



**VNiVERSIDAD
D SALAMANCA**

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Trabajo de Fin de Grado

**Generación de catálogos
astrométricos en el marco del modelo
MOND**

Realizado por
Daniel Antonio Díaz Blanco

Dirigido por
Dr. Ivan de Martino

Grado en Física
Facultad de Ciencias

Septiembre de 2023



**VNiVERSIDAD
D SALAMANCA**

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Trabajo de Fin de Grado

**Generación de catálogos
astrométricos en el marco del modelo
MOND**

Realizado por
Daniel Antonio Díaz Blanco



Dirigido por
Dr. Ivan de Martino

Grado en Física
Facultad de Ciencias

Septiembre de 2023



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Facvltad D Ciencias
VNiVERSiDAD
D SALAMANCA



Certificado del/los tutor/es TFG

D. Iván de Martino, profesor del Departamento de Física Fundamental de la Universidad de Salamanca,

HACE/N CONSTAR:

Que el trabajo titulado “Generación de catálogos astrométricos en el marco del modelo MOND”, que se presenta, ha sido realizado por Daniel Antonio Díaz Blanco, con DNI ****1153S y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo de Fin de Grado en Física en esta Universidad.

Salamanca, 4 de Septiembre de 2023

Firmado por DE MARTINO IVAN - ****5617*
el día 04/09/2023 con un certificado emitido por
AC FNMT Usuarios

Fdo.: _____

Resumen

Una gran cantidad de datos astronómicos indican la presencia de discrepancias de masa en el Universo o de mecanismos físicos fuera de la dinámica conocida. Los movimientos observados en una variedad de clases de sistemas extragalácticos exceden lo que puede explicarse por la masa visible en estrellas y gas. Por ello, o *(i)* hay una gran cantidad de masa invisible en alguna forma novedosa (materia oscura) o *(ii)* hay un colapso de nuestra comprensión de la dinámica en las escalas relevantes. En este trabajo revisaremos en primer lugar algunos desafíos relevantes para la interpretación de la materia oscura de las discrepancias de masa en las galaxias, basados únicamente en observaciones. Luego revisaremos exhaustivamente los éxitos y problemas observacionales del modelo Modified Newtonian Dynamics (MOND) en todas las escalas astrofísicas. Finalmente, construiremos catálogos astrométricos para reflejar las observaciones de un futuro satélite y comprender si pueden ser útiles o no para detectar una firma de MOND.

Palabras clave: *Materia oscura-MOND-Theia*

Abstract

A large amount of astronomical data indicates the presence of mass discrepancies in the Universe or, alternatively, physical mechanisms beyond the well-known classical dynamics. The observed velocities in a variety of extragalactic systems exceed what can be explained by the visible mass in stars and gas. Either *(i)* there is a significant amount of invisible mass in some novel form (dark matter) or *(ii)* there is a collapse of our understanding of dynamics at the relevant scales. In this work, we will first review some outstanding challenges for the interpretation of dark matter from mass discrepancies in galaxies, based solely on observations. Then we will thoroughly review the observational successes and problems of the Modified Newtonian Dynamics (MOND) model across all astrophysical scales. Finally, we will construct astrometric catalogs to reflect the observations of a future satellite and understand whether they can be useful or not in detecting a MOND signature.

Keywords: *Dark matter - MOND - Theia*

Índice general

Introducción	1
<i>Introduction</i>	3
1. Materia Oscura	5
1.1. Modelo Λ CDM	6
1.2. Candidatos a materia oscura	7
1.2.1. Massive astrophysical compact halo object	8
1.2.2. Agujeros negros primordiales	9
1.2.3. Weakly Interacting Massive Particles	9
1.2.4. Axiones	9
1.3. Halos de materia oscura	11
1.4. Problemas de la materia oscura	13
1.4.1. Problema nucleo/cuspid	13
1.4.2. Problema de los Satélites desaparecidos	15
1.4.3. Problema Too-big-to-fail	17
1.5. Introducción a las galaxias enanas	20
1.6. Estudios previos sobre las galaxias enanas	21
1.6.1. Movimientos ordenados	22
1.6.2. Movimientos aleatorios	23
1.6.3. Quimo-cinemática	24
1.6.4. Contenido de materia oscura inferida y su distribución	25
1.7. Conclusiones	26
2. Modelo MOND	29
2.1. La escala de aceleración característica, a_0	29
2.1.1. Relación Tully-Fisher	29
2.1.2. El rol de la densidad superficial	31
2.1.3. Relación discrepancia de masa-aceleración	31
2.2. Fenomenología MOND. Ley de Milgrom	32
2.2.1. MOND como inercia modificada	33
2.2.2. MOND como gravedad modificada	33
2.2.3. La función interpolación $\mu(x)$	34
2.2.4. Efecto de campo externo	36
2.3. Resultados de MOND	37
2.3.1. Resultados en la Vía Láctea	37
2.3.2. Estabilidad de disco e interacción de galaxias	40
2.3.3. Galaxias enanas de marea	41
2.3.4. Galaxias esferoides enanas	42
2.4. Dificultades de MOND	44
2.4.1. Problema con el Fondo Cósmico de Microondas	44
2.4.2. Problemas con el Clúster Bala (<i>Bullet Cluster</i>)	45
2.5. Conclusiones	46

3. Medidas astrometricas en satélites de futura generación	47
3.1. Satélite astrométrico de futura generación: <i>Theia</i>	47
3.2. Construcción de un catalogo de <i>proper motion</i> : generalidades	48
3.2.1. Método para la construcción del catálogo	48
3.3. Ecuación de Jeans y su solución en simetría esférica	49
3.4. El catalogo, sus propiedades y tests	50
Conclusiones	55
<i>Conclusions</i>	57
Bibliografía	59
Apéndice	71
3.5. Código utilizado	76

Introducción

La búsqueda de una explicación para las discrepancias entre las observaciones y los resultados esperados para la masa visible bajo la dinámica newtoniana ocupa un tema central en la astrofísica y cosmología moderna. Este intrigante enigma puede atribuirse a dos posibles explicaciones: la existencia de una cantidad significativa de masa invisible para nuestros instrumentos en forma de materia oscura, o un colapso fundamental en nuestra comprensión de la dinámica en las escalas relevantes. En este Trabajo de Fin de Grado analizaremos los éxitos y problemas del modelo cosmológico estándar Λ CDM, propio de la materia oscura, y del modelo Dinámica Newtoniana Modificada (MOND - *Modified Newtonian Dynamics*) y examinando la utilidad potencial de los catálogos astrométricos derivados de observaciones de futuros satélites para detectar una firma de MOND.

En el primer capítulo se introducirá el modelo Λ CDM, sus posibles componentes, sus éxitos en la explicación de las observaciones y sus problemas y sus principales problemas. Además, se analizará la física y comportamiento de las galaxias enanas, importantes en el estudio del modelo Λ CDM y MOND, ya que serían las galaxias con mayor proporción de materia oscura, o en su defecto de un comportamiento propio de MOND más profundo que las galaxias de mayor tamaño.

En el segundo capítulo se explicará el modelo MOND, las leyes físicas bajo las que funcionaría, sus éxitos explicando el comportamiento de las galaxias y sus mayores dificultades como teoría.

Finalmente, en el tercer capítulo construiremos un catálogo estelar simulado con las posiciones y velocidades de estrellas en una galaxia con las propiedades de la galaxia enana *Draco* bajo el modelo MOND, y lo compararemos con los valores teóricos esperados de la dispersión de la velocidad y el número de estrellas dentro de un radio r . Con esto simulamos los datos que podríamos obtener con un futuro satélite astrométrico de alta precisión como *Theia*. Finalmente, el paso siguiente sería de comprobar si la obtención de estos datos es útil para detectar una firma de MOND.

Introduction

The search for an explanation for the discrepancies between observations and expected results for visible mass under Newtonian dynamics is a central topic in modern astrophysics and cosmology. This intriguing enigma can be attributed to two possible explanations: the existence of a significant amount of invisible mass beyond the reach of our instruments in the form of dark matter, or a fundamental collapse in our understanding of dynamics at the relevant scales. In this Trabajo de Fin de Grado, we will analyse the successes and problems of the Λ CDM model, characteristics of dark matter, and the Modified Newtonian Dynamics (MOND) model, while examining the potential utility of astrometric catalogues derived from observations by future satellites in detecting a MOND signature.

In the first chapter, we will introduce the standard cosmological model (Λ CDM), its possible components, its successes in explaining observations, and its main problems. Additionally, we will analyse the physics and behaviour of dwarf galaxies, which are important in the study of the Λ CDM and MOND models, as they would be galaxies with a higher proportion of dark matter, or alternatively, exhibit a behaviour more deeply governed by MOND than larger galaxies.

In the second chapter, we will explain the MOND model, the underlying physical laws it operates on, its successes in explaining galaxy behaviour, and its major challenges as a theory.

Finally, in the third chapter, we will construct a simulated stellar catalogue with the positions and velocities of stars in a galaxy with properties similar to the dwarf galaxy Draco under the MOND model, and compare it with the expected theoretical values for velocity dispersion and the number of stars within a radius r . With this simulation, we mimic the data that could be obtained from a future high-precision astrometric satellite like Theia, with the aim of determining whether obtaining such data is useful for detecting a MOND signature.

1. El modelo de Materia Oscura Fría

El concepto de materia oscura surge de la necesidad de explicar datos observacionales sobre el comportamiento de galaxias que carecían de sentido dentro de nuestras leyes gravitatorias y de la mecánica si estas estaban compuestas únicamente de la materia que eramos capaces de ver.

Las primeras evidencias sobre el tema vendrían en 1922 de la mano de Kapteyn y Jeans, que utilizaron un mapa de estrellas de la Vía Láctea, y estimando la masa total descubrieron que la Vía Láctea tenía una masa aproximadamente cuatro veces mayor que la observada únicamente gracias a las estrellas. Según Jeans "debía haber tres estrellas oscuras en el universo por cada estrella visible"[64]. Jan Oort también teorizó la existencia de la materia oscura en 1932, señalando una discrepancia de un factor 2 entre la masa y la materia observable en las proximidades del sistema solar [100]. Sin embargo, luego se determinó que las medidas eran incorrectas y ese factor dos estaba compuesto de gas y materia fría que Oort no era capaz de ver con los instrumentos a su disposición. En 1933, Fritz Zwicky aplicó el teorema del virial al Cluster Coma y obtuvo evidencia de una materia no vista que denominó *dunkle Materie* (materia oscura) [133]. Zwicky estimó que la materia oscura del cluster era 400 veces más abundante que la materia visible. Aunque hay una importante diferencia con el valor calculado actual, Zwicky concluyó correctamente que la mayoría de la materia era oscura.

Actualmente existen diferentes evidencias sobre la existencia de materia oscura (o un modelo Newtoniano diferente), como observaciones de lentes gravitacionales [76], o en el Fondo Cósmico de Microondas (CMB por sus siglas en ingles: *Cosmic Microwave Background*)[43], sin embargo, la evidencia más clara de la desigualdad entre la materia visible y la existente vendría en 1970 de la mano de Vera Rubin, que estudió las curvas de velocidades de la materia según su distancia al centro en las galaxias espirales [109]. Usando la línea de 21 cm que emiten y absorben los átomos de hidrógeno neutro, el principal componente de la materia visible, podemos obtener un mapa de la velocidad de rotación del hidrógeno usando el desplazamiento $\Delta\lambda$ de la longitud de onda λ debido al efecto Doppler:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}, \quad (1.1)$$

Donde v_r es la velocidad de rotación alrededor del centro galáctico y c la velocidad de la luz ($v_r \ll c$). Usando la 3ª ley de Kepler y la definición de periodo:

$$\frac{P^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM(R)}, \quad (1.2)$$

$$P = \frac{2\pi R}{v(R)}, \quad (1.3)$$

donde P es el periodo, R la posición respecto al centro (radio), G la constante gravitatoria y $M(R)$ la masa situada en el interior de la esfera de radio R , llegamos a la siguiente expresión para la velocidad $v(R)$:

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}. \quad (1.4)$$

Haciendo un aproximación para regiones amplias en las que la densidad es aproximadamente constante podemos escribir:

$$\rho = \frac{M(R)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M(R_0)}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}, \quad (1.5)$$

donde ρ es la densidad de masa, y R_0 el radio de la galaxia. Lo que nos lleva a poder escribir la masa en un radio R como:

$$M(R) = \frac{R^3}{R_0^3} M, \quad (1.6)$$

donde M es la masa total. De forma que podemos expresar la velocidad teórica de rotación en Ec. (1.4) de la siguiente forma:

$$v(R) = \begin{cases} R\sqrt{\frac{GM}{R_0^3}} & \text{si } R < R_0, \\ R^{-1/2}\sqrt{GM} & \text{si } R > R_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Esperamos por tanto un crecimiento lineal con R en el interior de la galaxia y un decrecimiento con $R^{-1/2}$ para regiones exteriores. Sin embargo, la evidencia apunta a que la curva de velocidades se comporta de forma más plana de lo esperado en regiones exteriores (Figura 1.1) de las galaxias espirales. [108]. Estas discrepancias apuntan a la existencia de

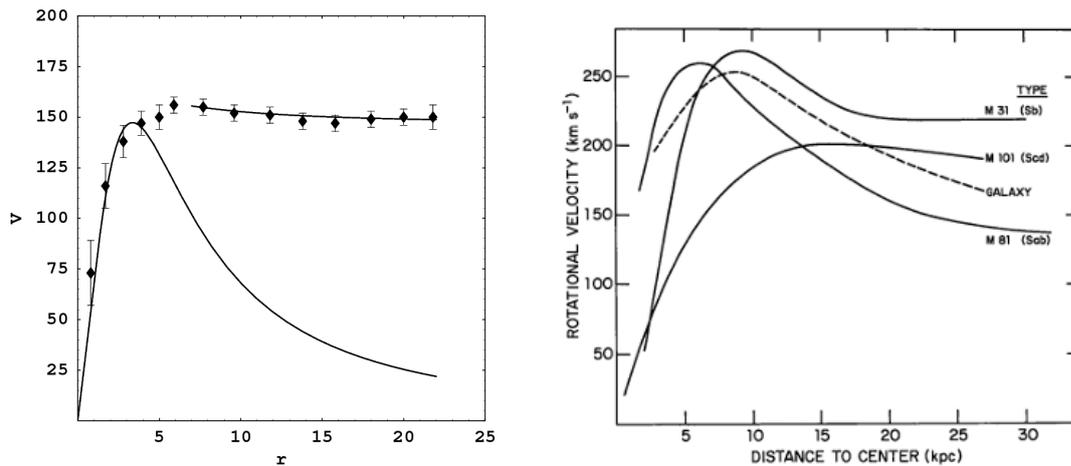


Figura 1.1: Panel izquierdo: Representación de la velocidad de rotación para la galaxia espiral NGC 3198 en km/s frente al radio en kpc/h. La curva inferior continua representa los valores de la teoría Newtoniana para un disco exponencial que decrece asintóticamente como $R^{-1/2}$. Los rombos representan las medidas observacionales, con sus correspondientes barras de error. Figura reproducida de [26]. Panel derecho: Curvas de rotación para las galaxias M 31, M 101 y M 81 mostradas en línea continua. Nuestra galaxia se muestra en línea discontinua. Figura reproducida de [108]

materia no visible o a un comportamiento no esperado de la mecánica newtoniana.

1.1. Modelo Λ CDM

El modelo Λ Cold Dark Matter (Λ CDM, Materia Oscura Fria en español) o modelo de concordancia es el modelo estándar de la evolución del Universo aceptado en las últimas

décadas. Ha sido establecido por un gran número de observaciones independientes, que incluyen las fluctuaciones de CMB [31], el espectro de las perturbaciones de la densidad de materia [29], las distancias de luminosidad a la supernova de tipo Ia (SNeIa) [107] y la tasa de expansión del Universo [93], de forma que las constantes de los parámetros cosmológicos han alcanzado una gran precisión [52].

En este modelo, el periodo de expansión acelerada actual del Universo está gobernado por la constante cosmológica Λ , también conocida como densidad de energía de vacío [101]. Su valor se describe en termino de la fracción de densidad de energía en un universo plano $\Omega_{\Lambda,0}$, y su valor es $\Omega_{\Lambda,0} = 0.686 \pm 0.020$ en unidades de la densidad crítica $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ según las observaciones cosmológicas [95]. Sin embargo, este valor contrasta enormemente al compararlo con el valor esperado según la teoría cuántica de campos, que predice una densidad de energía de vacío del orden de $\rho_\Lambda \sim 10^{71} GeV^4$ [127], mientras que el límite superior de la constante cosmológica es $\rho_\Lambda \sim 10^{-47} GeV^4$, 118 ordenes de magnitud de diferencia. Diferentes soluciones han sido propuestas para reconciliar ambos valores, como el principio antrópico [126] o un modelo cíclico del universo [71].

El segundo mayor termino en cuanto a contribución a la densidad de energía del Universo es la materia oscura, necesaria para explicar la dinámica de las galaxias como hemos visto, y la estructura a gran escala. Su densidad de energía es $\Omega_{DM,0} = 0.313 \pm 0.020$. La densidad de energía de la materia bariónica u ordinaria es de $\Omega_{b,0}h^2 = 0.02207 \pm 0.00033$. Sumando las tres contribuciones obtenemos la curvatura del Universo, $\Omega_{k,0}h^2 = -0.037^{+0.044}_{-0.042}$ donde h es la constante de Hubble en unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Esto describe una curvatura plana. Estos valores han sido obtenidos por el satélite *Planck* [30]

El modelo Λ CDM nos describe un Universo homogéneo e isótropo y las dinámicas de las estructuras cósmicas. Sin embargo, hay ciertas discrepancias: en el valor de $\Omega_{\Lambda,0}$ respecto al valor esperado en la teoría cuántica de campos, [127], como ya hemos visto, y en otros parámetros cosmológicos como por ejemplo en la constante de Hubble H_0 [120]. Esta ultima constante se obtiene por dos conjuntos de datos diferentes: a partir de las medidas del CMB se obtiene un valor de $H_0 = 67.23 \pm 0.60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [30], y a partir de medidas en el Universo cercano $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [105]. Estas medidas tienen una tensión de 4.4σ . Las discrepancias en las medidas las podemos observar visualmente en la imagen 1.2.

Respecto a Ω_{DM} , existen diferentes modelos de materia oscura que concuerdan dentro del modelo Λ CDM, que veremos en el próximo capítulo.

1.2. Candidatos a materia oscura

Dentro de Λ CDM, diferentes modelos de materia se han considerado que puedan explicar estas discrepancias entre los comportamientos esperados y los encontrados en las galaxias. Muchas de estas teorías apuntan tanto a la existencia de materia oscura bariónica o no bariónica.

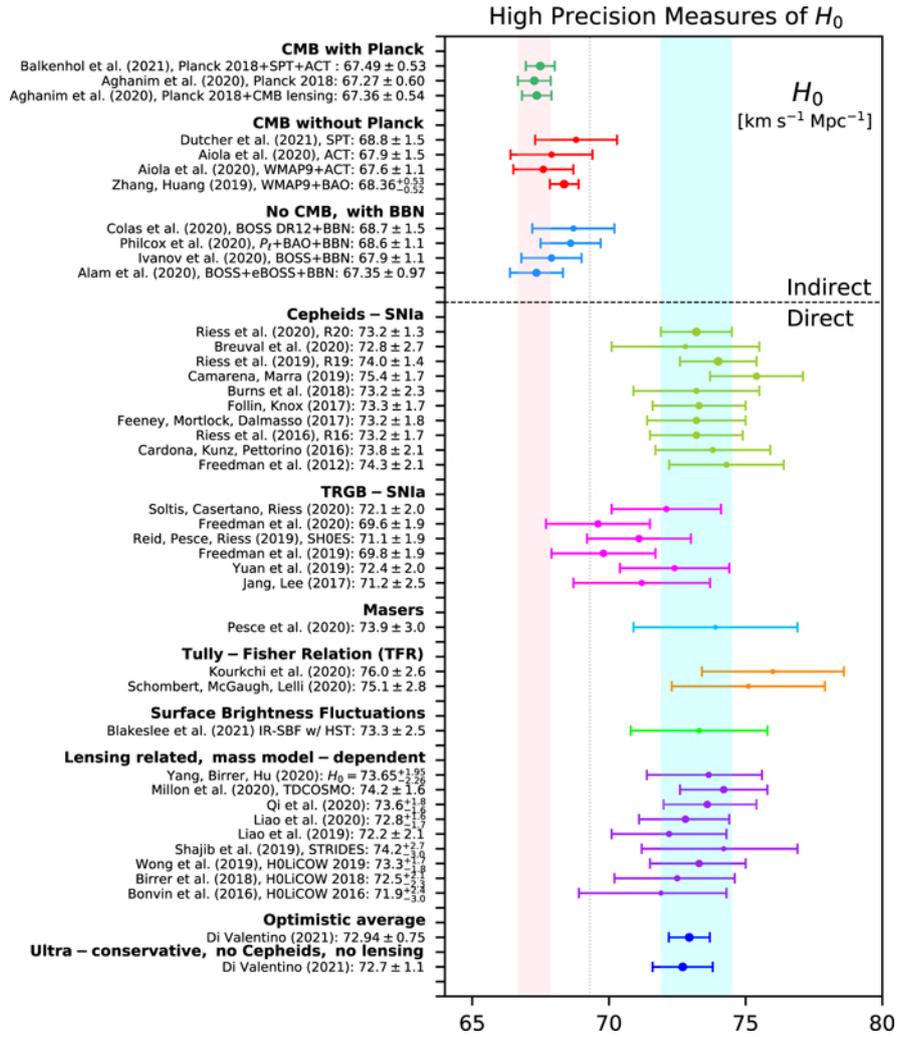


Figura 1.2: Medidas de H_0 de mayor precisión, con barras de error menores a 3 km s^{-1} para las medidas directas y menos de 1.5 km s^{-1} para las indirectas. La banda cian vertical corresponde al valor del SH0ES Team, medida del Universo cercano [106], $H_0 = 73.2 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ con un intervalo de confianza del 68 %. La banda rosa vertical corresponde al valor reportado por el *Planck 2018 team* a partir del CMB [30] en un escenario ΛCDM . Imagen de [120]

1.2.1. Massive astrophysical compact halo object

Los Massive Astrophysical Compact Halo Object (MACHOs) son objetos relativamente pequeños; se suele dar un rango de entre $0.15 M_\odot$ y $0.9 M_\odot$ [2], dependiendo del modelo. Estos objetos se encuentran en el halo; la región que rodea las galaxias, de menor densidad de materia que el interior de la galaxia. Los objetos de esta categoría emiten poca o ninguna luz, y son difíciles de detectar. Pertenecen a los MACHOs los planetas aislados, las enanas marrones, las enanas blancas, las estrellas de neutrones y los agujeros negros.

Las investigaciones recientes basadas en el análisis de efectos de microlente gravitatoria en las Nubes de Magallanes (eventos en los que la luz ha sido curvada por efectos gravitatorios) descartan la posibilidad de que los MACHOs constituyan la mayor parte de la materia oscura. Los datos de las observaciones de EROS-2 sobre las Nubes de

Magallanes cifran el porcentaje de MACHOs sobre el total de materia ser inferior al 8 %, con un intervalo de confianza del 95 % [117]. Luego es necesario buscar otros elementos que constituyan la materia oscura.

1.2.2. Agujeros negros primordiales

Los agujeros negros primordiales (PBH por sus siglas en ingles) son objetos hipotéticos formados cerca del Big Bang. Las altas densidades y condiciones heterogéneas de ese momento provocarían que regiones suficientemente densas sufrieran un colapso gravitatorio, formando estos objetos en la era dominada por la radiación. Fueron propuestos en 1966 por Yakov Borisovich e Igor Dmitriyevich [129]. Estos objetos podrían adoptar un amplio rango de tamaño, y aunque forman parte de la categoría de MACHOs, merecen consideración aparte ya que parte de ellos no pueden ser detectados fácilmente mediante el estudio de los eventos de microlente debido a su menor masa.

Sin embargo, en los últimos años ha sido posible su estudio gracias al desarrollo de la observación de ondas gravitacionales. Observaciones de LIGO [124] cifran la contribución de los PBH de masa entorno a $0.01M_{\odot}$ - $100M_{\odot}$ en un pequeño porcentaje sobre el total de la materia oscura, por lo que no puede ser su principal constituyente según las medidas actuales.

1.2.3. Weakly Interacting Massive Particles

Las "partículas masivas débilmente interactivas"(WIMPs por sus siglas en ingles) son partículas hipotéticas que interactúan mediante la fuerza de la gravedad y mediante otra fuerza fuera del Modelo Estándar de partículas, pero equivalente en magnitud a la fuerza nuclear débil. Estas partículas entran dentro de la teoría de la supersimetría [72], que supone que para cada fermión existe un bosón con los mismos números cuánticos, y viceversa. En esta teoría, una partícula con masa en el rango de 1 GeV - 10 TeV tendría la densidad cosmológica esperada para la materia oscura [30], esto es denominado el "milagro WIMP"[1].

Estas partículas habrían sido formadas en el principio del Universo y forman parte de los modelos de CDM. Sin embargo, los recientes intentos fallidos de detección directa junto con el fracaso en el intento de encontrar evidencias de la supersimetría en el LHC [34] indican que los WIMPS están aun lejos de ser el candidato a materia oscura definitivo. Un ejemplo de WIMP candidato a materia oscura es el hipotético neutrino masivo [70].

1.2.4. Axiones

La idea de los axiones surge como solución a uno de los dos principales problemas del modelo estándar:

- Problema CP fuerte: por el cual no se puede determinar porque la violación C (conjugación de carga) combinada con la P (simetría de paridad) no está presente en la fuerza nuclear fuerte.

- Asimetría Materia-Antimateria: el modelo estándar es insuficiente para explicar la diferencia entre la cantidad de materia y antimateria en el Universo.

El axi3n es un bos3n ligero te3rico, que tendr3a una masa $m_a = 26.2 \pm 3.4 \mu eV$ [65] que surge como soluci3n al problema CP fuerte. Hist3ricamente, la b3squeda de part3culas que constituyan la materia oscura se ha centrado en la b3squeda de WIMPS, sin embargo, la falta de 3xito en su detecci3n ha aumentado el inter3s en la b3squeda de alternativas. Una de ellas es que la materia oscura sea un bos3n ligero, que podr3a cubrir el Universo en un estado similar a una onda coherente que se mueve lentamente, de forma "fria"[27]. El axi3n es el prototipo para esta materia oscura de tipo ondulatorio, y su campo ser3a masivo bos3nico. Como los bosones pueden solaparse en el mismo estado cu3ntico, si el n3mero de ocupaci3n es macrosc3pico, los bosones pueden ser descritos usando teor3a de campos cl3sica como un campo escalar $a(t, x)$, en lugar de cu3ntico. Esto conlleva un comportamiento de onda macrosc3pico. A escalas c3smicas, el campo del axi3n ser3a uniforme, y su densidad de energ3a estar3a almacenada en oscilaciones arm3nicas $\rho = \frac{1}{2} [\dot{a}/(\hbar c^3) + m_a^2 a^2 / (\hbar^3 c^3)]$ con $a = a_0 \cos(m_a c^2 t / \hbar)$ donde m_a es la masa de axi3n y a_0 estar3a determinada por la evoluci3n temprana (en los primeros momentos del Universo) del campo del axi3n. Esta densidad de energ3a en la teor3a de la Relatividad General afecta a la propia geometr3a del espacio-tiempo y a la expansi3n del Universo. Para una lectura extensiva sobre el axi3n nos referimos a [27].

A escalas de las galaxias, la gravedad provocar3a que el campo del axi3n desarrollase inhomogeneidades, y forme los halos de materia oscura. En escalas mayores, de decenas a cientos de Mpc, los halos estar3an conectados por filamentos y capas en una 'red c3smica'. El axi3n como materia oscura toma una serie de caracter3sticas 3nicas comparadas con modelos de part3culas pesadas como los WIMPS que son:

- Longitud de onda de De Broglie: El gradiente de energ3a domina frente a la energ3a gravitacional a pequeñas escalas (gal3cticas). El campo del axi3n es uniforme a pequeñas escalas y existe un m3nimo de masa para el halo de materia oscura [25].
- Estrellas de axiones: A muy altas densidades, los axiones forman un tipo de soliti3n¹ con la ayuda de un equilibrio entre la gravedad y los gradientes de energ3a [113].
- Turbulencia de ondas e interferencias: En las estructuras de la red c3smica, las ondas del axi3n tienen velocidades din3micas y donde hay flujos coherentes, lleva a patrones de interferencia en los filamentos.

En la figura 1.3 podemos ver una simulaci3n de una estrella de axiones y franjas de interferencia.

¹Un soliti3n es una onda solitaria que se propaga sin deformarse en un medio no lineal. Se encuentra en fen3menos f3sicos como soluci3n a ecuaciones diferenciales no lineales.

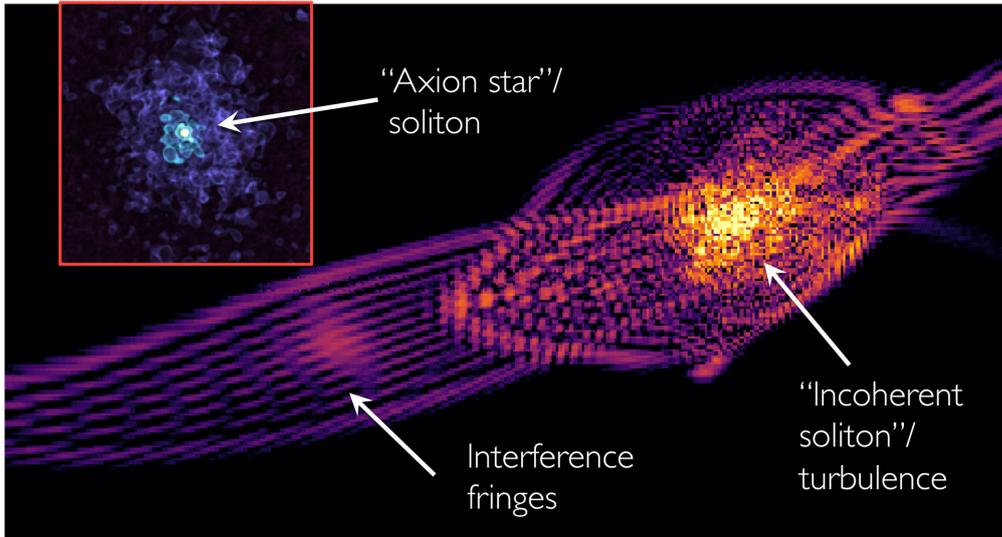


Figura 1.3: Parte de la Red C3smica formada por interacciones gravitatorias y por interferencias de las ondas de axi3n. Los nodos densos de la red forman los halos, y en su interior encontramos objetos autoligados con alta densidad (estrellas de axiones) y ondas de turbulencia en regiones exteriores (solitones incoherentes)

1.3. Halos de materia oscura

Los halos de materia oscura son regiones del Universo gravitacionalmente ligadas donde se concentra la materia oscura. Las propiedades de los halos est1n relacionadas con las de las galaxias de materia bari3nica que contienen, principalmente ligando la masa del halo con la masa de la galaxia.

En el modelo CDM, asumiendo simetría esf3rica, el perfil de la densidad de masa $\rho(r)$ del halo de materia oscura est1 descrito por el perfil Navarro-Frenk-White (NFW), resultado de simulaciones N-body de materia oscura [98]. Su forma analítica es:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{r(1 + r/r_s)^2}, \quad (1.8)$$

donde r_s es el radio de escala, y ρ_s es la densidad de escala. Estos par1metros son equivalentes a $M_{200} \propto \rho_s/r_s^3$, la masa virial del halo y $c = r_{200}/r_s$, el par1metro de concentraci3n. La suposici3n m1s simple que se puede hacer sobre la conexi3n galaxia-halo es que las galaxias m1s masivas habitan los halos de materia oscura m1s masivos, y de la misma forma galaxias menos masivas habitan en halos menos masivos. Este enfoque b1sico es conocido como "modelo de coincidencia de abundancia" (*Abundance matching model*). En las primeras versiones de este modelo se asumía que existía una 3nica galaxia por halo, sin embargo, el modelo CDM predice estructuras en todas las escalas, y por tanto los halos de materia oscura podr1n hospedar distintas subestructuras, llamadas subhalos. De estas subestructuras, a partir de cierta masa, se espera que hospeden galaxias. Un planteamiento simple es que cada halo y subhalo hospeda una galaxia, con la masa o luminosidad de la galaxia emparejada por abundancia con la masa o velocidad del halo o subhalo de materia oscura en el que habita. A menudo a este modelo en el que se tiene en cuenta los subhalos se le conoce como Modelo de Coincidencia de Abundancia de Subhalos (SHAM, *SubHalo Abundance Matching model*) [130]. El modelo de coincidencia de abundancia puede ser

usado para determinar la masa estelar típica de la galaxia para una masa del halo dada (*galaxy stellar-to-halo mass relation*, *SHMR*).

