

Trabajo de Fin de Grado:

Geodésicas Luminosas y Sombras de Agujeros Negros

Lightlike Geodesics and Shadows of Black Holes

Autor: Álvaro Castilla González

Tutor: Marc Mars Lloret

Curso Académico 2022-2023

Grado en Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Salamanca



**VNiVERSIDAD
D SALAMANCA**

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Geodésicas Luminosas y Sombras de Agujeros Negros

Lightlike Geodesics and Shadows of Black Holes

Autor: Álvaro Castilla González

Tutor: Marc Mars Lloret

Curso Académico 2022-2023

Firmado: Álvaro Castilla González

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Álvaro Castilla González', with a large, sweeping flourish at the end.

Certificado del tutor TFG Grado en Físicas

D. Marc Mars Lloret, profesor del Departamento de Física Fundamental de la Universidad de Salamanca,

HACE CONSTAR:

Que el trabajo titulado “*Geodésicas Luminosas y Sombras de Agujeros Negros*”, que se presenta, ha sido realizado por D. Álvaro Castilla González, con DNI 71300102X y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo de Fin de Grado en Físicas en esta Universidad.

Salamanca, a fecha de firma electrónica.

Fdo.: Marc Mars Lloret

Resumen:

En este trabajo se estudian las propiedades de la geometría de Kerr y las trayectorias de geodésicas luminosas en la cercanía del agujero negro. Mediante el análisis de las geodésicas luminosas, describimos la región de fotones atrapados, sus propiedades y hallamos unas expresiones para representar la sombra de un agujero negro analíticamente. Sirviéndonos de esta representación, analizamos cómo varía la forma de la sombra en función de diversos parámetros.

En la segunda parte del trabajo, se describen los detalles de un código desarrollado en Python con el que se representan las imágenes de distintos agujeros negros. Mediante dichas imágenes, se analizan los resultados numéricos para las sombras de agujeros negros de Kerr con distintos parámetros. Además, describimos el comportamiento caótico de las geodésicas luminosas cerca del borde de la sombra y representaremos imágenes para métricas diferentes a la de Kerr.

Palabras Clave: Relatividad general, métrica de Kerr, Frame Dragging, agujero negro, sombra de Kerr, geodésicas luminosas, región de fotones atrapados, Backwards Ray-Tracing.

Abstract:

In this work we study the properties of the Kerr geometry and the trajectories of lightlike geodesics in the vicinity of the black hole. By analyzing the lightlike geodesics, we describe the trapped photon region, its properties and find expressions to represent the shadow of a black hole analytically. Using this representation, we analyze how the shape of the shadow varies as a function of various parameters.

In the second part of the work, we describe the details of a code we have written in Python to represent the images of different black holes. Using these images, numerical results for Kerr black hole shadows with different parameters are analyzed. In addition, we will describe the chaotic behavior of lightlike geodesics near the edge of the shadow and represent images for metrics other than Kerr.

Keywords: General relativity, Kerr metric, Frame Dragging, black hole, Kerr shadow, lightlike geodesics, trapped photon region, Backwards Ray-Tracing.

Índice general

1. Introducción	9
2. Geometría Diferencial y Relatividad	11
2.1. Introducción a la Geometría Diferencial	11
2.1.1. Vectores	12
2.1.2. Espacio Dual y Tensores	13
2.2. Métrica	13
2.3. Derivada Covariante y Tensor de Curvatura	15
2.4. Ecuaciones de Einstein	18
2.5. Vectores y Tensores de Killing	19
3. Métrica de Kerr	21
3.1. Introducción	21
3.1.1. Coordenadas Esferoidales Oblatas	22
3.1.2. Completar Cuadrados en la Métrica	23
3.2. Singularidades	23
3.3. Extensión del Espacio-Tiempo	25
3.4. Constantes y Simetrías	27
3.5. Ergoesfera y Frame Dragging	28
3.6. Inversa de la Métrica	30
4. Geodésicas Luminosas	33
4.1. Constante de Carter	33
4.1.1. Formalismo de Hamilton-Jacobi	33
4.1.2. Simetría y Tensor de Killing	35
4.2. Ecuaciones de Hamilton	37
4.2.1. Signo de la Constante de Carter	38
4.3. Ecuación Radial y Pseudo Potenciales Radiales	39
4.3.1. Análisis de la desigualdad $g(l_+, U) \leq 0$	40
4.3.2. Gráficos de los Pseudo Potenciales V_{\pm}	41
4.3.3. Trayectorias con $Q < 0$	42
4.4. Ecuación Angular	43
5. Región de Fotones Atrapados	45
5.1. Cálculo de los parámetros atrapados: ε_{trap} y $Q_{L,trap}$	45
5.1.1. Cálculo de los Radios en la Región Atrapada	46
5.2. Cálculo de los parámetros atrapados, $K_{E,trap}$ y $L_{E,trap}$	49

6. Sombra del Agujero Negro	51
6.1. Cálculo de la Sombra	51
6.2. Forma de la Sombra en Función del Parámetro de Kerr a	55
6.3. Forma de la Sombra en Función de la Coordenada Angular θ_0	56
7. Cálculo Numérico de Sombras. Backwards Ray-Tracing	59
7.1. Explicación Detallada del Programa en Python	59
7.2. Sombra de Kerr y Comparación con la Teoría	61
7.3. Comportamiento Caótico cerca del límite de la Sombra	63
7.4. Imágenes en la esfera $r = r_{limit}$	63
7.5. Espacios-Tiempos más Generales	64
8. Conclusión	67
8.1. Conclusiones	67
8.2. Conclusions	68
A. Imagenes Generadas por el Código de Python	71

Capítulo 1

Introducción

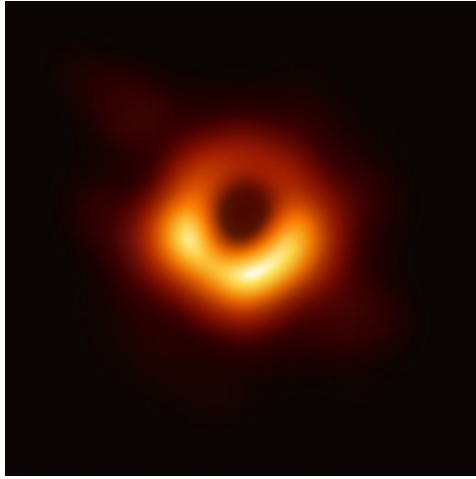
Según la relatividad general, la luz sigue las geodésicas nulas del espacio-tiempo, por lo que bajo campos gravitatorios se desplazan por trayectorias curvas. Este fenómeno se observa especialmente en campos gravitatorios intensos, por ejemplo los creados por un agujero negro y se explica en detalle en [14]. Una de las consecuencias más interesantes es la imagen de un agujero negro que se corresponde con una zona denominada sombra y que viene definida por aquellos rayos de luz que no pueden escapar de su gravedad.

Uno de los teoremas clave en relatividad general es el teorema de Birkhoff, que nos dice que cualquier solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío debe ser estática y asintóticamente plana. Sin embargo, no existe ningún teorema análogo al teorema de Birkhoff para espacio-tiempo que describen objetos en rotación. En particular hay infinidad de soluciones de las ecuaciones de Einstein que potencialmente pueden describir el campo gravitatorio exterior a un objeto autogravitante en equilibrio. No obstante, la situación es muy distinta en el caso de agujeros negros. En términos intuitivos, un agujero negro se corresponde con un espacio-tiempo que contiene una región limitada por una superficie de área finita y que está casualmente desconectada del exterior, por lo que ninguna partícula puede escapar de su interior. Un resultado fundamental en relatividad general establece que los agujeros negros cuyo exterior es vacío y que se encuentran en equilibrio viene descritos por unos pocos parámetros, que físicamente corresponden con su masa total y su momento angular total. Este resultado se conoce como “Teorema de unicidad de agujeros negros” y es una de las predicciones claves de la relatividad general. La métrica que describe un agujero negro de vacío en equilibrio fue obtenida por Roy Kerr en 1963 [10]. La métrica correspondiente se conoce como métrica de Kerr.

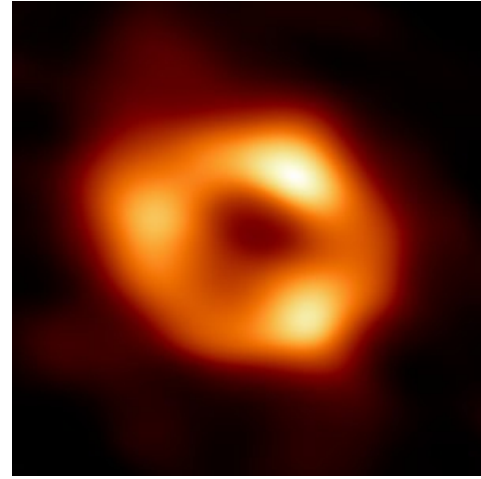
La métrica de Kerr es sin lugar a dudas una de las más importantes de la relatividad general. Esta métrica tiene diversas propiedades muy interesantes que merece la pena estudiar en detalle. La métrica de Kerr no describe un objeto esféricamente simétrico, ya que tiene un eje de rotación favorecido. Sin embargo, esta métrica si es axialmente simétrica y estacionaria. Una de las propiedades esenciales de la métrica de Kerr es la existencia de una ergoesfera. Se define la ergoesfera como la superficie a partir de la cual un fotón con momento angular contrario al agujero negro no puede moverse en la dirección opuesta a la rotación. Observaremos en el trabajo porque estas propiedades son el motivo por el que la sombra del agujero negro de Kerr no tenga forma esférica.

Recientemente, la colaboración *Event Horizon Telescope* ha conseguido fotografiar la imagen de dos agujeros negros (*M87** en 2019 [5] y, posteriormente *Sagitario A** en 2022) [2]. La colaboración *Event Horizon Telescope* es un conjunto de telescopios ubicados en

diversas partes de la Tierra que miden en la frecuencia de las ondas de radio. Esta colaboración combina los datos procedentes de dichos telescopios de forma que, de manera efectiva, es como si dispusiéramos de un interferómetro del tamaño de la Tierra. Vinculando dichos telescopios, la colaboración EHT ha conseguido medir con detalle el tamaño de la zona de emisión de dos agujeros negros supermasivos, $M87^*$ y Sagitario A^* . Podemos observar su respectiva sombra en las figuras 1.1a y 1.1b.



(a) Imagen de $M87^*$ tomada por la colaboración EHT



(b) Imagen de $SgrA^*$ tomada por la colaboración EHT

Los hallazgos de la colaboración *Event Horizon Telescope* constituyen la motivación principal de este trabajo, en el que analizaremos la forma de la sombra de un agujero negro de manera tanto analítica como numérica.

En este trabajo, analizaremos de manera teórica las propiedades principales del espacio-tiempo de Kerr, el cual se caracteriza por ser la solución analítica de un agujero negro con masa M y momento angular a . Por lo tanto, a priori es el espacio-tiempo que podemos esperar que explique el comportamiento de los agujeros negros realistas. Tras un análisis de las propiedades de la solución de Kerr, obtendremos y analizaremos la solución analítica para las trayectorias que sigue la luz en este espacio-tiempo.

Además del análisis general de las geodésicas luminosas, nos centraremos en la región de fotones atrapados, donde los fotones siguen trayectorias que no pueden escapar al infinito. Gracias al análisis de estas trayectorias podremos obtener también una expresión analítica para representar la sombra de los agujeros negros de Kerr.

La segunda parte del trabajo consiste en escribir un código en Python que resuelve de manera numérica las geodésicas que sigue la luz en el espacio-tiempo. Este código nos permitirá comparar estos resultados con los obtenidos teóricamente. Además, utilizaremos el programa para analizar de una manera visual la deformación de las geodésicas en función de distintos parámetros en diversos espacio-tiempos. Utilizaremos también el código para observar el comportamiento caótico cerca del límite de la sombra del agujero negro y sus consecuencias. Finalmente, el programa nos permitirá obtener imágenes para las sombras de agujeros negros con diversos parámetros o espacio-tiempos diferentes a Kerr.

Capítulo 2

Geometría Diferencial y Relatividad

Según el principio de equivalencia podemos entender localmente la gravedad como un sistema de referencia no inercial en un entorno pequeño de un punto. Sin embargo, la relatividad especial es insuficiente para explicar sistemas de referencia no inerciales. Para ello, la relatividad general explica estos sistemas de referencia introduciendo las matemáticas desarrolladas en geometría diferencial. Debido a esto es completamente necesario tener ciertos conocimientos de geometría diferencial. En esta sección, estos conocimientos se introducirán junto a ciertas ecuaciones importantes de la relatividad general, las cuales serán necesarias más adelante.

Durante todo el trabajo, se toma el convenio de suma de Einstein, por el cual, si en una ecuación aparecen un superíndice y un subíndice iguales, se presupone el sumatorio para todos los elementos de dicho índice. Es decir, $\sum_{\mu} x^{\mu} e_{\mu} \equiv x^{\mu} e_{\mu}$.

Para esta introducción sobre geometría diferencial nos hemos servido de [3], [16] y [12], en los cuales están explicados los principios de la geometría diferencial y la relatividad general en mucho más detalle.

2.1. Introducción a la Geometría Diferencial

Primero, es necesario entender el concepto de variedad (o variedad diferenciable). Una variedad se define de manera intuitiva como un espacio de puntos, el cual puede tener una topología complicada pero que visto de manera local se comporta como \mathbb{R}^n . Gracias a esto podemos utilizar nociones como diferenciación e integración en un espacio curvo como si fuera \mathbb{R}^n .

Cada sistema de coordenadas que se puede usar en el entorno de un punto se denomina carta local. Matemáticamente se describe una carta local como un par (U_a, φ_a) , donde cada U_a es un abierto de la variedad M y φ_a es una aplicación continua e invertible tal que $\varphi_a : U_a \rightarrow V_a \subset \mathbb{R}^n$. Al conjunto de todas las cartas locales lo llamaremos atlas. En general, una variedad no se puede describir con una sola carta local, sino que se necesitan varias. Por ejemplo, para coordinar un círculo se requieren al menos dos cartas locales con una intersección no nula. Esto se debe a que si se quiere utilizar una única carta local que incluya a uno de los dos puntos, $\theta = 0$ o $\theta = 2\pi$, la imagen de la carta local sería un intervalo cerrado. Mientras que si se quisieran excluir ambos puntos, la variedad no estaría definida al completo, por lo que es necesario definir dos cartas locales diferentes como mínimo.

A continuación, se introducirán las curvas diferenciales. Estas se definen como aplicaciones $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, donde (a, b) es un intervalo. Cuando expresamos estas curvas en las coordenadas locales darán lugar a una función diferenciable. Matemáticamente esto lo expresamos como: $\varphi_a \circ \gamma : \gamma^{-1}(U_a) \subset (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\varphi_a \circ \gamma$ es la función que debe ser diferenciable.

Antes de definir formalmente qué es un vector, se necesita del concepto de campo escalar. Un campo escalar f , será una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Cada curva que pasa por un punto p , definirá un operador conocido como derivada direccional, $df/d\lambda$, siendo λ el parámetro representativo de la curva γ . El espacio tangente T_pM será el espacio de las derivadas direccionales a lo largo de las curvas que pasan por p .

2.1.1. Vectores

Finalmente se pueden definir los vectores. Para ello, consideraremos una curva γ , parametrizada por el parámetro λ que pasa por un punto p de la variedad, definimos el vector tangente a la curva gracias a la derivada direccional como

$$\dot{\gamma}(\lambda) = \frac{df(\gamma(\lambda))}{d\lambda}. \quad (2.1)$$

Además de la definición de vector tangente a una curva, también se puede definir un vector arbitrario V_p en el punto p , como un objeto al que se puede aplicar un campo escalar f y devuelve un número, es decir $V_p : f \rightarrow \mathbb{R}$. Aplicándolo a f deberá cumplir la regla de Leibniz ($V_p(fg) = f(p)V_p(g) + g(p)V_p(f)$) y ser lineal. Por otro lado, dando un vector V_p siempre existe una curva $\gamma(\lambda)$ que pasa por el punto p y que tiene V_p como su vector tangente en dicho punto. El conjunto de todos los vectores definidos sobre el punto p forman un espacio vectorial que denotamos por T_pM y denominamos espacio tangente a la variedad M en el punto p .

Para facilitar el uso de todo este formalismo requeriremos de sistemas de coordenadas $\{x^\mu\}$. Dado un punto p con coordenadas $x(p)$, estos sistemas de coordenadas definirán n vectores $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$ como $\partial_\mu(f) := \partial_\mu f(x^\nu)$. Los n vectores ∂_μ son linealmente independientes y cualquier otro vector V se puede escribir como una combinación lineal de ellos con componentes V^μ ,

$$V = V^\mu \partial_\mu. \quad (2.2)$$

Por lo tanto, estos vectores forman una base, que denominaremos base coordenada o base natural. Imaginémosnos que queremos hacer un cambio de unas coordenadas $\{x^\mu\}$ a otras $\{x^{\mu'}\}$. Como hemos comentado, los vectores pertenecen a T_pM y cumplen la regla de la cadena, por lo que podemos hacer el cambio de la base sin primar a la base primada o viceversa como $\partial_\mu f = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \partial_{\mu'} f$. Todo esto en un entorno del punto p común a ambos sistemas de coordenadas. Como esta igualdad se cumple para todo campo escalar f , se llega a la siguiente relación entre los elementos de la base de vectores:

$$\partial_\mu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \partial_{\mu'}. \quad (2.3)$$

2.1.2. Espacio Dual y Tensores

Como en cualquier espacio vectorial, se puede definir el espacio vectorial dual, T_p^*M ; formado por uno-formas. Ahora buscamos definir un conjunto de uno-formas que formen base en T_p^*M . Para ello determinamos antes la diferencial de f definiendo como se comporta sobre vectores del espacio tangente T_pM . En un entorno de un punto p definimos la forma de actuar de una diferencial sobre un vector V como: $df(V) = V(f)$.

Dado el sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, las componentes del conjunto de uno-formas dados por la diferencial $\{dx^\mu\}$, son la base dual de la base coordenada $\{\partial_\mu\}$. Específicamente podemos escribirlo como

$$dx^\mu(\partial_\alpha) = \partial_\alpha(x^\mu) = \delta_\alpha^\mu. \quad (2.4)$$

Al igual que antes, dado que $\{x^\mu\}$ forman base, cualquier uno-forma ω se puede descomponer con sus respectivas componentes $\{\omega_\mu\}$:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu. \quad (2.5)$$

En las ecuaciones que escribiremos se podrá distinguir fácilmente qué elementos son uno-formas y cuales vectores por la posición del índice de sus componentes. Si las componentes tienen un superíndice serán componentes de un vector, mientras que si tienen un subíndice serán uno-formas.

Finalmente, podemos generalizar los vectores y uno-formas a tensores. Un tensor de orden (s, r) se puede entender como la multiplicación tensorial de s vectores y r uno-formas. Por lo tanto, cuando apliquemos este tensor a r vectores y s uno-formas nos dará simplemente un valor numérico. Además, como era de esperar, la base de un tensor de orden (s, r) estará dada por la multiplicación tensorial de las bases respectivas de vectores y uno-formas. $\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_s} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r}$. Donde hemos denotado el producto entre dos tensores arbitrarios con el símbolo: \otimes .

Un tensor arbitrario además cumplirá las leyes de transformación para cada uno de sus índices. Se puede utilizar esta ley de transformación como la definición de un tensor. Un objeto matemático será un tensor si y solo si sigue la siguiente ley de transformación:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_s}_{\nu'_1 \dots \nu'_r} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_s}}{\partial x^{\mu_s}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_r}}{\partial x^{\nu'_r}} T^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_r}. \quad (2.6)$$

Definimos la simetría respecto a los índices i, j de un tensor T r -covariante de la siguiente manera: $T_{\nu_1 \dots \nu_i \dots \nu_j \dots \nu_r} = T_{\nu_1 \dots \nu_j \dots \nu_i \dots \nu_r}$. Mientras que se define la antisimetría respecto a i, j como: $T_{\nu_1 \dots \nu_i \dots \nu_j \dots \nu_r} = -T_{\nu_1 \dots \nu_j \dots \nu_i \dots \nu_r}$. Dado un tensor arbitrario se puede definir su parte simétrica y su parte antisimétrica. Damos el ejemplo de un tensor 2-covariante, para el cual toman las siguientes formas:

- Parte Simétrica: $T_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})$
- Parte Antisimétrica: $T_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})$

2.2. Métrica

La métrica \mathbf{g} , dada por sus componentes $g_{\mu\nu}$ es sin duda el objeto matemático más importante para entender un espacio-tiempo, ya que podemos obtener de ella una enorme

cantidad de información sobre la geometría que estemos tratando (Tensor de Riemann, Símbolos de Christoffel, mediciones de tiempo y distancia, Hamiltoniano, etc).

Este tensor $(0, 2)$ debe cumplir ciertas propiedades. Para empezar, $g_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$), por lo que no todas sus componentes serán independientes. Si se diagonaliza un tensor simétrico 2-covariante en su forma canónica, se puede escribir simplemente como $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, -1, \dots, +1, +1, \dots\}$. La signatura de la métrica se define como el número de -1 y $+1$ y se denota como (p, q) .

Para que $g_{\mu\nu}$ sea una métrica ninguno de los valores de la forma canónica puede ser nulo porque el determinante también sería nulo y no existiría inversa (también se puede denominar métrica no degenerada). Como la métrica es continua y no degenerada la signatura de la forma canónica será igual para cada punto, por lo que en nuestro caso siempre habrá un elemento de dicha diagonal negativo y otros tres positivos.

En relatividad general las variedades son pseudoriemannianas, $g_{\mu\nu}$ no tiene por qué ser definida positiva [signatura $(0,4)$] y de hecho no lo será. En específico, trataremos variedades de Lorentz que se definen como variedades 4-dimensionales con signatura $(1,3)$. Además sabemos que $g_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, esto significa que tendrá únicamente diez valores independientes.

Otra de las utilidades clave de la métrica será para 'subir' o 'bajar' índices. Esta operación es esencialmente el cambio de un tensor de orden (n, m) a otro tensor de orden $(n + 1, m - 1)$ o $(n - 1, m + 1)$, dependiendo de si se quiere subir o bajar un índice. Dado un tensor arbitrario de orden (n, m) , bajamos el índice n -ésimo contravariante según la siguiente fórmula:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}_{\mu_n \nu_1 \dots \nu_n} = g_{\mu_n \alpha} T^{\mu_1 \dots \mu_{n-1} \alpha}_{\nu_1 \dots \nu_n}. \quad (2.7)$$

Si nos interesara subir un índice en vez de bajarlo simplemente habría que utilizar los elementos de la métrica inversa $g^{\mu\nu}$. Notemos que este procedimiento de subir y bajar índices puede hacerse con cualquiera de los índices covariantes o contravariantes. El tensor resultante será distinto dependiendo de que índice se este bajando o subiendo. Debido a esto, para evitar confusión hemos tomado la siguiente notación al expresar las componentes de un tensor: se colocan los índices de manera que no haya ningún superíndice encima de un subíndice. Aunque existe una excepción en el caso de tensores con ciertos índices simétricos, por ejemplo, para la delta de Kronecker es común escribir δ_β^α , porque $\delta^\alpha_\beta = \delta_\beta^\alpha$.

La métrica también nos define un invariante relativista en el producto escalar. Para mostrarlo, se explicará con dos vectores cualesquiera pero se puede generalizar a tensores arbitrarios del mismo tipo. Dados dos vectores con componentes x^μ , y^μ , definimos el producto escalar de la siguiente manera,

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu. \quad (2.8)$$

El producto escalar así definido es un invariante y se conservará en todos los sistemas de coordenadas, $g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = g'_{\alpha\beta} x'^\alpha y'^\beta$. Por ejemplo, una forma de escribir una métrica es mediante el elemento de línea el cual es invariante y se define como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.9)$$

2.3. Derivada Covariante y Tensor de Curvatura

Ahora es necesario introducir la derivada covariante. Una derivada covariante es una forma de derivar a lo largo de un vector en la variedad. La propiedad fundamental de la derivada covariante es que su resultado es tensorial, transformándose según la ecuación (2.6). Una derivada covariante de un vector $Y = Y^\nu e_\nu$ a lo largo de un campo vectorial $X = X^\mu e_\mu$ se denotará como $\nabla_X Y$. Para expresar una derivada covariante también usaremos la notación $\nabla_\mu Y$, donde μ corresponderá al vector ∂_μ con respecto al cual estamos derivando.

Puesto que el vector X ya define una derivada direccional al actuar sobre una función f , imponemos que la derivada covariante cumpla: $\nabla_X f = X(f)$. Además buscamos que cumpla las propiedades usuales de una derivada:

1. Linealidad respecto al argumento: $\nabla_X(aT_1 + bT_2) = a\nabla_X(T_1) + b\nabla_X(T_2)$.
2. Linealidad respecto a la dirección: $\nabla_{(fX+gY)}(T) = f\nabla_X(T) + g\nabla_Y(T)$.
3. Regla de Leibniz: $\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = \nabla_X(T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes \nabla_X(T_2)$.
4. Aplicación sobre uno-formas: $(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$.

