ELEMENTOS
DE
MATEMATIC

~~Ex Dono D. D. Ioanni Iust Garzia~~
Rectoris

ELEMENTOS

DE ARITMÉTICA,

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA.

SU AUTOR

DON JUAN JUSTO GARCIA,

PRESBITERO, DEL GREMIO Y CLAUSTRO DE LA UNIVERSIDAD DE SALAMANCA, Y UNO DE SUS CATEDRATICOS DE MATEMATICAS,

QUIEN LOS HA CORREGIDO Y AÑADIDO EN ESTA

SEGUNDA EDICION.

CON LICENCIA:

SALAMANCA: POR D. FRANCISCO DE TOXAR.

AÑO DE 1794.

4

ELEMENTOS

DE ARITMÉTICA, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA.

SU AUTOR

DON JUAN JUSTO GARCIA,
PRESBITERO, DEL GREMIO Y CLAUSTRO DE LA UNIVERSIDAD DE SALAMANCA, Y UNO DE SUS CATEDRATICOS DE MATEMATICAS,
QUIEN LOS HA CORREGIDO Y AÑADIDO EN ESTA

SEGUNDA EDICION.

CON LICENCIA:

SALAMANCA: POR D. FRANCISCO DE TOXAR.

AÑO DE 1794.

Antonio

ADVERTENCIA
DEL AUTOR.

La utilidad de las Matemáticas, conocida por los progresos que han hecho en nuestra Península varios ramos de las Ciencias naturales; hace desear Elementos de dichas Ciencias, por donde puedan instruirse los Jóvenes, y los demas que por aficion se dediquen á este Estudio. Para suplir en parte esta falta, publiqué en 1782 unos Elementos de Aritmética, Geometría y Algebra: y ahora que es necesario repetir su impresion, he juzgado de mi obligacion publicarlos mejorados en el lenguage y orden de las materias, y añadirlos de alguna otra que faltaba á los primeros. Con el objeto de que sea menos costosa, he creido conveniente omitir la historia compendiada de las tres partes de Matemáticas puras y las Tablas de los Logarítmos, que se encuentran en obras de mayor extension: y seguramente no son necesarias á los Jóvenes, á quienes principalmente se destina.

NOTA. *Un número puesto dentro de un paréntesis denota que la demostracion ó esplicacion de lo que allí se dice, está en el párrafo que tiene aquel número.*

INDICE
DE LAS MATERIAS.

ELEMENTOS
DE ARITMÉTICA, ALGEBRA Y GEOMETRÍA.

1 Todo lo que puede concebirse compuesto de partes que se midan ó se numeren, se llama *Cantidad*; y es objeto de las *Matemáticas*. De ellas se da el nombre de *Mistas* á las que consideran en la cantidad alguna propiedad sensible: como el movimiento, la vision, objetos de la *Dinámica* y *Optica*; y de *Puras* á la *Aritmética*, *Algebra* y *Geometría*, de que vamos á tratar: las quales calculan y miden la cantidad desnuda de toda propiedad sensible. La Aritmética por egemplo, no atiende á sí los números de que trata, representan el peso de los cuerpos, sus grados de movimiento... la Geometría mide lineas, cuerpos...: pero prescinde de que sean duros ó blandos, de que sean ó no partes de alguna máquina.

DE LA ARITMÉTICA.

2 Si una cosa qualquiera se considera dividida en partes iguales; por egemplo, si un real se divide en treinta y quatro maravedises; se da el nombre de *unidad* á cada una de estas partes, y de *número* á qualquiera porcion de ellas, como *siete*, *treinta*. Quando el número contiene unidades cabales, se llama *entero*; y *quebrado* quando solo contiene partes de unidad, como *un medio*, *dos quintos*. A un entero junto con un quebrado llamarémos número *misto*, como *tres y dos tercios*. La *Aritmética* da reglas para calcular y combinar todos estos números.

3 Entre los diferentes signos ó notas con que varias Naciones han representado los números, se han adoptado unanimemente las siguientes que nos comunicaron los Arabes: (0) *cero*, (1) *uno*, (2) *dos*, (3) *tres*, (4) *quatro*, (5) *cinco*, (6) *seis*, (7) *siete*, (8) *ocho*, (9) *nueve*: los quales representan los primeros números que llamamos tambien *cifras ó guarismos*. Para espresar los demas sin aumentar el número de signos que hubieran servido de embarazo, se formó de diez de estos primeros números, que vienen á ser sus *unidades*, una *decena*; y con los mismos signos 1, 2, 3 &c. puestos al lado

izquierdo de las unidades escribieron una decena ó *diez*, dos decenas ó *veinte*, tres ó *treinta*, *quarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta y noventa*. En 46 por egemplo el 4 significa quatro decenas ó quarenta, y el 6, seis unidades: y se lee *quarenta y seis*. En 85, el 8 vale ocho decenas, que con las cinco unidades componen *ochenta y cinco*. En 70, que se lee *setenta*, el signo (o) manifiesta que no hay unidades: de manera que este signo *cero* sirve solo para ocupar los sitios vacíos de cantidad.

4 Con diez decenas formaron una *centena* ó un ciento, y espresaron una, dos, tres, quatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve centenas, ó *ciento*, *doscientos*, *trescientos*, *quatrocientos*, *quinientos*, *seiscientos*, *setecientos*, *ochocientos* y *novecientos* con los mismos números, 1, 2, 3, &c. puestos en el tercer lugar. De suerte que en 569, el 5 vale cinco centenas ó quinientos, que con las 6 decenas y 9 unidades compone *quinientos sesenta y nueve*. De diez centenas hicieron un *millar* ó mil, y con dichos signos 1, 2, 3, &c. puestos en el quarto lugar escribieron *uno*, *dos*, *tres*, *quatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *y nueve miles ó millares*: como en el número 7080, donde el 7 vale siete millares, y todo él *siete mil y ochenta*. En el quinto lugar pusieron las decenas de millar, que

son *diez mil*, *veinte mil*, *treinta mil*, *&c.* hasta *noventa mil*: y en el sesto lugar los cien miles, ó centenas de millar, *cien mil*, *doscientos mil*, *&c.* hasta *novecientos mil*; de suerte que en el número 835007, el 8 vale ocho centenas de millar ú ochocientos mil, el 3 tres decenas de millar ó treinta mil, el primer cero ninguna centena, el segundo ninguna decena, y el 7 siete unidades; todo lo qual compone ochocientos mil, treinta mil, cinco mil y siete, ó mas breve, *ochocientos treinta y cinco mil y siete.*

5 Con este mismo orden de hacer de cada diez uno, se graduaron los números de los seis sitios siguientes, y se les dieron los mismos nombres que á los seis de que acabamos de hablar, con sola la añadidura de la palabra *cuento* ó *millon*; es decir, que las cifras del séptimo sitio son unidades de cuento, las del octavo decenas de cuento, las del noveno centenas de cuento, las del décimo millar de cuento, las del undécimo decenas de millar de cuento, y las del duodécimo centenas de millar de cuento. 30456320029 por egemplo, son *treinta mil quatrocientos, cincuenta y seis cuentos, trescientos veinte mil veinte y nueve.*

6 Las cifras que se escriben en los seis sitios siguientes, el 13.° 14.° 15.° 16.° 17.° 18.°, tienen el mismo aumento de valor, y

los mismos nombres con la diferencia de ser *bicuentos*. Las de los seis siguientes son *tricuentos*, las de los otros seis *quadricuentos*, y así hasta el infinito.

7 Luego para leer un número de muchas cifras convendrá dividirle de seis en seis comenzando por la derecha, y de este modo será facil dar á cada una su propio nombre y valor. Si se diese el número $299838^{3},525088^{2},555848^{1},592312$ que son las libras que pesa el globo de la tierra bajo de ciertas suposiciones; despues de dividirlo conforme se ve, se leerá así: *doscientos noventa y nueve mil ochocientos treinta y ocho tricuentos, quinientos veinte y cinco mil ochenta y ocho bicuentos, quinientos cincuenta y cinco mil ochocientos quarenta y ocho cuentos, quinientos noventa y dos mil trescientos y doce.* Con igual facilidad se podrán escribir qualesquiera números que se pidan.

8 Se ve pues, que un número se hace diez veces mayor por cada lugar que se le adelanta ácia la izquierda; es decir, que cada unidad de una cifra qualquiera vale diez unidades de la que se le sigue ácia la derecha; pues una decena vale diez unidades, una centena diez decenas, un millar diez centenas, y así de los demás.

CALCULO DE LOS NUMEROS ENTEROS.

Adicion.

9 El *sumar* los números enteros que se reduce á juntar en uno solo todos los que se dan para sumar, es muy facil quando no pasan de 9: pues sin reglas se sabe que 4 y 8 son 12, 7 y 9 son 16.

Para sumar los números de mas cifras, 1.° „se escriben de manera que las unidades de „los unos caigan bajo de las de los otros, las „decenas bajo de las decenas, las centenas, „millares y demas partes bajo de sus corres„pondientes.

2.° „Despues se suman todas las unida„des, y se escribe la suma bajo de una raya „que se tira para evitar confusion: se suman „igualmente las decenas, y se pone su suma „junto á la de las unidades; y lo mismo se „practíca con las centenas, millares &c. ad„virtiendo que si alguna de dichas sumas con„tiene decenas y unidades, se escriben estas „bajo de la columna que se suma, ó cero si „contiene solo decenas, y las decenas se jun„tan con las notas de la columna inmediata.“ De este modo resultará la suma que se busca, ó un número que contendrá todas las unidades, decenas, centenas &c. de los que se han dado para sumar.

Si se nos preguntase el número de años que han pasado desde la Creacion del mundo hasta nuestros dias diriamos

Egemplo I.

Desde la Creacion al Diluvio pasaron.	1656
Desde este á la Vocacion de Abrahan.	427
Desde esta al paso del mar Bermejo.	430
A la edificacion del Templo de Jerusalen.	581
De este al principio del Imperio de Cyro.	479
Desde Cyro hasta la Era de Seleucides.	224
Desde esta hasta la Era christiana. . .	312
Desde Jesu-Christo hasta nuestros dias.	1792
Suma.	5901

Escritos los números con el orden que se ve, sumo las unidades, y para escribirlo en cifra usaré del signo $+$ que quiere decir *mas*, y del $=$ que significa *igual á*: En lugar pues, de decir 6 y 7 suman 13, y 1 son 14 &c. diré mas breve $6+7=13$, $+1=14$, $+9=23$, $+4=27$, $+2=29$, $+2=31$: y por quanto 31 contiene tres decenas y una unidad; pongo 1 bajo de las unidades, y junto las 3 con las decenas así: $3+5=8$, $+2=10$, $+3=13$, $+8=21$, $+7=28$, $+2=30$, $+1=31$, $+9=40$, que son quatro decenas sin unidades; con que escribiré cero bajo de la columna que sumo, y llevo 4 á la siguiente: $4+6=10$, $+4=14$, $+4=18$, $+5=23$, $+4=27$, $+2=29$, $+3=32$, $+7=39$: escribo 9 y llevo 3: $3+1=4$, $+1=5$: escribo el 5, y tendré que han pasado hasta ahora 5901 años desde el principio del mundo.

10 Los otros egemplos se ponen para egercitarse en esta operacion. Y se ha de advertir que quando en ellos ó en otros qualesquiera se quiera exâminar si ha habido alguna equivocacion, se podrán volver á sumar los números comenzando por abajo; pues si sale la misma suma es suficiente prueba de que está bien sacada.

II.

Se han de sumar.	805104
	34921
	4 395210
Suma...	5 235235

III.

	908991
	59876
	3 004007
	937805
Suma...	4 910679

Substraccion.

11 *Restar* un número de otro es averiguar la diferencia que hay entre los dos: restar por egemplo 7 de 9 es encontrar el número

2 en que el 9 excede á 7. Esto se espresa mas brevemente así; 9 — 7 = 2, y se lee *nueve menos siete es igual á dos*: 10 — 6 = 4 quiere decir *diez menos seis es igual á quatro*.

12 Los números de una cifra se restan facilísimamente. Para restar los que tienen mas, 1.° „se escribe el menor que se llama „*subtrahendo*, bajo del mayor ó *minuendo*, „con la correspondencia de unidades, dece-„nas, centenas &c. 2.° Se resta la cifra infe-„rior de las unidades, de la superior, y se „escribe debajo la diferencia. 3.° Quando las „dos cifras son iguales se escribe cero, y si la „inferior es mayor que la superior se añaden „á esta 10; tomando para ello una unidad „de la nota anterior, que quedará con una „unidad menos, y se egecuta despues la resta.“ En el caso de ser cero la nota ó notas antecedentes, se toma la unidad de la primera que no lo sea, y entonces en cada cero queda un 9, como se verá en el egemplo 1.°

4.° Lo mismo que con las unidades se egecuta con las decenas, centenas &c. y en habiendo sacado la diferencia de todas las partes de los dos números se tendrá forzosamente la de dichos números que se busca.

Egemplo I.

De.	98004639
Se ha de restar.	438552
Diferencia. .	97566087

II.

De.	56003120
Restando. . . .	1968502
Quedan. . . .	54034618

III.

15300000
8500976
6799024

Un Egército de 438552 Soldados logró de los despojos de una batalla 98004639 doblones; se dió á cada Soldado un doblon, y se pregunta quántos quedaron. Despues de haber escrito los números como muestra el primer egemplo, comenzaré diciendo, restando 2 de 9 quedan 7, ó $9-2=7$ que escribo bajo de la raya: y porque de 3 no se pueden restar 5, tomaré 1 del 6; y juntando con 3, 10 que vale, tendré 13, de donde quitando 5 quedan 8, que pongo debajo junto á 7: $5-5=0$ que escribiré seguido al 8. De 4 tampoco puedo restar 8, con que tomo 10 de una unidad de 8 que vale 1000 de las del 4 (8), y restando de 14, 8 pondré debajo 6 que quedan. Los 990 que con 10 componían la unidad del 8, ocupan el lugar de los dos ceros, y así diré $9-3=6$, $9-4=5$: cscribo estas restas y despues 7 y 9 de donde nada hay que restar, y tendré 97566087 por el número de doblones que quedan. En los demas egemplos no habrá en que tropezar bien entendido este.

13 Como el residuo ó diferencia es el exceso que el número mayor lleva al menor, es claro que en añadiéndoselo al menor ha de resultar el mayor. Si 8 excede á 6 en 2, 2 y 6 han de componer 8: luego siempre que sumando la diferencia con el subtrahendo resulte el minuendo, estará bien hecha la resta.

Multiplicacion.

14 *Multiplicar* un número 8 por 2 es *duplicar* ó tomar dos veces al 8: el 16 que resulta se llama *producto*, el 8 *multiplicando*, el 2 *multiplicador*, y el 8 y 2 *factores* de 16. Multiplicar 8 por 3 es *triplicar* ó tomar tres veces á 8: multiplicar 7 por 6 es tomar seis veces á 7; y en general multiplicar un número por otro es tomar al multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador, ó es sumar un número con él mismo cierto número de veces. De consiguiente si el multiplicador es 1 saldrá de producto el mismo multiplicando: y si el multiplicador es cero, será tambien cero el producto.

15 Pues que el multiplicador sirve solo de indicar las veces que se ha de tomar al multiplicando, deberá ser el producto de la

misma especie que el multiplicando. Y quando el multiplicador sea un número que exprese cierta especie de cosas, como si se hubiese de averiguar el importe de 6 varas á 9 reales cada vara; para multiplicar 9 por 6 habrá que desnudar al 6 del concepto de varas, y considerarle únicamente como representando 6 unidades ó como nùmero *abstracto*.

16 Para la práctica de multiplicar se necesita tener bien sabidos los productos de los nueve primeros números; de los quales pondremos aquí los mas difíciles, usando del signo × que significa *multiplicado por*: $4\times6=24$ quiere decir *4 multiplicado por 6 es igual á 24 &c.*

$3\times3=9$, $3\times4=12$, $3\times5=15$, $3\times6=18$, $3\times7=21$
$3\times8=24$, $3\times9=27$, $4\times4=16$, $4\times5=20$, $4\times6=24$
$4\times7=28$, $4\times8=32$, $4\times9=36$, $5\times5=25$
$5\times6=30$, $5\times7=35$, $5\times8=40$, $5\times9=45$
$6\times6=36$, $6\times7=42$, $6\times8=48$, $6\times9=54$
$7\times7=49$, $7\times8=56$, $7\times9=63$
$8\times8=64$, $8\times9=72$
$9\times9=81$.

17 „Quando el multiplicador tiene una „sola cifra, se multiplican por ella todas las „del multiplicando comenzando por las uni- „dades, y se escribe debajo cada producto, „si es de una sola cifra, y si es de dos, se

„junta la de las decenas con el producto si-
„guiente.“

Egemplo I.

Multiplicando	90785
Multiplicador	6
Producto	544710

Para saber las arrobas de agua que en 6 dias arroja el caño de un pilar que cada dia echa 90785 arrobas; colocaré 6 bajo de 90785, y diré 6 veces 5 son 30, ó mas breve $6\times5=30$, escribo por bajo cero y guardo las 3 decenas para juntarlas con el producto siguiente: $6\times8=48$ y las 3 son 51; escribo 1 y llevo 5: $6\times7=42, +5=47$, pongo 7 y guardo 4: $6\times0=0$, en cuyo lugar pondré 4 que llevaba: $6\times9=54$, pongo 4 y despues 5: y tendré que en 6 dias arroja el caño 544710 arrobas de agua.

18 „Quando el multiplicador tiene mas „notas, se practíca con cada una lo que con „la primera, cuidando de empezar á escri„bir cada producto bajo de la cifra que „multiplica, y de sumar despues todos los „productos que resulten.“

II.

Multiplicando	80340091
Multiplicador	705
Producto por 5.	401700455
Producto por 0.	00000000
Producto por 7.	562380637
Producto total	56639764155

Si se pidiese el valor de 80340091 arrobas á razon de 705 mrs. cada una; escritos los dos números como se ve, multiplicaré como en el egemplo anterior todas las cifras 8, 0, 3, 4, 0, 0, 9, 1 por la primera 5: multiplicaré despues las mismas cifras por cero escribiendo el primer producto $1 \times 0 = 0$ bajo del cero que multiplica, esto es, en el segundo sitio: pasaré luego á multiplicar las dichas cifras por 7 poniendo el primer producto $1 \times 7 = 7$ en el tercer lugar; y sumando despues los tres productos, resultará el total 56639764155 maravedises que importan 80340091 arrobas.

III.

3790
1440
---0
15160
15160
3790
5457600

El número de minutos que componen 10 años, 4 meses y 20 dias, se averigua reduciendo primero 10 años á 3650 dias, producto de 10 multiplicado por 365 dias que tiene el año; y 4 meses á 120 dias producto de 4 × 30 dias de un mes: sumando despues 3650 y 120 dias con 20, y multiplicando por último la suma 3790 por 1440, de que resulta 5457600, número de minutos que se pide.

19 En el 4.° egemplo se omite la multiplicacion por los tres ceros, cuidando solo de escribir el producto por 3 bajo del 3. Quando los ceros están al fin de los números como en el 5.° egemplo, se multiplican las demas cifras 85 por 35, y al producto 2975 se añade el número de ceros que hay, que al presente son seis.

IV.

$$\begin{array}{r} 57498 \\ 30009 \\ \hline 517482 \\ 172494.. \\ \hline 1725457482 \\ \hline \end{array}$$

V.

$$\begin{array}{r} 85000 \\ 35000 \\ \hline 425 \\ 255 \\ \hline 2975000000 \\ \hline \end{array}$$

20 Ultimamente, para multiplicar un número qualquiera 78 por 10, se le añade un cero así, 780: para multiplicarle por 100, se le añaden dos ceros y producen 7800; su producto por 1000 es 78000 poniéndole tres ceros &c.

21 Para ver si está bien hecha la multiplicacion se repite tomando al multiplicador por multiplicando y á este por multiplicador; pues el producto debe ser el mismo. En efecto, lo mismo es tomar á 3790 (Eg. 3.°)

1440 veces que á 1440, 3790 veces; porque en ambos casos se toman las cifras del un número tantas veces como unidades hay en cada una de las cifras del otro: y en esto estriba tambien la demostracion de esta operacion.

Division.

22 Para averiguar las veces que un número qualquiera 2 se puede restar de otro 8, ó las veces que se contiene en 8, habria que hacer quatro restas, y muchas mas si los números fueran mayores. Para egecutar esto con mas facilidad se inventó la *Division*, operacion por la que se averigua las veces que un número que se llama *divisor*, se contiene en otro que es el *dividendo*. Lo que resulta se llama *cociente*, número abstracto en el qual solo se consideran tantas unidades como veces el divisor cabe en el dividendo; de suerte, que si se multiplica el divisor por el cociente, el producto debe ser el dividendo; es decir, si 4 cabe en 8, 2 veces, 2 veces el 4 ha de componer 8. De consiguiente qualquiera cantidad 7 dividida por sí dará 1 de cociente, y dividida por 1 dará el mismo 7.

23 „Para practicar la division, escrito „el divisor al lado del dividendo 1.° se to„man de la izquierda de este las cifras que „basten á contener al divisor, y averiguando

„ qué número de veces le contienen, se es-
„ cribe aparte por cociente.

2.° „ Se multiplica este cociente por el di-
„ visor, y restando el producto de las cifras
„ separadas, se juntará á la resta la nota que
„ se les sigue para tener un nuevo dividendo.

3.° „ Vuelvase á ver las veces que con-
„ tiene al divisor, y escribase en el cociente
„ junto á la otra la nota que salga, la qual
„ se multiplica por el divisor y su producto
„ se resta del dividendo.

4.° „ A lo que sobra se añade la nota si-
„ guiente, y despues todas las demas, prac-
„ ticando lo que llevamos dicho siempre que
„ se baje alguna: á no ser que el divisor no
„ quepa en el dividendo, en cuyo caso nada
„ mas se hace que poner cero en el cociente.“

Egemplo I.

Dividendo	24,528	7 *Divisor.*
	21	3504 *Cociente.*
	35	
	35	
	0028	
	28	
	0	

Para averiguar el número de varas que han
im portado 24528 pesos á razon de 7 pesos

vara, ó las veces que 7 cabe en 24528; escribo á su lado el 7, y como no cabe en la primera cifra 2, diré 7 en 24 cabe 3 veces, escribo 3 en el cociente; multiplico despues 3 por el divisor 7, y restando el producto 21 de 24 me quedan 3. Junto á 3 el 5 que sigue á 24, y digo 7 en 35 cabe 5 veces justas que escribiré junto á 3 en el cociente. Bajo la cifra siguiente 2, y como no contiene á 7, pongo cero en el cociente, y bajo el 8: 28 contiene á 7, 4 veces justas que escribo junto al cero: y tendré que 7 cabe en 24528, 3504 veces, número de varas que se busca. Y como digimos (22) que el divisor multiplicado por el cociente, debe dar el dividendo; será la prueba de estar bien hecha esta division que $3504 \times 7 = 24528$.

Si se pidiese el número de reales que componen 20672 maravedises, ó las veces que 34 mrs. que hacen un real, caben en 20672; por no caber 34 en 2 ni en 20, diré 34 en 206 cabe 6 veces, que escribo en el cociente,

II.

$$\begin{array}{r|l}
206{,}72 & 34 \\ \cline{2-2}
\underline{204} & 608 \\
272 & \\
\underline{272} & \\
0 &
\end{array}$$

multiplicó 34 por 6 y restando su producto 204 de 206 quedan 2, al que juntaré la nota siguiente 7: y como 34 no cabe en 27 pongo cero en el cociente: bajo el 2, y dividiendo 272 entre 34 encontraré 8 sin resta: de consiguiente 20672 mrs. equivalen á 608 reales. Efectivamente, $608 \times 34 = 20672$.

24 Quando el divisor tiene muchas cifras, en cuyo caso es dificil conocer las veces que cabe en cada parte del dividendo, nos contentamos con averiguar las veces que la 1.ª cifra del uno cabe en la 1.ª del otro, y para mayor seguridad se hace la misma diligencia con la 2.ª y 3.ª Sin embargo, conoceremos que el cociente es mayor que el verdadero, si resulta mayor que el dividendo el producto del divisor por el cociente, y entonces se debe corregir disminuyéndole. Por el contrario, será pequeño el cociente y se deberá aumentar, si resulta de resta una cantidad mayor ó igual al divisor.

Habiendo de repartir 9639475 rs. entre 2789 personas; en lugar de averiguar las veces que 2789 caben en 9639, veré quántas veces la 1.ª cifra 2 cabe en la 1.ª 9: y aunque son 4 y sobra, como la 2.ª 7 no cabe 4 veces en la 2.ª 6 que

III.

```
9639,475 |2789
8367     |3456 691/2789
12724
11156
 15687
 13945
  17425
  16734
    691
```

con el sobrante 1 compone 16, pondré solo 3 en el cociente. Multiplico y resto y me resultan con el 4 que bajo, 12724. Exâmino ahora quántas veces el 2 cabe en 12: (en este caso, esto es, siempre que el dividendo tenga una cifra mas que el divisor, se toman las dos primeras cifras por 1.ª) Aunque 2 cabe en 12, 6 veces, no se le puede poner mas que á 4, porque la 2.ª cifra 7 solo cabe una vez en la 2.ª del dividendo: hecha la multiplicacion y la resta añado al residuo 1568 el 7, y parto 15 entre 2, y como la 2.ª cifra 7 no cabe ni aun 6 veces en la otra 2.ª escribo 5 de cociente, multiplico y resto y pongo al residuo la última cifra 5: y porque el 7 no cabe ni 7 veces en la 2.ª del dividendo pongole 6 y tendré de último residuo 691.

25 Esta y qualquiera otra resta de la division que no es cabal, se escribe al lado del cociente sobre una raya con el divisor por bajo así, $3456\frac{691}{2789}$: lo qual significa que el 691 está partido por 2789; porque una raya puesta entre dos números indica que el de arriba está dividido por el de abajo: $\frac{60}{20}$ quiere decir 60 *partido por* 20: $\frac{365}{15}$ es lo mismo que 365 *partido por* 15 &c.

26 Nótese que nunca puede pasar de 9 la nota del cociente; pués si á la mayor resta que es uno menos que el divisor, se le junta 9 que es la mayor cifra que puede bajarse,

falta 1 todavia para que el divisor quepa 10 veces en el dividendo que resulta: 19 entre 2 por egemplo, 199 entre 20, 239 entre 24 &c. nunca les cabe á 10.

27 Para sacar la *mitad* de un número, se le divide por 2, para sacar el *tercio* por 3; para sacar el *quarto* se parte por 4 &c. El tercio de 15 es $\frac{15}{3}=5$: el séptimo de 42 es $\frac{42}{7}=6$: el octavo de 96 es $\frac{96}{8}=12$ &c.

28 Siendo $\frac{8}{1}=8$, $\frac{60}{1}=60$.... esto es, siendo todo número dividido por 1 el mismo número; es claro que quando el divisor sea alguno de los números 10, 100, 1000 &c. se hará la division separando de la derecha del dividendo tantas cifras como ceros tenga el divisor: las que queden á la izquierda componen el cociente, y las separadas el residuo que se pondrá sobre una raya con el divisor por bajo. Para dividir 16578 por 10, separado el 8, será el cociente $1657\frac{8}{10}$: 16578 partido por 100 es, separando 78, $165\frac{78}{100}$: $\frac{16578}{1000}$ es, separando 578, $16\frac{578}{1000}$ &c. De consiguiente quando al fin de un divisor hubiese ceros, se separan de la derecha del dividendo otras tantas cifras, que se añadirán á lo que quede despues de practicar la division. En 675469 que se ha de dividir por 5400, separo 69 y dividiendo 6754 entre 54, tendré 125 de cociente con 4 de sobra: es decir, que les toca á $125\frac{469}{5400}$.

29 Si qualesquiera dividendo y divisor se multiplican ó parten ambos por un número sea el que fuere, darán el mismo cociente que antes de haberlos multiplicado ó partido: porque repitiéndose ambos un mismo número de veces por la multiplicacion, y disminuyéndose igualmente por la division no debe alterarse su cociente. En efecto, 20 partido por 4, 20×6 partido por 4×6, y $\frac{20}{2}$ partido por $\frac{4}{2}$ dan todos un mismo cociente 10. De lo que se infiere que si al fin de dividendo y divisor hubiese algunos ceros; se puede abreviar la division quitando de ambas partes igual número de ellos. Si se tuviese que dividir 6400 por 400 se dividirá 64 por 4, y el cociente 16 será el de 6400 por 400; pues haberles quitado los dos ceros es haberlos partido ambos por 100.

30 La demostracion del método de dividir consta de las mismas reglas; pues por ellas se averigua las veces que el divisor cabe en cada una de las partes del dividendo. La prueba se hace como digimos ya (22), cuidando de añadir al producto del divisor por el cociente qualquier sobrante que resulte quando la division no es cabal. Si en los números del 3.^{r} egemplo se multiplica el divisor 2789 por el cociente 3456, y al producto 9638784 se añade 691 que sobró; saldrá el dividendo 9639475.

Divisores de los Números.

31 Entendemos aquí por *divisor* de un número el que le divide sin resta: como 4 que divide á 12, y 5 á 15. Para encontrar todos los divisores de un número, 2310 por egemplo, se le divide por 2 y el cociente 1155 que ya no puede volverse á partir justamente por 2, se divide por 3: el resultado 385 pártolo por 5, y dividiendo el cociente 77 por 7, tendré 11 que le partiré por el mismo 11 para sacar el último cociente 1.

Multiplico ahora de dos en dos, de tres en tres, de quatro en quatro y de cinco en cinco los divisores simples 2, 3, 5, 7, 11 que me han servido, así: $2\times3=6$, $2\times5=10$, $2\times7=14$, $2\times11=22$, $3\times5=15$, $3\times7=21$, $3\times11=33$, $5\times7=35$, $5\times11=55$, $7\times11=77$: $2\times3\times5=30$, $2\times3\times7=42$, $2\times3\times11=66$, $2\times5\times7=70$, $2\times5\times11=110$, $2\times7\times11=154$, $3\times5\times7=105$, $3\times5\times11=165$, $3\times7\times11=231$, $5\times7\times11=385$: $2\times3\times5\times7=210$, $2\times3\times5\times11=330$, $2\times3\times7\times11=462$, $2\times5\times7\times11=770$; $3\times5\times7\times11=1155$ y $2\times3\times5\times7\times11=2310$. Junto ahora los divisores que han resultado con 1 y con los que habia, y tendré todos los del número, que son 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 21, 22, 30, 33, 35, 42, 55, 66, 70, 77, 105, 110, 154, 165, 210, 231, 330, 385, 462, 770, 1155, 2310.

32 Para encontrar *la comun medida*, ó el mayor *divisor comun* de dos números, esto es, el mayor número que los divida sin resta; se divide el mayor por el menor, y si sobra algo se divide el menor por el sobrante; si vuelve á sobrar, se parte el primer residuo por el segundo, y si aun sobra se continúa dividiendo siempre por el último residuo el anterior: y si se llega á una division cabal, el número que en ella haya hecho de divisor, será el que se busca; pero si sobra 1 en la última division, no tienen divisor comun los dos números y se llaman *números primeros*.

Si se pidiese el divisor comun de 341 y 502, partiré este por 341, y despues 341 por 161 que sobran: el residuo es 19 que ha de ser divisor de 161, y porque aun sobran 9, parto 19 por 9, y como me sobra 1, concluyo que 341 y 502 no tienen divisor comun. Si se pidiese el de 438 y 102, dividiría el 1.° por el 2.° y este por 30 que sobran, partiría 30 primer residuo por el 2.° 12, y últimamente el 12 por la resta 6; y como la division es cabal, será 6 divisor comun de 438 y 102.

33 Ultimamente el divisor de 1729 y 1235 se encontrará dividiendo uno por otro, y despues 1235 por la resta 494; de esta division sobran 247 que ha de ser divisor de 494, y saliendo cabal la particion, será 247

comun divisor de 1729 y 1235. Efectivamente, por dividir 247 á 494, divide tambien á $494 \times 2 + 247 = 1235$ número menor, y de consiguiente al mayor 1729 que se compone de $1235 + 494$; luego es el divisor comun; por otra parte es el mayor, porque si hubiera otro mayor que 247 que los dividiese, dividiría tambien á 247 menor que él, lo qual no puede ser.

34 Quando hay que buscar el divisor comun de tres números, se busca el de dos, y despues el de este y del tercer número. Se halla por egemplo, el divisor de 140, 70 y 56, buscando primero el de 140 que es 14, y despues el de 14 y 56 que es el 7, el qual lo será de 140, 70 y 56. Lo mismo se practíca quando los números son quatro, cinco ó mas.

35 A veces se distinguen sin trabajo los divisores de un número. Por egemplo, será divisible por 2 siempre que su último guarismo es par. Quando su nota última es 5, es divisible por 5, y por 5 y 10 quando se acaba en cero. Ultimamente, si sumando como unidades simples las cifras de un número, resulta cantidad divisible por 3 ó por 9, dicho número es divisible por 3 ó por 9. Asi sucede en 21 cuyas cifras $2+1$ suman 3, y por tanto es divisible por 3: 80211 lo es tambien, porque sus cifras 8, 2, 1, y 1 suman 12 que es partible por 3. Finalmente, 60345 se puede

dividir cabalmente por 3 ó por 9, porque 6 +3+4+5 suman 18, cantidad divisible por 3 y por 9.

DE LOS QUEBRADOS.

36 Como un real se compone de 34 maravedises, un pie de 12 pulgadas, una arroba de 25 libras &c. las pulgadas, las libras y los maravedises serán partes ó quebrados del pie, de la arroba y del real. Pero como la unidad puede dividirse en infinidad de partes que ni tienen nombre ni uso en la vida civil; ha sido preciso inventar un método general para representar los *quebrados*, números que expresan una ó muchas de las partes en que se puede concebir dividida la unidad. Si esta por egemplo, se hace tres partes, y se toman dos, tendré el quebrado *dos tercios* que se escribe asi, $\frac{2}{3}$. Sobre la raya se pone el número de partes del quebrado que se llama *numerador*, y por bajo el número de partes en que se divide la unidad, y se llama *denominador*: el qual viene á ser la unidad hecha partes, ó el que determina la especie ó tamaño de las partes del quebrado; pues serán tanto mayores ó menores, quanto en menos ó mas partes se divida la unidad. Segun esta doctrina el quebrado $\frac{4}{5}$ de real, que se lee *quatro quintos*, significará quatro partes de un real dividido en cinco partes: $\frac{6}{8}$ ó *seis octavos* de vara, ex-

presará seis partes de una vara hecha ocho partes.

37 Los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{2}{10}$ &c. se leen; *un medio, tres quartos, cinco séptimos, siete novenos, dos décimos*: pero en los quebrados cuyo denominador pasa de 10 se forman sus nombres con la terminacion *avos*: $\frac{4}{15}$ son *quatro quinzavos*: $\frac{16}{20}$, *diez y seis veintavos*: y $\frac{86}{167}$, *ochenta y seis ciento sesenta y sietavos*. Al numerador y denominador llamarémos tambien *términos del quebrado*.

38 De dos quebrados de un mismo denominador, ó de una misma especie de partes como $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$, es mayor $\frac{5}{8}$ que tiene mas partes, ó mayor numerador: y al contrario, de dos quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{3}$ de un mismo numerador ó de igual número de partes es mayor $\frac{2}{3}$, cuyas partes son mayores, esto es, el de menor denominador. Si los quebrados tienen numeradores y denominadores diferentes, se reducen á un mismo denominador para averiguar quál es mayor.

39 Todo quebrado puede considerarse como el cociente del numerador partido por el denominador; porque lo mismo es en $\frac{8}{34}$ de real, considerar un real dividido en 34 partes y tomar 8, que considerar 8 rs. divididos entre 34. Luego si no se altera un cociente por multiplicar ó partir dividendo y divisor por un mismo número (29); *tampoco se mudará*

el valor de un quebrado, aunque se multipliquen ó partan su numerador y denominador por un mismo número. Si se multiplican el 2 y el 5 de $\frac{2}{5}$ por 10, el producto $\frac{20}{50}$ será del mismo valor que $\frac{2}{5}$: y si se dividen 20 y 50 de $\frac{20}{50}$ por 5, el cociente $\frac{4}{10}$ valdrá lo mismo que $\frac{20}{50}$ y que $\frac{2}{5}$. Por esta regla se tendrá multiplicando sucesivamente por 2, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}$ &c. pues lo mismo es una parte del real dividido en dos, que dos partes del real hecho quatro, que quatro partes del real dividido en ocho partes: multiplicando por 3, $\frac{2}{6}=\frac{6}{9}=\frac{18}{27}=\frac{54}{81}$ &c. multiplicando por 4, $\frac{5}{7}=\frac{20}{28}=\frac{80}{112}=\frac{320}{448}$ &c.

40 De consiguiente si dado un quebrado, se pide otro de igual valor y mas sencillo; se buscará el divisor comun de su numerador y denominador (32), y dividiéndolos ambos por él, será el cociente el quebrado reducido. Hayase de reducir á expresion mas sencilla el quebrado $\frac{1235}{1729}$: busco primero el divisor comun de 1729 y 1235 que es 247 (33), y dividiendo por él ambos términos tendré de cociente $\frac{5}{7}=\frac{1235}{1729}$.

41 Pero sin acudir á esta operacion pesada de buscar el divisor comun, se pueden reducir muchos quebrados, dividiendo sus dos términos por 2, todas las veces que se pueda hacer sin resta; quando ya no se puede, se dividen por 3, por 5, por 7, por 9 &c. Para reducir por este método á menores términos

el quebrado $\frac{648}{1080}$, dividiré por 2 su numerador y denominador y tendré $\frac{324}{540}$: repetiré aun dos veces la division por 2 y me resultará $\frac{81}{135}$, cuyos dos términos partiré por 9 por no poderse ya por 2: el cociente es $\frac{9}{15}$, que me da por último $\frac{3}{5}$, dividiendo por 3, el 9 y 15.

42 Quando sea menester poner un entero 8 en forma de quebrado, se le escribe por denominador 1 asi, $\frac{8}{1}$. Pero si hay que reducirle á alguna especie de quebrados como por egemplo, á *quintos*; como cada unidad tiene cinco quintos, se multiplicará 8 por 5, y será lo mismo 8 que $\frac{40}{5}$. Para reducir 11 á séptimos multiplicaré 11 por 7 y tendré $\frac{77}{7}=11$: en general, *se ha de multiplicar el entero por el denominador de la especie que se pide, y poner despues bajo del producto dicho denominador.*

Si al entero acompaña algun quebrado, como si se ha de reducir á un solo quebrado $10\frac{3}{8}$, reduciré primero 10 á $\frac{80}{8}$, y añadiendo despues los tres octavos, tendré $\frac{83}{8}=10\frac{3}{8}$: 28 $\frac{6}{11}$ es lo mismo que $\frac{314}{11}$.

43 Los quebrados $\frac{83}{8}$, $\frac{77}{7}$ &c. que son mayores que 1, y lo mismo $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{20}{20}$, $\frac{150}{150}$ &c. que vale cada uno 1; se llaman quebrados *impropios*, á diferencia de los *propios* $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{10}$ cuyo numerador es menor que el denominador, y de consiguiente son menores que 1. De dichos quebrados impropios se sacan las unidades que

contienen, *dividiendo su numerador por el denominador*; y asi partiendo 77 por 7 resultan 11 á que equivale $\frac{77}{7}$: dividiendo 83 por 8 salen 10 $\frac{3}{8}$, que son $\frac{83}{8}$.

Sumar, restar, multiplicar y partir Quebrados.

44 En algunas de estas operaciones se necesita reducir los quebrados de distintos denominadores á otros de igual valor y de un mismo denominador: lo qual se egecuta quando los quebrados son dos, *multiplicando numerador y denominador de cada uno por el denominador del otro.* Para reducir $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{9}$ de distintos denominadores á uno mismo, multiplicaré el 3 y el 4 de $\frac{3}{4}$ por 9 de este modo, $\frac{3\times9}{4\times9}=\frac{27}{36}$; y despues el 2 y el 9 de $\frac{2}{9}$ por 4 asi, $\frac{2\times4}{9\times4}=\frac{8}{36}$; y tendré los dos nuevos quebrados $\frac{27}{36}$, $\frac{8}{36}$ iguales á $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{9}$ (39) y de un mismo denominador, ó de una misma especie de partes.

Quando son tres ó mas los quebrados que se han de reducir, *se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los otros quebrados*: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$, se reducirán multiplicando el 1 y el 2 de $\frac{1}{2}$ por 35, producto de 5×7 asi, $\frac{1\times35}{2\times35}=\frac{35}{70}$; despues se multiplica el 3 y 5 de $\frac{3}{5}$ por 14, producto de 2×7, de que resulta $\frac{3\times14}{5\times14}=\frac{42}{70}$; y últimamente multiplicando el 4 y 7 de $\frac{4}{7}$ por 10 producto de 2×5, sale $\frac{4\times10}{7\times10}=\frac{40}{70}$: luego los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ se reducen á sus iguales $\frac{35}{70}$, $\frac{42}{70}$, $\frac{40}{70}$ de un mismo denominador.

45 Esto supuesto, para sumar los quebrados *se hacen de una misma especie ó de un mismo denominador si le tienen diverso, se suman los numeradores, y se pone á la suma el denominador comun.* La suma de $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}$ es sumando 3 y 2, $\frac{5}{5}=1$: la de $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{7}$ que reducidos á un mismo denominador son $\frac{14}{21}$ y $\frac{9}{21}$, es $\frac{28}{21}$: la de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$ esto es $\frac{40}{80}$, $\frac{60}{80}$, $\frac{56}{80}$, es $\frac{156}{80}=1\frac{76}{80}$ (43): últimamente $13\frac{1}{6}$ y $2\frac{5}{8}$ ó $13\frac{8}{48}$ y $2\frac{30}{48}$ suman $15\frac{38}{48}=15\frac{19}{24}$ (41).

46 Para restar los quebrados, *hechos de una misma especie ó de un mismo denominador si no lo son, se restan los numeradores y se pone al residuo el denominador comun.* La diferencia de $\frac{7}{9}$ y $\frac{3}{9}$ es $\frac{4}{9}$, restando de 7, 3, y poniendo al residuo 4 el denominador 9: la de $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ que reducidos son $\frac{6}{8}$ y $\frac{4}{8}$, es $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$: la de $5\frac{2}{3}$ y $4\frac{1}{6}$, esto es, de $5\frac{12}{18}$ y $4\frac{3}{18}$, es $1\frac{9}{18}=1\frac{1}{2}$. Para restar $\frac{2}{3}$ de 5 se toma de 5, 1, y reducido á $\frac{3}{3}$ (42), se resta de $4\frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$ y quedan $4\frac{1}{2}$. Si se ha de restar de $7\frac{2}{9}$, $\frac{5}{6}$, por ser

$\frac{5}{6}$ mayor que $\frac{2}{9}$, se toma 1 de 7, y juntando $\frac{9}{9}$ que vale con $\frac{2}{9}$, habrá que restar $\frac{5}{6}$ de $6\frac{11}{9}$, que dan de diferencia $6\frac{21}{54}=6\frac{7}{18}$. Del mismo modo se hallará que restando de $10\frac{3}{8}$, $4\frac{6}{7}$, esto es, de $9\frac{11}{8}$, $4\frac{6}{7}$, quedan $5\frac{29}{56}$.

47 Un quebrado qualquiera $\frac{2}{5}$ se hará tres veces mayor ó se multiplicará por 3, haciendo 3 veces mayor el número 2 de sus partes, ó multiplicando por 3 su numerador 2, de que resulta $\frac{2\times3}{5}=\frac{6}{5}$; para hacerle 8 veces mayor ó multiplicarle por 8, multiplicaré 2 por 8 asi: $\frac{2\times8}{5}=\frac{16}{5}$: *luego un quebrado se multiplica por un número entero ó un entero por un quebrado, multiplicando por el entero el numerador sin tocar al denominador*; de suerte que $\frac{3}{7}\times4=\frac{12}{7}$: $\frac{5}{100}\times11=\frac{55}{100}$ &c.

48 Por el contrario, para dividir un quebrado $\frac{6}{5}$ por un entero 3, se debe partir por él el numerador, y será el cociente $\frac{2}{5}$: y para que se pueda, quando el cociente no es exâcto como en la division de $\frac{5}{7}$ por 4, multiplicaré numerador y denominador por 4, y convertido $\frac{5}{7}$ en $\frac{5\times4}{7\times4}$: partiré despues el numerador por 4 y tendré el cociente $\frac{5}{7\times4}$. De lo que se infiere *que para dividir un quebrado por un*

entero se multiplica por el denominador dejando intacto al numerador : $\frac{7}{9}$ partidos por 6 son $\frac{7}{9\times6}=\frac{7}{54}$: $\frac{5}{10}$ partidos por 8 són $\frac{5}{80}$.

49 Luego si habiendo de multiplicar un quebrado $\frac{3}{5}$ por otro $\frac{4}{7}$, multiplico $\frac{3}{5}$ por 4 que es 7 veces mayor que $\frac{4}{7}$, el producto $\frac{3\times4}{5}$ habrá que dividirle por 7 para sacar el verdadero $\frac{3\times4}{5\times7}=\frac{12}{35}$: y de consiguiente *se multiplicarán dos quebrados entre sí, multiplicando sus numeradores y despues sus denominadores para tener el numerador y denominador del producto.* $\frac{3}{9}$ por egemplo, multiplicados por $\frac{5}{7}$, producirán $\frac{3\times5}{9\times7}=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$: $\frac{8}{10}\times\frac{12}{20}=\frac{96}{200}$: $6\frac{2}{3}\times3\frac{1}{5}$ ó $\frac{20}{3}\times\frac{16}{5}=\frac{320}{15}=21\frac{5}{15}=21\frac{1}{5}$.

50 Si se hubiesen de partir $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ los reduciré á $\frac{10}{15}$ y $\frac{12}{15}$ de un mismo denominador, y será su cociente el de sus numeradores $\frac{10}{12}$ (29): y como estos resultan en dicha reduccion de multiplicar en cruz los términos de los quebrados, esto es, el 2 por el 5, y el 3 por el 4, tendremos *que dos quebrados se parten multiplicando sus términos en cruz;* es decir el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, cuidando de poner el 1.^{r} producto por nu-

merador y el 2.° por denominador del cociente. El de $\frac{1}{2}$ dividido por $\frac{3}{7}$, es multiplicando 1 por 7 y 2 por 3, $\frac{7}{6}$: el de $\frac{6}{11}$ partidos por $\frac{7}{9}$ es $\frac{6\times9}{11\times7}=\frac{54}{77}$: últimamente el de $6\frac{3}{8}$ divididos por $4\frac{1}{4}$ ó de $\frac{51}{8}$ por $\frac{17}{4}$, es $\frac{204}{136}$. Para dividir un entero por un quebrado, se pone al entero 1 por denominador, y se divide despues; 6 ó $\frac{6}{1}$ divididos por $\frac{2}{3}$, dan $\frac{18}{2}=9$.

51 Si se pidiese reducir un quebrado $\frac{3}{5}$ á otro igual que tenga un denominador dado 10, multiplicaré el numerador 3 por 10, y al producto 30 dividido por el denominador 5 que da 6, pondré 10 por denominador, y resultará el quebrado $\frac{6}{10}$ con el denominador 10, y del mismo valor que $\frac{3}{5}$; pues se ha multiplicado su numerador y denominador por un mismo número 10 (39). Quando el producto del numerador por el número dado no se puede dividir exâctamente, es impracticable la operacion. Si se hubiese de reducir el quebrado $\frac{2}{3}$ á otro con un denominador 7, resultaría $\frac{\frac{14}{3}}{7}$.

52 Por esta operacion se averigua el valor de un quebrado qualquiera; por egemplo, $\frac{3}{4}$ de hora en minutos: pues multiplicando el numerador 3 por 60, número de minutos que hacen una hora, y dividiendo el producto 180 por el denominador 4, tendré

45 minutos: lo qual viene á ser reducir el quebrado $\frac{3}{4}$ á otro igual $\frac{45}{60}$ con el denominador 60. Para averiguar los reales á que equivalen $\frac{3}{5}$ de peso, multiplicaré 3 por 15, número de reales de un peso, y su producto 45 dividido por 5 dará 9 reales, valor de $\frac{3}{5}$ de peso.

53 Si se considera á un quebrado dividido en qualquiera número de partes iguales, una ó muchas de estas partes serán *un quebrado de quebrado*: como $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{4}$, que son dos partes de $\frac{5}{4}$ dividido en tres partes. Y como para dividir $\frac{5}{4}$ por 3 se multiplica 4 por 3 (48), y para tomar el cociente $\frac{5}{12}$ dos veces hay que multiplicar 5 por 2 (47), serán $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{4}$, $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{10}{12}$: es decir, *que un quebrado de quebrado se reduce á quebrado sencillo, multiplicando entre sí los quebrados de que se compone.* Y asi $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{7}$, será $\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{14}$; $\frac{6}{5}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$, que quiere decir, *seis quintas partes de los dos tercios de un tercio*, será $\frac{6}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{45}$. De esta misma naturaleza es el quebrado $\frac{1}{6}$ de $\frac{2}{3}$ de 7, y equivale á $\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times7=\frac{14}{18}$. Quando en los cálculos ocurre algun quebrado de quebrado, se le reduce á sencillo.

QUEBRADOS DECIMALES.

54 Abrevia notablemente el cálculo de los quebrados el egecutarlo con los que se lla-

man *decimales*, que son aquellos que tienen por denominador 10, 100, 1000 &c. La facilidad de calcular estos quebrados nace de que cada una de sus cifras es 10 veces mayor que la siguiente como en los números enteros: y por eso se escriben como ellos sin denominador, el qual se colige del sitio que ocupan las cifras de su numerador, cuyo orden es el siguiente.

55 Despues de una coma que separa las decimales de los enteros, ó de un cero sino los hay, tienen su lugar las *décimas*, partes diez veces menores que las unidades, y cuyo denominador es 10. En el 2.° lugar se ponen las *centésimas*, que son diez veces menores que las décimas, y cuyo denominador es 100. En el 3.^r lugar las *milésimas*, diez veces menores que las centésimas, y con el denominador 1000. En el 4.° las *diez milésimas*: en el 5.° las *cien milésimas*: en el 6.° las *millonésimas*: en el 7.° las *diez millonésimas* &c. continuando asi cada clase de partes diez veces menor que la anterior.

56 En la cantidad decimal 54,965, el 9 que la coma separa del entero 54, son 9 décimas ó $\frac{9}{10}$: el 6, seis centésimas ó $\frac{6}{100}$, y el 5, $\frac{5}{1000}$: y como $\frac{9}{10}$ son $\frac{900}{1000}$ (39), y $\frac{6}{100}$ son $\frac{60}{1000}$, se leerá dicho número 54 *unidades y novecientas sesenta y cinco milésimas*; y si los enteros se reducen tambien á milésimas, se tendrá

$54,965 = 54\frac{965}{1000} = \frac{54965}{1000}$. En 1,08, que son *un entero y ocho centésimas*, manifiesta el cero que no hay décimas: 0,0307 expresan *trescientas y siete diez milésimas.*

57 De lo dicho se infiere lo 1.° que los decimales se leen como si fueran enteros, añadiendo al fin el nombre de la especie de la última cifra, que se puede encontrar recorriéndolas todas desde la coma diciendo, *décimas, centésimas, milésimas &c.* Pero para leerlas y escribirlas es mas facil valerse de esta importante advertencia, que se colige de lo que llevamos dicho, *que todo quebrado decimal tiene por denominador á 1 con tantos ceros, como notas decimales hay en su numerador.* Y asi 0,0340087 que debe tener por denominador á 1 con siete ceros, se leerá *trescientas quarenta mil ochenta y siete diez millonésimas*: y para escribir *trescientas mil novecientas y dos cien millonésimas*, cuyo denominador ha de tener ocho ceros, deberé poner dos ceros antes de las seis cifras 300902 del numerador para que resulte 0,00300902, que es el quebrado pedido.

58 Lo 2.° que los decimales no mudan de valor aunque se añadan ó quiten ceros á su derecha; porque como $\frac{5}{10}$ por egemplo, es lo mismo que $\frac{50}{100}$, que $\frac{500}{1000}$ &c. (39), será poniéndolos sin denominador, 0, 5, lo mismo que 0, 50 y que 0, 500 &c.

59 El reducir un quebrado comun á decimal viene á ser averiguar el valor de un quebrado en décimas, centésimas &c. conforme digimos (52): y como cada unidad tiene diez décimas, cada décima diez centésimas, y asi de las demas; se efectuará la reduccion multiplicando el numerador y todas las demas restas por 10, y dividiendo el producto por el denominador.

Para reducir $\frac{1}{4}$ á quebrado decimal, multiplicaré 1 por 10, y dividiendo por 4, tendré el cociente 2 que serán décimas; volveré á multiplicar por 10, 2 que sobraron, y á partir 20 por 4, y juntando el cociente cabal 5 centésimas al 2, tendré $0,25 = \frac{1}{4}$. Como las restas de las divisiones son quebrados, se reducen de este modo á decimales, como se puede ver (64) en el eg. 1.°

60 Los quebrados cuya última cifra del denominador sea 1, 3, 7, 9 no se pueden reducir exâctamente á decimales: como $\frac{4}{9}$ que es 0,44444 &c. donde dividiendo 40 por 9, les cabe á 4 y sobran siempre 4: y $\frac{3}{7}$ que equivale á 0,428571428571142 &c. cuyas seis primeras cifras vuelven á salir como se continúe la reduccion. En estos casos y en los demas en que se usa de decimales, basta tomar las tres primeras cifras del quebrado, y las quatro ó cinco primeras si el cálculo pide mucha exâctitud, despreciando las demas por de po-

ca entidad. En el quebrado 0,39574 se pueden despreciar en un cálculo regular sin error sensible el 7 y 4, usando solo del quebrado 0,395. Pero conviene advertir que quando la primera de las cifras que se desprecian pasa de 5 se añade 1 á la última de las que quedan; y asi en el quebrado propuesto en lugar de 0,395 se ha de tomar 0,396, que se acerca mas á 0,39574 que 0,395. En el quebrado 0,70654 podremos tomar 0,706 ó 0,707.

Sumar, restar, multiplicar y partir Quebrados decimales.

61 Estos quebrados se suman por las mismas reglas que los números enteros, como se ve en el egemplo.

Se han de sumar	305,0078
	2,98
	34,069
	0,0015
Suma.......	342,0583

62 Tambien se restan como los enteros, pero conviene hacer igual el número de decimales en minuendo y subtrahendo, añadiendo ceros

I.

De.......	8,4600
Restando..	3,0543
Quedan...	5,4057

II.

De....	683,0000
Restando.	16,6402
Quedan..	666,3598

al que tenga menos (58). En el primer egemplo se han añadido dos ceros al minuendo, y en el segundo quatro al entero 683.

63 *Las decimales se multiplican como si fuesen enteros, y despues se separan de la derecha del producto con la coma para decimales tantas cifras como notas decimales hay en multiplicando y multiplicador*: y si en dicho producto no hay tantas, se añaden á su izquierda en ceros las que faltan.

Si se pidiese el importe de 4,8 *varas*, á razon de 35,67 *reales*, cada vara: despues de haber multiplicado 3567 por 48 considerándolos sin coma, se separan de la derecha del producto 171216 las tres cifras 216 para decimales, por tener dos el multiplicando y una el multiplicador. La razon es porque $35,67 \times 4,8$ es lo mismo que $\frac{3567}{100} \times \frac{48}{10} = \frac{171216}{1000} = 171,216$: la qual demostracion es facil aplicar á otro qualquier egemplo. Como en el 2.° hay que separar seis cifras, y 714 tiene solo tres, se añaden á su izquierda tres ceros. En el 3.r eg. se averigua el

I.

Multiplicando	35,67
Multiplicador	4,8
	28536
	14268
Producto	171,216

valor de 0,554 de peso en reales, multiplicando 0,554 por 15, número de reales de un peso: de que resultan 8 rs. y 0,31 de real. Si se multiplica 0,31 por 34, tendré 10 mrs. y medio poco mas.

II.

Multiplicando .	0,034
Multiplicador .	0,021
	34
	68
Producto. .	0,000714

III.

0,554
15
2770
554
8,310

64 Para dividir estos quebrados, *se hacen dividendo y divisor de una misma especie*, esto es, de un mismo número de notas decimales, poniendo ceros al que tenga menos (58), y *quedará reducida la operacion á dividirlos como enteros*. Porque hechos de una misma especie debe caber el divisor en el dividendo las mismas veces que si fueran enteros. Si la division no es exâcta se reduce á decimal el quebrado que resulte.

En el 1.r egemplo se dividen 171,216 reales importe de 4,8 varas, añadiendo á este divisor dos ceros para que tenga como el dividendo tres cifras decimales: y resulta de cociente no haciendo cuenta con la coma, 35 y $\frac{5216}{4800}$, quebrado comun que reducido á decimal (59), es 0, 67 que con 35 compone el valor de la vara 35, 67. Por el 2.° eg. se averigua la parte decimal que son de peso 8, 31 reales, dividiéndolos por 15, número de reales de un peso: para lo qual se añaden dos ceros á 15; y como entonces no cabe el divisor en el dividendo, se tiene de cociente $\frac{831}{1500}$, que reducido á decimal es 0, 554, parte de peso que se busca.

I.

171,216	4,800
14400	35,67
27216	
24000	
32160	
28800	
33600	
33600	
0	

II.

8,310	1500
7500	0,554
8100	
7500	
6000	
6000	
0	

Si se hubiera preguntado qué parte decimal son de peso 6 rs. y 20 mrs.; se reducirían primero á 230 mrs. que son $\frac{230}{510}$ de peso, por componerse este de 510 mrs.; y hecho decimal este quebrado, resultaría $\frac{230}{510}$ = 0, 4509, parte pedida con poca diferencia.

NUMEROS COMPLEJOS.

65 Se llaman asi los que contienen diferentes especies: como varas, pies y pulgadas; pesos, reales y maravedises. Vease una tabla de los mas comunes con las señales que los representan á la derecha, y á la izquierda las especies inferiores de que cada una de las superiores se compone.

MONEDAS.

Maravedises. . . . . (*mrs.*)

34	*Real.* . . . . (*rl.*)				
340	10	*Escudo.* . . . . (*esc.*)			
370	11	$1\frac{1}{10}$	*Ducado.* . . . . (*duc.*)		
510	15	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{11}$	*Peso.* . . . . (*pe.*)	
2040	60	6	$4\frac{5}{11}$	4	*Doblon.*(*dobl.*)

PESOS.

Grano. . . . . *(gr.)*					
24	*Escrúpulo.* . . . . *(escr.)*				
72	3	*Adarme.* . . . . *(ad.)*			
576	24	8	*Onza.* . . . . *(O.)*		
4428	192	64	8	*Marco.* . . . . *(M.)*	
9216	384	128	16	2	*Libra.* . *(lib.)*

MEDIDAS.

Punto. . . . . *(p.º)*				
12	*Linea.* . . . . *(l.)*			
144	12	*Pulgada.* . . . . *(p.)*		
1728	144	12	*Pie.* . . . . *(P.)*	
9484	432	36	3	*Vara.* . . . . *(V.)*

TIEMPO.

Tercero.......................(‴)				
60	*Segundo.*...............(″)			
360	60	*Minuto.*..........(′)		
21600	3600	60	*Hora.*....(*h.*)	
5184000	86400	1440	24	*Dia.*.(*d.*)

Sumar, restar, multiplicar y partir los Números complejos.

66 Para sumarlos se escriben en columnas sus diferentes especies, se suman todas empezando por la inferior, sacando de la suma de cada una las unidades que componga de la especie superior inmediata, con la que se juntan, poniendo bajo de la columna lo que sobre, ó cero si nada sobra.

Se han de sumar.

4032 *d.*.....	3 *h.*.....	54′
316........	18........	15
1003........	28........	39
45........	2........	20
5398 *d.*.....	5 *h.*.....	8′

La suma de la primera columna del eg. contiene 2 *h.* y 8′, pongo estos por bajo, y junto

2 *h.* con las de la segunda columna que suman 53 *h.* de las que escribo 5 que sobran, sacando 48 que componen 2 *d.*, los quales juntaré por último con los de la última columna.

67 En la resta se escriben los dos números con la correspondencia en las especies, y comenzando por las menores, se resta el número inferior del superior juntando á este, quando es menor, una unidad de la especie inmediata. Sacada en el 1.r eg. la diferencia 4 de los *mrs.*, se añade á los 12 *rs.* de donde no se pueden restar 14 en la 2.a columna, 1 *pe.* hecho *rs.* y restando de 27 *rs.* que resultan los 14, tendré 13, y despues se pasa á restar 585 de 648.

I.

De	648' *pe.*	12 *rs.*	19 *mrs.*
Rest.do	585	14	15
Quedan	62 *pe.*	13 *rs.*	4 *mrs.*

II.

De	104' *v.*	0 *P.*	5 *p.*
Rest.do	84	2	10
Quedan	19	0	7

68 La multiplicacion de los números complejos puede hacerse reduciendo multiplicando y multiplicador á quebrados de la especie superior, y multiplicándolos despues segun dejamos dicho (49). Si se pidiese por eg. el

importe de 4 *v.* y 2 *P.* á razon de 8 *rs.* y 4 *mrs.* la vara; reduciré 4 *v.* 2 *P.* á 14 *P.* que son $\frac{14}{3}$ de vara; y 8 *rs.* 4 *mrs.* á 276 *mrs.* que son $\frac{276}{34}$ de real: multiplicaré despues $\frac{276}{34}$ por $\frac{14}{3}$, y el producto $\frac{3864}{102}$ que equivale á 37 *rs.* y 30 *mrs.* será el importe que se pide. El qual se saca tambien reduciendo los dos números á 8,117 *rs.* y 4,666 *var.*; pues su producto 37,873922, es el mismo que el anterior con poca diferencia.

69 Busquemos ahora por otro método mas breve y conmodo el número de *varas* que tiene *un círculo* maxîmo de nuestro globo, esto es, una linea que le rodee todo, en la suposicion de que cada grado de los 360 en que se divide, tiene 57295 *v.* 8 *p.* 4 *l.* Comienzo á multiplicar 360 por 4, y el producto 1440 *l.* reducido á pulgadas dará 120. Multiplico despues 360 por 8 *p.* y tendré 2880 *p.* que con las 120 son 3000, ó 83 *v.* y 1 *P.* multiplico últimamente 57295 por 360, y añadiendo al producto 20626200, 83 y 1 *P.* tendré que el círculo maxîmo de de la tierra tiene 20626283 83 *v.* y 1 *P.*
„Luego un número complejo se multiplíca por „otro incomplejo ó de una sola especie, multi„plicando sucesivamente por este todas las es„pecies del primero comenzando por la menor, „y reduciendo su producto á la superior.“

70 Quando ambos son complejos, como

si se pidiese el importe de 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* á razon de 3 *Pe.* 8 *rs.* y 15 *mrs.* la vara; reducido este valor á 1817 *mrs.* y dividido por 36, número de pulgadas que tiene una vara, será el cociente $\frac{1817}{36}$ el valor de una pulgada: multiplíquese este valor por el número de pulgadas que tienen 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* que son 606, y el producto 30586 $\frac{1}{6}$ *mrs.* que hacen 59 *pe.* 14 *rs.* y 26 $\frac{1}{6}$ *mrs.* será el que se busca.

„Luego para multiplicar dos números „complejos, se ha de dividir el multiplicando „reducido á sus menores partes, por el nú-„mero de especies inferiores del multiplica-„dor que hacen una superior, y multiplicar „despues el cociente por dicho multiplicador „reducido á su menor especie. El producto „resulta en especies inferiores del multiplican-„do que habrá que reducir á superiores co-„mo en el egemplo anterior.“

71 Pero se previene lo primero, que en estos casos en que los dos números se suponen de especies diferentes, se toma por multiplicando al que sea de la misma especie con el producto: como se practicó en el egemplo, tomando á los pesos, reales y maravedises por multiplicando. Lo segundo, que quando se han de multiplicar números que expresen ambos medidas de longitud, como 3 *v.* 1 *P.* y 2 *p.* por 2 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* se reducen uno y otro á 120 *p.* y 102 *p.* que es su menor es-

pecie, y multiplicando despues 120 por 102, su producto 12240 *p.* es el que se busca, y expresa una superficie como veremos en la Geometría.

$$
\begin{array}{rl}
 & 12\ rs.\ \ 28\ mrs. \\
 & 30\ v.\ \ 1\ P.\ 8.\ p. \\
\hline
30\ V. \times 12\ rs. \ldots & 360\ rs. \ldots 00\ mrs. \\
30\ V. \times 28\ mrs. \ldots & 24 \ldots\ldots 24 \\
\overbrace{1\ P. + 8\ p.} \times \overbrace{12\ rs. + 28\ mrs} \ldots & 7 \ldots\ldots 4\tfrac{2}{9} \\
\hline
 & 391\ rs. \ldots 28\tfrac{2}{9}\ mrs. \\
\hline
\end{array}
$$

En el antecedente egemplo en que es crecido el número 30 *v.* de las especies superiores del multiplicador, se abrevia la operacion multiplicando por él solo todo el multiplicando: de qué resulta 30×12 *rs.* $=$ 360 *rs.* 30×28 *mrs.* $=$ 840 *mrs.* $=$ 24 *rs.* y 24 *mrs.* multiplicando despues por la regla anterior 12 *rs.* y 28 *mrs.* por 1 *P.* y 8 *p.* lo que da 7 *rs.* y $4\frac{2}{9}$ *mrs.* y sacando la suma de las tres partidas que da el producto total 391 *rs.* y $28\frac{2}{9}$ *mrs.*

4

72 „Para dividir un número complejo „por un incomplejo se dividen por él sucesi„vamente todas las especies del complejo: y „quando hay alguna resta se reduce á la es„pecie inferior inmediata.“ Para averiguar el valor de una arroba, en el supuesto de que

68 arrobas han costado 864 *pe.* 12 *rs.* y 13 *mrs.* partiré primero 864 por 68, y tendré de cociente 12 *pe.* con 48 de resta; que reducidos á reales y juntos con 12, componen 732 *rs.* pártolos por 68 y salen 10 *rs.* con 52 de residuo: redúzcolos á *mrs.*, júntolos con 13, y dividiendo la suma 1781 por 68, tendré $26\frac{13}{68}$ *mrs.*: luego 12 *pe.* 10 *rs.* y $26\frac{13}{68}$ *mrs.* es el valor de la arroba.

73 Supongamos ahora que 12 *v.* 1 *P.* y 7 *p.* han costado $225\frac{1}{2}$ *pe.* y que se pide el valor de la vara. Averiguo primero el número de varas que hay en el divisor 12 *v.* 1 *P.* y 7 *p.* reduciéndolo á 451 *p.* y partiéndolo por 36, número de pulgadas de una vara; parto despues por $\frac{451}{36}$, número de varas que resultan, el dividendo $225\frac{1}{2}$; y tendré de cociente 18, valor de cada vara.

Asimismo si 16 *v.* 2 *P.* y 6 *p.* han costado 59 *pe.* 14 *rs.* y $26\frac{1}{6}$ *mrs.* y se pide el valor de la vara; averiguaré primero el número de varas del divisor 16 *v.* 2 *P.* 6 *p* ó de 606 *p.* dividiéndole por 36: partiré despues 59 *pe.* 14 *rs.* $26\frac{1}{6}$ *mrs.* ó $\frac{183555}{6}$ de *mri.* por $\frac{606}{36}$, número de varas, y tendré de cociente 1817 *mrs.* ó 3 *pe.* 8 *rs.* y 15 *mrs.* valor de la vara.

Sacarémos pues la regla general siguiente para dividir un número incomplejo por otro complejo, ó un complejo por otro com-

plejo: „Partase el divisor reducido á su me-
„nor especie, por el número de estas que ha-
„cen una superior, y dividiendo despues por
„lo que resulte, al dividendo reducido tam-
„bien á sus menores partes, saldrá el cocien-
„te deseado."

74 Tambien se pueden dividir los complejos reduciendo divisor y dividendo á quebrados, como se dijo en la multiplicacion, y dividiendo despues (68). El cociente de 37 *rs.* y 30 *mrs.* partidos por 4 *v.* y 2 *P.* que vienen á ser $\frac{1288}{34}$, $\frac{14}{3}$; es dividiendo estos dos quebrados, $\frac{3864}{476}$: que equivale á 8 *rs.* y 4 *mrs.* el qual se pudo tambien sacar reduciendo dichas dos cantidades á decimales y dividiéndolas despues.

75 Los complejos de una misma especie, como 16 *pe.* 2 *rs.* 2 *mrs.* y 3 *pe.* 3 *rs.* 14 *mrs.* se dividen reduciendo ambos á su menor especie, y dividiendo despues 8230 *mrs.* y 1646 *mrs.* que resultan: el cociente 5 indica las veces que el uno cabe en el otro, que es á lo que se reduce este género de division.

ELEMENTOS

DE ÁLGEBRA.

76 Queriendo los Matemáticos demostrar de un modo general las verdades que la Aritmética demuestra solo en casos particulares, para elevarse á superiores conocimientos; substituyeron á los números, cuyo valor es siempre determinado, cantidades generales representadas con las letras *a*, *b*, *c*, *d* &c del alfabeto. De esta manera formaron una Aritmética universal que se llama *Algebra*, que por medio de cantidades generales é indeterminadas no solo demuestra generalmente sus proposiciones, sino que expresando con singular sencillez y laconismo las ideas que maneja, conduce á resultados que la Aritmética no lograra sin mucho rodeo, tanteos y trabajos, ademas de resolver infinitos problemas á que no alcanzan sus reglas, y de subministrarla métodos para facilitar sus operaciones complicadas.

77 Cada una de las cantidades *a*, *bc*, *dmn*, se llama *incomplexâ*, *término y monomio:* la que tiene dos términos como $a+b$, $dt-c$,

binomio : *trinomio* la que tiene tres, y en general *complexá* y *polinomio* la que consta de muchos.

78 Los signos +, — puestos á las cantidades significan el sentido en que se han de tomar : las que tienen el — que se llaman *negativas*, se toman en sentido contrario á las *positivas* que tienen el + ó estan al principio sin signo : de manera que si +20 con el signo + representa el caudal de una persona, —20 representará igual cantidad de deuda : si $+b$ es el camino que se ha corrido ácia el Oriente, $-b$ será el corrido ácia el Ocidente : si a es el valor de una fuerza que obra de derecha á izquierda, $-a$ será la misma fuerza obrando de la izquierda ácia la derecha.

79 En lugar de aa se escribe para abreviar a^2, en lugar de bbb se pone b^3, en lugar de $cccc$, c^4: ahorrando con los números 2, 3, 4, que se llaman *exponentes*, la repeticion de las letras : en a, bc, dtm, es el exponente 1. a^3c^2 equivale á $aaacc$; y b^2cd^4 á $bbcdddd$. Tambien se escribe en lugar de $ab+ab$, $2ab$; en vez de $2ab+ab$, $3ab$; en lugar de $2ab+3ab$, $5ab$. A los números 2, 3, 5, llamamos *coeficientes*, y expresan las veces que se ha de tomar la cantidad ab á quien preceden ; es decir que la multiplican. El coeficiente de ab, m, cde, es 1.

80 Asimismo, en lugar de $-b-b$ se es-

cribe mas breve $-2b$; en vez de $-3bc-4bc$ se pone $-7bc$: en general los términos que tienen unas mismas letras y exponentes, que se llaman *semejantes*, se reducen á uno solo *sumando sus coeficientes, si tienen un mismo signo: y quando los signos son diferentes como* 3ab—ab, *se restan los coeficientes* 3 *y* 1, *y á la diferencia* 2ab *se le pone el signo* + *del término mayor* 3ab. Los términos b^2c-4b^2c se reducen á $-3b^2c$, restando 1 de 4; y poniendo á la diferencia el signo — de la cantidad mayor $-4b^2c$. Tambien $3c^2d+5ab^3+2c^2d-ab^3$ equivale á $5c^2d+4ab^3$, sumando 3 y 2 y restando 1 de 5: últimamente $ab^2-5cd-a^2b-2cd+7b^2d-cd-3b^2d$, se reduce sumando los coeficientes $-5-2-1$, y restando 3 de 7, á $ab^2-8cd-a^2b+4b^2d$: ab^2 y a^2b no son semejantes. Los términos $a-a$, $-2cd^2+2cd^2$, $3b^3c-3b^3c$ y demas semejantes iguales y de signos contrarios se reducen á cero.

Sumar y restar cantidades algébricas.

81 Estas cantidades se suman *poniéndolas unas despues de otras con sus propios signos, y reduciendo las que haya semejantes.* La suma de a y b es $a+b$; la de c^2d, ab y $-3c^2d$ es $c^2d+ab-3c^2d$ ó $ab-2c^2d$, reduciendo, c^2d y $-3c^2d$.

82 Para restarlas *se escribe el minuendo y*

junto á él el subtrahendo mudando los signos de sus términos el + en — y el — en +. La cantidad b se resta de a escribiendo $a-b$: para restar de ab, $c-d$ pondré $ab-c+d$; asimismo la diferencia entre $6cd-a^2b^2d$ y $3cd-4a^2b^2d-ax$ es $6cd-a^2b^2d-3cd+4a^2b^2d+ax$, que se reduce á $3cd+3a^2b^2d+ax$.

83 Se mudan en sus contrarios los signos del subtrahendo, porque asi como la diferencia entre 10 y 8 es 10 disminuido de 8 ó $10-8$, asi tambien la diferencia entre la cantidad a y b será a disminuido de b ó $a-b$. Pero como entre uno que tiene 10 doblones y otro que debe 8, cuyo haber es -8 (78), hay de diferencia $10+8$, tambien entre a y b habrá de diferencia $a+b$.

84 De lo qual y de lo dicho en la suma se infiere que las cantidades negativas disminuyen las positivas quando se suman con ellas, y las aumentan quando se restan. Con efecto, añadir deudas es disminuir caudal, y quitarlas es aumentarle: asi, no se debe equivocar el sumar con añadir y el restar con disminuir.

Multiplicacion.

85 Para practicar esta operacion con las cantidades monomias, *se multiplican sus coeficientes, se juntan despues todas las letras, y si las hay semejantes, se escribe una sola con*

la suma de sus exponentes (79): *últimamente, se pone al producto el signo* + *si los factores tienen ambos un mismo signo, y el* — *si le tienen diverso.*

El producto de $+a\times+b$ es $+ab$; el de $+a^2b\times ac^3d$ es a^2bac^3d, ó a^3bc^3d, escribiendo una vez la a y sobre ella la suma 3 de sus exponentes: para multiplicar $+2ab$ por $-3ac$, diré $+\times-$ da $-$ (usamos de + y — en lugar de *cantidad positiva* y *negativa*): 2×3 es 6, y juntando las letras tendré de producto $-6abac$ ó $-6a^2bc$: tambien sacaré el producto de $-3a^2b^3c\times-6bcx$ multiplicando — por — que da +; despues 3 por 6 que es 18, y juntando las letras, de que resulta $18a^2b^4c^2x$: últimamente $-5m^2q\times4amq^2$ produce $-20am^3q^3$.

86 Esta regla que se percibe fácilmente por lo que toca á los coeficientes, ha sido en quanto á juntar las letras una mera convencion de los matemáticos. En quanto á los signos es evidente que multiplicar una cantidad positiva $+a$ ó negativa $-b$ por otra positiva 3 es tomar $+a$ ó $-b$ tres veces: luego en el primer caso será el producto $+3a$ y en el segundo $-3a$, y $+\times+=+$, $-\times+=-$. Asimismo, multiplicar $+a$ cantidad positiva ó $-b$ negativa por -3 es tomar $+a$ ó $-b$ tres veces, pero al contrario de como se tomarian si el multiplicador fuera $+3$; luego si en este caso serian los productos $+3a$, $-3b$, deben ser en el pre-

sente $-3a$ y $+3b$: y $+\times-=-$, $-\times-=+$ conforme lo digimos en la regla. Si en lugar de 3 de que hemos usado para mayor claridad, ponemos c, quedará la demostracion mas general.

87 *Un polinomio se multiplica por un monomio, multiplicando por este todos los términos del primero.* En el 1.^{r} eg. se multiplica por $-4a^2bc$ los tres términos de $3bc^2-5a^3b-b^2c$.

I.

$$\begin{array}{rl}
3bc^2-5a^3b-b^2c & \textit{Multiplicando} \\
-4a^2bc\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \textit{Multiplicador} \\
\hline
-12a^2b^2c^3+20a^5b^2c+4a^2b^3c^2 & \textit{Producto.} \\
\hline
\end{array}$$

88 *Quando ambos son polinomios, se multiplican como en los números todos los términos del multiplicando por cada término del multiplicador*: y aunque es indiferente comenzar por la izquierda ó por la derecha, esto último es lo mas comun.

II.

$$\begin{array}{rl}
5m-tb+4a^2 & \textit{Multiplicando} \\
3d^2-cn & \textit{Multiplicador} \\
\hline
15d^2m-3bd^2t+12a^2d^2 & \\
-5cmn+bcnt-4a^2cn & \\
\hline
15d^2m-3bd^2t+12a^2d^2-5cmn+bcnt-4a^2cn & \textit{Prod.} \\
\hline
\end{array}$$

III.

$$3bc^2 - 5a^2b - b^2d \text{ ..... } \textit{Multiplican}$$
$$2bc^2 - 3a^2b + 4b^2d \text{ ..... } \textit{Multiplicad}$$

$$1.^r \textit{ Prod.}^{to}\ 6b^2c^4 - 10a^2b^2c^2 - 2b^3c^2d$$
$$2.^\circ \text{ .... } - 9a^2b^2c^2 + 15a^4b^2 + 3a^2b^3d$$
$$3.^\circ \text{ .... } 12b^3c^2d - 20a^2b^3d - 4b^4$$

$$\textit{Total}\ 6b^2c^4 - 19a^2b^2c^2 + 10b^3c^2d + 15a^4b^2 - 17a^2b^3d - 4b^4d$$

En el 2.° eg. se multiplica como en el 1.° todo el multiplicando por $3d^2$, y luego se multiplica del mismo modo por $-cn$, sumando despues los dos productos que resultan. Y esto mismo se egecuta en el 3.^{r} eg. con sola la diferencia de que se reducen en la suma algunos términos semejantes.

89 Suele no ser necesario efectuar la multiplicacion, y entonces se indica incluyendo en un paréntesis ó bajo de una raya los factores polinomios. $\overline{a+b}\times c$ ó $(a+b)c$ expresan el producto de $a+b$ multiplicado por c: y $(a+b)(c-bd+3)$ ó $\overline{a+b}\times\overline{c-bd+3}$ el de $a+b$ y $c-bd+3$.

Division.

90 Como $4a^3bc$ multiplicado por $3a^2b$ da de producto $12a^5b^2c$, si se divide $12a^5b^2c$ por $3a^2b$ ha de ser su cociente $4a^3bc$. Para

esto se saca $\frac{12}{3}=4$, y se quitan a^2b que hay comunes en dividendo y divisor, asi como en la multiplicacion se juntaron a^3bc con a^2b, y resulta $4a^3bc$: asimismo para partir $6a^2bc$ por $4ad$, se reduce $\frac{6}{4}$ á $\frac{3}{2}$, y quitando c comun, queda de cociente el quebrado $\frac{3a^2b}{2b}$: últimamente, el cociente de $5cd$ dividido por $15a^3c^3d$ debe ser $\frac{1}{3a^2c}$, reduciendo $\frac{5}{15}$ á $\frac{1}{3}$, quitando de ambas partes cd comun, y poniendo 1 en el numerador que queda sin números y letras.

Luego generalmente „las cantidades mo„nomias se dividen 1.° haciendo de dividen„do y divisor un quebrado que se reduce á „enteros ó á términos mas sencillos quando „se puede. 2.° quitando las letras comunes á „denominador y numerador, poniendo en es„te 1 si queda sin letras y números. 3.° Co„mo el cociente multiplicado por el divisor „ha de dar el dividendo; si este y el divisor „tienen un mismo signo, se pone al cociente „el +, y — quando le tienen diverso."

El cociente de a partido por b es $\frac{a}{b}$ que no admite reduccion; el de $8a^2bd$ partido por $-4a^2d$ es $\frac{8a^2bd}{-4a^2d}$, que se reduce asi: + partido por — es —; 8 partido por 4 es 2; quito a^2d comun á los dos términos y resulta por último $-2b$. El cociente de $3m^2$ partido por $15a^2m^4$ es $\frac{3m^2}{15a^2m^4}$, que reduciendo $\frac{3}{15}$ á $\frac{1}{5}$, y quitando m^2 comun, queda en $\frac{1}{5a^2m^2}$: el de $-2a^3b^2x$ dividido por $-6ab^3m$ que es $\frac{-2a^3b^2x}{-6ab^3m}$, se reduce haciendo $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, y quitando ab^2 comun, á $\frac{a^2x}{3bm}$; á este y al anterior se ha puesto el signo $+$ por tener un mismo signo dividendo y divisor. Ultimamente $\frac{-2n^2x}{2nx}$ se reduce á $-n$.

91 Las cantidades que se quitan por comunes á dividendo y divisor, forman siempre un quebrado igual á 1 (43), que multiplica á lo restante del cociente, cuya omision no varía su valor antes le simplifica: $\frac{a^2b^2c}{a^2b}$ por egemplo, es lo mismo que $\frac{a^2b}{a^2b}\times bc$, que se reduce á $1\times bc$ ó á bc, por ser $\frac{a^2b}{a^2b}=1$.

92 Quando dichas letras comunes son semejantes como sucede en $\frac{a^4}{a^3}$, el quitar a^3 que hay comun, es lo mismo que restar del exponente 4 del dividendo el 3 exponente del divisor, para que resulte el cociente $a^{4-3}=a$.

Tambien se saca el de $\frac{a^3b^2}{a^2b}$ que es ab, asi, $a^{3-2}b^{2-1}=ab$ &c. Sacando de esta manera el cociente de $\frac{a^m}{a^m}$ resulta $a^{m-m}=a^0$; y como $\frac{a^m}{a^m}$ es 1 (43); será $a^0=1$ esto es, *será 1 toda cantidad cuyo exponente es cero;* de suerte que $b^0=1$, $d^0c^0=1$, $(a+cd-b^2)^0=1$.

93 Asimismo, si se resta en $\frac{a}{a^4}$, 4 de 1 (92), sale de cociente $a^{1-4}=a^{-3}$; y como $\frac{a}{a^4}$ es $\frac{1}{a^3}$ quitando a comun, será lo mismo a^{-3} que $\frac{1}{a^3}$. Haciendo la resta en $\frac{a^m}{a^{2m}}$ se tiene $a^{m-2m}=a^{-m}$, quitese en $\frac{a^m}{a^{2m}}$ que es $\frac{a^m}{a^m a^m}$ (85), a^m comun, y quedará $\frac{1}{a^m}$: luego a^{-m} es lo mismo que $\frac{1}{a^m}$: es decir, *una cantidad con exponente negativo equivale á 1 dividido por dicha cantidad con el mismo exponente positivo.* De lo qual se deduce el modo de trasladar una cantidad del uno al otro término de un quebrado quedando el mismo; pues basta mudar el signo á su exponente: $\frac{bd}{a^4c}$ por egemplo, es lo mismo que $bda^{-4}c^{-1}$: $\frac{c^2d}{cd^3}$ equivale á $c^{2-1}d^{1-3}=cd^{-2}$ &c.

94 Para dividir el polinomio $15m^2n^2 - 9mn + 3n$ por el monomio $-3n$, se dividen por él sucesivamente los tres términos del dividendo como se ve en el 1.^r egemplo.

Egemplo I.

$$\begin{array}{l|l} \textit{Dividendo}\ 15m^2n^2 - 9mn + 3n & -3n\ \textit{Divisor} \\ \hline \quad -15m^2n^2 & -5m^2n + 3m - 1\ \textit{Coc.} \\ \cline{1-1} \quad\quad 0 \quad -9mn + 3n & \\ \quad\quad\quad +9mn & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad 0 + 3n & \\ \quad\quad\quad\quad\quad -3n & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Egemplo II.

$$\begin{array}{l|l} \text{A.}\ 2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4 & \text{B.}\ 2a^2 - 3ab + 4b^2\ \textit{Div.} \\ \hline \text{C}\ -2a^4 + 3a^3b - 4a^2b^2 & a^2 - 5ab + 6b^2\ \textit{Coc.} \\ \cline{1-1} \quad \text{D}\ldots -10a^3b + 27a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4 & \\ \quad \text{E}\ldots +10a^3b - 15a^2b^2 + 20ab^3 & \\ \cline{1-1} \quad\quad \text{F}\ldots +12a^2b^2 - 18ab^3 + 24b^4 & \\ \quad\quad \text{G}\ldots -12a^2b^2 + 18ab^3 - 24b^4 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Egemplo III.

$$
\begin{array}{r|l}
\textit{Dividendo}\ x^4 - z^4 & x - z\ \textit{Divisor} \\ \cline{2-2}
-x^4 + x^3z & x^3 - x^2z + xz^2 - z^3 \\ \cline{1-1}
x^3z - z^4 & \\
-x^3z + x^2z^2 & \\ \cline{1-1}
x^2z^2 - z^4 & \\
-x^2z^2 + xz^3 & \\ \cline{1-1}
xz^3 - z^4 & \\
-xz^3 + z^4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Egemplo IV.

$$
\begin{array}{r|l}
\textit{Dividendo} \ldots 1 & 1 - a\ \textit{Divisor} \\ \cline{2-2}
-1 + a & 1 + a + a^2 + a^3 + \&c. \\ \cline{1-1}
a & \\
-a + a^2 & \\ \cline{1-1}
a^2 & \\
-a^2 + a^3 & \\ \cline{1-1}
a^3\ \&c. & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

95 En la division de los polinomios se observa el mismo orden que en la de los números. Para dividir por B la cantidad A del 2.° egemplo, diré; $2a^4$ partido por $2a^2$ es reduciendo, a^2 que pondré en el cociente; multiplico por él el divisor, y mudando los

signos al producto C para restarle del dividendo, tendré reduciendo los términos semejantes, el residuo D; que prosigo partiendo asi: $-10a^3b$ partido por $2a^2$ es reduciendo $-5ab$, que pongo tambien en el cociente; multiplico por él el divisor, resto el producto E de D, y reduciendo D y E tendré de diferencia F: que dividiré últimamente, diciendo, $12a^2b^2$ partido por $2a^2$ es $6b^2$, por quien multiplicaré el divisor, y restando su producto G de F resulta cero y $a^2-5ab+6b^2$ de cociente.

En el 3.ᵉʳ egemplo se parte x^4 por x, se multiplica el cociente x^3 por el divisor y restando su producto del dividendo, resulta $x^4-z^4-x^4+x^3z$ que se reduce á x^3z-z^4, que se continúa partiendo del mismo modo. Las cantidades del 4.° egemplo no tienen cociente exâcto y se puede continuar su division hasta el infinito.

96 Para facilitar la division de los polinomios se ordenan dividendo y divisor con relacion á qualquiera letra que se halle en todos ó los mas de sus términos, escribiendo primero en ambos aquel que contenga el mayor exponente de dicha letra, despues el que contenga el mayor exponente de los que queden, y asi de los demas. En las cantidades A y B del 2.° egemplo, ordenadas respecto de la letra a, se halla a^4 en el 1.ᵉʳ termino del di-

videndo; en el 2.° a^3, en el 3.° a^2 &c. el primero del divisor tiene a^2 y el segundo a. Los términos en donde se halle la letra con un mismo exponente se ordenan con respecto á otra letra.

Quebrados literales.

97 Los quebrados literales se calculan por las mismas reglas que los numéricos. Una cantidad qualquiera a por egemplo, se reduce á $\frac{2a}{2}$ multiplicándola por el denominador 2 (42): si se multiplica por m se reduce á $\frac{am}{m}$: y á $\frac{abc}{bc}$, $\frac{ab+ad}{b+d}$ multiplicando por bc y por $b+d$. Luego si á todos estos quebrados se quitan las letras comunes á su numerador y denominador se reducirán á a: $\frac{am}{m}$ es a quitando m comun, y $\frac{ab+ad}{b+d}=\frac{a(b+d)}{b+d}=a$, quitando de ambos términos $b+d$.

98 Un entero con un quebrado $b+\frac{a}{2}$ se reduce multiplicando b por 2 (42), á $\frac{2b+a}{2}$: $\frac{3a^2}{m}-1$ es multiplicando -1 por m, $\frac{3a^2-m}{m}$: y $3a+\frac{cd}{b-c}$ equivale á $\frac{3ab-3ac+cd}{b-c}$ multi-

plicando $3a$ por $t—c$. Al contrario, $\frac{ac—b}{c}$ se reduce dividiendo por c el numerador, á $a—\frac{b}{c}$: y $\frac{2cd—2d^2—a+b}{c—d}$ es, partiendo por $c—d$, $2d—\frac{a+b}{c—d}$.