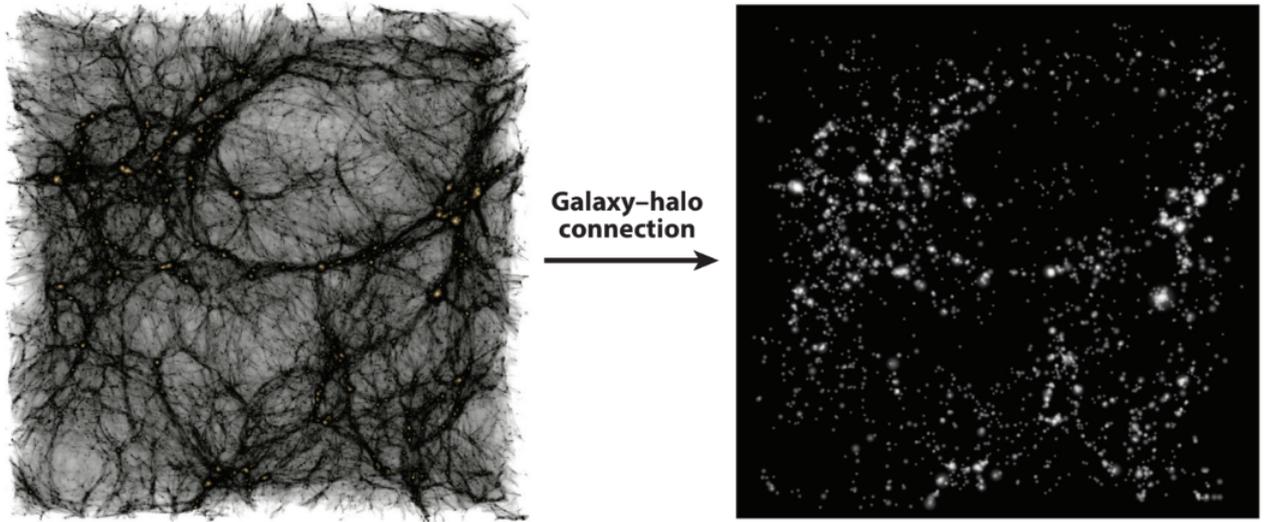


Figura 1.4: La estructura de los halos define la formación de galaxias. En la imagen de la izquierda se muestra una distribución en un volumen de $90 \times 90 \times 30 \text{ Mpc } h^{-1}$ de una simulación cosmológica, comparada con una distribución de galaxias (derecha) usando un modelo de coincidencia de abundancia, ajustado para que coincida el agrupamiento de galaxias de una muestra observada. Imagen de [125]

La forma de esta relación deriva de la discordancia entre la función de la masa del halo y la función masa estelar o luminosidad, que desciende rápidamente por debajo de las galaxias típicas y tiene una pendiente mucho más débil en el extremo más ligero que la función de la masa del halo.

De la imagen 1.5 podemos concluir que la eficiencia máxima de la formación estelar es siempre bastante baja: Asumiendo que todos los halos hospedan una fracción bariónica Ω_b/Ω_m del 17%, solo el 20-30% de los bariones se convierten en estrellas, resultando un SHMR con un pico en un pequeño porcentaje [125]. La eficiencia máxima de formación ocurre en halos que hospedan galaxias típicas L_* como la Vía Láctea, entorno a $10^{12} M_\odot$. Para masas mayores o menores, la formación de galaxia es menos eficiente. Esta disminución en la eficiencia de la formación estelar es una señal de los fuertes procesos de reacción en la formación de estrellas y agujeros negros, probablemente debido a una combinación de procesos: en las masas mayores, las galaxias suelen poseer un núcleo AGN (*Active Galaxy Nucleus*, Núcleo Galáctico Activo), en donde se calienta el gas del halo y limitan la futura formación estelar [35]; en masas bajas, las explosiones de las estrellas masivas como supernovas o los vientos estelares provocarían corrientes que ejetarían el gas de la galaxia o evitarían que entrara a la galaxia [59]; en masas aun más bajas, las galaxias serían demasiado pequeñas para mantener en ellas el gas durante el periodo de reionización durante $z \sim 6$ [24]. Por debajo de una masa del halo umbral, las galaxias no podrán formarse de ninguna manera. En la sección 1.5 discutiremos las propiedades de las galaxias enanas. Las galaxias más pequeñas conocidas son las galaxias enanas ultratenues (*Ultra-faint dwarf galaxies*), las cuales tienen una masa del orden de $10^7 M_\odot$, lo que significaría un halo del orden de $10^9 M_\odot$.

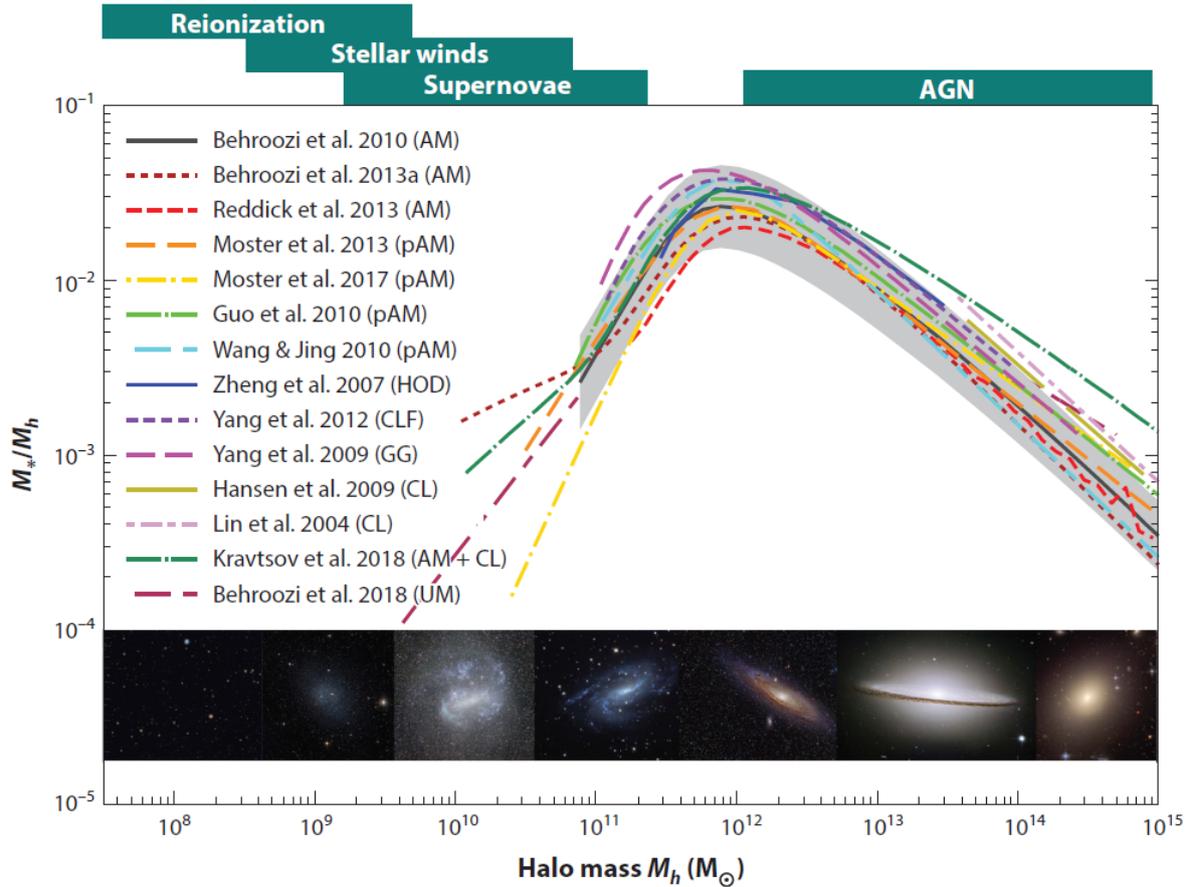


Figura 1.5: Relación masa estelar-halo para galaxias centras en $z = 0$ según diferentes estudios y métodos. En el panel inferior se muestran ejemplos de galaxias con masas del orden de $10^8 M_\odot$ a $10^{15} M_\odot$. En la parte superior se muestran los procesos que suprimen la formación estelar. Imagen de [125]

1.4. Problemas de la materia oscura

El modelo Λ CDM presenta una serie de problemas en su descripción de las galaxias y sus halos, relacionados con las diferencias entre las predicciones teóricas (obtenidas con simulaciones N-body) y las observaciones de galaxias enanas y de bajo brillo superficial (*Low Surface Brightness*, LSB). En esta sección comentaremos algunos de ellos.

1.4.1. Problema nucleo/cuspide

La primeras simulaciones N-body del modelo CDM muestran que el perfil de densidad de masa $\rho(r)$ de los halos de materia oscura tiene una forma de cúspide: $\rho \sim r^\alpha$, con $\alpha \approx -1$ [41] (imagen 1.6). En una simulación más reciente [61], donde se simulaban 12 halos en un rango de masas de 2×10^{12} a $5 \times 10^{14} h^{-1} M_\odot$ donde h es la constante de Hubble adimensional² representados por ~ 1 millón de partículas dentro del radio virial, se encontró que había una clara correlación entre la masa del halo y la pendiente del perfil

²Es usual expresar la constante de Hubble como $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

de densidad en la parte interior del halo. Para las galaxias se encontró un $\alpha \sim -1.5$, pero este valor variaba para halos mayores, como el de grupos de galaxias (~ -1.3) o clusters (~ -1.1). Estos resultados además implican que la pendiente es más pronunciada que el perfil universal NFW (sección 1.8).

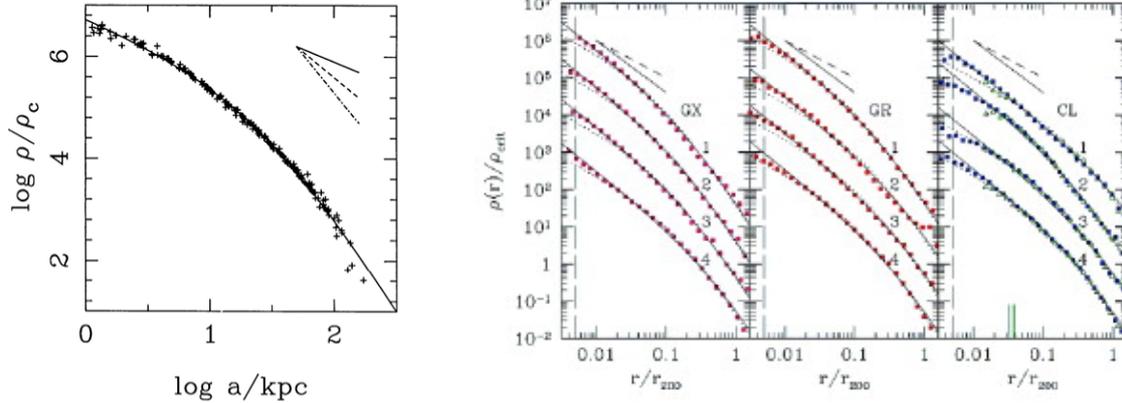


Figura 1.6: Panel Izquierdo: Simulación del perfil de densidad de masa de halos de materia oscura. La densidad está en unidades de densidad crítica ρ_c y el radio elíptico a en kpc. Trece puntos fueron usados para el ajuste de dos parámetros para el perfil de cada uno de los 14 halos que fueron simulados. Las líneas en la parte superior derecha muestran las pendientes para potencias de $-1, -2$, y -3 , respectivamente. Imagen de [41]. Panel derecho: Perfiles de densidad promediados esféricamente de los halos simulados con masa de galaxia (izquierda), grupo de galaxias (medio) y cluster (derecha). La curva sólida y de puntos representa el ajuste para $\alpha = -1.5$ y $\alpha = -1$. Como referencia, se muestra $\rho(r) \propto r^{-1}$ y $r^{-1.5}$ en línea de rayas y sólida. Imagen de [61].

Sin embargo, toda la observación experimental indica que el perfil de densidad de masa tiene forma de núcleo ($\alpha \sim 0$) en lugar de una cúspide en las regiones interiores de las galaxias enanas y de las galaxias LSB. La diferencia entre estos dos niveles se ejemplifica en la imagen 1.7. La pendiente del modelo NFW es demasiado pronunciada para ajustarse a la mayoría de datos observacionales, como las observaciones realizadas a ocho galaxias enanas de los grupos Sculptor y Centaurus A [33].

Un estudio de las curvas de rotación de una muestra de 165 galaxias de baja masa muestran una pendiente media de $\alpha = -0.22 \pm 0.08$ [15]. Observaciones de alta resolución concuerdan con estos datos, destacando la muestra de 26 galaxias enanas de LITTLE THINGS (Local Irregular That Trace Luminosity Extremes, The HI Nearby Galaxy Survey) [99], de la que se obtuvo una pendiente media de $\alpha = -0.32 \pm 0.24$, en línea con el anterior valor. En la figura 1.8 podemos ver como los datos de los diferentes estudios coinciden para un modelo de $\alpha = -1$.

Las posibles soluciones a este problema se basan en procesos físicos ignorados en las aproximaciones de las simulaciones, que afectan principalmente a la materia bariónica, o en efectos sistemáticos y/o límites observacionales. La solución más popular se basa en tener en cuenta el efecto de las supernovas y la fricción dinámica en el centro de la galaxia. Las corrientes de partículas de materia oscura producidas por estos efectos podrían transformar la cúspide de materia oscura en un núcleo. En un estudio de 1996 [97] de Julio F. Navarro, Vicent R. Eke y Carlos S. Frenk se realizó una simulación $N - body$ de un halo de modelo Hernquist [58] al cual se le añadía una perturbación que crecía lentamente

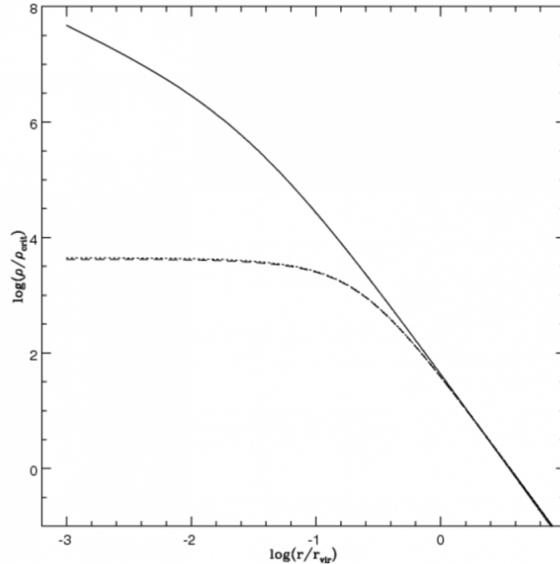


Figura 1.7: Perfil de densidad de materia oscura para un perfil en forma de cúspide (línea sólida) y en forma de núcleo (línea de rayas). Imagen de [38]

en el tiempo con la intención de imitar los cambios adiabáticos en la estructura del halo causadas por la formación del disco galáctico, captando las principales características de los fenómenos de colapso y salida de energía en la formación de galaxias enanas, como las supernovas.

Como podemos ver la figura 1.9 muchas partículas escapan después de los procesos de formación del centro galáctico, favoreciendo una estructura de núcleo en lugar de cúspide. En la figura 1.10 se muestran las densidades finales del halo en 9 situaciones diferentes, en función del radio del disco y la masa. Podemos ver como al añadir la perturbación se reduce la pendiente en la distribución de la densidad cerca del centro para todos los casos, convirtiendo la distribución de cúspide en núcleo.

1.4.2. Problema de los Satélites desaparecidos

Las simulaciones de alta resolución del modelo CDM del halo de materia oscura de la Vía Láctea predicen miles de subhalos con masa suficiente para hospedar galaxias ($M \gtrsim 10^7 M_{\odot}$). Sin embargo, en las observaciones encontramos alrededor de 20 veces menos galaxias satélites alrededor de la Vía Láctea o Andromeda [23]. Aunque se espera que observaciones futuras aumenten el número de galaxias satélites observadas [119], es improbable que alcancen el número de satélites de las simulaciones. Actualmente existen entorno a 50 galaxias conocidas satélites de la Vía Láctea, en contraposición los miles de subhalos predichos en las simulaciones con $M \gtrsim 10^7 M_{\odot}$.

Como hemos mostrado en la figura 1.5, la formación estelar se hace muy ineficiente para masas pequeñas. Es posible que por tanto exista una gran cantidad de subhalos con masas $M \lesssim 10^9 M_{\odot}$ compuestos únicamente por materia oscura, donde no se hayan formado estrellas por el proceso de reionización, haciéndolos por tanto imposibles o muy difíciles de detectar mediante las técnicas actuales. Podemos cuantificar este resultado esperado mediante coincidencia de abundancia (*Abundance matching*). La masa estelar

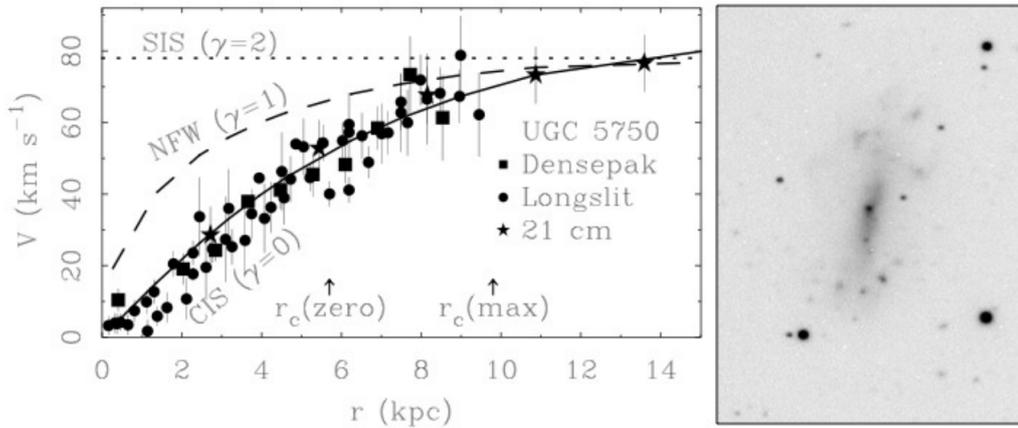


Figura 1.8: Curva de rotación (izquierda) de la galaxia LSB UGC 5750 (derecha). Los datos de los velocidades provienen de varias fuentes y métodos: Observación de la línea de 21 cm del hidrógeno [121], dos observaciones ópticas de la transición de Balmer $n = 3 \rightarrow 2$ [83] [36] y espectroscopia $H\alpha$ de campo integrado Densepak [96]. Se muestran varios tipo de halo como líneas: línea de puntos para $\alpha = -2$, línea de rayas para $\alpha = -1$ (modelo NFW) y línea sólida para $\alpha = 0$. r_c (zero) y r_c (max) hacen referencia al radio central (*core*) para los casos de disco cero y máximo. Imagen de [28].

puede ser obtenida ajustando los datos de fotometría de banda ancha con un modelo de Distribución de Energía Espectral (SED: *Spectral Energy Distribution*³), mientras que la masa total del halo galáctico M_{halo} puede ser obtenida mediante su efecto como lente gravitacional o mediante curvas de rotación del HI.

La figura 1.12 nos muestra varios modelos que adoptan diferentes conjuntos de datos y realizan simulaciones N-body para obtener las relaciones $M_* - M_{halo}$. Para $M_* \gtrsim 10^8 M_\odot$, donde existen datos observacionales, los modelos son consistentes entre si. Para masas estelares menores, la falta de datos observacionales y el aumento de la estocasticidad de los mecanismos de formación estelar provocan incertidumbres en la masa estelar, y por tanto la relación de *Abundance Matching* es menos restringida. Por ejemplo, $M_* = 10^5 M_\odot$ corresponde a $M_{halo} \sim 3 \cdot 10^8 M_\odot$ para el modelo de Behroozi [10]⁴. Por otro lado el modelo de Brook⁵ estima $M_{halo} = 3 \cdot 10^9 M_\odot$ [22]. Es razonable esperar que los halos de materia oscura se vuelven progresivamente ineficientes en cuanto a producción estelar se refiere para las menores masas, y en cierto punto pasan a ser completamente oscuros, sin formación estelar. Para las masas menores existirán procesos que suprimen la formación estelar, como vimos en la figura 1.5. Adoptando el modelo de Coincidencia de Abundancia derivado de las galaxias de campo (aquellas que no pertenecen a un cluster y son independientes gravitacionalmente) podemos resolver el problema para las galaxias satélites de la Vía Láctea. En la imagen 1.13 vemos que el ajuste indica que la zona con mayor número de galaxias sería las de menor masa. Los halos con una masa inferior a cierto umbral no

³SED representa cómo se distribuye la energía de una señal en diferentes componentes de frecuencia.

⁴Este modelo estima la cantidad de estrellas formadas en una galaxia a partir de la masa del halo usando datos de distintos parámetros parámetros: Funciones de Masa Estelar (SMFs), Ratios de Formación Estelar Específicos (SSFRs) y Ratios de Formación Estelar Cósmicos (CSFRs).

⁵Este modelo caracteriza la relación masa estelar-halo en las galaxias del Grupo Local con una función de potencia simple.

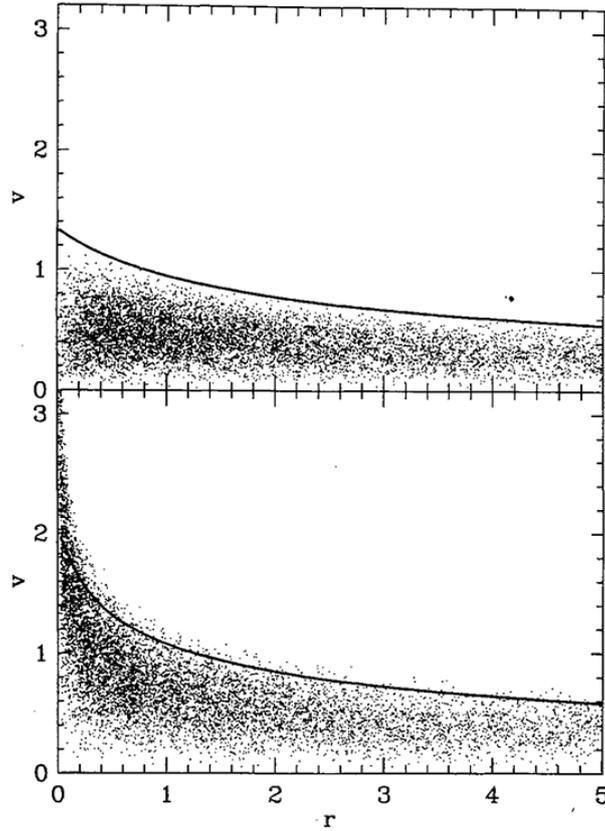


Figura 1.9: Distribución del espacio de fases de las partículas del halo antes (arriba) y después (abajo) de imponer el potencial del disco. La línea sólida en el panel superior representa la velocidad de escape correspondiente al halo antes de la adición del disco, y en el panel inferior la velocidad de escape después de la perturbación. La mayoría de las partículas por encima de esta línea escapan cuando el potencial del disco es eliminado. Imagen de [97]

tendrían formación estelar, y formarían galaxias completamente oscuras que no detectamos, siendo estas la mayoría y pudiendo completar el número esperado de galaxias satélites de las simulaciones. Además, las galaxias con masas superiores pero cercanas a la masa umbral para la formación estelar podrían haber producido estrellas, pero estas han sido arrancadas mediante interacciones de marea con la galaxia principal.

1.4.3. Problema Too-big-to-fail

El problema "Demasiado grande para fallar" (*Too-big-to-fail* (TBTF)) señala que algunos de los subhalos predichos en las simulaciones pero en los cuales no se encuentran estrellas son tan masivos que no hay manera de que no sean capaces de tener generación estelar. La comparación entre las masas observadas y las predicciones del modelo Λ CDM en la simulación *Aquarius project* [115] revelan que los subhalos más masivos son sistemáticamente demasiado densos centralmente como para albergar las galaxias satélites brillantes. Aunque hay subhalos con masas centrales comparables con los satélites de la Vía Láctea, estos subhalos no estaban nunca entre los ~ 10 más masivos. ¿Por qué la formación estelar falla en los subhalos más masivos, y ocurre en satélites de materia

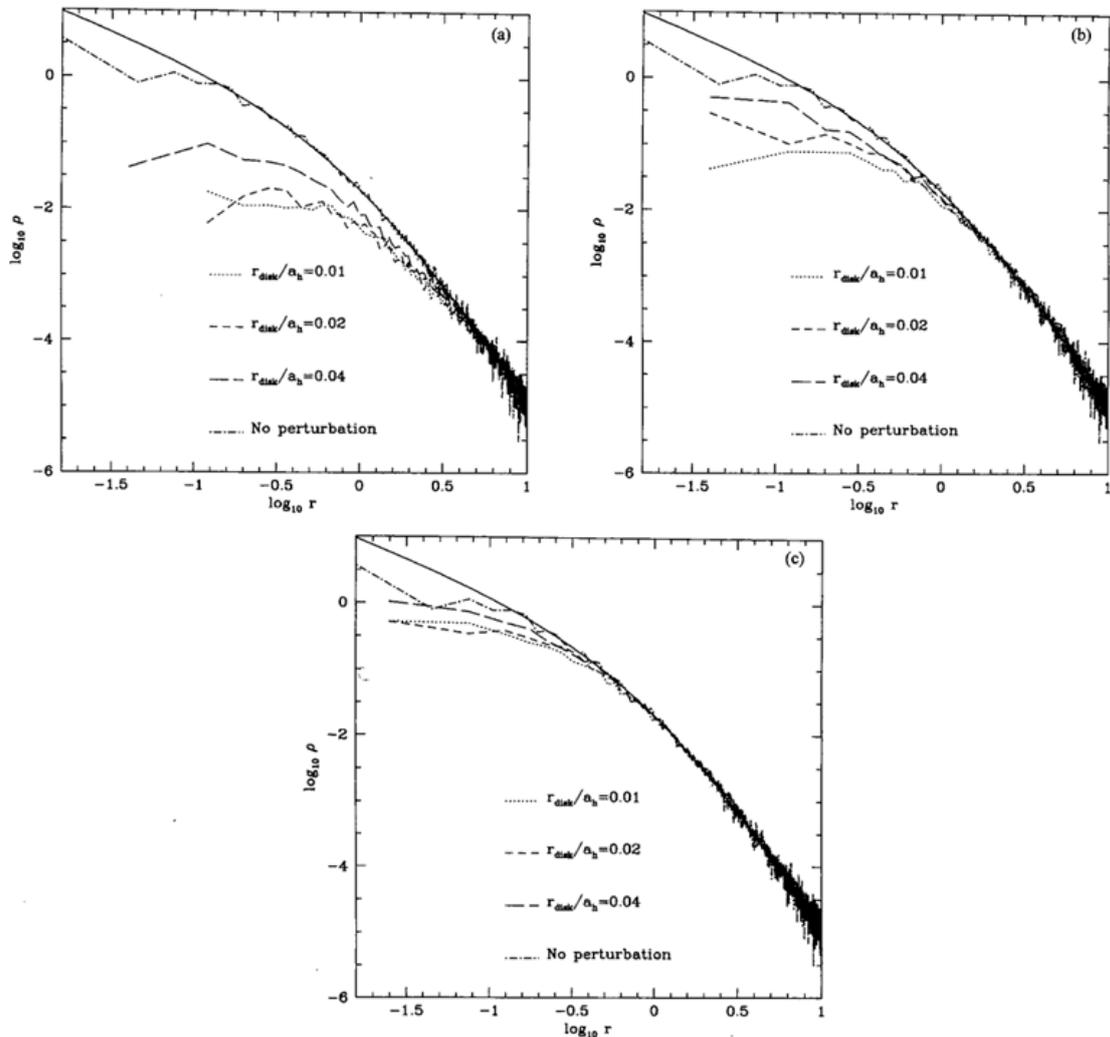


Figura 1.10: Perfiles de densidad en equilibrio del halo tras eliminar el disco. La línea sólida muestra el perfil Hernquist original sin perturbación. La línea de punto-rayas es el perfil en equilibrio del modelo Hernquist en aislamiento en $t = 200$ (a) $M_{disc} = 200$ (b) $M_{disc} = 0.1$ (c) $M_{disc} = 0.05$. a_h es el factor de escala (en kpc). Imagen de [97]

oscura con menos masa? Esta pregunta es el origen del problema "Demasiado grande para fallar". Inicialmente este problema fue visto en los satélites de la Vía Láctea, pero ha sido encontrado en Andromeda [118], y en otras galaxias de campo, confirmado que no es una anomalía de la Vía Láctea.

Una sobrestimación sistemática de un factor ~ 2 de la masa de la materia oscura del halo de la Vía Láctea resolvería en un principio el problema TBTF para la galaxia, ya que el número de subhalos masivos que no corresponden con las galaxias enanas observadas sería consistente con las fluctuaciones estadísticas [19]. La manera más prometedora de resolver este problema es tener en cuenta los efectos de la física bariónica. Simulaciones hidrodinámicas y N -Body muestran que las reacciones energéticas de las supernovas pueden reducir sustancialmente la cantidad de materia oscura en la región central de los subhalos, reduciendo en consecuencia la velocidad circular observada [42]. Sin embargo, Ostriker et al. [102] señalan que es innecesario buscar una solución en la física bariónica, ya que identifican el problema TBTF con la falta de galaxias de brillo medio en los grupos galácticos, entorno

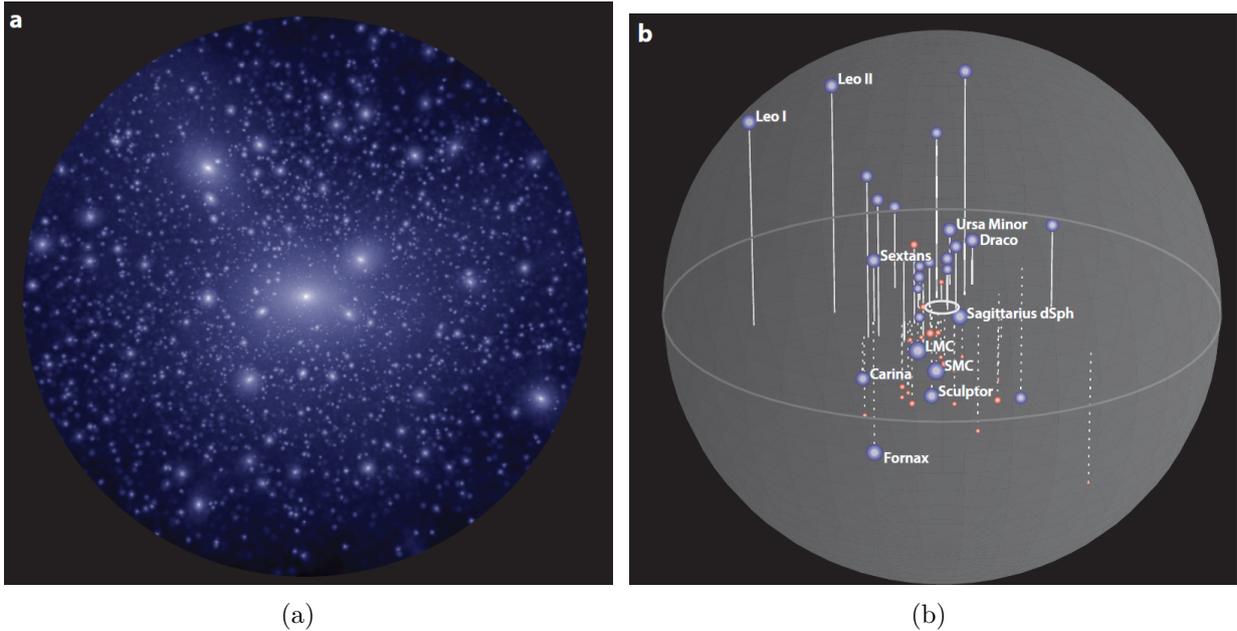


Figura 1.11: Estructura predicha por el modelo Λ CDM (a) versus satélites observados en la Vía Láctea (b). El panel *a* muestra la distribución de materia oscura dentro de una esfera de radio 250 kpc alrededor del centro de un halo de materia oscura del tamaño del de la Vía Láctea (simulación por V. Robles y T. Kelley). El panel *b* (por M. Pawlowski) muestra el censo actual de satélites de la Vía Láctea, con las galaxias descubiertas desde 2015 en rojo. El disco galáctico está representado por un círculo de radio 15 kpc en el centro, y la esfera exterior tiene 250 kpc. Las 11 galaxias satélites más brillantes están etiquetadas con su nombre. El tamaño de los símbolos no está a escala pero son proporcionales al logaritmo de cada masa estelar de la galaxia. Abreviaturas: dSph: esferoide enana (*dwarf spheroidal*), LMC: Gran Nube de Magallanes (*Large Magellanic Cloud*); MW: Vía Láctea (*Milky Way*); SMC: Pequeña Nube de Magallanes (*Small Magellanic Cloud*)

a 1-2 magnitudes menos brillantes que la galaxia principal. De acuerdo a sus análisis, esta diferencia coincide con sus simulaciones de materia oscura, por lo que concluyen que es debida a la dinámica gravitacional en vez de a la física bariónica.