Con estas condiciones se demuestra que la derivada covariante satisface:

$$\nabla_X Y = X^\mu \partial_\mu (Y^\nu) e_\nu + X^\mu Y^\nu \nabla_\mu e_\nu = [X^\mu \partial_\mu (Y^\beta) + X^\mu Y^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\beta] e_\beta.$$

La última igualdad define otra serie de objetos matemáticos fundamentales para entender la geometría del espacio tiempo. Tales objetos son los símbolos de la conexión, denotados por $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ y definidos mediante la expresión: $\nabla_\mu e_\nu = \Gamma_{\nu\mu}^\beta e_\beta$. Los símbolos de la conexión no son un objeto tensorial puesto que no cumplen (2.6). Introduciendo la notación $\nabla_\alpha Y^\beta = (\nabla_\alpha Y)^\beta$, se puede escribir la derivada covariante de un vector como

$$\nabla_\mu V^\alpha = \partial_\mu V^\alpha + V^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha. \quad (2.10)$$

La derivada covariante también se podrá aplicar a uno-formas, dando como resultado: $\nabla_\mu \omega_\alpha = \partial_\mu \omega_\alpha - \omega_\lambda \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda$.

También se puede generalizar fácilmente el concepto de derivada covariante a tensores. Para ello simplemente se sigue la siguiente fórmula, con un signo positivo para los sumandos que afecten a la parte contravariante del tensor (superíndices) y con un signo negativo para los que afecten a la parte covariante (subíndice). Damos como ejemplo el caso de un tensor (1, 2):

$$\nabla_\mu T^\nu{}_{\alpha\beta} = \partial_\mu T^\nu{}_{\alpha\beta} - T^\nu{}_{\lambda\beta} \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda - T^\nu{}_{\alpha\lambda} \Gamma_{\beta\mu}^\lambda + T^\lambda{}_{\alpha\beta} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu. \quad (2.11)$$

Una de las utilidades de la derivada covariante es el transporte paralelo. Dada una curva arbitraria $\gamma(\lambda)$ se puede transportar paralelamente un vector cualquiera A definido en $T_p M$, siendo p un punto de la curva. La idea del transporte paralelo se basa en “transportar un vector a lo largo de una curva manteniéndolo constante”. Para ello el transporte paralelo se define matemáticamente como la solución a la ecuación: $\nabla_{\dot{\gamma}} A = \dot{\gamma}^\alpha \nabla_\alpha A^\beta = 0$.

La información esencial de una conexión viene dada por dos tensores, la torsión y el tensor de Riemann. Comenzaremos hablando sobre la torsión. Se puede obtener la segunda derivada covariante de una función escalar como: $\nabla_\alpha \nabla_\beta f = \partial_\alpha \partial_\beta f - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu f$. Como las derivadas parciales conmutan llegamos a la conclusión de que

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) f = (\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda) \partial_\lambda f = -T^\lambda_{\alpha\beta} \partial_\lambda f. \quad (2.12)$$

La torsión explica la parte antisimétrica de la conexión y se define como $T^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$. El tensor de torsión sí que cumple la transformación (2.6) y por tanto es un tensor a pesar que de los símbolos de la conexión no lo sean. En \mathbb{R}^n las derivadas parciales segundas conmutan, por lo que es usual imponer que $T^\lambda_{\alpha\beta} = 0$. Con esta condición los símbolos de la conexión son simétricos en sus subíndices y las derivadas covariantes segundas también conmutan cuando actúan sobre funciones escalares.

También nos interesará imponer que el producto escalar de dos vectores X e Y transportados paralelamente a lo largo de una curva cualquiera se mantenga. Esto se cumplirá si y solo si $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Dado un tensor métrico g , las conexiones que satisfacen $\nabla g = 0$ se denominan conexiones compatibles con la métrica. Existe un teorema fundamental de geometría diferencial que establece que existe una única conexión que es a la vez compatible con la métrica y con torsión nula. Esta conexión se llama conexión de Levi-Civita y sus símbolos son los símbolos de Christoffel que satisfacen:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (2.13)$$

Los símbolos de Christoffel también son clave en la ecuación de las geodésicas. Una geodésica es una curva que extremiza la longitud entre dos puntos dados en una variedad arbitraria. Una curva parametrizada $x^\mu(\lambda)$, con parámetro λ es una geodésica si cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial \lambda} = 0. \quad (2.14)$$

Estas son las ecuaciones de movimiento de las partículas libres en relatividad general. Alternativamente también se pueden obtener las trayectorias utilizando mecánica lagrangiana o hamiltoniana. De hecho, para obtener la sombra del agujero negro de Kerr analíticamente utilizaremos mecánica hamiltoniana. No obstante, utilizaremos la ecuación de las geodésicas (2.14) para obtener computacionalmente las sombras de un agujero negro arbitrario.

Escribiremos las componentes del vector tangente a la curva $x^\mu(\lambda)$ como \dot{x}^μ . El parámetro λ será un parámetro que parametrice a la curva. En el caso de curvas definidas por partículas con masa no nula se suele elegir el tiempo propio τ como dicho parámetro. No obstante, en el trabajo tendremos en cuenta curvas lumínicas. Para ellas no se podrá definir un tiempo propio porque no existe ningún sistema de referencia en el cual la luz esté en reposo. Nos limitaremos a parámetros λ a lo largo de la geodésica que satisfagan la ecuación (2.14). Estos parámetros se denominan “afines”, porque si λ es uno de ellos se puede demostrar fácilmente que cualquier otro parámetro que cumpla (2.14) se relaciona con este mediante: $\lambda' = \alpha\lambda + \beta$, donde α y β son constantes arbitrarias con la condición $\alpha \neq 0$.

Finalmente, es necesario introducir el tensor de curvatura y con él, el tensor de Ricci y el tensor de Einstein. El tensor de curvatura o tensor de Riemann es un tensor ($\frac{1}{3}$) que describe completamente la curvatura. Al igual que el tensor de torsión, se define gracias a la derivada covariante segunda. Dado tres campos vectoriales X, Y, Z , se define el tensor de curvatura como el siguiente operador:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Utilizando esta definición se obtiene una fórmula para calcular las componentes del tensor de Riemann en la base coordenada en función de los símbolos de Christoffel o de las componentes de la métrica:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (2.15)$$

A continuación se descomponen las derivadas parciales de los símbolos de Christoffel siguiendo la ecuación (2.13). Haciendo uso de que la métrica es compatible con la derivada covariante ($\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ y por tanto $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$) se escribe la parcial del tensor métrico como: $\partial_\alpha g^{\mu\nu} = -\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda} g^{\lambda\nu} - \Gamma^\nu{}_{\alpha\lambda} g^{\lambda\mu}$. Utilizando estas dos identidades se llega a la siguiente conclusión:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} [\partial_\sigma \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\sigma \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\lambda \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\lambda \partial_\mu g_{\sigma\nu} + g_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} \Gamma^\beta{}_{\mu\sigma} + g_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} \Gamma^\beta{}_{\nu\sigma}]$$

Bajando el primer índice del tensor de Riemann como $R_{\gamma\sigma\mu\nu} = g_{\gamma\rho} R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ se puede escribir la ecuación anterior como:

$$R_{\gamma\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\sigma \partial_\mu g_{\gamma\nu} - \partial_\sigma \partial_\nu g_{\gamma\mu} + \partial_\gamma \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\gamma \partial_\mu g_{\sigma\nu} + g_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha{}_{\nu\gamma} \Gamma^\beta{}_{\mu\sigma} + g_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma} \Gamma^\beta{}_{\nu\sigma}]$$

Con esta fórmula se demuestra trivialmente que el tensor de Riemann es un tensor antisimétrico en los dos primeros índices y en los dos últimos entre ellos. También se puede comprobar que satisface la primera identidad de Bianchi:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + R^\rho{}_{\mu\nu\sigma} + R^\rho{}_{\nu\sigma\mu} = 0.$$

Además podemos demostrar que es simétrico bajo el intercambio de dichos pares de índices. Para ello nos servimos de la identidad de Bianchi para la componente $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ del tensor de Riemann. $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\mu\nu\beta} - R_{\alpha\nu\beta\mu}$. Sirviendonos de la identidad de Bianchi de nuevo, esta igualdad se puede expresar como:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -(-R_{\mu\beta\nu\alpha} - R_{\mu\nu\alpha\beta}) - (-R_{\nu\mu\beta\alpha} - R_{\nu\beta\alpha\mu}) = 2R_{\mu\nu\alpha\beta} - R_{\beta\mu\nu\alpha} - R_{\beta\nu\alpha\mu}$$

En la segunda igualdad hemos utilizado simplemente la antisimetría de los índices. Finalmente, los dos últimos sumandos se pueden identificar como otra identidad de Bianchi más. Por lo que llegamos a la conclusión de que el tensor de Riemann cumple la siguiente simetría:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.16)$$

El tensor de Riemann codifica toda la información necesaria sobre la curvatura. De hecho, se anulará si y solo si la métrica es completamente plana. A pesar de tener 256 componentes (en dimensión cuatro), solo 20 de ellas serán independientes. Es posible contraer ciertos índices del tensor de Riemann y así obtener otros objetos necesarios para entender la relatividad general. Primero, se obtiene el tensor de Ricci contrayendo el primer y el tercer índice del tensor de Riemann,

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}. \quad (2.17)$$

Debido a las simetrías del tensor de Riemann su única contracción independiente posible es el tensor de Ricci. Se demuestra que el tensor de Ricci es un objeto simétrico de la siguiente manera: $R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\beta\nu\alpha} = R_{\beta\alpha}$. Además, con la métrica y el tensor de Ricci podemos definir el escalar de Ricci o de curvatura:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.18)$$

2.4. Ecuaciones de Einstein

Con todos los objetos definidos anteriormente, es posible definir otro tensor simétrico que juega un papel esencial en Relatividad General. Se trata del tensor de Einstein, $G^{\alpha\beta}$, definido mediante:

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R. \quad (2.19)$$

Este tensor será clave en las ecuaciones de Einstein, las cuales son necesarias para obtener la métrica del espacio-tiempo. Para describir estas ecuaciones también es necesario introducir el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$. Será un tensor simétrico que describe la densidad y el flujo de energía y de momento en el espacio-tiempo. Este tensor es una de las fuentes de la curvatura del espacio-tiempo en relatividad general, la otra fuente es el propio campo gravitatorio, a través de la no-linealidad de las ecuaciones. Utilizando estos dos tensores se pueden escribir las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Estas ecuaciones tienen dos constantes, la constante cosmológica Λ y la constante gravitacional de Einstein κ . Se puede obtener κ en función de constantes ya conocidas analizando el límite Newtoniano en las ecuaciones de Einstein (considerando una pequeña perturbación en una métrica plana, de forma que todas las magnitudes físicas involucren velocidades pequeñas con respecto a la velocidad de la luz). Comparando los resultados se llega a la conclusión $\kappa = 8\pi G/c^4 = 8\pi$, donde la última igualdad está descrita en unidades naturales ($c=G=1$).

Los tres tensores que aparecen en las ecuaciones de Einstein (2.20) son tensores (0, 2) completamente simétricos, por lo tanto tendremos que resolver diez ecuaciones diferentes. También observamos que $G_{\mu\nu}$ está descrito por el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, los que a su vez se calculan con derivadas parciales segundas del tensor métrico con términos lineales y con derivadas primeras con términos no lineales. Por lo tanto, podemos describir las ecuaciones de Einstein como diez ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales de segundo orden para la métrica.

Las ecuaciones de Einstein son difíciles de resolver analíticamente, pero se pueden simplificar en nuestro caso de interés por dos razones. En primer lugar, nuestro objetivo es entender las trayectorias externas a un agujero negro, por lo que nos interesa restringirnos a soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Al estar fuera de las fuentes del campo gravitatorio todas las componentes del tensor energía-momento serán nulas, $T_{\mu\nu} = 0$.

En segundo lugar, el término proporcional a Λ será despreciable. Para comprobarlo podemos hacer una estimación numérica. Se ha medido experimentalmente que la constante cosmológica en unidades del sistema internacional tiene como valor $\Lambda \approx 10^{-52} \text{m}^{-2}$

[1]. Sin embargo, el mayor agujero negro que consideraremos, M87* (1.1a); tiene una masa de $M \approx 6,5 \cdot 10^9 M_\odot$. Para realizar una estimación consideramos que su tamaño característico será del orden de su radio de Schwarzschild. Este valor en unidades del sistema internacional es $r = \frac{2GM}{c^2} \approx 1,9 \cdot 10^{11} \text{m}$. La constante cosmológica tiene unidades de $[L]^{-2}$, entonces comparamos el valor de Λ con el de $r^{-2} \approx 2,72 \cdot 10^{-23} \text{m}^{-2}$. Al comparar ambos valores se observa que la constante cosmológica es más pequeña por casi treinta ordenes de magnitud. El término proporcional a Λ será siempre despreciable en el caso que nos atañe e incluso en agujeros negros mucho mayores. Esta constante solo será significativa en cosmología ya que se estudia el universo en conjunto. Finalmente simplificamos las ecuaciones (2.20) utilizando $T_{\mu\nu} = 0$ y $\Lambda \ll r^{-2}$, así que las ecuaciones que se resolverán para hallar la métrica de Kerr serán:

$$G_{\mu\nu} = 0.$$

Sin embargo, aunque las ecuaciones parezcan simples a primera vista, siguen siendo complejas de resolver analíticamente incluso en casos con muchas simetrías.

2.5. Vectores y Tensores de Killing

A continuación, vamos a introducir los campos vectoriales de Killing que, como veremos tienen propiedades que serán importantes en la obtención de las geodésicas analíticas en el espacio-tiempo. Se define un campo vectorial de Killing K_μ como aquellos vectores que cumplen la siguiente propiedad: si desplazamos cada punto de la variedad en la dirección y sentido que indica el campo vectorial en dicho punto, ocurre que se mantiene la métrica de la variedad y por lo tanto no se distorsionan las mediciones de distancia o tiempo. Los vectores de Killing son los generadores infinitesimales de la isometría correspondiente, es decir, la transformación en la que la geometría es invariante. Se expresa como un movimiento en la dirección de K_μ . Se puede comprobar que un vector es de Killing si cumple la siguiente igualdad:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu) = 0. \quad (2.21)$$

Equivalentemente a dicha definición, también se puede definir un campo vectorial de Killing gracias a la derivada de Lie \mathcal{L}_K . Esta ecuación se reescribe como: $\mathcal{L}_K g = 0$, donde g es el tensor métrico y K es el campo de Killing. En esta ecuación se puede desarrollar la derivada de Lie por componentes como:

$$(\mathcal{L}_K g)_{\alpha\beta} = K^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu} \partial_\beta K^\mu + g_{\mu\beta} \partial_\alpha K^\mu = 0. \quad (2.22)$$

Usando estas definiciones se puede comprobar que los vectores de Killing nos proporcionan cantidades conservadas a lo largo de las geodésicas. Para demostrarlo, consideramos que γ es un vector tangente a la geodésica, y K es un campo vectorial de Killing. Entonces, el producto escalar de γ y K es una constante a lo largo de las geodésicas:

$$\gamma^\alpha \nabla_\alpha (\gamma^\beta K_\beta) = (\gamma^\alpha \nabla_\alpha \gamma^\beta) K_\beta + \gamma^\alpha \gamma^\beta \nabla_\alpha K_\beta = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta (\nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha) = 0.$$

Por lo tanto, independientemente de la elección de coordenadas que tomemos la cantidad $\gamma^\beta K_\beta$ es constante a lo largo de esta geodésica. Esta es una de las principales propiedades de los campos de Killing, ya que con ello podremos calcular constantes del movimiento y simplificar las ecuaciones pertinentes.

Los campos vectoriales de Killing se pueden generalizar a campos tensoriales de Killing. Esta generalización tiene propiedades parecidas a los vectores de Killing. En nuestro caso, los utilizaremos principalmente para obtener ciertas simetrías y constantes, que no son descritas por los vectores de Killing. Un campo tensorial de Killing $K_{\nu_1 \dots \nu_n}$ debe satisfacer una ecuación que generalice (2.21). Esta fórmula se puede encontrar en la bibliografía y toma la siguiente forma:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu_1 \dots \nu_n)} = 0. \quad (2.23)$$

Un tensor de Killing $K_{\nu_1 \dots \nu_n}$ es un tensor simétrico de rango n . Por ejemplo, la propia métrica es un tensor de Killing de rango $(0, 2)$. En nuestro caso en particular, aplicaremos este formalismo a tensores de rango $(0, 2)$. Utilizando que el tensor de Killing es simétrico ($K_{\nu_1 \nu_2} = K_{\nu_2 \nu_1}$), se obtiene fácilmente que la ecuación (2.23) en caso de un tensor de rango $(0, 2)$ toma la forma:

$$\nabla_{\mu} K_{\nu_1 \nu_2} + \nabla_{\nu_1} K_{\mu \nu_2} + \nabla_{\nu_2} K_{\mu \nu_1} = 0. \quad (2.24)$$

Capítulo 3

Métrica de Kerr

3.1. Introducción

Para empezar, recalamos que durante todo el trabajo se utilizarán las unidades naturales dadas por $c = G = 1$ para simplificar la notación. Durante las cuatro primeras subsecciones la bibliografía más útil será el libro [12], tanto para encontrar las métricas a usar como otra serie de detalles, además también se ha utilizado [13]. Comenzamos mostrando como es el espacio-tiempo dado por un agujero negro de masa M sin momento angular y sin carga. Esta geometría está dada por la métrica de Schwarzschild, que se describe en coordenadas esféricas con el siguiente elemento de línea (2.9):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.1)$$

Esta es la métrica de un agujero negro con masa M y simetría esférica. Aunque se dará una definición más precisa más adelante, un espacio-tiempo es un agujero negro si contiene una región acotada de la cual ninguna partícula puede escapar. El borde de dicha región representa un umbral en el que las partículas pueden entrar pero no volver a salir. Dicho umbral se denomina horizonte de eventos.

En estas coordenadas, la métrica de Schwarzschild es una métrica diagonal independiente de t y ϕ . Además es estática, es decir, es independiente de la transformación $t \rightarrow -t$. Nos sirve para explicar un espacio-tiempo simple con simetría esférica. Sin embargo, nuestro caso de interés estará dado por un agujero negro axialmente simétrico y rotando con un momento angular J en su eje axial. Está caracterizado por dos parámetros, la masa M y el momento angular J . No obstante, en la métrica utilizaremos el parámetro de Kerr $a = \frac{J}{M}$. Escribimos el tensor métrico del espacio-tiempo de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) d\phi^2, \quad (3.2)$$

donde hemos definido: $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$.

Conociendo ya la métrica podemos ver detalles relevantes de la misma. Una simple vista a la métrica nos indica detalles esenciales de este espacio tiempo. En primer lugar,

existen dos simetrías puesto que las coordenadas t y ϕ no aparecen explícitamente en (3.2). La métrica es estacionaria y tiene simetría axial. Es decir, dada una transformación tal que $t \rightarrow t + \Delta t$ y manteniendo el resto de coordenadas iguales, la métrica no varía. También vemos que ocurre lo mismo con la coordenada ϕ , dada una transformación $\phi \rightarrow \phi + \Delta\phi$, la métrica queda invariante. Más adelante explicaremos en detalle estas simetrías haciendo uso de los vectores de Killing.

Dichas simetrías también aparecen en la métrica de Schwarzschild, pero a diferencia de ésta, la métrica de Kerr no es estática puesto que no es idéntica bajo el cambio $t \rightarrow -t$. Esto podía predecirse, ya que al revertir el tiempo deberíamos observar al agujero negro girar en sentido contrario. Esta justificación es más evidente si se toma la transformación simultánea $t \rightarrow -t$ y $\phi \rightarrow -\phi$. Realizando ambas transformaciones la métrica sí queda invariante.

Por otro lado, observamos que la métrica es asintóticamente plana, es decir, la métrica se aproxima a la métrica de Minkowski cuando nos alejamos infinitamente. En estas coordenadas ocurre al tomar $r \rightarrow \infty$. Es inmediato comprobar que el término dominante en este límite es:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.3)$$

Esta métrica no es más que la métrica plana de Minkowski en coordenadas esféricas. Además, de la métrica de Kerr (3.2) se puede ver fácilmente con una simple sustitución que tomando el valor $a = 0$, la métrica se convierte automáticamente en la métrica de Schwarzschild.

3.1.1. Coordenadas Esferoidales Oblatas

En esta subsección estudiaremos qué ocurre con la métrica si tomamos $M = 0$. Lógicamente se intuye que se simplifique a la métrica plana de Minkowski, sin embargo no es tan trivial como en el caso $r \rightarrow \infty$. Al tomar $M = 0$ resulta:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.4)$$

La parte espacial de esta métrica está escrita en unas coordenadas llamadas coordenadas esferoidales oblatas. Estas coordenadas se pueden relacionar con las coordenadas típicas cartesianas mediante el siguiente cambio:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin\theta \cos\phi \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

Vamos a comprobar que en efecto, el elemento de línea (3.4) es equivalente a Minkowski. Para ello utilizamos este cambio de coordenadas para calcular las diferenciales dx , dy y dz y elevarlas al cuadrado posteriormente.

$$\left. \begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= \frac{(r \sin\theta)^2}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2) \cos^2\theta d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2\theta d\phi^2 + r \sin(2\theta) dr d\phi \\ dz^2 &= \cos^2\theta dr^2 + r^2 \sin^2\theta d\theta^2 - r \sin(2\theta) dr d\theta \end{aligned} \right\}.$$

Por lo tanto vemos que efectivamente se cumple:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Por lo tanto se sigue que la métrica (3.2) con $M = 0$ se corresponde con la métrica de Minkowski, aunque escrita en coordenadas distintas a las esféricas.

3.1.2. Completar Cuadrados en la Métrica

Una forma muy útil de escribir la métrica (3.2) es completando cuadrados hasta poder escribirlo de la siguiente manera: $ds^2 = -(A_{tt}dt + A_{t\phi}d\phi)^2 + A_{\phi\phi}d\phi^2 + A_{rr}dr^2 + A_{\theta\theta}d\theta^2$, ya que será útil para acortar ciertos cálculos que realizaremos posteriormente. Como la métrica en las coordenadas r y θ es diagonal simplemente tenemos que tratar las coordenadas t y ϕ . Para ello denominaremos el elemento de línea reducido: $d\bar{s}^2 = g_{tt}dt^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi$. Para completar cuadrados se comienza escribiendo el elemento de línea reducido y se saca factor común a los sumandos dt^2 y $dtd\phi$:

$$d\bar{s}^2 = - \left(\frac{\rho^2 - 2Mr}{\rho^2} \right) \left[dt^2 + \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2 - 2Mr} dtd\phi \right] + \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) d\phi^2.$$

Sumamos y restamos un nuevo término $\left(\frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2 - 2Mr} \right)^2 d\phi^2$, para así completar cuadrados y dejar únicamente un sumando proporcional a $d\phi^2$:

$$d\bar{s}^2 = - \left(\frac{\rho^2 - 2Mr}{\rho^2} \right) \left[dt^2 + \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2 - 2Mr} d\phi \right]^2 + A_{\phi\phi} d\phi^2,$$

$$A_{\phi\phi} = \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left((r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mra^2 \sin^2 \theta + \frac{(2Mra)^2}{\rho^2 - 2mr} \sin^2 \theta \right).$$

Ya se puede observar la forma de la métrica que buscábamos hallar. Sin embargo, antes de continuar simplificamos el sumando proporcional a $d\phi^2$. Simplemente, sacando factor común $1/(\rho^2 - 2Mr)$ se puede reescribir fácilmente como:

$$A_{\phi\phi} = \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2(\rho^2 - 2Mr)} [(r^2 + a^2)\rho^4 - 2Mr^3\rho^2 - 2Mra^2\rho^2 \cos^2 \theta] = \frac{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 - 2mr}.$$

Finalmente podemos reescribir completamente el elemento de línea completo de la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) \left[dt + \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2 - 2Mr} d\phi \right]^2 + \frac{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 - 2mr} d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.6)$$

3.2. Singularidades

En esta sección, veremos que la métrica de Kerr (3.2) presenta diversas singularidades. En relatividad general se define una singularidad como un punto (o un conjunto de puntos) del espacio-tiempo en el que la métrica, o la curvatura, no están definidas, siendo un problema intrínseco a la geometría y no causado por ningún sistema de coordenadas.

También nos encontraremos con “singularidades aparentes”, en dichos puntos ni la métrica ni la curvatura tienen ningún problema, pero debido a la elección de coordenadas aparentan no estar definidas. Las singularidades aparentes solo aparecen en ciertos sistemas de coordenadas y se pueden evitar cambiando las coordenadas utilizadas. A continuación mostraremos un pequeño resumen de todas ellas.

1. Singularidad del anillo, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$.

Vemos en primer lugar que la métrica tiene un problema en estos valores puesto que si $\rho^2 = 0 \Rightarrow g_{tt} \rightarrow \infty, g_{t\phi} \rightarrow \infty, g_{\phi\phi} \rightarrow \infty$. Esta condición se satisface si y solo si se cumplen ambas condiciones: $r = 0$, y $\cos \theta = 0$. Esta singularidad se conoce como la singularidad del anillo, ya que está situada en el plano ecuatorial en $r = 0$. Un cálculo explícito permite demostrar que la curvatura del espacio-tiempo diverge al acercarnos a estos valores, por lo que se trata de una singularidad del espacio-tiempo y no simplemente un problema de las coordenadas.