99 Los quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{2}$, $\frac{dt}{b^2}$ se reducen á un mismo denominador multiplicando a y b por el producto $2b^2$ de los otros denominadores: c y 2 por b^3: dt y b^2 por $2b$: y saldrá $\frac{2ab^2}{2b^3}$, $\frac{b^3c}{2b^3}$, $\frac{2bdt}{2b^3}$: $\frac{a—b}{1+t}$ y $\frac{3—c^2d}{a+b}$ se reducen multiplicando por $a+b$ los términos del primer quebrado, y por $1+t$ los del segundo, á $\frac{a^2—b^2}{a+b+at+bt}$ y $\frac{3+3t—c^2d—c^2dt}{a+b+at+bt}$. Los quebrados $\frac{3a}{nt}$, $\frac{b}{cn}$ que tienen un factor comun n en sus denominadores, se reducen á $\frac{3ac}{cnt}$, $\frac{bt}{cnt}$ de un mismo denominador, solo con multiplicar los dos términos del 1.^r quebrado por c y los del 2.° por t.

100 La suma de $\frac{4ab}{5}$ y $\frac{ab}{4}$ es, reduciéndolos á $\frac{16ab}{20}$ y $\frac{5ab}{20}$ de un mismo denominador, sumando sus numeradores y poniendo

á la suma el denominador comun, $\frac{21ab}{20} = ab + \frac{ab}{20}$. Del mismo modo se encuentra la de $\frac{3ax}{4m^2}$ y $\frac{4c^2}{x}$, que es $\frac{3ax^2+16c.m^2}{4m^2x}$: y la de $\frac{ab}{z}$ y 1 que es $\frac{ab+z}{z}$.

101 Si se restan los numeradores de $\frac{4ab}{5}$ y $\frac{ab}{4}$ despues de hacerlos de un mismo denominador, y se pone á la diferencia el denominador comun, será $\frac{11ab}{20}$ la diferencia: la de $\frac{3cd}{4b^2}$ y $\frac{5}{2b}$ ó de $\frac{6bcd}{8b^3}$ y $\frac{20b^2}{8b^3}$, es $\frac{6bcd-20b^2}{8b^3} = \frac{3cd-10b}{4b^2}$; y la de $\frac{ab}{z}$ y 1 es $\frac{ab-z}{z}$.

102 El producto de $\frac{3c}{b^2} \times \frac{4d^2}{c}$ es, multiplicando numeradores y denominadores, $\frac{12cd^2}{b^2c} = \frac{12d^2}{b^2}$: el de $\left(\frac{3a^2-b}{c^2-1}\right) \times \frac{2}{5}$ es $\frac{6a^2-2b}{5c^2-5}$: y el de $3b \times \frac{cd}{4a^2}$ es $\frac{3bcd}{4a^2}$ multiplicando $3b$ por el numerador.

103 Ultimamente, multiplicando en cruz

los términos de los quebrados $\frac{ab}{m}$ y $\frac{cd}{3}$, saldrá su cociente $\frac{3ab}{cdm}$: el de $\frac{2-a}{c}$ partido por $\frac{3}{c-b}$, es $\frac{2c-2b-ac+ab}{3c}$: el de $\frac{7x^2-c}{a-b}$ dividido por $6h$, es $\frac{7x^2-c}{6ah-6bh}$, multiplicando $a-b$ por $6h$: y el de $4m^2$ partido por $\frac{3}{4}$ será $\frac{16m^2}{3}=5m^2+\frac{m^2}{3}$.

$$
\begin{array}{l|l}
a \ldots \textit{Dividendo} & b+d \ \textit{Divisor} \\
\hline
-a-\frac{ad}{b} & \frac{a}{b}-\frac{ad}{b^2}+\frac{ad^2}{b^3}-\frac{ad^3}{b^4} \\
\overline{\quad -\frac{ad}{b}} & \\
\quad +\frac{ad}{b}+\frac{ad^2}{b^2} & \\
\overline{\qquad \frac{ad^2}{b^2} \ \&c.} &
\end{array}
$$

104 Para mayor egercicio de estas reglas conviene dividir cantidades cuyo cociente es infinito, y se compone de quebrados, como la del presente egemplo en el que despues de haber sacado el primer término del cociente $\frac{a}{b}$, y multiplicado por él el divisor, se resta del dividendo a su producto $a+\frac{ad}{b}$. El

residuo es $-\frac{ad}{b}$, que divididido por b, da $-\frac{ab}{b^2}$, 2.° término del cociente, con el que se practíca lo que con el antecedente, continuando la operacion hasta conocer el orden que guardan dichos términos: en el presente caso cada uno se forma del anterior multiplicado por $\frac{d}{b}$.

Formacion de las Potencias y extraccion de las Raices.

105 Si una cantidad qualquiera a se multiplica por sí, el producto $a \times a = a^2$, se llama *cuadrado*, ó potencia segunda de a: (podremos llamar potencia primera al producto de $a \times 1$ que es la misma a). Si el cuadrado a^2 se multiplica por a, su producto $a^2 \times a = a^3$ se llama *cubo* ó potencia tercera de a. Si se vuelve á multiplicar por a el cubo a^3, resulta $a^3 \times a = a^4$, potencia quarta de a: a^4 multiplicado por a da su potencia quinta a^5: y $a^5 \times a$ da a^6, su potencia sesta: a^7 es la séptima de a... a^m su potencia m, y a^{2t} su potencia $2t$. Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.... m, $2t$ expresan el grado de la potencia, y se llaman *sus esponentes*: 2 del cuadrado, 3 del cubo, m de la potencia m...

Asimismo 7×7 da 49 cuadrado de 7: 49×7 produce su cubo 343: $343\times7=2401$ es su quarta potencia. Ultimamente, multiplicando $3b^2c$ por $3b^2c$ se tendrá su cuadrado $9b^4c^2$; este multiplicado por $3b^2c$ produce su cubo $9b^4c^2\times3b^2c=27b^6c^3$; y $27b^6c^3\times3b^2c=81b^8c^4$ es su potencia quarta.

106 La cantidad a que sirvió de multiplicador, se llama *raiz*, cuadrada de a, cúbica de a^3, quarta de a^4.... y raiz m de a^m: y los números 2, 3, 4....m expresan el grado de la raiz. Tambien 7 es raiz cuadrada de 49, cúbica de 343, quarta de 2401: $3b^2c$ es raiz cuadrada de $9b^4c^2$, cúbica de $27b^6c^3$ &c.

107 Tendremos pues, que una cantidad se sube al cuadrado multiplicándola por sí una vez; se sube al cubo multiplicando dos veces por la cantidad; á la quarta potencia multiplicando tres veces... y en general se sube qualquier cantidad á qualquier potencia „multiplicando por la cantidad tantas veces menos una como unidades tiene el exponente de la potencia."

108 Como en el cuadrado de un monomio qualquiera b^2 es b dos veces factor, en el cubo b^3 tres veces, en su potencia quarta b^4 quatro, y en su potencia m que es a^m, m de veces; se podrán elevar mas facilmente á sus potencias las cantidades monomias *mul-*

tiplicando sus exponentes por los de las potencias, elevando los coeficientes por la regla general (107).

109 Quando los monomios son positivos lo son tambien todas sus potencias, y se les pone el signo $+$; pero si son negativos serán positivas sus potencias pares 2.ª 4.ª 6.ª 8.ª.... 2^{ma}, y negativas las impares 3.ª 5.ª 7.ª 9.ª.... 3^{ma}: y asi se les ha de dar el signo $-$: como se colige de la regla de la multiplicacion.

El cuadrado de ab^2 es $a^{1\times2}b^{2\times2}=a^2b^4$: el cubo de $-3c^2d$ es $-3\times-3\times-3\times c^{2\times3}d^{1\times3}=-27c^6d^3$, la quinta potencia de $2b^3dt^2$ es $32b^{3\times5}d^{1\times5}t^{2\times5}=32b^{15}d^5t^{10}$; y generalmente la potencia m de tc^2 es $t^{1\times m}c^{2\times m}=t^mc^{2m}$.

110 Los quebrados se elevan á sus potencias subiendo á ellas por las reglas dadas su numerador y denominador. El quadrado de $\frac{7}{9}$ es $\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{49}{81}$: la quarta potencia de $\frac{3}{5}$ es $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{81}{625}$; el cubo de $\frac{2ab^3}{3m^2}$ es $\frac{8a^3b^9}{27m^6}$: y la potencia n de $\frac{ab^2}{c^3}$ es $\frac{a^nb^{2n}}{c^{3n}}$.

111 Luego para sacar la raiz de una potencia qualquiera monomia *se dividirá el esponente de la cantidad por el de la raiz*; esto es, *por el número que expresa su grado.*

112 En los quebrados se saca la raiz de sus dos términos; y si la cantidad tiene coeficiente, se saca de él la raiz por las reglas que daremos despues.

De a^2b^4 por egemplo, se extraerá la raiz cuadrada dividiendo los esponentes 2 y 4 por el del cuadrado que es 2, y se tendrá $a^{\frac{2}{2}}\, b^{\frac{4}{2}} = ab^2$: la raiz cúbica de $\frac{8a^3b^6}{c^3}$ es, sacando la de 8 que es 2, y dividiendo los esponentes 3 y 6 por el de la potencia 3, $\frac{2a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}}{c^{\frac{3}{3}}} = \frac{2ab^2}{c}$: la raiz quarta de $\frac{b^4}{16}$ es $\frac{b}{2}$: y la raiz m de $\frac{a^m b^{2m}}{c^{3m}}$ es $\frac{ab^2}{c^3}$.

113 Se pone el signo + á la raiz de la potencia positiva si es impar; pero si es par se le dan á la raiz los dos signos $\pm$; pues una potencia par positiva a^2 ó vendrá de $a \times a$, ó de $-a \times -a$ que ambos producen a^2. Si es impar y negativa la potencia se pone á la raiz el signo $-$. La raiz par de una potencia negativa es imposible; pues toda potencia par es positiva. Todo esto se colige de las reglas de la multiplicacion de los signos.

114 Quando dividiendo el esponente de la cantidad por el de la raiz no resulta cociente exâcto, como sucede sacando la raiz cúbica de b^5 que es $b^{\frac{5}{3}}$; se deja en fraccion el esponente, y representa una raiz que está por sacar: b^5 se llama cubo imperfecto, por-

que no hay raiz que multiplicada por sí dos veces produzca b^5 : 3 es cuadrado imperfecto, porque no hay cantidad que multiplicada por sí produzca 3. Estas raices que se llaman *irracionales*, se suelen expresar poniendo las potencias bajo del signo $\sqrt{}$, que se llama *radical*, y entre sus palos el número que indique el grado de la raiz. $\sqrt[2]{3}$ ó $\sqrt{3}$ representa la *raiz cuadrada de* 3; $\sqrt[3]{b^5}$, *la raiz cúbica de* b^5; $\sqrt[4]{\frac{cd^2}{3a^3}}$ expresa la raiz quarta de $\frac{cd^2}{3a^3}$: y en general $\sqrt[m]{\frac{a^n}{b^t}}$ la raiz m de $\frac{a^n}{b^t}$.

115 Tendremos pues, que la raiz n de a^m podrá expresarse de una de estas dos maneras $a^{\frac{m}{n}}$ ó $\sqrt[n]{a^m}$: y diremos en general, *que una cantidad con un esponente fraccionario, equivale á un radical cuyo esponente es el denominador del quebrado, y el numerador esponente de la cantidad.* De suerte que $a^{\frac{1}{3}}$ será lo mismo que $\sqrt[3]{a}$, $b^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{b^3}$, $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^3b^5}$. Al contrario, $\sqrt[4]{cd^3} = c^{\frac{1}{4}}d^{\frac{3}{4}}$: $\sqrt[n]{\frac{a^t}{b^r}}$ $= \frac{a^{\frac{t}{n}}}{b^{\frac{r}{n}}}$.

116 Los polinomios se elevan á sus po-

tencias por la regla general (107). Por egemplo, si se multiplica $a+b$ por $a+b$, resultará su cuadrado $a^2+2ab+b^2$: este multiplicado por $a+b$ dará su cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$: este vuelto á multiplicar por $a+b$ da su quarta potencia $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ &c. Si se multiplica $2cd^2-\frac{3}{5}+am^2$ por sí, dará su cuadrado $4c^2d^4-\frac{6cd^2}{5}+\frac{9}{25}+4acd^2m^2-\frac{6am^2}{5}+a^2m^4$. Muchas veces que no son necesarios los términos de las potencias, nos contentamos con indicarlas: $(a+b)^2$ representa el cuadrado de $a+b$: $(a+b)^3$ su cubo: $(d^2-b)^4$ la quarta potencia de d^2-b.... $(d^2-b)^m$ su potencia m.

117 Las potencias de $a+b$ que acabamos de sacar por la regla general nos pueden servir para facilitar esta práctica, que es bastante molesta especialmente en las cantidades de muchos términos. Con efecto, el cuadrado de qualquiera cantidad algébrica ó numérica, monomia ó polinomia, con quebrados ó sin ellos, debe constar de los mismos términos que el de la cantidad general $a+b$, que puede representarlas todas. Consideremos pues, este binomio dividido en dos partes, a primera y b segunda, y veremos que su cuadrado $a^2+2ab+b^2$ se compone de a^2 *cuadrado de la primera parte*, 2ab *duplo de la primera*

a *multiplicado por la segunda* b, *y de* b^2 *cuadrado de la segunda* b. Luego si dividimos qualquier cantidad $3bc+nt$ en dos partes, $3bc$ primera y nt segunda, tendremos su cuadrado $9b^2c^2+6bcnt+n^2t^2$, sin multiplicarla por sí, sacando el cuadrado de la 1.ª $3bc$ que es $9b^2c^2$; despues el duplo de la 1.ª $3bc$ por la 2.ª nt que es $2\times3bc\times nt=6bcnt$; y por último el cuadrado n^2t^2 de la 2.ª nt. Quando el signo de una de las partes es + y el otro —, sale negativo el 2.° término del cuadrado: como se ve en el de $\frac{5a}{b}-r$, que es $\frac{25a^2}{b^2}-\frac{10ar}{b}+r^2$.

Para sacar el cuadrado del trinomio $cd+m-\frac{1}{2}$, se le divide en las dos partes $cd+m$ 1.ª y $-\frac{1}{2}$ 2.ª, y será su 1.ᵉʳ término $(cd+m)^2$, esto es $c^2d^2+2cdm+m^2$: el 2.° $2\times(cd+m)\times-\frac{1}{2}$, que se reduce á $-cd-m$: y el 3.° $(-\frac{1}{2})^2$, que es $\frac{1}{4}$: luego todo el cuadrado será $c^2d^2+2cdm+m^2-cd-m+\frac{1}{4}$. Con igual facilidad se saca el cuadrado de una cantidad que tenga quatro, cinco ó mas términos, dividiéndola en dos partes, de las que convendrá sea el último la 2.ª parte, y todos los demas 1.ª procediendo despues como se ha visto en el antecedente egemplo.

118. Luego si se nos pidiese la raiz cuadrada de $a^2+2ab+b^2$ cuadrado general, de-

biendo ser su 1.ʳ término a^2, cuadrado de la 1.ª parte de la raiz, será esta a, raiz cuadrada de a^2. En el 2.° término $2ab$ que se presenta quitado el 1.° a^2, debe encontrarse la 2.ª parte multiplicada por el duplo de la 1.ª: luego si dicho 2.° término $2ab$ se parte por $2a$, duplo de la 1.ª parte a, el cociente b será la 2.ª parte de la raiz, con tal que haya ademas en la cantidad propuesta el cuadrado b^2 de esta 2.ª parte, como con efecto le hay: luego $a+b$ es la raiz que se pide.

Si se hubiese pedido la raiz de la cantidad $a^2+2ab+b^2+2ac+2cb+c^2$; sacada la raiz $a+b$ de $a^2+2ab+b^2$ que consideraremos como primer término del cuadrado, se dividirá el 2.° $2ac+2bc$ por el duplo $2a+2b$ de la raiz hallada, y el cociente c es la 2.ª parte; pues se encuentra ademas el 3.ʳ término c^2 cuadrado de c.

119 Luego en general, para extraer la raiz cuadrada de qualquier cantidad polinomia ordenada: 1.° *se saca la raiz cuadrada de su primer término, se pone á parte y se resta su cuadrado de la cantidad.* 2.° *se divide el residuo por el duplo de la raiz hallada, que es la 1.ª parte, y el cociente será la 2.ª y se concluye restando de la cantidad el producto del divisor por el cociente y el cuadrado de dicho cociente.* 3.° *si sobra algo se volverá á partir por el duplo de las dos par-*

tes halladas, que se toman por 1.ª, *restando del dividendo el producto del cociente que resulte por el divisor, junto con el cuadrado de dicho cociente: y asi se continúa si vuelve á sobrar.*

Veanse practicadas estas reglas en el siguiente egemplo en donde para sacar la raiz

..$x^4-2bx^3+b^2x^2-2a^2x^2+2a^2bx+a^4$	x^2-bx-a^2 *Raiz*
$-x^4$	$2x^2$ 1.er *Divis.*
..$-2bx^3+b^2x^2-2a^2x^2+2a^2bx+a^4$	$-bx$ *Cociente*
$+2bx^3-b^2x^2$	
C..$-2a^2x^2+2a^2bx+a^4$	$2x^2-2bx$ 2.° *Div.*
$+2a^2x^2-2a^2bx-a^4$	$-a^2$ *Cociente.*
0	

cuadrada de la cantidad A, se saca de su primer término x^4, y $x^{\frac{4}{2}}=x^2$ que resulta, será su 1.ª parte, que se pone á un lado y su cuadrado x^4 se resta de la cantidad. El residuo B se parte por $2x^2$ duplo de la 1.ª parte hallada, y $-bx$ que sale de cociente, es la 2.ª parte de la raiz. Multiplíquese este cociente por el divisor, y el producto $-2bx^3$ junto con el cuadrado b^2x^2 de dicho cociente réstese de la cantidad.

De la resta resulta el residuo C que se divide por $2x^2-2bx$, duplo de x^2-bx que se toma ahora por 1.ª parte: despues se multiplica el cociente $-a^2$ por el divisor, y se resta el producto $2a^2x^2-2a^2bx$, añadido del cuadrado a^4 del mismo cociente, de la cantidad C; y pues que nada sobra, concluyo que x^2-bx-a^2 es la raiz cuadrada de la cantidad A. Si quiero certificarme de que es así, subo esta raiz al cuadrado y me resultará dicha cantidad A.

120 Por estas mismas reglas se extrae la raiz en los números; pero se necesita tener bien sabidos los siguientes cuadrados de los números primeros.

Raices...	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9	10.	11.	12.	&c
Cuad.^{dos}	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.	121.	144.	&c.

En ellos se ve 1.° que ningun número cuya última cifra sea 2, 3, 7, 8 podrá ser cuadrado perfecto: lo 2.° que el cuadrado de los números de una cifra ó que anteceden á 10, no puede llegar á 100, es decir, no puede pasar de dos cifras: los cuadrados de los números de dos cifras, que son los que anteceden á 100, no pueden llegar á su cuadrado 10000, ó no pueden tener mas que quatro cifras..... En general, ningun cuadrado puede tener mas cifras que el duplo de las que conste su raiz, aunque podrá tener menos como se ve en 4, 169, 10201, cuadrados de

2, 13, 101. De consiguiente si comenzando por la derecha se divide un cuadrado de dos en dos cifras, el número de divisiones será el de las cifras que ha de tener la raiz: la 1.ª division tiene una cifra quando es impar el número de las que hay en el cuadrado.

121 Todo constará de los egemplos: en los que se baja una division cada vez que se ha de partir, no contando en la particion con la última de las dos cifras, que se reserva para restar de ella el cuadrado de la 2.ª parte de la raiz: advirtiendo ademas que quando el divisor no cabe en el dividendo, se pone cero en la raiz y se bajan las dos cifras que se siguen.

Egemplo I.

33,64	58 *Raiz*
25	
864	10 *Divisor*
80	8 *Cociente*
64	
64	
0	

Para sacar la raiz cuadrada del núm.° 3364 que dividiré de dos en dos notas, comenzando por la derecha, saco de la 1.ª division 33 la raiz cuadrada que es 5, contentándome con la próxîma menor porque no la tiene exâcta; póngola á parte, y restando su cuadrado 25 de 33, me quedan 8 de residuo. A 8 se junta la division inmediata 64, se toma de 864 que componen, el 86 por dividendo, y debiendo ser 10, duplo de la 1.ª parte hallada el divisor, saldrá de cociente 8. Multiplico por él el divisor, y resto el producto 80 del dividendo, y restando por último de 64 que quedan, el cuadrado 64 del cociente 8, me resultará cero, y será 58 la raiz cuadrada de 3364. En prueba de lo qual 58 subido al cuadrado produce $58 \times 58 = 3364$.

33,64	58
25	
864	108
864	8
0	

122 Hemos restado primero el producto 80 del divisor por el cociente, y despues su cuadrado 64, porque no se confundiese su valor juntándolos, que por el diverso lugar que deben ocupar, no compone la suma $80+64=144$ sino 864. Por tanto para abreviar la operacion, convendrá siempre juntar el cociente al divisor y sacar de una vez los dos productos; pues multiplicando 8 por 8 saldrá su cuadrado y 8 por 10 dará el producto del cociente por el divisor.

En el 2.° egemplo, sacada de 8 la raiz, restado su cuadrado 4 de 8, y bajada la division 45, se partirá 44 entre 4 duplo de 2; se juntará al divisor el 9 que sale de cociente, y multiplicando por él 49 que componen, *Egemplo II.*

8,45,64,64	2908 *Raiz*
4	
44,5	49 1.r *Divisor*
441	9
0046,46,4	5808 2° *Divisor*
46464	8
00000	

se restará el producto 441 de 445. Puesto el 9 en la raiz, se junta la segunda division 64 al residuo 4, y como en el dividendo 46 no cabe el divisor 58, duplo de 29 raiz hallada, se pondrá cero en la raiz, y se bajará la última division 64. Divídase 4646 entre 580, duplo de 290 que se toma por 1.ª parte; júntese el cociente 8 al divisor 580, y multiplicando 5808 por 8, y restando su producto de 46464, se tendrá cero de residuo, y será 2908 raiz cuadrada de 8456464. En efecto, $2908 \times 2908 = 8456464$.

123 Si concluida la operacion con los dos últimos guarismos, resulta algun residuo, es prueba de que el número propuesto es cuadrado imperfecto, y de consiguiente no tiene raiz exâcta. Para sacarla tan próxîma como se quiera, se añaden dos ceros á la

resta y á las demas que vayan resultando, y serán decimales las cifras que salgan de la operacion, que es la misma en cada dos ceros que en cada dos de los números anteriores.

Egemplo III.

29,41,99,84	5424,019
25	
441	104 1.r *Divisor*
416	4
2599	1082 2.°
2164	2
43584	10844 3.°
43376	4
2080,00,0	1084801 4.° y 5.°
1084801	1
9951990,0	10848029 6.°
97632261	9
1887639 &c.	

Despues de haber encontrado en el 3.r egemplo 5424 raiz próxîma del número propuesto, añadiré dos ceros á 208 que sobran, y duplicando á 5424 tendré 10848 por 4.° divisor: el dividendo correspondiente es 2080, el cociente cero que debe ser la primera de las notas decimales. Añado á 20800 otros dos ceros, y tendré que dividir 208000 entre 108480: pongo en la raiz el cociente 1, 2.ª nota decimal; júntolo al divisor, y hecha la multiplicacion y resta, añadiré al residuo 995199 otros dos ceros: divido despues 5951990 por el duplo de la raiz hallada, y poniendo en el 3.ʳ lugar de decimales el cociente 9, continuaré si es menester, la operacion que es infinita.

124 Quando el numerador y denominador de un quebrado son cuadrados perfectos, se saca de dichos términos la raiz, y se tiene la del quebrado. Sacando la raiz cuadrada 4 de 16, y la de 49 que es 7, se tendrá la de $\frac{16}{49}$ que es $\frac{4}{7}$: la de $\frac{9}{25}$ es $\frac{3}{5}$: la de $\frac{a^2}{b^2}$ es $\frac{a}{b}$: la de $\frac{c^4}{4b^6}$ es $\frac{c^2}{2b^3}$: y la de $\frac{25a^2b^6}{81c^2d^4}$ es $\frac{5ab^3}{9cd^2}$.

125 En los números, si solo el denominador es cuadrado perfecto, como sucede en $\frac{3}{9}$, se saca en decimales la raiz próxîma 1,732 del numerador 3 por las reglas precedentes, y dividiéndola por 3 raiz exâcta del denominador, se tendrá $\frac{1,732}{3}=0,577$, raiz próxîma del quebrado. Para hacer que el denominador sea cuadrado perfecto sino lo es, se multiplican los dos términos del quebrado por dicho denominador. Si se pide la raiz

próxîma de $\frac{5}{6}$, le reduciré antes á $\frac{5\times6}{6\times6}$ ó $\frac{30}{36}$; sacaré despues la raiz próxîma de 30 que es 5,477, la dividiré por 6, raiz exâcta de 36, y tendré 0,913 raiz próxîma de $\frac{5}{6}$.

126 Si se pidiese la raiz cuadrada de un entero y un quebrado, $5\frac{1}{4}$ por egemplo, se convertirá en $\frac{21}{4}$, y se sacará despues dicha raiz como acabamos de decir. Pero será mejor reducir $5\frac{1}{4}$ á la cantidad decimal 5,250000, á la que se han añadido quatro ceros para sacar por las reglas dadas su raiz próxîma 2,291 con tres cifras decimales.

127 Vengamos ya á la potencia cúbica, cuya formacion se ha de facilitar por medio del cubo de $a+b$; $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, que se compone del cubo a^3 de la 1.ª parte a, de $3a^2b$ triplo del cuadrado de la 1.ª parte multiplicado por la 2.ª, de $3ab^2$ triplo de la 1.ª parte multiplicado por el cuadrado de la 2.ª y de b^3 cubo de la 2.ª Con efecto, si dado el binomio $3bc+nt$ para elevarle al cubo, considero á $3bc$ como 1.ª parte, y á nt como 2.ª; deberá ser el primer término $27b^3c^3$, cubo de $3bc$; el 2.° $27b^2c^2\times nt=$ $27b^2c^2nt$, triplo del cuadrado de $3bc$ que es $27b^2c^2$, multiplicado por la 2.ª parte nt: el 3.° $9bcn^2t^2$, triplo de la 1.ª $9bc$ multiplicado por n^2t^2 cuadrado de la 2.ª: y el 4.° n^3t^3 cubo de la 2.ª: y la potencia cúbica de $3bc$

$+nt$ será $27b^3c^3+27b^2c^2nt+9bcn^2t^2+n^3t^3$.

Para sacar el cubo del trinomio $cd+m-\frac{1}{2}$, se toma á $cd+m$ por 1.ª parte, y á $-\frac{1}{2}$ por 2.ª y procediendo como en el egemplo anterior se tendrá $(cd+m-\frac{1}{2})^3=(cd+m)^3+3\times(c^2d^2+2cdm+m^2)\times-\frac{1}{2}+3\times(cd+m)\times\frac{1}{4}+(-\frac{1}{2})^3$, que viene á ser, efectuando las operaciones indicadas, $c^3d^3+3c^2d^2m+3cdm^2+m^3-\frac{3c^2d^2}{2}-3cdm-\frac{3m^2}{2}+\frac{3cd}{4}+\frac{3m}{4}-\frac{1}{8}$. Quando la cantidad tiene mas términos, se toma siempre el último por 2.ª parte y los demas por 1.ª, y se procede del mismo modo.

128 Luego si se pidiese la raiz cúbica del cubo general $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, sacaría de su primer término a^3 cubo de la 1.ª parte, la raiz cúbica a, y esta sería la 1.ª parte de la raiz pedida. La 2.ª que es b, debo encontrarla en el 2.° término $3a^2b$, dividiéndole por $3a^2$ triplo del cuadrado de la 1.ª a encontrada. Y como ademas de estos dos términos se encuentran $3ab^2$ triplo de la 1.ª por el cuadrado de la 2.ª, y b^3 cubo de esta 2.ª, que son todos los que debe tener un cubo completo; concluyo que el dado lo es, y su raiz cúbica $a+b$.

Si se hubiese dado el cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a^2+2ab+b^2)\times c+3(a+b)\times c^2+c^3$ para extraer su raiz; sacada como acabamos de decir la de $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ que es $a+b$, tomaré este binomio por 1.ª parte, y dividiendo por $3(a^2+2ab+b^2)$ triplo de su cuadrado, los términos siguientes tendré c de cociente y 2.ª parte de la raiz; pues se encuentran despues de los términos divididos, $3(a+b)c^2$ triplo de la 1.ª multiplicado por la 2.ª y c^3 cubo de la 2.ª

129 Por consiguiente, para extraer la raiz cúbica de qualquier cantidad polinomia ordenada: 1.° *se saca la raiz cúbica de su 1.ʳ término que será la 1.ª parte, se escribe á parte y se resta su cubo de dicho 1.ʳ término.*

2.° *Se divide el residuo por el triplo del cuadrado de la 1.ª parte hallada, y el cociente será la segunda.*

3.° *Se multiplica el cociente por el divisor y el producto sumado con el triplo de la 1.ª parte multiplicado por el cuadrado de la 2.ª, y con el cubo de esta 2.ª se restan de la cantidad.*

4.° *Si sobra algo se vuelve á partir por el triplo del cuadrado de lo que haya en la raiz, que es ahora 1.ª parte, y el cociente es la nueva 2.ª parte; réstense de la cantidad los tres productos que digimos en la regla 3.ª y continuese del mismo modo si aun volviese á sobrar, y se tendrá la raiz que se busca.*

Egemplo. *Raiz*

$$
\begin{array}{l|l}
a^6+6a^5d+21a^4d^2+44a^3d^3+63a^2d^4+54ad^5+27d^6 & a^2+2ad+3d^2 \\
-a^6 & \\
\ldots\ 6a^5d+21a^4d^2+44a^3d^3+63a^2d^4+54ad^5+27d^6 & 3a^4 \textit{ Divis.} \\
\ldots -6a^5d-12a^4d^2-8a^3d^3 & 2ad \textit{ Cociente} \\
 & 3a^4+12a^3d+12a^2d^2 \\
D \ldots\ldots\ 9a^4d^2+36a^3d^3+63a^2d^4+54ad^5+27d^6 & \\
\quad -9a^4d^2-36a^3d^3-63a^2d^4-54ad^5-27d^6 & 3d^2 \textit{ Cociente}
\end{array}
$$

o

Para sacar la raiz cúbica de la cantidad A, sacaré la de su 1.r término a^6 que es a^2, póngola á parte, y resto su cubo de la cantidad. Divido el residuo B por $3a^4$, triplo del cuadrado de la 1.a parte hallada a^2, y tendré de cociente $2ad$: multiplícole por el divisor, y añadiendo al producto $6a^3d$, el triplo de la 1.a a^2 multiplicado por el cuadrado de la 2.a, que es $3\times a^2\times 4a^2d^2=12a^4d^2$, y $8a^3d^3$ cubo de la 2.a $2ad$, lo restaré de B, y tendré de residuo D: este se ha de dividir por $3a^4+12a^3d+12a^2d^2$ triplo de $a^4+4a^3d+4a^2d^2$ cuadrado de a^2+2ad que se toma por 1.a parte: el cociente es $3d^2$; con que tendré que restar por último, de D los tres productos $9a^2d^2+36a^3d^3+3a^2d^4$ del divisor por el cociente, $27a^2d^4+54ad^5$ triplo de la 1.ª a^2+2ad multiplicado por $9d^2$ cuadrado de la 2.ª $3d^2$, y $27d^6$ cubo de la 2.ª; y como nada sobra, será $a^2+2ad+3d^2$ raiz cúbica de la cantidad A. Para cuya prueba subiré dicha raiz al cubo y me saldrá A.

130 Para la extraccion de esta raiz en los números, observense los cubos de los números primeros que son. . . . .

Raiz.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	&c.
Cubos	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.	1331.	1728.	&c.

y se verá que los cubos de los números de una cifra, que son los que anteceden á 10, no pueden llegar á su cubo 1000, es decir, que no pueden llegar á quatro cifras: asimismo los cubos de los de dos cifras, ó de los que anteceden á 100, no pueden llegar á su cubo 1000000, esto es, no pueden llegar á siete cifras; y en general, que ningun número puede tener en su cubo mas que el triplo del número de cifras de que conste su raiz; y por consiguiente, si comenzando por la derecha de un cubo, se le divide de tres en tres cifras, el número de divisiones será el de las cifras que debe haber en su raiz: bien que la primer division de la izquierda podrá tener una ó dos; porque no todos los números tienen por cubo el triplo de las cifras de que constan, como se ve en

8 cubo de 2, y en 27 y 64 cubos de 3 y 4.

131 En lo demas, las reglas de la extraccion de la raiz cúbica son unas mismas para los números y para las letras, en observando lo 1.° que para cada division se baja una clase de tres números, de los que se reservan dos para restar de ellos los dos productos que se añaden al del divisor por el cociente: advirtiendo que este se escribe bajo del dividendo, el 2.° termína en la 2.ª cifra de la division, y el 3.° en la tercera 2.° que en la division no se cuenta con las dos últimas cifras. 3.° que quando el divisor no cabe en el dividendo se pone cero en la raiz y se baja otra clase.

Egemplo I.

	32,768	32 *Raiz*
	27	
	57,68	27 *Div.*
Producto del divisor por el cociente	54	2 *Coc.*
Triplo de la 1.ª p.te por el cuad.do de la 2.ª	36	
Cubo de la 2.ª	8	
	5768	
	0	

Dividase el número 32768 como se ve, para extraer de él la raiz cúbica: se saca la de 32 que por no tenerla exâcta se toma su próxîma menor 3, y restado su cubo 27 de 32, quedan 5 que con 768 que se le juntan, son 5768. De aquí se toma por dividendo á 57, y como el divisor debe ser 27, triplo de 9 cuadrado de la 1.ª parte, será 2 el cociente, y 2.ª parte de la raiz. Sumo ahora los productos $2 \times 27 = 54$ del divisor por el cociente, $3 \times 3 \times 4$ triplo de la 1.ª 3 por el cuadrado de la 2.ª 2; y 8 cubo de la 2.ª dispuestos como se dijo (131) y se ve en el egemplo, y restando su suma de 5768, tendré cero, y de consiguiente será 32 la raiz cúbica de 32768.

Egemplo II.

68,067,239,787	4083 *Raiz*
64	
40,672,39	4800 1.° y 2.° *Divisor*
38400	8 *Cociente*
7680	
512	
3917312	
1499277,87	499392 4.° *Divisor*
1498176	3 *Cociente*
11016	
27	
149927787	
0	

En el 2.° egemplo sacada la raiz cúbica 4 de 68, y restado su cubo 64 de 68, se juntan al residuo 4 los tres números 067: y porque en el dividendo 40 no cabe el divisor 48, triplo del cuadrado de la 1.ª parte 4, se pone cero en la raiz, y bajada la division siguiente 239, se parte 40672 por 4800, triplo del cuadrado de 40. Sacado el cociente 8, se resta de 4067239, 3917312 suma de los tres productos 38400 del divisor por el cociente, 7680 triplo de la 1.ª por el cuadrado de la 2.ª y 512 cubo de la 2.ª Añadiendo al residuo 149927 la última division 787 y partiendo 1499277 por 499392 triplo del cuadrado de 408, se tendrá el último cociente 3, y cero de residuo, restando la suma de los tres productos acostumbrados que muestra el egemplo. Luego la raiz que se busca es 4083: como se puede comprobar subiéndola al cubo.

132 En los cubos imperfectos en los quales sobra algo, despues de haber bajado la última clase, ya que no se pueda lograr exâcta la raiz, se aproxîma en decimales añadiendo á cada residuo tres ceros y continuando la extraccion por las mismas reglas.

Egemplo III.

```
21,790      | 27,93 Raiz
 8
137,90      | 12  1.r Divisor
 84         | 7 Cociente
 294
  343
11683
 21070,00     | 2187 2.° Divisor
 19683        |  9 Cociente
  6561
    729
 2034639
    723610,00   | 233523 3.° Div.
    700569      | 3 Cociente
       7533
         27
    70132257
     2228743 &c.
```

Asi se egecuta en el 3.r egemplo en el que despues de haber encontrado la raiz 27, añadiré tres ceros á la resta 2107, y dividiendo 21070 por 2187 triplo del cuadrado de 27, tendré 9 por cociente y 1.a cifra de decimales: resto de 2107000 los tres productos 19683, 6561, 729 del divisor por el cociente, del triplo de la 1.ª por el cuadrado de la 2.ª, y del cubo de la 2.ª y añadiendo al residuo 72361 otros tres ceros, volveré á partir 72361000 por el 3.ʳ divisor. El cociente 3 es la 2.ª cifra de decimales, con la que se practíca lo que con las demas, y se continúa si se quiere la operacion.

133 La raiz cúbica se saca de los quebrados cuyos dos términos son cubos perfectos, extrayéndola de los dos. La de $\frac{8}{27}$ es $\frac{2}{3}$ por ser 2 la de 8 y 3 la de 27: la de $\frac{64}{125}$ es $\frac{4}{5}$; la de $\frac{8a^3b^6}{216}$ es $\frac{2ab^2}{6}$. Quando en los números solo el denominador tiene raiz exâcta se saca la próxîma del numerador (132), y dividiéndola por la exâcta del denominador resulta la del quebrado. En $\frac{3}{27}$ por egemplo, se saca la raiz cúbica proxîma del numerador 3 que es 1,443, y dividiéndola por 3 raiz exâcta de 27, será la próxîma de $\frac{3}{27}$, $\frac{1,443}{3} = 0,481$. Para hacer al denominador cubo perfecto quando no lo es, se multiplican los dos términos del quebrado por el cuadrado del denominador: $\frac{2}{3}$ por egemplo, se reduce á $\frac{2\times9}{3\times9}=\frac{18}{27}$, cuyo denominador 27 es cubo perfecto.

134 Si se pidiese la raiz cúbica de un en-

tero y quebrado, $6\frac{3}{8}$ por egemplo, se reducirá á $\frac{51}{8}$, y sacando la raiz próxîma de 51, y la exâcta de 8, será la de $6\frac{3}{8}$, $\frac{3,715}{2}=1,857$. Pero es mas facil reducir $6\frac{3}{8}$ á la cantidad decimal 6,375000000, y sacar por las reglas dadas dicha raiz próxîma 1,857: cuidando de que la cantidad tenga siempre un número de cifras decimales triplo de las que se quieran en su raiz.

135 Muchas veces nos contentamos con indicar las raices imperfectas sean cuadradas, sean cúbicas, con el signo $\surd$. $\sqrt[2]{\frac{2}{5}}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{2c^2}}$ representan la raiz cuadrada de $\frac{2}{5}$, y la cúbica de $\frac{a}{2c^2}$: en la cuadrada se suele omitir el 2.

136 Del mismo modo que en el cubo y el cuadrado se facilita la formacion de la potencia 4.ª con la de $a+b$ que es $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, y que se compone de la 4.ª potencia de la 1.ª parte a, del quadruplo del cubo de la 1.ª multiplicado por la 2.ª b, del sestuplo del cuadrado de la 1.ª multiplicado por el cuadrado de la 2.ª, del quadruplo de la 1.ª multiplicado por el cubo de la 2.ª y de la 4.ª potencia de la 2.ª; dividiendo en dos partes la cantidad que se dé para elevarla á su 4.ª potencia y poniendo sucesivamente los términos que acabamos de decir.

137 Igualmente sacarémos de dicha potencia general el modo de extraer la raiz 4.ª; pues sus términos manifiestan que la 1.ª parte de la raiz debe ser la raiz 4.ª del 1.° a^4; como tambien que la 2.ª parte b, que se encuentra en el 2.° término $4a^3b$ multiplicada por el quadruplo del cubo de la 1.ª parte hallada a, se deberá buscar dividiendo por dicha cantidad $4a^3$ el residuo que quede de restar la 4.ª potencia de la 1.ª parte hallada. Y que deberán encontrarse en la cantidad para ser potencia 4.ª de $a+b$, $6a^2b^2$ sestuplo del cuadrado de la 1.ª multiplicado por el cuadrado de la 2.ª, $4ab^3$ quadruplo de la 1.ª multiplicado por el cubo de la 2.ª y b^4 4.ª potencia de la 2.ª b. Ultimamente, se prevendria en los números dividirles de quatro en quatro notas, usar de una de estas divisiones en cada operacion no contando con las tres últimas cifras para dividendo, poner cero quando este no contuviese al divisor, y todo lo demas que dejamos advertido en la extraccion de la raiz cuadrada y cúbica.

138 Si se observan los términos de las potencias anteriores, se verá que el esponente de a en el 1.r término es el que indica el grado de la potencia, y en los demas va disminuyendo de 1. El esponente de b es siempre 1 en el 2.° término, y en los siguientes

va creciendo de una unidad hasta llegar en el último al grado de la potencia; de suerte que los términos de la potencia 6.ª no contando con los coeficientes son $a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6$.

En quanto á los coeficientes, el del 1.° es siempre 1, el del 2.° es el 1.r esponente de a dividido por el 1.° de b: el del 3.° el producto de los dos primeros esponentes de a dividido por el producto de los dos primeros esponentes de b: el del 4.° el producto de los tres primeros esponentes de a dividido por el producto de los tres primeros de b; y así de los demas. Los de dicha potencia sesta por eg. serán 1, $\frac{6}{1}$, $\frac{6\times5}{1\times2}$, $\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}$, $\frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4}$, $\frac{6\times5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4\times5}$, $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=1$: y toda la potencia con letras y coeficientes será $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

139 Finalmente, si se nos pidiese una potencia general, v. gr. la potencia m de $a+b$, serían sus términos sin coeficientes $a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+a^{m-3}b^3+a^{m-4}b^4$ &c. hasta el infinito, y los coeficientes solos $\frac{m}{1}$, $\frac{m\times m-1}{1\times2}$, $\frac{m\times m-1\times m-2}{1\times2\times3}$, $\frac{m\times m-1\times m-2\times m-3}{1\times2\times3\times4}$ &c. y toda la potencia m de $a+b$ ó $(a+b)^m=a^m+\frac{m}{1}$

$a^{m-1}b + \frac{m\times m-1}{1\times 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3}a^{m-3}b^3 +$ &c. Y como $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$, $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$ &c. se podrá mudar en esta $a^m + \frac{ma^m b}{1\times a} + \frac{m\times m-1\ a^m b^2}{1\times 2\times a^2} + \frac{m\times m-1\times m-2\ a^m b^3}{1\times 2\times 3\times a^3} +$ &c.

140 Por esta fórmula que inventó el inmortal Newton, es muy facil elevar una cantidad á qualquiera potencia dividiéndola en dos partes que se igualan á *a* y *b*, suponiendo *m* la potencia que se pide, y poniendo en lugar de los términos de la fórmula los valores que les corresponden.

141 Pero su principal utilidad está en la facilidad con que se sacan por ella las raices próxîmas de las potencias imperfectas de que pondrémos algun otro egemplo en enseñando á manejar las cantidades radicales, que suelen intervenir en dichos cálculos.

Cálculo de las cantidades Radicales.

142 Quando una cantidad se ha transformado segun dejamos dicho (114) en otra igual que no tiene el signo $\sqrt{}$, se puede sumar, restar, multiplicar, partir, subir á sus potencias y extraer de ella qualquier raiz por las mismas reglas que hemos dado para las cantidades algébricas.

Y asi $\sqrt{a}$ y $\sqrt[3]{a^2}$ transformados en $a^{\frac{1}{2}}$ y $a^{\frac{2}{3}}$, suman $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{2}{3}}$: se diferencian en $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{2}}$: su producto es $a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{6}}$ sumando sus esponentes (85): su cociente es $a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}$ restando los esponentes (90): su cuadrado $a^{\frac{1}{2}\times 2}=a^{\frac{2}{2}}=a$, y $a^{\frac{2}{3}\times 2}=a^{\frac{4}{3}}$; y su raiz cúbica $a^{\frac{1}{2\times 3}}=a^{\frac{1}{6}}$, y $a^{\frac{2}{3\times 3}}=a^{\frac{2}{9}}$. La suma de $b^{\frac{t}{n}}$ y $b^{\frac{r}{m}}$ es $b^{\frac{t}{n}}+b^{\frac{r}{m}}$, su diferencia $b^{\frac{t}{n}}-b^{\frac{r}{m}}$, su producto $b^{\frac{t}{n}+\frac{r}{m}}=b^{\frac{tm+nr}{nm}}$, su cociente $b^{\frac{tm-nr}{nm}}$: su potencia h, $b^{\frac{th}{n}}$ y $b^{\frac{rh}{m}}$, y su raiz q, $b^{\frac{t}{nq}}$ y $b^{\frac{r}{mq}}$.

Tambien $a^{\frac{2}{5}}+b^{-\frac{3}{4}}$ es la suma de $a^{\frac{2}{5}}$ y $b^{-\frac{3}{4}}$: $a^{\frac{2}{5}}-b^{-\frac{3}{4}}$ su diferencia: $a^{\frac{2}{5}}b^{-\frac{3}{4}}=\frac{a^{\frac{2}{5}}}{b^{\frac{3}{4}}}$ su producto: y $\frac{a^{\frac{2}{5}}}{b^{-\frac{3}{4}}}=a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{4}}$ su cociente: su potencia p, $a^{\frac{2p}{5}}$, $b^{\frac{-3p}{4}}$; y su raiz q, $a^{\frac{2}{5q}}$, $b^{\frac{-3}{4q}}$.

143 Como los términos que forman el esponente quebrado de estas cantidades son los esponentes del radical y de las cantidades; siempre que estos puedan dividirse por un mismo número, quedará mas sencilla la cantidad radical. $\sqrt[4]{b^2}$ por eg. que es $b^{\frac{2}{4}} = b^{\frac{1}{2}}$, equivale á $\sqrt{b}$, dividiendo 4 y 2 por 2: $\sqrt[6]{a^{15}} = a^{\frac{15}{6}} = a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$, dividiendo por 3. Y por lo mismo la raiz 4.ª de a^8 se podrá sacar extrayendo dos veces la cuadrada; por ser $\sqrt[4]{a^8} = \sqrt{a^4} = a^2$: la raiz 6.ª de b^{12} sacando la cúbica y despues la cuadrada; pues $\sqrt[6]{b^{12}} = \sqrt[2]{b^4} = b^2$. En general, la extraccion de qualquier raiz se podrá dividir en las operaciones de raices inferiores que indiquen los factores de sus esponentes. La 8.ª por eg. sacando tres veces la cuadrada, ó primero la 4.ª y despues la cuadrada; por ser $8 = 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2$.

144 Asimismo, siempre que de alguno de los factores de la cantidad radical pueda extraerse la raiz, se la pondrá antes del signo $\sqrt{\ }$ á manera de coeficiente, y como tal multiplicará toda la cantidad sin haber variado su valor, y haciéndola mas sencilla. Con efecto, la cantidad $\sqrt[3]{a^3b^6c} = \sqrt[3]{c \times a^3b^6}$, sa-

cando del factor a^3b^6 la raiz cúbica ab^2, se reducirá á $ab^2\sqrt[3]{c}$; porque $\sqrt[3]{a^3b^6c}=a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}c^{\frac{1}{3}}=ab^2\sqrt[3]{c}$.

Si en $\sqrt{(m^3n+8m^2n^2+16mn^3)}$ descompongo la cantidad en los dos factores $(m^2+8mn+16n^2)\times mn$ y saco la raiz cuadrada del 1.° que es $m+4n$, y la pongo por coeficiente al radical, quedará reducido á $(m+4n)\sqrt{mn}$: (por coeficiente de un radical entendemos aquí toda cantidad que le multiplica).

$2\sqrt{\left(\frac{27a^2b^5x^2-45a^2b^4t}{4}\right)}$ que se descompone en $2\sqrt{(3bx^2-5t)}\frac{9a^2b^4}{4}$, equivale sacando de $\frac{9a^2b^4}{4}$ la raiz $\frac{3ab^2}{2}$, y multiplicándola por el coeficiente 2, á $3ab^2\sqrt{(3bx^2-5t)}$.

145 De consiguiente quando se quiera meter bajo del signo $\sqrt{}$ alguna cantidad que le anteceda como coeficiente, se deberá subir antes á la potencia que indique el radical, y multiplicar por ella despues las cantidades que haya bajo de dicho signo, ó partirlas si estaba dividiendo.

Para meter bajo del signo radical $3a$ en $3a\sqrt{bc}$, le subiré á su cuadrado $9a^2$, y multiplicándole por bc, tendré $3a\sqrt{bc}=\sqrt{9a^2bc}$. $\frac{3}{c}\sqrt[3]{\left(\frac{c-n}{d+3}\right)}$ es lo mismo que $\sqrt[3]{\left(\frac{27c-27n}{c^3d+3c^3}\right)}$.

multiplicando $\frac{c-n}{d+3}$ por $\frac{27}{c^3}$: últimamente, .. $\frac{2}{c-d}\sqrt{(a-2d)}$ equivale á $\sqrt{\left(\frac{4a-8d}{c^2-2cd+d^2}\right)}$.

146 Luego un radical $a\sqrt[n]{\frac{b}{c}}$ podrá multiplicarse ó partirse por una cantidad qualquiera m asi, $am\sqrt[n]{\frac{b}{cm^n}}$ sin variar de valor; pues $a\sqrt[n]{\frac{b}{c}}=\frac{am}{m}\sqrt[n]{\frac{b}{c}}=am\sqrt[n]{\frac{b}{cm^n}}$: y nos podremos valer de este medio para reducir á entero qualquier quebrado que esté antes ó dentro de un radical: $b\sqrt[n]{\frac{a}{c}}=b\sqrt[n]{ac^{-1}}=b\sqrt[n]{ac^{-1}\times\frac{c^n}{c^n}}=b\sqrt[n]{\frac{ac^{n-1}}{c^n}}=\frac{b}{c}\sqrt[n]{ac^{n-1}}$.

147 Si se transforman las cantidades generales $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ de diferentes esponentes en sus iguales $a^{\frac{1}{m}}$ y $b^{\frac{1}{n}}$, ó en $a^{\frac{n}{mn}}$ y $b^{\frac{m}{mn}}$ reduciendo los quebrados á un mismo denominador; se tendrá, volviéndolas al radical, $\sqrt[mn]{a^n}$, $\sqrt[mn]{b^m}$ que tienen ya un mismo esponente mn. „ Luego para reducir dos radicales „ á un mismo esponente, se han de multipli„ car los esponentes entre sí, y subir despues „ la cantidad de cada radical al esponente que „ indique el otro.“

Para reducir $\sqrt[2]{8}$ y $\sqrt[3]{5}$ á un mismo esponente; se multiplican 2 por 3, se sube el 8 al cubo, y el 5 al cuadrado y resultan $\sqrt[2\times3]{8^3}$, $\sqrt[2\times3]{5^2}$, esto es, $\sqrt[6]{512}$ y $\sqrt[6]{25}$. $\sqrt[4]{\frac{6ab}{c}}$ y $\sqrt[5]{\frac{2bc}{3a}}$ se reducen á $\sqrt[4\times5]{\left(\frac{6ab}{c}\right)^5}$ y $\sqrt[4\times5]{\left(\frac{bc}{3a}\right)^4}$, ó $\sqrt[20]{\frac{7776a^5b^5}{c^5}}$ y $\sqrt[20]{\frac{16b^4c^4}{81a^4}}$. Ultimamente $\sqrt[2]{\left(\frac{c-d}{4}\right)}$ y $\sqrt[3]{\left(\frac{2+d}{a-n}\right)}$ hechos de un mismo esponente, son $\sqrt[2\times3]{\left(\frac{c-d}{4}\right)^3}$ y $\sqrt[2\times3]{\left(\frac{2+d}{a-n}\right)^2}$ ó $\sqrt[6]{\left(\frac{c^3-3c^2d+3cd^2-d^3}{64}\right)}$ y $\sqrt[6]{\left(\frac{4+4d+d^2}{a^2-2an+n^2}\right)}$.

Quando haya tres ó mas radicales que reducir, se multiplican entre sí todos los esponentes, y se eleva la cantidad de cada radical á la potencia indicada por el producto de los esponentes de los otros: $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{\frac{bc}{2}}$ y $\sqrt[4]{\frac{x^2c}{m}}$ se reducen á $\sqrt[2\times12]{(ab)^{12}}$, $\sqrt[3\times8]{\left(\frac{bc}{2}\right)^8}$, $\sqrt[4\times6]{\left(\frac{x^2c}{m}\right)^6}$, que son $\sqrt[24]{a^{12}b^{12}}$, $\sqrt[24]{\frac{b^8c^8}{256}}$ y $\sqrt[24]{\frac{x^{12}c^6}{m^6}}$.

148 Esto supuesto, las cantidades radicales se suman „escribiéndolas con sus pro„pios signos; y se restan mudando en sus

„contrarios los signos del subtrahendo, re-
„duciendo las que haya semejantes, es de-
„cir, las de un mismo esponente, y de una
„misma cantidad bajo del signo $\sqrt{}$."

La suma de $\sqrt{(c-d)}$ y $\sqrt[3]{\frac{6b^5}{5}}$, es $\sqrt{(c-d)}+\sqrt[3]{\frac{6b^5}{5}}$: y su diferencia $\sqrt{(c-d)}-\sqrt[3]{\frac{6b^5}{5}}$: la suma de $5b\sqrt[5]{(x+a)}$ y $-4\sqrt[5]{bc^2}$, es $5b\sqrt[5]{(x+a)}-4\sqrt[5]{bc^2}$, y su diferencia $5b\sqrt[5]{(x+a)}+4\sqrt[5]{bc^2}$: la suma de $5bc^2\sqrt[3]{8}$, y $6bc^2\sqrt[3]{8}$ es reduciendo, $11bc^2\sqrt[3]{8}$: la de $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ y $\frac{3}{5}\sqrt[3]{4}$ es reduciendo tambien, $\frac{19}{15}\sqrt[3]{4}$: haciendo la misma reduccion se hallará que la diferencia de $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+b)}$ y $\frac{2}{b}\sqrt[4]{(a+b)}$ es $\frac{ab-4}{2b}\sqrt[4]{(a+b)}$. Ultimamente, la suma de $7c\sqrt{a}$ y $\sqrt{36ac^2}=6c\sqrt{a}$ (144), es $13c\sqrt{a}$: y la diferencia de $\sqrt[3]{(a^4+2a^3b)}$ y $\sqrt[3]{(8ab^3+16b^4)}$ que se reducen á $a\sqrt[3]{(a+2b)}$ y $2b\sqrt[3]{(a+2b)}$ es restando sus coeficientes, $(a-2b)\sqrt[3]{(a+2b)}$.

149 „Para multiplicar los radicales se
„hacen de un mismo esponente si no lo son,
„y se multiplican las cantidades que estan

„antes y bajo del signo $\surd$. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ se multiplica por $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$ reduciéndolos á $\frac{2}{3}\sqrt[6]{27}$ y $\frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{a^2}{9}}$ de un mismo esponente, y multiplicando despues $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{2}$ y 27 por $\frac{a^2}{9}$; de que resulta $\frac{2}{6}\sqrt[6]{\frac{27a^2}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt[6]{3a^2}$. El producto de.. $5\surd(c+d)$ por $6a\surd(c+d)$ es $30a\surd(c+d)^2=30a(c+d)$: y generalmente, el de $n\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ por $\frac{c}{d}\sqrt[m]{\frac{t}{z}}$ es $\frac{cn}{d}\sqrt[m]{\frac{at}{bz}}$. El producto de $\frac{3cd^2}{4}$ cantidad racional, por $\sqrt[3]{\left(\frac{b}{3}-d\right)}$, es...... $\frac{3cd^2}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{b}{3}-d\right)}$.

150 „Tambien se parten haciéndolos de „un mismo esponente y dividiendo despues „las cantidades que están antes y bajo del „signo $\surd$.“ De suerte que el cociente de $\frac{3}{4}\surd b$ partido por $7a\sqrt[4]{\frac{c}{d}}$ ó de $\frac{3}{4}\sqrt[8]{b^4}$ y $7a\sqrt[8]{\frac{c^2}{d^2}}$ es, dividiendo $\frac{3}{4}$ por $7a$, y b^4 por $\frac{c^2}{d^2}$, $\frac{3}{28a}\sqrt[8]{\frac{b^4d^2}{c^2}}=\frac{3}{28a}\sqrt[4]{\frac{b^2d}{c}}$. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{3(c+d)}$ partido

por $\frac{a^2}{4}\sqrt[3]{\frac{2-c}{3}}$, da $\frac{8}{3a^2}\sqrt[3]{\left(\frac{9c+9d}{2-c}\right)}$. Un radical $2c\sqrt{(t-2)}$ se divide por una cantidad racional $7b^2-n$ escribiéndolas asi $\frac{2c\sqrt{(t-2)}}{7b^2-n}$: y si el denominador se quiere meter bajo del radical se egecuta segun lo dejamos enseñado (145): $\sqrt{(c^2x^2-c^2b^2)}$ partido por $x-b$ es $\frac{\sqrt{(c^2x^2-c^2b^2)}}{x-b}=\frac{c\sqrt{(x^2-b^2)}}{x-b}=$

$$c\sqrt{\left(\frac{(x^2-b^2)}{(x-b)^2}\right)}=c\sqrt{\left(\frac{(x+b)(x-b)}{(x-b)^2}\right)}=c\sqrt{\left(\frac{x+b}{x-b}\right)}.$$

151 „Los radicales se suben á las po-„tencias, subiendo primero sus coeficientes y „dividiendo despues sus esponentes por los „de las potencias quando dan cociente exâc-„to; pues sino, es mejor subir á dichas po-„tencias las cantidades que están bajo del „signo $\sqrt{}$." El cuadrado de $\sqrt[4]{2a}$ es $\sqrt[\frac{4}{2}]{2a}=\sqrt{2a}$: el cubo de $2\sqrt[6]{\left(\frac{a-3}{2}\right)}=8\sqrt[2]{\left(\frac{a-3}{2}\right)}$; pero la potencia n de $c\sqrt[3]{ab^2}$, en lugar de escribirla asi, $c^n\sqrt[\frac{3}{n}]{ab^2}$ se representa mejor asi, $c^n\sqrt[3]{a^n b^{2n}}$.

152 „Para extraer las raices de dichas „cantidades se multiplican sus esponentes por „los de las raices, despues de haberlas sacado „de los coeficientes que las tengan exâctas, „y haber metido bajo del radical los que no. La raiz cuadrada de $9\sqrt{bc}$ es $3\sqrt[2\times2]{bc}=3\sqrt[4]{bc}$: la cúbica de $\frac{2}{5}\sqrt{(t-a)}$ que se reduce á $\sqrt{\frac{4(t-a)}{25}}$ por no tener $\frac{2}{5}$ raiz cúbica, es $\sqrt[2\times3]{\frac{4(t-a)}{25}}=\sqrt[6]{\frac{4(t-a)}{25}}$: y en general la raiz n de $\sqrt{\frac{a}{b}}$ es $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}}$.

153 El que quiera razon de las reglas que acabamos de dar, transforme las cantidades radicales en sus iguales con esponentes quebrados, y la encontrará al instante. Y adviértase que observando dichas reglas y el método que se ha seguido con las cantidades polinomias será facil calcular qualesquiera expresiones que consten de dos ó mas términos radicales.

154 Volviendo ya á la fórmula de Newton $a^m+ma^{m-1}b+\frac{m\times m-1}{1\times2}a^{m-2}b^2+$ &c. Supongamos su 1.^r^ término $a^m=A$, será el 2.° $ma^{m-1}b=\frac{ma^m b}{a}=\frac{mAb}{a}$; si este se llama

B, será el 3.° $\frac{m\times m-1a^{m-2}b^2}{1\times 2}=\frac{m\times m-1a^m b^2}{1\times 2a^2}=\frac{(m-1)Bb}{2a}$: llamando á este C, será el 4.° $\frac{m\times m-1\times m-2a^{m-3}b^3}{1\times 2\times 3}=\frac{m\times m-1\times m-2a^m b^3}{1\times 2\times 3\times a^3}=\frac{m-2Cb}{1\times 2\times 3\times a}$: y continuando de esta manera quedará la fórmula reducida á esta, mucho mas sencilla, $a^m+\frac{mAb}{a}+\frac{(m-1)Bb}{2a}+\frac{(m-2)Cb}{3a}+\frac{(m-3)Db}{4a}+\frac{(m-4)Eb}{5a}$ &c. en la que cada término se forma del anterior multiplicado por $\frac{b}{a}$ y por uno de los coeficientes m, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$ &c.

Consideremos ahora que extraer la raiz cuadrada de una cantidad, es subirla á la potencia $\frac{1}{2}$, extraer la raiz cúbica, subirla á la potencia $\frac{1}{3}$; y extraer la raiz n subirla á la potencia $\frac{1}{n}$: de consiguiente si para sacar el valor $\sqrt{(b^2+c^2)}$ ó de $(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$ supongo $b^2=a$, $c^2=b$ y $\frac{1}{2}=m$; y substituyo estos valores en la fórmula, tendré $a^m=(b^2)^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{2}{2}}=b$: $\frac{mAb}{a}=\frac{1}{2}\times b\times\frac{c^2}{b^2}=\frac{c^2}{2b}$: $\frac{(m-1)Bb}{2a}=-\frac{1}{4}\times\frac{c^2}{2b}\times$

$\frac{c^2}{b^2} = -\frac{c^4}{8b^3}$: y haciendo igual substitucion en los demas términos, resultará $\sqrt{(b^2+c^2)} = (b^2+c^2)^{\frac{1}{2}} = b + \frac{c^2}{2b} - \frac{c^4}{8b^3} + \frac{c^6}{16b^5} - \frac{5c^8}{128b^7} + \frac{256b^9}{7c^{10}}$ — &c. Del mismo modo se hallará $\sqrt{(b^2-c^2)} = (b^2-c^2)^{\frac{1}{2}} = b - \frac{c^2}{2b} - \frac{c^4}{8b^3}$ &c. Con igual facilidad se encontrará el valor $\sqrt[3]{(b^2 \pm c^2)}$, $\sqrt[4]{(b^2 \pm c^3)}$ &c. y se aplicará á la extraccion de la raiz cúbica, quarta &c. próxîma de qualquier cantidad, del modo que vamos á aplicar el valor de $\sqrt{(b^2+c^2)}$ á sacar la raiz cuadrada próxîma de 6.

Divídase en dos partes 4 y 2, de las quales la 1.ª ha de ser cuadrado perfecto, póngase en la expresion $b + \frac{c^2}{2b} - \frac{c^4}{8b^3} +$ &c. 4 en lugar de b^2, y 2 en lugar de c^2 y se tendrá $\sqrt{(b^2+c^2)} = \sqrt{(4+2)} = \sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024} +$ &c. Los dos primeros términos 2 y $\frac{1}{2}$ componen $\frac{5}{2}$ cuyo cuadrado $\frac{25}{4}$ excede á 6 en $\frac{1}{4}$: luego si se supone $\frac{25}{4} = b^2$ y $c^2 = -\frac{1}{4}$ se tendrá substituyendo estos valores en la fórmula, $\sqrt{(b^2-c^2)} = \sqrt{(\frac{25}{4} - \frac{1}{4})} = \sqrt{6} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20}$, valor muy próxîmo de $\sqrt{6}$ y que se puede aproxîmar aun mas.

Cantidades imaginarias.

155 Digimos (113) que era imposible ó *imaginaria* la raiz par de una cantidad negativa $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-ab^4}$.... porque toda raiz positiva ó negativa produce positivas todas sus potencias pares: $a\times a=a^2$, $-a\times-a=a^2$: $b\times b\times b\times b=b^4$ y $-b\times-b\times-b\times-b=b^4$. Estas que son verdaderas cantidades, pues $-a^2$ nace de $a\times-a$, $-b^4$ de $b^2\times-b^2$; ocurren con frecuencia en los cálculos para manifestar quándo es imposible una cosa, y se calculan por las mismas reglas que acabamos de dar. Pero por quanto pueden ocurrir algunas dudas quando se multiplican ó parten, añadirémos aqui algunos egemplos. $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ es $\sqrt{-a\times-a}=\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=-a$, que es de quien aquí se formó a^2. Y notese que $(-a)^2$ cuadrado de $-a$, es diferente de $-a^2=a\times-a$. $\sqrt{-b}\times\sqrt{-c}=-\sqrt{bc}$: porque $\sqrt{-b}$ es lo mismo que $\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$, y $\sqrt{-c}$ lo mismo que $\sqrt{c}\times\sqrt{-1}$: luego $\sqrt{-b}\times\sqrt{-c}$ será $\sqrt{b}\times\sqrt{c}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ ó $\sqrt{bc}\times\sqrt{(-1)^2}$ que es $-\sqrt{bc}$. Por la misma razon $\sqrt{-b}$ partido por $\sqrt{-c}$ ó $\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$ partido por $\sqrt{c}\times\sqrt{-1}$, es $\sqrt{\frac{-1\times b}{-1\times c}}=\sqrt{\frac{b}{c}}$.

Asi como la raiz cuadrada de a puede ser $\sqrt{a}$ ó $-\sqrt{a}$: pues $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$, y $-\sqrt{a}\times-\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$; asi tambien $\sqrt{-a}$

y $-\sqrt{-a}$ son raices cuadradas de $-a$; pues $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{(-a)^2}=-a$, y $-\sqrt{-a}\times -\sqrt{-a}=+\sqrt{(-a)^2}=+-a=-a$ (78). Como $\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=-\sqrt{(-a)^2}=--a=+a$, será el producto de las cantidades imaginarias una cantidad real si se multiplican en número par y tienen bajo del signo $\sqrt{}$ una misma cantidad. Esto sucede tambien quando se multiplican dos binomios que tengan una misma cantidad imaginaria con signos contrarios, como $(a-\sqrt{-b})\times(a+\sqrt{-b})$ que es $aa+a\sqrt{-b}-a\sqrt{-b}+b=a^2+b$.

Razones, Proporciones y Progresiones.

156 La comparacion de una cantidad qualquiera 8 con otra de la misma especie 12 para ver lo que la una excede á la otra, se llama *razon aritmética*; la diferencia $12-8=4$, *esponente de la razon*; el 8 que se compara, *antecedente*; y el 12 á quien se compara *consecuente*. La razon aritmética de 15 á 7, que se escribe asi, 15.7, es $15-7=8$, y la de b á d ó $b.d$, es $b-d$ ó $d-b$.

157 Como la diferencia sumada con el término menor debe componer el mayor, y restada del mayor ha de dar el menor; se tendrá en la razon 8.12, $8=12-4$, y en 15.7, $15=7+8$; luego en la razon general $a.b$, si el esponente es d, será $a=b+d$, si a

es mayor que b, y $a=b-d$ si es menor. Será pues $a=b\pm d$, es decir, que *el antecedente de qualquier razon aritmética, es igual al consecuente mas ó menos la diferencia.*

158 Las razones serán mayores, menores ó iguales segun que sean mayores, menores ó iguales sus esponentes: y como no se muda la diferencia de dos cantidades porque se añada ó quite á ambas una misma cantidad; tampoco variará el valor de las razones aritméticas el que se añada ó quite al antecedente y consecuente una misma cantidad. La razon de 5.9 es la misma que la de $5+3.9+3$; $5-3.9-3$, porque todas tienen el mismo esponense 4: y en general $a.b$ tiene la misma razon que $a\mp m.b\mp m$, cuyo esponente es en ambos casos $a-b$.

159 Quando comparamos dos razones aritméticas iguales 3.7, 5.9 diciendo de 3 á 7 hay la misma diferencia que de 5 á 9, ó 3 *es aritméticamente á 7 como 5 á 9*, formamos una *proporcion aritmética*, que se escribe asi, $3.7 : 5.9$; $a.b : c.d$ quiere decir a es á b *aritméticamente como* c *á* d. El 1.° y 4.° términos de la proporcion se llaman *extremos*, y el 2.° y 3.° *medios*. Las proporciones en las que los medios son iguales como $3.5:5.7$, $a.d:d.c$ se llaman *continuas*, y se escriben asi, $\div 3.5.7$, $\div a.b.c$; el término repetido se llama *medio aritmético proporcional.*

160 En toda proporcion aritmética *la suma de los términos extremos es siempre igual á la de los medios*: y aunque es facil verificarlo en qualquiera proporcion como en $3.7:5.9$, donde $3+9=7+5=12$, lo demostrarémos generalmente en la proporcion general $a.b:c.d$. Suponiendo que el esponente de sus dos razones sea m, será (157) $a=b\mp m$, y $c=d\mp m$; pongamos ahora en la proporcion en lugar de a y c sus iguales $b\mp m, d\mp m$, y se convertirá en esta $b\mp m.b:d\mp m.d$, en la que la suma de los extremos, y la de los medios es $b\mp m+d$.

161 Luego 1.° en la proporcion continua será la suma de los extremos igual al duplo del término medio, esto es, en $\div 3.5.7$, $3+7=2\times 5$: y en $\div a.b.c$, $a+c=2b$: y *el término medio de una proporcion aritmética continua será la mitad de la suma de los extremos*, ó $5=\frac{3+7}{2}$ y $b=\frac{a+c}{2}$. De consiguiente si dadas dos cantidades 6, 14 se me pidiese un medio aritmético para formar de las tres una proporcion continua, sumaría 6 y 14, y 10 mitad de la suma 20, será el medio, y la proporcion $\div 6.10.14$.

162 2.° „Si dados tres términos de una „proporcion aritmética, se pide el otro, si „es uno de los extremos, se restará de la „suma de los medios el otro extremo, y si

„es uno de los medios, restando el otro de „la suma de los extremos saldrá el término „que se busca.“ Si dados 3.7:8.... se nos pidiese el 4.° restarémos de $7+8=15$ el 3, y la diferencia 12 completará la proporcion que será 3.7:8.12, el 2.° 7 se hubiera sacado restando de $3+12=15$, el 3.° 8.

163 Una serie de razones aritméticas continuas ÷ 3.5:5.7:7.9:9.11:11.13 &c., ó abreviando ÷ 3.5.7.9.11.13. &c. forma una *progresion aritmética*, que es una serie de términos que restados cada uno del inmediato dan una misma diferencia. Los que median entre el 1.° y el último se llaman *medios proporcionales aritméticos*. Quando se añade sucesivamente la diferencia á cada término para formar el siguiente, van aumentando, y la progresion se llama *crescente*, como ÷ 3+2.5+2.7+2. &c. Si la diferencia se resta de cada término para formar el siguiente menguan y se llama *decrescente*, como en ÷ 20.20—3.17—3:14—3 &c. Como con solo invertir los términos se puede la decrescente hacer crescente, hablarémos de esta solamente.

164 Tendremos pues, que llamando a el 1.^{r} término de una progresion aritmética y d la diferencia, será el 2.° término $a+d$, el 3.° $a+2d$, el 4.° $a+3d$.... y el último siendo n el número de ellos, $a+(n-1)d$:

y será $\div a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d \ldots a+(n-1)d$, una progresion aritmética general. En ella se ve que el 2.° término es el 1.° y la diferencia, el 3.° el 1.° y dos diferencias, el 4.° el 1.° y tres diferencias, y qualquier término será el 1.° y tantas diferencias como términos le anteceden. Luego de una progresion cuyo 1.r término es 3 y la diferencia 2, se podrá sacar el término 10.mo tomando el primero 3 y nueve diferencias, esto es, $3+2\times9=21$. el término 20.mo será $3+19\times2=41$.

165 Si del último término de una progresion quitamos el 1.° y el residuo que son las diferencias, lo dividimos por el número de las que hay, es decir, por el número de términos de la progresion menos uno, saldrá de cociente la diferencia de los términos, como se ve en $a+(n-1)d$ último término de la progresion general, donde restando a y dividiendo $(n-1)d$ por $n-1$ resulta la diferencia d.

166 Luego si dadas dos cantidades 2 y 32 se me pidiesen cinco medíos aritméticos para formar con ellas una progresion aritmética de siete términos: restaría del último término 32 el primero 2, y dividiendo el residuo 30 por 6, número de términos de la progresion menos uno, ó número de medios que se piden mas uno, me saldria la diferencia 5, que añadida al 1.r término 2, al 2.° y á los

demas, me dará los cinco medios $2+5$, $7+5$, $12+5$, $17+5$, $22+5$; que juntos á 2 y 32 componen la progresion $\div 2.7.12.17.22.27.32$. „En general, para hallar un número „qualquiera de medios aritméticos entre dos „cantidades dadas, se resta la menor de la „mayor, y se divide el residuo por el nú„mero de medios mas uno: el cociente es la „diferencia de los términos, que añadida al „1.° da el 2.° añadida á este da el 3.° y asi „de los demas.“ Para interpolar entre 3 y 7 seis medios aritméticos, divido la diferencia 4 entre 3 y 7, por 7, número de medios mas uno, y añadiendo el cociente $\frac{4}{7}$ que es la diferencia de la progresion, á 3, y sucesivamente á los demas, tendré los seis medios $3\frac{4}{7}$, $4\frac{1}{7}$, $4\frac{5}{7}$, $5\frac{2}{7}$, $5\frac{6}{7}$, $6\frac{3}{7}$, y la progresion $\div 3.3\frac{4}{7}.4\frac{1}{7}.4\frac{5}{7}.5\frac{2}{7}.5\frac{6}{7}.6\frac{3}{7}.7$.

167 Si tomamos una progresion aritmética de qualquier número de términos v. gr. de siete, el 1.° y el 7.° componen dos primeros y seis diferencias, y lo mismo sucede al 2.° y 6.°, al 3.° y 5.° y al duplo del 4.° como se ve en la progresion general $\div a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d.a+6d$, donde cada dos términos de los dichos suman $2a+6d$. „Luego en toda progresion aritmética la su„ma de los términos extremos es igual á la „de cada dos términos igualmente distantes „de los extremos, ó al duplo del término

„medio si el número de términos es impar.“ Con efecto, en la progresion ÷3.5.7.9.11.13.15.17.... cada dos de dichos términos suman 20.

168 De aqui se infiere que todos los términos de esta progresion sumarán quatro veces 20 que son 80: y generalmente que *la suma de todos los términos de una progresion aritmética será la suma de los extremos multiplicada por la mitad del número de términos*. Para sumar los 99 términos de la progresion ÷1.2.3.4.5.... hasta 99 de los números naturales, sumaré 1 y 99, y multiplicando 100 por $\frac{99}{2}$, mitad del número de términos, tendré $\frac{9900}{2} = 4950$, suma que se busca.

El número de campanadas que da el relox en 12 horas, ó la suma de la progresion ÷1.2.3....12. es $1+12 \times \frac{12}{2} = 78$. El número de pasos que daría el que cogiese cien naranjas colocadas la 1.ª á un paso de un cesto y las otras un paso cada una de las demas, habiéndolas de hechar una á una en el cesto; esto es, la suma de la progresion ÷2.4 hasta 200, sería $(200+2) \times \frac{100}{2} = 10100$ pasos.

169 Hablemos ya de la *razon geométrica* en la que se compara una cantidad qualquiera 3 que es el *antecedente*, con un *consecuente* 12 para ver las veces que la una cabe en la otra: el cociente $\frac{12}{3} = 4$, es el *esponente*

de la razon de 3 á 12 que se escribe asi, 3:12.$a:b$ representa la razon geométrica de a á b, cuyo esponente es $\frac{b}{a}$. En qualquiera de ellas el esponente ó el cociente multiplicado por el antecedente que es el divisor, debe producir el consecuente que es el dividendo; en la razon 3:12, $3\times4=12$; y si suponemos que el esponente $\frac{b}{a}$ de la razon $a:b$ es q, será $aq=b$, y $a:b$ será lo mismo que $a:aq$.

170 Las razones se valúan por sus esponentes, de suerte que siendo estos iguales lo serán las razones: y no variando de valor un cociente porque se multipliquen ó partan el dividendo y divisor por una misma cantidad, tampoco variará el valor de una razon geométrica el que se multiplique ó parta su antecedente y consecuente por una misma cantidad. Y asi será una misma la razon de 6:18 que la de $6\times2:18\times2$, y que la de $\frac{6}{2}:\frac{18}{2}$, que tienen todas por esponente á 3. Generalmente, $a:b$, $a\times m:b\times m$, $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$ son tres razones iguales que tienen un mismo esponente $\frac{b}{a}$.

171 La razon se llama *dupla* quando el antecedente cabe dos veces en el consecuente, como la de 2:4. $3a:6a$: *tripla*, quando cabe tres veces, como la de $a.3a$: *cuádrupla*,

quando cabe quatro veces: y entonces las razones de $4:2$, $6a:3a$ se llaman *subduplas*, la de $3a:a$ *subtripla*, á la de $2:3$ llaman *sexquiáltera*. *Razon irracional* es aquella, cuyo valor no puede ser expresado en números enteros ó queb ados, como la de $\sqrt{2}:\sqrt{3}$: qualquier otra es *racional*, aun muchas que contienen inconmensurables, como la de $2\sqrt{6}:3\sqrt{6}$ cuyo esponente es $\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=\frac{3}{2}$.

172 El producto de dos ó mas razones multiplicando entre sí los antecedentes y consecuentes, se llama *razon compuesta*: $2\times5:3\times7$, ó $10:21$ es compuesta de las dos $2:3$, $5:7$. $amt:bcd$ se compone de las tres $a:b$, $m:c$, $t:d$. Si las razones componentes son iguales y son dos, la compuesta que resulta, se llama *duplicada* como $4:9$, producto de las dos iguales $2:3$, $2:3$; $3:12$ que se compone de las dos iguales $1:2$, $3:6$. La compuesta de tres razones iguales se llama *triplicada* como $48:162$, compuesta de las tres iguales $2:3$, $4:6$, $6:9$ &c. Al contrario, las razones componentes están en razon *subduplicada*, *subtriplicada*.... de sus productos. Como la razon de los cuadrados $a^2:b^2$ se compone de las dos $a:b$ $a:b$ de sus raices, la de los cubos $a^3:b^3$ de las tres $a:b$, $a:b$, $a:b$; estarán los cuadrados en razon duplicada, los cubos tri-

plicada.... de sus raices; y estas en razon subduplicada, subtriplicada de sus cuadrados y cubos.

173 La comparacion de dos razones iguales geométricas 2:3, 6:9 v. gr. forma una *proporcion geométrica*, que se escribe asi, 2:3::6:9, y quiere decir, la misma razon geométrica hay de 2 á 3 que de 6 á 9, ó *2 es á 3 geométricamente como 6 á 9*; *a*:*b*::*c*:*d* se lee asi, a *es á* b *geométricamente como* c *á* d. Tambien se llama *continua* la proporcion geométrica que tiene los medios iguales, como 2:6::6:18; *a*:*b*::*b*:*d* que se escriben asi ÷2; 6;18,... ÷*a*:*b*:*d*; y el término repetido 6 y *b* se llama *medio proporcional geométrico.*

174 *En toda proporcion geométrica es el producto de los términos extremos igual al producto de los medios.* Esta utilísima propiedad que se puede probar en qualquiera proporcion numérica 2:3::6:9, donde $2\times9=3\times6=18$; se demuestra generalmente en la proporcion *a*:*b*::*c*:*d*, suponiendo que sea *q* el esponente de las dos razones *a*:*b*, *c*:*d*, en cuyo caso será $b=aq$, y $d=cq$; ponganse *aq* y *cq* en la proporcion en lugar de *c* y *d*, y se convertirá en esta *a*:*aq*::*c*:*cq*, donde el producto de extremos y medios es *acq*.

175 En la proporcion continua es el producto de los extremos igual al cuadrado del término medio. En ÷ 2.4.8 se tiene $2\times8=$

$(4)^2=16$; y en $\div a.b.c$, $a\times c=b^2$; de consiguiente, si se saca la raiz de estas dos cantidades iguales resultará $\sqrt{a\times c}=b$, es decir: *el término medio de una proporcion geométrica es igual á la raiz cuadrada del producto de los extremos.*

176 Como cada proporcion geométrica da dos productos iguales, tambien de dos productos iguales se podrá formar una proporcion geométrica. Si de la proporcion $a:b::c:d$ sacamos $ad=bc$, tambien de $ad=bc$ sacarémos $a:b::c:d$; pero se deben disponer los factores de suerte que los del un producto formen los extremos y los del otro los medios de la proporcion. Si se tuviese por eg $3ab=am^2$, será $3a:a::m^2:b$ ó $3b:m::am:a$.... donde el producto de extremos y medios es $3ab=am^2$. De $mn-an=bd-d$ ó $(m-a)n=(b-1)d$, se saca $m-a:b-1::d:n$. De $1-a^2=b^2d$ ó $(1-a)(1+a)=b^2d$ sale $1-a:b^2d::1:1+a$: y últimamente, $a^2-b^2=1$ da la proporcion $\div a+b.1.a-b$.

177 Aqui se ve que pueden variar de sitio los términos de una proporcion, sin dejar de ser proporcionales. Si $a:b::c:d$, tambien será $a:c::b:d$, lo que se llama comparar *alternando*: ó *invirtiendo*, $b:a::d:c$; ó *componiendo*, $a+b:b::c+d:d$, $a:a+b::c:c+d$; ó *dividiendo*, $a:a-b::c:c-d$, $a-b:b::c-d:d$; ó *componiendo* y *dividiendo*, $a+b:a-b::c+d:$

$c-d$ &c. En todas estas y otras proporciones que se pueden formar, el producto de extremos y medios se reduce á $ad=bc$.

178 Si se multiplican ó parten los términos correspondientes de dos ó mas proporciones los productos ó cocientes serán tambien proporcionales. Si $a:b::c:d$ y $m:n::t:r$, será $am:bn::ct:dr$, y $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{t}:\frac{d}{r}$: porque siendo en las dos proporciones el producto de extremos y medios igual, será $ad=bc$ y $mr=nt$: luego serán tambien $admr=bcnt$, y $\frac{ad}{mr}=\frac{mr}{nt}$; y como estos son los productos de extremos y medios de $am:bn::ct:dr$, $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{t}:\frac{d}{r}$, serán proporcionales sus términos (176).

179 Dos proporciones iguales á $a:b::c:d$, hubieran dado de producto sus cuadrados $a^2:b^2::c^2:d^2$; tres, sus cubos $a^3:b^3::c^3:d^3$ &c. luego si quatro cantidades son proporcionales lo serán tambien sus cuadrados, cubos y demas potencias, y lo mismo sus raices; de suerte que si $a:b::c:d$ será generalmente $a^m:b^m::c^m:d^m$: y $a^{\frac{1}{m}}:b^{\frac{1}{m}}::c^{\frac{1}{m}}:d^{\frac{1}{m}}$ ó $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}::\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$.

180 „En qualquiera número de razones „iguales geométricas $a:b$, $c:d$, $e:f$, $g:h$ &c. „son siempre proporcionales la suma de to„dos los antecedentes á la de los consecuen-

„tes como un antecedente á su consecuente, „ó como qualquier número de antecedentes „á igual número de consecuentes.“ Siendo las razones iguales, deberán tener un mismo esponente: llamemosle q, y será (169), $b=aq$, $d=cq$, $f=eq$, $h=gq$, y las razones se mudarán en estas $a:aq$, $c:cq$, $e:eq$, $g:gq$. En las que se tiene $a+c+e+g:aq+cq+eq+gq :: a:aq :: a+c: aq+cq :: a+c+e:aq+cq+eq$: pues todas estas razones tienen un mismo esponente q.

181 Si se comparan los oficiales de una obra con los jornales que ganan, diciendo, si 3 oficiales ganan 40 rs. 6 oficiales ganarán 80 rs. la proporcion 3 *Of.* : 6 *Of.* :: 40 *rs* ;80 *rs.* en la que el 1.^{r} término es al 2.° como el 3.° al 4.° se llama *directa*; pues al paso que sea mayor ó menor el número de oficiales será mayor ó menor el de los reales: lo qual se llama *ir de mas á mas ó de menos á menos.*

182 Pero si se compara el número de oficiales con el de los dias que emplean en hacer una obra, asi, si 3 oficiales gastan 80 dias en hacer una obra, 6 oficiales tardarán en ella 40 dias; la proporcion 3 *Of* : 6 *Of.* :: 80 *d*:40 *d*, se llama *indirecta*, *inversa* ó *recíproca;* porque mientras mas oficiales hay menos dias tardarán; es decir, que va *de mas á menos* ó *de menos á mas*; y hay que mudar de sitio á uno de los términos para que la proporcion 3:6::40:80 quede directa. Di-

cese pues que los jornales estan en razon directa de los obreros, y estos en razon inversa de los dias.

183 Si se multiplican ó parten los términos de una proporcion geométrica por qualquier cantidad 2,3,4.... m, resultan productos, ó cocientes proporcionales; pues ni la multiplicacion ni la division mudan el valor de las razones (170): si fuese pues, $a:b::c:d$, será $2a:2b::2c:2d$, $3a:3b::3c:3d$.... $ma:mb::mc:md$; $\frac{a}{2}:\frac{b}{2}::\frac{c}{2}:\frac{d}{2}$, $\frac{a}{3}:\frac{b}{3}::\frac{c}{3}:\frac{d}{3}$, $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$ y qualesquiera cantidades estarán en la misma razon que sus duplos, triplos, quádruplos &c. y en la misma que sus mitades, tercios, quartos &c.

184 De esta última proposicion se infiere que *dos quebrados* $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}$ *de un mismo denominador están en la misma razon que sus numeradores;* pues dividiendo por m los términos de la razon $a:b$, resulta $a:b::\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$. Pero si los quebrados tuviesen un mismo numerador *estarán en razon inversa de los denominadores;* es decir, que el 1.^{r} quebrado es al 2.° como el 2.° denominador es al 1.° ó $\frac{a}{m}:\frac{a}{n}::n:m$. Porque la razon $\frac{a}{m}:\frac{a}{n}$ es la misma

que $\frac{an}{mn}:\frac{am}{mn}$ reduciéndola á un mismo denominador; esta es como la de sus numeradores $an:am$, y esta como $n:m$, dividiendo por a ambos términos.

185 Si dados los tres términos de una proporcion geométrica 2:9::4:.... se me pidiese el 4.° consideraré el producto de los medios 9×4 ó 36 como si fuese el de los extremos (174), y dividiéndole por 2 que es uno de ellos, tendré el otro $\frac{36}{2}=18$ que completa la proporcion 2:9::4:18. Para encontrar el 2.° dados los demas 2....::4:18 se toma el producto 2×18 de los extremos, como si fuese el de los medios, y dividiéndolo por el un medio 4, dará el otro $\frac{36}{4}=9$ que se busca. En general ,,el producto de los extremos de una ,,proporcion dividido por el un medio debe ,,dar de cociente el otro medio, y el pro- ,,ducto de los medios dividido por uno de ,,los extremos debe dar el otro extremo.“

Regla de Tres, de Trueque, de Descuento y Conjunta.

186 La práctica de esta proposicion es lo que se llama *Regla de tres* que vamos á aclarar con algunos egemplos; y para que sea mas sencilla su solucion, los reduciremos

todos á encontrar siempre el 4.° término de la proporcion, dividiendo el producto del 2.° y 3.° por el 1.°.

1.° *Un navío que ha caminado con igual viento 875 leguas en 6 dias ¿quántas caminará en 4 dias con las mismas circunstancias?* Como en menos dias se caminan menos leguas, irá la proporcion de menos á menos, y será directa: luego sus términos conocidos se colocarán asi, $6\,d : 4\,d :: 875\,leg....$ y el 4.° se encontrará multiplicando los medios 4×875, y dividiendo el producto 3500 por el 1.° 6, de que resulta $\frac{4 \times 875}{6} = \frac{3500}{6} = 583\frac{1}{3}$, número de leguas que se busca.

2.° *Si 36 V. de muro 2 P. y 3. p. cuestan 60 dob. 2 rs. y 4 mrs. ¿quánto costarán 48 V. 1 P. y 4 p.?* Como á proporcion de las varas aumenta su importe, será la proporcion directa, y los términos reduciendo los dos primeros á su menor especie, serán $1323\,p : 1744\,p :: 60$ *dob.* 2 *rs.* 4 *mrs.....* donde multiplicando el 2.° por el 3.° y partiendo el producto 104701 *dob.* 33 *rs.* 6 *mrs.* por el 1.° será el 4.° término 79 *dob.* 8 *rs.* y $12\frac{756}{1323}$ *mrs.*

3.° *¿En quantos dias abrirán 20 hombres un foso, que 16 hombres abrieron en 8 dias?* Mas hombres han de tardar menos dias; con que la proporcion será indirecta, y asi en lugar de poner 16 *hom*: 20 *h*:: 8 *dias*...... pondremos (182) 20 *h*: 16 *h*:: 8 *d*.... multiplico 16 por 8, y parto el producto 128 por 20, y tendré 6 *dias*, 9 *hor*. y 36′.

