían marcando el tipo de preferencia que estaría orientando este tipo de interacciones o juegos, pero que, pese a transitarlos, resulta menester avanzar en la construcción de las reglas que reconozcan la relación con la semántica veritativa funcional, pero que la trasciendan en aras de plantear, desde la semántica de juegos, una propuesta para la enseñanza de la lógica elemental, partiendo de lo que hemos denominado como Semántica Formal Estratégica.

Tabla 17: Estrategias con utilidad máxima

Valores de verdad		E. C	E. CI	E. CON.	E. COMP.
V	V	*U*	*U*	*U*	*U*
V	F		*U*		
F	V		*U*	*U*	
F	F			*U*	*U*

La forma en la que se corresponden los valores o definiciones, a las asignaciones de racionalidad mínima que se plantean en la racionalidad estratégica, como un modo de satisfacer los deseos del agente, a manera de extensión de la Semántica de Teoría de Juegos que hubiese desarrollado J. Hintikka, no agota ni lo menos del amplio programa de Hintikka, empero, siguiendo los objetivos didácticos de nuestra investigación para la fundamentación de nuestra propuesta de herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental, debemos centrarnos en la construcción de las reglas que van a regular las interacciones, de manera tal que, haga sentido el prescindir de una semántica veritativa, para emplear una semántica estratégica.

La tabla que a continuación se muestra, pretende facilitar al lector el seguimiento y comprensión de lo antes expuesto. De izquierda a derecha, numerando del uno al cuatro cada una de las columnas, encontraremos a izquierda, una columna que plantea las condiciones iniciales de la interacción o juego, cada una de las filas estaría atendiendo a cada uno de los conectivos lógicos diádicos[21], dejando para el

[21] Recordemos que, la enseñanza de la lógica clásica, en la actualidad, considera la distinción de conectivos monádico y diádicos. En este sentido, el único conectivo monádico con el que se cuenta es el de la negación (¬), que es un conectivo que acompaña a una proposición, ya sea atómica o molecular; pero no tiene la cualidad de unir dos proposiciones, sino, simplemente, acompañar; invirtiendo el valor

siguiente punto, el tratamiento del conectivo monádico, por las particularidades de su función dentro del planteamiento de Hintikka.

Las condiciones del juego, caracterizan de manera inicial los posibles movimientos de los jugadores que, si bien aún no se delimitan a juegos bipersonales de suma cero con información completa, sí que son un preludio para su arribo. Por su parte, la segunda columna, no hace más que presentar, con intención de contrastación, los valores de verdad de los conectivos de la lógica proposicional, situando no sólo los valores de verdad sino las posibles interpretaciones que tienen lugar desde la semántica veritativa funcional de la lógica clásica, consistente con los conectivos diádicos.

Las estrategias adecuadas que se proponen, nombradas particularmente con el objetivo de facilitar el tránsito hacia la semántica de juegos, distinguiendo de cada condición de juego, la decisión que habrá de ofrecer la mayor utilidad. En la primera celda de la tercera columna, podemos observar que, únicamente hay un tipo de movimiento que representa la mayor utilidad para los jugadores, por lo que se determina (en la columna cuatro) que, se trataría de una preferencia estricta, del que ya menos hablado líneas arriba.

Tabla 18: Caracterizaciones iniciales

Condiciones de Juego	**Valores de verdad LÓGICA PROPOSICIONAL**	**Estrategias Adecuadas MAYOR UTILIDAD**	**Preferencias INTERACCIONES**
Condiciones conjuntivas: **J1 y J2 deberán elegir la estrategia que represente la mayor utilidad.**	Conjunción (^): V,V **V** V,F **F** F,V **F** F,F **F**	Estrategia Común: 1,1	Preferencia estricta: *La preferencia estricta estará dada en función de la máxima utilidad para cada jugador.*

de la afirmación. Por otro lado, los conectivos diádicos, serían aceptados aquellos que unen a dos o más proposiciones y determinan el tipo de relación que habrá de existir entre ellos; ya sea una relación conjuntiva, disyuntiva, condicional o bi-condicional.

Condiciones disyuntivas: **Mientras J1 y/o J2 elijan la estrategia de mayor utilidad.**	Disyunción (v): V,V **V** V,F **V** F,V **V** F,F **F**	Estrategia cuasi-indiferente: 1,1 1,0 0,1	Preferencia cuasi-indiferente: *La preferencia cuasi-indiferente tendrá lugar siempre que al menos uno o ambos jugadores generen máximas utilidades, el beneficio mutuo producirá una estrategia verificada.*
Condiciones Implicativas: **Toda vez que el J1 emplee una estrategia que represente la mayor utilidad, el movimiento del J2 necesariamente deberá representar la mayor utilidad.**	Condicional (→): V,V **V** V,F **F** F,V **V** F,F **V**	Estrategia de consecuencia: 1,1 0,1 0,0	Preferencia diferente: *La preferencia diferente buscará evitar que, a una estrategia con mayor utilidad, le siga una estrategia de menor utilidad.*
Condiciones Bi-Implicativas: **J1 y J2 deberán elegir, o no, simultáneamente, la estrategia que represente la mayor utilidad.**	Condicional (↔): V,V **V** V,F **F** F,V **F** F,F **V**	Estrategia de compromiso: 1,1 0,0	Preferencia equivalente: *La preferencia de compromiso en juegos con condiciones bi-implicativas, marca que ambos jugadores tienen el compromiso de tomar la misma decisión.*

Siguiendo con la descripción de la **Tabla 18**, en la segunda celda de la tercera columna, podemos apreciar que, se cuenta con tres diferentes tipos de movimiento que estarían representando la mayor utilidad para los jugadores, por lo que se determina (en la columna cuatro) que, se trataría de una preferencia cuasi-indiferente.

Denominada así, en el ámbito de nuestra investigación, para precisar que, únicamente cuando ambos jugadores decidan lo peor para sí, no habría utilidad alguna; pero ¿quién, con una mínima racionalidad, jugaría para perder?

De manera subsecuente, la celda tres y cuatro de la tercera columna, muestran también las estrategias de consecuencia y compromiso, respectivamente, que se corresponderían con las preferencias diferente y equivalente. El detallar a profundidad, haría que el lector invirtiera más tiempo del necesario, pues, para el tratamiento del tipo de juego o interacción específico dedicaremos el siguiente punto.

2.2.1 Razonamiento estratégico como reglas

En la construcción de la Semántica Formal Estratégica, se han planteado las caracterizaciones iniciales, esbozando una presentación mayormente de carácter descriptivo de la relación entre la semántica veritativa funcional y los valores de verdad de los conectivos lógicos de la lógica clásica con lenguaje de orden cero, para transitar desde la identificación de la mayor utilidad a cada una de las estrategias que, conformaran las definiciones de la semántica estratégica en las reglas que habrán de presentarse para poder realizar el juego o interacción.

Como se ha mencionado anteriormente, la teoría de juegos analiza las decisiones estratégicas con base en los siguientes cuatro elementos:

a) El grupo de agentes,
b) La elecciones o estrategias posibles para cada uno de los agentes,
c) El estado del mundo producido por la elección de ellos agentes, y
d) Las preferencias sobre los estados del mundo de cada uno de los agentes. (Di Castro, 2009, p. 58)

El inciso relativo a las estrategias disponibles para cada jugador o agente, es el que justifica la apertura de este apartado. Se trata pues, de analizar cada una de las estrategias relacionadas con las condiciones iniciales que representan los tipos de relación entre proposiciones que determinan los conectivos lógicos diádicos antes presentados, desde el tipo de juego que identifica J. Hintikka para su aproximación semántica.

En este sentido, debemos entonces situarnos en el tipo de juego bipersonal de suma cero con información completa, en el que los jugadores habrán de desempeñar un rol específico, de acuerdo a la forma del fin buscado. Nos encontraríamos pues, con las figuras del “yo mismo” contra “la naturaleza”. Partiendo de la identificación del yo mismo como un agente mínimamente racional, habrá este de partir de una intención clara y bien definida: jugar para ganar. Así, la forma del fin buscado que llevaría a ganar al agente “yo mismo” sería equivalente al resultado que llevaría a perder a “la naturaleza”; y a la inversa: la forma del fin buscado que llevaría a “la naturaleza” a ganar el juego, necesariamente se opondría al posible resultado del “yo mismo”, llevándolo a perder.

Esto es, en las interacciones, habrá acciones o movimientos que serán elegidos buscando la mayor utilidad, ganancia o beneficio; y entre estos posibles movimientos, habrá algunos que, por definición, beneficien más a un jugador que a su contrario, y viceversa.

Para llegar de manera natural del razonamiento estratégico, en la identificación de las estrategias pertinentes, a la construcción de las reglas, es menester, por los objetivos didácticos que persigue la presente investigación, caracterizar a los jugadores, los roles que habrán de desempeñar y determinar la forma del fin buscado que a cada uno corresponderá.

En el apartado “2.2. Construcción de la Semántica Formal Estratégica”, se presentaron en la representación simplificada en la forma de matriz de pagos, las estrategias disponibles para ambos jugadores. Que son: **Tabla 5: “Estrategia común”**, **Tabla 9: “Estrategia cuasi-indiferente”**, **Tabla 11: “Estrategia de consecuencia”** y **Tabla 14: “Estrategia de compromiso”**. Al no haberse definido el tipo de juego, en ese momento, se plantearon como J1 y J2 (jugador 1 y jugador 2), sin embargo, en este momento y, sirviéndonos de la Semántica de Teoría de Juegos de Hintikka, hemos establecido que, como es un juego de suma cero bipersonal, los jugadores pueden identificarse según el rol, asociado a la forma del fin buscado, que desempeñen en la interacción. Así, el J1 bien puede iniciar jugando el rol del proponente o también llamado verificador, mientras que el J2 puede plantarse como el oponente, también denominado falsador.

Los números rojos en las tablas antes mencionadas, representan el mínimo (falsador), mientras que los números negros, representan la mayor utilidad (verificador). Como es “yo mismo” contra “la naturaleza”; donde “yo mismo” como agente mínimamente racional, habrá de desplegar su racionalidad estratégica, buscando confirmar que “juega para ganar”, y gana con la mayor utilidad (1>0).

En este momento estamos en condiciones de establecer, la primera fase en la construcción de las reglas semánticas y que tiene como tarea la de asignar al jugador que, en virtud del rol que desarrolla en el juego, el tipo de estrategia de la que habrá de echar mano para procurarse la forma del fin buscado. Es decir, la fase de asignación, que es en la que nos centraremos en este punto de nuestra investigación, tendrá por objetivo el restringir a cada jugador, según el rol que éste desempeñe en el momento del desarrollo del juego en específico, el tipo de estrategia adecuada a partir de la utilidad que represente.

Tabla 19: Primera fase en la construcción de reglas semánticas

Fase	Tarea	Objetivo
Fase 1	Asignación	Restringir a cada jugador, según el rol que éste desempeñe en el momento del desarrollo del juego en específico, el tipo de estrategia adecuada a partir de la utilidad que represente.

En la **Tabla 5**, se ha representado la matriz de pago de la que, temporalmente, hemos denominado *Estrategia Común*, y es posible visualizar en el cuadrante los cuatro tipos pagos, distinguiendo entre ellos uno o más en color rojo. La razón de la colorimetría obedece, como el proceso y objetivos de la investigación en sí misma, a un perfil didáctico para la enseñanza de la lógica; permitiendo distinguir al color rojo como el pago que representa la menor ganancia o mayor pérdida.

Ahora bien, tenemos en la matriz de pago de la Estrategia Común, en el cuadrante superior izquierdo, el pago: 1,1; mientras que, en el cuadrante inferior izquierdo, superior derecho e inferior derecho se localizan los pagos: 1,0; 0,1; y 0,0; respectivamente. Dadas las condiciones iniciales del tipo de interacción, determinadas por el conectivo lógico conjuntivo (^), únicamente cuando ambos agentes persigan la mayor utilidad, estaremos frente la estrategia adecuada. En este sentido, de los cuatro posibles movimientos, solamente uno de ellos reportaría el mayor beneficio o ganancia a los jugadores. Pero no debemos olvidar que, nos encontramos en un juego de suma cero, por lo que no es posible, por definición propia, que ambos jugadores ganen o ambos jugadores pierdan pues, la ganancia de uno representa la pérdida para el otro.

Aquí tenemos pues, como nadie mínimamente racional (ya sea un agente natural o un agente artificial) juega para perder, el jugador que aspire al pago 1,1 no necesariamente será el que desarrolle la estrategia ganadora, pues dicha estrategia únicamente será adecuada para el jugador que se oponga a la forma del fin buscado que persiga el primer jugador. En otras palabras, la estrategia común, beneficia al falsador en tanto presenta un número mayor de pagos (1,0; 0,1; y 0,0) respecto al otro jugador, es decir, al verificador; por lo que dicha estrategia sólo podrá ser ejecutada por el falsador. Ya la acción o movimiento que el jugador respectivo pueda desarrollar, será abordado enseguida.

Por otro lado, *Estrategia cuasi-indiferente* que se encuentra en la **Tabla 9**, organiza la matriz de pagos estableciendo visiblemente al verificador como al jugador más beneficiado, pues dadas las condiciones iniciales que define el conectivo disyuntivo (v), la única posibilidad de no lograr alguna ganancia se encuentra en el escenario: 0,0. Así, las estrategias adecuadas pueden ir de: 1,1; 1,0; al 0,1; significando lo anterior que, la estrategia cuasi-indiferente, beneficia al verificador en tanto presenta un número mayor de pagos (1,1; 1,0; y 0,1) respecto al otro jugador, es decir, al falsador; por lo que dicha estrategia sólo podrá ser ejecutada por el verificador o proponente.

Por otra parte, la *Estrategia de Consecuencia* que se encuentra en la **Tabla 11**, organiza la matriz de pagos estableciendo al verificador como al jugador más beneficiado, pues dadas las condiciones iniciales que define el conectivo condicional (→), la única posibilidad de no lograr alguna ganancia se encuentra en el escenario: 1,0. Así, las estrategias adecuadas pueden ir de: 1,1; 0,1; al 0,0; significando lo anterior que, la estrategia de consecuencia, beneficia al verificador en tanto presenta un número mayor de pagos (1,1; 0,1; y 0,0) respecto al otro jugador, es decir, al falsador; por lo que dicha estrategia sólo podrá ser ejecutada por el verificador o proponente.

Por último, *Estrategia de Compromiso* que se encuentra en la **Tabla 14**, organiza la matriz de pagos estableciendo al falsador como al jugador más beneficiado, pues dadas las condiciones iniciales que define el conectivo bi-condicional (↔), las posibilidades de no lograr alguna ganancia se encuentran en los escenarios: 1,0 y 0,1. Así, las estrategias adecuadas pueden ir de: 1,1 y 0,0; significando lo anterior que, la estrategia de compromiso, beneficia al falsador en tanto presenta un número mayor de pagos (1,1 y 0,0) respecto al otro jugador, es decir, al verificador; por lo que dicha estrategia sólo podrá ser ejecutada por el falsador u oponente. Debiendo explicitar las razones por las que, pese a ser la misma posibilidad de ganancia o pérdida según la matriz de pago, el mayor beneficiado es el falsador; ello se debe a que el tipo de juego es de suma cero, pero además con información completa, es decir, como no es posible (por la naturaleza del juego mismo) que ambos jugadores obtengan la mayor ganancia o la mayor pérdida, al mismo tiempo, la única salida plausible es el compromiso al desacuerdo.

La siguiente tabla, sintetiza los párrafos previos, para facilitar al lector la comprensión de las ideas antes expuestas.

Tabla 20: Estrategia-Beneficio

Estrategia	Beneficia
Común	Falsador u Oponente
Cuasi-indiferente	Verificador o Proponente
De consecuencia	Verificador o Proponente
De compromiso	Falsador u Oponente

La segunda fase, que tiene como tarea la acción, plantea como objetivo el determinar, dentro de la estrategia específica, los movimientos permitidos y la justificación de las posibles restricciones, estas asociadas directamente con la mayor utilidad o ganancia según al rol del jugador que beneficia.

Tabla 21: Segunda fase en la construcción de reglas semánticas

Fase	Tarea	Objetivo
Fase 2	Acción	Determinar, dentro de la estrategia específica, los movimientos permitidos y la justificación de las posibles restricciones, éstos asociados directamente con la mayor utilidad o ganancia según al rol del jugador que beneficia.

En este punto, debemos recordar al lector que se trata de una semántica que permita transitar de la veritativa funcional clásica a una estratégica, ello en el campo de la lógica clásica. No es pues, un nuevo lenguaje o sistema lógico, sino más bien una forma de arribar a la enseñanza de la lógica clásica, por medios de valor didáctico. Así, tendríamos que, respecto a la *Estrategia Común,* el falsador podrá elegir o bien α o bien β.

Planteemos lo anterior de una manera más sencilla: ante una interacción determinada por una condición inicial (conectivo lógico principal) conjuntivo (^), el falsador podrá optar, o bien por el primer conyunto (α), o bien por el segundo conyunto (β), como sus posibles opciones de acción o movimiento. Ello se debe a que, la única condición de verdad para que la conjunción tenga un valor de verdad verdadero, es que ambos conyuntos sean verdaderos; trasladándose al ámbito de la semántica estratégica, donde el valor de verdad verdadero representa la mayor utilidad (V= 1) que el proponente o verificador tiene establecida como la forma del fin que busca, según su rol; así, el oponente o falsador, tendrá que elegir en oposición, quedando con ello α o β disponibles para elegir, por separado. Pues la estrategia común, beneficia al falsador en tanto presenta un número mayor de pagos (1,0; 0,1; y 0,0) respecto al otro jugador, es decir, al verificador.

Luego, ante una interacción determinada por una condición inicial (conectivo lógico principal) disyuntivo (˅), el verificador podrá optar, o bien por el primer disyunto negado (¬α), o bien por el segundo disyunto negado (¬β), como sus posibles opciones de acción o movimiento. Ello se debe a que, la única condición de verdad para que la disyunción tenga un valor de verdad falso, es <u>que ambos disyuntos sean falsos</u>; trasladándose al ámbito de la semántica estratégica, donde el valor de verdad verdadero representa la mayor utilidad (V= 1) que el proponente o verificador tiene establecida como la forma del fin que busca, según su rol; así, el proponente o verificador, tendrá que elegir en oposición, quedando con ello ¬α o ¬β disponibles para elegir, por separado. Pues la estrategia cuasi-indiferente, beneficia al verificador en tanto presenta un número mayor de pagos (1,1; 1,0; y 0,1) respecto al otro jugador, es decir, al falsador; por lo que dicha estrategia sólo podrá ser ejecutada por el verificador o proponente.

Posteriormente, ante una interacción determinada por una condición inicial (conectivo lógico principal) condicional (→), el verificador podrá optar, o bien por el antecedente (α), o bien por el consecuente negado (¬β), como sus posibles opciones de acción o movimiento. Ello se debe a que, la única condición de verdad para que la condicional tenga un valor de verdad falso, es <u>que el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso</u>; trasladándose al ámbito de la semántica estratégica, donde el valor de verdad verdadero representa la mayor utilidad (V= 1) que el proponente o verificador tiene establecida como la forma del fin que busca, según su rol; así, el proponente o verificador, tendrá que elegir en oposición, quedando con ello α o ¬β disponibles para elegir, por separado. Pues la estrategia de consecuencia, beneficia al verificador en tanto presenta un número mayor de pagos (1,1; 0,1; y 0,0) respecto al otro jugador, es decir, al falsador; por lo que dicha estrategia sólo podrá ser ejecutada por el verificador o proponente.

Finalmente, ante una interacción determinada por una condición inicial (conectivo lógico principal) bi-condicional (↔), el falsador podrá optar, o bien por la primera dirección del bi-condicional (α→β), o bien por la dirección inversa del bi-condicional (β→α), como sus posibles opciones de acción o movimiento. Ello se debe a que, la única condición de verdad para que la bicondicional tenga un valor de verdad verdadero, es que los valores de verdad sean iguales; trasladándose al ámbito de la semántica estratégica, donde el valor de verdad verdadero representa la mayor utilidad (V= 1) que el proponente o verificador tiene establecida como la forma del fin que busca, según su rol; así, el oponente o falsador, tendrá que elegir en oposición, quedando con ello α→β o β→α disponibles para elegir, por separado. Pues la estrategia común, beneficia al falsador que por que presente un número mayor de pagos (1,0 y 0,1) respecto al otro jugador, es decir, al verificador; como hemos establecido, es más bien por el tipo de juego del que se trata, donde no pueden existir dos vencedores ni dos perdedores al mismo tiempo.

La **Tabla 22** simplifica visualmente los movimientos por estrategia, permitiendo relacionar así a la estrategia con el jugador más beneficiado y restringiendo el tipo de movimientos que está habilitado a realizar, de acuerdo al rol que desempeñe en el juego; sin embargo, podemos observar que, en las líneas 2 y 3, de las estrategias cuasi-indiferente y de consecuencia que, los movimientos incluyen acciones con el conectivo monádico del que habíamos hablado brevemente páginas atrás.

Tabla 22: Movimientos por estrategia

Estrategia	Beneficia	Movimientos
Común	Falsador u Oponente	α o bien β
Cuasi-indiferente	Verificador o Proponente	¬α o bien ¬β
De consecuencia	Verificador o Proponente	α o bien ¬β
De compromiso	Falsador u Oponente	α→β o bien β→α

La intención no ha sido, en ningún momento, pasar por alto al conectivo monádico de la negación, sino aguardar hasta que se hiciera patente en la presente exposición, para traer a colación la relevancia y función que este conectivo plantea principalmente desde la Semántica de Teoría de Juegos de Hintikka (1983); donde: *G(~S) is played like G(S) except that the roles of the two players (as defined by these rules) are interchanged* (p. 3). El cambio de rol de los jugadores, supone no solamente el análisis de las proposiciones con negación o negadas, o simplemente el cambio de denominación, sino el compromiso con la forma del fin buscado que, dicho sea de paso, deberá necesariamente se opuesto al que venían desarrollando, así como las estrategias (que más adelante identificaremos como reglas semánticas) de las que se podrá echar mano.

La negación de una fórmula, atómica o molecular (simple o compuesta), habrá de indicar que "Naturaleza y Yo intercambiamos nuestros papeles y atribuciones, tal y como vienen éstos especificados en las reglas del juego y en otras cláusulas de la teoría, el juego prosigue respecto de [la fórmula]" (Acero J. , 1987, p. 432). Para cerrar este punto, la fase tercera de la construcción de las reglas semánticas, habrá de centrarse en la tarea definición que ya abordaremos en el siguiente punto en este mismo apartado.

2.2.2 Definiciones de las reglas

Sirviéndonos del *Game-Teorethical Semantics* de Jaakko Hintikka, el autor establece un conjunto de reglas que definen los juegos semánticos, sus juegos semánticos:

> *However, in GTS this is done in a way essentially different from Tarski's methods. A two-person zero-sum game G(S) is associated with each well-formed sentence S of any language L', where L' is L extended by adjoining to it a finite number of names of members of D. We shall call the two players Myself (or I) and Nature. The definition of G(S) is as follows:*
>
> *(G. A)* *If A is atomic, then I have won G(A) and Nature has lost if A is true. If A is false, Nature has won and I have lost.*
>
> *(G. &)* *$G(S_1$ & $S_2)$ begins by Nature's choice of S_1 or S_2. The rest of the game is $G(S_1)$ or $G(S_2)$, respectively.*
>
> *(G. v)* *$G(S_1 \vee S_2)$ begins by Myself's choice of S_1 or S_2. The rest of the game is $G(S_1)$ or $G(S_2)$, respectively.*

(G. U) *G((x)S[x]) begins by Nature's choice of a member of D. Let the name of the member chosen be "b". The rest of the game is then G(S[b]).*

(G. E) *G((Ex)S[x]) is defined likewise except that b is chosen by Mysel´f.*

(G. ~) *G(~S) is played like G(S) except that the roles of the two players (as defined by these rules) are interchanged.*[22] (1983, p. 3)

Las reglas (G. &) y (G. v) se presumen en estrecha relación con los conectivos conjuntivo y disyuntivo, respectivamente. Quedando, al menos aparentemente, los conectivos condicional y bicondicional sin aparente tratamiento. Por su parte, la regla (G. A) parece más bien una regla estructural, es decir, que marca el fin del juego al describir el resultado:

(G. A) Si A es una fórmula atómica, entonces "Yo mismo" habré cagado G(A) y "la naturaleza" habrá perdido si A es verdadero.