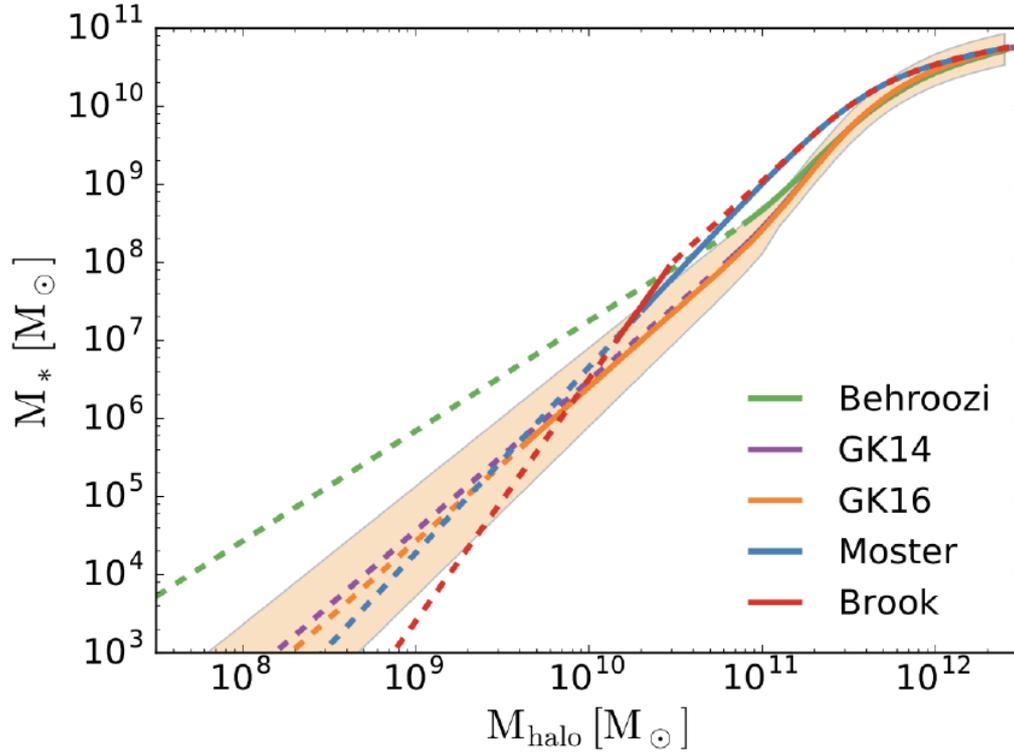


Figura 1.12: Relaciones coincidencia de abundancia (*Abundance matching*) para los modelos de Behroozi [10], Garrison-Kimmel GK14[49], Garrison-Kimmel GK16[50], Moster[94] y Brook [22]. Las líneas solidas muestran los modelos en la región del espacio de parámetros donde existen datos observaciones, la línea de rayas muestra la extrapolación de los modelos para la zona donde no existe información observacional. La zona naranja muestra la dispersión σ log-normal entorno al modelo GK16. Imagen de [40].

1.5. Introducción a las galaxias enanas

Se consideran galaxias enanas aquellas que tengan entre 1000 y varios miles de millones de estrellas. Los estudios indican que la mayor parte de las galaxias en el Universo son enanas, y que estas están dominadas generalmente por la materia oscura [8]. Esto las hace especialmente interesantes en su estudio para comprobar modelos de materia oscura ya que, para un modelo dado, podemos realizar simulaciones numéricas para compararlas con las observaciones, pero hay que tener en cuenta que la física bariónica puede alterar los resultados. Es esperable que las galaxias enanas tengan una cantidad inferior de materia bariónica en comparación con la materia oscura, ya que las masas de los halos estarían cerca de la masa crítica por la cual debajo de ella la formación estelar estaría fuertemente suprimida por la reionización ultravioleta, con lo cual la proporción materia bariónica-oscura es menor que en galaxias grandes. Esto nos interesa ya que será más fácil comparar las observaciones de estas galaxias con las simulaciones de materia oscura, al ser el componente mayoritario.

Debido a su poca luminosidad, la dinámica estelar puede ser estudiada en detalle únicamente si están lo suficientemente cerca. Por esta razón se estudian las galaxias enanas pertenecientes al Grupo Local, donde existen alrededor de cien conocidas dentro de un

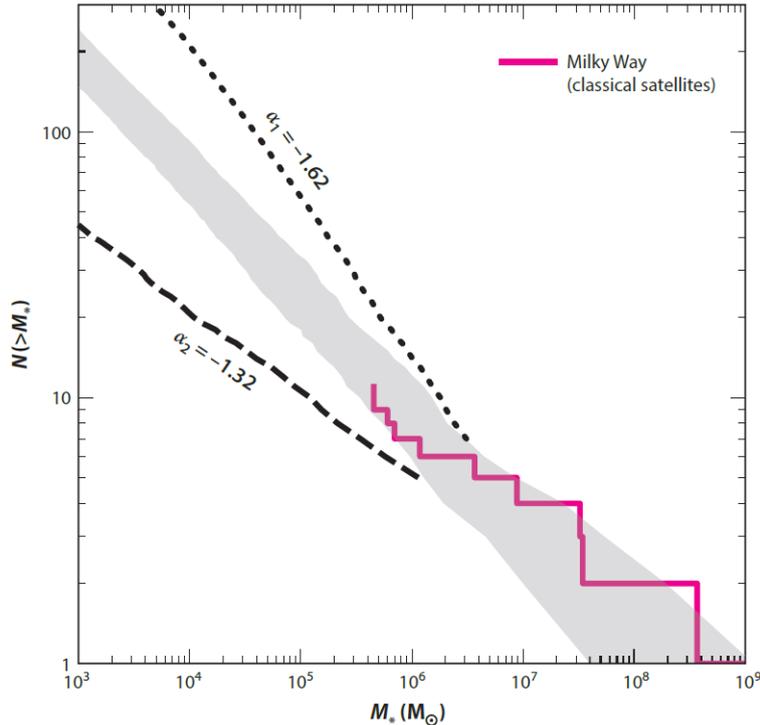


Figura 1.13: Conteo acumulado de galaxias alrededor de la Vía Láctea. La zona gris muestra la función de masa estelar de las simulaciones ELVIS de materia oscura (Garrison-Kimmel et al. 2014). Si la pendiente para el extremo de menor masa es α_1 o α_2 la abundancia de satélites con $M_* \gtrsim 10^4 M_\odot$ difiere en un factor 10. Imagen de [23].

radio de 1 Mpc de la Vía Láctea. La mayoría de Galaxias Enanas, (de ahora en adelante, GE) carecen de gas, por lo que generalmente el mayor interés observacional pertenece a las estrellas. Sin embargo, cuando exista un disco gaseoso, su curva de rotación puede servir como dato observacional para las propiedades de la galaxia. Se suelen considerar enanas esferoides (dSphs) o enanas ultra tenues (UFDs) cuando tienen, respectivamente, una magnitud absoluta en la banda del visible mayor o menor de $M_V = -7.7$. Para las GE que contienen gas, se usa el término enanas irregulares (dIrrs). Las GE con una distancia actual de al menos 400 kpc de una galaxia principal espiral son consideradas aisladas. La mayoría de las GE cercanas a la Vía Láctea o a Andromeda están desprovistas de gas, mientras que las galaxias con presencia de gas son encontradas aisladas. En la imagen 1.15 se muestra, como ejemplo, la galaxia enana Sculptor (satélite de la Vía Láctea).

1.6. Estudios previos sobre las galaxias enanas

Para estudiar las galaxias enanas y obtener resultados que nos aporten información sobre su comportamiento asociado a su gran porcentaje de materia oscura, debemos observar su cinemática interna. Las observaciones de la sonda *Gaia* sobre la velocidad de las estrellas, usando la GE Draco con las estrellas de la rama gigante roja (RGB) entorno a 1 mag por debajo del pico de la RGB como referencia, nos da una incertidumbre de entorno a 30 km s^{-1} , mientras las medidas de la velocidad de la línea de visión (*l.o.s*, *line-of-sight*) nos da una incertidumbre de entorno a $1\text{-}2 \text{ km s}^{-1}$ [8]. Es por esto que se usa

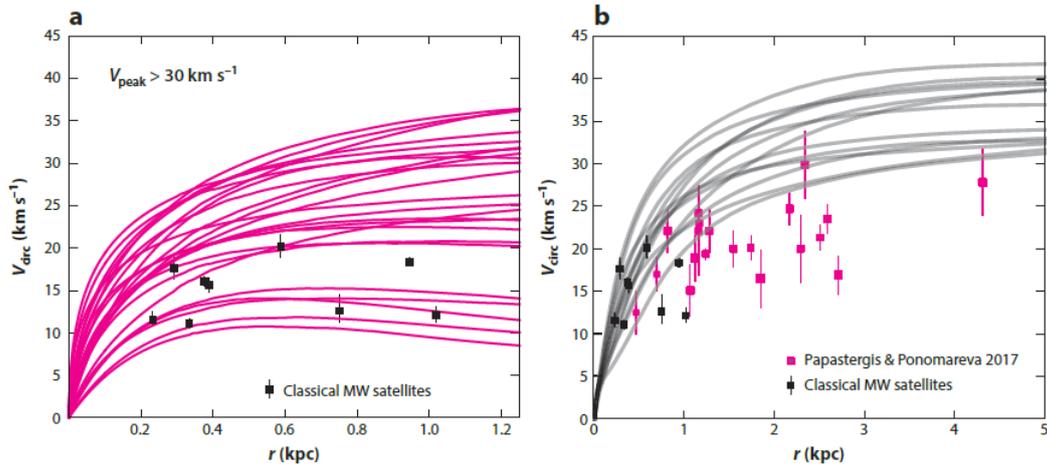


Figura 1.14: (a) Los puntos negros muestran las velocidades circulares de satélites clásicos de la Vía Láctea con $M \approx 10^{5-7} M_{\odot}$ medido en radio de media luz $r_{1/2}$ (radio en el cual la mitad de la luz está contenida). Las líneas magentas muestran las curvas de velocidades circulares de subhalos de una de las simulaciones Aquarius (con materia oscura únicamente). Los halos que son así de masivos están probablemente libres de supresión de formación estelar por reionización, por lo que se aparentan ser demasiado grandes como para fallar en la formación estelar. La existencia de un gran número de estos satélites con masas centrales mayores que cualquiera de las galaxias enanas clásicas de la Vía Láctea es el origen del problema "Too-big-to-fail". (b) El mismo problema, discordancia entre las masas centrales de las galaxias de materia oscura simuladas y las galaxias observadas. Esto persiste para galaxias enanas de campo (puntos magentas), indicando que no es un fenómeno único de los satélites. Las curvas grises son predicciones para halos Λ CDM de las simulaciones de Fitts et al. (2016). Imágenes de [23]

el componente de la velocidad en la l.o.s en el modelado dinámico.

1.6.1. Movimientos ordenados

El estudio de los gradientes de velocidad de la l.o.s y las componentes de movimiento propio de los vectores velocidad en GE del Grupo Local puede dar información sobre la evolución y formación de estos sistemas. Los gradientes de velocidad pueden surgir de diversas causas, incluyendo la rotación intrínseca, la transmisión de movimientos y los efectos de marea. Se han observado ejemplos de probables gradientes de velocidad ocasionados por efectos de marea en las GE NGC 205 [51], Tucana III [69] y Antlia II [60]. Actualmente, la cantidad de datos, la precisión de la medida de la velocidad y la cobertura espacial de las medidas de los gradientes de velocidad es normalmente insuficiente para determinar la amplitud y dirección de estos gradientes, pero pueden aportar límites útiles. La gran mayoría de las mediciones de los gradientes de velocidad se realiza con el componente de velocidad en la l.o.s. Un análisis exhaustivo de 40 GE del Grupo Local [128] encontró evidencias importantes de gradientes de velocidad en solo 7 galaxias, de las cuales 5 estaban aisladas, implicando que estos gradientes eran debido a procesos internos. La dispersión de la velocidad medida es de $V/\sigma \leq 2$ para toda la mezcla y $\lesssim 1$ para más de 3/4 de ella. Asumiendo que los gradientes de velocidad están causados por la



Figura 1.15: Galaxia enana *Sculptor*, una de las galaxias satélite de la Vía Láctea

rotación, este descubrimiento sugiere que la rotación es típicamente subdominante frente a los movimientos aleatorios. En general, un modelo con velocidad radial incremental de rotación es preferente frente a uno de velocidad de rotación constante.

Desde el estudio [128] solo han sido encontrados gradientes significativos de la velocidad (o al menos preferentes frente a modelos no rotacionarios) en Phoenix, Aquarius, NGC 6822, y IC 1613 con $V/\sigma \sim 1$ para las primeras dos galaxias y <1 para las otras dos. Hasta la fecha, las únicas medidas de movimientos ordenados han sido realizados por [73] con Gaia eDR3, encontrando movimientos ordenados en las GE Sculptor, Fornax y Carina, con un ratio de movimientos ordenados vs aleatorios menor que 0.5. En general, los movimientos ordenados son subdominantes frente a los movimientos aleatorios en las GE del Grupo Local, excepto en unas pocas excepciones.

1.6.2. Movimientos aleatorios

Estudiando los movimientos aleatorios en las galaxias enanas, los cuales son mayoritarios frente a los ordenados, podemos inferir información sobre la masa de materia oscura y su distribución. Por el momento solo un valor global de la dispersión de la velocidad en la l.o.s, σ_{los} está disponible para la mayoría de GE del Grupo Local. El conocimiento de la forma de la dispersión de la velocidad de la l.o.s se limita a las GE clásicas dSphs de la Vía Láctea (MW dSphs), algunos satélites de M31 y unas pocas GE aisladas. Las incertidumbres en las UFDs de σ_{los} son particularmente grandes, especialmente para aquellas más tenues que $M_V \sim 4.5$ ($L \sim 5 \times 10^3 L_\odot$). No existe diferencia estadística en las galaxias MW dSphs, M31 dSphs y GE aisladas del Grupo Local en su σ_{los} [8]. Las galaxias clásicas MW dSphs tienen muestras espectroscópicas considerables de σ_{los} , muy precisas, lo que permite un mayor detalle en su modelado dinámico (Imagen 1.16) Los

perfiles de σ_{los} son aproximadamente constantes con el radio, con pequeños descensos o aumentos en algunos casos. Hay evidencias de que la amplitud y forma del perfil de σ_{los} pueden variar como una función del ángulo azimutal [56].

Uno de los desarrollos mas interesantes de los últimos años es la obtención de las primeras medidas de los movimientos aleatorios a partir de los componentes del vector velocidad a lo largo del plano del cielo (*plane-of-sky*) se consiguieron con un uso sinérgico de Gaia y HST, permitiendo reducir las incertidumbres del movimiento propio en un orden de magnitud, lo que llevo a las medidas de los movimientos aleatorios internos de Sculptor [75] y Draco [117].

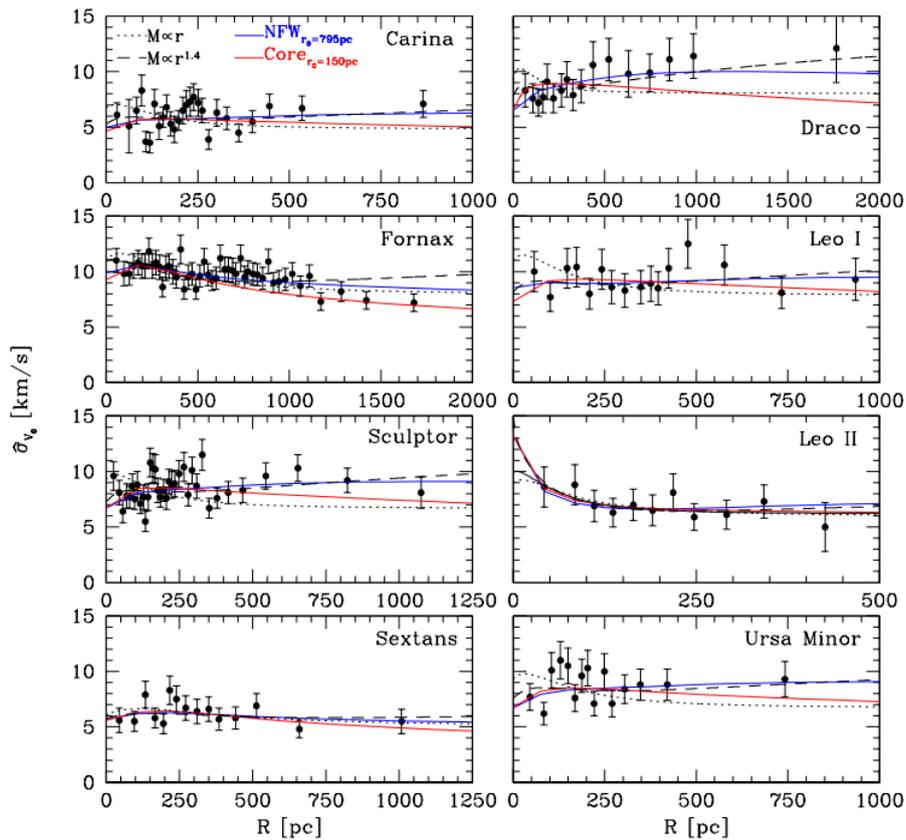


Figura 1.16: Perfil de la velocidad de dispersión proyectada para las ocho galaxias enanas satélites de la Vía Láctea más brillantes. Las líneas rojas representan el mejor ajuste de la distribución de densidad de materia oscura con un núcleo, mientras que las líneas azules representan el ajuste con un perfil de cúspide. Imagen de [122]

1.6.3. Quimo-cinemática

La disponibilidad de grandes y ampliamente extendidas muestras de datos cinemáticos y químicos de estrellas individuales en GE del Grupo Local han permitido unir los análisis de las propiedades químicas y cinemáticas. Estos estudios son conocidos como "quimo-cinemática" o "crono-cinemática" si la información de la edad está incluida, y revelan un gran nivel de complejidad en las poblaciones estelares de estas galaxias. Múltiples componentes quimo-cinematicos (CKCs, *chemo-kinematic components*) han sido

identificados en las GE Sculptor, Fornax, Sextans, Carina y Ursa Minor, [8] y su población estelar puede ser descrita como una superposición de componentes de diferente metalicidad. La presencia de múltiples CKCs tiene importantes implicaciones en el modelado dinámico, ya que son rastreadores independientes del potencial gravitatorio de la galaxia.

En la mayoría de casos, las estrellas ricas en metales tienen una dispersión de velocidad menor y más centralmente concentrada que las estrellas pobres en metales. Este proceso de ordenamiento ha sido observado en todos los casos estudiados en [44] menos en la galaxia enana Carina. La superposición de estos componentes quimo-cinemáticos podría ser responsable de algunos movimientos y protuberancias en los perfiles σ_{los} observados [77].

1.6.4. Contenido de materia oscura inferida y su distribución

Dentro del marco de la mecánica newtoniana, está bien establecido que las GE son sistemas dominados por materia oscura, tanto en el borde exterior como en las regiones centrales. La capacidad de determinar la distribución de masa de una GE a partir de las observaciones de una muestra de estrellas depende fuertemente del tamaño de la muestra y de la calidad de los datos espectroscópicos y fotométricos. Las propiedades de las galaxias se pueden inferir mediante métodos de modelado dinámico:

- Modelos basados en funciones de distribución analíticas (DF): Se asume una forma analítica para la función de distribución en función de integrales de movimiento. A partir de esta forma se pueden obtener las propiedades de las galaxias usando la energía orbital y/o el momento angular orbital y su componente a lo largo del eje de simetría.
- Superposición de órbitas de Schwarzschild: se basa en la construcción de una biblioteca de órbitas numéricamente integradas que se ponderan y combinan para reproducir la densidad de masa de la galaxia. Los pesos de las órbitas superpuestas se pueden utilizar para obtener una estimación numérica de la DF.
- Modelos basados en la ecuación de Jeans: la ecuación de Jeans relaciona momentos de velocidad de DF con la densidad de masa ρ_* y el potencial total, asumiendo simetría esférica o axial. A menudo se resuelve la ecuación para los momentos de velocidad de segundo orden en simetría esférica

Para una lectura extensa de los métodos de modelado dinámico aplicados a galaxias enanas nos referimos a [8]. Para GE con velocidades l.o.s medidas de un orden de $10^2 - 10^3$ km/s, se pueden usar análisis DF y modelado Schwarzschild o Jeans [8].

Para las muestras de GE del Grupo Local de [7] (figura 1.17) ha computado la masa dinámica $M_{dyn}(r_{1/2})$ en el interior del volumen 3D de radio de media luz $r_{1/2}$ usando la estimación de masa:

$$M_{dyn}(r_{1/2}) = 4 \frac{\sigma_{los}^2 R_{1/2}}{G}. \quad (1.9)$$

Conocer la distribución de materia oscura y la masa bariónica de las galaxias enanas es una pieza fundamental en la comprensión de la formación y evolución de la materia oscura. En este caso veremos como ejemplo la distribución de masa y de densidad de la galaxia enana dSph Draco.

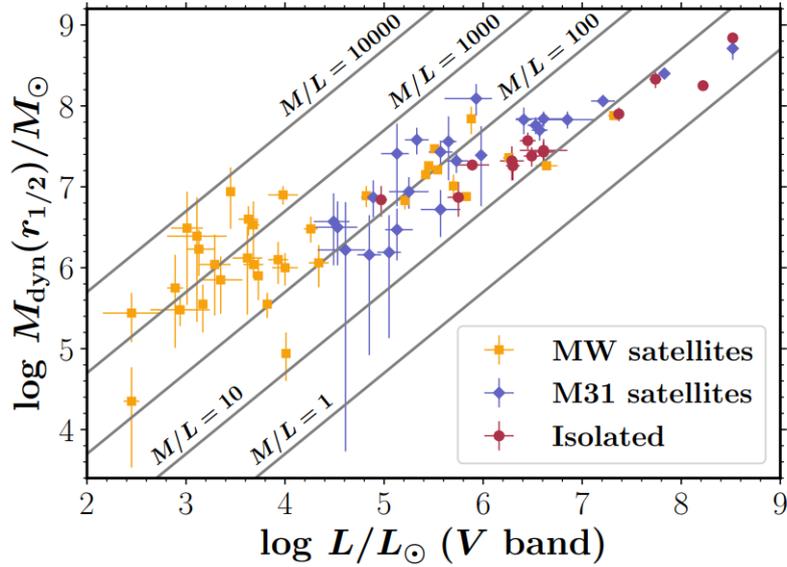


Figura 1.17: Masa dinámica M_{dyn} contenida en el volumen 3D de radio de media luz $r_{1/2}$ como función de la luminosidad total en banda V, L, para las GE del Grupo Local estudiados en [7]. La masa dinámica ha sido estimada con [1.9]. Los símbolos representan los valores de la mediana estimados de L y M_{dyn} en la banda V y las barras de error corresponden a los percentiles 16° y 84° de la distribución de estas cantidades. La distribución de M_{dyn} ha sido obtenida a partir de 10000 simulaciones en las cuales los valores de σ_{los} y $R_{1/2}$ han sido extraídos de distribuciones gaussianas simétricas centradas en la mediana observada de σ_{los} y $R_{1/2}$. Su desviación estándar es dada por la media de la menor (16%) y superior (18%) incertidumbre de estas cantidades. Imagen de [8]

En la galaxia Draco la masa estelar es despreciable en todo su radio (ver figura 1.18), ya que M_{dyn} es un factor ≈ 100 mayor que la M_* dentro de $r_{1/2} \approx 0.25kpc$ y un factor ≈ 1000 dentro de 2 kpc. Draco aparenta tener un halo de materia oscura en forma de cúspide [57], como es sugerido en los perfiles de densidad de la figura 1.18.

1.7. Conclusiones

En este capítulo hemos introducido el modelo Λ CDM y su motivación. Se ha hecho un resumen de sus posibles componentes, y analizado sus éxitos observacionales y sus problemas, así como su distribución en los halos. Sin embargo, la presencia de estos problemas y la falta de evidencia sobre su composición hace que sea interesante buscar alternativas a este modelo. En el capítulo 2 estudiaremos una de las alternativas más importantes, el modelo MOND (Mecánica Newtoniana Modificada, *MOdified Newtonian Dynamics*). En la imagen 1.19 vemos de forma esquemática las evidencias observaciones que hacen necesaria la construcción de estos modelos, y en la parte superior los modelos que intentan explicarlo.

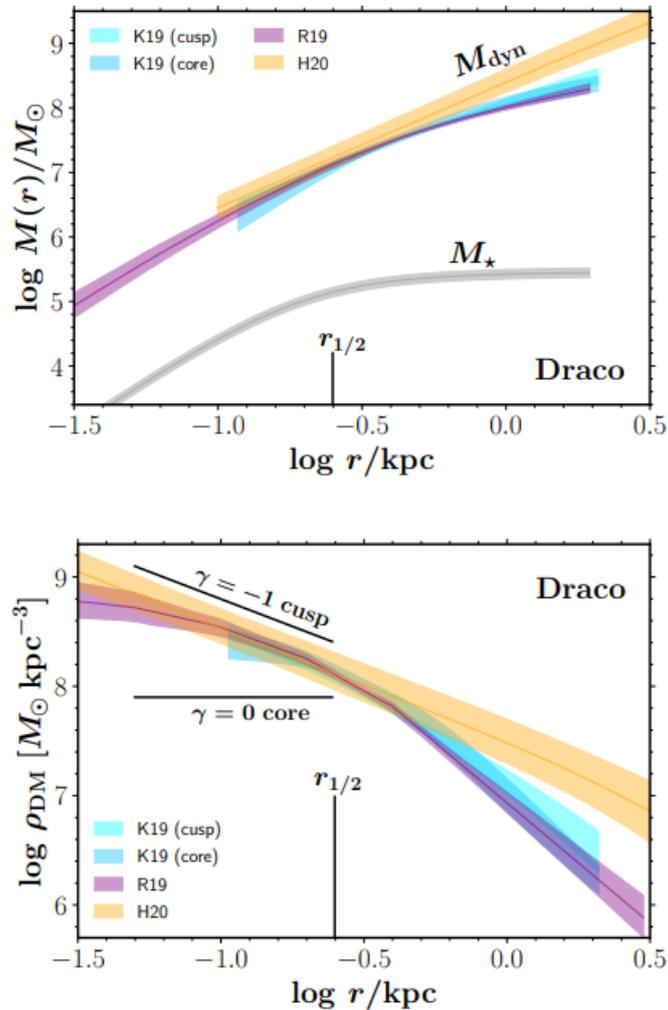


Figura 1.18: *Panel superior*: Perfiles de masa para la GE Draco. Las bandas de color representan el intervalo de confianza del 68 % de los perfiles de masa dinámica $M_{\text{dyn}}(r) = M_{\text{DM}} + M_*$ (masa de materia oscura M_{DM} + masa estelar M_*) estimado por los modelos de Kaplinghat et al. (K19, [63]), Read et al. (R19, [104]) y Hayashi et al. (H20, [57]). En el modelo H20 la distribución de densidad tiene simetría de esferoide y r es el radio circularizado. El perfil mediana está indicado por una línea sólida. La banda gris representa el perfil de la masa estelar M_* , calculado en [104]. *Panel inferior* Igual que el panel superior, pero mostrando los perfiles de densidad de materia oscura correspondientes. Se indican los perfiles $\rho_{\text{DM}} \propto r^{\gamma}$ con $\gamma = -1$ (cuspid) y $\gamma = 0$ (nucleo) sobre el rango de radio $0.2r_{1/2} < r < r_{1/2}$. Imagen de [8].

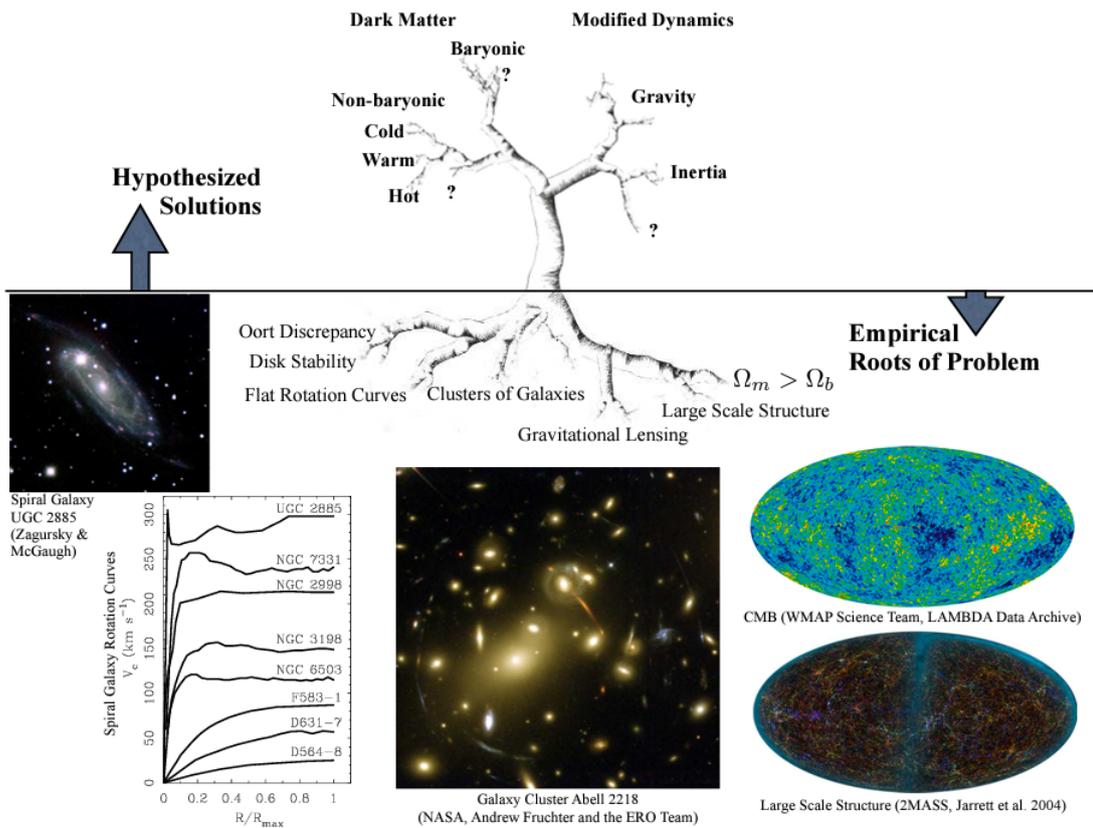


Figura 1.19: Evidencia observacional que hace necesaria la formulación de una teoría cosmológica más completa que resuelva estos problemas (parte inferior). En la parte superior tenemos las soluciones planteadas a estos problemas

2. Modified Newtonian Dynamics

En el capítulo anterior se ha introducido el modelo Λ CDM como explicación a las observaciones que no podían ser descritas únicamente con la existencia de materia barionica en la dinámica newtoniana. Sin embargo, esta solución podría no ser la única. También es plausible que las leyes de la dinámica deban ser modificadas en escalas galácticas. Una de estas propuestas es la Dinámica Newtoniana Modificada, que postula una constante con dimensiones de aceleración, a_0 . En MOND, la dinámica Newtoniana estándar es únicamente válida para aceleraciones mucho mayores que a_0 , mientras que por debajo de este valor MOND predice una relación diferente entre la masa y la velocidad.

2.1. La escala de aceleración característica, a_0

La aparición de una escala de aceleración característica, a_0 , en varias relaciones galácticas aparentemente independientes, la mayoría no predichas por Λ CDM [2.1], parece indicar la presencia de un mecanismo físico. El valor de esta escala es $a_0 \simeq 10^{-10} \text{m s}^{-2}$, que en unidades naturales coincide con $a_0 \sim H_0 a_0^2 \sim \Lambda$ [89], siendo Λ la constante cosmológica. Es sorprendente en ese punto observar que la materia oscura y la energía oscura tienen una escala común, por lo que se podría dejar de considerar a la energía oscura un componente adicional independiente del sector de la materia oscura y considerar que la Relatividad General (RG) no describe la gravedad bien a escalas grandes y en campos gravitacionales débiles, de forma que se solventarían los dos coincidencias.

Bajo este modelo los efectos que se suelen atribuir a la materia oscura son en realidad provocados por el fallo de la RG a escalas cosmológicas, y los bariones serían la fuente real de los efectos atribuidos a la materia oscura.

2.1.1. Relación Tully-Fisher

La relación Tully-Fisher es considerada una de las correlaciones más sólidas en la astronomía extragaláctica. Esta relación empírica fue identificada inicialmente entre el brillo de una galaxia y su ancho de línea de hidrógeno, y ha sido ampliamente utilizada como un indicador de distancia. Se ha descubierto que la relación más fundamental en una galaxia es entre la masa bariónica total observada y la velocidad de rotación. En la mayoría de las galaxias brillantes, las estrellas contienen la mayoría de la masa bariónica detectada, lo que hace que el brillo sea un indicador suficiente para la masa. La siguiente reserva más importante de bariones conocida es el hidrógeno atómico neutro (HI) del medio interestelar. Si se utiliza la masa bariónica detectada en lugar del brillo, se observa una relación bien ajustada entre la masa bariónica total y la velocidad de rotación, conocida como la Relación Bariónica Tully-Fisher (BTFR). Esta relación se extiende desde las galaxias brillantes hasta las galaxias de baja masa, típicamente con baja luminosidad superficial y ricas en gas. A lo largo de este rango, la BTFR tiene muy poca dispersión

intrínseca y se describe bien como una ley de potencia, con una pendiente consistente con una escala de aceleración constante:

$$\log M_b = \alpha \log V_f - \log \beta, \quad (2.1)$$

con pendiente $\alpha = 4$ [81], M_b la masa bariónica, V_f la velocidad en la porción plana de la curva de velocidad. Esta pendiente es consistente con una escala de aceleración $a = V_f^4/(GM_b)$ tal que la constante de normalización es $\beta = Ga$. Esta escala es $a \approx 10^{-10}$ m s $^{-2}$.