4.° *Presta A á B 100 dob. por 6 meses con condicion de hacer otro tanto B con A; pero llegando el caso, B no puede darle mas que 75 dob. se pregunta quánto mas tiempo podrá retenerlos para compensar con la tardanza el exceso de la cantidad.* Mientras menos doblones le dió mas tiempo debe tardar en volverselos; con que la proporcion es indirecta, y debe colocarse asi, 75: 100:: 6.... donde multiplicando 100 por 6, y dividiendo el producto por 75, resultan 8 meses.

5.° *En una plaza cercada que espera socorro á los 30 dias, hay solo víveres para 20 dias; y se pregunta á qué se debe reducir la racion de cada dia.* Si representamos por 1 la racion que se da á cada uno al dia, será la proporcion 20 *d*: 30 *d*:: 1..... y como la racion debe ser tanto menor quantos mas dias haya que esperar, será indirecta, y se trocará en esta 30 *d*: 20 *d*:: 1.... donde resultan $\frac{20 \times 1}{30} = \frac{2}{3}$, á que se debe reducir la racion.

187 6.° *Si una vara de paño vale en dinero 80 rs. y trocado por terciopelo 88 rs., el terciopelo que vale á 96 rs., á quánto debe subir en el trueque?* Para resolver esta

pregunta de la regla que llaman de *Barata* ó *Trueque*, haré la proporcion 80:88::96: $\frac{96 \times 88}{80}$, y tendré 105 *rs.* y 20 *mrs.* valor del rciopelo trocado.

7.° *La libra de chocolate vale en dinero 8 rs. y en trueque 8$\frac{1}{2}$ ¿á quánto ha de subir el café que vale al contado 16 rs., pagándose la 4.ª parte en dinero?* Rebajada la 4.ª parte de los dos precios 8$\frac{1}{2}$ y 8, quedan 6 *rs.* 12 *mrs.* y 6 *rs.*: despues de lo qual diré si 6 *rs.* montan á 6 *rs.* 12 *mrs.*, 16 *rs.* á quánto subirán? saco el 4.° término, y tendré 17 *rs.* y casi 4 *mrs.*

8.° *Uno vendió en 3615 pe. un género que le costó 2500 pe. ¿quánto ganó por 100?* Resto 2500 de 3615, y pues quedan 1115; diré, 2500 dió 1115, 100 qué dará? y sacaré por 4.° término 44 *rs.* y 20 *mrs.*

9.° *Un género que vale á 8 rs. la libra ¿á cómo se ha de vender para ganar 10 por 100?* Sumo 10 con 100, y digo despues, 100 dan 110, 8 qué dará? y tendré 8 *rs.* y 27 *mrs.*

188 10.° *A compra á B en géneros, importe de 1000 rs. fiados por un año, y B le ofrece descontar un 10 por 100, si se los paga de contado, se pregunta quánto debe darle.*

En esta pregunta que incluye la regla

que llaman de *Descuento*, hay que buscar una cantidad que puesta á ganancias á 10 por 100, produzca en un año 1000. Digo pues, si 100+10 ó 110 vienen de 100, 1000 de quién vendrá? esto es 110: 100 :: 1000:... $\frac{1000 \times 100}{110} = 909\frac{1}{11}$, número de reales que debe dar *A* á *B*. Si se hubiera dicho 100 quedan en 90, 1000 en quántos quedarán? hubieran salido 900; pero como 900 puestos á ganancias á 10 por 100, solo produce 990 por la proporcion 100: 10 :: 900: 990, no es esto lo que se pide.

11.° *Un mercader que pagando de contado se le rebaja 5 por 100 de 1000 rs. pagaderos dentro de un año ¿quánto deberá dar pagando á los 4 meses?* Rebajándose 5 por 100 por adelantar la paga 1 año, se rebajará $3\frac{1}{3}$ por adelantarla 8 meses haciendo, 12 *meses*: 8 :: 5: $3\frac{1}{3}$: con que si $103\frac{1}{3}$ vienen de 100, 1000 vendrán de $996\frac{204}{301}$ *rs.* que debe dar.

189 Quando en la pregunta intervienen mas términos que los quatro, se llama *Compuesta* la regla de tres, y se reduce á simple formando una razon compuesta de la multiplicacion de todas las razones (172) menos la del término incognito, despues de haber comparado con esta cada una de las demas para hacer directas las que sean indirectas.

Eg. 1.° *Si 20 homb. hacen 160 v. de obra* *en 15 dias ¿30 homb. en 12 dias quántas harán?* Comparo la 1.ª razon, diciendo: si 20 *homb.* hacen 160 *v.* 30 *h.* harán mas, y la proporcion será directa: digo despues para comparar la razon de los dias, si en 15 *d.* se hacen 160 *v.* en 12 *d.* se harán menos, y tambien será la proporcion directa: formo pues de las dos razones 20*h*: 30*h*, 15*d*:12*d*. la compuesta 20×15:30×12 ó 300:360, considerando que el trabajo de 20 *h.* en 15 *d.* es el mismo que el de 1 *h.* en 360 *d.* y tendré la proporcion sencilla 300:360::160 *v.* á 192 *v.* que resultan de multiplicar 360 por 160 y dividir el producto por 300. Siempre que el 1.° y 2.° términos de la proporcion pueda dividirse por un mismo número como en esta 300:360 que son divisibles por 60, se debe hacer la division para que quede 5:6 mucho mas sencilla y del mismo valor (170).

2.° *Un jornalero trabajando 7 horas al dia gana en 40 dias 100 pesos ¿quántos dias necesita para ganar 150, trabajando 10 horas cada dia?* Comparo las razones asi: trabajando 7 horas al dia se necesitan 40 dias para cierta ganancia; trabajando 10 horas al dia se necesitarán menos dias: luego la proporcion es indirecta, y en lugar de 7 *hor*: 10 *hor.* se deberá poner 10:7. La otra proporcion es directa; pues si se ganan 100 *pes.* en 40 *d.* 150 *pe.* se ganarán en mas *d.* Formo pues, la razon $100\times10:150\times7$ compuesta de $10:7$ y $100:150$, y despues la proporcion $100\times10:150\times7::40....$ es decir, $1000:1050::40....$ ó reduciendo la 1.ª razon, $20:21::40....$ ó últimamente $2:21::4:42$, número de dias, que salen multiplicando 4 por 21 y dividiendo 84 por 2.

190 A esta regla pertenece la que se llama *Conjunta*, por la que dados diferentes géneros con sus precios, ó diferentes medidas, monedas, pesos con sus valores, se averigua el de cierta porcion de qualquiera de ellos.

3.° *Seis libras de azucar valen 7 lib. de de miel, 5 lib. de miel 4 v. de cinta, 10 v. de cinta 40 nueces de especia, y 7 nueces 10 rs. ¿quántos reales valdrán 3 lib. de azucar?* En lugar de las quatro reglas de tres siguientes

6 lib. Az: *7 lib. de miel* :: 3 *l. Az*: $3\frac{1}{2}$ *miel*
5 *l. miel*: 4 *v. Cint*:: $3\frac{1}{2}$ *miel*: $2\frac{4}{5}$ *v. Cint.*
10 *v. Cint*: 40 *Nuec*:: $2\frac{4}{5}$ *v. Cint*: $11\frac{1}{5}$ *Nuec.*
7 *Nuec*: 10 *rs.* :: $11\frac{1}{5}$ *Nuec*: 16 *rs.*

por las que se averigua lo que se pide; formo de las quatro $6:7$, $5:4$, $10:40$, y $7:10$ la razon compuesta $6\times5\times10\times7:7\times4\times40\times10$, y despues la proporcion $6\times5\times10\times7:7\times4\times40\times10::$ 3 *lib.*: $\frac{7\times4\times40\times10\times3}{6\times5\times10\times7}$, donde de una vez se encuentran 16 rs. valor de 3 lib. de Azucar, quitando en el 4.° término para abreviar el cálculo, los factores comunes 7 y 10.

4.° *Si 3 lib. tornesas de Francia valen 32 dineros esterlines de Inglaterra, 240 de estos dineros 408 dineros gros de Holanda, 50 de estos 190 mrs. ¿quántos mrs. valdrán 60 libras tornesas?* Formo la proporcion $3\times240\times50 : 32\times408\times190 :: 60 : \frac{32\times408\times190\times60}{3\times240\times50}$, y tendré $4134\frac{2}{5}$ mrs. á que equivalen las 60 lib. tornesas.

Regla de Compañías.

191 Por la regla de tres se divide tambien una cantidad en partes que tengan entre sí qualquier razon: y porque esta operacion se suele aplicar á repartir entre los que componen alguna Junta de Comercio las pérdidas ó ganancias á proporcion de lo que cada uno ha puesto en el fondo ó principal, se llama *Regla de Compañías*. Explicaremosla en los egemplos siguientes.

1.° *De tres que se juntan á comerciar, el 1.° pone 250 pes. el 2.° 300 y el 3.° 330: ganaron 20000 rs. y se quiere saber quánto toca á cada uno.*

Cada asociado debe percibir á correspondencia de lo que puso: con que habrá que dividir el número 20000 en tres partes, que tengan la misma razon que los números 250, 300, 330. Para esto, sumados estos números diré, 880 suma de lo que pusieron, es á 20ϑ que ganaron; como lo que cada uno puso á lo que ganó, que viene á ser la proporcion demostrada ya (180). Hago pues, las reglas de tres que aparecen, y me resultarán las tres ganancias, advirtiendo que en

$$250:\frac{250\times 250}{11}=5681\tfrac{9}{11}$$

$$11:250::300:\frac{300\times 250}{11}=6818\tfrac{2}{11}$$

$$330:\frac{330\times 250}{11}=7500$$

Suma......................20000.

la operacion se reduce la razon 880:20000 á 11:250, que es su igual y mas sencilla.

2.° *Dos hicieron compañía por 6 años: el 1.° puso 150 dob. por todo el dicho término, el 2.° puso 310, y al fin del año 3.° quitó 140; pero al comenzar el 6.° añadió 100. Perdieron 5000, y se pregunta lo que toca á cada uno de pérdida.*

En estos casos en donde hay diferencia de tiempo, se multiplica lo que cada uno pone por el número de años que lo tiene puesto, y asi queda reducido el caso al anterior. Con efecto, los 150 *dob.* que el 1.° tuvo ganando todos los 6 años, equivalen á 150×6= 900 *dob.* que se empleasen un año: y como el 2.° tuvo empleados 310 los tres primeros años, 170 los dos siguientes, y 270 el último año, sumaré 310×3, 170×2 y 270 y tendré 1540 por la puesta del 2.° Digo despues, 900+1540 suma de de lo que pusieron, á 5000 que perdieron; como la puesta de cada uno á lo que le toca de pérdida, que se saca por las dos reglas de tres que anteceden.

$$2440:5000 \text{ ó reduciendo}$$

$$61:125::900:\frac{900\times125}{61}=1844\tfrac{16}{61}$$

$$61:125::1540:\frac{1540\times125}{61}=3155\tfrac{45}{61}$$

Suma........................5000.

3.° *Se pide dividir un batallon de 600 hombres en tres partes tales, que la 1.ª sea á la 2.ª como 2:3, y la 1.ª á la 3.ª como 4:5.* Este caso tiene de particular que se piden tres partes y se dan quatro números, porque la 1.ª está expresada con los dos 2 y 4. Para reducirlos á uno, coloco las dos razones asi, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$; y reduciéndolas á un mismo denominador serán $\frac{12}{8}$, $\frac{10}{8}$ ó 8:12 y 8:10 de un mismo valor y con solos tres números 8, 10, 12 en cuya razon se han de dividir los 600 Soldados. Sumo pues 8, 10 y 12, y formando las reglas de tres que se ven, y usando de la razon 1:20 en lugar de su igual 30:600, saldrán las tres partes que se piden.

$$8:\frac{8\times20}{1}=160$$

$$1:20::10:\frac{10\times20}{1}=200$$

$$12:\frac{12\times20}{1}=240$$

$$600$$

Regla de Aligacion.

192 Aqui pertenece tambien la regla de *aligacion* que enseña el modo de hallar el precio medio de qualesquiera cosas que se mezclan, ó la porcion que se ha de tomar de cada uno de los ingredientes que componen cierta mezcla. Vease su práctica en los egemplos siguientes.

1.° *Si se mezclasen 30 cántaros de vino de á 19 rs. con 10 cántaros de á 23 rs. y se quisiese saber qué precio debe tener cada uno de los 40 cántaros mezclados;* sacaré 1.° lo que valen los 30 á 19 *rs.* y los 10 á 23, y sumando $30\times19=570$, con $10\times23=230$, será el valor de todos los cántaros mezclados 800 *rs.*: divídolos entre el num.° 40 de cántaros, y saldrá cada uno con 20 *rs.* de valor, que es el precio medio: luego este debe ser siempre el cociente del importe ó valor de la mezcla dividido por el número de especies mezcladas.

2.° *Un Labrador tiene trigo de á 30 rs. la fanega, y trigo de á 35; y quiere saber quánto ha de mezclar de cada especie para que le resulte de á 32 rs.*

Para que el trigo de á 30 *rs.* suba en calidad hasta 32, hay que mejorarle en dos grados, que se le deberán subir echándole trigo de á 35: al contrario, los tres grados en que el trigo de á 35 excede al de 32, se le deberán rebajar con el trigo inferior de á 30: luego las diferencias que hay entre el precio medio y los extremos serán los números que expresen la razon en que se han de mezclar los ingredientes que han de componer la mezcla. Tomo pues, la diferencia de 30 á 32 y póngola frente de 35, y frente del 30 la diferencia entre 32 y 35, y tendré que á cada 3 fanegas de á 30 *rs.* se deben mezclar 2 de á 35 para componer trigo de á 32.

	30,3.
Precio medio	32
	35,2.

Quando hay mas de dos especies como si con trigo de á 28, 30 y 35 *rs.* se pidiese hacer trigo de á 32; despues de haber tomado las diferencias de 35 y 30 á 32, se tomarán las de 28 y 35 á 32, poniendo la 1.ª frente de 35 y la 2.ª frente del 28, como se ve en el egemplo: y diremos que á cada 6 fanegas de á 35 se mezclan 3 de á 28 y 3 de á 30 para que resulte trigo de 32.

	35—2+4=6
32	30—3
	28—3

Lo mismo se prácticaría con quatro, cinco ó mas especies: es decir, que de cada vez se deben tomar dos especies una mayor y otra menor que la media, y restarlas de ella, colocando la diferencia de cada especie frente de la otra.

Es preciso advertir que el número de fanegas que ha de componer la mezcla no se limita á los solos números que salen de diferencia, sino que se pueden mezclar todos los que tengan la misma razon que ellos. En el 1 r egemplo se puede hacer trigo de á 32 mezclando no solo 3 fanegas de á 30 y 2 de á 35, sino qualesquiera otros que esten en la razon de 3:2. Si se tuviese por eg. 68 fanegas de trigo de á 35 y se pidiese, quántas se le han de mezclar de á 30: haria la siguiente regla de tres; *á cada 2 fanegas de á 35 se mezclan 3 de á 30, á 68 quántas se han de mezclar?* esto es, $2:3::68:\frac{204}{2}=102$, que son las fanegas que se buscan.

Ultimamente, si queriendo hacer una mezcla de 120 fanegas de á 32 *rs.* con trigo de á 30 y 35 quisiese saber quántas habia de mezclar de cada especie; tendria que dividir 120 en razon de 3:2, y me resultarian 72 fanegas de 30, y 48 de 35 *rs.*

$$3+2:120::\begin{matrix}3:\frac{120\times3}{5}=72\\[4pt]2:\frac{120\times2}{5}=48\end{matrix}$$

Regla de falsa posicion.

193 Por la regla de *falsa posicion* se encuentra un número incognito por medio de otro supuesto, conforme se ve en los siguientes egemplos.

1.° *Se pide un número cuyo tercio, quar-*

to y quinto sume 376. Si supongo que sea 60, cuyo tercio 20, quarto 15 y quinto 12 suman 47, haré con esta suma con 60 y 376 esta regla de tres, $47:376::60:\frac{376\times60}{47}=480$: es decir, 47 *tercio, quarto y quinto de 60, es á 376 tercio, quarto y quinto del número que busco; como 60 es á 480*: número cuyo tercio 160, quarto 120 y quinto 96 compone 376.

2.° *El libro que un Impresor imprime en 30 dias, otro en 25 y otro en 20, se pregunta en quántos lo imprimirán todos juntos.* Sea en 1 dia; y pues el 1.° imprime en este tiempo $\frac{1}{30}$ del libro, el 2.° $\frac{1}{25}$, y el 3.° $\frac{1}{20}$; todos juntos imprimirán en 1 dia la suma de $\frac{1}{30}+\frac{1}{25}+\frac{1}{20}$, que es $\frac{1850}{15000}=\frac{37}{300}$. Digo pues, *si* $\frac{37}{300}$ *del libro se imprime en un dia*, $\frac{300}{300}$ que es todo el libro, *en quantos se imprimirá?* Esto es: $\frac{37}{300}:\frac{300}{300}$ ó $37:300::1:\frac{300}{37}=8\frac{4}{37}$ *dias.*

194 Quando no alcanza á satisfacer la pregunta una suposicion, se hacen dos, y se llama la regla de *falsa posicion doble*, como se verá en los casos siguientes.

1.° *Se quieren dividir 300 dob. entre tres, de manera que al 2.° toque el duplo del 1.° y 10 mas, y al 3.° tanto como á los dos menos 4.* Si supongo que se den al 1.° 20, tocará al 2.° $2\times20+10=50$, y al 3.° $20+50-4=66$: y como las tres partes $20+50+66$ suman solo 136 en lugar de 300, salen de equivocacion 164, que señalo con el signo —: si la suma hubiera pasado de 300, hubiera notado el exceso con el signo +. Supongo ahora que la parte del 1.° sean 40; serán $80+10=90$ la del 2.°, y $40+90-4=126$ la del 3.°, la suma de las tres $40+90+126$ es 256, y el error -44.

$$20-164$$
$$40-\ 44$$

Multiplico ahora cada número supuesto por el error del otro, y restando el un producto $20\times44=880$ del otro $40\times164=6560$, dividiré la diferencia 5680 por la diferencia de los errores y tendré de cociente $47\frac{1}{3}$, parte del 1.° De consiguiente, la del 2.° es $94\frac{2}{3}+10=104\frac{2}{3}$, y la del 3.° $47\frac{1}{3}+104\frac{2}{3}-4=148$. Con efecto, $47\frac{1}{3}+104\frac{2}{3}+148$ componen 300. Quando los errores tienen diferente signo, despues de multiplicar cada número por el error del otro, se suman los productos y se divide la suma por la de los errores.

195 Para demostrar generalmente el método de practicar esta regla llamarémos a y b los números supuestos, c y d sus errores y m el número que se busca; y como los errores son tanto menores ó mayores quanto es menor ó mayor la diferencia entre el número supuesto y el verdadero; serán proporcionales los errores c, d á las diferencias $m-a$, $m-b$, entre los números supuestos y el verdadero:

esto es, será $c:d::m-a:m-b$, y dividiendo (179), $c-d:d::m-a-m+b:m-b$, ó $c-d:d::b-a:m-b=\frac{bd-ad}{c-d}$, multiplicando el 2.° término por el 3.° y partiendo por el 1.° Si á este valor de $m-b$ se añade b, se tendrá el de m que será $\frac{bd-ad}{c-d}+b=\frac{bd-ad+bc-bd}{c-d}=\frac{bc-ad}{c-d}$, que es la diferencia entre los productos de cada número supuesto por el error del otro dividida por la diferencia de los errores. Estos se han supuesto del mismo signo, pero si se lo mudamos á uno, y ponemos $-d$ en lugar de $+d$ en la expresion $\frac{bc-ad}{c-d}$, se convertirá en esta $\frac{bc+cd}{a+d}$, que es la suma de dichos productos partida por la de los errores, conforme lo dejamos dicho.

2.° *24 varas de lienzo y 35 de tela han costado 752 rs. cada vara de tela ha costado doble de cada vara de lienzo: á cómo han costado?*

Si supongo 6 *rs.* por el precio de cada vara de lienzo, será 12 el de cada vara de tela; las 24 varas de lienzo importarán 144 y las 35 de tela 420, que componen 564: luego el 1.r error es -188. Si supongo 9 *rs.* por la vara de lienzo, será 18 la de tela, 216 *rs.* el importe de las primeras, 630 el de las otras, y la suma de todas 846; luego el segundo error será +94. Sumo pues, (por tener distintos signos los errores) los productos 6×94 y 9×188 de cada número supuesto por el error del otro, y partiendo la suma 2256 por 282 suma de los errores, tendré de cociente 8, que es el precio de cada vara de lienzo; luego el de cada vara de tela es $2\times8=16$. En efecto, las 24 varas de lienzo á 8 *rs.* ó 192 junto con 560 importe de las 35 de tela á 16 *rs.*, componen 752 *rs.*

3.° *De dos jugadores el mas diestro ha puesto 12 rs. contra 8 cada juego; despues de 10 juegos el otro le paga 20 rs. ¿quántos juegos ganó el 1.°?*

Si hubiera ganado 5, serían otros 5 los que ganó el otro, á quien le hubiera tenido que dar 20 *rs.* luego el error es −40: si hubiera ganado 6, ganando el otro 4 hubieran quedado en paz, y es el error −20. Resto ahora los dos productos 5×20 y 6×40 de cada número supuesto por el error del otro (por tener los errores un mismo signo), y partiendo la diferencia 140 por 20, diferencia de los errores, tendré de cociente 7, que son los juegos que ganó el 1.°

Progresiones geométricas.

196 Una série de razones geométricas continuas 2:4::4:8::8:16::16:32 &c. forman una

progresion geométrica, que se escribe asi $\div 2:4:8:16:32$, y es una série de términos que divididos cada uno por el anterior dan una misma cantidad de cociente. Los que median entre el 1.° y último se llaman *medios proporcionales geométricos*. Tambien se llama *crescente* ó *decrescente* segun que sus términos aumentan ó van menguando $\div 2:4:8:16:32$ &c. es crescente, y $\div 32:16:8:4:2$ &c. decrescente. Hablarémos en lo sucesivo de la 1.ª puesto que á ella se reduce la otra con solo invertir los términos, y de consiguiente debe tener unas mismas propiedades.

197 Si suponemos que sea a el 1.r término de una progresion geométrica y q el cociente ó esponente de la progresion, será el 2.° $a\times q=aq$, el 3.° $aq\times q=aq^2$, el 4.° $aq^2\times q=aq^3$, el 5.° aq^4.... es decir, que cada término se compondrá del 1.° multiplicado por el cociente elevado á una potencia del mismo grado que el número de términos que le anteceden. El 8.° por egemplo, será en la progresion propuesta $a\times q^7=aq^7$.... el término n al que anteceden $n-1$ de términos, será $a\times q^{n-1}$: y toda la progresion $\div a: aq: aq^2: aq^3: aq^4 ... aq^{n-1}$. Luego el término 10.mo de la progresion $\div 3:6:12:24$.... cuyo esponente es 2, será $3\times 2^9=3\times 512=1536$. Si suponemos que sea 1 el 1.r término a de la progresion general, se reducirá á esta $\div 1:q: q^2: q^3:$

$q^4 : q^5 \ldots\ldots q^{n-1}$. que representa las potencias sucesivas de q, y nos convence 1.° que dichas potencias en qualquier cantidad forman una progresion geométrica. 2.° que toda série de términos cuyos esponentes forman una progresion aritmética, están en progresion geométrica.

198 Si el último término aq^{n-1} de la progresion general $\div a : aq : aq^2 \ldots\ldots aq^{n-1}$ se divide por el 1.° a, se tendrá de cociente q^{n-1}, esponente elevado á la potencia $n-1$, número de términos de la progresion menos uno, de donde sacando la raiz $n-1$ resulta $\sqrt[n-1]{q^{n-1}} = q$, esponente de la progresion. De consiguiente, si dadas dos cantidades a, aq^8 se pidiese buscar entre ellas un número qualquiera siete de medios geométricos, dividiré, considerándolas como el 1.° y último términos de una progresion de nueve términos, la mayor aq^8 por la menor a, y sacando de su cociente q^8 la raiz 8ª, indicada por el número de términos menos uno ó de medios mas uno, tendré q, que será el cociente ó esponente de la progresion. Multiplico por él el a y tendré aq 1.er medio, vuelvo á multiplicar por q este y los que vayan saliendo, y tendré los demas aq^2. aq^3. aq^4. aq^5. aq^6. aq^7, y será toda la progresion $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 : aq^7 : aq^8$.

Si se pidiesen entre 4 y 972 quatro medios geométricos, se dividirá el último término 972 por el 1.° 4 y sacando de su cociente 243 la raiz 5.ª se tendrá 3 esponente de la progresion; multiplíquese por él el 4 y los que vayan saliendo, y serán 12.36.108.324 los quatro medios geométricos y toda la progresion 4 &c.

199 Segun lo que dejamos demostrado (170), en la progresion general $\div a : aq : aq^2 : aq^3 .....$ entre a^2 y a^2q^2 cuadrados del 1.° y 2.° términos, hay el mismo cociente q^2, que entre a y aq^2 1.° y 3.° términos: luego en qualquier progresion geométrica el 1.ʳ término es al 3.° como el cuadrado del 1.° al del 2.° ó $a : aq^2 :: a^2 : a^2q^2$. Por la misma razon es el 1.ʳ término al 4.° como el cubo del 1.° al cubo del 2.° pues en $a : aq^3 :: a^3 : a^3q^3$ tienen las razones un mismo esponente q^3. Esto quiere decir, que en qualquier progresion geométrica la razon del 1.ʳ término al 3.° es duplicada de la que tiene al 2.° la que tiene al 4.° es triplicada de la del 1.° al 2.°: la que tiene al 5.° quadruplicada &c.

200 Si tomamos qualquier número de términos por egemplo siete, de una progresion geométrica, el producto del 1.° y el 7.°, el del 2.° y 6.°, el del 3.° y 5.° y el cuadrado del 4.° ha de ser uno mismo; pues en to-

dos será el quadrado del 1.° multiplicado por la 6.ª potencia del cociente. Veamoslo en la progresion general $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6$, donde $a \times aq^6$, $aq \times aq^5$, $aq^2 \times aq^4$, y $aq^3 \times aq^3$ componen un mismo producto $a^2 q^6$. Si tomamos la progresion $\div 3:6:12:24:48:96$, hallarémos tambien que 3×96, 6×48, y 12×24 producen 288. Luego en qualquier progresion geométrica *el producto de los términos extremos es igual al de dos qualesquiera términos igualmente distantes de los extremos, ó al cuadrado del término medio si el número de términos es impar.*

201 Siendo una progresion geométrica qualquiera $\div 2:4:8:16:32$ &c. una série de razones continuas $2:4::4:8::8:16::16:32$ &c. serán antecedentes todos sus términos menos el último, y consecuentes todos menos el 1.°; de suerte que si llamamos s la suma de todos los términos de una progresion geométrica, a el 1.°, aq el 2.° y b el último; será $s-b$ la suma de todos los antecedentes, y $s-a$ la de todos los consecuentes: y siendo (180) la suma de todos los antecedentes de una série de razones, á la de los consecuentes, como un antecedente á su consecuente; esto es, $s-b:s-a::a:aq$ ó $aq:a::s-a:s-b$; será dividiendo (170), $aq-a:a::s-a-s+b:s-b$ que se reduce á $aq-a:a::b-a:s-b$. Si mul-

tiplico el 2.° por el 3.° y parto por el 1.r término de esta proporcion, será el último $s-b=\frac{ab-a^2}{aq-a}=\frac{b-a}{q-1}$ suma de todos los términos de una progresion geométrica menos el último b: añádoselo, y tendré por último $s=\frac{b-1}{q-1}+b=\frac{bq-a}{q-1}$: luego dicha suma es el producto de su último término por el cociente menos el 1.°, partido por el cociente disminuido de 1. Si se pidiese la suma de todos los términos de la progresion general $\div a : aq : aq^2 : aq^3 .... aq^{n-1}$, multiplicaría aq^{n-1} por q, restaría de su producto aq^n, a, y dividiendo la diferencia aq^n-a por $q-1$, sería $\frac{aq^n-a}{q-1}$ la suma pedida.

La expresion $s=\frac{bq-a}{q-1}$ se muda suponiendo $q=2$, en $s=2b-a=b+b-a$; haciendo $q=3$, en $s=\frac{3b-a}{2}=b+\frac{b-a}{2}$; haciendo $q=4$, en $s=\frac{4b-a}{3}=b+\frac{b-a}{3}$: es decir, que la suma de los términos de una progresion geométrica dupla ó cuyo esponente es 2, es el último término mas la diferencia entre el 1.° y último: en la tripla es el último término con la mitad de la diferencia entre el 1.° y último: en la quádrupla es el último término y la tercera parte de la diferencia entre el 1.° y último &c.

Si se pidiese el precio de un caballo ajustado de modo que por el 1.r clavo de los 32 de sus quatro herraduras, se pague un maravedi, por el 2.° 2 *mrs.*, por el 3.° 4, y asi de los demas duplicando siempre: habrá que averiguar la suma de la progresion geométrica $\div 1:2:4$ &c. de 32 términos; para lo qual sacaré su último término que es (197) $1\times 2^{32-1}=2^{31}=2147483648$, y poniéndole en lugar de b, y por a y q sus valores 1 y 2 en la expresion $s=\frac{bq-a}{q-1}$, tendré $s=\frac{2147483648\times 2-1}{2-1}=4294967295$, suma de los 32 términos y número de mrs. los quales componen 126322567 *rs. y medio*, precio del caballo.

202 La progresion decrescente se hace crescente para sumar sus términos por este mismo método: y como quando decrece al infinito podemos considerar el último término como cero, será quando se convierta en crescente, el 1.r término $a=o$, y la expresion $s=\frac{bq-a}{q-1}$ se mudará en esta $s=\frac{bq-o}{q-1}=\frac{bq}{q-1}$. Luego quando $q=2$, será $s=2b$: si

$q=3$, $s=\frac{3b}{2}=b+\frac{b}{2}$: si $q=4$, $s=\frac{4b}{3}=b+\frac{b}{3}$ &c.

La suma de la progresion $\div\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}\ldots\ldots 0$ ó $0\ldots\ldots\frac{1}{16}:\frac{1}{8}:\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$, es poniendo por a cero, $\frac{1}{2}$ por b, y 2 en lugar de q, $s=\frac{\frac{1}{2}\times 2-0}{2-1}=1$.

Tambien suma 1 la progresion $\div\frac{2}{3}:\frac{2}{9}:\frac{2}{27}$ &c. y en general todas las que tienen esta forma $\div\frac{n}{n+1}:\frac{n}{(n+1)^2}:\frac{n}{(n+1)^3}$ &c.

Si se pidiesen las leguas que ha de andar un navío para alcanzar á otro la mitad menos veloz, que le lleva de ventaja 40 leguas; sumaría los términos de la progresion infinita $\div 40: 20: 10: 5: 2\frac{1}{2}: 1\frac{1}{4}$ &c. y serían $s=\frac{40\times 2-0}{2-1}=80$, las leguas que se piden.

Para saber quándo se vuelven á juntar el minutero y la mano de un relox puestos á andar desde las 12, se suman los términos de la progresion $\div 1: \frac{1}{12}: \frac{1}{144}$ &c. y hallarémos que se juntan á la 1 y $\frac{1}{11}$. Despues se vuelven á juntar á las $2\frac{2}{11}$, $3\frac{3}{11}$ &c. que resultan sumando las correspondientes progresiones.

Permutaciones.

203 Se entiende por *permutacion* el número de disposiciones diferentes que se pue-

den dar á qualquier número de cosas. Si consideramos por egemplo, las letras del alfabeto, una letra *a* no puede tener mas disposicion que 1: otra letra mas, *b*, puedo ponerla antes y despues de *a*, lo que me da las dos permutaciones *ab*, *ba*, ó 1×2: una 3.ª letra *c* puede ocupar tres lugares en cada una de las dos permutaciones; al principio, en medio y al fin: lo que da estas seis disposiciones; *cab*, *acb*, *abc*, *cba*, *bca*, *bac*, $2\times3=6$ ó $1\times2\times3$. Una 4.ª letra *d* podrá ocupar quatro sitios diferentes en cada una de estas seis disposiciones; es decir, que quatro letras dan 24 permutaciones ó $6\times4=1\times2\times3\times4$. Por esta misma cuenta cinco letras darán 120 permutaciones ó $24\times5=1\times2\times3\times4\times5$: y en general, *n* de letras darán $1\times2\times3\times4\ldots\times n$ permutaciones. Por la qual regla se averiguará que 12 personas podrán sentarse á la mesa de $1\times2\times3\times4\ldots\times12=479001600$ situaciones diferentes: y necesitarían 15 años y 69 dias para recorrerlas todas, tardando un segundo de tiempo en cada disposicion.

204 Quando hay cosas semejantes entre las que se permutan; *a*,*a* por eg. no tienen mas disposicion que $1=\frac{1\times2}{2\times1}$. Quando en tres cosas hay dos iguales como en *a*, *b*, *b*, no hay mas permutaciones que estas *abb*, *bba*, *bab* que son $3=\frac{1\times2\times3}{2\times1}$. Si de quatro hay dos igua-

les, las permutaciones son $\frac{1\times2\times3\times4}{2\times1}=12$; si hay tres, son $\frac{1\times2\times3\times4}{3\times2\times1}$. Si de cinco hay dos, ó tres, ó quatro iguales, se tendrá en el 1.^{r} caso $\frac{1\times2\times3\times4\times5}{2\times1}$, en el 2.° $\frac{1\times2\times3\times4\times5}{3\times2\times1}$ y en el 3.° $\frac{1\times2\times3\times4\times5}{4\times3\times2\times1}$. De lo qual es facil sacar el número de permutaciones para qualquier caso: como si hubiese seis cosas y tres fueren iguales entre sí y otras dos entre sí, serán sus permutaciones $\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{3\times2\times1\times2\times1}$ &c. En general, siendo a, b, c &c. el número de cosas semejantes entre sí, será la expresion de sus permutaciones $\frac{1\times2..\times a\times1\times2..\times b\times1\times2..\times c}{1\times2\times3......\times a+b+c}$.

Combinaciones.

205 Hablemos ahora de las *Combinaciones* ó del número de veces que se pueden tomar muchas cosas de una en una, de dos en dos, de tres en tres &c. y valiéndonos de las 25 letras, veamos quántas palabras de una letra, de dos, de tres hasta de 25 se podrán formar con ellas. Bien se ve desde luego que con 25 letras solo se pueden formar 25 palabras de una letra. Si se junta despues cada

letra con todas las 25, se formarán $25\times25=$ 625 palabras de dos letras. Si á cada una de estas se juntan sucesivamente cada una de las 25, resultarán $25\times25\times25=15625$ palabras de tres letras; y continuando de esta manera se verá que el número de todas las palabras posibles que pueden formarse con las 25 letras de una, de dos, de tres &c. letras, es la suma de los términos de esta progresion geométrica $25, 25^2, 25^3, 25^4$ hasta 25^{25}, y lo mismo se dirá de qualquier otro número de letras ó de cosas.

206 En este número de combinaciones se repite algunas veces una misma letra. Para encontrar el número de las palabras que se pueden formar con las 25 letras, sin que en ellas se repita alguna; supuesto que de una letra se forman solo 25; se ha de notar que juntando cada letra con las demas excluyéndola á ella, resultan 25×24 palabras de dos letras en las que ninguna se repite. Asimismo, cada una de estas combinaciones de dos letras no se puede juntar sin repeticion con mas que 23 que quedan; con que será el número de palabras con 3 letras sin repeticion $25\times24\times23$. El número de las de quatro letras sin repeticion debe ser por igual razon $25\times24\times23\times22$; y últimamente el de todas las palabras que se buscan, será la suma de la serie 25, 25×24, $25\times24\times23$,

$25\times24\times23\times22$ hasta el último producto de 25 factores desde 25 hasta 1: diciéndose otro tanto de qualquier otro número que se pidiese.

207 Pero aun estas palabras incluyen unas mismas letras bien que diferentemente combinadas como *ab*, *ba*; y pueden pedirse palabras enteramente diferentes, excluyendo las letras repetidas aunque con diferente colocacion. En este caso tambien son 25 las palabras de una letra: en las de dos, cada letra se repite dos veces como *ab*, *ba* quando *a* se combina con *b* y la *b* con la *a*, y asi el número de combinaciones diferentes será la mitad del que se encontró; esto es, será $\frac{25\times24}{2}$. Cada una de estas combinaciones se ha de juntar con las demas letras que seran 23 para que ninguna se repita, y formar $\frac{25\times24\times23}{2}$ palabras de tres letras; pero en ellas de cada tres letras *a*, *b*, *c* por eg. hay tres combinaciones *abc*, *acb*, *bac* que salen juntando *ab* con *c*, *ac* con *b* y *bc* con *a*, que deben reducirse á una desechando las permutaciones; luego el número antecedente se debe partir por 3 para sacar el que se busca $\frac{25\times24\times23}{2\times3}$. Siguiendo el mismo método hallarémos.... $\frac{25\times24\times23\times22}{2\times3\times4}$ por el número de las combina-

ciones de quatro en quatro, y asi de los demas. De suerte que el número de ternos diferentes que se pueden formar con 90 números son $\frac{90 \times 89 \times 88}{2 \times 3} = \frac{704880}{6} = 117480$.

Logaritmos.

208 Como en una progresion geométrica qualquiera $\div q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4$. &c. la suma de los esponentes 3 y 4 de dos qualesquiera términos q^3, q^4 equivale á su producto $q^3 \times q^4 = q^7$; la diferencia $7-4=3$ corresponde á q^3 cociente de q^7 partido por q^4; el producto 12 del esponente 3 por 4, á q^{12} 4.ª potencia de q^3; y q^3 raiz 4.ª de q^{12} tiene por esponente 3, cociente de 12 dividido por 4; pensaron los Matemáticos calculando los números por medio de sus esponentes, reducir el multiplicar á sumar, el partir á restar, el subir á las potencias á multiplicar, y á una mera division la estraccion de las raices.

209 Para esto eran necesarias dos cosas; la una hacer que todos los números fuesen términos de la progresion geométrica, y la otra buscar á cada uno su esponente. Con efecto, se han hecho listas ó tablas en que á los números 1, 2, 3 &c. hasta 10000 se les ha puesto enfrente sus esponentes: y por ellos se encuentran facilmente los de números mayores. A estos esponentes que son los térmi-

nos de una progresion aritmética que corresponden á otros que están en progresion geométrica, se ha dado el nombre de *Logaritmos*, y á la lista de estos números *Tabla de logaritmos*.

210 Para que formemos alguna idea del modo con que se han construido estas tablas, es de saber que entre las diferentes progresiones aritméticas y geométricas que se pudieron escoger para este efecto, adoptaron los Matemáticos las dos siguientes.........

Geométrica	÷	10^0:	10^1:	10^2:	10^3:	10^4 &c.
	÷	1:	10:	100:	1000:	10000
Aritmética	÷	0.	1.	2.	3.	4 &c.

de manera que cero es el esponente ó logaritmo de 1, 1 es logaritmo de 10, 2 de 100 &c. Los logaritmos de los números 2, 3, 4 &c. que hay entre 1 y 10, los que median entre 10 y 100, entre 100 y 1000 &c. se encontraron de la manera con que vamos á sacar el de 9.

211 Búsquese para esto un medio geométrico proporcional entre 1 y 10, y otro aritmético entre 0 y 1 (166 y 198) añadiendo antes ceros de decimales á estos números para sacarlos con mas exâctitud y escusar los quebrados comunes. El medio aritmético es 0,500000 que será logaritmo del geométrico que es 3,162277. Búsquese otro me-

dio geométrico entre este y 10, 000000, y otro aritmético entre 0,5000000 y 1,000000, y se tendrán los dos 5, 623413 y 0,750000; este tambien es logaritmo de aquel que todavia está distante de 9. Con efecto, hasta el medio geométrico veinte y seis no sale el 9, 000000, cuyo logaritmo es el 26.to medio aritmético 0, 954242. Sacados con igual trabajo los logaritmos de 2, 3, 5, 7, 11, 13 y demas intermedios que no tienen factores, se sacaron por ellos los otros con mas facilidad, el de 4 por eg. por ser 2×2, sumando consigo el logaritmo de 2; el de 6=2×3 sumando el de 2 y el de 3; el de 9, cuadrado de 3, multiplicando por 2 el logaritmo de 3; el de 15=3×5 sumando los logaritmos de 3 y 5; el de 64 cubo de 8 multiplicando por 3 el logaritmo de 8 &c. pero se han inventado despues métodos mas expeditos de hallar los logaritmos.

212 La cifra que precede á las decimales de un logaritmo se llama su *característica*: en 0, 000000, logaritmo de 1 es cero la característica: en 1, 000000, logaritmo de 10, es 1: en 2, 000000, logaritmo de 100 es 2 &c. y de consiguiente consta siempre de tantas unidades menos una como notas tiene el número á quien corresponde. 3, 423901 es logaritmo de 2654 número de 4 cifras, una mas que su característica 3.

213 En vista de lo que dejamos dicho (208), si en lugar de multiplicar dos números sumamos sus logaritmos, deberá esta suma corresponder en las tablas al producto de dichos números. Y al contrario, la diferencia de dos logaritmos estará frente del cociente de sus números correspondientes. Asimismo, la potencia de un número debe corresponder al producto de su logaritmo por el esponente de la potencia: y qualquiera raiz al cociente de dicho logaritmo por el esponente correspondiente.

214 Veamos ahora cómo se encuentran los logaritmos de los números que no están en las tablas, y cómo dados los logaritmos, se buscan sus números, en advirtiendo que como los logaritmos de 10, 100, 1000 &c. son 1,000000, 2,000000, 3,000000 &c. se sumarán ó restarán de qualquier logaritmo con solo añadir ó restar de su característica, 1, 2, 3 &c. unidades; y como esta suma ó resta equivale á multiplicar ó partir los números de dichos logaritmos, será lo mismo *añadir 1, 2, 3 &c. unidades á la característica de un logaritmo que multiplicar por 10, 100, 1000 &c. el número que corresponde al logaritmo*; y al contrario, *restar 1, 2, 3 &c. unidades de la característica de un logaritmo será partir su número correspondiente por 10, 100, 1000 &c.*

215 Esto supuesto, para encontrar el logaritmo de un entero con un quebrado $6\frac{3}{5}$ por eg. se le reducirá á $\frac{33}{5}$, se restará de 1, 518514 logaritmo de 33, 0,698970 logaritmo de 5, y el residuo 0,819544 será el logaritmo de $\frac{33}{5}$ ó de $6\frac{3}{5}$. Porque siendo $\frac{33}{5}$ cociente de 33 partido por 5, deberá ser su logaritmo la diferencia entre los logaritmos del dividendo 33 y el divisor 5 (213). En un quebrado propio $\frac{5}{33}$ en donde es mayor el logaritmo del denominador, se resta de él el logaritmo del numerador, y la diferencia — 0,819544 con el signo — es el logaritmo de $\frac{5}{33}$. Efectivamente, siendo cero el logaritmo de 1, deben ser negativos los logaritmos de los quebrados propios que son menores que 1, de lo qual nos convencerémos mas, continuando ácia la izquierda las progresiones aritmética y geométrica ya citadas como aquí se ve..... *Geométrica* $\div$ &c. $10^{-3}:10^{-2}:10^{-1}:10^{0}:10^{1}:10^{2}:10^{3}:10^{4}$ &c. ó $\div$ &c. $\frac{1}{1000}:\frac{1}{100}:\frac{1}{10}:1:10:100:1000:10000$ &c.
Aritmética $\div$ —3.—2.—1.0.1.2.3.4.&c.

216 Si dado el número 964357 mayor que los de las tablas, se pidiese su logaritmo; le separaré de la derecha dos notas, reduciéndole á 9643,57 número 100 veces menor que el propuesto (28), y que está entre los de la tabla. Busco en ella los logaritmos 3,984212 y 3,984257 de 9643 y

9644, y tomando su diferencia 45 diré: *si por 1 de diferencia entre 9643 y 9644 salen 45 de diferencia entre sus logaritmos; por 0, 57 de diferencia entre 9643 y 9643, 57 ¿qual debe ser la de sus logaritmos?* saco de la proporcion 1:45::0,57..... el 4.° término 25,65 ó 26 solamente despreciando las decimales, parte de logaritmo que corresponde al quebrado 0,57; y juntándola con el logaritmo de 9643, tendré 3,984238 logaritmo de 9643,57: añado 2 á su característica (214), y 5,984238 que resulta por último, será el logaritmo de 964357.

Si se diese el número 8706000 para buscarle logaritmo; se tomaría en la tabla el de 8706 que es 3,939819, y con 3 unidades mas en su característica por los tres ceros separados, será 6,939819 logaritmo de 8706000. Quando el número tiene cifras decimales, se busca su logaritmo como si fuera entero, y despues se quitan de su característica tantas unidades como notas decimales tiene el número.

217 Si dado un logaritmo qualquiera 8, 986772 se pide el número que le corresponde; se le quitarán á su característica 8 cinco unidades para poderle hallar en la tabla: y pues que 3,986772 que queda, se encuentra en ella frente del número 9700; este añadido de cinco ceros por las 5 que se quitaron

á la característica, es decir, 970000000 será el número que corresponde al logaritmo propuesto 8,986772.

Dado el logaritmo 6,722348 para buscar su número; despues de quitar 3 unidades á la característica 6, no se encuentran en la tabla mas que los primeros guarismos, y viene á caer entre los logaritmos 3,722387 de 5277 y 3,722305 de 5276: es decir, que el logaritmo 3,722348 corresponde á 5276 y un quebrado. Para hallarle, se toma la diferencia 82 entre los logaritmos de 5276 y 5277, y despues la 43 que hay entre el logaritmo 3,722348 y el de 5276; y se dice, *si 82 diferencia entre los logaritmos de 5276 y 5277, da 1 de diferencia entre los números ¿qué diferencia dará entre los números, 43 diferencia entre el logaritmo 3,722348 y el de* 5276: esto es, $82:1::43:\frac{43}{82}$. Junto este quebrado á 5276, y $5276\frac{43}{82}$ será con corta diferencia el número que corresponde á 3,722348; luego á 6,722348 corresponderá $5276000\frac{43000}{82}=5276524,37$, número mil veces mayor que el anterior. Las diferencias que hemos supuesto proporcionales lo son solo próxîmamente y sin error sensible.

218 Para encontrar el quebrado que corresponde á un logaritmo negativo como —0,953430, le sumaré con uno de los logaritmos de 10, 100, 1000 &c. segun el nú-

mero de decimales que quiera en el quebrado: sea con 3,000000 logaritmo de 1000; y tendré 3,000000 − 0,953430 = 2,046570 que buscado en la tabla corresponde á 111: pártole por 1000 por el 3 que añadí á la característica de su logaritmo, y el cociente 0,111 será el quebrado que se busca.

219 Veamos en algunos egemplos las ventajas de los logaritmos, y sea el 1.° hallar el cociente de 6758 partido por 3015 con diferencia de menos de una milésima. Saco de las tablas de logaritmos los de 6753 y 3015 que son 3,829818 y 3,479287, y restando este del 1.° tendré 0,350531. Esta diferencia que está entre los logaritmos de 2 y 3, buscada en las tablas con tres unidades mas en su característica, corresponde próximamente al número 2241, mil veces mayor que el verdadero (214): luego si separo de su derecha tres notas (28), tendré el cociente que busco 2,241 tan próxîmo que no le falta una milésima.

2.° Para extraer la raiz 6.ª de 20, próxîma hasta las milésimas; dividiré por 6 su logaritmo 1,301030, y buscando el cociente 0,216838 en las tablas con tres unidades mas en su característica, se verá que corresponde próxîmamente á 1647, y de consiguiente será 1,647 la raiz 6.ª próxîma de 20.

3.° Si se pidiese la raiz 8.ª del cuadrado de 3796; se multiplicará su logaritmo 3,579326 por 2, y dividiendo por 8 el producto 7,158652, que es el logaritmo del cuadrado de 3796, se tendrá de cociente 0,894831, que con tres unidades en su característica corresponde próxîmamente á 7849: luego la raiz 8.ª que se busca, es 7,849.

4.° Encontremos ahora quatro medios geométricos entre $2\frac{2}{3}$ y $5\frac{3}{4}$. En lugar de sacar el esponente de la progresion partiendo $5\frac{3}{4}$ por $2\frac{2}{3}$ y extrayendo del cociente la raiz quinta (198), se restará de 0,759668 logaritmo de $5\frac{3}{4}$, 0,425969 logaritmo de $2\frac{2}{3}$; y dividiendo por 5 la diferencia 0,333699, saldrá de cociente 0,066739, logaritmo del esponente de la progresion. Búsquese el número que le corresponde en las tablas con una característica de 4 unidades, y separándole quatro cifras de su derecha, se tendrá 1,1661, esponente próxîmo de la progresion. Multiplíquese por él $2\frac{2}{3}$ y los demas que vayan resultando, y saldrán los quatro medios, 3,109; 3,626; 4,228 y 4,931. Tambien pudieron encontrarse añadiendo sucesivamente al logaritmo 0,425969 de $2\frac{2}{3}$ el del esponente, el de su duplo, triplo y quádruplo; pues asi resultan 0,492708; ... 0,559447; 0,626186; 0,692925 logaritmos de los quatro medios, que se buscarán en las tablas.

Del Complemento Aritmético.

220 Los Matemáticos han logrado convertir en suma la operacion de restar un número de otro; por eg. 6 de 8, añadiendo al 8, 4 diferencia entre 6 y 10, y quitando de la suma 12, 10 que resultan demas por el 6 que no se restó y 4 que se añadió. Si para restar por este método 36 de 68, se suma 68 con 64, diferencia entre 36 y 100, y de la suma 132 se quitan 100 que componen 36 que no se restó y 64 que se añadieron, quedará la resta verdadera 32.

221 Esta diferencia que va de un número á 1 con tantos ceros como cifras tiene el número, se llama *Complemento aritmético*, y se encuentra facilísimamente por ser ceros los guarismos del minuendo. El complemento aritmético de 870372 por eg. que es 129628, se saca restando este número de 1000000, ó cada una de las cifras 8, 7, 0, 3, 7 de 9, y la última 2 de 10.

*Log.*675....2,829304	
*Log.*952....2,978637	
*Complemento aritm.*co....*Log.*527....7,278189	
*Complemento aritm.*co....*Log.*377....7,423659	
20,509789	

222 Si para aplicar esta abreviacion á los logaritmos, queremos sacar el producto

próxîmo de los quebrados $\frac{675}{527}$, $\frac{952}{377}$; en lugar de restar la suma de los logaritmos de los denominadores 527, 377 de la de los numeradores 675, 952 (49 y 213), añadiremos á los logaritmos de 675 y 952 el complemento aritmético de los logaritmos de 527 y 377, y quitando de la suma, 20,000000 que hay demas por los logaritmos de 527 y 377 que no se restaron y sus complementos que se añadieron, será 0, 509789 que queda, el logaritmo del producto de los quebrados; que buscado en las tablas corresponde próxîmamente á 3,234. Tambien se sacará el 4.° término de una regla de tres, sumando con los logaritmos del 2.° y 3.^{r} términos el complemento aritmético del 1.° y buscando en las tablas el número que corresponde á la suma disminuida de 10, 000000.

223 Si se saca el logaritmo de un quebrado $\frac{5}{8}$ añadiendo á 0,698970 logaritmo de 5 el complemento 9,096910 de 8, se tendrá 9,795880 logaritmo de $\frac{5}{8}$, que queda negativo si se le quita 10,000000 que tiene demas. Pero se facilitará mucho el cálculo de logaritmos de los quebrados no quitándoles el complemento ó complementos que incluyan, hasta haber concluido todas las operaciones que pida dicho cálculo; extendiendo esta observacion á los decimales que se deben considerar con su denominador como si fueran quebrados comunes.

224 Si dado un logaritmo con algunos complementos demas, se pidiese el número que le corresponde; se rebajarán primero los complementos si se puede, y se hará despues lo que dejamos dicho (217). Pero si el logaritmo es menor que los complementos que hay que restar, como si se pidiese el número á que corresponde el logaritmo 8,732235 que tiene 10,000000 demas; se rebajarán 5,000000, y buscando el residuo 3,732235 en las tablas, se separarán de la derecha del número 5398 á que corresponde, cinco notas para decimales por las 5 unidades que quedaron demas en su característica, y será 0,05398 el número que se busca.

225 Quando se multiplican estos logaritmos se ha de cuidar de rebajar del producto los complementos que se aumentan. Si se multiplica por 2 un logaritmo con un complemento, resultará un producto con dos complementos ó con 20 unidades demas en la característica. Si se multiplica por 3, serán tres los complementos del producto &c.

226 En la division de estos logaritmos se hace que el dividendo tenga demas tantos complementos como unidades tiene el divisor; pues de esa suerte resultará el cociente con un solo complemento. Para sacar la raiz cúbica de $\frac{276}{547}$, cuyo logaritmo con un complemento es 9,702922, le añadiré antes dos

complementos; y dividiendo por 3 el logaritmo 29,702922 que resulta, tendré 9,900974, logaritmo de la raiz, que si se busca con 10 unidades de exceso en su característica, corresponde por lo que llevamos dicho (214) á 0,7961.

De las Equaciones y de la resolucion de los Problemas.

227 Se da propiamente el nombre de *Analisis* á esta parte del Algebra que enseña á *resolver los Problemas*; esto es, á encontrar una ó mas cantidades desconocidas con ciertas condiciones por medio de otras conocidas que se llaman los *datos* del problema, y son unas señas por donde se viene en conocimiento de lo que se busca.

Para resolver un Problema 1.° hay que hacerse cargo de lo que en él se pide, y de las señas que se dan para encontrarlo. 2.° Se supone que la cantidad que se va á buscar que llamarémos la *incognita*, sea una de las últimas letras x, y, u, z.... del abecedario; y mirándola como conocida, se expresa con signos algébricos la conexîon ó relaciones que con ella tienen las demas cantidades que intervienen en el problema: haciendo, para verificar las condiciones que incluye, los mismos razonamientos y combinaciones que se harían con la incognita, si se conociese.

228 3.° De estas operaciones resultarán diferentes expresiones de suma, resta, division, multiplicacion, potencias ó raices de las cantidades conocidas mezcladas con la incognita, entre las que se han de buscar dos iguales para formar con ellas y el signo $=$ lo que llamamos *Equacion*, por cuyo medio se averigua el valor de la incognita, practicando las reglas que daremos en esplicando mejor lo que es equacion.

229 Si suponemos que la cantidad x valga 6, $x+8$ serán 14; y la expresion $x+8=14$ será una equacion. Suponiendo iguales á $ax-c^2$ y $m+c$, será $ax-c^2=m+c$ otra equacion. Cada una se compone de dos partes ó miembros: al 1.° le forman las cantidades $x+6$ y $ax-c^2$ que están á la izquierda del signo $=$: y 14, $m+c$ componen el 2.° Quando el mayor esponente de la incognita es 1, se llama la equacion de 1.r *grado*, quando es 2, de 2.°, si es 3 de 3.°, y asi de las demas. $b^2-x+c^3x=3+a^2x$ es equacion de 1.r grado: $a^2-y^2=c-by$ de 2.° $z^3-m=t-cz^2$ de 3.°

230 Como la incognita en una equacion ó está sumada ó restada con las cantidades conocidas, ó multiplicada ó partida por ellas; no se llega á averiguar su valor hasta haberla dejado sola en uno de los miembros de

la equacion, quedando en el otro solo cantidades conocidas. Entonces se dice que la incognita está *despejada*.

231 „Para separarla de las cantidades „sumadas y restadas, se pasan estas del miem„bro donde están al otro con el signo con„trario.“ Si en la equacion $ab+x-c=8$ se pasa al 2.° miembro ab y $-c$ mudándoles los signos, se tendrá $x=8-ab+c$; donde ya x está despejada, sin perjuicio de la igualdad; pues haber pasado $ab-c$ mudados sus signos, es haber añadido á los dos miembros iguales de la equacion la cantidad $-ab+c$ asi, $ab+x-c-ab+c=8-ab+c$, que se reduce á $x=8-ab+c$: lo qual no puede alterar su igualdad.

232 Por esta operacion que se llama *trasposicion*, se hacen positivos qualesquiera términos negativos, y al contrario; y asi con mudar al 2.° miembro el término $-x$ de la equacion $a^2-x-2=d^2-m$, se reduce á esta $a^2-2=d^2-m+x$, donde pasando d^2-m al 1.^{r} miembro con signos contrarios, resulta $a^2-2-d^2+m=x$ en donde está x despejada. De consiguiente, si se mudan los signos á todos los términos de una equacion, se conserva siempre la igualdad de sus dos miembros.

233 „Para separar la incognita de qual„quier cantidad que la multiplique, se par-

„ten ambos miembros de la equacion por „ella si consta de un solo término, y si tiene „muchos, por la suma de todos ellos.“ Si en la equacion $a-b^2z=t$, se dividen todos los términos por $-b^2$, multiplicador de z, resultará $\frac{a}{-b^2}+\frac{b^2z}{b^2}=-\frac{t}{b^2}$, esto es $-\frac{a}{b^2}+z=-\frac{t}{b^2}$, ó $z=\frac{a}{b^2}-\frac{t}{b^2}$ pasando $-\frac{a}{b^2}$ al 2.° miembro. Para quitar los multiplicadores a y $-b^2$ de x en la equacion $ax+2-b^2x=c$, dividiré sus dos miembros por su suma $a-b^2$, y tendré $\frac{ax-b^2x}{a-b^2}+\frac{2}{a-b^2}=\frac{c}{a-b^2}$, que se reduce á esta $x+\frac{2}{a-b^2}=\frac{c}{a-b^2}$, y de consiguiente $x=\frac{c-2}{a-b^2}$.

234 „Quando alguna ó mas cantidades „dividen la incognita, se multiplican los tér„minos de la equacion por cada divisor, y „quedará desembarazada de ellos dicha in„cognita sin perjuicio de la igualdad.“ Sean $\frac{x}{b}-2=a-c^2$, si se multiplica toda la equacion por b que parte á x, se tendrá $\frac{bx}{b}-2b=ab-bc^2$, ó $x-2b=ab-b^2c$, con x libre de b. En la equacion $t+\frac{z}{2}=a^2-\frac{z}{c}$, que-

dará z sin divisores, multiplicando todos sus términos primero por 2, lo que da $2t+z=2a^2-\frac{2z}{c}$; y despues por c, de que sale $2ct+cz=2a^2c-2z$. Para quitar los divisores de una vez se multiplica toda la equacion por el producto de todos ellos. Multiplicando en la equacion anterior por $2\times c$ ó $2c$, se tiene $2ct+\frac{2cz}{2}=2a^2c-\frac{2cz}{c}$; que se reduce á $2ct+cz=2a^2c-2z$. Ultimamente, si en la equacion $\frac{3-y}{c}+n=\frac{2y}{a-2}+ab$ se multiplican sus dos miembros por $ac-2c$ producto de los divisores c y $a-2$, se tendrá despues de hacer las reducciones regulares, $3a-ay-6+2y+acn-2n=2cy+a^2bc-2abc$.

235 Supuestas estas reglas, si se nos mandase despejar una incognita en una equacion de 1.^{r} grado; lo 1.° se quita qualquiera cantidad que haya comun en todos los términos de la equacion dividiéndolos por ella. Lo 2.° se quitan por la multiplicacion todos los quebrados donde se halle la incognita. 3.° Valiéndose de la trasposicion, se ponen en uno de los miembros de la equacion todos los términos en que se halle la incognita, y en el otro los que no. 4.° Se dividen ambos miembros de la equacion por las cantidades que multiplican la incognita, y seguramente se

habrá despejado, á no ser que quede bajo de algun signo radical.

236 En este caso se deja sola en un miembro la cantidad radical, despues se suben ambos á la potencia indicada por el radical, y quedará la incognita desembarazada de este vínculo. En $ab+\sqrt{x}=m$, ó $\sqrt{x}=m-ab$, se suben ambos miembros al cuadrado, y resulta $x=(m-ab)^2$. Si se diese $\sqrt[3]{\left(\frac{ax-x}{3}\right)}-\frac{3}{5}=b$ ó $\sqrt[3]{\left(\frac{ax-x}{3}\right)}=b+\frac{3}{5}$ se subirán al cubo los dos miembros, y se tendrá $\frac{ax-x}{3}=(b+\frac{3}{5})^3$: multiplíquese por 3 y pártase despues por $a-1$ y saldrá por último $x=\frac{3(b+\frac{3}{5})^3}{a-1}$.

Hayase de despejar x en la equacion $\frac{a^2x}{4}-5ax+\frac{ad}{2}-a=am^3-\frac{ax}{d}$, que parto desde luego por a comun á todos sus términos. En $\frac{ax}{4}-5x+\frac{d}{2}-1=m^3-\frac{x}{d}$ que resulta, multiplico por el producto $4d$ de los divisores de x, y saldrá reduciendo, $adx-20dx+2d^2-4d=4dm^3-4x$. Pongo ahora en el 1.^{r} miembro los términos que tienen x, y en el 2.° los que no, y tendré $adx-20dx+4x=4dm^3-2d^2+4d$: parto últimamente ambos miembros por $ad-20d+4$ multiplicador de x, y será reduciendo, $x=\frac{4dm^3-2d^2+4d}{ad-20d+4}$, donde x está ya despejada.

237 Vamos á poner en práctica estas reglas y las que dimos para resolver los problemas, resolviendo algunos que deben servir de modelo para quantos se pueden proponer; en la inteligencia de que llegar derechamente á formar la equacion por la que se resuelve un problema propuesto, es mas obra del talento y tino de cada uno que fruto de las reglas; las quales como son vagas y generales no es tan facil acomodar á los casos particulares.

Problema 1.° „Manda uno en su testa„mento dividir 50000 pesos que tiene de „hacienda, entre tres sobrinos, de modo que „al mayor toquen 300 mas que al mediano „y á este 200 mas que al último: y se desea „saber quánto deben dar á cada uno.‟

En este problema se pide dividir el número 50000 en tres partes tales que la mayor exceda en 300 á la mediana, y esta en 200 á la última: es decir, que la menor con 200 componga la del medio, y esta con 300 la mayor. Luego si dando por conocida la mas pequeña, la llamo x; será la mediana x con 200 ó $x+200$, y la mayor $x+200+300$. Para que esto sea cierto, ha de componer

50000 la suma de dichas tres partes; sumo, pues x, $x+200$, $x+200+300$, y igualando la suma $3x+700$ á 50000, tendré la equacion $3x+700=50000$; en la que mudando al 2.° miembro 700 y partiendo $3x=50000-700$ por 3 que multiplica á x, saldrá $x=\frac{50000-700}{3}=\frac{49300}{3}=16433\frac{1}{3}$ que es el valor de la parte menor x. Será pues, la mediana $x+200$, $16433\frac{1}{3}+200=16633\frac{1}{3}$, y la mayor $x+200+300$, $16433\frac{1}{3}+200+300=16933\frac{1}{3}$. Con efecto, dichas tres partes suman 50000, y sus diferencias son 200 y 300 como lo pide el problema.

2.° „Sale Pedro de Madrid caminando 8 „leguas cada dia, y á los 6 dias sale Juan „en su alcance caminando 11 leguas ¿en „quántos dias le alcanzará?"

Si suponemos que le alcance en z dias, habrá andado en este tiempo tantas 11 leguas como dias, ó z veces 11 que son $11z$; en estos mismos dias andará Pedro z veces 8 ó $8z$, que con las 48 leguas de 6 dias á 8 leguas que sacó de ventaja al otro, componen $48+8z$. Para que le alcanzase Juan deben ambos haber andado igual número de leguas; luego serán iguales $11z$ y $8z+48$, y se tendrá la equacion $11z=8z+48$, donde $11z-8z=48$, ó $3z=48$, y $z=\frac{48}{3}=16$, número de dias en que Juan anduvo $16\times11=$

176 leguas, las mismas que $48+16\times8=176$ que anduvo Pedro.

3.° „Entre dos amigos que juntan bol-„sas, componen 100 doblones, y el uno tie-„ne 36 mas que el otro ¿quántos tiene cada „uno?“ Aquí se nos piden dos números, dada su suma 100 y su diferencia 36. Sea pues, el número menor x, será el otro $x+36$, y los dos $x+x+36$: y como han de componer 100, se tendrá $2x+36=100$, $2x=100-36$, y $x=\frac{100-36}{2}=\frac{64}{2}=32$, parte menor: la mayor $x+36$ es $32+36=68$, que con 32 efectivamente compone 100, y le excede en 36.

238 Si en lugar de 100 y 36 se hubiera dado por suma la cantidad a, y por diferencia b, suponiendo x el número menor; sería $x+b$ el mayor, y hubiera sido la equacion $x+x+b=a$, $2x=a-b$, y $x=\frac{a-b}{2}$, número menor. El mayor $x+b$ es $\frac{a-b}{2}+b$ que se reduce á $\frac{a+b}{2}$: y como a y b son cantidades generales, podemos inferir que el número mayor de dos cuya suma y diferencia a y b se da conocida, es $\frac{a+b}{2}$ ó *la mitad de la suma y la mitad de la diferencia*, y el menor $\frac{a-b}{2}$ ó *la mitad de la suma menos la mi-*

tad de la diferencia. De suerte que si dos números suman 60 y se diferencian en 12; será el mayor $\frac{60+12}{2}=36$, y el menor $\frac{60-12}{2}=24$.

239 Quando en lugar de números se ponen letras en el cálculo de los problemas, su resolucion es general como esta, y abraza todos los casos posibles en aquella materia. Con este motivo advertiremos que es facil y conveniente conseguir una resolucion general como la anterior en qualquier problema, si en lugar de los números que en él se den, usamos de letras; cuidando de expresar las cantidades generales con las que le sean mas análogas, representando, por egemplo, el tiempo con la letra t, la velocidad con v, uno de sus grados con 1, dos con 2.... el duplo de una cantidad que se haya supuesto a, con $2a$, sus dos tercios con $\frac{2a}{3}$, su diferencia con otra b, con $a-b$, su producto con ab &c.

4.° ,,Quiere Pedro traer á su taller cier-
,,to número de Obreros, y exâminando su
,,caudal, halla que si da á cada uno 12 do-
,,blones al mes, le faltan 6 para pagarlos, y
,,dándoles 10 doblones le sobran 4 ¿quántos
,,eran los Obreros, y quántos doblones tenia?"

Sea y el número de Obreros: pagados á

12 doblones importan $12 \times y$ ó $12y$, cantidad que excede en 6 el caudal de Pedro, el qual por lo tanto será $12y - 6$. Pagados á 10 importan $10y$ que con 4 componen dicho caudal, que tambien será $10y + 4$. Iguálense ahora estas dos expresiones, y se tendrá $12y - 6 = 10y + 4$, ó $12y - 10y = 6 + 4$, esto es, $2y = 10$, ó $y = 5$, número de Obreros. Serán pues los doblones $12y - 6 = 12 \times 5 - 6 = 54$, ó $10y + 4 = 10 \times 5 + 4 = 54$.

Si se hubiera supuesto x el número de doblones, con $x + 6$ se hubieran pagado á 12 doblones los Obreros, cuyo número sería.... $\frac{x+6}{12}$. Con $x + 4$ se pagaban á 10, y por lo mismo $\frac{x-4}{10}$ es tambien el número de Obreros. Será pues, $\frac{x-4}{10} = \frac{x+6}{12}$: donde quitando los quebrados, resulta $12x - 48 = 10x + 60$, $12x - 10x = 60 + 48$, ó $2x = 108$, y $x = 54$.

Sea ahora en general x el número de Obreros, a el mayor precio, b el menor, c lo que falta para pagar al precio subido, y d lo que sobra pagando al precio inferior. Segun lo que digimos en la 1.ª resolucion $ax - c$ y $bx + d$ expresan el número de doblones, y por eso $ax - c = bx + d$, $ax - bx = c + d$, y $x = \frac{c+d}{a-b}$; y será el número de Obreros *la* *falta y la sobra* c+d *partida por la diferencia* a—b *de los precios* : el número de doblones se saca poniendo en $ax-c$, ó en $bx+d$ el valor de x : poniéndole en $ax-c$, es $a\times\left(\frac{c+d}{a-b}\right)-c=\frac{ac+ad-ac+bc}{a-b}=\frac{ad+bc}{a-b}$.

5.° „Un Galgo á 100 varas de una lie„bre ¿quándo la alcanzará, en la suposicion „de que el perro anda 3 varas, mientras la „liebre anda 2?"

Supongamos que la liebre anda x v. antes de ser cogida, andará el perro $100+x$: y como estas dos distancias están en razon de 2 á 3, será $2:3::x:100+x$: luego (174), $3x=200+2x$ ó $x=200$. Si hubiera sido $m:n$ la razon de las distancias, hubiera resultado : suponiendo $100=a$, $m:n::x:a+x$, y $nx=am+mx$, $nx-mx=am$, y $x=\frac{am}{n-m}$.

6.° „Uno dejó en su testamento á su hi„jo mayor 100 doblones y el décimo de lo „restante de su hacienda : al hijo 2.° 200 do„blones y el décimo de lo que quedase : al „3.° 300 con el décimo de lo restante : al 4.° „400 con el décimo.... : continuando de esta „suerte hasta el último, á quien deja el so„brante de las partes de sus hermanos : ege„cutado el testamento salieron todos con par„tes iguales ¿quántos eran los hijos, quán„to cupo á cada uno, y quánta era la ha„cienda?"

Llamemos los 100 doblones a, y supongamos x la hacienda. Quitando 100 doblones ó a de la hacienda x para el 1.^{r} hijo, queda $x-a$, cuyo décimo $\frac{x-a}{10}$ junto con a compondrá su parte $a+\frac{x-a}{10}$, que se reduce á $\frac{9a+x}{10}$. Quitando de la hacienda x esta cantidad y 200 doblones ó $2a$ para el 2.° hijo, queda reducida á $x-\frac{9a-x}{10}-2a=\frac{9x-29a}{10}$: el décimo de esta cantidad es $\frac{9x-29a}{100}$, y sumado con $2a$ compone $2a+\frac{9x-29a}{100}$ ó.... $\frac{171a+9x}{100}$ parte del 2.° hijo. Como todas las partes deben ser iguales, formaré de las dos halladas la equacion $\frac{9a+x}{10}=\frac{171a+9x}{100}$, donde multiplicando por 100, resulta $90a+10x=171a+9x$, ó $10x-9x=171a-90a$, y por último $x=81a=81\times100=8100$ que es la hacienda: que dividida por una de las partes $\frac{9a+x}{10}=\frac{900+8100}{10}=900$, da $\frac{8100}{900}=9$, número de los hijos.

7.° „Tres comerciantes emplean 1500 „doblones en un negocio ¿qual debe ser su

„ganancia para que al fin del año toquen á „cada uno 398 doblones?"

Si se supone la ganancia x, resultarán $1500+x$ al fin del año: y pues que debe tocar de esto á cada uno de los tres 398, será $\frac{1500+x}{3}=398$, $1500+x=1194$, y de consiguiente $x=1194-1500=-306$. Este valor negativo significa que hubo pérdida y no ganancia en el empleo, y de consiguiente que el problema está mal propuesto. Efectivamente, si de 1500 se quita la pérdida 306, y se divide entre los tres, el residuo 1194, tocará 398 doblones á cada uno.

8.° „Se pide un método que abrevie la „práctica de la regla de falsa posicion do„ble (193)." Supongamos y lo que se ha de añadir ó quitar al número supuesto para que salga el verdadero x; sea d la menor equivocacion y b el número del qual resulta, dejando las demas suposiciones (194) invariables. Si b es menor que x, será $y+b=x=\frac{bc-ad}{c-d}$, y $y=\frac{bc-ad}{c-d}-b=\frac{db-ad}{c-d}=\frac{(b-a)d}{c-d}$....
Suponiendo á b mayor que x, hubiera salido $b-y=x=\frac{bc-ad}{c-d}$, donde $y=\frac{(a-b)d}{c-d}$.

Esto quiere decir que si se multiplica por el menor error la diferencia de los números supuestos, y el producto se parte por la diferencia de los errores quando tienen un mismo signo, ó por su suma si le tienen diverso, saldrá de cociente lo que se ha de añadir al número supuesto, si es menor que el verdadero, ó lo que se le ha de quitar si es mayor, para que resulte el verdadero.

Si en el 1.° de los egemplos que allí pusimos se multiplica 3, diferencia entre los números supuestos 6 y 9, por el menor error 94, y se parte el producto 282 por la suma de los errores 282, se tendrá 1 de cociente, que restado de 9 da el número verdadero 8. En el 2.° egemplo multiplicando por el menor error 20, 1 diferencia entre 5 y 6, y partiendo el producto por 20 diferencia de los errores, sale tambien 1, que añadido á 6 da el número verdadero 7.

Los problemas siguientes servirán de egercicio á los principiantes: y aunque se deja á su habilidad el modo de resolverlos, añadimos la solucion para que les sirva de guia.

9.° ,,A y B, se pusieron á jugar con ,,igual número de pesos. A perdió 12 y B ,,57, quedaron á A quatro veces mas pesos ,,que á B ¿quántos tenian? Resp. 72 *pes.*

10.° ,,Pactó un Jornalero perezoso re-,,cibir 12 rs. y de comer el dia que trabaja-,,se, y pagar el dia que no 6 rs. al Amo por ,,la comida. Echaron cuentas á los 30 dias ,,y quedaron en paz ¿quántos dias trabajó?

„Resp. trabajó 10 dias y holgó 20.

11.° „Hurtaron dos 60 dob. y habien-„do reñido al repartirlos, arrebató cada uno „lo que pudo: puestos en paz dió el 1.° al „2.° $\frac{1}{4}$ de lo que cogió, y el 2.° al 1.° $\frac{1}{3}$ y „quedaron con partes iguales ¿quánto arre-„bató cada uno? Resp. el 1.° 24 y el 2.° 36.

12.° „Uno dejó en su testamento la mi-„tad de su hacienda á su hijo mayor, al 2.° „$\frac{5}{18}$ de dicha hacienda, $\frac{1}{5}$ á una hija y 1200 „*pes.* por su alma. ¿Qué hacienda tenia? „Resp. 54000 *pes.*

13.° „¿Quál es el número que partido „por 3, es excedido de 20 en lo que 30 ex-„cede al dicho número? Resp. 15.

Problemas con mas de una incognita.

240 Quando hay que averiguar en un problema, dos, tres ó mas incognitas; debe haber en él otros tantos datos, ó condiciones: entonces se formará con ellas igual número de equaciones, y se sacará el valor de las incognitas por las reglas siguientes.

241 Si hubiese dos equaciones con dos incognitas, se despeja una de ellas en ambas equaciones, y con los dos valores que resultan, se forma una equacion, que solo tendrá una incognita: despejese esta, y substituyendo su valor en qualquiera de las dos

equaciones en que se despejó la 1.ª, se habrá averiguado tambien lo que vale.

Probl. 14.° „Dos Amanuenses han tras-„ladado 280 pliegos entre ambos, el uno A „trabajando 5 dias, y el otro B trabajando 8. „Los mismos han copiado 288 pliegos tra-„bajando A 7 dias y B 6 ¿quántos pliegos „escribe cada uno al dia?“

Si supongo x los pliegos que copia A, y z los que copia B; serán $5 \times x$ ó $5x$ los pliegos que de los 280 copió A en 5 dias, y $8z$ los que copió B en 8 dias: y de consiguiente será $5x+8z=280$. Por lo mismo serán $7x$ los pliegos que de los 288 habrá escrito A, y $6z$ los de B, y será $7x+6z=288$. Despejo x en ambas equaciones, y tendré en la 1.ª $x=\frac{280-8z}{5}$, y en la 2.ª $x=\frac{288-6z}{7}$. Igualo ahora estos dos valores de x, y resultará la equacion $\frac{280-8z}{5}=\frac{288-6z}{7}$, con una sola incognita z: despejándola sale $z=20$, cuyo valor substituido por z en una de las dos equaciones en que se despejó x, v. gr. en la 1.ª $x=\frac{280-8z}{5}$, la reduce á $x=\frac{280-8 \times 20}{5}$, esto es $x=24$. Dire, pues, que de los 280 copió A $24 \times 5=120$, y B $20 \times 8=160$: y de los 288 A trasladó 168, y B 120.

Si hubieramos supuesto $280=a$, $5=b$,

$8=c$: $288=d$, $7=e$, $6=f$: serían las equaciones $bx+cz=a$, $ex+fz=d$. Despejando x, sale $x=\frac{a-cz}{b}$, $x=\frac{d-fz}{e}$: y igualando estos valores, $\frac{a-cz}{b}=\frac{d-fz}{e}$; donde $z=\frac{bd-ae}{fb-ce}$. Póngase este valor en la equacion $x=\frac{a-cz}{b}$, y saldrá por último $x=\frac{a-c\left(\frac{bd-ae}{fb-ce}\right)}{b}$, que se reduce á $x=\frac{af-cd}{bf-ce}$.

15.° „En una mezcla de oro y plata que „tiene 8 pulgadas cúbicas de volumen, y „pesa 5 libras ó 80 onzas, se quiere saber „quántas pulgadas hay de oro, y quántas „de plata, en la inteligencia de que cada „pulgada cúbica de oro pesa 12 onzas y $\frac{2}{3}$, „y la de plata 6 onzas y $\frac{8}{9}$."

Sea x el número de pulgadas de oro de la mezcla, y z el de las de plata, y será $x+z=8$, 1.ª equacion. El peso del oro á razon de $12\frac{2}{3}$ cada pulgada, es $12\frac{2}{3}\times x$ ó $\frac{38x}{3}$; y el de la plata á $6\frac{8}{9}$ cada pulgada, $6\frac{8}{9}\times z$ ó $\frac{62z}{9}$: y como toda la mezcla pesa 80 onz. se tendrá la 2.ª equacion $\frac{38x}{3}+\frac{62z}{9}=80$. Despejese x en las dos, y será en la 1.ª

$x=8-z$, y en la 2.ª $x=\frac{720-62z}{14}$. Será pues, $\frac{720-62z}{14}=8-z$, de donde se saca $z=3\frac{9}{13}$: luego $x=8-z=8-3\frac{9}{13}=4\frac{4}{13}$. Estos dos valores ademas de sumar 8, si se multiplican $3\frac{9}{13}$ por $\frac{62}{9}$, y $4\frac{4}{13}$ por $\frac{38}{3}$, producirán 80 onzas.

Si se supone a el volumen de la mezcla, b el peso; c el peso de cada pulgada del un metal, y d el del otro; serán $x+z=a$, y $cx+dz=b$ las dos equaciones; en las que $x=a-z$, $x=\frac{b-dz}{c}$. Hagase ahora $a-z=\frac{b-dz}{c}$, y será $z=\frac{ac-b}{c-d}$: y sustituyendo este valor en $x=a-z$, será $x=a-$.... $\frac{a\ \ +b}{c-d}=\frac{b-ad}{c-d}$: valores generales para toda especie de mezcla.

242 Si ocurriesen tres equaciones con tres incognitas x, z, y, por eg. se despejará qualquiera de ellas, x, en las tres equaciones, é igualando el valor mas sencillo de x á los otros dos, resultarán dos equaciónes con las dos incognitas z, y, que se despejan como acabamos de decir. Conocidas z, y, se conocerá x substituyendo en una de las tres equaciones en que se despejó, los valores de z,y. Quando hay quatro ó mas equaciones é

incognitas, se despeja una en todas, se igualan sus valores para tener una equacion y una incognita menos, y se continúa asi hasta llegar á una sola equacion con una sola incognita, haciendo despues las sustituciones correspondientes.

Prob. 16.° „Un General divide su tropa „en tres trozos, les ofrece de agasajo, si toman una plaza que va á sitiar, 2703 *dob.* „de los que han de percibir 3 *dob.* cada uno „de los Soldados del trozo que entre primero en ella, y los que queden se han de repartir igualmente entre los Soldados de los „demas trozos. Hallase pues, que si el 1.ʳ „trozo entra primero toca á cada uno de los „Soldados de los demas á doblon y medio: „si entra primero el 2.° caben los demas á „doblon, y si entra el 3.° tocan á 45 rs. ó „$\frac{3}{4}$ de doblon á los otros: y se pregunta el „número de Soldados de cada trozo.“

Supongamos x el número de Soldados del 1.ʳ trozo, z por los del 2.° y por los del 3.° y llamemos 2703, a. Si entra el 1.ʳ trozo primero, son $3x$ los doblones que perciben sus Soldados, y como toca doblon y medio á los demas, consumirán $1\frac{1}{2}(z+y)$ ó $\frac{3z+3y}{2}$ que con $3x$ compondrán 3703 ó a, y será la 1.ª equacion $3x+\frac{3z+3y}{2}=a$: si entra primero el 2.° consumen sus Soldados $3z$, y los demas que tocan á doblon, $x+y$, y la 2.ª equacion es $3z+x+y=a$. Entrando el 3.° primero son $3y$ los doblones que se reparten á sus Soldados, y $\frac{3x+z}{4}$ los demas: luego la 3.ª equacion es $3y+\frac{3x+3z}{4}=a$.

Despejando ahora x en las tres resulta $x=\frac{2a-3z-3y}{6}$, $x=a-3z-y$, $x=\frac{4a-12y-3z}{3}$. Igualese el 2.° valor á cada uno de los otros, y se tendrá despejando z en las dos equaciones $a-3z-y=\frac{2a-3z-3y}{6}$, $a-3z-y=\frac{4a-12y-3z}{3}$ que resultan, $z=\frac{4a-3y}{15}$, $z=\frac{9y-a}{6}$. Formese por último, de estos dos valores la equacion $\frac{4a-3y}{15}=\frac{9y-a}{6}$; de donde se saca $y=\frac{39a}{53}=\frac{39\times 703}{153}=689$, Soldados del 3.ʳ trozo. Pongo este valor en la equacion $z=\frac{9y-a}{6}$, y saldrá $z=\frac{9\times 689-2703}{6}=583$, Soldados del 2.° trozo. Sustituyo últimamente los dos valores de z, y, en la equacion $x=a-3z-y$, y será $x=2703-3\times583-689=265$, Soldados del 1.^{r} trozo. En efecto, si se hace la prueba, se verá que $3\times265+\frac{3}{2}(689+583)=2703$, $3\times583+265+689=2703$, y finalmente $3\times689+\frac{3}{4}(265+583)=2703$.

Los siguientes problemas servirán de egercicio á los jóvenes.

17.° „Si al valor de una de dos alha-„jas que uno tiene, se añaden 150, resulta „un valor triplo de la otra, y si al precio „de esta se añaden los 150, iguala á la 1.^{a} „¿Quánto vale cada una? Resp. La 1.^{a} 300 „y la otra 150.

18.° „¿Qué números suman 570, de los „quales $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ del 1.° iguale á $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$ „del 2.°? Resp. 264, y 306.

19.° „Quarenta personas comen una „merienda que importa 40 rs. Cada hombre „paga 4 rs. cada muger 3 y cada niño $\frac{1}{5}$, „¿quántos hombres, mugeres y niños hay, „en el supuesto que este último número es „quadruplo del de los otros dos añadidos „de 1?" Resp. 5 *homb.* 4 *mug.* y 50 *niños.*

20. „Tres se ponen á jugar: á la 1.^{a} „partida perdió el 1.° igual cantidad que „los otros tenian: á la 2.^{a} perdió el 2.° otro „tanto quanto tenian el 1.° y 3.° En la 3.^{a} „partida perdió el 3.° tambien cantidad igual „á la de los otros dos: y al salir del juego

„salieron los tres con igual dinero: ¿con „quánto se puso á jugar cada uno?" Resp. el 1.° con 39, el 2.° con 21 y el 3.° con 12 pesos.

Problemas indeterminados.

243 Los problemas resueltos hasta aqui se llaman *determinados*, porque tienen tantas condiciones como incognitas. Quando estas son mas que las condiciones, se llama el problema *mas que determinado*, y sucede frecuentemente que las que hay demas, ó son inútiles ú oponiéndose unas á otras hacen el problema imposible.

Pidense por egemplo, dos números x, z cuya suma sea 8, su diferencia 2, y su producto 12. De las tres equaciones $x+z=8$, $x-z=2$, $xz=12$, que resultan, la 2.ª da $x=z+2$, y sustituyendo este valor en la 1.ª, se tiene $z+2+z=8$, ó $z=3$: puesto este valor en la 2.ª, resulta $x=5$. Póngase ahora el producto 3×5 en lugar de xy en la 3.ª equacion, y la reducirá á $15=12$, consecuencia falsa que muestra que el problema es imposible.

244 Si la tercera condicion del problema hubiera pedido que el producto fuese 15, hubiera sido la 3.ª equacion $xy=15$: y sacando de las dos primeras equaciones $x=5$, $z=3$, sustituyendo el producto de estos dos núme-

ros en lugar de xy en la 3.ª equacion, hubiera resultado $15=15$: equacion que se llama *idéntica*, por tener unas mismas cantidades en ambos miembros, y que confirma la inutilidad de la 3.ª condicion para el problema.

En general, quando despues de haber llenado las condiciones de un problema, resulta una equacion idéntica; es prueba de que á todas las cantidades de la clase de que habla el problema, conviene la propiedad que en él se propone. Si se pidiese un número x de cuyo duplo restando 1, y del duplo de la resta quitando 2, partiendo despues el residuo por 4, resultase el número $x-1$; se hubiera tenido $\frac{4x-4}{4}=x-1$, donde $x-1=x-1$: equacion idéntica que muestra, que conviene á qualquier número la propiedad expresada en el problema.

245 Llamamos á un problema *indeterminado* quando hay en él mas incognitas que condiciones ó que equaciones: si se piden dos números x, z, tales que restando el 2.° del 1.° sea la diferencia el duplo del 1.° menos 6; se tendría una sola equacion $x-z=2x-6$ con dos incognitas. En este caso se despeja una de ellas $x=6-z$, y dando á arbitrio diferentes valores á z, se tienen otros tantos valores de x. Si se hace $z=0$, será $x=6$:

si $z=1$, $z=6-1=5$; si $z=20$, será $x=6-20=14$ &c. hasta el infinito.

246 Quando en estos problemas se exîge que los valores de x, z sean números enteros y positivos, se ciñe á pocas el infinito número de soluciones y queda el problema medio determinado, ó *semideterminado*; el anterior por eg. no admite mas que las siete soluciones siguientes:

$$z=0, z=1, z=2, z=3, z=4, z=5, z=6,$$
$$x=6, x=5, x=4, x=3, x=2, x=1, x=0.$$

Y por quanto no es de nuestro instituto estendernos en los métodos generales, inventados hasta aqui para averiguar el número de soluciones de los problemas semideterminados, nos contentarémos con una muestra de ellos, resolviendo los problemas siguientes.

1.° „Cierto número de varas de paño „á 21 rs. y de tela á 31 importan 1770 rs. „¿quántas hay de cada cosa?"

Siendo x el número de varas de paño y z el de las de tela, tendrémos $21x+31z=1770$, y despejando la incognita x que tiene menor coeficiente, $x=\frac{1770-31z}{21}=84-z+\frac{6-10z}{21}$ dividiendo por 21. Como esta cantidad ha de ser número entero, lo será tambien $\frac{6-10z}{21}$ ó $\frac{10z-6}{21}$. Llamemos pues, E,

E', E'' un entero, y tendrémos $\frac{10z-6}{21} = E$, y $z = \frac{21E+6}{10} = 2E + \frac{E+6}{10}$. Tambien $\frac{E+6}{10} = E'$ número entero, y de consiguiente $E = 10E' - 6$. Este valor que ya no tiene quebrado, substituido en la equacion $z = \frac{21E+6}{10}$, la reduce á $z = 21E' - 12$: y éste puesto en $x = \frac{1770-31z}{21}$, da $x = 102 - 31E'$.

Aunque de las dos equaciones $z = 21E' - 12$, $x = 102 - 31E'$ me dice la 1.ª que saldrá número entero y positivo sustituyendo por E qualquier cantidad que no sea cero; pero por la 2.ª ha de ser tal el valor de E' que $31E'$ sea menor que 102, ó E' menor que $\frac{102}{31} = 3\frac{9}{31}$: luego el problema tiene solo tres soluciones, la 1.ª haciendo $E' = 1$, en cuyo caso $x = 71$, $z = 9$, el importe de las varas de paño 1491, y 279 el de las de tela. La 2.ª haciendo $E' = 2$, y entonces $x = 40$, $z = 30$, el valor del paño 840, y el de la tela 930. Y la 3.ª haciendo $E' = 3$, en cuyo caso $z = 9$, $z = 51$, el paño 189, y la tela 1581.