[22] La siguiente traducción es propia, con el objetivo de facilitar al lector no familiarizado con las definiciones lógicas. Cfr. con Hintikka (1983, 3).

> De cualquier forma, en la TJS esto se realiza de una forma esencialmente distinta a los métodos de Tasrki. Un juego bipersonal de suma cero J(S) se encontrará asociado con una oración [o fórmula] bien formada S de cualquier lenguaje L´, cuando L´ es L extendido por agregarle un número finito de nombres a los miembros de D. habremos de llamar a los dos jugadores Yo mismo (o yo) y Naturaleza. La definición del J(S) es la que sigue:
>
> (J. α) Si α es una oración atómica, entonces yo habré ganado el J(α) y la naturaleza habrá perdido si α es verdadero. Pero si α es falso, la naturaleza habrá ganado y yo habré perdido.
>
> (J. ^) J(α^β) comienza por la elección de la naturaleza si α o bien β. El resto del juego será J(α) o bien J(β), respectivamente.
>
> (J. v) J(αvβ) comienza por la elección de Yo mismo si α o bien β. El resto del juego será J(α) o bien J(β), respectivamente.
>
> (J. U) J((x)α[x]) comienza por la elección de la Naturaleza de un miembro de D. Eligiendo que sea el nombre del miembro "b". El resto del juego será entonces J(α[b]).
>
> (J. E) J((Ex)α[x]) Es definido de igual manera excepto que quien elige que "b", es Yo mismo.
>
> (J. ~) J(~α) se juega como J(α) excepto que los roles de los dos jugadores (tal como han sido definidos por estas reglas) son intercambiados.

> Pero si A es falso, “la naturaleza” habrá ganado y “Yo mismo” habré perdido.[23]

Juan José Acero nos habla de la regla (J. →)[24], regla que se dispone al análisis de las oraciones condicionales:

(J. si) Si en un juego semántico se considera una oración de la forma

Si A, B o bien B, si A

entonces Naturaleza y Yo intercambiamos nuestros papeles y atribuciones y el juego prosigue respecto de

A y neg[B]. (1987, p. 432)

El valor didáctico que podemos extraer de esta regla, es que nos permite incorporar a los contenidos la noción de equivalencia lógica; sabiendo que una fórmula condicional (α→β) es equivalente a (α˅¬β)[25]; mientras que la fórmula bi-condicional (α↔β) es equivalente a (α→β) ˄ (β→α)[26]. Resultando, en la fórmula condicional, que el conectivo principal es la disyunción, siendo dicho conectivo únicamente accionable por el verificador o Yo mismo; mientras que en la fórmula bi-condicional, el conectivo principal es la conjunción, resultando dicho conectivo posibilidad de movimiento por parte del falsador o Naturaleza. Correspondiéndose con la tabla que enseguida proponemos ya encaminados a la definición de las reglas semánticas de nuestra propuesta:

Tabla 23: En camino a la definición de las reglas semánticas

Estrategia	Conectivo	Beneficia	Movimientos
Común	˄	Falsador u Oponente	α o bien β
Cuasi-indiferente	˅	Verificador o Proponente	¬α o bien ¬β
De consecuencia	→	Verificador o Proponente	α o bien ¬β
De compromiso	↔	Falsador u Oponente	α→β o bien β→α

[23] La traducción es mía.
[24] Presentándola como (J. si) pero para que se mantenga la homogeneidad de las notaciones, nosotros emplearemos la notación (J. →).
[25] Por la regla de reemplazo denominada Implicación Material, que no discutiremos en esta investigación: (α→β) Ξ (α˅¬β).
[26] Por la regla de reemplazo denominada Equivalencia Material, que no discutiremos en esta investigación: (α↔β) Ξ (α→β) ˄ (β→α).

Respecto a las reglas (G. U) y (G. E), estas pertenecen al ámbito de la lógica de predicados, lógica también elemental, pero que supone otro tratamiento, que habrá de ser considerado en el contexto de la propuesta de la herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental. Por último, la regla (G. ~), como se ha establecido anteriormente, se trata de un intercambio de rol. Recurso que explotaremos más adelante.

La **Tabla 24** presenta las fases en la construcción de las reglas semánticas pertenecientes a la Semántica Formal Estratégica, las cuales habrán de regular los movimientos y sus restricciones en el contexto de los juegos bipersonales de suma cero con información completa que serán la base de la propuesta para la construcción de la herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental. A las tablas **19** y **21**, de asignación y acción, respectivamente, se agrega la fase 3, cuya tarea consiste en la definición de las reglas y tiene como objetivo el delimitar formalmente la Semántica Formal Estratégica a partir del establecimiento de las reglas de interacción y de las reglas de estructuración de los juegos por partidas.

Tabla 24: Fases en la construcción de reglas semánticas

Fases	Tarea	Objetivo
Fase 1	Asignación	Restringir a cada jugador, según el rol que éste desempeñe en el momento del desarrollo del juego en específico, el tipo de estrategia adecuada a partir de la utilidad que represente.
Fase 2	Acción	Determinar, dentro de la estrategia específica, los movimientos permitidos y la justificación de las posibles restricciones, éstos asociados directamente con la mayor utilidad o ganancia según al rol del jugador que beneficia.
Fase 3	Definición	Delimitar formalmente la Semántica Formal Estratégica a partir del establecimiento de las reglas de interacción y de las reglas de estructuración de los juegos por partidas.

Considerando que una definición inicial, afirma que, en el contexto de una teoría de juegos semánticos de α, asocia con cada enunciado o fórmula de α y cada interpretación de $\underline{\mathcal{E}}$, un juego que involucra a dos agentes (participantes que han sido referidos como “Yo mismo” y “Naturaleza”, pero que, a partir de ahora, identificaremos como verificador o proponente y falsador u oponente).

i) Los símbolos del lenguaje $\underline{\mathcal{E}}$:

a. Un conjunto numerable de letras proposicionales: {A, B, C,… X, Y, Z} o {p1, p2, p3,pn…}, como conjunto infinito numerable

b. Conectivos lógicos, monádico y diádicos: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

c. Signos de agrupación: {[(,)]}

Las reglas de estructuración, serán identificadas no sólo porque contienen las reglas de formación que postula la gramática del lenguaje $\underline{\mathcal{E}}$, sino que contemplará también la disposición de la estructura de la interacción, es decir, las características de la representación visual en el que se desarrolle el juego y se registren los movimientos.

ii) La gramática del lenguaje $\underline{\mathcal{E}}$:

a. Una expresión del lenguaje $\underline{\mathcal{E}}$ es una lista finita de símbolos de $\underline{\mathcal{E}}$.

b. Se definirá recursivamente las Fórmulas Bien Formadas (FBF) o fórmulas, considerándolas como fórmulas en juego.

c. Si α, β son FBF cualesquiera, también son FBF: $\{\neg\alpha, (\alpha\wedge\beta), (\alpha\vee\beta), (\alpha\rightarrow\beta), (\alpha\leftrightarrow\beta)\}$.

   1. En el juego, se considera un enunciado la fórmula $\alpha\wedge\beta$
   2. En el juego, se considera un enunciado la fórmula $\alpha\vee\beta$
   3. En el juego, se considera un enunciado la fórmula $\alpha\rightarrow\beta$
   4. En el juego, se considera un enunciado la fórmula $\alpha\leftrightarrow\beta$
   5. En el juego, se considera un enunciado la fórmula $\neg\alpha$

d. No hay más FBF.

De la disposición de la interacción que represente visualmente el desarrollo del juego.

iii) Representación visual del juego que deberá contener tanto la presentación extensiva del desarrollo del juego, como la descripción de cada uno de los movimientos.

a. Para ello se empleará un cuadrado que integre: i) la representación extensional de la fórmula en juego, ii) la representación narrativa de los movimientos realizados y, iii) la explicitación del resultado:

<table>
<tr><th>i) Representación extensional</th><th colspan="2">ii) Representación narrativa</th></tr>
<tr><td rowspan="9">FBF</td><td>#</td><td>Inicia el juego con una fórmula molecular</td></tr>
<tr><td>0</td><td>Proponente “propone valores”</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>n</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">iii) Resultado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">α=?: Gana ¿?</td></tr>
</table>

b. El proponente “propone” una asignación de valores estratégicos: {1,0} a cada variable proposicional de la fórmula en juego.

c. Si queda una fórmula atómica α, el juego concluye y se revisa el resultado.

La delimitación conlleva la definición del lenguaje, de un sistema de signos y símbolos para construir los juegos semánticos, por lo que es necesario introducir el concepto de interpretación.

iv) Una **interpretación** es el significado cada función que otorga a cada una de las variables o letras proposicionales del lenguaje el valor **1** o el valor **0**, pero no los dos al mismo tiempo, habrá de tener. Es decir, una interpretación de lenguaje $\underline{\mathcal{E}}$ del conjunto de fórmulas (FBF) α es:

$$\underline{\mathcal{E}} = < \{1,0\}, Val >, \text{ donde Val es tal que: Val} : \alpha \rightarrow \{1,0\}$$

Situados en una lógica bivalente, desde las interpretaciones de los valores estratégicos de las fórmulas en juego, nos encontraríamos entonces, con las reglas vigentes para todo juego, relacionando con el tipo de estrategia (común, cuasi-indiferente, de consecuencia o de compromiso) que presentamos en apartados previos:

a. <u>Estrategia común</u> / **Regla 1**

Def. semántica de: α^β

α^β (1) sii α (1) y β (1)

Con los valores de verdad: {1,0,0,0}

Dado lo anterior, “0” (el falsador), obtiene la mayor utilidad, pues “0” aparece un con mayor frecuencia (hay más posibilidades).

Regla 1: α^β “0”, que es el falsador u oponente: elige o bien α, o bien β

b. <u>Estrategia de compromiso</u> / **Regla 2**

Def. Semántica de: $\alpha \leftrightarrow \beta$

$\alpha \leftrightarrow \beta$ (1) sii α (1,0) y β (1,0)

Con los valores de verdad: {1,0,0,1}

Dado lo anterior, “0” (el oponente), se espera cooperatividad, es decir, deberían ser coincidentes los valores.

Regla 2: $\alpha \leftrightarrow \beta$ “0”, que es el falsador u oponente, elige o bien $\alpha \rightarrow \beta$, o bien $\beta \rightarrow \alpha$

c. <u>Estrategia cuasi-indiferente</u> / **Regla 3**

Def. Semántica de: $\alpha v \beta$

$$\alpha v \beta \ (0) \text{ sii } \alpha \ (0) \text{ y } \beta \ (0)$$

Con los valores de verdad: {1,1,1,0}

Dado lo anterior, “1” (el verificador), obtiene la mayor utilidad, pues “1” aparece un con mayor frecuencia (hay más posibilidades).

Regla 3: $\alpha v \beta$ “1”, que es el verificador o proponente, elige o bien $\neg\alpha$, o bien $\neg\beta$

d. Estrategia de consecuencia / **Regla 4**

Def. Semántica de: $\alpha \rightarrow \beta$

$\alpha \rightarrow \beta$ (0) sii α (1) y β (0)

Con los valores de verdad: {1,0,1,1}

Dado lo anterior, “1” (el verificador), obtiene la mayor utilidad, pues “1” aparece un con mayor frecuencia (hay más posibilidades).

Regla 4: $\alpha \rightarrow \beta$ “1”, que es el verificador o proponente, elige o bien α, o bien $\neg \beta$

e. Cambio de Roll / **Regla 5**

Def. Semántica de $\neg\alpha$

$\neg\alpha$ (1) sii α (0)

Sus valores de verdad son: {1,0}

Regla 5: ¬α equivale a un cambio de roll, y el juego continúa a partir de α

Las reglas establecidas para la SFE, guardan relación con las que Hintikka propone en su GTS, sin embargo y, luego del desarrollo de los apartados previos, se fundamenta y justifica la necesidad de ajustar las reglas a una semántica estratégica propiamente dicha. Buscando con ello que, puedan considerarse los conectivos lógicos de la lógica proposicional en su totalidad, pero también se comprendan los movimientos lícitos que cada uno de los jugadores puede realizar en el contexto de un juego, a partir del rol que le corresponde desempeñar.

Tabla 25: Comparación entre reglas de GTS y SFE

GTS		SFE	
Regla	**Descripción**	**Regla**	**Descripción**
(G.&)	α^β: falsador elige: α,β	1	α^β: falsador u oponente elige: α,β
		2	α↔β: falsador u oponente elige: α→β,β→α
(G.v)	αvβ: verificador elige: α,β	3	αvβ: verificador o proponente elige: ¬α,¬β
(J. si)	α→β: verificador elige: ¬α, β	4	α→β: verificador o proponente elige: α,¬β
(G.~)	¬α: cambio de rol y sigue α	5	¬α: cambio de rol y continua el juego con α

Únicamente las reglas 1y 5 se mantienen tal como las plantea Jaakko Hintikka en (G.&) y(G.~). En este sentido, Hintikka y Sandu plantean que “Es importante darse cuenta de que nuestras reglas de inferencia son, en realidad reglas definitorias” (2008, p. 27), como reglas definitorias evalúan la estructura de las fórmulas lógicas, es decir, prueban sintácticamente la validez. En cambio, las reglas estratégicas muestran que “una lógica que sea teóricamente satisfactoria debe disponer de una componente estratégica” (2008, p. 29).

Contando con 3 grupos de reglas, dedicaremos la mayor parte del trabajo a las reglas de elección, que son las de la Semántica Formal Estratégica que acabamos de presentar; así como las de estructuración, que se expusieron previamente.

1. **Reglas de elección**
2. **Reglas de extensión**
3. **Reglas de estructuración**

Ahora bien, retomando la regla (J. α) de Hintikka: Si α es una oración atómica, entonces "Yo mismo" habrá ganado el J(α) y "la naturaleza" habrá perdido si α es <u>verdadero</u>. Pero si α es <u>falso</u>, "la naturaleza" habrá ganado y "Yo mismo" habré perdido. Así el verificador o proponente, habrá de buscar el valor estratégico=1; mientras que el falsador y oponente, tendrá como la forma del fin buscado el valor estratégico=0; tal como lo hemos planteado anteriormente. Así, habrá ganado quien obtenga su valor estratégico en la fórmula atómica resultante del proceso de decisión en el desarrollo del juego. Estableciendo, inicialmente, la siguiente secuencia de pasos en la interacción:

1. "Se proponen valores" o "se propone enunciado y se sortean valores"
2. Se juega según las reglas
3. Se representa extensional y narrativamente cada partida
4. Se llega a un resultado cuando queda una fórmula atómica
5. El resultado plantea:
    a. Verificador gana
    b. Verificador gana en papel de falsador
    c. Falsador gana
    d. Falsador gana en papel de verificador

2.3 SFE y su uso en la lógica elemental

Retomando las ideas centrales de la tesis, expuestas en apartados anteriores en donde se afirma que, "ante situaciones reales que tienen una estructura de interés, el agente epistémico se desenvuelve a partir `de un conjunto determinado´ de procedimientos en el contexto de un juego en el que los jugadores deberán comportarse de manera mínimamente racional de acuerdo a la forma del fin buscado.

De esta manera, las fórmulas lógicas expresadas en el L_0[27] estarán representando las situaciones reales en el que tienen lugar determinadas interacciones; por su parte, la forma lógica que buscará no caer o generar contradicción representará la estructura de interés (claro, nadie juega para perder; a menos que esa sea la preferencia acordada y a la cual los jugadores se comprometen) que tiene como agentes epistémicos a los jugadores, esto es, a quienes ejecutan un tipo de racionalidad, en el que las funciones de utilidad que, vendrían a sustituir las funciones de verdad compondrían al conjunto determinado de procedimientos desde donde se desenvolvería la interacción. Dicha interacción en la que verificador y falsador ejecutan una acción o toman una decisión estaría representando al contexto del juego en el que, para la lógica proposicional con lenguaje de orden cero, contaríamos con una Semántica Formal Estratégica bajo la premisa en la que "las interacciones entre dos agentes epistémicos frente a un problema de decisión en juegos bipersonales de suma cero con información completa, representan el comportamiento racional estratégico para la obtención de un resultado deseable: la forma del fin buscado.

Antes de comenzar a trabajar la SFE en su aplicación didáctica será necesario situarnos en el nivel del lenguaje 0, esto es, L0. Iniciar en la SFE desde la lógica proposicional nos permitirá identificar el valor de la estrategia frente a una fórmula en juego a nivel proposicional, que opera en las relaciones o condiciones iniciales

[27] Las cuales podrían extenderse a la lógica de predicados o L_1, pero que, buscando que la propuesta didáctica no fuerce una experiencia formativa que comprometa la comprensión de las relaciones entre predicados, cuantificadores, dominios y contra dominios, etcétera; sin antes asegurar que las bases de la lógica proposicional han sido pertinentemente asimiladas.

dictadas por los conectivos lógicos. Los conectivos lógicos que, describen el tipo de relación que guardan proposiciones que se conjuntan, disyuntan, implican e inclusive se bi-implican o resultan en su dimensión semántica, expresivamente equivalentes.

En este momento, cabe plantearnos las siguientes preguntas: ¿cuál es el objetivo del juego?, el objetivo que cada uno de los juegos que las fórmulas individuales plantean; ¿qué se pretende probar respecto a la fórmula en juego?; y, finalmente ¿cómo podría echarse mano en la SFE en la lógica elemental?

Si en un juego bipersonal de suma cero con información completa, el objetivo es ganar, poner en juego una fórmula lógica amplía dicho objetivo, llevándolo a buscar probar que los movimientos realizados o decisiones tomadas conducen, principalmente al verificador o proponente al resultado esperado. Como se trata de una semántica estratégica y, de la interacción puede resultar ganador el verificador (perdiendo con ello automáticamente el falsador); también puede resultar ganador el falsador (llevando a perder por la misma definición del juego, al verificador), pero no pueden ni ganar ni perder ambos jugadores al mismo tiempo.

El ganar el juego, supondría que el jugador vencedor (proponente u oponente) hubo de desarrollar una estrategia, a través de los movimientos propios y del adversario, una estrategia ganadora. La noción de prueba, en este sentido, se definiría como la secuencia de acciones (objetos abstractos que se pueden realizar de distintas maneras, como objetos formales, desde el punto de vista de la decisión) que permiten arribar a la forma del fin buscado.

Aunado a lo anterior, la lógica clásica o elemental puede hacer uso de la SFE como recurso teórico para proponer un recurso didáctico que eficientice la enseñanza de la lógica elemental prescindiendo de una semántica veritativa funcional pero manteniendo una semántica bivalente como la que propone la semántica estratégica, bordeando así el concepto de ´verdad´, tan problemático no sólo para la lógica, sino para la filosofía misma.

2.3.1 *Decidir es probar satisfacibilidad en lógica*

La satisfacibilidad, tal como lo plantean Manzano y Huertas (2004) es "el concepto matemático preciso que corresponde al intuitivo de consistencia[28], que se predica tanto de conjuntos de fórmulas como de fórmulas" (p. 59). En el caso, por ejemplo, de los árboles o *Tablueux* Semánticos como métodos para evaluar la satisfacibilidad de una fórmula, supone un tratamiento para el despliegue semántico de las condiciones de verdad de la fórmula a evaluar. Es decir, se trata de identificar al menos una interpretación en los valores estratégicos (1,0) en la que no se derive de ella ninguna contradicción.

Para decidir si una fórmula o un conjunto de fórmulas es satisfacible o no, debemos encontrar una asignación de valores estratégicos bajo la cual todas las fórmulas sean adecuadas, de acuerdo a la forma del fin buscado. En este sentido, si dicha asignación de valores satisface las condiciones determinadas, tendríamos una estrategia ganadora o, un modelo de dicho conjunto de fórmulas.

1. Una fórmula α es **satisfacible** sii hay, al menos, una interpretación de $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E}(\alpha) = 1$
2. Un conjunto de fórmulas Γ es **satisfacible** sii hay, al menos una interpretación $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E}(\beta) = 1$ para cada fórmula $\beta \in \Gamma$
3. Una fórmula α es **insatisfacible** sii, no hay, al menos una interpretación de $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E}(\alpha) = 1$; también llamada contradicción

Como tenemos en cuenta que, el conjunto de fórmulas es finito (decidible), puede probarse su satisfacibilidad. El valor estratégico asignado = 1, dado que, como ha sido ya expuesto ampliamente a lo largo de este segundo apartado, significa o se define como la mayor utilidad o ganancia, a la que el verificador esperará alcanzar, enfrentándose en cada movimiento a un contrincante (falsador) que buscará el valor opuesto = 0.

[28] Aunque las mismas autoras especifican que, aunque también es denominado como "consistencia semántica" no debe confundirse con su acepción sintáctica.

El juego así persigue, realizar no una prueba sintáctica (de validez o consistencia), sino una prueba que permita, dada una interpretación de $\mathcal{E}$ a partir de una asignación de valores propuestos por el verificador a una fórmula en juego, determinar si dicha asignación de valores satisface las condiciones determinadas, teniendo así una estrategia ganadora o, un modelo de dicha fórmula o conjunto de fórmulas.

Para determinar si se cuenta con una estrategia ganadora o un modelo de dicha fórmula o conjunto de fórmulas, debemos considerar que, dada una interpretación $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E}(\alpha) = 1$, decimos que $\mathcal{E}$ satisface a la fórmula α o que α es una estrategia adecuada en $\mathcal{E}$; o también que $\mathcal{E}$ es modelo de la fórmula α.

La tautología es otra propiedad lógica de los enunciados o conjuntos de enunciados que es necesario considerar en un análisis semántico de las fórmulas en juego. De forma que, "una **tautología** es una fórmula tal que toda asignación la hace verdadera" (Badesa y otros, 1998, p. 138); esto es, los valores resultantes, independientemente de los valores asignados (*v*) serán todos verdaderos. El aludir a la noción de *tautología*, tiene como finalidad presentar la relación de equivalencia entre las semánticas en la lógica proposicional de "valores resultantes verdaderos" con respecto a la teoría de juegos en el que la "estrategia adecuada" será aquella cuyos valores resultantes sean medibles en relación al éxito de la estrategia, más que al valor de verdad que porten.

Para representar una tautología, será necesario jugar todas las asignaciones en todas las combinaciones posibles en una fórmula en juego; y en todas ellas cada vez. Por ello, en este momento atinaremos a puntualizar que, si bien una tautología es una fórmula cuyas interpretaciones, cualesquiera y cuantas quiera que sean, son todas verdaderas sin importar el valor de verdad de las proposiciones simples que la componen; es decir, se cumple el valor de verdad verdadero en todas las combinaciones que la componen y en todos los casos posibles; el probar la satisfacibilidad de la expresión en juego resulta de mayor valor didáctico-pedagógico, aunque no se restringe a éste.

2.3.2 SFE como herramienta didáctica

En el primer apartado se abordó el valor didáctico de la decidibilidad y del principio del minimax. En el primer caso, hablamos que se trata de un juego con un número finito de pasos, lo que permite centrarnos en un método de enseñanza a través del cual podemos vincular la práctica docente y la didáctica, en contenidos que suelen dificultarse para los estudiantes de nivel superior, específicamente en el grado de filosofía.

El valor didáctico de la decidibilidad, estriba en que, a partir de la consideración de un numero finito de pasos, es factible diseñar una herramienta didáctica que facilite la comprensión de las reglas semánticas que ofrecen una vía de acceso al estudio de las inferencias no ya desde su estructura, sino de los resultados que las relaciones que los conectivos lógicos van generando, dirigidos éstos a probar la satisfacibilidad de una fórmula o un conjunto de éstas.

Mientras que el valor didáctico del principio del minimax nos aproxima a una semántica estratégica, donde hablaremos de estrategia ganadora y sus criterios; contando con los valores relativos al rol década jugador

El principio del minimax en su valor didáctico, nos permite establecer el mínimo como 0 (cero) y el máximo como 1 (uno); esto es, los rangos límite de valores se encontrarían se la siguiente manera:

Min = 0 = falsador

Max = 1 = verificador

Como un principio, el minimax permite la aproximación conceptual a los principios de la lógica clásica como: identidad, no contradicción y tercero excluso, entre otros. Por ejemplo, no admite otros valores que no sean: 1,0; de acuerdo a los criterios del principio del tercero excluso, eliminando así las posibilidades de un empate que, dicho sea de paso, habría de contravenir los rasgos del juego de suma cero, como un juego que establece que la ganancia de un jugador en un juego bipersonal, supone la pérdida del otro jugador.