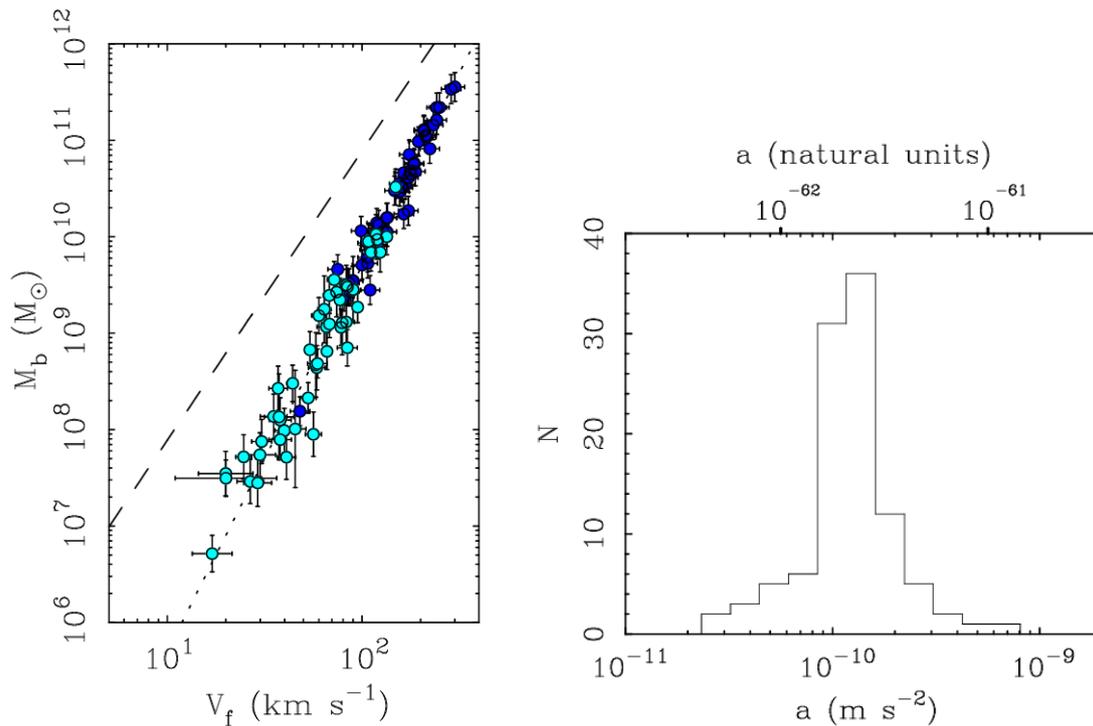


Figura 2.1: Panel izquierdo: Relación bariónica Tully-Fisher masa-velocidad de rotación para galaxias con velocidad exterior V_f . Los puntos azul oscuro representan las galaxias con M_* (masa estelar) $> M_g$ (masa de gas). Los puntos azul claro representan las galaxias con $M_* < M_g$. La línea de puntos tiene pendiente 4 y corresponde a un parámetro de aceleración 1.2×10^{-10} m s $^{-2}$. La línea de rayas tiene pendiente 3 como se esperaría en el modelo Λ CDM si todos los bariones asociados con los halos de materia oscura son únicamente los detectados. Imagen de [78]. Panel derecho: Histograma de la aceleración $a = V_f^4/(GM_b)$ en m s $^{-2}$ y unidades para. El pico de la gráfica se encuentra en un valor característico $\sim 10^{-10}$ m s $^{-2}$. Imagen de [46]

Como podemos ver en el panel izquierdo de la figura 2.1, el modelo MOND encaja perfectamente la relación bariónica Tully-Fisher para un parámetro de aceleración 1.2×10^{-10} m s $^{-2}$, mientras que en el modelo Λ CDM es necesario buscar soluciones alternativas, entre la que destaca la existencia de una masa importante de materia bariónica no detectada en el halo [79]. Esta solución no está exenta de problemas, ya que la masa fraccional de los bariones desconocidos debe variar al unísono con la velocidad de rotación V_f .

2.1.2. El rol de la densidad superficial

El límite de Freeman [48] es la luminosidad máxima de la superficie central en la distribución de la luminosidad superficial galáctica. Originalmente se pensó como una luminosidad superficial universal pero ha sido demostrado que las galaxias existen en un amplio rango de luminosidad superficial, lo que implica un rango comparable en densidad bariónica superficial. El límite superior a la distribución de luminosidad superficial es interesante en el contexto de estabilidad del disco, ya que los discos puramente newtonianos y dinámicamente fríos son propensos a inestabilidades auto-destructivas. Las galaxias con un disco bariónico y un halo de materia oscura son escalables, es decir, si un modelo galáctico tiene una cierta dinámica, multiplicando todas las densidades por una constante positiva, y escalando las velocidades, obtendríamos una galaxia con la misma dinámica. Por esto, es sorprendente que exista un límite superior para la densidad superficial bariónica, Σ_b , y más que este límite coincida en el orden de a_0 como vemos en 2.2

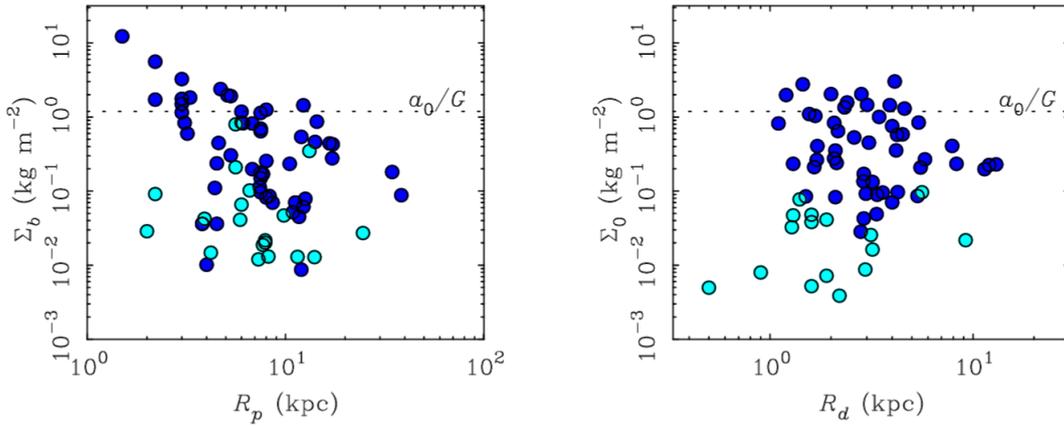


Figura 2.2: Densidad superficial bariónica de una muestra de galaxias frente a su radio. Los puntos azul oscuro son galaxias dominadas por estrellas y los azul claro por gas. Observamos un umbral de máxima densidad superficial (a veces denominado límite de Freeman) a partir del cual encontramos mucho menos discos. Esto es presumiblemente un efecto de estabilidad, ya que los discos puramente Newtonianos son inestables, y los estables solo aparecen por debajo de una densidad superficial crítica $\Sigma_{\dagger} \approx a_0/G$. Imagen de [46]

2.1.3. Relación discrepancia de masa-aceleración

Si establecemos una relación entre la discrepancia de masa (aquella masa que deberíamos añadir a la materia bariónica observada para que cuadren las observaciones con las leyes de la dinámica) y la aceleración, observamos que nuevamente vuelve a aparecer la constante a_0 , ya que la discrepancia de masa existe principalmente para aceleraciones muy bajas, $a < a_0$ [46]. El modelo Λ CDM no contempla que exista esta relación, y menos que esta escala coincida con la escala para la densidad superficial crítica $\Sigma_{\dagger} = a_0/G$.

No se ha encontrado relación entre la discrepancia de masa y el radio, únicamente para las aceleraciones. Estas aceleraciones tan bajas existen para escalas galácticas y no para escalas dentro del sistema Solar, como vemos en 2.3, ya que las aceleraciones centrípetas experimentadas por las estrellas que orbitan una galaxia son mucho menores que las experimentadas por los cuerpos del sistema Solar.

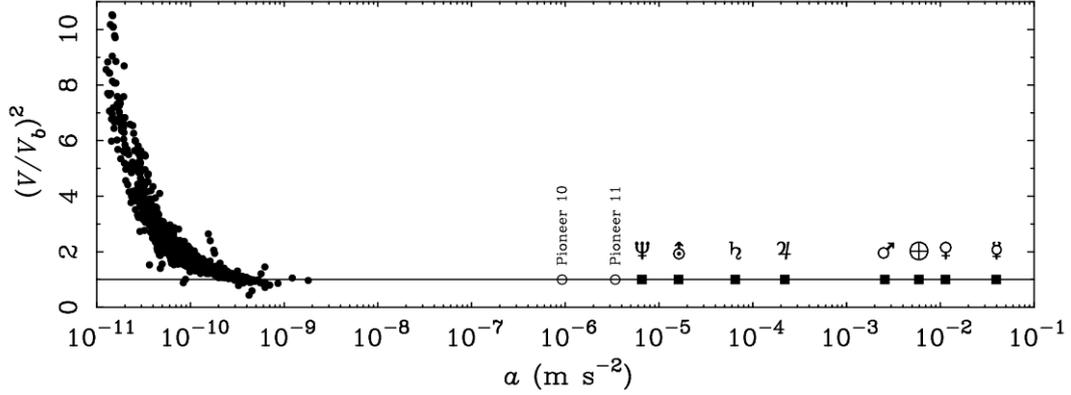


Figura 2.3: Discrepancia de masa para galaxias espirales y cuerpos del sistema Solar frente a aceleraciones, donde V es la velocidad observada y V_b la velocidad atribuible a la materia bariónica. Como podemos observar la discrepancia de masa Solo existe en aceleraciones bajas, haciéndose significativa para $a \gtrsim a_0$. Datos de galaxias de [82]. Imagen de [46]

También es remarcable que la distribución de materia oscura en una galaxia es enteramente predecible a partir de la distribución de la masa luminosa, pese a que la materia bariónica es (en un principio) menos abundante que la oscura en un factor 5. Esto hace dudar de la necesidad de la existencia de esta última. Este balance entre los parámetros de la materia bariónica y la oscura hace necesaria, nuevamente, la existencia de un proceso de ajuste fino desconocido [55].

2.2. Fenomenología MOND. Ley de Milgrom

El punto básico de MOND, a partir de la cual obtenemos las predicciones, puede ser simplemente expuesto como sigue: una partícula a una distancia r de un gran masa M está sujeta a una aceleración a dada por:

$$\frac{a^2}{a_0} = \frac{MG}{r^2}, \quad (2.2)$$

cuando $a \ll a_0$, en lugar de la expresión estándar $a = MG r^{-2}$.

Las dos expresiones pueden ser interpoladas mediante la siguiente relación, llamada **ley de Milgrom** [46]:

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) a = \frac{MG}{r^2} = a_N \quad (2.3)$$

donde a_N es la expresión newtoniana para la aceleración, y la función interpolación $\mu(x)$ satisface $\mu \approx 1$ cuando $x \gg 1$ y $\mu \approx 0$ cuando $x \ll 1$ [88]. Esta expresión captura la esencia de MOND, y $\mu(x)$ es formulada en diferentes expresiones dependiendo de la teoría. Sin embargo, la fenomenología pertinente a la discrepancia de masa en sistemas galácticos ocurre en el régimen profundo MOND ($a \ll a_0$), donde sabemos que $\mu(x) \approx x$.

Entendiendo la ley de Milgrom (2.3) como una modificación de la dinámica clásica (veremos el comportamiento de MOND en teorías relativistas más adelante) podemos entenderlo como una modificación de la gravedad o de la inercia. Un conjunto de partículas m_i moviéndose en un campo gravitacional generado por una distribución de densidad de

materia $\rho = \sum_i m_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ y descrita por un potencial Newtoniano Φ_N tiene la siguiente acción:

$$S_N = S_{kin} + S_{in} + S_{grav} = \int \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} d^3x dt - \int \rho \Phi_N d^3x dt - \int \frac{|\nabla \Phi_N|^2}{8\pi G} d^3x dt. \quad (2.4)$$

Modificando el término cinemático (S_{kin}) obtenemos la inercia modificada, y modificando el término gravitatorio (S_{grav}) la gravedad modificada.

2.2.1. MOND como inercia modificada

Bajo esta posibilidad construimos acciones cinéticas modificadas (el término S_{kin} de la acción 2.4) que son funcionales dependientes de la trayectoria de la partícula así como de la aceleración característica a_0 . Por construcción, el potencial gravitatorio está aun determinado por la ecuación Newtoniana de Poisson, pero la ecuación de movimiento de la partícula se convierte, en lugar de la segunda ley de Newton en:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}(\mathbf{t}), a_0] = -\nabla \Phi_N, \quad (2.5)$$

donde \mathbf{A} es un funcional de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$, con dimensiones de aceleración. El límite Newtoniano corresponde a

$$a_0 \rightarrow 0, \mathbf{A} \rightarrow d^2\mathbf{x}/dt^2, \quad (2.6)$$

y el límite MOND [46]:

$$a_0 \rightarrow \infty, \mathbf{A}[\mathbf{x}(\mathbf{t}), a_0] \rightarrow a_0^{-1} \mathbf{Q}(\mathbf{x}(\mathbf{t})). \quad (2.7)$$

Donde \mathbf{Q} tiene dimensiones de aceleración al cuadrado.

Bajo esta teoría se pueden hacer predicciones robustas para trayectorias circulares, aunque se hace muy difícil para orbitas no circulares ya que la no localidad en el tiempo puede hacer que la aceleración anómala en cualquier ubicación dependa de las propiedades de toda la órbita. La ecuación (2.5) se expresa para trayectorias ligadas:

$$\mu\left(\frac{V_c^2}{R a_0}\right) \frac{V_c^2}{R} = -\frac{\partial \Phi_N}{\partial R}. \quad (2.8)$$

2.2.2. MOND como gravedad modificada

La idea de la gravedad modificada es preservar la ecuación de movimiento de la partícula preservando la acción cinemática, pero cambiando la acción gravitacional, y por tanto modificando la ecuación de Poisson. Por lo tanto, la acción se puede escribir como:

$$S_{gravBM} \equiv - \int \frac{a_0^2 F(|\nabla \Phi|^2/a_0^2)}{8\pi G} d^3x dt, \quad (2.9)$$

donde F puede ser cualquier función adimensional. Variando la acción con respecto a al potencial Φ lleva a la siguiente generalización no lineal de la ecuación Newtoniana de Poisson

$$\nabla \cdot \left[\mu\left(\frac{|\nabla \Phi|}{a_0}\right) \nabla \Phi \right] = 4\pi G \rho, \quad (2.10)$$

donde $\mu(x) \equiv dF(y)/dy|_{y=x^2}$. Esta teoría satisface todas las leyes de conservación dado que es derivada de una acción que tiene todas las simetrías habituales.

De esta forma se pueden obtener a las ecuaciones de movimiento del centro de masas deseadas para sistemas compuestos: estrellas, cúmulos estelares, etc moviéndose en una galaxia con una baja aceleración del centro de masas y cuyos componentes internos tienen aceleraciones mucho mayores que a_0 .

Esta ecuación de Poisson se resuelve generalmente numéricamente, pero para configuraciones altamente simétricas, la aplicación de la ley de Gauss a la ecuación nos da la relación algebraica exacta entre MOND y el campo de aceleración Newtoniano [88]:

$$\mu(a/a_0)\mathbf{a} = \mathbf{a}_N. \quad (2.11)$$

El límite profundo de MOND ($a \ll a_0$) corresponde con una teoría que es conformemente invariante. Esto nos hace posible derivar resultados interesantes como una expresión para la fuerza entre dos cuerpos, una relación virial, a pesar del obstáculo de la no linealidad. El potencial gravitatorio en estas condiciones adopta la forma:

$$\Phi(r) \sim \sqrt{GMa_0} \ln(r), \quad (2.12)$$

para largas distancias de una masa M .

Cabe destacar que existe un gran número de fenómenos gobernados por una ecuación de la misma forma que (2.10). Un ejemplo es el flujo estacionario de un fluido descrito por la ecuación de Poisson no lineal.

En las teorías de gravedad modificada, el campo gravitacional es modificado, pero todos los cuerpos en la misma posición se someten a una aceleración igual. En la inercia modificada, la aceleración depende no solo de la posición, sino también de la trayectoria. La inercia modificada tiene más libertad en su implementación ya que modifica la acción como un funcional de la trayectoria.

2.2.3. La función interpolación $\mu(x)$

El punto básico del paradigma MOND es reproducir la ley de Milgrom 2.3, con una función interpolación que asintóticamente obedezca $\mu(x) \rightarrow 1$ para $x \gg 1$ y $\mu(x) \rightarrow x$ para $x \ll 1$. Para que la relación entre a y a_N esté unívocamente determinada, otra ligadura es que $x\mu(x)$ debe ser una función monótonamente creciente de x , o lo que es lo mismo:

$$\mu(x) + x\mu'(x) > 0 \Rightarrow \frac{d \ln \mu}{d \ln x} > -1. \quad (2.13)$$

Una formulación alternativa de MOND es:

$$\mathbf{a} = \nu \left(\frac{a_N}{a_0} \right) \mathbf{a}_N \quad (2.14)$$

donde la función interpolación $\nu(x)$ es:

$$\nu(y) = 1/\mu(x) \text{ donde } y = x\mu(x) \quad (2.15)$$

en este caso $y\nu(y)$ debe ser una función monótonamente creciente con y .

En simetría esférica, todas las formulaciones pueden hacerse equivalente eligiendo funciones de interpolación equivalentes, pero las teorías diferirán ligeramente fuera de la simetría esférica. Por ejemplo, consideremos la función interpolación más usada [131], que se ajusta perfectamente al rango de régimen gravitatorio débil a intermedio, pero falla en el gravitatorio fuerte propio del sistema Solar. Esta función es conocida como función μ "simple"

$$\mu(x) = \frac{x}{1+x}. \quad (2.16)$$

Existe una familia o conjunto de funciones μ , que llamaremos familia- α por el sub-índice que llevan, expresadas por:

$$\mu_\alpha(x) = \frac{2x}{1 + (2 - \alpha)x + [(1 - \alpha x)^2 + 4x]^{1/2}}, \quad (2.17)$$

donde el caso $\alpha = 0$ es conocido como la función μ de Bekenstein [13]. El problema de esta familia de funciones es que se aproximan a 1 de forma demasiado lenta.

Otro conjunto de funciones que se acerca asintóticamente más rápido a 1 es la familia- n :

$$\mu_n = \frac{x}{(1+x^n)^{1/2}} \quad (2.18)$$

donde el caso $n = 1$ es la función μ simple, y $n = 2$ es ampliamente usado en el análisis de las curvas de rotación [9, 112], y es conocida como la función μ estándar.

Como la función simple μ encaja bien las curvas de rotación galácticas pero funciona mal en el sistema Solar, puede ser útil definir funciones μ que tengan una transición gradual similar a la función simple en el régimen gravitatorio de débil a intermedio, y una transición más rápida hacia 1 que la función simple. Estos conjuntos de funciones son descritos en [92] en términos de la función ν :

$$\nu_\beta(y) = (1 - e^{-y})^{-1/2} + \beta e^{-y}, \quad (2.19)$$

$$\nu_\gamma(y) = (1 - e^{-y^{\gamma/2}})^{-1/\gamma} + (1 - \gamma^{-1})e^{-y^{\gamma/2}}. \quad (2.20)$$

Además, si eliminamos el segundo término de la familia γ , obtenemos una función que mantiene las virtudes de la familia n en las galaxias, pero se aproxima a 1 más rápidamente en el sistema Solar:

$$\nu_\delta = (1 - e^{-y^{\delta/2}})^{-1/\delta}, \quad (2.21)$$

En la figura 2.4 podemos observar diferentes formas que puede adoptar la función interpolación μ . A medida que tengamos mejores datos galácticos podemos precisar con mayor exactitud la forma de μ . Sin embargo, el punto más destacable de MOND no es la forma precisa de la función interpolación, sino sus acertadas predicciones. El concepto de una función interpolación predefinida debería en principio desaparecer al descubrir una teoría padre de MOND.

El análisis del movimiento de las sondas Pioneer 10 y 11 [3] muestra un efecto aparentemente sin explicación, que puede ser interpretado como una aceleración constante inexplicada hacia el Sol de entorno a $7 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$, del orden de a_0 . Esto puede

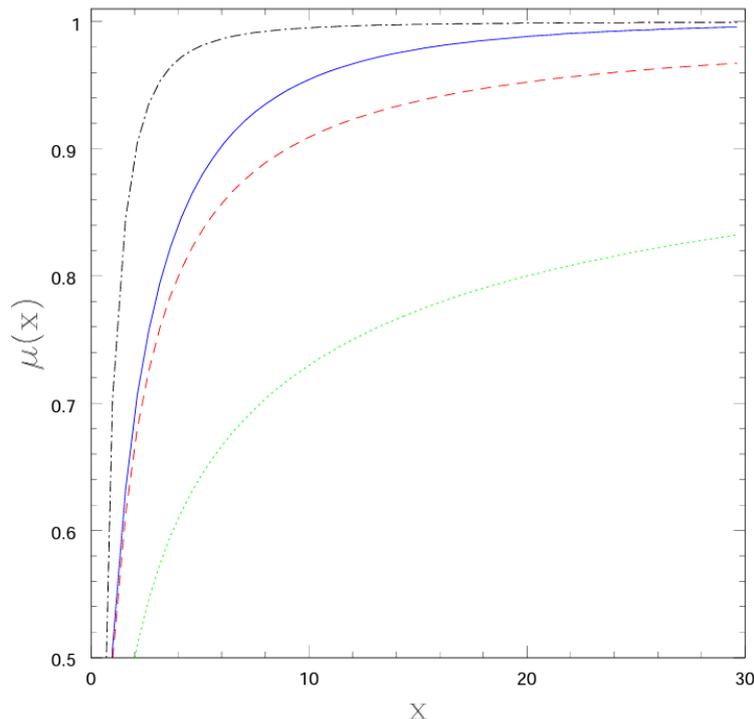


Figura 2.4: Varias funciones μ . Línea de puntos verde: función Bekenstein $\alpha = 0$, ec. 2.17. Línea de rayas roja: función μ simple $\alpha = n = 1$ ec. 2.16 2.18. Línea de rayas y puntos negra: función $n = 2$, estándar, ec 2.18. Línea Sólida azul: función $\gamma = \beta = 1$, correspondiente a la función ν de las ec. 2.19 y 2.21. Esta última mantiene las virtudes de la función simple para galaxias ($x < \sim 10$), pero se acerca a 1 más rápido y conecta con la función estándar $n = 2$ para $x \gg 10$.

deberse a un error sistemático en la medida, o debido a nueva física. MOND puede explicar esta aceleración anómala. Estamos lidiando con el límite fuertemente Newtoniano de MOND (imagen 2.3), para el cual tendremos que saber el comportamiento de la función extrapolación $\mu(x)$ en $x \gg 1$, donde $\mu \approx 1$. No podemos aprender sobre este comportamiento en la dinámica galáctica, por lo que este ejemplo es útil. Podemos parametrizar μ en esta región como $\mu \approx 1 - \varepsilon x^{-2}$ [88]. De esta forma, si $n = 1$ obtenemos el efecto deseado en MOND: la aceleración en el campo del Sol se convierte en $M_{\odot} G r^{-2} + \varepsilon a_0$ en la dirección del Sol. Sin embargo, en una gravedad modificada esto estaría en conflicto con los movimientos de los planetas, mientras que en la inercia modificada no tiene porque ser así [88]. Puede ocurrir que la modificación afecte al movimiento de los Pioneers, que corresponde a movimientos hiperbólicos no ligados, y a los movimientos ligados y casi circulares de formas diferentes. Por ejemplo, la función efectiva μ que corresponde con estos dos movimientos podría tener diferentes potencias asintóticas n .

2.2.4. Efecto de campo externo

El efecto de campo externo es un aspecto fundamental de MOND [85], e implica que la dinámica interna de un subsistema, como una galaxia o un clúster galáctico, puede ser influenciado por el campo gravitacional externo del sistema madre u otras estructuras astrofísicas. Esto contrasta con la dinámica newtoniana, donde la dinámica interna de un subsistema es independiente de cualquier campo externo en el cual el sistema este interno. Sin embargo, en MOND, la aceleración gravitacional total con respecto a un

marco predefinido, tal como el marco de CMB es lo que importa, y los efectos de MOND son solo observados en sistemas donde el valor absoluto de la gravedad, tanto interna g como externa g_e (de la galaxia huésped, un sistema astrofísico o una gran estructura) es menor que la escala de aceleración a_0 , $g_e < g < a_0$. Si $g < a_0 < g_e$ el sistema es puramente Newtoniano. Si $g < g_e < a_0$ el sistema es Newtoniano con un constante gravitatoria renormalizada. Finalmente, cuando $g < g_e$, la atracción gravitatoria decrece como $1/r^2$, que es un comportamiento característico de la gravedad Newtoniana. En la ecuación (2.10) tenemos que $\nabla\Phi = \mathbf{g} + \mathbf{g}_e$ y $4\pi G\rho = \nabla \cdot \mathbf{g}_N + \mathbf{g}_{Ne}$, que en una dimensión lleva a la siguiente ley de Milgrom revisada incluyendo el campo externo:

$$g\mu\left(\frac{g+g_e}{a_0}\right) + g_e\left[\mu\left(\frac{g+g_e}{a_0}\right) - \mu\left(\frac{g_e}{a_0}\right)\right] = g_N. \quad (2.22)$$

2.3. Resultados de MOND

La ecuación (2.3) predice la gravedad total efectiva como función de la gravedad producida por los bariones visibles. La formula ha predicho un gran número de observaciones, como la forma y amplitud de las curvas de rotación galáctica para todos los radios, con una envidiable precisión, para todo tipo de galaxias. A pesar de que la predicción exacta puede variar según la formulación concreta de MOND (ver sección 2.2.3) estas diferencias suelen ser menores que las barras de error, como veremos más adelante. En la figura 2.5 podemos ver como la predicción MOND es válida para galaxias de un gran rango de masas. En la figura 2.6 podemos observar como la discrepancia de masa se vuelve aparente a medida que las estrellas dejan de ser la componente de masa dominante, en las zonas exteriores. El modelo MOND solventa con certeza esta discrepancia de masa.

Por ultimo veamos un ejemplo muy significativo, centrándonos en dos galaxias enanas con alto contenido de gas en la imagen 2.7. Es un test importante ya que el alto contenido de gas hace que el parámetro ratio masa-luz de las estrellas tenga un menor impacto en el ajuste. Además estas galaxias están en el régimen MOND profundo, por lo que la forma exacta de la función interpolación cuando $x \gg 1$, la parte mas conflictiva de la función, tiene poca importancia en el ajuste.

Podemos ver como MOND nos da una predicción muy acertada de las curvas de velocidad, para todos tipo de galaxias y tamaño. Incluso si el modelo MOND no es correcto, la ley de Milgrom (2.3) sirve como una certera ley empírica.

2.3.1. Resultados en la Vía Láctea

La Vía Láctea es un laboratorio único para testear el modelo MOND, ya que nos permite realizar, por cercanía, mediciones mucho más precisas que para galaxias exteriores, de forma que es posible tratar de discriminar entre las diferentes versiones de MOND.

La disponibilidad de estudios con información precisa sobre las propiedades de la galaxia como la curva de rotación, la densidad superficial, la dispersión de la velocidad vertical y las corrientes de marea es de gran ayuda para la realización de test de MOND de alta precisión. Sin embargo, paradójicamente la curva de rotación de las zonas exteriores de nuestra galaxia es menos conocida que la de las galaxias exteriores, pero podemos utilizar

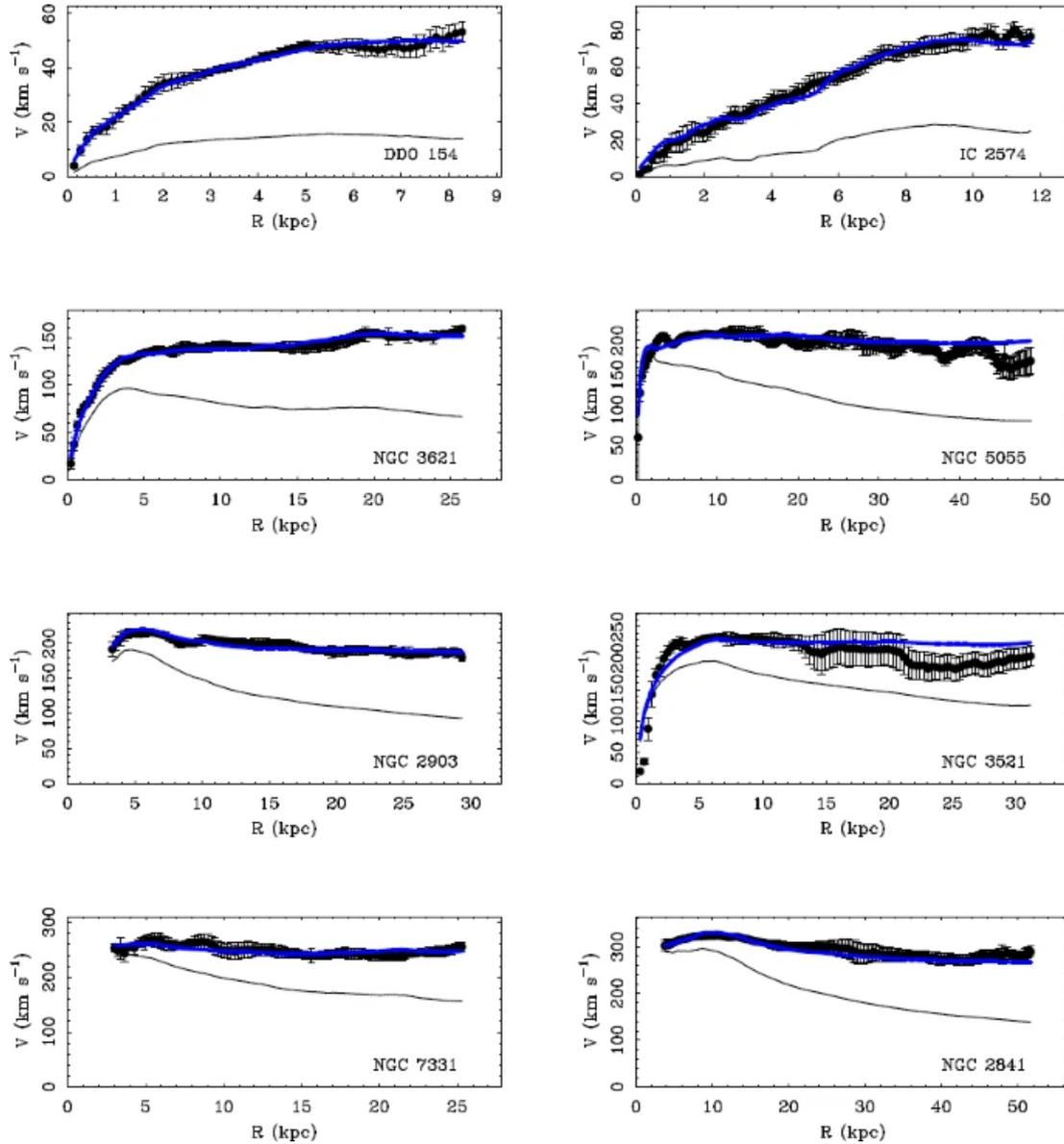


Figura 2.5: Curvas de rotación para galaxias representativas del estudio THINGS [16] [123] [53]. Han sido escogidas para ilustrar un amplio margen de masas, desde $M_b \sim 3 \times 10^8 M_\odot$ a $M_b \sim 3 \times 10^{11} M_\odot$. Todas las galaxias tienen un alta resolución interferométrica en 21 cm para el gas y fotometría 3.6μ para las estrellas. El modelo Newtoniano con masa bariónica está mostrado con una línea negra y el modelo MOND como un línea azul. Se ha usado la función interpolación 2.21

la curva de rotación de las zonas internas con mayor precisión que en el resto de galaxias. Estudios con la curva de rotación interna [45] [80] muestran un completo acuerdo con MOND, asumiendo la función interpolación μ 2.17 o 2.18 con $\alpha = n = 1$ y 2.19 2.21 con $\gamma = \delta = 1$. También se puede realizar el enfoque opuesto, derivar la densidad superficial del disco interno de la Vía Láctea a partir de la curva de rotación [80]. El resultado de este ejercicio es que la densidad superficial derivada es completamente consistente con los datos sobre el número de estrellas, incluso reproduciendo los detalles de las ondulaciones y picos de la densidad superficial, como podemos ver en la figura 2.8.