2.° „Se pide componer 741 rs. con 41 „piezas de tres especies, á saber de 24, de „19 y de 10 rs.“

Si son x, z, y, respectivamente los números de monedas de cada especie, será $x+z+y=41$, y $24x+19z+10y=741$. En estas dos equaciones se tiene $x=41-z-y$, $x=\ldots$ $\frac{741-19z-10y}{24}$; y de consiguiente $41-z-y=\frac{741-19z-10y}{24}$, y $z=\frac{243-14y}{5}=48-2y+\frac{3-4y}{5}$. Hagase ahora $\frac{3-4y}{5}=E$, será $y=\frac{3-5E}{4}=-E+\frac{3-E}{4}$: y suponiendo $\frac{3-E}{4}=E'$, será $E=3-4E'$. Puesto este valor en $y=\frac{3-5E}{4}$, resulta $y=5E'-3$: y en $z=\frac{243-14y}{5}$ substituyendo el de y, sale $z=57-14E$: y puestos los de z, y, en $x=41-z-y$, se tiene por último $x=9E'-13$.

Concluyo pues, de las tres equaciones $x=9E'-13$, $z=57-14E'$, $y=5E'-3$ que para tener soluciones en números enteros y positivos, E' ha de ser tal 1.° que $9E'$ sea mayor que 13, ó E' mayor que $\frac{13}{9}$; 2.° que $14E'$ ha de ser menor que 57 ó E' menor que $\frac{57}{14}=4\frac{1}{14}$: 3.° que $5E'$ sea mayor que 3, ó E' mayor que $\frac{3}{5}$. Luego solo puedo dar á E' los tres valores 2, 3, 4, que dan las tres soluciones siguientes del problema, $x=5$, $z=29$, $y=7$: $x=14$, $z=15$, $y=12$: $x=23$, $z=1$, $y=17$.

3.° „Entre dos tienen 100 dob. la parte „del 1.° contada siete á siete, y la del 2.° „ocho á ocho dan de resta 7, ¿quánto tiene „cada uno?"

Sea $7z+7$ la parte del 1.° y $8x+7$ la del 2.° será $7z+8x+14=100$, y $z=\frac{86-8x}{7}=12-x+\frac{2-x}{7}$. Hago $\frac{2-x}{7}$ ó $\frac{x-2}{7}=E$, y tendré $x=7E+2$, y de consiguiente $z=\frac{86-8x}{7}=10-8E$; equacion donde solo se puede poner por E cero y 1: y asi de solos dos modos se puede desatar el problema. Si $E=0$, sale $z=10$, y $x=2$, la parte del 1.° $7z+7=77$, y la del 2.° $8x+7=23$. Si $E=1$, $z=2$, $x=9$, $7z+7=21$, y $8x+7=79$.

4.° „Hallar dos números cuadrados cu- „ya suma sea a, número entero y positivo.

Si se suponen dichos números x^2, z^2, se tendrá $x^2+z^2=a$, y $x=\sqrt{(a-z^2)}$: es decir, que el problema no será posible 1.° si z^2 es mayor que a y lo mismo x^2; pues si $a=17$, y $z=5$, $\sqrt{(a-z^2)}$ se reduce á $\sqrt{-8}$, cantidad imaginaria ó imposible: lo 2.° si $a-z^2$ no es un cuadrado perfecto; pues si $a=17$, $z=3$, $\sqrt{(a-z^2)}=\sqrt{8}$ no desata la cuestion por no ser 8 cuadrado perfecto; con que si $a=17$, solo es posible haciendo $z=1$, en cuyo caso $\sqrt{(a-z^2)}=\sqrt{16}=4$, y suponiendo

$z=4$, pues entonces $\sqrt{(\ldots-z^2)}=\sqrt{1}=1$.

5.° „Hallar dos cuadrados que se dife-„rencien en a cantidad entera y positiva."

Si llamamos x la suma de las raices de los dos números y z la diferencia, serán los números (238), $\frac{x+z}{2}$, $\frac{x-z}{2}$: la diferencia de sus cuadrados es $\frac{x^2+2xz+z^2-x^2+2xz}{4}$, que se reduce á xz: luego $xz=a$; y la diferencia dada es siempre el producto de la suma de las raices de los números multiplicados por la diferencia.

Sea $a=60$, y como sus factores son 1×60, 2×30, 3×20, 4×15, 5×12, 6×10; tendrá el problema seis soluciones, bien que solo con 2 y 30, 6 y 10 números pares resultan números enteros. Si $x=30$, $z=2$, $\frac{x+z}{2}=16$,.. $\frac{x-z}{2}=14$, sus cuadrados son 256 y 196 que se diferencian en 60. Si $x=10$, $z=6$,..... $\frac{x+z}{2}=8$, $\frac{x-z}{2}=2$ y sus cuadrados 64 y 4 tambien se diferencian en 60.

Equaciones y Problemas de segundo grado.

247 Quando estas equaciones son *completas* ó no tienen mas términos con la in-

cognita que el de su cuadrado, se resuelven dejando en un miembro este término solo, sin coeficiente, y con signo positivo, y sacando despues la raiz de ambos miembros. En la equacion $a=c^2-dx^2$, se pasa al 1.r miembro $-dx^2$, y los demas al 2°, se le quita el coeficiente d, y queda $x^2=\frac{c^2-a}{d}$, despues se saca de ambos miembros la raiz cuadrada, y resulta $x=\pm\sqrt{\left(\frac{c^2-a}{d}\right)}$. Con los signos $\pm$ del radical, se significan las dos raices positiva y negativa que tiene el cuadrado $\frac{c^2-a}{d}$ (113), el qual es producto de $\sqrt{\left(\frac{c^2-a}{d}\right)}\times\sqrt{\left(\frac{c^2-a}{d}\right)}$ ó de $-\sqrt{\left(\frac{c^2-a}{d}\right)}\times-\ldots\sqrt{\left(\frac{c^2-a}{d}\right)}$. Si la equacion hubiera sido $az^2-3b=c+bz^2$, ó $az^2-bz^2=c+3b$; divididos ambos miembros por $a-b$, y sacando la raiz del resultado $z^2=\frac{c+3b}{a-b}$, hubiera salido $z=\pm\sqrt{\left(\frac{c+3b}{a-b}\right)}$.

248 Quando hay uno, dos ó mas términos con la incognita ademas de su cuadrado, como en $x^2+2ax=b$; puestos todos en un miembro se ve que á x^2+2ax cuadrado de la 1.ª parte x, y duplo de la 1.ª por

la 2.ª, falta el cuadrado de la 2.ª parte para ser cuadrado completo: luego habrá que añadirle para que lo sea, a^2 cuadrado de a mitad de $2a$ que multiplica á x, el qual se añadirá tambien al 2.° miembro de la equacion para que se conserve la igualdad. Resulta pues, la equacion $x^2+2ax+a^2=b+a^2$ de cuyos dos miembros sacando la raiz cuadrada, se tiene $x+a=\pm\sqrt{(b+a^2)}$, ó $x=-a\pm\sqrt{(b+a^2)}$.

249 Estas equaciones se llaman *incompletas*; y se resuelven generalmente „poniendo primero en un miembro los términos donde se halle la incognita, dejando positivo al „del cuadrado, y con 1 de coeficiente: se añade despues á ambos miembros el cuadrado „de la mitad de la cantidad ó cantidades que „multiplican la incognita, y se saca por último la raiz de dichos miembros."

Sirva de egemplo la equacion $cx-bd=dx-ax^2$ que dispuesta asi $ax^2+cx-dx=bd$, y dividiéndola por a, se reduce á esta $x^2+\frac{cx-dx}{a}=\frac{bd}{a}$. Añado ahora á sus dos miembros $\left(\frac{c-d}{2a}\right)^2$ cuadrado de la mitad de $\frac{c-d}{a}$ que multiplica á x, y tendré $x^2+\frac{cx-dx}{a}+\left(\frac{c-d}{a}\right)^2=\frac{bd}{a}+\left(\frac{c-d}{2a}\right)^2$, cuyo 1.ᵉʳ miembro es cuadrado completo: saco la raiz de ambos, y como resulta $x+\frac{c-d}{2a}=\pm \ldots\ldots$ $\sqrt{\left(\frac{bd}{a}+\left(\frac{c-d}{2a}\right)^2\right)}$, será por último $x=\frac{c-d}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{bd}{a}+\left(\frac{c-d}{2a}\right)^2\right)}$.

Si se hubiese dado la equacion $4z^2-8c=4z-\frac{cz}{a}-b$, que ordenada y dividida por 4, es $z^2+\frac{cz}{4a}-z=2c-b$; se hubiera completado añadiendo $\left(\frac{c}{8a}-\frac{1}{2}\right)^2$ cuadrado de la mitad $\frac{c}{4a}-1$ que multiplica á z; el resultado es $z^2-\frac{cz}{4a}-z+\left(\frac{c}{8a}-\frac{1}{2}\right)^2=2c-b+\ldots$ $\left(\frac{c}{8a}-\frac{1}{2}\right)^2$; de donde sacando la raiz, se tiene $z+\frac{c}{4a}-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\left(2c-b+\left(\frac{c}{8a}-\frac{1}{2}\right)^2\right)}$, y últimamente $z=\frac{1}{2}-\frac{c}{4a}\pm\sqrt{\left(2c-b+\left(\frac{c}{8a}-\frac{1}{2}\right)^2\right)}$.

Prob. 1.° „Un Agente de comercio recibe „para el gyro, de cada Comerciante tantas „veces 15 *dob.* como asociados hay. Su ga- „nancia que es tantas veces 2 *dob.* por 100 „como Mercaderes hay, multiplicada por $\frac{2}{15}$ „da de producto el número justo de los Mer- „caderes: ¿quántos son?

Suponiendo x el número de Mercaderes, será $15x$ lo que cada uno pone, y la suma de todos $15x \times x$ ó $15x^2$: la ganancia debe ser $\frac{2x}{100} \times 15x^2 = \frac{30x^3}{100}$ ó $\frac{3x^3}{10}$; y multiplicándola por $\frac{2}{15}$ dará el número x; esto es, $\frac{3x^3}{10} \times \frac{2}{15} = x$, ó $\frac{6x^3}{150} = x$, y $6x^3 = 150x$. Pártase por $6x$ y saldrá $x^2 = 25$: luego $x = \pm\sqrt{25} = 5$ número de Mercaderes. Será pues, $5 \times 15 = 75$ lo que cada uno ponía; todo el fondo $75 \times 5 = 375$: y la ganancia $37\frac{1}{2}$.

2.° „Uno compró cierto número de Cor„deros en 1000 rs. á tal precio, que con el „mismo dinero pudo haber comprado 5 mas, „si se los hubieran dado 2 rs. mas baratos y „le hubieran sobrado 10 rs. ¿quántos Cor„deros compró, y qué le costó cada uno?

Siendo x el número de Corderos, será $\frac{1000}{x}$ el precio de cada uno: habiendo comprado 5 mas, hubiera costado cada Cordero $\frac{1000-10}{x+5} = \frac{990}{x+5}$. Y pues este precio es menor que el otro en 2 rs. se tendrá $\frac{990}{x+5} + 2 = \frac{1000}{x}$. Quítense los quebrados y redúzcase, y saldrá $x^2 = 2500$, y de consiguiente $x=50$, número de Corderos; cuyo precio es $\frac{1000}{5}=20$.

3.° „De unos amigos que se juntaron á „merendar, se marcharon dos quando se tra- „tó de pagar 144 rs. que hicieron de coste; „y asi tocó á cada uno de los que quedaron, „6 rs. mas ¿quántos eran?"

Suponiendo x su número, será $\frac{144}{x}$ lo que cada uno debía pagar, y $\frac{144}{x-2}$ lo que efectivamente pagó idos los dos: y pues esta cantidad es mayor que la primera en 6 rs. tendré $\frac{144}{x-2}-6=\frac{144}{x}$, esto es, (quitando los quebrados y reduciendo) $x^2-2x=48$: añado á ambos miembros 1, cuadrado de la mitad del coeficiente de x, y será $x^2-2x+1=48+1$, de donde sacando la raiz sale $x-1=\pm\sqrt{49}$, y $x=1\pm7$. De aqui resultan 8 y -6 por valores de x, y de ellos el 8 es el número de amigos que satisface la cuestion; pues $\frac{144}{8}=18$ parte que debia cada uno de los 8, es menor en 6 que $\frac{144}{8-2}=24$, parte que tocó á los 6, que quedaron.

El otro valor -6 confirma lo que dejamos dicho de las cantidades negativas; pues resuelve el problema en un caso contrario al que se propone: esto es, en el supuesto de que se hubieran llegado dos mas á comer y pagar; y que hubieran tocado 6 rs. menos á cada uno. Con efecto, la equacion hubiera sido $\frac{144}{x}=\frac{144}{x+2}+6$, de donde se saca $x=-1\pm7$, esto es, $x=6$, y $x=-8$.

4.° „Salen á un mismo tiempo dos de „un Pueblo para otro distante a de leguas; „el 1.° anda cada dia c leguas mas que el 2.° „y llega b dias antes que el otro, ¿quántos „dias tarda cada uno, y quántas leguas anda „al dia?"

Siendo y las leguas que anda el 1.° cada dia, serán $\frac{a}{y}$ los dias que tardó, $y-c$ las leguas que anda el 2.° y $\frac{a}{y-c}$ los dias que tardó; y puesto que los dias se diferencian en b; se tendrá $\frac{a}{y}=\frac{a}{y-c}-b$; ó $y^2-cy=\frac{ac}{b}$. Completese el cuadrado añadiendo $\frac{c^2}{4}$, y se tendrá $y^2-cy+\frac{c^2}{4}=\frac{ac}{b}+\frac{c^2}{4}$: de donde sacando la raiz resulta $y=\frac{c}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{ac}{b}+\frac{c^2}{4}\right)}$.

Sea $a=99$ leguas, $c=2$ dias, y $b=2$: será $y=\frac{c}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{ac}{b}+\frac{c^2}{4}\right)}=\frac{2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{99\times2}{2}+\frac{4}{4}\right)}=1..\pm\sqrt{100}=1\pm10$: con que serán 11 las leguas que anda el 1.° y $\frac{99}{11}=9$ los dias que tardó: 9 las que anda el 2.° y $\frac{99}{9}=11$ los dias del viage. Suponiendo $a=90$, $b=1$, $c=1$, se tiene $y=10$, leguas del 1.° y 9 los dias que tardó; el 2.° anda entonces 9 leguas y tarda 10 dias.

250 5.° „Si dadas tres de las cinco cosas „que se pueden considerar en una progre-„sion, á saber primero y último términos, su-„ma de todos los términos, número de ellos „y su esponente, se pide averiguar las otras „dos;" en la progresion aritmética, se tomarán las dos equaciones $b=a+d(n-1)$, $s=(a+b)\frac{n}{2}$ encontradas (164 y 168), y considerando como incognitas las dos cantidades que se pidan, se despejarán en ellas por las reglas dadas (241).

Supongo que saliendo dos á un tiempo de dos lugares opuestos que distan 630 leguas, caminando el uno 1 legua el 1.^{r} dia, 3 el 2.°, 5 el 3.°, aumentando en los demas en progresion aritmética, y caminando el otro por dia con arreglo á los números de la progresion, 2, 3, 4 &c. se pregunte qué dia se encontrarán, y las leguas que anda cada uno.

Como las dos progresiones concurren á acercar los caminantes, se deberán sumar, y se tendrá la nueva progresion ÷ 3. 6. 9. 12 &c.

cuya suma s ha de ser 630, $a=3$ y $d=3$, y habrá que buscar el número de términos n. Despejando b en las dos equaciones, se tiene $b=a+dn-d$, $b=\frac{2s-an}{n}$: igualense estos valores, y resultará la equacion $a+dn-d=\ldots\ldots\frac{2s-an}{n}$ que se reduce á $n^2+\frac{2an}{d}-n=\frac{2s}{d}$: resuelvase por las reglas dadas y será $n=\frac{1}{2}-\frac{a}{d}\pm\sqrt{\left(\frac{2s}{d}+\left(\frac{a}{d}-\frac{1}{2}\right)^2\right)}$. Sustituyo ahora los valores de a, s, y d y tendré $n=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1681}{4}}=20$, número de dias que tardan en encontrarse los viajantes. Para encontrar las leguas que anduvo cada uno hay que sumar 20 términos de las dos progresiones $\div$ 1. 3. 5. &c. $\div$ 2. 3. 4. &c. En la 1.ª despues de haber sacado $b=a+d(n-1)=1+2(20-1)=39$; sale $s=(a+b)\frac{n}{2}=(1+39)10=400$, leguas que anduvo el 1.°: y en la 2.ª donde $b=a+\ldots\ldots d(n-1)=2+1(20-1)=21$; es $s=(a+b)\frac{n}{2}=(2+21)10=230$, leguas del 2.°

251 En la progresion geométrica se hace con las equaciones $b=aq^{n-1}$, $s=\frac{bq-a}{q-1}$ sacadas (197 y 201), el mismo uso que de las dos de la aritmética.

Un Criado infiel saca de un frasco donde hay 20 quartillos de buen vino, uno cada dia, y lo reemplaza con otro de agua: al cabo de 4 dias ¿quánto vino quedará en el frasco? El 1.^{r} dia quedan $20-1=19$ q.^{llos} El 2.^{o} quedan $19-\frac{19}{20}=\frac{19\times20-19}{20}=\frac{19(19+1)-19}{20}=\frac{19\times19}{20}=\frac{19^2}{20}$. El 3.^{r} dia quedan $\frac{19^2}{20}-\frac{\frac{19^2}{20}}{20}=\frac{19^2}{20}-\frac{19^2}{20^2}=\frac{19^2\times20-19^2}{20^2}=\frac{19^2(19+1)-19^2}{20^2}=\frac{19^3}{20^2}$; luego la progresion $\div 19:\frac{19^2}{20}:\frac{19^3}{20^2}$ &c. expresa el vino que va quedando cada dia. De consiguiente si en la equacion $b=aq^{n-1}$ se sustituye en lugar de a, 19; por q, $\frac{19}{20}$; y 4 en lugar de n, será $b=19(\frac{19}{20})^3=\frac{19^4}{20^3}=\frac{130321}{8000}=16\frac{2321}{8000}$, porcion de vino que queda despues del 4.^{o} dia.

Si se preguntase al cabo de quántos dias quedaría igual porcion de agua que de vino; sería $a=19$, $q=\frac{19}{20}$, y $b=10$: luego en lugar de $b=aq^{n-1}$ ó $bq=aq^n$, se tendria $10\times\frac{19}{20}=19(\frac{19}{20})^n$, que se reduce dividiendo por 19, á $\frac{1}{2}=(\frac{19}{20})^n$, equacion que directamente no se puede resolver, por no poderse despejar n sino subiendo $\frac{19}{20}$ á sus potencias hasta componer $\frac{1}{2}$. Pero por los logaritmos se tiene (213) $nL(\frac{19}{20})=L\frac{1}{2}$; y $n=\frac{L\frac{1}{2}}{L\frac{19}{20}}=13\frac{114368}{222764}$.

252 Prob. 6.° „Explicar los fundamen-„tos y práctica de la *regla de Interés.*

Se llama *interés* la ganancia que se saca del dinero prestado, dado á censo ó puesto á comercio: y será *simple* quando gana solo la cantidad ó principal empleado, é interés *doble* ó *compuesto* quando las ganancias se juntan al principal para producir ganancias.

1.° „Dado un capital, el tiempo que „está puesto á ganancias, y lo que se ha de „pagar de cada 100, encontrar lo que se „debe al cabo de dicho tiempo."

Si llamamos p el capital; t el tiempo, r el interés que da un real cada año, y s la suma que se busca; dirémos, *si un real da* r *de interés en un año ¿quánto dará el principal* p? ó $1:r::p:pr$: y será pr lo que produce p de interés cada año: digase despues, *si en 1 año* p *da* pr *¿en* t *de años quánto dará?* ó $1:pr::t:prt$. Luego prt son los intereses que da p en el tiempo t: juntense con el principal p, y saldrá la suma que se pide ó $s=p+prt$. Despejese en esta equacion p, r, y t y se tendrá $p=\frac{s}{1+rt}$, $r=\frac{s-p}{pt}$, $t=\frac{s-p}{pr}$; en donde conociendo tres de las quatro cantidades p, r, t, s, será facil averiguar la otra.

„Supongamos que un Usurero ha pres-„tado 15600 rs. con la condicion de recibir „8 rs. de cada 100 de ganancia cada año, lo

,, que se llama á 8 por $\frac{o}{o}$; y que se pregunta, ,, quánto debe percibir al fin de 5 años por ,, capital é intereses.“ En este caso $p=15600$, $t=5$, y r se encontrará diciendo, 100 *rs.* *dan* 8, 1 *real quánto dará?* ó $100:8::1:\frac{8}{100}=0,08$, será pues $s=p+prt=15600+\overline{15600\times 5\times 0,08}=21840$ rs. suma que debe percibir. Si dada esta suma pagada por 5 años á 8 por 100, se pidiese el capital; se tendria $p=\frac{s}{1+rt}=\frac{21840}{1+5\times 0,08}=15600$. Del mismo modo se encontrarán las otras dos cantidades.

2.° ,,Uno que paga de renta cada año a, ,, deja de pagarla t de años con la condicion ,, de dar r de interés por cada real del dine- ,, ro atrasado ¿quánto debe al cabo de t de ,, años?“

Al fin del 1.[r] año no debe interés, por no haber renta atrasada; al fin del 2.° año debe el interés ar de una renta a atrasada; pues si 1 real da r, a produce ar: al cabo del 3.[r] año debe $2ar$ de intereses, al cabo del 4.° $3ar$.... y al fin del año t, $(t-1)\,ar$. Todos estos intereses forman la progresion aritmética $\div 0 . ar . 2ar : 3ar ......(t-1)ar$ cuya suma es $\frac{atr(t-1)}{2}$ (167): juntesele el número at de rentas caidas en t años, y será $s=$

$$\frac{atr(t-1)}{2}+at=\frac{atr(t-1)+2at}{2}=\left(\frac{r(t-1)+2}{2}\right)\times at$$

lo que se debe al cabo de t años por rentas é intereses. Despejando a, t y r en esta equacion, se tiene $a=\frac{2s}{r(t-1)+2t}$: $t=\frac{r-2}{2r}\pm\ldots$ $\sqrt{\left(\frac{2s}{ar}+\left(\frac{2-r}{2r}\right)^2\right)}$: $r=\frac{2s-2at}{at(t-1)}$.

„Uno que paga 100 dob. cada año deja „de pagarlos 8 años dando al cabo de este „tiempo las ocho rentas con los intereses á „razon de 5 por 100 : ¿quánto debe pagar?" Sustituyendo los valores en $s=\left(\frac{r(t-1)+2}{2}\right)\times at$ sale $s=\left(\frac{0,05\times7+2}{2}\right)\times800=940$. Si se diese esta suma de 100 dob. retenidos 8 años y se pidiese el interés que ha producido cada 100, se tendría $r=\frac{2s-2at}{at\ t-1)}=\frac{1880-1600}{100\times7}=0,05$; y si 1 real da 0,05; 100 rs. darán 5, interés que se busca.

3.° „Dado un capital, el interés anual, „y el número de años que está ganando, ha- „llar quánto monta el capital y las ganancias „á interés compuesto."

Sea a el capital, t el tiempo, y r el interés de 1 real, será 1 real $+r$, que llamarémos R, lo que se deberá al cabo de un año por 1 real y su interés. En el 2.° año entra ganando como principal 1 real ó R, con que diciendo, 1 da R, R *¿quánto dará?* se tendrá R^2 al fin del 2.° año por capital y ganancias; del mismo modo se hallará R^3 por lo que se debe al fin del 3.ʳ año.... y al cabo del año t, R^t. Diráse despues, *si 1 da* R^t *a qué dará?* ó $1:R^t::a:aR^t$; luego a produce de principal y ganancias al cabo de t años aR^t, y será $s=aR^t$, $a=\frac{s}{R^t}$, $R=\sqrt[t]{\frac{s}{a}}$ y $t=\frac{Ls-La}{LR}$.

„Si se pregunta la suma que producen „20000 *pes.* á 5 por 100 al cabo de 6 años, „entrando á ganancias el interés:" se tendrá $a=20000$, $t=6$, $r=0,05$, $R=1,05$: y de consiguiente $s=aR^t=20000\times(1,05)^6=20000\times1,3401=26802$ *pes.*

4.° „Dada una renta que se paga cada „año, los años que deja de pagarse, y el in„terés; hallar lo que se debe al fin de dicho „tiempo por los atrasos y ganancias á inte„rés compuesto."

Sea a la renta anual, t el tiempo que deja de pagarse, r el interés de 1 real, $1+r$ ó R un real y su interés, y s la suma. Al fin del 1.ʳ año se debe solo la renta a: al fin del 2.° se debe la renta a de este año, y la renta é intereses del 1.° que es aR; porque si 1 da R, a dará aR: con que se debe $a+aR$: al fin del 3.° por la misma cuenta se debe $a+aR+aR^2$; pues si 1 da R, $a+aR$ dará $aR+aR^2$ que con la renta del 3.r año compone $a+aR+aR^2$: al fin del 4.° se deberá $a+aR+aR^2+aR^3$.... y al cabo del año t, $a+aR+aR^2+aR^3+....aR^{t-1}$, esto es,..... $a(1+R+R^2+R^3+....R^{t-1})$. La suma de esta progresion geométrica es (201)............ $\frac{R\times R^{t-1}-1}{R-1}=\frac{R^t-1}{r}$: luego la deuda que se busca, será $s=\frac{R^t-1}{r}\times a$, de donde tambien se saca $a=\frac{rs}{R^t-1}$; $R=\sqrt[t]{\left(\frac{rs}{a}+1\right)}$: y $t=\frac{L(rs+a)-La}{LR}$.

„Si la renta anual son 2400 *pes.* y se „retiene 8 años con condicion de pagar 4 „por 100 á interés compuesto; se tendrá $s=\frac{R^t-1}{r}\times a=\frac{(1{,}04)^8-1}{0{,}04}\times 2400=22140$ *pes.* cantidad que se pide.

253 De los dos valores que tiene toda incognita de 2.° grado, hemos contado solo con el que satisface derechamente la cuestion: porque el otro, ó no pertenece á ella, ó la resuelve en diferentes circunstancias. Sin embargo, hay casos en que dichos dos valores resuelven el problema de dos maneras

diferentes; y uno de ellos es el siguiente.

„Uno vendió un Caballo en 24 *dobl.* „perdiendo en la venta tanto por 100 co- „mo le habia costado ¿en quánto lo compró?

Si llamamos x lo que le costó ó lo que perdió por 100, dirémos, *si de* 100 *quedan* 100—x, *de* x, importe del Caballo, *quedarán* $\frac{(100-x)\times x}{100}$; y como esto ha de componer 24, tendrémos $24=\frac{(100-x)\times x}{100}$, ó... $x^2-100x=-2400$; donde $x=50\pm10$, esto es, $x=60$, y $x=40$, valores que resuelven ambos el problema.

254 Tambien se resuelven como las de 2.° grado las equaciones de esta forma...... $x^{2m}\pm px^m=q$: es decir, las que tienen solos dos términos con la incognita; y el esponente del uno es duplo del esponente del otro: como $x^4+ax^2=b$, $x^6+cx^3=t$ &c. Con efecto, si en la equacion $x^4+ax^2=b$ se completa el cuadrado asi, $x^4+ax^2+\frac{a^2}{4}=b+\frac{a^2}{4}$, y se saca la raiz cuadrada de ambos miembros, resulta $x^2+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\left(b+\frac{a^2}{4}\right)}$ ó $x^2=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(b+\frac{a^2}{4}\right)}$; vuelvase á sacar de ambos miembros la raiz cuadrada, y se ten-

drá finalmente $x=\pm\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\pm\sqrt{\left(b+\frac{a^2}{4}\right)}\right)}$. En estas equaciones ocurre la dificultad de tener que sacar la raiz cuadrada de la cantidad $-\frac{a}{b}\pm\sqrt{\left(b+\frac{a^2}{4}\right)}$ de dos términos, uno racional y otro irracional, y que llamarémos *binomio*. Veamos cómo se vence.

255 Represente $m+\sqrt{n}$ el binomio de quien se ha de extraer la raiz cuadrada, y sea esta $\sqrt{x}+\sqrt{y}$: y será $\sqrt{(m+\sqrt{n})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, y cuadrando, $m+\sqrt{n}=x+y+2\sqrt{xy}$. Igualemos, como es natural, las cantidades racionales entre sí, y lo mismo las radicales; será $x+y=m$, y $2\sqrt{xy}=\sqrt{n}$. Cuadrando ahora ambas equaciones, y restando despues la 2.ª de la 1.ª, se tendrá $x^2-2xy+y^2=m^2-n$, donde sacando la raiz es $x-y=\sqrt{(m^2-n)}$: luego x, y, serán conmensurables quando m^2-n sea un cuadrado. Si esta última equacion se suma con la anterior $x+y=m$, sale $2x=m+\sqrt{(m^2-n)}$, ó $x=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}$. Restando dichas equaciones se tiene $2y=m-\sqrt{(m^2-n)}$, y $y=\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}$: será pues, $\sqrt{(m+\sqrt{n})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}\right)}$: y por la misma razon $\sqrt{(m-\sqrt{n})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}\right)}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}\right)}$.

„Si se pidiesen dos números cuyo pro„ducto es 105, y la suma de sus cuadrados „274; sería $xy=105$, $x^2+y^2=274$; la 1.ª equacion da $y=\frac{105}{x}$: cuyo valor substituido en la 2.ª la convierte en esta: $x^2+\ldots\frac{(105)^2}{x^2}=274$, y $x^4+(105)^2=274x^2$, $x^4-274x^2=-(105)^2$: de donde se saca $x^2=137\pm\sqrt{7744}$, y $x=\sqrt{(137\pm\sqrt{7744})}$. Aqui es $m=137$, $\sqrt{n}=\sqrt{7744}$, $n=7744$; $\sqrt{(m^2-n)}=\sqrt{(18769-7744)}=\sqrt{11025}=105$: de consiguiente $\sqrt{(m\pm\sqrt{n})}=\sqrt{(137\pm\sqrt{7744})}=\sqrt{(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})}\pm(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)})=\sqrt{(\frac{137}{2}+\frac{105}{2})}\pm\sqrt{(\frac{137}{2}-\frac{105}{2})}=11\pm4$, y x valdrá 15 ó 7: en el 1.ᵉʳ caso es $y=7$, y en el 2.° $y=15$: luego 15 y 7 son los números que se piden.

Para sacar la raiz del binomio $7+\sqrt{48}$, se tiene $m=7$, $n=48$, $\sqrt{(m^2-n)}=1$; y sustituyendo estos valores en la fórmula, resulta $(7+\sqrt{48})=\sqrt{(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})}+\sqrt{(\frac{7}{2}-\frac{4}{2})}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$.

En el binomio $4+2\sqrt{3}$, que se pone asi, $4+\sqrt{12}$.; es $m=4$, $n=12\sqrt{(m^2-n)}=12$, y sustituyendo, sale $\sqrt{(4+2\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$ ó $-1-\sqrt{3}$. En $2\sqrt{-1}$ que no tiene parte racional, es $m=0$, $n=4$, y $\sqrt{(m^2-n)}=2$: será pues, $\sqrt{2\sqrt{-1}}=1+\sqrt{-1}$.

ELEMENTOS

DE GEOMETRÍA.

256 Todo lo que se presenta á nuestros sentidos ocupa algun espacio, y es á un mismo tiempo largo, ancho y grueso. Estos tres géneros de estension, *longitud*, *latitud* y *profundidad* son el obgeto de la *Geometría*, que los considera cada uno de por sí para averiguar mejor sus propiedades. Mide por eg. lo largo de un camino sin atender á su ancho, y la anchura de un rio sin calcular su profundidad. Llamarémos pues, *sólido* ó *cuerpo* lo que abraza anchura, longitud y grueso como una pared. Pero si consideramos en la pared su ancho y largo, es decir, su cara, ó exterior sin atender á su grueso, nos habremos formado idea de la *superficie* ó latitud; y si miramos solamente á su largo sin hacer caso de lo ancho, tendremos la idea de la *linea*. Esta la consideran los Geometras compuesta de partes infinitamente pequeñas que llaman *puntos*, y que son sus elementos: á la superficie se la figuran como un tegido de infinitas lineas, y al sólido como un

paquete de infinidad de superficies: de suerte que los estremos de una linea serán puntos, los de la superficie lineas, y los del sólido superficies.

De las Lineas, del Círculo y de los Angulos.

257 Si se concibe que el punto A (fig. 1ª) se mueve ácia B sin mudar de direccion ó por el camino mas derecho, dejando rastro tras sí, formará la linea recta AB, que será la mas breve distancia entre los dos puntos A y B: la única que se puede tirar entre ellos, y de consiguiente la verdadera medida de la distancia que hay entre los dos.

258 Por ser la linea recta la mas corta y la única que se puede tirar entre dos puntos A y B, quedará determinada la situacion ó posicion de una recta en señalando dos puntos, por donde debe pasar: y asi dos lineas rectas qualesquiera AS, AB no pueden tener dos puntos comunes, ó no se pueden cortar en mas que en un solo punto A; porque ningun otro está en la direccion de las dos.

259 Si el punto A que trazó la recta AB, hubiera caminado ácia B por otro camino que el recto, esto es, mudando á cada paso de direccion, hubiera descrito una linea curva, qual es AOB ó ADB: y como se puede ir desde A á B por infinitos caminos,

habrá una infinidad de lineas curvas, siendo asi que es única la especie de las rectas.

260 Para tirar lineas rectas en el papel sirve la *regla*, *pluma* y *lapicero*, instrumentos vulgares y conocidos de todos. En un terreno llano se puede trazar una recta, sino ha de ser muy larga, atando los dos estremos de un bramante dado de greda, algo estirado, á dos piquetes A, B (fig. 2.ª) puestos en los dos estremos de la linea; se tira despues de dicho bramante ácia arriba, y dejándole caer con ímpetu contra el suelo, dejará impresa en él la recta AB que se pide.

261 Para trazar una linea larga, se fija en uno de sus estremos B (fig. 3.ª), un jalon A que quedará derecho sobre el suelo si sigue la direccion de un hilo con un plomo: y otro M en D: despues se ponen otros T, N &c. intermedios; pero de suerte que mirando desde A el jalon M se confunda con él el que entonces se coloca; y seguramente estarán dichos jalones en una misma linea recta BD. Quando es muy larga, se divide la operacion en dos, tres, ó mas estaciones.

262 En la práctica de medir una linea qualquiera, que consiste en averiguar las veces que en ella cabe otra linea conocida que se toma por la unidad, como una linea de un pie, de una vara, no puede haber difi-

cultad; y asi solo advertirémos que los Geometras en lugar de sogas de cáñamo, esparto &c. que padecen mutaciones con el temporal, usan de una cadena de alambre grueso ó de hierro, cuyos eslabones suelen ser de un pie ó de una vara cada uno.

263 Conviene advertir que la principal medida que rige en Castilla, es la *Vara* que llaman de Burgos, señalada por Felipe II en su Pragmática del año de 1568, y compuesta de tres pies, cada pie de doce pulgadas, cada una de doce lineas &c. Tambien se usa del *Estadal*, que se compone de diez pies castellanos. Por lo que hace al tamaño de la vara de Aragon, Valencia, y la media Caña de Cataluña, 95 palmos de los quatro en que se divide la vara de Castilla, equivalen á 102 Aragoneses, á 88 palmos Valencianos y 100 Catalanes.

264 La medida mas general, y á que suelen reducirse las demas, es el *Pie de Rey*, sesta parte de la *Toesa*, medida francesa. Dicho pie tambien se divide en 12 pulgadas, cada pulgada en 12 lineas &c. Para reducir á esta medida la de los diferentes pies de las demas Provincias de Europa han considerado los Geómetras dividida en diez partes iguales la linea que es $\frac{1}{144}$ de pie: y de las 1440 partes que por esta cuenta tiene el

pie de Rey, han encontrado que tiene el pie de......

Castilla..$1234\frac{2}{7}$	Venecia. 1540	Suecia 1320
Roma....1320	Rhin.....$1391\frac{1}{10}$	Dinamarca.......$1403\frac{3}{5}$
Londres. 1350	Bolonia..$1682\frac{2}{5}$	Constantinopla. 3120

Por medio de esta tabla se reducirán con una simple regla de tres los pies de una Nacion á los de otra qualquiera; pero quando haya que reducir á pies castellanos los franceses, será mejor usar de la razon sencilla de 6:7 que tienen aquellos á estos con poca diferencia.

265 De las lineas curvas solo hablarémos de la *circunferencia del círculo.* Asi se llama la linea curva cerrada ADCE (fig. 4.ª) que traza el estremo A de una linea AO fija en O, dando una vuelta entera al rededor de dicho punto O que se llama *centro.* Al espacio encerrado por dicha curva llamamos *círculo*: á las rectas AO, OD, OE tiradas del centro á la circunferencia *radios*; y *diámetro* á qualquiera AC que pasando por el centro se termina por ambas partes en la circunferencia.

266 Como cada radio es igual á la linea AO que traza la curva, serán todos los radios iguales, y todos los puntos de la circunferencia distarán igualmente del centro. Los

diámetros tambien son todos iguales ; pues se componen de dos radios.

267 Qualquier porcion TCP de circunferencia se llama *arco*, y *cuerda* ó *subtensa* de dicho arco la recta TP tirada por sus dos estremos T, P. Los arcos iguales tienen cuerdas iguales AE, AD en un mismo ó en iguales circulos ; y si las cuerdas son iguales lo serán tambien los arcos : pues si doblando el círculo por AC se sobrepone el arco y cuerda ARE á AQD, caerá el punto E sobre D, y todos los puntos del arco ARE sobre los de AQD, como que todos distan igualmente del centro ; luego se ajustarán perfectamente los dos, y de consiguiente serán iguales. Por lo mismo, las mayores cuerdas subtenden mayores arcos, y al contrario.

268 La mayor cuerda de un círculo es el diámetro ; ED por eg. es mayor que qualquiera otra TP ; pues los dos radios TO, PO tirados á sus dos estremos equivalen al diámetro, y dichos radios juntos son mayores que TP (257).

269 Un círculo qualquiera ADCE se traza en el papel con el *compás*, instrumento bien conocido, abriéndole de suerte que sus dos puntas caigan en O y A, y haciendo dar una vuelta entera á la punta A al rededor de la punta O que ha de estar fija.

270 Si consideramos ahora que á la rec-

ta BE puesta sobre BA (fig. 5.ª), se la hace andar el espacio EA con uno de sus puntos O, teniendo el otro fijo en B, se habrá formado el ángulo OBA que es *el espacio compreendido entre dos lineas BE, BA que concurren en un punto B*. Dichas lineas se llaman *lados* del ángulo, y el punto B su *vértice*. En adelante nombrarémos un ángulo ó con sola la letra del vértice, ó con las tres EBA, ó ABE, poniendo en medio dicha letra B. El ángulo EBA se llama *rectilineo*, MNO (fig.6.ª), *curvilineo* y RSH *mistilineo* por la clase de lineas que los forman.

271 De la formacion del ángulo se colige que el espacio que encierra, se debe medir por un arco de círculo descrito desde el vértice como centro con qualquier intervalo; pues aunque sea menor el arco descrito á la distancia D′ que á D (fig. 5.ª); siempre será una misma la medida del ángulo CBD; pues el arco D′C′ es la 4.ª parte de su círculo como lo es DC: de consiguiente el ángulo es siempre el mismo que se acorten ó que se alarguen sus lados.

272 Para medir los arcos del círculo le han considerado los Geómetras dividido en 360 partes iguales con el nombre de *minutos*: cada uno de estos en 60 *segundos*, cada segundo en 60 *terceros* &c. Estas partes que son grandes ó pequeñas, segun que el cír-

culo lo es, se indican con las señales °, ′, ″, ‴ &c. de suerte que 7.° 8′, 36″, 9‴, quiere decir *siete grados, ocho minutos, treinta y seis segundos* y *nueve terceros*. Llamarémos *recto* el ángulo que tiene por medida 90° ó la 4.ª parte de la circunferencia como DBC, ABD, medidos por los arcos DC, DA: *agudo* el ángulo ABE cuya medida que es el arco OA, es menor que 90°; y *obtuso* aquel como CBE, á quien mide un arco CDO mayor que 90°.

273 *Si una linea qualquiera ER cae sobre otra AC, forma siempre con ella dos ángulos ABE, EBC que juntos valen 180°, ó dos ángulos rectos;* pues su medida será siempre la mitad de la circunferencia (271). Alargando EB, la RB que cae sobre AC forma tambien en B dos ángulos ABR, RBC que valen juntos otros 180°.

274 Luego 1.° todos los ángulos que se forman en un punto B qualquiera, valen 360°: 2.° el diámetro AC divide al círculo en dos partes iguales: 3.° para medir el ángulo APD (fig. 7.ª) que forman dos paredes AO, OD, se alargará con una regla la base AP, y midiendo el ángulo DPC, será lo que le falta para 180° la medida del APD que se desea.

275 Lo que falta ó sobra á un ángulo ó arco para componer 90°, se llama su *complemento*: el del ángulo ABE (fig. 5.ª) es el án-

gulo EBD: y el de EBC es EBD: y asi el complemento de un ángulo agudo es positivo, el del ángulo recto es nulo, y el del obtuso es negativo.

276 *Suplemento* de un ángulo es lo que le falta ó sobra para componer 180°: el ángulo ABE por eg. es suplemento de EBC y al contrario. De consiguiente el ángulo agudo tiene un obtuso por suplemento, el recto otro recto, y el obtuso un agudo.

277 Supuesto que los ángulos iguales deben tener suplementos y complementos iguales; y que deben ser iguales los que tengan unos mismos complementos y suplementos; tendrémos *que si se cortan como quiera, dos líneas ER, AC, serán iguales los ángulos ABE, RBC opuestos al vértice que llamarémos por eso* vérticales; pues tienen ambos un mismo suplemento, que es el ángulo EBC: lo mismo se debe entender de los ángulos EBC, ABR, cuyo suplemento comun es el ángulo ABE.

278 *Si dado el ángulo OCD* (fig. 8.ª) *se pidiese formar otro igual en un punto B de la recta AB;* se trazará desde C con qualquier abertura de compás el arco OD, con la misma abertura se trazará desde el punto dado B el arco indefinido AR; se tomará despues con el compás la distancia OD, que se trasladará de A á T, y tirando por B y T la li-

nea BT, se habrá formado el ángulo TBA igual á OCD; pues que los arcos AT, DO que los miden, se han hecho iguales.

279 Con el instrumento MHDT (fig. 9.ª) que es un *semicírculo* de alaton ó cuerno dividido en sus 180° con sus suplementos debajo para poderse contar por la derecha y por la izquierda; se puede formar en el papel un ángulo qualquiera de 40° por eg. en el punto B de una recta BC, aplicando el radio BT del instrumento de manera que coincida su centro con el punto B, y tirando despues por este punto y el num.° 40° que se pide, la recta AB; pues el ángulo ABC que resulta, es de 40°. Asimismo, para medir con dicho instrumento un ángulo qualquiera ABC, puesto su centro en el vértice B del ángulo, y el radio BT sobre uno de sus lados, medirá dicho ángulo el arco DT que intercepten sus lados, alargados si es menester.

280 Un semicirculo (fig. 10.ª) de alaton de 7 á 15 pulgadas de diámetro dividido en 180° y en medios, quartos &c. de grado á proporcion de su magnitud, sirve para medir y formar ángulos en el terreno. A este fin se coloca sobre un pie, y por medio de dos tornillos se le pone derecho, inclinado ó en qualquier otra situacion que requiera la direccion de las miras á los obgetos que forman los ángulos. Para dirigir á estos las

lineas visuales hay una regla ó alidada CD movible al rededor del centro, que tiene en sus estremos dos pínulas *m*, *n*, clavadas y hendidas muy perpendicularmente, lo mismo que el diámetro inmobil AB que las tiene en los puntos que corresponden á 0° y 180°. Quando los obgetos están á mas distancia que de á 8 á 9 mil varas, en lugar de dicha regla se usa de un anteojo que con otro que se coloca en el diámetro inmobil descubre mas claramente dichos obgetos.

281 Quando se trate de medir lineas en el terreno, se verá el modo de usar este instrumento que se llama *Grafometro*: ahora solo añadirémos que para ver si tiene el centro en su lugar, es decir, si las lineas de las miras, de las pínulas, eges de los anteojos &c. se cortan en el centro del instrumento; se pueden observar todos los ángulos que formen los obgetos que hay al rededor, comenzando por uno y dando la vuelta hasta volver á él; y si la suma de todos, compone con diferencia de pocos minutos 360°, se puede dar por bien centrado: aunque convendrá repetir la prueba, no sea que la casualidad de algun error en la observacion de algun ángulo, haya compensado la falta del instrumento.

282 Si una recta AS (fig. 11.ª) cae cortando la BD sin inclinarse á un lado ni á otro,

ó formando los ángulos ACB, ACD iguales, se llama *perpendicular* á ella. Qualquiera otra DS que corte la BD inclinándose mas á un lado que á otro, se llama *oblicua*.

283 De aqui se infiere lo 1.° que la BD que no se inclina á A ni á S será tambien perpendicular á AS. Lo 2.° que si qualesquiera dos puntos A, S de una linea AS están á igual distancia de otros dos B, D de la BD; todos los puntos de la AS, distarán igualmente de B y D; pues los puntos de una linea (258) tienen todos, la posicion que dos de ellos: de consiguiente la AS no se inclinará á B ni á D, y le será perpendicular. Y como C ha de distar igualmente de B y D, dividirá tambien AS á la BD por medio.

284 Lo 3.° Con un solo punto A que tenga la perpendicular AS á igual distancia de los dos B, D de la BD sobre quien cae, los deberá tener todos y dividirla por medio en C; pues si algun punto E por eg. no distára lo mismo de D y B, se inclinaria por esta parte á un lado mas que á otro, contra el supuesto de ser perpendicular.

285 Lo 4.° De todas las rectas AB, AE, AC, AO &c. (fig. 12.ª) que se pueden tirar de un punto A sobre otra BD, *la perpendicular* AC *es mas corta que qualquiera otra*, AB por eg. Pues haciendo CS=AC, y tirando BS; se tiene la AS menor que las dos

AB+BS, y de consiguiente la mitad AC de AS mas corta que AB, mitad de AB+BS. Lo mismo se probará de otra qualquiera. Decimos que AB es la mitad de AB+BS ó que AB=BS; porque estando el punto C de la perpendicular CB á igual distancia de A y de S, lo estará tambien el punto B de dicha perpendicular (283), y AB=BS.

286 *Las lineas mas oblicuas* ó que distan mas de C, *son las mas largas*; y asi AB es mayor que AE; pues siendo AB+BS mayor que AE+ES, será la mitad AB de las primeras mayor que la mitad AE de las otras. De consiguiente serán iguales las AE, AO tiradas á E, O puntos igualmente distantes de C.

287 Lo 5.° *La perpendicular mide la distancia que hay de un punto á una recta, ó de una recta á otra*; pues es el camino mas corto.

288 Lo 6.° *Desde un punto* A *no se puede tirar mas perpendicular sobre* BD *que la* AC; pues esta sola es la mas corta que se puede tirar desde A sobre BD (285). *Ni tampoco desde* C *se puede levantar á* BD *mas perpendicular que* CA: pues qualquiera otra se inclinará á un lado mas que á otro.

289 *Para levantar una perpendicular en el punto* C *de la linea* BD (fig. 11.ª); se tomarán dos puntos E, O á igual distancia de

C, y haciendo de ellos centro, se trazarán con el compás con una abertura mayor que EC, dos arcos que se corten en un punto qualquiera A; se tirará por A y C la AC, y esta será la perpendicular (283); pues tiene dos puntos A, C á igual distancia de los dos E, O.

290 *Desde un punto A se bajará una perpendicular sobre* BD; trazando desde A con el compás un arco qualquiera EO que corte la BD en dos puntos E, O; y desde estos los dos arcos que se corten en S; tirese despues AS, y será la perpendicular (283); pues tiene tambien A y S á igual distancia de E y O.

291 De lo que se infiere que *si se pidiese dividir por medio una recta* BD; se trazarán haciendo centros en B y D, dos arcos que se corten en S, y la AS tirada por A y S, dividirá por medio la BD; pues distando igualmente A y S de B y D, todos los demas puntos de AS como C, distarán igualmente de B y D (258), y será BC=CD; luego &c.

292 El instrumento ABC (fig. 13.ª) de alaton con una charnela en B para que cerrada quepa en el *Estuche matemático*, se llama *Escuadra*. Sirve para tirar perpendiculares en el papel; porque sus dos lados AB, BC forman un ángulo recto ABC. El mismo uso tiene la escuadra H de una madera dura y lisa.

293 Para tirar en el terreno una perpendicular á la linea AB (fig. 14.ª) desde un punto C; se fijará en este punto el medio de una cuerda, cuyos estremos se han de atar bien tirantes en dos puntos A, B de AB; se dividirá la AB por medio en D, y la CD será la perpendicular (283); por tener C y D á igual distancia de A y B.

294 Se levantará desde D una perpendicular á AB; tomando AD=BD, atando en A y B los estremos de una cuerda, por cuya mitad C y el punto D se tirará la CD, que será la perpendicular por lo que acabamos de decir.

295 Llamarémos *paralelas* aquellas lineas AB, CD, EP (fig. 15.), cuyos puntos correspondientes distan todos igualmente los unos de los otros: de consiguiente serán iguales todas las perpendiculares HO, MN, que se tiren entre ellas, que miden dicha distancia (287): y como ninguna de las paralelas puede inclinarse ácia las otras, aunque se alarguen infinitamente nunca podrán juntarse.

296 De aqui se infiere 1.° que si dos lineas AB, EP son paralelas á otra CD, serán paralelas entre sí; pues siendo por la suposicion HO=MN, y OR=NS, será HO+OR=MN+NS y &c.

297 Lo 2.° que si se toman dos puntos H, M á igual distancia de la recta CD, y

se tira por ellos la AB ; será paralela á CD.

298 Lo 3.° que si de dos paralelas EC, PD (fig. 16.ª) la una EC es perpendicular á AD, tambien lo deberá ser la PD, que por no estar inclinada á su paralela EC, ha de tener la misma inclinacion con la AD. Y al contrario, si una recta AD es perpendicular á EC lo será tambien á su paralela PD (282 y 295). Ultimamente, si las EC, PD son perpendiculares á AD, serán paralelas; pues cayendo ambas sobre AD, sin inclinarse á un lado ni á otro, no estarán inclinadas la una á la otra; luego &c.

299 Como las lineas paralelas AB, CD (fig. 17.ª) tienen igualmente distantes sus puntos correspondientes, no estarán inclinadas la una á la otra; y de consiguiente tendrán ambas una misma inclinacion con otra linea qualquiera SR que las corte; y como esta inclinacion forma á la derecha de la secante los ángulos *o* y *t* por cima, *x* y *n* por bajo de las paralelas, y á la izquierda de dicha secante los ángulos *p* y *z*, *e* y *m*; tendrémos que quando una recta SR corta dos ó mas paralelas 1.° forma iguales los ángulos *o* y *t*, *x* y *n*; *p* y *z*, *e* y *m*, los quales se llaman *correspondientes*.

300 Lo 2.° Tambien son iguales los ángulos *alternos* *t* y *e*, *x* y *z*: *p* y *n*, *m* y *o*; porque siendo *o* y *t*, iguales y $o=e$ (277), será

tambien $t=e$, y lo mismo se prueba de los demas, que se llaman *alternos* por formarse alternativamente, uno por cima y otro por bajo de la secante: e, t; x, z; son alternos *internos* porque están en las paralelas; n, p; o, m, *esternos* por estar fuera.

301 Lo 3.° Los ángulos internos t, x, de un mismo lado de la secante son suplementos el uno del otro; porque siendo $e=t$ y e suplemento de x (273); lo sera tambien t: tambien e es suplemento de z.

302 Al contrario, siempre que una recta RS corta á otras dos AB, CD formando los ángulos correspondientes iguales; serán dichas lineas paralelas: porque siendo igual su inclinacion con la SR, no estarán inclinadas la una á la otra. Tambien serán paralelas AB, CD si resultan iguales los ángulos alternos: porque si $e=t$, siendo $e=o$ (277), será tambien $t=o$, es decir, iguales los ángulos correspondientes, y las lineas paralelas. Tambien lo son quando t es suplemento de x; pues siéndolo igualmente e (273), se tendrá $t=e$, y $t=o$: luego &c.

303 De aquí inferiremos 1.° que si dos ángulos MNA, EDC (fig. 18.) tienen sus lados AN, ED; MN, y CD paralelos, serán iguales, porque alargado uno de los lados AN hasta B, se tiene ANM=ABC=EDC (299).

304 2.° *Que si se pidiese tirar una paralela á la recta CD* (fig. 17) *por un punto qualquiera* p, se tirará por *p* qualquiera recta RS; se traza desde *n* con qualquier intervalo *np* el arco *pq*, y desde *p* con el mismo intervalo el arco indefinido *rh*; se toma despues la distancia *pq*, y trasladada de *r* á *h*, se tirará por *p* y *h* la AB que será la paralela que se busca; por haberse hecho iguales los ángulos correspondientes *pnq*, *rph* (278).

305 3.° Si se pidiese levantar una perpendicular en el extremo D (fig. 16) de una recta AD que no se puede alargar; se levantaría en qualquiera de sus puntos la perpendicular CE, y tirando como acabamos de decir, por el punto D una paralela á CE, sería perpendicular (298).

De las Lineas y de los Angulos en el círculo.

306 *Una recta CT* (fig. 19.) *tirada desde el centro de un círculo perpendicularmente á una cuerda DS, la divide por medio y lo mismo á su arco* DTS: porque estando el punto C de dicha perpendicular á igual distancia de los dos D y S, lo estarán todos los demas de CT (283), luego P y T distarán igualmente de D y S, y será de consiguiente DP=PS, y DT=TS.

307 Al contrario, si la CT divide por

medio en P la cuerda DS, tendrá dos puntos C y P á igual distancia de D y S, y de consiguiente será perpendicular á DS: lo mismo sucede quando CT divide por medio el arco DTS.

308 Luego 1.° los arcos ZD y QS de un mismo círculo comprehendidos entre paralelas son iguales; pues dividiendo CT por medio á los arcos ZDTSQ, y DTS, si de ZDT=TSQ quitamos DT=TS, quedará ZD=QS.

309 2.° Se podrá dividir un arco qualquiera ZTQ en dos partes iguales con la perpendicular bajada desde el centro sobre su cuerda ZQ: y la perpendicular CH bajada sobre TQ dividirá su mitad TSQ en otras dos. De consiguiente, toda la circunferencia de un círculo, podrá dividirse en quatro partes iguales tirando en ella dos diámetros perpendiculares ED, AC (fig. 4.ª), y si cada uno de los arcos iguales AQD, DPC &c. se divide por medio resultarán ocho arcos iguales; y se habrá partido la circunferencia en 16, 32, 64 &c. partes iguales dividiendo sucesivamente por medio dichos arcos.

310 3.° *Si dados tres puntos M, N, O* (fig. 19.) *se pidiese trazar un círculo por ellos,* ó encontrar un punto C igualmente distante de los tres; se tirarán las cuerdas MO, NO, y divididas por medio con las perpendicula-

res RC, LC; el punto C donde estas concurren, es el centro del círculo que pasará por M, N, O; pues debiendo dichas perpendiculares pasar ambas por él (307), no puede ser otro que C, único punto que tienen comun.

311 La operacion es la misma quando se da el arco MNO y se pide su círculo ó su centro; pero es esencial que los tres puntos no esten en linea recta; pues si se diesen los puntos A, C, D (fig. 16.) las perpendiculares EC, PD debiendo ser paralelas (298), no podrían encontrarse.

312 De donde se inferirá que una recta no puede cortar á un círculo en tres puntos: como tambien, que dados tres puntos que no están en linea recta, queda determinado un círculo, que no podrá equivocarse con otro: pues si dos circunferencias se pudiesen cortar en tres puntos, tendrían un mismo centro, y no serían dos, sino una la circunferencia.

313 Si desde un punto A (fig. 2ɸ.) que no sea el centro de un círculo, se tiran á la parte de la circunferencia mas distante varias rectas AE, AD, AB, AF &c. 1.° *AB que pasa por el centro, es mayor que qualquiera otra AD*: pues tirando el radio CD=CB, AD es menor que AC+CD, ó que AC+CB ó que AB.

314 2.° *AD es mayor que AE, que dis-*

ta mas del centro; pues tirado el radio CE, serán CO+OD juntas mayores que CD ó que CE su igual; quitando CO comun, queda OD mayor que OE, y añadiendo á ambas lineas OA, será DO+OA ó DA mayor que EO+OA; y como EO+OA son mayores que EA, será AD mucho mayor que AE.

315 Si se tiran á la parte de circunferencia mas inmediata las rectas AM, AN &c. *la AM que alargada pasa por el centro, es la mas corta*: pues tirado el radio CN, se tiene CA+CN mayores que CN ó que CM su igual; quitese CA comun, y queda AN mayor que AM.

316 Quando el punto A (fig. 21.) está fuera del círculo, sucede lo mismo; pues siendo AN+NC mayores que AC, resulta, quitando de una parte el radio CN y de otra el CM, AN mayor que AM. Serán pues, iguales las lineas tiradas desde qualquier punto (fig. 20. y 21.) á igual distancia del centro C; y como solo hay dos con esta condicion, una á la derecha de la AB y otra á su izquierda: nó se podrán tirar desde dicho punto tres lineas iguales á la circunferencia, y si desde algun punto se pueden tirar mas de dos lineas iguales será sin duda el centro del círculo.

317 *Tangente* de un círculo es la linea AT (fig. 22.) que aunque se alargue no corta

sino toca su circunferencia; y es solo en un punto que se llama del *contacto*; pues si le tocase en dos *m*, *n*, tiradas al centro las *mc*, *nc* que serían iguales (266), serían mayores que la perpendicular CT, que se tirase entre ellas (285): luego estando el punto T en la circunferencia, deberán caer fuera de ella *m* y *n*. Una linea AB que desde qualquier punto A fuera del círculo le corta en dos puntos E y B, se llama *secante*.

318 Tendremos pues 1.° *que el radio CT debe ser perpendicular á la tangente* (285); pues es la linea mas corta que se puede tirar desde el centro á dicha tangente; y al contrario, la perpendicular AT al extremo T del radio CT será tangente al círculo. Y asi para tirar una tangente al círculo en un punto T, se tira el radio CT y se levanta en T la perpendicular AT; la qual debe ser única, por no poderse levantár mas perpendicular que una desde qualquier punto T (288).

319 2.° Si tres circunferencias de círculo se tocan dentro ó fuera, los centros C, D, R de los círculos, y el punto *o* del contacto están en una linea recta; porque debiendo los radios D*o*, R*o*, C*o*, ser perpendiculares á la tangente, formarán una sola linea recta (318).

320 3.° Qualquier otra recta DO (fig. 23.) tirada por el punto T que no sea la tangente, corta al círculo; de suerte que qual-

quier ángulo rectilineo BTD es mayor que el mistilineo BTPD, el qual será infinitamente pequeño: pero sin embargo puede ser dividido por infinidad de arcos T*h*, T*b* &c. que se van acercando á la tangente AB, á proporcion que son mayores los radios con que se describen.

321 Importa á veces medir los ángulos no con arcos descritos desde su vértice, sino con los de algun círculo junto al qual, ó dentro del qual están formados; y por eso vamos á señalar á cada uno la medida que le corresponde, segun su distinta posicion. Empecemos por el ángulo ATD (fig. 24.) que forma la tangente AT con la cuerda TD, que se llama *ángulo del segmento*, y tiene por medida *la mitad del arco TRD que subtende la cuerda*. Para demostrarlo, tirese por el centro el diámetro PQ paralelo á la cuerda TD, el RS perpendicular á PQ y el radio TC. El ángulo recto RCP es igual al ángulo ATC tambien recto: quitese de ambos el ángulo TCP igual á su alterno DTC, y quedará DTA=RCT: y como el ángulo RCT le mide el arco RT (271) mitad de DRT (306) este mismo medirá tambien el ángulo ATD. Como los dos ángulos ATD, DTB valen 180° (273) ó la mitad de toda la circunferencia TRDQSPT, si de ella se quita la mitad del arco RTD, medida del ángulo ATD,

quedará la mitad de DQSPT por medida del ángulo DTB.

322 De esta proposicion se infiere que la medida de un ángulo BTD (fig. 25.) cuyo vértice está en la circunferencia (se llama *inscripto*), *es la mitad del arco BD que comprenden sus lados*, que son dos cuerdas. Porque tirada la tangente AT, si de la medida del ángulo ATB, que es la mitad de TDB, se quita la del ángulo ATD que es la mitad de TD, quedará la mitad de BD que será medida del ángulo BTD.

323 Luego 1.° el ángulo del centro BCD es duplo del inscripto BTD que insiste sobre el mismo arco; pues la medida de BCD es el arco BD y la de BTD, $\frac{1}{2}$BD. Lo 2.° Todos los ángulos inscriptos A, B, C, (fig. 26.) de un mismo círculo que insisten sobre un mismo arco FD son iguales; pues que tienen una misma medida.

324 Lo 3.° Todo ángulo inscripto BTR (fig. 27.) que insiste en el diámetro es recto: pues vale la mitad de 180° ó 90°. El que insiste en un arco menor que la semicircunferencia como TRB es agudo; y el que estriba como NMR, en mayor arco que la semicircunferencia es obtuso.

325 De consiguiente se levantará en el estremo T de la recta TB una perpendicular, trazando un círculo desde qualquier punto C

con el intervalo CT tirando por el centro y el punto B en que el círculo corta la BT, el diámetro BR; pues la TR será perpendicular á BT; por ser el ángulo RTB recto.

326 Si se diese en el terreno la recta BD (fig. 28.) para levantar en su estremo D la perpendicular; se atarían en B y D los estremos, y en A la mitad de una cuerda BD: y pasando la parte AB á ser AC, será la CD perpendicular. Y al contrario, para bajar desde C una perpendicular ácia el estremo de la DB, atada la cuerda en C y B y dividida en su mitad A, se pasa la AC á AD, y tirando CD, será la perpendicular. Porque siendo iguales las AC, AB, AD será A el centro del círculo que pasa por C, D, B (316); y de consiguiente será CB diámetro, el ángulo CDB recto (324), y la CD perpendicular.

327 Para tirar dos tangentes á un círculo desde un punto O (fig. 29.) dado fuera de él; despues de haber tirado la OC á su centro, se trazará desde su mitad H con el intervalo OH un círculo que cortará al dado en los dos puntos B, T, por los quales y O tirando las OB, OT serán las tangentes; pues tirando los radios BC, CT, serán rectos los ángulos CBO, CTO (324): luego las OB, OT serán perpendiculares, y de consiguiente tangentes.

328 Si se pidiese trazar sobre la recta BD (fig. 30.) un segmento de círculo, tal que todos los ángulos inscriptos en él como BAD, sean iguales á un ángulo dado X: se hará en uno de los estremos B de la BD un ángulo DBF igual á X, se levantará sobre BF la perpendicular indefinida BH, y en medio de BD otra perpendicular PT que cortará á la BH en un punto C que será centro del círculo que se pide; pues siendo la medida del ángulo DBF ó X la mitad de BTD (321), la misma que tiene el ángulo inscripto BAD y qualquier otro que insista sobre la cuerda BD; será el segmento BNAHD capaz del ángulo X como se pidió.

329 Por esta proposicion será facil determinar el sitio de un punto T qualquiera (fig. 29.) conociendo el valor de los ángulos RTB, BTO, que con dicho punto forman las rectas TR, TB, TO, tiradas á los tres objetos R, B, O, cuya situacion es conocida: pues tirando las líneas BR, BO y trazando sobre BR una porcion de círculo capaz del ángulo dado BTR, y sobre BO otra capaz del ángulo BTO; debiendo el punto T caer en ambos círculos, será aquel en que los dos se cortan.

330 La medida del ángulo BAR (fig. 31.) que se llama *excéntrico* por no tener su vértice en el centro del círculo en que está, *es la*

mitad de los dos arcos BR+HC *que abrazan sus lados alargados*. Porque tirando por C la CD paralela á HR será el ángulo BAR= BCD (299); y siendo (322) la medida de BCD, $\frac{1}{2}$BD=$\frac{1}{2}$BR+$\frac{1}{2}$RD=$\frac{1}{2}$+BR+$\frac{1}{2}$HC, por ser RD=HC (308); será la medida de BAR, $\frac{1}{2}$BR+$\frac{1}{2}$HC.

331 La medida del ángulo ZCB formado en la circunferencia con la cuerda BC y la DC alargada, es tambien la mitad de los arcos BC+CD que subtenden las cuerdas; porque siendo DCB+BCZ=180° (273) ó la mitad de toda la circunferencia CHBRDC, si de ella se quita la medida del ángulo BCD que es $\frac{1}{2}$BD, quedará $\frac{1}{2}$BHC+$\frac{1}{2}$CD por la del ángulo BCZ.

332 Un ángulo BAP (fig. 32.) *circunscripto*, ó cuyo vértice está fuera del círculo, tiene por medida la mitad del arco cóncavo BP en que insisten sus lados alargados si es menester, menos la mitad del arco convexô HR que comprenden dichos lados. Porque tirando la RC paralela á HB, el ángulo CRP que es igual á BAP (299), tiene por medida $\frac{1}{2}$CP ó $\frac{1}{2}$BP$-\frac{1}{2}$BC, ó últimamente $\frac{1}{2}$BP$-\frac{1}{2}$HR: pues BC=HR (308): luego la medida del ángulo BAP es $\frac{1}{2}$BP$-\frac{1}{2}$HR.

333 Si se tirá HM paralela á la tangente AX, se probará del mismo modo que el ángulo XAB le mide $\frac{1}{2}$XB$-\frac{1}{2}$XH: y última-

mente tirando por Z una paralela á AX se hallará que la medida del ángulo XAZ que forman las dos tangentes, es $\frac{1}{2}$ XBPZ — $\frac{1}{2}$ XHRZ.

De las Figuras, ó de los Triángulos, Quadriláteros y Polígonos.

334 Dos solas lineas no abrazan espacio determinado: se necesitan tres, ó quatro, ó cinco, ó...... infinitas para encerrarle. A este espacio cerrado llamarémos *figura*; *rectilinea*, *curvilinea*, ó *mistilinea*, segun sean rectas ó curvas las lineas que la forman: á estas lineas *lados* de la figura: á la suma de todas *ambito*, *contorno*, ó *perímetro*: é *isoperimetras* á las figuras que tienen perímetros iguales.

335 La figura ABC (fig. 33.) se llama *triángulo* rectilineo: se compone de tres lados AB, BC, AC, y de tres ángulos A, B, C: se llama *equilátero* quando sus tres lados son iguales: *isósceles* (fig. 34.) quando son iguales dos: *escaleno* (fig. 35.) quando los tres son desiguales: *rectángulo* (fig. 36.) quando uno de sus ángulos D es recto: *obtusángulo* quando uno de ellos D (fig. 35.) es obtuso; y *acutángulo* (fig. 34.) quando todos tres son agudos.

336 Qualquiera de los lados AC (fig. 33)

opuesto al ángulo B que se toma por vértice, se llama *base* del triángulo: y *altura*, la perpendicular BT tirada desde el ángulo B del vértice á la base. Se ve que quando los ángulos A, C, adjacentes á la base AC son agudos, cae la perpendicular dentro del triángulo; quando es recto uno de dichos ángulos (fig. 36.), es el mismo lado AD del triángulo; y quando es obtuso (fig. 35), la OR cae fuera y sobre la base CD alargada. El lado AB (fig. 36.) opuesto al ángulo recto D del triángulo ADB, se llama *hipotenusa*.

337 En el triángulo isosceles EDF (fig. 34.) la perpendicular ER divide por medio la base DF: porque siendo ED y EF iguales estará el punto E de la perpendicular ER, y de consiguiente todos los demas (284) á igual distancia de D y F: luego DR=RF.

338 *Los tres ángulos de qualquier triángulo valen siempre dos ángulos rectos* ó 180°. Si se da el triángulo ABC (fig. 37.) y se hace pasar un círculo por sus tres ángulos se verá (322) que la medida de todos tres es la mitad de toda la circunferencia; luego valen 180°.

339 De aquí se infiere 1.° que alargado qualquiera de los lados BC de un triángulo, el ángulo esterno ACD, es igual á los dos internos y opuestos A y B: pues su medida es (331) $\frac{1}{2}$(ATC+BRC) medidas de A y B (322).

340 2.° Que en ningun triángulo puede haber mas que un ángulo recto ó un obtuso: y quando alguno es recto serán los otros dos complemento el uno del otro (275): y asi conocido el uno se averiguará el otro restando el conocido de 90.°

341 3.° Que qualquiera de los ángulos de un triángulo es suplemento de los otros dos (275), y se sabrá su valor restando la suma de ambos de 180°; y al contrario, restando de 180° un ángulo de un triángulo, saldrá la suma de los otros dos. Por eso si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, el tercero que es el suplemento, será tambien igual al tercero.

342 4.° Tambien se infiere que en qualquier triángulo los lados opuestos á iguales ángulos son iguales; y que si son iguales los lados lo serán tambien los ángulos opuestos. Pues siendo iguales los ángulos, lo deben ser los arcos, sus medidas y de consiguiente sus cuerdas (267): y si lo son las cuerdas, lo serán los arcos, y los ángulos que miden. De suerte que en el triángulo isósceles (fig. 34.) siempre son iguales los dos ángulos D, F opuestos á los dos lados EF, ED iguales, y en el equilátero son iguales los tres ángulos y por lo mismo vale cada uno 60° ó la tercera parte de 180.°

343 5.° Que al mayor lado de un trián-

gulo estará opuesto el mayor ángulo, y al menor el menor: y al contrario, el mayor ángulo tendrá mayor lado enfrente: porque mientras mayor sea la cuerda, mayor será el arco, y de consiguiente el ángulo que mide y al contrario.

344 *Dos triángulos* ABC, abc, (fig. 38.) *son iguales* 1.° *si los tres lados del uno son iguales á los del otro*, ó si AB$=$*ab*, AC$=$*ac*, CB$=$*cb*, pues sobreponiendo el triángulo *abc* á ABC de modo que *bc* caiga sobre BC; el punto *b* deberá caer en el arco de círculo descrito desde C con el intervalo *bc*$=$BC, y en el descrito desde A con el intervalo *ab*$=$AB: caerá pues, en B, en donde se cortan dichos arcos; y el triangulo *abc* se ajustará ó confundirá con ABC: luego serán iguales.

345 2.° *Son iguales dos triángulos* ABC, abc *que tienen un lado* AC$=$ac *adjacente á dos ángulos* A, C; a, c *iguales*; pues poniendo *abc*, sobre ABC, de suerte que *ac* caiga sobre su igual AC; caerán los puntos *a*, *c*, sobre A, C; y como los ángulos A, *a*; C, *c* son iguales, el lado *ab* caerá sobre AB y *cb* sobre CB; luego el punto *b* caerá sobre B, y los triángulos por ajustarse ó confundirse, serán iguales.

346 3.° *Tambien lo son, quando tienen un angulo* B$=$b *formado por dos lados* AB, BC; ab, bc *tambien iguales*; pues sobrepo-

niendo el triángulo *abc* á ABC, caerán los lados, *ab*, *bc* sobre AB y BC por ser iguales los ángulos B, *b*; y los puntos *a*, *c* sobre A, C por la igualdad de los lados; luego *ac* caerá sobre AC, y los triángulos se ajustarán, y de consiguiente serán iguales.

347 Para formar un triángulo de tres lineas dadas, ó cuyos tres lados sean iguales á los del triángulo *abc*; se toma una linea AC=*ac*, y trazando desde A con el intervalo *ab* y desde C con el intervalo *cb* dos arcos, se tirarán á A y C desde el punto B donde se cortan las lineas BC, BA, y se tendrá el triángulo ABC=*abc*. Quando se da una recta AC, y se pide formar sobre ella un triángulo equilátero; se trazan los arcos desde C y A con el intervalo AC, y luego se tiran las AB y BC. Si se diese un lado *ac* y los ángulos adjacentes *a*, *c* para hacer el triángulo; se formarían en los estremos A, C de una recta AC=*ac* dos ángulos A, C iguales á *a*, *c*; y de los lados AB, BC juntos en B resultaría el triángulo que se pide. Quando se dan dos lados *ab*, *bc* y el ángulo comprendido *b*; se forma un ángulo B=*b*, y cortando BC=*bc*, AB=*ab*, se tiene el triángulo pedido ABC.

348 El *quadrilátero*, que es una figura formada por quatro lineas y quatro ángulos, se llama *trapezoide* (fig. 39) quando no tiene lado alguno paralelo á otro: *trapecio* (fig. 40)

quando dos de sus lados AE, BC son paralelos; y *paralelogramo* quando cada lado es paralelo á su opuesto. El paralelogramo se llama *rombo* (fig. 41) quando sus quatro lados son iguales y desiguales sus ángulos contigüos: *romboide* (fig. 42) quando sus ángulos y lados contigüos son desiguales: *rectángulo* (fig. 43) quando sus ángulos son rectos, y desiguales sus lados: y *cuadrado* (fig. 44) quando sus ángulos y lados son iguales. La recta EB (fig. 42) tirada de un ángulo al opuesto de qualquier figura, se llama *diagonal*: y la perpendicular AT ó BD á la base EC alargada si es menester, *altura del quadrilátero.*

349 *Los quatro ángulos de un quadrilátero valen siempre 360° ó quatro ángulos rectos*: pues tirada la diagonal AC (fig. 40), dichos ángulos son los de los triángulos ACE, ACB que valen 360° (338).

350 *Si dos lados* AD, CB (fig. 43) *de un quadrilátero* ADBC *son iguales y paralelos, lo serán tambien los otros dos* AC, DB. Porque tirada la diagonal AB, los triángulos ACB, ABD que tienen el lado AB comun, AD=CB, é iguales los ángulos *t* y *o* (300), serán iguales (346): luego el lado AC=DB: y como son tambien iguales los ángulos alternos *x*, *y*, serán paralelos AC y BD (302).

351 De aquí se infiere 1.° *que la dia-*

gonal AB *divide el paralelogramo* ADBC *en dos triángulos* ACB, ABD *iguales*; pues además del lado AB comun á los dos, los ángulos x, y; t, o son iguales por las paralelas (300): luego (345), serán iguales los triángulos. De consiguiente, un triángulo qualquiera ABC será siempre la mitad de un *paralelogramo de igual base y altura que él.*

352 2.° *Los paralelogramos* ABCE, BCDF (fig. 45) *de una misma ó igual base* BC, *que están entre unas mismas paralelas ó tienen una misma altura, son iguales*: pues los triángulos ABF, ECD que tienen AB=EC, BF=CD (350), é iguales los ángulos m, n comprendidos (303), serán iguales (346), quitese de ambos el triángulo EKF comun, y quedará AEKB=CKFD, y si se añade á ambas partes el triángulo BKC, resultará el paralelogramo ABCE igual al otro BCDF. De consiguiente, *los triángulos de igual base y altura, ó que teniendo una misma ó igual base, estan entre unas mismas paralelas, son iguales*; pues son mitades de los paralelogramos iguales.

353 3.° *Las partes* HR, TX (fig. 46) *de dos paralelas* NO, MP *interceptadas entre otras dos paralelas* AB, CD, *son iguales*; pues resulta un paralelogramo HTXR, cuya diagonal HX le divide en dos triángulos iguales: luego HR=TX: y en todo pa-

ralelogramo serán iguales los lados opuestos HT, RX; HR, TX.

354 4.° Los ángulos opuestos A y B, C y D (fig. 43) de un paralelogramo son iguales. Porque siendo paralelos AC, DB deben valer 180° los ángulos A y D (301); y por ser paralelos AD, CB, tambien D y B valdrán 180°; luego A y B que tienen un mismo suplemento D, serán iguales (277): lo mismo se probará de C y D. De consiguiente, si uno de estos ángulos es recto, lo serán igualmente los otros tres: pues si A es recto, lo será tambien su igual B; y habiendo de componer 180° los dos iguales C y D (349), serán tambien rectos ambos.

355 Si dados dos lados bc, ce, (fig. 42) y el ángulo c, se pidiese trazar un paralelogramo: se tomará $EC=bc$, se formará en E un ángulo $E=c$, se cortará $EA=ce$, y tirando por A una paralela á EC y por C otra á EA, resultará el paralelogramo AECB que se pide: el qual será rectángulo si el ángulo c fuese de 90°, y cuadrado si ademas fuese $bc=ce$.

356 Se llama generalmente *polígono* á la figura terminada por mas de quatro lineas: y en particular *pentágono* á la que consta de cinco, *exâgono* á la que tiene seis, *eptágono* á la de siete, *octógono* á la de ocho, *eneágono* á la de nueve, *decágono* á la de diez, *dode-*

cágono á la de doce..... *pentedecágono* á la de quince &c. Quando todos los lados y ángulos de los poligonos son iguales, se llaman *regulares*, é *irregulares* quando no lo son. Al ángulo B (fig. 47) cuyo vértice se mete dentro de la figura, le llamarémos *entrante*: y *salientes* á los demas que caen fuera de la figura.

357 Un poligono ABCDEF (fig. 48) cuyos ángulos tienen todos sus vértices en la circunferencia de un círculo, se dice estar *inscripto* en él, ó el círculo circunscripto al poligono: su perímetro tantò mayor quanto mas lados tiene, es siempre menor que la circunferencia del círculo. Quando los lados de un poligono PRTHMN tocan todos al círculo, se dice *circunscripto* á él, y el círculo inscripto en el poligono: su perímetro tanto menor quanto mas lados tiene, es siempre mayor que la circunferencia del círculo. De consiguiente, quanto mas lados tenga un poligono inscripto ó circunscripto á un círculo, mas se acercará á su circunferencia: y si el número de lados se concibe infinito ó mayor que qualquiera asignable, se confundirá su perímetro con dicha circunferencia del círculo, *el qual se podrá considerar como un poligono infinitángulo ó de una infinidad de lados*.

358 Las perpendiculares OT, OR &c.

(fig. 49) tiradas desde el punto medio O ó centro de un poligono ABCDE sobre sus lados AB, BC &c. se llaman *radios rectos* ó *apotecmas* del poligono: y *radios oblicuos* á las OA, OB, OC &c. tiradas desde O á los ángulos, de suerte que los dividan por medio. Unas y otras son iguales entre sí quando el poligono es regular. Los oblicuos OA, OB &c. lo son porque dividiendo la perpendicular OT por medio á AB (337), tendrán los triángulos OAT, OTB, AT=TB, OT comun, é iguales los ángulos ATO, OTB comprendidos; luego serán iguales (346), y AO=OB; lo qual se probará igualmente de OC, OD &c. Tambien son iguales los radios rectos, OT, OR &c. porque siendo en los triángulos OTB, OBR; TB=BR por ser mitades de los lados iguales AB, BC, el lado OB comun, y los ángulos comprendidos OBT, OBR iguales por ser mitades del ángulo B, serán iguales dichos triángulos (346), y OT=OR: lo que se demostrará igualmente de los demas.

359 De aqui se infiere que si se dividen por medio dos de los ángulos A, B de un poligono regular con los radios oblicuos AO, OB, y se traza desde el punto O de su concurso un círculo con el radio OA ó BO, quedará inscripto en él el poligono. Igualmente, si con el intervalo de uno de los ra-

dios rectos OT de un poligono se traza un circulo, quedará inscripto en el poligono ó este circunscripto al círculo.

360 *La suma de los ángulos interiores de todo poligono es tantas veces* $180°$ *como lados tiene menos dos.* Tomemos el pentágono ABCDE (fig. 50) y lo mismo se demostrará de qualquier otro. Si desde uno de sus ángulos D se tiran las diagonales DA, DB á los ángulos opuestos A, B, quedará el poligono dividido en tres triángulos cuyos ángulos valen $3\times180°$ (338): y como estos son los mismos que los del poligono, serán estos $3\times180°$ ó $\overline{5-2}\times180°$, que son tantas veces $180°$ como lados tiene menos dos. Lo mismo sucede en el poligono ABCDEF (fig. 47) no contando el ángulo entrante B por el lado esterior ABC, sino por el interior que comprende los quatro ángulos ABF, FBE, EBD y DBC.

361 Si dicha suma se dïvide en qualquier poligono regular por el número de sus ángulos ó lados, se tendrá el valor de cada ángulo. El del pentágono por egemplo, será $\overline{5-2}\times180°$ ó $540°$ divididos por 5, que son $108°$: el del exâgono vale $4\times180°$ ó $720°$ partidos por 6 que dan $120°$.

362 De consiguiente, para construir qual-

quier poligono v. gr. un exâgono, sobre una recta dada AB (fig. 48), formado en B el ángulo ABC igual al del poligono que es de 120°, se trazará un círculo desde el punto O en que concurren los dos radios oblicuos AO, OB con el intervalo de qualquiera de ellos; y pasando con un compás la distancia AB á los puntos C, D, E, F de su circunferencia, á los que se tirarán BC, CD, DE, EF, FA, se habrá descrito el exâgono que se pide.

363 Si desde el centro O (fig. 51) de un poligono se tiran rectas OA, OB &c. á todos sus ángulos, quedará dividido en tantos triángulos como lados tiene, los quales á causa de sus radios oblicuos iguales, serán isósceles é iguales si el poligono es regular. Con efecto, los ángulos de estos triángulos valen $5\times180°$ (338), de donde si se quitan 360° ó $2\times180°$ que valen los formados en O que no pertenecen al poligono, quedarán $\overline{5-2}\times180°$, valor de los ángulos interiores de dicho poligono, como lo digimos ya (360).

364 Cada uno de los ángulos que se forman en O, se llama *ángulo del centro del poligono*, y su valor en el poligono regular es 360° que valen siempre todos, partidos por el número de lados del poligono: en el exâgono regular valdrá 60°, ó 360° partidos por 6: y como solamente 6×60, 4×90 y

3×120 componen 360°; solo con triángulos equiláteros en los que vale cada ángulo 60°, con cuadrados cuyo ángulo es de 90°, y con exâgonos podrá enlosarse un pavimento con figuras regulares.

365 En qualquiera de los triángulos, ABO, se ve (341) que el ángulo del centro AOB es suplemento de los otros dos ABO, OAB ó del ángulo ABC del poligono á que equivalen: y como tambien es suplemento de ABC el ángulo esterior TBC, será este igual al ángulo del centro BOA. Lo mismo se probará de los demas esteriores RCD, XDE &c. que se forman alargando ácia una misma parte todos los lados del poligono: y de consiguiente *la suma de estos ángulos esteriores será igual en qualquier poligono á la de los del centro, que es* 360°.

366 Tanto estos como los esteriores disminuyen á proporcion que es mayor el número de lados: y asi en el círculo, que se compone de una infinidad de ellos, el ángulo esterior BTPD (fig. 23) es infinitamente pequeño como lo dejamos dicho: y por lo mismo el ángulo CTPD que forma el radio con la circunferencia, se puede considerar como recto.

367 Valiendo el ángulo del centro AOB (fig. 48) del exâgono regular 360° partidos por 6 ó 60°, valdrán tambien 60° cada uno

de los ángulos iguales OAB, OBA (338 y 342), y el triángulo AOB será equilátero (335): luego *el lado* AB *del exâgono regular inscripto en un círculo es igual al radio* AO *de dicho círculo*: de consiguiente, el diámetro será igual á $\frac{1}{3}$ del perimétro del exâgono, y la circunferencia mayor que el triplo del diámetro.

368 Luego para inscribir un exâgono regular en un círculo se llevará su radio con un compás seis veces sobre la circunferencia, señalando los puntos A, B, C &c. y se tirarán despues por ellos las cuerdas AB, BC &c. que formarán el exâgono: y si se tiran despues las cuerdas BF, FD, DB se tendrá el triángulo equilátero inscripto; pues cada uno de dichos lados será cuerda de 120°. En él se tiene el radio oblicuo OB=OC duplo del radio recto OX, por ser OX=XC.

369 Como cada lado de un poligono inscripto en un círculo es cuerda de un arco igual á 360° partidos por el número de lados; si se pidiese inscribir un poligono regular en un círculo dado, se buscará, dividiendo 360° por el número de lados, el arco que corresponde á cada uno, se tirará la cuerda á dicho arco valiéndose del *Semicírculo* (279), y repitiéndolo con el compás por toda la circunferencia, quedará inscripto el poligono. Para trazar en este mismo caso el poligono

circunscripto, se alargan los radios oblicuos OC, OD (fig. 49) hasta que encuentran la PH tangente al círculo en el punto Q, y PH será el lado del polígono circunscripto: los demas se determinan del mismo modo.

370 Si se tiran los dos diámetros AB, CD (fig. 52) perpendiculares el uno al otro, queda el círculo dividido en quatro partes iguales, por las que se podrá dividir (309) en 8, 16, 32, 64 &c. partes. Con el triángulo equilátero ó con el exâgono regular se le podrá dividir en 3, 6, 12, 24, 48 &c. partes iguales. Si se tira la cuerda AC de 90°, la AH lado del pentágono ó de 72°, y la AT de 60°, y se divide el arco TC por medio en O, será HO de 3°, que no se puede dividir mas geométricamente. Efectivamente, AC—AT ó $90°-60°=30°$; luego $TO=15°$: y como $TH=AH-AT=72°-60=12°$, será $HO=3°$, con cuyo intervalo se dividirá el círculo en 120 partes iguales.

De las Lineas proporcionales.

371 Si en una linea *ab* (fig. 53), que forma con otra *ob* un ángulo qualquiera *abo*, se toman las partes iguales *bn*, *ne*, *eh*, *hk* &c. y por los puntos *n*, *e*, *h*, *k*, se tiran las paralelas *nq*, *es*, *hr*, *kp* &c. cortarán en la *bo* las partes iguales *bq*, *qs*, *sr*, *rp* &c. pues tiradas

las *qz*, *sc*, *rl* &c. paralelas á *ab*, los triángulos *bnq*, *zqs*, que tienen $bn=ne=qz$ (353), el ángulo $nbq=zqs$ (299), y el $bnq=qzs$ (303), serán iguales (345), y el lado *bq* será igual á *qs*: de los triángulos *qzs*, *scr*, *rlp* &c. se sacará del mismo modo que son iguales *qs*, *sr*, *rp* &c.

372 Luego la parte *bn* es respecto de la *bq*, lo que *ne* respecto de *qs*, lo que *eh* respecto *sr* &c. es decir, que $bn:bq::ne:qs::ek:sr::hk:rp::$ &c. de consiguiente será (180) *ba* suma de los antecedentes de dichas razones, á *bo* suma de los consecuentes, como un antecedente *bn* á su consecuente *bq*; como dos antecedentes *be* á dos consecuentes *bs*; y como qualquier número de antecedentes *nk* á igual número de consecuentes *qp*: ó $ba:bo::bn:bq::be:bs::nk:qp$ &c., de manera que si *ba* es los dos tercios de *bo*, tambien *bn* será los dos tercios de *bq*, *be* de *bs*, *nk* de *qp* &c.

373 De aqui se infiere lo 1.° *que qualquiera recta* hk (fig. 54) *paralela á la base* ad *de un triángulo, divide proporcionalmente los otros dos lados* ab, bd: esto es, será $bh:ha::bk:kd$; y $bh:ba::bk:bd$. Tambien será $bd:bk::da:kh$; pues tirando por *k* la *kp* paralela á *ab*, será por lo que acabamos de decir, $bd:bk::ad:ap=hk$ (353).

374 2.° Al contrario, siempre que una recta *hk* divida proporcionalmente los lados

ba, *bd* de un triángulo *abd*, será paralela á la base *ad*: porque como la paralela á la base, tirada por *k*, ha de cortar en *ba* una parte *bh* que tenga con *ha* la misma razon que *bk* con *kd* (373), la *hk* de quien esto se verifica, deberá ser paralela á *ad*.

375 3.° *Si desde un punto qualquiera* b (fig. 55), *se tiran á una recta* ae *muchas otras* ba, bc, bd, be, *las cortará proporcionalmente una linea* hk *paralela á la base*: porque (373) en los triángulos *bac*, *bcd*, *bde*, la *hk* paralela á sus bases, corta los lados de suerte que *bh*:*ha*::*bq*:*qc*::*bp*:*pd*::*bk*:*ke*, y *bh*:*ba*:: *bq*:*bc*::*bp*:*bd*::*bk*:*be*.