La SFE que proponemos, se plantea como una herramienta didáctica pues, siguiendo las ideas de Hintikka y Sandu, "(…) en los juegos semánticos, los únicos conjuntos de información importantes son los debidos al conocimiento o desconocimiento, por parte del jugador, de lo ocurrido de relevancia en jugadas anteriores a lo largo de la misma partida" (2008, p. 35); pues a pesar de:

> (…) su natural estructura, los juegos semánticos no están desprovistos de sutilezas. El verificador gana la partida del juego semántico si y solamente si el juego concluye con un enunciado atómico verdadero [= 1, para la semántica estratégica][29]. El falsador es quien gana en caso de concluir con uno falso [= 0, para la semántica estratégica][30]. No obstante, la verdad de un enunciado no puede definirse como la victoria del verificador en el juego G(S), sino como la existencia de una estrategia ganadora para el verificador. Esta distinción podría compararse con la existente dentro del enunciado verificado y enunciado verificable". (p. 35)

Como herramienta didáctica, la SFE nos habrá de permitir transitar un análisis inverso al sentido del desarrollo natural del juego: dese el resultado obtenido, hacia la representación extensional y narrativa de cada movimiento en la partida, explorando las experiencias de juegos previos y las elecciones realizadas en cada acción; ya sea que el juego haya resultado exitoso para el verificador, el falsador, el verificador en el rol del falsador o el falsador en el papel del verificador.

Perder el juego supone un recurso didáctico de valor pedagógico en tanto que obliga a la rectificación para el mejoramiento de la estrategia.

---

[29] Los corchetes son nuestros.
[30] Los corchetes son nuestros.

2.3.2.1 Limitaciones

Como todo conjunto de símbolos, como todo lenguaje o sistemas lógicos no agotan todas las posibilidades en lo que respecta a la representación de los mundos del lenguaje o mundos posibles. Si el sistema es consistente, no puede ser completo; si es sistema es completo, no puede ser consistente. Aun así, se han desarrollado sistemas lógicos que buscan evaluar, probar y mejorar la forma en la que razonamos, la manera en la que un proceso de pensamiento se lleva a cabo.

Existirán oraciones y contenidos del lenguaje que escapen a la representación formal de las interacciones reguladas por la SFE; en el que, al menos hasta el desarrollo de nuestra propuesta comprende a la lógica proposicional. La SFE no considera las lógicas paraconsistentes, o inductivas; no aborda las lógicas contraintuitivas o de relevancia, sin embargo, es un comienzo con un objetivo didáctico que permita transitar de la semántica veritativa funcional a una semántica estratégica, pero que no rebasa las fronteras de la semántica bivalente.

La primera línea de la **Tabla 26**, plantea el tipo de juego y el sistema del lenguaje en el que se centra la SFE, quedando, al menos como proyectivamente, los siguientes sistemas de lenguaje, como susceptibles de tratamiento desde la misma Teoría de Juegos.

Tabla 26: Limitaciones de la SFE

Categoría	Sistema L	Constantes	Juegos	Característica	Descripción
Cualidad	Proposicional	¬, ∧, ∨, →, ↔	Bipersonal	Suma cero	Máximo-mínimo
					Mínimo-máximo
Cantidad	Cuantificacional	∀	No Cooperativos (con información completa)	Estáticos	Decisión simultánea, en el que cada jugador busca ganar
		∃		Dinámica	Suma Cero, en el que

					uno gana lo que el otro pierde
Posibilidad	Modal	□	No Cooperativos (sin información completa)	Necesidad	_Hintikka*_
		◇		Posibilidad	_Hintikka*_

Ahora bien, si bien la SFE presenta limitaciones, no podemos perder de vista sus virtudes, en tanto estas estarán estrechamente relacionadas con la tesis que nuestra investigación defiende: *que la semántica formal basada en estrategias ganadoras de juegos o interacciones es un método eficiente para la construcción de una propuesta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental; y para comprender de mejor manera que la denominada Semántica Formal Estratégica posee un valor didáctico para la enseñanza de la lógica elemental, en la que ante situaciones reales –sentencia como actividad enunciativa- que tienen una estructura de interés, el agente epistémico se desenvuelve a partir de un conjunto determinado de procedimientos en el contexto de un juego en el que deberá comportarse, o bien cooperativamente de acuerdo a la preferencia común, o bien no cooperativamente; se precisarán los parámetros de la racionalidad estratégica, donde la decisión habrá de entenderse como un modo de probar la satisfacibilidad en una fórmula en juego.*

2.3.2.2 Virtudes

Si la lógica elemental enseñada desde su enfoque sintáctico es problemática, entonces podemos partir del enfoque semántico basado en teoría de juegos. Si la teoría de juegos fundamenta la elección racional, entonces se postula la importancia del razonamiento estratégico. Por su parte, si el razonamiento estratégico es definido como un acto o movimiento dirigido que se corresponde con la forma del fin buscado o estrategia ganadora, entonces podemos representarlos como un conjunto de reglas estratégicas. Así, si las reglas estratégicas articulan la Semántica Formal Estratégica, entonces pueden emplearse como método eficiente para la enseñanza de la lógica elemental, a partir de una propuesta didáctica. Por lo tanto, si en un juego basado en estrategias ganadoras el movimiento es racional, entonces la Semántica Formal Estratégica es un método eficiente para la enseñanza de la lógica elemental.

Una semántica estratégica, distinta a la semántica veritativa funcional pero que mantenga su bivalencia, dados los problemas que el concepto de verdad conlleva no sólo lógica, sino filosóficamente hablando; habrá de facilitar una vía de acceso al estudio de la lógica que, desde la gamificación promete el desarrollo de herramientas didácticas y que, baste decir que no se inauguran con esta investigación, sino que se agrega a ella. En el siguiente apartado, nos avocaremos a dicha empresa.

TERCERA PARTE

APARTADO 3: FUNDAMENTOS Y ESTRUCTURA DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Propuesta Didáctica

Nuestro tercer apartado, dedicado a la propuesta didáctica de la herramienta para la enseñanza de la lógica elemental basada en la Semántica Formal Estratégica, obedece a la búsqueda por verificar la tercera hipótesis de nuestra investigación, la cual plantea la factibilidad de construir dicha herramienta didáctica; teniendo en cuenta que, si las reglas estratégicas articulan la Semántica Formal Estratégica, entonces pueden emplearse como método eficiente para la enseñanza de la lógica elemental.

Desde Juan Amós Comenio (1998), la didáctica ha emergido como una rama estrechamente vinculada y dependiente de la pedagogía en tanto se trata de la organización escolar enfocada a la búsqueda de métodos y técnicas para mejorar la enseñanza. En el ámbito de la enseñanza de la lógica, ello requiere también de una didáctica específica (Bolívar, 2008) que, partiendo del reconocimiento de los fines del contenido o los contenidos de la enseñanza, se sitúe en un contexto también determinado.

La didáctica requiere estrategias de enseñanza, y éstas a su vez, "son formas de llevar a cabo metas…Son conjuntos de acciones identificables, orientados a fines más amplios y generales…"; en este sentido, "Las estrategias son… motivadas individualmente, orientadas culturalmente y adaptadas en la interacción con otros" (Woods, 1985, pp. 121-122); como herramienta, nuestra propuesta no organiza un contenido curricular amplio propio de un plan de estudios a nivel universitario, sin embargo, puede formar parte de los contenidos de las unidades de competencia que la integren.

Galetto y Romano (2012) proponen una serie de acciones orientadas a lo que han denominado como la aplicación de llamado método científico con miras a la construcción del conocimiento, de experiencias de aprendizaje. A ello agregan que:

> La didáctica se pregunta cómo se forma el pensamiento o la consciencia crítica. Podemos responder a esta cuestión con una posición articulada, que comprenda diversas estrategias de acción y una compleja activación de operaciones mentales que deben ser desarrolladas. El modo en que se desarrollen depende precisamente del tiempo, del contenido y de las acciones que se inicien. Incluso la elección de las operaciones mentales que deben desarrollarse depende de una atenta consideración de todo lo que es necesario para acercarse a una consciencia crítica. (2012, p. 15)

Marcando esencialmente la experimentación como estrategia didáctica como forma de alcanzar un aprendizaje de las matemáticas, y que podemos considerar identificando: i) un punto de partida, ii) la perspectiva pedagógica, iii) los mecanismos de implementación, y iv) los elementos que deben considerarse para el diseño de la herramienta didáctico-pedagógica.

3.1 Enseñanza de la lógica, una tradición didáctica infravalorada

La lógica, como "algo más que un simple juego formal con signos que posee su sentido en sí mismo (…)" (Seiffert, 1977, p. 19), o como una rama de la filosofía que tiene por objeto el estudio de "las leyes a las que debe sujetarse el pensamiento en su búsqueda de la verdad" (Sanabria, 1986, p. 21); que tiene por tarea el "examinar los diversos procedimientos teóricos y experimentales que se utilizan para la adquisición del conocimiento científico y de analizar la estructura de la ciencia misma" (De Gortari, 1972,p. 13), así como el estudio de "nuestros pensamientos (conceptos, juicios, raciocinios) solamente desde el punto de vista de su estructura, es decir, desde el punto de vista de su *forma lógica*" (Gorski y Tavants, 1960, p. 15). Inclusive desde una perspectiva más contemporánea, como el estudio de la inferencia (Suppes, 1966; Suppes y Hill, 2015), de las formas válidas del razonamiento (Copi, 1979), de los métodos y principios para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto (Copi y

Cohen, 2013), o como el estudio de la consecuencia (Manzano y Huertas, 2004); entre muchas otras formas de concebir a este campo de conocimiento tan prominente y en constante expansión.

Procurarnos de herramientas o modelos que nos permitan mejorar la forma en la que organizamos los contenidos de nuestro pensamiento, eficientizando la manera en la que damos e incluso pedimos razones, estructurando de manera clara y ordenada nuestros actos de habla según las intenciones, pretensiones y búsquedas, debería de ser considerado un contenido no sólo de carácter obligatorio en todos los sistemas y niveles educativos; sino también necesario. Imprescindible para la presentación oral y escrita de nuestros argumentos, defensas y alegatos; campo fértil para la investigación y el desarrollo tecnológico, la lógica no sólo forma parte de nuestros usos del discurso, los organiza.

Y en ese sentido, "La enseñanza y el estudio de la lógica en la formación del filósofo habrán de tocar también los aspectos relacionados al modo en que generan y expresan sus propios procesos de pensamiento, reflexionando, argumentando y generando producciones principalmente escritas (…)" (Ruiz-Rincón, 2018, p. 127)

> Hablar respecto a las rutas para el fortalecimiento de la enseñanza de la lógica, como aquellas condiciones de invisibilidad de la lógica desde la academia, es un modo de hacer referencia a las restricciones a las que la lógica, la filosofía o las humanidades en general se encuentran en los ámbitos institucionales de la educación formal, en donde los discursos hegemónicos e ideologías imperantes marcan las prioridades de las políticas educativas a un nivel macro como micro. (Ruiz-Rincón, 2018, pp. 131-132)

En México, existe una organización social denominada "Académia Mexicana de Lógica" que, además de convocar anualmente a encuentros sobre didáctica y simposios sobre investigación lógica y argumentación, así como desarrollos o aplicaciones, tambien organizan los talleres de "Didáctica de la Lógica" (TDL), que se presentan como un espacio de encuentro y discusión, así como de socialización[31] de

[31] Sin un sitio Web institucional o con un dominio propio, puede consultarse al respecto en: https://amlogica.webnode.mx/eidl-siila-2022/

diversas líneas en torno a la enseñanza, recursos y estrategias didácticas, y configuraciones metodológicas con las cuales se imparten o se proponen impartir contenidos de lógica en los diversos niveles educativos.

El insistir no sólo en el carácter axiológico de la lógica como disciplina, aunque no reductiva y estrictamente filosófica, sino en el valor de su reconocimiento de su lugar en el espacio curricular, buscando o generando vías alternas que dinamicen su enseñanza y las estrategias para su aprendizaje:

> (…) desde la misma institucionalización de las prácticas formativas en filosofía, particularmente de la lógica, ha encontrado vías alternas de realización que ejecuta desde la misma práctica docente, en donde, al hacer agencia se reconfigura el curriculum y se desarrollan trayectorias académicas que harán las veces de portavoces para la atención de aquellos contenidos que no son "priorizados" o integrados en los esquemas de formación en el campo educativo. (Ruiz-Rincón, 2018, p. 132)

Por lo anterior, nos aventuramos a afirmar que, en un espacio sin una tradición filosófica, no puede tenerse expectativa respecto a una tradición en lógica. En este sentido, insistimos no sólo en el valor del desarrollo de las investigaciones lógicas y en lógica, sino en la importancia de su enseñanza, una enseñanza orientada al reconocimiento del papel activo del estudiante como futuro investigador o investigadora de este campo, que permitirá ampliar las fronteras de esta disciplina.

3.2 Perspectiva didáctico-pedagógica para la propuesta de la SFE

La propuesta para el desarrollo de la herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental se habrá de fundamentar en el modelo educativo basado en competencias, considerando un aprendizaje significativo en un ambiente colaborativo.

No se trata de una asimilación de contenidos, sino de la movilización de información en aras de resolver problemas. En este sentido, el modelo educativo basado en competencias, propone una ruta formativa que permite la conjunción de habilidades, actitudes y aptitudes frente a situaciones que demandan a los estudiantes el actuar, comportarse o enfrentarse a vicisitudes que les motiven a desplegar no solo habilidades y conocimientos, sino también valores, motivaciones y comportamientos.

Comprendiendo a las competencias como:

> (…) un modo de saber actuar de manera pertinente en situaciones y contextos en los que las personas se enfrentan a problemas con un claro criterio de calidad, para lo cual se articulan y movilizan recursos internos (conocimientos, experiencias, etc., de contexto y de redes de datos, de personas), estando en condiciones de dar razón de sus decisiones y actuaciones, y de responsabilizarse de los efectos e impacto de estos. (Belaunzaran Mendizabal, 2019, 155)

Dichas competencias habrán de encontrar un nicho idóneo de prácticas en la acción, ya se trate de competencias genéricas, disciplinares, profesionales, etcétera. En el contexto de la propuesta de la SFE, se considera la perspectiva didáctico-pedagógica del aprendizaje significativo. Específicamente recuperado de la propuesta de D. B. Gowdin (1990).

> Como elementos de un evento educativo, el profesor, el aprendiz y los materiales educativos del currículum constituyen un eje básico en el que, partiendo de éstos últimos, las personas que lo definen intentan deliberadamente llegar a acuerdos sobre los significados atribuidos. "La enseñanza se consuma cuando el significado del material que el alumno capta es el significado que el profesor pretende que ese material tenga para el alumno." (Gowin, 1981, pág. 81). Gowin también aporta un instrumento de metaaprendizaje: la V heurística o epistemológica. (Rodríguez Palmeto, 2004, s/n)

Rodríguez Palmeto (2004), relata la importancia del aprendizaje significativo, toda vez que éste se coloca en la dinamización de contenidos de información que de modo intencional se dirigen hacia el logro de una meta u objetivo educativo. En este sentido, la "predisposición para aprender y material potencialmente significativo que, a su vez, implica significatividad lógica de dicho material y la presencia de ideas de anclaje en la estructura cognitiva del que aprende" (s/n); lo que permitírá, no solamente comprender naturaleza de la herramienta didáctica, sino también apropiarse del valor didáctico de los conceptos fundamentales que en lógica, permiten operar tanto a nivel operativo como a nivel metalógico. De esta manera, para Moreira:

> Gowin ve una relación triádica entre profesor, materiales educativos y aprendiz. Para él, un episodio de enseñanza-aprendizaje se caracteriza por compartir significados entre alumno y profesor con respecto a conocimientos "vehiculados" por los materiales educativos del currículum. Usando materiales educativos del currículum, alumno y profesor buscan congruencia de significados. (1997, 16)

Por ello, más allá de la amplia e importante propuesta teórica que Gowin hace respecto al aprendizaje significativo, resulta relevante para los intereses de nuestra investigación, el detenernos en la técnica Q-5 o la técnica de las cinco preguntas que se recomiendan a los estudiantes para evaluar los alcances y esfuerzos realizados en el contexto del proceso de enseñanza-aprendizaje.

The Q-5 Technique

1. *What is your focus question? Or questions? What event / object does the focus question focus on? Describe the context in which questions have meaning.*
2. *What concepts do you use to frame the focus question? Can you make a concept map of your key concepts? Are there any principles to give order and coherence to these concepts?*
3. *What methods, procedures, technics will you use to try to answer your questions? What events, specifically, will you make records of?*
4. *What would count as an answer to your question(s)?*

5. *What value (Justification) does your research have?*[32] (Gowin, 1990, 325)

Así, para evaluar el aprendizaje significativo, es posible trazar, a partir de la técnica de las 5 preguntas o Q-5, una serie de interrogantes que permitan, por un lado a los estudiantes, reconocer los aprendizajes significativos; y por otro lado, evaluar las herramientas o materiales didácticos dispuestos para la experiencia curricular, sin dejar fuera la participación del docente como mediador entre los instrumentos didácticos, las trayectorias formativas y las experiencias de aprendizaje significativo.

Así, la reformulación de la Q-5 nos permitiría establecer las siguientes interrogantes para un trabajo revisionista de las fórmulas en juego:

1. ¿Cuál es el resultado del juego?, es decir: ganó el verificador, el falsador, el falsador en el rol del verificador o el verificador en el rol del falsador.
2. ¿Puedes reconstruir descriptivamente el desarrollo del juego?
3. ¿Qué reglas fueron empleadas, porqué y por quiénes?
4. ¿Quién desarrollo la estrategia adecuada y por qué?
5. ¿Qué hubieras hecho diferente?

Sobre estas preguntas, regresaremos más adelante, ya que es necesario centrar que, las experiencias de aprendizaje cooperativo, en el modelo educativo basado en competencias, permitirá la integración de elementos tangenciales a la participación de los agentes decisores en el contexto de los juegos bipersonales de suma cero con información completa.

Tendríamos pues, una interacción en dos vías; ya sean dos estudiantes o agentes epistémicos que habrán de desarrollar sus estrategias a partir del rol asignado

[32] La siguiente traducción es propia: La Técnica Q-5.

1. ¿Cuál es tu pregunta central o preguntas centrales?; es decir, ¿A qué evento/objeto se enfoca la pregunta central? Describe el contexto en el que las preguntas planteadas tienen significado.
2. ¿Qué conceptos utiliza para contextualizar la pregunta central? ¿Puedes hacer un mapa conceptual de tus conceptos clave? ¿Existen principios que den orden y coherencia a estos conceptos?
3. ¿Qué métodos, procedimientos, técnicas utilizarás para tratar de responder a sus preguntas? ¿De qué eventos, específicamente, harás registros?
4. ¿Qué contaría como respuesta a tu(s) pregunta(s)?
5. ¿Qué valor (justificación) tiene tu investigación? (Gowin, 1990, 325)

por sorteo o elección, pero en donde distinguirán entre el proponente (verificador) y el oponente (falsador). O bien, en desarrollos posteriores de esta herramienta didáctica, un estudiante y el software que habrá de diseñarse para emular el escenario del juego, con la particularidad de que, bajo estas condiciones, el software iniciará jugando en todo momento como oponente o falsador. Sin perder de vista que, el aula o auditorio en el que se desarrollen las experiencias formativas, tendrán un papel crucial en los procesos de enseñanza-aprendizaje; aspectos que retrataremos brevemente el apartado dedicado a la experiencia áulica.

Tenemos pues, en el aprendizaje significativo, el valor asignado al material con el que se vincula y vehicula el contenido y la mediación docente. El material, en este sentido, asumido como una herramienta didáctica basada en la SFE, supone una identificación con la gamificación; pero a su vez una diferenciación que permitirá ubicar los derroteros del juego de juegos semánticos, como ámbito de posterior indagación.

3.2.1 De la gamificación

Plantear el tema de la gamificación, busca situar la experiencia formativa en un contexto de desarrollo que integre a posteriori elementos que permitan generar marcos de significación en el aprendizaje cooperativo. Aquí, el juego, en su sentido lúdico, es empleado como recurso didáctico que permitirá conectar el fin, esto es, el aprendizaje de lógica elemental, con los medios dispuestos para ellos, ya sean tradicionales o tecnológicos.

Por medios tradicionales, habremos de considerar aquellos que integrarán los apartados subsecuentes de nuestra investigación, a manera de herramienta empleable a partir del diseño de un material didáctico que guíe los pasos para el desarrollo de los juegos bipersonales de suma cero planteados desde la SFE. Por otra parte, los medios tecnológicos supondrán el desarrollo posterior de aplicaciones o softwares que promuevan experiencias más interactivas entre los jugadores como agentes epistémicos y la programación.

La relevancia de la gamificación consiste en que ésta representa la incorporación del juego, como una actividad motivada por el uso de información y dispuesta para promover una acción cooperativa que conecta al juego con el jugador, pero también a los jugadores entre ellos, distinguiendo a los jugadores activos de los jugadores pasivos de los que hablaremos más adelante; ello, respecto a espacios donde no es común considerar la actividad lúdica como parte integral del proceso de enseñanza-aprendizaje, esto es, el espacio áulico. Lozada Ávila y Betancur Gómez, sostienen que la "gamificación se presenta como alternativa a las estrategias tradicionales del aula, y cada vez es más utilizada en la educación superior". (2017, 97) El valor didáctico del juego, se reconoce en esta investigación en dos dimensiones:

En primer lugar, como contendio disciplinar que propone la noción de juego desde la perspectiva teórica asociada (aunque no dependiente) de la Semántica de Teoría de Juegos de Hinttikka (1983), estrechamente asumida con la finalidad del juego que, en el caso específico de la propuesta didáctica que buscamos plantear, consistirá en demostrar la estrategia que mejor satisfaga los deseos del agente, es decir, el alcance de la forma del fin buscado, de acuerdo al roll que cada jugador habrá de desarrollar. Respecto a la otra dimensión, esto es, en segundo lugar, el juego como dirigido a una práctica educativa.

> El juego es un activador en la atención y surge como alternativa para complementar los esquemas de enseñanza tradicional. (…) se identificó que para conocer su uso en dicho ámbito se requiere un abordaje según los diferentes campos de conocimiento que agrupan los saberes, y que son los que definen los programas que se imparten en las instituciones. (Lozada Ávila y Betancur Gómez, 2017, 99)

La gamificación lleva la noción de juego a los ámbitos educativos, no ya como un mero momento de placer, ocio o distracción, que se reconoce por considerarse un recurso que pone en movimiento muchos más elementos de los que a primera vista pueden reconocerse. Por ello, para no confundir el ámbito teórico de nuestra investigación, situada en la teoría de juegos de Von Neuman y Morgensten (1953), el término gamificación, será empleado en su dimensión didáctica, como parte de una estrategia que, en el ámbito de las humanidades ha encontrado un nicho que puede explorarse en diversos ámbitos, pero no se encuentra restringida a ella.

3.2.2 De la experiencia áulica

Será en la experiencia áulica en donde podremos situar un ambiente gamificado o tendiente a la gamificación, esto es, gamificable; basados en el aprendizaje cooperativo del modelo educativo basado en competencias, así como las experiencias de juegos previos que vuelven significativas las experiencias formativas, los actores involucrados en los procesos de enseñanza-aprendizaje tendrán las disposiciones curriculares que permitan mediar los objetivos, trazar los medios y regular los mecanismos didáctico-pedagógicos para que se reconozca en éstos la capacidad de captar, comprender y aplicar los modelos ofrecidos a situaciones similares, acumulando así experiencias que permitan eficientar los movimientos o acciones dirigidos y que estos se correspondan con la forma del fin buscado.

La experiencia áulica nos coloca en un espacio formativo formal, aunque no nos restringe a él, siendo necesario contar con un medio instituido del espacio educativo que medie y regule las relaciones entre contenidos disciplinares, docente, estudiantes y currículum.