El hecho de que esta singularidad es un anillo y no un punto no se ve a simple vista. Para ello requerimos de utilizar coordenadas diferentes a las de Boyer-Lindquist. Con el cambio de coordenadas oblatas esféricas definido en (3.5), se ve que las condiciones $r = 0$, $\cos \theta = 0$ hacen referencia al anillo en el plano ecuatorial dado por la ecuación: $x^2 + y^2 = a^2$. Esto, además, nos explica por qué no es redundante dar dos condiciones, ya que si $r = 0$ fuera un punto sería innecesario especificar también su ángulo θ . Mientras que en coordenadas oblatas $r = 0$ hace referencia a un disco de radio a y al especificar $\theta = \pi/2$ se obtiene el borde de dicho disco, es decir, el anillo.

2. Singularidad de Coordenadas Esféricas, $\sin \theta = 0$.

Cuando situamos la métrica en el eje $\sin \theta = 0$ observamos que las componentes $g_{t\phi}$, $g_{\phi\phi}$ se anulan. Por lo tanto, nos encontramos con otra singularidad. Esta es la más esperable y se debe únicamente a la elección de las coordenadas. Al igual que las coordenadas esféricas, las coordenadas de Boyer-Lindquist dejan de estar definidas en el eje z ($\sin \theta = 0$). No es posible definir un ángulo ϕ único en el eje $\sin \theta = 0$, es arbitrario.

3. Horizontes, $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr = 0$.

Finalmente, la última singularidad que observamos en la métrica de Kerr (3.2) ocurre cuando $\Delta = 0$, puesto que $g_{rr} \rightarrow \infty$. Si resolvemos la ecuación $\Delta = 0$ para la variable r , obtenemos dos valores que se corresponden con los dos horizontes de la métrica de Kerr:

$$r_{\pm} = M \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a}{M}\right)^2} \right]. \quad (3.7)$$

Estas dos superficies dadas por $r = r_{\pm}$ se denominan horizonte de eventos (cuando $r = r_+$) y horizonte de Cauchy (cuando $r = r_-$). Con esta ecuación podemos observar gran parte de la física de un agujero negro de Kerr. Primero, vemos que si $a < M$ tenemos dos horizontes diferentes, mientras que si $a = M$, estos degeneran a uno solo. Sin embargo, si $a > M$ no existe ninguno de los dos horizontes, porque la coordenada radial solo toma valores reales. Gracias a esto podemos definir el límite

de Kerr, $a/M = 1$.

Por lo tanto, durante el resto del trabajo tomaremos únicamente valores $a \leq M$. De hecho, se puede demostrar que si $a > M$ el espacio-tiempo tiene una singularidad desnuda o “Naked Singularity”. La singularidad desnuda hace que el espacio-tiempo sea muy distinto si a es mayor o menor que M . Para interpretar su significado, podemos entender que se puede alcanzar la singularidad del anillo sin problema. Eso significa que el anillo puede emitir partículas o rayos de luz que alcancen el infinito. En otras palabras, dicho anillo es visible desde el infinito y por lo tanto el espacio-tiempo no describe ningún agujero negro. Para poder demostrar este hecho debemos analizar el comportamiento radial de las trayectorias de las geodésicas para el espacio-tiempo de Kerr con $a > M$. Por lo tanto se explicará en más detalle en el capítulo 4.

Estas singularidades son solo obra de las coordenadas, y es posible definir otro conjunto de sistema de coordenadas en el cual los elementos de $g_{\mu\nu}$ no diverjan cuando $\Delta = 0$, como demostraremos a continuación.

3.3. Extensión del Espacio-Tiempo

De entrada el espacio-tiempo de Kerr dado por la métrica (3.2) está definido en el exterior del horizonte de eventos, r_+ . Sin embargo, para definir también las superficies dadas por radios $r < r_+$ debemos extender el dominio de definición de la métrica. Para un agujero negro con $a > M$, podemos definir tres bloques de Boyer-Lindquist que en principio no están conectados:

$$\begin{aligned} \text{I} : r &> r_+, \\ \text{II} : r_- &< r < r_+, \\ \text{III} : r &< r_-. \end{aligned}$$

El bloque I se interpreta como el exterior de Kerr. Si r es suficientemente grande el campo gravitacional se puede comparar con un campo Newtoniano y las coordenadas t , r , θ y ϕ siguen su interpretación usual. Puesto que ∂_t es temporal para r grandes, orientamos casualmente la variedad de forma que el futuro se corresponda con valores crecientes de t (o equivalentemente que ∂_t esté dirigido hacia el futuro). En el bloque II, se pierde el significado intuitivo de las coordenadas. Ahora r es temporal mientras que t es espacial. Como no hay una singularidad en $r = 0$ (excepto en el anillo del plano ecuatorial $\theta = \pi/2$), podemos extender el dominio de r a todos los reales, por lo que el bloque III también incluye el dominio $r < 0$. Cuando $r \ll 0$, el bloque III se comporta como el bloque I, con la única diferencia que $-r$ es la distancia al centro. Además, el bloque III es especialmente extraño cerca de la singularidad del anillo.

Para extender la métrica de Kerr más allá del bloque I, podemos utilizar las coordenadas de Kerr. La métrica de Kerr se derivó utilizando estas coordenadas. Para ello, se definen dos familias de geodésicas nulas, llamadas geodésicas nulas principales. Estas geodésicas representan rayos de luz; una familia sigue una trayectoria radial hacia el interior del agujero negro mientras que la otra se dirige hacia el exterior del mismo. Podemos imaginarnos la geodésica que se dirige hacia el interior del agujero negro como un rayo de

luz que apunta directamente al centro del agujero negro desde un observador lejano. En términos de las coordenadas de Boyer-Lindquist toman la siguiente forma:

$$l_{\pm} = \frac{1}{\Delta}((r^2 + a^2)\partial_t \pm \Delta\partial_r + a\partial_{\phi}). \quad (3.8)$$

El signo positivo se corresponde con los rayos de luz dirigidos hacia el exterior mientras que el negativo se corresponde con los rayos dirigidos al interior. Podemos observar que cuando $\Delta \rightarrow 0$, es decir, cuando nos aproximamos al horizonte de eventos, las direcciones principales muestran el fallo de las coordenadas de Boyer-Lindquist: se ralentizan y giran infinitamente alrededor del agujero negro. Para expandir el dominio de la métrica utilizaremos las geodésicas nulas principales entrantes como curvas geométricas, puesto que apuntan directamente al centro del agujero negro. Para ello introduciremos nuevas coordenadas t^* y ϕ^* que se comporten mejor cerca del horizonte de eventos. Se las llama funciones coordenadas de Kerr y su definición es la siguiente:

$$t^* = t + T(r), \quad \phi^* = \phi + A(r), \quad \text{donde} \quad \frac{dT}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \quad \frac{dA}{dr} = \frac{a}{\Delta}. \quad (3.9)$$

Las condiciones que definen $T(r)$ y $A(r)$ se pueden inferir de las direcciones principales (3.8). Podemos intuirlo puesto que utilizamos las geodésicas principales nulas como las curvas geométricas que definen el cambio de coordenadas. Por lo tanto, tomando dichas definiciones de $T(r)$ y $A(r)$ se cumple que podemos escribir las geodésicas principales interiores nulas como: $l_- = -\partial_r^*$. Nuestro objetivo ahora será encontrar la métrica en estas nuevas coordenadas para expandir su dominio.

Las nuevas coordenadas solo varían de las anteriores mediante sumandos únicamente dependientes de r . Para calcular la relación entre campo de vectores $\frac{\partial}{\partial x^{\mu^*}}$ y el campo $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ utilizamos las relaciones (3.9) manteniendo las coordenadas distintas de x^{μ^*} constantes. Con ello se sigue que ∂_t , ∂_{θ} y ∂_{ϕ} no se modifican en estas coordenadas ($\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu^*}}$, donde $\mu = t, \phi, \theta$). Por lo tanto las variaciones en la métrica se deberán únicamente al cambio $\partial_r \rightarrow \partial_r^*$.

Por construcción las geodésicas nulas principales entrantes son curvas de $-\partial_r^*$, y este vector es nulo por lo que $g_{r^*r^*}^* = 0$. Además podemos ver fácilmente que ∂_r^* y ∂_{θ} siguen siendo ortogonales por lo que $g_{r^*\theta}^* = 0$. A continuación utilizamos la ecuación de cambio de base (2.6):

$$\begin{aligned} g_{tr}^* &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{t^*}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{r^*}} g_{\mu\nu} = \frac{\partial t}{\partial r^*} g_{tt} + \frac{\partial \phi}{\partial r^*} g_{t\phi} = -\frac{dT}{dr} g_{tt} - \frac{dA}{dr} g_{t\phi}, \\ g_{\phi r}^* &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\phi^*}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{r^*}} g_{\mu\nu} = \frac{\partial \phi}{\partial r^*} g_{\phi\phi} + \frac{\partial t}{\partial r^*} g_{\phi t} = -\frac{dA}{dr} g_{\phi\phi} - \frac{dT}{dr} g_{\phi t}. \end{aligned}$$

En la segunda igualdad de ambas ecuaciones hemos podido tomar $\mu = t, \phi$ respectivamente, puesto que de las coordenadas x^{μ} solamente t tiene dependencia en t^* , y equivalentemente solo ϕ tiene dependencia en ϕ^* . Gracias a esto podemos determinar los términos g_{tr}^* y $g_{\phi r}^*$ como:

$$\begin{aligned} g_{tr}^* &= \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \frac{r^2 + a^2}{\Delta} + \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{a}{\Delta} = \frac{\rho^2(r^2 + a^2) - 2Mr(r^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2 \Delta} = 1, \\ g_{\phi r}^* &= -\frac{(r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta \frac{a}{\Delta} + \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{r^2 + a^2}{\Delta} = -a \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Para poder simplificar ambas ecuaciones hemos operado el numerador hasta obtener un término proporcional a $\rho^2\Delta$ para que cancele con el denominador. Después de estos cálculos, la métrica de Kerr en estas coordenadas tomará la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \left[dt^* + \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2 - 2Mr} d\phi^* \right]^2 + \frac{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 - 2mr} d\phi^{*2} + \rho^2 d\theta^2 + 2dt^* dr - 2a \sin^2 \theta d\phi^* dr. \quad (3.10)$$

Cuando la métrica estaba en las coordenadas de Boyer-Lindquist existía una singularidad en los horizontes (es decir en $\Delta = 0$) debido a que $g_{rr} \propto \Delta^{-1}$. No obstante, en estas coordenadas la métrica está bien definida cuando $\Delta = 0$. Esto nos muestra que los horizontes r_+ y r_- son singularidades de la elección de las coordenadas como queríamos demostrar y que además se pueden unir los bloques I, II y III, aumentando así el dominio de la métrica.

3.4. Constantes y Simetrías

Como en todo problema físico, las simetrías nos ayudan a resolverlo más fácilmente. Según el teorema de Noether, cada simetría tiene una constante del movimiento asociada, lo cual será esencial para poder hallar una solución explícita para la ecuación de las geodésicas. En este caso, al trabajar en un espacio-tiempo, necesitaremos cuatro constantes para poder obtener un sistema integrable. Para empezar, existe una constante general para todas las geodésicas:

$$-m^2 = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (3.11)$$

Para obtener la sombra del agujero negro de Kerr se trabajará con geodésicas luminosas. Estas trayectorias por definición cumplirán que $m^2 = 0$.

Como hemos dicho anteriormente, se observa que la métrica $g_{\mu\nu}$ no tiene ninguna dependencia en t o en ϕ , por lo que podremos esperar dos constantes del movimiento más. Estas nos serán muy útiles, y para obtenerlas podemos hacer uso de la ecuación de Killing (2.21).

La independencia de la métrica respecto a t y ϕ indica la existencia de dos campos vectoriales de Killing, $(K_t)^\nu = (\partial_t)^\nu = \delta_t^\nu$ y $(K_\phi)^\nu = (\partial_\phi)^\nu = \delta_\phi^\nu$ (donde δ_μ^ν es la delta de Kronecker), y se puede comprobar que ambos cumplen la ecuación de Killing (2.22). Como la comprobación es idéntica para ambos, simplemente se escribirá para el caso $(K_t)^\nu$:

$$(\mathcal{L}_{K_t} g)_{\alpha\beta} = \delta_t^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu} \partial_\beta \delta_t^\mu + g_{\mu\beta} \partial_\alpha \delta_t^\mu.$$

Puesto que $g_{\alpha\beta}$ no depende de t , el primer sumando de la ecuación es nulo. Además, $\partial_\alpha \delta_t^\mu = 0$, por lo que se demuestra fácilmente que:

$$(\mathcal{L}_{K_t} g)_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.12)$$

Y por lo tanto $(K_t)^\nu$ es un vector de Killing. Utilizando el mismo procedimiento llegamos a la conclusión de que $(K_\phi)^\nu$ también lo es. Gracias a este formalismo, podremos definir las constantes asociadas a ambos vectores de Killing: estas serán la energía (independencia del tiempo) y el momento angular (independencia del ángulo azimutal), las cuales se definen como:

$$\begin{aligned}
E &= -(\partial_t)^\nu \dot{\gamma}_\nu = -\delta_t^\nu g_{\nu\mu} \dot{\gamma}^\mu = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi} = -p_t. \\
L_z &= (\partial_\phi)^\nu \dot{\gamma}_\nu = \delta_\phi^\nu g_{\nu\mu} \dot{\gamma}^\mu = g_{\phi\phi}\dot{\phi} + g_{t\phi}\dot{t} = p_\phi.
\end{aligned}
\tag{3.13}$$

Para obtener la segunda igualdad, se ha tomado una geodésica arbitraria dada por el vector tangente con componentes: $\dot{\gamma}^\nu = \dot{x}^\mu$. Mientras que para la última igualdad hemos definido el cuatrimomento y así relacionarlo directamente con las constantes E y L_z . Se define el cuatrimomento como una uno-forma que se relaciona con el vector tangente a la trayectoria de la siguiente manera:

$$p_\mu = \dot{\gamma}_\mu = g_{\mu\lambda} \dot{\gamma}^\lambda. \tag{3.14}$$

La definición de la energía tiene un signo menos debido a que la energía de una partícula con respecto a un observador U viene determinada por la relatividad espacial y es: $E = -g_{\mu\nu} U^\mu \dot{\gamma}^\nu$. Aunque ∂_t no sea un observador, sí lo es en el infinito, por lo que el signo queda fijado.

3.5. Ergoesfera y Frame Dragging

Para poder entender la física detrás de la forma de la sombra de un agujero negro de Kerr, es necesario conocer los conceptos de Ergoesfera y Arrastre del Marco de Referencia o “Frame Dragging”. El efecto del “Frame Dragging” se debe a la presencia de un elemento no diagonal en la métrica, $g_{t\phi} \neq 0$, que introduce nuevos efectos cualitativos en la trayectoria de las partículas.

Para entender y explicar la ergoesfera y “Frame Dragging” se ha utilizado [16] y [11] que lo trata desde un punto de vista más físico y [12] desde un punto de vista más riguroso matemáticamente.

Para poder entenderlos, consideraremos las componentes temporal y axial del vector tangente a la trayectoria de una partícula, $\dot{\gamma}^t$, $\dot{\gamma}^\phi$. Con ayuda de la métrica podremos escribirlas en función de las constantes del movimiento E y L_z :

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\lambda} &= \dot{t} = -g^{tt} E + g^{t\phi} L_z. \\
\frac{d\phi}{d\lambda} &= \dot{\phi} = g^{\phi\phi} L_z - g^{t\phi} E.
\end{aligned}$$

Dividiendo estas dos ecuaciones se puede encontrar la relación entre la variación del ángulo con respecto al tiempo, lo que define la velocidad angular ω de la trayectoria, cuya expresión toma la forma:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{g^{\phi\phi} L_z - g^{t\phi} E}{g^{t\phi} L_z - g^{tt} E}. \tag{3.15}$$

Vamos a analizar cualitativamente esta cantidad. Para ello, supondremos una geodésica radial hacia el agujero negro, es decir, que el fotón en cuestión tenga momento angular nulo $L_z = p_\phi = 0$. Esto nos define la siguiente velocidad angular:

$$\omega \Big|_{L_z=0} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}} = \frac{2Mra}{(r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mra^2 \sin^2 \theta}. \tag{3.16}$$

Observamos que a pesar de que la trayectoria no posee momento angular, el fotón adquiere una velocidad angular debida únicamente a la influencia de la gravedad. Además, se puede apreciar de la ecuación (3.16) que la velocidad angular ω tiene el mismo signo que el parámetro a , por lo que la trayectoria rotará en el mismo sentido de giro que el agujero negro. Este efecto es lo que se conoce como “Frame Dragging”, y es el motivo por el que como veremos más adelante, la sombra del agujero negro de Kerr toma una forma no circular.

Conociendo ya los efectos del “Frame Dragging” podemos intuir que existan dos tipos de órbitas distintas. Por un lado, partículas cuyo momento angular tenga el mismo signo que el momento angular del agujero negro o co-rotantes; y por otro lado, trayectorias con momento angular con signo contrario o contra-rotantes. En principio, no esperamos ningún cambio cualitativo de una trayectoria co-rotante, ya que el “Frame Dragging” simplemente lo impulsaría con mayor velocidad angular en la misma dirección.

Sin embargo, podemos preguntarnos si será siempre posible que la luz rote con momento angular contrario al del agujero negro; o si al contrario, existe un radio al partir del cual no existirá ninguna trayectoria con momento angular contrario al del agujero negro.

Para entender este fenómeno, realizamos los cálculos para trayectorias luminosas, es decir, que el elemento de línea sea $ds^2 = 0$. Además, tenemos en cuenta que $x^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Finalmente, asumimos trayectorias que van en la dirección $\pm\phi$, es decir, que mantienen las coordenadas r y θ constantes. Obtenemos la siguiente ecuación:

$$0 = g_{tt}(dt)^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}(d\phi)^2. \quad (3.17)$$

Esta es una ecuación cuadrática para el término $d\phi/dt$, por lo que se pueden encontrar fácilmente sus soluciones:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}.$$

Podemos ver que en la superficie $g_{tt} = 0$ ocurre un fenómeno interesante. Se observa que en dicha superficie las dos posibles soluciones de la ecuación son:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi}{dt} = -2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = -2\frac{g^{t\phi}}{g^{tt}} = \frac{2Mr a}{(r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mra^2 \sin^2 \theta} = -2\omega \Big|_{L_z=0}.$$

Al sustituir los elementos de la métrica en la segunda solución, aparece un resultado idéntico a la velocidad angular de una partícula con momento angular nulo. Como ya hemos visto, tiene el mismo signo que el parámetro de Kerr a . Por lo tanto, esta segunda solución se interpreta como los fotones co-rotantes.

En cambio, la primera ecuación es más interesante, ya que nos dice que en la superficie $g_{tt} = 0$, un fotón contra-rotante no se mueve, es decir, las fuerzas de arrastre son tan fuertes que no le permiten moverse en la dirección opuesta a la rotación. Se puede obtener la coordenada radial de la superficie que cumpla $g_{tt} = 0$ simplemente igualando la componente de la métrica:

$$r_{S_+} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \geq r_+. \quad (3.18)$$

Este radio es mayor que el radio del horizonte de eventos de la ecuación (3.7), puesto que $\cos^2 \theta \leq 1$. Este límite se conoce como ergoesfera o límite estático. Este límite cumple que para radios menores que $r_{S_+} \Rightarrow g_{tt} > 0$ todas las partículas, tengan masa o no, girarán en la misma dirección que el agujero negro. La rotación del propio espacio tiempo producida por el agujero negro es capaz de modificar completamente la dirección de las órbitas. Además de esto, ninguna partícula podrá permanecer a r , θ y ϕ constante. Por otro lado, como la ecuación $g_{tt} = 0$ es cuadrática en r , existe otra solución, que denominaremos r_{S_-} y toma la forma:

$$r_{S_-} = M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \leq r_- \quad (3.19)$$

Esta solución cumple todo lo que hemos comentado del primer resultado, r_{S_+} , pero será siempre menor que el horizonte de Cauchy, por lo que está en el interior del agujero negro. A pesar de que no podamos observar cómo es el espacio-tiempo más allá del horizonte de eventos r_+ , esta solución sigue siendo interesante. Observamos que si $\cos^2 \theta = 0$, r_{S_-} se reduce a $r_{S_-} = 0$ y coincide con la singularidad del anillo.

Se pueden distinguir todas las superficies importantes de un agujero negro de Kerr en una imagen, para la cual se ha utilizado el cambio a coordenadas cartesianas definido en (3.5). Con este cambio, se ve mejor qué ocurre en $r = 0$, ya que utilizando Boyer-Lindquist la singularidad del anillo se visualizaría como un punto:

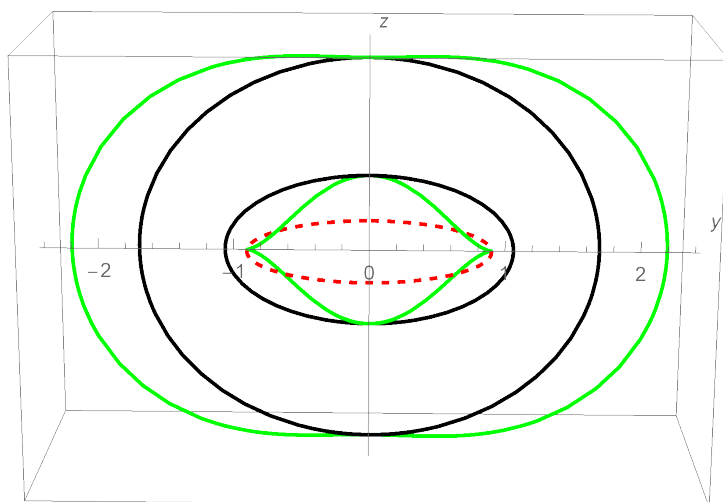


Figura 3.1: Gráfica de las distintas superficies importantes para un agujero negro de Kerr. En negro hemos representado tanto el horizonte de eventos r_+ como el horizonte de Cauchy r_- , en verde están las superficies que definen la ergoesfera externa e interna $r_{S_{\pm}}$; y finalmente, en una línea roja discontinua está simbolizada la singularidad del anillo $r = 0$, $\cos \theta = 0$.

3.6. Inversa de la Métrica

El cálculo de la métrica inversa se puede realizar escribiendo los términos $g_{\mu\nu}$ en forma matricial e invirtiéndola para obtener los términos $g^{\mu\nu}$. No obstante, a veces invertir una matriz no diagonal directamente puede ser una operación computacionalmente costosa. Para ello vamos a obtener las componentes de la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ mediante otro método mucho más efectivo.

Primero definiremos un cambio de la base coordenada $\{\partial_\alpha\}$ a una base ortonormal $\{e_a\}$ y su respectivo cambio de la base coordenada dual $\{dx^\alpha\}$ a la base $\{\omega^a\}$. Dicho cambio está definido mediante la matriz de cambio de base e_a^α , mientras que el cambio dual está dado mediante ω_α^a :

$$e_a = e_a^\alpha \partial_\alpha, \quad \omega^a = \omega_\alpha^a dx^\alpha. \quad (3.20)$$

Con este cambio de base llegamos a las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \eta_{ab} \omega_\alpha^a \omega_\beta^b, \\ g^{\alpha\beta} &= \eta^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \\ \omega_\alpha^a e_b^\beta &= \delta_b^a. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Las dos primeras ecuaciones en (3.21) se obtienen mediante el cambio de base descrito en (3.20). Mientras que la tercera de estas ecuaciones simplemente nos indica que la matriz ω_α^a es la inversa de la matriz e_b^β .

Dado que la métrica de Kerr es diagonal por bloques es suficiente con aplicar éste método a los términos temporales y axiales (t y ϕ), ya que $g^{rr} = g_{rr}^{-1}$, $g^{\theta\theta} = g_{\theta\theta}^{-1}$ y $g^{r\alpha}$ y $g^{\theta\alpha}$ no contienen ningún término cruzado.

Utilizaremos el elemento de línea de la ecuación (3.6), porque escrito así se puede comparar con la primera ecuación (3.21) y hallar los elementos ω_α^a de la matriz. El signo negativo delante de $(\omega_t^t dt + \omega_t^\phi d\phi)^2$ es debido a la métrica de Minkowski, por ello no aparecerá dentro de los elementos de la matriz.