Realizar test en la Vía Láctea permite comprobar las predicciones de MOND rela-

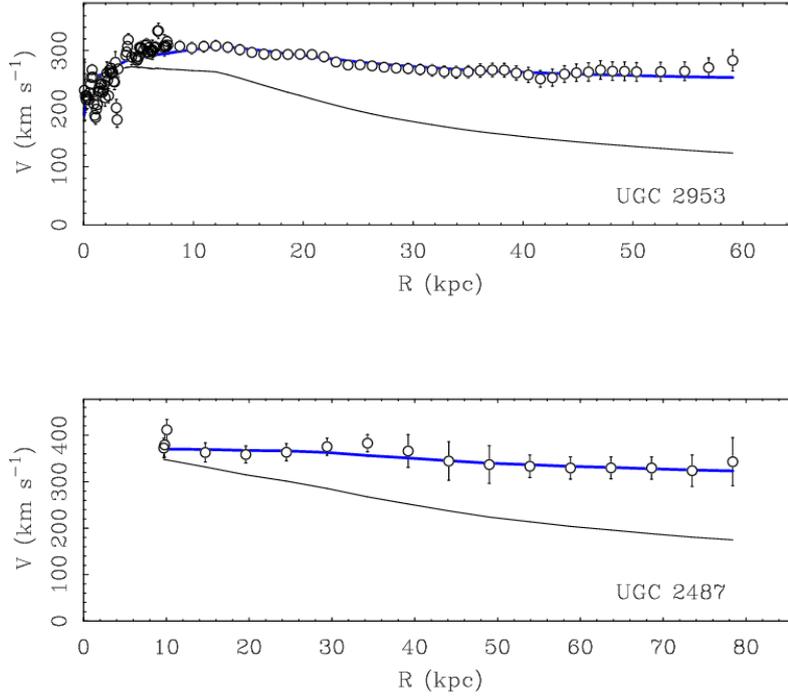


Figura 2.6: Ajustes de MOND (línea azul, usando la ecuación 2.21) de dos galaxias masivas [111], por encima de $10^{11}M_{\odot}$. Las estrellas dominan la masa, y la mecánica newtoniana (línea negra) es suficiente para explicar la dinámica de las regiones interiores debido a alta aceleración. Sin embargo la discrepancia de la masa se vuelve apreciable para largas distancias. Figura de [46]

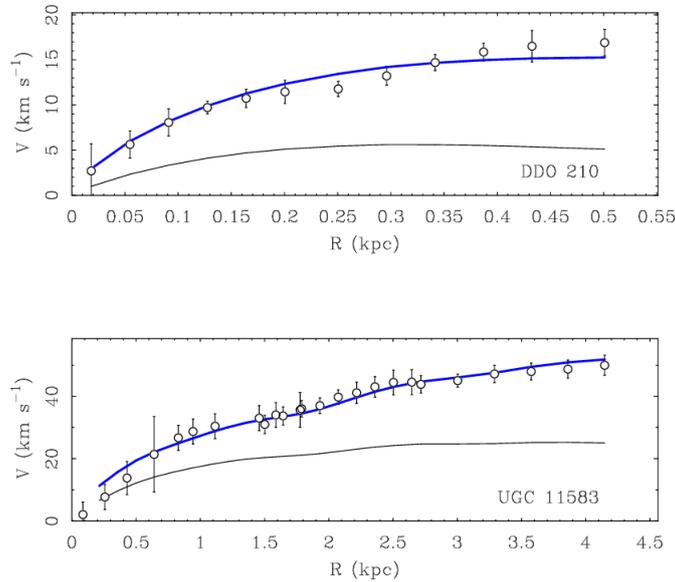


Figura 2.7: Ejemplo de ajustes lineales de MOND (línea azul) para dos galaxias enanas [91]. Estas galaxias tienen una masa barionica por debajo de $4 \times 10^8 M_{\odot}$

cionadas con el "disco de materia oscura fantasma" (*Phantom Dark Disk*). Este concepto proviene del de densidad efectiva de materia, que es la densidad correspondiente a la materia que generaría el campo de fuerza MOND en la gravedad newtoniana. Eliminando de la densidad efectiva total de MOND la densidad barionica nos lleva a una distribución

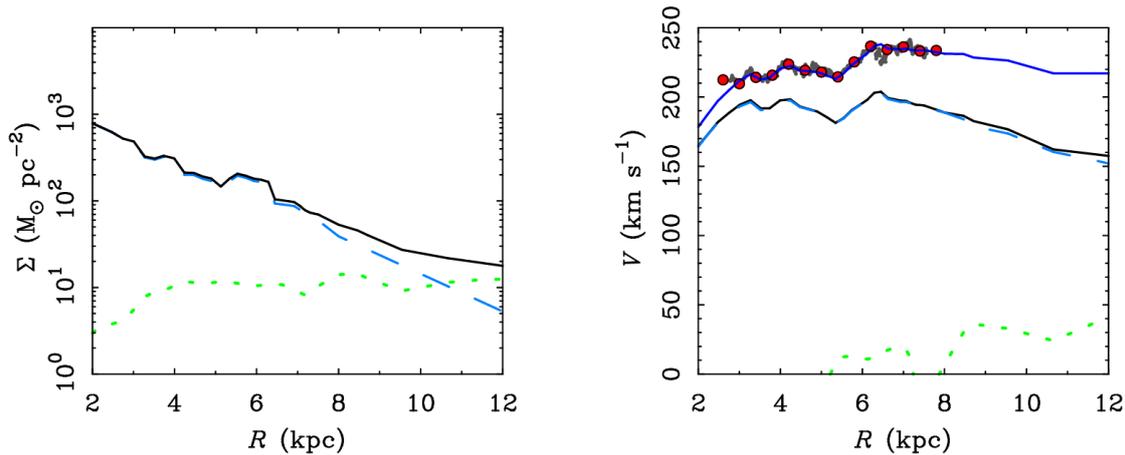


Figura 2.8: Distribución de masa del disco de la Vía Láctea (izquierda) obtenida a partir de ajustar en MOND los picos y ondulaciones en la curva de rotación de la galaxia (derecha) [80]. La contribución Newtoniana de la masa estelar y de gas está mostrada como una línea de rayas y una de puntos, respectivamente. El modelo resultante es consistente con recuentos independientes de estrellas [47]. El pico destacado en $R \approx 6$ corresponde al brazo espiral Centauro

de "materia oscura fantasma"[90], utilizando el lenguaje de los modelos de materia oscura.

Otro test interesante que se puede realizar en la Vía Láctea consiste en el análisis del grosor de la capa de hidrógeno neutro (HI) que existe en el disco galáctico, en función de su posición. Ha sido encontrado que el modelo MOND Bekenstein-Milgrom y su disco fantasma es acorde con medidas de la capa HI [110] por debajo de los 17 kpc del centro, pero subestima ligeramente los resultados en la región entre 10 y 15 kpc. Sin embargo esto no presenta una gran complicación, ya que podría deberse a que la densidad superficial estelar en esa región es ligeramente menor a lo asumido, o a fenómenos no gravitatorios como campos magnéticos o rayos cósmicos que podrían ayudar a soportar el disco.

2.3.2. Estabilidad de disco e interacción de galaxias

Las simulaciones N-body son necesarias para estudiar la estabilidad de los discos galácticos, la formación de barras y espirales, y configuraciones variantes con el tiempo como la fusión de galaxias. La ecuación de Poisson modificada (2.10) puede ser resuelta usando varios métodos, como por ejemplo en [14, 21]. Los resultados principales son los siguientes:

- Los discos de tipo LSB (Bajo Brillo Superficial, *Low Surface Brightness* son más inestables con respecto a las inestabilidades de las barras y espirales en MOND que en el caso equivalente en Newton+halo esférico.
- Las barras siempre tienden a aparecer más rápido en MOND que en caso equivalente Newton+halo esférico, y no están ralentizadas por la fricción dinámica, lo que lleva a barras más rápidas
- Los discos LSB pueden ser delgados y extensos en MOND gracias al efecto del disco "fantasma".

- En MOND se pueden crear deformaciones en galaxias aparentemente asiladas a partir del efecto de campo externo de una larga estructura.
- Los tiempos de fusión para galaxias en interacción son más largos en MOND.
- La reproducción de algunos sistemas como Antennae requiere unas condiciones iniciales relativamente afinadas, pero la galaxia resultante es más extensa y cercana a las observaciones que en el caso equivalente Newtoniano+halo (imagen 2.9), gracias a la ausencia de momento angular transferido al halo oscuro.

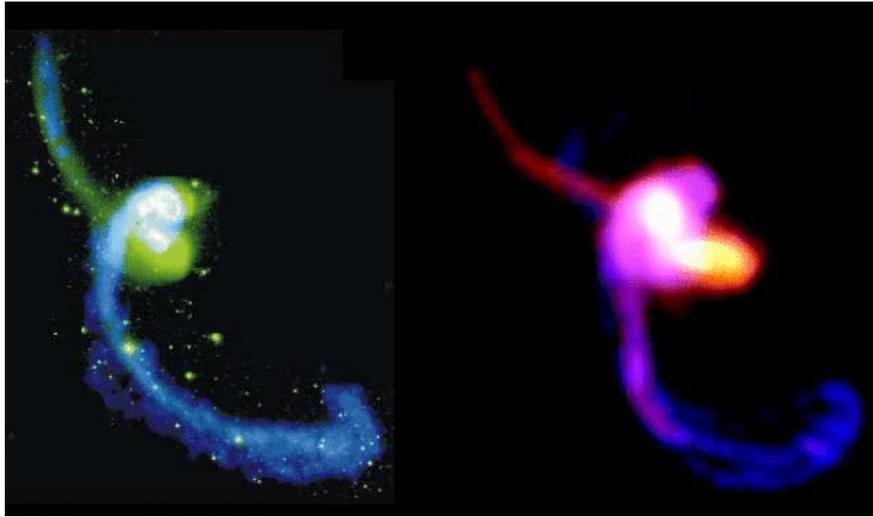


Figura 2.9: Simulación de Antennae con MOND (derecha), comparada con las observaciones (izquierda). En las observaciones el gas es representado en azul y las estrellas en verde. En la simulación el gas es azul y los estrellas amarillo y rojo. Imagen de [46]

2.3.3. Galaxias enanas de marea

Como es el caso de la figura 2.9, en la fusión de galaxias espirales se suelen observar galaxias enanas en las extremidades de la cola de marea, las cuales son llamadas Galaxias Enanas de Marea (TDG, *Tidal Dwarf Galaxies*). Estos objetos son formados a partir de inestabilidades gravitacionales en las colas de marea, que llevan al colapso del gas y a la formación estelar. Estos objetos son comunes en sistemas en interacción, sin embargo, en el modelo Λ CDM se supone que son difíciles de formar, requiriendo distribuciones muy extensas de materia oscura, como se ve en [17]. En MOND es mucho más fácil formar TDGs, ya que el intercambio de momento angular ocurre dentro de los discos, como vemos en simulaciones MOND [116].

En el contexto de Λ CDM, no se espera que estos objetos arrastren la materia oscura con ellos [46]. Por esta razón, estos objetos no deberían exhibir discrepancia de masa, sin embargo, las medidas de las curvas de rotación de tres TDGs en el sistema NGC5281 ha revelado la presencia de discrepancia de masa en estos objetos [18]. Una posible explicación en el contexto de Λ CDM es la existencia de bariones oscuros, sin detectar, en forma de gas molecular frío. Sin embargo, es sorprendente que otro tipo de materia oscura se ensamble a si mismo justo dentro de la relación Tully-Fisher.

Si consideramos la inclinación más natural derivada de la geometría de anillos del

sistema y aplicamos la fórmula de Milgrom a la distribución de materia visible [54, 87] obtenemos curvas de velocidad que casan muy bien con los datos, como se ve en la imagen 2.10.

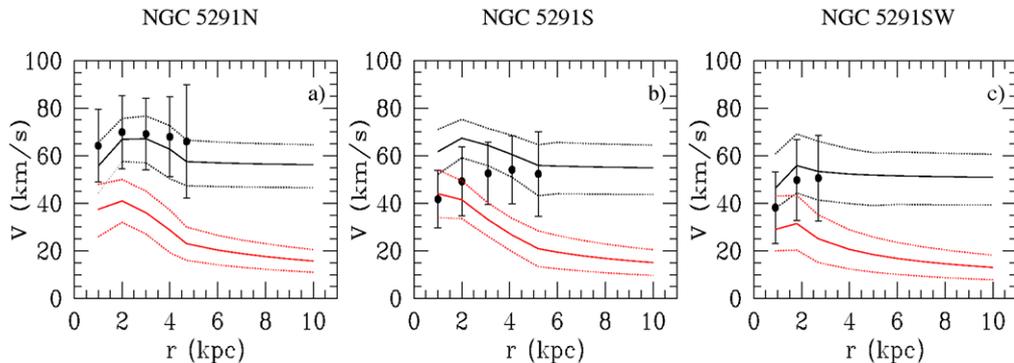


Figura 2.10: Curvas de rotación de tres TDGs en el sistema NGC 5291. En rojo se muestran las predicciones de Λ CDM sin gas molecular de materia oscura barionica con sus correspondientes incertidumbres. En negro se muestran las predicciones de MOND con sus incertidumbres. Predicción con μ simple. Imagen de [46]

Podemos concluir que Λ CDM tiene importantes problemas con las TDGs, mientras que MOND explica de forma acertada las curvas de rotación. Sin embargo, desde un punto de vista estadístico, tres galaxias son insuficiente para sacar un resultado en claro, por lo que deben estudiarse en profundidad más TDGs para consolidar o invalidar este descubrimiento.

2.3.4. Galaxias esferoides enanas

Las dSph satélites de la Vía Láctea muestran grandes discrepancias de masa, lo que las convierte en objetos interesantes para probar MOND. Aunque existen dos clases principales de objetos en el halo galáctico, las cúmulos estelares y las galaxias dSph, Solamente las dSph presentan discrepancia de masa. Esta diferencia se explica de forma natural en MOND, mientras que en Λ CDM presenta un problema que tiene que ser resuelto a partir de diferentes escenarios de formación [46].

Además, en MOND es posible ajustar los perfiles de la dispersión de velocidad de estas galaxias. En [4] se realizó este análisis para ocho dSph alrededor de la Vía Láctea. Resolviendo la ecuación de Jeans:

$$\frac{d\sigma^2}{dr} + \sigma^2 \frac{(2\beta + \alpha)}{r} = -g(r), \quad (2.23)$$

se encontró que las cuatro galaxias enanas más masivas y alejadas (Fornax, Sculptor, Leo I y Leo II) tenían ratios típicas masa-luz exactamente dentro de lo esperado. Otras dos galaxias enanas tenían este ratio ligeramente por encima de lo esperado (Carina y Ursa Minor) y otras dos muy por encima (Sextans y Draco). Sin embargo, esto podría deberse a que estas galaxias están parcialmente quebrantadas por los efectos de marea de la Vía Láctea, o que no sean objetos primordiales, sino que hubieran sido formados por efectos de marea.

Las galaxias enanas ultra difusas son propensas a un calentamiento por efecto de marea, debido a su baja densidad. Esto es debido a que la energía orbital y rotacional se disipa en forma de calor. El calentamiento por efectos de marea juega un papel importante en el funcionamiento de estas galaxias, ya que provoca cambios morfológicos estirando o contrayendo partes de la galaxia, afecta a la población estelar, activando la formación estelar o alterando su distribución, y lo que es más importante en el contexto de MOND, este calentamiento puede afectar a la dinámica interna de la galaxia, de forma que el movimiento de las estrellas podría imitar los efectos que la materia oscura tendría en una gravedad newtoniana [66], haciendo más fácil el encaje del modelo MOND.

Si estas galaxias son objetos en equilibrio, su dispersiones de velocidad son mucho mayores de lo que MOND predice, y podrían hacer descartar a MOND. Sin embargo, esto podría deberse a errores sistemáticos de medida, debido a las pequeñas dispersiones de velocidad que poseen, o a un alto ratio masa-luz debido a efectos estocásticos por su bajo número de estrellas. Además, estos objetos están cerca de ocupar sus radios de marea MOND [84], y sus estrellas pueden dar pocas órbitas para cada órbita de la galaxia satélite alrededor de la Vía Láctea, lo que lleva a dinámicas fuera del equilibrio en MOND (figura 2.11), y más si su formación ha sido en un contexto de fuerzas de marea [67].

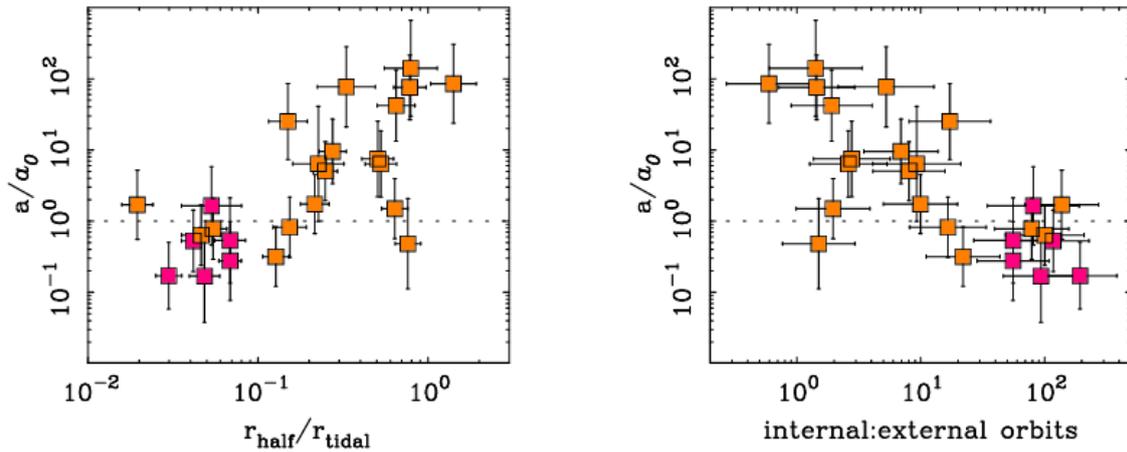


Figura 2.11: Aceleración característica, en unidad de a_0 , de las galaxias más pequeñas conocidas: las galaxias enanas satélites de la Vía Láctea (cuadrados naranjas) y de M31 (cuadrados rosas). Las galaxias enanas clásicas, con miles de medidas de la velocidad de estrellas, son consistentes con MOND. Las galaxias enanas ultra difusas por lo general no lo son [114]. Sin embargo, existen razones físicas para esta discrepancia. Las desviaciones ocurren en sistemas que están cerca del radio de marea de MOND, como se ve en la figura de la izquierda. Este tipo de sistema no se encuentran en equilibrio en MOND. Además, en un estudio de Brada y Milgrom [20] se afirma que los sistemas en los que las estrellas completan pocas orbitas a la galaxia enana satélites mientras dicha galaxia completa una vuelta a la galaxia huésped no es un sistema que responda adiabáticamente. Las galaxias enanas que se desvían del comportamiento esperado en MOND están en este régimen (panel derecho).

2.4. Dificultades de MOND

El problema principal de MOND como teoría completa es que su formulación es fenomenológica, y no se puede formular de forma covariante [74]. En la RG general la aceleración está vinculada con la conexión afín $\Gamma_{\lambda}^{\mu\nu}$, que no es un tensor, por lo tanto, MOND no se puede adaptar a la Relatividad.

Esto tiene importantes consecuencias. En el marco MOND, no podemos construir un modelo cosmológico, lo cual es uno de los mayores éxitos de Λ CDM. Tampoco podemos cuantificar la fenomenología de las lentes gravitacionales. Además, MOND es incapaz de explicar la discrepancia de masa en la escala de clústeres de galaxias.

Para proveer a MOND de una formulación covariante, se han formulado diferentes teorías que incluyen campos escalares, vectores o tensoriales adicionales y que se reducen a MOND en el límite no relativista. Las teorías con formulación covariante más destacadas son:

- AQUAL [11]: La fuerza gravitacional es obtenida mediante la derivación de un Lagrangiano:

$$\rho\phi + \frac{1}{8\pi G} a_0^2 F\left(\frac{|\nabla\phi|}{a_0}\right) \quad (2.24)$$

, que lleva a la ecuación de Poisson modificada:

$$\nabla \cdot \left(\mu \left(\frac{|\nabla\Phi|}{a_0} \right) \nabla\Phi \right) = 4\pi G\rho \quad \text{con} \quad \mu(x) = \frac{dF(x^2)}{dx}. \quad (2.25)$$

AQUAL tiene problemas a la hora de predecir la cantidad de efecto de lente gravitacional observado en un clúster de galaxias [112].

- TeVeS [12]: Incorpora tres componentes: un campo tensorial para representar la gravedad de la misma forma que en RG, un campo vectorial para representar un marco preferente, y un campo escalar que es responsable de los efectos de MOND, modificando la aceleración gravitacional de una forma que imita la fenomenología de MOND. Una gran ventaja de TeVeS es que reproduce mucha de las predicciones de la Relatividad General y la fenomenología MOND. Sin embargo, TeVeS es una teoría muy compleja, de forma que sus ecuaciones son difíciles de resolver en determinadas circunstancias, haciéndola difícil de comprobar empíricamente.
- MOND bimétrico [86]: En este enfoque se utilizan dos métricas diferentes como grados independientes de libertad. Por un lado existe la métrica MOND $g_{\mu\nu}$ a la cual se acopla la materia, y una métrica auxiliar $\hat{g}_{\mu\nu}$.

2.4.1. Problema con el Fondo Cósmico de Microondas

Aunque ciertos fenómenos que en un principio dan problemas en MOND como las lentes gravitacionales pueden ser resueltos usando formulaciones covariantes de MOND como TeVeS [132], MOND presenta problemas en todas sus formas con el CMB como explica Dodelson en "The Real Problem with MOND" [39]. Dodelson afirma que una de las fortalezas del modelo Λ CDM es que puede explicar las anisotropías observadas en el

CMB. Sin embargo, en el contexto de MOND, no existe una explicación clara para estas anisotropías. Esto hace que la teoría no sea capaz de dar una explicación a la estructura a gran escala del universo.

2.4.2. Problemas con el Clúster Bala (*Bullet Cluster*)

El Clúster Bala es un objeto galáctico que ha sido frecuentemente usado como test contra MOND. Consiste en dos subclústeres menores, en proceso de colisión. El origen del nombre es su aspecto de bala siendo disparada. Esta colisión causa que el gas y las estrellas sean separadas de las galaxias de los subclústeres, y según Λ CDM, la materia oscura debería ser desplazada de su posición original, como se ve en la imagen 2.12. El efecto de lente gravitacional causado por el clúster debe ser mayor en la zona en la que está localizada la mayoría de la masa, que en el Λ CDM estaría localizado en la posición de la materia oscura. Las observaciones muestran que este efecto se encuentra desplazado de la materia visible, lo que es un gran problema para MOND y un punto a favor para Λ CDM.

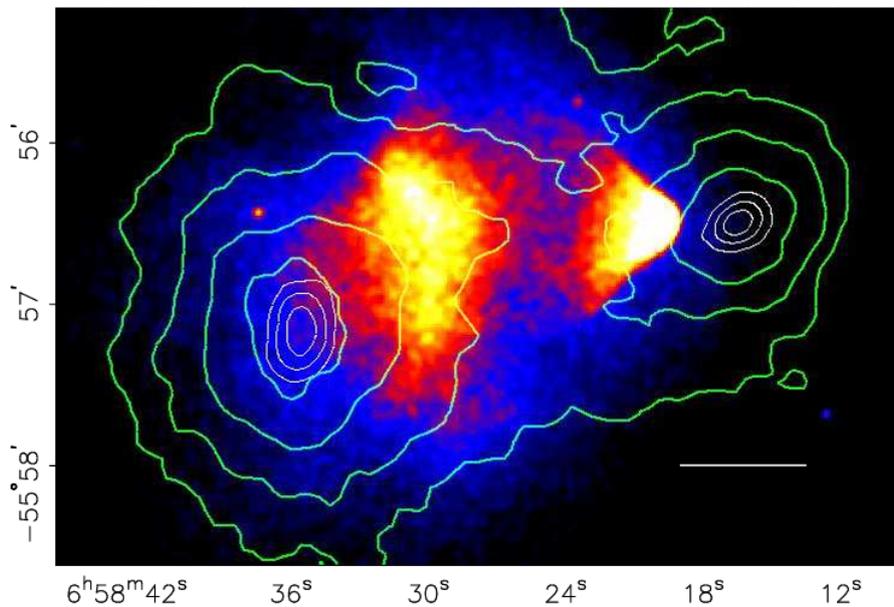


Figura 2.12: Clúster bala 1E0657-56. Las dos masas de gas caliente separadas de los subclústeres tras las colisión están coloreadas de rojo y amarillo. Las curvas verdes y blancas son el isocontorno del parámetro de lente de convergencia, donde encontramos dos picos. Estos picos nos coinciden con el gas visible, que es la principal repositorio de materia barionica, lo que representa un reto para MOND. La línea blanca sirve como escala y corresponde a 200 kpc. Imagen de [46], cortesía de D. Clowe

Sin embargo, el Clúster Bala también es un reto para el modelo Λ CDM, ya que la velocidad colisión entre los subclústeres es mayor que 3100 km/s, lo que es difícil de explicar en este modelo [68]. Sin embargo, esto es explicable en MOND [6]. Aunque este clúster representa un reto para MOND, es posible explicar su comportamiento como lente gravitatoria mediante diferentes formulaciones covariantes de MOND, como se realiza en [5], por lo que actualmente no es considerado una prueba eliminatória de MOND.

2.5. Conclusiones

Frente a los muchos problemas que presenta el modelo Λ CDM (sección 1.4), se ha introducido en este capítulo el modelo MOND. Uno de los aspectos más destacados de este modelo es la explicación de la aparición de la constante a_0 en varios fenómenos a priori independientes (sección 2.1), mediante la formula de Milgrom (sección 2.2). A partir de esto, la idea central del modelo MOND es explorar la posibilidad de que la fuerza gravitatoria está modificada. MOND es un modelo puramente fenomenológico, cuyo objetivo es explicar la dinámica galáctica. Si MOND está en lo cierto en cuanto a que la aceleración a_0 es una cantidad fundamental, el principio de equivalencia fuerte no se podría sostener, y la invariancia local Lorentz¹ podría ser espontáneamente violada [46].

Como descripción matemática de la dinámica galáctica, MOND funciona excepcionalmente bien en galaxias individuales, pero tiene problemas en explicar la cosmología y algunos clústeres galácticos (sección 2.3).

Para hacer de MOND una teoría covariante, debe estar incluida en una teoría "madre" más general, que funcione en Relatividad Especial. Para ello se desarrollan diferentes formulaciones de MOND relativista, que pasan a comportarse simplemente como MOND en el límite no relativista (sección 2.3).

En el siguiente capítulo generaremos un catalogo estelar simulado bajo el modelo MOND de una galaxia enana con los parámetros de la galaxia enana esferoide *Draco*, con el objetivo de reflejar las observaciones un posible futuro satélite y comprender si pueden ser útiles para detectar una firma de MOND.

¹La llamada invariancia de Lorentz significa que una medición física no debe depender de la velocidad u orientación del marco de referencia del laboratorio

3. Medidas astrometricas en satélites de futura generación

Con el objetivo de conocer más sobre la naturaleza del universo, su composición, y su dinámica a grandes escalas, es necesario el desarrollo de nuevas misiones que tomen medidas astrométricas con mayor precisión. Esto ayudaría a discernir el modelo correcto del universo, tanto si esta compuesto principalmente por materia oscura como si estamos ante un comportamiento modificado de la dinámica newtoniana como afirma el modelo MOND. Una de las propuestas más prometedoras es el satélite *Theia*.

3.1. Satélite astrométrico de futura generación: *Theia*

Theia es una misión propuesta en el contexto de ESA M5, una convocatoria para una misión de tamaño medio ofrecida por la ESA en el 2017. Esta misión estaría basada en la astrometría relativa y de alta precisión, para estudiar objetos muy tenues en el Universo. *Theia* tiene como principal objetivo determinar las propiedades a pequeña escala (escala de galaxias) de la materia oscura (o en su defecto las propiedades de MOND) en el Universo local [32]. *Theia* contaría una precisión que alcanza un nivel sub micro-arcosegundo. Esto es entorno a 1000 veces mejor que la precisión para los objetos más luminosos de *Gaia* [62], un satélite actual de la ESA, lo que representa un factor 10-30 de mejora para las estrellas más tenues. Gracias a esto *Theia* podrá confirmar o invalidar el modelo CDM, y con esto el modelo MOND.

Respecto a la observación de las galaxias enanas, la colaboración *Theia* [32] planea observar al menos 6 dSphs que muestren: 1) un ratio masa-luz alto, para que los efectos de la materia oscura o en su defecto de MOND sean mayores; 2) Una historia de formación estelar larga, para que los objetos tenga suficientes poblaciones estelares antiguas, para que la duración de la formación violenta de estrellas sea demasiado corta para transformar los perfiles de picos de materia oscura en núcleos; 3) al menos 1000 estrellas con errores en la velocidad del plano del cielo (*plane-of-sky*) menores que la mitad de la velocidad de dispersión en el interior de la galaxia. Bajo estas condiciones se plantea estudiar 5 galaxias esferoides enanas clásicas (Draco, Fornax, Sculptor, Sextans y Ursa Minor) y una enana ultra-tenua (Ursa Major II), todas ellas observadas durante 1000 horas cada una.

Esta previsto que para una galaxia como Draco, se puedan obtener unos errores en las velocidades en el plano del cielo menores a 3 km/s para estrellas con magnitudes $R < 22\text{mag}$ ¹. En el caso de Draco hay entorno a 1000 estrellas con magnitudes de $R = 17.5$ a 20.5mag , las más brillantes. Como se puede ver en la figura (3.1), *Theia* nos permitirá obtener errores en la velocidad menores que las velocidades de dispersión, lo que nos permite obtener medidas realmente útiles.

¹La magnitud R se refiere al brillo de un objeto observado a través de un filtro R, que es sensible a la parte roja del espectro visible.

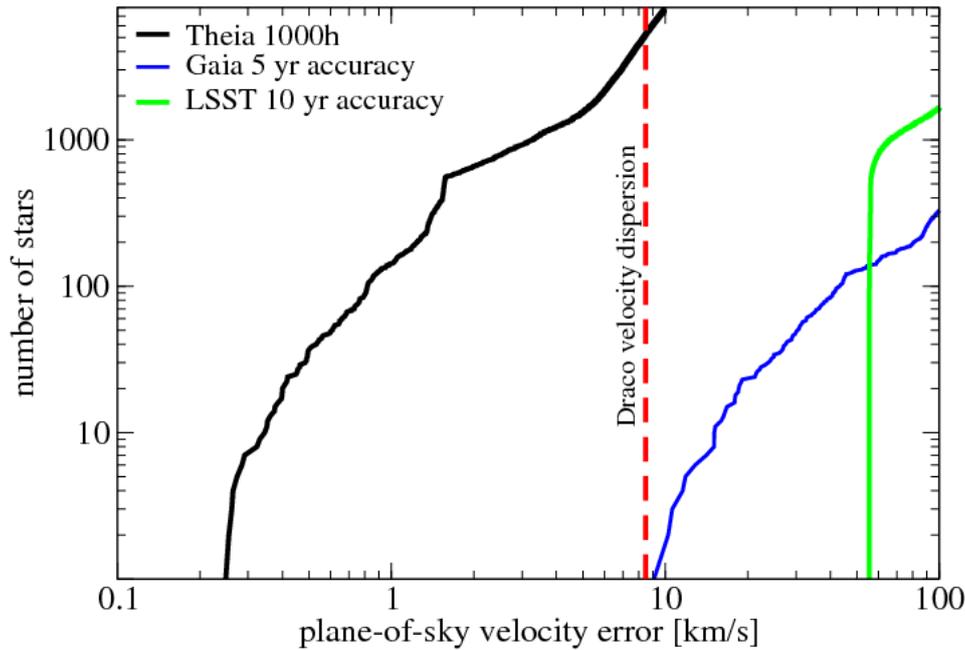


Figura 3.1: Comparativa del numero de estrellas acumuladas para un error en la velocidad en el plano del cielo dado entre diferentes misiones de astrometría para la galaxia enana Draco. Se puede observar como *Theia* podría obtener mucha más precisión en las medidas que Gaia en menos tiempo.

3.2. Construcción de un catalogo de *proper motion*: generalidades

En este capítulo construiremos un catálogo estelar con las posiciones y velocidades propias simuladas bajo el modelo MOND. El set de datos que obtendremos tendrá las limitaciones esperadas en la futura misión espacial *Theia* 3.1. Además, diferenciaremos entre varios casos del parámetro de anisotropía de la velocidad β , este parámetro mide la desviación de la isotropía en la distribución de velocidad de las estrellas, dando información sobre el ratio de la dispersión radial de la velocidad sobre la dispersión tangencial en las estrellas de la galaxia. Un valor de $\beta = 0$ corresponde a un movimiento isótropo, donde las estrellas tienen velocidades iguales en todas las direcciones, un valor de $\beta < 0$ indica un movimiento sesgado hacia la dirección tangencial y $\beta > 0$ indica un sesgo hacia la dirección radial.

En este catalogo obtendremos los datos de 6000 estrellas en una galaxia enana simulada con los parámetros de *Draco*.

3.2.1. Método para la construcción del catálogo

La creación de un catalogo simulado astrométrico de estrellas en una galaxia enana requiere la asunción de la distribución en el espacio de fases de las estrellas y el muestreo de la distribución estelar.