Respecto al espacio áulico para Fandiño Parra y Bermúdez Jiménez (2015), es donde nos señalan que tienen lugar las "prácticas como de los discursos que circulan en las aulas con el objetivo de discernir las formas de enunciación y de legitimación de los saberes enseñados en las instituciones" (p. 32); espacio en el que tendrán lugar las experiencias áulicas de las trayectorias formativas en el que los juegos semánticos como juegos de suma cero constituirán una herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental, basada en la SFE.

En el espacio áulico convergerán pues, tanto la herramienta didáctica basada en la SFE como los contenidos curriculares para los que estarán dispuestos, en el contexto de las trayectorias formativas, la figura docente que, desde el modelo educativo planteado, se retira de la centralidad para acompañar de manera tangencial, los procesos educativos centrados en los estudiantes y su cooperatividad. En este sentido, serán los estudiantes quienes asumirán las funciones como jugadores.

Cabe señalar en este momento que, considerando que los juegos bipersonales de suma cero plantean la imposibilidad de participación directa de otros jugadores en la toma de decisiones para llevar a cabo el movimiento racional; nos estaríamos encontrando, en el espacio áulico, con más estudiantes que en apariencia serían espectadores, pero que, más allá de la no posibilidad de participación directa, tendrían una participación pasiva en el juego, constituyendo de esta manera un marco de experiencia áulica de aprendizaje indirecta.

En otras palabras: el uso de una herramienta didáctica de *la semántica formal basada en las formas del fin buscado en juegos o interacciones, es un método eficiente para la construcción de una propuesta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental*; puesto que, tanto los jugadores activos, estos son: los agentes epistémicos que decidirán los movimientos que les permitan desarrollar una estrategia adecuada, en el contexto de una fórmula en juego. Como los jugadores pasivos, es decir, los participantes presentes, aunque no involucrados en la elección de jugadas o movimientos, pero que, junto con los jugadores activos, habrán de acumular lo que denominaremos, experiencias de juegos previos.

Las experiencias de juegos previos pueden ser directas o indirectas, ya sea de jugadores activos o pasivos. El punto relevante en la incorporación de estas nociones, radica en la necesidad de entender las múltiples direccionalidades de las trayectorias formativas que en las experiencias áulicas se realizan; así, en los procesos de enseñanza-aprendizaje, todos los involucrados, pasiva o activamente, acumularán las experiencias de los juegos previos, desde la asignación de valores, los movimientos realizados y las consecuencias de las decisiones que acompañarán el desarrollo de un juego o interacción.

De esta manera, la apertura desde la gamificación, permite considerar los mecanismos de implementación, tanto inmediatos, en un esquema tradicional de herramienta didáctica; como mediato, que supone un trabajo de desarrollo de software que dinamice la experiencia del juego y ponga, en un encuentro bipersonal, frente a frente a un agente epistémico y la naturaleza.

De esta manera, y sin dejar de considerar la experiencia áulica, el análisis del resultado y la reconstrucción retrogresiva, permitirá obtener elementos de enriquecimiento de reflexión didáctico-filosófica.

3.3 Mecanismos de implementación

Hemos señalado anteriormente que, el juego, en su sentido lúdico, es empleado como recurso didáctico que permitirá conectar el fin, esto es, el aprendizaje de lógica elemental, con los medios dispuestos para ellos, ya sean tradicionales o tecnológicos. Empero, la herramienta didáctica basada en la Semántica Formal Estratégica como tal, habrá de recurrir al medio tradicional, esto es, a la consideración de los elementos constitutivos de un manual que orienten la práctica docente en el contexto de la enseñanza de la lógica clásica; no sin plantear el medio tecnológico, es decir, las posibilidades del desarrollo de un software o programa, esto último como horizonte de posibilidad.

La razón fundamental por la que hemos optado por centrarnos en el desarrollo de una herramienta didáctica basada en un mecanismo tradicional, se debe a que: i) por un lado el trabajo de programación y sus costos, superan por mucho los alcances de la presente investigación y ii) se cuenta con una serie experiencias anteriores relacionadas con el desarrollo de herramientas didácticas orientadas a acompañar los procesos de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de lógica, especialmente en contextos en donde se carece de formación previa ya a nivel superior o de grado.

De manera sintética, podemos referirnos a tres herramientas que, como medio tradicional, se han desarrollado para la comunidad de estudiantes del pregrado de Filosofía de la Universidad Autónoma de Chiapas (México): en 2017 coordiné el *handbook* titulado: “Breve Manual de Lógica Matemática. Herramienta básica para el análisis lógico de argumentos”[33], en el que desarrollé el primer capítulo titulado: “Elementos básicos de la lógica matemática” (Ruiz-Rincón, 2017); obra prologada por la Da. Atocha Aliseda Llera, distinguida lógica e investigadora de la Universidad Nacional Autónoma de México.

> La enseñanza de la Lógica en un nivel básico, como se ofrece en este texto, es de una utilidad invaluable para todo aquel que busque en su formación intelectual adentrarse en una disciplina que estudia el razonamiento correcto, en el sentido original de Aristóteles, pero con las herramientas modernas que distinguen a nuestra disciplina. (Atocha, 2017, p. viii)

La estructura del contenido comprende tres capítulos, el primero dedicado a los elementos básicos de la lógica matemática, destacándose los temas relacionados a las formas argumentales y las nociones de verdad lógica y validez, planteando una sintáctica proposicional y exponiendo una semántica veritativa funcional. El segundo capítulo fue dedicado a la lógica proposicional; dejando para el tercer capítulo, al cálculo de predicados de primer orden. Distinguiéndose en cada uno de los capítulos, un apartado dedicado a ejercicios y actividades de repaso.

Bajo la misma autoría y sello editorial de la Universidad Autónoma de Chiapas (México), también fue publicada otra herramienta complementaria para la didáctica de la lógica, titulada: “Silogística y cuadro de oposición aristotélica”[34] (Ruiz-Rincón D. L., 2019). Para la publicación de este material, se contó con el apoyo del D. Carlos Fernando Ramírez González, Investigador de la Universidad de Guadalajara (México) quien, a letra señala que:

[33] Puede consultarse y descargarse este material de forma gratuita desde la siguiente liga: https://editorial.unach.mx/documentos/digitales/_libs/brevemanualdelogicamatematica.pdf
[34] Puede consultarse y descargarse este material de forma gratuita desde la siguiente liga: https://editorial.unach.mx/documentos/digitales/_libs/silogisticaycuadrodeoposicion.pdf

> Haciendo uso de recursos visuales y ejemplos sencillo, el cuaderno de trabajo Silogística y cuadro de oposición aristotélica: Herramienta complementaria para la Didáctica de la Lógica tiene la virtud de ser una exposición clara de las aportaciones aristotélicas a la lógica; pero sin perder nunca el rigor que es requerido en este tipo de publicaciones. Además de la claridad y sencillez en la exposición, se han elaborado un conjunto de ejercicios al final de cada apartado que permite que el lector reafirme los conocimientos adquiridos. Todo esto lo hace un material didáctico recomendable para todo aquel que se quiera acercar a estos tópicos. (Ramírez González, 2019, p. vi)

La estructura de este cuadernillo, permite a los estudiantes en formación inicial en lógica, adentrarse a la lógica aristotélica, desde un breve recorrido por cada uno de los seis libros que integran los tratados de lógica o el *Órganon*; el estudio de los enunciados y, los primeros y segundos analíticos; esto es, la silogística y la ciencia de la demostración. Todo ello a lo largo de cuatro capítulos que se acompañan por ejercicios y prácticas para reforzar los conocimientos adquiridos. Aquí, se "… expone de forma somera pero concisa la relación entre el silogismo y otras formas de razonamiento, con la principal finalidad de resaltar la importancia y vigencia en el estudio de la silogística en la actualidad". (Ruiz-Rincón, 2019, p. 2)

El último producto enfocado a la didáctica de la lógica, se tituló "Iniciación practica a la lógica de primer orden"[35] (Ruiz-Rincón, 2020); el cual fue revisado y prologado por el Mtro. Francisco Javier González Rivas, colega de la Universidad Autónoma de Chiapas, institución que acuerpó la publicación de este cuadernillo.

> A través de las diversas actividades –planeadas con los mejores criterios pedagógicos –podemos adentrarnos en el universo de símbolos, significados, usos, reglas y trucos, con los cuales avanzamos en la obtención del lenguaje con el cual filósofos y matemáticos suelen formalizar sus demostraciones. Pero, lo que se nos presenta como una Iniciación práctica resulta algo más que un

[35] Puede consultarse y descargarse este material de forma gratuita desde la siguiente liga: https://editorial.unach.mx/documentos/digitales/_libs/iniciacionpracticaalalogicadeprimerorden.pdf

> simple manual al uso para el aprendizaje de la lógica matemática moderna. (González Rivas, 2020, p. iii)

La estructura que este último cuadernillo propone es la siguiente:

> El primer capítulo presenta el punto de partida de esta obra, introduciendo al lector al tema del lenguaje formal en la lógica, y su valor expresivo para la analítica de diversas formas de razonamiento. El segundo capítulo está dedicado al Lenguaje de Orden Cero (L0), esto es, a la lógica proposicional; empleada como puente para la presentación de la representación simbólica de las proposiciones. Lo anterior sin perder de vista que, nuestro punto de inflexión es, precisamente, la silogística aristotélica; pues, en nuestro tercer y último capítulo, nos avocamos al estudio introductorio del Lenguaje de Primer Orden (L1), mediante la formalización de las expresiones enunciativas categóricas y las formas silogísticas, iniciando así nuestra aventura por la lógica cuantificacional. (Ruiz-Rincón D. L., 2020, p. 7)

Puede reconocerse, entonces, la forma deductiva en la presentación de las experiencias previas relacionadas con el desarrollo de herramientas didácticas que, permiten ir de los temas más generales a puntos específicos con el objetivo de facilitar a los estudiantes un proceso de aprendizaje autónomo y con condiciones de autorregulación, esto es, que vayan avanzando de acuerdo a sus tiempos, ritmos y estilos de aprendizaje.

Como horizonte de posibilidad, desde la implementación tecnológica, encontraremos el desarrollo de softwares o aplicaciones tecnológicas orientadas a la educación, como el caso de: “TAUT: el software desarrollado por un filósofo del CONICET para enseñar Lógica” (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), 2019), sitio web desarrollado por Ariel Roffé quien, como parte del “Buenos Aires *Logic Group* (BA-LOGIC)” diseñó un sistema para realizar diversas prácticas y ejercicios de lógica matemática: El TAUT (Roffé, s/f)[36]. Lo que constituye,

[36] Puede consultarse el sitio de manera gratuita en: https://www.taut-logic.com/index.html

en sí mismo un recurso tecnológico para la enseñanza de la lógica, no tanto así una herramienta didáctica gamificada.

Con toda seguridad, nos atrevemos a señalar que existen otros ejercicios, con mayor o menor desarrollo; pero que a la postre, demandan una gamificación centrada en llamar la atención no de quienes se forman en el campo de la filosofía y tienen en la lógica una herramienta para evaluar argumentos, o un medio para poder fundamentar e innovar procesos de razonamiento, aspecto en el que tenemos presente que nuestra investigación abona, desde la propuesta de la SFE.

3.4 Elementos del diseño: semántica y la noción de equilibrio

Debemos recordar que, en apartados anteriores, hemos señalado que, en situaciones reales, la motivación inicial, asociada con la finalidad del juego que, en el caso específico de la propuesta didáctica que planteamos, consiste en aquello que se busca demostrar, esto es, la estrategia que mejor satisface los deseos del jugador. Teniendo en cuenta que, como agente (epistémico) o jugador, podrán considerarse tanto individuos naturales como artificiales.

Al respecto hemos sostenido que, un agente será mínimamente racional si y sólo si elige la acción o movimiento que le reporte la mayor utilidad; es decir, un comportamiento puede considerarse como mínimamente racional si entre los movimientos y restricciones disponibles, opta por aquella que le reporte mayor utilidad o preferencia. Por su puesto que, la utilidad habrá de responder a la forma del fin buscado, lo que estará determinado a su vez por la preferencia que el jugador posea, de acuerdo al rol que tiene asignado desempeñar en la interacción.

En el punto 2.2., titulado “Construcción de la Semántica Formal Estratégica” de esta investigación, se presentaron las estrategias: común, cuasi-indiferente, de consecuencia y de compromiso; todas ellas asociadas a los conectivos lógicos ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, y $\leftrightarrow$; respectivamente); que han dado lugar a la identificación de las reglas de elección, expuestas en el punto 2.2.1. “Razonamiento estratégico como reglas”. Sin embargo, no debemos perder de vista que, en virtud del tipo de juego por el que hemos optado en este trabajo, debido a su naturaleza de carácter bipersonal de suma cero con información completa, no podemos dejar de considerar que, desde el contexto de la Teoría de Juegos, nos encontraremos ante la imposibilidad, para cualesquiera de los jugadores involucrados, de poseer una estrategia dominante.

Una estrategia dominante, en el ámbito de la Teoría de Juegos, consiste en una o varias decisiones y acciones que un jugador habrá de realizar, independientemente de la forma en la que actúe el otro jugador. Es decir, una estrategia óptima que le garantice un resultado de máxima utilidad y que determine su preferencia, sin considerar los movimientos o acciones de la contraparte. Así, para todo “juego en el que cada jugador tiene una estrategia dominante tiene una única solución que consiste en jugar esa estrategia dominante”. (López Ortíz, 2020, p. 42) Dicha idea, en el marco de juegos no cooperativos de suma cero, se torna inasequible, puesto que cada jugador habrá de buscar procurarse la mayor utilidad posible.

En los juegos no cooperativos, como los de suma cero, queda entonces, sitio para considerar la noción de equilibrio. Necesaria para analizar el resultado de las interacciones. En este sentido, Maskin (2009) nos plantea que:

> El equilibrio de Nash ha sido exitoso como concepto de solución primero porque este es lógicamente coherente. Específicamente, es el único concepto que es consistente en ambas (1) la maximización de pago esperada por los jugadores (conducta racional) y (2) pronóstico correcto por los jugadores acerca de lo que los otros harán (expectativas racionales). Además, éste ha probado hacer buenas predicciones acerca de la conducta en escenarios experimentales y de campo, por lo menos cuando los sujetos han alcanzado experiencia suficiente para jugar el juego en cuestión. (Maskin, 2009, p. 120)

Respecto a la noción de equilibrio, éste supone un escenario en el que los jugadores involucrados alcanzan un resultado óptimo, considerando las estrategias de los involucrados:

> …es un perfil de estrategias del que ningún jugador desearía desviarse unilateralmente, es decir, ninguno se arrepiente de la decisión tomada, dadas las estrategias decididas por el resto de los jugadores. Un EN [Equilibrio de Nash] [37]está formado por estrategias que son óptimas para cada jugador dadas las estrategias del resto de jugadores (Vásquez Vásquez y Carranza Galdámez, 2020, p. 12)

A partir de los posibles resultados: {1,0}, establecidos como la forma del fin buscado en la SFE y su uso en la lógica elemental del punto 2.3, del apartado anterior:

Tenemos que,

1= gana el proponente
0= gana el oponente
1´= gana el oponente en el rol del proponente
0´= gana el proponente en el rol del oponente

Tabla 27: Matriz de resultados con equilibrios

		Oponente	
		0	1´
Proponente	1	1,0	1,1’
	0´	0´,0	0´,1´

Los equilibrios identificados son: (1,0) y (0´,1´). Donde 1 es "gana proponente en el papel de verificador", 0 es "gana oponente en papel de falsador" y; 0´ (cero-primo) es "gana proponente en papel de falsador", 1´(uno-primo) es "gana oponente en papel de

[37] Los corchetes son nuestros. El equilibrio de Nash es una propuesta para solucionar una interacción, en el que, desde la información completa, los jugadores realizan sus movimientos, conociendo las estrategias de los otros. En una matriz de resultados, es posible identificar el o los equilibrios en los juegos semánticos que proponemos.

verificador". Al tratarse de juegos bipersonales de suma cero con información completa y no cooperativos, ninguno de los dos puede ganar o perder al mismo tiempo.

Lo anterior permite establecer que, si el juego concluye con una fórmula atómica con un valor = 1, entonces el proponente habrá ganado el juego en su papel de verificador; mientras que, al mismo tiempo, el oponente habrá perdido el juego en su papel de falsador. Por otro lado, si el juego concluye con una fórmula atómica con un valor = 0, entonces el oponente habrá ganado el juego en su papel de falsador; mientras que, de forma simultánea, el proponente habrá perdido el juego en su papel de verificador. De ahí se sigue el equilibrio: (1,0).

Ahora bien, el segundo equilibrio que podemos identificar como (0´,1´), describe los posibles resultados de la siguiente manera: si el juego concluye con una fórmula atómica con un valor = 0, constituye un resultado en el que el proponente gana el juego en el papel o rol del falsador; siendo 0´ la representación formal del resultado distinto al papel inicial u original, así como a la forma del fin buscado que perseguía. Es decir, si el proponente, tal como se ha planteado anteriormente, tiene como objetivo verificar la fórmula o expresión lógica en juego, teniendo el valor = 1 como la forma del fin buscado; ante una negación y, su correspondiente cambio de rol, su objetivo consistirá en buscar falsar la fórmula, es decir, empleará las reglas de elección pertinentes para elegir los movimientos necesarios para alcanzar el valor = 0´ como su forma del fin buscado, claro, suponiendo ello que no se involucre otra negación que obligue a los jugadores a volver a su papel inicial.

De manera contraria, si el juego concluye con una fórmula atómica con un valor = 1, constituye un resultado en el que el oponente gana el juego en el papel o rol del verificador; siendo 1´ la representación formal del resultado distinto al papel inicial u original, tal como en el caso previo. Si bien la fórmula en juego puede verificarse o falsarse, el mérito dependerá de quién desarrolle la estrategia adecuada.

Luego de lo antes expuesto y, para el diseño de la herramienta didáctica, y con el objetivo de exponer los elementos que integrarán el diseño de la herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elementan basada en la Semántica Formal Estratégica que, desarrollaremos puntualmente en el siguiente punto. Tenemos así, los siguientes elementos: i) contexto disciplinar, ii) semántica y la noción de prueba, iii) reglas, iv) juego paso a paso, v) estrategia de análisis y, vi) reconstrucción retrogresiva.

3.4.1 Contexto disciplinar

La lógica como el estudio de la inferencia (Manzano y Huertas, 2004), como una rama de la filosofía que tiene por objeto el estudio de las formas del razonamiento y las estructuras que le dan coherencia y soporte a las afirmaciones que hacemos sobre el mundo material o abstracto y que se ligan con otras. Complementariamente, Gómez-Torrente señala que: "la lógica se ocupa de caracterizar la noción de argumento correcto" (2004, p.143).

Identificamos entonces, a la lógica como una disciplina filosófica, dispuesta para acompañar la formación y producción del profesional de la filosofía desde la antigüedad y hasta nuestros días; pero que no se restringe a ello, y encuentra en las matemáticas, el derecho, la lingüística, la informática y otras áreas del conocimiento humano, otras trincheras que hacen uso de los principios fundamentales de la axiomatización de los sistemas lógicos para demostrar que un enunciado o proposición es consecuencia o se sigue de otras de manera necesaria (o no); y que también la consideran como uno de sus objetos de estudio.

> "La demostración de un enunciado o proposición consiste en deducirlo de otros enunciados cuya verdad se conoce previamente. Dado que las inferencias deductivas preservan la verdad de las premisas y las transmiten a la conclusión, las proposiciones deducidas de proposiciones verdaderas, si han sido correctamente deducidas, necesariamente resultarán también verdaderas". (Cassini, 2013, p.19)

La importancia del contexto disciplinar permite situar el marco de contenidos que, desde la noción de verdad lógica, y su representación veritativa funcional en la lógica clásica, han motivado la realización de esta investigación, cuyo objetivo se dirige a abonar a las investigaciones de entorno a las valoraciones semánticas de determinadas formas de presentar y organizar procesos de razonamientos como productos argumentales. En este sentido, Manzano (2004) agrega que:

> …la argumentación puede entenderse como un *juego* cuyas regalas determinan la comunicación civilizada entre los individuos y la toma de decisiones. Los juegos formaron parte de la lógica en la Antigüedad. (…) En lógica se dio más imortancia a la teoría de la prueba y a la consecuencia semática, siendo jsutamente en este útlimo contexto donde se utilizaron juegos (…). Sin embargo en los último saños han aparecido estudios sobre juegos lógicos, relacionándolos con la teoría de juegos (…). (p. 280)

Atocha Aliseda Llera, plantea en el prólogo titulado “¿En qué consiste la lógica?”, que se encuentra en el “Breve Manual de Lógica Matemática” (Ruiz-Rincón D. L., 2017), al que nos hemos referido anteriormente, lo siguiente:

> En un nivel muy general, la Lógica, en tanto disciplina de estudio, trata del pensamiento, más en particular, del razonamiento. Esto es, trata del proceso de obtención de conclusiones a partir de suposiciones o hechos. Este proceso intelectual encuentra su formulación más precisa en el concepto de consecuencia lógica, del cual se ocupa extensamente el manual que el lector tiene en sus manos. (Aliseda Llera, 2017, p. iii)

Si en un juego bipersonal de suma cero con información completa, el objetivo es ganar, poner en juego una fórmula lógica amplía dicho objetivo, llevándolo a buscar probar que los movimientos realizados o decisiones tomadas conducen, principalmente al verificador o proponente al resultado esperado, esto es, a la forma del fin buscado. Como se trata de una semántica estratégica y, de la interacción puede resultar ganador el verificador (perdiendo con ello automáticamente el falsador); también puede resultar ganador el falsador (llevando a perder por la misma definición del juego, al verificador), pero no pueden ni ganar ni perder ambos jugadores al mismo tiempo.

Aunado a lo anterior, la lógica clásica o elemental puede hacer uso de la SFE como recurso teórico para proponer un recurso didáctico que eficientice la enseñanza de la lógica elemental distinta (pero no contraria) a una semántica veritativa funcional, pero manteniendo una semántica bivalente como la que propone la semántica estratégica, bordeando así el concepto de ´verdad´, tan problemático no sólo para la lógica, sino para la filosofía misma.

3.4.2 Semántica y la noción de prueba

El propósito de este punto, consiste en traer a cuenta en el enfoque semántico de nuestra propuesta, y dirigir la atención a la noción de prueba para nuestros fines. En palabras de Hintikka y Sandu: "en toda inferencia podemos distinguir una entrada (o *input*): la premisa o premisas; y una salida (*output*): la conclusión. La transición desde una o varias premisas a la conclusión aparece regida por una regla de inferencia" (2008, p. 15); de esta manera, el desarrollo de las pruebas sintácticas, esto es, mecanismos que permiten evaluar la validez o correctud de las formas o fórmulas lógicas, ha dominado la mayor parte de la escena en torno a las investigaciones lógicas y el desarrollo de los diversos sistemas lógicos.

Y es en el seno de estos sistemas lógicos, en los que domina el concepto de verdad, de verdad lógica; dicho concepto "comienza a ser útil a partir del momento en que comenzamos a desarrollar una teoría lógica explícita, posiblemente axiomática" (Hintikka y Sandu, 2008, p. 22), que se centra en la evaluación de las formas lógicas, de las formas argumentales, de las formas simbólicas; lo que relega a las fronteras de los temas de interés para las investigaciones lógica el "estudio de las relaciones que se establecen entre el lenguaje y realidad, haciendo posible igualmente representarlas" (Hintikka & Sandu, 2008, p. 23).

No hablaremos en términos de verdad o falsedad, sino de una estrategia "adecuada". Una estrategia adecuada no es próxima a la noción de estrategia ganadora, en tanto la segunda supondría una dicotomía entre vencedores y perdedores. La semántica estratégica que planteamos, obedece a ser "adecuada" en tanto las condiciones y el contexto así lo permitan; es decir, se considerará que una estrategia es adecuada sí y solo si satisface las condiciones que el juego o interacción establecen, de acuerdo a la función o rol que desempeña cada jugador o agente.

El resultado del juego puede arrojar como ganador a cualesquiera de los dos jugadores, distinguibles precisamente por la preferencia que cada uno de ellos tenga, de acuerdo a la forma del fin buscado, determinado por el rol que ejecutan en cada interacción.