La tercera fórmula (3.21) nos muestra que ω_α^a es la matriz inversa de e_a^α y viceversa. Por lo tanto invertimos la matriz ω obtenida y hallamos la matriz e .

$$\omega = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\rho^2 - 2Mr}{\rho^2}} & \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\sqrt{\rho^2(\rho^2 - 2Mr)}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 - 2Mr}} \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^2 - 2Mr}} & -2Mra \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\Delta \rho^2 (\rho^2 - 2Mr)}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\rho^2 - 2Mr}{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta}} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Finalmente, utilizando la segunda ecuación (3.21) hallar la métrica inversa es tan trivial como sustituir los valores de e_a^α obtenidos:

$$\begin{aligned} g^{t\phi} &= \eta^{ab} e_a^t e_b^\phi = +e_\phi^t e_\phi^t = -2Mra \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\Delta \rho^2 (\rho^2 - 2Mr)}} \sqrt{\frac{\rho^2 - 2Mr}{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta}} = -\frac{2Mra}{\Delta \rho^2}, \\ g^{\phi\phi} &= \eta^{ab} e_a^\phi e_b^\phi = (e_\phi^\phi)^2 = \frac{\rho^2 - 2Mr}{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta}, \\ g^{tt} &= \eta^{ab} e_a^t e_b^t = -(e_t^t)^2 + (e_\phi^t)^2 = -\frac{\rho^2}{\rho^2 - 2Mr} + 4M^2 r^2 a^2 \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta (\rho^2 - 2Mr)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

La última componente es considerablemente más larga que las otras dos, por lo que trataremos de simplificarla. Para ello, sumamos ambos términos y tratamos el numerador hasta poder simplificarlo. Sustituyendo $-2Mr = \Delta - r^2 - a^2$, obtenemos:

$$g^{tt} = \frac{-\rho^4 \Delta - 2Mr \Delta a^2 \sin^2 \theta + 2Mra^2 (r^2 + a^2) \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta (\rho^2 - 2Mr)}.$$

A continuación, sustituyendo $\rho^4 = \rho^2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$, y aprovechando la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ podemos separar el numerador en dos sumandos distintos:

$$g^{tt} = \frac{-(r^2 + a^2)(\rho^2 - 2Mra^2 \sin^2 \theta) + \Delta a^2 \sin^2 \theta (\rho^2 - 2Mr)}{\rho^2 \Delta (\rho^2 - 2Mr)}.$$

Si se vuelve a hacer la sustitución $-2Mr = \Delta - r^2 - a^2$, se puede operar el primer sumando hasta hallar un factor común a ambos, finalmente, se sigue tratando un poco más la ecuación y se llega a una forma más simplificada (3.24):

$$g^{tt} = \frac{\Delta a^2 \sin^2 \theta (\rho^2 - 2Mr) - (r^2 + a^2)(r^2 + a^2)(\rho^2 - 2Mr)}{\rho^2 \Delta (\rho^2 - 2Mr)} = \frac{\Delta a^2 \sin^2 \theta - (r^2 + a^2)^2}{\rho^2 \Delta},$$

$$g^{tt} = -\frac{(r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta}. \quad (3.24)$$

Con esto ya hemos obtenido los cinco términos independientes no nulos de $g^{\mu\nu}$, ya que como se ha comentado al principio de la sección, g^{rr} y $g^{\theta\theta}$ toman la forma:

$$g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} = \frac{\Delta}{\rho^2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} = \frac{1}{\rho^2}. \quad (3.25)$$

Capítulo 4

Geodésicas Luminosas

Antes de obtener una ecuación que nos muestre la forma de la sombra de un agujero negro de Kerr será esencial obtener las ecuaciones del movimiento de los fotones, es decir, las geodésicas luminosas. Para ello, obtenemos el hamiltoniano mediante transformación de Legendre del lagrangiano:

$$H = p_\mu \dot{q}^\mu - \mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu. \quad (4.1)$$

Para obtener la última igualdad se ha utilizado la definición del cuatrimomento (3.14) y la definición de la métrica inversa ($g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} = \delta_\nu^\alpha$). Sustituyendo los valores de $g^{\mu\nu}$ y escribiendo la suma explícitamente nos queda el siguiente hamiltoniano:

$$H = -\frac{(r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mra^2 \sin^2 \theta}{2\rho^2 \Delta} p_t^2 - \frac{2Mra}{\rho^2 \Delta} p_t p_\phi + \frac{\Delta}{2\rho^2} p_r^2 + \frac{1}{2\rho^2} p_\theta^2 + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{2\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} p_\phi^2. \quad (4.2)$$

4.1. Constante de Carter

En la métrica de Kerr existen cuatro constantes del movimiento, por lo que es un sistema completamente integrable. Como ya hemos visto, las tres primeras constantes son: la energía E , el momento angular axial L_z , y la tercera constante, general para todas las métricas es $m^2 = -g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$. Nuestro caso de interés son trayectorias luminosas que cumplirán $m^2 = 0$, o equivalentemente trayectorias que anulen el hamiltoniano (4.1).

La cuarta y última constante del movimiento es la constante de Carter, C , la cual no se deriva de una manera tan directa y trivial como las otras tres. Esta constante fue obtenida por primera vez por Carter [4] mediante el método de Hamilton-Jacobi. En este apartado se explicará cómo obtenerla, su interpretación y las simetrías del espacio-tiempo que conlleva.

4.1.1. Formalismo de Hamilton-Jacobi

Primero, se puede obtener la constante de Carter analizando las ecuaciones de Hamilton-Jacobi de manera muy directa. Antes de comenzar, para simplificar los cálculos posteriores, reescribiremos el hamiltoniano (4.2), en concreto los términos proporcionales a p_t^2 y a $p_t p_\phi$.

1. Término proporcional a p_t^2 :

$$-\frac{p_t^2}{2\rho^2\Delta}[(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) - \Delta a^2 \sin^2 \theta + (r^2 + a^2)a^2 \sin^2 \theta] = \frac{p_t^2}{2\rho^2} \left(a^2 \sin^2 \theta - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \right).$$

2. Término proporcional a $p_t p_\phi$:

$$-\frac{2Mra}{\rho^2\Delta} p_t p_\phi = -\frac{a}{\rho^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta} - 1 \right) p_t p_\phi.$$

Para ello, simplemente se ha utilizado la definición de Δ : $2Mr = (r^2 + a^2) - \Delta$. Una vez separados los sumandos de estos dos términos, se puede completar cuadrados fácilmente y llegar al siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{\Delta}{2\rho^2} p_r^2 + \frac{1}{2\rho^2} p_\theta^2 - \frac{((r^2 + a^2)p_t + ap_\phi)^2}{2\Delta\rho^2} + \frac{(p_\phi + ap_t \sin^2 \theta)^2}{2\rho^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (4.3)$$

Se escribe la ecuación general de Hamilton-Jacobi como:

$$H \left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0,$$

Como en nuestro caso particular el hamiltoniano no depende explícitamente del parámetro de la trayectoria de las geodésicas λ , podemos tomar la función S como: $S = -\alpha_1 \lambda + W(q_i, \alpha_i)$, donde α_i serán las constantes del movimiento. La función $W(q_i, \alpha_i)$ se denomina función característica de Hamilton. Por lo tanto, la ecuación de Hamilton-Jacobi fija el valor del hamiltoniano como: $H = -\alpha_1$, lo cual es consistente con el hecho de que el hamiltoniano es una constante del movimiento.

Sabemos que el hamiltoniano está relacionado con la constante del movimiento m^2 , podemos reescribir: $\alpha_1 = -\frac{m^2}{2}$. Reescribimos la acción como: $S(q_i, \alpha_i, \lambda) = W(q_i, \alpha_i) + \frac{m^2}{2} \lambda$. A continuación buscaremos una función generatriz que sea separable en cada variable, por lo que cumplirá: $W(q_i, \alpha_i) = W_1(q_1, \alpha_i) + W_2(q_2, \alpha_i) + \dots$. Puesto que conocemos que las constantes relacionadas con las coordenadas radial y temporal son $p_t = -E$ y $p_\phi = L_z$, podemos escribir la acción como:

$$S = \frac{m^2}{2} \lambda - Et + L_z \phi + W_r(r, \alpha_i) + W_\theta(\theta, \alpha_i). \quad (4.4)$$

A continuación, nuestro objetivo se resume en encontrar las funciones características de Hamilton $W_r(r, \alpha_i)$ y $W_\theta(\theta, \alpha_i)$, lo cual podremos hacer si y solo si la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable (en estas coordenadas). Para ello, sustituimos $p_r = \frac{dW_r}{dr}$ y $p_\theta = \frac{dW_\theta}{d\theta}$, y reescribimos la ecuación de Hamilton-Jacobi de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{2} &= \frac{\Delta}{2\rho^2} \left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 - \frac{(-(r^2 + a^2)E + aL_z)^2}{2\Delta\rho^2} + \frac{(L_z - aE \sin^2 \theta)^2}{2\rho^2 \sin^2 \theta}, \\ m^2 r^2 - \Delta \left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{(aL_z - (r^2 + a^2)E)^2}{\Delta} &= \\ -m^2 a^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{(L_z - aE \sin^2 \theta)^2}{\sin^2 \theta} &. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Para alcanzar esta última ecuación, hemos tenido en cuenta que $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ y hemos despejado a un lado de la igualdad todas las dependencias con r , y al otro lado las dependencias con θ . Por lo tanto, para que se cumpla esta igualdad, cada lado no puede depender del valor que tomen r o θ , ambos lados de la igualdad deben ser constantes. Esta constante la denominamos K y es la conocida constante de Carter.

A continuación, puesto que en este trabajo únicamente trataremos geodésicas luminosas tomaremos $m^2 = 0$. Además, separamos (4.5) en dos ecuaciones diferentes para poder ver más claramente la forma de la constante de Carter:

$$\begin{aligned} K &= p_\theta^2 + \frac{(L_z - aE \sin^2 \theta)^2}{\sin^2 \theta}, \\ K &= -\Delta p_r^2 + \frac{(aL_z - (r^2 + a^2)E)^2}{\Delta}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

También es usual escribirla en términos de otra constante, C . Esta redefinición servirá para simplificar ciertos cálculos posteriormente:

$$Q = K - (L_z - aE)^2. \quad (4.7)$$

Es interesante discutir la interpretación física de la constante de Carter. Para ello comenzamos observando que valor toma la constante K en el plano $\theta = \pi/2$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación (4.6) nos queda:

$$K = p_\theta^2 + (L_z - aE)^2 \implies Q = p_\theta^2.$$

Por lo tanto en el plano ecuatorial la constante de Carter es simplemente la componente θ del cuatrimomento. Para continuar entendiendo la constante de Carter, utilizaremos el límite de Schwarzschild, es decir, $a = 0$. En este límite, la primera de las dos ecuaciones, nos queda como:

$$K = p_\theta^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}.$$

Con esto, vemos que la constante de Carter es algo parecido a un momento angular al cuadrado, de hecho para un agujero negro de Schwarzschild es posible elegir el ángulo θ arbitrariamente, debido a la simetría del espacio-tiempo. Si tomamos $\theta \approx \pi/2$ entonces $p_\theta = 0$ y la constante de Carter se escribe como $K = L_z^2$.

También es posible definir una cantidad $L^2 = L_z^2 + K$ y interpretarla como el momento angular total de la partícula. En este caso, podemos entender Q como la componente perpendicular al eje de giro del agujero negro del momento angular. Sin embargo, es importante no tomar estas interpretaciones de forma estricta puesto que el espacio-tiempo de Kerr no tiene un momento angular total que se conserve.

4.1.2. Simetría y Tensor de Killing

Del mismo modo que las constantes E y L_z se pueden entender en términos de vectores de Killing, también se pueden explicar las otras dos constantes C y m^2 mediante un objeto geométrico similar, aunque más general y que ya hemos introducido: los tensores de Killing. La fórmula (2.23) se cumple para vectores de Killing, mientras que la constante de Carter necesita de la generalización de dicha condición para tensores (2.24).

Primero, podemos explicar la constante m^2 . Como nuestra métrica es compatible con la derivada covariante, cumple: $\nabla_\mu g_{\nu_1\nu_2} = 0$. Entonces sabemos que la métrica es un tensor de Killing y se puede definir la constante introducimos en el apartado anterior, m^2 como:

$$-m^2 = g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu. \quad (4.8)$$

Donde $\dot{\gamma}^\mu$ es una geodésica arbitraria dada por el vector tangente, cuyas componentes serán: $\dot{\gamma}^\mu = \dot{q}^\mu$.

Finalmente, conociendo ya las definiciones necesarias se puede tratar el caso de la métrica de Kerr en específico. En dicha métrica en coordenadas de Boyer-Lindquist definimos un tensor simétrico de rango $(0, 2)$ de la siguiente manera:

$$\sigma_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

donde se definen los vectores l y n como:

$$l = \frac{1}{\Delta} ((r^2 + a^2) \partial_t + \Delta \partial_r + a \partial_\phi),$$

$$n = \frac{1}{2\rho^2} ((r^2 + a^2) \partial_t - \Delta \partial_r + a \partial_\phi).$$

La definición de este tensor como generador de la constante de Carter se puede encontrar por ejemplo en [3]. Se observa fácilmente que ambos vectores son lumínicos y satisfacen que:

$$l^\mu l_\mu = 0, \quad n^\mu n_\mu = 0, \quad l^\mu n_\mu = -1.$$

Además podemos ver que el vector l es idéntico a la dirección principal l_+ definida en la ecuación (3.8) y el vector n es proporcional a la dirección principal l_- : $n = \frac{\Delta}{2\rho^2} l_-$. Por lo tanto podemos reescribir el tensor de Killing con las direcciones l_\pm definidas en (3.8) y eliminarnos la dependencia en θ debida a ρ^2 . Se reescribe con los índices arriba como:

$$\sigma^{\mu\nu} = \Delta (l_+^\mu l_-^\nu + l_+^\nu l_-^\mu) + r^2 g^{\mu\nu}.$$

La demostración de que $\sigma_{\mu\nu}$ define un tensor de Killing para la métrica de Kerr se obtuvo en [18] utilizando el formalismo de espinores de Newman-Penrose. Sin embargo, comprobar que $\sigma^{\mu\nu}$ es un tensor de Killing en las coordenadas de Boyer-Lindquist utilizando directamente la ecuación (2.24) es una operación computacionalmente costosa, así que para comprobarlo se pueden utilizar programas como Python o Mathematica.

Puesto que $\sigma^{\mu\nu}$ es un tensor de Killing podemos definir la constante del movimiento asociada a dicho tensor. Esta será la constante de Carter, K , que hemos obtenido con el método de Hamilton-Jacobi:

$$K = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \dot{\gamma}_\mu \dot{\gamma}_\nu. \quad (4.10)$$

Podemos sustituir el tensor de Killing, para comprobar que es la misma constante que hemos hallado con el método de Hamilton-Jacobi. Dado que estamos analizando geodésicas luminosas se tomará la constante $-m^2 = 0$ y con la definición (4.8) podemos ver que el segundo sumando del tensor se anulará, quedando simplemente:

$$2K = \Delta (l_+^\mu l_-^\nu + l_+^\nu l_-^\mu) p_\mu p_\nu,$$

donde hemos utilizado la definición de cuatrimomento dada en (3.14). A continuación observamos a partir de la definición (3.8) que $l_+^\mu = l_-^\mu$ si $\mu \neq r$ y que $l_+^r = -l_-^r$. Por lo tanto, los sumandos que no se anulan son los siguientes:

$$\begin{aligned} 2K &= \Delta((l_+^t l_-^t + l_+^t l_-^t)p_t^2 + (l_+^\phi l_-^\phi + l_+^\phi l_-^\phi)p_\phi^2 + 2(l_+^t l_-^\phi + l_+^\phi l_-^t)p_t p_\phi + (l_+^r l_-^r + l_+^r l_-^r)p_r^2), \\ &= 2\Delta((l_+^t)^2 p_t^2 + (l_+^\phi)^2 p_\phi^2 + 2(l_+^t l_+^\phi)p_t p_\phi - (l_+^r)^2 p_r^2) = 2\Delta((l_+^t p_t + l_+^\phi p_\phi)^2 - (l_+^r)^2 p_r^2). \end{aligned}$$

Si ahora sustituimos las componentes de l_+ definidas en (3.8) y tenemos en cuenta que $p_t = -E$ y $p_\phi = L_z$ llegamos rápidamente al siguiente resultado:

$$2K = -2\Delta p_r^2 + 2\Delta \left(-\frac{r^2 + a^2}{\Delta} E + \frac{aL_z}{\Delta} \right)^2 = 2 \left(-\Delta p_r^2 + \frac{(aL_z - (r^2 + a^2)E)^2}{\Delta} \right),$$

que coincide exactamente con la definición de la constante de Carter dada en la segunda igualdad de (4.6). Podemos ver entonces que la definición de la constante de Carter con el tensor de Killing es idéntica a la obtenida con el método de Hamilton-Jacobi.

4.2. Ecuaciones de Hamilton

A continuación, tras explicar con detalle las constantes del movimiento, obtenemos las ecuaciones de Hamilton que rigen las trayectorias luminosas. Estas ecuaciones serán esenciales para el cálculo de la sombra de un agujero negro. Para esta sección se puede seguir en más detalle en [12] o [7].

Para empezar, se utilizan las constantes E y L_z para calcular \dot{t} y $\dot{\phi}$. Simplemente invertimos en general las ecuaciones (3.13) para posteriormente sustituir los valores de la métrica (3.2):

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{g_{\phi\phi}E + g_{t\phi}L_z}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \\ \dot{\phi} &= -\frac{g_{t\phi}E + g_{tt}L_z}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{t} &= E \frac{\Delta\rho^2 + 2Mr(r^2 + a^2)}{\Delta\rho^2} - L_z \frac{2Mra}{\Delta\rho^2}, \\ \dot{\phi} &= E \frac{2Mra}{\Delta\rho^2} + L_z \frac{\rho^2 - 2Mr}{\Delta\rho^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Con esto, ya se han obtenido las dos primeras ecuaciones de Hamilton, donde además hemos utilizado implícitamente otras dos ecuaciones ($\dot{p}_t = 0$ y $\dot{p}_\phi = 0$) en las definiciones de las constantes E y L_z .

Con estas dos ecuaciones ya obtenidas se puede pasar ahora a calcular las correspondientes a \dot{r} y $\dot{\theta}$, para ello, comenzaremos con la doble definición de la constante de Carter dada por (4.6), además, utilizamos (4.7) para reescribir dicha constante. Empezamos despejando p_θ^2 y cambiando K por Q :

$$p_\theta^2 = Q + \frac{\sin^2 \theta (L_z - aE)^2 + (L_z - aE \sin^2 \theta)^2}{\sin^2 \theta}.$$

Desarrollando los cuadrados se cancelan los términos cruzados proporcionales a $L_z E$ y se puede escribir como una suma, donde cada sumando hace referencia a una constante diferente:

$$p_\theta^2 = Q + a^2 E^2 \cos^2 \theta - L_z^2 \cot^2 \theta.$$

De momento mantenemos esta ecuación así escrita, y ahora despejamos $\Delta^2 p_r^2$ de la segunda ecuación de (4.6), donde simplemente volvemos a realizar el cambio de K por Q , puesto que ya esta bastante simplificada obteniendo:

$$\Delta^2 p_r^2 = (aL_z - (r^2 + a^2)E)^2 - \Delta(Q + (L_z - aE)^2).$$

Todavía necesitamos escribir estas ecuaciones en términos de \dot{r} y $\dot{\theta}$ en lugar de p_r y p_θ . Para ello aplicamos otra de las ecuaciones de Hamilton al hamiltoniano (4.3) para obtener una relación entre las componentes del vector tangente a la geodésica en función del parámetro λ y su momento asociado:

$$\dot{q}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}.$$

Con esto podemos escribir las dos ecuaciones restantes:

$$\begin{aligned} \rho^4 \dot{\theta}^2 &= p_\theta^2 = Q + a^2 E^2 \cos^2 \theta - L_z^2 \cot^2 \theta = \Theta(\theta), \\ \rho^4 \dot{r}^2 &= \Delta^2 p_r^2 = (aL_z - (r^2 + a^2)E)^2 - \Delta(Q + (L_z - aE)^2) = R(r), \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde hemos introducido las funciones $R(r)$ y $\Theta(\theta)$ a partir de las últimas igualdades de cada línea. Por completitud, podemos obtener también las dos últimas ecuaciones de Hamilton (\dot{p}_θ , \dot{p}_r). Estas toman la siguiente forma, donde ya hemos anulado un término proporcional al hamiltoniano dado que estamos considerando únicamente geodésicas luminosas:

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{1}{\rho^2} \left[(r - M)p_r^2 + \frac{2Er\Delta[aL_z - (r^2 + a^2)E] + 2(r - M)[aL_z - (r^2 + a^2)E]^2}{\Delta^2} \right], \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\sin(2\theta)}{\rho^2} \left[\frac{aE(L_z - aE \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta} + \frac{(aE(L_z - aE \sin^2 \theta))^2}{\sin^4 \theta} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2.1. Signo de la Constante de Carter

Se puede encontrar una explicación más detallada sobre los valores de la constante de Carter en [13] o [12]. Se observa inmediatamente de la primera ecuación (4.6) que todos los sumandos son reales y están elevados al cuadrado por lo que la constante K es siempre positiva (o mejor, no-negativa). Sin embargo, la constante Q no tiene porque ser siempre positiva.

Podemos determinar el valor mínimo que puede tener Q para que la geodésica luminosa exista. Para ello utilizamos la ecuación angular (4.12) y usamos que la función $\Theta(\theta)$ debe ser no negativa para que la ecuación tenga sentido. Obtenemos las siguientes desigualdades:

$$Q + a^2 E^2 \cos^2 \theta - L_z^2 \cot^2 \theta \geq Q + a^2 E^2 \cos^2 \theta \geq 0. \quad (4.14)$$

Por lo tanto, inferimos que para que una geodésica exista, se debe cumplir la siguiente condición para los valores de Q :

$$Q \geq -a^2 E^2 \cos^2 \theta. \quad (4.15)$$

4.3. Ecuación Radial y Pseudo Potenciales Radiales

Los pseudo potenciales y el análisis de la ecuación radial se ha estudiado exhaustivamente en la bibliografía, desde un tratamiento más simple en [16] y [3], pasando por un análisis más detallado por ejemplo en [13] hasta llegar a una interpretación minuciosa en el libro [12].

Para entender las propiedades del movimiento radial de una trayectoria luminosa, introduciremos los pseudo potenciales V_{\pm} . Los pseudo potenciales se definen como el valor que debe tomar la energía E para que el radio r sea un punto de retorno. Para tener esta condición simplemente se requiere que se cumpla la igualdad $\dot{r} = 0$, o equivalentemente $R(r) = 0$, la cual es una ecuación cuadrática en E .

Desplazando todos los términos de la ecuación $R(r) = 0$ al mismo lado, desarrollando los cuadrados y reordenándoles según potencias de E , se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$E^2[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2] + E(2aL_z\Delta - 2aL_z(r^2 + a^2)) + a^2L_z^2 - \Delta L_z^2 - \Delta Q = 0.$$

Se puede simplificar el término proporcional a E para obtener las dos soluciones E_+ y E_- rápidamente. Estas soluciones se denotan como V_{\pm} y son los pseudo potenciales que buscamos. Además, hemos definido la función $B(r) = [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2]$ y obtenemos la siguiente ecuación cuadrática:

$$E^2 B(r) + E(-4aMrL_z) + a^2L_z^2 - \Delta(L_z^2 + Q) = 0. \quad (4.16)$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos los pseudo-potenciales V_{\pm} . Además para analizar las soluciones fácilmente separamos un término proporcional a Q y sacamos L_z como factor común. Tras estas operaciones obtenemos:

$$V_{\pm} = \frac{2aMr \pm \sqrt{4a^2M^2r^2 - B(r)r(2M - r) - B(r)\Delta Q_L}}{B(r)} L_z, \quad (4.17)$$

donde hemos introducido el parámetro $Q_L = \frac{Q}{L_z^2}$. Por lo tanto, en términos de V_{\pm} , podemos reescribir la función $R(r)$ de la siguiente manera:

$$R(r) = [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2](E - V_+)(E - V_-). \quad (4.18)$$

Observamos que, para que la ecuación (4.18) sea positiva, por lo tanto $\dot{r} \in \mathbb{R}$ y sea una geodésica físicamente posible, se debe cumplir que $E > V_+$ o $E < V_-$. Entonces consideraremos prohibida a la banda de energías $V_- < E < V_+$.