376 Siendo en el triángulo *bac* (373) *bq*:*bc*::*hq*:*ac*, y en el triángulo *bcd*, *bq*:*bc*::*qp*: *cd*; será *hq*:*ac*::*qp*:*cd*, ó *hq*:*qp*::*ac*:*cd*: del mismo modo se probará que *qp*:*pk*::*cd*:*de*; luego *hq*:*qp*:*pk*::*ac*:*cd*:*de*. Lo mismo se verifica quando la paralela *ot* corta las *ab*, *bc*, *bd*, *be* alargadas; pues tomando en *ba*, *bn*=*bt* y tirando por *n* la *nm* paralela á *ae*, los triángulos *bnx*, *bxs*, *bsm* son iguales á *btz*, *bzr*, *bro* (345), por tener cada uno un lado y los ángulos adjacentes iguales; luego siendo *nx*: *xs*:*sm*::*ac*:*cd*:*de*, será tambien *tz*:*zr*:*ro*::*ac*: *cd*:*de*.

377 4.° *Si la linea* bd (fig. 56) *divide el ángulo* b *del triángulo* abc *en dos angulos iguales* x, o; *cortará el lado opuesto* ac *en dos par-*

tes ad, dc *proporcionales á los otros dos lados* ab, bc; esto es, será $ad:dc::ab:bc$: porque tirando por a la az paralela á db que encuentre en z la cb alargada, será el ángulo $o=y$ (299), y $x=t$ (300); y por ser $x=o$, será $t=y$, y (342) $ab=zb$. Como la paralela bd á az corta los lados ac, zc de suerte que $ad:dc::zb:bc$ (373), se tendrá poniendo por zb su igual ab, $ad:dc::ab:bc$. Al contrario, siendo los segmentos ad, dc proporcionales á los lados ab, bc, dividirá la bd al ángulo b por medio: porque siendo $ad:dc::ab:bc$, será $ad:dc::zb:bc$, y (374) la bd será paralela á az, el ángulo $y=o$ (299), y $t=x$; luego siendo $t=y$, será $x=o$.

378 5.° *Para encontrar una quarta proporcional á las tres lineas dadas* m, n, o, (fig. 57); tiradas dos lineas bf, ba que formen un ángulo qualquiera abf, se tomará con el compás sob e bf, br igual á la linea dada m, y la bg del tamaño de la n; cortese despues en ba, la bp igual á la linea o, tirese por p y r la pr, y trazando por el punto g la gt paralela á pr, será bt la quarta proporcional á m, n, o; pues en el triángulo btg se tiene (373) $br:bg::bp:bt$, ó $m:n::o:bt$.

379 *Una tercera proporcional á dos lineas dadas* m, n, se encuentra tomando en bf, br, bg iguales á m, n, y sobre ba, $bp=n$, tirando rp, y por g su paralela gt; pues sien-

do $br:bg::bp:bt$, será $m:n::n:bt$ ó $\div m:n:bt$.

380 6.° *Para tirar por un punto dado* f (fig. 58) *una linea* fg, *que se encamine en derechura al punto del concurso de las dos* ab, *de*, quando este punto está demasiado distante para poderse determinar; desde dos puntos qualesquiera de la *ab* se tirarán dos paralelas *ad*, *be* que rematen en la *de*, desde el punto *a* se tirará á *f* la *af*, y á esta la paralela indefinida *bl*; tomese en ella la parte *bg* quarta proporcional á las tres lineas *ad*, *be*, *af*; y tirando por *f* y *g* la *fg*, será la linea que se pide: porque siendo $ad:be::af:bg$, si se tiran otras dos paralelas qualesquiera *mn*, *no*, será tambien $ad:af::mn:no$; luego quando *mn* sea cero, lo será tambien *no*; esto es, quando la *ab* se junte con *de*, se juntará tambien la *fg*.

381 7.° Ultimamente, *si se pidiese dividir una recta* ab (fig. 59) *en qualesquiera partes*, v. gr. en ocho iguales; se tomarán en la linea *bf* que forma con *ab* un ángulo qualquiera *abf*, comenzando desde *b* y con qualquier intervalo de compás *bd*, las ocho partes iguales *bd*, *dx* &c. desde *c* donde concluyen, se tirará la recta *ca*, y trazando despues por los puntos *d*, *x*, *r* &c. paralelas á *ca*, cortarán en *ab* las ocho partes iguales. Pues siendo $bc:ba::bd:be$; $dx:eh::xr:hp$ &c. serán *be*, *eh*, *hp* octavas partes de *ab*, como *bd*, *dx*, *xr* &c. lo son de *bc*.

382 *Si se hubiera de haber dividido la* ab *en dos partes que tuviesen una razon qualquiera*, como 3:5 ; tomada la suma 3+5=8 de partes iguales sobre *bc*, y tirada la *ca*, se tiraria por la tercera division la *pr* paralela á *ac* ; pues siendo *br*:*rc*::*bp*:*pa* y *br*:*rc*::3:5 , será *bp*:*pa*::3:5.

383 En esta doctrina estriba el método de construir las *Escalas*, instrumento que representa en partes pequeñas las medidas de leguas, toesas, varas &c. tomadas en el terreno. Si se toman por eg. á arbitrio en una linea qualquiera *as* (fig. 60) diez partes iguales *ad*, *dc*, *ce* &c. señaladas con sus números correspondientes 10, 20, 30 &c. y la primera se divide en sus diez unidades que representen varas, pies &c. se tendrá una escala *as* de 100 partes iguales: en la que para tomar un número qualquiera de ellas, como 65, se pondrá en el número 60 una de las puntas del compás y la otra en el 5, y este intervalo será de 65 partes. Como tambien, se averiguará el número de partes de la escala que tiene una linea *nm* ; tomando su longitud con el compás, poniendo la punta en una de las decenas como 40, y viendo adónde llega la otra, si es á 5 tendrá 45.

384 Para construir una escala mas exâcta y universal ; tirada en el punto A de una linea AG indefinida, la perpendicular AB de

longitud arbitraria (fig.61), y por B la BP paralela á AG, se dividirá una porcion AH y su igual BD en diez partes iguales, que se señalarán con los números 10, 20, 30 &c. se tirarán despues trasversales desde 10 á D, de 20 á 10, de 30 á 20. Repitiendo ahora en la AG diez veces la porcion AH, se levantarán en los puntos F, G &c. las perpendiculares FI, GP &c. á las que se pondrán los números 100, 200, 300 &c. Divídase por último la AB en diez partes iguales 1, 2, 3, &c. y tirando por estos puntos paralelas, quedará construida la escala de mil partes, en la que los intervalos HF, FG &c. son de cien partes: D10, 10 20 son de diez, cuyas unidades son *tp*, *on* &c.; pues siendo los triángulos D10H, D*tp*, D*on*, D*rs* &c. semejantes, será, DH de diez partes á H10 de otras diez, como D*s* de cinco, á *sr* de otras cinco; como D*n* de dos, á O*n* de otras dos.

385 De consiguiente, si se me pidiesen 265 partes de esta escala, supuesto que HG ó SQ vale 200, D60 ó T*r*, 60, y *rs* cinco; será la distancia TQ de 265 partes. Asimismo sabremos quantas partes contiene de la escala qualquiera recta; tomando su intervalo con el compás, acomodando una de sus puntas sobre alguna de las lineas DH, FI, GP &c. y viendo despues á qué trasversal de la BD corresponde.

De las Lineas proporcionales en el círculo y de la semejanza de las figuras.

386 Dos triángulos *atr*, *bcd* (fig. 62) son semejantes, si los tres ángulos del uno son iguales á los tres del otro, esto es, $a = b$, $t = d$, $r = c$. Quando son iguales los dos ángulos del uno á los del otro, lo son los tres (341): y en los triángulos rectángulos basta la igualdad de uno de los agudos; asi como en los isósceles la de qualquiera de los tres. De consiguiente, si dada una linea *dc* se pidiese trazar sobre ella un triángulo semejante á *atr*; se formarán en *d* y *c* dos ángulos iguales á *t* y *r*, y será el triángulo *bdc* semejante á *atr*. Si en un triángulo *atr* se tiran paralelas *mn*, *pq* &c. á la base, resultarán los triángulos *amn*, *apq*, *atr* semejantes; pues tienen comun el ángulo *a*, y los otros dos iguales por las paralelas. Lo mismo sucede quando los del un triángulo *ont* (fig 63) son paralelos á los del otro *abc*; pues deben ser equiángulos: ó quando son perpendiculares los lados, unos á otros como los de *emd*; pues si se le da al triángulo *emd* la quarta parte de una vuelta, quedarán sus tres lados paralelos á los tres de *abc*.

387 *Dos triángulos semejantes qualesquiera* atr, bdc (fig. 62) *tienen proporcionales sus lados homólogos* ó los opuestos á iguales ángu-

los; *at:bd::ar:dc::tr:dc*. Porque si se toma en el lado *at*, *am*=*bd*, y por *m* se tira la *mn* paralela á la base *tr*, tendrán los triángulos *amn*, *bdc* el lado *am*=*bd*, y por ser semejantes *atr*, *bdc*, los ángulos *a*=*b*, y *m*=*t*=*d*; luego serán iguales (345), y *an*=*bc*, *mn*=*dc*; y como por razon de las paralelas *mn*, *tr* se tiene (373) *at:am::ar:an::tr:mn*, será tambien *at:bd::ar:bc::tr:dc*, poniendo por *am*, *an*, *mn*, sus iguales *bd*, *bc*, *cd*.

388 Al contrario, *si los lados homólogos de dos triángulos* atr, bdc *son proporcionales* at:bd::ar:bc::tr:dc, *dichos triángulos serán semejantes*: porque tomando *am*=*bd*, y tirando *mn* paralela á *tr*; será (373) *at:am::ar:an::tr:mn*: y como por suposicion *at:bd::ar:bc::tr:dc*; será *am:bd::an:bc::mn:dc*: los términos de la primer razon *am*, *bd* son iguales, con que lo serán tambien *an* y *bc*, *mn* y *dc*; y los triángulos *amn*, *bdc* serán iguales (344): luego siendo el triángulo *amn* semejante á *atr*, lo deberá ser tambien *bdc*.

389 *Dos triángulos* atr, bdc *con un ángulo* a=b, *y proporcionales los lados que le forman* at:bd::ar:bc, *son semejantes*. Tomando *am*=*bd*, y tirando *mn* paralela á *tr*, resulta *at:am::ar:an*, y como se supone *at:bd::ar:bc*, será *am:bd::an:bc*; y siendo *am*=*bd*, será *an*=*bc*, y los triángulos *amn*,*bdc* iguales (346): luego siendo *amn* semejante á *atr*, lo será tambien *bdc*.

390 *Si desde el ángulo recto* b (fig. 64) *de un triángulo rectángulo* abc, *se baja la perpendicular* bd, *resultan dos triángulos* abd, bdc *semejantes á* abc, *y de consiguiente entre sí*: pues cada uno de ellos tiene con *abc* un ángulo comun, y un ángulo recto en *d*; luego son semejantes con *abc* (386), y de consiguiente lo serán entre sí.

391 De la semejanza de los triángulos *abd*, *bdc* se saca (387) *ad*:*bd*::*bd*:*dc* ó ÷ *ad*:*bd*:*dc*, es decir, *que la perpendicular* bd *bajada del ángulo recto de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa, es media proporcional entre sus segmentos* ad, dc. Y como todo ángulo inscripto *abc* (fig. 65) formado sobre el diámetro *ac* de un círculo es recto (324), será tambien *media proporcional entre los segmentos* ad, dc *del diámetro la perpendicular* bd *bajada sobre él desde qualquiera punto de la circunferencia del círculo*, esto es, será ÷ *ad*:*bd*:*dc*, y de consiguiente (175) $(bd)^2 = ad \times dc$.

392 Y asi *para encontrar una media proporcional entre dos lineas dadas* m, n; tomando $ad = m$ y $dc = n$, se juntarán ambas de suerte que formen una sola recta *ac*, que se dividirá por medio en *o*: desde *o* con el intervalo *ao* se trazará el semicírculo *abhc*, y la perpendicular *db* levantada en el punto *d* del concurso de las dos lineas, será media pro-

porcional entre *ad* y *dc*, ó entre *m* y *n* (391).

393 De los triángulos *abd*, *abc* semejantes (390), se saca *ac*:*ab*::*ab*:*ad* (387), y de los *abc*, *bdc* tambien semejantes, *ac*:*bc*::*bc*:*dc*; es decir, *cada lado* ab, bc *de los que forman el ángulo recto, es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente*, y por lo mismo *qualquiera cuerda* ab (fig. 65) *tirada desde el estremo del diámetro* ac, *es media proporcional entre el diámetro y el segmento* ad que forma la perpendicular bajada desde *b* sobre *ac*; pues tirada la *bc*, el triángulo *abc* es rectángulo en *b*.

394 Luego *si dadas* t, r, *se pidiese una media proporcional entre ellas;* se trazaría sobre *ac*=*t* un semicírculo, se tomaría *ad*=*r*, y levantando en *d* la *bd* perpendicular á *ac*, sería la media proporcional la cuerda *ab* tirada de *a* á *b*; pues en el triángulo rectángulo *abc*, se tiene *ac*:*ab*::*ab*:*ad* ó *t*:*ab*::*ab*:*r*.

395 Si despues de haber trazado sobre la hipotenusa *ac* (fig. 66) del triángulo rectángulo *abc* un semicírculo, se alargan *ab*, *ac*, y se levanta en *c* la *ce* perpendicular á *ac*, en *e* la *ef* perpendicular á *am*, y en *g*, *h*, *k*, *l*, *m*, las perpendiculares á dichas lineas, se tendrá una série de lineas proporcionales ∺ *ad*:*ab*:*ac*:*ae*:*af*:*ag* &c. en los triángulos rectángulos semejantes *abd*, *abc*, *ace*, *aef*, *afg* &c.

396 De las dos proporciones ∺ *ac*:*ab*:*ad*,

$\div ac:bc:dc$, se saca $(ab)^2 = ac \times ad$, $(bc)^2 = ac \times dc$: será pues, sumando ambas equaciones, $(ab)^2 + (bc)^2 = ac \times ad + ac \times dc$, ó $(ab)^2 + (bc)^2 = ac(ad + dc)$, ó últimamente $(ab)^2 + (bc)^2 = ac \times ac = (ac)^2$, que es decir; *el cuadrado* $(ac)^2$ *de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual á la suma de los cuadrados* $(ab)^2 + (bc)^2$ *de los otros dos lados.*

397 *Las partes de dos cuerdas* ad, bc (fig. 67) *que se cortan en un círculo, son recíprocamente proporcionales;* esto es, *ae* parte de la 1.ª es á *eb* parte de la 2.ª como *ec* parte de esta 2.ª á *ed* parte de la 1.ª: porque tirando las *ab* y *cd*, resultan semejantes los triángulos *aeb*, *ced*; pues tienen los ángulos en *e* iguales (277), y $c = a$ (323): luego (387) $ae:eb::ec:ed$. Si entre dos paralelas *ab*, *cd* se tiran como quiera las *ad*, *bc* que se corten, son tambien recíprocamente proporcionales sus partes por la misma razon.

398 *Dos secantes* ab, bc (fig. 68) *tiradas á un círculo desde un punto* b, *son recíprocamente proporcionales con las partes esteriores* br, bd; de suerte que $bc:ba::br:bd$: porque si se tiran *ad* y *rc*, los triángulos *brc*, *bad* que tienen ademas del ángulo *b* comun, *a* y *c* iguales (323), serán semejantes: luego (387) $br:bd::bc:ba$.

399 *Si se tiran á un círculo desde un punto* b *una tangente* bp *y una secante* ba, *la tan-*

gente es media proporcional entre la secante y el segmento esterno, ó $ba:bp::bp:br$. Tiradas las pa, pr, los triángulos apb, pbr son semejantes, pues tienen el ángulo b comun y $a=p$ (321 y 322): luego $ab:bp::bp:br$, y $(bp)^2= ab\times br$ (175). Del mismo modo se verifica que $ab:bo::bo:br$, ó que $(bo)^2=ab\times br$; será pues, $(bp)^2=(bo)^2$, y $bp=bo$, es decir, serán iguales las dos tangentes tiradas á un círculo desde qualquier punto fuera de él.

400 Por esta proposicion 1.° *se encuentra una media proporcional entre* m *y* n (fig. 69); tomando una linea $bt=m$ y $br=n$, trazando sobre el diámetro tr un círculo, y tirando á él desde b la tangente ba, que será media proporcional entre bt y br, ó entre m y n.

401 2.° Se puede dividir una linea ab en *media* y *estrema razon*; asi se llama la division de ab en dos partes ad, db tales, que la mayor db sea media proporcional entre la menor ad y toda la ab. Para esto se levanta en el estremo a la perpendicular ac igual á la mitad de ab, con el radio ca se traza un círculo, por b y c se tira bct, y tomando $bd= br$, quedará la ab dividida en d, de suerte que $ad:bd::bd:ab$. Porque siendo (399) $bt:ba:: ba:br$ ó (177) $bt-ba:ba::ba-br:br$; como $bt-ba=br=bd$, por ser $bt-ba=bt-2ac=bt- tr$, y $ba-br=ba-bd=ad$; se tendrá $bd:ba:: ad:bd$, ó $ba:bd::bd:ad$ (177). Quando la par-

te *rt* de la secante es igual á la tangente *ab*, queda la secante dividida en media y estrema razon en *r*; pues siendo (399) *bt*:*ab*::*ab*:*br*, será en tal caso *bt*:*rt*::*rt*:*br*.

402 Si en el triángulo isósceles *abc* (fig. 70), cuyos ángulos *b*, *c* sea cada uno duplo de *a* ó de 72°, se divide el ángulo *b* por medio con la *bt*, quedará la *ac* dividida en media y estrema razon en *t*. Porque siendo semejantes los triángulos *abc*, *tbc*, por tener el ángulo *c* comun, y *a*=*tbc*=36°, será *ac*:*cb*::*cb*:*ct*, ó *ac*:*at*::*at*:*ct*, pues *cb*=*bt*=*at* por la igualdad de los ángulos (342). Luego si *bc* es lado del decágono inscripto en un círculo, será el ángulo *a*=36° (364), *b* y *c* de 72°; y de consiguiente, tirando *bt*, será *bc*=*at*, y *el lado del decágono inscripto en un círculo será igual al segmento mayor del radio dividido en media y estrema razon.*

403 Tratemos ya de las demas figuras, que para ser *semejantes* deben tener todas sus ángulos iguales, y proporcionales todos sus lados ó lineas *homólogas*, es decir, las opuestas á iguales ángulos, ó situadas semejantemente en ellas. Serán pues, semejantes los pentágonos ABCDE, *abcde* (fig. 71), si los ángulos A=*a*, B=*b*, C=*c*, D=*d*, E=*e*, y los lados AB:*ab*::BC:*bc*::CD:*cd*::DE:*de*.

404 „Si de dos ángulos homólogos C, *c* „de dos figuras semejantes ABCDE, *abcde*,

„se tiran á los demas las diagonales CA, CE; „*ca*, *ce*; los triángulos en que queda dividi- „da la una figura, serán semejantes á los cor- „respondientes de la otra.“ Pues los triángulos ABC, *abc* y lo mismo se prueba de DEC, *dec*, ademas de los ángulos B, *b* iguales, tienen proporcionales los lados AB, BC; *ab*, *bc* que los forman (403); luego serán semejantes (389). Será pues, el ángulo $n=o$ y (387) AB:*ab*::AC:*ac*; y como AB:*ab*::AE:*ae*, será AC:*ac*::AE:*ae*, es decir, proporcionales los lados AC, AE; *ac*, *ae* de los triángulos AEC, *aec*, ademas de ser iguales los ángulos m y z que forman; pues si del ángulo $A=a$, se quita $n=o$, quedará $m=z$; luego tambien son semejantes los triángulos ACE, *ace* y de consiguiente todos los de las figuras.

405 Por un razonamiento contrario se prueba igualmente que si los triángulos en que una figura se divide, son semejantes á los correspondientes en que se divide otra, son semejantes las figuras. Y asi para construir una figura semejante á otra ABCDE dada, y que tenga á *bc* por lado homólogo de BC; se llevará *bc* desde C á b', se tirará por b' la $b'a'$ paralela á AB que encontrará á AC en a'; por a' se trazará la $a'e'$ paralela á AE, y por e' la $e'd$ paralela á ED; y resultará la figura $Cd'e'a'b'$ semejante á ABCDE. Tambien pudo haberse trazado sobre el lado *bc* dado, el

triángulo *abc* semejante á ABC (386), sobre *ac*, el triángulo *ace* semejante á ACE, y sobre *ec*, *ecd* semejante á ECD, y se hubiera tenido la figura *abcde* semejante á ABCDE.

406 Para copiar una figura qualquiera ABCDEF (fig. 72), 1.° se podrá tirar la diagonal BE, y bajando á ella desde todos los ángulos las perpendiculares AO, FS, DR, CP, se verá quántas partes tienen de una escala la BE, dichas perpendiculares, y sus respectivas distancias BO, OS, SP &c. Tomese despues una linea *be* del mismo número de partes que BE, y determinando por uno y otro lado las distancias *bo*, *os* &c. de las perpendiculares, dando á cada una el número de partes que les corresponde, se habrán determinado los puntos *o*, *s*, *p*, *r*, en los que levantando las perpendiculares *oa*, *sf* &c. del mismo tamaño que OA, SF &c. se tendrán los puntos *b*, *a*, *f*, *d* &c. mas principales de la figura: los demas se pueden dibujar á ojo; advirtiendo que si no basta la BE para determinar dichos puntos por ser muchos, ó por ser grande su distancia respectiva, se tirará otra base perpendicular á BE por cuyo medio se determinarán.

407 2.° Tambien se pudiera haber copiado aplicando el papel ó lienzo en que está la figura á otro, y picando despues con un alfiler sutil los puntos mas principales por

los quales se podrán determinar los demas.

408 3.° Si despues de haber picado con un alfiler los puntos de la figura, se aplica sobre un papel, y se repasan despues dichos puntos con un *Cisquero*, que es un lienzo con carbon molido; quedarán señalados dichos puntos en el papel, cuidando de levantar con tiento el original.

409 4.° Apliquese sobre un papel, otro dado de qualquier color que se quite facilmente, póngase sobre ambos la figura que se ha de copiar, y repasando con alguna fuerza todos los puntos principales con una punta roma, quedará calcada la figura en el papel.

410 5.° Ultimamente, si se aplica á un cristal la figura dada, en sitio donde le dé bastante luz por atras, y se pone sobre ella un papel, se traslucirá por él toda la figura, cuyos puntos será facil copiar.

411 *Para levantar el plano de un terreno*, ó trazar otro semejante en el papel con las distancias respectivas que tienen los puntos ú obgetos principales que en él haya; sirven diferentes instrumentos como el *Grafómetro*, *la Plancheta*, *la Brújula* &c. Hablarémos ahora de estos dos últimos con relacion á los terrenos accesibles por todas sus partes, reservando para despues el uso del Grafómetro en los sitios en parte ó del todo inaccesibles.

412 La *Plancheta* es una tabla HMNO (fig. 73) de tres pies de largo, y como dos y medio de ancho, colocada sobre un pie semejante al del Grafómetro (280); sobre ella se estiende un papel que se afianza con un bastidor que coge el perimetro de la tabla; y para dirigir por ella visuales á los obgetos, se usa de una *alidada* LT con dos pínulas en sus estremos, ó de un anteojo si los obgetos están á mucha distancia.

413 Para levantar un plano con este instrumento, se mide una base SR desde donde se puedan ver los mas de los obgetos que se han de figurar; se pone la plancheta en S y un piquete en R, y dirigiendo la alidada de manera que por sus pínulas se vea R, se tirará en el papel una base EF, dándole tantas partes de una escala, como varas ó pies tenga SR. Hecho esto, se dirigirá la alidada á todos los obgetos A, B, C &c. del terreno, y por cada direccion, se tirará una linea indefinida en el papel. Pasese despues el instrumento á R dejando un piquete en S, y alineando con él la *ef*, dirijanse visuales á los obgetos A, B, C &c. observados, las quales señaladas en el papel, cortarán las primeras en los puntos *a*, *b*, *c* &c. que determinarán la posicion de los del terreno, á causa de los triángulos semejantes SAR, SBR, SCR &c. *efa*, *efb*, *efc* &c. que resultan.

414 El poco aparato que requiere el uso de este instrumento, le hace apreciable para determinar los puntos menos principales de un plan forjado ya por un método mas exâcto. Si se quisiere por eg. añadir al anterior *efcba* un punto R omitido, se plantará sobre él la plancheta, se dirigirá la alidada por los puntos A, *a*, y despues por B', *b'*, y el concurso *f* de las lineas A*a*, B*b* tiradas en cada direccion, señalará la situacion de R; en prueba de lo qual la linea tirada por C*c* pasará tambien por *f*. Por lo demas, suelen ser considerables los errores que pueden resultar con la plancheta, ya por ser muy agudos los ángulos que sobre ella se forman, ya por estar el papel expuesto á moverse. Ademas de esto, quando el mal temporal interrumpe la operacion, hay que volverla á comenzar si se desea alguna exâctitud.

415 La *Brújula* es un instrumento de marfil, madera ú otra materia sólida (fig.74) de dos hasta seis pulgadas de diámetro, cuya parte interior es un círculo con dos diámetros que se cortan á ángulos rectos. El estremo de uno de ellos tiene una flor de lys con que se señala el *Norte*, uno de los quatro puntos *Cardinales* del mundo: desde él empieza la division del círculo en sus 360° ácia la derecha del que mira al Cielo con la cara al Norte, el qual tiene el *Sur* á las espaldas,

el *Oriente* á la derecha y el *Poniente* á la izquierda: asi se llaman los otros tres puntos del mundo. En el centro del círculo sobre un ege de cobre puntiagudo se coloca una aguja de azero tocada al iman, muy en equilibrio para que pueda dar vueltas con facilidad; y todo se tapa con un cristal redondo que encaja en un rebajo hecho al rededor del círculo para impedir que el ayre menee la aguja.

416 Como esta tiene la virtud comunicada del iman, de dirigir uno de sus estremos ácia el Norte y el otro ácia el Sur; se cuida de colocar tanto en el Grafómetro como en la plancheta una brújula para dar por medio de ella á los obgetos la misma situacion en el papel que tienen en el terreno con relacion á los puntos cardinales del mundo. Con este fin se coloca de manera que la linea *Norte-Sur* quede paralela con el diámetro del Grafómetro; pues siendo la base comun de todos los triángulos que se observan, paralela á dicho diámetro; con solo dirigir paralela á la aguja la linea de *fe*, que es la que pasa por medio de la alidada, se sabrá con poca diferencia la situacion de los obgetos respecto de dichos puntos cardinales.

417 Dige con poca diferencia, porque la aguja segun el tiempo y los diferentes lugares, se aparta mas ó menos de la direccion del Norte. Para saber en quántos grados se

aparta, ó el *ángulo de la declinacion* de la aguja con la linea norte-sur, hay que tirar esta linea en el terreno. Lo que se puede hacer trazando desde un punto dos lineas de treinta á quarenta estadales, una ácia el Sol naciente y otra quando se pone, y dividiendo por medio el ángulo que formen las dos, con una linea que será la *meridiana* ó norte-sur. Si á esta meridiana se aplica una de las bases AB de la brújula, quedará con ella paralela su linea norte-sur, y el ángulo que con ella forme la aguja, restado de 360°, dará el de la declinacion.

418 Con ningun instrumento se levantan mas facilmente los planos que con la Brújula; pero ninguno ocasiona mayores equivocaciones, ya sea por tomarse muy agudos los ángulos por la pequeñez de las agujas, ya sea por no haberse acaso apartado lo bastante de alguna mina de hierro en el terreno; y en casa, de utensilios de hierro, puntas de compás, ó de otra brújula. Por eso suele servir solamente para determinar *el por menor* de un plano; como el curso de un rio, la direccion de un camino, el circuito de una laguna, bosque &c.

419 Para qualquiera de estos casos se plantarán piquetes A, B, C, D, E (fig. 75) en todos los recodos mas reparables, se colocará la brújula en A, y suponiendo que sea

AH la direccion de la aguja, se medirá la AB, y se verá qué número de grados tiene el ángulo HAB. Puesto el instrumento en B, se medirá igualmente la BC, y el ángulo HBC, repitiendo esto mismo en cada recodo. Se tomará despues en el papel un punto *a*, y tirando á arbitrio la *ah* que represente la direccion de la aguja, se formará con el *Semicírculo* un ángulo *hab*=HAB, dando á *ab* tantas partes de una escala como varas ó pies tuvo AB: se tirará despues por *b* la *hb* paralela á *ab*, y se hará el ángulo *hbc*=HBC, dando á *bc* tantas partes como medidas tuvo BC; practiquese lo mismo en los demas puntos, y se habrá levantado el plan propuesto.

420 *Los perímetros de dos figuras semejantes* ABCDE, abcde (fig. 71) *sean regulares ó no, tienen entre sí la misma razon que sus lados, porciones, diagonales y demas líneas homólogas.* Porque siendo (403) AB:*ab*::BC:*bc*::CD:*cd*::DE:*de*, será (180) AB+BC+CD+DE ó ABCDE perímetro de la una figura y suma de los antecedentes, á *abcde* perímetro de la otra y suma de los consecuentes; como un antecedente AB á su consecuente *ab*; como qualquier número de antecedentes AB+BC+CD ó ABCD, á igual número de consecuentes. Y como AB:*ab*::AC:*ac*::CE.*ce* &c. (404), serán tambien los lados y perímetros proporcionales á las diagonales, y en los poligo-

nos regulares á los radios rectos, oblicuos &c. De manera que la figura de un perímetro duplo del de otra, tendrá lados, diagonales, radios duplos; triplos si fuese triplo el perímetro &c.

421 Todas estas proposiciones tienen lugar en el círculo, poligono infinitángulo (357), que podemos imaginar dividido en infinitos triángulos con radios tirados á todos sus puntos, que serán las bases y lados infinitamente pequeños del poligono. De consiguiente, *las circunferencias de los círculos, son entre sí como sus radios, diámetros, cuerdas y arcos semejantes.* De manera que dado el diámetro y circunferencia de un círculo, y el diámetro de otro, si se nos pidiese su circunferencia, diriamos, *el primer diámetro es á su circunferencia, como el 2.° diámetro á la circunferencia que se busca*, que sería el 4.° término de la proporcion. Pero hasta ahora está por averiguar la circunferencia ó porcion de linea recta que exâctamente corresponde á cierto diámetro, ó la razon del diámetro á la circunferencia: teniéndose ya casi por imposible la que se llama (434) *Cuadratura del círculo.* Sin embargo, son suficientísimas para la práctica las razones 7:22 que tiene el diámetro á la circunferencia segun *Arquimédes*, en la que sale un solo pie de menos en un círculo de 800 pies: 113:355 que ha-

llo *Mecio*, y que da un pie de falta en una circunferencia de 1000000, y 1:3,14159265358979323 &c. hasta ciento veinte y siete notas decimales.

422 Si se diese un diámetro de 16 varas, hallaríamos su circunferencia de $50\frac{2}{7}$ *v*. diciendo, $7:22::16:50\frac{2}{7}$ *v*. y al contrario, el diámetro 16 *v*. de una circunferencia que tiene $50\frac{2}{7}$ *v*. se encuentra por la proporcion $22:7::50\frac{2}{7}$ *v*: 16. Ultimamente, si dado el diámetro de 20 *v*. se pidiese la longitud de un arco de 32° 40′, se buscará primero la circunferencia que es de $62\frac{6}{7}$ *v*. y despues se dirá, *si toda la circunferencia* ó 360° *tiene* $62\frac{6}{7}$ *v*. *¿quántas tendrá* 32°, 40′? Sáquese el último término, y saldrán $5\frac{19}{27}$ *varas*.

De las Superficies y Planos.

423 El segundo género de estension en longitud y latitud que se llama *area* ó *superficie*, es el espacio que encierran las lineas, y segun sean estas rectas ó curvas será *rectilinea*, *curvilinea* ó *mistilinea* la superficie. Tambien se llama *plana* la superficie perfectamente lisa sin hoyos ni eminencias, como la del cristal: y *curva* aquella cuyos puntos no están igualmente altos y bajos como la de una bola.

424 Dicha superficie plana que se considera formada de infinidad de lineas que lle-

nan todo su espacio (256), se llama *plano* quando se imagina separada de los cuerpos; y como no tiene grueso, cavidades ni prominencias, *qualquiera recta que le toque en dos puntos le tocará en todos*; pues sino, tendria una parte en el plano y otra mas elevada, y no sería recta. Por lo mismo, un *plano puesto sobre otro le toca en todos sus puntos, y forma con él un solo plano*; pues se tocan precisamente todas las rectas que los forman.

425 *Tres puntos que no están en linea recta, determinan la situacion de un plano;* porque si dos planos pudieran tener tres puntos comunes, ó los tendrían todos y formarían un solo plano, ó tendría uno de ellos alguna parte elevada sobre el otro plano, lo que no puede ser (424). De consiguiente, tres puntos que no estén en linea recta, no pueden ser comunes á dos planos.

426 De aqui se infiere que por tres puntos qualesquiera v. gr. los de un triángulo, se podrá hacer pasar un plano: y de consiguiente dos rectas BD, BC (fig. 76) que se corten, estarán en un mismo plano, determinado por los tres puntos D, B, C: y lo mismo dos paralelas TH, AB.

427 *Una recta* AB *perpendicular á un plano* MNOP, *es tambien perpendicular á todas las lineas puestas en el mismo plano que pasan por el punto* B *de la perpendicular;*

pues si no lo fuera se inclinaria ácia algun lado del plano, contra el supuesto de ser perpendicular. De consiguiente, *dos lineas* TH, AB *perpendiculares á un plano son paralelas entre sí;* pues uniéndolas con HB son perpendiculares á la HB (298).

428 *Desde un punto tomado en un plano ó fuera de él, no se puede tirar mas que una perpendicular á dicho plano;* pues si se pudieran tirar dos desde un mismo punto, se podrian tirar dos perpendiculares desde un punto á una linea recta, lo qual es imposible (288).

429 *Si dos planos* ENMA, BOPS (fig. 77) *se cortan, la comun seccion es una linea recta:* porque si tomamos dos puntos en dicha seccion, la recta que pase por ellos ha de estar toda en cada uno de los planos (258), luego será la comun seccion, y será linea recta.

430 *Si dos planos* EMNA, BOPS *son perpendiculares al plano* RQ, *su comun seccion* DC *será tambien perpendicular al plano;* pues si del punto C se levanta una perpendicular al plano RQ, deberá hallarse toda en cada uno de los planos EMNA, BOPS; luego será la comun seccion.

431 *La inclinacion de dos planos* AN, BP *se mide por el ángulo* ACB *que forman dos lineas* AC, BC *perpendiculares á la co-*

mun seccion DC, *tiradas una en el plano* AN, *y otra en el plano* BP: pues si imaginamos que sobrepuesto el punto A á B; se aparta despues el plano AN moviéndose al rededor del ege DC, trazará B hasta volver á su lugar, el arco AB; luego medirá la inclinacion de los planos el ángulo ACB, cuya medida es AB.

432 Luego en la interseccion y encuentro de dos ó mas planos se verifica quanto dejamos demostrado en la interseccion y encuentro de dos ó mas lineas (273, 277 *y sig.* 282 y *sig.*, 298 *hasta* 303) que escusamos repetir aqui.

433 Los planos son paralelos quando distan igualmente por todas partes: y asi *si un plano corta dos ó muchos planos paralelos, las comunes secciones son tambien paralelas*; pues sino, alargándolas se vendrían á juntar y de consiguiente los planos, contra lo supuesto de ser paralelos.

Medida de las Superficies.

434 Las superficies se miden con cuadrados, por ser la figura mas sencilla: y asi *cuadrar* ó *medir una superficie* ABDC (fig.78) es averiguar las veces que en ella cabe otra superficie cuadrada y conocida *abdc* que se toma por la unidad. Y como ABDC se puede concebir formada (256) por la recta DC que se

mueve paralelamente á sí misma lo largo de BD, dejando rastro tras sí de su movimiento; á cada paso D*b* que ande, igual al lado *db* del cuadrado *abdc* que se toma por la unidad, formará tantos cuadrados iguales á *abdc*, quantas veces dicho lado D*b* ó D*c* quepa en la linea DC que son quatro. Luego dicha superficie contendrá tantas veces quatro cuadrados iguales á *abdc*, como veces su lado *db* ó D*b* quepa en la base BD, esto es, el producto del número de veces que el lado del cuadrado cabe en la base y en la altura. Esto esplicaremos en lo sucesivo brevísimamente diciendo *que la superficie de un paralelogramo rectángulo es el producto de la base por la altura*, bien que con impropiedad; pues ni una linea puede multiplicarse por otra no siendo número abstracto (15), ni aunque se pudiera multiplicar resultaría una superficie, sino una linea.

435 Luego 1.° *la superficie de un cuadrado es el producto de la base ó de la altura por sí*: y la de un paralelogramo qualquiera BCDF (fig. 45) *es el producto de su base* BC *por su altura* DT ó AB; esto es, BC×AB: porque BCDF es igual á ABCE (352), y este tiene por superficie BC×AB (434).

436 2.° *La superficie de un triángulo qualquiera*, como mitad que es del paralelo-

gramo de igual base y altura que él (351) *es la mitad del producto de su base por su altura*, ó el producto de una de las dos la base ó la altura por la mitad de la otra.

437 *La superficie de un trapecio* abce (fig. 79) *es el producto de su altura* ed *por la mitad de la suma de sus bases paralelas* bc, ae: porque con la diagonal *ac* queda dividido en los dos triángulos *abc*, *ace*, cuyas superficies son (436) $\frac{1}{2}bc \times ed + \frac{1}{2}ae \times ed$: luego la suma de estas dos superficies ó la del trapecio será $\frac{1}{2}(bc + ae) \times ed$. Si se toma $ao = ob$, y se tira *ot* paralela á *bc*, será la superficie del trapecio $ed \times to$: porque tirando por *o* la *mn* paralela á *ec*, se tiene $2to = en + mc$, y $to = \frac{1}{2}(en + mc) = \frac{1}{2}(ae + bc)$, poniendo *bm* en lugar de *an* su igual en los triángulos *aon*, *bom* iguales, por tener $ao = bo$, los ángulos en *o* iguales (277) y lo mismo *a* y *b* (300).

438 *La superficie de un polígono regular*, ABCDE (fig. 51) *es el producto del radio recto por la mitad de su perímetro*; porque siendo la superficie de cada uno de los triángulos iguales en que se divide (363), el producto de su altura OH por la mitad de su base AB (436); será la de todos los triángulos ó la del poligono, el producto de la altura ó radio recto OH por la mitad de todas las bases ó lados del poligono que forman su perímetro. Luego un triángulo que tuviese por base el

perímetro del poligono, y su radio recto por altura, tendria la misma superficie que el poligono; pues seria tambien el producto del radio por la mitad del perímetro.

439 Como un círculo es un poligono infinitángulo (357), será su superficie *el producto del radio por la mitad de la circunferencia, ó de esta por la mitad del radio*: y equivaldrá á la superficie de un triángulo cuya base fuese la circunferencia, y la altura el radio. La superficie de un círculo de 20 pies de diámetro, cuya circunferencia es $62\frac{6}{7}$(422), será $314\frac{2}{7}$ pies cuadrados, producto de 5 mitad del radio por la circunferencia $62\frac{6}{7}$.

440 La superficie de un sector de círculo ACBD (fig. 80) es el producto de la mitad del radio por el valor del arco ADB. Si este arco por eg. es de 32° 40', y su diámetro de 20 pies, tendrá el arco $5\frac{19}{27}$ pies (422); multiplíquese por 5 mitad del radio, y resultarán $28\frac{14}{27}$ por la superficie del sector.

441 Un segmento de círculo ABD tiene por superficie á la del sector ACBD menos la del triángulo ACB. Y la de una corona X se hallará buscando separadamente la de los dos círculos que la componen, y restando la superficie del menor de la del mayor.

442 Para sacar la superficie de un poligono irregular, se le divide en triángulos, en los menos que pueda ser, se saca la de

cada uno, ó de cada dos si se les puede dar una base comun, y la suma de todos, será la del poligono. Si en el ABCDEF (fig 72) se toma la diagonal BE por base de los dos triángulos BEC, BFE, se sacará de una vez la superficie de ambos, multiplicando BE por la mitad de las alturas PC, FS; y añadiendo á la superficie que resulte, la de los triángulos FAB, EDC que se sacará cada una por sí, se tendrá la del poligono.

443 Quando está terminado de alguna linea curva irregular, se le reduce segun lo muestra la figura 81, á poligono rectilineo, y despues de medir las superficies mistilineas restantes, ó como triángulos ó como segmentos de círculo, se unirán á la del poligono para tener la total sin error sustancial.

Reduccion y division de las Superficies.

444 Para reducir un paralelogramo á un cuadrado, ó hacer un cuadrado igual en superficie á un paralelogramo dado BCDF (fig. 45); se busca (394) una media proporcional M entre la base BC y la altura DT, y esta será el lado del cuadrado: porque siendo BC: M::M:DT, será (175) $BC \times DT = M^2$: ó la superficie del paralelogramo igual á la del cuadrado.

445 Una media proporcional entre la mi-

tad de la base y la altura, ó entre la base y la mitad de la altura de un triángulo, seria el lado del cuadrado igual á él en superficie (436). Y la media proporcional entre el radio y la semicircunferencia de un círculo, dará el lado del cuadrado de una misma superficie que él (439).

446 *Una figura rectilinea qualquiera* ABCDE (fig. 82) *se reduce á otra igual en superficie, y que tenga un lado menos*; tirando la diagonal BD, y por el punto C la CG paralela á BD, que cortará en G el lado AB alargado; tirese despues la DG, y resultará el quadrilátero AGDE igual al pentágono ABCDE. Porque siendo iguales los triángulos GBD, CBD (352) por ser de una misma base y estar entre las paralelas BD, CG, si del pentágono se quita el triángulo CBD, y se le pone su igual GBD, quedará AGDE= ABCDE. Si al quadrilátero AGDE se le quita por el mismo método otro lado, quedará reducido al triángulo FDG igual á él en superficie: de consiguiente, qualquiera figura rectilinea se podrá reducir á triángulo, y tambien á cuadrado (445).

447 *Hayase ahora de reducir un triángulo* ACB (fig. 83) *á otro igual en superficie, que tenga su vértice en un punto dado* D. Para esto tirense á los puntos A, C las DA, DC; por el vértice B la BH paralela á la base AC;

y por el punto H donde la DA corta á BH, la HE paralela á DC; y tirando finalmente la DE, será ADE el triángulo que se pide. Porque tirando la HC, los triángulos DHE, HEC de una misma base HE, y que estan entre las paralelas DC, HE, son iguales (352): júntense con el triángulo AHE en la 1.ª figura, y réstense de AHE en la 2.ª y 3.ª y resultará el triángulo ADE igual á AHC; y como este es igual á ABC triángulo dado, por tener una misma base y estar entre las paralelas BH, AC; será el triángulo ADE= ABC.

448 *Para dividir un triángulo* ABC (fig. 84) *en las partes iguales que se quiera, con líneas tiradas desde un punto dado* D; se dividirá la base AC en el número de partes en que se ha de dividir el triángulo, y sea en dos en E, á donde se tirarán las EB y ED, y desde B la BF paralela á DE; tírense por último DF, DB, y estas dividirán al triángulo en dos partes BDFA, DFCB iguales. Porque los triángulos ABE, EBC de una misma altura BE y bases CE, AE iguales, son iguales (352): tambien lo son BEF, BDF, por tener una misma base BF y estar entre las paralelas BF, DE: añadanse á ABF, y resultará el triángulo ABE mitad del total ABC, igual al trapezoide AFDB; y de consiguiente, la porcion DFCB será la otra mitad.

449 *Si se pidiese dividir en qualesquiera partes, por egemplo en dos, un quadrilátero* ABCD (fig. 85) *desde un punto* E *dado en uno de sus lados*; se reducirá primero al triángulo ABF (446), se tirará despues la DE, y la DG á la mitad G de la base AF; y será el triángulo ADG mitad de ADF ó del quadrilátero ABCD: finalmente tracese por G la GH paralela á DE, y tirando EH, dividirá el quadrilátero como se pide. Porque siendo iguales los triángulos DEH, DEG de una misma superficie que están entre las paralelas GH, DE; si se añaden á ADE, se tendrá ADG mitad del quadrilátero igual á ADHE.

450 *Para dividir en quantas partes se quiera, sea en tres, el poligono* ABCDE (fig. 86) *con lineas tiradas desde uno de sus ángulos* D; transformesele en el triángulo TDF (446), dívidase su base TF en tres partes iguales en H y G, y tirando DH, DG, quedará dividido el poligono en tres partes iguales: pues son iguales los tres triángulos TDH, HDG, GDF que tienen una misma altura y bases iguales. Quando alguno de los puntos G, H, &c. cae fuera del poligono como sucede en ABCDE (fig. 86*), el qual si se divide en quatro partes iguales como acabamos de decir, cae fuera el punto H; se reduce el triángulo HDI al quadrilátero AODI, tirando por H la HO paralela á AD.

Comparacion de las Superficies.

451 Siendo la superficie de un paralelogramo el producto de la base por su altura (434); si llamamos B la base, A la altura, S la superficie de uno; b, a, s la base, altura y superficie de otro; será $S=B\times A$, $s=b\times a$; luego $S:s::B\times A:b\times a$; es decir, *las superficies de los paralelogramos son como los productos de sus bases por sus alturas, ó estan en razon compuesta de bases y alturas.*

452 Quando $B=b$, la proporcion $S:s::AB:ab$, se reduce á $S:s::A:a$, y quando $A=a$, es $S:s::B:b$; esto es, *los paralelogramos de una misma base son como sus alturas, y los de una misma altura son como sus bases.*

453 *Si las bases de los paralelogramos estan en razon inversa de sus alturas, serán sus superficies iguales;* y al contrario, *si son iguales en superficie, tendrán bases y alturas recíprocas;* porque si $B:b::a:A$, será (174) $B\times A=b\times a$ ó $S=s$; y si $S=s$ ó $B\times A=b\times a$, será (176) $B:b::a:A$.

454 Como los triángulos son mitades de los paralelogramos de igual base y altura (351), tendrán tambien (183) *la razon compuesta de bases y alturas; los de igual base serán como las alturas, y los de igual altura como sus bases: los iguales en superficie tendrán sus bases en razon inversa de sus al-*

turas ; y los que tengan bases y alturas recíprocas , serán iguales en superficie.

455 En los paralelogramos y triángulos semejantes, en los que la razon de las bases es igual á la de las alturas (403), será la razon compuesta de bases y alturas que tienen dichas figuras (451); duplicada de qualquiera de ellas (172); luego *los paralelogramos y triángulos semejantes tienen la razon duplicada de sus bases y alturas, ó son como sus cuadrados*: y como las bases y alturas son proporcionales á todos los lados homólogos, *serán dichas figuras como los cuadrados de sus lados homólogos*, y asi será $S:s::A^2:a^2::B^2:b^2$ &c.

456 Luego *la superficie de qualesquiera figuras semejantes tendrán la razon duplicada de sus lados homólogos, ó serán como sus cuadrados*: pues siendo los triángulos en que dichas figuras pueden dividirse, partes semejantes suyas (404), deberán tener la misma razon que ellos (183), que es la de los cuadrados de sus lados homólogos (455). Y asi, *la superficie de los polígonos regulares semejantes son entre sí como los cuadrados de sus perímetros, diagonales, radios rectos y oblicuos. Y las superficies de los círculos ó semicírculos son como los cuadrados de las circunferencias, radios, diámetros, arcos y cuerdas semejantes.*

457 Por ser (396) $(ab)^2 = ac \times ad = aepd$ (fig. 87), y $(bc)^2 = ac \times dc = dpfc$; será $(ab)^2 + (bc)^2 = aepd + dpfc$, ó el cuadrado V de la hipotenusa ac igual á la suma $X + Z$ de los cuadrados de los otros dos lados ab, bc: proposicion que demostramos (396), y que tambien consta de que siendo semejantes los triángulos abc, abd, bdc (390), será (455) $abc : abd : bdc :: (ac)^2 : (ab)^2 : (bc)^2 :: V : X : Z$, y siendo $abc = abd + bdc$, será $V = X + Z$.

458 Luego 1.° $X = V - Z$, y $Z = V - X$, ó *el cuadrado de cada lado del ángulo recto, es igual á la diferencia entre los cuadrados de la hipotenusa y del otro lado.* 2.° Quando el triángulo rectángulo es isósceles, el cuadrado de la hipotenusa es duplo del cuadrado de cada lado, esto es, $(ac)^2 = 2(ab)$; y de consiguiente $ac = \sqrt{2(ab)^2} = ab\sqrt{2}$, que es una cantidad inconmensurable; y como ac es entonces diagonal del cuadrado V, *será la diagonal de un cuadrado inconmensurable con sus lados*: es decir, no podrá con los lados expresarse el valor de la diagonal.

459 3.° *Toda figura formada sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de las semejantes trazadas sobre los otros dos lados*; por egemplo, el semicírculo $abca$ es igual á los semicírculos aXb, bZc: pues siendo $abca : aXb : bZc :: (ac)^2 : (ab)^2 : (bc)^2$ (456), y $(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2$; será tam-

bien $abca = aXb + bZc$. Si se quita de ambas partes $aoba$, $blich$ comun, queda $aXbo + bZch$ igual al triángulo abc, y quando $ab = bc$, se tiene $aobX = abd$. Las porciones de círculo $aXbo$, $bZch$ se llaman las *Lúnulas de Hipócrates* que encontró su cuadratura.

460 4.° *El cuadrado de la hipotenusa es á los de los otros dos lados, como la hipotenusa á los segmentos correspondientes á dichos lados;* ó $(ac)^2 : (ab)^2 : (bc)^2 :: ac : ad : dc$: porque $(ac)^2 : (ab)^2 : (bc)^2 :: abc : abd : bdc :: ac : ad : dc$; pues teniendo los tres triángulos una misma altura bd, serán como sus bases ac, ad, dc (454).

461 5.° *Luego los cuadrados de dos cuerdas* ab, ah (fig. 65) *tiradas desde un estremo* a *del diámetro, son entre sí como las partes* ad, ar *que cortan en él las perpendiculares* bd, hr *bajadas de los estremos de dichas cuerdas*: porque en el triángulo abc, $(ac)^2 : (ab)^2 : ac : ad$, y en ahc es $(ac)^2 : (ah)^2 :: ac : ar$; luego $(ab)^2 : (ah)^2 :: ad : ar$.

462 *De las figuras regulares isoperímetras la que tiene mas lados incluye mayor superficie.* Sean por eg. un cuadrado y un pentágono (fig. 88), si se inscribe en ellos un círculo, estarán sus superficies en razon de los radios ac, nm; pues son el producto de la mitad de su perímetro por dichos radios; luego nm es mayor que ca: porque si fueran iguales y de consiguiente sus círculos,

sería menor el perímetro del pentágono, que el del cuadrado (357), contra lo supuesto de ser iguales; luego es mayor la superficie del pentágono que la del cuadrado. De consiguiente *el círculo que es un polígono de infinitos lados, tiene mayor superficie que otra qualquier figura de igual perímetro.*

463 Para hacer dos figuras que tengan entre sí una razon dada como la de 1:3; se tomarán en una linea indefinida *ac* (fig. 65) dos partes que sean entre sí como 1:3, de suerte que sea $3ad = dc$; desde su mitad *o* se trazará un semicírculo, y levantando en *d* la perpendicular *db*, serán *ab*, *bc* tiradas á los estremos del diámetro los lados homólogos de las figuras que se piden, las quales se trazarán semejantemente sobre ellos. La razon de la operacion es evidente, pues las figuras semejantes trazadas sobre *ab* y *bc*, son entre sí (456) como $(ab)^2 : (bc)^2 :: ad : dc :: 1 : 3$ (461); luego &c.

464 Si dada la figura *abcde* (fig. 71) se desease otra de una superficie tripla, ó que tuviese con ella la razon de 3:1; suponiendo á uno de sus lados *ab* de 10 varas, hallaríamos el homólogo AB de la otra figura haciendo $1:3::(10)^2:300$, cuadrado de AB; de suerte que $AB = \sqrt{300} = 17{,}32$ varas con poca diferencia; hagase ahora $ab : AB :: bc : BC :: cd : CD :: de : DE$, y se tendrá la longitud de los

demas, que unidos con ángulos iguales á *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, formarán la figura ABCDE que se desea.

De los Sólidos.

465 La última especie de estension que abraza longitud, latitud y profundidad ó altura, se llama *sólido*, *cuerpo* ó *volúmen*: será *regular*, si las superficies de que se compone, son iguales y semejantes, y sus ángulos sólidos iguales; los demas son *irregulares*. El cuerpo de quatro superficies se llama *tetraedro*, el de cinco *pentaedro*, y *exâedro*, *eptaedro*, *octaedro*.... *polyedro* el de seis, siete, ocho..... y muchas superficies.

466 Llamamos *ángulo sólido* al formado de mas de dos ángulos planos que concurren en un punto: tal es H (fig. 89) compuesto de los ángulos DHA, AHB, BHC, CHD. La medida de estos ángulos compone la del ángulo sólido que es siempre menor que 360°; pues si se tira la perpendicular HO, y las DO, CO, BO, AO, será cada ángulo AOD mayor que su correspondiente AHD, por tener su vértice mas cerca de la base comun AD; luego todos los ángulos formados en H valen menos que los formados en O que componen 360° (274). Tambien *cada ángulo de los que forman el ángulo sólido, es menor que la suma de los demas*: pues si llegase DHC por eg.

á ser igual á DHA+AHB+BHC, puestos estos sobre aquel no compondrian un sólido, sino un plano.

467 El sólido ABCFDE (fig 90) cuyas dos caras opuestas ABC, DEF que son sus *bases*, son dos planos iguales y paralelos, y las demas superficies ABED, EBCF, FDAC paralelogramos, se llama *Prisma*: y puede considerarse formado por el plano ABC moviéndose paralelamente á sí mismo lo largo de la recta AD, dejando rastro de su camino. ABC se llama *plano generador*, y cada plano infinitamente delgado de los que forma, *elemento del prisma*. La perpendicular HO tirada de qualquier punto de la una base á la otra, es la *altura*: y las lineas AD, BE, FC *lados* del prisma. Quando estos son perpendiculares á la base, ó iguales á la altura, se llama el prisma *recto*; y *oblicuo* (fig. 91) quando no. Ultimamente, será *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal* &c. el prisma, segun el plano ABC sea triángulo, cuadrilátero, pentágono &c.

468 Quando el plano generador es un paralelogramo ABCD (fig. 92), el prisma que resulta, toma el nombre de *paralelepípedo*, que tiene por superficies seis paralelogramos; quando es un *cuadrado* ABCD (fig. 93) consta de seis cuadrados iguales, y se llama *cubo*. Un círculo AEBF (fig. 94) pro-

duce un sólido ABDC que se llama *cilindro*, que será recto quando cae perpendicular la linea OH que pasa por los centros de las dos bases, y es su *ege*: y *oblicuo* (fig. 95) quando cae inclinada. Tambien puede considerarse producido por el rectángulo AOHC que dé una vuelta al rededor de HO.

469 Si nos figuramos que una recta AH (fig. 89) fija en el punto H, corre con el estremo A los lados de la figura ABCD, habrá producido un sólido que se llama *Pirámide*, cuya base es ABCD, y cuyas caras son triángulos que tienen su vértice en un mismo punto H que se llama *vértice* ó *cúspide* de la pirámide: su *altura* es la perpendicular HO tirada desde el vértice H á la base, y su *ege* la tirada desde H al centro del polígono de la dicha base. Quando el ege es diferente de la altura, y el poligono de la base irregular, será la pirámide *irregular*; pero si coincidiese el ege y la altura, y el poligono de la base es regular, lo será tambien la pirámide, y todos los triángulos CHB, BHA &c. serán iguales é isósceles. Una perpendicular HT, tirada desde H sobre uno de los lados de la base, la dividirá por medio (337), y será la altura de todos los triángulos: se llama *apotecma*. La pirámide *triangular* tiene por base un triángulo, la *cuadrangular* un cuadrilátero &c.

470 Si la base de la pirámide fuese un círculo (fig. 96) ó un poligono de infinitos lados, resultará un sólido que se llama *Cono*; que se puede considerar formado por el triángulo rectángulo AOH que diese una vuelta al rededor de OH : OH es su *ege*, y *altura* quando es perpendicular: las lineas AH, CH &c. sus *lados*, que se equivocan con los apotecmas; y segun que la OH sea ó no perpendicular á la base, será *recto* ú *oblicuo* el cono.

471 Si el semicírculo AEB (fig. 97) da una vuelta entera al rededor de su diámetro AB, producirá la *esfera* AEBDA que es un sólido de revolucion terminado de una superficie curva, cuyos puntos distan igualmente del punto C que es su *centro*. El arco FA forma el *casco* ó *casquete esférico* FTHA. El sector circular FCA engendra el *sector esférico* CFAHT : y FAO mitad del segmento FAH produce el *segmento esférico* FTHAO, cuya base es el casquete FTHA. A qualquiera AB de los diámetros llamarémos *ege* de la esfera, *polos* á sus dos estremos A, B ; y *zona* á la parte EHFD comprendida entre dos planos paralelos.

472 Un semipolígono que hubiera dado una vuelta al rededor del diámetro, hubiera producido un *esferoide*, regular ó irregular segun fuese el polígono : y como el círculo es

un poligono infinitángulo (357), será tambien la esfera un esferoide *infinitángulo*.

473 Si imaginamos perpendiculares tiradas desde la circunferencia á todos los puntos del diámetro AB, cada una en la revolucion describirá como radio un círculo, y de consiguiente juntos todos formarán la solidez de la esfera: luego si á la esfera la corta un plano qualquiera, la seccion será un círculo, tanto mayor quanto mas se acerque al centro: los que pasan por él se llaman *círculos maxîmos*, y los demas *menores*.

De la medida y comparacion de las Superficies y de los Cuerpos.

474 La superficie del prisma (fig. 90) sin contar las bases ABC, DEF, que se llama *lateral*, se compone de los paralelogramos rectángulos AE, EC, AF, cuya medida es (434) el producto de sus bases AB, BC, AC por la altura comun AD. Las caras del prisma oblicuo (fig 91) son los paralelogramos AG, GD, DT, TE, EF de lados AF, BG, DH &c. iguales, cuya superficie considerando á estos lados como bases de los paralelogramos, y tirando sobre ellos sus alturas, ó las perpendiculares *ab*, *bc*, *cd*, *de*, es (435) el producto de estas últimas por una de las

bases ó lados iguales AF. Lo mismo se demostrará en el paralelepípedo, cubo y cilindro.

475 Luego la superficie lateral de un prisma qualquiera (fig. 90) es el producto del perímetro ABC de su base por la altura AD si es recto; y si es oblicuo, el producto de uno de sus lados AF por el perímetro *abcde* perpendicular á dicho lado. La superficie del cilindro AD (fig. 94) es el producto del perímetro AEBF por la altura AC. Para medir la del cilindro oblicuo AD (fig. 95) basta para la práctica multiplicar uno de sus lados BD por la longitud de un hilo enrollado por el vestigio de la seccion *abcd* perpendicular á BD. Sacada la superficie lateral se añade la de las dos bases para tener la total.

476 Los triángulos ADH, ABH, BCH, DCH (fig. 89) que son las caras del prisma ABCDH, tienen por superficie (436) el producto de sus bases AB, BC, CD, DA por la mitad de HT altura de todos los triángulos (469): luego *la superficie lateral de una pirámide es el producto del perímetro* AB+BC+CD+DA *de la base por la mitad de su apotecma*; ó $\frac{1}{2}$(HT×ABCDA). En la pirámide inclinada se mide cada cara de por sí, y la suma de la superficie de todas es la de la pirámide. La superficie lateral del cono ACH (fig. 96) es la mitad del producto de la circun-

ferencia ABCD de la base por uno de sus lados AH ó $\frac{1}{2}$(AH×ABCDA).

477 En un trozo ó tronco de pirámide de bases *abc*, ABC paralelas (fig. 98) las caras son los trapecios A*b*, B*c*, C*a*, cuya superficie es (437) el producto de la mitad de sus bases paralelas AB, *ab*; BC, *bc*; CA, *ca* por la altura comun *ht*, ó tirando *mp*, *pn*, *nm* por la mitad de A*a*, B*b*, C*c*; *ht*×*mpn*: luego *la superficie lateral de un tronco de pirámide es la mitad del producto de los perímetros* abc, ABC *de sus bases por la altura* ht, *esto es,* $\frac{1}{2}$(abc+ABC)×ht: *ó* mpn×ht, *producto del perímetro* mpn *medio entre los de las bases por la altura* ht. *Tambien la superficie del tronco* Ac (fig. 99) *de pirámide cónica es* $\frac{1}{2}$(abc+ABC)×Aa, *mitad del producto de los perímetros de las bases por su lado; ó* mpn× Aa *producto del perímetro medio por dicho lado.*

478 Si consideramos á *ab* (fig. 97) como uno de los infinitos lados del semicirculo BEA que produce la esfera, formará en su revolucion un cono truncado: cuya superficie, tirando las paralelas *ad*, *bq*, y por *n* mitad de *ab*, la *nm*; será (477) *ab*× *circunferencia* mn. Bajando ahora la *ar* perpendicular á *bq*, y tirando el radio *nc*; en los triángulos *abr*,*noc* semejantes (386) se tiene *ab*:*ar*=*tp*::*nc*:*no*; y por ser las circunferencias proporcionales á sus ra-

dios (421), será $ab:tp::circunf.\ nc : circunf.\ no$: luego (174) $ab \times circunf.\ no = tp \times circunf.\ nc$, ó la superficie del cono truncado descrito por *ab*, igual á su ege *tp* multiplicado por la circunferencia del círculo máxîmo de la esfera. Pruebese lo mismo de todos los sólidos que componen la esfera, y tendremos *que su superficie es el producto de su ege* AB *por la circunferencia de su círculo máxîmo*: de suerte que si suponemos que el diámetro AB tenga 20 pies, y de consiguiente $62\frac{6}{7}$ la circunferencia de su círculo, serán $20 \times 62\frac{6}{7}$ ó $1257\frac{1}{2}$ los pies cuadrados que contiene la superficie de la esfera.

479 De aqui se infiere 1.° que la superficie del casco esférico AFTH es el producto de su altura OA por la circunferencia del círculo máxîmo; y la de la zona DEHF el producto de OC por la circunferencia de dicho círculo. 2.° Que la superficie de un círculo cuyo radio fuese el ege de la esfera, sería igual á la de la esfera: pues la circunferencia de este círculo sería dupla de la del círculo máxîmo de la esfera.

480 3.° Como la superficie del círculo máxîmo es el producto de la circunferencia por la mitad del radio, que es la quarta parte del diámetro, y la de la esfera el producto de dicha circunferencia por todo el diámetro; *equivaldrá esta á la de quatro círculos*

máxîmos. De consiguiente, siendo la superficie lateral del cilindro circunscripto (fig. 100) el producto de HM ó AB ege de la esfera por la circunferencia de uno de sus círculos máxîmos HOGR ó EQFT, es decir, igual á la de la esfera; si á la del cilindro se añade la de sus dos bases que son círculos máxîmos, compondrá seis círculos máxîmos; y la superficie total del cilindro circunscripto á la esfera, será á la de la esfera como 6:4, ó como 3:2.

481 *Sólidos semejantes* son los que constan de igual número de superficies semejantes, ademas de tener sus ángulos sólidos iguales; y asi los de diferente especie como un prisma y una pirámide no pueden ser semejantes. Como las superficies de los sólidos se componen de dos factores del mismo modo que las superficies planas; demostrarémos como en ellas (451 y sig.), las proposiciones que siguen.

482 „Las superficies laterales de los prismas son entre sí como los productos de sus „alturas por el perímetro de sus bases, si son „rectos; ó por el de la seccion perpendicular „á las alturas, si son oblicuos. Los prismas „de igual altura son como los perímetros de „sus bases, los de igual perímetro son como „sus alturas, y los de alturas y perímetros „recíprocamente proporcionales son de super-

„ficies iguales, y al contrario. Lo mismo se „debe entender de las pirámides ó conos con „la diferencia de poner lado en lugar de al- „tura.

483 „Las superficies de los sólidos se- „mejantes son entre sí como los cuadrados de „sus lineas homólogas; y de consiguiente, „las superficies de dos esferas son como los „cuadrados de sus radios ó diámetros.“

De la medida y comparacion de las solideces de los Cuerpos.

484 La *solidez* de un cuerpo que es el espacio que ocupan sus superficies, sea ó no mazizo, se mide averiguando las veces que en él cabe otro cuerpo que se toma por la unidad. El escogido para esto es el *cubo*, que por tener todas sus dimensiones iguales es el mas sencillo. Sea *ab* (fig. 92) el sólido que se toma por la unidad, y averigüemos las veces que cabe en el prisma AT.

485 A este sólido le forma el plano ABCD que corre paralelamente la linea CT (467); luego á cada paso C*b* que ande dicho plano, igual á la altura *db* del sólido *ab*, formará tantos sólidos iguales á *ab*, quantas veces la base cabe en el plano AC: si son quatro, será la solidez del prisma tantas veces quatro sólidos iguales á *ab*, quantas la altu-

ra *db* quepa en CT; luego será el producto del número de veces que la base *ad* cabe en AC, multiplicado por el número de veces que la altura *db* cabe en la altura CT, ó mas brevemente *el producto de la superficie de la base por la altura, y si es recto por su lado.*

486 Para sacar la solidez del paralelepído AT en la suposicion de ser AB de 15 pulgadas, CB de 8 y AE de 20; sacaré la superficie de la base BD multiplicando AB por CB ó 15 por 8, y multiplicando el producto 120 por la altura AE que es 20, tendré 2400 pulgadas cúbicas ó cubos de una pulgada, que equivalen á 1 *pie cúbico* y $\frac{7}{18}$ de *pie*, dividiendo 2400 por $12 \times 12 \times 12 = 1728$, número de pulgadas cúbicas que contiene un pie cúbico.

487 Luego la solidez *de un cilindro recto* AD (fig. 94) *es el producto de la superficie de su base* AEBF *por su ege: y la del oblicuo* (fig. 95) *el producto de la base* AEBF *por la altura* HO: de consiguiente serán iguales los cilindros y prismas que tengan una misma base y altura.

488 Un plano RQ (fig. 101) que corte á una pirámide TABCDE paralelamente á la base, cortará proporcionalmente los lados AT, BT, CT &c. y qualquiera otra recta TO tirada del vértice á la base; y en la misma razon que dos qualesquiera lados homólogos AB, *ab* de la seccion. Pues si por la rec-

ta TO y los lados de la pirámide imaginamos los planos TOA, TOB, TOC &c. cortarán la seccion *abcde* en *oa*, *ob*, *oc*, *oe*, *od*, las quales serán paralelas á OA, OB &c. por ser secciones comunes de los planos paralelos RQ, ABCDE (433); luego los triángulos ATO, BTO, CTO &c. serán semejantes, y sus lados proporcionales, $TO:To::TA:Ta::TB:Tb::TC:Tc$ &c. $::AB:ab::BC:bc$ &c.

489 Luego 1.° las *secciones* ABCDE, abcde *serán semejantes*; pues se dividen en igual número de triángulos semejantes, por tener paralelos sus lados; y de consiguiente, sus areas serán como los cuadrados de las lineas TO, T*o*; pues se tendrá (455) $ABCDE:abcde::(AB)^2:(ab)^2::(TO)^2:(To)^2$; por ser $AB:ab::TO:To$ (488).

490 2.° Si suponemos iguales las alturas TO, MN de las pirámides TABCDE, MFGH cortadas por el plano RQ, estarán las secciones *abcde*, *fgh* en la misma razon que las bases ABCDE, FGH: y serán iguales si lo son las bases; pues siendo $ABCDE:abcde::(TO)^2:(To)^2$; $FGH:fgh::(MN)^2:(Mn)^2$, y $MN=TO$; será $(TO)^2:(To)^2::(MN)^2:(Mn)^2$, y de consiguiente $ABCDE:abcde::FGH:fgh$; luego si $ABCDE=FGH$, será tambien $abcde=fgh$.

491 3.° *Las pirámides de igual base y altura son iguales en solidez, aunque sean*

diferentes las figuras de sus bases; pues serán (180) todos los planos ó elementos que componen la solidez de la una, á todos los de la otra, como la base de la 1.ª á la de la 2.ª luego siendo iguales las bases, serán tambien iguales todos los planos; y debiendo haber en ambos igual número de ellos por haberse supuesto de igual altura, serán las solideces iguales.

492 Esto supuesto, vamos á probar *que qualquier pirámide es la tercera parte de un prisma de igual base y altura que ella*; y supuesto que todo prisma polígono puede dividirse en igual número de prismas triangulares de igual base y altura, bastará demostrar la proposicion del prisma triangular EDFBAP (fig. 102). Para esto tirense desde uno de sus ángulos P las diagonales PE, PF en las caras laterales AEDP, BFDP.

493 Imaginemos ahora un plano que pasando por EP y PF, separe del prisma la pirámide PEFD, y otro que pasando por las diagonales EB, EP, separe del sólido APBEF que quedó (fig. 103), la pirámide APBE: y tendremos dividido el prisma en las tres pirámides PEFD, APBE, EFPB, de las quales las dos primeras de bases EDF, ABP y alturas PD, AE iguales, son iguales en solidez (491): y las APBE, EFPB consideradas sobre las bases ABE, BEF que son triángulos

iguales, y con el vértice comun P, serán tambien iguales; luego siendo la una PEFD de una misma base EFD y altura DP que el prisma, será lo mismo que las otras, su tercera parte.

494 Siendo pues, la solidez del prisma el producto de la base por su altura (485), será la de qualquier pirámide la tercera parte de este producto, ó *la base multiplicada por el tercio de la altura.* Y como el cono debe ser tambien la tercera parte del cilindro de igual base y altura, por ser prisma infinitángulo, será su solidez *el producto de la baee por el tercio de su altura.*

495 Para sacar la solidez de un trozo de pirámide ó cono de bases paralelas (fig. 98 y 99), imaginándole completo, se saca su solidez multiplicando la base ABC por $\frac{1}{3}$ TO, multiplicando despues *abc* por $\frac{1}{3}$ T*o*, se tendrá la solidez del pedazo T*abc* que falta: restese esta de la total y se tendrá la del tronco. La T*o* que se supone conocida en esta operacion, se saca por lo demostrado (488); pues siendo AB:*ab*::TO:T*o*, tendremos (177) AB—*ab*:*ab*::TO—T*o*:T*o* ó AB—*ab*:*ab*::O*o*:T*o*.

496 *La solidez de la esfera es el producto de su superficie por el tercio de su radio;* porque si la concebimos compuesta de una infinidad de pirámides que tienen los vértices en su centro, y cuyas bases componen su superficie, tendrán todas por altura el radio

de la esfera, y será la suma de sus solideces ó la de la esfera el producto de todas sus bases, superficie de la esfera, por un tercio de su altura, radio de la esfera: y asi la solidez de una esfera de 20 pies de diámetro, cuya superficie es $1257\frac{1}{7}$ (478), será $3\frac{1}{3}\times 1257\frac{1}{7}=4190\frac{10}{21}$ pies cúbicos. Si suponemos con Newton que el diámetro de nuestro globo tiene 19688725 pies de París, y la circunferencia de uno de sus círculos máxîmos 61878850; tendrá su superficie (478) .... 1218315660966250 pies cuadrados; y el producto de este número por la sesta parte del diámetro dará 3997846798940344927500 pies cúbicos de que consta la tierra.

497 Luego la solidez de un sector esférico CFAHT es el producto de la superficie del casco FTHA por el tercio del radio. Como esta se compone del segmento FOHTA y del cono CFH, si de la solidez del sector se resta la del cono, resultará la del segmento.

498 *La solidez de la esfera es los dos tercios de la del cilindro circunscripto.* Llamemos al radio R, D al diámetro, C la superficie del círculo máxîmo HOGR ó EQPT; y será 4C la superficie de la esfera (480), y su solidez $\frac{1}{3}R\times 4C$, ó $4\times\frac{1}{3}R\times C$, ó $\frac{4}{3}R\times C$, esto es, $\frac{2}{3}D\times C$, por ser $\frac{4}{3}$ del radio $\frac{2}{3}$ del diámetro: y como la solidez del cilindro es $D\times C$; será la 1.ª á la 2.ª como $\frac{2}{3}D\times C : D\times C$ ó como $\frac{2}{3}:1$, ó últimamente como 2:3.

499 Como toda solidez es producto de una superficie que tiene dos factores, por una linea; si llamamos B, C los factores de la superficie ó base, y A su altura, S la solidez de un cuerpo; s la solidez de otro, y a, b, c sus tres factores, tendremos $S=A\times BC$, $s=a\times bc$. Luego será $S:s::A\times BC:a\times bc$, es decir, *las solideces de dos prismas ó cilindros, ó de un prisma y un cilindro son entre sí como los productos de su base por la altura.* De consiguiente, *los de igual base serán como sus alturas, y los de igual altura como sus bases*; pues si $A=a$, resulta $S:s::BC:bc$, y si $BC=bc$, $S:s::A:a$.

500 Quando $A:a::bc:BC$, se tiene (174) $A\times BC=a\times bc$ ó $S=s$; esto es, *si las bases de de los sólidos están en razon recíproca con las alturas, serán sus solideces iguales, y al contrario.* Todas estas proposiciones se deben entender tambien de las pirámides ó conos.

501 Quando los sólidos son semejantes, son iguales las razones $A:a$, $B:b$, $C:c$ (481) de los factores de que se componen las solideces en la proporcion $S:s::ABC:abc$ (499); luego *las solideces de los cuerpos semejantes estarán en razon triplicada, ó serán como los cubos de sus factores homólogos*; ó $S:s::A^3:a^3::B^3:b^3::C^3:c^3$; de consiguiente, *las solideces de dos esferas serán como los cubos de sus radios ó diámetros.*

502 Tenemos pues, que las figuras de los sólidos semejantes son como sus lineas homólogas (420), sus superficies como los cuadrados de dichos lados homólogos (483), y sus solideces como sus cubos (501): de manera que si los diámetros de dos esferas por eg. tuvieran la razon de 3:4, las circunferencias de sus círculos máxîmos serian tambien como 3:4, sus superficies ó las de las esferas serían como $(3)^2:(4)^2$ ó como 9:16; y sus solideces como $(3)^3:(4)^3$ ó como 27:64.

503 Luego para hacer una esfera dupla de otra que tuviese 6 pulgadas de diámetro, haria la proporcion 1:2::216 *cubo del diámetro dado*: 432 *cubo del diámetro de la esfera pedida*: cuyo diámetro será 7,56, raiz cúbica próxîma de 432.

Método para medir la capacidad de los vasos que encierran algun líquido.

504 Para medir la capacidad de un vaso ó las veces que contiene una medida que se toma por la unidad; como por lo comun los vasos son cónicos ó cilíndricos, se hará un cilindro AH (fig. 104) de estaño ú hoja de lata, en el que se echará una ó dos azumbres de líquido, y tomando una vara (fig. 105), se señalarán en uno de sus lados las partes E1, 1 2, 2 3 &c. iguales á la altura AD que ocupa el liquido en el cilindro.

505 Para dividir el otro lado MN de la vara, se levantará en N la perpendicular NT igual al diámetro AB del cilindro, se tomará $N1 = TN$, y tirando la hipotenusa T1, será diámetro de un círculo ó base dupla de ARB; porque (456) los círculos son como los cuadrados de sus diámetros, y $(T1)^2 = (TN)^2 + (N1)^2 = 2(TN)^2$ (457); señalado pues, T1 desde N á 2, se tirará la hipotenusa T2, y será por la misma razon diámetro de una base tripla de ARB; se trasladará desde N á 3, y se continuará del mismo modo para sacar los diámetros quádruplos, quintuplos &c. Si se dividen TN y N1 por medio en K y t, y se tira la Kt, será diámetro de una base mitad de ARB, que se debe pasar de N á $\frac{1}{2}$.

506 Para medir ahora el vaso XO (fig. 106), se aplicará el lado NM de la vara al diámetro XZ, y si coge N3, será triplo de la base ARB (fig. 104): y de consiguiente, el hueco XT hará tres veces mas líquido que AC. Mídase despues la altura LX con el lado FE de la vara, y si equivale á cinco divisiones, deberé multiplicar 3 por 5 para encontrar las azumbres de líquido que caben en el vaso XO, que serán 15.

507 Si el vaso fuere cono truncado, se sacará una base media, sumando las dos; pero si la de arriba fuere muy pequeña, será

mejor reducir el vaso á sólido regular: pues si se sacase la mitad de la suma de las dos bases AM y R del vaso ARM (fig. 107), resultaría una base poco mayor que la mitad de AM, y cuyo producto por la altura MC, daría una cabidad igual casi á la mitad del cilindro AC; siendo asi que el cono ARM, cuya cabidad se busca, es casi el tercio de dicho cilindro (493).

508 Ultimamente, para averiguar el hueco del tonel BQ (fig. 108); tomese un diámetro medio entre los dos DE, AB, que será $2\frac{1}{2}$ si DE equivale en la vara á N3 y AB á N2; sea la longitud CT=M8; multiplíquese 8 por $2\frac{1}{2}$, y el producto 20 será el número de azumbres que caben en el tonel propuesto, que podemos considerar como un cilindro de una base media proporcional aritmética entre el fondo y su vientre.

Sólidos regulares.

509 Llamamos asi los cuerpos cuyas superficies son todas polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos sólidos se componen de igual número de ángulos planos. Como estos no han de llegar á 360° (466), y seis ángulos de triángulo equilátero componen $6\times60°=360°$, solo podremos formar con ángulos de triángulo equilátero un ángulo sólido de tres,

igual á $3\times60^\circ=180^\circ$; de quatro que vale $4\times60^\circ=240$; y de cinco, su valor $5\times60^\circ=300^\circ$: de donde resultan el *tetraedro* (fig. 109), cuyas superficies son quatro triángulos equiláteros, el *octaedro* (fig. 110) que consta de ocho, y el *icosaedro* (fig. 111) que tiene veinte. Con ángulos de cuadrados solo puede formarse un ángulo sólido de tres, igual á $3\times90^\circ=270$; pues $4\times90^\circ=360^\circ$; y con tres ángulos de pentágono ó $3\times108^\circ=324^\circ$, otro; y con ellos se forma el *exâedro* ó *cubo* (fig. 112) rodeado de seis cuadrados iguales; y el *dodecaedro* (fig. 113) que consta de doce pentágonos regulares. Y como tres ángulos del exâgono regular valen $3\times120^\circ=360^\circ$; es claro que no puede haber mas sólidos regulares que los cinco referidos.

510 Si se saca la superficie de una de las caras de estos, y se multiplica por el número de ellas, se tendrá la superficie de cada uno. Con este fin se han pintado al lado de cada sólido las superficies que le rodean.

511 La solidez del tetraedro se saca como digimos (494); pues es una pirámide equilátera triangular. La del exâedro se encuentra por lo dicho (485). Al octaedro se le considera dividido en dos pirámides iguales y semejantes, y despues se saca la solidez de las dos. Tambien el icosaedro puede imaginarse dividido en veinte pirámides iguales:

y asi multiplicando por 20 la solidez de una de ellas, se tendrá la del sólido. Ultimamente, tirando rectas desde el centro del dodecaedro á todos sus ángulos, resultarán doce pirámides, pentágonos iguales; con que si multiplicamos por 12 la solidez de la una, tendremos la del dodecaedro.

Trigonometría Rectilinea.

512 Enseña este ramo de la Geometría el modo de averiguar en un triángulo rectilineo el valor de tres de las seis cosas que le componen, á saber tres ángulos y tres lados, dado el de las otras tres: no siendo los tres ángulos; pues por ellos solo se puede saber la razon de los lados, pero no su longitud, que será diferente en cada uno de los infinitos triángulos que pueden tener unos mismos ángulos (338). A este fin, como los lados de los triángulos no son proporcionales á sus ángulos, se han inventado las lineas *trigonométricas*, *senos*, *cosenos*, *tangentes*, *secantes* que vamos á dar á conocer, las quales ademas de ser proporcionales con los lados de los triángulos, son un equivalente de sus ángulos.

513 Llamamos pues, *seno recto* ó seno de un ángulo ACB (fig. 114) ó de su arco AB á la perpendicular AT bajada del estre-

mo A de dicho arco sobre el radio CB, que pasa por el otro estremo B: *seno verso* á la parte BT del radio comprendida entre el seno y el estremo del arco: *tangente* de dicho ángulo ó arco AB á la BH perpendicular al estremo B del radio CB, terminada por el radio AC alargado: y *secante* á la CH ó radio AC alargado.

514 Tambien AD es seno del ángulo ACE ó arco AE, DE su seno verso, EQ su tangente y CQ su secante: y como el arco AE es complemento de AB, serán AD, DE, EQ, CQ seno, seno verso, tangente y secante del complemento del arco AB, ó mas brevemente *coseno*, *coseno verso*, *cotangente*, y *cosecante* del arco AB. En lo sucesivo escribiremos *sen*, *cos*, *tang*, *cotang*, *sec*, en lugar de seno, coseno, tangente, cotangente, secante.

515 Segun lo que acabamos de decir 1.° El *seno* AT *de un arco qualquiera* AB *es la mitad de la cuerda* AR *del arco* ABR *duplo de* AB; pues el radio CB perpendicular á AR, le divide por medio (306). Y asi *el seno del arco de* 30° *es la mitad de la cuerda de* 60°, *que es el radio* (367).

516 2.° El coseno AD de un arco AB qualquiera es siempre iguàl á CT parte del radio comprendida entre el centro y el seno: y su seno verso BT es la diferencia entre el

radio y el coseno. 3.° La tangente BH *es igual al radio* BC *quando el ángulo* BCH *es de* 45°; porque siendo el ángulo CBH recto, y BCH de 45°, será tambien BHC de 45° (341), y la BH=BC.

517 4.° Que si en un triángulo rectángulo CAT se toma por radio la hipotenusa, y se traza un arco AB, serán los otros dos lados AT, TC seno y coseno del ángulo ACT: y si se toma por radio uno de los lados como CB en el triángulo rectángulo HCB, será el otro BH tangente, y la hipotenusa CH secante del ángulo HCB.

518 En el punto B en que suponemos que no hay arco, tampoco hay seno ni tangente, y el coseno es el radio CB. Al paso que es mayor el arco, crece el seno y la tangente, y disminuye el coseno y cotangente hasta que el arco llega á ser BAE ó de 90°: entonces es el seno el radio EC, que por ser el mayor de todos se llama *seno total* ó de 90°, el coseno es cero y lo mismo la cotangente; y la tangente y secante que resultan paralelas, son infinitas.

519 En pasando el arco de 90° comienzan á mengüar los senos y tangentes, y á crecer los cosenos y cotangentes hasta que llega á 180° ó al punto F, en el que es cero el seno y la tangente, el coseno es el radio CF, y la cotangente y cosecante paralelas é infini-

tas. Pero es de advertir que en qualquier ángulo obtuso es uno mismo el seno, coseno, tangente &c. que en el ángulo agudo su suplemento; por eg. el seno del ángulo ACF es AT, seno del ángulo ACB suplemento de ACF; su coseno es CD, su tangente es FG igual á BH, á causa de los triángulos CBH, CFG iguales (345): pero todas estas lineas son negativas quando pertenecen á los ángulos obtusos, ó están en una situacion contraria á la que tienen quando pertenecen á los ángulos agudos.

520 Si llamamos r el radio AC de un círculo qualquiera, y a el arco AB; será AT, *sen a*; CT, *cos a*; BH, *tang a*; CH, *sec a* &c. Luego si dado el valor del seno AT, se nos pidiese el de las demas lineas. 1.° En el triángulo rectángulo CAT, donde $(CT)^2=(CA)^2-(AT)^2$ (458), ó $CT=\sqrt{((AC)^2-(AT)^2)}$, será $\cos a=\sqrt{(r^2-\mathrm{sen}^2 a)}$, asi como $AT=\sqrt{((AC)^2-(CT)^2)}$ ó $\mathrm{sen}\, a=\sqrt{(r^2-\cos^2 a)}$. 2.° Por ser $TB=CB-CT$ (516), será $\mathrm{sen\ vers}\, a=r-\cos a$.

521 3.° De los triángulos rectángulos semejantes CAT, CBH se saca CT:TA::CB:BH ó $\cos a:\mathrm{sen}\, a::r:\mathrm{tang}\, a$; luego $\mathrm{tang}\, a=$.... $\frac{r.\ \mathrm{sen}\, a}{\cos a}$, ó $\frac{\mathrm{sen}\, a}{\cos a}$ suponiendo $r=1$. 4.° En los mismos triángulos se tiene CT:CA::CB:CH

ó $\cos a : r :: r : \sec a = \frac{r^2}{\cos a} = \frac{1}{\cos a}$ siendo $r = 1$. 5.° Por ser DE=CE−CD, tendremos $\cos vers\ a = r - \sin a$.

522 6.° De los triángulos semejantes CDA, CEQ se saca CD:DA::CE:EQ ó $\text{sen}\ a : \cos a :: r : \cot a = \frac{r.\cos a}{\text{sen}\ a} = \frac{\cos a}{\text{sen}\ a}$ haciendo $r = 1$. Tambien es BH:CB::CE:EQ ó $\text{tang}\ a : r :: r : \cot a = \frac{r^2}{\text{tang}\ a} = \frac{1}{\text{tang}\ a}$.

523 7.° Ultimamente, CD:CA::CE:CQ ó $\text{sen}\ a : r :: r : \text{cosec}\ a = \frac{r^2}{\text{sen}\ a} = \frac{1}{\text{sen}\ a}$.

524 8.° En dichos triángulos se tiene BH:CB::CE:EQ ó $\text{tang}\ a : r :: r : \text{cotang}\ a$; de donde $\text{tang}\ a = \frac{r^2}{\text{cotang}\ a} = \frac{1}{\text{cotang}\ a}$, y $\text{cotang}\ a = \frac{1}{\text{tang}\ a}$: es decir, que las tangentes están en razon inversa de las cotangentes.

525 Dado el seno BD=a (fig. 115) de un arco qualquiera AB y de consiguiente su $\cos a$ (520), se tendrá el seno BT de su mitad en el triángulo rectángulo ABD, donde por ser $AB = \sqrt{((BD)^2 + (AD)^2)}$, se tendrá $\frac{1}{2}AB = BT = \frac{1}{2}\sqrt{((BD)^2 + (AD)^2)}$, ó $\text{sen}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{sen}^2 a + \text{sen vers}^2 a)}$: póngase en lugar

de $sen\,vers^2 a$ su valor (520) $(r-cos\,a)^2$ ó $r^2-2r\,cos\,a+cos^2 a$, y será $sen\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(sen^2 a+r^2-2r\,cos\,a+cos^2 a)}$: y como $sen^2 a+\ldots cos^2 a=r^2$ en el triángulo rectángulo BDC, se tendrá por último $sen\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2r^2-2r cos\,a)}$.

526 Si dado BT ó $sen\frac{a}{2}$ se nos pidiese el seno BD$=a$ del arco duplo, se sacará de la equacion $sen\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2r^2-2r\,cos\,a)}$ el valor

de $cos\,a=\frac{r^2-2(sen^2\frac{a}{2})^2}{r}$, y sustituido en....

$sen\,a=\sqrt{(r^2-cos^2 a)}$ que encontramos (520), tendremos dicho BD.

527 Supongamos ahora conocidos los senos EF$=a$, DT$=b$ (fig. 116) de los arcos AE, DE, y tratemos de encontrar el seno y coseno de su suma y de su diferencia. Si se toma EB=ED, será AB la diferencia de los arcos AE, DE. Bajese el radio CE perpendicular á la cuerda BD; DM, TL, BG perpendiculares á CA, y tirando las paralelas TH, BK, será (373) DH:HK::KO:OB::BT:TD; esto es, DH=HK, KO=OB, asi como DT=TB (306): luego el seno de DBA suma de los arcos propuestos, será DM=MH+HD=TL+HD; el seno de la diferencia de di-

chos arcos BG=MK=HM−HK=TL−HD; el coseno de la suma CM=CL−LM=CL−TH, y el coseno de la diferencia CG=CL+LG=CL+TH.