El ganar el juego, supondría que el jugador vencedor (proponente u oponente) hubo de desarrollar una estrategia, a través de los movimientos propios y del adversario, una estrategia ganadora. La noción de prueba, en este sentido, se definiría como la secuencia de acciones (objetos abstractos que se pueden realizar de distintas maneras, como objetos formales, desde el punto de vista de la decisión) que permiten arribar a la forma del fin buscado.

La prueba entonces, se realizará para determinar bajo qué condiciones una fórmula o expresión lógica es satisfacible, pues:

> …una lógica que sea teóricamente satisfactoria debe disponer de una componente estratégica, puesto que las reglas de inferencias particulares no pueden, de manera aislada, garantizar la verdad o probabilidad de la conclusión de una secuencia entera de inferencias no monotónicas. (Hintikka & Sandu, 2008, p. 29)

Hemos ligado a la decisión o acto de decidir con la satisfacibilidad en el apartado 1 de esta investigación, específicamente en el punto 1.1.2; y también hemos expuesto puntualente en el punto 2.3.1 del apartado 2 que, decidir es probar satisfacibilidad en lógica. Lo que nos resta será, justamente desarrollar qué estaríamos probando con este tipo de juegos semánticos.

Para ello, debemos distinguir al resultado del juego, respecto al tipo de estrategia que se desarrolló en torno a la forma del fin buscado. En este sentido, un juego puede ganarse o perderse, pero será, justamente la forma en la que se gane o se pierda dicho juego, lo que nos permitirá identificar la prueba de que una tautología pueda llegar a perderse y una contradicción logre ganarse.

Es decir, un juego puede ganarse, gracias a una estrategia adecuada, pero no restringida a ella; y en un sentido paralelo, un juego puede perderse, debido a una estrategia no adecuada, pero no restringida a ella. A qué nos referimos con esto; pues bien: un juego en el que la fórmula atómica tenga un valor = 1, indicará que, en la interacción, el proponente resultó vencedor, logrando dicho objetivo debido a el desarrollo de una estrategia adecuada; es decir, eligió cada uno de sus movimientos para alcanzar la forma del fin buscado (ya sea en su rol o papel original o, luego de haber intercambiado roles, gracias a la regla 5 -R5).

Tabla 28: Juegos, resultados y estrategias

Juego	Jugador	Rol	Resultado	Estrategia	FFB
Movimientos racionales					
Caso 1	Proponente	Verificador	Gana	Adecuada	1
	Oponente	Falsador	Pierde	No adecuada	
Caso 2	Proponente	Verificador	Pierde	No adecuada	0
	Oponente	Falsador	Gana	Adecuada	
Caso 3	Proponente	Falsador	Gana	Adecuada	1´
	Oponente	Verificador	Pierde	No adecuada	
Caso 4	Proponente	Falsador	Pierde	No adecuada	0´
	Oponente	Verificador	Gana	Adecuada	
Movimientos no racionales (suerte o azar)					
Caso 5	Proponente	Verificador	Gana		1
	Oponente	Falsador	Pierde	No adecuada	
Caso 6	Proponente	Verificador	Pierde	No adecuada	0
	Oponente	Falsador	Gana		
Caso 7	Proponente	Falsador	Gana		1´
	Oponente	Verificador	Pierde	No adecuada	
Caso 8	Proponente	Falsador	Pierde	No adecuada	0´
	Oponente	Verificador	Gana		

La tabla No. 28 "Juegos, resultados y estrategias", pretende presentar visualmente ocho casos de juegos cuyos resultados nos pueden llevar a probar que, en primer lugar, la interacción o juego no es una estructura rígida y determinada en el que únicamente se logre ganar si el proponente verifica la fórmula en juego o, el oponente falsee la fórmula en juego. El verificador puede perder una fórmula tautológica y el falsador ganar una fórmula contradictoria.

El jugador que gana, lo hace porque su contraparte elige movimientos en las reglas correspondientes que lo llevan a perder. Es decir, interviene la suerte o el azar en la victoria de quien obtiene la forma del fin buscado (FFB); lo que significa que no necesariamente el jugador realizó una estrategia adecuada, al menos no consciente o racionalmente. Los movimientos racionales estarán constituidos, por la acción dirigida racionalmente en las estrategias desarrolladas por cada uno de los jugadores; cada caso representa un juego bipersonal de suma cero. Por otro lado, los movimientos no racionales (azarosos o fortuitos) no estarían considerando explícitamente un parámetro de decisión, lo que nos permite no dejar fuera del juego a la suerte o azar.

CUARTA PARTE

APARTADO 4: PRESENTACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO

Herramienta lúdico-pedagógica

Podemos concebir a una herramienta didáctica como un recurso cuyo objetivo consiste en facilitar los medios y mecanismos propicios para un aprendizaje significativo. Zambrano-Orellana y otros (2021) definen a las herramientas didácticas como:

> "…todo tipo de material de los que hace uso el docente, con el único objetivo de hacer el proceso de enseñanza más dinámico y pedagógico. También denominadas recursos didácticos y puede ser de tipo material, intelectual, humano, social o cultural, entre otra." (Zambrano-Orellana y otros, 2021, p. 79)

Este último apartado tiene la finalidad de exponer los elementos que integrarán el diseño de la herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elementan basada en la Semántica Formal Estratégica, la cual desarrollaremos puntualmente a partir de los siguientes elementos que pueden observarse en la propuesta de tabla de contenido siguiente:

Herramienta Didáctica para la enseñanza de la Lógica Elemental, basada en la Semántica Formal Estratégica

Tabla de contenido[38]:

i) Las reglas del juego
ii) Instrucciones paso a paso
iii) Ejercicios con reglas de elección
   a. Tautologías perdidas

[38] La propuesta de "Tabla de contenido" ofrece la posibilidad de una presentación organizada que pueda incluirse dentro del diseño curricular de las unidades de competencia que se orienten a la formación lógica elemental.

b. Contradicciones ganadas
c. Contingencias

iv) Ejercicios con reglas de extensión
a. Cuantificador Universal ∀
b. Cuantificador Universal Negado ¬∀
c. Cuantificador Existencial ∃
d. Cuantificador Existencial Negado ¬∃

v) Revisión de resultados
a. Experiencia significativa
b. Reconstrucción retrogresiva

vi) Juegos para practicar

Una vez con esta herramienta didáctica cualquier programa de formación inicial para estudiantes de nivel superior podrá implementarla en el contexto de juegos bipersonales de suma cero y con información completa, en la que los jugadores deberán comportarse de forma no cooperativa. Lo que permitirá realizar un posterior análisis de la estrategia desarrollada para evaluar si se trata de una ejecución adecuada o no, y así determinar si se corresponde con la forma del fin buscado.

4.1 Las reglas del juego

Tal como lo hemos desarrollado en la segunda parte de este documento, a lo largo del apartado 2.2 “Construcción de la Semántica Formal Estratégica”; presentaremos, ahora en su versión simplificada, las reglas que nos van a permitir establecer los movimientos y restricciones en los contextos de la interacción. Tenemos, en primer lugar, las reglas de estructuración, que se refieren a la representación sintáctica de la fórmula, como a la de la presentación del juego. Es decir, la fórmula en juego, se sujetará a las reglas de conformación de la lógica clásica, tanto proposicional como de predicados de primer orden.

Respecto a la presentación del juego, será necesario emplear una figura cuadrada para llevar a cabo la colocación de los elementos, así como el seguimiento del desarrollo de la interacción. Tal como se mostrará en la tabla No. 29 “Estructuración del juego”; el tablero se divide en dos grandes columnas, en la columna izquierda encontraremos es espacio en el que se registrará la representación extensional del juego. La representación extensional se refiere al registro de los resultados de cada decisión o movimiento, éstos entrarán en una relación de dependencia respecto a la fórmula lógica en juego. Así, cada elección, moverá el juego hacia adelante, de acuerdo a las restricciones y habilitaciones que las reglas de elección nos planteen (a ellas hemos dedicado el apartado anterior, pero serán planteadas de manera sintética en el siguiente punto).

Por su parte, la columna de la derecha, titulada “Representación narrativa”, cuenta con una serie de subdivisiones a partir de filas, en la que destaca la penúltima fila titulada “Resultado”; pero sobre ella volveremos más adelante. En tanto, la división de las filas posteriores a la etiqueta “Representación narrativa” y previas a la etiqueta “Resultado”, marcarán los distintos momentos por los que se llevará a cabo la interacción o juego. En primer lugar, el símbolo “#”, indica que el juego inicia con una fórmula molecular; mientras que en la fila marcada con el “0” (cero), marca la acción de asignación de valores (1,0) que el proponente debe realizar. El proponente es quien tiene la tarea de asignar los valores a cada una de las variables proposicionales, de acuerdo a la forma del fin buscado, pues será el responsable de buscar verificar dichas asignaciones en un resultado favorable. A partir de ese momento, el juego transitará de acuerdo a las reglas de elección, en donde las reglas aplicadas a cada uno de los movimientos se deberá i registrando en las filas inferiores, iniciando por colocar el número 1 en lugar de la “n” y así sucesivamente, hasta quedar con una fórmula atómica (en la representación extensional) y una última regla. Lo que nos conducirá, a identificar el resultado. En dicha celda deberá colocarse el valor de la fórmula atómica correspondiente a la asignación previa.

Tabla 29: Estructuración del juego

Representación extensional	Representación narrativa	
	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores”
	n	
	Resultado:	

En segundo lugar, tenemos las reglas de elección. Estas reglas serán las responsables de marcar las pautas y turnos de participación, así como el tipo de jugadas lícitas que proponente u oponente puede realizar y las respectivas restricciones. Sobre ello se dedicó el segundo apartado de nuestra investigación, por lo que nos limitaremos a plasmar su expresión:

Reglas de elección

1. α^β: oponente elige α,β
2. α↔β: oponente elige α→β, β→α
3. αvβ: proponente elige ¬α, ¬β
4. α→β: proponente elige α, ¬β
5. ¬α: cambio de roll y continua α

Finalmente, en lo que respecta a las reglas de extensión, éstas se proponen con la finalidad de integrar a la herramienta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental basada en la Semántica Formal Estratégica, la posibilidad del análisis de fórmulas predicativas de primer orden, como una forma de plantear futuros derroteros de investigación y desarrollo.

Reglas de extensión

6. ¬ ¬ α: sin cambio de roll y continua α

7. ∀*x* α(*x*): <u>oponente</u> elige cualquier constante y continua α(a)

8. ¬∀*x* α(*x*): <u>oponente</u> continua ∃*x*¬α(*x*)

9. ∃*x* α(*x*): <u>proponente</u> elige constante nueva y continua α(a)

10. ¬∃*x* α(*x*): <u>proponente</u> continua ∀*x*¬α(*x*)

Las reglas de extensión constituyen un mecanismo de ampliación de las reglas de elección, integrando a las fórmulas lógicas con operadores cuantificacionales n-arios de primer orden, a las fórmulas lógicas susceptibles de ser jugadas. De esta manera, al oponente le corresponderán las reglas con cuantificador universal (∀); mientras que, al proponente le tocará jugar con las reglas existenciales (∃).

En lo que respecta al tratamiento de las asignaciones, estas seguirán a cargo del proponente, sin embargo, empleando una definición recursiva, nos encontraremos ante la presencia de fórmulas lógicas de primer orden de carácter elemental. Será necesario, entonces que, se determinen las constantes con las que se jugaran en el universo del discurso, permitiendo con ello, una interacción más completa; continuando con las reglas de elección, hasta la finalización del juego y su resultado.

4.2 Juegos, paso a paso

Como herramienta didáctica, el juego debe desarrollarse siguiendo una serie de pasos que permitan a los jugadores, así como a otros participantes indirectos en el espacio de la experiencia áulica, el poder conducirse a través del mismo hasta su conclusión y su posterior análisis y reconstrucción, momentos de relevante importancia por su valor didáctico-pedagógico.

Hemos planteado la estructuración del juego en la “Tabla No. 9”, describiendo el modo en el que se representa el juego. Y consiguiendo con ello, replicar la representación gráfica ya sea en soportes materiales como virtuales[39]; sin embargo, será necesario dividir los momentos de la interacción o el desarrollo del juego en 3 etapas: i) etapa asignación, ii) etapa de acción y iii) etapa de finalización.

La etapa de asignación, se refiere al momento en el que, para iniciar el juego, debe contarse con una *sentencia como actividad enunciativa*, es decir, con una fórmula lógica que será la que se jugará durante el encuentro; así como la correspondiente asignación de valores por parte del proponente:

i.1) Se lleva a cabo el registro de fórmula en juego en la columna de la “Representación extensional” del tablero.

i.2) Se asignan los roles, en el caso de que los jugadores sean dos agentes epistémicos, es decir, dos individuos o estudiantes (en el contexto de un mecanismo de implementación tradicional), se recomienda sortear los roles. Si es un agente epistémico o jugador mínimamente racional contra la naturaleza (en el contexto de un mecanismo de implementación tecnológica), corresponderá siempre al jugador mínimamente racional el rol del proponente; correspondiéndole a la naturaleza la tarea de oponerse.

i.3) Corresponde al proponente[40], la tarea de asignar los valores, comprometiéndose con la forma del fin buscado correspondiente, que consiste en verificar la expresión.

[39] Nos referimos en este punto al soporte material, como el “mecanismo de implementación tradicional” que se expuso en la tercera parte; que pueden ser hojas de papel, el pizarrón verde o blanco, u otra superficie material. Así mismo, el soporte virtual, hace referencia al “mecanismo de implementación tecnológico” del que hablamos en el mismo apartado; ya sea una herramienta tecnológica, un software u otro tipo de aplicación.

[40] El en caso de que los jugadores sean dos agentes epistémicos, es decir, dos individuos o estudiantes (en el contexto de un mecanismo de implementación tradicional), se recomienda sortear los roles. Si es un agente epistémico o jugador mínimamente racional contra la naturaleza, corresponderá siempre al jugador mínimamente racional el rol del proponente; correspondiéndole a la naturaleza la tarea de oponerse.

i.4) El proponente, es quien tiene la tarea de asignar los valores a cada una de las variables proposicionales, de acuerdo a la forma del fin buscado, pues será el responsable de buscar verificar dichas asignaciones en un resultado favorable; y deberá registrar las variables junto a las asignaciones correspondientes en la fila marcada con el "0" (cero) de la columna de la derecha, titulada "Representación narrativa".

Concluido el paso i.4), podemos iniciar la partida con la etapa de acción, interviniendo cada jugador según las reglas establecidas.

ii.1) El juego se desarrollará de acuerdo a las pautas y restricciones que marquen las reglas de elección (y extensionales en su caso). Para ello es indispensable identificar el conectivo principal de la fórmula lógica o sentencia enunciativa en juego, o en su caso, al operador cuantificacional; para identificar al jugador que deberá decidir qué tipo de movimiento realizar.

ii.2) En esta etapa, no hay un desarrollo del juego determinado; sin embargo, debe registrarse en la "representación extensiva" cada uno de las decisiones tomadas y, en la "representación narrativa", cada una de las reglas que se fueron empleando.

Tabla 30: Reglas simplificadas

R	Representación extensional	R	Representación narrativa
1	α^β: oponente elige α,β	6	¬ ¬ α: sin cambio de roll y continua α
2	$\alpha\leftrightarrow\beta$: oponente elige $\alpha\rightarrow\beta$, $\beta\rightarrow\alpha$	7	$\forall x$ $\alpha(x)$: oponente elige cualquier constante y continua α(a)
3	αvβ: proponente elige $\neg\alpha$, $\neg\beta$	8	$\neg\forall x$ $\alpha(x)$: oponente continua $\exists x\neg\alpha(x)$
4	$\alpha\rightarrow\beta$: proponente elige α, $\neg\beta$	9	$\exists x$ $\alpha(x)$: proponente elige constante nueva y continua α(a)
5	$\neg\alpha$: cambio de roll y continua α	10	$\neg\exists x$ $\alpha(x)$: proponente continua $\forall x\neg\alpha(x)$

ii.3) Por cada regla ejecutada y su movimiento correspondiente, deberá emplearse una fila diferente en la columna de la “representación narrativa”, numerando a partir del 1 en adelante, de acuerdo al número de filas que sean necesarias.

ii.4) El juego se desarrolla hasta que quede una fórmula atómica.

Más adelante, en la presentación de ejercicios resueltos, tendremos ocasión de detenernos en el funcionamiento de las reglas. En tanto, la <u>etapa de finalización</u>, permite concluir el juego y reconocer al vencedor, esto es, al jugador que ganó la partida y desde el rol que lo realizó.

iii.1) Al jugador que realizó el último movimiento, le corresponde registrar el resultado en la casilla correspondiente. Para ello, deberá identificar la fórmula atómica con la asignación realizada por el proponente y registrala en la celda correspondiente al “Resultado” (por ejemplo: p = 1).

iii.2) En esa misma casilla, deberá registrar al jugador que gana la partida y el rol en el que lo llevó a cabo (por ejemplo: p = 1, gana oponente en el rol de verificador).

iii.3) El resultado plantea, considerando una estrategia adecuada. Movimientos racionales que se corresponden con la forma del fin buscado, si:

1. Verificador gana
2. Verificador gana en papel de falsador
3. Falsador gana
4. Falsador gana en papel de verificador

Al concluir la etapa de finalización no concluye el uso de la herramienta didáctica como tal, pues tanto la estrategia de análisis como la reconstrucción retrogresiva, nos permitirá ampliar las experiencias de aprendizaje en el contexto de un aprendizaje significativo.

4.3 Ejercicios por regla de elección

Dada la sencillez de los ejemplos, los juegos se realizarán con dos situaciones

Regla 1: α^β: <u>oponente</u> elige α,β

Si tengo una fórmula: p^q

Situación 1:

Representación extensional	**Representación narrativa**	
(p^q)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" p=0, q=1
p	1	R1 oponente elige
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	p=0: Gana oponente	

Situación 2:

Representación extensional	**Representación narrativa**	
(p^q)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" p=0, q=1
q	1	R1 oponente elige
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	q=1: Gana proponente	

Como es el proponente quien asigna los valores, tiene el compromiso de desarrollar un juego con los movimientos que le sean lícitos, buscando una estrategia adecuada. Dado que el oponente tiene la elección, la elección en la situación 2 no beneficia al oponente y, nadie juega para perder.

Regla 2: $\alpha\leftrightarrow\beta$: oponente elige $\alpha\rightarrow\beta$, $\beta\rightarrow\alpha$

Si tengo una fórmula: $p\leftrightarrow q$

Situación 1:

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$(p\leftrightarrow q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=1, q=0
$p\rightarrow q$	1	R2 oponente elige
p	2	R4 proponente elige
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	p=1: Gana proponente	

Situación 2:

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$(p\leftrightarrow q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=1, q=0
$q\rightarrow p$	1	R2 oponente elige
q	2	R4 proponente elige
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	q=0: Gana oponente	

El juego inicia con la aplicación de la R2 por parte del oponente, sin embargo, al ser una fórmula bicondicional o bi-implicativa, un solo movimiento no es suficiente para concluir el juego. En la situación 1 podemos observar que el oponente elige α (p→q), es decir, el primero de los dos condicionales que constituyen el marco de elección de la R2; lo que lleva al proponente a realizar un segundo movimiento haciendo uso de la R4 y optando por el antecedente de la fórmula, es decir, α (p). Al ser una fórmula atómica *p*, se determina que el ganador fue el proponente.

Por otro lado, la situación 2 plantea un escenario, por un lado, distinto, pero por otro inconcluso. Es un escenario distinto pues, aunque los valores asignados por el proponente sean los mismos (p=1, q=0), el oponente que emplea la R2 opta por β (q→p), en lugar de α (p→q). Esto implicaría que, el proponente, al jugar la R4 sólo pueda optar (en este momento en el que iniciamos los juegos conociendo las reglas de elección) por α (q); y dado que q = 0, y nadie juega para perder, además de que dejaría como ganador al oponente, no sería tampoco un movimiento racional.

La otra alternativa sería jugar ¬β, pero, y es aquí donde viene el escenario inconcluso, por un lado, no se ha presentado como tal el empleo de la R5 (que nos remite al tratamiento de la negación), y por el otro, ello resultaría en un oponente ganando en el rol del verificador, lo que no beneficia al proponente original.

Regla 3: αvβ: proponente elige ¬α, ¬β

Si tengo una fórmula: pvq

Situación 1:

<table>
<tr><th>Representación extensional</th><th colspan="2">Representación narrativa</th></tr>
<tr><td rowspan="5">(pvq)

¬p</td><td>#</td><td>Inicia el juego con una fórmula molecular</td></tr>
<tr><td>0</td><td>Proponente “propone valores” p=0, q=1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>R3 proponente elige</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resultado: el juego aún no ha concluido pues se requiere del uso de la R5 para determinar el resultado. Puede ser, en este caso, que haya ganado el proponente en el rol del falsador, pero debemos comprender el porqué.</td></tr>
<tr><td colspan="2">---------------</td></tr>
</table>

Situación 2:

Representación extensional	#	Representación narrativa
(pvq)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” $p=0$, $q=1$
¬q	1	R3 proponente elige
		Resultado: el juego aún no ha concluido pues se requiere del uso de la R5 para determinar el resultado. Puede ser, en este caso, que haya ganado el oponente en el rol del verificador, pero debemos comprender el porqué.

En el uso de la R3, podemos ver que el resultado no necesariamente beneficia al jugador en su rol original, la presencia del conectivo monádico que conocemos como la “negación” (¬), plantea, siguiendo la GTS de Hinttikka (1983) un cambio de rol o papel entre los jugadores.

Regla 4: $\alpha \rightarrow \beta$: proponente elige α, $\neg\beta$

Si tengo una fórmula: $p \rightarrow q$

Situación 1:

Representación extensional	#	Representación narrativa
$(p \rightarrow q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” $p=1$, $q=0$
p	1	R4 proponente elige
		Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica
		$p=1$: Gana proponente

Situación 2:

Representación extensional	Representación narrativa	
$(p \rightarrow q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=0, q=1
$\neg q$	1	R4 proponente elige
	Resultado: el juego aún no ha concluido pues se requiere del uso de la R5 para determinar el resultado. Puede ser, en este caso, que haya ganado el oponente en el rol del verificador, pero debemos comprender el porqué.	

El proponente, cuya forma del fin buscado es = 1, esto es, buscará verificar la fórmula lógica en juego, y ello se logra al conseguir que la fórmula atómica tenga dicho valor; por lo que deberá considerar al hacer uso de la R5, de las implicaciones del consecuente que, al encontrarse negado, cambiará los compromisos del jugador en el contexto del juego, provocando con ello que, los esfuerzos por lograr la forma del fin buscado, terminen siendo la ganancia el oponente.

En la situación 1 de la R5 se logra, desde la asignación, asegurar la victoria para el proponente, claro, cuando la sentencia enunciativa es mínima. Sin embargo, de haber mantenido la misma asignación de valores que la situación 1 en la situación 2, habría sido relativamente sencillo determinar la imposibilidad de la elección de $\neg\beta$ ($\neg q$) por parte del proponente, dado que q=0 y, de modo racional, nadie juega para perder, ganar la partida como proponente en el rol de verificador, es preferible a: ganar la partida, pero en el rol contrario.

Al haber cambiado las asignaciones, el proponente busca asegurar no necesariamente una victoria que favorezca una estrategia adecuada, sino incluso, volver más interesante la partida, provocando en el oponente el desarrollo de una estrategia no adecuada.

Regla 5: ¬α: cambio de rol y sigue α

Vamos a recurrir a los ejemplos previos de la situación 1 y 2 de la R3, así como a la situación 2 de la R4. Con la finalidad de determinar los resultados y dirimir sobre ellos.

i) Situación 1 de la R3

Representación extensional	Representación narrativa	
(pvq)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=0, q=1
¬p	1	R3 proponente elige
p	2	R5 cambio de rol
	Resultado: Concluye el juego con una fórmula atómica.	
	p=0: Gana proponente en el rol del falsador	

ii) Situación 2 de la R3

Representación extensional	Representación narrativa	
(pvq)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=0, q=1
¬q	1	R3 proponente elige
q	2	R5 cambio de rol
	Resultado: Concluye el juego con una fórmula atómica.	
	q=1: Gana oponente en el rol del verificador	

iii) Situación 2 de la R4

Representación extensional	**Representación narrativa**	
($p \rightarrow q$)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” $p=0$, $q=1$
$\neg q$	1	R4 proponente elige
q	2	R5 cambio de rol
	Resultado: Concluye el juego con una fórmula atómica.	
	$q=1$: Gana oponente en el rol del verificador.	