Parámetros de *Draco*

Galaxia	$\log(L_v)$	$r_{1/2}$ (pc)	M_*/L_v
Draco	5.45	244	11.1

Tabla 3.1: Parámetros para la galaxia Draco. L_v es la luminosidad en la banda V, M_* es la masa estelar, M_*/L_v es el ratio masa-luminosidad y $r_{1/2}$ es el radio efectivo (radio dentro del cual la mitad de la luz total de la galaxia es emitida). Datos de [37]

Perfil de densidad estelar

Expresamos el perfil de densidad mediante el modelo de Plummer esférico [103]:

$$\rho_*(r) = \frac{M_*}{L_v} \frac{3L_v}{4\pi r_{1/2}^3} \left(1 + \frac{r^2}{r_{1/2}^2}\right)^{-5/2}. \quad (3.1)$$

Que usa los parámetros de la tabla 3.1

Distribución de masa estelar

A partir de la ecuación de la densidad 3.1 podemos obtener la cantidad de masa dentro de una esfera de radio r :

$$M(< r) = \frac{M_*}{L_v} \frac{L_v}{r_{1/2}^3} \frac{r^3 r_{1/2}^3}{(r_{1/2}^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (3.2)$$

3.3. Ecuación de Jeans y su solución en simetría esférica

Para obtener las velocidades debemos resolver la ecuación de Jeans para la componente radial. Las ecuaciones de Jeans son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que describen el movimiento de una colección de estrellas en un campo gravitatorio. Las ecuaciones de Jeans relacionan los momentos de velocidad de segundo orden con la densidad y el potencial de un sistema sin colisiones. Estas ecuaciones análogas a las de Euler para un fluido. Las cantidades $\overline{v_x}$ y $\overline{v_x^2}$ son los primer y segundo momento de la distribución de velocidad en la dirección del eje x , y adoptamos la misma convención para los otros momentos y direcciones. En simetría esférica, $\overline{v_r} = \overline{v_\theta} = \overline{v_\phi} = 0$ y $\overline{v_r v_\theta} = \overline{v_r v_\phi} = \overline{v_\theta v_\phi} = 0$, y los componentes radiales de la ecuación de Jeans se leen como:

$$\frac{1}{\rho_*(r)} \frac{d[\rho_*(r) \overline{v_r^2}]}{dr} + 2\beta(r) \frac{\overline{v_r^2}}{r} = -g(r), \quad (3.3)$$

con $g(r)$ la aceleración gravitatoria. Para nuestro análisis usaremos:

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} + \frac{(a_0 M(r) G)^{1/2}}{r}, \quad (3.4)$$

donde el primer termino corresponde a la aceleración Newtoniana y el segundo surge de MOND, a partir de despejar la aceleración de la ley de Milgrom dada por la Ec. 2.3 con la función interpolación μ simple dada por la Ec. 2.16. La función $\beta(r)$ está definida como sigue:

$$\beta(r) = 1 + \frac{\overline{v_\theta^2(r)} + \overline{v_\phi^2(r)}}{2\overline{v_r^2(r)}} = 1 + \frac{\overline{v_t^2(r)}}{\overline{v_r^2(r)}} \quad (3.5)$$

y se puede simplificar el modelo asumiendo que $\beta(r)$ es independiente de r . Además, en la ecuación 3.5, $\overline{v_\theta^2(r)} = \overline{v_\phi^2(r)}$ y $\overline{v_t^2(r)} \equiv [\overline{v_\theta^2(r)} + \overline{v_\phi^2(r)}]/2$. La solución general de la ecuación de Jeans es por tanto:

$$\overline{v_r^2(r)} = \frac{1}{\rho_*(r)r^{2\beta}} \int_r^\infty dr' r'^{2\beta} \rho_*(r') g(r) \quad (3.6)$$

A partir de $\overline{v_r^2(r)}$ calculamos los componentes en las otras direcciones usando la ecuación 3.5 como sigue:

$$\overline{v_\theta^2} = (1 - \beta)\overline{v_r^2(r)} \quad (3.7)$$

$$\overline{v_\phi^2} = \overline{v_\theta^2} \quad (3.8)$$

3.4. El catalogo, sus propiedades y tests

Para cada estrella de la galaxia enana el catálogo astrométrico contiene las dos coordenadas celestes, la velocidad de movimiento a lo largo de la línea de visión y los dos componentes de movimiento propio. Sabiendo la distancia entre el observador y la galaxia enana, las dos coordenadas celestes nos dan la distancia radial proyectada R de la estrella al centro de la galaxia. Igualmente, asumiendo que todas las estrellas están a la misma distancia del observador (despreciando el tamaño de la galaxia enana) podemos derivar los tres componentes de la velocidad en el sistema de referencia de la galaxia enana a partir de los componentes de movimiento propio y de la velocidad a lo largo de la línea de visión. En nuestro catalogo simulado, para cada estrella asignamos la distancia radial proyectada R , y los tres componentes de la velocidad v_x, v_y, V_z en el sistema de referencia de la galaxia enana. Consideraremos tres valores de β : $-0.25; 0; 0.25$. Los datos están representado en coordenadas cartesianas en la figura 3.2. El resto de representaciones para los otros valores de β y para $N = 6000$ se encuentran en el Apéndice 3.4.

Para comprobar nuestro procedimiento de crear la galaxia enana simulada, comparamos los resultados para número de estrellas dentro de un radio r y la dispersión de la velocidad con los valores teóricos. El código utilizado se encuentra en el apéndice 3.5. El número de estrellas acumuladas en un radio r esperado en una esfera de Plummer es:

$$N_{th}(< r) = \frac{Nr^3}{(r^2 + a^2)^{3/2}}, \quad (3.9)$$

donde N es el número total de estrellas de la muestra, que en este caso es $N = 6000$. Para el muestreo adoptamos bins igualmente espaciados en el radio, cada uno conteniendo $N_{b,k}$ estrellas. La fluctuación estadística de el número de estrellas observadas en el bin $n^\circ k$ es:

$$\sigma_{N_{b,k}} = N_{b,k}^{1/2}. \quad (3.10)$$

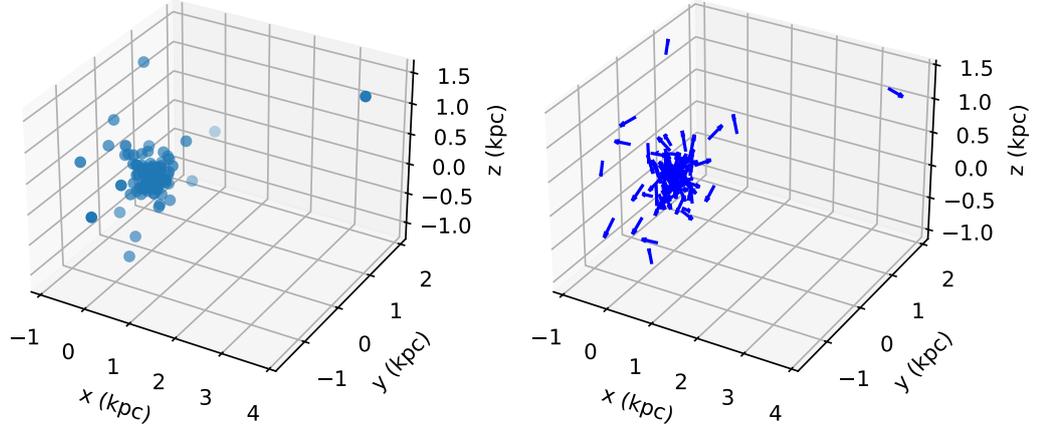


Figura 3.2: Representación de la posición (izquierda) y velocidades (derecha) en el espacio 3D cartesiano para un catalogo de 100 estrellas con $\beta = 0.25$

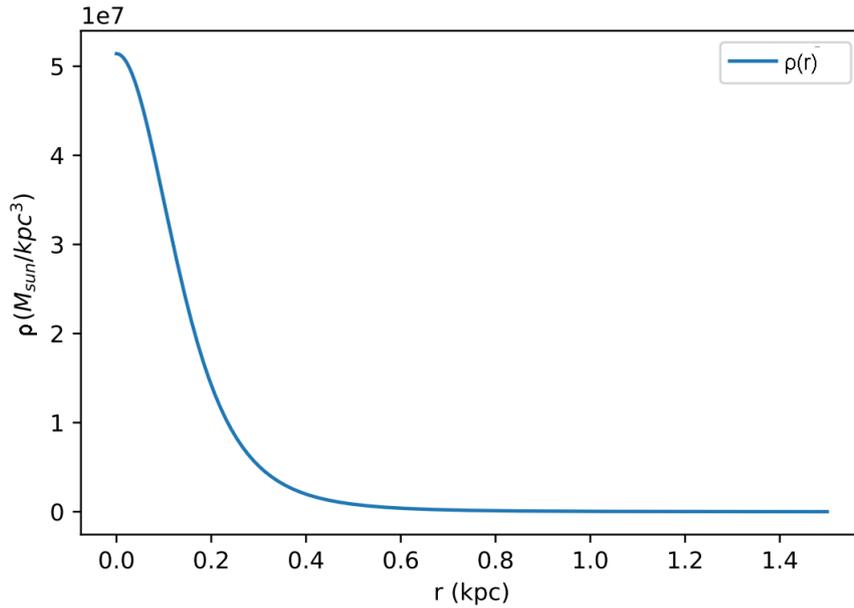


Figura 3.3: Densidad de la galaxia enana en función del radio medida en masas solares por kiloparsec cúbico, obtenida de la ecuación 3.1

En la imagen 3.4 vemos como los datos del catalogo simulado coinciden con los esperados en una esfera de Plummer 3.9.

La dispersión esperada de la velocidad es la solución de Jeans, la ecuación 3.6. En nuestra muestra asociamos cada estrella con velocidad radial $(v_r)_i$ con su bin radial k correspondiente. El perfil de la dispersión de la velocidad radial es

$$\overline{v_{r,k}^2}^{-1/2} = \left[\sum_i^{N_{b,k}} (v_r)_i^2 / N_{b,k} \right]^{1/2}, \quad (3.11)$$

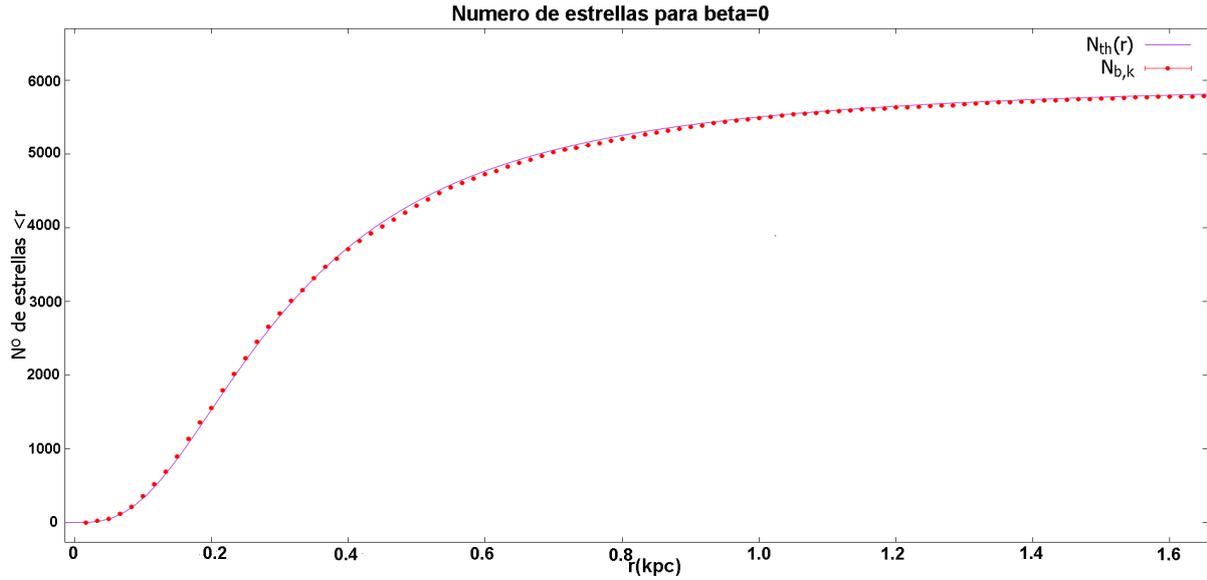


Figura 3.4: Número de estrellas dentro de un radio r para una esfera de Plummer ($N_{th}(r)$) y para la muestra del catalogo generado ($N_{b,k}$) para $\beta = 0$. Las barras de error son apenas visibles. El resto de gráficos para los otros valores de β son similares y se encuentran en el apéndice 3.4.

y la fluctuación estadística en el perfil de dispersión de la velocidad en cada bin es:

$$\sigma_{\frac{v_{r,k}^2}{v_{r,k}^2}}^{-1/2} = \left[\frac{\overline{v_{r,k}^2}}{2(N_{b,k} - 1)} \right]^{1/2}. \quad (3.12)$$

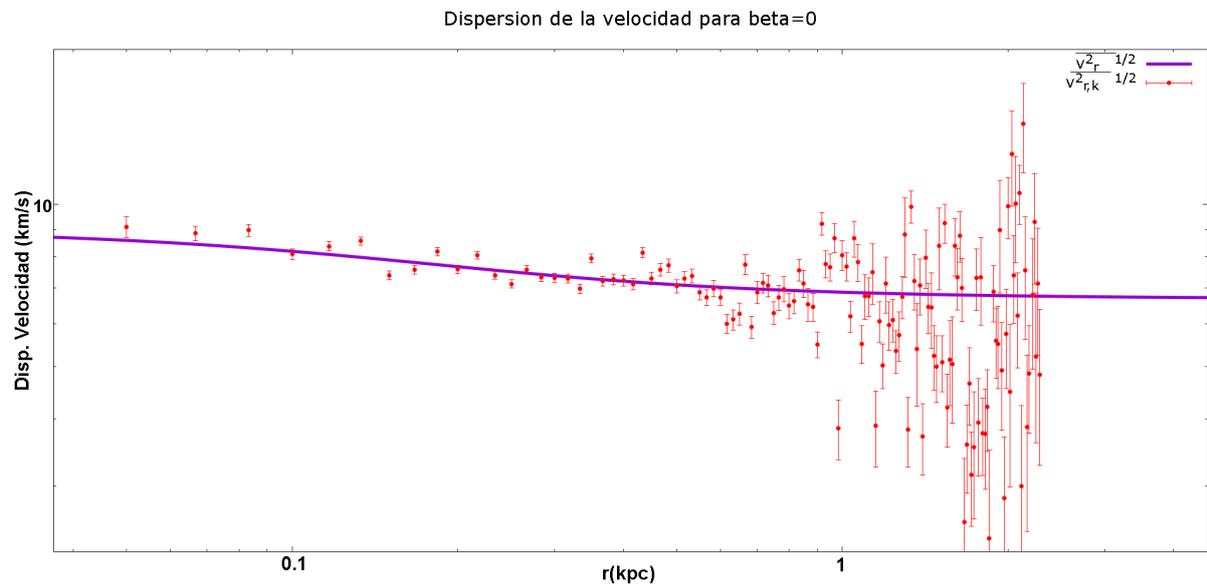


Figura 3.5: Ejemplo del muestreo de la dispersión de velocidad. La línea sólida morada es el valor teórico obtenido de 3.6 y los puntos rojos con barras de error son los valores obtenidos en el muestreo de nuestra muestra del catalogo simulado mediante 3.11 para $\beta = 0$. El resto de resultados para los otros valores de β se encuentran en el apéndice 3.4.

En la figura 3.5 y en las de los otros valores de β (3.14 y 3.13) observamos que los

resultados del muestreo son cercanos al perfil teórico esperado. Los resultados del análisis por bins para $r \gtrsim 0.9$ kpc son mucho menos precisos ya que el número de estrellas en esos bins es varios órdenes de magnitud menor que para la zona interior de la galaxia, por lo que podemos no considerarlos en el análisis.

Conclusiones

En este trabajo se ha analizado dos posibles explicaciones a los datos astronómicos que presentan discrepancias respecto a los esperables a partir de la masa que podemos observar en nuestra dinámica newtoniana.

La primera explicación propone la existencia de una cantidad sustancial de masa invisible para nuestros instrumentos en una forma novedosa, conocida como materia oscura (capítulo 1). Esta hipótesis es la que más atención ha recibido en el mundo académico y ha tenido éxito en la explicación de muchos fenómenos observados. Sin embargo, también enfrenta varios desafíos, que hemos revisado a fondo en este documento en la sección 1.4.

Alternativamente, otra explicación sugiere que puede existir un mecanismo desconocido en la dinámica a escalas galácticas. Esta idea ha llevado al desarrollo del modelo de MOND que ofrece una explicación alternativa sin necesidad de materia oscura (capítulo 2). Este modelo postula una constante con dimensiones de aceleración, a_0 . En MOND, la dinámica Newtoniana estándar es únicamente válida para aceleraciones mucho mayores que a_0 , mientras que por debajo de este valor MOND predice un funcionamiento de la dinámica gravitatoria diferente al puramente newtoniano, siguiendo la ley de Milgrom (ecuación 2.3). En este documento se examinan exhaustivamente tanto los éxitos como los problemas asociados con el modelo MOND (sección 2.3).

Finalmente, hemos construido un catálogo estelar simulado con las características de la galaxia enana *Draco* bajo el modelo MOND en el capítulo 3. Con esto podríamos evaluar el potencial de una futura misión astrométrica como *Theia* (sección 3.1, capaz de medir las posiciones y velocidades de las estrellas de la galaxia enana con suficiente precisión como para que podamos distinguir si tienen un comportamiento propio de MOND, como en el catálogo que hemos realizado (sección 3.2), o presenta un comportamiento diferente, como el que sería propio del modelo Λ CDM.

En el catálogo simulado vemos que los datos de la dispersión de velocidad siguen un comportamiento similar al perfil esperado en los tres casos de β analizados (Figuras 3.5, 3.13, y 3.14) pero existen algunas discrepancias. Esto puede deberse a fluctuaciones estadísticas, ya que el número de estrellas de cada bin es finito. Por ello, cuantas más estrellas midamos mejores resultados obtendremos. Sin embargo, se puede considerar que el número de estrellas en nuestro catálogo (6000) es más que suficiente para observar el perfil general. La obtención de datos con este perfil sería una prueba muy importante a favor del modelo MOND, o ayudaría a descartarlo en caso contrario, por lo que el satélite *Theia* contribuiría enormemente a soportar o descartar MOND.

Conclusions

In this work, two possible explanations for astronomical data discrepancies with the expected ones from our Newtonian dynamic with the mass that we can observe. The first explanation proposes the existence of a substantial amount of invisible mass, known as dark matter, which is not detectable by our instruments (chapter 1). This hypothesis has received the most attention in the academic world and has successfully explained many observed phenomena. However, it also faces several challenges, which have been thoroughly reviewed in this document in (section 1.4).

Alternatively, another explanation suggests the existence of an unknown mechanism in galactic-scale dynamics. This idea has led to the development of the Modified Newtonian Dynamics (MOND) model, which offers an alternative explanation without the need for dark matter (chapter 2). This model introduces a constant with acceleration dimensions, denoted as a_0 . In MOND, standard Newtonian dynamics are only valid for accelerations much greater than a_0 , while below this value, MOND predicts gravitational dynamics different from purely Newtonian, following the Milgrom law (equation 2.3). This document extensively examines both the successes and the problems associated with the MOND model (section 2.3).

Finally, a simulated stellar catalogue has been constructed to mimic the characteristics of the dwarf galaxy Draco under the MOND model (chapter 3). This allows for an evaluation of the potential of a future astrometric mission like *Theia* (section 3.1), capable of measuring the positions and velocities of the stars in the dwarf galaxy with sufficient precision to distinguish whether they exhibit MOND behaviour, as in the catalogue we have created in the section 3.2, or if they exhibit different behaviour, as expected in the Λ CDM model.

In the simulated catalogue, we observe that the velocity dispersion data follows a similar behaviour to the expected profile in the three analysed β cases (Figures 3.13, 3.13, and 3.14) but there are some discrepancies. These discrepancies may be due to statistical fluctuations, as the number of stars in each bin is finite. Therefore, obtaining better results would require measuring more stars, although it can be considered that the number of stars in our catalogue (6000) is more than sufficient to observe the overall profile. Obtaining of astrometric data with this profile would be an important evidence in favor of MOND, or it will help to rule it out on the contrary case. Therefore, the satellite *Theia* would greatly contribute to support or discard MOND.

Bibliografía

- [1] Bobby Samir Acharya, Gordon Kane, Scott Watson y Piyush Kumar. «Nonthermal “WIMP miracle”». En: *Phys. Rev. D* 80 (8 oct. de 2009), pág. 083529. DOI: [10.1103/PhysRevD.80.083529](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.083529). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.083529>.
- [2] C. Alcock, R. A. Allsman y & D. R. Alves. «The MACHO Project: Microlensing Results from 5.7 Years of Large Magellanic Cloud Observations». En: *The Astrophysical Journal* 542.1 (oct. de 2000), págs. 281-307. DOI: [10.1086/309512](https://doi.org/10.1086/309512). URL: <https://doi.org/10.1086/309512>.
- [3] John D. Anderson et al. «Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11». En: *Phys. Rev. D* 65 (8 abr. de 2002), pág. 082004. DOI: [10.1103/PhysRevD.65.082004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.082004). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.082004>.
- [4] G. W. Angus. «Dwarf spheroidals in MOND». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 387.4 (jul. de 2008), págs. 1481-1488. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2008.13351.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13351.x). URL: <https://doi.org/10.1111%5C%2Fj.1365-2966.2008.13351.x>.
- [5] G. W. Angus, B. Famaey y H. S. Zhao. «Can MOND take a bullet? Analytical comparisons of three versions of MOND beyond spherical symmetry». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 371.1 (ago. de 2006), págs. 138-146. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2006.10668.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10668.x). URL: <https://doi.org/10.1111%5C%2Fj.1365-2966.2006.10668.x>.
- [6] G. W. Angus y S. S. McGaugh. «The collision velocity of the bullet cluster in conventional and modified dynamics». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 383.2 (dic. de 2007), págs. 417-423. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2007.12403.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.12403.x). URL: <https://doi.org/10.1111%5C%2Fj.1365-2966.2007.12403.x>.
- [7] G. Battaglia, S. Taibi, G. F. Thomas y T. K. Fritz. «iGaia/i early DR3 systemic motions of Local Group dwarf galaxies and orbital properties with a massive Large Magellanic Cloud». En: *Astron. Astrophys.* 657 (ene. de 2022), A54. DOI: [10.1051/0004-6361/202141528](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202141528). URL: <https://doi.org/10.1051%5C%2F0004-6361%5C%2F202141528>.
- [8] Giuseppina Battaglia y Carlo Nipoti. *Stellar dynamics and dark matter in Local Group dwarf galaxies*. 2022. DOI: [10.48550/ARXIV.2205.07821](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2205.07821). URL: <https://arxiv.org/abs/2205.07821>.
- [9] K. G. Begeman, A. H. Broeils y R. H. Sanders. «Extended rotation curves of spiral galaxies: dark haloes and modified dynamics». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 249.3 (abr. de 1991), págs. 523-537. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/249.3.523](https://doi.org/10.1093/mnras/249.3.523). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/249/3/523/18160929/mnras249-0523.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/249.3.523>.
- [10] Peter S. Behroozi, Risa H. Wechsler y Charlie Conroy. «The average star formation histories of galaxies in dark matter halos from $z = 0-8$ ». En: *The Astrophysical Journal* 770.1 (mayo de 2013), pág. 57. DOI: [10.1088/0004-637X/770/1/57](https://doi.org/10.1088/0004-637X/770/1/57). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/770/1/57>.

- [11] J. Bekenstein y M. Milgrom. «Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity?» En: *Astrophys. J.* 286 (nov. de 1984), págs. 7-14. DOI: [10.1086/162570](https://doi.org/10.1086/162570).
- [12] Jacob Bekenstein. «Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm». En: *Phys. Rev. D* 70 (oct. de 2004). DOI: [10.1103/PhysRevD.70.083509](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.083509).
- [13] Jacob D. Bekenstein. «Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm». En: *Phys. Rev. D* 70 (8 oct. de 2004), pág. 083509. DOI: [10.1103/PhysRevD.70.083509](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.083509). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.083509>.
- [14] O. Bienaymé, B. Famaey, X. Wu, H. S. Zhao y D. Aubert. «Galactic kinematics with modified Newtonian dynamics». En: *Astron. Astrophys.* 500.2 (abr. de 2009), págs. 801-805. DOI: [10.1051/0004-6361/200809978](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200809978). URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/200809978>.
- [15] W. J. G. de Blok y S. S. McGaugh. «The dark and visible matter content of low surface brightness disc galaxies». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 290.3 (sep. de 1997), págs. 533-552. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/290.3.533](https://doi.org/10.1093/mnras/290.3.533). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/290/3/533/18540302/290-3-533.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/290.3.533>.
- [16] W. J. G. de Blok et al. «high-resolution rotation curves and galaxy mass models from THINGS». En: *The Astronomical Journal* 136.6 (nov. de 2008), págs. 2648-2719. DOI: [10.1088/0004-6256/136/6/2648](https://doi.org/10.1088/0004-6256/136/6/2648). URL: <https://doi.org/10.1088/0004-6256/136/6/2648>.
- [17] F. Bournaud, P.-A. Duc y F. Masset. «The large extent of dark matter haloes probed by the formation of tidal dwarf galaxies». En: *Astron. Astrophys.* 411.2 (nov. de 2003), págs. L469-L472. DOI: [10.1051/0004-6361:20031520](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20031520). URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20031520>.
- [18] Frederic Bournaud et al. «Missing Mass in Collisional Debris from Galaxies». En: *Science* 316.5828 (mayo de 2007), págs. 1166-1169. DOI: [10.1126/science.1142114](https://doi.org/10.1126/science.1142114). URL: <https://doi.org/10.1126/science.1142114>.
- [19] Michael Boylan-Kolchin, James S. Bullock y Manoj Kaplinghat. «The Milky Way's bright satellites as an apparent failure of CDM». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 422.2 (abr. de 2012), págs. 1203-1218. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20695.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20695.x). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/422/2/1203/3464467/mnras0422-1203.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20695.x>.
- [20] Rafael Brada y Mordehai Milgrom. «Dwarf Satellite Galaxies in the Modified Dynamics». En: *The Astrophysical Journal* 541.2 (oct. de 2000), págs. 556-564. DOI: [10.1086/309475](https://doi.org/10.1086/309475). URL: <https://doi.org/10.1086/309475>.
- [21] Rafael Brada y Mordehai Milgrom. «Stability of Disk Galaxies in the Modified Dynamics». En: *The Astrophysical Journal* 519.2 (jul. de 1999), págs. 590-598. DOI: [10.1086/307402](https://doi.org/10.1086/307402). URL: <https://doi.org/10.1086/307402>.

- [22] C. B. Brook et al. «The stellar-to-halo mass relation for local group galaxies». En: *The Astrophysical Journal Letters* 784.1 (mar. de 2014), pág. L14. DOI: [10.1088/2041-8205/784/1/L14](https://doi.org/10.1088/2041-8205/784/1/L14). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/2041-8205/784/1/L14>.
- [23] James S. Bullock y Michael Boylan-Kolchin. «Small-Scale Challenges to the CDM Paradigm». En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 55.1 (2017), págs. 343-387. DOI: [10.1146/annurev-astro-091916-055313](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-091916-055313). eprint: <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-091916-055313>. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-091916-055313>.
- [24] James S. Bullock, Andrey V. Kravtsov y David H. Weinberg. «Reionization and the Abundance of Galactic Satellites». En: *The Astrophysical Journal* 539.2 (ago. de 2000), pág. 517. DOI: [10.1086/309279](https://doi.org/10.1086/309279). URL: <https://dx.doi.org/10.1086/309279>.
- [25] M.J.Rees C.J.Hogan. «Axion miniclusters». En: (). DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(88\)91655-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91655-3).
- [26] Reginald T Cahill. «A Quantum Cosmology: No Dark Matter, Dark Energy nor Accelerating Universe». En: *arXiv* (2007).
- [27] Francesca Chadha-Day, John Ellis y David J. E. Marsh. *Axion Dark Matter: What is it and Why Now?* 2021. DOI: [10.48550/ARXIV.2105.01406](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2105.01406). URL: <https://arxiv.org/abs/2105.01406>.
- [28] Da-Ming Chen y Stacy McGaugh. «Contradiction between strong lensing statistics and a feedback solution to the cusp/core problem». En: *Research in Astronomy and Astrophysics* 10.12 (dic. de 2010), pág. 1215. DOI: [10.1088/1674-4527/10/12/003](https://doi.org/10.1088/1674-4527/10/12/003). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1674-4527/10/12/003>.
- [29] Shaun Cole et al. «The 2dF Galaxy Redshift Survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 362.2 (sep. de 2005), págs. 505-534. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2005.09318.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09318.x). URL: <https://doi.org/10.1111%5C%2Fj.1365-2966.2005.09318.x>.
- [30] Planck Collaboration. «Planck 2018 results». En: *Astron. Astrophys.* 641 (sep. de 2020), A6. DOI: [10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910). URL: <https://doi.org/10.1051%5C%2F0004-6361%5C%2F201833910>.
- [31] Planck Collaboration et al. *Planck 2018 results. IX. Constraints on primordial non-Gaussianity*. 2019. arXiv: [1905.05697](https://arxiv.org/abs/1905.05697) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1905.05697)].
- [32] The Theia Collaboration et al. *Theia: Faint objects in motion or the new astrometry frontier*. 2017. arXiv: [1707.01348](https://arxiv.org/abs/1707.01348) [[astro-ph.IM](https://arxiv.org/abs/1707.01348)].
- [33] Stéphanie Côté, Claude Carignan y Kenneth C. Freeman. «The Various Kinematics of Dwarf Irregular Galaxies in Nearby Groups and Their Dark Matter Distributions». En: *The Astronomical Journal* 120.6 (dic. de 2000), pág. 3027. DOI: [10.1086/316883](https://doi.org/10.1086/316883). URL: <https://dx.doi.org/10.1086/316883>.
- [34] Nathaniel Craig. *The State of Supersymmetry after Run I of the LHC*. 2013. DOI: [10.48550/ARXIV.1309.0528](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1309.0528). URL: <https://arxiv.org/abs/1309.0528>.
- [35] Darren J. Croton et al. «The many lives of active galactic nuclei: cooling flows, black holes and the luminosities and colours of galaxies». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 365.1 (ene. de 2006), págs. 11-28. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2005.09675.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09675.x). arXiv: [astro-ph/0508046](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0508046) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0508046)].

- [36] de Blok, W. J. G. y Bosma, A. «High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies *». En: *A&A* 385.3 (2002), págs. 816-846. DOI: [10.1051/0004-6361:20020080](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20020080). URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20020080>.
- [37] Ivan de Martino, Antonaldo Diaferio y Luisa Ostorero. «Dynamics of dwarf galaxies in if(R/i) gravity». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 519.3 (ene. de 2023), págs. 4424-4433. DOI: [10.1093/mnras/stad010](https://doi.org/10.1093/mnras/stad010). URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stad010>.
- [38] A. Del Popolo. «The Cusp/Core problem and the Secondary Infall Model». En: *Astrophys. J.* 698 (2009), pág. 2093. DOI: [10.1088/0004-637X/698/2/2093](https://doi.org/10.1088/0004-637X/698/2/2093). arXiv: [0906.4447](https://arxiv.org/abs/0906.4447) [astro-ph.CO].
- [39] Scott Dodelson. «The real problem with MOND». En: *International Journal of Modern Physics D* 20.14 (dic. de 2011), págs. 2749-2753. DOI: [10.1142/S0218271811020561](https://doi.org/10.1142/S0218271811020561). URL: <https://doi.org/10.1142/S0218271811020561>.
- [40] Gregory A. Dooley et al. «An observer's guide to the (Local Group) dwarf galaxies: predictions for their own dwarf satellite populations». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 471.4 (ago. de 2017), págs. 4894-4909. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/stx1900](https://doi.org/10.1093/mnras/stx1900). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/471/4/4894/19650156/stx1900.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stx1900>.
- [41] John Dubinski y R. G. Carlberg. «The Structure of Cold Dark Matter Halos». En: *Astrophys. J.* 378 (sep. de 1991), pág. 496. DOI: [10.1086/170451](https://doi.org/10.1086/170451).
- [42] Aaron A. Dutton et al. «NIHAO V: too big does not fail – reconciling the conflict between CDM predictions and the circular velocities of nearby field galaxies». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.: Letters* 457.1 (ene. de 2016), págs. L74-L78. ISSN: 1745-3925. DOI: [10.1093/mnrasl/slv193](https://doi.org/10.1093/mnrasl/slv193). eprint: <https://academic.oup.com/mnrasl/article-pdf/457/1/L74/8009767/slv193.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slv193>.
- [43] Cora Dvorkin et al. *Dark Matter Physics from the CMB-S4 Experiment*. 2022. arXiv: [2203.07064](https://arxiv.org/abs/2203.07064) [hep-ph].
- [44] M. Fabrizio et al. «The carina project. x. on the kinematics of old and intermediate-age stellar populations». En: *The Astrophysical Journal* 830.2 (oct. de 2016), pág. 126. DOI: [10.3847/0004-637X/830/2/126](https://doi.org/10.3847/0004-637X/830/2/126). URL: <https://dx.doi.org/10.3847/0004-637X/830/2/126>.
- [45] B. Famaey y J. Binney. «Modified Newtonian dynamics in the Milky Way». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 363.2 (oct. de 2005), págs. 603-608. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2005.09474.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09474.x). URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09474.x>.
- [46] Benoit Famaey y Stacy S. McGaugh. «Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions». En: *Living Reviews in Relativity* 15.1 (sep. de 2012). DOI: [10.12942/lrr-2012-10](https://doi.org/10.12942/lrr-2012-10). URL: <https://doi.org/10.12942/lrr-2012-10>.