El valor de estas lineas se saca de los triángulos CEF, CTL, DTH semejantes, donde CE:CT::EF:TL, CE:CT::CF:CL, CE:CF::DT:DH, CE:EF::DT:TH; ó poniéndoles sus nombres, $r : cos\,b :: sen\,a : \mathrm{TL} = \frac{sen\,a\,.\,cos\,b}{r}$, $r : cos\,b :: cos\,a : \mathrm{CL} = \frac{cos\,a\,.\,cos\,b}{r}$,

$r : cos\,a :: sen\,b : \mathrm{DH} = \frac{sen\,b\,.\,cos\,a}{r}$, $r : sen\,a :: sen\,b :$

$\mathrm{TH} = \frac{sen\,a\,.\,sen\,b}{r}$. Luego......

1.° $\mathrm{TL+HD=DM}=sen(a+b)=\frac{sen\,a\,.\,cos\,b+cos\,a\,.\,sen}{r}$

2.° $\mathrm{TL-HD=BG}=sen\,(a-b\,)=\frac{sen\,a\,.\,cos\,b-cos\,a\,.\,sen}{r}$

3.° $\mathrm{CL-TH=CM}=cos\,(a+b)=\frac{cos\,a\,.\,cos\,b-sen\,a\,.\,sen}{r}$

4.° $\mathrm{CL+TH=CM}=cos(a-b)=\frac{cos\,a\,.\,cos\,b+sen\,a\,.\,sen}{r}$

528 Supuesto que $tang=\frac{r\,.\,sen}{cos}$ (521), será $tang\,(a+b)=\frac{r.\,sen\,(a+b)}{cos\,(a+b)}=$..................

$$\frac{r\,(sen\,a\,.\,cos\,b+cos\,a\,.\,sen\,b)}{cos\,a\,.\,cos\,b-sen\,a\,.\,sen\,b}=\frac{r.\left(\frac{sen\,a}{cos\,a}+\frac{sen\,b}{cos\,b}\right)}{1-\frac{sen\,a}{cos\,a}\times\frac{sen\,b}{cos\,b}}$$

dividiendo numerador y denominador por

$cos\, a . cos\, b$; pónganse ahora en lugar de.... $\frac{sen\, a}{cos\, a}$, $\frac{sen\, b}{cos\, b}$ sus iguales $\frac{tang\, a}{r}$, $\frac{tang\, b}{r}$, y se tendrá por último $tang(a+b)=$...... $\frac{r^2(tang\, a+tang\, b)}{r^2-tang\, a . tang\, b}$. Y por lo mismo será $tang$.. $(a-b)=\frac{r^2(tang\, a-tang\, b)}{r^2+tang\, a . tang\, b}$.

529 De la expresion $cotang=\frac{r . cos}{sen}$ (522), sacaremos $cotang(a+b)=\frac{r . cos\,(a+b)}{sen\,(a+b)}=$......

$$\frac{r(cos\, a . cos\, b-sen\, a . sen\, b)}{sen\, a . cos\, b+cos\, a . sen\, b}=\frac{r\left(1-\frac{sen\, a . sen\, b}{cos\, a . cos\, b}\right)}{\frac{sen\, a}{cos\, a}+\frac{sen\, b}{cos\, b}}=$$

$\frac{r^2-tang\, a . tang\, b}{tang\, a+tang\, b}$ partiendo por $cos\, a . cos\, b$, y sustituyendo $\frac{tang\, a}{r}$, $\frac{tang\, b}{r}$ en lugar de...... $\frac{sen\, a}{cos\, a}$, $\frac{sen\, b}{cos\, b}$. Como tambien $cotang\,(a-b)=$ $\frac{r^2+tang\, a . tang\, b}{tang\, a-tang\, b}$.

530 Ultimamente, siendo secante $=\frac{r^2}{cos}$ (521), tendremos $secant(a+b)=\frac{r^2}{cos\,(a+b)}=$

$$\frac{r^3}{cos\, a . cos\, b-sen\, a . sen\, b}=\frac{r^2 \times r^2}{r(cos\, a . cos\, b-sen\, a . sen\, b)}$$

multiplicando por r: multiplíquese y pártase el denominador por $cos\ a . cos\ b$, y resultará $secant (a+b) = \frac{r^2 \times r^2}{(r . cos\ a . cos\ b) \times \left(1 - \frac{sen\ a}{cos\ a} \times \frac{sen\ b}{cos\ b}\right)} = \frac{r . sec\ a . sec\ b}{r^2 - tang\ a . tang\ b}$ poniendo *secant* y *tang* en lugar de sus iguales $\frac{r^2}{cos}$ y $\frac{sen}{cos}$ (521): y por igual razon $sec (a-b) = \frac{r . sec\ a . sec\ b}{r^2 + tang\ a . tang\ b}$. El mismo cálculo con corta diferencia nos dará $cosec (a+b) = \frac{r^2}{sen (a+b)}$ (523) $= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{r^3}{sen\ a . cos\ b + cos\ a . sen\ b} = \frac{r^2 \times r^2}{(r . cos\ a . cos\ b) \times \left(\frac{sen\ a}{cos\ a} + \frac{sen\ b}{cos\ b}\right)}$$

$= \frac{sec\ a . sec\ b}{tang\ a + tang\ b}$: y $cosec (a-b) = \frac{sec\ a . sec\ b}{tang\ a - tang\ b}$.

531 Si en las expresiones de $sen (a+b,)$ $cos (a+b)$ &c. suponemos $a = b$, $a = 2b$, $a = 3b$ &c. resultarán los valores de los senos, cosenos, tangentes &c. de los arcos duplos, triplos &c. Si suponemos $b = a$ y $r = 1$, será $sen (a+b) = sen\ 2a = 2\ sen\ a . cos\ a$; $cos (a+b) = cos\ 2a = cos^2 a - sen^2 a$; $tang \ldots (a+b) = tang\ 2a = \frac{2\ tang\ a}{1 - tang^2 a}$: haciendo... $b = 2a$, se tendrá $sen\ 3a = sen\ a . cos\ 2a + cos\ a . sen\ 2a$; $cos\ 3a = cos\ a . cos\ 2a - sen\ a . sen\ 2a$ &c.

532 Asi como un arco se valúa por grados, mayores ó menores segun el círculo; asi tambien el valor de un seno que en diferentes círculos tiene distinta longitud, se espresa en partes en que se considera dividido el radio del círculo, sea grande ó pequeño. Para que este valor sea mas exâcto se supone que el número de partes en que el radio ó seno total se divide, sea grande como..... 1000000, y averiguando quántas de ellas corresponden á cada uno de los senos, cosenos, tangentes &c. desde $1'$ hasta $90°$, se ha formado una lista de ellos que se llama *tabla de los senos*.

533 Las proposiciones establecidas ya, bastan para su construccion; pues teniendo 1000000 partes el radio, cuerda de $60°$ (367), tendrá el seno de $30°$ que es su mitad (515), 500000: y buscando sucesivamente los senos de la mitad (525), sacarémos por el de $30°$ el valor de los senos de $15°$, $7°30'$, $3°45'$, $1°52'30''$ hasta el de $52''44'''3''''\frac{3}{4}$ que por su pequeñez se confunde ya con su arco. Por lo mismo tanto él como el de $1'$ serán sin error sensible proporcionales con sus arcos, y podrémos decir, *el arco de* $52''44'''3''''\frac{3}{4}$ *es á su seno encontrado, como el arco de* $1'$ *es á su seno.* Conocido por esta proporcion el valor del seno de $1'$, sacarémos el de $2'$, $4'$, $8'$ &c. (526), el de $1'+2'=3'$

(527), $3'+2'=5$, el de 10', 20', 30', 60', ó el de 1.° y con él se sacarán del mismo modo los de los senos restantes hasta 45°. Los demas hasta 90° son sus cosenos, y su valor se encuentra segun digimos (520): y con los senos y cosenos se sacan (521) los valores de las tangentes y cotangentes.

534 Las tablas que acabamos de enseñar á construir, en lugar de los valores de los senos, cosen. tang. suelen contener solo sus logaritmos para mayor comodidad en los cálculos; pero logaritmos sacados por los antiguos Geómetras que consideraban al radio dividido en 10000000000 partes. Los Modernos suponiendo el radio de 1000000 han omitido en los valores de los senos, tangentes &c. las quatro últimas cifras, y algunos cinco, por no necesitarse tanta exâctitud; pero han dejado los logaritmos conforme los sacaron los Antiguos. El que solo tenga tabla de logaritmos de los senos, y quisiese sacar por ellas el valor de un seno v. gr. el de 18° 6', debe rebajar seis unidades de la característica de su logaritmo 9,4923083, y buscando 3,4923083 en los logaritmos de los números naturales, le hallará entre 3107 y 3108, y qualquiera de ellos será con poca diferencia el valor del seno de 18°6'.

535 Habiendo manifestado ya cómo los senos equivalen á los ángulos, vamos ahora

á demostrar *que en qualquier triángulo los senos de los ángulos son proporcionales á sus lados opuestos* : para lo qual basta inscribir en un círculo qualquier triángulo ABC (fig. 37); y reparar que siendo cada lado cuerda de un arco duplo del que mide el ángulo opuesto (322), será la mitad de cada lado el seno del ángulo opuesto: esto es, AP será seno del ángulo B, AN seno de C, y BH seno de A: luego siendo los lados proporcionales á sus mitades, lo serán de consiguiente á los senos de los ángulos opuestos; de suerte que será AB:*sen* C::AC:*sen* B::BC:*sen* A.

536 En el triángulo rectángulo ABD (fig. 117) *es tambien el seno del ángulo recto* D que es el radio $=r$, *á la hipotenusa* AB; *como el seno* A *al lado* BD, *y como el seno* B *al lado* AD: y como tomando á BD por radio, es AD tangente del ángulo B (517); y siendo AD radio es DB tangente del ángulo A; será BD:AD::*r*:*tang* B, y AD:DB::*r*:*tang* A.

537 En un triángulo qualquiera ACB (fig. 118) *la suma de los dos lados* BC+AC *que comprende el ángulo* C, *es á su diferencia* BC−AC, *como la tangente de la mitad de la suma de los otros dos ángulos* A, B *es á la tangente de la mitad de la diferencia de estos ángulos*: ó BC+AC:BC−AC::*tang* $\frac{1}{2}$(A+B):*tang* $\frac{1}{2}$(A−B).

538 Para demostrarlo descríbase un cír-

culo desde C con el intervalo del lado menor AC, y tiradas las dos cuerdas AE, AD, y DF paralela á AE, será el ángulo t mitad de los ángulos A y B, por ser z=A+B (339); y t mitad de z (323): el ángulo DAB es la semidiferencia de A−B de dichos ángulos (238); porque DAB con el ángulo o=t que es su semisuma, compone el ángulo A el mayor de A y B; luego siendo EAD ángulo recto (324), y lo mismo su igual ADF (300); será tomando á DA y AF por radios, EA tangente del ángulo $t=\frac{1}{2}(A+B)$, y DF tangente de $DAF=\frac{1}{2}(A-B)$: y como por las paralelas EA, DF se tiene BE:BD::EA:DF, y BE=BC+AC, BD=BC−CD=BC−AC, saldrá por último BC+AC:BC−AC::*tang* $\frac{1}{2}(A+B)$: *tang* $\frac{1}{2}(A-B)$. Conocida la semisuma y semidiferencia de los ángulos A y B, se averigua facilmente el valor de cada uno (238).

539 Finalmente, *en qualqnier triángulo* ABC (fig. 119 y 120) *el lado* BC *sobre el qual ó sobre cuya prolongacion cae la perpendicular* AD, *es á la suma* AC+AB *de los otros dos; como su diferencia* AC−AB *es á la diferencia* DC−BD *de los segmentos hechos por la perpendicular* AD, *ó á su suma* DC+BD *si la perpendicular cae fuera.* Porque trazando un círculo desde A con el radio AB, y alargando AC hasta T, será (398) CB:CT::

CR:CE, y como CT=AC+AB, CR=AC−AB, y CE=DC−DB por ser BD=DE, se tendrá sustituyendo estos valores, BC:AC+AB::AC−AB:DC−DB: y en la fig. 120 donde CE es igual á CD+DE=CD+DB, sale BC:AC+AB::AC−AB:CD+DB. Con la suma y diferencia conocidas de los segmentos se averigua su valor (238).

Usos del cálculo trigonométrico en la resolucion de los triángulos rectángulos y oblicuángulos.

540 Con las proposiciones demostradas se pueden resolver los quatro casos diferentes en que con arreglo á lo dicho (512), dadas tres cosas de las seis que componen un triángulo se pida el valor de las otras tres; y comenzando por el triángulo rectángulo, si ademas del ángulo recto D (fig. 117) que se se conoce, se diese 1.° uno de los ángulos agudos B y el lado BD harémos (536) *r*: *tang*.B::BD:AD para averiguar el lado AD. 2.° Si se diese la hipotenusa AB y uno de los ángulos agudos A, haciendo *r*:AB::*sen* A:BD, se conocerá el lado BD. 3.° Con el lado BD y la hipotenusa AB, tendremos AB: *r*::DB:*sen* A, y se habrá averiguado el ángulo A. 4.° Dados los lados DB, AD se hará AD:DB::*r*:*tang* A, y se tendrá el ángulo A.

541 En los triángulos oblicuángulos ó que no tienen ángulo recto 1.° conocido uno de los lados AB (fig. 121) y los dos ángulos C y B, será A lo que les falta para 180° (341), y se averiguará el valor de los lados AC y CB por las dos proporciones siguientes (535) *sen* C : AB :: *sen* B : AC :: *sen* A : BC. 2.° Dados los dos lados AC, CB (fig. 118) y el ángulo C comprendido, se hará (537) CB+AC : CB−AC :: *tang* $\frac{1}{2}$(A+B) : *tang* $\frac{1}{2}$(A−B): conocida la diferencia de A y B, como se conoce su suma que con C compone 180° (341), se averiguará lo que vale cada uno (238).

542 3.° Quando se dan los lados AB, BC (fig. 121) y el ángulo A; se hace BC : *sen* A :: AB : *sen* C : conocidos C y A y de consiguiente su suplemento B, se averiguará AC diciendo *sen* C : AB :: *sen* B . AC. Si con los lados AB, BC se hubiese dado el ángulo C, hubieramos hecho la proporcion AB : *sen* C :: BC : *sen* A.

543 Pero como tirando la BT=AB, resulta otro triángulo BTC con los mismos tres datos BT ó AB, BC y C, donde BT : *sen* C :: BC : *sen* BTC; se infiere que á dichos datos AB, BC y C corresponde por 4.° término proporcional ó el seno del ángulo obtuso BTC ó el del ángulo A=BTA complemento de BTC, que aunque el mismo en ambos (519), no lo es el tercer lado AC, TC de

los dos triángulos: por lo que quando se den en un triángulo dos lados AB, BC y el ángulo C opuesto á AB, se necesita saber ademas, si el ángulo opuesto al otro lado es el agudo A, y entonces se tratará del triángulo ABC, ó es el obtuso BT, y será BTC el triángulo de que se habla.

544 4.° Si se diesen los tres lados AB, AC, BC (fig. 119), y se pidiesen los ángulos; sacarémos de la proporcion (539) BC: AC+AB::AC−AB: DC−BD la diferencia de los segmentos que forma una perpendicular bajada desde A sobre BC, suma conocida de dichos segmentos; luego conoceremos el valor de qualquiera de ellos por eg. el de DC: y en el triángulo rectángulo ADC conocida la hipotenusa y el lado DC, se averiguará el ángulo C (540), y de consiguiente (542) A y B.

Sea AC=180*P*. AB=128, BC=200, tendrémos 200:180+128::180−128:DC−BD=EC, esto es, 200:308::52:EC=80 poco mas. Con esta diferencia de los segmentos BD, DC, y su suma el lado BC, tendrémos el valor de qualquiera de ellos BD= $\frac{1}{2}$(200−80)=60: y en el triángulo rectángulo ABD donde conocemos AB, BD averiguarémos el ángulo B (540) y por él, los otros A y C.

545 Vamos á aplicar esta doctrina á algu-

nos egemplos, en los que usarémos para abreviar el cálculo en lugar de los números, senos, cosenos, tangentes &c. de sus logaritmos, y aun del complemento aritmético, como no sea en el caso de haberse de hacer la resta del logaritmo del radio, que siendo..... 10,00000, escusa dicha abreviacion.

546 Hayase de medir 1.° la altura AB (fig. 122) accesible por uno de sus estremos A. Puesto el Grafómetro en un sitio inmediato M, y colocado verticalmente ó de suerte que su pie caiga perpendicular al suelo llano por medio de un hilo *et* con un plomo, que colgando de su centro debe pasar por los 90°; dirijase por el diámetro inmobil el rayo visual *p*D, y por el mobil el *q*B á la cumbre de la altura: vease quántos grados coge en el instrumento el ángulo *peq*, y estos mismos tendrá su vertical BED. Medida despues la distancia MN=*e*D, como BN es perpendicular al suelo y de consiguiente á *e*D, será BD*e* un triángulo rectángulo, donde si el lado *e*D que se conoce, es de 456, y el ángulo observado B*e*D de 56° 12′, se sacará el otro lado BD (540) por la proporcion *r*:*tang* B*e*D=56° 12′::*e*D=456:DB que se encuentra de 681 por el siguiente cálculo de logaritmos:

Log. tang. 50° 12'.......... 10,174287
Log. 456..................... 2,658965
Suma......................... 12,833252
Log. del radio............... 10,000000

Resta ó Log. BD.......... 2,833252

añádasele DN ó la altura del Grafómetro, y se tendrá la AB que se pide.

547 Si BD fuera la altura conocida de una muralla, y se pidiese la longitud de eB para escalarla; despues de haber buscado el ángulo Bed haciendo eD:DB::r:*tang* BeD, haríamos BD:*sen* BeD::r:Be. Mas facil es cuadrar el valor de eD y BD, y sacar de su suma la raiz cuadrada que será la longitud de eB; porque $eB = \sqrt{(eD)^2 + (BD)^2}$ (396).

548 En estas y semejantes prácticas conviene colocar el Grafómetro á una distancia casi igual á la que se va á medir, para que sea menor el error que por lo comun se comete al tomar el ángulo de la altura, que será entonces de 45°. Por eg. si midiendo la altura GD (fig. 123) se toma en el punto F el ángulo ZFT en lugar del verdadero GFT, y en E el KET por el verdadero GET; aunque la equivocacion ó los ángulos GEK y GFZ se supongan iguales, es mayor la parte GZ en que la observacion disminuye la altura en F, que GK que sale de menos en E.

549 Supongamos ahora que se nos pida

medir una linea AB (fig. 124) accesible solamente por sus estremos, como el ancho de una laguna, bosque &c. En este caso se ha de escoger un punto C desde donde se puedan tirar las lineas CA, CB; y suponiendo que se puedan medir, sea AC=142*P*, BC=120, y C=132°: y será B+A=48; haré-

Log. tang 24°	9,648583
Log. 22	1,342423
Compl. Log. 262	7,581699
Suma ó Log. tang $\frac{1}{2}$(B—A)	18,572705

mos pues (541), 142+120:142—120::*tang* 24°:*tang* $\frac{1}{2}$(B—A), ó 262:22::*tang* 24°:*tang* $\frac{1}{2}$(B—A) que calculada por los logaritmos es de 2°8'. Luego (238) el ángulo B valdrá 24°+2°8'=26°8', y A 24°—2°8'=21° 52'.

Con los ángulos B, A se encontrará ahora la AB por la proporcion siguiente *sen* B: AC::*sen* C:AB, ó *sen* 26°8':*sen* 132°::142:AB, que buscada por los logaritmos resulta de 235,6 *P*.

550 Si no hubiese sitio desde donde se puedan ver los dos puntos A, B (fig. 125), se elegirán dos C, D tales que sea facil medir las BC, CD, DA y los ángulos C, D que convendrá sean rectos; imaginando despues la BD resultará un triángulo BCD donde conocidos BC, CD y el ángulo comprendido,

se averiguará BD como acabamos de decir. Conociendo ya en el otro triángulo ADB, AD, DB y el ángulo ADB diferencia entre BDC y ADC, se averiguará por último la AB.

551 Vamos ya á medir una linea inaccesible AB (fig. 126): para lo qual despues de haber escogido y medido una base CD que se procura hacer casi igual y paralela á AB, se tirarán las visuales CA, CB, DA, DB, y despues de haber medido los ángulos que forman en C, D, se averiguará (541) el valor de CB en el triángulo CBD, donde el lado CD y los ángulos BCD, CDB son conocidos: del mismo modo se averiguará AC en el triángulo ACD. Con AC y BC conocidos, ademas del ángulo ACB que forman, que es la diferencia de los ángulos ACD, BCD observados, se sacará por último en el triángulo ACB el valor de AB por lo dicho (541). En el caso de no encontrarse un punto C desde donde se vean los dos A, B, se tirará una recta CE (fig. 127) tal que desde E se alcancen á ver dichos puntos; se imaginarán despues las visuales EA, EB, CB, ED, DA y DB, y medidos los ángulos en E, D y la base CE, se hallará facilísimamente la AB, cuidando siempre de no formar jamás ángulos muy agudos en los puntos inaccesibles.

552 Si la linea inaccesible fuese la altura

vertical AB (fig. 123), observarémos en el sitio H el ángulo A*e*C, mediremos despues un trecho HP, y tomando en P el ángulo A*te*, tendremos conocidos en el triángulo A*te* los ángulos *et*A, y A*et* suplemento del observado A*e*C, con el lado *te*=PH; luego podremos averiguar A*e* (541). Pasando ahora al triángulo rectángulo A*e*C donde sabemos el valor de la hipotenusa A*e* y el del ángulo A*e*C, tendremos el de AC por la proporcion

Log. sen 35°40′	9,765720
Log. 576	2,760422
Suma	12,526142
Log. r	10, ...
Resta ó Log. AC	2,526142

r : A*e* :: *sen* A*e*C : AC. Sea A*e* de 576 *v.* y el ángulo A*e*C de 35° 40′; será *r* : 576 :: *sen* 35° 40′ : AC, que se encuentra de 335, 8 *v.* á las que si se añade CB ó la altura del instrumento, resultará la AB que se busca.

553 Para medir la distancia AB (fig. 128) de una nube ó cuesta inaccesible; se mide una base AC, y observando en el triángulo ABC los ángulos A y C, se averiguan AB y BC (541). Si se dirige despues con el Grafómetro colocado verticalmente, una linea AD paralela al suelo llano que se llama *orizontal*, y en el triángulo rectángulo ABD, donde la hipotenusa AB es conocida, y el ángulo BAD

se puede medir, se hallará facilmente la altura BD de la montaña y la distancia orizontal AD (540).

554 Hayase de levantar el plano de un terreno ACDBE &c. (fig. 129) ó determinar la situacion de todos sus puntos principales. Despues de haberlos recorrido, y formado á ojo un borrador de todos para hacer juicio de su situacion; midase una base AB de una distancia proporcionada á la de los obgetos mas remotos, y tal que desde sus estremos se registren los mas principales, como casas, huertas, molinos, torres &c. Póngase el Grafómetro en B, y colocando el diámetro inmobil en la direccion AB, obsérvense los ángulos ABE, ABF, ABG, ABD, ABC que con él forman los rayos dirigidos á los obgetos E, F, G &c. Mudese ahora el instrumento á A, y haciendo que el diámetro inmobil se dirija á B, se tomarán tambien los ángulos BAE, BAF, BAG, BAD &c. que se anotarán con los anteriores en un *libro de memorias*.

Escojase despues otra base GE para determinar los obgetos R, H, K que ó no se ven desde A y B, ó forman en ellos ángulos muy agudos ó muy obtusos; y desde sus estremos G, E observense del mismo modo los ángulos EGK, EGR, EGH; GEK, GER, GEH; y si es menester los LCD, LDC para determinar algun otro punto L muy estraviado, escribiéndolos todos con los anteriores.

Tendremos pues, en los triángulos AEB, AFB, AGB &c. el lado AB y los ángulos adyacentes conocidos; y de consiguiente será facil calcular los otros dos lados (541). Tambien se averiguará el valor de GE por medio del triángulo GEB, cuyos lados GB, BE se conocen ya, y el ángulo GBE comprendido, que es la diferencia entre los observados ABG, ABE. Con GE y los ángulos adyacentes observados se buscan en los triángulos GKE, GRE, GHE sus lados, haciendo lo mismo con los del triángulo CDL.

Hecho esto, se tirará en el papel una linea *ab* que tenga tantas partes de la escala que ha de determinar el tamaño del plano, como varas ó pies tiene AB en el terreno, y tomando en dicha escala un intervalo de tantas partes como varas ó pies tiene BE, se trazará desde *b* como centro un arco. Con otro espacio de tantas partes como varas ó pies tiene AE, se traza otro arco desde *a*, que cortará al primero en el punto *e*, cuya posicion respecto de *ab* quedará determinada en el papel, semejante á E respecto de AB. Determínense de este mismo modo los puntos *g*, *f*, *c*, *d*, y se habrán representado los G, E, C, D. Los K, R, H, L se deben determinar en el papel desde las bases *ge*, *cd*, trazando desde sus estremos arcos con el intervalo de tantas partes como varas ó pies corresponden á GK, EK; GR, RE &c. y quedará trazada en el papel una figura semejante á la del terreno (405); pues se compondrá de igual número de triángulos semejantes y colocados del mismo modo que ella: con que solo faltará dibujar en cada punto los objetos que en ellos se representan.

555 Tambien se pudieron determinar los puntos de la figura despues de haber observado los ángulos en A, B, G, E, C, D; tomando la *ab* como digimos, y formando en *a* y *b* por medio del semicírculo (279), los ángulos *abe*, *abf*, *abg*, *abd*, *abc*; *bae*, *baf*, *bag*, *bad*, *bac* iguales á los observados en A y B: en *g* y *e* tirando la *ge*, los *gek*, *ger*, *geh*; *egk*, *egr*, *egh*; y en *c*, *d*, los *cdl*, *lcd* iguales á los medidos en G, E, C, D; pues los triángulos que resultan, son semejantes á los del terreno. Este método aunque menos exâcto, nos escusa calcular los lados por la trigonometría, y por eso conviene usar de él quando no son muy grandes las distancias á que están los puntos principales del plano.

556 Ademas de los medios que nos ofrece la trigonometría para medir toda clase de lineas, nos podremos tambien servir de los siguientes. 1.° La altura AB (fig. 122) pudo haberse medido fijando en el mismo plano de la torre un palo *ab* paralelo á dicho edificio,

y diciendo despues, *la longitud* ac *de la sombra del palo es á su altura* ab, *como la longitud de la sombra* AC *es á* AB : pero cuidese si el edificio termina en punta, añadir á la longitud de la sombra la mitad del diámetro del edificio, que es en lo que aparece mayor la sombra del edificio igual que el que no lo es.

557 2.° Para medir la recta AB (fig. 130) accesible por uno de sus estremos A; se plantará un piquete en C, y sobre él orizontalmente un estadal con dos reglas pequeñas en sus estremos D, A: dirijanse con ellas al punto AB los rayos visuales AB, DB: muevase el piquete al rededor, llevando inmobles las reglas, hasta que quede en la direccion *ad*, y midiendo *ab*, ó lo que hay de *a* á *b* punto donde concurren los rayos *db*, *ab*, se tendrá el valor de AB. Este método que es bastante exâcto en cortas distancias, se aplica á medir qualesquiera otras lineas, verticales ú *orizontales* (561) colocando el estadal y las reglas segun el caso lo requiera.

558 3.° Habiéndose de medir la linea AB (fig. 131); tirada la base AC en sitio cómodo para medirse, y dirigiendo la CB, se tendrá un triángulo ACB con un lado AC, y los ángulos adyacentes conocidos; cuyo lado AB se calculará, ó formando en CA los ángulos *b*CA, CA*b* iguales á BCA, CAB;

y entonces será $Ab = AB$, ó tirando sobre un papel una recta *ac* del mismo número de partes de una escala que AC tiene de varas ó pies, y formando sobre ella un triángulo *abc* semejante á ABC, en cuyo caso el número de partes de la escala de que conste *ab*, será el de las varas ó pies que tiene AB.

559 4.° Quando la linea AB propuesta tiene una parte AD accesible, tirada AC que supondremos de 30 *v.* se formará, tomando á arbitrio la Ac de 10 *v.* el ángulo $AcD = ACB$, y midiendo AD que harémos de 12 *v.* formarémos la proporcion $Ac = 10\,v : AC = 30\,v :: AD = 12\,v : AB$, que resulta de 36. Si AB no tiene parte accesible, se alargará AC hasta que AT sea de 10 *v.* y formando el ángulo $ATd = ACB$, se hará dicha regla de tres. Siempre conviene hacer á Ac el tercio ó el quarto de AC, y con eso será AD el tercio ó quarto de AB: como tambien tomar á AC igual con poca diferencia á AB; lo que se logrará apartando tanto el punto C que el ángulo BCA sea la mitad del suplemento del ángulo A; pues siendo entonces $ACB = ABC$, será $AC = AB$ (342).

De la Nivelacion.

560 Vamos á concluir este tratado dando una ligera idea de los métodos de *nivelar*

un terreno. Para esto supondremos 1.° que á razon de 56979 toesas ó 132951 *v.* castellanas que tiene cada grado de circulo máxîmo de la tierra, corresponderán á toda la circunferencia $56979 \times 360° = 20512440$ toesas ó 47862360 *v*: al diámetro 6526685 toesas y $15228932\frac{2}{3}$ *v*: al radio $3263342\frac{1}{2}$ toesas y $7614466\frac{1}{3}$*v*: á un minuto 950 toesas ó 2216*v*: y á un segundo 16 toesas que son 37*v*: todo en la suposicion de que la tierra sea perfectamente esférica; pues aunque en realidad es ovalada, es insensible el error de dicho supuesto para la nivelacion.

561 2.° Que una linea A*d* (fig. 132) cuyos puntos A, *c*, *d* distan todos igualmente del centro O de la tierra como la paralela á la superficie de un gran lago, se llama linea *orizontal* y de *nivel verdadero*; á diferencia de la que se encuentra nivelando, que en la distancia A*d* es la tangente A*c*, que se llama *linea de nivel aparente*. La diferencia C*d* entre las dos, ó lo que dista mas de O el punto C que *d*, es casi nula á la corta distancia de 100 á 130 toesas, por la mucha estension de la superficie de la tierra; pero en mayores distancias se debe apreciar y restar de la que haya resultado en la operacion.

562 Podremos sacar el valor de esta diferencia considerando la distancia A*c* igual á la tangente AB, y como BR:AB::AB:B*c* (399).

suponiendo que el arco A*c* se confunda por su pequeñez con la tangente AB, será BR lo mismo que *c*R, y *c*R:A*c*::A*c*:B*c*; póngase el valor de *c*R diámetro de la tierra (560), y el de la distancia A*c*, y se tendrá la diferencia B*c*: y por ella qualquiera otra C*d*; pues siendo B*c*, C*d* casi paralelas é iguales á A*a*, A*b*, que son entre sí como los cuadrados de las cuerdas ó arcos A*c*, A*d* (461), tendrémos $(Ac)^2:(Ad)^2::Bc:Cd$, y así de las demas. La siguiente tabla formada por *MMrs. Picard* y de *la Hire* contiene las diferencias de nivel aparente y verdadero hasta 4000 toesas.

DISTANCIAS.				DISTANCIAS.				DISTANCIAS.			
Toes.	*Pies*	*Pulg.*	*Lin.*	*Toes.*	*Pies*	*Pulg.*	*Lin.*	*Toes.*	*Pies*	*Pulg.*	*Lin.*
50	0	0	0 $\frac{1}{3}$	500	0	2	9	1000	0	11	0
100	0	0	1 $\frac{1}{3}$	550	0	3	6	1250	1	5	2 $\frac{1}{2}$
150	0	0	3	600	0	4	0	1500	2	0	9
200	0	0	5 $\frac{1}{3}$	650	0	4	8	1750	2	9	8 $\frac{1}{2}$
250	0	0	8 $\frac{1}{3}$	700	0	5	4	2000	3	8	0
300	0	1	0	750	0	6	3	2500	5	8	9
350	0	1	4 $\frac{1}{3}$	800	0	7	1	3000	8	3	0
400	0	1	9 $\frac{1}{3}$	850	0	7	11 $\frac{1}{2}$	3500	11	2	9
450	0	2	3	900	0	8	11	4000	14	8	0
				950	0	10	0				

563 Esto supuesto, para la operacion de nivelar usan los Prácticos de diferentes instrumentos. Los mas comunes son el *nivel*

de ayre (fig. 133), que es un tubo lleno de espíritu de vino menos una ampolla de ayre A, que debe estar perfectamente en medio, para que el sitio que ocupa el instrumento, esté á nivel. El *nivel de Albañil* (fig. 134) es un triángulo isósceles sin base con un cuadrante de círculo entre sus lados, y una linea perpendicular tirada desde su vértice á la base y señalada en el cuadrante. Del estremo superior de esta linea cuelga un hilo con un plomo que pasando por el cuadrante determina en grados la cantidad de inclinacion del plano que se nivela, ó pasa por dicha linea si el plano está á nivel.

564 El nivel de mas uso es el *de agua* (fig. 135) compuesto de un tubo hueco de hoja de lata ú otro metal doblado en A y B, en cuyos estremos *e* y *t* se introducen otros dos tubos de vidrio D, C pegados con betun en *e* y *t*: tiene debajo y en medio del tubo AB una virola para colocarle en su pie. Lleno el tubo de agua hasta que llegue en los dos pequeños á la altura de 2 á 3 pulgadas, la linea *et* que pasa por la superficie del agua, es perfectamente orizontal. Acompaña al nivel el estadal HG dividido en pies, pulgadas y lineas, en cuyo rebajo se introduce una regla, á la que se fija un carton ú hoja de lata TF de un pie en cuadro poco mas ó menos, cuya mitad inferior se tiñe de negro, dejando blanca la superior.

565 Si se quisiese saber lo que dista mas del nivel verdadero el punto G que Z; se colocará el instrumento en E perpendicular al terreno por medio del hilo de plomo H, se enviará un Peon á G que clavando el estadal perpendicular, y teniéndole fijo con la mano izquierda, suba ó bage segun le avise el que mire desde *e*, hasta asegurarle en T donde remata el rayo visual *t*T. Midase ahora la altura GT que supongo de 2P y 7*p*, y restándola de la del instrumento que por lo comun es de 4P y 6*p*, resultarán 1P y 11*p*, en que el punto G está mas elevado que Z sobre el Orizonte. Si la distancia ZG no pasa de 750P, se desprecia la diferencia entre el nivel aparente y verdadero, pero si es mayor, se cuenta con ella, y se repite la operacion nivelando de cada vez 1400 ó 1500 P.

566 Hayanse por eg. de nivelar los puntos A y H (fig. 136) distantes uno de otro 3000 P. Despues de dividir 3000 por 1400 ó 1500 para saber que he de hacer 2 estaciones, elegiré para ellas dos sitios á 750 P uno, y á 2250 el otro del punto A, y poniendo en el medio E de toda la distancia un estadal, plantaré el instrumento en I: miraré desde *a* hácia B, y haré notar y medir la altura AB que el rayo *ab*B señala, que supongo de 8P 5*p*: miraré despues por *b* á C y mandaré señalar es-

te punto con un lapiz. Paso el nivel al punto 2, y mirando desde *d* á D, mediré la altura DC de 4P, haciendo notar ó escribir á parte la altura HF de 5P 3*p*, que se determina mirando de *c* á F. Sumo ahora las alturas AB, DC encontradas, y restando de su suma 12P 5*p*, el valor 5P 3*p* de HF, tendré de residuo 7P 2*p*, que es en lo que el punto A está mas bajo que H.

567 Si hubiese cuestas en la operacion, convendrá poner separadas en una columna que llamarémos *primera*, las distancias que se encuentran subiendo, y en la *segunda* las que se encuentren bajando, para restar despues la suma de las unas de la de las otras. Y asi continuando la nivelacion del egemplo anterior hasta el punto Z, apuntaré en la 1.ª columna las alturas halladas AB, DC, y pasando el nivel al punto 3, miraré por *f*, *e* y G, y haciendo medir GF de 3P 6*p*, lo apuntaré en la 1.ª columna, determinando tambien desde *e* el punto I. Plantado el nivel en 4, determinará el rayo *q*K la KI de 3P 3*p*, que escribiré en la 2.ª columna por ser bajada, como tambien la altura 4P 6*p* del instrumento colocado en 5, á cuyo pie va á dar el rayo *yh*, haciendo al mismo tiempo señalar el punto M donde va á dar *hy*.

Paso á 6, y escribo en la 2.ª columna 2P á que equivale MN determinada por el rayo *ik*, señalando tambien el punto P. Ultimamente pongo en la 1.ª columna las alturas QP de 4P 1*p*, y TS de 6P 5*p*, que se encuentran como las otras, colocando sucesivamente el instrumento en 7 y 8, y la XZ de 3P 2*p* en la 2.ª Sumando ahora las alturas de la 1.ª columna, tendré 26P 5*p*, resto de ellas 12P 11*p* que componen las de la 2.ª, y resultan 13P 6*p* que dista mas del centro de la tierra Z que A. Las cuestas demasiado empinadas se nivelan mas facilmente comenzando desde la cumbre, y de este modo pueden nivelar dos á un tiempo para acabar mas pronto la operacion.

APLICACION DEL ALGEBRA á la Geometría.

Construccion de las Equaciones de 1.° y 2.° grado.

568 Para la resolucion completa de los problemas geométricos por medio del Algebra, es preciso saber antes representar en lineas las expresiones ó valores algébricos de las incognitas que contengan. Explicarémos esta operacion que se llama *construccion*, en los egemplos siguientes. Sea $x=a+b-n$, donde a represente la linea A (fig. 137), b la B y n la C: tomo sobre una linea indefinida DH, la DO=A, la OT=B, y desde T ácia el la-

do opuesto la $TS=e$, y tendré $DS=DO+OT-TS=a+b-n=x$.

569 La expresion $x=\frac{ab}{c}$ representa una quarta proporcional á c, a, b; pues $c:a::b:\frac{ab}{c}=x$: y $x=\frac{bb}{c}$ una tercera proporcional á c y b, por ser $c:b::b:\frac{bb}{c}=x$: luego si a, b, c representan las lineas o, n, m (fig. 57), y se practíca lo que digimos (378 y 379), será $bt=x$ la quarta ó la tercera proporcional. A esta misma operacion se reducen $x=\frac{abcd}{emn}$, haciendo $e:a::b:\frac{ab}{e}$, $m:\frac{ab}{e}::c:\frac{abc}{em}$, y últimamente, $n:\frac{abc}{em}::d:\frac{abcd}{emn}=x$. Aquí y en lo sucesivo damos por supuestas las operaciones geométricas que citamos.

570 Quando hay dos ó mas términos, como en $x=\frac{cd}{m}+\frac{abc}{et}-\frac{r^2st}{a^2b}$ &c. se busca la linea á que equivale cada término, y quedará reducida á una expresion semejante á esta $x=p+q-h$, facil de construir. Lo mismo se egecuta con $x=\frac{a^2b+cd^2+dce}{fg}$; esto es, se busca una linea $t=\frac{a^2b}{fg}$, otra $m=\frac{cd^2}{fg}$, y $n=\frac{dce}{fg}$, y resulta $x=t+m+n$.

571 En $x=\frac{abc+deb+\&c.}{ed-fg+\&c.}$ &c. $x=$ .... $\frac{bc^2d-a^3qp+\&c.}{a^2g+d^2m+\&c.}$ se reducen á monomios sus denominadores polinomios haciendo $t=$...... $\frac{ed-fg}{e}$, $n=\frac{a^2g+d^2m}{ag}$ esto es, buscando una linea igual al denominador dividido por una de sus letras, ó por dos, segun el número de factores que contenga; pues siendo en tal caso $et=ed-fg$, $agn=a^2g+d^2m$, se reducirán las expresiones propuestas á estas $x=\frac{abc+deb}{et}$, $x=\frac{bc^2d-a^3qp}{agn}$ que ya hemos enseñado á construir.

572 Hay construcciones mas expedítas para ciertas expresiones: $x=\frac{bd+ad}{c+e}=\frac{(b+a)d}{c+e}$ se construye haciendo $c+e:b+a::d:\frac{bd+ad}{c+e}=x$; $x=\frac{a^2-b^2}{g-f}=\frac{(a+b)(a-b)}{g-f}$, haciendo $g-f:a+b::a-b:\frac{a^2-b^2}{g-f}=x$. Para construir facilísimamente $x=\frac{bde^2-b^2d^2}{bde+c^3}$, introduciremos en el término b^2d^2 la linea e, haciendo $\frac{bd}{e}=t$, ó $e:b::d:t$; pues será $bd=et$, y poniendo este valor en lugar de bd, se convertirá la expre-

sion en esta $x=\frac{e^3t-e^2t^2}{e^2t+e^3}=\frac{et-t^2}{t+e}$, semejante á la primera.

573 Todas las expresiones anteriores tienen en su numerador un factor mas que en su denominador; pero si tuviesen dos como $\frac{a^3+a^2b}{d+c}=a\times\frac{a^2+ab}{d+c}$ se encontrará $\frac{a^2+ab}{d+c}=m$, y la expresion reducida á $a\times m$, se construirá formando un paralelogramo cuya base sea a y m la altura. En $\frac{a^3+bc^2+d^3}{a+c}$ hay que introducir a en el 2.° y 3.^r término, haciendo $\frac{bc}{a}=m$ ó $bc=am$, y $\frac{d^2}{a}=n$ ó $d^2=an$, y quedará reducida á $\frac{a^3+amc+adn}{a+c}=a\times\ldots\ldots$ $\left(\frac{a^2+mc+dn}{a+c}\right)$ semejante á la anterior.

574 Quando son tres los factores que hay demas, como en $\frac{a^3b+a^2b^2}{a+c}$; por ser igual á $ab\times\frac{a^2+ab}{a+c}$, se hallará $\frac{a^2+ab}{a+c}=m$, y siendo ab un paralelogramo, si se le considera como base de un paralelepípedo cuya altura sea m, será su solidez $ab\times m$; y esta será la construccion de la expresion $\frac{a^3b+a^2b^2}{a+c}$.

575 Las cantidades que tienen como las

construidas un mismo número de factores en todos los términos, se llaman *homogeneas*: si alguna abc^2-a^2+abm no lo fuese, suponiendo que n sea la linea que representa la unidad, se multiplican los términos faltos $-a^2+abm$, el 1.° por n^2; y el 2.° por n, y resultará la expresion $abc^2-a^2n^2+abmn$ igual á la primera, y que ya se podrá construir por ser homogenea.

576 La expresion mas sencilla de las equaciones de 2.° grado es $x=\sqrt{ac}$, que es una media proporcional entre a y c: de suerte que suponiendo $m=a$ (fig. 65), $n=c$, será procediendo segun digimos (400), la $bd=x=\sqrt{ac}$. Tambien $x=\sqrt{(2bc+dc)}=\sqrt{(2b+d)c}$ representa una media proporcional entre... $2b+d$ y c: $\sqrt{(a^2-b^2)}=\sqrt{(a+b)(a-b)}$ otra entre $a+b$ y $a-b$. En $x=\sqrt{(b^2+dg)}$, introduciendo en dg la linea b, ó haciendo $\frac{dg}{b}=t$, se tendrá $x=\sqrt{(b^2+bt)}=\sqrt{(b+t)b}$, que es una media proporcional entre $b+t$ y b. Quando la expresion consta de muchos términos como $x=\sqrt{(cd+ac-eb \text{ \&c.})}$ se procede del mismo modo: ó se busca como digimos (570), una linea $t=\frac{cd+ac-eb}{b}$, y será $bt=cd+ac-eb$, y $x=\sqrt{bt}$. En $x=\sqrt{\left(\frac{bc^2-a^2g \text{ \&c.}}{d-c}\right)}$ se hace....

$t=\frac{bc}{d-c}$, $m=\frac{ag}{d-c}$, y $\sqrt{(ct-am)}$ á que queda reducida, se construye facilísimamente.

577 Sea $x=\sqrt{(a^2+b^2)}$: tomese $CD=a$ (fig. 138) y perpendicular á CD, la $BD=b$; será (396) la hipotenusa $CB=\sqrt{((CD)^2+(BD)^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)}=x$. Si se hubiera tenido $x=\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2+\&c.)}$, despues de hallada la $CB=\sqrt{(a^2+b^2)}$, se levantará en B la perpendicular $BA=C$, y será $CA=\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$: tirese despues la perpendicular $AP=d$, y se tendrá finalmente $CP=\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)}$. Quando hay algunos cuadrados negativos, se busca un cuadrado t^2 suma de los positivos, y otro m^2 suma de los negativos, y se reducirá la expresion á $\sqrt{(t^2-m^2)}$ que se puede construir describiendo sobre la linea $ac=t$ (fig. 65) un semicírculo, en el que se inscribirá la linea $ab=m$; pues será (4?8) $bc=\sqrt{((ac)^2-(ab)^2)}=\sqrt{(t^2-m^2)}$. A esta y á la anterior construccion pueden reducirse las expresiones $x=\sqrt{(ab+cd+mn+\&c.)}$, $x=\sqrt{(ab-cd+mn-\&c.)}$, haciendo antes $ab=t^2$, $cd=r^2$, $mn=p^2$ &c.

578 Si en $x=\left(b^2+\frac{a^2d^2+d^2c^2}{bd+ac}\right)$ suponemos $bd+ac=m^2$, $a^2+c^2=t^2$, nos resultará $x=\sqrt{\left(b^2+\frac{d^2t^2}{m^2}\right)}$; hagase despues $n=\frac{dt}{m}$, y

quedará que construir $\sqrt{(b^2+n^2)}$. $\sqrt{(a^2-c\times\sqrt{(bd-e^2)})}$ se reduce, buscando $t=\sqrt{(bd-e^2)}$, $a\sqrt{(a^2-ct)}$: y últimamente $\frac{a\sqrt{(b+c)}}{\sqrt{(d+e)}}=\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$, se construye buscando una media proporcional n entre $b+c$ y $d+e$, y despues una quarta á $d+e$, a y n.

579 Sea $x=\pm\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2\pm b^2)}$ el valor sacado de la equacion general incompleta de 2.° grado $x^2\pm ax=\pm b^2$; y pues que abraza las dos fórmulas $x=\pm\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b^2)}$, $x=\pm\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-b^2)}$, tomemos para construir la 1.ª $ac=\frac{1}{2}a$ (fig. 69), y ab perpendicular á ac igual á b, describase con ac un círculo, y tirando bt, tendremos $bt=tc+cb=\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b^2)}$, y $br=bc-cr=-\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b^2)}$; luego $\pm bt$ y $\pm br$ serán los quatro valores de la 1.ª espresion.

580 Para la construccion de la 2.ª $x=\pm\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-b^2)}$, sobre $ac=\frac{1}{2}a$ (fig. 65) tracese el semicírculo $abhc$, é inscribiendo en él $ab=b$, tirese bc que se alargará hasta que cn, cp sean iguales á ac, y serán $\pm bn$, $\pm bp$ los quatro valores que se buscan: pues $bn=cn-bc=\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b^2)}$, y $pb=cp+bc=\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-b^2)}$.

581 Esto supuesto, para la solucion de los problemas geométricos ademas de lo que

dejamos dicho en la de los algébricos (227 y *sig.*), se supone encontrado lo que se va á buscar, valiéndose para formar la equacion que determine su valor, de la posicion y relaciones de las lineas que se den. Pero quando las condiciones del problema no subministran todas las lineas necesarias para resolverle, es preciso buscarlas, alargando las dadas hasta que encuentren otras, tirando paralelas, perpendiculares, tangentes, formando triángulos rectángulos ó semejantes, y aprovechando despues las propiedades que de estas lineas y figuras dejamos demostradas en la geometría elementar: en especial las de los triángulos rectángulos y semejantes. Y supuesto que para esto no se pueden dar reglas generales, es preciso esperar los progresos y el acierto en esta materia á proporcion del talento y del egercicio reflexîonado que cada uno haga sobre ella. De camino que resolvamos algunos problemas, haremos las únicas advertencias que pueden guiarnos en tanta obscuridad é incertidumbre.

582 Prob. 1.° *Dados dos puntos* A, C (fig. 139) *trazar un círculo que pase por ellos, y toque ademas la recta* BE. Supongase encontrado el tercer punto T por donde ha de pasar el círculo, tirese por A y C la AE alargada hasta que corte á BE, y tendremos que averiguar el valor de ET. Divídase AC

por medio en R, y llamando ER, a; AR=RC, b; y ET, x; será CE$=a-b$, y por lo demostrado (399) $(ET)^2=AE\times EC$, ó $x^2=a^2-b^2$, y $x=\sqrt{(a^2-b^2)}$=ET: expresion que se puede construir describiendo sobre ER el semicírculo RHE, é inscribiendo en él la RH=RC: pues será EH=ET$=x=\sqrt{(a^2-b^2)}$ en el triángulo rectángulo RHE (458).

583 2.° *Dividir la linea dada* AB (fig. 140) *en media y estrema razon en* D, ó de modo que sea AB:AD::AD:DB. Sea AB$=a$, AD$=x$; será BD=AB−AD$=a-x$, y la proporcion AB:AD::AD:DB se mudará en esta $a:x::x:a-x$, donde (174) $x^2=a^2-ax$, y (249) $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}a^2)}$. Si se levanta en B la perpendicular BC$=\frac{1}{2}a$, y se tira la AC, valdrá $\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}a^2)}$ ó $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; córtese de AC, CE=BC$=\frac{1}{2}a$, y será AE=AD=AC−CE$=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$. El otro valor $-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ se construye tomando á la parte opuesta AH=AC+CB$=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, y la AH será tambien media proporcional entre HB y AB.

584 3.° *Dado el radio de un círculo, encontrar el lado del triángulo equilatero, el del decágono y pentágono regular*. 1.° Sea el radio AC$=a$ (fig. 141), el lado AT del triángulo x; será el arco ABT de 120°, AB de 60°, y el triángulo ABC isósceles; luego (337) CP$=\frac{1}{2}a$; y en el triángulo rectán-

gulo APC será $(AP)^2 = (AC)^2 - (CP)^2$, ó $\frac{1}{4}a^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$, $x^2 = 4a^2 - a^2$, y $x = \sqrt{(4a^2 - a^2)}$. Formese pues, sobre el diámetro MN un triángulo equilátero MRN, y la perpendicular RC será en el triángulo rectángulo MRC, $\sqrt{(4aa - aa)} = x$, por ser $MC = a$, y $MR = MN = 2a$.

585 2.° Suponiendo (fig. 142) $AD = x$ el lado del decágono, será su arco medida del ángulo ACD, $\frac{1}{10}$ de la circunferencia ó de 36°, CDA=CAD de 72° (341 y 342), y BDC de 108° (339). Tomese BD=DC, y será DBC=DCB=36°, y ACB=72°; luego los triángulos ABC, ADC serán semejantes, y se tendrá AB:AC::AC:AD, ó $a+x:a::a:x$: será pues, $x^2 + ax = a^2$, y $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2} = AD$: expresion que encontramos (583) ser el segmento mayor de una linea $AC = a$ dividida en media y estrema razon.

586 3.° Para encontrar el lado $SD = z$ del pentágono regular dado el del decágono $AD = b$ y el radio $AC = a$, tenemos $DL = \frac{1}{2}z$ (337), $LC = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)}$ en el triángulo rectángulo DLC, y $AL = AC - LC = a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)}$. Del triángulo rectángulo ADL se saca $(AD)^2 = (AL)^2 + (DL)^2$, ó poniendo sus valores, $b^2 = \frac{1}{4}z^2 + a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)} = 2a^2 - b^2$. Cuadrense ambos miembros, reduzcase y partase por a^2, y resultará $z^2 = 4b^2 - \frac{b^4}{a^2}$: y pues que $b = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (585), si en

lugar de b^2 y b^4 ponemos sus valores $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, $\frac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, tendremos reduciendo $z^2 = a^2 + \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, ó $z^2 = a^2 + b^2$, poniendo b^2 en lugar de $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Tomese ahora CT$=b$, y tirando RT, será en el triángulo rectángulo RTC RT$=\sqrt{(a^2 + b^2)} = z$.

587 4.° *Dada la* HD (fig. 143) *y los ángulos* H, D *que con ella forman* HC, DC, *averiguar el valor de la altura* CP *á que estas lineas se encuentran.* Llamemos m la tangente del ángulo D conocido, n la del ángulo H, r el radio, HD, a; y la CP; y tendremos en el triángulo rectángulo CDP (536) DP *á* PC, *como el radio á la tangente del ángulo* D; ó DP$:y::r:m$; HP$:y::r:n$; luego DP$=\frac{ry}{m}$, HP$=\frac{ry}{n}$; y DP+HP=HD$=a=\frac{ry}{m}+\frac{ry}{n}$: de consiguiente, $y=\frac{amn}{rm+rn}$. Si llamamos p, q las cotangentes de dichos ángulos D, H, y en lugar de sus tangentes m, n ponemos sus equivalentes (524) $\frac{r^2}{p}$, $\frac{r^2}{q}$ en la espresion hallada, quedará reducida á $y=\frac{ar}{p+q}$, mucho mas sencilla que la primera: para que se vea que de la eleccion de las lineas conocidas pende que el resultado sea ó no sencillo.

588 5.° *Dados los tres lados* AC$=$a,

BC=c, AB=b *de un triángulo* ABC (fig. 119 y 120), *hallar la perpendicular* AD *y los dos segmentos* BD, DC *que forma sobre* BC. Suponiendo AD=z y DC=x, será BD=BC−DC=$c-x$ en la *fig.* 119 y en la 120 BD=DC−BC=$x-c$; y siendo $(DC)^2+(AD)^2=(AC)^2$, y $(BD)^2+(AD)^2=(AB)^2$; tendremos $x^2+z^2=a^2$, $c^2-2cx+x^2+z^2=b^2$: restando esta equacion de la 1.ª quedará $2cx-c^2=a^2-b^2$, y $x=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}=\frac{a^2-b^2}{2c}+\frac{c}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{(a+b)(a-b)}{c}\right)+\frac{1}{2}c=DC$: que es la mitad de una quarta proporcional á c, $a+b$ y $a-b$, sumada con $\frac{1}{2}c$: averiguada DC, se conocerá facilmente AD ó z.

589 De la equacion $2cx-c^2=a^2-b^2$ ó $c(2x-c)=(a+b)(a-b)$, se saca $c:a+b::a-b:2x-c$ ó BC:AC+AB::AC−AB:DC±BD, proporcion demostrada (539). Asimismo, si en la equacion $z^2+x^2=a^2$, $z^2=a^2-x^2=(a+x)\times(a-x)$ ponemos por x su valor $\frac{aa-bb+cc}{2c}$ .... (587), tendremos $zz=\left(a+\frac{aa-bb+cc}{2c}\right)\times\left(a+\frac{bb-aa-cc}{2c}\right)=\left(\frac{2ac+aa+cc-bb}{2c}\right)\times\left(\frac{2ac-aa-cc+bb}{2c}\right)$ $=\left(\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right)\times\left(\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{2c}\right)$: luego $4cczz=((a+c+b)(a+c-b))((b+c-a)$

$(b-c+a))$, ó $4c^2z^2=(a+c+b)(a+b+c-2b)$ $(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)$: y llamando $2s$ la suma de los tres lados $a+b+c$, $4c^2z^2=$ $2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)=16s(s-a)$ $(s-b)(s-c)$; donde partiendo por 16, reduciendo y sacando la raiz, resulta $\frac{1}{2}(cz)=$ $\sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$; y como $\frac{1}{2}(cz)=$ $\frac{1}{2}BC\times AD$ es la superficie del triángulo ABC (436), se encontrará esta quando se conocen sus lados, *restando sucesivamente cada uno de su semisuma, multiplicando las restas entre sí y por la semisuma, y sacando despues la raiz cuadrada del producto*. Vease pues, quántas cosas puede contener una equacion ademas de la que se busca.

590 6.° *Desde un punto* B (fig. 144) *cuya situacion es conocida respecto del ángulo* FCO, *tirar una recta que corte en él un triángulo* CHD *de una superficie igual á la de un cuadrado conocido* mm. Tirese como quiera la BHD; despues las HT y BX perpendiculares á OC y BM paralela á FC; y tendremos en los triángulos semejantes MDB, CDH; BDX, HDT; MD:CD::BD:HD, BD:HD::BX:HT; luego MD:CD::BX:HT, ó llamando MC, a; BX, b; CD, x; $a+x:x::b:HT=\frac{bx}{a+x}$; y pues que $\frac{1}{2}CD\times HT$ es (436) la superficie del triángulo HCD, que ha de ser igual á mm,

se tendrá $\frac{x}{2}\times\frac{bx}{a+x}=mm$ ó $\frac{bx^2}{2(a+x)}=mm$, donde $x=\frac{mm}{b}\pm\sqrt{\left(\frac{m^4}{bb}+\frac{2amm}{b}\right)}=\frac{mm}{b}\pm\sqrt{\left(\frac{mm}{b}+2a\right)\frac{mm}{b}}$.

591 Para construir esta espresion se levantará en qualquier punto D de una linea indefinida AX (fig. 145) la perpendicular DT$=b$, sobre AD y DT, se tomarán DC, DN iguales cada una á m, y habiendo tirado TN, se trazará por C la CH paralela á TN, y será DH$=\frac{mm}{b}$ en los triángulos semejantes DTN, DCH, donde TD:CD:: DN:DH, ó $b{:}m{::}m{:}$DH$=\frac{mm}{b}$; luego será... $x=$DH$\pm\sqrt{}($DH$+2a)\times$DH. Tomese pues, BD$=2a$, tracese sobre HB un semicírculo que encuentre en P la DT, y será la cuerda PH$=\sqrt{}($DH$+2a)$DH (393): esta se pasará á HO y HA, y los dos valores de x serán AD$=$DH$+$HA$=$DH$+\sqrt{}($DH$+2a)$DH, y DO$=$HO$-$DH$=\sqrt{}($DH$+2a)$ DH$-$DH. Si se pasa el primer valor AD desde C á D (fig. 144) y se tira la BHD, será el triángulo CDH el que se pide. El 2.° valor DO que se ha de tomar en sentido negativo para que sea DH$-\sqrt{}($DH$+2a)$DH, se pasa de

C á d y con el triángulo Chd se resuelve el problema respecto del ángulo hCd igual y opuesto á HCD, como se puede ver comparando los triángulos MBd, dhC; BdX, thd.

En el caso que el punto B se hubiese dado por bajo de la CD y en el mismo ángulo MCH (fig. 146), la posicion de las BX, BM contraria á la que tenian en el caso anterior, hace negativas las a, b, y produce el valor $x = -\frac{mm}{b} \pm \sqrt{\left(-\frac{mm}{b} - 2a\right) \times -\frac{mm}{b}}$, que siendo el mismo que el anterior aunque con signos contrarios, se construye del mismo modo que él.

Si el punto B se hubiese dado por bajo de la CD (fig. 147), la BX ó b que por tener una situacion opuesta al primer caso, es $-b$, reduce la espresion á esta $x = -\frac{mm}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{mm}{b} - 2a\right)\frac{mm}{b}}$, que siendo imaginaria quando $\frac{mm}{b}$ es menor que $2a$, muestra que entonces es imposible el problema: quando $2a$ se supone menor que $\frac{mm}{b}$, resultan negativos ambos valores y pertenecen al ángulo MCh igual y opuesto á FCO dado, respecto del qual será imposible el problema. Con efecto, si despues de haber hallado como digimos (591)

$DH=\frac{mm}{b}$ (fig. 148), se toma $HB=2a$, y al semicírculo trazado sobre ella se tira la tangente DP que será (399) $\sqrt{DH\times DB}=\sqrt{\left(\frac{mm}{b}-2a\right)\frac{mm}{b}}$, y se lleva esta de D á A y á O; serán $AH=DH-AD=\frac{mm}{b}-\ldots\sqrt{\left(\frac{mm}{b}-2a\right)\frac{mm}{b}}$, y $HO=HD+DO=\frac{mm}{b}+\sqrt{\left(\frac{mm}{b}-2a\right)\frac{mm}{b}}$ los valores de x, que tomados con signos contrarios, es decir, llevados de C á D y d (fig. 147) y tirando las HBD, hBd, cortarán los triángulos HDC, hdC pedidos.

Dado el punto B dentro del ángulo HCD (fig. 149), la CM ó a que entonces resulta negativa, reduce los valores á la espresion $x=\frac{mm}{b}\pm\sqrt{\left(\frac{mm}{b}-2a\right)\frac{mm}{b}}$, la misma que la anterior sino es en los signos: y asi construida como ella, se llevarán AH, HO valores de $-x$, á D y d á la derecha de C, y darán los dos triángulos HCD, hCd que desatan la cuestion. La hemos tratado en toda su estension para que se acostumbren los Principiantes á sacar de una equacion los diferentes casos que puede encerrar.

592 Por este problema podremos facilmente 1.° *dividir un triángulo* AHQ (fig. 143) *desde un punto* B *dado dentro ó fuera de él, en dos partes que tengan entre sí una razon qualquiera* a:b. Pues si se hace $a+b$ á a como la superficie conocida del triángulo AHQ *al* 4° *término*, será este la superficie que debe tener el triángulo HCD que se pide: con que si buscando un cuadrado *mm* igual á esta superficie, tiramos desde el punto B una recta, que corte en el ángulo AHQ una superficie igual á *mm* (590), se habrá resuelto el problema.

593 2.° *Dividir desde un punto dado* K (fig. 150) *qualquier figura rectilinea* ABCDE *en dos partes* ARLB, REDCL *que tengan entre sí una razon dada.* Conocida la ABCDE con todos sus ángulos y lados, averiguarémos la superficie del triángulo AFB, cuyo lado AB, y ángulos BAF, ABF suplementos de EAB, ABC son conocidos: y siendo facil de averiguar como en el problema anterior, la superficie ARLB, porcion determinada de toda la figura; se reducirá el problema á tirar desde el punto K una recta KRL que corte en el ángulo EFC un triángulo de una superficie conocida. Lo que tambien podrá servirnos para dividir una figura en qualesquiera partes.

594 7.° *En una esfera* AHBD (fig. 151)

formada por el semicírculo ADB *al rededor del diámetro* AB, *se pregunta en qué punto será la solidez del segmento esférico* DAHED *igual á la del cono* DCH. Sea AC$=a$, AE$=x$, será CE$=a-x$: y suponiendo $r:c$ la razon del radio á la circunferencia, será la del círculo máxîmo ADBHA el 4.° término de la proporcion $r:c::a:\frac{ac}{r}$; la superficie del casco esférico DAH (479) $\frac{ac}{r}\times x$, y la solidez del sector esférico DCHA (497) $\frac{ac}{r}\times x\times\frac{1}{3}a=\frac{a^2cx}{3r}$. La del Cono DCH es el producto de su base cuyo radio es ED, multiplicada por el tercio de la altura EC (494): y como en el triángulo rectángulo EDC, ED$=\surd((DC)^2-(EC)^2)$, ó ED$=\surd(a^2-a^2+2ax-x^2)=\surd(2ax-x^2)$, si se hace $r:c::\surd(2ax-x^2):\frac{c\surd(2ax-x^2)}{r}$, será esta la expresion de la circunferencia del círculo base del cono, su superficie (439) el producto de esta circunferencia por $\frac{1}{2}$ED, mitad de su radio, ó $\frac{1}{2}\surd(2ax-x^2)\times\left(\frac{c\surd(2ax-x^2)}{r}\right)=\frac{c(2ax-x^2)}{2r}$; y la solidez del cono el producto de esta base por $\frac{1}{3}$EC, tercio de la altura, esto es, $\frac{c(2ax-x^2)}{2r} \times \frac{a-x}{3}$.

Si esta que en el caso presente debe ser la mitad de la del sector DCHA, se multiplica por 2, quedará igual á la de dicho sector: de suerte que tendremos $\frac{2c(2ax-x^2)}{2r} \times \frac{a-x}{3} = \frac{a^2cx}{3r}$, que se reduce á $x^2-3ax = -a^2$, donde $x=\frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{9}{4}a^2 - a^2)}$: espresion que se construye tomando AR$=\frac{3}{2}a$, trazando sobre ella el semicírculo, é inscribiendo en él la AT$=a$: pues siendo la TR en el triángulo rectángulo ATR, $\sqrt{((AR)^2-(AT)^2)} = \sqrt{(\frac{9}{4}a^2-a^2)}$; si se toma RE$=$TR, será AE$=AR-ER=\frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{9}{4}a^2-a^2)} = x$.

595 El otro valor $x=\frac{3}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ que por ser mayor que el diámetro $2a$, no puede pertenecer á la cuestion, resuelve esta otra: *dada la AQ dividida en tres partes iguales en B y C, encontrar en la misma direccion un punto E, tal que AC sea media proporcional entre las distancias de E á los estremos A y Q*: pues suponiendo AC, a; AE, x; se tendrá $x:a::a:3a-x$; $3ax-x^2=a^2$, y $x=\frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{2}a^2}$: y supuesta la construccion anterior, se pasará TR á E y E', puntos que satisfa-

rán la pregunta. Estos problemas cuya equacion incluye la solucion de cuestiones distintas, se llaman *concretos*, y *abstractos* aquellos que tienen tantas soluciones como valores la incognita.

596 Concluyamos esta materia previniendo á los que se egerciten en ella, que no esperen acertar desde luego con el camino mas corto de resolver y construir un problema. Entre los diferentes datos de que podemos echar mano para este efecto, los hay que conducen á equaciones mas ó menos complicadas, de inferior ó de superior grado: y por eso se deben tentar otros medios siempre que el escogido aparezca embarazoso: en la inteligencia de que la mayor parte de las expeditas y elegantes construcciones y soluciones que leemos en las obras de los mayores Geómetras, no se han conseguido antes de haber probado otras mas complicadas y trabajosas; y de consiguiente que ademas de talento, se necesita haber adquirido en este egercicio cierto tino para creerse adelantado en esta materia tan util como dificil y delicada; especialmente quando se trata de construir equaciones de grados superiores.

Construccion de las equaciones indeterminadas de 1.° y 2.° grado ó de los Lugares geométricos.

597 Todos los puntos de una linea qualquiera que no se haya tirado casualmente, han de estar situados segun cierta ley ó propiedad particular que caracterize la linea; y que reducida á equacion espresará su naturaleza. Para encontrar esta equacion por la que se puedan despues determinar todos los puntos de la linea, basta referir qualquiera de ellos á dos rectas fijas colocadas en el mismo plano que ella, y exâminar despues la razon que tienen entre sí las distancias de la linea á las otras dos.

598 Para determinar por eg. la situacion de los puntos de la linea HR (fig. 152), tomo dos rectas EL, BD que formen un ángulo qualquiera BCL, y tirando desde qualquiera punto M la MP paralela á BD; espresarán las MP, CP las distancias de HR á las BD, EL, como tambien las HS, CS; *mq*, C*q* &c. espresarán las de los puntos H, *m*. Los dos puntos A y F en que BD y EL cortan la HR, determinan esta linea, y las CA y CF, en cuya razon deberán estar todas las demas distancias CP, PM; CE, EH; C*q*, *qm* &c. á causa de la semejanza de los triángulos CAF, AMP, A*qm* &c.

599 Pero antes de pasar adelante se ha de advertir que las partes CA, CP, Cq se llaman *abscisas* y EL ege suyo; las PM, qm, EH *ordenadas* ó *aplicadas*, y la BD *ege de las ordenadas*, cada abscisa con su ordenada *coordenada*. Unas y otras son *negativas* quando caen á la izquierda de BD, si suponemos *positivas* las de la derecha, ó al contrario. Toda linea como las abscisas y ordenadas, que varía de tamaño en cada diferente punto, se llama *variable*; y *constante* la que tiene valor fijo como las CA, CF, *el radio de un círculo* &c. En lo sucesivo representarémos las ordenadas con las letras y, u, y las abscisas con x, z.

600 Esto supuesto, para determinar la situacion de los puntos de la HR, colocando el principio ú *origen* de las abscisas en A, y haciendo CA$=a$, CF$=b$, AP$=x$, PM$=y$; tendremos en los triángulos semejantes CAF, APM, CA:CF::AP:PM ó $a:b::x:y$; PM$=\frac{bx}{a}$, que nos dará el punto M luego que se conozca CP ó x: lo mismo se hubiera sacado de los triángulos Aqm, AHS para determinar las mq, HS. Pudieramos haber puesto el origen de las abscisas en qualquier otro punto C: en este caso CP$=x$, AP$=x-a$, y la proporcion CA:CF::AP:PM se muda en $a:b::x-a:$ PM$=y=\frac{bx-ab}{a}$. En el punto m se tiene....

$Cp=x$, $Ap=CA-Cp=a-x$; y en los triángulos semejantes Apm', ACF, es AC:CF:: $Ap:pm'$, ó $a:b::a-x:y=\frac{ab-bx}{a}$ espresion idéntica con la anterior, sino es en los signos; por ser negativa la pm' que cae bajo de la EL: luego dicha equacion será la propia de la linea HR, pues que representa todos sus puntos.

601 En el punto en que comienzan las abscisas, es decir en su origen, es $x=o$ ó no hay abscisa: como tambien $y=o$ en el punto A en que no hay ordenada, por pasar por él la HR. Luego si suponiendo $y=o$ en una equacion, resultase $x=o$ ó al contrario, pasará la linea á que pertenece, por el origen: pero si suponiendo $x=o$ resultase algun valor de y, determinará este en el ege de las ordenadas el punto por donde pasa la linea: y si haciendo $y=o$ tuviese x algun valor, se conocerá por él el punto en que la linea corta el ege de las abscisas. En la equacion $y=\frac{bx}{a}$ resulta $y=o$, $x=o$ en la suposicion de ser cero qualquiera de ellos, prueba de que HR pasa por el origen A: pero si en $y=\frac{bx-ab}{a}$ se hace $y=o$, se tendrá $x=a=CA$, á cuya distancia del origen C, pasa la HR; y haciendo $x=o$, resulta $y=-b=CF$, distancia á que pasa de C la HR.

602 Las equaciones de esta forma $y = \frac{cx}{b} + p$ pertenecen á lineas rectas que se llaman de 1.r *grado* por resolver con su interseccion los problemas de 1.r grado: lineas de 2.° grado ó curvas de 1.° son el círculo y las secciones cónicas, *Parábola*, *Elipse* é *Hipérbola* cuyas equaciones son de 2.° grado, y resuelven los problemas de este género, por medio de una recta que corte qualquiera de dichas curvas. Las equaciones de 3.° 4.° y demas grados superiores resuelven problemas superiores por medio de curvas de orden superior al 2.°, de las que se llaman *algébricas* ó *geométricas* aquellas cuyas abscisas y ordenadas son lineas cuyo valor puede sacarse geométricamente, y *trascendentes* ó *mecanicas* aquellas cuyas abscisas y ordenadas son arcos de círculo, ó senos, tangentes &c. Las que en su descripcion guardan cierta ley, se llaman *lugares geométricos*, por quanto todos sus puntos subministran soluciones á los problemas geométricos indeterminados. La semiperiferia del círculo por eg. es el lugar geométrico de los vértices de todos los triángulos rectángulos que pueden tener su diámetro por hipotenusa (324). Nosotros nos tenemos que ceñir en esta vasta é intrincada materia á lo dicho sobre las equaciones indeterminadas de 1.r grado, y en quanto á las de 2.° trata-

rémos analiticamente de las principales propiedades del círculo y de las tres secciones cónicas.

603 Supongamos pues, que todos los puntos de la circunferencia AMNBnm (fig. 153) se refieran á las dos lineas DR ege de las ordenadas, y AB ege de las abscisas, y que poniendo su origen en A, se trate de espresar en una equacion la relacion de las coordenadas AP, PM; Ap, pN &c. tomando de A á B las abscisas positivas, de A á E las negativas, de A á D las ordenadas positivas, y de A á R las negativas. Hagamos $PM=y$ el radio $AC=a$, $AP=x$; será $PB=AB-AP=2a-x$: y pues que dejamos demostrado (391) de qualquier punto M del círculo que AP: PM::PM:PB, tendremos poniendo sus valores, $x:y::y:2a-x$, y de consiguiente $y^2=2ax-x^2$, ó $y=\pm\surd(2ax-x^2)$, equacion que se busca, y que manifiesta que á cada abscisa $AP=x$ corresponden dos valores de y, PM y Pm: de suerte que la curva tendrá dos ramos AMNB, AmnB.

604 Si dada la equacion se nos pidiese describir por ella el círculo; supondríamos desde luego $x=o$, y por el resultado $y=o$ conoceremos que la circunferencia pasa por el origen A: haciendo despues $y=o$, resulta $x^2=2ax$ ó $x^2-2ax=o$, equacion en que $x=o$, $x=2a=AB$, y que da los puntos A y B por

donde pasa la curva. Para determinar los demas se darán diferentes valores á x, y de cada uno resultarán dos de y, uno positivo y otro negativo. Si fuese por eg. $AP=x=2$ en la suposicion de valer a, 5; $y=\pm\sqrt{16}=\pm 4$ determinaría la longitud de PM y Pm, y de consiguiente los puntos M, m de la circunferencia, que no puede pasar de B; pues si se supone x mayor que $2a$, saldrá la cantidad $2ax-x^2=(2a-x)x$ negativa, y la y imaginaría ó imposible (155).

605 Las principales propiedades del círculo se sacan facilmente de su equacion $y^2=2ax-x^2$. Comenzemos por los triángulos rectángulos MPC, AQC: en el primero se tiene $(MC)^2=(MP)^2+(CP)^2$ ó $(CM)^2=2ax-x^2+a^2-2ax+x^2$, poniendo por $(MP)^2$, $2ax-x^2$; y por $(CP^2$, $(a-x)^2$; reduzcase, y se tendrá $CM=a$, ó *todos los radios iguales*. En el otro triángulo AQC, donde $(AQ)^2=(QC)^2+(AC)^2=y^2+x^2$, se tiene poniendo $2ax-x^2$ en lugar de y^2, $(AQ)^2=2ax$; luego $x:AQ::AQ:2a$ propiedad demostrada (393).

606 Cada una de las cuerdas ZB, QB vale $2a^2$ en los triángulos rectángulos QCB, ZCB; de consiguiente 1.° $(QB)^2+(ZB)^2=4a^2=(QZ)^2$; es decir, que será recto el ángulo QBZ (324). 2.° En el quadrilátero AQBZ el producto de las dos diagonales

$QZ \times AB = 4a^2$ es igual á $AQ \times BZ + AZ \times BQ = 4a^2$.

607 Si el origen de las abscisas se hubiera colocado en el centro C, haciendo CP, x; se hubiera sacado del triángulo rectángulo CPM, $(PM)^2 = (CM)^2 - (PC)^2$, ó $y^2 = a^2 - x^2$, otra equacion al círculo que incluye la proporcion $a - x : y :: y : a + x$, ó $AP : PM :: PM : PB$ de donde se sacó la primera (603).

608 Tambien pudiera haberse puesto el origen de las abscisas en qualquier otro punto T; en cuyo caso tirados los eges TX de las abscisas y GS de las ordenadas, bajadas perpendicularmente desde el centro á una y otra las $CE = c$, y $CK = b$; serán $MU = GT = y$, y $MG = UT = x$ las coordenadas de un punto qualquiera M de la circunferencia; las coordenadas del punto N son $NO = YT = x$, y $NY = TO = y$ &c La equacion que represente la relacion de estas lineas, se saca facilmente del triángulo rectángulo MPC, donde $(CM)^2 = (PM)^2 + (PC)^2$; pues siendo $MC = a$, $MP = MU + UP = y + b$, y $PC = EC - EP = c - x$, tendremos $a^2 = y^2 + 2by + b^2 + c^2 - 2cx + x^2$, y de consiguiente $y = -b \pm \sqrt{(a^2 - x^2 + 2cx - c^2)}$: nueva equacion al círculo del mismo grado que las anteriores.

609 Hayase de construir por último la curva cuya equacion es $y^2 = x^2 - a^2$: suponiendo $y = o$, resulta $x = \pm a$: de consiguien-

te tomando en el punto A de una recta indeterminada BD (fig. 154) el principio de las abscisas, y las partes AS, As iguales á a; deberá pasar la curva por S, s. La equacion $y = \pm\sqrt{(x^2 - a^2)} = \pm\sqrt{((x+a)(x-a))}$ manifiesta que tomando las abscisas positivas ácia D, corresponden á cada AP $= x$, dos valores iguales PM, Pm, uno positivo y otro negativo; es decir, que la curva tendrá dos ramos SM, Sm iguales é infinitos. Otros dos iguales y opuestos á los primeros se sacan de la equacion $y = \pm\sqrt{((-x+a)(-x-a))}$ que resulta de tomar las abscisas ácia B ó negativamente: pero en uno y en otro caso ha de ser x mayor que a para que el radical no sea imaginario, é imposible su valor; pues que entre S y s no hay curva.

De las Secciones Cónicas, Parábola, Elipse é Hipérbola.

610 Si una recta indeterminada AR (fig. 155) fija en el punto G, recorre las dos circunferencias DmAm', RNQn, habrá formado dos superficies cónicas opuestas AGD, GRQ, que pueden ser menores ó mayores hasta el infinito; de cuyas diferentes secciones por un plano resultan las que se llaman *secciones cónicas*. La seccion de un plano que por el punto G cortase perpendicularmente qualquiera de dichos conos, sería un triángulo

GDA: será un círculo EMFM', siempre que el plano corte el cono GDA, formando el mismo ángulo con los lados GD, GA, ó paralelamente á la base. Si el plano pasa por B*b* (fig. 156) cortando los lados GA, GR con diferentes ángulos, resulta una seccion BM*mb*, que se llama *Elipse*. Será una *Parábola* BM*mm'* (fig. 157) quando el plano secante sea paralelo á uno de los lados GC del cono: y últimamente, si dejando de ser paralelo, cortase uno y otro cono (fig. 155) trazará las superficies BM*mm'*, *b*N*n* que se llaman *Hipérbolas*.

611 En la parábola B*mm'* (fig. 157) en la que la B*p* se llama *ege*, el punto B *vértice* y origen de las abscisas, las PM, *pm ordenadas* y las BP, B*p* abscisas, *los cuadrados de las ordenadas estan en la misma razon que sus abscisas*, ó $(PM)^2:(pm)^2::BP:Bp$. Porque si corta al cono el plano circular FME paralelamente á la base, y á estos dos planos paralelos los corta el triángular GDC, serán paralelas las comunes secciones FE, DC (433), y por lo mismo serán tambien paralelas las MP, *mp* secciones comunes de dichos planos paralelos, cortados por B*mm'*: luego siendo por la naturaleza del círculo (391) $(MP)^2 = EP \times PF$, $(mp)^2 = Dp \times Cp = Dp \times PE$, por ser $PE = Cp$ (353), tendremos $(MP)^2 : (mp)^2 :: FP \times PE : Dp \times PE :: FP : Dp$; y pues que

FP:Dp::BP:Bp en los triángulos semejantes BPF, BpD, será finalmente $(MP)^2:(mp)^2$:: BP:Bp.

612 En la elipse (fig. 156) supuesto que los planos AGR, BMb cortan los paralelos EMF, CmD, se tiene en los triángulos semejantes BPF, BpD; bEp, bCp, BP:Bp::PF:pD, bP:bp::EP:Cp; luego será, multiplicando estas proporciones, BP×bP:Bp×bp::PF×EP:pD×Cp: y pues que en los círculos EMF, CmD, $(PM)^2$=PF×EP, $(pm)^2$=Dp×Cp; se tendrá BP×bP:Bp×bp::$(PM)^2:(pm)^2$: es decir, *los cuadrados de las ordenadas* PM, pm, *son en la Elipse como el producto de las partes* BP, bP; Bp, bp *que cortan en el egè* Bb, *que llamarémos* abscisas.

613 Lo mismo se saca en la hipérbola (fig. 155) de los triángulos BEP, BDp; bPF, bpA, donde BP:Bp::EP:Dp, bP:bp::PF:pA; y de consiguiente, BP×bP:Bp×bp::EP×PF:Dp×pA, ó poniendo por EP×PF, Dp×pA sus iguales $(PM)^2$, $(pm)^2$: con la diferencia de que las abscisas BP, bP; Bp, bp se toman para cada ordenada de distinto lado que en la elipse.

Pero para que conozcamos mejor las utilísimas propiedades de estas tres curvas de que se hace un uso continuo y general en todos los ramos de física y matemáticas, hablarémos de cada una en particular considerándolas descritas en un plano.

Parábola.

614 Es la parábola una curva cuyos puntos M, N, *n*, *m* (fig. 158) distan todos igualmente de una linea fija BD que se llama *directriz*, y de un punto F que se llama *focus*, distante siempre del vértice S de la quarta parte de una linea *p* conocida con el nombre de *parámetro*; de manera que si en el punto O de una escuadra OGB, y en qualquier otro F se fijan los estremos de un hilo OMF igual en longitud á OG, y se mueve la escuadra ácia E llevando tirante el hilo con un lapiz M; la linea MNS que describa el lapiz, y la otra mitad S*nm* que trace del mismo modo del otro lado de la EH, será una parábola; pues en qualquiera de sus puntos M se verifica que siendo OG=OMF, es MF=MG, quitando MO comun; y por lo mismo $SF=SE=\frac{1}{4}p$.

615 La recta MF tirada desde qualquier punto M de la parábola al focus, se llama *radio vector*; y si se tira desde M la ordenada $MP=y$, siendo $SP=x$, será siempre $MF=MG=EP=RS+SE=x+\frac{1}{4}p$. Luego si habiendo escogido en la linea SH que ha de ser ege de la parábola, el punto S para vértice, y tomado $SF=SE=\frac{1}{4}p$ para señalar el focus F; si despues de haber tirado perpendiculares indefinidas á todos los puntos P del

ege, se trazan desde F con el intervalo de cada PE dos arcos a un lado y otro de la SH, se determinarán de cada vez dos puntos M, *m* de la curva, que se describirá facilmente, determinando asi los demas: pues en tal caso cada FM será igual á la distancia EP ó GM.

616 En el triángulo rectángulo FMP, en el que $(PM)^2=(FM)^2-(FP)^2$, será poniendo en lugar de PM, FM, FP, sus valores y, $x+\frac{1}{4}p$, $x-\frac{1}{4}p$; $yy=xx+\frac{2}{4}px+\frac{1}{16}pp-xx+\frac{2}{4}px-\frac{1}{16}pp$, que se reduce á $yy=px$, ó $y=\pm\sqrt{px}$: equacion á la parábola. que comparada con $YY=pX$ de otra qualquier ordenada Y, cuya abscisa sea X, da $yy:YY:pX::x:X$ segun lo demostramos ya (611).

617 Si hacemos en ella $x=o$ ó $y=o$, veremos que pasa la curva por el origen S, sin que se estienda mas allá; pues resulta imaginaria la $y=\pm\sqrt{-px}$, tomando á x negativa. Y como á cada x corresponden dos valores iguales de y, que crecen á proporcion que es mayor x; tendrá la parábola dos ramos iguales é infinitos; cuyos puntos podrán determinarse dando á x diferentes valores, y sacando en cada uno los que corresponden á y.

618 De $yy=px$ se saca $x:y::y:p$, esto es, *que cada ordenada es media proporcional entre su abscisa y el parámetro, y este tercera proporcional á qualquier abscisa y su ordenada.* Dicho parámetro es tambien la doble

ordenada Nn que pasa por el focus; pues siendo la abscisa $SF=\frac{1}{4}p$, será $(NF)^2=yy=px=\frac{1}{4}pp$, y $NF=\sqrt{\frac{1}{4}pp}=\frac{1}{2}p$; luego $Nn=p$. Si á una cuerda qualquiera SL (fig. 159) e levanta la perpendicular LQ, será RQ el parámetro de la parábola: pues en el triangulo rectángulo SLQ, $SR:RL::RL:RQ$, ó $x:y::y:RQ=p$.

619 *Para tirar una tangente á un punto* M *de la parábola* (fig. 158); tiradas las MG, MF y la GF, la MT perpendicular á GF será la tangente; pues de qualquier otro punto Z que no sea M, se probará que está fuera de la curva: para esto tirense ZF al focus, ZB perpendicular á la directriz y ZG, y se verá que siendo ZB menor que ZG (285) ó que su igual ZF, Z no está en la parábola (614). Si á la tangente MT se levanta en el punto M la perpendicular ó *normal* MR, la parte TP de ege comprendida entre la tangente y la ordenada MP, se llama *subtangente*, y la PR comprendida entre la ordenada MP y la normal, se llama *subnormal*.

620 Siendo iguales los ángulos GMT, TMF (337), y GMT=ZMO, será ZMO=TMF: ZMO se llama ángulo *de la incidencia*, y TMF *de la reflexion*. Tambien por razon de las paralelas GM, TF, y por ser $GC=CF$, serán iguales y semejantes los

triángulos GCM, TCF (345 y 386): y de consiguiente $MG=TF=FM$, y en el triángulo isósceles MFT la FC perpendicular á la tangente la dividirá por medio.

621 De $FM=FT=x+\frac{1}{4}p$ se saca $TP=TF+FP=x+\frac{1}{4}p+x-\frac{1}{4}p=2x$, ó *la subtangente* PT *dupla de su abscisa* SP; y de consiguiente, será $SP=ST$. Luego 1.° el paralelogramo MKSP (fig. 159) es igual al triángulo MPT que tiene doble altura que él (351). 2.° Para tirar una tangente al punto M de la parábola (fig. 158) se bajará la perpendicular MP, y haciendo $ST=SP$, se tirará por T y M la TM.

622 3.° *Las perpendiculares* FC *bajadas desde el focus á la tangente, son como las raices cuadradas de los radios vectores*: pues siendo $TC=CM$ porque $TC:CM::TS:SP$, y $TS=SP$; caerá C en donde SC corta la TM, y en el triángulo rectángulo CTF, será $TF:FC::FC:FS$, y $(FC)^2=TF\times FS=FM\times\frac{1}{4}p$; en otro punto M′ se tendria tambien $(FC')^2=FM'\times\frac{1}{4}p$; luego $(FC)^2:(FC')^2::FM\times\frac{1}{4}p:FM'\times\frac{1}{4}p$, y $FC:FC'::\sqrt{FM}:\sqrt{FM'}$.

623 4.° En el triángulo rectángulo RMT se tiene (391) $PT:PM::PM:PR=\frac{(PM)^2}{PT}=\frac{px}{2x}=\frac{1}{2}p$; es decir *que la subnormal es la mitad del parámetro*. La normal MR=........

$\sqrt{((MP)^2+(PR)^2)}=\sqrt{(px+\frac{1}{4}pp)}=\sqrt{MF\times p}$ en el triángulo rectángulo MPR: y del TMP tambien rectángulo se saca la tangente $TM=\sqrt{(PM)^2+(PT)^2}=\sqrt{(px+4x^2)}=\sqrt{4MF\times x}$.

624 Qualquiera recta MO paralela al ege SH se llama *diámetro*, cuyas ordenadas son $m'p'$ paralelas á TM, tangente en el punto M del diámetro: su parámetro (q) es tambien cuadruplo de la distancia FM de su vértice al focus; de manera que $q=4MF=p+4x$, y de consiguiente tercera proporcional á la abscisa y tangente que corresponden al punto M; pues es $\div x : tang. = \sqrt{(px+4x^2)} : p+4x=q$.

625 Llamando la abscisa Mu, z (fig. 159) y u la ordenada lu, tendremos en los triángulos lpn, MPT, $MT:lp::MP:ln::TP:pn$, ó $\sqrt{qx}:u+\sqrt{qx}::\sqrt{px}:ln=\frac{u+\sqrt{px}}{\sqrt{qx}}+\ldots$ $\sqrt{px}::2x:pn=\frac{2ux}{\sqrt{qx}}+2x$: y como $Sp=Tp-TS=z-x$, será $Sn=Sp+pn=z+x+\frac{2ux}{\sqrt{qx}}$. La propiedad de la parábola nos da (616), $(ln)^2=p\times Sn$ ó $(\sqrt{px}+\frac{u\sqrt{px}}{\sqrt{qx}})^2=pz+px+\frac{2xpu}{\sqrt{qx}}$: haganse las operaciones y reduccio-

nes necesarias, y se tendrá $u^2=qx$, equacion á la parábola respecto de sus diámetros, en todo semejante á la del ege, y de la que se sacará como en ella *que los cuadrados de las ordenadas son como las abscisas; que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales* &c.

626 Si se pidiese trazar una parábola, cuyas ordenadas formen un ángulo conocido con un diámetro dado MO (fig. 158), cuyo parámetro q se dé tambien; se tirará por el vértice M del diámetro la recta ZMT que forme con él un ángulo OMZ igual al dado, se hará despues el ángulo TMF=ZMO, y tomando MF$=\frac{1}{4}q$, se tendrá el focus F por donde se tirará la HT paralela á MO que será el ege: bajesele la perpendicular MP, y dividiendo PT por medio, se tendrá el vértice S con el que y el focus se trazará la parábola (615).