4.3.1. Análisis de la desigualdad $g(l_+, U) \leq 0$

Antes de graficar los pseudo potenciales podemos analizar una condición adicional que deben cumplir las geodésicas y que limitan aún más el rango que puede tomar la energía. Para comenzar observamos que el vector tangente a la geodésica $U^\mu = \dot{\gamma}^\mu$ debe ser futuro, por lo que su producto escalar con cualquier vector causal futuro debe ser negativo o cero. Como la dirección principal l_+^μ , definida en (3.8), tiene esta propiedad se debe cumplir: $g(l_+, U) \leq 0$. Desarrollamos esta desigualdad de la siguiente manera:

$$g(l_+, U) = l_+^\mu U^\nu g_{\mu\nu} = l_+^\mu U_\mu = (r^2 + a^2)p_t + \Delta p_r + ap_\phi \leq 0, \quad (4.19)$$

donde hemos utilizado que $U_\mu = p_\mu$. Sustituimos a continuación las componentes del cuatrimomento en función de las constantes del movimiento, $p_t = -E$, $p_\phi = L_z$, $p_r = \sqrt{R(r)}/\Delta^2$, y obtenemos:

$$aL_z - E(r^2 + a^2) + \sqrt{R(r)} \leq 0. \quad (4.20)$$

A continuación, pasamos $aL_z - E(r^2 + a^2)$ al otro lado de la desigualdad. Como ambos lados de la desigualdad deben ser mayor que 0 puesto que $R(r) \geq 0$ podemos elevar ambos lados al cuadrado y obtener una nueva desigualdad, consecuencia de la anterior, pero que en principio no tiene por qué ser equivalente a ella. Sustituyendo $R(r)$ por su definición dada en (4.12) nos queda:

$$R(r) = (aL_z - E(r^2 + a^2))^2 - \Delta(Q + (L_z - aE)^2) \leq (E(r^2 + a^2) - aL_z)^2. \quad (4.21)$$

Simplificamos esta condición utilizando la relación entre Q y K definida en (4.7) y el hecho de que nos encontramos fuera del horizonte de eventos (para que las coordenadas de Boyer-Lindquist estén definidas), lo que implica que $\Delta > 0$. Con todo ello simplemente obtenemos:

$$K \geq 0,$$

que sabemos que se cumple para todas las geodésicas. Solo queda determinar bajo qué casos esta condición es equivalente a la desigualdad (4.20). Para ello simplemente utilizamos que

$$a^2 \leq b^2 \iff |a| \leq |b|.$$

Aplicándolo a la desigualdad (4.21) alcanzamos la siguiente conclusión:

$$\sqrt{R(r)} \leq |E(r^2 + a^2) - aL_z|.$$

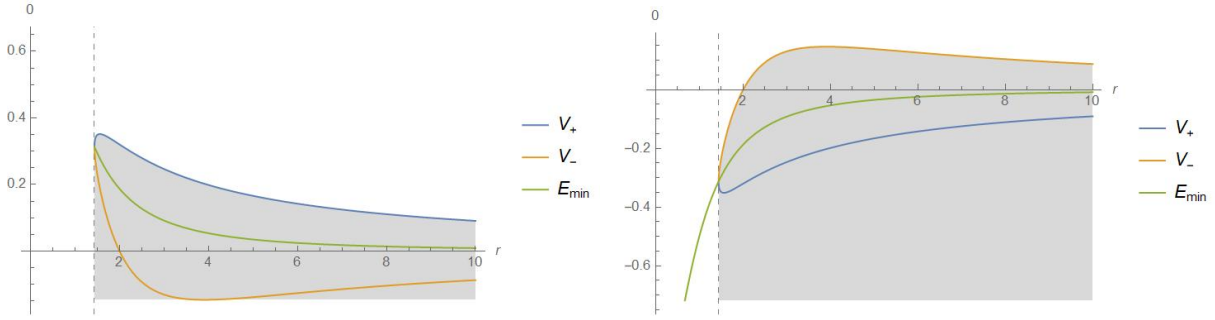
Para que esta condición, que hemos derivado desde $K \geq 0$, sea equivalente a la desigualdad (4.20) se debe cumplir que: $E(r^2 + a^2) - aL_z \geq 0$, por lo tanto la condición de que el vector U sea futuro resulta ser equivalente a la desigualdad:

$$E \geq \frac{aL_z}{r^2 + a^2}, \quad (4.22)$$

y todas las trayectorias que no cumplan esta condición deben pues ser excluidas.

4.3.2. Gráficos de los Pseudo Potenciales V_{\pm}

Para observar mejor la forma que tienen los pseudo potenciales $V_{\pm}(r)$, representamos sus gráficas para ciertos valores fijos de las constantes a, L_z, Q . Los valores que se han tomado en las dos gráficas siguientes son $L_z = \pm 1, M = 1, a = 0,9$ y $Q = 0$.



(a) Pseudo Potenciales V_{\pm} de una trayectoria con $L_z > 0$. La región grisácea representa la región prohibida energéticamente y la línea discontinua es $r = r_+$.

(b) Pseudo Potenciales V_{\pm} de una trayectoria con $L_z < 0$. La región grisácea representa la región prohibida energéticamente y la línea discontinua es $r = r_+$.

Hemos representado con una línea discontinua la superficie $r = r_+$, ya que al estar en coordenadas de Boyer-Lindquist esta gráfica no es válida para $r \leq r_+$. Podemos ver que la forma de los pseudo-potenciales con $L_z > 0$ es idéntica a los potenciales con $L_z < 0$ excepto el signo. Además marcamos con un tono grisáceo la región de energías prohibida. Esta región está definida por las desigualdades $R(r) \geq 0$ y (4.22). Simbolizamos esta segunda desigualdad con una línea verde, por debajo de la cual las geodésicas no pueden tomar esos valores para la energía.

Observamos que cuando $r \rightarrow \infty$ los potenciales tienden asintóticamente a 0 (de hecho, si tomamos este límite en la fórmula de V_{\pm} vemos rápidamente que decaen de manera proporcional a $1/r$), ya que en este régimen la rotación del agujero negro apenas tiene relevancia. También inferimos que el pseudo-potencial V_- atraviesa el cero exactamente en $r = 2M$ (el límite de la ergoesfera en $\theta = \pi/2$) y toma un valor igual a V_+ en el horizonte de eventos.

Los casos que no cumplen $E > V_+$ (o $E > V_-$ si $L_z < 0$) están prohibidos en estas figuras. Por lo tanto, entendemos las geodésicas permitidas como fotones que llegan desde $r \rightarrow \infty$ y alcanzan un valor mínimo para r o bien caen dentro del horizonte de eventos del agujero negro, dependiendo de si alcanza un punto de retorno en V_+ (o V_- si $L_z < 0$) o no.

También podemos ver qué ocurre con los pseudo-potenciales si se toma $a > M$, para ello representamos los potenciales en el caso $L_z = 1, Q = 0, M = 1$ y $a = 2$.

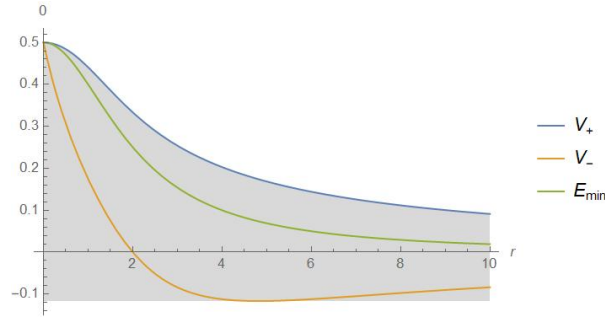


Figura 4.2: Pseudo Potenciales V_{\pm} para una trayectoria con $L_z > 0$, en un agujero negro que cumple $a > M$.

Como podemos observar en este caso, a diferencia de la gráfica 4.1a, la gráfica está definida para todo r y ambos pseudo-potenciales alcanzan un valor común en $r = 0$ no en el horizonte de eventos. Esto se debe a que, como comentamos en el capítulo anterior, si $a > M$ no hay un horizonte de eventos y nos encontramos con una singularidad desnuda. Esta gráfica nos explica que para valores $a > M$ no ocurre ningún fenómeno inesperado antes de alcanzar la singularidad del anillo ya que no existen ni el horizonte de eventos ni el de Cauchy.

En todas estas gráficas hemos tomado el valor $Q = 0$, por lo tanto estas geodésicas solo se pueden desplazar en el plano ecuatorial (lo veremos posteriormente al analizar la gráfica 4.3), donde no existe una ergoregión. Esto se debe a que si observamos la ecuación de la superficie de la ergoesfera (3.18) y tomamos los valores $a > M$ y $\theta = \pi/2$ no existe ningún radio r_{S+} . Inferimos que si $E > V_+$ la trayectoria puede alcanzar la singularidad desnuda o salir de ella sin problema. Mientras que si una trayectoria no tiene la energía suficiente simplemente alcanzará un punto de retorno y volverá al infinito.

4.3.3. Trayectorias con $Q < 0$

A continuación, nos podemos preguntar que le ocurre a una trayectoria con $Q < 0$. Para comenzar, desarrollaremos la definición de la función $R(r)$ (4.12). Elevamos los cuadrados de dicha definición y la escribimos como un polinomio de r . Tras estas operaciones obtenemos:

$$R(r) = E^2 r^4 + (a^2 E^2 - L_z^2 - Q) r^2 + 2MKr - a^2 Q. \quad (4.23)$$

Observamos que si $Q < 0$ el único término que a priori no es positivo es el término r^2 . El resto de sumandos serán siempre positivos. Si podemos demostrar que $(a^2 E^2 - L_z^2 - Q) > 0$ si $Q < 0$, entonces $R(r)$ es definido positivo y por lo tanto, la trayectoria no tiene puntos de retorno. En otras palabras, las geodésicas entrantes alcanzan necesariamente el horizonte de sucesos y caen al agujero negro, y las geodésicas salientes escapan al infinito. Esto tendrá consecuencias a la hora de discutir la “región atrapada”, en el siguiente capítulo.

Para demostrarlo, asumiremos lo contrario: $a^2 E^2 - Q - L_z^2 < 0$. Multiplicamos la desigualdad por $\cot^2 \theta$, sumamos ambos lados por la cantidad positiva $Q + a^2 E^2 \cos^2 \theta$ y la reescribimos de la siguiente manera:

$$Q + a^2 E^2 \cos^2 \theta - L_z^2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} < (Q - a^2 E^2) \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + Q + a^2 E^2 \cos^2 \theta.$$

A continuación, operamos el lado derecho de la desigualdad utilizando relaciones trigonométricas para obtener:

$$Q + a^2 E^2 \cos^2 - L_z^2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} < \frac{Q}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \frac{\cos^4 \theta}{\sin^2 \theta} < 0, \quad (4.24)$$

donde la última desigualdad se debe a que estamos suponiendo $Q < 0$. Vemos que esta desigualdad entra en contradicción con la desigualdad (4.14). Por lo tanto, nuestra primera suposición debe ser errónea y entonces se cumple que $(a^2 E^2 - L_z^2 - Q) > 0$ si $Q < 0$. Hemos demostrado que la trayectoria de una geodésica no tiene puntos de retorno si $Q < 0$.

4.4. Ecuación Angular

Al igual que la ecuación radial, el movimiento de las geodésicas en la coordenada θ se trata con detalle en [13] y especialmente [12].

A continuación, analizaremos la ecuación del movimiento $\dot{\theta}$ o equivalentemente la función $\Theta(\theta)$ definida en (4.12). Como consecuencia de la simetría esférica, una geodésica cualquiera en la métrica de Schwarzschild siempre está contenida en un plano. Con una elección adecuada de coordenadas angulares, siempre podemos tomar dicho plano como el ecuatorial (notemos que cuando hay dos o más geodésicas involucradas, esta elección se puede hacer para una de ellas, pero, en general, no para las dos de manera simultánea). Sin embargo, en el espacio-tiempo de Kerr tenemos una dirección definida por el eje de rotación del agujero negro que rompe dicha simetría. Por lo tanto, las geodésicas no estarán limitadas a un plano.

No obstante, podemos hallar el rango máximo y mínimo que tomará la coordenada θ en función de las constantes E , L_z y Q . Este rango está dado por la desigualdad: $\Theta(\theta) \geq 0$. Podemos multiplicar ambos lados de la desigualdad por $\sin^2 \theta$ para obtener la siguiente condición:

$$Q(1 - \cos^2 \theta) + a^2 E^2 \cos^2 \theta(1 - \cos^2 \theta) - L_z^2 \cos^2 \theta \geq 0.$$

Observamos que es una desigualdad cuadrática en $\cos^2 \theta$. Resolver el caso de la igualdad ($\Theta(\theta_{turn}) = 0$) nos define los ángulos límite θ_{turn} . Se calcula directamente como:

$$\cos^2 \theta_{turn} = \frac{a^2 E^2 - Q - L_z^2 \pm \sqrt{(a^2 E^2 - Q - L_z^2)^2 + 4a^2 E^2 Q}}{2a^2 E^2}. \quad (4.25)$$

Si tenemos una geodésica con $Q > 0$, debemos escoger el signo “+” para poder cumplir la condición de que $\cos^2 \theta_{turn} \geq 0$. Así pues, en el caso $Q \geq 0$, la geodésica estará siempre limitada a un sector $\theta_{min} \leq \theta_{eq} \leq \theta_{max}$ simétrico alrededor de $\theta_{eq} = \pi/2$. Además observamos que el tamaño del sector decrece al aumentar $|L_z|$. De hecho en el caso límite $L_z = 0$, $Q \geq 0$ se cumple:

$$\cos^2 \theta_{turn} = \frac{a^2 E^2 - Q + \sqrt{a^4 E^4 + Q^2 - 2A^2 E^2 Q + 4a^2 2E^2 Q}}{2a^2 E^2} = \frac{a^2 E^2 - Q + a^2 E^2 + Q}{2a^2 E^2} = 1.$$

Por lo tanto inferimos que cuando $L_z = 0$ el sector será máximo ($0 \leq \theta_{eq} \leq \pi$). Sin embargo si $Q \leq 0$ ambas soluciones son posibles y el ángulo de la geodésica respecto al ecuador está limitado por: $\theta_{eq} \leq \theta_{min} \leq \theta_{max}$ o $\theta_{eq} \geq \theta_{min} \geq \theta_{max}$. Podemos resumir todas las posibilidades para los valores que puede tomar $\Theta(\theta)$ en la gráfica 4.3. En ella hemos representado Θ/L_z^2 para cuatro geodésicas con distintos valores típicos de los parámetros E/L_z y Q/L_z^2 .

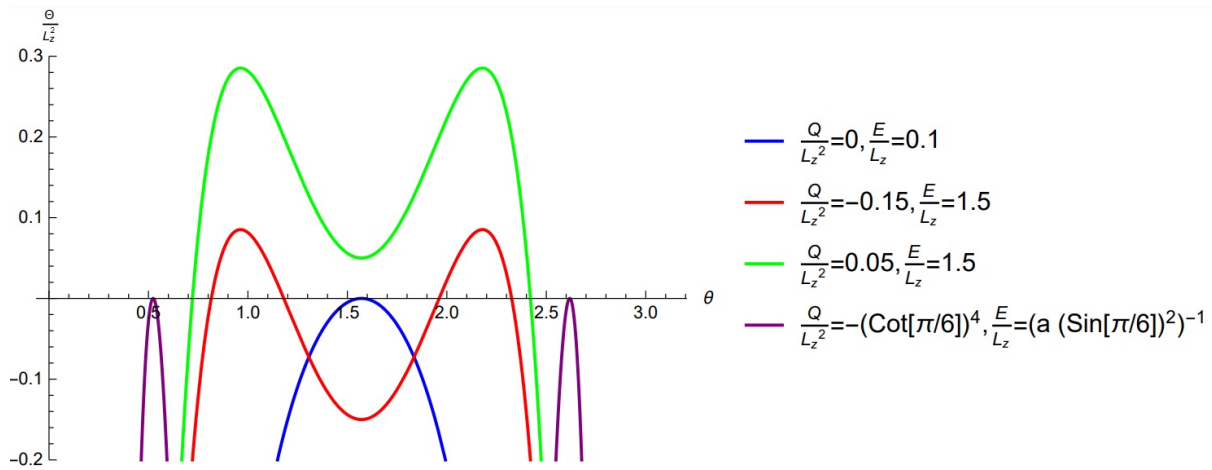


Figura 4.3: Función $\Theta(\theta)/L_z^2$ representada para cuatro valores distintos de los parámetros E/L_z y Q/L_z^2 . Todas las gráficas toman el siguiente parámetro de Kerr: $a = 0,99$.

Esta gráfica nos muestra cuatro formas posibles que puede tomar la función $\Theta(\theta)$ para distintas geodésicas. Podemos ver que excepto en el caso $Q = 0$, donde solo hay un máximo alrededor de $\pi/2$, la función $\Theta(\theta)$ se caracteriza por tener un mínimo en $\theta = \pi/2$ y dos máximos y ser simétrica a ambos lados del eje $\theta = \pi/2$.

Con esta gráfica podemos confirmar el análisis de la ecuación (4.25) explicado en los párrafos anteriores. Como hemos comentado, $\Theta(\theta) \geq 0$, por lo tanto vemos que una geodésica con $Q = 0$ solo se puede mover en el plano $\theta = \pi/2$. Sin embargo, si $Q > 0$ vemos que la geodésica puede variar su ángulo θ entre un máximo y un mínimo alrededor de $\theta_{eq} = \pi/2$. Mientras que si $Q < 0$ hay dos sectores independientes en los que se puede desplazar la geodésica sin alcanzar nunca $\theta = \pi/2$. Finalmente, hemos graficado unos valores específicos de $\frac{Q}{L_z^2}$ y E/L_z para los cuales se cumple que la geodésica está atrapada en los planos definidos por $\theta = \pi/6$ y $\theta = 5\pi/6$.

Capítulo 5

Región de Fotones Atrapados

La región de fotones atrapados es una zona en el exterior de un agujero negro que nos ayuda a determinar la trayectoria de ciertas geodésicas especiales. Esta zona se caracteriza por contener geodésicas que están confinadas en la coordenada radial. Podrían existir dos posibilidades: la primera de ellas sería que se tratara de geodésicas luminosas esféricas, es decir, que se mantengan con coordenada radial r constante, o lo que es lo mismo $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$. La segunda posibilidad sería que su movimiento radial fuera entre dos puntos de retorno. Vemos en las gráficas 4.1a y 4.1b de los pseudo potenciales V_{\pm} que esta posibilidad no puede darse. Por lo tanto, las geodésicas luminosas esféricas atrapadas cumplirán las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} R(r) &= (aL_z - (r^2 + a^2)E)^2 - \Delta(Q + (L_z - aE)^2) = 0, \\ R'(r) &= -4Er(aL_z - (r^2 + a^2)E) - 2(r - M)(Q + (L_z - aE)^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

5.1. Cálculo de los parámetros atrapados: ε_{trap} y $Q_{L,trap}$

Para entender la región de fotones atrapados, obtenemos expresiones para los parámetros E y Q . Se puede leer una discusión detallada sobre las geodésicas atrapadas usando estos parámetros en [13]. Para obtener dichas expresiones, pasamos los segundos sumandos al otro lado de las ecuaciones y dividimos la primera entre la segunda. Tras estas operaciones, obtenemos la siguiente igualdad:

$$-\frac{aL_z - (r^2 + a^2)E}{4Er} = \frac{\Delta}{2(r - M)}.$$

A continuación, definimos los parámetros $\varepsilon = E/L_z$ y $Q_L = Q/L_z^2$ y obtenemos unas ecuaciones para el valor que toman estos parámetros en las geodésicas esféricas. Para empezar, escribimos el lado izquierdo de la ecuación con el parámetro ε gracias a la energía E del denominador. Después despejamos ε y obtenemos el siguiente resultado:

$$\varepsilon_{trap} = -\frac{a(r - M)}{r^3 - 3Mr^2 + a^2(r + M)} = -\frac{a(r - M)}{A(r)}, \quad (5.2)$$

donde se ha definido $A(r)$ mediante la segunda igualdad. La segunda ecuación (5.1) $R'(r) = 0$, se puede reescribir en términos de los parámetros Q_L y ε , de la siguiente manera:

$$-4r\varepsilon_{trap}(a - (r^2 + a^2)\varepsilon_{trap}) = 2(r - M)(Q_{L,trap} + (1 - a\varepsilon_{trap})^2).$$

Para proseguir, despejamos Q_L de dicha ecuación, separamos los sumandos proporcionales a ε_{trap} y posteriormente sustituimos el valor encontrado de ε_{trap} en la ecuación (5.2). Obtenemos el siguiente resultado:

$$Q_{L,trap} = \frac{2a^2r(r^2 + a^2)(r - M) - a^4(r - M)^2 + 2a^2MA(r) - A^2(r)}{A^2(r)}.$$

Finalmente, operando el numerador de la fracción y desarrollando el polinomio $A(r)$ definido en la ecuación (5.2), se puede escribir este numerador como otro polinomio distinto en función de la coordenada r , de la siguiente manera:

$$Q_{L,trap} = -\frac{r^3(r^3 + 9M^2r - 6Mr^2 - 4Ma^2)}{A^2(r)} = -\frac{r^3B(r)}{A^2(r)}, \quad (5.3)$$

donde hemos definido el polinomio $B(r)$ mediante la segunda igualdad. Observamos que los parámetros ε_{trap} y $Q_{L,trap}$ quedan completamente caracterizados por los dos polinomios $A(r)$ y $B(r)$, los cuales son funciones de hasta orden tres en r . Por lo tanto, para analizar estos parámetros y su relevancia buscaremos una factorización de ambos polinomios, de manera que cumplan lo siguiente:

$$\begin{aligned} B(r) &= r^3(r^3 + 9M^2r - 6Mr^2 - 4Ma^2) = (r - r_1)(r - r_2)r^3P_1(r), \\ A(r) &= r^3 - 3Mr^2 + a^2(r + M) = (r - r_3)P_2(r), \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $P_s(r)$ hacen referencia a dos polinomios de orden s . Estos polinomios no nos serán de importancia porque serán siempre positivos para $r > r_+$. Por lo tanto, nos centraremos en calcular los radios r_1 , r_2 y r_3 para poder así interpretar su repercusión para las trayectorias de distintas geodésicas.

5.1.1. Cálculo de los Radios en la Región Atrapada

El cálculo de estos radios se basa en los resultados obtenidos en [13], pero el propio desarrollo para su obtención no aparece en dicho artículo. En primer lugar, obtenemos r_1 y r_2 , por lo que calcularemos las raíces de $B(r)$. Para obtener esta solución recurrimos al siguiente “Ansatz” (que nos simplificará el cálculo gracias a igualdades trigonométricas):

$$r = c + d \cos y. \quad (5.5)$$

Sustituimos este “Ansatz” directamente en el polinomio $B(r)$ (5.4) y lo escribimos en potencias de $\cos y$, de la siguiente manera:

$$B(r) = d^3 \cos^3 y + (3c - 6M)d^2 \cos^2 y + (9M^2 - 12cM + 3c^2)d \cos y + 9cM^2 - 6c^2M - 4a^2M + c^3.$$

Puesto que podemos elegir las constantes del “Ansatz”, vemos que esta ecuación se simplifica notablemente si tomamos el valor de la constante c como $c = 2M$, puesto que se elimina el término proporcional a $\cos^2 y$. Tras realizar esta simplificación, obtenemos:

$$B(r) = d(d^2 \cos^3 y - 3M^2 \cos y) + 2M(M^2 - 2a^2).$$

A continuación, podemos tomar un valor también para la constante d , en este caso $d = 2M$. Por lo tanto, sacamos $2M$ como factor común y utilizamos la siguiente relación trigonométrica:

$$\cos 3y = 4 \cos^3 y - 3 \cos y, \quad (5.6)$$

de forma que el polinomio $B(r)$ toma la siguiente forma:

$$B(r) = 2M^3 \left(\cos 3y + 1 - 2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 \right). \quad (5.7)$$

Puesto que nos interesa obtener las distintas raíces del polinomio, igualamos $B(r) = 0$ y despejamos la variable y . Debemos tener en cuenta todas las posibles soluciones para $\cos y$, por lo que en general las raíces del polinomio serán:

$$y_n = \frac{1}{3} \arccos \left(2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 - 1 \right) + \frac{2}{3} \pi n. \quad (5.8)$$

Notemos que estas soluciones son reales si y solo si el término entre paréntesis toma valores entre -1 y 1 , o lo que es lo mismo, cuando $|a/M| \leq 1$. Este es el caso que corresponde a un agujero negro, que es en el que estamos interesados. Así pues, nos restringimos a partir de ahora al caso $|a| \leq M$.

Finalmente, introducimos esta solución de nuevo en el “Ansatz” de la ecuación (5.5) y obtenemos lo que estábamos buscando, las raíces para la variable r . Al ser un polinomio de orden tres existen tres soluciones independientes. Como y es el argumento de una función trigonométrica sabemos que cumple: $y_3 = y_0 + 2\pi$. Por lo tanto, y_3 e y_0 hacen referencia a la misma solución. Las soluciones r_1 y r_2 son las que hacen referencia a y_0 e y_{-1} . La otra solución independiente (y_1), que aparecerá en el polinomio $P_1(r)$, da lugar a un radio $r < r_+$, por lo que está dentro del horizonte de eventos y fuera del dominio de las coordenadas de Boyer-Lindquist. Las soluciones r_1 y r_2 toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2M(1 + \cos y_0) = 2M \left[1 + \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 - 1 \right) \right) \right], \\ r_2 &= 2M(1 + \cos y_{-1}) = 2M \left[1 + \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 - 1 \right) - \frac{2}{3} \pi \right) \right]. \end{aligned}$$

Podemos simplificar estas expresiones mediante la siguiente identidad trigonométrica:

$$\arccos x = \frac{1}{2} \arccos(2x^2 - 1). \quad (5.9)$$

Aplicándolo en el caso anterior, donde tomamos $x = a/M$ podemos simplificar ambas soluciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2M \left[1 + \cos \left(\frac{2}{3} \arccos \left(\frac{a}{M} \right) \right) \right], \\ r_2 &= 2M \left[1 + \cos \left(\frac{2}{3} \arccos \left(-\frac{a}{M} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Además, para simplificar r_2 también se ha utilizado que $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ y $\cos(x) = \cos(-x)$. Observamos que estas soluciones solo se diferencian en el signo que acompaña al parámetro a dentro del arccoseno.