En el ejemplo de la situación 1 de la R3, podemos apreciar que, gana proponente en el rol del falsador ($p=0$); en el ejemplo de la situación 2 del R3, podemos apreciar que, gana oponente en el rol del verificador ($q=1$); y, en el ejemplo de la situación 2 del R4, podemos apreciar que, gana oponente en el rol del verificador ($q=1$).

Así, en ninguno de nuestros tres últimos ejemplos, ha ganado ningún jugador en su papel o rol original. En la situación 1 de la R4, que es el único caso en el que gana el proponente, no lo hace de acuerdo a la forma del fin buscado, esto es, no desarrolló una estrategia ganadora que le permitiera el máximo beneficio, aunque se impone al oponente. Para ilustrarlo mejor, en los últimos dos ejemplos (situación 2 de la R3 y situación 2 de la R4), si el juego contase con un mecanismo de implementación tecnológico, habría ganado el programa del computador o software apropiándose de la estrategia y la forma del fin buscado del proponente; es decir, la naturaleza se habría impuesto respecto al agente epistémico.

Estos juegos basados en una SFE, permiten estudiar diversas situaciones de elección, marcos decisorios, no ya desde su forma o sintaxis, sino desde las asignaciones y cuyo resultado, en este estado, estará enmarcado en las preferencias respectivas, siguiendo la búsqueda por llegar a la forma del fin buscado o, dicho, en otros términos, probar la satisfacibilidad.

4.3.1 Tautologías perdidas

Ejercicio 1: Tautología perdida, caso 1.1

Representación extensional	Representación narrativa	
p→(q→p)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" p=0, q=1
¬(q→p)	1	R4 proponente elige ¬β
(q→p)	2	R5 cambio de rol
¬p	3	R4 oponente´ en rol de verificador elige ¬β
p	4	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	p=0: Gana oponente	

Ejercicio 2: Tautología perdida, caso 1.2

Representación extensional	Representación narrativa	
p→(q→p)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" p=0, q=1
p	1	R4 proponente elige α
	Resultado:	
	p=0: Gana oponente	

Ejercicio 3: Tautología perdida, caso 1.3

Representación extensional	Representación narrativa	
p→(q→p)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" p=0, q=1
	1	R4 proponente elige ¬β

¬(q→p) (q→p) q	2	R5 cambio de rol
	3	R4 oponente´ en rol de verificador elige ¬α
	Resultado:	
	p=0: Gana oponente en el papel del verificador	

El primer ejercicio (p→(q→p)), con la misma asignación (p=0, q=1) para los tres casos expuestos, nos ofrece tres resultados posibles: i y ii) gana el oponente en su rol original; mientras que el iii) gana el oponente, pero como verificador. Es decir, en los tres casos, el proponente pierde el juego. Sintácticamente estamos ante una fórmula válida, pero semánticamente, nos encontramos frente a una sentencia enunciativa tautológica. Aquí, la semántica de juegos y nuestra SFE nos permiten sostener que juegos tautológicos pueden perderse; conduciéndonos a la posibilidad de que los juegos entonces contradictorios, puedan tener una estrategia ganadora.

Para que el proponente tenga condiciones de asegurar la posibilidad de desarrollar una estrategia adecuada, debe entonces replantearse las asignaciones, en este caso a: p = 1 y q= 0. De esta manera, tal como nos lo muestra el caso 1.4, el proponente tiene chances de ganar el juego.

Ejercicio 4: Tautología perdida, caso 1.4

Representación extensional	**Representación narrativa**	
p→(q→p)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=1, q=0
¬(q→p)	1	R4 proponente elige ¬β
(q→p)	2	R5 cambio de rol
¬p	3	R4 oponente´ en rol de verificador elige ¬β
p	4	R5 cambio de rol
	Resultado:	

	p=1: Gana proponente

Ejercicio 5: Tautología perdida, caso 2.1

Representación extensional	Representación narrativa	
$p\rightarrow(\neg p\rightarrow q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=0, q=1
$\neg(\neg p\rightarrow q)$	1	R4 proponente elige ¬β
$\neg p\rightarrow q$	2	R5 cambio de rol
$\neg p$	3	R4 oponente´ en rol de verificador elige α
p	4	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	p=0: Gana oponente	

Ejercicio 6: Tautología perdida, caso 2.2

Representación extensional	Representación narrativa	
$p\rightarrow(\neg p\rightarrow q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=0, q=1
p	1	R4 proponente elige α
	Resultado:	
	p=0: Gana oponente	

Ejercicio 7: Tautología perdida, caso 2.3

Representación extensional	Representación narrativa	
$p\rightarrow(\neg p\rightarrow q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=0, q=1
	1	R4 proponente elige ¬β

$\neg(\neg p\to q)$	2	R5 cambio de rol
$\neg p\to q$	3	R4 oponente´ en rol de verificador elige β
$\neg q$	4	R5 cambio de rol
q	**Resultado:**	
	q=1: Gana proponente	

En el ejercicio 2, resulta claro para el caso 2.1 la victoria del oponente. Sin embargo, el caso 2.2 nos parecería algo contraintuitivo, pues el hecho de que el proponente opte por un movimiento que le restrinja a otras posibilidades de acción y que éste beneficie a su oponente, flagrantemente constituiría un movimiento irracional. Algo similar sucede en el caso 2.3, pues la elección del oponente en el rol de verificador al usar la R4, no lo beneficiaría ante la inmanencia (no inmediata) de la R5 al elegir ¬β en lugar de α (¬p), a partir de las asignaciones establecidas. Por lo que tiene lugar una estrategia no adecuada que terminó beneficiando al proponente, llevándolo a ganar la partida.

Podemos ver, en el siguiente ejercicio, otro caso de una fórmula tautológica que se ha perdido.

Ejercicio 8: Tautología perdida, caso 3

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$((p\vee q)\wedge\neg p)\to\neg q$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=0, q=1
$(p\vee q)\wedge\neg p$	1	R4 proponente elige α
$p\vee q$	2	R1 oponente elige α
$\neg q$	3	R3 oponente elige ¬β
	4	R5 cambio de rol

q	**Resultado:**	
	q=1: Gana oponente en rol del verificador	

4.3.2 Contradicciones ganadas

Ejercicio 9: Contradicción ganada, caso 1

Representación extensional	**Representación narrativa**	
¬((p^q)→p)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" p=1, q=0
(p^q)→p	1	R5 cambio de rol
¬p	2	R4 proponente´ elige ¬β
p	3	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	p=1: Gana proponente	

Ejercicio 10: Contradicción ganada, caso 2

Representación extensional	**Representación narrativa**	
(p^¬q)^(¬pvq)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" p=1, q=0
¬pvq	1	R1 oponente elige β
¬¬p	2	R3 proponente elige ¬α
¬p	3	R5 cambio de rol
p	4	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	p=1: Gana proponente	

Ejercicio 11: Contradicción ganada, caso 3

Representación extensional	Representación narrativa	
¬((p∧q)→¬(¬q∨¬p)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" p=0, q=1
¬¬(¬q∨¬p)	1	R4 proponente elige ¬β
¬(¬q∨¬p)	2	R5 cambio de rol
¬q∨¬p	3	R5 cambio de rol
¬¬q	4	R3 proponente elige ¬α
¬q	5	R5 cambio de rol
q	6	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	q=1: Gana proponente	

Los ejercicios 4, 5 y 6 presentados, contienen sentencias enunciativas con contradicciones ganadas. Esto significa que, de las fórmulas lógicas propuestas, a saber: caso 1: ¬((p∧q)→p); caso 2: (p∧¬q)∧(¬p∨q); y, caso 3: ¬((p∧q)→¬(¬q∨¬p); pese a que son todas ellas fórmulas con probada contradicción, es decir, que en cualesquiera de sus interpretaciones, poseen un valor de verdad falso. Para la propuesta del tránsito de una semántica veritativa-funcional a una semántica basada en la estrategia adecuada, supone un modelo de análisis de las interacciones en el que, dado un conjunto de condiciones y acciones realizables, los agentes epistémicos, esto es, quienes ejecutan un tipo de racionalidad, habrán de interactuar a partir de funciones de utilidad, que sustituirán las funciones de verdad en el análisis lógico.

Permitiendo con ello que, fórmulas contradictorias puedan ser ganadas por el proponente original; en el que desde esta perspectiva semántica cada fórmula es un juego que puede perderse o ganarse, incluso si es tautológico o si es contradictorio.

La semántica de juegos como una semántica formal estratégica, supone entonces, situar los usos del lenguaje en el contexto de un juego o tipo de interacción específica, que permita aportar didácticamente a la enseñanza de la lógica elemental.

4.3.3 Contingencias

Ejercicio 12: Contingencia, caso 1

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$((r \vee t) \wedge \neg p) \leftrightarrow ((r \wedge q) \wedge \neg s)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=1, q=0, r=1, s=0, t=1
$((r \vee t) \wedge \neg p) \rightarrow ((r \wedge q) \wedge \neg s)$	1	R2 oponente elige $\alpha \rightarrow \beta$
$(r \vee t) \wedge \neg p$	2	R4 proponente elige α
$r \vee t$	3	R1 oponente elige α
⌐t	4	R3 proponente elige ⌐β
t	5	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	t=1: Gana oponente en el rol del verificador	

En el ejercicio No. 7, nos encontramos con una fórmula contingente que, al ser jugada, arroja como resultado, a partir de las asignaciones definidas por el proponente, a un oponente que gana en el rol del verificador.

La forma en la que se desarrolla el juego, permite observar que, en el primer movimiento, el oponente, quien es a quien le corresponde optar por alguna de las opciones del marco electivo de la R2, elige: $\alpha \rightarrow \beta$. A partir de ahí, el segundo movimiento se encuentra a cargo del proponente, pues contiene el condicional ($\rightarrow$) como conectivo principal. El proponente pues, desde la R4, elige α; y con ello el juego se sigue desarrollando a partir de ahí. Y, dado que la fórmula resultante es disyuntiva, le corresponderá al oponente elegir a partir de la R2, y dado que las dos variables proposicionales tienen un valor asignado = 1, resulta irrelevante por cual de las dos opciones se incline el oponente, ya sea $\neg\alpha$ o $\neg\beta$. Aunque el juego no acaba en el movimiento 4, pues aún es necesario eliminar la negación con R5 y el cambio de rol; donde con t=1, gana oponente en el rol del verificador.

Ejercicio 13: Contingencia, caso 2

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$((p\rightarrow q)\vee(q\leftrightarrow r))\wedge\neg(r\wedge(s\wedge\neg\neg q))$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=0, q=1, r=0, s=1
$(p\rightarrow q)\vee(q\leftrightarrow r)$	1	R1 oponente elige α
$\neg(q\leftrightarrow r)$	2	R3 proponente elige $\neg\beta$
$(q\leftrightarrow r)$	3	R5 cambio de rol
$r\rightarrow q$	4	R2 oponente´ elige $\beta\rightarrow\alpha$
$\neg q$	5	R4 proponente´ elige $\neg\beta$
q	6	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	q=1: Gana proponente	

En este ejercicio No. 8, tenemos un juego que luego de la asignación de valores, carga la tarea de realizar el primer movimiento al oponente, quien las variables que le benefician son p y q, en tanto se corresponden con la forma del fin buscado (0), tiene en α (-$(p\rightarrow q)\vee(q\leftrightarrow r)$-) un mayor número de posibilidades (con una variable p y dos variables q), a diferencia de β (-$\neg(r\wedge(s\wedge\neg\neg q))$-) que solamente tiene una *q* y, además, inicia con un R5, cambio de rol.

En el movimiento 2, ante una fórmula disyunta, el proponente debe elegir, y elige $\neg\beta$; provocando un cambio de rol con R5 como tercer movimiento. Nuevamente cae en el oponente, la tarea de elegir en una fórmula bi-condicional, y elige $\beta\rightarrow\alpha$. Para el movimiento 5 con R4 el proponente elige $\neg\beta$ y, ante un nuevo cambio de rol con R5 como movimiento 6, el resultado del juego sale a favor del proponente quien, además gana en su rol original, desarrollando una estrategia adecuada.

Ejercicio 14: Contingencia, caso 3

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$((p\vee q)\wedge\neg r)\rightarrow\neg((s\vee\neg p)\wedge\neg q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" p=1, q=1, r=0, s=0
$\neg\neg((s\vee\neg p)\wedge\neg q)$	1	R4 proponente elige $\neg\beta$
$\neg((s\vee\neg p)\wedge\neg q)$	2	R5 cambio de rol
$(s\vee\neg p)\wedge\neg q$	3	R5 cambio de rol
$s\vee\neg p$	4	R1 oponente elige α
$\neg\neg p$	5	R3 proponente elige $\neg\beta$
$\neg p$	6	R5 cambio de rol
p	7	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	p=1: Gana proponente	

Se ha integrado el ejercicio No. 9 una puntual finalidad: mostrar los movimientos extras innecesarios producidos por fórmulas con doble negación. En el que, para continuar, es necesario eliminar cada negación de manera individual, quedando en el mismo punto del que se partió. Esta situación nos recuerda claro, a la regla de la doble negación (DN), dentro de las reglas de reemplazo (por sus equivalencias) de la deducción natural en el lenguaje proposicional.

Entonces, para ampliar el análisis hacia las fórmulas predicativas (unarias), las reglas de extensión nos permitirán incorporar sentencias enunciativas con cuantificadores, tanto universales ($\forall$) como existenciales ($\exists$), ya sean afirmados o negados. Como una forma de aproximación lúdica a la lógica de primer orden, el objetivo de agregar las siguientes reglas y de identificar al jugador que podrá hacer uso de ellas y bajo qué restricciones, para continuar las interacciones de acuerdo a la forma del fin buscado; recordando que, no se elimina el movimiento 0: las asignaciones.

4.4 Ejercicios con reglas de extensión

Para jugar con fórmulas predicativas, pese a que es definible de acuerdo al tipo de lenguaje, para nuestros objetivos, únicamente definiremos un tipo de lenguaje que nos servirá para plantear los distintos ejemplos y casos de juegos; sin que lo anterior presuponga la imposibilidad de ampliar a otros tipos de lenguajes de primer orden, de acuerdo a los propósitos curriculares específicos.

Las asignaciones, acción inicial de relevancia determinante para reconocer al jugador que ha ganado la partida, así como el desarrollo de una estrategia adecuada o no; se realizarán en el movimiento "0", por lo que, para estos juegos, únicamente estaremos emplearemos como constantes: {a, b, c, d}.

<u>Definiciones</u>

Lenguaje $\mathscr{L}$

I. Símbolos de $\mathscr{L}$
   a. Un conjunto infinito numerable de variables individuales = {u, v, w, x, y, z, u_1, v_1, w_1…}
   b. Un conjunto[41] infinito de constantes individuales = {a, b, c, d, e, f, a_1, b_1, c_1…}
   c. Un conjunto[42] infinito de predicados o letras predicativas, cada predicado va asociado con una aridad finita asignada = {P, Q, R, S, T, P_1, Q_1, R_1, S_1…}

[41] Posiblemente vacío.
[42] Posiblemente vacío.

d. Símbolo de la identidad: =

e. Conectivos: {¬, ∧, ∨, →, ↔}

f. Cuantificadores: {∀, ∃}

g. Signos de agrupación: ()

h. No hay más símbolos

II. Reglas de formación para el lenguaje $\mathscr{L}$

- Términos de $\mathscr{L}$

a. Toda variable individual es un término de $\mathscr{L}$

b. Toda constante individual es un término de $\mathscr{L}$

c. No hay más términos

- Fórmulas Bien Formadas de $\mathscr{L}$

a. Fórmulas atómicas:

i) Si t_1 y t_2 son términos de $\mathscr{L}$, entonces

$$t_1 = t_2$$

es una FBF de $\mathscr{L}$

ii) Si P es un predicado de aridad n y t_1, t_2, t_n; son términos de $\mathscr{L}$, entonces

$$Pt_1 \ldots t_n$$

es una FBF de $\mathscr{L}$

b. Fórmulas moleculares:

iii) Si α y β son FBF de $\mathscr{L}$, también lo son:

$$(\neg\alpha), (\alpha\wedge\beta), (\alpha\vee\beta), (\alpha\rightarrow\beta), (\alpha\leftrightarrow\beta)$$

iv) Si φ es una fórmula del L y v es una variable individual, entonces también son fórmulas:

$$\exists v\varphi, \forall v\varphi$$

v) No hay más FBF.

Las reglas de extensión que se presentan a continuación, integran una serie de ejemplos para que resulte más natural su aplicación.

Regla 6: $\neg\neg\beta$: sin cambio de rol sigue con α

Dada la sencillez de los ejemplos, los juegos se realizarán con dos situaciones, incluyendo reglas de elección, una donde la variable se convierta en una fórmula atómica como constante y otra, donde la variable sea una fórmula molecular y su respectivo desarrollo.

Regla 7: $\forall x\ \alpha(x)$: oponente elige cualquier constante y continua $\alpha(a)$

Si tengo una fórmula: $\forall x\ P(x)$:

Situación 1:

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$\forall x\ P(x)$ Pa	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” a=1, b=0
	1	R7 oponente elige cualquier constante $\alpha(a)$
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	

	a=1: Gana proponente

Si tengo una fórmula: $\forall x$ ¬((Px∧¬Qx)→(Qx∨¬Px)):

Situación 2:

Representación extensional	Representación narrativa	
$\forall x$ ¬((Px∧¬Qx)→(Qx∨¬Px))	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" a=1, b=0
¬((Pa∧¬Qa)→(Qa∨¬Pa))	1	R7 oponente elige cualquier constante α(a)
(Pa∧¬Qa)→(Qa∨¬Pa)	2	R5 cambio de rol
Pa∧¬Qa	3	R3 proponente´ elige α
¬Qa	4	R1 oponente´ elige β
Qa	5	R5 cambio de rol
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	a=1: Gana proponente	

Regla 8: ¬$\forall x$ α(x): <u>oponente</u> continua $\exists x$¬α(x)

Si tengo una fórmula: ¬$\forall x$ P(x):

Situación 1:

Representación extensional	Representación narrativa	
¬$\forall x$ P(x):	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" a=1, b=0
	1	R8 oponente continua con $\exists x$¬α(x)

$\exists x\ \neg P(x)$ $\neg P(a)$	2	R9 proponente elige constante nueva y continua $\alpha(a)$
$P(a)$	3	R5 cambio de rol
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	a=1: Gana oponente en el rol de verificador	

Si tengo una fórmula: $\neg\forall x\ P(x)$:

Situación 2:

Representación extensional	Representación narrativa	
$\neg\forall x\ (Px\rightarrow\neg Qx)\wedge(Px\wedge Px)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" a=0, b=1
$\exists x\ \neg((Px\rightarrow\neg Qx)\wedge(Px\wedge Px))$	1	R8 oponente continua con $\exists x\neg\alpha(x)$
$\neg(Pb\rightarrow\neg Qb)\wedge(Pb\wedge Pb)$	2	R9 proponente elige constante nueva y continua $\alpha(b)$
$(Pb\rightarrow\neg Qb)\wedge(Pb\wedge Pb)$	3	R5 cambio de rol
$Pb\rightarrow\neg Qb$	4	R1 oponente´ elige α
Pb	5	R4 proponente´ elige α
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	b=1: Gana proponente	

Regla 9: $\exists x\ \alpha(x)$: proponente elige constante nueva y continua $\alpha(a)$

Si tengo una fórmula: $\exists x\ \alpha(x)$:

Situación 1:

Representación extensional	Representación narrativa

∃*x* α(*x*)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” a=1, b=0
a	1	R9 proponente elige constante nueva y continua α(a)
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	a=1: Gana proponente	

Si tengo una fórmula: ∃*x* ((Px∨¬Qx)↔(Rx∧¬(Px∨¬Qx)):

Situación 2:

Representación extensional	**Representación narrativa**	
∃*x* ((Px∨¬Qx)↔(Rx∧¬(Px∨¬Qx))	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” a=0, b=1
(Pb∨¬Qb)↔(Rb∧¬(Pb∨¬Qb)	1	R9 proponente elige constante nueva y continua α(b)
(Pb∨¬Qb)→(Rb∧¬(Pb∨¬Qb)	2	R2 oponente elige α→β
¬(Rb∧¬(Pb∨¬Qb))	3	R4 proponente elige ¬β
Rb∧¬(Pb∨¬Qb)	4	R5 cambio de rol
¬(Pb∨¬Qb)	5	R1 oponente´ elige β
	6	R5 cambio de rol

(Pb∨¬Qb) ¬¬Qb Qb	7	R3 proponente elige ¬β
	8	R6 sin cambio de rol
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	b=1: Gana proponente	

Regla 10: ¬∃*x* α(*x*): <u>proponente</u> continua ∀*x*¬α(*x*)

Si tengo una fórmula: ¬∃*x* α(*x*)

Situación 1:

Representación extensional	**Representación narrativa**	
¬∃*x* α(*x*) ∀*x* ¬α(*x*) ¬Pa Pa	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” a=0, b=1
	1	R10 proponente elige y continua ∀*x*¬α(*x*)
	2	R7 oponente elige cualquier constante
	3	R5 cambio de rol
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	a=0: Gana proponente en el rol de falsador	

Si tengo una fórmula: ¬∃*x* ((Px↔Qx)∨(¬Rx→Sx))∨((Qx∧Sx)∧¬(¬Px→Sx))

Situación 2:

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$\neg\exists x$ $((Px\leftrightarrow Qx)\vee(\neg Rx\rightarrow Sx))\vee((Qx\wedge Sx)\wedge\neg(\neg Px\rightarrow Sx))$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” a=1, b=0, c= 0, d=1
$\forall x$ $\neg(((Px\leftrightarrow Qx)\vee(\neg Rx\rightarrow Sx))\vee((Qx\wedge Sx)\wedge\neg(\neg Px\rightarrow Sx)))$	1	R10 proponente elige y continua $\forall x\neg\alpha(x)$
$\neg(((Pb\leftrightarrow Qb)\vee(\neg Rb\rightarrow Sb))\vee((Qb\wedge Sb)\wedge\neg(\neg Pb\rightarrow Sb)))$	2	R7 oponente elige cualquier constante y continua $\alpha(a)$
$((Pb\leftrightarrow Qb)\vee(\neg Rb\rightarrow Sb))\vee((Qb\wedge Sb)\wedge\neg(\neg Pb\rightarrow Sb)))$	3	R5 cambio de rol
$\neg ((Pb\leftrightarrow Qb)\vee(\neg Rb\rightarrow Sb))$	4	R3 proponente´ elige $\neg\alpha$
$(Pb\leftrightarrow Qb)\vee(\neg Rb\rightarrow Sb)$ $\neg (Pb\leftrightarrow Qb)$	5	R5 cambio de rol
$(Pa\leftrightarrow Qb)$	6	R3 proponente elige $\neg\alpha$
$Pb\rightarrow Qb$	7	R5 cambio de rol
Pb	8	R2 proponente´ elige $\alpha\rightarrow\beta$
	9	R4 proponente´ elige α
	Resultado: concluye el juego con una fórmula atómica	
	b=0: Gana proponente en el rol de falsador	

Hemos visto ya diversas situaciones en las que ante fórmulas lógicas con predicados unarios les es aplicable, para generar condiciones de juego, las reglas de extensión. Las reglas de extensión suponen un paso preparatorio para la aplicación de las reglas de elección, en tanto que es a los predicados a los que el proponente les asigna un valor. Veamos ahora, algunos ejercicios resueltos que, se dejará a cuenta del lector el trabajo de describir los movimientos.