627 Si se tiran (fig. 159) la ordenada mp infinitamente próxima á PM y las MK,rt paralelas á TP; se tendrá en los triángulos TMP, roM, TP:PM::rM:ro=Pp, ó poniendo por TP su igual $2sp$, ó 2KM, 2KM:PM::rM:Pp; y de consiguiente PM×rM=2KM×Pp, ó el paralelogramo PpMm duplo del rMKt: y como se puede probar otro tanto de qualquiera de los paralelogramos de que se compone la superficie de la parábola, será

qualquier espacio parabólico SPM duplo del espacio esterior SoMK ; y de consiguiente será los dos tercios del rectángulo SPMK: los triángulos *omM*, *ro*M se desprecian en el cálculo por infinitamente pequeños (686). Solo en el caso que las abscisas tengan como en la parábola una relacion constante con la subtangente podrán cuadrarse exâctamente las curvas.

Elipse.

628 La propiedad que caracteriza esta curva es que la suma de las distancias FM+*f*M (fig. 160) de qualquiera de sus puntos M á los dos F, *f* que se llaman sus *focus*, es igual á la linea S*s* su *ege mayor* : de manera que si clavados en F, *f* los estremos de un hilo FM*f*, mas largo que F*f*, se le lleva estirado con un lapiz al rededor de dichos puntos, resultará descrita una elipse. En ella llamarémos *ege menor* la B*b* perpendicular al punto C mitad de S*s* y *centro* de la elipse: á las CF, C*f* *excentricidad*: las MP *ordenadas* y SP, *s*P *abscisas* del ege mayor S*s*; M*p*, B*p*, *bp* *ordenadas* y *abscisas* del ege menor B*b*, y las FM, *f*M *radios vectores*. Ultimamente la TX es *tangente* (fig. 161), la MR *normal*, PR *subnormal* y PT *subtangente*, correspondientes al punto M de la elipse.

629 La estension del hilo en el punto S

(fig. 160) es $2SF+Ff$, y en s, $2sf+Ff$; luego $2SF+Ff=2sf+Ff$; y de consiguiente $SF=sf$, $CF=Cf$. De lo que se infiere 1.° que el punto b de la perpendicular Cb debe estar á igual distancia de F y f (284) como lo está C, ó $Fb=fb=SC$ mitad de Ss; y el *ege menor se dividirá por medio* en C á causa de los triángulos rectangulos iguales fCB, fCb. 2.° Un arco descrito desde b con el radio CS, cortará la Ss en los puntos F, f que serán los focus: de suerte que será facil trazar la elipse dados los dos eges; pues determinados sus focus se practicará despues lo que digimos (628).

630 Llamemos ya Ss, $2a$; Bb, $2b$; $CF=Cf$, c; PM, y; CP, x: será $PS=SC-CP$, $a-x$; $Ps=sC+CP$, $a+x$; $PF=CF-CP$, $c-x$; $Pf=fC+CP$, $c+x$; $SF=SC-CF$, $a-c$; y $Fs=a+c$, y en el triángulo rectángulo FbC tendremos $(Fb)^2=(FC)^2+(Cb)^2$ ó $aa=cc+bb$; de donde se saca $cc=aa-bb$, y $bb=aa-cc$; luego $a+c:b::b:a-c$, ó $\div Fs:Cb:FS$; esto es, *el semi-ege menor* Cb *medio proporcional entre las distancias* Fs,FS *de los vértices á uno de los focus.*

631 Esto supuesto, en el triángulo FMf es (539) $FM+Mf(2a):Ff(2c)::fP-PF(2x)$: $fM-FM=\frac{4cx}{2a}=\frac{2cx}{a}$. Con esta diferencia, y la suma $2a$ de FM y fM, sacaremos (238)

$FM = a - \frac{cx}{a}$: y en el triángulo rectangulo PMF será $(PM)^2 = (FM)^2 - (PF)^2$, ó $yy = aa - 2cx + \frac{ccxx}{aa} - cc + 2cx - xx$, que se reduce poniendo $aa - bb$ en lugar de cc (630), á $yy = bb - \frac{bbxx}{aa} = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$: equacion á la elipse; en la que por ser $y = \pm \frac{a}{b}\sqrt{(aa-xx)}$ corresponderán á cada abscisa CP dos ordenadas iguales una positiva y otra negativa, que se determinarán conociendo á x, y podrá trazarse por este medio la elipse: á la que siempre divide por medio el ege mayor.

632 Si el origen de las abscisas se coloca en S, haciendo $SP = x$, $SF = sf = c$; $SP \times Ps$ que antes era $(a-x)(a+x)$, será $x \times (2a - x)$: pongase este producto en la equacion anterior en lugar de $aa - xx$, y se reducirá á $yy = \frac{bb}{aa} \times (2ax - xx)$, equacion en la que suponiendo $y = o$, resulta $xx - 2ax = o$, donde $x = o$ y $x = 2a$, es decir, que la curva pasa por S en que $x = o$, y por s en que $x = Ss = 2a$.

633 Tambien se verificará de otra qualquier ordenada $M'P'$ (Y), cuya abscisa SP' sea X, $YY = \frac{bb}{aa} \times (aa - XX)$: de consiguiente, será $yy : YY :: \frac{bb}{aa} \times (aa - xx) : \frac{bb}{aa} \times (aa - ..$

XX)$::aa-xx:aa-XX$, ó $(PM)^2:(M'P')^2::$ $SP\times Ps:SP'\times P's$ como lo digimos (612). Tambien de $yy=\frac{bb}{aa}\times(aa-xx)$ se saca $yy:aa-xx::bb:aa$; y si en lugar de bb ponemos su igual $aa-cc$, resultará $yy:aa-xx::aa-cc:aa$ ó $(PM)^2:SP\times Ps::SF\times Fs:(SC)^2$.

634 Siendo $Mp=PC=x$, $Cp=PM=y$, y de consiguiente $bp=y+b$, y $Bp=b-y$, será la equacion al ege menor de la elipse despejando xx en $y^2=bb-\frac{bbxx}{aa}$ (631), $xx=aa-\frac{aayy}{bb}=\frac{aa}{bb}\times(bb-yy)$, la misma respectivamente que la del ege mayor, y de la que se deducen las mismas consecuencias que de aquella.

635 Trazado un círculo sobre el ege mayor Ss (fig. 161) si en la proporcion $(PM)^2:SP\times Ps::(BC)^2:(SC)^2$ (633), ponemos en lugar de $SP\times Ps$ su igual $(PH)^2$ (391), tendremos $(PM)^2:(PH)^2::(BC)^2:(SC)^2$, y $PM:PH::BC:SC$, ó las ordenadas del ege mayor á las ordenadas de su círculo, como el ege menor al mayor; luego *todas las ordenadas de la elipse, esto es, su superficie es á la de dicho círculo, como el ege menor al mayor*. Del mismo modo se prueba que *la superficie de la elipse es á la del círculo trazado sobre el ege menor, como el ege mayor es al menor*. Supo-

niendo $1:c$ la razon del diámetro á la circunferencia, será aac la superficie del círculo SAsa, y abc la de la elipse, haciendo $a:b::aac:abc$, la qual *es igual á la de un círculo cuyo diámetro es* $\sqrt{4ab}$, *esto es, medio proporcional entre sus eges.* Esto prueba que el círculo es una elipse de eges iguales con el focus en el centro, y el diámetro por parámetro. Con efecto, qualquiera de las suposiciones $2b=2a$, $SF=\frac{1}{2}a$ ó $p=2a$ convierte las equaciones halladas en las del círculo $y^2=2ax-xx$, $y^2=aa-xx$ (603).

636 Llamarémos *parámetro* p del 1.er ege una tercera proporcional á él y al 2.° ege; de suerte que sea $2a:2b::2b:p=\frac{4b^2}{2a}$: éste siempre es igual á la nn' doble ordenada al focus; pues como la abscisa $CF=c$ (fig. 160), si en $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$, ponemos c en lugar de x, y despues $aa-bb$ en lugar de cc, tendremos $(nF)^2=\frac{b^4}{aa}$ y $nF=\frac{bb}{a}$: luego $nn'=\frac{2bb}{a}=\frac{4bb}{2a}=p$. Atendiendo á la analogía de las equaciones del ege mayor y menor, será el parámetro de este $q=\frac{4aa}{2b}$: de suerte que sea $2b:2a::2a:q$.

637 De $p = \frac{2bb}{a}$ se saca $bb = \frac{ap}{2}$: pongase este valor en lugar de bb en las equaciones al 1.r ege, y las reducirá á estas $yy = \frac{p}{2a}(2ax - xx)$, $yy = \frac{ap}{2}(aa - xx)$ que son las del parámetro del 1.r ege. Del mismo modo se reduce la del 2.° ege $xx = \frac{aa}{bb}(bb - yy)$ á $xx = \frac{q}{2b}(bb - yy)$. De las de ambos eges se saca $yy : aa - xx :: p : 2a$, $xx : bb - yy :: q : 2b$, ó *el cuadrado de la ordenada al producto de sus abscisas, como el parámetro á su ege.*

638 *Para tirar una tangente á la elipse en un punto* M; se alarga la fM hasta que sea MH=MF, ó fH=Ss, se tira la HF, y la perpendicular TX que la divide por medio, es la tangente al punto M, el único en que toca la curva; pues si qualquier otro O perteneciese á ella, las OF, y Of serían iguales (628) á FM+fM ó á fH, lo que es falso; por ser OF+Of ó OH+Of mayores que fH. El ángulo XMf es igual á TMF, por ser TMF=HMK, y este á su vertical XMf.

639 Tirada la normal MR (fig. 161), si de los ángulos rectos XMR, RMT se quitan los iguales XMf, TMF (638), resultarán

iguales los ángulos RMf, RMF, y será (377) fM:MF::fR:RF, ó (177) fM+MF$(2a)$:MF $\left(a-\frac{cx}{a}\right)$(631)::$f$R+RF$(2c)$:RF$=c-\frac{ccx}{aa}=c-x+\frac{bbx}{aa}$, poniendo $aa-bb$ en lugar de cc: *luego la subnormal* PR$=$FR+FP$=c-x+\frac{bbx}{aa}+x-c=\frac{bbx}{aa}=\frac{px}{2a}$ (637). Si contando las abscisas desde el vértice se supone SP$=u$, será $x=a-u$, y poniendo este valor en lugar de x, será PR$=\frac{bb}{a}-\frac{bbu}{aa}=\frac{1}{2}p-\frac{pu}{2a}$.

640 En el triángulo rectángulo RMT se tiene (391) la subtangente PT$=\frac{(PM)^2}{PR}=$

$$\frac{\frac{bb}{aa}(aa-xx)}{\frac{bb}{aa}x}=\frac{aa-xx}{aa}=\frac{2au-uu}{a-u}$$ poniendo por x, $a-u$. De consiguiente CT$=$CP+PT$=x+\frac{aa-xx}{x}=\frac{aa}{x}$, ST$=CT-CS=\frac{aa}{x}-a=\frac{aa-ax}{x}$. De CT$=\frac{aa}{x}$ se saca $x:a::a:$CT, ó ∺ CP:CS:CT, por donde se podrá determinar el punto T de la tangente TM. Ultimamente la espresion de la normal se saca del triángulo rectángulo MRP en el que

$MR = \sqrt{\left(yy + \frac{b^4xx}{a^4}\right)} = \sqrt{\left(bb - \frac{bbxx}{a^4} - (aa - bb)\right)} = b\sqrt{\left(1 - \frac{ccxx}{a^4}\right)}$: y la de la tangente TM del triángulo MPT tambien rectángulo.

641 *Diámetro* de la elipse es una recta MN (fig. 160) que pasa por el centro, y se termina por ambos cabos en la curva: y *diámetro conjugado* al MN la RZ paralela á TM tangente al punto M de MN: las LQ paralelas á la tangente TM, son sus ordenadas y NQ, QM abscisas; y parámetro de qualquier diámetro una tercera proporcional á dicho diámetro y á su conjugado.

642 *El triángulo* tmP (fig. 162) *formado por la tangente, subtangente y ordenada de una elipse, es igual al trapecio* Pmks *que forman la ordenada, la tangente al vértice y una recta que pasa por el centro y el punto* t. Porque en los triángulos semejantes C*Pm*, C*sk*, es $Pm:sk::CP:Cs::Cs:Ct$ (640): luego $Cs:Ct::Pm:sk$, y $Cs \times sk = Pm \times Ct$, $\frac{1}{2}(Cs \times sk) = \frac{1}{2}(Pm \times Ct)$ superficies iguales de los triángulos C*mt*, C*sk*; quitese de ambos la parte comun PmC, y resultará *tm*P=P*mks*.

643 De aqui se infiere, que *el triángulo* qlr *que forman* lq *ordenada al ege*, lo *ordenada al diametro* Mm *terminada en el ege, y su parte* qr *comprendida, es siempre igual al*

trapecio hqsk *correspondiente*: pues sacándose de los triángulos semejantes *Pmt*, *qlr*, $Pmt:qlr::(Pm)^2:(ql)^2$ (455) $::(Cs)^2-(CP)^2:(Cs)^2-(Cq)^2$ (177) $::Pmks:qhks$ diferencias de los triángulos semejantes *Cks*, *CPm*; *Cks*, *Cqh* que están en la misma razon que las diferencias de los cuadrados de sus lados homólogos *Cs*, *CP*, *Cq*; será $Pmt:qlr::Pmks:qhks$; y como $Pmt=Pmks$ (642), tendremos tambien $qlr=skhq=qhmt$ quitando *Pmks* y añadiendo su igual *Pmt*. De consiguiente el triángulo *loh* será igual al trapecio correspondiente *mort*; pues si de $qlr=qhmt$ se quita *qhor* comun, queda $loh=mort$. Tambien será $CND=Cmt$; pues quando *lr* se concibe bajar paralelamente á ser *CN*, la *lh* que se ha de terminar en el diámetro *mM* alargado si es menester, vendrá á ser *ND*: y siendo $CND=Cnd$ por la simetría de la elipse cuyos puntos *M*, *m*, *N*, *n* deben estar semejantemente situados; será $Cnd=Cmt$.

644 Esto supuesto, en los triángulos semejantes *Cmt*, *Cor* se tiene (455) $(Cm)^2:(Co)^2::Cmt:Cor$, y (177) $(Cm)^2-(Co)^2:(Cm)^2::Cmt-Cor=mort:Cmt::loh:Cdn$ (643) $::(lo)^2:(Cn)^2$ en los triángulos *Cdn*, *loh* semejantes por la igualdad de los ángulos alternos *h*, *d* que forman las paralelas *lq*, *nd*; y de *l* igual á su alterno $lQC=dnC$: luego $(Cm)^2-(Co)^2:(Cm)^2::(lo)^2:(Cn)^2$: es de-

cir, llamando á Mm, $2a$; Nn, $2b$; lo, y; mo, x; $aa-xx:aa::yy:bb$; y de consiguiente, $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$, equacion á las ordenadas de los diámetros del todo semejante á la de los eges; y de la que como de esta, se saca tambien que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales: que los diámetros dividen sus ordenadas y la elipse por medio: que $CM=Cm$, $CN=Cn$ &c.

645 *Si se bajan al ege* Ss *las ordenadas* mP, nz, *de los estremos* m, n *de los diámetros conjugados* Mm, Nn, *el cuadrado de* Cz *comprendido entre el centro y una de ellas* nz, *es igual al producto de las abscisas* PS×Ps *de la otra* mP, *ó* $(Cz)^2=PS\times Ps$. Haciendo $mP=y$, y $sP=x$, $Sz=z$, $Ss=2a$, $Bb=2b$; en los triángulos semejantes tPm, Cnz se tiene $(Cz)^2:(Pt)^2::(mP)^2:(nz)^2::PS\times Ps:zS\times zs$ (633); esto es, $PS\times Ps\,(aa-xx):zS\times zs\,(aa-zz)::(PT)^2\,\frac{(aa-xx)^2}{xx}$ (639)$:(nz)^2(zz)=\frac{(aa-zz)(aa-xx)^2}{xx(aa-xx)}$; de donde se saca $zz=aa-xx$, ó $(Cz)^2=PS\times Ps$.

646 Del mismo modo se hubiera sacado $(CP)^2=zS\times zs$, y de consiguiente si en lugar de $aa:bb::zS\times zs:(nz)^2$ (633), ponemos $aa:bb::(CP)^2(xx):(nz)^2=\frac{bbxx}{aa}$; tendremos $(Cn)^2=(Cz)^2+(nz)^2=aa-xx+\frac{bbxx}{aa}$;

y como tambien $(Cm)^2=(CP)^2+(Pm)^2=$ $xx+bb-\frac{bbxx}{aa}$, sacarémos sumando y reduciendo, $(Cm)^2+(Cn)^2=aa+bb$; y de consiguiente *la suma de los cuadrados de los diámetros es igual á la de los eges.*

647 Siendo $nz=u$, $Sz=z$, será $uu=$ $\frac{bb}{aa}(aa-zz)$ (631); y $\frac{aauu}{bb}=aa-zz$; y como $aa-zz=(CP)^2=xx$ (645), será $\frac{aauu}{bb}=xx$, y $aauu=bbxx$ ó $au=bx$. Tírese ahora la CH perpendicular á Tl y en los triángulos semejantes Czn, CtH donde Cz: $zn(u)::Ct\left(\frac{aa}{x}\right)$ (640):CH, será $Cz\times CH=$ $\frac{u\times aa}{x}$, ó poniendo bx en lugar de au, $Cz\times CH=$ ab; es decir, *que es igual el paralelógramo formado de los semieges á el de los semidiámetros, y de consiguiente el de los eges á el de los diámetros.*

648 Quando z cae en P, es $y=u$, $z=x$, y $zz=aa-xx$ viene á ser $xx=aa-xx$, ó $xx=$ $\frac{1}{2}aa=a\times\frac{1}{2}a$: que da $a:x::x:\frac{1}{2}a$: luego si se toma CP media proporcional entre a y $\frac{1}{2}a$, y se tira por P una doble ordenada, determinará esta dos puntos por los quales y el centro se pueden tirar dos diámetros iguales; pues sus mitades serán hipotenusas de los tri-

ángulos iguales CPm, CPn: y como á cada lado solo en un punto se verifica la anterior proporcion, y uno y otro dan unos mismos diámetros; no habrá en la elipse mas que dos diámetros iguales.

649 *Si dado uno de los eges y su parámetro se pidiese trazar la elipse;* se buscará una media proporcional entre los dos datos que será el otro ege (636), y se hará lo que dejamos dicho (628). Pero si se diesen dos diámetros conjugados Ss, Bb (fig. 163) que formen qualquier ángulo; se tomarán sobre la mitad CB de uno de ellos las partes iguales CE, EE' &c. y tiradas las perpendiculares CD, ED' &c. que encuentren la circunferencia de un círculo descrito desde C con el radio CB; se tirará SB y por E su paralela EP: tomense hácia s y S partes iguales á CP, y tirando despues por los puntos P, las PM iguales cada una á su correspondiente ED', quedarán determinados los puntos M por donde se ha de trazar la elipse, determinando los demas m, haciendo $Pm=PM$. Efectivamente en los triángulos semejantes CSB, CPE se tiene $CS(a):CB(b)::(CP)(x):CE=\frac{bx}{a}$; y en el triángulo rectángulo $CED'(ED')^2=(PM)^2=(CD')^2-(CE)^2$, esto es, $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$, equacion á la elipse, á la que pertenecerán los puntos M, m:

Hipérbola.

650 Es propiedad constante de esta curva que la diferencia entre las rectas FM', *f*M' (fig. 164) tiradas desde qualquiera de sus puntos M á los dos *f*, F que son los *focus*, es siempre igual á su *primer ege* S*s*: de consiguiente si habiendo fijado en *f* una regla *f*M'O mobil al rededor de dicho punto, y en su estremo O el de un hilo atado por el otro cabo en F, se voltea la regla al rededor de *f*, llevando la parte M O del hilo unida á ella, y tirante todo el hilo con un lapiz M'; señalará este la porcion SH de una hipérbola; pues la diferencia entre todas las *f*M', FM' será siempre igual á la que hay entre el hilo y la regla, y se ve que en el punto S esta diferencia es S*s*. La otra mitad SG de la curva se describe volviendo la regla hácia aquel lado: y para trazar la hipérbola *gsh* opuesta, se truecan las posiciones fijando la regla en F. El hilo ha de ser siempre desigual con la regla; pues si no, saldrían todos los puntos M' igualmente distantes de F y *f*; por ser OM'*f* =OM'F, y M'*f*=M'F quitando OM' comun, y trazaria el lapiz una linea recta.

651 *Segundo ege* de la hipérbola es una linea B*b* perpendicular al 1.° S*s*, cuya mitad CB es lado de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa SB es igual á CF, y el otro lado

CS es la mitad de Ss: las perpendiculares PM, MQ al 1.° y 2.° eges son sus ordenadas, CQ, y SP, sP, son las abscisas: las fM, FM' son los *radios vectores*. TM (fig. 165) es una *tangente*, PT la *subtangente*, MR y PR la *normal* y *subnormal* correspondientes al punto M. Ultimamente la recta MCM' (fig. 170) que pasando por el *centro* C corta las hipérbolas opuestas, se llama *diámetro*, y su *conjugado* será la DCd paralela á la tangente Tt al punto M del 1.r diámetro, cuyas coordenadas son mQ y CQ.

652 Esto supuesto, si se hace $Ss=2a$, (fig. 164) $Bb=2b$, $CF=Cf=c$, $CP=x$, y $PM=y$; será $SP=CP-CS=x-a$, $sP=sC+CP=x+a$, y $SP\times sP=(x-a)(x+a)=xx-aa$. Tambien será $PF=CP-CF=x-c$, $Pf=PC+Cf=x+c$, y $PF\times Pf=xx-cc$: y en el triángulo rectángulo CSB tendremos $(BS)^2$ ó (651) $(CF)^2=(BC)^2+(CS)^2$ ó $cc=aa+bb$, y $bb=cc-aa=(c+a)(c-a)$: de donde se saca $c-a:b::b:c+a$ ó $\div$ SF:CB:sF; esto es, *el semiege menor medio proporcional entre las distancias de uno de los focus á los vértices.*

653 Tomese ahora $PR=FP$ y tirada la MR, se tendrá en el triángulo fMR (539) $fM-MR(2a):fP-PR(2c)::fR(2x):fM+FM=\frac{2cx}{a}$. De esta suma y la diferencia $fM-FM=2a$, se sacará (238) $fM=\frac{cx}{a}+a$,

y FM$=\frac{cx}{a}-a$, y en el triángulo rectángulo PMF, en el que $(PM)^2=(FM)^2-(PF)^2$, será $yy=\frac{ccxx}{aa}-2cx+aa-xx+2cx-cc$, poniendo $aa+bb$ en lugar de cc (652), y reduciendo, $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb=\frac{bb}{aa}(xx-aa)$, equacion á la hipérbola, diferente de la de la elipse en solos los signos (631). Si poniendo en S el origen de las abscisas, hacemos SP$=x$, SF$=sf=c$, será SP$\times$P$s=x(2a+x)=2ax+xx$: pongase este producto en lugar de $xx-aa$ en la equacion anterior, y se convertirá en $yy=\frac{bb}{aa}(2ax+xx)$.

654 De $yy=\frac{bb}{aa}(xx-aa)$ se saca $y=\frac{b}{a}\times\sqrt{(xx-aa)}$; de consiguiente, á cada abscisa CP corresponderán dos ordenadas iguales PM positiva y Pm negativa, que van siendo mayores á proporcion que es mayor x; de suerte que tendrá la curva dos ramos iguales é infinitos. Si se supone en dicha equacion $y=0$, resulta $x=\pm a=$CS$=$Cs, es decir, que la curva pasa por S y s: de suerte que tomando á x menor que a saldrá imaginaria la cantidad $\pm\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}$, ó no habrá curva entre S y s; pero si tomamos á x negativa y

mayor que a, resultarán dos valores positivos de y á cada valor de x, y comenzará en s otra curva opuesta é igual á la primera; pues tomando $CP = CP'$, será $PS \times Ps = P'S \times P's$, y de consiguiente $PM = P'm$. Ultimamente, dando diferentes valores á x podremos determinar por medio de los que resulten de y, diferentes puntos M de la hipérbola que será facil trazar por ellos.

655 Comparando las equaciones de dos diferentes ordenadas Y, y del 1.r ege, cuyas abscisas sean X, x, tendremos $YY : yy :: \ldots$ $\frac{bb}{aa}(xx - aa) : \frac{bb}{aa}(XX - aa) :: xx - aa : XX - aa$, y *los cuadrados de las ordenadas serán como el producto de sus abscisas*, como lo demostramos (613). De $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ se saca $yy : xx - aa :: bb : aa$, y poniendo $cc - aa$ en lugar de bb (652), $yy : xx - aa :: cc - aa : aa$, ó que *el cuadrado de una ordenada es al producto de sus abscisas, como el producto de las distancias de uno de los focus á los estremos del ege, es al cuadrado de la mitad de dicho ege.*

656 Pues que la abscisa $CP = x$ es igual á la ordenada MQ del 2.° ege y su abscisa CQ igual á la ordenada $PM = y$, con despejar xx en la equacion $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$; tendremos la del 2.° ege $xx = \frac{aayy}{bb} + aa$: de la

qual se saca $xx:yy+bb::aa:bb::4aa:4bb$, es decir, que *el cuadrado* $(MQ)^2$ *de una ordenada del 2.° ege es á la suma de los cuadrados* $(CQ)^2+(Cb)^2$, *como el cuadrado del 1.^r ege al del 2.°* Tambien se ve que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales una positiva y otra negativa &c.

657 Si hacemos $2a:2b::2b:p=\frac{2bb}{a}$, tendremos el parámetro del 1.^r ege que es una tercera proporcional á dicho ege y al 2.°, y es igual á la doble ordenada Nn que pasa por el focus; pues si en $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb$ ponemos c en lugar de x, y en el resultado sustituimos $aa+bb$ á cc (652), tendremos $yy=(NF)^2=\frac{b^2}{aa}$, $NF=\frac{bb}{a}$, y $Nn=\frac{2bb}{a}$. De $p=\frac{2bb}{a}$ se saca $bb=\frac{ap}{2}$, y este valor puesto en lugar de bb en las equaciones del 1.^r ege las convierte en estas $yy=\frac{p}{2a}(2ax+xx)=px+\frac{pxx}{2a}$, $yy=\frac{p}{2a}(xx-aa)=\frac{pxx}{2a}-\frac{pa}{2}$ que son las del parámetro del 1.^r ege, y de las que se infiere que $yy:xx-aa::p:2a$ ó *el cuadrado de una ordenada al 1.^r ege al producto de sus abscisas, como su parámetro á dicho ege.*

658 Tambien $q=\frac{2aa}{b}$ es el parámetro del 2.° ege, tercera proporcional á él y al 1.° y su equacion, poniendo $\frac{ab}{2}$ por aa en $xx=\frac{aayy}{bb}+aa$, es $xx=\frac{qyy}{2b}+\frac{bq}{2}=\frac{q}{2b}(yy+bb)$: de la que se saca $xx:yy+bb::q:2b$, es decir, que *el cuadrado de una ordenada al 2.° ege es á la suma de los cuadrados* $(CQ)^2+(Cb)^2$, *como su parámetro á dicho ege.*

659 Si tiradas las FM, fM (fig. 165) á los focus, se toma MH=MF, y sobre FH se levanta la perpendicular TD, será tangente á la hipérbola en M: pues si de qualquier otro punto m de la MT, se tiran las mH, mf, mF, $mf-m$F$=mf-$MH es mayor que M$f-$MF$=f$H; siendo mH+Hf mayor que mf: luego el punto m no pertenece á la hipérbola (650), y lo mismo se probará de qualquier otro que no sea M. Como los ángulos FMT, TMf son iguales, y TMf=NMm, serán FMT y NMm tambien iguales.

660 En el triángulo fMF se tiene (377) fM:MF::fT:TF; y fM+MF$\left(\frac{2cx}{a}\right)$:M$f\left(a+\frac{cx}{a}\right)$(653)::$f$T+TF$(2c)$:$fT=\frac{aa}{x}+c$: luego fT$-$Cf=CT$=\frac{aa}{x}$, y será CP(x):CS(a)::

$Cs(a):CT\left(\frac{aa}{x}\right)$, proporcion que determinará el punto T de la tangente: y como al paso que crece x, disminuye $\frac{aa}{x}$ ó CT; pasarán todas las tangentes á la hipérbola por los puntos T situados entre C y S, hasta que en siendo x infinita, $\frac{aa}{x}$ ó CT se reduzca á cero, y el punto T se confunda con C.

661 Será pues, 1.° la subtangente $PT = CP - CT = x - \frac{aa}{x} = \frac{xx-aa}{x}$. 2.° En el triángulo rectángulo TPM la tangente $TM = \sqrt{((PM)^2 + (PT)^2)} = \sqrt{\left(\frac{bb}{aa}(xx-aa) + \ldots \left(\frac{xx-aa}{x}\right)^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{bbxx}{aa} + xx - aa\right)\frac{xx-aa}{xx}}$. 3.° La subnormal $PR = \frac{(PM)^2}{PT} = \frac{bb}{aa} \cdot \frac{(xx-aa)}{\frac{xx-aa}{x}} = \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{2a}$. 4.° Y últimamente en el triángulo rectángulo MRP la normal $MR = \sqrt{((PM)^2 + (PR)^2)} = \sqrt{\left(\frac{b^4xx}{a^4} + \frac{bb}{aa}(xx-aa)\right)}$.

662 *Si del centro de la elipse ó de la hipérbola se tira la* CK (fig. 166 y 167), *será igual á* a; pues siendo $CF = Cf$, y $FK = KH$, será $Ff:FC::fH:CK$, y asi como $CF = \frac{1}{2}fF$,

será $CK=\frac{1}{2}fH=\frac{1}{2}(fm+mF)=a$. De consiguiente, 1.° descrito un círculo desde C con el radio $CS=a$, terminarán en su circunferencia las perpendiculares FK, fd tiradas de los focus sobre la tangente alargada si es menester; porque siendo recto el ángulo KdD, y estando K en dicha circunferencia, estará tambien el punto D de la DK que debe ser diámetro (324).

663 2.° *El producto* fd×FK *de dichas perpendiculares bajadas de los focus á la tangente, es siempre igual á* bb *cuadrado del semiege menor*; pues siendo $FK=KH=fD$ por razon de las paralelas DK, fH, tendremos (397) $fd\times fD=fd\times HK=fs\times fS=aa-cc=bb$ (630) en la elipse; y en la hipérbola por razon de las secantes (398), $fd\times FD=fd\times FK=fs\times fS=cc-aa=bb$ (652).

664 3.° *Las perpendiculares* FK *bajadas del focus* F *á la tangente en diferentes puntos* m *de la elipse y de la hipérbola, crecen mas que las raices de los radios vectores en la elipse, y menos en la hipérbola*: pues en los triángulos fmd, FmK semejantes por las paralelas y los ángulos en d y K rectos, se tiene $fm:fd::Fm:FK=\frac{fd\times Fm}{fm}$, y multiplicando por FK, $(FK)^2=FK\times fd\times\frac{Fm}{fm}=bb\times\frac{Fm}{fm}$. Si llamamos P, p dos perpendiculares FK, FK',

y R, r; R', r' sus radios vectores FM, *fm*; FM′, *fm′*; tendremos $PP:pp::bb\times\frac{R}{r}:bb\times\frac{R'}{r'}::\frac{R}{r}:\frac{R'}{r'}$, y $P:p::\sqrt{\frac{R}{r}}:\sqrt{\frac{R'}{r'}}$. Y como en la elipse en que $R+r=2a$, disminuye r aumentando R, crecerá la razon de las fracciones $\frac{R}{r}:\frac{R'}{r'}$ mas que si siendo constante r aumentase R: y al contrario, en la hipérbola en donde $r-R=2a$, r aumenta creciendo R, será menor dicha relacion de $\frac{R}{r}:\frac{R'}{r'}$, luego &c.

665 Tirada S*d* (fig. 165) paralela á MP, los triángulos semejantes TS*d*, TMP dan $TP:PM::TS=CS-CT:Sd$, ó $\frac{xx-aa}{x}:\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}::a-\frac{aa}{x}:Sd=\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{x+a}=$ ....

$b\sqrt{\frac{(x+a)(x-a)}{(x+a)(x+a)}}=b\sqrt{\frac{(x-a)}{(x+a)}}$. Esta espresion se reduce á $SD=b$ quando x es infinita, en cuyo caso se desprecian como demostrarémos despues (686), a y $-a$; y de consiguiente si tomando $Sa=SA=b$, se tiran por A, a y C las LK, *lk*, serán tangentes de la hipérbola á una distancia infinita (660) y se llaman sus *asíntotas*: las quales se van acercando á la curva sin llegar a tocarla. Sus ordenadas á la asíntota lk son las Mn (fig. 168) paralelas á la otra asíntota LK; y sus abscisas Cm.

666 *Si se alarga una ordenada* PM *hasta las asíntotas, será siempre* $Mn \times MN = bb = (Sd)^2$ ó $\div Mn:Sd:MN$; pues sacándose de los triángulos semejantes CSd, CPn, $CS:Sd::CP:Pn$, ó $a:b::x:Pn = \frac{bx}{a}$; será $Mn = Pn - PM = \frac{bx}{a} - y$, $MN = PN + PM = \frac{bx}{a} + y$; y $Mn \times MN = \frac{bbxx}{aa} - yy$; pongase $\frac{bb}{aa} \times \ldots\ldots (xx - aa)$ en lugar de yy, y saldrá reduciendo, $Mn \times MN = bb$. Siendo $Pn = \frac{bx}{a}$, $(Pn)^2 = \frac{bbxx}{aa}$, y la correspondiente $(PM)^2 = \frac{bbxx}{aa} - bb$; es claro que ningun punto de la hipérbola podrá encontrar el correspondiente n de la asíntota: y como $Mn \times MN = bb$ ó $Mn = \frac{bb}{MN}$, mientras mayor sea MN será menor $\frac{bb}{MN}$ ó Mn, que irá disminuyendo hasta el infinito: es decir, la asíntota se acercará mas y mas á la curva sin jamás encontrarla.

667 Del mismo modo que acabamos de decir se demuestra que $Qx \times xq = bb = Mn \times$

MN; de consiguiente *si se tiran dos ó mas paralelas* Hh, Ep *terminadas en las asíntotas, y que corten la hipérbola en* x, c, e, r, *se tendrá* $Hx \times hx = Er \times rp$; pues suponiendo tiradas las Nn, Qq perpendiculares á SP', en los triángulos HxQ, NrE, hxq, rnp semejantes á causa de las paralelas Nn, Qq; se tendrá $Hx:Er::Qx:Nr$, y $xh:rp::xq:rn$, donde multiplicando ambas proporciones resulta $Hx \times xh:Er \times rp::Qx \times xq:Nr \times rn$; luego $Hx \times xh = Er \times rp$, asi como $Qx \times xq = Nr \times rn$: por la misma razon $ep \times Ee = ch \times cH$.

668 Si se mueve la Ep paralelamente hasta confundirse con la Tt tangente á la curva en el punto R, en el que concurren los dos r, e; se verificará como antes $Hx \times xh = RT \times Rt$, como tambien $ch \times cH = Rt \times RT$; luego $Hx \times xh = ch \times cH$, esto es, $Hx(xc + ch) = ch(xc + xH)$ que se reduce quitando $Hx \times ch$ comun, á $Hx = ch$, y de consiguiente $Rt = RT$, es decir, *que son iguales las partes de qualesquiera rectas comprendidas entre la curva y las asíntotas.*

669 Luego 1.° si dada la ordenada RO, se toma $OT = OC$, la Tt tirada por T y R, será la tangente correspondiente á RO; pues siendo en los triángulos semejantes TOR TCt, $Tt:TR::TC:TO$, será $TR = Rt$ como $TO = OC$. 2.° El producto $MM' \times Mo$ de las

ordenadas paralelas al 1.er ege es aa; pues en los triángulos semejantes Mon, MMN, CSD, $Mo:CS::Mn:SD$ y $MM:CS::MN:SD$; luego $Mo\times MM:(CS)^2(aa)::Mn\times MN(bb):(SD)^2(bb)$: y $Mo\times MM=(CS)^2=aa$. 3.° Ultimamente, *para trazar una hipérbola entre las asíntotas* CI, CL *que pase por un punto dado* x; se tirarán por él las Hh, Qq &c. y tomando $ch=Hx$, $vq=xQ$ &c. pertenecerán á la hipérbola los puntos c, v &c.

670 Tiradas Sg y Mm paralelas á LK, y ZM paralela é igual á Cm, y llamando m la $Sg=AC$; Cm, x, y Mm, y; se tendrá en los triángulos semejantes Mnm, Sdg, ZMN, $Sd:Sg::Mn:Mm$, y $Sd:gd::MN:MZ$: y multiplicando estas proporciones $(Sd)^2:Sg\times gd::Mn\times MN:Mm\times MZ$; ó por ser $gd=Sg$ en el triángulo isósceles Sgd, $(Sd)^2(bb):(Sg)^2(mm)::Mn\times MN(bb):Mm\times MZ(xy)$: luego $bb\times xy=mm\times bb$, y $xy=mm$, equacion á la hipérbola entre las asintotas, en la que por ser $y=\frac{mm}{x}$, irá y menguando hasta el infinito, á proporcion que crezca x, y la asíntota nunca tocará á la hipérbola. Si suponemos otra ordenada $Y=\frac{mm}{X}$, tendremos $YX=mm=yx$, y $Y:y::x:X$, ó *las ordenadas á las asíntotas estarán en razon inversa de las abscisas.* El

cuadrado mm se llama *potencia de la hipérbola*, y su valor sacado del triángulo rectángulo CSb donde $(Sg)^2 = \frac{1}{4}((CS)^2+(Cb)^2)$, es $mm = \frac{aa+bb}{4}$.

671 Estén en proporcion geométrica las abscisas CX, CU, CG, Cc, (fig. 169), y será CU−CX:CX::CG−CU:CU::Cc−CG:CG &c. y como los consecuentes son geométricamente proporcionales, lo serán tambien los antecedentes XU, UG, Gc &c. diferencias de las abscisas. Si los cuadriláteros XKYU, YUGZ &c. se conciben formados de los pequeños rectángulos UuYy, gGZt que tienen las ordenadas UY, GZ por altura y por bases uU, gG, partes semejantes de XU, UG; será uU:gG::XU:UG; y como XU:UG::CX:CU::CU:CG::GZ:YU por estar las ordenadas en razon inversa de las abscisas (670), será uU:gG::GZ:YU, y uU×YU=gG×GZ, ó gGZt=UYyu. Lo mismo se podrá demostrar de los demas rectángulos que componen los cuadriláteros: luego estos son iguales: y si suponemos que XUYK sea 1, será XGZYK=2, XcNZK=3 &c. y *creciendo las abscisas en progresion geométrica, estarán los espacios asintóticos en progresion aritmética.*

672 Si se tiran las CK, CY, CZ &c. *los sectores hipérbolicos* CYK, CYZ *son igua-*

les á los cuadrilateros XUYK. UGZY; pues siendo iguales los triángulos CXK, CUY (454 por tener sus bases en razon inversa de sus alturas; si se quita CoX comun y se añade á los dos residuos oKY, resultará CKY= KXUY; y asi de los demas: *luego si las abscisas son términos de una progresion geométrica, serán dichos espacios los correspondientes en la aritmética, ó serán sus logaritmos.*

673 Lo primero que hay que saber de los diámetros es *que ambos se dividen por medio en el centro* C (fig. 170): *y que el segundo es igual á la tangente* T*t*; pues tiradas las MD, M*d*, en el paralelogramo DM*t*C es DC=M*t*; luego pues que TM=M*t* (668), será DC= C*d*, D*d*=T*t*. Tomando ahora CP'=CP, y tirando las MP, M'P', en los triángulos rectángulos iguales CPM, CP'M' se tendrá CM= CM'; luego &c. De consiguiente, dados los dos diámetros conjugados MM', D*d*, se tendrán las asíntotas, trazando por el céntro C las CL, C*l* paralelas á las DM, *d*M tiradas al 2.° diámetro D*d* desde un estremo M del 1.°: y al contrario, dadas las asíntotas CL, C*l* y un punto M de la curva, se tendrán los diámetros, tirando MH paralela á C*l*, tomando HD=HM; y las DC, MC tiradas al centro serán los semidiámetros; pues si se traza MT paralela á DC, serán iguales los

triángulos CDH, THM, á causa de las paralelas y de DH=HM, luego TM=DC: y como TM es tangente por ser TH=HC, será DC el 2.° semiege.

674 Llamemos MM′, $2a$; Dd ó Tt, $2b$; la ordenada mQ,y; CQ,x: y será MQ$=x-a$, M Q$=x+a$: y en los triángulos semejantes CMT, CQN, CM(a): CQ(x) :: MT(b): QN$=\frac{bx}{a}$; luego mN=NQ$-m=\frac{bx}{a}-y$, mn=NQ+Q$n=\frac{bx}{a}+y$, mN$\times mn=\frac{bbxx}{aa}-yy$: y siendo mN$\times mn=bb$ (666), será finalmente $\frac{bbxx}{aa}-yy=bb$, y de consiguiente $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb$, equacion á las ordenadas del 1.r diámetro de la hipérbola. La de las ordenadas del 2.° por ser Cp=mQ=y, y CQ=$mp=x$, será despejando xx en la anterior, $xx=\frac{aayy}{bb}+aa$. Ambas son en todo semejantes á las de los eges, y de consiguiente podremos de ellas inferir tambien que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales en cada diámetro: que á uno y otro corta la curva en dos puntos: que el cuadrado de la ordenada á un diámetro es al producto de sus abscisas, como el cuadrado de su conjugado al de dicho diámetro; que el parámetro de

un diámetro es una tercera proporcional á él y á su conjugado &c. y asi de todas las demas propiedades excepto las delos focus.

675 *Si de los estremos* d, M *de los diámetros* Dd, MM′ *se bajan dos ordenadas* do, MP *al* 1.^{r} *ege, será el cuadrado de* Co *comprendida entre la una* do *y el centro* C, *igual al producto* PS×Ps *de las abscisas de la otra ordenada* MP; *y el cuadrado de* CP *igual á la suma de los cuadrados* $(Co)^2+(Cs)^2$. Supongamos que sobre Bb alargado se toman CE=CE=CF, y se trazan por B, *b* dos hipérbolas, cuyos focus sean E, E′ que se llaman *conjugadas* á las primeras: sea $CS=a$, $CB=b$, $CP=x$, $Co=z$, será $oS\times os=aa-zz$, $SP\times sP=xx-aa$. Por la propiedad de la hipérbola (655) $(PM)^2:PS\times Ps::bb:aa::(do)^2:(Cs)^2+(Co)^2$ (656), ó $PS\times Ps:(Cs)^2+(Co)^2::(PM)^2:(do)^2::(PR)^2:(Co)^2$ en los triángulos semejantes Cod. RPM: luego $PS\times Ps\,(xx-aa):(Cs)^2+(Co)^2\,(aa+zz)::(PR)^2 \ldots \left(\frac{xx-aa}{xx}\right)^2$ (661) $:(Co)^2\,(zz)=\frac{(aa+zz)}{xx}\frac{(xx-aa)^2}{xx-aa}$, de donde se saca $zz=xx-aa$, ó $(Co)^2=PS\times Ps$, y $xx=zz+aa$ ó $(CP)^2=(Cs)^2+(Co)^2$.

676 Si en la proporcion $(do)^2:(Cs)^2+(Co)^2::bb:aa$ (656) ponemos por $(Cs)^2+(Co)^2$ su igual xx (675), se mudará invirtiéndola, en $aa:bb::xx:(do)^2=\frac{bbxx}{aa}$; de con-

siguiente será $(Cd)^2=(Co)^2+(do)^2=xx-aa+\frac{bbxx}{aa}$, tambien $(CM)^2=(CP)^2+\ldots$ $(PM)^2=xx+\frac{bbxx}{aa}-bb$: réstese una equacion de otra, reduzcase y se tendrá $(CM)^2-(Cd)^2=aa-bb$; y será *la diferencia de los cuadrados de los eges de la hipérbola igual á la de los cuadrados de sus diametros.*

677 Bajada sobre Tt la perpendicular Ca se saca de los triángulos semejantes CaR, RPM, $RM:PM::CR \cdot Ca=\frac{PM\times CR}{RM}$; tambien $PR:RM::Co:Cd=\frac{RM\times Co}{PR}$ en los triángulos semejantes Cod, RPM: luego $Cd\times Ca=\frac{PM\times CR\times RM\times Co}{RM\times PR}=\frac{PM\times CR\times Co}{PR}$, y $(Cd)^2\times(Ca)^2=\frac{(PM)^2\times(CR)^2\times(Co)^2}{(PR)^2}$: pongase por $(PM)^2$, $\frac{bb}{aa}(xx-aa)$, por $(CR)^2$ $\frac{a^4}{xx}$ (660); $xx-aa$ por $(Co)^2$ (675), y $\frac{(xx-aa)^2}{xx}$ en lugar de $(PR)^2$, y resultará despues de reducir, $(Cd)^2\times(Ca)^2=aabb$, y Cd ó $CD\times Ca=ab$, ó el paralelogramo $DTMC$ de los semidiámetros igual al de los semieges; luego *el paralelogramo formado de los diametros de la hipérbola es igual al que forman los eges.*

678 Dados los dos diámetros Ss 1.°, y Bb 2.° (fig. 171) que formen qualquier ángulo, se podrá trazar la hipérbola tomando sobre el semidiámetro CS alargado qualquier número de partes iguales CE, EE′ &c. tirando por E la EP paralela á SB, tomando en CB y Cb partes iguales á CP, y levantando en C la CD perpendicular é igual á Cs; pues si por los puntos P se corta cada paralela P′M igual á su correspondiente ED, todos los puntos M pertenecerán á la hipérbola: porque siendo $Ss=2a$, $Bb=2b$, $CP=y$, $PM=x$, se tendrá en los triángulos semejantes CSB, CEP, CB: CS::CP:CE, ó $b:a::y:CE=\frac{ay}{b}$: y en el triángulo rectángulo ECD donde $(DE)^2$ ó .... $(PM)^2=(CE)^2+(CD)^2$, será $xx=\frac{aayy}{bb}+aa$, equacion al 2.° diámetro de la hipérbola (656): y verificándose esto en los demas puntos, pertenecerán á la hipérbola.

679 Quando los eges ó diámetros son iguales, se llama la hipérbola *equilátera*; y basta entonces para trazarla levantar la CR perpendicular é igual á CB; pues tirando por qualquier punto P la MP′M′ paralela á Ss, y tomando P′M y P′M′ iguales á P′R, serán M, M′ puntos de la hipérbola; porque en el triángulo rectángulo CP′R se tiene $(P'R)^2$ ó $(PM')^2=(CP')^2+(CR)^2$, esto es,

$xx=yy+aa$. Esta misma es la equacion á los eges, quando son iguales, ó quando la hipérbola es equilátera: en cuyo caso forman las asintotas con los eges un ángulo de 45°.

680 La equacion $yy=px\pm\frac{pxx}{2a}$ incluye las de la elipse é hipérbola con relacion á su parámetro, segun se ha visto (637 y 657): y como quando el ege $2a$ es infinito, como sucede en la parábola, dicha equacion se reduce omitiendo $\pm\frac{pxx}{2a}$ que entonces es cero, á $yy=px$ que lo es de la parábola; podremos considerar á $yy=px\pm\frac{pxx}{2a}$ como equacion general de las tres secciones cónicas, contando sus abscisas desde el vértice; en la qual sacando los valores de las diferentes lineas que en ellas hemos calculado, se podrán facilmente comparar, para observar mejor sus relaciones recíprocas.

681 La subnormal por egemplo, segun hemos visto (639 y 661), es $\frac{1}{2}p\pm\frac{px}{2a}$ en la elipse é hipérbola, y $\frac{1}{2}p$ en la parábola (623) en la que $\pm\frac{px}{2a}=0$. Si en $yy=px\pm\frac{pxx}{2a}$ se pone en lugar de y, $\frac{1}{2}p$ ordenada al focus, resulta $\frac{1}{4}pp=px\pm\frac{pxx}{2a}$, y $p=4x\pm\frac{2x^2}{a}$, es de-

cir, que el parámetro es cuádruplo de la distancia del vértice al focus en la parábola, mas que cuadruplo en la hipérbola, y menos en la elipse &c.

682 Finalmente, *si dada una porçion de seccion cónica, se pidiese quál es de las tres, y la posicion de sus eges*; habiendo tirado dentro de ella dos lineas paralelas terminadas por ambos cabos en la curva, y por su mitad una recta, será esta uno de sus diámetros (624, 641, 651): búsquese del mismo modo otro, y si saliese paralelo al primero, será la curva una parábola, cuyo ege se hallará, tirando por el vértice una paralela á qualquiera de los dos diámetros encontrados. Si el 2.° diámetro corta al 1.° dentro de la curva, será esta una elipse, y si le corta fuera una hipérbola. En estos casos si se traza un arco desde el centro de la seccion que corte la curva en dos puntos, y tirando por ellos una recta, se le baja una perpendicular desde dicho centro; será esta uno de los eges, y el otro debe ser una perpendicular al ege encontrado.

CALCULO INFINITESIMAL.

683 El obgeto de este Cálculo es considerar la relacion entre los incrementos ó decrementos que sobrevienen á las cantidades

variables, para llegar á cierto estado: dichos aumentos ó decrementos que son partes infinitamente pequeñas ó *elementos* de las cantidades, pueden mirarse bajo de dos aspectos diferentes, que dividen en dos ramos el cálculo infinitesimal: en el uno que se llama *cálculo diferencial* ó *de las fluxîones*, se averigua la razon que hay entre dichos elementos dadas las cantidades, y en el otro que es el *integral* ó de las *fluentes*, se busca la razon de las cantidades dados sus elementos: de suerte que el 1.° resuelve las cantidades en sus elementos, y el 2.° de los elementos compone las cantidades.

684 Si q es el cociente de la cantidad b partida por a, de suerte que $\frac{b}{a}=q$, y permaneciendo b constante concebimos que a vaya menguando, irá creciendo á proporcion el cociente q, hasta que llegando á ser a una cantidad infinitamente chica qual podemos considerar al cero, venga q á ser infinitamente grande; esto es, si $a=o$, $\frac{b}{a}=\frac{b}{o}=q=\infty$ (este es el signo del infinito). Al contrario, si se concibe que a vaya creciendo hasta el infinito, disminuirá q hasta llegar á ser cero, y será $\frac{b}{a}=\frac{b}{\infty}=q=o$. Por eso llamarémos cantidad *infinita* la que *en su género* se concibe

haber recibido todos los aumentos posibles: é *infinitamente pequeña* la que se concibe menor en su *género* que otra qualquiera posible. Pero propiamente hablando el infinito equivale las mas veces á *indefinido*, y viene á ser el límite ácia el que se acerca el finito quanto se quiere sin poder llegar jamas á él. Quando decimos que 1 es la suma de la série infinita $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}$ &c. es decir que 1 es el límite de dicha suma; porque quantos mas términos se sumen de dicha série mas se acercará la suma á 1. Asimismo, llamar al círculo *polígono de infinitos lados* es decir que el círculo es el límite de quantos polígonos se le quieran inscribir ó circunscribir, al qual se acercarán tanto mas quantos mas lados tengan.

685 Hay infinitos é infinitamente pequeños de diferentes órdenes: si x es infinito, siendo $1:x::x:xx$, será xx infinito respecto de x, como x lo es respecto de 1; ó será infinitamente infinito ó infinito de 2.° orden: por igual razon es x^3 infinito de 3.^r orden, x^4 de 4.° &c. Si $\frac{1}{x}$ es infinitamente pequeño, será $\frac{1}{xx}$ infinitamente pequeño de 2.° orden, pues es $1:\frac{1}{x}::\frac{1}{x}:\frac{1}{xx}$; $\frac{1}{x^3}$ será infinitamente pequeño de 3.^r orden, $\frac{1}{x^4}$ de 4.° &c. En un

producto de factores infinitos ó infinitamente pequeños, se atiende al número y grado de dichos factores; y asi bxz y xz, siendo x, z infinitos y b finito, son infinitos de 2.° orden, pues $bxz:xz::b:1$, y siendo b, 1 de un mismo orden, lo serán tambien bxz, y xz. Aqui se ve tambien que á los infinitos multiplicados y partidos por cantidades finitas puede medirlos alguna razon finita.

686 Las cantidades finitas no aumentan ni disminuyen una cantidad infinita; porque siendo $1-1=-1+1=0$, y $\frac{a}{0}=\infty$ (684), será $\frac{a}{1-1}=\frac{a}{-1+1}=\infty$: hagase la division (104), y resultará $\frac{a}{1-1}=a+a+a+a\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{a}{1-1}$:

y $\frac{a}{-1+1}=-a-a-a-a\ldots\ldots+\frac{a}{-1+1}$: luego lo mismo es $\frac{a}{1-1}$ que $a+a+a+a\ldots\ldots+\frac{a}{1-1}$, y lo mismo es $\frac{a}{-1+1}$ que $-a-a-a-a\ldots\ldots+\frac{a}{-1+1}$.

De consiguiente en los cálculos en que intervenga una ó mas cantidades infinitas, se deben despreciar todos los términos finitos; y por igual razon se deben omitir los infinitos ó infinitamente pequeños de orden inferior quando los haya de orden superior. Por egemplo, la expresion $\frac{3x+a}{5x-b}$ en la suposicion de ser x infinito, se reduce á $\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$. Los mismos $\frac{3}{5}$ hubieran salido dividiendo numerador y denominador por x, y despreciando los términos $+\frac{a}{x}-\frac{b}{x}$ que por ser infinitamente pequeños se reducen á cero: tambien la espresion $xx+ax+bb$ se reduce á xx en la suposicion de x infinita, omitiendo bb finito y ax infinito de 1.^{r} orden.

687 Asimismo $xx+ax$ se reduce á ax, siendo x infinitamente pequeño, despreciando xx que lo es de 2.° orden: y $\frac{ax+b}{cx+d}$ bajo de la misma suposicion se queda en $\frac{b}{d}$. Pero no se ha de egecutar la reduccion hasta haber concluido el cálculo de que se trate; y asi la verdadera diferencia de $xx+bx+a$ y $xx+bx+b$, suponiendo x infinita, es $xx+bx+a-xx-bx-b= a-b$, y si se hubieran quitado antes los términos ax, a, bx, b, hubiera resultado $xx-xx=0$: tampoco $x-\sqrt{(xx-aa)}$ se reduce á cero en la misma suposicion, sino á $x-x+\frac{aa}{2x}+\frac{a^4}{8x^2}$ &c. desembarazando el radical (154), y despues es $\frac{aa}{2x}$, despreciando los

demas términos (686.) Pero antes de internarnos en los métodos diferenciales é integrales, vamos á dar alguna idea de lo que son *séries* con algunas de sus propiedades que nos servirán despues.

De las Séries.

688 Llamamos asi á un polinomio de infinitos términos por el que espresamos el valor de una cantidad que no se puede sacar cabal. Quando sus términos van disminuyendo se llama *decrescente*, y tambien *convergente* porque entonces se acerca mas al verdadero valor: será *divergente* quando se va apartando de él; y porque entonces van creciendo los términos se llama *crescente*. Aquellas en las que cada término se forma de alguno ó algunos de los anteriores, se llaman *recurrentes*. De números hay tres géneros de séries: el de las *potencias* que ya conocemos, el de los números *figurados* ó de diferentes órdenes que comienzan asi.........

Números	*Constantes ó de 1.ʳ orden*...	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1. &c.
	Naturales ó de 2.° orden...	1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6. &c.
	Triangulares ó de 3.ʳ orden.	1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 . &c.
	Piramidales ó de 4.° orden.	1 . 4 . 10 . 20 . 35 . 56. &c.

y en los quales cada término es la suma de los que le anteceden en la serie precedente: en los triángulares por egemplo, 1=1, 3=

$1+2$, $6=1+2+3$ &c. El 3.^r género es el de los números *polígonos* formados por la suma de los términos consecutivos de una progresion aritmética, y que toman el nombre segun es 1, 2, 3 &c. la diferencia de la progresion.

Progresiones aritméticas.		*Números polígonos.*	
1.2 3.4. 5. &c.	*dif.* 1....	1.3.6. 10.15. &c.	*Triang.*
1.3.5.7. 9. &c.	*dif.* 2....	1.4.9. 16.25. &c.	*Cuadr.*
1.4.7.10.13. &c.	*dif.* 3....	1.5.12.22.35. &c.	*Pentág.*
1.5.9.13.17. &c.	*dif.* 4....	1.6.15.28.45. &c.	*Exâgon.*

Se llaman *polígonos* porque las unidades que tienen sus números, se pueden colocar en figura de triángulo, cuadrado, pentágono &c.

689 Ya hemos visto cómo por medio de la division (104) y de la fórmula de Newton (154) se reduce á série qualquier cantidad; ahora vamos á esplicar otro método mas expedito valiéndonos de los coeficientes indeterminados A, B, C, D &c. Supongamos pues para reducir á série la cantidad $\frac{a}{b+z}$, que el valor de dichos coeficientes sea tal que......

$$\frac{a}{b+z}=A+Bz+Czz+Dz^3+Ez^4+\text{ \&c. }$$

tendremos multiplicando ambos miembros por $b+z$, $a=\left\{\begin{array}{l} bA+bBz+bCzz+bDz^3+\text{\&c.}\\ +Az+Bzz+Cz^3+\text{ \&c.}\end{array}\right.$ ó trasponiendo el a, $o=\left\{\begin{array}{l} bA+bBz+bCzz+bDz^3+\text{ \&c.}\\ -a+Az+Bzz+Cz^3+\text{ \&c.}\end{array}\right.$

Para que el 2.° miembro se reduzca á cero, igualemos á cero todos los coeficientes y tendremos $bA+a=0$, $bB+A=0$; $bC+B=0$, $bD+C=0$: de donde sacarémos despejando A, B &c. $A=\frac{a}{b}$, $B=-\frac{A}{b}=-\frac{a}{bb}$; $C=-\frac{B}{b}=\frac{a}{b^3}$, $D=-\frac{C}{b}=-\frac{a}{b^4}$: luego $\frac{a}{b+z}=A+Bz+Czz+Dz^3+$ &c. $=\frac{a}{b}-\frac{az}{bb}+\frac{azz}{b^3}-\frac{az^3}{b^4}+$ &c.

Para reducir á série $\frac{aa}{aa+2ax-xx}$, supongo $\frac{aa}{aa+2ax-xx}=A+Bx+Cxx+Dx^3+$ &c. y multiplicando por el denominador, saldrá

$$aa=\begin{cases} aaA+aaBx+aaCxx+aaDx^3+\text{\&c.} \\ \quad +2aAx+2aBxx+2aCx^3+\text{\&c.} \\ \quad\quad -Axx-Bx^3+\text{\&c.}\end{cases}$$

Y por ser entonces $aa=aaA$, $aaB+2aA=0$, $aaC+2aB-A=0$, $aaD+2aC-B=0$; será $A=1$, $B=-\frac{2}{a}$, $C=\frac{5}{aa}$, $D=-\frac{12}{a^3}$: y de consiguiente $\frac{aa}{aa+2ax-xx}=A+Bx+Cxx+Dx^3+$ &c. $=1-\frac{2x}{a}+\frac{5xx}{aa}-\frac{12x^3}{a^3}+$ &c.

Quando en el numerador hay dos términos, se igualan á los dos homogéneos de la série multiplicada ya por el denominador; si hay tres á los tres primeros, y asi de los demas: y asi para hallar la série que corresponde á $\frac{1+2z}{1-z-zz}$, se supondrá igual á $A+Bz+Czz+Dz^3+$ &c. y despues de haber multiplicado por $1-z-zz$, se hará $1=A$, $2=B-A$; y

$$1+2z=\begin{cases} A+Bz+Czz+Dz^3+\text{ \&c.} \\ \quad -Az-Bzz-Cz^3-\text{ \&c.} \\ \qquad -Azz-Bz^3-\text{ \&c.}\end{cases}$$

de consiguiente será $B=3$, $C=4$, $D=7$, &c. y $\frac{1+2z}{1-z-zz}=A+Bz+Czz+Dz^3+$ &c. $=1+3z+4zz+7z^3$ &c. série *recurrente* por ser el coeficiente de cada término suma de los dos precedentes.

Para sacar por este medio la raiz próxîma de $(aa+xx)$, ó reducir á série $\sqrt{(aa+xx)}=(aa+xx)^{\frac{1}{2}}$, supondremos $(aa+xx)^{\frac{1}{2}}=A+Bxx+Cx^4+Dx^6+$ &c. (no se supone igual á $A+Bx+Cxx+$ &c. porque el término con x del 2.° miembro sin homólogo en el 1.° hubiera embarazado la operacion). Cuadrese pues la anterior equacion, y resultará.......

$$aa+xx=\begin{cases} AA+2ABxx+BBx^4+2ADx^6+\text{ \&c.} \\ \qquad\qquad +2ACx^4+2BCx^6+\text{ \&c.}\end{cases}$$

de donde se saca $aa=AA$ y $A=a$, $B=\frac{1}{2a}$,

$C = \frac{1}{8a^3}$, $D = \frac{1}{16a^5}$ &c. luego $\sqrt{(aa + xx)} = A + Bxx + Cx^4 + Dx^6 +$ &c. $= a + \ldots\ldots \frac{xx}{2a} + \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} +$ &c.

690 *El sumar las séries* es la operacion mas dificil que se hace con ellas, y viene á reducirse á sumar algunas generales que sirven de fórmulas por las que se suman las demas que pueden reducirse á ellas. Nosotros nos ceñirémos á los casos mas precisos

1.° Sea $\div \frac{a}{b} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{bqq} : \frac{a}{bq^3}, \frac{a}{bq^4} \ldots \frac{a}{bq^\infty}$ una progresion general geométrica decrescente al infinito. Si se coloca asi $\div \frac{a}{bq^\infty} \ldots \frac{a}{bq^4} : \frac{a}{bq^3} : \frac{a}{bqq} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{b}$, la habremos hecho crescente y su suma será (201) despreciando el término $\frac{a}{bq^\infty}$ que es infinitamente pequeño (686), $S = \frac{aq}{bq - b}$: fórmula por la que se podrá sumar qualquier progresion geométrica decrescente al infinito.

Sumemos por ella la fraccion decimal 0,3333 &c. que sabemos equivale á $\frac{1}{3}$, y viene á ser $\div \frac{3}{10} : \frac{3}{100} : \frac{3}{1000} \ldots \frac{3}{10^\infty}$; si la hacemos crescente escribiéndola asi, $\frac{3}{1\infty} \ldots \frac{3}{1000} : \frac{3}{100} : \frac{3}{10}$, será $a=3$, $b=10$, $q=10$, y $s=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$. De consiguiente la suma de 0,99999 &c. será 1 como lo da tambien la formula.

Para averiguar en quebrado comun el valor de la decimal 0,181818 &c. ó la suma de la progresion á que equivale; harémos $a=18$, $b=100$, $q=100$, y será $s=\frac{1800}{9900}=\frac{2}{11}$. Tambien encontrarémos que la fraccion periódica 0, 142857142857 14 &c. vale $\frac{1}{7}$, sustituyendo en la fórmula, 142857 en lugar de a, 1000000 en lugar de b y q.

691 2.° Para sumar una série $\frac{a}{b}$, $\frac{a+d}{bq}$, $\frac{a+2d}{bq^2}$, $\frac{a+3d}{bq^3}$ &c. cuyos numeradores están en progresion aritmética y los denominadores en progresion geométrica, se reducirá á esta forma $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{bq}+\frac{d}{bq}$, $\frac{a}{bqq}+\frac{d}{bqq}+\frac{d}{bqq}$, $\frac{a}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}$ &c. de donde se sacarán las siguientes séries que son otras tantas progresiones geométricas.

$\div\div \frac{a}{b} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{bqq} : \frac{a}{bq^3}$ &c. cuya suma es $\frac{aq}{bq-b}$

$\div\div \frac{d}{bq} : \frac{d}{bqq} : \frac{d}{bq^3}$ &c. su suma...... $\frac{d}{bq-b}$

$\div \frac{d}{bqq} : \frac{d}{bq^3}$ &c. su suma........ $\frac{d}{bqq-bq}$

$\div \frac{d}{bq^3}$ &c. su suma........ $\frac{d}{bq^3-bqq}$

Y pues que estas sumas escepto la primera forman la progresion $\div \frac{d}{bq-b} : \frac{d}{bqq-bq} : ....$ $\frac{d}{bq^3-bqq}$ &c. cuya suma es $\frac{dq}{bq^2-2bq+b}$; si á esta se añade la primera $\frac{aq}{bq-b}$, se tendrá ...... $\frac{aqq-aq+dq}{bqq-2bq+b}$ por la suma de la série propuesta.

692 3.° Encontremos generalmente la suma de qualquier número de términos de una progresion qualquiera de las potencias de los números naturales 1, 2, 3, 4 &c. Represente la progresion aritmética $\div a.b.c.d.t$ una série qualquiera de estos números: y pues que $t=d+1$, $d=c+1$, $c=b+1$, $b=a+1$, será elevando estas equaciones á una potencia qualquiera m.........

1.° $t^m=d^m+md^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}d^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}d^{m-3}+$ &c.

2.° $d^m=c^m+mc^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}c^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}c^{m-3}+$ &c.

3.° $c^m=b^m+mb^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}b^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}b^{m-3}+$ &c.

4.° $b^m=a^m+ma^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}a^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}a^{m-3}+$ &c.

Sumo todas estas potencias y tendré reduciendo $t^m = a^m + m(d^{m-1} + c^{m-1} + b^{m-1} + a^{m-1}) + \frac{1}{2}(m \times m - 1)(d^{m-2} + c^{m-2} + b^{m-2} + a^{m-2}) + \ldots$ $\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \times 3}(d^{m-3} + c^{m-3} + b^{m-3} + a^{m-3}) +$ &c.

Si suponemos ahora s^{m-1} igual á la suma de las potencias $m-1$ de a, b, c, d, t, será ...... $s^{m-1} - t^{m-1} = a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + d^{m-1}$, y $s^{m-2} - t^{m-2} = a^{m-2} + b^{m-2} + c^{m-2} + d^{m-2}$ &c. y la suma anterior se reducirá finalmente á $t^m = a^m + \ldots$ $m(s^{m-1} - t^{m-1}) + \frac{1}{2}(m \times m - 1)(s^{m-2} - t^{m-2}) +$ $\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \times 3}(s^{m-3} - t^{m-3}) +$ &c. espresion general que se busca.

Siendo $m = 1$, resulta $t = a + s^\circ - t^\circ$ ó $s^\circ = t - a + 1$, suma de una série de potencias *cero*: en $\div$ 3.° 4.° 5.° 6.° por eg. $s^\circ = t - a + 1 = 6 - 3 + 1 = 4$. Si $m = 2$ se reduce la fórmula á $tt = aa + 2s - 2t + s^\circ - t^\circ = aa + 2s - t - a$, poniendo en lugar de $s^\circ - t^\circ$, $t - a$ sacado de la suposicion anterior: luego $s = \frac{1}{2}(tt - aa + t + a) = \frac{1}{2}t(t+1) + \frac{1}{2}a(1-a)$: de suerte que la suma de $\div$ 8. 9. 10. 11. 12. 13 es $s = 13 \times 7 + 4 \times -7 = 63$.

Suponiendo $m = 3$, resulta $t^3 = a^3 + 3(ss - tt) + 3(s - t) + s^\circ - t^\circ = a^3 + 3ss - 3tt + 3s - 2t - a$; sustituyase el valor de s, y se tendrá trasponiendo $ss = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}tt + \frac{1}{6}t - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{6}a = \frac{1}{6}t(2tt + 3t + 1) - \frac{1}{6}a(2aa - 3a + 1)$. En la série de los cuadrados $\div$ 2.^{2} 3.^{2} 4.^{2} 5.^{2}

6.ª se tiene $ss=90$. Haciendo $m=4$, y poniendo en el resultado los valores hallados de s, ss, sale $s^3=\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{4}tt-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}tt(tt+2t+1)-\frac{1}{4}aa(aa-2a+1)$: y asi de los demas.

693 Si suponemos infinito el número de términos, será el último $t=\infty$, y entonces .... ∞^{m-1}, ∞^{m-2} &c. se desvanecerían en la fórmula como infinitamente pequeños respecto de ∞^m: y lo mismo s^{m-2}, s^{m-3} &c. respecto de s^{m-1}: luego dicha fórmula quedará reducida á $\infty^m=ms^{m-1}$, y $s^{m-1}=\frac{\infty^m}{m}$, ó suponiendo $m-1=n$, $s^n=\frac{\infty^{n+1}}{n+1}$: es decir, la suma de las potencias n de una infinidad de términos de los numeros naturales es el producto de la potencia ∞^n del último término multiplicado por el número de términos, y partido por $n+1$. Con la misma facilidad se sacaría la suma de las potencias de qualquier número de términos finito ó infinito de una progresion aritmética qualquiera, suponiendo r la diferencia, y haciendo $t=d+r$, $d=c+r$ &c. y como el esponente n puede representar aun las potencias fraccionarias, quedará el problema completamente resuelto.

694 Se llama *término general de una série* la espresion de n número de términos, por

la que se forman todos los de la série substituyendo por n los números 1, 2, 3 &c.: $n^3 = nn + n$ es el término general de la série 1, 6, 21, 52, 105 &c. cuyos términos resultan suponiendo $n=1$, $n=2$ &c. y *suma general de una série* la espresion que da generalmente la suma de un número qualquiera n de términos. Tal es $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$ suma de la série de los cuadrados 1, 4, 9, 1 &c. cuyo término general es nn; en la qual si en lugar de n se pone 6, salen 91 que suman los seis primeros términos.

695 Si en la suma general (S) se pone $n-1$ en lugar de n, resultará la suma (s) de los términos hasta $n-1$ inclusive, ó de todos menos el último que es el general: de consiguiente si esta suma se resta de la primera, se tendrá el término general (T), que es siempre $S-s$. Si $S = \frac{1}{2}(mn+n)$, será poniendo $n-1$ en lugar de n, $s = \frac{1}{2}(nn-n)$, y $S-s = T = n$. Si $S = \frac{aq^n - a}{q-1}$, será $S-s = T = aq^{n-1}$. Pero dado el término general T no es tan facil encontrar la suma. Contentémonos con la resolucion siguiente que se estiende á inumerables casos.

696 Sea $T = an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + \&c.... + r$, y hayase de encontrar la suma S de su série. Si hacemos $S = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} +$

$Dn^{m-2}+$ &c....$+R$, y sustituimos $n-1$ en lugar de n, tendremos $S=A(n-1)^{m+1}+B(n-1)^m+C(n-1)^{m-1}+D(n-1)^{m-2}+$ &c. $=$

$$\begin{array}{llll} An^{m+1} - A(m+1)n^m & +\frac{1}{2}Am(m+1)n^{m-1} & -\frac{A(m+1)m(m-1)n^{m-2}}{2\times 3} & + \&c. \\ +Bn^m & -Bm\times n^{m-1} & +\frac{1}{2}Bm(m-1)n^{m-2} & - \&c. \\ & +Cn^{m-1} & -C(m-1)n^{m-2} & + \&c. \\ & & +Dn^{m-2} & - \&c. \end{array}$$

luego $S-s=T=an^m+bn^{m-1}+cn^{m-2}+dn^{m-3}+$ &c. $=$

$$\begin{array}{lll} A(m+1)n^m & -\frac{1}{2}A(m+1)ma^{m-1} & +\frac{A(m+1)m(m-1)}{2\times 3}n^{m-2} - \&c. \\ & +B\times m\times n^{m-1} & -\frac{1}{2}B(m-1)mn^{m-2} + \&c. \\ & & +C(m-1)n^{m-2} - \&c. \end{array}$$

Comparense los términos homólogos, y se tendrá $A=\frac{a}{m+1}$, $B=\frac{a}{2}+\frac{b}{m}$, $C=\frac{c}{m-1}+\frac{b}{2}+\frac{am}{12}$ &c. de consiguiente $S=An^{m+1}+\ldots Bn^m+$ &c. $=\frac{a}{m+1}n^{m+1}+\left(\frac{b}{m}+\frac{a}{2}\right)n^m+\ldots\ldots\left(\frac{c}{m-1}+\frac{b}{2}+\frac{am}{12}\right)n^{m-1}+$ &c.

Si se pidiese la suma de la série 1.2.3.4.5......n, cuyo término general es n, se hará $m=1$, $a=1$, $b=0$, $c=0$ &c. y será $S=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}nn=\frac{1}{2}(nn+n)$. La de la série 1. 4. 9. 16... nn, donde $T=nn$, da $m=2$, $a=1$, $b=0$, $c=0$ &c. y $S=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}nn+\frac{1}{6}n$. Ultimamente si $T=n^m$ como sucede en la fórmula $1.^m$ $2.^m$ $3.^m$ $4.^m$ ......n^m, será $m=m$, $a=1$, $b=0$,

$c=o$ &c. y $S=\frac{1}{m+1}n^{m+1}+\frac{1}{2}n^m+\frac{m}{12}n^{m-1}+$ &c. y suponiendo $n=\infty$ y positivo, será despreciando n^m, n^{m-1} &c. (686) $S=\frac{n^{m+1}}{m+1}$.

697 Quando se da una equacion $x=az^m+bz^{m+n}+cz^{m+2n}+dz^{m+3n}+$ &c. y se pide espresar en términos de x el valor de z; acudimos al que se llama *método inverso, retorno ó regreso de las séries*. Consideremos 1.° que $m=1$, y $n=1$, ó que sea $x=az+bzz+cz^3+dz^4+$ &c. y que se pida en x el valor de z. Si suponemos $z=Ax+Bxx+Cx^3+Dx^4+$ &c. será........

$$\begin{aligned} zz &= AAxx+2ABx^3+BBx^4+ \text{ \&c.}\\ &\qquad\qquad\qquad +2ACx^4+ \text{ \&c.}\\ z^3 &= \quad A^3x^3+3AABx^4+ \text{ \&c.}\\ z^4 &= \qquad\qquad A^4x^4+ \text{ \&c.} \end{aligned}$$

$$y\ x=\left\{\begin{aligned} az &= Aax+aBxx+aCx^3+aDx^4+ \text{ \&c.}\\ bzz &= \quad AAbxx+2ABbx^3+B^2bx^4+ \text{ \&c.}\\ &\qquad\qquad\qquad +2ACbx^4+ \text{ \&c.}\\ cz^3 &= \qquad A^3cx^3+3AABcx^4+ \text{ \&c.}\\ dz^4 &= \qquad\qquad A^4dx^4+ \text{ \&c.} \end{aligned}\right.$$

luego $x=Aax$, y $A=\frac{1}{a}$: $aB+AAb=o$, ó $B=-\frac{b}{a^3}$; $aC+2aBb+A^3C=o$, y $C=\frac{2bb-ac}{a^5}$, y asi de los demas. Ponganse estos va-

lores en $z=Ax+Bxx+Cx^3+Dx^4+$ &c. y resultará $z=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a^3}xx+\frac{2bb-ac}{a^5}x^3+\left(\frac{5abc-aad-5b^3}{a^7}\right)$
$x^4+\left(\frac{14b^4-21abbc+6aabd+3aacc-a^3c}{a^9}\right)\ldots\ldots$
x^5+ &c. fórmula por la que podremos expresar una série de potencias de z en otra compuesta de las mismas potencias de x.

Sea por egemplo, $x=z-zz+z^3-z^4+z^5-$ &c. tendremos $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $d=-1$, $e=1$ &c. y sustituyendo estos valores, será $z=x+xx+x^3+x^4+x^5+$ &c. Si fuese $x=z+\frac{1}{2}zz+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{5}z^5+$ &c. por ser $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=\frac{1}{4}$, $e=\frac{1}{5}$ &c. será $z=x-\frac{1}{2}xx+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5-$ &c. Ultimamente siendo $z=\frac{x}{a}-\frac{xx}{2aa}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\frac{x^5}{5a^5}-$ &c. será $\frac{x}{a}=z+\frac{1}{2}zz+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5+$ &c.

Supongamos 2.° que $m=1$, y $n=2$ de que resulta la série $x=az+bz^3+cz^5+dz^7+$ &c. de potencias impares: buscarémos una fórmula para este caso haciendo $z=Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+$ &c. pues será..........

$$\begin{aligned}
z^3 &= A^3x^3+3AABx^5+3AACx^7+\text{\&c.}\\
&\qquad\qquad\qquad\quad\;\, +3ABBx^7+\text{\&c.}\\
z^5 &= \qquad\qquad\;\; A^5x^5+5A^4Bx^7+\text{\&c.}\\
z^7 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; A^7x^7+\text{\&c.}
\end{aligned}$$

$$\text{luego } x = \begin{cases} az = Aax + aBx^3 + aCx^5 + aDx^7 + \&c. \\ bz^3 = \quad A^3bx^3 + 3AABbx^5 + 3AACbx^7 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 3ABBbx^7 + \&c. \\ cx^5 = \qquad\qquad A^5cx^5 + 5A^4Bcx^7 + \&c. \\ dx^7 = \qquad\qquad\qquad\qquad A^7dx^7 + \&c. \end{cases}$$

De donde se sacará $x = aAx$, ó $A = \frac{1}{a}$; $aB + A^3b = o$ y $B = -\frac{b}{a^4}$, $C = -\frac{3bb-ac}{a^7}$, $D = \frac{8abc-aad-12b^3}{a^{10}}$ &c. de modo que la fórmula por la que podremos espresar en x qualesquiera potencias impares de z, será $z = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^4}x^3 + \left(\frac{3bb-ac}{a^7}\right)x^5 + \left(\frac{8abc-aad-12b^3}{a^{10}}\right)x^7 +$ &c. Para espresar en x los valores de z en la equacion $x = z - \frac{z^3}{2\times3\times tt} + \frac{z^5}{2\times3\times4\times5\times t^4} - \ldots\ldots \frac{z^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7t^6} +$ &c. haremos $a = 1$, $b = -\frac{1}{2\times3\times tt}$, $c = \frac{1}{2\times3\times4\times5\times t^4}$, $d = -\frac{1}{2\times3\times4\times5\times6\times7t^6}$ &c. y se tendrá $z = x + \frac{1}{2\times3tt}x^3 + \left(\frac{1}{3\times4t^4} - \frac{1}{2\times3\times4\times5t^4}\right)x^5 +$ &c. $= x + \frac{1}{2\times3tt}x^3 + \ldots\ldots \frac{3}{2\times4\times5t^4}x^5 + \frac{3\times5}{2\times4\times6\times7t^6}x^7 +$ &c.

Consideraciones generales sobre los Logarítmos, algunos de sus usos, y modo de sacarlos por las series.

698 Para generalizar mas las ideas que dimos (208) de los logarítmos supongamos que sea a un número mayor que 1, x la potencia á que se ha de elevar para que iguale á b, de modo que $a^x=b$; será (209) el esponente x el logarítmo de b, ó $x=lb$ (l significa *logaritmo.*) La cantidad a se llama *base* ó *módulo*, y segun varíe su valor, variará el sistema de logarítmos. Juan Népero su inventor usó del mas sencillo en que $a=1$, del que resultan los logarítmos hiperbólicos (672): este y el de las tablas en que se hizo $a=10$, son los usados; pero en todos es $l1=o$; pues si en $a^z=b$, suponemos $b=1$; será $a^z=1$, y de consiguiente $z=o$ (92): y pues que $la^1=1$, $la^2=2$, $la^3=3$ &c. conocerémos el número que se ha tomado por base, viendo quál es el que tiene por logaritmo 1.

699 En qualquiera sistema de logarítmos, se tiene $lab=l\frac{ab}{1}=la+lb-l1$ por ser $1:a::b:\frac{ab}{1}$, y por lo que enseñamos (213): y $labc=la+lb+lc-2l1$; porque $1:\frac{ab}{1}::c:\frac{abc}{1\times1}$: $labcd=la+lb+lc+ld-3l1$, $la^2=la+la-l1=$

$2la - l1 : la^3 = 3la - 2l1$, y $la^m = mla - (m-1)l1 : l\sqrt[3]{a} = la^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}la - \left(\frac{1}{m} - 1\right)l1 = \frac{la + (m-1)l1}{m} : l\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}(la + 2l1)$. En el quebrado $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 1$, donde $b : a :: 1 : \frac{a}{b}$, se tendrá $l\frac{a}{b} = l1 + la - lb : l\frac{b^3}{ac} = l1 + lb^3 - lac = 3lb - la - lc$, poniendo $3lb - 2l1$ en lugar de lb^3, y $la + lc - l1$ por lac, y reduciendo despues.

700 En el sistema comun de los logarítmos de las tablas, en el que $l1 = o$, son mas sencillas estas espresiones por reducirse á cero los términos en que entra $l1$: y asi $lab = la + lb$: $la^3 = 3la$, $la^m = mla : l\frac{a}{b} = la - lb : l\frac{a^3}{b^2c} = 3la - 2lb - lc : l\sqrt[n]{c^2} = lc^{\frac{2}{n}} = \frac{2}{n}lc : l\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{(a+x)^2} = \frac{1}{2}l(a-x) - \frac{1}{2}l(a+x)$: y últimamente $l3aa + la^4 + 5l3 = 6l3a = l3a^6$. Y para manifestar quánto facilitan estas espresiones, equaciones y cálculos muy complicados, vamos á aplicarlos á algunas equaciones y problemas.

701 1.° Si se diese para resolver la equacion $a^x = b$ hariamos $xla = lb$, y $x = \frac{lb}{la}$, en $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}} = c$, será $mxla + (1-nx)lb = lc$, $mxla -$

$nx\mathrm{l}b = \mathrm{l}c - \mathrm{l}b$, y $x = \frac{\mathrm{l}c - \mathrm{l}b}{m\mathrm{l}a - n\mathrm{l}b} = \frac{\mathrm{l}\frac{c}{b}}{\mathrm{l}\frac{a^m}{b^n}}$. Sea.. $a^x = \frac{b^{mx+n}}{c^{qx}}$, tendremos $x\mathrm{l}a = mx\mathrm{l}b + n\mathrm{l}b - qx\mathrm{l}c$, y $x = \frac{n\mathrm{l}b}{\mathrm{l}a - m\mathrm{l}b + q\mathrm{l}c}$. Ultimamente si se diese $\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{mx}} = f^{x-p}$, seria $n\mathrm{l}b - \frac{a}{x}\mathrm{l}b - mx\mathrm{l}c = x\mathrm{l}f - p\mathrm{l}f$, y $(m\mathrm{l}c + \mathrm{l}f)xx - (n\mathrm{l}b + p\mathrm{l}f)x = -a\mathrm{l}b$, ó $xx\mathrm{l}c^m f - x\mathrm{l}b^n f^p = -x\mathrm{l}b^a$, de donde se saca

$$(249)\quad x = \frac{\mathrm{l}b^n f}{2\mathrm{l}c^m f} \pm \sqrt{\left(\frac{(\mathrm{l}b^n f^p)^2}{4(\mathrm{l}c^m f)^2} - \frac{\mathrm{l}b^a}{\mathrm{l}c^m f}\right)}.$$

2.° *Si* 100000 *personas aumentan en una provincia de* $\frac{1}{30}$ *cada año ¿quántas habrá al cabo de un siglo?* Si $100000 = n$, habrá al fin del 1.^{r} año $n + \frac{1}{30}n$ ó $n(1 + \frac{1}{30}) = n(\frac{31}{30})$: al fin del 2.° año habrá $n(\frac{31}{30})^2$, al fin del 3.° $n(\frac{31}{30})^3$...... y al fin del siglo $n(\frac{31}{30})^{100}$; luego deberá ser $(\frac{31}{30})^{100} \times 100000 = x$ número de habitantes; tendré pues, $100\mathrm{l}\frac{31}{30} + \ldots\ldots$ $\mathrm{l}100000 = \mathrm{l}x$, y como $\mathrm{l}\frac{31}{30} = \mathrm{l}31 - \mathrm{l}30 = 0{,}0142404\,39$; será $100\mathrm{l}\frac{31}{30} = 1{,}4240439$; súmese con $\mathrm{l}100000 = 5.0000000$, y compondrá $6{,}4240439 = \mathrm{l}x$; que corresponde al número 2654874, valor de x, y número de habitantes que se busca.

Para averiguar en qué razon debió au-

mentarse el género humano cada año por los tres hijos de Noe y sus mugeres, para que á los 200 años hubiese un millon de personas: supongo que cada año se aumentasen de... $\frac{1}{x}$; sería $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \times 6$ el número de personas que debería haber á los 200 años, y de consiguiente $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \times 6 = 1000000$, $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$ y por los logarítmos..... $l\frac{1+x}{x} = \frac{1}{200} l \frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} \times 5{,}2218487 = 0{,}0261092$. El número que corresponde á este logaritmo es $\frac{1061963}{1000000}$; luego $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$, $x = 16$ poco menos; de suerte que el aumento x cada año debería haber sido de $\frac{1}{16}$.

¿Quánto debería aumentarse un pueblo cada año para ser al fin de cada siglo dos veces mas numeroso? Siendo n el número de sus habitantes y $\frac{1}{x}$ la razon en que se aumenta, habria al fin de un siglo $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} \times n$, y pues que este número ha de ser $2n$, será.... $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} \times n = 2n$, y $\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$; luego l... $\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100} l2 = 0{,}0030103$: conque $\frac{1+x}{x} =$

$\frac{10069555}{10000000}$, y $x=144$; tendrian pues que aumentarse en $\frac{1}{144}$ cada año.

Para saber quántos años se necesitan para que n *de personas sea diez veces mayor, aumentándose cada año* de $\frac{1}{100}$; haciendo x el número de años, sería $n(\frac{101}{100})^x=10n$, ó $(\frac{101}{100})^x=10$, y se sacará $x=\frac{l10}{l101-l100}=\ldots\ldots$ $\frac{10000000}{43214}=231$. En estos problemas sacados de la *Introducion al Analisi de los infinitos*, una de las mejores producciones del célebre *Leonardo Eulero*, se han tomado los logarítmos de tablas que tienen diez decimales, como las excelentes de *Ulaq*.

702 Tratemos ya *de sacar el logarítmo de un número qualquiera*. Supongamosle $1+x$, y que $(1+x)^m$ sea igual á otro número $1+z$, será $1+z=(1+x)^m$, y $z=mx+\frac{1}{2}m(m-1)xx+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}x^3+$ &c. Sea $l(1+x)=Ax+Bxx+Cx^3+Dx^4+$ &c. y $l(1+z)=Az+Bzz+Cz^3+Dz^4$; tendremos $l(1+z)=l(1+x)^m=ml(1+x)=(mAx+mBxx+mCx^3+\&c.)=(Az+Bzz+Cz^3+Dz^4+\&c.)$: pongase en este último miembro el valor de z que sacamos antes, y se reducirá la equacion á esta.........

$$mAx+mBxx+mCx^3+mDx^4+ \&c.$$

$$=\left\{\begin{array}{lll} mAx+\frac{1}{2}m(m-1)Axx+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}Ax^3+\&c. \\ \quad +mmBxx \qquad +mm(m-1)Bx^3+\&c. \\ \qquad\qquad +m^3\times Cx^3 \qquad +\&c. \end{array}\right.$$

en donde reduciendo y comparando los términos homólogos, resulta $A-A=o$, $B=-\frac{1}{2}A$, $C=\frac{1}{3}A$, $D=-\frac{1}{4}A$ &c. luego $l(1+x)=A(x-\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$ &c.) Aqui se ve que á $1+x$ corresponderán diferentes logarítmos segun los diferentes valores que se den á la indeterminada A que es *módulo*; pero haciendo $x=o$, siempre se tiene $l\,1=o$, como lo digimos (698). De la suposicion $A=1$ resultan los logarítmos hiperbólicos, que por mas sencillos, se llaman *naturales*: y como por ellos se pueden sacar los de los demas sistemas, multiplicándolos por el módulo correspondiente A, hablarémos de los hiperbólicos.

Y por quanto la série sacada para el ..... $l(1+x)$ es poco convergente aun quando x es un número pequeño, sacarémos para darle una forma mas ventajosa, el $l(1-x)=-x-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-$ &c. y será $l(1+x)-l(1-x)=l\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\&c.)$ série por la que se sacará el logarítmo hiperbólico de un número qualquiera mayor que 1, y que será muy convergente; pues igualando el número á $\frac{1+x}{1-x}$ siempre será x menor que 1. Para sacar por egemplo, el logarítmo de 2, haremos $2=\frac{1+x}{1-x}$, y será.... $x=\frac{1}{3}$; luego $l2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 3^3}+\frac{1}{5\times 3^5}+\ldots\right.$ $\left.\frac{1}{7\times 3^7}+\&c.\right)=0,6931458$. Del mismo modo hubieramos sacado $l10=2,30258509$. El duplo del logarítmo de 2 es el de 4, el triplo el de 8: la suma de los de 2 y 4 será logarítmo de 6: la mitad del de 10 será el de 5, y asi de los demas que se sacarán facilísimamente calculados los de los números primeros.