A continuación, buscamos el valor de r_3 , para ello necesitamos encontrar la raíz del polinomio $A(r)$ definido en (5.2) que cumpla $r_3 > r_+$. Al igual que antes, suponemos un

“Ansatz” que tome la forma $r = c + d \cos y$, y tras introducirlo en la definición de $A(r)$ (5.4) obtenemos:

$$A(r) = d^3 \cos^3 y + (3c - 3M)d^2 \cos^2 y + (3c^2 - 6Mc + a^2)d \cos y + c^3 - 3Mc^2 + a^2c + a^2M.$$

En este caso conviene tomar el valor de la constante $c = M$ para así eliminar el término proporcional a $\cos^2 y$. Tras esta simplificación, reescribimos el polinomio como:

$$A(r) = d(d^2 \cos^3 y + (a^2 - 3M^2) \cos y) - 2M(a^2 - M^2).$$

Encontramos a continuación una relación para la constante d , de manera que se pueda volver a utilizar la relación trigonométrica (5.6) para el ángulo triple. Para poder utilizar dicha relación de nuevo, se debe cumplir:

$$d^2 = \frac{4}{3}(3M^2 - a^2) \implies d = 2\sqrt{M^2 - \frac{a^2}{3}}. \quad (5.11)$$

Notemos que en el caso $|a| \leq M$ la raíz cuadrada es real y positiva. Con este valor para d y aplicando la relación trigonométrica, reescribimos $A(r)$ de la siguiente forma:

$$A(r) = \frac{d(3M^2 - a^2)}{3} \cos(3y) - 2M(a^2 - M^2).$$

Volviendo a repetir el mismo procedimiento que antes, igualamos $A(r) = 0$ para encontrar las raíces posibles para la variable y :

$$y_n = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{M(a^2 - M^2)}{(M^2 - \frac{a^2}{3})^{3/2}} \right) + \frac{2}{3} \pi n.$$

En este caso solo nos interesará la solución y_0 , puesto que tanto y_1 como y_{-1} dan lugar a radios menores o iguales que el horizonte de eventos. Reescribimos el “Ansatz” inicial (5.5) para la solución y_0 como:

$$r_3 = M + 2\sqrt{M^2 - \frac{a^2}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{M(a^2 - M^2)}{(M^2 - \frac{a^2}{3})^{3/2}} \right) \right). \quad (5.12)$$

De este modo, hemos obtenido las tres soluciones que buscábamos: r_1 , r_2 y r_3 . Vemos en el gráfico (5.1) que se cumplen las siguientes desigualdades en el caso $a < M$:

$$M < r_+ < r_1 < r_3 < r_2 < 4M.$$

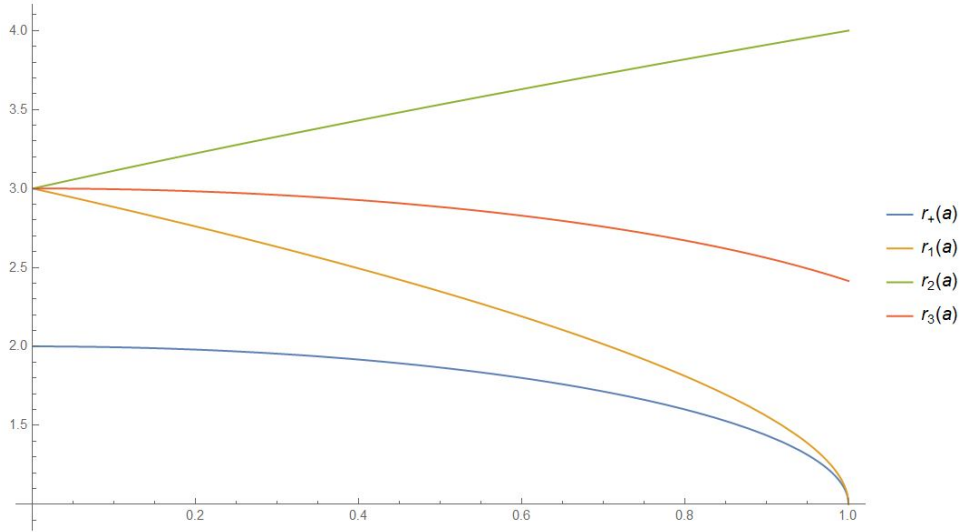


Figura 5.1: Representación de r_+ , r_1 , r_2 y r_3 en función del parámetro de Kerr a .

A continuación, interpretamos el sentido físico de los radios r_1 , r_2 y r_3 obtenidos en el apartado anterior. Comenzamos observando que las órbitas que mantienen la coordenada radial constante son solo posibles en el intervalo $[r_1, r_2]$, porque fuera de este intervalo $Q < 0$, como vemos en la ecuación (5.3). Se demostró en el capítulo anterior que las geodésicas con $Q < 0$ caen al agujero negro y por tanto, los fotones no pueden quedarse atrapados. Los límites de este intervalo corresponden a geodésicas circulares en el plano ecuatorial con $Q = 0$, como podemos ver directamente en (5.3) y (5.4). Además, observamos en las mismas ecuaciones que el radio r_3 corresponde a geodésicas atrapadas con $L_z = 0$, por lo que las funciones ε_{trap} y $Q_{L,trap}$ tienden a infinito. Inferimos también que la función ε_{trap} cambia de signo en r_3 . Como $M < r_1, r_2, r_3$, la función ε_{trap} tomará valores positivos en el intervalo $[r_1, r_3]$ y negativos en el intervalo $(r_3, r_2]$.

5.2. Cálculo de los parámetros atrapados, $K_{E,trap}$ y $L_{E,trap}$

Hemos obtenido la región de fotones atrapados para los parámetros Q_L y ε , que nos han servido para analizar los radios r_1 , r_2 y r_3 y su relevancia. Sin embargo, para calcular las ecuaciones de la sombra de un agujero negro, nos serán más útiles unas relaciones en función de los siguientes parámetros: $K_E = K/E^2$ y $L_E = L/E = \varepsilon^{-1}$. Para una descripción detallada sobre la región atrapada utilizando estos parámetros se puede leer [7]. Podemos obtener estos parámetros directamente desde las relaciones (5.3) y (5.2), no obstante para conseguir una ecuación para los parámetros K_E y L_E más rápidamente volvemos a las ecuaciones (5.1). Utilizamos la relación (4.7) y las dividimos entre E^2 para dejarlas en función de K_E y L_E :

$$\begin{aligned} (aL_E - (r^2 + a^2))^2 &= \Delta K_E, \\ -2r(aL_E - (r^2 + a^2)) &= (r - M)K_E. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dividimos ahora la primera ecuación entre la segunda para despejar L_E , de tal manera que obtenemos:

$$aL_{E,trap} = r^2 + a^2 - \frac{2r\Delta}{r-M}. \quad (5.14)$$

Sustituimos esta igualdad para L_E en la segunda de las ecuaciones (5.13) y despejamos el parámetro K_E . Esta relación se escribe como:

$$K_{E,trap} = \frac{4r^2\Delta}{(r-M)^2}. \quad (5.15)$$

Podemos volver a utilizar la desigualdad $\Theta(\theta) \geq 0$ para hallar la región de fotones atrapados en función de estos parámetros. Para ello, utilizamos la primera de las ecuaciones (4.6), como sabemos que $p_\theta^2 = \Theta(\theta) \geq 0$, con lo que tras dividir por E^2 llegamos a la siguiente desigualdad:

$$K_E + \left(a \sin \theta - \frac{L_E}{\sin \theta}\right) \geq 0. \quad (5.16)$$

Además, si sustituimos los valores $K_{E,trap}$ y $L_{E,trap}$ se puede obtener una expresión para la región de fotones atrapados. Tras una substitución directa obtenemos:

$$\frac{4r^2\Delta}{(r_M)^2} - \left(a \sin \theta - \frac{r^2 + a^2 - \frac{2r\Delta}{r-M}}{a \sin \theta}\right) = \frac{4r^2\Delta}{(r_M)^2} - \frac{-\rho^2 + \frac{2r\Delta}{r-M}}{a^2 \sin^2 \theta} \geq 0.$$

Finalmente, eliminamos los denominadores y pasamos el segundo sumando al otro lado de la desigualdad para obtener:

$$(2r\Delta - \rho^2(r-M))^2 \leq 4r^2\Delta a^2 \sin^2 \theta. \quad (5.17)$$

Esta desigualdad es la que nos determina el tamaño de la región de fotones atrapados en función del ángulo θ .

Capítulo 6

Sombra del Agujero Negro

Después del análisis de las geodésicas luminosas, podemos obtener finalmente la forma que toma la sombra de un agujero negro de Kerr. Al observar un agujero negro (por ejemplo mediante el *Event Horizon Telescope* no observamos su horizonte de eventos ni su esfera de fotones sino que distinguimos su sombra, la cual depende de la posición de nuestro observador. Nos podemos imaginar físicamente la sombra como el límite que separa los fotones que pasan cerca del agujero negro y llegan a nuestro observador de los fotones que caen al horizonte de eventos.

6.1. Cálculo de la Sombra

Para este cálculo hemos seguido el procedimiento de [7] y de [8], que se pueden encontrar en conjunto en [15]. Sin embargo, entraremos en mayor detalle de cara a los cálculos.

Dado un observador situado en las coordenadas (r_0, θ_0) en el sistema de Boyer-Lindquist (las coordenadas t_0 y ϕ_0 son irrelevantes por las simetrías), podemos calcular la sombra del agujero negro que observa. Consideramos rayos de luz que sean emitidos desde la posición del observador hacia el pasado. Existen dos tipos de órbitas, las que caen al horizonte de eventos del agujero negro y las que no. El límite entre ambas órbitas está dado por geodésicas que se acercan asintóticamente a una de las órbitas esféricas inestables.

Para calcular este límite se considera una tétrada ortonormal situada en el observador de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e_0 &= \left. \frac{(r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\phi}{\sqrt{\rho^2\Delta}} \right|_{(r_0, \theta_0)}, \\ e_1 &= \left. \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\partial_\theta \right|_{(r_0, \theta_0)}, \\ e_2 &= \left. \frac{-(\partial_\phi + a\sin^2\theta\partial_t)}{\sqrt{\rho^2}\sin\theta} \right|_{(r_0, \theta_0)}, \\ e_3 &= \left. -\sqrt{\frac{\Delta}{\rho}}\partial_r \right|_{(r_0, \theta_0)}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

representamos gráficamente esta tétrada en la siguiente figura 6.1.

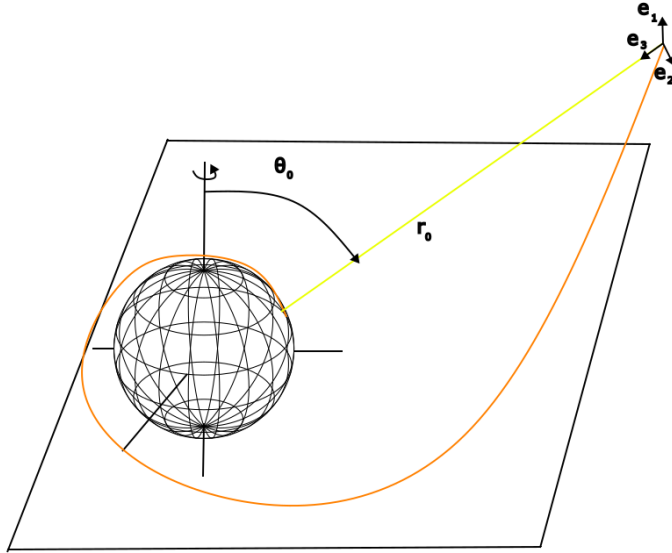


Figura 6.1: Representación gráfica de los vectores que conforman la tetrada ortonormal para un observador en el punto (r_0, θ_0) definida en (6.1).

Interpretamos el vector temporal e_0 como la cuatrivelocidad de nuestro observador. Además, observamos que los vectores $e_0 \pm e_3$ son tangentes a las direcciones principales definidas en (3.8):

$$e_0 \pm e_3 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 \Delta}} ((r^2 + a^2) \partial_t \mp \Delta \partial_r + a \partial_\phi) \propto l_{\mp}.$$

Por lo tanto, para un observador con cuatrivelocidad e_0 , el vector e_3 da la dirección espacial hacia el centro del agujero negro, tal y como se representa en la figura 6.1. A continuación, consideramos que para cada geodésica luminosa que llega al observador podemos descomponer el vector tangente a la trayectoria en ese punto como:

$$\dot{\gamma} = \alpha (-e_0 + \sin \beta \cos \psi e_1 + \sin \beta \sin \psi e_2 + \cos \beta e_3). \quad (6.2)$$

La geodésica radial al centro del agujero negro corresponde a tomar $\beta = 0$, puesto que entonces $\dot{\gamma} = \alpha (-e_0 + e_3)$. Además, como sabemos, también podemos escribir el vector tangente en general en las coordenadas de Boyer-Lindquist como: $\dot{\gamma} = \dot{t} \partial_t + \dot{r} \partial_r + \dot{\phi} \partial_\phi + \dot{\theta} \partial_\theta$, por lo tanto, podemos determinar el factor global α de la siguiente manera:

$$\alpha = g(\dot{\gamma}, e_0) = \dot{\gamma}_\mu e_0^\mu = \left. \frac{-(r^2 + a^2)E + aL_z}{\sqrt{\rho^2 \Delta}} \right|_{(r_0, \theta_0)}. \quad (6.3)$$

A continuación, podemos sustituir directamente los valores de la tetrada (6.1) en el vector tangente (6.2) para compararlos con el vector tangente general en Boyer-Lindquist y obtener ecuaciones para los ángulos ψ y β . Centrándonos en el valor proporcional a \dot{r} , podemos despejar $\cos \beta$ de la siguiente manera:

$$\cos \beta = -\frac{\sqrt{\rho^2} \dot{r}}{\sqrt{\Delta} \alpha} = \frac{\rho^2 \dot{r}}{(r^2 + a^2)E - aL_z} \quad (6.4)$$

Siguiendo el mismo procedimiento pero comparando el valor proporcional a $\dot{\phi}$ para despejar $\sin \psi$, se obtiene:

$$\sin \psi = \frac{\sin \theta}{\sin \beta} \left(\frac{\rho^2 \sqrt{\Delta} \dot{\phi}}{E(r^2 + a^2) - aL_z} - \frac{a}{\sqrt{\Delta}} \right). \quad (6.5)$$

A continuación, podemos substituir los valores para \dot{r} y $\dot{\phi}$, (4.12) y (4.11), en las ecuaciones (6.4) y (6.5) respectivamente. Comenzamos con (6.4), tras substituir \dot{r} obtenemos:

$$\cos \beta = \sqrt{a - \frac{\Delta K}{((r^2 + a^2)E - aL_z)^2}}.$$

Esta expresión toma una forma más sencilla si usamos $\sin \beta$ en lugar de $\cos \beta$. Notemos que por definición, $\beta \in [0, \pi]$, por lo que $\sin \beta$ es necesariamente positivo (o cero). Utilizando la relación trigonométrica $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ llegamos a:

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{\Delta K}}{r^2 + a^2} E - aL_z = \frac{\sqrt{\Delta K_E}}{r^2 + a^2 - aL_E} \Big|_{(r_0, \theta_0)}. \quad (6.6)$$

Para obtener una relación parecida para $\sin \psi$ sacamos $1/\sqrt{\Delta}$ factor común y al igual que antes sustituimos directamente $\dot{\phi}$, con lo que nos queda:

$$\sin \psi = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\Delta} \sin \beta} \left(\frac{2MraE + L_z \frac{\rho^2 - 2Mr}{\sin^2 \theta}}{r^2 + a^2} E - aL_z \right).$$

Desarrollando el paréntesis de la ecuación se puede simplificar utilizando la definición de Δ y nos queda:

$$\sin \psi = \sqrt{\Delta} \frac{L_z - a \sin^2 \theta}{\sin \beta \sin \theta ((r^2 + a^2)E - aL_z)}.$$

Finalmente, sustituimos el valor obtenido para $\sin \beta$ en (6.6) en esta ecuación y obtenemos el resultado:

$$\sin \psi = \frac{L_E - a \sin^2 \theta}{\sqrt{K_E} \sin \theta} \Big|_{(r_0, \theta_0)}. \quad (6.7)$$

Nos interesa conocer la curva límite que forma la sombra del agujero negro. Este límite corresponde a las trayectorias luminosas que se aproximan asintóticamente a las geodésicas esféricas luminosas. Por lo tanto, las constantes del movimiento de este rayo de luz serán las calculadas para las geodésicas esféricas, (5.14) y (5.15), evaluadas para una coordenada radial r_p . Dicho radio es el límite de las geodésicas luminosas esféricas. Por lo que para calcular la sombra debemos substituir por las constantes $L_E|_{r_p}$ y $K_E|_{r_p}$, con lo que se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{2r_p \sqrt{\Delta_0 \Delta_p}}{(r_0^2 - r_p^2)(r_p - M) + 2r_p \Delta_p}, \\ \sin \psi &= \frac{(r_p - M)(r_p^2 + a^2 \cos^2 \theta_0) - 2r_p \Delta_p}{2r_p \sqrt{\Delta_p} a \sin \theta_0}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde hemos denotado como Δ_0 y Δ_p a los valores que toma la función Δ en r_0 y r_p respectivamente. Primero, observamos que el punto (ψ, β) tienen las mismas constantes L_E y K_E que el punto $(\pi - \psi, \beta)$, por lo tanto, inferimos que la sombra es simétrica respecto al eje horizontal.

Podemos continuar el análisis de estas expresiones observando que β toma su valor máximo en el límite $\psi = -\pi/2$ y su valor mínimo cuando $\psi = \pi/2$ (si $a > 0$). Esto se ve

rápida de la ecuación (6.5), ya que podemos despejar β en función de ψ y después calcular su derivada de la siguiente manera:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{f(r, \theta)}{\sin \psi}\right) \implies \frac{\partial \beta}{\partial \psi} = -\frac{f(r, \theta) \cos \psi}{\sin \psi \sqrt{\sin^2 \psi - f^2(r, \theta)}}.$$

Vemos que β es un máximo o mínimo cuando $\cos \psi = 0$, o lo que es equivalente, $\sin \psi = \pm 1$. Obtenemos los valores que toma r_p en estos puntos, a los que denominaremos r_{max} y r_{min} , al sustituir $\sin \psi = \pm 1$ en la primera de las ecuaciones (6.8). Los valores $r_{max/min}$ quedan determinados por la siguiente ecuación:

$$(r_p - M)\rho^2(r_p, \theta_0) - 2r_p\Delta_p = \pm 2r_p\sqrt{\Delta_p}a \sin \theta_0.$$

Recordando la desigualdad (5.17) vemos que r_{max} y r_{min} son los radios en los que el límite exterior de la región de fotones atrapados intersecciona con el cono definido por $\theta = \theta_0$.

Hemos obtenido expresiones para la sombra de un agujero negro, pero para graficarla utilizaremos la proyección estereográfica de la esfera celeste (parametrizada mediante las coordenadas (ψ, β)) a un plano cartesiano (parametrizada mediante coordenadas cartesianas, (x, y)). Se puede ver una representación de la proyección estereográfica en la figura 6.2. Las coordenadas cartesianas se pueden obtener de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x(r_p) &= -2 \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin \psi, \\ y(r_p) &= -2 \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos \psi, \end{aligned} \tag{6.9}$$

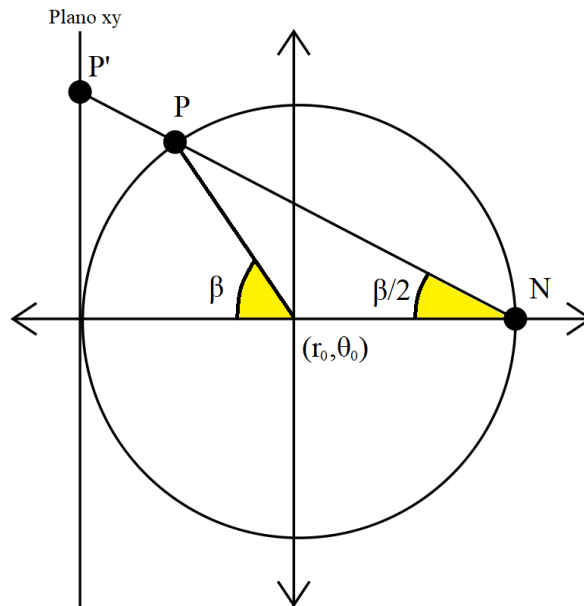


Figura 6.2: Representación gráfica de la proyección estereográfica utilizada para representar la sombra de un agujero negro en un plano cartesiano. Esta imagen nos define las relaciones (6.9).

6.2. Forma de la Sombra en Función del Parámetro de Kerr a

Finalmente, podemos utilizar las expresiones obtenidas al sustituir las fórmulas (6.8) en la proyección estereográfica definida en (6.9) para observar qué forma toma la sombra de un agujero negro de Kerr. Para representar las gráficas, hemos creado un pequeño código en Wolfram Mathematica, el cual dibuja una gráfica para la mitad superior de la curva de la sombra ($\pi/2 \leq \psi(r_p) \leq 3\pi/2$) y otra para la mitad inferior ($-\pi/2 \leq \psi(r_p) \leq \pi/2$), además, observamos que una es el espejo de la otra. Representamos las gráficas variando el parámetro r_p desde $r_{p,min}$ hasta $r_{p,max}$.

Mostraremos primero unos ejemplos en los que observamos en la figura 6.3 como varía la forma de la sombra al modificar el valor del parámetro de Kerr a .

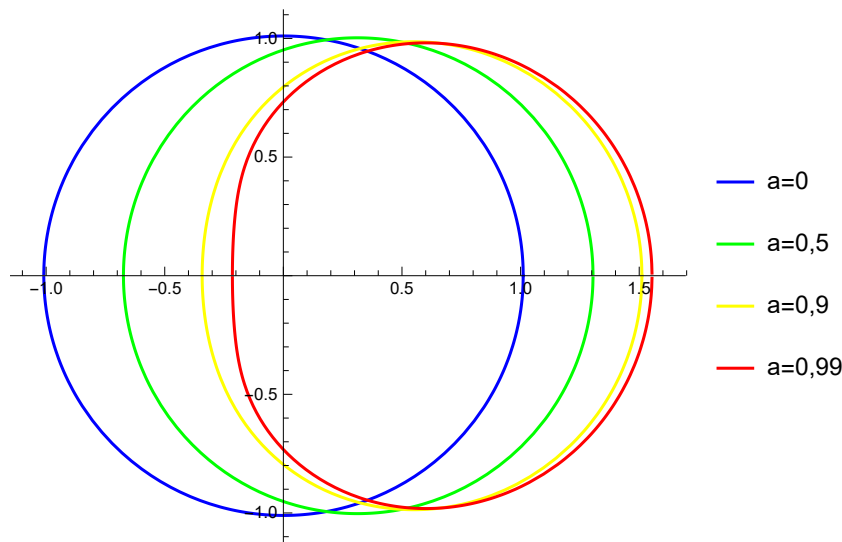


Figura 6.3: Sombra de un agujero negro para cuatro valores diferentes del parámetro a ($a \approx 0$, $a = 0,5M$, $a = 0,9M$, $a = 0,99M$). Hemos colocado al observador en $r_0 = 5M$ y $\theta = \pi/2$ y hemos tomado unidades $M = 1$.

En esta imagen, podemos ver que la sombra de un agujero negro de Schwarzschild es completamente simétrica, mientras que en el caso de Kerr pierde la simetría y se deforma, tomando una forma de “D” invertida. Esto es una consecuencia directa del “Frame Dragging” explicado en el capítulo 3.5. Lo que ocurre es que los fotones co-rotantes $L_z > 0$ (si $a > 0$) se acercan al agujero negro por el lateral izquierdo mientras que los contra-rotantes lo hacen por el derecho. Como sabemos, los fotones contra-rotantes deben estar más cerca del agujero negro para poder quedarse atrapados que los fotones co-rotantes (como podemos observar en el análisis de los pseudo-potenciales en las gráficas 4.1a y 4.1b).

Por lo tanto, los fotones co-rotantes que observamos tienen más trayectorias que quedan atrapadas que los fotones contra-rotantes y por ello observamos que la sombra en la izquierda tiene una separación angular menor que en la derecha. Además, observamos que esta pérdida de simetría se hace más relevante cuando $a \approx M$. Finalmente, podemos observar que el mismo fenómeno pero en el sentido contrario ocurre cuando $a < 0$, tal y como se obtiene en la figura 6.4.

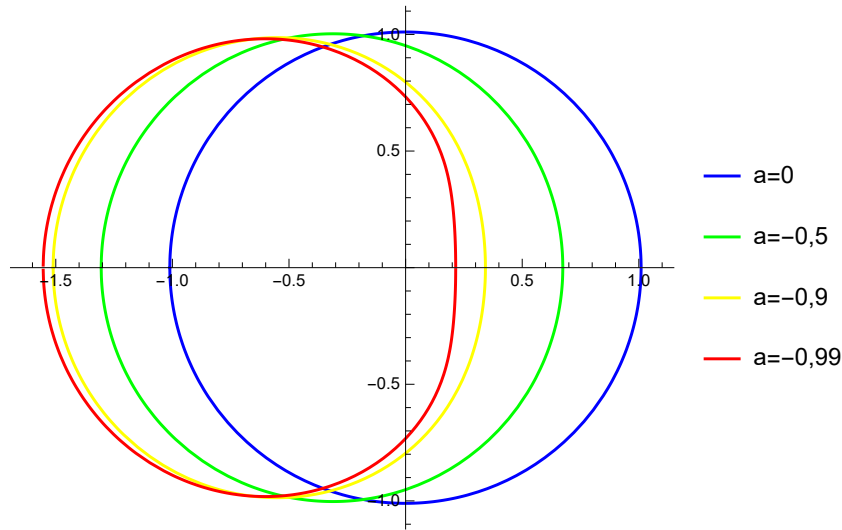


Figura 6.4: Sombra de un agujero negro para cuatro valores diferentes del parámetro a ($a \approx 0$, $a = -0,5M$, $a = -0,9M$, $a = -0,99M$). Hemos colocado al observador en $r_0 = 5M$ y $\theta = \pi/2$ y hemos tomado unidades $M = 1$.