- [47] Chris Flynn, Johan Holmberg, Laura Portinari, Burkhard Fuchs y Hartmut Jahreiß. «On the mass-to-light ratio of the local Galactic disc and the optical luminosity of the Galaxy». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 372.3 (sep. de 2006), págs. 1149-1160. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2006.10911.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10911.x). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/372/3/1149/2954531/mnras0372-1149.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10911.x>.
- [48] K. C. Freeman. «On the disks of spiral and SO Galaxies». En: *Astrophys. J.* 160 (1970), pág. 811. DOI: [10.1086/150474](https://doi.org/10.1086/150474).
- [49] Shea Garrison-Kimmel, Michael Boylan-Kolchin, James S. Bullock y Kyle Lee. «ELVIS: Exploring the Local Volume in Simulations». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 438.3 (ene. de 2014), págs. 2578-2596. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/stt2377](https://doi.org/10.1093/mnras/stt2377). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/438/3/2578/18468299/stt2377.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stt2377>.
- [50] Shea Garrison-Kimmel, James S. Bullock, Michael Boylan-Kolchin y Emma Bardwell. «Organized chaos: scatter in the relation between stellar mass and halo mass in small galaxies». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 464.3 (oct. de 2016), págs. 3108-3120. DOI: [10.1093/mnras/stw2564](https://doi.org/10.1093/mnras/stw2564). URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stw2564>.
- [51] M. Geha, P. Guhathakurta, R. M. Rich y M. C. Cooper. «Local Group Dwarf Elliptical Galaxies. I. Mapping the Dynamics of NGC 205 Beyond the Tidal Radius». En: *The Astronomical Journal* 131.1 (ene. de 2006), págs. 332-342. DOI: [10.1086/498686](https://doi.org/10.1086/498686). URL: <https://doi.org/10.1086/498686>.
- [52] Ricardo Tanausú Génova-Santos. «The Establishment of the Standard Cosmological Model Through Observations». En: *Reviews in Frontiers of Modern Astrophysics*. Springer International Publishing, 2020, págs. 311-347. DOI: [10.1007/978-3-030-38509-5_11](https://doi.org/10.1007/978-3-030-38509-5_11). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-38509-5_11.
- [53] G. Gentile, B. Famaey y W. J. G. de Blok. «THINGS about MOND». En: *Astron. Astrophys.* 527 (ene. de 2011), A76. DOI: [10.1051/0004-6361/201015283](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015283). URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015283>.
- [54] G. Gentile et al. «Tidal dwarf galaxies as a test of fundamental physics». En: *Astron. Astrophys.* 472.2 (jul. de 2007), págs. L25-L28. DOI: [10.1051/0004-6361:20078081](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20078081). URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20078081>.
- [55] Gianfranco Gentile, Benoit Famaey, Hongsheng Zhao y Paolo Salucci. «Universality of galactic surface densities within one dark halo scale-length». En: *Nature* 461 (oct. de 2009), págs. 627-8. DOI: [10.1038/nature08437](https://doi.org/10.1038/nature08437).
- [56] Jorrit H. J. Hagen, Amina Helmi y Maarten A. Breddels. «Axisymmetric Schwarzschild models of an isothermal axisymmetric mock dwarf spheroidal galaxy». En: *Astron. Astrophys.* 632 (dic. de 2019), A99. DOI: [10.1051/0004-6361/201936196](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201936196). URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201936196>.
- [57] Kohei Hayashi, Masashi Chiba y Tomoaki Ishiyama. «Diversity of Dark Matter Density Profiles in the Galactic Dwarf Spheroidal Satellites». En: *The Astrophysical Journal* 904.1 (nov. de 2020), pág. 45. DOI: [10.3847/1538-4357/abbe0a](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abbe0a). URL: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/abbe0a>.
- [58] Lars Hernquist. «An Analytical Model for Spherical Galaxies and Bulges». En: *Astrophys. J.* 356 (jun. de 1990), pág. 359. DOI: [10.1086/168845](https://doi.org/10.1086/168845).

- [59] Philip F. Hopkins, Eliot Quataert y Norman Murray. «Stellar feedback in galaxies and the origin of galaxy-scale winds». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 421.4 (abr. de 2012), págs. 3522-3537. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20593.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20593.x). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/421/4/3522/3835045/mnras0421-3522.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20593.x>.
- [60] Alexander P. Ji et al. «Kinematics of Antlia 2 and Crater 2 from the Southern Stellar Stream Spectroscopic Survey (S sup5/sup)». En: *The Astrophysical Journal* 921.1 (oct. de 2021), pág. 32. DOI: [10.3847/1538-4357/ac1869](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac1869). URL: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac1869>.
- [61] Y. P. Jing y Yasushi Suto. «The Density Profiles of the Dark Matter Halo Are Not Universal». En: *The Astrophysical Journal* 529.2 (ene. de 2000), pág. L69. DOI: [10.1086/312463](https://doi.org/10.1086/312463). URL: <https://dx.doi.org/10.1086/312463>.
- [62] S. Jordan. «The Gaia project: Technique, performance and status». En: *Astronomische Nachrichten* 329.9-10 (dic. de 2008), págs. 875-880. DOI: [10.1002/asna.200811065](https://doi.org/10.1002/asna.200811065). URL: <https://doi.org/10.1002/asna.200811065>.
- [63] Manoj Kaplinghat, Mauro Valli y Hai-Bo Yu. «Too big to fail in light of Gaia». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 490.1 (sep. de 2019), págs. 231-242. DOI: [10.1093/mnras/stz2511](https://doi.org/10.1093/mnras/stz2511). URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stz2511>.
- [64] J. C. Kapteyn. «First Attempt at a Theory of the Arrangement and Motion of the Sidereal System». En: *Astrophys. J.* 55 (mayo de 1922), pág. 302. DOI: [10.1086/142670](https://doi.org/10.1086/142670).
- [65] Vincent B. Klaer y Guy D. Moore. «The dark-matter axion mass». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2017.11 (nov. de 2017), págs. 049-049. DOI: [10.1088/1475-7516/2017/11/049](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/11/049). URL: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/11/049>.
- [66] Arthur Kosowsky. «Dwarf Galaxies, MOND, and Relativistic Gravitation». En: *Advances in Astronomy* 2010 (2010), págs. 1-9. DOI: [10.1155/2010/357342](https://doi.org/10.1155/2010/357342). URL: <https://doi.org/10.1155/2010/357342>.
- [67] Pavel Kroupa. «Dwarf spheroidal satellite galaxies without dark matter». En: *Astronomical Journal* 114 (jul. de 1997), págs. 139-164. DOI: [10.1016/S1384-1076\(97\)00012-2](https://doi.org/10.1016/S1384-1076(97)00012-2).
- [68] Jounghun Lee y Eiichiro Komatsu. «Bullet cluster: a challenge to cdm cosmology». En: *Astronomical Journal* 140 (jun. de 2010), págs. 60-65. DOI: [10.1088/0004-637x/718/1/60](https://doi.org/10.1088/0004-637x/718/1/60). URL: <https://doi.org/10.1088/0004-637x/718/1/60>.
- [69] T. S. Li et al. «The First Tidally Disrupted Ultra-faint Dwarf Galaxy?: A Spectroscopic Analysis of the Tucana III Stream». En: *The Astrophysical Journal* 866.1 (oct. de 2018), pág. 22. DOI: [10.3847/1538-4357/aadf91](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aadf91). URL: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aadf91>.
- [70] Jia Liu et al. «MassiveNuS: cosmological massive neutrino simulations». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2018.03 (mar. de 2018), págs. 049-049. DOI: [10.1088/1475-7516/2018/03/049](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/03/049). URL: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/03/049>.
- [71] Guang-Wen Ma y Jing-Yuan Ma. «A cyclic model of universe with energy exchange between radiation, matter and vacuum energy». En: *Int. J. Theor. Phys.* 47 (2008), págs. 2904-2910. DOI: [10.1007/s10773-008-9723-0](https://doi.org/10.1007/s10773-008-9723-0).

- [72] Stephen P. Martin. «A supersymmetry primer». En: *Perspectives on Supersymmetry*, págs. 1-98. DOI: [10.1142/9789812839657_0001](https://doi.org/10.1142/9789812839657_0001). eprint: https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789812839657_0001. URL: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812839657_0001.
- [73] Alberto Manuel Martínez-García, Andrés del Pino, Antonio Aparicio, Roeland P van der Marel y Laura L Watkins. «Internal rotation of Milky Way dwarf spheroidal satellites with iGaia/i Early Data Release 3». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 505.4 (jun. de 2021), págs. 5884-5895. DOI: [10.1093/mnras/stab1568](https://doi.org/10.1093/mnras/stab1568). URL: <https://doi.org/10.1093%5C%2Fmnras%5C%2Fstab1568>.
- [74] Ivan de Martino et al. «Dark Matters on the Scale of Galaxies». En: *Universe* 6.8 (ago. de 2020), pág. 107. DOI: [10.3390/universe6080107](https://doi.org/10.3390/universe6080107). URL: <https://doi.org/10.3390%5C%2Funiverse6080107>.
- [75] D. Massari et al. «Three-dimensional motions in the Sculptor dwarf galaxy as a glimpse of a new era». En: *Nature Astronomy* 2.2 (nov. de 2017), págs. 156-161. DOI: [10.1038/s41550-017-0322-y](https://doi.org/10.1038/s41550-017-0322-y). URL: <https://doi.org/10.1038%5C%2Fs41550-017-0322-y>.
- [76] Richard Massey, Thomas Kitching y Johan Richard. «The dark matter of gravitational lensing». En: *Reports on Progress in Physics* 73.8 (jul. de 2010), pág. 086901. DOI: [10.1088/0034-4885/73/8/086901](https://doi.org/10.1088/0034-4885/73/8/086901). URL: <https://doi.org/10.1088%5C%2F0034-4885%5C%2F73%5C%2F8%5C%2F086901>.
- [77] A. W. McConnachie, J. Penarrubia y J. F. Navarro. «Multiple dynamical components in Local Group dwarf spheroidals». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.: Letters* 380.1 (sep. de 2007), págs. L75-L79. DOI: [10.1111/j.1745-3933.2007.00353.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2007.00353.x). URL: <https://doi.org/10.1111%5C%2Fj.1745-3933.2007.00353.x>.
- [78] S. S. McGaugh, J. M. Schombert, G. D. Bothun y W. J. G. de Blok. «The Baryonic Tully-Fisher Relation». En: *The Astrophysical Journal* 533.2 (abr. de 2000), págs. L99-L102. DOI: [10.1086/312628](https://doi.org/10.1086/312628). URL: <https://doi.org/10.1086%5C%2F312628>.
- [79] S. S. McGaugh, J. M. Schombert, G. D. Bothun y W. J. G. de Blok. «The Baryonic Tully-Fisher Relation». En: *Astrophys. J. Lett.* 533.2 (abr. de 2000), págs. L99-L102. DOI: [10.1086/312628](https://doi.org/10.1086/312628). arXiv: [astro-ph/0003001](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0003001) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [80] Stacy S. McGaugh. «Milky Way Mass Models and MOND». En: *The Astrophysical Journal* 683.1 (ago. de 2008), pág. 137. DOI: [10.1086/589148](https://doi.org/10.1086/589148). URL: <https://dx.doi.org/10.1086/589148>.
- [81] Stacy S. McGaugh. «The Baryonic Tully-Fisher Relation of Galaxies with Extended Rotation Curves and the Stellar Mass of Rotating Galaxies». En: *Astrophys. J.* 632.2 (oct. de 2005), págs. 859-871. DOI: [10.1086/432968](https://doi.org/10.1086/432968). arXiv: [astro-ph/0506750](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0506750) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [82] Stacy S. McGaugh. «The Mass Discrepancy–Acceleration Relation: Disk Mass and the Dark Matter Distribution». En: *The Astrophysical Journal* 609.2 (jul. de 2004), págs. 652-666. DOI: [10.1086/421338](https://doi.org/10.1086/421338). URL: <https://doi.org/10.1086%5C%2F421338>.

- [83] Stacy S. McGaugh, Vera C. Rubin y W. J. G. de Blok. «High-Resolution Rotation Curves of Low Surface Brightness Galaxies. I. Data». En: *The Astronomical Journal* 122.5 (nov. de 2001), págs. 2381-2395. DOI: [10.1086/323448](https://doi.org/10.1086/323448). URL: <https://doi.org/10.1086/323448>.
- [84] Stacy S. McGaugh y Joe Wolf. «Local group dwarf spheroidals: Correlated deviations from the baryonic Tully-Fisher relation». En: *The Astrophysical Journal* 722.1 (sep. de 2010), págs. 248-261. DOI: [10.1088/0004-637x/722/1/248](https://doi.org/10.1088/0004-637x/722/1/248). URL: <https://doi.org/10.1088/0004-637x/722/1/248>.
- [85] M. Milgrom. «A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis.» En: *Astrophys. J.* 270 (jul. de 1983), págs. 365-370. DOI: [10.1086/161130](https://doi.org/10.1086/161130).
- [86] Mordehai Milgrom. «Bimetric MOND gravity». En: *Physical Review D* 80.12 (dic. de 2009). DOI: [10.1103/physrevd.80.123536](https://doi.org/10.1103/physrevd.80.123536). URL: <https://doi.org/10.1103/physrevd.80.123536>.
- [87] Mordehai Milgrom. «MOND and the Mass Discrepancies in Tidal Dwarf Galaxies». En: *The Astrophysical Journal* 667.1 (sep. de 2007), págs. L45-L48. DOI: [10.1086/522049](https://doi.org/10.1086/522049). URL: <https://doi.org/10.1086/522049>.
- [88] Mordehai Milgrom. *MOND—a pedagogical review*. 2001. arXiv: [astro-ph/0112069](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0112069) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [89] Mordehai Milgrom. «The modified dynamics as a vacuum effect». En: *Physics Letters A* 253.5-6 (mar. de 1999), págs. 273-279. DOI: [10.1016/s0375-9601\(99\)00077-8](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(99)00077-8). URL: [https://doi.org/10.1016/s0375-9601\(99\)00077-8](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(99)00077-8).
- [90] Mordehai Milgrom. «The shape of 'dark matter' haloes of disc galaxies according to MOND». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 326 (oct. de 2001), págs. 1261-1264. DOI: [10.1046/j.1365-8711.2001.04653.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04653.x).
- [91] Mordehai Milgrom y Robert H. Sanders. «Modified Newtonian Dynamics Rotation Curves of Very Low Mass Spiral Galaxies». En: *The Astrophysical Journal* 658.1 (feb. de 2007), pág. L17. DOI: [10.1086/513695](https://dx.doi.org/10.1086/513695). URL: <https://dx.doi.org/10.1086/513695>.
- [92] Mordehai Milgrom y Robert H. Sanders. «Rings and Shells of “Dark Matter” as MOND Artifacts». En: *The Astrophysical Journal* 678.1 (mayo de 2008), pág. 131. DOI: [10.1086/529119](https://dx.doi.org/10.1086/529119). URL: <https://dx.doi.org/10.1086/529119>.
- [93] M. Moresco et al. «Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to $z = 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2012.08 (ago. de 2012), pág. 006. DOI: [10.1088/1475-7516/2012/08/006](https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2012/08/006). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2012/08/006>.
- [94] Benjamin P. Moster, Thorsten Naab y Simon D. M. White. «Galactic star formation and accretion histories from matching galaxies to dark matter haloes». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 428.4 (dic. de 2012), págs. 3121-3138. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/sts261](https://doi.org/10.1093/mnras/sts261). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/428/4/3121/18461767/sts261.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/sts261>.

- [95] and N. Aghanim et al. «iPlanck/i2018 results». En: *Astron. Astrophys.* 641 (sep. de 2020), A6. DOI: [10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910). URL: <https://doi.org/10.1051/5C%2F0004-6361/5C%2F201833910>.
- [96] Rachel Kuzio de Naray, Stacy S. McGaugh, W. J. G. de Blok y A. Bosma. «High-Resolution Optical Velocity Fields of 11 Low Surface Brightness Galaxies». En: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 165.2 (ago. de 2006), pág. 461. DOI: [10.1086/505345](https://dx.doi.org/10.1086/505345). URL: <https://dx.doi.org/10.1086/505345>.
- [97] Julio F. Navarro, Vincent R. Eke y Carlos S. Frenk. «The cores of dwarf galaxy haloes». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 283.3 (dic. de 1996), págs. L72-L78. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/283.3.L72](https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/283/3/L72/3305901/283-3-L72.pdf). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/283/3/L72/3305901/283-3-L72.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/283.3.L72>.
- [98] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk y Simon D. M. White. «The Structure of Cold Dark Matter Halos». En: *Astrophys. J.* 462 (mayo de 1996), pág. 563. DOI: [10.1086/177173](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9508025). arXiv: [astro-ph/9508025](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9508025) [astro-ph].
- [99] Se-Heon Oh et al. «High-resolution mass models of dwarf galaxies from little things». En: *The Astronomical Journal* 149.6 (mayo de 2015), pág. 180. DOI: [10.1088/0004-6256/149/6/180](https://dx.doi.org/10.1088/0004-6256/149/6/180). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0004-6256/149/6/180>.
- [100] J. H. Oort. «The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems». En: *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands* 6 (ago. de 1932), pág. 249.
- [101] J. Ostriker y P. Steinhardt. «The observational case for a low-density Universe with a non-zero cosmological constant.» En: *Nature* 377 (1995), págs. 600-602. DOI: <https://doi.org/10.1038/377600a0>.
- [102] Jeremiah P. Ostriker, Ena Choi, Anthony Chow y Kundan Guha. «Mind the Gap: Is the Too Big to Fail Problem Resolved?» En: *The Astrophysical Journal* 885.1 (nov. de 2019), pág. 97. DOI: [10.3847/1538-4357/ab3288](https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab3288). URL: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab3288>.
- [103] H. C. Plummer. «On the problem of distribution in globular star clusters». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 71 (mar. de 1911), págs. 460-470. DOI: [10.1093/mnras/71.5.460](https://doi.org/10.1093/mnras/71.5.460).
- [104] J I Read, M G Walker y P Steger. «Dark matter heats up in dwarf galaxies». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 484.1 (ene. de 2019), págs. 1401-1420. DOI: [10.1093/mnras/sty3404](https://doi.org/10.1093/mnras/sty3404). URL: <https://doi.org/10.1093/5C%2Fmnras%5C%2Fsty3404>.
- [105] Adam G. Riess et al. «A 2.4% determination of the local value of the Hubble constant». En: *The Astrophysical Journal* 826.1 (jul. de 2016), pág. 56. DOI: [10.3847/0004-637X/826/1/56](https://dx.doi.org/10.3847/0004-637X/826/1/56). URL: <https://dx.doi.org/10.3847/0004-637X/826/1/56>.
- [106] Adam G. Riess et al. «Cosmic Distances Calibrated to 1% Precision with Gaia EDR3 Parallaxes and Hubble Space Telescope Photometry of 75 Milky Way Cepheids Confirm Tension with Λ CDM». En: *The Astrophysical Journal Letters* 908.1 (feb. de 2021), pág. L6. DOI: [10.3847/2041-8213/abdbaf](https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abdbaf). URL: <https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abdbaf>.

- [107] Adam G. Riess et al. «Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant». En: *The Astronomical Journal* 116.3 (sep. de 1998), págs. 1009-1038. DOI: [10.1086/300499](https://doi.org/10.1086/300499). URL: <https://doi.org/10.1086%5C%2F300499>.
- [108] M. S. Roberts y A. H. Rots. «Comparison of Rotation Curves of Different Galaxy Types». En: *Astron. Astrophys.* 26 (ago. de 1973), págs. 483-485.
- [109] Vera C. Rubin y Jr. Ford W. Kent. «Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions». En: *Astrophys. J.* 159 (feb. de 1970), pág. 379. DOI: [10.1086/150317](https://doi.org/10.1086/150317).
- [110] F. J. Sánchez-Salcedo, K. Saha y C. A. Narayan. «The thickness of HI in galactic discs under MODified Newtonian Dynamics: theory and application to the Galaxy». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 385.3 (abr. de 2008), págs. 1585-1596. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2008.12941.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.12941.x). arXiv: [0712.0816](https://arxiv.org/abs/0712.0816) [astro-ph].
- [111] R. H. Sanders y E. Noordermeer. «Confrontation of MODified Newtonian Dynamics with the rotation curves of early-type disc galaxies». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 379.2 (jul. de 2007), págs. 702-710. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2007.11981.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.11981.x). eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/379/2/702/3394677/mnras0379-0702.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.11981.x>.
- [112] Robert H. Sanders y Stacy S. McGaugh. «Modified Newtonian Dynamics as an Alternative to Dark Matter». En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 40.1 (sep. de 2002), págs. 263-317. DOI: [10.1146/annurev.astro.40.060401.093923](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.40.060401.093923). URL: <https://doi.org/10.1146%5C%2Fannurev.astro.40.060401.093923>.
- [113] Edward Seidel y Wai-Mo Suen. «Oscillating soliton stars». En: *Phys. Rev. Lett.* 66 (13 abr. de 1991), págs. 1659-1662. DOI: [10.1103/PhysRevLett.66.1659](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.66.1659). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.1659>.
- [114] Joshua D. Simon y Marla Geha. «The Kinematics of the Ultra-faint Milky Way Satellites: Solving the Missing Satellite Problem». En: *The Astrophysical Journal* 670.1 (nov. de 2007), págs. 313-331. DOI: [10.1086/521816](https://doi.org/10.1086/521816). URL: <https://doi.org/10.1086%5C%2F521816>.
- [115] V. Springel et al. «The Aquarius Project: the subhaloes of galactic haloes». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 391.4 (dic. de 2008), págs. 1685-1711. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2008.14066.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.14066.x). arXiv: [0809.0898](https://arxiv.org/abs/0809.0898) [astro-ph].
- [116] O. Turet y F. Combes. «Interacting Galaxies with Modified Newtonian Dynamics». En: *Formation and Evolution of Galaxy Disks*. Ed. por J. G. Funes y E. M. Corsini. Vol. 396. Astronomical Society of the Pacific Conference Series. Oct. de 2008, pág. 259.
- [117] Tisserand, P. et al. «Limits on the MACHO content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds». En: *A&A* 469.2 (2007), págs. 387-404. DOI: [10.1051/0004-6361:20066017](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20066017). URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20066017>.
- [118] Erik Tollerud, Michael Boylan-Kolchin y James Bullock. «M31 Satellite Masses Compared to LCDM Subhaloes». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 440 (mar. de 2014). DOI: [10.1093/mnras/stu474](https://doi.org/10.1093/mnras/stu474).

- [119] Erik J. Tollerud, James S. Bullock, Louis E. Strigari y Beth Willman. «Hundreds of Milky Way Satellites? Luminosity Bias in the Satellite Luminosity Function». En: *The Astrophysical Journal* 688.1 (nov. de 2008), pág. 277. DOI: [10.1086/592102](https://doi.org/10.1086/592102). URL: <https://dx.doi.org/10.1086/592102>.
- [120] Eleonora Di Valentino et al. «In the realm of the Hubble tension—a review of solutions*». En: *Classical and Quantum Gravity* 38.15 (jul. de 2021), pág. 153001. DOI: [10.1088/1361-6382/ac086d](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac086d). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac086d>.
- [121] J. M. van der Hulst et al. «Star Formation Thresholds in Low Surface Brightness Galaxies». En: 106 (ago. de 1993), pág. 548. DOI: [10.1086/116660](https://doi.org/10.1086/116660).
- [122] Matthew G. Walker et al. «A universal mass profile for dwarf spheroidal galaxies?» En: *The Astrophysical Journal* 704.2 (oct. de 2009), pág. 1274. DOI: [10.1088/0004-637X/704/2/1274](https://doi.org/10.1088/0004-637X/704/2/1274). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/704/2/1274>.
- [123] Fabian Walter et al. «THINGS: the H-I nearby galaxy survey». En: *The Astronomical Journal* 136.6 (nov. de 2008), págs. 2563-2647. DOI: [10.1088/0004-6256/136/6/2563](https://doi.org/10.1088/0004-6256/136/6/2563). URL: <https://doi.org/10.1088/0004-6256/136/6/2563>.
- [124] Sai Wang, Yi-Fan Wang, Qing-Guo Huang y Tjonnie G. F. Li. «Constraints on the Primordial Black Hole Abundance from the First Advanced LIGO Observation Run Using the Stochastic Gravitational-Wave Background». En: *Phys. Rev. Lett.* 120 (19 mayo de 2018), pág. 191102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.191102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.191102). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.191102>.
- [125] Risa H. Wechsler y Jeremy L. Tinker. «The Connection Between Galaxies and Their Dark Matter Halos». En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 56.1 (2018), págs. 435-487. DOI: [10.1146/annurev-astro-081817-051756](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081817-051756). eprint: <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081817-051756>. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081817-051756>.
- [126] Steven Weinberg. «Anthropic Bound on the Cosmological Constant». En: *Phys. Rev. Lett.* 59 (22 nov. de 1987), págs. 2607-2610. DOI: [10.1103/PhysRevLett.59.2607](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.2607). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.2607>.
- [127] Steven Weinberg. «The cosmological constant problem». En: *Rev. Mod. Phys.* 61 (1 ene. de 1989), págs. 1-23. DOI: [10.1103/RevModPhys.61.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.1). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>.
- [128] Coral Wheeler et al. «The no-spin zone: rotation versus dispersion support in observed and simulated dwarf galaxies». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 465.2 (oct. de 2016), págs. 2420-2431. DOI: [10.1093/mnras/stw2583](https://doi.org/10.1093/mnras/stw2583). URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stw2583>.
- [129] Ya. B. Zel'dovich e I. D. Novikov. «The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model». En: *Astronomicheskii Zhurnal* 43 (ene. de 1966), pág. 758.
- [130] Andrew Zentner, Andreas Berlind, James Bullock, Andrey Kravtsov y Risa Wechsler. «The Physics of Galaxy Clustering I: A Model for Subhalo Populations». En: *The Astrophysical Journal* 624 (dic. de 2004). DOI: [10.1086/428898](https://doi.org/10.1086/428898).

- [131] H. S. Zhao y B. Famaey. «Refining the MOND Interpolating Function and TeVeS Lagrangian». En: *The Astrophysical Journal* 638.1 (ene. de 2006), pág. L9. DOI: [10.1086/500805](https://doi.org/10.1086/500805). URL: <https://dx.doi.org/10.1086/500805>.
- [132] HongSheng Zhao. *An introduction to Gravitational Lensing in TeVeS gravity*. 2006. arXiv: [astro-ph/0611777](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0611777) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0611777)].
- [133] F. Zwicky. «Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln». En: *Helvetica Physica Acta* 6 (ene. de 1933), págs. 110-127.

Apéndice

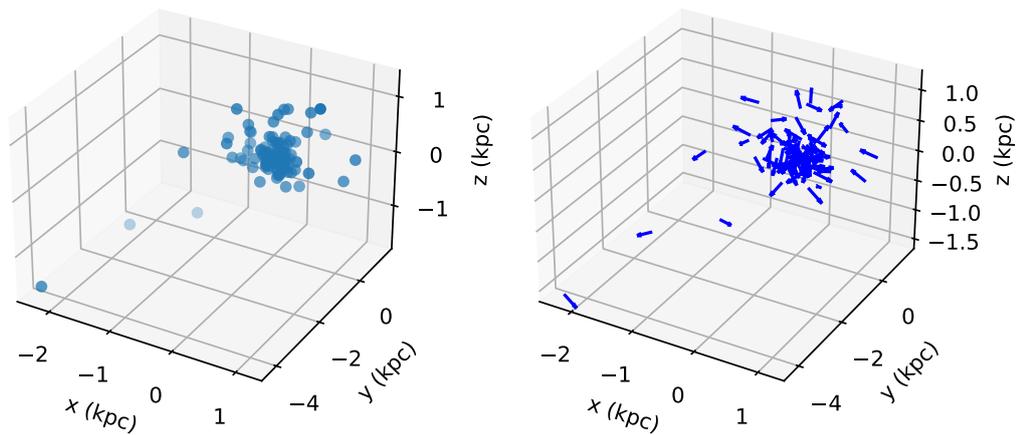


Figura 3.6: Representación de la posición (izquierda) y velocidades (derecha) en el espacio 3D cartesiano para un catalogo de 100 estrellas con $\beta = 0$

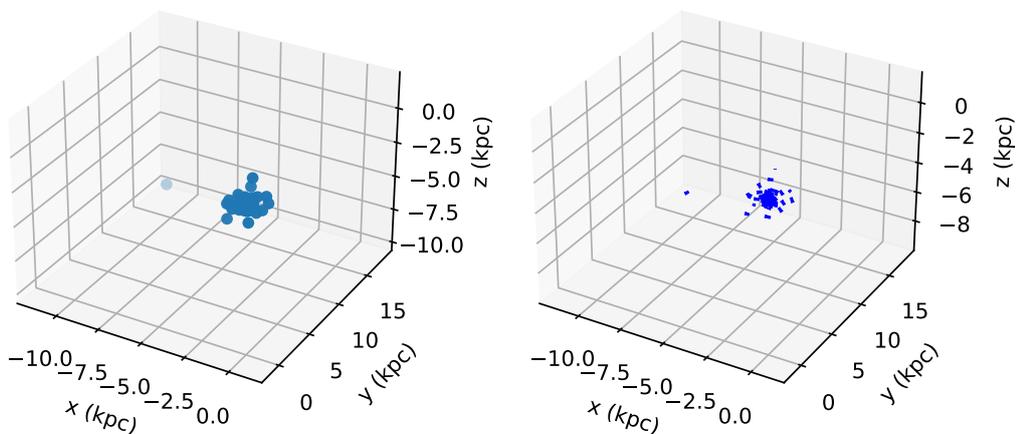


Figura 3.7: Representación de la posición (izquierda) y velocidades (derecha) en el espacio 3D cartesiano para un catalogo de 100 estrellas con $\beta = -0.25$

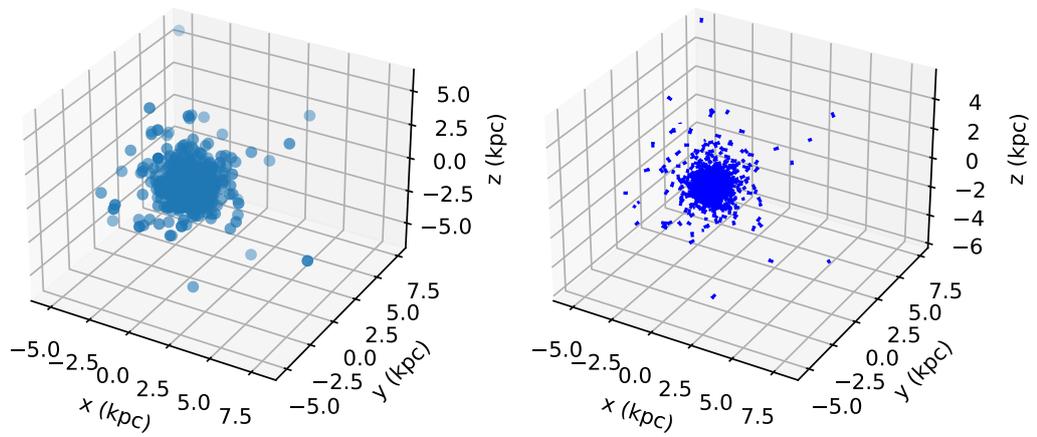


Figura 3.8: Representación de la posición (izquierda) y velocidades (derecha) en el espacio 3D cartesiano para un catalogo de 6000 estrellas con $\beta = -0.25$

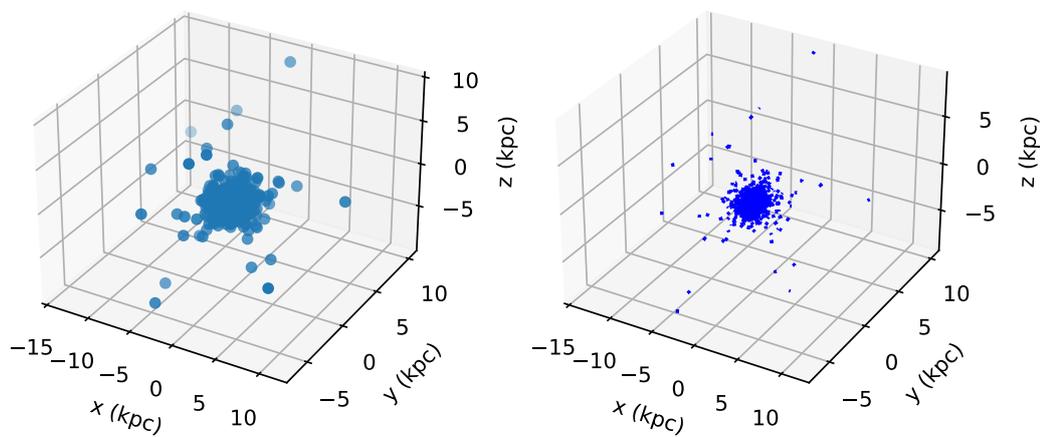


Figura 3.9: Representación de la posición (izquierda) y velocidades (derecha) en el espacio 3D cartesiano para un catalogo de 100 estrellas con $\beta = 0$

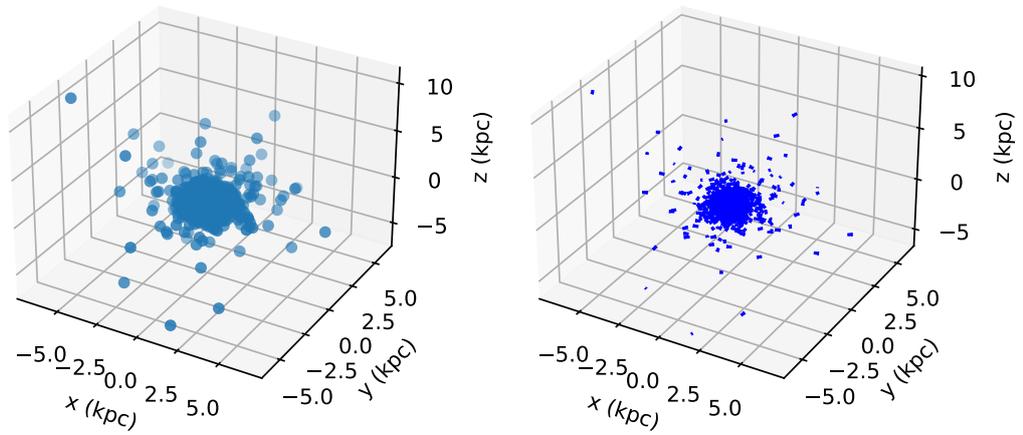


Figura 3.10: Representación de la posición (izquierda) y velocidades (derecha) en el espacio 3D cartesiano para un catalogo de 6000 estrellas con $\beta = 0.25$

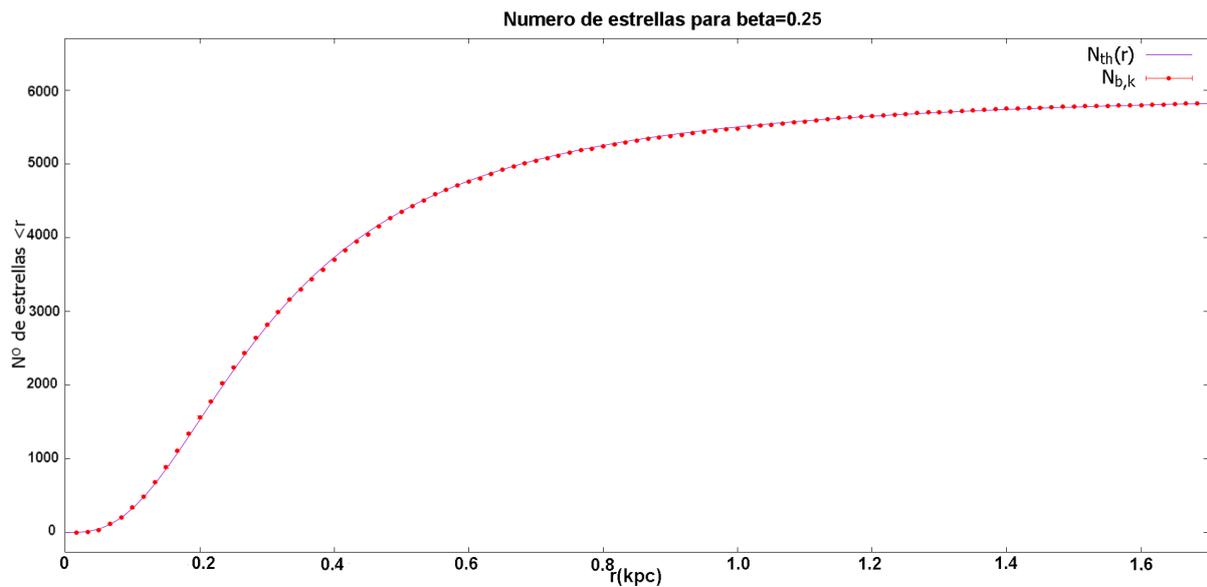


Figura 3.11: Número de estrellas dentro de un radio r para una esfera de Plummer ($N_{th}(r)$) y para la muestra del catalogo generado ($N_{b,k}$) para $\beta = 0.25$. Las barras de error son apenas visibles.