4.4.1 Cuantificador Universal ∀

Ejercicio 15: ∀, caso 1

Representación extensional	**Representación narrativa**	
∀x ¬(Px↔Qx)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" a=0, b=1
¬(Pa↔Qa) Pa↔Qa	1	R7 oponente elige cualquier constante y continua α(a)
Qa→ Pa	2	R5 cambio de rol
¬Pa	3	R2 oponente´ elige β→α
Pa	4	R4 proponente´ elige ¬β
	5	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	a=0: Gana oponente	

Ejercicio 16: ∀, caso 2

Representación extensional	**Representación narrativa**	
	#	Inicia el juego con una fórmula molecular

∀x ¬(Px↔Qx)	0	Proponente “propone valores” a=1, b=0
	1	R7 elige cualquier constante y continua α(a)
¬(Pa↔Qa)	2	R5 cambio de rol
Pa↔Qa	3	R2 oponente elige β→α
Qa→ Pa	4	R4 proponente elige ¬β
¬Pa	5	R5 cambio de rol
Pa	**Resultado:**	
	a=1: Gana proponente	

4.4.2 Cuantificador Universal Negado ¬∀

Ejercicio 17: ¬∀, caso 1

Representación extensional	Representación narrativa	
¬∀x (Px∧¬Qx)→¬Qx	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” a=0, b=1
∃x ¬(Px∧¬Qx)→¬Qx	1	R8 oponente continua ∃*x*¬α(*x*)
¬(Pa∧¬Qa)→¬Qa	2	R9 proponente elige constante nueva y continua α(a)
(Pa∧¬Qa)→¬Qa	3	R5 cambio de rol
Pa∧¬Qa	4	R4 proponente elige α
¬Qa	5	R1 oponente elige β
Qa	6	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	a=0: Gana oponente	

Ejercicio 18: ¬∀, caso 2

Representación extensional	Representación narrativa	
	#	Inicia el juego con una fórmula molecular

$\neg\forall x\,(Px\wedge\neg Qx)\rightarrow\neg Qx$	0	Proponente “propone valores” a=1, b=0
	1	R8 oponente continua $\exists x\neg\alpha(x)$
$\exists x\,\neg(Px\wedge\neg Qx)\rightarrow\neg Qx$	2	R9 proponente elige constante nueva y continua α(a)
$\neg(Pa\wedge\neg Qa)\rightarrow\neg Qa$	3	R5 cambio de rol
$(Pa\wedge\neg Qa)\rightarrow\neg Qa$	4	R4 proponente´ elige α
$Pa\wedge\neg Qa$	5	R1 oponente´ elige β
$\neg Qa$	6	R5 cambio de rol
Qa	**Resultado:**	
	a=1: Gana proponente	

4.4.3 Cuantificador Existencial ∃

Ejercicio 19: ∃, caso 1

Representación extensional	Representación narrativa	
$\exists x\,\neg(Px\vee\neg Px)\rightarrow Qx$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” a=1, b=0
$\neg(Pa\vee\neg Pa)\rightarrow Qa$	1	R9 proponente elige constante nueva y continua α(a)
$(Pa\vee\neg Pa)\rightarrow Qa$	2	R5 cambio de rol
$\neg Qa$	3	R4 proponente´ elige$\neg\beta$
Qa	4	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	a=1: Gana proponente	

Ejercicio 20: ∃, caso 2

Representación extensional	Representación narrativa	
	#	Inicia el juego con una fórmula molecular

∃x ¬(Px∨¬Px)→Qx ¬(Pa∨¬Pa)→Qa (Pa∨¬Pa)→Qa Pa∨¬Pa ¬Pa Pa	0	Proponente “propone valores” a=0, b=1
	1	R9 proponente elige constante nueva y continua α(a)
	2	R5 cambio de rol
	3	R4 proponente´ elige α
	4	R3 proponente´ elige α
	5	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	a=0: Gana oponente	

4.4.4 Cuantificador Existencial Negado ¬∃

Ejercicio 21: ¬∃, caso 1

Representación extensional	**Representación narrativa**	
¬∃x (Qx∧¬¬Px)↔Qx ∀x ¬((Qx∧¬¬Px)↔Qx) ¬((Qa∧¬¬Pa)↔Qa) (Qa∧¬¬Pa)↔Qa (Qa∧¬¬Pa)→Qa ¬Qa Qa	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” a=0, b=1
	1	R10 proponente continua ∀*x*¬α(*x*)
	2	R7 oponente elige cualquier constante y continua α(a)
	3	R5 cambio de tol
	4	R2 oponente´ elige α→β
	5	R4 proponente´ elige ¬β
	6	R5 cambio de tol
	Resultado:	
	a=0: Gana oponente	

Ejercicio 22: ¬∃, caso 2

Representación extensional	**Representación narrativa**	
	#	Inicia el juego con una fórmula molecular

¬∃x (Qx∧¬¬Px)↔Qx	0	Proponente “propone valores” a=1, b=0
	1	R10 proponente continua ∀*x*¬α(*x*)
∀x ¬((Qx∧¬¬Px)↔Qx)	2	R7 oponente elige cualquier constante y continua α(a)
¬((Qa∧¬¬Pa)↔Qa)	3	R5 cambio de tol
(Qa∧¬¬Pa)↔Qa	4	R2 oponente´ elige α→β
(Qa∧¬¬Pa)→Qa	5	R4 proponente´ elige α
(Qa∧¬¬Pa)	6	R1 oponente´ elige α
Qa	**Resultado:**	
	a=1: Gana oponente en el rol de verificador	

Podemos observar a lo largo de los últimos ejercicios que, la elección de la constante es determinante en relación a la asignación previa; lo que invitaría a perder interés en el desarrollo del juego con sentencias enunciativas con cuantificadores. Sin embargo, el siguiente ejercicio propone la consideración de fórmulas enunciativas en juego con más de un cuantificador, de modo tal que la interacción resulte más atractiva para los jugadores.

Ejercicio 23: ∀x, ∃x, caso 1

Representación extensional	**Representación narrativa**	
∀x(Px∧¬Qx)→¬(∃x(Qx→Qx))	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” a=1, b=0
∀x(Px∧¬Qx)	1	R4 proponente elige α
Pb∧¬Qb	2	R7 oponente elige cualquier constante y continua α(b)
¬Qb	3	R1 oponte elige β
Qb	4	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	b=0: Gana proponente en el rol de falsador	

En el ejercicio 23, caso 1; tenemos que, ante la presencia de un cuantificador universal ($\forall$) y un cuantificador existencial ($\exists$), estos se encuentran relacionados con un conectivo lógico condicional ($\rightarrow$), lo que permite al proponente, posterior a la asignación, el elegir a la fórmula α y continuar a partir de ahí.

El ganador del juego previo es el proponente en el rol del falsador pues, una vez que la fórmula en juego tenía el cuantificador universal ($\forall$) era turno del oponente el elegir la constante que mayor beneficio le reportara, en este caso: $b = 0$, por corresponder con la forma del fin buscado, según su rol.

Ejercicio 24: $\forall$x, $\exists$x, caso 2

Representación extensional	Representación narrativa	
$\forall x(Px \wedge \neg Qx) \rightarrow \neg(\exists x(Qx \rightarrow Qx))$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" a=1, b=0
$\neg(\exists x(Qx \rightarrow Qx))$	1	R4 proponente elige β
$\exists x(Qx \rightarrow Qx)$	2	R5 cambio de rol
$Qa \rightarrow Qa$	3	R9 proponente´ elige constante nueva y continua α(a)
Qa	4	R4 proponente´ elige α
	Resultado:	
	a=1: Gana oponente en el rol de verificador	

En este último ejercicio 24, pero ahora como caso 2; el proponente eligió a β (-$\neg(\exists x(Qx \rightarrow Qx))$-) pues ello le permitiría elegir la constante con la R9, y de esta manera, disponer el juego a su beneficio.

Al menos de inicio, pues podemos observar en el juego, la forma del fin buscado resultante (a=1) beneficia al verificador, dicha función es desempeñada por el original proponente, pues en el movimiento 2 tuvo lugar un cambio de rol, al encontrarse negada la fórmula en juego y entrar en acción la R5.

En el punto 4.6, serán propuestos, a modo de juegos futuros para poner en práctica lo aprendido una serie de sentencias enunciativas de lógica elemental, ya sean de carácter proposicional o cuantificacional.

Finalmente, el siguiente apartado tiene como finalidad cerrar con la propuesta de la herramienta didáctica basada en la SFE, ello a partir de la revisión de los resultados. Tarea imprescindible desde el contexto de su implementación áulica fundamentada en la perspectiva didáctico-pedagógica, de un aprendizaje significativo.

4.5 Revisión de resultados

La revisión de resultados supone dos dimensiones de análisis. En primer lugar aquel que nos permitirá establecer un trabajo revisionista de las fórmulas en juego, a partir de una serie de preguntas dirigidas principalmente a los jugadores activos, esto es, a los agentes epistémicos directamente involucrados en las tomas de decisiones y las acciones en cada uno de los movimientos; esto, considerando el contexto áulico y un mecanismo de implementación tradicional que acompañe el desarrollo curricular de alguna unidad de competencia dirigida a la enseñanza de la lógica elemental. Aunque no se restringe al mecanismo de implementación tradicional, en el caso de emplearse un mecanismo de implementación tecnológico (software o aplicación), la naturaleza o programa, quedarán relegados de responder dichas preguntas.

A un segundo nivel de análisis en la revisión de resultados, se pueden sumar los jugadores pasivos. Es decir, en el contexto del espacio áulico, todos los participantes: jugadores involucrados y espectadores, pueden participar en una reconstrucción de los movimientos, que permita evaluar las estrategias, plantear nuevas rutas, repensar las asignaciones y todas aquellas decisiones que pudieron realizarse para alcanzar la forma del fin buscado. La forma del fin buscado serán los compromisos epistémicos que los agentes decisores establecen al inicio de la interacción, pero dichas formas pueden ir mutando conforme avanza el juego.

Al primer nivel de análisis lo hemos denominado: “Estrategias de análisis”; mientras que el segundo nivel de análisis será reconocido como: “Reconstrucción retrogresiva”. Pese a la imposibilidad de pilotear esta herramienta didáctica que permitiera atender la “Hipótesis 4”: *La evaluación de las herramientas en espacios diversos permitirá el contraste de los resultados en el uso de herramientas didácticas basadas en la semántica formal estratégica para la enseñanza de la lógica elemental*; consideramos que su implementación puede motivar futuras investigaciones y mejoras del modelo.

4.5.1 Estrategia de análisis

La estrategia de análisis es un modo de evaluar un aprendizaje significativo que, en el punto 3.2: “Perspectiva didáctico-pedagógica de la propuesta de la SFE”, hemos planteado. Por ello, más allá de la amplia e importante propuesta teórica que Gowin (1990) hace respecto al aprendizaje significativo, resulta relevante para los intereses de nuestra investigación, el detenernos en la técnica Q-5 o la técnica de las cinco preguntas que se recomiendan a los estudiantes para evaluar los alcances y esfuerzos realizados en el contexto del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Teniendo en cuenta que, la reformulación de la Q-5 nos permitiría establecer las siguientes interrogantes para un trabajo revisionista de las fórmulas en juego:

1. ¿Cuál es el resultado del juego?, es decir: ganó el verificador, el falsador, el falsador en el rol del verificador o el verificador en el rol del falsador.
2. ¿Puedes reconstruir descriptivamente el desarrollo del juego?
3. ¿Qué reglas fueron empleadas, porqué y por quiénes?
4. ¿Quién desarrollo la estrategia adecuada y por qué?
5. ¿Qué hubieras hecho diferente?

La tabla 28: “Juegos, resultados y estrategias”, que encontramos en el punto 3.4 dedicado a los “Elementos del diseño…”; nos ofrece un panorama estructurado con 8 juegos organizados inicialmente por los criterios de: i) Movimientos racionales y ii) Movimientos no racionales (suerte o azar). Cada caso (juego), plantea a un juego bipersonal de suma cero, donde se gana en el rol original o no; pero también se pierde en el rol original o no. Lo anterior, con miras a la forma del fin buscado (FFB).

Con los jugadores atendiendo las Q5, se estará en condiciones de pensar rutas distintas de solución, estrategias que provoquen en los jugadores detenerse a pensar los tipos de movimiento que les son lícitos, las restricciones que conllevan, las asignaciones que pudieran favorecerles ante la inmanencia de giros inesperados pero previsibles, para ganar a como de lugar, incluso si se hace en un rol distinto al original.

4.5.2 Reconstrucción retrogresiva

Para la reconstrucción retrogresiva, consideramos en un primer momento el método de Pólya[43] que convierte un ejercicio mecánico en un problema que promueve la reflexión. Esto, como punto de partida para el diseño de estrategias para la solución de problemas (principalmente de carácter matemático); sin embargo, nuestra propuesta no se ajusta necesariamente a un ejercicio de solución mecánica, pues su carácter semántico permite jugar de acuerdo a tantas interpretaciones u asignaciones sean posibles.

Si bien, Meneses y Peñazola (2019) sugieren que,

> Con la implementación de este método no solo se busca que el estudiante encuentre la respuesta acertada en la resolución de problemas luego de seguir una serie de pasos o procedimientos, sino que además haga uso de los conocimientos y habilidades de pensamiento que requiere la competencia resolución de problemas. (p. 13)

[43] Gorge Pólya que falleció en 1985 casi a los 98 años de edad, fue un matemático muy importante de origen húngaro; y al cual le debemos un método muy famoso que consiste en: i) entender el problema, ii) configurar un plan, iii) ejecutar el plan y, por último, iv) examinar la solución. Dicha propuesta la podemos encontrar (en México) en su obra “Cómo plantear y resolver problemas”, editado por Trillas en una primera edición en 1965 y con varias reimpresiones que pueden rastrearse hasta 1989 (Pólya, 1989).

Lo anterior en el contexto del aprendizaje significativo. Sin embargo, la reconstrucción retrogresiva que proponemos planeta iniciar la reconstrucción desde la explicitación del compromiso con la FFB, a partir de una revisión general de la sentencia enunciativa en juego, e ir retrocediendo en la revisión, el camino hasta plantearse las asignaciones que más hayan convenido a los fines.

Como un modo de revisión de resultados, hemos sostenido que se pueden sumar los jugadores pasivos. Es decir, en el contexto del espacio áulico, todos los participantes: jugadores involucrados y espectadores, pueden participar en una reconstrucción de los movimientos, que permita evaluar las estrategias, plantear nuevas rutas, repensar las asignaciones y todas aquellas decisiones que pudieron realizarse para alcanzar la forma del fin buscado.

Tendríamos pues, a manera de propuesta, la siguiente reconstrucción retrogresiva, para lo cual nos serviremos del ejercicio No. 5:

Ejercicio 5:

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$p\rightarrow(\neg p\rightarrow q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente "propone valores" p=0, q=1
$\neg(\neg p\rightarrow q)$	1	R4 proponente elige ¬β
$\neg p\rightarrow q$	2	R5 cambio de rol
$\neg p$	3	R4 oponente´ en rol de verificador elige α
p	4	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	p=0: Gana oponente	

Los momentos que la reconstrucción retrogresiva sugieren son:

1. Identifico el resultado:
2. Reconozco la asignación que resolvió dicho resultado:
3. Planteo una asignación “ad hoc”:
4. Localizo los movimientos con decisiones clave:
5. Determino si el decisor podría modificar su elección
    a. Pruebo **con** modificación de elección:
    b. Pruebo **sin** modificación de elección:
6. Establezco la estrategia que me permita la FFB:

Ejercicio 5: caso 2.1.1

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$p \to (\neg p \to q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=1, q=0
p	1	R4 proponente elige **α**
	Resultado:	
	p=1: Gana proponente	

Ejercicio 5: caso 2.1.2

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$p \to (\neg p \to q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	0	Proponente “propone valores” p=1, q=0
$\neg(\neg p \to q)$	1	R4 proponente elige **$\neg\beta$**
$\neg p \to q$	2	R5 cambio de rol
$\neg q$	3	R4 oponente´ en rol de verificador elige α
q	4	R5 cambio de rol
	Resultado:	
	q=0: Gana oponente	

El modo de ejecución sería como se marca en el texto subrayado:

1. Identifico el resultado: p=0: Gana oponente
2. Reconozco la asignación que resolvió dicho resultado: p=0, q=1
3. Planteo una asignación "ad hoc": p=1, q=0
4. Localizo los movimientos con decisiones clave: 1 y 3
5. Determino si el decisor podría modificar su elección
   a. Pruebo **con** modificación de elección: p=1: Gana proponente
   b. Pruebo **sin** modificación de elección: q=0: Gana oponente
6. Establezco la estrategia que me permita la FFB: Ejercicio 5: caso 2.1.1, pues gana con menos movimientos.

Las tareas así, de una reconstrucción retrogresiva, permiten la participación de los espectadores, fortaleciéndose las experiencias formativas en el espacio áulico y con ello los objetivos y propósitos curriculares.

A manera de cierre del apartado 4, dedicado a la presentación de la herramienta didáctica, se proponen una serie de sentencias enunciativas para jugarse, tanto con reglas de elección, como con las reglas de extensión.

4.6 Juegos para practicar

Recuerda tener a la mano tu tabla de reglas simplificadas y ten en cuenta que, entra más practiques, te resultará más sencillo jugar:

Tabla 30: Reglas simplificadas

R	Representación extensional	R	Representación narrativa

1	$\alpha \wedge \beta$: oponente elige α,β	6	$\neg\neg\alpha$: sin cambio de roll y continua α
2	$\alpha \leftrightarrow \beta$: oponente elige $\alpha \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow \alpha$	7	$\forall x\ \alpha(x)$: oponente elige cualquier constante y continua $\alpha(a)$
3	$\alpha \vee \beta$: proponente elige $\neg\alpha$, $\neg\beta$	8	$\neg\forall x\ \alpha(x)$: oponente continua $\exists x \neg\alpha(x)$
4	$\alpha \rightarrow \beta$: proponente elige α, $\neg\beta$	9	$\exists x\ \alpha(x)$: proponente elige constante nueva y continua $\alpha(a)$
5	$\neg\alpha$: cambio de roll y continua α	10	$\neg\exists x\ \alpha(x)$: proponente continua $\forall x \neg\alpha(x)$

Juegos semánticos proposicionales para reglas de elección:

1. $(p \wedge \neg q) \vee (q \rightarrow \neg q)$

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$(p \wedge \neg q) \vee (q \rightarrow \neg q)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

2. $((\neg q \vee \neg\neg r) \rightarrow p) \leftrightarrow (\neg(q \wedge s) \rightarrow p)$

Representación extensional	**Representación narrativa**	
$((\neg q \vee \neg\neg r) \rightarrow p) \leftrightarrow (\neg(q \wedge s) \rightarrow p)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular

	Resultado:	

3. ¬(((p∧q)∨(((q∨p)∧p)→q)))→q)))

Representación extensional	Representación narrativa	
¬(((p∧q)∨(((q∨p)∧p)→q)))→q)))	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

4. ¬(¬(¬(¬p∨q¬)∨¬(¬r∨¬s)))

Representación extensional	Representación narrativa	
$\neg(\neg(\neg(\neg p\vee q\neg)\vee\neg(\neg r\vee\neg s)))$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

5. $\neg\neg(\neg(p\leftrightarrow r)\leftrightarrow(t\leftrightarrow u))\leftrightarrow\neg(q\leftrightarrow s)$

Representación extensional	Representación narrativa	
$\neg\neg(\neg(p\leftrightarrow r)\leftrightarrow(t\leftrightarrow u))\leftrightarrow\neg(q\leftrightarrow s)$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

6. $((\neg p\vee\neg(q\wedge\neg\neg r))\leftrightarrow\neg(s\rightarrow\neg\neg\neg t)$

Representación extensional	Representación narrativa	
((¬p∨¬(q∧¬¬r))↔¬(s→¬¬¬t)	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

7. (((s∧(s∨¬¬p))→¬¬(t→q)))

Representación extensional	Representación narrativa	
(((s∧(s∨¬¬p))→¬¬(t→q)))	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

8. ((q→(¬p∧s))∨((t∧¬r)∨r)))↔s

Representación extensional	Representación narrativa	
((q→(¬p∧s))∨((t∧¬r)∨r)))↔s	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

9. ((q∨s)→(r↔¬r))→((p→q)→p))

Representación extensional	Representación narrativa	
((q∨s)→(r↔¬r))→((p→q)→p))	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

10. ¬((¬(¬p→(p∨¬s)))∨¬(¬(p→q)∧¬¬p)))

Representación extensional	Representación narrativa	
$\neg((\neg(\neg p\rightarrow(p\vee\neg s)))\vee\neg(\neg(p\rightarrow q)\wedge\neg\neg p)))$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

Juegos semánticos predicativos para reglas de extensión:

1. $\neg(\forall x(Px\rightarrow Qx)\wedge\neg\exists x((Rx\leftrightarrow Sx)\vee\neg Tx))$

Representación extensional	Representación narrativa	
$\neg(\forall x(Px\rightarrow Qx)\wedge\neg\exists x((Rx\leftrightarrow Sx)\vee\neg Tx))$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

2. $\neg\exists x(Px\wedge\neg Px)\rightarrow\exists x(Rx\wedge(\neg Qx\leftrightarrow Sx))$

Representación extensional	Representación narrativa	
¬∃x(Px∧¬Px)→∃x(Rx∧(¬Qx↔Sx))	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

3. ¬((¬∀x(Px↔¬Px)↔¬(∀x(Rx∧Rx)→∃x(Tx→(Sx∧Qx)))

Representación extensional	Representación narrativa	
¬((¬∀x(Px↔¬Px)↔¬(∀x(Rx∧Rx) →∃x(Tx→(Sx∧Qx)))	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

4. ∀x(((Qx∨Rx)→(Px∨Sx))∨((Sx∨Rx)∨Tx))

Representación extensional	Representación narrativa

$\forall x(((Qx \vee Rx) \rightarrow (Px \vee Sx)) \vee ((Sx \vee Rx) \vee Tx))$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

5. $\forall x(\neg Rx \wedge \neg Tx) \leftrightarrow \exists x \neg((Sx \neg Qx) \wedge (\neg Qx \wedge \neg Px))$

Representación extensional	Representación narrativa	
$\forall x(\neg Rx \wedge \neg Tx) \leftrightarrow \exists x \neg((Sx \neg Qx) \wedge (\neg Qx \wedge \neg Px))$	#	Inicia el juego con una fórmula molecular
	Resultado:	

6. $\neg \exists x(Rx \wedge Px) \rightarrow \forall x((Qx \wedge Tx) \wedge \neg(Rx \wedge Sx))$

<table>
<tr><th>Representación extensional</th><th colspan="2">Representación narrativa</th></tr>
<tr><td rowspan="10">$\neg\exists x(Rx \wedge Px) \rightarrow \forall x((Qx \wedge Tx) \wedge \neg(Rx \wedge Sx))$</td><td>#</td><td>Inicia el juego con una fórmula molecular</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Resultado:</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

RESULTADOS

Al finalizar nuestra investigación, podemos afirmar que la tesis que hemos planteado, que sostiene que: *la semántica formal basada en las formas del fin buscado en juegos o interacciones, es un método eficiente para la construcción de una propuesta didáctica para la enseñanza de la lógica elemental, en la que ante situaciones reales –sentencia como actividad enunciativa- que tienen una estructura de interés, el agente epistémico se desenvuelve a partir de un conjunto determinado de procedimientos en el contexto de un juego en el que deberá actuar de acuerdo al rol que vaya a desarrollar; donde la decisión habrá de entenderse como un modo de probar la satisfacibilidad en una fórmula en juego.*

Ha logrado ser debidamente defendida a lo largo de las cuatro partes que integran esta tesis. Apuntalando una Semántica Formal Estratégica no solo para el lenguaje proposicional, sino también para sentencias enunciativas con cuantificadores.

En las llamadas situaciones reales, la motivación inicial, asociada con la finalidad del juego que, en el caso específico de la propuesta de nuestra herramienta didáctica consistió en demostrar que la estrategia que mejor satisface los deseos del agente es aquella que se alcanza de acuerdo a la forma del fin buscado. Un agente será mínimamente racional si y sólo si elige la acción o movimiento que le reporte la mayor utilidad; es decir, un comportamiento puede considerarse como mínimamente racional si entre los movimientos y restricciones disponibles, opta por aquella que le reporte mayor utilidad o preferencia.

Los agentes epistémicos o jugadores, ya en interacciones bipersonales (individuo-individuo o individuo-naturaleza); ocupan una función central que ha podido pensarse en ser trasladada a las experiencias formativas dentro de los espacios áulicos con unidades de competencias de contenido lógico. Sin dejar de considerar que, si la lógica elemental enseñada desde su enfoque sintáctico es problemática, entonces podemos partir del enfoque semántico basado en teoría de juegos.