6.3. Forma de la Sombra en Función de la Coordenada Angular θ_0

A continuación, observamos como cambia la forma de la sombra de un agujero negro de Kerr al modificar el ángulo del observador θ_0 .

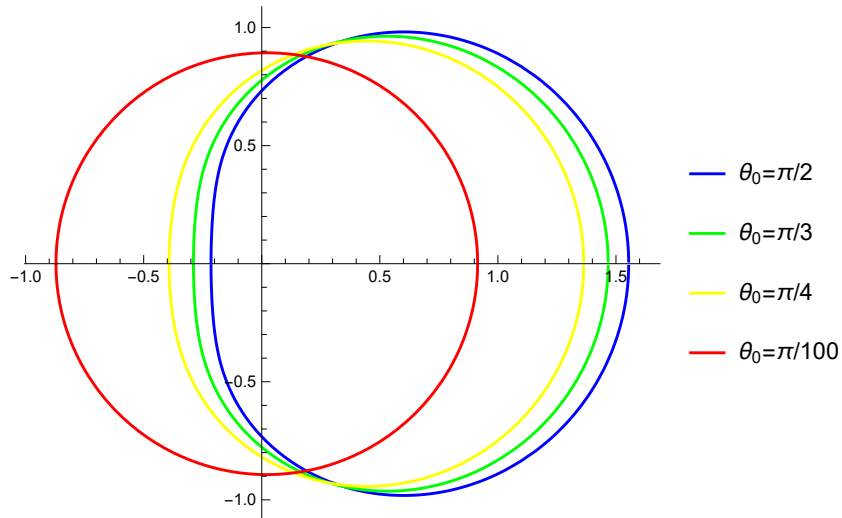


Figura 6.5: Sombra de un agujero negro para cuatro valores diferentes del ángulo del observador θ_0 ($\theta_0 = \pi/100$, $\theta_0 = \pi/4$, $\theta_0 = \pi/3$, $\theta_0 = \pi/2$). Hemos colocado al observador en $r_0 = 5M$ para un agujero negro con parámetro $a = 0,99$ y hemos tomado unidades $M = 1$.

En estas imágenes, notamos que la forma característica de la sombra de Kerr se observa en el plano $\theta_0 = \pi/2$ (donde la deformación de la sombra es máxima), mientras que al acercarnos al eje de rotación del agujero negro, $\theta_0 = 0$, la sombra se vuelve más y más esférica. Esto era de esperar ya que si observamos el agujero negro desde su eje de rotación no se diferenciaría de un agujero negro de Schwarzschild al no poder apreciarse la rotación.

6.3. FORMA DE LA SOMBRA EN FUNCIÓN DE LA COORDENADA ANGULAR θ_0 57

Remarcamos que en la figura 6.5 para el caso $\theta_0 \approx 0$ hemos utilizado $\theta_0 = \pi/100$ y no $\theta_0 = 0$ puesto que este eje es una singularidad de las coordenadas de Boyer-Lindquist.

Capítulo 7

Cálculo Numérico de Sombras. Backwards Ray-Tracing

Para finalizar, hemos creado un programa en Python que resuelve de manera general las ecuaciones de las geodésicas (2.14) en las cercanías de un agujero negro. Este código resuelve las trayectorias para fotones y nos sirve para visualizar la forma de la sombra de un agujero negro arbitrario. Utiliza un método conocido como Backwards Ray-Tracing.

Cuando observamos la sombra de un agujero negro vemos los fotones que fueron emitidos y que al seguir una trayectoria geodésica terminan impactando en nuestro observador. Sin embargo, esto requeriría resolver una gran cantidad de trayectorias que al no terminar en el observador no aportan datos. Para resolver este problema computacional se utiliza el método Backwards Ray-Tracing. Se basa en calcular las trayectorias de los fotones en sentido contrario, es decir, empezando en el observador y calculando como se desplazan por el espacio-tiempo. Esto se puede calcular mediante el cambio $\lambda \rightarrow -\lambda$ del parámetro de la curva en la ecuación (2.14). Utilizando este método se reduce el tiempo de computación y por lo tanto se obtienen resultados más detallados más rápidamente.

Se han creado otros muchos programas que simulan agujeros negros para poder obtener una imagen de su sombra. Se puede leer más sobre uno de ellos, que nos ha servido de esquema básico, GYOTO [17]. También, mencionar el código utilizando en la película Interestelar, que crea imágenes con gran detalle y velocidad [9]. En contrapartida a estos, nuestro código no aprovecha las soluciones analíticas de Kerr, para así poder aplicarlo a otras muchas métricas. Además, ha sido escrito en Python, ya que a pesar de ser más lento que C, nos permite hacer un código más simple y nos aprovechamos de distintos módulos para compensar esta velocidad. Se puede acceder al programa en Github en github.com/AlvaroC307/Black-Hole-Shadows.

7.1. Explicación Detallada del Programa en Python

Para comenzar, lo primero que hacemos en el programa es darle la métrica analítica que queramos observar. Tras esto, el propio programa se encarga de obtener la métrica inversa mediante la técnica LU, además, utilizando Sympy (un modulo de cálculo analítico de Python) se pueden hacer derivadas analíticas y obtener las expresiones para los símbolos de Christoffel. Posteriormente, se pueden introducir los datos necesarios para calcular la trayectoria de las geodésicas: las coordenadas del observador $(t_0, r_0, \phi_0, \theta_0)$, los parámetros del agujero negro (M, a, Q_e, \dots) , el número de píxeles (N_{pix}) y dos parámetros que explicaremos posteriormente: F_{screen} y r_{limit} .

Con todos estos datos podemos calcular el tamaño de la pantalla que observaremos. En primer lugar, obtenemos el tamaño de la sombra del agujero negro equivalente de Schwarzschild (misma masa M) y para ello utilizamos la siguiente fórmula:

$$L = F_{screen} r_0 \tan \alpha, \quad \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{27(\rho_0 - 1)}{4\rho_0^3}}, \quad (7.1)$$

donde α es el ángulo que tiene la sombra de un agujero negro de Schwarzschild y que transformamos a una longitud para nuestro observador con simple trigonometría. Además, hemos definido el parámetro dimensional $\rho_0 = \frac{r_0}{2M}$. Finalmente, se multiplica el radio de la sombra de Schwarzschild por un parámetro F_{screen} que simplemente nos indica el tamaño de la pantalla en relación al radio de la sombra calculado. Con el tamaño de la imagen obtenido, podemos dividir la pantalla en N_{pix}^2 píxeles y asignar a cada uno un cuatrimomento.

Conociendo el cuatrimomento para cada píxel y la posición del observador se pueden resolver numéricamente las ecuaciones de las geodésicas. Para ello, como ya hemos comentado, se realiza el cambio $\lambda \rightarrow -\lambda$ al parámetro de la curva en las ecuaciones (2.14). Las ecuaciones las resolvemos numéricamente mediante el método Runge Kutta de orden cuatro para ocho ecuaciones diferenciales de primer orden. Además, puesto que se necesitarán resolver gran cantidad de geodésicas el programa dispone de un paso adaptativo. Esta función disminuye el paso h cuando la coordenada radial disminuye, es decir, se resuelven las ecuaciones con más detalle cerca del agujero negro donde la curvatura es mayor. Lejos del mismo las condiciones son aproximadamente las de la métrica de Minkowski y se pueden resolver las ecuaciones con un paso h mayor. Se resuelven también las ecuaciones con más detalle cuando se está cerca del eje $\sin \theta = 0$, puesto que es una singularidad en las coordenadas utilizadas usualmente (Boyer-Lindquist).

A continuación, necesitamos determinar cuándo una geodésica cae al agujero negro o se dirige al infinito. Para ello consideramos que un fotón ha atravesado el horizonte de eventos de un agujero negro (y por tanto, ese píxel se representará con un color negro en la imagen) cuando una de sus coordenadas varíe en gran medida, ya que esa alta variación se debe a atravesar una “singularidad aparente” de las coordenadas. Además, hemos considerado que un fotón ha escapado del agujero negro y se dirige al infinito cuando la coordenada radial cumple $r > r_{limit}$ (y sigue aumentando), donde r_{limit} es un parámetro que delimita la superficie a partir de la cual se considera que el fotón ha escapado del agujero negro.

Destacamos también que el programa admite el cálculo de una única geodésica, escribiendo sus coordenadas y momentos en un fichero para poder analizar el movimiento de geodésicas en particular.

Finalmente comentar que podemos observar cómo se modifica una imagen situada en la esfera $r = r_{limit}$. Esta deformación se debe a la modificación de la geometría espacio-temporal causada por el agujero negro y nos permite por lo tanto visualizar gráficamente la propia deformación del espacio-tiempo. Para poder observarlo, el programa calcula la posición donde los fotones que han escapado del agujero negro impactan en la superficie $r = r_{limit}$. Podemos “colocar” una imagen en una esfera con este radio y calcular la posición en la que impacta el fotón en dicha esfera para determinar de donde procedería. En la figura A.1b mostramos un ejemplo donde vemos cómo se deforma la imagen de fondo por un agujero negro de Schwarzschild respecto a la imagen original en un espacio-tiempo

de Minkowski [A.1a](#).

Observamos que la deformación de la imagen cerca del límite de la sombra del agujero negro de Schwarzschild es mucho mayor, mientras que lejos de ella, los fotones siguen trayectorias prácticamente rectas. Podemos ver las geodésicas que pasan cerca del agujero negro y llegan al observador han sido extremadamente curvadas por el espacio-tiempo. Estas proceden de puntos completamente distintos de la esfera $r = r_{limit}$, incluso ciertas geodésicas podrían proceder de la misma dirección en la que está el observador.

En la imagen que utilizamos de fondo podemos ver que hemos añadido unas líneas de color marrón para diferenciar los cuatro cuadrantes de la esfera y para observar más fácilmente como se deforma la imagen. Hemos incluido también un círculo blanco justo enfrente del observador. Estos detalles han sido añadidos para poder visualizar mejor la deformación de la imagen de fondo y además, para evitar un cambio brusco entre los colores. Cabe destacar que si no añadiéramos el círculo o las líneas de color marrón observaríamos cambios repentinos de color debidos a la precisión finita del programa a la hora de determinar el punto exacto en el que impacta un fotón.

Debido a que el programa debe realizar una gran cantidad de cálculos, tarda bastante en poder resolver todas las geodésicas necesarias para obtener una imagen suficientemente nítida. Para minimizar todo lo posible estos problemas se ha utilizado un módulo de Python para realizar varios procesos simultáneos (“concurrent.futures”). El programa divide la imagen en función de los núcleos disponibles del ordenador y asigna un número de geodésicas a resolver a cada núcleo.

7.2. Sombra de Kerr y Comparación con la Teoría

Una vez hemos descrito las propiedades generales del programa nos centramos en describir sus resultados cuando se aplica a la métrica de Kerr. Así pues, una vez añadida la métrica de Kerr en el programa, el código calcula analíticamente sus símbolos de Christoffel y resuelve numéricamente las geodésicas necesarias para poder observar nítidamente la sombra del agujero negro. Todas las imágenes que mostraremos a continuación han sido obtenidas tomando la masa del agujero negro como $M = 1$.

En las figuras [A.2a](#), [A.2b](#), [A.2c](#) y [A.2d](#) podemos ver la sombra de un agujero negro de Kerr para cuatro parámetros a diferentes (con los mismos valores que en la figura [6.3](#)) y a un ángulo $\theta_0 = \pi/2$. Además, hemos utilizado de fondo la imagen [A.1a](#) para ver más claramente la deformación del espacio-tiempo a su alrededor. Podemos comparar las figuras obtenidas en el programa con las calculadas analíticamente para ver que la forma de la sombra para los distintos valores de a coincide claramente.

Además en estas imágenes observamos cómo se deforma el espacio-tiempo con un agujero negro de Kerr. Vemos como las geodésicas que enviamos por la izquierda del agujero negro parecen provenir desde la derecha del mismo. Esto se debe a que impactan con la esfera $r = r_{limit}$ en la misma dirección de la que provienen tras hacer media órbita alrededor del agujero negro. Observamos que conforme más aumenta el parámetro a más se deforma el espacio-tiempo y además, más fotones orbitan más veces alrededor del agujero negro. Esto se ve claramente en la figura [A.2d](#), ya que en el límite izquierdo de la sombra hay más cantidad de colores que parecen prácticamente aleatorios. Esta es se debe a que

estas geodésicas exhiben un comportamiento caótico, como explicaremos en detalle en la siguiente sección.

Para proseguir, calcularemos la forma de la sombra de un agujero negro con parámetro de Kerr $a = 0,99$ para distintos valores del ángulo θ_0 . Obtendremos la sombra para los valores $\theta_0 = \pi/3, \pi/4, \pi/10$ y así poder comparar el resultado del programa con la teoría representada en 6.5. Estos resultados se pueden ver en las figuras A.3a, A.3b, A.3c y A.3d. La imagen en la esfera $r = r_{limit}$ está colocada de las manera que el centro del círculo blanco se situó en $\theta = \pi/2$, por lo tanto en estos casos no está enfrente del observador. Debido a esto, la deformación de la imagen situada en $r = r_{limit}$ no es representativa y solo nos centraremos en la forma de la sombra para poder compararla con la teoría. Observamos rápidamente que el resultado del código coincide perfectamente con las gráficas obtenidas por métodos analíticos.

Las imágenes anteriores han sido obtenidas considerando que las geodésicas que no caen a la sombra son las que llegan a $r_{limit} = 10M$, pero también podemos comparar como varía la imagen de la sombra modificando este parámetro. Para ello, utilizamos el caso en el que observamos la forma de sombra más claramente, $a = 0,99, \theta_0 = \pi/2$. Podemos ver las figuras para dos valores diferentes del parámetro r_{limit} en A.4a y A.4b.

Observamos que, si consideramos un caso $r_{limit} \gg 10M$ como en la figura A.4b, existen más trayectorias que provienen de la misma dirección que en la que se encuentra nuestro observador (zona entre la circunferencia blanca y la sombra). Además, el grosor de la circunferencia blanca es mayor, por lo que inferimos que un mayor número de geodésicas acaban en el centro de la imagen A.1a cuando llegan a la esfera $r = r_{limit}$. Esto se debe a que las geodésicas, exceptuando las que pasan lejos del agujero negro, tienden al centro de la imagen después de ser desviadas. Por lo tanto, cuando $r_{limit} \gg 10M$ tienen más tiempo para llegar al círculo blanco que en el caso $r_{limit} = 10M$.

Puesto que los únicos datos que requiere el código son los valores de los parámetros y la métrica, en principio podemos comprobar qué ocurre si tomamos un valor $a > M$. Puede parecer poco intuitivo que una singularidad desnuda tenga una sombra, puesto que no hay ningún horizonte de eventos, ni nada que en principio limite a las geodésicas. Sin embargo, a pesar de que no haya horizonte de eventos, esto no significa que no pueda existir una región de fotones atrapados (que es la que define la sombra). De hecho, notemos que cuando hemos obtenido los parámetros atrapados para calcular la sombra $K_{E,trap}$ y $L_{E,trap}$, (5.14) y (5.15), no hemos impuesto $a \leq M$. Por lo tanto, en principio es posible que una singularidad desnuda tenga una sombra debido a las geodésicas atrapadas, orbitando alrededor de ella y no tenemos por qué descartar esta posibilidad. No obstante, la implementación que hemos hecho en el programa no sería adecuada para estudiar este problema. Esto se debe a que la forma en la que el programa detecta las geodésicas que caen dentro de la sombra es a través de la condición de que crucen el horizonte de eventos (cuando varía mucho una de las coordenadas, ya que esta superficie es una singularidad aparente en Boyer-Lindquist). Así pues un estudio de la sombra en el caso $a > M$, aunque factible, requeriría de una implementación que tuviera en cuenta las particularidades de este caso.

7.3. Comportamiento Caótico cerca del límite de la Sombra

Tras ver como se representa la sombra de un agujero negro mediante este código en Python, podemos analizar también el comportamiento de las geodésicas que pasan cerca de dicho límite. Para ello, primero introduciremos brevemente qué es un sistema caótico. Así podremos entender qué les ocurre a las geodésicas que pasan cerca del límite de la sombra.

Un sistema es determinista si las trayectorias están completamente determinadas por sus condiciones inicial. En particular, esto requiere que el sistema no esté sometido a ruido o contenga parámetros aleatorios. Un sistema determinista muestra un comportamiento caótico cuando sus trayectorias son aperiódicas y muestran una fuerte dependencia de las condiciones iniciales. Una trayectoria es aperiódica si al aumentar el tiempo no tiende a ningún punto fijo u órbita periódica. Finalmente, una trayectoria depende fuertemente de las condiciones iniciales si trayectorias infinitesimalmente cercanas se separan exponencialmente rápido y dan lugar a trayectorias completamente diferentes.

A priori podemos esperar que las geodésicas que pasan cerca del límite de la sombra de un agujero negro tengan una fuerte dependencia de las condiciones iniciales. Esto se debe a que, a pesar de tener un cuatrimomento inicial parecido, una geodésica que está cerca de alcanzar asintóticamente la esfera de fotones atrapados da muchas vueltas alrededor de un agujero negro. En consecuencia, esta trayectoria puede terminar en cualquiera de los cuatro cuadrantes de la esfera $r = r_{limit}$ debido únicamente a diferencias infinitesimales de la posición y/o el cuatrimomento iniciales.

Podemos observar mejor este comportamiento si hacemos zoom a la zona más afectada en las figuras de la sombra. Para ello, generaremos una imagen centrándonos en la zona central izquierda de la sombra con parámetros $a = 0,99$ y $\theta_0 = \pi/2$. Esta figura la podemos ver en [A.5](#).

Fijándonos en el límite en la sombra del agujero negro, podemos ver claramente que las geodésicas que nos llegan desde allí pueden parecer aleatorias. Esto se debe a que estas trayectorias orbitan varias veces alrededor del agujero negro, por lo que con una pequeña variación en el cuatrimomento inicial pueden terminar en cualquiera de los 4 cuadrantes de la esfera $r = r_{limit}$ o en el centro blanco de la misma.

Si tuviésemos una mayor capacidad computacional, ya sea con varios ordenadores o un programa en C (nuestro programa está escrito en Python que es algo más lento) se podrían analizar mejor estas zonas. De hecho, en el artículo [\[19\]](#) se estudia cómo la representación de estas zonas da lugar a figuras con forma de fractales, lo que claramente indica un comportamiento caótico.

7.4. Imágenes en la esfera $r = r_{limit}$

Este código tiene una función implementada para poder cambiar la imagen de fondo de la esfera $r = r_{limit}$. Hemos utilizado esta función para crear dos imágenes para un agujero negro de Kerr con parámetro $a = 0,99$ y ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$. Para estas imágenes hemos utilizado una foto de las Pleiades [A.6a](#) y otra de Cassiopeia [A.6c](#).

Podemos ver el resultado tras aplicar el código en las imágenes [A.6b](#) y [A.6d](#). Aunque no sean tan instructivas para analizar las trayectorias de distintas geodésicas como las imágenes anteriores, podemos llegar a ciertas conclusiones.

Para comenzar, estas imágenes nos muestran las dificultades que ocasionan objetos tan masivos como agujero negros en caso de que quisiéramos recuperar la imagen original. Además, estas imágenes se pueden utilizar en otros contextos que no requieran de un análisis preciso de las trayectorias de las geodésicas. Por ejemplo, se pueden utilizar con fines pedagógicos sobre agujeros negros y ciertas propiedades de los mismos o con fines artísticos, al igual que el programa creado para la película de *Interstellar* [\[9\]](#).

7.5. Espacios-Tiempos más Generales

Para finalizar, podemos escribir en el código métricas distintas a la métrica de Schwarzschild o Kerr. Un caso particularmente interesante es la métrica de Kerr-Newman. Este espacio-tiempo representa a un agujero negro con masa M , momento angular a y carga eléctrica Q_e . La métrica de Kerr-Newman tiene la forma siguiente [\[16\]](#):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q_e^2}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2(2Mr - Q_e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{(2Mr - Q_e^2)a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) d\phi^2, \quad (7.2)$$

donde hemos definido: $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 + a^2 + Q_e^2 - 2Mr$. Antes de ejecutar el programa calculamos analíticamente la localización del horizonte de eventos. Mediante cálculos análogos a los realizados para la métrica de Kerr en [3.7](#) obtenemos:

$$r_+ = M \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{M} \right)^2 - \left(\frac{Q_e}{M} \right)^2} \right]. \quad (7.3)$$

A partir de esta expresión para el horizonte de eventos, observamos que la métrica corresponde a un agujero negro y no a una singularidad desnuda siempre y cuando se satisfaga

$$M^2 \geq a^2 + Q_e^2. \quad (7.4)$$

Hemos obtenido la forma de la sombra para la métrica de Kerr-Newman utilizando el programa y hemos incluido una selección de los resultados en las figuras [A.7a](#), [A.7b](#) y [A.7c](#). En este caso todas las figuras están representadas con 100x100 píxeles en vez de 200x200. En la imagen [A.7a](#) observamos un agujero de Kerr-Newman donde el parámetro de Kerr tiene el mismo valor que la carga eléctrica (en unidades naturales). En contrapartida, la figura [A.7b](#) representa un agujero negro de Reissner-Nordström, en el que $a = 0$ y observamos como únicamente la carga eléctrica modifica la sombra. Finalmente, [A.7c](#) representa un agujero negro de Kerr-Newman, en la que la carga es poco relevante, esta imagen la podemos comparar directamente con la figura [A.2c](#).

Observamos en las figuras que la carga eléctrica no juega un papel determinante en la forma de la sombra, que queda fundamentalmente determinada por el parámetro a . Por lo tanto, el único efecto relevante que tiene Q_e en la métrica de Reissner-Nordström o Kerr-Newman para la sombra del agujero negro es en su tamaño. Fijándonos en detalle

en la figura [A.7b](#) y en la sombra de un agujero negro de Schwarzschild [A.2a](#), podemos ver que la sombra del agujero negro de Reissner-Nordström es ligeramente más pequeña que la sombra de Schwarzschild. En el caso general de Kerr-Newman ocurre exactamente lo mismo, las sombras con carga eléctrica son ligeramente más pequeñas que las sombras sin carga. Estas conclusiones se pueden obtener [\[6\]](#) mediante un cálculo analítico equivalente al que hemos realizado en los capítulos anteriores.

Capítulo 8

Conclusión

8.1. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado diversas propiedades de la métrica de Kerr. En primer lugar, hemos considerado aquellas propiedades que comparte con la métrica de Schwarzschild y otros agujeros negros estacionarios, como son el horizonte de eventos y de Cauchy, la posibilidad de extender la definición de la métrica más allá de estos horizontes y las constantes del movimiento E y L_z . Por otro lado, también hemos estudiado propiedades distintivas de la métrica de Kerr, como la singularidad del anillo y, en especial, la ergoesfera y el “Frame Dragging”.

Para continuar, hemos obtenido las ecuaciones de las geodésicas luminosas para esta métrica mediante el método de Hamilton-Jacobi. Una propiedad fundamental de la geometría de Kerr es que esta ecuación de Hamilton-Jacobi es separable. Esto implica que las ecuaciones de las geodésicas admiten una cuarta constante del movimiento, conocida como constante de Carter. Por lo tanto, el sistema es integrable lo cual permite analizar las trayectorias luminosas con mucho detalle.

Para terminar el trabajo teórico, hemos utilizado las ecuaciones del movimiento de las geodésicas luminosas para determinar la región en la que los fotones no pueden escapar. Hemos analizado distintas propiedades de esta región y las geodésicas especiales que la definen. Hemos determinado el borde de la sombra de un agujero negro gracias a la región de fotones atrapados y hemos obtenido las expresiones para representar la sombra. A continuación hemos usado la proyección estereográfica para visualizar cómo vería un observador situado en el punto (r_0, θ_0) un agujero negro de Kerr. Finalmente, hemos utilizado esta representación para analizar cómo varía la forma de la sombra al modificar el parámetro a o el ángulo de inclinación del observador θ_0 .

En la segunda parte del trabajo hemos desarrollado un código en Python para generar numéricamente una imagen de la sombra. Con ello hemos podido comparar las expresiones obtenidas teóricamente con los resultados numéricos. Nos hemos servido de este programa para comprobar las expresiones analíticas, para analizar visualmente el comportamiento de geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr y para comprobar la imagen que genera en función de distintos parámetros. Además, hemos utilizado este código para analizar el comportamiento caótico de geodésicas que pasan cerca del agujero negro. Finalmente, hemos generado imágenes para métricas distintas de la métrica de Schwarzschild o Kerr y hemos analizado su forma y consecuencias.