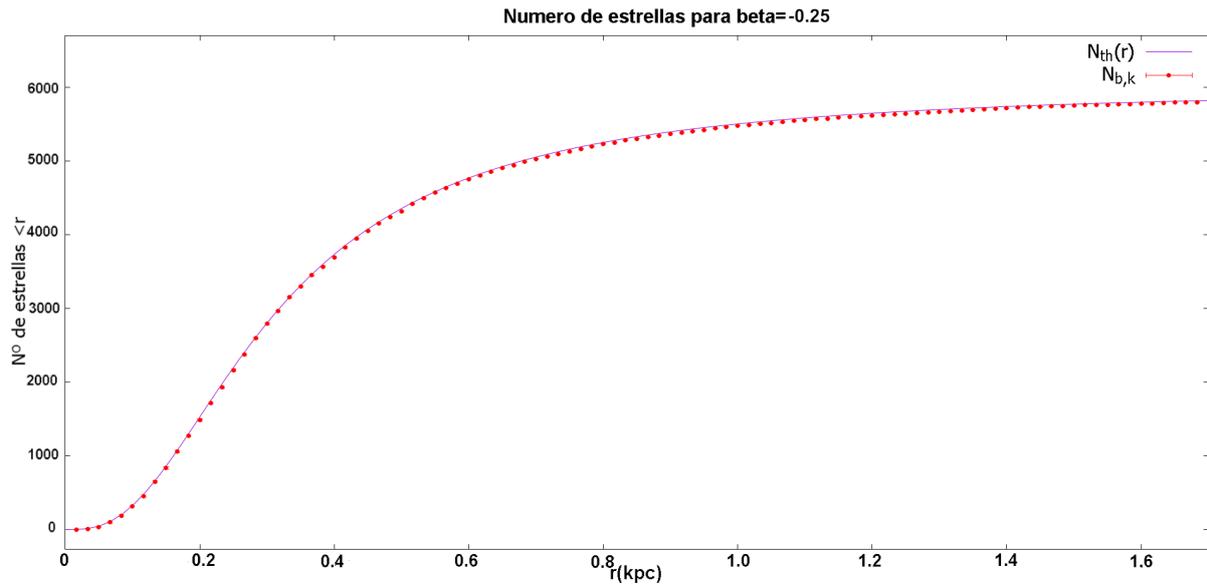


Figura 3.12: Número de estrellas dentro de un radio r para una esfera de Plummer ($N_{th}(r)$) y para la muestra del catalogo generado ($N_{b,k}$) para $\beta = -0.25$. Las barras de error son apenas visibles.

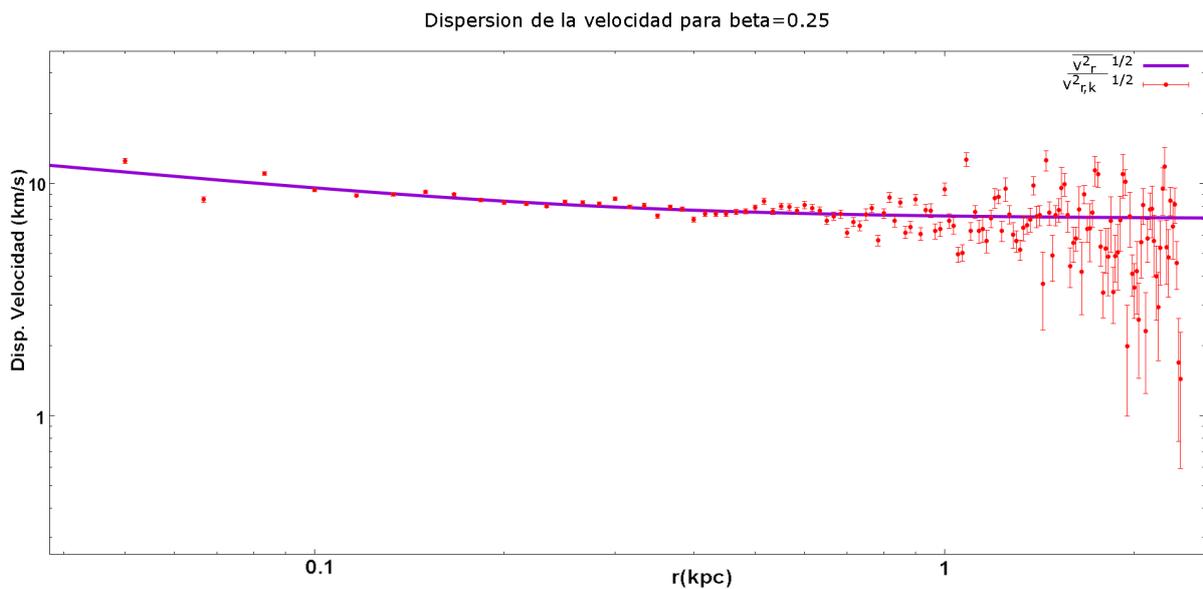


Figura 3.13: Ejemplo del muestreo de la dispersión de velocidad. La línea sólida morada es el valor teórico obtenido de 3.6 y los puntos rojos con barras de error son los valores obtenidos en el muestreo de nuestra muestra del catalogo simulado mediante 3.11 para $\beta = 0.25$.

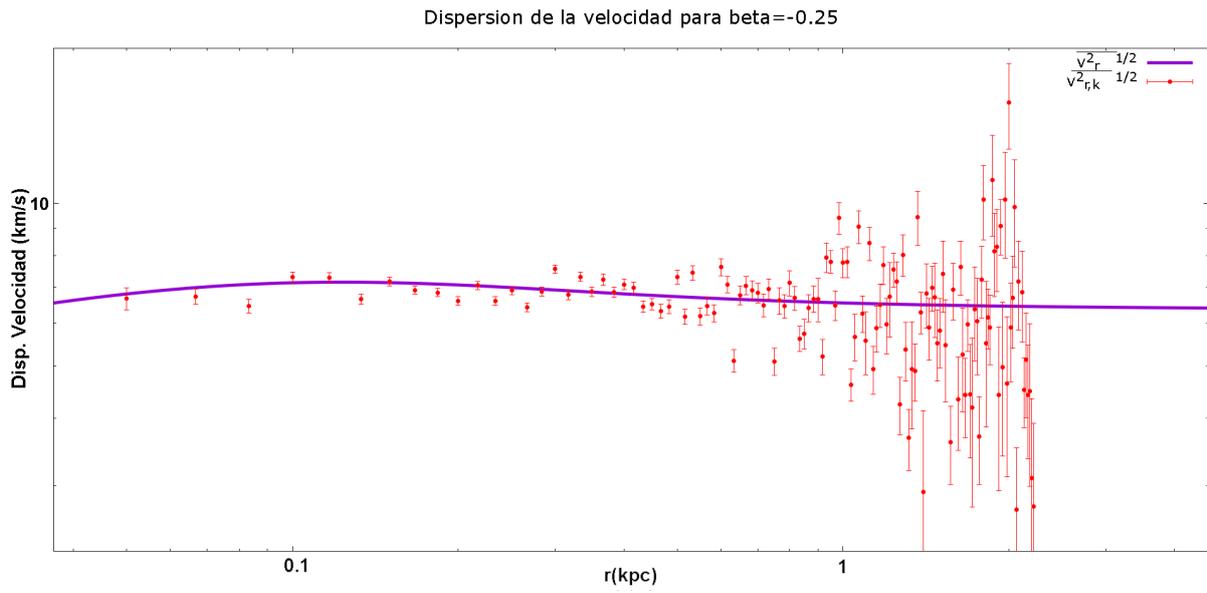


Figura 3.14: Ejemplo del muestreo de la dispersión de velocidad. La línea sólida morada es el valor teórico obtenido de 3.6 y los puntos rojos con barras de error son los valores obtenidos en el muestreo de nuestra muestra del catálogo simulado mediante 3.11 para $\beta = -0.25$.

3.5. Código utilizado

Para generar el catálogo simulado y los gráficos teóricos se ha usado el siguiente código de Python:

```
1 from sympy import *
2 from sympy.utilities.lambdify import lambdify
3 import numpy as np
4 from numpy.linalg import inv
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
7 import random
8 import scipy.optimize
9 import scipy.special
10 from scipy import integrate
11 import os
12 from glob import glob
13 import re
14 from scipy.stats import norm
15 import matplotlib.mlab as mlab
16 import time as tm
17
18 #
19 =====
20
21 #####
22 # Definiciones de ruta #
23 #-----#
24 # Definimos las rutas usadas en el código #
25 #####
26 cwd = os.getcwd() #Directorio de trabajo actual
27 dir_save=cwd+'/save'
28 dir_cij=dir_save+'/covariance_matrix/star'
29 dir_plots=cwd+'/plots/'
30
31 #
32 =====
33 #####
34 # Definiciones de Sympy #
35 #####
36 r1 = Symbol('r1',real=True)
37
38 #
39 =====
40
41 #####
42 # Constantes fundamentales y constantes sin dimensi n#
43 # Aqu est n definidas todas las constantes #
44 # usadas y las constantes usadas para pasar de #
45 # unidades reales a unidades de código. Ej: #
46 # longitud en unidades reales * length= long. en #
```

```

47 # unidades de c digo #
48 #####
49
50 #Constantes fundamentales
51 pi = np.arccos(-1.0)
52 Omegam = 0.3
53 GReal = 6.67*10**-11.0
54 kpc = 3.08*10.0**19.0
55 Msun = 1.989*10.0**30.0
56 H0 = 67.0/kpc
57 rhoc = 3.0*H0**2.0/(8.0*pi*GReal)
58 cL = 3.0*10.0**8.0
59 M_L=11.1
60 Lv=10**(5.45)
61
62
63 # Constantes usadas para cambiar entre unidades de codigo y reales
64
65 B = 1.0*kpc;
66 length = 1.0/B #Escala de longitud para pasar metros a unidades de
    c digo
67 density = 1.0/(rhoc*Omegam) #escala de densidad para convertir kg/m^3 a
    unidades de c digo
68 mass = 1.0/(B**3.0*rhoc*Omegam) # escala de masa para convertir kg a
    unidades de c digo
69 time_unit = H0 #escala de tiempo para convertir segundos en unidades de
    c digo
70 velocity = length/time_unit #escala de velocidad para convertir m/s en
    unidades de c digo
71 acc = velocity/time_unit #escala de aceleraci n para convertir m/s^2 a
    unidades de c digo
72 G = 3.0*Omegam/(8.0*pi)#G en unidades de c digo
73
74 #####
75 # Definiciones tiles #
76 #####
77
78 fourpi = 4.0*pi
79 twopi3 = (2.0*pi)**3.0
80 #
    =====
81
82 #####
83 # Definici n de a_0 #
84 #####
85 a0 = 1.2*10.0**-10.0*acc
86
87
88 #####
89 # Funciones #
90 #-----#
91 # Aqui est n todas las funciones usadas #
92 #####
93
94 # Densidad de distribuci n estelar: Plummer
95
96 def nu(r,a):

```

```

97     return (1.0 + (r/a)**2.0)**(-5.0/2.0)
98
99
100 #definici n de la densidad
101 def rho(r,a):
102     Term1 = rho_0_code*nu(r,a)
103     return Term1
104 # Distribuci n de probabilidad de las estrellas
105 def Px(r,a):
106     return 4.0*pi*r**2.0*nu(r,a)
107
108
109
110 #definimos la masa barionica a partir de la densidad
111 def M(r,a):
112     Term1 = rho_0_code*fourpi*((r*a)**3.0/(3.0*(a**2.0+r**2.0)
113     *(3.0/2.0)))
114     return Term1
115
116
117     #definimos la aceleracion tras despejar usando mu simple. He
118     a adido la expresion newtoniana para peque as escalas
119 def g(r,a):
120     return (a*M(r,a)*G)**(1.0/2.0)/r+G*M(r,a)/r**2.0
121 #Soluci n de la ecuaci n de Jean Esf rica
122 def Jeans(r,a,betaANI):
123
124     IntFunc = lambda rp: rp**(2.0*betaANI)*rho(rp,a)*g(rp,a)
125     Term1 = integrate.quad(IntFunc,r,np.inf)[0]
126     v2r = (r**(2.0*betaANI)*rho(r,a))**-1.0*Term1
127     v2theta = (1.0 - betaANI)*v2r
128     v2phi = v2theta
129     return [v2r,v2theta,v2phi]
130
131
132 # Computamos y convertimos los momentos de Jeans
133 #in the projected frame en el marco proyectado
134 # Ver e.j. Hodson y Diaferio 2019 Ap ndice
135
136 def ProjectedMoments(r,theta,phi,JeansResult):
137
138     vx = 0.0
139     vy = 0.0
140     vz = 0.0
141
142     vxvy = JeansResult[0]*np.sin(theta)**2.0*np.cos(phi)*np.sin(phi)+
143     JeansResult[1]*np.cos(theta)**2.0*np.cos(phi)*np.sin(phi)-
144     JeansResult[2]*np.cos(phi)*np.sin(phi)
145
146     vxvz = JeansResult[0]*np.cos(theta)*np.sin(theta)*np.cos(phi)-
147     JeansResult[1]*np.cos(theta)*np.sin(theta)*np.cos(phi)
148
149     vyvz = JeansResult[0]*np.cos(theta)*np.sin(theta)*np.sin(phi)-
150     JeansResult[1]*np.cos(theta)*np.sin(theta)*np.sin(phi)

```

```

148     v2x = JeansResult [0]*np.sin(theta)**2.0*np.cos(phi)**2.0+
JeansResult [1]*np.cos(theta)**2.0*np.cos(phi)**2.0+ JeansResult [2]*np
.sin(phi)**2.0
149
150     v2y = JeansResult [0]*np.sin(theta)**2.0*np.sin(phi)**2.0+
JeansResult [1]*np.cos(theta)**2.0*np.sin(phi)**2.0+ JeansResult [2]*np
.cos(phi)**2.0
151
152     v2z = JeansResult [0]*np.cos(theta)**2.0+ JeansResult [1]*np.sin(theta
)**2.0
153
154     return [vx,vy,vz,vxvy,vxvz,vyvz,v2x,v2y,v2z]
155
156 # definimos el tensor usado en la funci n de probabilidad
157 # Ver ej. Watkins et al 2013 o Hodson y Diaferio 2019
158 def CTensor(r,theta,phi,JeansResult):
159
160     Moments = ProjectedMoments(r,theta,phi,JeansResult)
161     CArray = np.zeros((3,3))
162
163     CArray[0,0] = Moments [6]-Moments [0]**2.0
164     CArray[0,1] = Moments [3]-Moments [0]*Moments [1]
165     CArray[0,2] = Moments [4]-Moments [0]*Moments [2]
166     CArray[1,1] = Moments [7]-Moments [1]**2.0
167     CArray[1,2] = Moments [5]-Moments [1]*Moments [2]
168     CArray[2,2] = Moments [8]-Moments [2]**2.0
169     CArray[1,0] = CArray[0,1]
170     CArray[2,0] = CArray[0,2]
171     CArray[2,1] = CArray[1,2]
172     return CArray
173
174
175
176     #Definimos la velocidad de escape como infinita porque asi es en el
modelo
177     #MOND para galaxias aisladas
178 def vmax(r,a):
179     return np.inf
180
181 #convertimos las velocidades de cartesianas a coordenadas esf ricas
182 def VelSph(r,theta,phi,vx,vy,vz):
183     vr= vx*np.sin(theta)*np.cos(phi) + vy*np.sin(theta)*np.sin(phi)+vz*
np.cos(theta)
184     vtheta = -vx*np.cos(theta)*np.cos(phi) + vy*np.cos(theta)*np.sin(phi
)-vz*np.sin(theta)
185     vphi = -vx*np.sin(phi) + vy*np.cos(phi)
186     return [vr, vtheta, vphi]
187
188 #
=====
189
190
191 #####
192 # CODIGO PRINCIPAL #
193 #-----#
194 # Encuentra las velocidades y posiciones de las #
195 # estrellas para una galaxia esf rica enana #

```

```

196 #####
197
198
199
200
201 npmaxArray = np.array([100,1000,2000, 4000, 6000]) #Define el numero de
    estrellas en cada set de datos
202 Identidad=np.array([1, 1, 1, 1,1])
203
204
205
206 #Par metros gal cticos para generar la simulaci n
207
208 a = 0.244*kpc*length      #radio de escala Plummer en unidades de c digo
209 a_real= 0.244*kpc        #radio de escala Plummer en metros
210
211 #rho_0 en unidades de c digo , constante usada en la funci n densidad
212 rho_0_code=(M_L*Msun)*3.0*Lv/(a_real**3.0*fourpi)*density
213
214 betaANivect = np.array([-0.25, 0.0, 0.25]) #par metros de anisotropia
    en la ecuaci n de Jeans
215
216 for k in range(0,len(betaANivect)):
217     betaANI = betaANivect[k]
218
219     if betaANI == 0.0:
220         etcBETA ="beta_iso"
221     if betaANI < 0.0:
222         etcBETA ="beta_tan"
223     if betaANI > 0.0:
224         etcBETA ="beta_rad"
225
226     for j in range(0,len(npmaxArray)):
227
228 # Define el n mero de observaciones cada set de datos
229     print('Dataset=',j, 'Beta Jeans=',betaANI, 'Beta etc=',etcBETA)
230     npmax = npmaxArray[j]
231     # Encuentra las posiciones de las estrellas en la enana
232     # L mite exterior definido en 100*a
233     rlimit =100.0*a
234     Pxprime = Px(r1,a).diff(r1) # Derivada de Px(r,a) respecto a r
235     maxp = solve(Pxprime,r1)[0]
236     maxp = abs(maxp)
237     pmaxp = Px(maxp,a)
238     rVals = np.zeros(npmax)
239     npart=0
240     while npart<npmax:
241         Pxrand = random.uniform(0.0,pmaxp)
242         rrand = random.uniform(0,rlimit)
243         if Pxrand < Px(rrand,a):
244             rVals[npart]= rrand
245             npart = npart+1
246
247 # Asignamos radio, theta y phi para obtener la posici n 3D
248
249     costhetaVals = np.random.uniform(-1.0,1.0,npmax)
250     thetaVals = np.arccos(costhetaVals)
251     phiVals = np.random.uniform(0.0,2.0*pi,npmax)

```

```

252
253 # Convierte las coordenadas esféricas en cartesianas
254
255     xVals = rVals*np.sin(thetaVals)*np.cos(phiVals)
256     yVals = rVals*np.sin(thetaVals)*np.sin(phiVals)
257     zVals = rVals*np.cos(thetaVals)
258
259 # Encuentra las velocidades muestreando una distribución normal
    multivariable
260
261     npart = 0;
262     vxVals = np.zeros(npmax)
263     vyVals = np.zeros(npmax)
264     vzVals = np.zeros(npmax)
265     vrVals = np.zeros(npmax)
266     vthetaVals = np.zeros(npmax)
267     vphiVals = np.zeros(npmax)
268     sgmrVals = np.zeros(npmax)
269     sgmthetaVals = np.zeros(npmax)
270     sgmphiVals = np.zeros(npmax)
271     while npart < npmax:
272         #Resolviendo la ec. de Jeans en coordenadas esféricas
273         JeansResult = Jeans(rVals[npart],a,betaANI)
274         sgmrVals[npart] = np.sqrt(JeansResult[0])
275         sgmthetaVals[npart] = np.sqrt(JeansResult[1])
276         sgmphiVals[npart] = np.sqrt(JeansResult[2])
277         #Matriz covarianza
278         cTemp = CTensor(rVals[npart],thetaVals[npart],phiVals[npart
    ],JeansResult)
279         #Guardamos la matriz de covarianza
280         file_name='/Cij_cartesian_stars_' + str(npart)+'_'+etcBETA+'
    .txt'
281         np.savetxt(dir_cij+ str(npmaxArray[j]) + file_name, cTemp
    /((1000.0*velocity)**2, fmt='%f')
282         meanTemp = np.array([0.0,0.0,0.0]) # means of the
    distribution
283         #Distribución normal multivariable
284         vxTemp,vyTemp,vzTemp = np.random.multivariate_normal(
    meanTemp,cTemp)
285         vescape2 = vmax(rVals[npart],a)**2.0
286         vtot2 =vxTemp**2.0 + vyTemp**2.0 + vzTemp**2.0
287         if vtot2< vescape2:
288             vxVals[npart] = vxTemp
289             vyVals[npart] = vyTemp
290             vzVals[npart] = vzTemp
291             vSphTemp =VelSph(rVals[npart],thetaVals[npart],phiVals[
    npart],vxVals[npart],vyVals[npart],vzVals[npart])
292             vrVals[npart] = vSphTemp[0]
293             vthetaVals[npart] = vSphTemp[1]
294             vphiVals[npart] = vSphTemp[2]
295             npart = npart + 1
296
297 # Convertimos las velocidades y posiciones en unidades reales
298     particledataReal = np.zeros((npmax,6)) # Para coordenadas
    cartesianas
299     particledataRealSph = np.zeros((npmax,9)) # Para coordenadas
    esféricas
300

```

```

301
302 # Convertimos las unidades de c digo a kpc y km/s y las guardamos en un
      array 6D
303     for i in range(0,npmax):
304         particledataReal[i,0] = xVals[i]/(length*(kpc))
305         particledataReal[i,1] = yVals[i]/(length*(kpc))
306         particledataReal[i,2] = zVals[i]/(length*(kpc))
307         particledataReal[i,3] = vxVals[i]/(1000.0*velocity)
308         particledataReal[i,4] = vyVals[i]/(1000.0*velocity)
309         particledataReal[i,5] = vzVals[i]/(1000.0*velocity)
310         particledataRealSph[i,0] = rVals[i]/(length*(kpc))
311         particledataRealSph[i,1] = thetaVals[i] # en radianess
312         particledataRealSph[i,2] = phiVals[i] # en radianes
313         particledataRealSph[i,3] = vrVals[i]/(1000.0*velocity)
314         particledataRealSph[i,4] = vthetaVals[i]/(1000.0*velocity)
315         particledataRealSph[i,5] = vphiVals[i]/(1000.0*velocity)
316         particledataRealSph[i,6] = sgmrvVals[i]/(1000.0*velocity)
317         particledataRealSph[i,7] = sgmthetaVals[i]/(1000.0*velocity)
318         particledataRealSph[i,8] = sgmphiVals[i]/(1000.0*velocity)
319
320
321     # guardamos el archivo de 6 columnas para ser usado por el
      c digo EMCEE
322     file_name='Mockdata_cartesian_' + str(npmaxArray[j]) + '_stars_'
      + '_' + etcBETA
323     np.savetxt(dir_save+file_name+'.txt',particledataReal,delimiter=
      ', ')
324
325     #guardamos el archivo de 6 columnas para ser usado por el
      c digo EMCEE
326     file_name='Mockdata_spherical_' + str(npmaxArray[j]) + '_stars_'
      + etcBETA
327     np.savetxt(dir_save+file_name+'.txt',particledataRealSph,
      delimiter=', ')
328
329
330     #3D plot
331     file_name='Mockdata_3D_cartesian_' + str(npmaxArray[j]) + '
      _stars_' + '_' + etcBETA
332     fig = plt.figure(figsize=plt.figaspect(0.5)) #prepara una figura
      dos veces m s ancha que su altura
333     ax = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
334     ax.scatter3D(particledataReal[:,0], particledataReal[:,1],
      particledataReal[:,2]);
335     ax.set_xlabel('x (kpc)')
336     ax.set_ylabel('y (kpc)')
337     ax.set_zlabel('z (kpc)')
338
339     ax = fig.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
340     ax.quiver(particledataReal[:,0], particledataReal[:,1],
      particledataReal[:,2], particledataReal[:,3], particledataReal[:,4],
      particledataReal[:,5], normalize=True,length=0.3,color='b')
341     ax.set_xlabel('x (kpc)')
342     ax.set_ylabel('y (kpc)')
343     ax.set_zlabel('z (kpc)')
344
345     plt.savefig(dir_plots+file_name+".pdf")
346     plt.close()

```

```

347
348     #grafico 1D de sigma
349     file_name='Mockdata_sigma_' + str(npmaxArray[j]) + '_stars_' + '_'
+etcBETA
350     plt.figure() #abre ventanas separadas de graficos
351     plt.plot(particledataRealSph[:,0],particledataRealSph[:,6],'.k',
label="$\sigma_r$")
352     sgmT =np.sqrt(particledataRealSph[:,7]**2+particledataRealSph
[:,8]**2)
353     plt.plot(particledataRealSph[:,0],sgmT,'.r',label="$\sigma_t$")
354     plt.xlim((0.0, 1.2*np.max(particledataRealSph[:,0])))
355     plt.ylim((0.0, 1.2*np.max(sgmT)))
356     plt.xlabel('r (kpc)')
357     plt.ylabel("$\sigma_r$, $\sigma_t$ (km/s)")
358     plt.legend()
359     plt.savefig(dir_plots+file_name+".pdf")
360     plt.close()
361
362     x=np.linspace(0, 1.5, 1000)*kpc*length
363     density=(rho(x,a)/density)*kpc**3.0/Msun
364     #1D grafico de rho
365     file_name= 'Mockdata_density' + str(npmaxArray[j]) + '_star_' +
_' + etcBETA
366     plt.figure()
367     plt.plot(x, density , label= "$\rho$")
368     plt.xlabel('r (kpc)')
369     plt.ylabel("$\rho$ ($M_{sun}/kpc^3$)")
370     plt.legend()
371     plt.savefig(dir_plots+file_name+".pdf")
372     plt.close()
373
374     masa=M(x,a)/(mass*Msun) #masa en masas solares
375     #grafico de M(r,a)
376     file_name= 'Mockdata_mass' + str(npmaxArray[j]) + '_star_' + '_'
+ etcBETA
377     plt.figure()
378     plt.plot(x, masa , label= "$M(r)$")
379     plt.xlabel('r (kpc)')
380     plt.ylabel("$M(r)$ ($M_{sun})$")
381     plt.legend()
382     plt.savefig(dir_plots+file_name+".pdf")
383     plt.close()
384
385     #plot del numero de estrellas.
386     file_name= 'Mockdata_number' + str(npmaxArray[j]) + '_star_' +
etcBETA
387     plt.figure()
388     plt.plot(x, Nth(x,a), label="N(r)")
389     plt.xlabel('r (kpc)')
390     plt.ylabel("N(r)")
391     plt.legend()
392     plt.savefig(dir_plots+file_name + ".pdf")
393     plt.close()

```

Para el muestreo por bins se ha usado el siguiente código de Fortran, cambiando el nombre de los archivos según el valor de β , ($\beta = -0.25 \rightarrow \tan \beta = 0 \rightarrow iso \beta = 0.25 \rightarrow rad$). Este código nos proporciona los valores del número de estrellas dentro de un radio

r y la dispersión de la velocidad radial para cada bin, eliminando los bins con una o ninguna estrella.

```

1      PROGRAM Dispersion_bines
2      IMPLICIT NONE
3      integer N , i, j, histogram, k
4      parameter (N=6000)
5      parameter (histogram=300)
6      double precision v_velocidades (0:N), v_radio(0:N)
7      double precision limite, sumatorio, Suma, t
8      double precision Nbk(0:histogram), disp_v2(0:histogram)
9      double precision sigma_disp(0:histogram)
10     double precision vector_disp_v2(0:histogram)
11     double precision vector_sigma(0:histogram), Nth(0:histogram)
12     double precision sigma_Nth(0:histogram)
13
14     parameter (limite=5) !kpcs hasta los que medimos
15     double precision lambda, caja(0:histogram-1), f(0:N), paso
16     real r_limite, r_histogram
17
18     open(16, file='saveMockdata_spherical_6000_stars_beta_iso.txt')
19     open(17, file='numero_estrellasISO.txt')
20     open(18, file='densidad_estrellasISO.txt')
21     open(19, file='dispersionISO.txt')
22
23
24     do i=1,N
25     read(16,*) v_radio(i), t, t,v_velocidades(i), t, t, t, t, t
26     !print*, v_radio(i)
27
28     end do
29
30     close(16)
31     do i=0, histogram-1 !inicializamos caja
32     caja(i)=0
33     end do
34     r_limite= real(limite)
35     r_histogram=real(histogram)
36     paso=r_limite/r_histogram !numero maximo que se registra / numero
de columnas que queremos
37     !print*, paso
38     Nth(0)=0
39     do i=0, N-1
40     do j=0, histogram-1
41     if (v_radio(i).GT.paso*j.AND.v_radio(i).LT.paso*(j+1)) then
42     Nbk(j)=Nbk(j)+1
43
44     end if
45     Nth(j+1)=Nth(j)+Nbk(j)
46     sigma_Nth(j)=sqrt(Nbk(j))
47     end do
48
49     end do
50
51     do j=0, histogram-1
52
53     do i=0, N-1
54     if (v_radio(i).GT.paso*j.AND.v_radio(i).LT.paso*(j+1)) then
55     Suma=Suma+v_velocidades(i)**2.0/Nbk(j)

```

```

56
57     end if
58     !print*, Suma
59     end do
60     disp_v2(j)=sqrt(Suma)
61     sigma_disp(j)=sqrt(disp_v2(j)/(2.0*(Nbk(j)-1)))
62     Suma=0
63     print*, disp_v2(j)
64     !print*, disp_v2(j)
65     end do
66     k=0
67     do i=0, histogram-1
68     if (disp_v2(i).NE.0.AND.sigma_disp(i).LT.10000000.0) then
69         k=k+1
70         vector_disp_v2(k)=disp_v2(i)
71         vector_sigma(k)=sigma_disp(i)
72     end if
73     end do
74
75     do i=1, histogram
76     write(18,*) paso*i, Nbk(i), (Nbk(i)/N)*(1/paso)
77     end do
78
79     do i=1, histogram
80     write(17,*) paso*i , Nth(i), sigma_Nth(i)
81     end do
82
83
84     do i=1, k
85     write(19,*) paso*i, vector_disp_v2(i), vector_sigma(i)
86     end do
87
88     END
89

```