La teoría de juegos nos permitió fundamentar la elección racional que postula la importancia del razonamiento estratégico; siendo este definido como un acto o movimiento dirigido que se corresponde con la forma del fin buscado, entonces se desarrollaron un conjunto de reglas de elección y, complementariamente, otras de extensión. Una semántica estratégica, distinta a la semántica veritativa funcional pero que mantenga su bivalencia, dados los problemas que el concepto de verdad conlleva no sólo lógica, sino filosóficamente hablando; hubo de facilitar una vía de acceso al estudio de la lógica que, desde la gamificación promete el desarrollo de herramientas didácticas y que, se agreguen a ella.

Un material o recurso educativo, pensado como estrategia didáctica para la enseñanza de la lógica elemental, no solamente debe responder a las tareas teóricas o procedimentales de las pruebas realizadas, sino que debe propiciar un aprendizaje significativo, que pueda ser incluso trasladado a la práctica cotidiana en la que, por ejemplo, resulte menester tomar decisiones, saber realizarse en una interacción en la que no es posible que ambos jugadores salgan vencedores, cambiar de parecer, de estrategia; pero teniendo en cuenta que, aunque los movimientos sean restringidos, tenemos la opción, en estos casos, de revisar los resultados y mejorar nuestros desempeños.

Para decidir si una fórmula o un conjunto de fórmulas es satisfacible o no, debemos encontrar una asignación de valores estratégicos bajo la cual todas las fórmulas sean adecuadas, de acuerdo a la forma del fin buscado; el juego se puede ganar o perder; no hay un punto medio o empate y, para quien logre desarrollar una estrategia ganadora, deberá hacerlo a partir de un conjunto de pautas o reglas que pautarán los movimientos y sus restricciones. Así, la revisión de los resultados, más que un momento de la herramienta, constituye una invitación a volver sobre los pasos y evaluar los movimientos realizados y las decisiones tomadas, para “hacerlo mejor” en una siguiente ocasión.

CONCLUSIONES

La importancia de las herramientas didácticas orientadas a la formación de lógica elemental, considerando los contextos en donde esta disciplina no es reconocida, no tanto por las aportaciones que hace a las formas de eficientar la manera en la que razonamos; si no porque los mecanismos tradicionales de su enseñanza suponían modelos y estructuras formales, mayormente relacionadas con una fundamentación matemática, a lo que los estudiantes, en la mayoría de los casos les resulta de escaso o nulo interés. Si a esto agregamos que las estructuras formales de las pruebas sintácticas que se llevan a cabo para llevar a cabo demostraciones por diversos métodos (directos e indirectos), a partir de formas abstractas que representan formas argumentales a las que difícilmente, un estudiante a nivel de grado o licenciatura, sin una formación al menos introductoria en el campo de la lógica, le resultarán no sólo incomprensibles sino carentes de sentido, de significado, de referencia; impidiendo con ello un aprendizaje significativo.

Desde las distintas experiencias formativas que hemos acumulado, ya sea en el papel del disiente o estudiante, ya sea en el papel del docente o facilitador, debemos reconocer que, dichas herramientas didácticas nos permiten abrir los horizontes formativos en aras de integrar otros elementos, como en este caso, estarían relacionadas con otras propuestas o programas, que tienen por objeto de estudio las distintas formas en las que damos y pedimos razones.

Podemos conjuntar los tipos de ramas que se abocan a investigar en torno al argumento, ya sea este como un producto, como un proceso, o como un procedimiento. El argumento como producto constituye el objeto de estudio de la lógica, sin embargo, éste no queda desarticulado necesariamente del estudio sobre los distintos modelos procedimentales en torno al argumento o a la práctica argumentativa, a la que la dialéctica dirige sus esfuerzos.

La investigación que nos propusimos, toca de manera tangencial una propuesta que abona a la reivindicación del análisis semántico y su importancia, aunque no resuelva de manera absoluta las condiciones en las que los distintos programas de filosofía atiendan al tratamiento de los mecanismos para la enseñanza de la lógica elemental, trátese esta de la lógica clásica o no clásica, de la lógica consistente o paraconsistente, de la lógica de primer orden o de orden superior, etcétera; se trata pues de abonar a la lógica en general, pero a la relevancia de su didáctica en específico, pues será esta, la que permita una comunicación abierta y no reduccionista entre las distintas disciplinas y subdisciplinas asociadas a estas.

La formación lógica en contextos donde no hay una tradición, supone un reto, no solo en términos de diseño curricular, sino hacia la apertura de modos de estudiar las formas de razonamiento. Más aún, si en el espacio áulico convergen hablantes de lenguas oficiales y hablantes de lenguas locales que, en el caso de la universidad autónoma de Chiapas, espacio que motivó el desarrollo de esta investigación, se encuentran estudiantes de filosofía que cursan este programa con un nivel mínimo de dominio del español (como lengua oficial), por ser hablantes nativos del Tsotsil, Tseltal u otros.

La presente herramienta didáctica supone, un esfuerzo por ampliar las investigaciones lógicas, pero sobre todo busca aportar al desarrollo métodos que faciliten su aprendizaje y, en cierto momento, vías de relación con la teoría de la argumentación. Así, la finalidad de emplear términos como “proponente” u “oponente”, tiene la aspiración de promover una formación lógica holística y de carácter plural, que se adecue a los tiempos venideros.

Claro que la Semántica Formal Estratégica no se agota en la presente tesis, y su exposición plantea diversas rutas de investigación que pueden ser retomadas en futuras pesquisas que se aboquen, ya sea al ámbito de la filosofía de la lógica, específicamente en lo que se refiere a las investigaciones semánticas; pero también a las aplicaciones de los presupuestos aquí planteados que pudieran ser el pretexto para el desarrollo de recursos educativos mediados por tecnologías en los que coma a través de un software o aplicación, estos juegos o interacciones encuentren un espacio para trascender la experiencia formativa áulica y llegar a contextos de educación informal.

BIBLIOGRAFÍA

Castiblanco Clavijo, M. E. (2018). *Teoría de juegos.* Bogotá: Fundación Universitaria del Área Andina. Recuperado el 2023, de https://digitk.areandina.edu.co/bitstream/handle/areandina/1437/153%20TEORIA%20DE%20JUEGOS.pdf?sequence=1

Acero, J. (1987). La teoría de los juegos semánticos: dos enfoques. *Theoria, 2*(5-6), 427-459. Obtenido de https://www.pdcnet.org/collection/show?id=theoria_1987_0002_0002_0427_0459&file_type=pdf

Acero, J. (2016). Jaakko Hintikka (1929-2015). . *Teorema: Revista Internacional de Filosofía, 35*, 139-147. Obtenido de https://www.jstor.org/stable/44077434

Acero, J. J. (1990). Juegos en semántica: juegos semánticos. *Enrahonar*, 65-85. Obtenido de https://www.raco.cat/index.php/Enrahonar/article/download/42741/90981#:~:text=Un%20juego%20sem%C3%A1ntico%20es%20un,y%20otro%20jugador%2C%20llamado%20Yo.

Aguado Franco, J. C. (2007). *Teoría de la decisión y de los juegos.* Madrid: Delta Publicaciones.

Aliseda Llera, A. (2017). Prólogo: ¿En qué consiste la lógica? En D. L. Ruiz-Rincón, *Breve manual de lógica matemática: herramienta básica para el análisis lógico de argumentos* (págs. i-viii). Tuxtla Gutiérrez: Universidad Autónoma de Chiapas. Obtenido de https://editorial.unach.mx/documentos/digitales/_libs/brevemanualdelogicamatematica.pdf

Aliseda, A. (2014). *La lógica como Herramienta de la Razón. Razonamiento Ampliativo en la Creatividad, la Cognición y la Inferencia* (Vol. 6). Milton Keynes: College Publications UK.

Arló-Costa, H., Hendricks, V., & van Benthem, J. (Edits.). (2016). *Readings in Formal Epistemology: Sourcebook.* New York: Springer.

Badesa, C., Jané, I., & Jansana, R. (1998). *Elementos de lógica formal.* Barcelona: Editorial Ariel, S.A.

Barrero, T. , & Rey, D. (2016). Jaakko Hintikka. *Ideas y valores, 65*(161), 331-338. doi:https://doi.org/10.15446/ideasyvalores.v65n161.57442

Belaunzaran Mendizabal, J. (2019). EuroPsy: Un modelo basado en competencias. ¿Es aplicable a la formación sanitaria especializada en Psicología Clínica? *Educación Médica, 20*(2), 154-162. doi:https://doi.org/10.1016/j.edumed.2018.05.017

Blaise Mimbang, J. (2018). *La teoría de juegos. El arte del pensamiento estratégico.* Lexington: 50Minutos.es.

Bolívar, A. (2008). *Didáctica y currículum: de la modernidad a la postmodernidad.* Málaga: Ediciones Alijibe.

Casas Méndez, B., Fiestras Janeiro, M. G., García Jurado, I., & González Díaz, J. (2012). *Introducción a la teoría de juegos.* Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.

Cassini, A. (2013). *El juego de los principios: una introducción al método axiomático.* Buenos Aires: AZ.

Cerdá Tena, E., Pérez Navarro, J., & Jimeno Pastor, J. L. (2004). *Teoría de Juegos.* Madrid: Pearson Educación.

Comenio, J. (1998). *Didáctica magna.* Distrito Federal: Editorial Porrúa.

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). (12 de junio de 2019). *TAUT: el software desarrollado por un filósofo del CONICET para enseñar Lógica*. Obtenido de Ciencias Sociales y Humanidades: https://www.conicet.gov.ar/taut-el-software-desarrollado-por-un-filosofo-del-conicet-para-ensenar-logica/

Copi, I. (1979). *Lógica simbólica.* Ciudad de México: CECSA.

Copi, I. M., & Cohen, C. (2013). *Introducción a la lógica.* México: Limusa.

De Gortari, E. (1972). *Lógica general.* Distrito Federal: Editorial Grijalvo, S.A.

De Swart, H. (2018). *Philosophical and Mathematical Logic .* Tilburg : Springer .

Di Castro, E. (2009). *La razón desencantada. Un acercamiento a la teoría de la elección racional.* México: UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Fandiño Parra, Y. J., & Bermúdez Jiménez, J. (2015). Práctica Pedagógica: subjetivar, problematizar y transformar el quehacer docente. En R. M. Páez Martínez, *Práctica y experiencia : claves del saber pedagógico docente* (págs. 29-53). Bogotá: Ediciones Unisalle. Obtenido de http://biblioteca.clacso.edu.ar/Colombia/fce-unisalle/20170117095042/Practicaexp.pdf

Fernández Ruiz, J. (2006). El Premio Nobel de Economía y la Teoría de juegos: un encuentro más. *Análisis Económico, 21*(48), 79-92. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41304805

Fredrickson, J., & Mitchell, T. (1984). Strategic decision processes: Comprehensiveness and performance in an industry with an unstable enviroment. *Academy of Management Journal, 27*(2), 399-423. doi:http://dx.doi.org/10.2307/255932

Galetto, M., & Romano, A. (2012). *Experimentar. Aplicación del método científico a la construcción del conocimiento.* (L. Guasti, Ed.) Madrid: Narcea.

Gamut, L. (2002). *Introducción a la Lógica. EUDEBA.* Buenos Aires, Argentina.

Garfinkel, A., Shevtsov, J., & Guo, Y. (2017). *Modeling Life: The Mathematics of Biological Systems.* New York: Springer.

Gómez Torrente, M. (2004). La noción de consecuencia lógica. En R. Orayen, & A. Moretti (Edits.), *Filosofía de la lógica* (Vol. 27, págs. 143-178). Madrid: Trotta.

Gómez-Torrente, M. (2004). La noción de consecuencia lógica. En R. Orayen, & A. Moretti (Edits.), *Filosofía de la lógica* (Vol. 27, págs. 143-178). Madrid, España.

González Rivas, F. J. (2020). Prólogo. En D. L. Ruiz-Rincón, *Iniciación práctica a la lógica de primer orden* (págs. i-v). Tuxtla Gutiérrez: Universidad Autónoma de Chiapas. Obtenido de https://editorial.unach.mx/documentos/digitales/_libs/iniciacionpracticaalalogicadeprimerorden.pdf

Gorski, D. P., & Tavants, P. V. (1960). *Lógica.* (A. Vidal Roget, Trad.) Distrito Federal: Editorial Grijalvo, S. A.

Gowin, B. (1990). Epistemic Elements in Evaluation Research. *Studies in Educational Evaluation, 16*, 319-333. Obtenido de https://pdf.sciencedirectassets.com/271765/1-s2.0-S0191491X05X80257/1-s2.0-S0191491X0580032X/main.pdf?X-Amz-Security-Token=IQoJb3JpZ2luX2VjEBMaCXVzLWVhc3QtMSJGMEQCIGaIOIssxcq9ZizCty5ZFWBQ%2F216MXMpFLEOgUs%2FzsVeAiAG6LjU%2FY%2FXVMr1QqKY%2FuUfCuLfbjENrLYSBa

Gowin, D. G. (1981). *Educating.* Ithaca, NY: Cornell University Press.

Gracián Rodríguez, E. (2017). *Teoría de juegos y las matemáticas de la negociación. Von Neuman* (Vol. Genios de las Matemáticas). España: RBA Coleccionables S.A.

Hendriks, V., & Ove Hansson, S. (Edits.). (2018). *Introduction to Formal Philosophy.* Stockholm: Springer.

Herder Editorial, S.L. (2017). *Jaakko Hintikka*. Obtenido de Encyclopaedia Herder. Una gran base de conocimiento en humanidades: https://encyclopaedia.herdereditorial.com/wiki/Autor:Hintikka,_Jaakko

Hintikka, J. (1969). *Models for modalities.* Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company.

Hintikka, J. (1975). *The intentions o intencionality and other new models form modalities.* Dordrecht-holland: D. Reidel Publishing Company.

Hintikka, J. (1976). *Lógica, juegos de lenguaje e información. Temas kantianos de filosofía de la lógica.* Madrid: Tecnos.

Hintikka, J. (1979). *Saber y creer. Una introducción a la lógica de las dos nociones.* Madrid: Tecnos.

Hintikka, J. (1980). Intenciones de la intencionalidad. En J. Hintikka, A. Macintyre, P. Winch, & Otros, *Ensayos sobre explicación y comprensión* (págs. 1-40). Madrid: Alianza.

Hintikka, J. (1983). *The game of language. Studies in Game-Theoretical Semantics and Its Applications.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Hintikka, J. (1998). *Lenguage, Truth an Logic in Mathematics* (Vol. Select Papers 3). Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Hintikka, J., & Sandu, G. (2008). ¿Qué es la lógica? En M. J. Frápolli Sanz, *Filosofía de la lógica* (págs. 15-54). Madrid: Tecnos.

Hintikka, J., & Sandu, G. (2011). Game-Theoretical Semantics. En J. van Benthem, & A. Meulen, *Handbook of Logic and Language* (Second ed., págs. 415-465). Elsevier. doi:10.1016/b978-0-444-53726-3.00008-6

Hintikka, J., Macintyre, A., Winch, P., & Otros. (1980). *Ensayos sobre explicación y comprensión. Contribuciones a la filosofía de las ciencias sociales y humanas.* Madrid: Alianza.

Kontinen, J., Müller, J.-S., Schnoor, H., & Vollmer, H. (13th de July de 2015). A Van Benthem Theorem for Modal TeamSemantics. *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, 1-18. doi:arXiv:1410.6648v2

Kossak, R. (2018). *Mathematical Logic .* New York : Springer.

Kuhn, M., & Johnson, K. (2016). *Applied Predictive Modeling.* New York: Springer.

LaMeres, B. (2017). *Introduction to Logics Circuits & Logic Desing with Verilog.* New York: Springer.

LaMeres, B. (2019). *Introduction to Logisc Circuits & Logic Desing with Verilog.* New York: Springer.

López Ortíz, B. (2020). *Teoría de juegos. Introdicción.* Obtenido de Facultad de Economía, Universidad Nacional Autónoma de México: http://www.economia.unam.mx/profesores/blopez/juegos-Introducci%C3%B3n.pdf

Lozada Ávila, C., & Betancur Gómez, S. (2017). La gamificación en la educación superior: una revisión sistemática. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín, 16*(31), 97-124. doi:https://doi.org/10.22395/rium.v16n31a5

Lungarzo, C. (1986). *Lógica y lenguajes formales/|.* Buenos Aires: Centro Editor de América Latina.

Lungarzo, C. (1986). *Lógica y lenguajes formales/2.* Buenos Aires: Centro Editor de América Latina.

Manzano, M. (2004). Divergencia y rivalidad entre lógicas. En R. Orayen, & A. Moretti (Edits.), *Filosofía de la lógica* (Vol. 27, págs. 277-312). Madrid: Trotta.

Manzano, M., & Huertas, A. (2004). *Lógica para principiantes.* Madrid: Alianza editorial.

Margáin, H. (1978). *Racionalidad, lenguaje y filosofía.* México: Fondo de Cultura Económica.

Martínez, I., & Piza, E. (2016). Problemas de decisión y recursividad en sistemas lógicos formales. *Revista de Mateática: teoría y aplicaciones, 1*(23), 11-39.

Maskin, E. (2009). Equilibrio de Nash y diseño de Mecanismos. *Apoartes, XIV*(40), 119-123. Obtenido de https://www.redalyc.org/pdf/376/37621050008.pdf

Meneses Espinal, M. L., & Peñaloza Gelvez, D. Y. (2019). Método de Pólya como estrategia pedagógica para fortalecer la. *Zóna próxima, 31*, 7-25. doi:10.14482/zp.31.372.7

Mintzberg, H., Raisinghani, D., & Thèorêt, A. (Jun de 1976). The Structure of "Unstructured" Decision Processes. *dministrative Science Quarterly, 21*(2), 246-275. doi:https://doi.org/10.2307/2392045

Moreira, M. A. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. En M. A. Moreira, M. C. Caballero, & M. L. Rodríguez (Ed.), *Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo* (págs. 19-44). Burgos: Instituto de Física. Obtenido de https://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigsubesp.pdf

Morgenstern, O. (1955). La teoría de juegos y el comportamiento ecnómico. *Económica, 1*(3-4), 345-375. Obtenido de https://revistas.unlp.edu.ar/Economica/article/view/7231

Mosterín, J. (1973). El problema de la decisión en la lógica de predicados. *CONVIVIUM, Revista de Filosofía*(39), 4-11. Obtenido de https://raco.cat/index.php/Convivium/article/view/76430

Orayen, R. (1989). *Lógica, significado y ontología.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Orman Quine, W. v. (1960). *Palabra y objeto.* (M. Sacristán, Trad.) Barcelona, España: Herder.

Pérez, J., Jimeno, J. L., & Cerdá, E. (2013). *Teoría de Juegos* (2a ed.). Madrid: Garceta, Grupo Editorial.

Pólya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (1 ed.). (J. Zugazagoitia, Trad.) Distrito Federal: Trillas.

Quinn, J. B. (1980). *Strategic for change: Logical incrementalism.* IL: R.D. Irwin.

Ramírez González, C. F. (2019). Prólogo. En D. L. Ruiz-Rincón, *Silogísitica y cuadro de oposición aristotélica: herramienta complementaria para la Didáctica de la Lógica* (págs. i-vii). Tuxtla Gutiérrez: Universidad Autónoma de Chiapas. Obtenido de https://editorial.unach.mx/documentos/digitales/_libs/silogisticaycuadrodeoposicion.pdf

Rodríguez Palmeto, M. (2004). La teoría del aprendizaje significativo. *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology* (pág. s/n). Pamplona: Proc. of the First Int. Conference on Concept Mapping. Obtenido de https://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.PDF

Roffé, A. (s/f). *Welcome to TAUT!* Obtenido de TAUT: https://www.taut-logic.com/index.html

Romano G., G. (julio-diciembre de 2013). Acerca de la condición normativa de la teoría de la decisión racional. *Cuadernos de Economía, XXXII*(60), 413-435. Obtenido de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=282128229004

Ruiz-Rincón, D. L. (2017). *Breve Manual de Lógica Matemática. Herramienta básica para el análisis lógico de argumentos.* Tuxtla Gutiérrez: Universidad Autónoma de Chiapas. Obtenido de https://editorial.unach.mx/documentos/digitales/_libs/brevemanualdelogicamatematica.pdf

Ruiz-Rincón, D. L. (1 de Septiembre de 2018). De los caminos para la enseñanza de la lógica. Las condiciones de invisibilidad de la lógica desde la academia. *Miscelánea Filosófica αρχή Revista Electrónica, 2*(4), 113-134. doi:https://doi.org/10.31644/mfarchere_v.2;n.4/18-A04

Ruiz-Rincón, D. L. (2019). *Silogística y cuadro de oposición aristotélica. Herramienta complementaria para la didáctica de la lógica.* Tuxtla Gutiérrez: Universidad Autónoma de Chiapas. Obtenido de https://editorial.unach.mx/documentos/digitales/_libs/silogisticaycuadrodeoposicion.pdf

Ruiz-Rincón, D. L. (2020). *Iniciación Práctica a la Lógica de Primer Orden.* Tuxtla Gutiérrez: Universidad Autónoma de Chiapas. Obtenido de https://editorial.unach.mx/documentos/digitales/_libs/iniciacionpracticaalalogicadeprimerorden.pdf

Ruiz-Rincón, D. L. (2020). Semántica de teoría de juegos como propuesta didáctica para la enseñanza de la lógica. Ciernes de una investigación doctoral. En J.

Jasso Méndez, C. M. Conforti, & E. Jasso Méndez, *Lógica (a), argumentación y pensamiento crítico: didáctica, problemas y discusiones.* (págs. 301-331). Distrito Federal: Editorial Torres Asociados.

Ruiz-Rincón, D. L. (1 de Junio de 2022). Docencia, didáctica y principios bioéticos para la enseñanza de la filosofía. (C. U. Humanidades, Ed.) *Sincronía. Revista, 26*(82), 145-166. doi:10.32870/sincronia.axxvi.n82.7b22

Sacristan, M. (1969). *Introducción a la lógica y al análisis formal.* Bercelona: Ediciones Ariel.

Sanarabia, J. (1986). *Lógica.* Distrito Federal: Editorial Porrúa, S.A.

Seiffert, H. (1977). *Introducción a la lógica.* Barcelona: Herder.

Soler Toscano, F. (2012). *Razonamiento abductivo en la lógica clásica* (Vol. 2). London: College Publications.

Suppes, P. (1966). *Introducción a la lógica simbólica.* (G. Aguirre Carrasco, Trad.) Distrito Federal: Compañia Editorial Continental, S. A.

Suppes, P., & Hill, S. (2015). *Primer curso de lógica matemática.* Distrito Federal: Reverté Ediciones S.A de C.V.

van Benthem, J. (2007). Abduction at the interface of Logic and Philosophy of Science. *60*(22), 271-273.

Varoufakis, Y. (2002). *Foundations of Economics A Beginner´s Companion.* London: Taylor & Francis Library.

Vásquez Vásquez, J. M., & Carranza Galdámez, D. E. (2020). *Introducción a la teoría de juegos (Tesis).* San Salvador: Universidad de El Salvador.

Vigo, A. G. (2012). Deliberación y decisión según Aristóteles. *Tópicos, Revista de filosofía*(43), 51-92. Obtenido de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=323028516003

Vitoriano, B. (2007). *Teoría de la decisión: decisión con incertidumbre, decisión multicriterio y teoría de juegos.* Madrid: Universidad Complutense de Madrid (TESIS).

Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1953). *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton: Princeton University Press.

Woods, P. (1985). Estrategias de enseñanza. En E. Rockwell, *Ser maestro, estudios sobre el trabajo docente* (págs. 121-124). Distrito Federal: Ediciones el Caballo.

Zambrano-Orellana, G. A., Moreira-Ponce, M. J., Morales-Zambrano, F. F., & Amaya-Conforme, D. R. (Abril de 2021). Recursos virtuales como herramientas didácticas aplicadas en la educación en situación de emergencia. *Polo del Conocimiento., 6*(4), 73-87. doi:10.23857/pc.v6i4.2539