En conclusión, con este trabajo hemos visto como se desplazan los fotones alrededor de un agujero negro con momento angular y cuál es la imagen que se ve de un agujero negro desde la lejanía, por ejemplo desde la Tierra. Finalmente, mediante el programa podemos analizar rápidamente métricas diferentes a la métrica de Kerr para así hacernos una idea más visual del comportamiento de las mismas en función de distintos parámetros. Incluso hemos podido comprobar el resultado para métricas más complejas, en las que hemos podido observar de qué forma se deformarían las trayectorias de los rayos luminosos propagándose bajo la influencia del campo gravitatorio que describen.

8.2. Conclusions

In this work we have studied several properties of the Kerr metric. First, we have considered those properties that it shares with the Schwarzschild metric and other stationary black holes, such as the event and Cauchy horizons, the possibility of extending the definition of the metric beyond these horizons, and the constants of motion E and L_z . On the other hand, we have also studied distinctive properties of the Kerr metric, such as the ring singularity and, in particular, the ergosphere and “Frame Dragging”.

To continue, we have obtained the equations of the lightlike geodesics for this metric by the Hamilton-Jacobi method. A fundamental property of Kerr geometry is that this Hamilton-Jacobi equation is separable. This implies that the equations of the geodesics admit a fourth constant of motion, known as Carter’s constant. Therefore, the system is integrable which allows us to analyze the light trajectories in great detail.

To finish the theoretical work, we have used the equations of motion of lightlike geodesics to determine the region in which photons cannot escape. We have analyzed various properties of this region and the special geodesics that define it. We have determined the edge of the shadow of a black hole thanks to the region of trapped photons and we have obtained the expressions to represent the shadow. We have then used the stereographic projection to visualize how an observer at the point (r_0, θ_0) would see a Kerr black hole. Finally, we have used this representation to analyze how the shape of the shadow varies by changing the parameter a or the angle of inclination of the observer θ_0 .

In the second part of the work we have developed a Python code to numerically generate an image of the shadow. With it we have been able to compare the expressions obtained theoretically with the numerical results. We have used this program to check the analytical expressions, to visually analyze the behavior of geodesics in Kerr space-time and to check the image generated as a function of different parameters. In addition, we have used this code to analyze the chaotic behavior of geodesics passing close to the black hole. Finally, we have generated images for metrics other than the Schwarzschild or Kerr metric and analyzed their shape and consequences.

In conclusion, with this work we have seen how photons move around a black hole with angular momentum and what the image of a black hole looks like from a distance, for example from the Earth. Finally, using the program we can quickly analyze metrics other than the Kerr metric to get a more visual idea of their behavior as a function of different parameters. We have even been able to check the result for more complex metrics, in which we have been able to observe how the trajectories of the propagating light rays would be deformed under the influence of the gravitational field they describe.

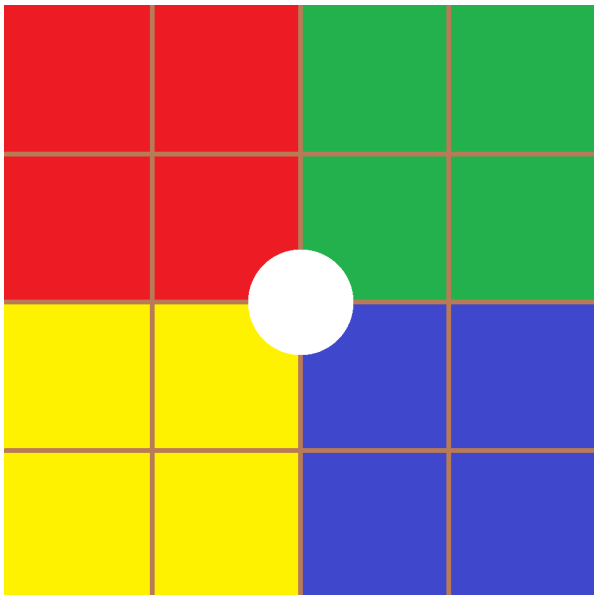
Bibliografía

- [1] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [2] Kazunori Akiyama, Antxon Alberdi, Walter Alef, et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole in the center of the Milky Way. *The Astrophysical Journal Letters*, 930(2):L12, 2022.
- [3] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [4] Brandon Carter. Global structure of the kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, 174(5):1559, 1968.
- [5] Event Horizon Telescope Collaboration et al. First M87 Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole. 2019.
- [6] Arne Grenzebach and Arne Grenzebach. *The Shadow of Black Holes*. Springer, 2016.
- [7] Arne Grenzebach, Volker Perlick, and Claus Lämmerzahl. Photon regions and shadows of Kerr-Newman-NUT black holes with a cosmological constant. *Physical Review D*, 89(12):124004, 2014.
- [8] Arne Grenzebach, Volker Perlick, and Claus Lämmerzahl. Photon regions and shadows of accelerated black holes. *International Journal of Modern Physics D*, 24(09):1542024, 2015.
- [9] Oliver James, Eugénie von Tunzelmann, Paul Franklin, and Kip S Thorne. Gravitational lensing by spinning black holes in astrophysics, and in the movie Interstellar. *Classical and Quantum Gravity*, 32(6):065001, 2015.
- [10] Roy P Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, 11(5):237, 1963.
- [11] Jutta Kunz. Introduction to black holes. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1263, page 012007. IOP Publishing, 2019.
- [12] Barrett O’Neill. *The geometry of Kerr black holes*. Courier Corporation, 2014.
- [13] Claudio F Paganini, Blazej Ruba, and Marius A Oancea. Characterization of null geodesics on kerr spacetimes. *arXiv preprint arXiv:1611.06927*, 2016.
- [14] Volker Perlick. *Ray optics, Fermat’s principle, and applications to general relativity*, volume 61. Springer Science & Business Media, 2000.
- [15] Volker Perlick and Oleg Yu Tsupko. Calculating black hole shadows: review of analytical studies. *Physics Reports*, 947:1–39, 2022.

- [16] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, 2022.
- [17] Frederic H Vincent, Thibaut Paumard, Ericourgoulhon, and Guy Perrin. Gyoto: a new general relativistic ray-tracing code. *Classical and Quantum Gravity*, 28(22):225011, 2011.
- [18] Martin Walker and Roger Penrose. On quadratic first integrals of the geodesic equations for type {22} spacetimes. *Communications in Mathematical Physics*, 18:265–274, 1970.
- [19] Ming-Zhi Wang, Song-Bai Chen, and Ji-Liang Jing. Chaotic shadows of black holes: a short review. *Communications in Theoretical Physics*, 2022.

Apéndice A

Imágenes Generadas por el Código de Python



(a) Imagen de fondo colocada en la esfera de radio $r = r_{limit}$, así se observaría dicha imagen en el espacio-tiempo de Minkowski.



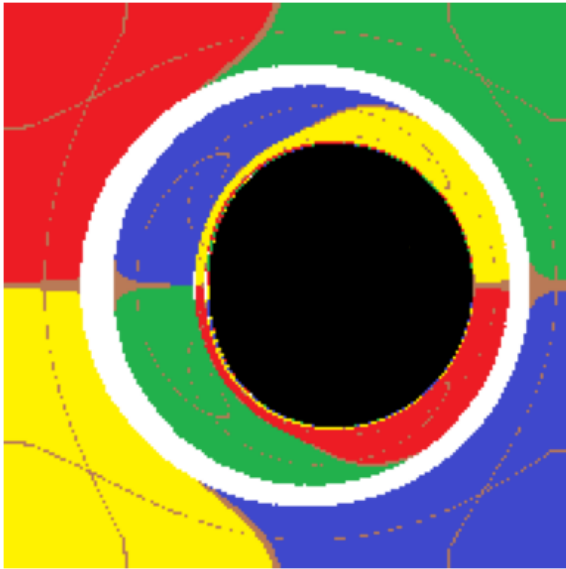
(b) Agujero negro de Schwarzschild con la imagen [A.1a](#) de fondo. Imagen generada con 200x200 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



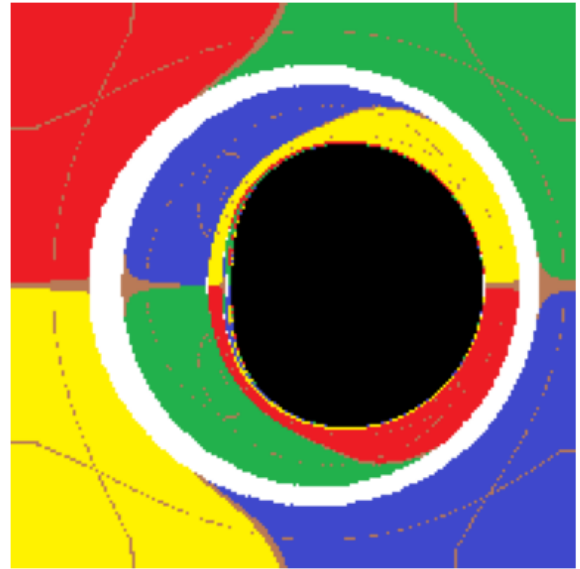
(a) Agujero negro de Schwarzschild. Imagen generada con 200x200 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $\theta_0 = \pi/2$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



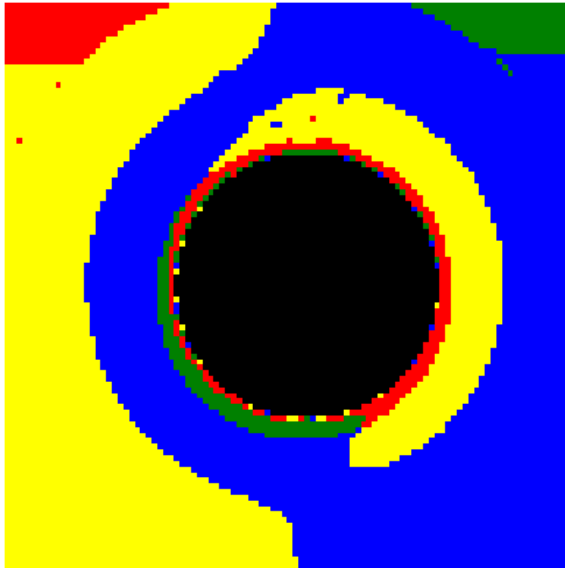
(b) Agujero negro de Kerr con parámetro $a = 0,5$. Imagen generada con 200x200 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $\theta_0 = \pi/2$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



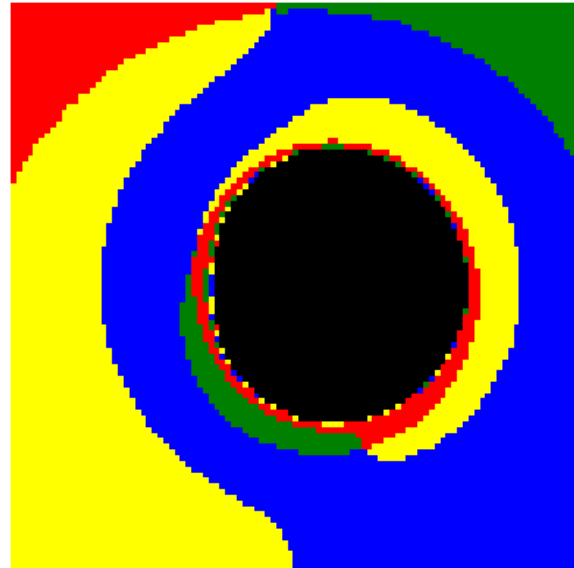
(c) Agujero negro de Kerr con parámetro $a = 0,9$. Imagen generada con 200x200 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $\theta_0 = \pi/2$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



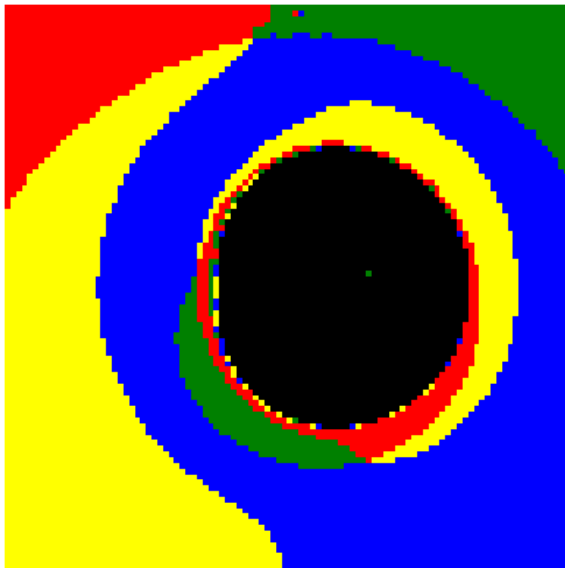
(d) Agujero negro de Kerr con parámetro $a = 0,99$. Imagen generada con 200x200 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $\theta_0 = \pi/2$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



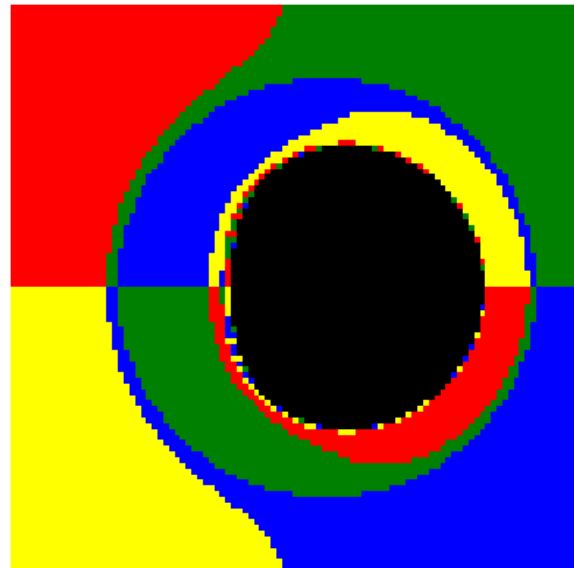
(a) Agujero negro de Kerr para un observador con inclinación $\theta_0 = \pi/10$. Imagen generada con 100x100 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $a = 0,99$, $r_0 = 100M$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



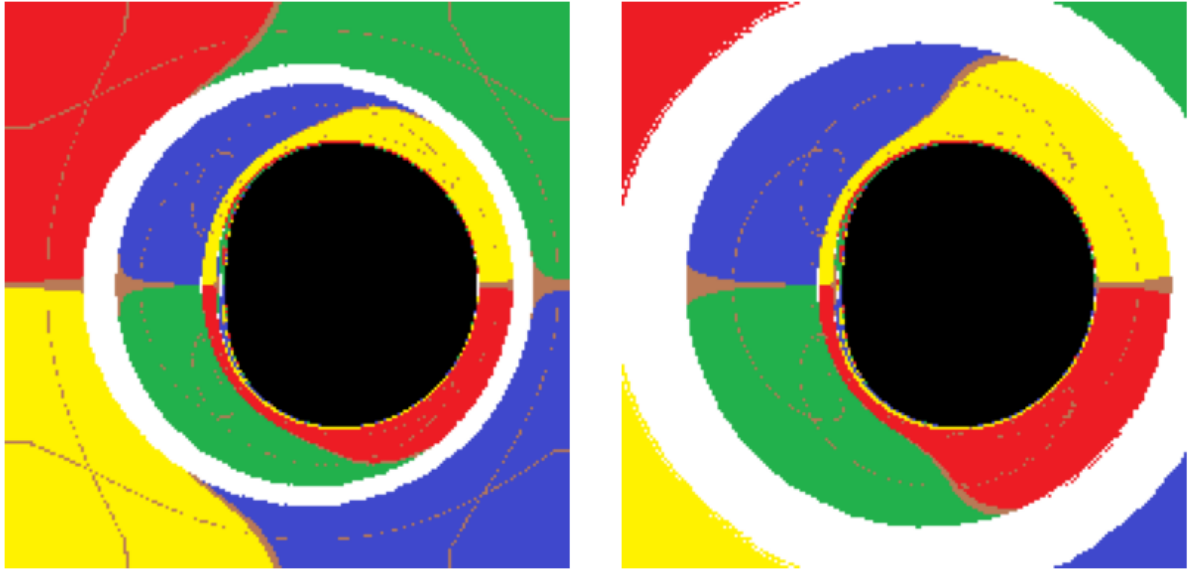
(b) Agujero negro de Kerr para un observador con inclinación $\theta_0 = \pi/4$. Imagen generada con 100x100 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $a = 0,99$, $r_0 = 100M$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



(c) Agujero negro de Kerr para un observador con inclinación $\theta_0 = \pi/3$. Imagen generada con 100x100 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $a = 0,99$, $r_0 = 100M$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



(d) Agujero negro de Kerr para un observador con inclinación $\theta_0 = \pi/2$. Imagen generada con 100x100 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $a = 0,99$, $r_0 = 100M$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



(a) Agujero negro de Kerr considerando el parámetro $r_{limit} = 10M$. Imagen generada con 200x200 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $a = 0,99$, $r_0 = 100M$, $\theta_0 = \pi/2$, $F_{screen} = 4$.

(b) Agujero negro de Kerr considerando el parámetro $r_{limit} = 20M$. Imagen generada con 200x200 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $a = 0,99$, $r_0 = 200M$, $\theta_0 = \pi/2$, $F_{screen} = 4$.

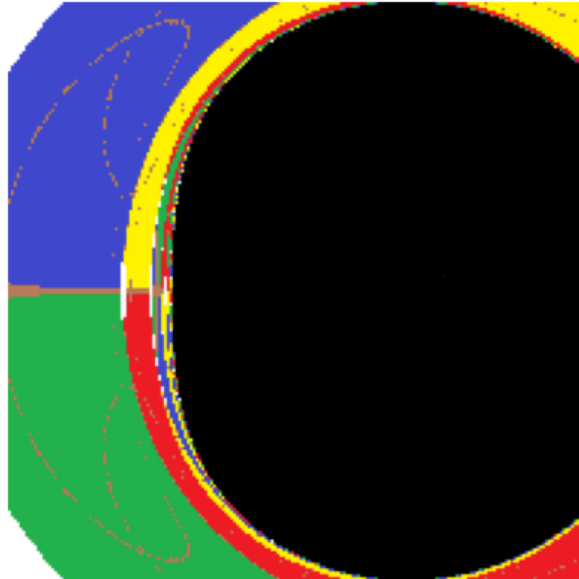
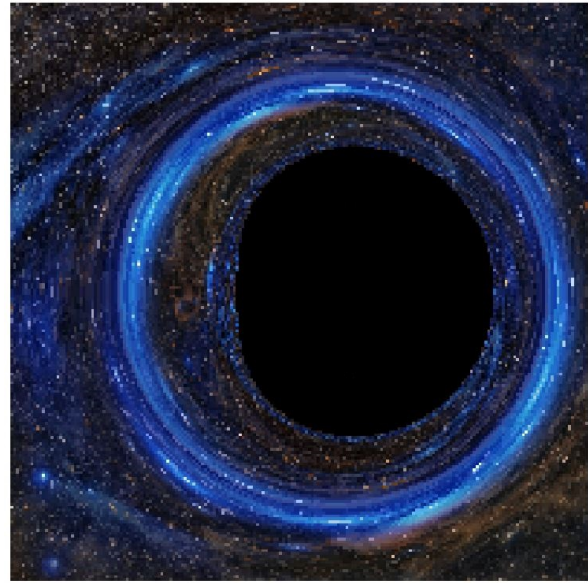


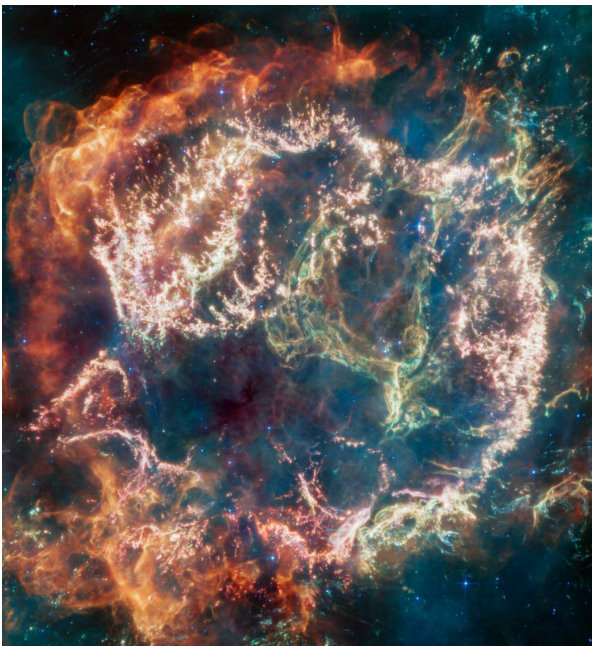
Figura A.5: Agujero negro de Kerr con parámetro $a = 0,99$ y ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$. Imagen generada con 200x200 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 2$. En esta imagen nos hemos centrado en representar la parte central izquierda de la sombra.



(a) Imagen de fondo de las Pleiades colocada en la esfera de radio $r = r_{limit}$, así se observaría dicha imagen en el espacio-tiempo de Minkowski.



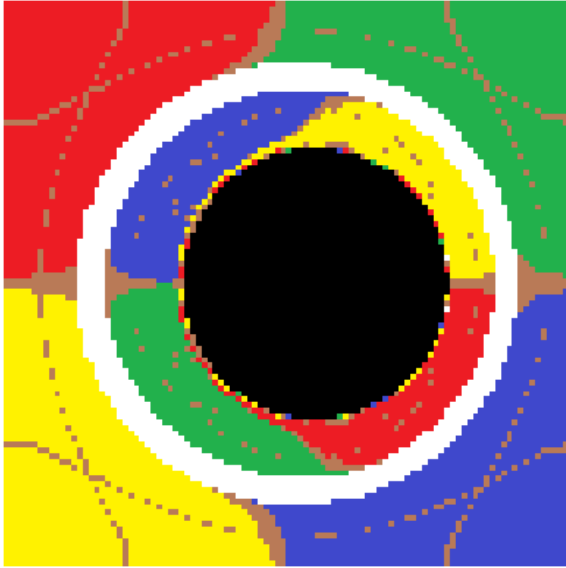
(b) Agujero negro de Kerr con parámetro $a = 0,99$. Imagen generada con 200x200 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $\theta_0 = \pi/2$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



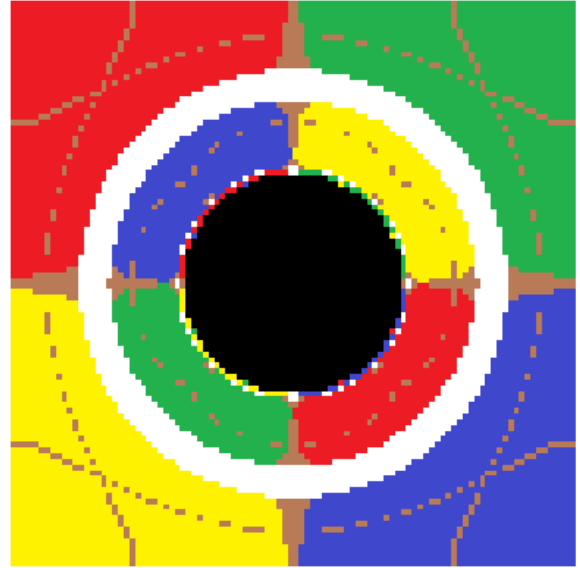
(c) Imagen de fondo de Cassiopeia A colocada en la esfera de radio $r = r_{limit}$, así se observaría dicha imagen en el espacio-tiempo de Minkowski.



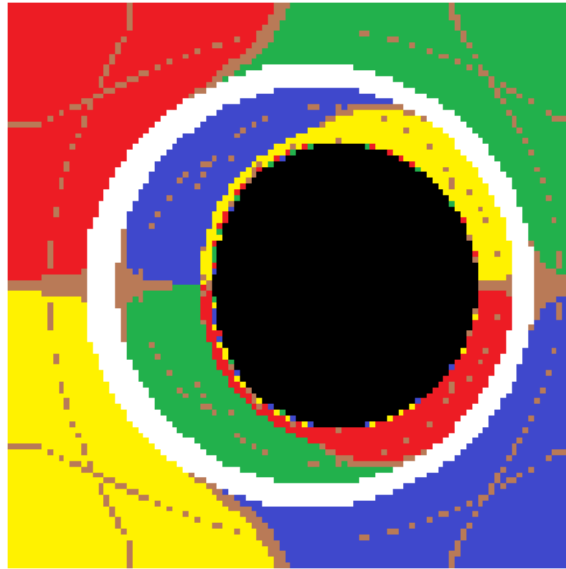
(d) Agujero negro de Kerr con parámetro $a = 0,99$. Imagen generada con 200x200 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $\theta_0 = \pi/2$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



(a) Agujero negro de Kerr-Newman con parámetros $a = 0,5$, $Q_e = 0,5$. Imagen generada con 100x100 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $\theta_0 = \pi/2$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



(b) Agujero negro de Reissner-Nordström con parámetro $Q_e = 0,99$. Imagen generada con 100x100 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $\theta_0 = \pi/2$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.



(c) Agujero negro de Kerr-Newman con parámetros $a = 0,9$, $Q_e = 0,1$. Imagen generada con 100x100 píxeles para los siguientes parámetros: $M = 1$, $r_0 = 100M$, $\theta_0 = \pi/2$, $r_{limit} = 10M$, $F_{screen} = 4$.