703 Siendo 2,30258509 el logaritmo hiperbólico de 10, y el de las tablas 1; tendremos $1=A\times 2,3025809$, de consiguiente $A=\frac{1}{2,3025809}=0,43429448$ valor del módulo de los logarítmos de las tablas, por el que se deben multiplicar para reducirlos á hiperbólicos: y estos al contrario, se reducirán á los de las tablas partiéndolos por.... 0,43429448.

704 *Si dado un logarítmo, se nos pidiese el número que le corresponde*: suponiendo z el logaritmo dado, y $1+x$ el número que se

busca, será (702) $z = x - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \&c.$ Para averiguar ahora el valor de x en z (697), sea $x = Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 + \&c.$ y será......

$$z = \begin{cases} Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 + \&c. \\ -\frac{1}{2}AAzz - ABz^3 - \frac{1}{2}BBz^4 - \&c. \\ \qquad\qquad\qquad -ACz^4 - \&c. \\ \qquad +\frac{1}{3}A^3z^3 + AABz^4 - \&c. \\ \qquad\qquad -\frac{1}{4}A^4z^4 - \&c. \end{cases}$$

De donde se saca $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, $D = \frac{1}{24}$ &c. luego $x = z + \frac{zz}{2} + \frac{z^3}{2\times3} + \frac{z^4}{2\times3\times4} + \ldots\ldots \frac{z^5}{2\times3\times4\times5} + \&c.$ y finalmente $1 + x = 1 + z + \frac{zz}{2} + \frac{z^3}{2\times3} + \frac{z^4}{2\times3\times4} + \&c.$ En general un número qualquiera $n = 1 + \mathrm{l}n + \frac{(\mathrm{l}n)^2}{2} + \frac{(\mathrm{l}n)^3}{2\times3} + \frac{(\mathrm{l}n)^4}{2\times3\times4}$ &c. série que siempre es convergente, y de consiguiente que resuelve la cuestion. Apliquemosla á encontrar la base de los logarítmos hiperbólicos de que se usa mucho en el cálculo integral: y pues su logaritmo es 1, tendremos $n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \frac{1}{2\times3\times4\times5} = 2{,}71828183$. Adviértase que el logarítmo dado se reduce á hiperbólico quando no lo es, antes de la operacion.

705 Supuesto que debe haber igual razon entre las cantidades variables y los aumentos ó decrementos semejantes que les sobrevengan; es evidente que si por medio de estos conseguimos determinar dicha relacion entre las cantidades; quedará esta determinada aunque reduzcamos á cero ó hagamos desvanecer los tales elementos, como que son partes infinitamente pequeñas de las cantidades. Este arbitrio para descubrir las cantidades por medio de sus elementos, es el objeto del *cálculo diferencial*, como veremos mas claramente por los egemplos, despues que hayamos enseñado á expresar algébricamente los elementos de toda clase de cantidades, que por el modo con que se sacan, se llaman *diferenciales*, y que se representan con la letra *d* puesta al lado de la cantidad cuyas partes significa.

706 Si las cantidades variables x, y crecen en un instante de una parte infinitamente pequeña dx, dy, vendrán á ser $x+dx$, $y+dy$, y la diferencia entre lo que son ahora y lo que antes eran, será $x+y+dx+dy-x-y=dx+dy$: estas son las *diferenciales* de x, y que *se sacarán de qualesquiera cantidades sumadas ó restadas juntando á cada variable la letra característica* d, que se pone despues del

coeficiente si le hubiese; pues si $3x$ crece de $3dx$, será su diferencial $3x+3dx-3x=3dx$: la de $ay-z$ es $ady-dz$; y la de $2cx+ab-\frac{my}{n}$ es $2cdx-\frac{mdy}{n}$. En ab y en qualquier otra cantidad constante es cero la diferencial; pues no crece ni mengua su valor. Hemos supuesto y supondremos en lo sucesivo que las variables crezcan y vengan á ser $x+dx$, $y+dy$; pero llevese entendido que si menguan serán $x-dx$, $y-dy$, y sus diferenciales $-dx-dy$: y si creciendo x decrece y serán dichas diferenciales $dx-dy$.

707 Para diferenciar xz, multiplicarémos estas cantidades aumentadas $(x+dx)\times(z+dz)$, y restando xz del producto $xz+xdz+zdx+dxdz$, quedará $zdx+xdz+dzdx$ por diferencial de xz, que se reduce á $zdx+xdz$ despreciando el infinitamente pequeño de 2.° orden $dxdz$ respecto de zdx y xdz que lo son de 1.° (686): luego en *las cantidades multiplicadas se diferencia cada variable considerando á las otras como constantes*. Y asi la diferencial de xyz será $xydz+xzdy+yzdx$, diferenciando primero como si xy fuesen constantes, despues como si lo fuesen xz, y por último como si lo fuesen yz: y la de $5axz-\frac{b}{a}yz$, ó $d(5axz-\frac{b}{a}yz)=5axdz+5azdx-\frac{b}{a}ydz-\frac{b}{a}zdy$. Para no equivocarse, con-

viene escribir la última la variable que se diferencia.

708 Por esta misma regla será la diferencial de xx, $xdx+xdx=2xdx$: la de x^3, $xxdx+xxdx+xxdx=3xxdx$: la de x^4, $4x^3dx$, y en general la de x^m, $mx^{m-1}dx$: luego *una cantidad variable elevada á qualquier potencia, se diferencia multiplicando por el esponente de la potencia la cantidad disminuido su esponente de 1, y por la diferencial de la variable*, de manera que la diferencial de ax^5 ó $d(ax^5)$ será $5ax^4dx$: $(z^{-2})=-2z^{-3}dz$: $d(x^{\frac{3}{5}})=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx$: $d(y^{-\frac{3}{8}})=-\frac{3}{8}y^{-\frac{11}{8}}dy$. La diferencial de ax^3z^2, considerando á x^3z^2 como dos variables simples, es $ax^3(d(zz)+az^2(d(ax^3)=2ax^3zdz+3az^2x^2dx$: en general $d(ax^mz^n)=ax^m(d(z^n)+az^n(d(x^m)=\ldots nax^mz^{n-1}dz+maz^nx^{m-1}dx$.

709 Si el quebrado $\frac{x}{z}$ se escribe asi xz^{-1} (93), será su diferencial $z^{-1}dx-xz^{-2}dz=\frac{dx}{z}-\frac{xdz}{zz}=\frac{zdx-xdz}{zz}$: *luego si se multiplica la diferencial del numerador de un quebrado variable por el denominador, y la de este por el numerador, y restando este producto del 1.°, se divide el residuo por el cuadrado del denominador, se tendrá la diferencial del*

quebrado. Y asi $d\left(\frac{3z^2-a}{bx}\right)=$ .... $\frac{6bxzdz-3bz^2xdx+abdx}{bxx}$.

Con estas reglas podremos diferenciar qualesquiera cantidades algébricas. Por egemplo, $d\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{dz}{zz}$: $d(2x^3z-cz^2yx-ab)=$ $2x^3dz+6zx^2dx-cz^2ydx-cz^2xdy-2cxyzdz$: $d(c-az+bx^3)^4$ contando toda la cantidad por una variable, es $4(c-az+bx^3)^{4-1}\times d(c-az+bx^3)=4(c-az+bx^3)^3\times(-adz+3bx^2dx)$: y por igual razon, tratando á los dos factores como dos variables, $d(ax^2\times(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}})=$ $(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}\times(d(ax^2))+ax^2\times d(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}=$ $2axdx(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}ax^2(mz^3+a-z)^{-\frac{1}{2}}\times$ $(3mz^2dz-dz)$.

Quando hay radicales se convierten en sus iguales con esponentes fraccionarios (115): y asi $d(\sqrt{z})=d(z)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{dz}{2\sqrt{z}}$: $d(\sqrt[4]{x^5})=d(x^{\frac{5}{4}})=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}dx$: $d(\sqrt{(ab-xx)})=$ $d(ab-xx)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(ab-xx)^{-\frac{1}{2}}\times d(ab-xx)=$ $-xdx(ab-xx)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{xdx}{\sqrt{(ab-xx)}}$: $d(a\sqrt[m]{\ldots}$ $(cx-az^2)^n=d(a(cx-az^2)^{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}a\times(cx-$

$$az^2)^{\frac{n}{m}-1} \times (cdx - 2azdz) : \text{y } d\left(\frac{\sqrt{(x^2-a^2z)^m}}{(x+b)^3}\right)$$

$$= d(x+b)^{-3} \times (x^2-a^2z)^{\frac{m}{2}} = \frac{m}{2}(x+b)^{-3} \times \ldots$$

$$(x^2-a^2z)^{\frac{m}{2}-1} \times (2xdx - aadz) - 3dx(xx -$$

$$aaz)^{\frac{m}{2}} \times (x+b)^{-4} = \&c.$$

710 *La diferencia segunda* de una cantidad se saca diferenciando de nuevo el resultado de la 1.ª, y se representa con dos *dd*: *la diferencia* 3.ª se expresa con tres *ddd*, y viene á ser una nueva diferenciacion de la 2.ª &c. ddx ó d^2x indica la diferencia 2.ª de x: $dddx$ ó d^3x la diferencia 3.ª &c. pero no se ha de equivocar d^2x, $d^3x \ldots d^mx$ diferencia 2.ª 3.ª. ....m.ª de x, con $dx^2 = dxdx$, $dx^3 = dxdxdx \ldots dx^m$, cuadrado, cubo y potencia m de dx; asi como dx^2, $dx^3 \ldots dx^m$ son distintos de $d(x^2)$, $d(x^3) \ldots d(x^m)$ que indican la 1.ª diferencial de x^2, de x^3, de x^m.

711 Será pues la 2.ª diferencial de x, ddx: la de xz, se saca diferenciando de nuevo su primer diferencia $xdz + zdx$, tomando á x, dz, z, dx, como otras tantas variables: y es $xddz + dzdx + zddx + dxdz = xddz + 2dzdx + zddx$: la de xx en cuya primer diferencia $2xdx$ se consideran dos variables $2x$ y dx, es $2xddx + 2dx^2$: y generalmente la

2.ª diferencia de x^m ó $d(mx^{m-1}dx)$ es...... $mdx^{m-1}ddx+m(m-1)x^{m-2}dx^2$: como tambien $dd\left(\frac{x}{z}\right)=d\left(\frac{zdx-xdz}{zz}\right)=$..................
$\frac{z^3ddx+z^2dxdz-z^2xddz-z^2dxdz-2z^2dxdz+2xzdz^2}{z^4}=$
$\frac{z^2ddx-zxddz-2zdxdz+2xdz^2}{z^3}$. Lo mismo se practíca para diferenciar las cantidades en que haya ya diferencias primeras : y asi diferenciando de nuevo zdx, resulta $d(zdx)=dzdx+zddx$: $d\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{dyddx-dxddy}{dy^2}$: ....
$d(\sqrt{(dz^2+dx^2)})=d(dz^2+dx^2)^{\frac{1}{2}}=$......
$\frac{1}{2}(dz^2+dx^2)^{-\frac{1}{2}}\times d(dz^2+dx^2)=\frac{dzddz+dxddx}{\sqrt{(dz^2+dx^2)}}$:
y $d\left(\frac{ydx}{dy}\right)=d(ydxdy^{-1})=dx+\frac{yddx}{dy}-\frac{ydxddy}{dy^2}$.

712 Si en un cálculo en que haya diferencias primeras de distintas variables, referimos á una como á término de comparacion, todas las demas; es decir, si suponemos constante una de dichas primeras diferencias, se desvanecerán los términos en que entren las diferencias segundas de dicha variable que son cero (706), y el cálculo quedará mas

sencillo. Por egemplo la segunda diferencia de $\frac{dx}{dy}$ suponiendo á dx constante, es...... $-dxdy^{-2}ddy = \frac{-dxddy}{dy^2}$: y suponiendo constante á dy, es $\frac{ddx}{dy}$; por ser en el 1.er caso $ddx=o$, y en el 2.° $ddy=o$.

713 *Las diferencias terceras* se sacan del mismo modo que las segundas, tomando á las cantidades variables, á sus diferencias primeras y segundas, como otras tantas variables; y lo mismo se debe practicar para las diferencias quartas, quintas &c. advirtiendo que en todas las diferenciaciones se ha de contar por constante la diferencia que en las anteriores se haya supuesto tal. Finalmente las cantidades omitidas en la 1.ª diferenciacion (707) no alteran el cálculo de la 2.ª; pues vueltas á diferenciar aquellas que eran de 2.° orden hubieran resultado de 3.°, cuya omision nada quita á las de 2.° (686).

Modo de diferenciar las cantidades que incluyen senos, cosenos &c. las Logarítmicas y Esponenciales.

714 Si el seno x de un ángulo ó arco, llega á ser $x+dx$, tendremos (527) suponiendo $r=1$, $sen\,(x+dx) = sen\,x\ cosen\,dx + sen\,dx$

cosen x: y como el seno de un arco dx infinitamente pequeño se confunde con el arco ó *sen* $dx = dx$, y su coseno es el radio (518) ó *cosen* $dx = 1$, será *sen* $(x+dx) =$ *sen* $x + dx$ *cosen* x: tomemos pues la diferencial, y resultará $d(\text{sen}\,x) = d(\text{sen}\,x+dx) = \text{sen}\,x + dx\ \text{cosen}\,x - \text{sen}\,x = dx\ \text{cosen}\,x$, ó *la diferencial de un seno, cuyo radio es* 1, *es el producto de la diferencial su ángulo multiplicada por su coseno.*

715 Tambien *coseno* $(x+dx) = \text{cosen}\,x\ \text{cosen}\,dx - \text{sen}\,x\ \text{sen}\,dx$ (527): luego siendo *sen* $dx = dx$, *cosen* $dx = 1$, será $\text{cosen}\,(x+dx) = \text{cosen}\,x - dx\ \text{sen}\,x$, y $d(\cos x) = d(\text{cosen}\,x+dx) = \text{cosen}\,x - dx\ \text{sen}\,x - \text{cosen}\,x = -dx\ \text{sen}\,x$: es decir, *la diferencial del coseno de un ángulo ó arco cuyo radio es* 1, *igual al producto negativo de la diferencial del ángulo multiplicada por su seno.* En virtud de estas dos reglas y de las anteriores, tendremos que $d(\text{sen}\,4x) = 4dx\ \cos 4x$: $d(\text{sen}\,ax) = adx\ \text{cosen}\,ax$: $d(\text{cosen}\,mz) = -mdz\ \text{sen}\,mz$: $d\,(\text{sen}\,x\ \text{cosen}\,z = \text{cosen}\,z \times d(\text{sen}\,x) + \text{sen}\,x \times d(\text{cosen}\,z) = \text{cosen}\,z dx\ \text{cosen}\,x - \text{sen}\,x dz\ \text{sen}\,z$: y $d(\text{sen}\,x)^m = m(\text{sen}\,x)^{m-1}\,d(\text{sen}\,x) = mdx\ \cos x(\text{sen}\,x)^{m-1}$.

716 Por ser $\text{tang}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$ (521), será

$$d(\text{tang}\,x) = d\left(\frac{\text{sen}\,x}{\text{cosen}\,x}\right) = \frac{dx\ \text{cosen}^2 x + dx\ \text{sen}^2 x}{\text{cosen}^2 x}$$

$$(709) = \frac{dx}{\text{cosen}^2 x}(\text{cosen}^2 x + \text{sen}^2 x) = \frac{dx}{\text{cosen}^2 x},$$

por ser $cosen^2x+sen^2x=rr=1$ (525): y será *la diferencial de la tangente de un arco ó ángulo cuyo radio es 1, el cociente de la diferencial del ángulo partida por el cuadrado de su coseno*; y como en $d(tang\,x)=\frac{dx}{cosen^2x}$, es $dx=cosen^2x\times d(tang\,x)$; *será la diferencial del ángulo el producto de la diferencial de su tangente multiplicada por el cuadrado de su coseno. Tambien es la diferencial de la cotangente de tal ángulo el cociente negativo de la diferencial de dicho ángulo partida por el cuadrado de su seno*; pues siendo $d(cotang\,x)=$

$$d\left(\frac{cosen\,x}{sen\,x}\right)\ (522)=-\frac{dx(sen^2x)-dx(cosen^2x}{sen^2x}$$

$$(709)=-\frac{dx}{sen^2x}(sen^2x+cosen^2x),\text{ será } \ldots.$$

$$d(cotang\,x)=-\frac{dx}{sen^2x}:\text{ por ser } sen^2x+\ldots$$

$cosen^2x=1$. Con las quales reglas y las hasta aqui dadas será facil diferenciar qualesquiera cantidades que contengan senos, cosenos, tangentes &c.

717 Para la diferenciacion de *las cantidades logarítmicas*, tomense de uno y otro lado de la linea indefinida AY (fig. 172) las partes iguales AE, EF &c. AC, CX, XO; y en los puntos O, X, C, A, levantense las perpendiculares OL, XM', CN, AB &c. que representen los números de una progresion

geométrica. Si la AB es la unidad, formarán las AE, AF, AG &c. una progresion aritmética: de suerte que qualquiera de las abscisas AP por egemplo, será el término aritmético que corresponde al geométrico PM, ó AP será el logaritmo de PM (209). Hagase ahora pasar una linea por todos los puntos L, M', N &c. y se tendrá la *logarítmica*, curva que tiene por ordenadas lineas, cuyos valores están en progresion geométrica, y por abscisas otras que están en progresion aritmética.

718 Si suponemos en ella que la ordenada PM$=y$ viniendo á ser pm crezca de la cantidad infinitamente pequeña mr, será P$p=$ Mr el aumento de la abscisa AP$=x$; de consiguiente serán $mr=dy$ y M$r=dx$ las diferenciales de MP y AP. Si se tira ahora la tangente TM, y llamamos a la subtangente PT, tendremos en los triángulos MPT, Mmr semejantes por las paralelas, mr:Mr::MP:PT, ó $dy:dx::y:a=\frac{ydx}{dy}$, equacion á la logarítmica, en la que la subtangente a cantidad constante, es lo que hemos llamado *módulo* (698). De ella se saca $dx=\frac{ady}{y}=\frac{dy}{y}$ haciendo $a=1$; y como en esta suposicion dx es la diferencial del logarítmo hiperbólico x que corresponde al número PM; tendremos que *la diferencial del logaritmo de un número qual-*

quiera y *es su diferencial* dy *dividida por el mismo número* y.

En virtud de lo qual $d(lx) = \frac{dx}{x}$:
$dl(a+x) = \frac{dx}{a+x}$: $dl\left(\frac{a}{a+x}\right) = d(la - l(a+x))$
$= \frac{-dx}{a+x}$: $dl\frac{1}{x} = d(l1 - lx) = \frac{-dx}{x}$: $dlx^2 =$
$d(2lx) = \frac{2dx}{x}$: $dlx^n = d(nlx) = \frac{ndx}{x}$:
$d(lxz) = d(lx + lz) = \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} = \ldots\ldots$
$\frac{zdx + xdz}{xz}$: $d\left(l\frac{x}{z}\right) = d(lx - lz) = \frac{dx}{x} - \frac{dz}{z}$:
$d\left(l\frac{c+z}{a-x}\right) = \frac{dz}{c+z} - \frac{dx}{a-x}$: $d(l(bb-yy)) =$
$\frac{-2ydy}{bb-yy}$: $d(l\sqrt{(aa+zz)}) = \frac{d(\sqrt{(aa+zz)})}{\sqrt{(aa+zz)}} =$
$\frac{zdz}{aa+zz}$: $d(lz^m \sqrt[n]{(a+cx^q)^p} = (lz^m + d(l(a+cx^q)^{\frac{p}{n}} =$
$d(mlz + d(\frac{p}{n}l(a+cx^q) = \frac{mdz}{z} + \frac{\frac{p}{n}qcx^{q-1}dx}{(a+cx^q)}$.

719 Las cantidades *esponenciales* son aquellas que tienen por esponente una cantidad variable como x^z, y^x. Para diferenciarlas supongamos $x^z = y$, será $lx^z = ly$, y $dlx^z = \frac{dy}{y}$, ó $dy = ydlx^z$: pongamos por y su valor

x^z, y tendremos dy ó $dx^z = x^z dlx^z$; esto es, *la diferencial de una cantidad esponencial* x^z *es el producto de dicha esponencial multiplicada por la diferencial* dlx^z *de su logarítmo;* de suerte que $dx^z = x^z dlx^z = x^z\left(dzlx + \frac{zdx}{x}\right)$: $d(a^x + y^z) = a^x dla^x + y^z dly^z = a^x dxla + y^z\left(dzly + \frac{zdy}{y}\right)$: y $d(aa+x^2)^x = (aa+x^2)^x \times dl(aa+x^2)^x = (aa+x^2)^x\left(dxl(aa+x^2) + \frac{2xxdx}{aa+xx}\right)$.

720 Si se hubiera de diferenciar c^x en el supuesto de ser c un número cuyo logarítmo es 1, se tendría $d(c^x) = c^x dlc^x = c^x dxlc$, y como $lc = 1$, será $dc^x = c^x dx$: expresion de la diferencial de la base de los logarítmos hiperbólicos. Las diferencias segundas, terceras &c. se sacan de estas cantidades y de las anteriores como de las demas (710).

Aplicacion del Cálculo diferencial á las Lineas curvas.

721 Supuesto que una curva viene á ser un polígono de infinitos lados, de los quales uno de ellos M*m* alargado hasta T formaría la tangente TM (fig. 173); sea *pm* una ordenada infinitamente proxîma á la PM, y M*r* una paralela al ege SH: si llamamos á PM, y; SP, x; será P*p* = M*r*, dx, *mr*, dy; y M*m* =

$\surd(dx^2+dy^2)$ en el triángulo rectángulo Mmr: y en los triángulos semejantes Mmr, MPT se tendrá 1.° rm:Mr::MP:PT, ó $dy:dx::y$:PT$=\frac{ydx}{dy}$: expresion general de la subtangente de qualquiera curva; en la que sustituyendo por $\frac{dx}{dy}$, y, sus correspondientes valores sacados de la equacion de la curva de que se trate, saldrá el de su subtangente: y de consiguiente se tendrá el punto T por el que se podrá tirar la tangente á un punto M dado.

722 2.° Tambien se tiene en dichos triángulos rm:Mm::PM:TM ó $dy:\surd(dx^2+dy^2)$:: y:TM$=\frac{y\surd(dx^2+dy^2)}{dy}=y\surd\left(\frac{dxx}{dy^2}+1\right)$: expresion general de la tangente. 3.° La de la subnormal se saca de los triángulos semejantes Mmr, PMR en que Mr:mr::PM:PR, ó $dx:dy::y$:PR$=\frac{ydy}{dx}$. 4.° La proporcion Mr: Mm::PM:MR, ó $dx:\surd(dx^2+dy^2)::y$:PR$=\frac{y\times\surd(dx^2+dy^2)}{dx}=y\surd\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)$ da el valor de la normal. 5.° Finalmente tirada por S la SD paralela á PM, en los triángulos semejantes TSD, TPM tendremos PT:PM::ST=

$PT-SP:SD$, ó $\frac{ydx}{dy}:y::\frac{ydx}{dy}-x:SD=y-\frac{xdy}{dx}$.

Con los valores de ST y SD sacados de la equacion á la curva, se tendrán suponiendo en ellos x infinita, dos puntos T, D por donde deben pasar las asíntotas de la curva que las tenga. Con efecto, en la tangente á una distancia infinita los puntos T y D, se confnndirán con C y B por donde sabemos que pasan las asíntotas de la hipérbola (665).

723 Para aplicar estas fórmulas al círculo, tomemos su equacion $yy=aa-xx$, que diferenciada es $2ydy=-2xdx$: despéjese en ella la expresion de la subtangente, y será...... $\frac{ydx}{dy}=-\frac{yy}{x}=-\left(\frac{aa-xx}{x}\right)=PT$, poniendo por yy, $aa-xx$. El signo $-$ indica que la PT se ha de tomar hácia el centro desde donde se cuentan las abscisas, al contrario de como se tomó en la fórmula para la qual se contaron desde el vértice (721). En la equacion $yy=2ax-xx$ en que igualmente se cuentan desde el vértice (603), se tiene $\frac{ydx}{dy}=\frac{yy}{a-x}=$.. $\frac{2ax-xx}{a-x}$. Tambien se encuentra en la equacion $yy=aa-xx$ diferenciada, la subnormal $\frac{ydy}{dy}=-x$, y la normal $\sqrt{\left(yy+\frac{yydy^2}{dx^2}\right)}=$ $\sqrt{(xx+yy)}=a$ radio del círculo.

724 En la parábola cuya equacion es $yy = px$, se tiene diferenciando $2ydy = pdx$; luego la subtangente $PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{2yy}{p} = 2x$, poniendo px en lugar de yy: la subnormal $\frac{ydy}{dx} = \frac{py}{2y} = \frac{1}{2}p$: y asi de las demas. En la elipse cuya equacion diferenciada es $2ydy = \frac{bb}{aa}(-2xdx)$, se tiene la subtangente $PT = \frac{ydx}{dy} = -\frac{aa}{bx}\left(bb - \frac{bbxx}{aa}\right) = -\left(\frac{aa-xx}{x}\right)$, y la subnormal $PR = \frac{ydy}{dx} = -\frac{bbxy}{aay} = -\frac{bbx}{aa}$, ambas negativas por contarse las abscisas al reves que en la fórmula.

725 Del mismo modo encontrarémos en la hipérbola la subtangente $PT = \frac{ydx}{dy} = x - \frac{aa}{x} = \frac{xx-aa}{x}$, y la subnormal $PR = \frac{ydy}{dx} = \frac{bbx}{aa}$. En su equacion á las asíntotas $xy = mm$, se tiene $xdy + ydx = o$, y la subtangente $\frac{ydx}{dy} = -x$: de suerte que se debe tirar la $p't$ del lado opuesto al punto C origen de las abscisas, y asi se tirará por t y m' la tangente tm'. Para determinar sus asíntotas tomemos la

equacion $yy = \frac{bb}{aa}(2ax+xx)$, y diferenciada, despejemos $\frac{ydx}{dy} - x$ en su resultado $2a^2ydy = 2adx + 2xdx$, y encontrarémos $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{ax}{a+x}$, que se reduce á $a =$ SC suponiendo x infinita. Despejando despues $y - \frac{xdy}{dx}$, sale $b =$ SB: luego las asíntotas deberán pasar por C y B. Quando resulta infinito el valor de SB, siendo SC finito, es señal de que la asíntota es paralela á la ordenada PM; y lo será al ege de las abscisas quando SB es finito y SC infinito.

726 Del triángulo rectángulo $r\mathrm{M}m$ (721) se saca, haciendo al radio 1, $rm : r\mathrm{M} :: 1 : tang.\ rm\mathrm{M} = \frac{r\mathrm{M}}{rm} = \frac{dx}{dy}$, y $r\mathrm{M} : rm :: 1 : tang\ r\mathrm{M}m = \frac{rm}{r\mathrm{M}} = \frac{dy}{dx}$. Será pues, $\frac{dx}{dy}$ la expresion de la tangente del ángulo $rm\mathrm{M}$ que forma la curva ó su tangente en cada punto con la ordenada, y $\frac{dy}{dx}$ la de la tangente $r\mathrm{M}m$ que forma con el ege de las abscisas: de consiguiente si despejamos en la equacion de una curva, despues de diferenciada, $\frac{dx}{dy}$ ó $\frac{dy}{dx}$, tendremos

respecto de ella el valor de dichos ángulos: y al contrario, para saber en qué punto forma la curva un ángulo conocido con su ordenada, se igualará el valor de la tangente de dicho ángulo con el de $\frac{dx}{dy}$, sacado de la equacion diferenciada de la curva; pues poniendo en el resultado en lugar de y su valor, el de x será el punto que se busca, sino es imaginario ó absurdo; pues entonces en ningun punto formará la curva dicho ángulo.

Del método de los Mâxîmos y Mínimos.

727 Para percibir la economía de este método que se dirige á encontrar las mayores ó menores cantidades que crecen ó menguan segun cierta ley, ó que tienen en mayor grado que todas sus semejantes alguna propiedad determinada; concibamos que la ordenada PM (fig. 174) de una curva SMBs crece hasta llegar á ser la mayor BC: crecerá la subtangente en la fig.ª 1.ª hasta que en el punto B resulta infinita, por ser paralela la tangente BR al ege de las abscisas Ss, y menguará en la fig.ª 2.ª hasta desvanecerse, por confundirse la tangente con la ordenada CB. Si dicha ordenada continúa hasta s, será la subtangente negativa, que va aumentando en la figura 2.ª y menguando en la 1.ª Las mis-

mas observaciones tienen lugar respecto del ege Aa, y la ordenada $p'M'$ que va menguando hasta llegar á ser la menor Bc; luego 1.° *una cantidad que pasa de positiva á negativa, ó pasa por el infinito si crece, ó por cero si mengua.*

728 2.° En el punto B (fig. 1.ª) se desvanece el ángulo que la tangente forma con el ege de las abscisas Ss, y en la fig. 2.ª el que forma con el de las ordenadas; es decir, que en estos puntos es cero $\frac{dx}{dy}$ y $\frac{dy}{dx}$: y como dichos puntos son los de las mayores y menores ordenadas, tendremos *que en ellos es cero la diferencial* dx ó dy *de la variable.* Como la expresion de qualquiera cantidad variable se puede considerar como el valor de la ordenada de una curva; podremos inferir generalmente que para averiguar los puntos del máximo y mínimo de qualquiera cantidad, se ha de diferenciar su expresion, y suponiendo su diferencial igual á cero, resultará el valor ó valores que sustituidos en la primera expresion darán los puntos del máxîmo ó mínimo: advirtiendo que un valor negativo supone una condicion contraria á la de la cuestion propuesta, y los imaginarios prueban que no hay el máxîmo ni el mínimo que se busca. Por este mismo método deben determinarse los puntos en que la tangente es pa-

ralela á los eges, y *los límites* de las abscisas y ordenadas de una curva; pues unos y otros no son otra cosa que los del máxîmo y mínimo en este género.

729 De lo dicho podemos colegir que si de resultas de una operacion saliese a por valor de x, y se quisiese saber si a es un máxîmo ó mínimo, sustituiremos sucesivamente en la expresion propuesta en lugar de x, $a+q$, a, $a-q$ (a es una cantidad qualquiera): y si la sustitucion de las cantidades extremas diese resultados menores que la de la media, será a un máxîmo: si los diese mayores, será un mínimo: y si siendo el un resultado real, fuese el otro un imaginario, será al mismo tiempo un máxîmo y un mínimo.

730 Egemplo 1.° *Hallar la mayor ordenada y abscisa de la elipse.* Si en su equacion $aayy=2abbx-bbxx$, que diferenciada es $2aaydy=2abbdx-2bbxdx$, suponemos $dx=o$, quedará $2aaydy=o$, ó $y=o$: pongase este valor en la equacion $yy=\frac{bb}{aa}(2ax-xx)$, y tendremos $o=2abbx-bbxx$, y $x=2a$: luego *la mayor abscisa en la elipse, contándolas desde el vértice, es el ege mayor.* Si en la equacion diferenciada hacemos $dy=o$, tendremos $o=2abbdx-2bbxdx$, donde $x=a$; cuyo valor sustituido en la equacion á la curva, la reduce á $aayy=2aabb-aabb$, que da $y=\pm b$:

será pues el semiege menor la mayor ordenada de la elipse.

731 2.° *Desde un punto* R (fig. 173) *dado en el ege de una curva qualquiera, tirar á ella la recta mas corta que sea posible.* Sea SP$=x$, PM$=y$, PR$=t$, y MR$=u$ que consideraré como ordenada de una curva; será en el triángulo rectángulo MPR, $(MR)^2=$.. $(MP)^2+(PR)^2$ ó $uu=tt-2tx+xx+yy$: diferencio, y suponiendo en el resultado $2udu=$ $-2tdx+2xdx+2ydy$, $du=o$, tendré $o=$ $-2tdx+2xdx+2ydy$, donde poniendo el valor de ydy sacado de la equacion á la curva, me resultará el de x que se pide. Si fuese por egemplo, la parábola en la que $yy=px$, $2ydy=pdx$, $ydy=\frac{1}{2}pdx$; sustituido este valor en la equacion sacada, resulta $o=-2tdx+$ $2xdx+pdx$, y $\frac{1}{2}p=t-x$: luego siendo $\frac{1}{2}p$ el valor de la subnormal en la parábola (623), será $t-x=$PR la subnormal, y la menor que se puede tirar desde M á la curva será la normal MR.

732 3.° *Para dividir un número qualquiera* a *en dos partes tales que su producto sea mayor que el de otras dos qualesquiera del mismo número*; suponiendo x por una de las partes, será $a-x$ la otra; y $ax-xx$ el producto: si su diferencial $adx-2xdx$, se supone igual á cero, será $adx-2xdx=o$, $adx=$ $2xdx$, y $x=\frac{1}{2}a$: *luego el producto de las dos mitades de* a *será el máxîmo.*

733 4.° *Averiguar qué triángulo de un perímetro* 2p, *tendrá mayor superficie de los que se pueden trazar sobre la base* AB$=a$ (fig. 175). Si llamamos y la superficie, x uno de los lados AC que buscamos, será el otro $2p-a-x$; y tendremos (589) $y=\sqrt{(p(p-a)(p-x)(a+x-p))}$, ó cuadrando y valiéndonos de los logarítmos, $2\mathrm{l}y=\mathrm{l}p+\mathrm{l}(p-a)+\mathrm{l}(p-x)+\mathrm{l}(a+x-p)$. La diferencial de esta cantidad es $\frac{2dy}{y}=-\frac{dx}{p-x}+\frac{dx}{a+x-p}$ que se reduce, suponiendo $dy=o$, á $p-x=a+x-p$, ó $2p-a=2x$: luego el duplo $2x$ del lado AC iguala á todo el perímetro menos la base AB; esto es, serán iguales los dos lados AC, CB, y el triángulo que se busca es el isósceles. Y como por igual razon debe ser isósceles el construido sobre AC que tenga mayor superficie, podremos asegurar *que el triángulo equilátero es el que incluye mayor superficie entre los de un mismo perímetro.*

734 5.° *Para encontrar el paralelepipedo de mayor cabida entre los de una misma superficie* cc, *y altura* a; supondremos x, y, los dos lados del rectángulo de su base; y pues que de los seis rectángulos que forman su superficie, los dos tienen a por altura y x por base, otros dos la misma altura a con la base y, y los dos últimos y por base y x por altura; será toda la superficie del paralelepi-

pedo $2ax+2ay+2xy=cc$. La solidez axy que ha de ser un máxîmo, tendrá igual á cero su diferencial, ó $axdy+aydx=o$, y $dx=-\frac{xdy}{y}$. Este valor sustituido en la equacion anterior diferenciada $o=2adx+2ady+2xdy+2ydx$, la reduce á $x=y$, lo que muestra que la base debe ser un cuadrado: y si en $cc=2ax+2ay+2xy$ ponemos x en lugar de y, sacarémos $x=-a\pm\sqrt{(aa+\frac{1}{2}cc)}$, cuyo valor positivo es el lado del paralelepipedo; pues el negativo no pertenece á esta cuestion.

Reducido ya el sólido á axx, averiguarémos su altura en el caso de haber de tener la mayor solidez, igualando á cero su diferencial asi, $2axdx+xxda=o$, y sustituyendo $da=-\frac{2adx}{x}$ que de ella se saca en la equacion $4ax+2xx=cc$ despues de diferenciada, ó en $4adx+4xda+4xdx=o$; pues resulta $x=a$: de consiguiente *el paralelepípedo que buscamos, debe ser un cubo cuyo lado es la raiz cuadrada de la sesta parte de la superficie.* Con efecto, si se pone x en lugar de a en la equacion $4ax+2xx=cc$, resulta $x=\sqrt{\frac{cc}{6}}$.

735 6.° *Hallar las dimensiones de una medida cilíndrica, tal que con la menor superficie interior posible quepa en ella cierta cantidad de agua, trigo &c.* Si llamamos x

el diámetro AB (fig. 176) de su base, y su altura AD, s su cabida, y $1:c$ la razon del diámetro á la circunferencia, será cx la periferia de la base, $cx \times y$ la superficie interior lateral, y $cx \times \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}cxx$ la de la base: de consiguiente la solidez ó cabida $s = \frac{1}{4}cxx \times y = \frac{1}{4}cyxx$. De aqui se saca la superficie interior $cxy = \frac{4s}{x}$; luego si se le junta la de la base $\frac{1}{4}cxx$, será la total $\frac{4s}{x} + \frac{cxx}{4}$, de cuya diferencial igualada á cero $-\frac{4sdx}{xx} + \frac{cxdx}{2} = 0$, se saca $x = \sqrt[3]{\frac{8s}{c}} = 2\sqrt[3]{\frac{s}{c}}$. En ella se encuentra tambien $cx^3 = 8s$, y si se parte esta equacion por.... $\frac{1}{4}cyxx = s$, ó $cyxx = 4s$ que sacamos antes, resultará $\frac{x}{y} = 2$, y $x = 2y$; luego *la medida será como se pide, si fuese el diámetro de su base duplo de su altura.*

736 7.° *Determinar qué cono tiene mayor solidez, entre los que tienen una misma superficie conocida* s. Sea x el radio AC (fig. 177), y el lado AB, y $1:c$ la razon del diametro á la circunferencia; será la de la base $2cx$, su area cxx, y la superficie convexâ del cono cxy (476). Será pues, la superficie total $cxx + cxy = s$, y de consiguiente $y = \frac{s}{cx} - x$, y la

altura $CB = \sqrt{((AB)^2 - (AC)^2)} = \sqrt{\left(\frac{ss}{ccxx} - \frac{2s}{c}\right)}$: multiplíquese este valor por $\frac{1}{3}cxx$ tercio de la area de la base, y el producto $\frac{cxx}{3} \times \sqrt{\left(\frac{ss}{ccxx} - \frac{2s}{c}\right)}$ será la expresion de la solidez del cono (494). Siendo esta un máxîmo, lo será tambien su cuadrado $\frac{1}{9}ssxx - \frac{2}{9}csx^4$: luego su diferencial $\frac{2}{9}ssxdx - \frac{8}{9}x^3csdx = 0$, y $4cxx = s$, $x = \sqrt{\frac{s}{4c}}$. Si en la equacion $y = \frac{s}{cx} - x$ ponemos $4cxx$ valor de s, resultará $y = 3x$: *y el cono cuyo lado sea triplo del semidiámetro de la base, será el que se pide.*

De las Evolutas, y radios osculadores de las curvas.

737 Si un hilo aplicado á la curva BECG (fig. 178) y á su tangente SB en B, se desenvuelve teniendo su estremo fijo en G, y llevándole siempre tirante; trazará el otro estremo S una curva SHM, de la qual se llama *evoluta* la curva BECG, y las rectas SB, HE, MC *radios de la evoluta*. De consiguiente 1.° cada radio CM es igual á la porcion CEB del arco evoluto, y á la parte constante SB de tangente si la hay. 2.° Cada radio se puede considerar como la prolongacion de uno de

los infinitos lados que componen la curva (721), y por lo mismo será tangente suya.

738 3.° Como el arco de círculo trazado desde C con un radio menor ó mayor que CM caería dentro ó fuera de la porcioncita de curva Mm; podremos considerarla como un pequeño arco de círculo trazado desde C con el radio CM, el qual será perpendicular á dicho arco, y el punto C será el concurso de las dos normales infinitamente próxîmas CM, Cn que se llaman *radios del círculo osculador ó de la evoluta.* Tambien se llaman radios de *curvatura*; porque por ellos se averigua la que tiene una curva en qualquier punto; pues es la misma que la del círculo correspondiente cuyo radio se conoce. Y como los círculos son tanto menos curvos quanto mayores son sus radios, será tanto mayor la curvatura de la evoluta, quanto menor sea el radio: de consiguiente *la curvatura máxîma se encontrará buscando el radio mínimo.*

739 Sea pues SHM la curva en la que se ha de averiguar el valor del radio CM$=$R, suponiendo sus ordenadas perpendiculares al ege SD. Tirense á él las dos ordenadas PM, pm infinitamente próxîmas, y por C y M la CA y Mr paralelas al mismo ege: sea MA, u; PM, y; será A$a$$=Pp$$=Mr$$=dx$, $mr=dy=du$, y M$m=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ que llama-

rémos ds: y en los triángulos semejantes Mnr, MAC, tendremos $Mr(dx):Mm(ds)::MA(u):MC=R=\frac{uds}{dx}$.

Y pues que quando AM aumenta de rm pasando á ser am, la CM que es entonces Cm, no varía; será su diferencial cero: luego ...... $d\left(R=\frac{uds}{dx}\right)=\frac{udxdds+dxduds-udsddx}{dx^2}=o$, y multiplicando por dx^2 y poniendo dy en lugar de du, $udxdds+dxdyds-udsddx=o$, de donde se saca $u=\frac{dsdydx}{dsddx-dxdds}$: será pues .. $R=\frac{uds}{dx}=\frac{dyds^2}{dsddx-dxdds}$, donde poniendo por ds^2, dx^2+dy^2; y por dds, $\frac{dxddx+dyddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}$; resulta despues de multiplicar por $(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$ numerador y denominador y reducir, $R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx-dxddy}=\frac{ds^3}{dyddx-dxddy}$: expresion del radio de curvatura que suponiendo ds constante, se reduce á $R=\frac{dsdy}{ddx}=$ ...... $\frac{dy\surd(dx^2+dy^2)}{ddx}$: suponiendo dy constante es $R=\frac{d^3}{dyddx}=\frac{(dx^2+dy^2)\surd(dx^2+dy^2)}{dyddx}$: y finalmente suponiendo como se acostumbra; dx constante, es $R=\frac{ds^3}{-dxddy}$.

740 *Encontremos ahora el radio de curvatura del círculo.* Diferenciada su equacion $y=\sqrt{(2ax-xx)}$, es $dy=\frac{adx-xdx}{(\sqrt{2ax-xx})}$: luego si tomamos á dx por constante, será $ddy=\frac{-aadx^2}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$, $dy^2=\frac{aadx^2-2axdx^2+xxdx^2}{2ax-xx}$, $dx^2+dy^2=\frac{aadx^2}{2ax-xx}$, y $R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ será sustituyendo estos valores, y partiendo ambos términos por $(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}$, ...

$$\frac{(aadx^2)^{\frac{3}{2}}}{aadx^3}=\frac{aadx^2\sqrt{aadx^2}}{aadx^3}=a$$

; es decir que el radio de la evoluta en el círculo es su mismo radio, de suerte que la evoluta se reducirá á un punto que es el centro.

741 *Para calcular el radio de curvatura de la parábola, elipse é hipérbola*; igualemos la fórmula de la normal $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (722) á n, y será $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{ndx}{y}$, y $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{n^3dx^3}{y^3}$: si este valor se susti-

tuye en la expresion del radio, la reducirá á $R = \frac{n^3dx^2}{-y^3ddy}$. Si diferenciamos ahora la equacion general de las secciones cónicas $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$ (680), tendremos $2ydy = pdx \pm \frac{pxdx}{a}$, y volviendo á diferenciar tomando á dx por constante, $2yddy + 2dy^2 = \pm \frac{pdx^2}{a}$, ó $yddy = \pm \frac{pdx^2}{2a} - dy^2$: y multiplicando por yy, $y^3ddy = \pm \frac{p}{2a}yydx^2 - yydy^2$: pongase en esta equacion el valor de $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$, y el de $yydy^2 = \left(\frac{pdx}{2} \pm \frac{pxdx}{2a}\right)^2$ sacado de $2ydy = pdx \pm \frac{pxdx}{2a}$, y resultará $y^3ddy = \pm \frac{pdx^2}{2a} \times \left(px \pm \frac{pxx}{2a}\right) - \left(\frac{pdx}{2} \pm \frac{pxdx}{2a}\right)^2$, que se reduce á $y^3ddy = -\frac{ppdx^2}{4}$: luego $R = -\frac{n^3dx^2}{-y^3ddy} = \frac{4n^3}{pp} = \frac{n^3}{\frac{1}{4}pp}$: y *el radio de curvatura en las secciones cónicas será igual al cubo de la normal partido por el cuadrado de la mitad del parámetro.*

Si se saca por la fórmula de la normal $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = n$ la que corresponde á la equacion $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$, y se busca después su valor en el vértice en donde $x = o$, se encontrará $n = \frac{1}{2}p$; de consiguiente será entonces $R = \frac{\frac{1}{8}p^3}{\frac{1}{4}pp} = \frac{1}{2}p$: *y el radio de curvatura en el vértice de las secciones cónicas será la mitad del parámetro.*

Puntos de Inflexîon.

742 Todo punto M (fig. 179) en el que una curva de cóncava se muda en convexâ, se llama *punto de inflexîon.* En ellos la TM alargada será tangente á un tiempo á los dos ramos SM, *sm*; y por lo mismo tendrá la curva dos elementos M*o*, *om* en linea recta. Los radios que á ellos se tiren perpendiculares serán paralelos, y no se encontrarán sino á una distancia infinita. Sin embargo habrá curvas en donde sea tan repentina la inflexîon, que dichos elementos se vengan á confundir en uno lo mismo que los radios, en términos que juntándose en su mismo origen, se reduzcan á cero.

743 Luego en los puntos de inflexîon debe ser cero ó infinito el radio de curvatura, esto es, $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} = o$ ó $= \infty$: y dividien-

do ambos términos por dx^3, $\dfrac{\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\dfrac{ddy}{dx^2}} = 0$

ó $=\infty$. Para esto debe ser cero ó infinito el denominador (684) $-\dfrac{ddy}{dx^2}$: de consiguiente para determinar los puntos de inflexîon de una curva se ha de diferenciar dos veces su equacion, tomando á dx por constante, y sacando en cantidades finitas el valor de $\dfrac{-ddy}{dx^2}$, se igualará á cero ó al infinito, y de la equacion que resulta, junto con la de la curva se inferirán los valores de x, y correspondientes al punto ó puntos de la inflexîon.

744 Si se hubiese de hallar el punto de inflexîon de la curva SFK (fig. 180) cuyo diámetro es Ss, y cuya equacion es $axx = xxy + aay$, ó $y = \dfrac{axx}{xx+aa}$, siendo SE, x; y EF, y: diferencio la equacion, y tendré $dy = \dfrac{2a^3xdx}{(xx+aa)^2}$: vuelta esta á diferenciar, tomando á dx por constante, será $ddy = \ldots\ldots\ldots$ $\dfrac{2a^3dx^2(xx+aa)^2 - 8a^3xxdx^2(xx+aa)}{(xx+aa)^4}$ que se reduce partiendo numerador y denominador

por $xx+aa$, haciendo las operaciones indicadas y dividiendo despues por dx^2, á ....

$$\frac{ddy}{dx^2}=\frac{2a^3xx+2a^5-8a^3xx}{(xx+aa)^3}=-\frac{6a^3xx+2a^5}{(xx+aa)^3}\ .....$$

Igualo á cero esta cantidad, y me saldrá $3xx=aa$, $y\, x=a\sqrt{\frac{1}{3}}$: luego $y=\frac{1}{4}a$.

745 Sirva de 2.° egemplo averiguar el punto de inflexîon de la curva cuya equacion es $y=a+(x-a)^{\frac{3}{5}}$, ó $dy=\frac{3}{5}(x-a)^{-\frac{2}{3}}dx$ diferenciando: vuelta á diferenciar tomando por constante á dx, da $ddy=-\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}}dx^2$, y $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{-6}{25\sqrt[5]{(x-a)^7}}$ valor que igualado á cero produce $6=0$, lo qual nada significa. Se igualará pues, al infinito, y será su denominador cero, ó $25\sqrt[5]{(x-a)^7}=0$, de donde se saca $x=a$, por ser cero toda potencia ó raiz de cero.

CALCULO INTEGRAL.

746 Este cálculo, inverso del Diferencial porque busca las cantidades por medio de sus elementos, manifiesta con la letra S la *integracion* de dichas cantidades, que viene á ser la *suma* de sus elementos: de suerte que Sdx, $Smzdz$, muestran las integrales de dx, y $mzdz$.

Las cantidades que no provienen de una diferenciacion exâcta, no pueden ser integradas: las diferenciales de senos, arcos de círculo, y demas trascendentes se integran por aproxîmacion. Llamarémos *funcion* de una cantidad variable qualquiera expresion en donde dicha cantidad se encuentre como quiera que sea.

De las diferenciales con una sola variable capaces de integracion exâcta.

747 Pues que $ax^m dx$ es la diferencial de $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ (708), será esta la integral de $ax^m dx$, ó $Sax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$: luego *qualquier monomio se integra aumentando de 1 el esponente* m *de la variable, y dividiendo el resultado por el esponente aumentado y por la diferencial.* De suerte que la integral de $azdz$, ó $Sazdz$ es $\frac{az^{1+1}dz}{(1+1)dz} = \frac{az^2}{2}$: la de $12x^2dx$ ó $S12x^2dx$ es $\frac{12x^{2+1}dx}{(2+1)dx} = 4x^3$: y en general $S\frac{ax^{m-1}dx}{b} = \frac{ax^{m-1+1}dx}{b(m-1+1)dx} = \frac{ax^m}{mb}$. Efectivamente, si se diferencian $\frac{az^2}{2}$, $4x^3$ y $\frac{ax^m}{mb}$, resultan $azdx$, $12x^2dx$, y $\frac{ax^{m-1}dx}{b}$.

748 Siendo $dx = x^0 dx$, será $Sdx = \frac{x^{0+1}dx}{(0+1)dx} = x$: $Sadx = \frac{a^{0+2}dx}{(0+1)dx} = ax$: $Sadx \times \sqrt[3]{x} = Sadx \times x^{\frac{1}{3}} = Sax^{\frac{1}{3}}dx = \frac{ax^{\frac{1}{3}+1}dx}{(\frac{1}{3}+1)dx} = \frac{3ax^{\frac{4}{3}}}{4} = \frac{3a}{4}\sqrt[3]{x^4}$. Del mismo modo se aplica la regla general á otros qualesquiera monomios, tengan ó no radicales. Pero falla quando el esponente de la variable es -1 : pues integrando $x^{-1}dx$, resulta $\frac{a^{-1+1}dx}{(-1+1)dx} = \frac{x^0}{0}$, cantidad infinita; pero como $dx = \frac{dy}{y}$ sabemos (718) que es la diferencial del logarítmo hiperbólico de x, será su integral lx, ó $Sx^{-1}dx = lx$: y $S-x^{-1}dx = -lx = l\frac{1}{x}$; pues $dl\frac{1}{x}$ es $-\frac{dx}{x}$: y se deberán integrar por los logarítmos todos los casos que ocurran de esta naturaleza.

Modo de integrar por la regla general las cantidades complexâs de una sola variable.

749 Quando estas cantidades no están en el denominador ni incluyen potencias de cantidades complexâs, se integran exâctamente

integrando cada término por sí: $Scx^2dx + \frac{bdx}{a} - cx^3dx + \frac{bdx}{x^3}$ ó $bdx^{-3}dx$, es $\frac{cx^3}{3} + \frac{bx}{a} - \frac{cx^4}{4} - \frac{bx^{-2}}{2}$ ó $-\frac{b}{2x^2}$. Tambien admiten integracion exâcta aun quando incluyen potencias complexâs, como no estén en el denominador, y su esponente sea un número entero y positivo; pues subidas á las potencias, se integra despues cada término por sí: por egemplo, $Sdx(a+cx^4)^2$ que equivale á $S(aadx + 2acx^4dx + ccx^8dx)$, es $aax + \frac{2acx^5}{5} + \frac{ccx^9}{9}$. En $S\,adx(b+x)^3\,(c+x^m)^4$ se hacen las operaciones indicadas, y se integran despues los términos que resulten.

750 Podrá no obstante ser integrada por la regla general qualquiera cantidad complexâ elevada á una potencia negativa ó fraccionaria, si está multiplicada por la diferencial de la cantidad que se ha de elevar, prescindiendo de las constantes que la multiplican ó la parten. Asi sucede á $kdx(a+bx)^m$, en donde kdx es la diferencial de $a+bx$ multiplicada por $\frac{k}{b}$: y por eso considerando á $a+bx$ como una sola variable, será $Skdx(a+bx)^m = \frac{kdx(a+bx)^{m+1}}{(m+1)d(a+bx)} = \frac{k(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)}$. Tam-

bien es integrable $\frac{aadx+2axdx}{\sqrt{(ax+xx)}} = (aadx+\ldots$ $2axdx)(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, por ser $aadx+2axdx$ la diferencial de $ax+xx$ multiplicada por a: y asi $S(aadx+2axdx)(ax+xx)^{-\frac{1}{2}} = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{(aadx+2axdx)(ax+xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx+2xdx)} = 2a(ax+xx)^{\frac{1}{2}}.$$

751 Luego generalmente, qualquiera diferencial binomia de esta forma $kx^m dx(a+bx^n)^p$ podrá ser integrada exâctamente 1.° quando el número p es entero y positivo, sean m y n los que quieran. 2.° Quando el esponente de la variable x que está fuera del paréntesis, es menor en 1 que el esponente de la otra x: es decir, que se podrá integrar la cantidad $kx^{n-1}dx(a+bx^n)^p$, sean n y p los números que se quieran; pues en tal caso será $kx^{n-1}dx$ diferencial de $a+bx^n$ multiplicada por $\frac{k}{nb}$: luego &c. (750).

752 3.° Quando dividiendo el esponente m de la primera x aumentado de 1, por el esponente n de la segunda, resulta un número entero y positivo de cociente: como sucede á la cantidad $kx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$, donde el cociente de 3+1 partido por 2, es 2. Para integrarla supongo $a+bx^2=z$, y será $x^2=\frac{z-a}{b}$:

y pues que x^3dx que precede al binomio, dejando á parte las constantes, resulta de diferenciar x^4 cuadrado de x^2; cuadraré la equacion $x^2 = \frac{z-a}{b}$, y diferenciando el resultado $x^4 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2$, saldrá $4x^3dx = 2\left(\frac{z-a}{b}\right) \times \frac{dz}{b}$: ó $x^3dx = \left(\frac{z-a}{b}\right) \times \frac{dz}{2b}$. Si pongo ahora en la cantidad dada en lugar de x^3dx, y $a+bx^2$ sus valores en z; tendré $k\left(\frac{z-a}{2bb}\right)dz \times z^{\frac{4}{5}}$ ó .... $\frac{kz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2bb} - \frac{kaz^{\frac{4}{5}}dz}{2bb}$, cuya integral es ..... $\frac{kz^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2bb} - \frac{kaz^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2bb}$: ó por ser $\frac{kz^{\frac{4}{5}+1}}{2bb}$ multiplicador comun...... $\frac{kz^{\frac{4}{5}+1}}{2bb}\left(\frac{z}{\frac{4}{5}+2} - \ldots \frac{a}{\frac{4}{5}+1}\right) = \frac{kz^{\frac{4}{5}+1}}{2bb}\left(\frac{5}{14}z - \frac{5}{9}a\right)$: sustituyo en lugar de z^5 su valor, y saldrá por último $Skx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}} = \frac{k}{2bb}\left((a+bx^2)^{\frac{4}{5}+1}\right.(\times \ldots \frac{5}{14}(a+bxx) - \frac{5}{9}a\left.)\right)$, que es la integral que se busca.

753 Si el binomio no tuviese la dicha condicion, podrá las mas veces reducirse á

otro igual que la tenga, dividiendo sus dos términos por la potencia de x que encierra, y multiplicando la cantidad de afuera para compensar esta division, por dicha potencia de x elevada al grado que indica el esponente total del binomio. Por egemplo, para integrar $\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}} = aax^{0}dx(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$, donde $o+1$ no es divisible por 2, partiré por x^{2} el binomio, y multiplicaré por $(x^{2})^{-\frac{3}{2}} = x^{-3}$ la cantidad de afuera, y tendré $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$ expresion integrable por dividir exâctamente -2 á $-3+1=-2$. Supongo pues, $aax^{-2}+1=z$, y será $x^{-2}=\frac{z-1}{aa}$; y como $x^{-3}dx$ es la diferencial de x^{-2} sin las constantes, diferenciaré $x^{-2}=\frac{z-1}{aa}$, y saldrá $-2x^{-3}dx=\frac{dz}{aa}$, y $x^{-3}dx=-\frac{dz}{2aa}$: luego sustituyendo será $aax^{-3}dx\,(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-aa\times dz}{2aa}\times z^{-\frac{3}{2}} = \frac{-z^{-\frac{3}{2}}dz}{2}$, cuya integral es $\frac{-z^{1-\frac{3}{2}}}{2(1-\frac{3}{2})} = z^{-\frac{1}{2}}$. Pongo por z su valor, y tendré $Saax^{-3}dx$

$(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} = (aax^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(aax^{-2}+1)}} = \frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Quando hay en los dos términos del binomio potencias de x, se practíca lo mismo dividiendo por una de ellas. Las cantidades trinomias, quadrinomias &c. á excepcion de algun otro caso extraordinario, solo en los esplicados (749 *y sig.*) admiten integracion exâcta.

754 A muchas de estas integrales faltan las constantes que se despreciaron en su diferenciacion (706): y para determinarlas *hay que igualar á cero la variable* x *de la integral sacada; y lo que resulte mudándole los signos, será la constante*: quando sale cero es señal que no hay constantes que añadir á la integral hallada.

Dejando para despues la aplicacion de esta regla, la demostrarémos suponiendo que sea Q una integral completa quando x vale a, y que siendo P la integral incompleta que da el cálculo, haya de completarse con la constante ó constantes C que no conocemos. Si sustituyendo en P a en lugar de x, resulta A, será A+C la integral completa en el caso de $x=a$; y tendremos Q=A+C. Pero como Q nos es por lo comun incognito, le suponemos cero para descubrir el valor de C; pues siendo entonces $o=A+C$ ó $C=-A$, será la constante lo que resulte de suponer $x=o$, tomado con signos contrarios.

755 De consiguiente si la integral es cero, no quando $x=o$, sino quando tiene un valor determinado a; será entonces la constante la misma integral que da el cálculo, poniendo en ella a en lugar de x. Pues que $Sx^2dx=\frac{x^3}{3}$ es $\frac{a^3}{3}$ quando $x=a$; será $Q=\frac{a^3}{3}+C$, y como suponemos $Q=o$, tendremos $o=\frac{a^3}{3}+C$, $C=-\frac{a^3}{3}$, y la integral completa $Q=\frac{x^3-a^3}{3}$. Si $S-x^ndx=-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ es cero quando $x=a$, será $=\frac{-a^{n+1}}{n+1}+C=o$, $C=\frac{a^{n+1}}{n+1}$, y la integral completa $Q=\frac{a^{n+1}-x^{n+1}}{n+1}$. Finalmente, si $Sxdx(c^3+bx^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$ fuese cero quando $x=a$, sería $\frac{(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}+C=o$, $C=-\frac{(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$, y

$$Q=\frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}}-(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}.$$

Integracion de las diferenciales que llevan senos y cosenos, y de las esponenciales.

756 Pues que demostramos (714 *y sig.*) que $d(sen\, z) = dz \cos z$, $d(\cos z) = -dz\, sen\, z$; será la integral de $dz \cos z$, $sen\, z$, ó $sen\, z + C$: $S - dz\, sen\, z = \cos z + C$. Para integrar $dz \cos 3z$, se escribirá asi, $\frac{3dz \cos 3z}{3}$: y será su integral $\frac{sen\, 3z}{3} + C$: $dz\, sen\, 3z$ se transforma en $\frac{-3dz\, sen\, 3z}{-3}$, y es su integral $\frac{\cos 3z}{-3} + C$: en general, $S dz\, sen\, mz = S \frac{-mdz\, sen\, mz}{-m} = -\frac{\cos mz}{m} + C$.

Si fuese la diferencial $(sen\, z)^n dz \cos z$, que viene á ser $(sen\, z)^n d(sen\, z)$; se integrará por la regla general asi; $\frac{(sen\, z)^{n+1}}{n+1} + C$. $S(sen\, mz)^n dz \cos mz = S\surd\left(\frac{(sen\, mz^n\, mdz \cos mz}{m}\right) = S \frac{(sen\, mz)^n d(sen\, mz)}{m}$, es $\frac{(sen\, mz)^{n+1}}{m(n+1)} + C$: y $Sm(\cos mz)^n dz\, sen\, mz = Sm \frac{(\cos mz)^n \times -mdz\, sen\, mz}{-m}$ es $\frac{(\cos mz)^{n+1}}{-m(n+1)} + C$.

757 *La integral de las diferenciales esponenciales debe ser la misma diferencial dividida por la diferencial de su logaritmo*: regla opuesta á la que dimos (719) para diferenciarlas: porque si la diferencial de c^x es $c^x dx$ (720), será $Sc^x dx = c^x$: asimismo .... $Sx^z dzlx + x^{z-1} zdx$ es x^z; porque siendo .. $dzlx + \frac{zdx}{x}$ la diferencial del logaritmo x^z, si divido por ella $x^z dzlx + x^{z-1} zdx = x^z dzlx + \frac{x^z zdx}{x}$, tendré de cociente x^z.

Integracion de las cantidades logarítmicas.

758 Para integrar $\frac{dx}{xlx}$ haremos $lx = y$, y será (718) $\frac{dx}{x} = dy$, $\frac{dx}{xlx} = \frac{dy}{y}$; y como $S\frac{dy}{y}$ es ly (748); si ponemos por y su valor, tendremos $S\frac{dx}{xlx} = l\,lx$. En $m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$, suponiendo $lx = y$, sacarémos $\frac{dx}{x} = dy\,(lx)^{m-1} = y^{m-1}$: luego $Sm(lx)^{m-1}\frac{dx}{x} = Smy^{m-1}dy$, será y^m ó $l(x)^m$ poniendo por y, lx. $S\frac{dx}{a+x} = ...$ $l(a+x)$ ó $l(a+x)+C$: $S\frac{2xdx}{a^2+x^2} = l(a^2+x^2)+C$: en general *quando el numerador de un quebrado es la diferencial del denominador, la integral es el logaritmo del denominador*.

759 A veces es menester multiplicar ó partir los dos términos del quebrado por cantidades constantes para que el numerador quede diferencial cabal del denominador: en cuyo caso será su integral el logaritmo del denominador partido ó multiplicado por las constantes. Sirva de egemplo $\frac{axxdx}{a^3+x^3}$, á la que por ser $3x^2dx$ diferencial de a^3+x^3, la daré esta forma $\frac{a}{3}\times\frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$; y será su integral $\frac{a}{3}l(a^3+x^3)+C$. Tambien $S\frac{dx}{a-x}=S\frac{1}{-1}\times\frac{-1dx}{a-x}=-1$ $l(a-x)+C=l(a-x)^{-1}+C=l\left(\frac{1}{a-x}\right)+C$: $S\frac{xdx}{aa+xx}=S\frac{1}{2}\times\frac{2xdx}{aa+xx}=\frac{1}{2}l(aa+xx)+C=$ $l(\sqrt{(aa+xx)})+C$: $S\frac{ax^{n-1}dx}{k+bx^n}=S\frac{a}{bn}\times\ldots\ldots$ $\frac{bnx^{n-1}dx}{k+bx^n}=\frac{a}{bn}l(k+bx^n)+C=l(k+bx^n)^{\frac{a}{bn}}+C$.

760 Hay cantidades que no admiten esta preparacion, en las que es preciso multiplicar por una funcion de x, tal que el producto sea la diferencial de dicha funcion; pues dividiendo despues por el resultado, quedará reducida la diferencial á logarítmica. Si se multiplíca $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$ por $x+\sqrt{(xx-1)}$ el pro-

ducto $\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}+dx$ que es justamente la diferencial del multiplicador $x+\sqrt{(xx-1)}$: luego $S\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}=S\frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x+\sqrt{(xx-1)}}=l(x+\ldots$ $\sqrt{(xx-1)})+C$. Tambien sacarémos la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, multiplicando ambos términos por $\sqrt{-1}$; pues resulta $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$, cuya integral es $\sqrt{-1}\times l(x+\sqrt{(xx-1)})+C$ en virtud de lo dicho. De consiguiente la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(xx\pm aa)}}$ es $l(x\pm\sqrt{(xx\pm aa)})$ como se puede verificar diferenciando esta cantidad (718).

Integrales que se refieren al círculo.

761 Sea $SM=s$ (fig. 181) el arco de un círculo cuyo diámetro es a; SP, x; PM, y: tirense la pm infinitamente próxîma á PM, y la Mr paralela á SC; y será $Pp=Mr=dx$, $Mm=ds$, $PM=\sqrt{(ax-xx)}$ (603): y en los triángulos semejantes CPM, Mrm, se tendrá $PM:CM::Mr:Mm$, ó $\sqrt{(ax-xx)}:\frac{1}{2}a::dx:$

$ds = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, elemento del arco SM: y

$S\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ será el valor de dicho arco. Para averiguar el valor de esta integral quando x tiene un valor determinado, se restará este de $SC = \frac{1}{2}a$, para conocer CP, y con él y la hipotenusa $CM = \frac{1}{2}a$, se calculará en el triángulo rectángulo CPM el ángulo SCM (540): con el qual y el radio CM será facil hallar la longitud del arco SM (422), que es el valor de la integral propuesta.

Para reducir á ella $\frac{hdx}{\sqrt{(gkx-pxx)}}$, siendo h, g, k, p cantidades conocidas; se dividirán numerador y denominador por $\sqrt{p}$: y como en $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}$ ó $\frac{h}{\sqrt{p}} \times \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}$ que resulta, ha de multiplicar á dx la mitad de $\frac{gk}{p}$ multiplicador de x, para que sea semejante á la anterior diferencial; multiplicaré y dividiré á un mismo tiempo por $\frac{1}{2}\left(\frac{gk}{p}\right)$, y tendré $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}} \times \frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}$: diferencial que representa un arco de círculo cuyo diámetro es $\frac{gk}{p}$ y la abscisa x, multiplicado por $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$, que se determinará como la otra.

762 Contando las abscisas desde C, y siendo CS, b; CP, x; sale $\frac{-bdx}{\sqrt{(bb - xx)}}$ por elemento del arco SM, comparando los triángulos semejantes CPM, Mmr, y teniendo presente que PM $= \sqrt{(bb - xx)}$; y que pues SM mengua al paso que CP ó x crece, deberá ser la diferencial negativa (706). Reducirémos á ella $\frac{kdx}{\sqrt{(gh - pxx)}}$, transformándola como antes en $\frac{k}{\sqrt{p}} \times \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$: y como aqui $\frac{gh}{p}$ sustituye por bb, la cantidad $-b$ que ha de acompañar á dx es $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$; de suerte que tendremos $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times \frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}} \times dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$;

y suponiendo $CS = \sqrt{\frac{gh}{p}}$, y $CP = x$, será

la integral $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{\sqrt{-\frac{gh}{p}}} \times SM$ ó $-\frac{k}{\sqrt{gh}} \times SM + C$.

763 Si se tira la tangente SN, la secante CN, la Cn infinitamente próxîma á CN, y se traza desde C con el radio CN el arco infinitamente pequeño Nt que será perpendicular á CN y Cn; los triángulos semejantes CM$'m'$, CtN darán $CN:CM'::tN:M'm'$; de los CSN, tNn tambien semejantes, se saca $CN:CS::Nn:tN$: luego $(CN)^2 : CM' \times CS :: tN \times Nn : tN \times M'm' :: Nn : M'm'$, ó llamando CS, a; la tangente SN, x; y s el arco SM$'$, $aa + xx : aa : dx : ds = \frac{aadx}{aa + xx}$, expresion del elemento de un arco cuyo radio es a, y x su tangente; luego si ademas del radio que se conoce, se averigua el ángulo SCN en el triángulo rectángulo SCN, se podrá determinar la longitud del arco para cada valor de x.

Para reducir á dicha expresion la diferencial $\frac{kdx}{gbb + bxx}$; puesta asi, $\frac{k}{b} \times \frac{dx}{\frac{gbb}{b} + xx}$, se multiplicarán sus dos términos por $\frac{gbb}{b}$: y pues que resulta $\frac{k}{gbb} \times \frac{\frac{gbb}{b}dx}{\frac{gbb}{b}+xx}$, será la integral el producto del arco cuya tangente es x, y el radio $\sqrt{\frac{gbb}{b}}$ multiplicado por $\frac{k}{gbb}$.

764 Expliquemos ahora un modo facil de encontrar la longitud del arco de un ángulo dado, conocido el radio que como hemos visto, sirve de *módulo* en todas estas integraciones. Llamemos R el radio, N el número de grados del ángulo dado y Z su longitud. Siendo el diámetro á la circunferencia ó el radio á la semicircunferencia como 1 : 3,141592653 5 &c. será 3,14159 &c. : 1 : $180° : R = 57°, 29577951$ &c. $= 57°, 17', 44'' = m$: luego el arco de $57°, 17', 44''$ es á la longitud del radio, como el número de grados del ángulo N es á la longitud de su arco; esto es, $m:R::N:Z = \frac{N \times R}{m}$, ó haciendo $r = \frac{1}{m} = \frac{1}{57,295779 \text{ \&c.}}$, $Z = N \times R \times r$.

Modo de integrar por séries aplicado á los Logarítmos.

765 Para encontrar el logarítmo hiper-

bólico del número $\frac{n+x}{n}$, sacaré su diferencial $\frac{dx}{n+x}$ (718): y pues que reducido á série este quebrado es (689), $\frac{dx}{n+x} = \frac{dx}{n} - \frac{xdx}{nn} + \frac{x^2dx}{n^3} - \frac{x^3dx}{n^4} +$ &c. tendremos integrando $l\left(\frac{n+x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} +$ &c. que se reduce haciendo $n=1$, á $l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c. série que ya encontramos (702). Quando x es negativa corresponden á los términos pares signos contrarios.

766 Si el número hubiera sido $\frac{n+x}{n-x}$, cuya diferencial es $\frac{2ndx}{n^2-x^2} = 2\left(\frac{dx}{n} + \frac{x^2dx}{n^3} + \frac{x^4dx}{n^5} + \frac{x^6dx}{n^7} + \text{\&c.}\right)$; se hubiera sacado integrando, $l\left(\frac{n+x}{n-x}\right) = 2\left(\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5} + \ldots\ldots \frac{x^7}{7n^7} + \text{\&c.}\right)$: que se reduce haciendo $n=1$, á $2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 +$ &c.) la misma que sacamos ya (702).

767 Finalmente, si dado un logarítmo y, se pidiese el número $1+x$ que le corresponde; tendrémos $y = l(1+x)$, $dy = \frac{dx}{1+x}$ ó $dy + xdx =$

$dx = o$. Si hacemos $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 +$ &c. será $dx = Ady + 2Bydy + 3Cy^2dy + 4Dy^3dy +$ &c. y haciendo las correspondientes sustituciones saldrá ....

$$\left.\begin{array}{l} dy + Aydy + By^2dy + Cy^3dy \\ -Ady - 2Bydy - 3Cy^2dy - 4Dy^3dy \end{array}\right\} = o,$$

de donde sacaremos (689) $A = 1$, $B = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}B = \frac{1}{2 \times 3}$, $D = \frac{1}{4}C = \frac{1}{2 \times 3 \times 4}$; y será el número que se busca $1 + x = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2 \times 3}y^3 + \frac{1}{2 \times 3 \times 4}y^4 +$ &c.

Aplicacion del Cálculo integral á varios asuntos.

Cuadratura de las Curvas.

768 Si de los estremos M, m (fig. 182) de uno de los infinitos lados de que podemos concebir formada una curva MSQ (357) imaginamos tiradas perpendicularmente al ege Ss las dos ordenadas MP, mp infinitamente próxîmas, llamando MP, y; SP, x; será Pp, dx; rm, dy; pm, $y + dy$; y la superficie del trapecio PMmp (437) $\frac{1}{2}(Pm + pn) \times Pp = \frac{1}{2}(2y + dy) \times dx = ydx + \frac{1}{2}dxdy = ydx$, despreciando $\frac{1}{2}dxdy$ (686). Luego si poniendo en ydx el valor de y sacado de la equacion á la curva de que se trata, se integra despues lo que resulta; se habrá sacado la suma de todos los trapecios

que componen la superficie que abraza la curva, ó su *Cuadratura*. Pero como el trapecio PMmp que hemos considerado como la diferencial del espacio SMP, puede serlo tambien del espacio LHPM tomado desde un punto fijo H; pues PMmp=HpmL—HPML=d(HPML); es preciso añadir á la integral que da el cálculo, una constante que muestra esta diferencia; como verémos mas claramente en los egemplos.

769 Si las ordenadas saliesen todas de un centro comun como las SQ, Sq; se considera el ámbito de la curva dividido en una infinidad de triángulos como SQq, cuya superficie $\frac{1}{2}\times Sq\times Qt$ es, llamando SQ, y; Qt, dx; $\frac{1}{2}(y+dy)\times dx=\frac{1}{2}ydx$, despreciando $\frac{1}{2}dxdy$ (686). Quando las ordenadas no son perpendiculares al ege aunque sean paralelas entre sí, resulta una expresion algo diferente de las anteriores.

770 Vengamos á los egemplos, y sea el 1.° *cuadrar el triángulo* ABC (fig. 175): para esto supongamos tiradas las dos ordenadas Mm, Nn infinitamente próxîmas, y llamemos a la altura CD, b la base AB, y la Mm, y CP, x; será Pp, dx; y el elemento del area MNnm=ydx: pongamos ahora en lugar de y, $\frac{bx}{a}$ que se saca de los triángulos semejantes ABC, CMm, donde CD : AB :: CP : Mm, ó

$a:b::x:y=\frac{bx}{a}$, y tendremos MNnm=ydx=$\frac{bxdx}{a}$, cuya integral $Sydx=\frac{bxx}{2a}$ será el espacio CMm: luego el de todo el triángulo ABC donde $x=a$, será $\frac{baa}{2a}=\frac{ba}{2}$, como lo digimos (436).

771 2.° *Para cuadrar la parábola* (fig. 182) cuya equacion es $y^2=px$ ó $y=\sqrt{px}=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; pongo este valor en ydx, y tendré $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$, cuya integral $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C$ es el valor de la superficie de la parábola. Como en el punto S en que $x=o$, es tambien cero el espacio SMP, y la integral se reduce á $o=o+C$ en donde $C=o$; no habrá constante quando los espacios se cuentan desde el punto S, y será $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ el espacio indefinido SPM. Pero si se pidiese la superficie del espacio LHMP, siendo SH$=b$; sería LHMP$=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C$; y pues que este espacio es cero quando SP$=x=b$ en cuyo supuesto es $o=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}+C$ (755), y $C=-\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$; será LHMP$=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$.

La expresion $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\times x=$SPM se reduce poniendo y en lugar de $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, y á

$\frac{2}{3}xy$, que son los dos tercios del rectángulo SPMR. Tambien el espacio LHPM = ... $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b = \frac{2}{3}$ SP $\times$ PM $- \frac{2}{3}$ LH $\times$ SH, es la diferencia entre los dos tercios de los rectángulos SPMR y SHLZ.

772 3.° *Habiendo de cuadrar el quarto de círculo* SCD (fig. 181); supondremos el radio a; y PM $= y = \sqrt{(aa - xx)}$ (607): y será el espacio CDMP $= Sydx = Sdx\sqrt{(aa - xx)} =$ (154) $Sdx\left(a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \&c.\right)$; donde integrando cada término por sí, resulta CDMP $= ax - \frac{x^3}{2 \times 3a} - \frac{1 \times x^5}{2 \times 4 \times 5a^3} - \frac{1 \times 3 \times x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^5} - \frac{1 \times 3 \times 5 x^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^7} -$ &c. Si suponemos $x = a$, saldrá la superficie del cuadrante CSD $= aa - \frac{aa}{6} - \frac{aa}{40} - \frac{aa}{112} - \frac{5aa}{1152} -$ &c. $= aa\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \&c.\right)$ La superficie del sector CMD se saca restando de CDMP la del triángulo CPM $=$ PM $\times \frac{1}{2}$ CP $= \frac{1}{2}x \times \sqrt{(aa - xx)}$.

773 4.° *En la Elipse* cuya equacion es $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$, se tiene haciendo las mis-

mas operaciones $Sydx = bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^7} - \&c. = \frac{b}{a}\left(ax - \frac{1 \times x^3}{2 \times 3a} - \frac{1 \times x^5}{2 \times 3a^2} - \frac{1 \times x^7}{2 \times 4 \times 5a^5} - \&c.\right)$: la cual série tiene con la anterior del círculo la razon de b á a segun lo dejamos demostrado.

774 5.° *Para cuadrar la area hiperbólica* SMP (fig. 183) *y el sector hiperbólico* CSM; sustituiremos en ydx, $\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}$ valor de y en la equacion de la hipérbola, y será $ydx = \frac{bdx}{a}\sqrt{(xx-aa)}$ el elemento de su superficie. El sector $CSM = CPM - SPM = CP \times \frac{1}{2}PM - SPM = \frac{1}{2}xy - Sydx$: cuya diferencial $\frac{1}{2}(xdy + ydx) - ydx = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ se reduce á $\frac{ab}{2} \times \frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$ sustituyendo $\frac{b}{a} \times \sqrt{(xx-aa)}$ y $\frac{bxdx}{a\sqrt{(xx-aa)}}$ en lugar de y, dy. Su integral es (760) $\frac{1}{2}ab \times l(x + \sqrt{(xx-aa)}) + C$: y como esta debe ser cero quando $x = a$, de cuya suposicion resulta $C = -\frac{1}{2}ab \times la$; será la integral completa de $\frac{ab}{2} \times \frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$ ó la superficie del sector $CSM = \frac{1}{2}ab \times l(x + \sqrt{(xx-aa)}) - \frac{1}{2}ab \times la = \frac{ab}{2} \times l\left(\frac{x + \sqrt{(xx-aa)}}{a}\right)$. Si esta

se resta del triángulo $CMP = \frac{1}{2}(CP \times PM) = \frac{bx\sqrt{(xx-aa)}}{2a}$, será el residuo $\frac{bx\sqrt{xx-aa)}}{2a} - \frac{ab}{2} \times l\left(\frac{x+\sqrt{(xx-aa)}}{a}\right)$ el valor del espacio hiperbólico SPM.

775 6.° *Cuadremos finalmente la hipérbola equilátera entre sus asíntotas*; cuya equacion (670) haciendo $aa = 1$, es $xy = 1$; y siendo (fig. 169) CG, x; GZ, y; $xy = 1$ da $y = \frac{1}{x}$: luego $Sydx = S\frac{dx}{x} = lx$ (748): y el area MCGZYK' será $lx + C$. Como esta es cero quando $x = o$, y entonces se reduce á $l(o) + C = o$, donde $C = -l(o)$, será dicha superficie completa $lx - l(o) = l\frac{x}{o}$. De consiguiente si hacemos $x = CX = b$, será el espacio $MCXK' = l\frac{b}{o}$ infinito. Suponiendo ... $CU = 1$, $aa = 1$. y contando las abscisas desde U; será $CG = 1 + x$, $GZ = y = \frac{1}{1+x}$, $ydx = \frac{dx}{1+x}$, y $Sydx = S\frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C = lGZ + C$. Este espacio es cero quando $x = o$, en cuyo supuesto $l(1+o) + C = o$, y $C = -l1 = o$: de suerte que dicho espacio será solamente $l(1+x)$, y serán finitos los espacios UGZY donde $CU = 1$.

Aqui se ve que los logarítmos hiperbólicos resultan de una hipérbola equilátera cuya potencia es 1: de consiguiente siendo la potencia aa, $CU=b$, $UG=x$, $GZ=y$; hubieramos sacado $UGZY=aal(b+x)=lCU\times aa$. Supongamos aora que sea mm la potencia de Snm, otra de las infinitas hipérbolas que se pueden trazar entre las asíntotas MC, Cc; sería por lo dicho el espacio $UGmn=mml(b+x)$; y tendriamos $UGZY:UGmn::aal(b+x):mm\times l(b+x)::aa:mm$: luego *los logarítmos de un mismo número tomados en distintas hipérbolas, son como las potencias de las mismas hipérbolas.*

Rectificacion de las Curvas.

776 Para encontrar la linea recta á que equivale una linea curva SM (fig. 182), imaginemos el punto m infinitamente próxîmo á M, y será Mm la diferencial de SM; y como $Mm=\sqrt{((Mr)^2+(rm)^2)}=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, será $S\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ la fórmula para integrar las curvas quando sus ordenadas son perpendiculares al ege, ó salen de un punto fijo. El modo de aplicarla es despejar en la equacion á la curva despues de diferenciada, el dy en x y dx, ó el dx en y y dy, sustituir estos valores en $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, y tomar la integral de lo que resulte.

777 1.° *Para rectificar el círculo*; to-

memos $\frac{aadx}{aa+xx}$ elemento de un arco cuyo radio es a, y x su tangente (763); y pues que $\frac{aadx}{aa+xx} = aadx\,(aa+xx)^{-1}$, $(aa+xx)^{-1} = a^{-2} \times \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \&c.\right)$; será $S\,aadx\,(aa+xx)^{-1} = S\left(dx - \frac{x^2dx}{aa} + \frac{x^4dx}{a^4} - \ldots \frac{x^6dx}{a^6} + \frac{x^8dx}{a^8} - \&c.\right) = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \&c. = x\left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} - \ldots \frac{x^6}{7a^6} + \frac{x^8}{9a^8} - \&c.\right)$. Si en esta série suponemos que x sea la tangente de $45°$ que cabe ocho veces en $360°$ ó en toda la circunferencia, y es igual al radio a; quedará reducida á $a\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c.\right)$.

Para hacer esta série mas convergente, descompongamos el arco de $45°$ en otros dos b, c cuyas tangentes sean conocidas, y tendremos haciendo el radio 1, $tang\,(b+c) = 45° = 1 = (528)\ \frac{tang\,b + tang\,c}{1 - tang\,b \times tang\,c}$, de donde se saca $tang\,c = \frac{1 - tang\,b}{1 + tang\,b}$: luego si $tang\,b = \frac{1}{2}$, será $tang\,c = \frac{1}{3}$. Pongase ahora en la série anterior $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ en lugar de a, y resultarán las dos

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5} - \frac{1}{7\times 2^7} + \frac{1}{9\times 2^9} -$ &c. y $\frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 3^3} + \frac{1}{5\times 3^5} - \frac{1}{7\times 3^7} + \frac{1}{9\times 3^9} -$ &c. cuya suma 0,7853981633974483 &c. será la longitud de un arco de 45°: y de consiguiente su cuadruplo 3,14159265389793 2 &c. será la semicircunferencia, que comparada con el radio 1 dará la razon del diámetro á la circunferencia de que ya hemos hablado.

778 2.° *En la parábola* cuyo arco sea u, su parámetro $2a$, y su equacion $yy=2ax$; tendremos $ydy=adx$, y $dx^2=\frac{yydy^2}{aa}$: sustituido este valor en la fórmula $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, la reduce á $\frac{dy}{a}\sqrt{(yy+aa)}=du$: luego $dy\sqrt{(yy+aa)}=adu$. Supongamos que sea MSN (fig. 184) la parábola que se ha de rectificar, que sea ST una tangente á su vértice, y SP$=y$; será $au=\text{S}dy\sqrt{(yy+aa)}$. Si se tira la S$s=a$ perpendicular á ST, y se traza una hipérbola equilátera nsp, cuyo centro esté en S y el vértice en s, tirando desde P á la parábola la ordenada PM alargada hasta que encuentre la hipérbola en P; será SspP$=\text{S}dy\sqrt{(yy+aa)}$ (679 y 768): luego $\text{S}adu=au=$SspP, y el arco SM$=u$ de la parábola, será igual al espacio hiperbólico SspP partido por la mitad del parámetro.

779 3.° *Si se ha de rectificar un arco de elipse, y de hipérbola*; sacarémos de la equacion á la elipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, $dy = \frac{-bxdx}{a\sqrt{(aa-xx)}}$; y de consiguiente será el arco elíptico $u = Sdu = S\sqrt{(dx^2+dy^2)} = Sdx\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})} = Sdx\sqrt{(\frac{a^4-a^2x^2+b^2x^2}{a\sqrt{(a^2-x^2)}})}$, cuyo valor solo se puede sacar por séries. En la hipérbola se encuentra por el mismo camino

$$Sdu = Sdx\,\frac{\sqrt{(a^2x^2-a^4+b^2x^2)}}{a\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

Solidez de los Cuerpos.

780 Si concebimos un cuerpo ABCS (fig. 185) formado de planos ó rebanadas infinitamente delgadas *acbefh* que serán la diferencial de su solidez, y suponemos bb la superficie de la base ABC, a la altura ST, y x la St distancia del vértice al plano *acbefh*; será dx la altura de dicho plano y su superficie *abc* ó *ehf*, se hallará por la proporcion $(ST)^2$: $(St)^2$::ABC:*abc*, ó $aa:xx::bb:\frac{bbxx}{aa}$; luego la solidez del plano será $\frac{bbxx}{aa}\times dx$, y la de to-

do el sólido su integral $S\frac{bbxx}{aa}\times dx = \ldots\ldots$ $\frac{bbx^3}{3aa}+C$, ó $\frac{bbx^3}{3aa}$ solamente contando la solidez desde el vértice S. La expresion... $\frac{bbx^3}{3aa}=\frac{bbxx}{aa}\times\frac{1}{3}x=abc\times\frac{1}{3}St$ concuerda con la que sacamos ya (494).

781 Si el plano $MmlL$ (fig. 186) pertenece á un sólido de revolucion ABS, formado por una curva AS dando la vuelta al rededor de ST; suponiendo $PM=y$, $SP=x$, y $r:c$ la razon del radio á la circunferencia, será $\frac{cy}{r}$ la de un círculo cuyo radio es y: la superficie de este círculo será $\frac{cy}{r}\times\frac{1}{2}y=\frac{cyy}{2r}$; y la solidez del plano $\frac{cyy}{2r}\times Pp=\frac{cyydx}{2r}$: expresion diferencial en la que poniendo el valor de y sacado de la equacion á la curva de cuya revolucion sehaya formado el sólido, se tendrá su solidez integrando el resultado.

782 Egemplo 1.º: *Encontrar la solidez del cono engendrado por el triángulo rectángulo* CPM (fig. 183) *al rededor de* CP. Sea CP, x; PM, y; y u el ángulo MCP: si tomamos á CM por radio, será $cosen\,u : sen\,u :: x:y=\frac{x\times sen\,u}{cosen\,u}$. Si sustituimos este valor en

la fórmula $\frac{cyydx}{2r}$, se reducirá á $\frac{c}{2r}\times$........ $\frac{sen^2 u}{cosen^2 u}x^2 dx$; y la solidez del cono será $\frac{c}{2r}\times$ $S\frac{sen^2 u}{cosen^2 u}x^2 dx = \frac{c}{2r}\times\frac{sen^2 u}{cosen^2 u}\times\frac{x^3}{3}=\frac{cyy}{2r}\times\frac{x}{3}$; que es como digimos (494) la tercera parte del cilindro de una misma base y altura que él. Del mismo modo se hubiera sacado la solidez $\frac{2cxx}{r}\times\frac{y}{3}$ del cono producido por el mismo triángulo al rededor del lado MP.

783 2.° *La solidez del paraboloide ó conoide parabólico* (fig. 186), que es el sólido que engendra una semiparábola al rededor de su ege; se saca poniendo en la fórmula el valor de yy que da la equacion $yy=ax$ de la parábola; pues integrando el resultado $\frac{caxdx}{2r}$, se tiene contando la solidez desde S en que $C=o$, $\frac{cax^2}{4r}=\frac{cax}{2r}\times\frac{x}{2}=\frac{cyy}{2r}\times\frac{x}{2}$, que equivale á la solidez del cilindro de igual base y altura que el paraboloide. Si la solidez se cuenta desde un punto H, tal que $SH=b$; debiendo ser cero el sólido en dicho punto ó quando $x=b$, será $C=-\frac{cabb}{4r}$, y la solidez de una porcion qualquiera de paraboloide será $\frac{caxx-cabb}{4r}$.

784 3.° *Hallar la solidez del elipsoide ó hiperboloide.* Si sustituimos en la fórmula en lugar de yy, $\frac{bb}{aa}(2ax-xx)$ sacado de la equacion á la elipse, é integramos $\frac{cbb}{2raa}(2axdx-xxdx)$ que resulta, tendremos $\frac{cbb}{2raa}\left(axx-\frac{x^3}{3}\right)$ por la solidez del *elipsoide prolongado*, sólido que engendra una semielipse al rededor de su ege mayor Ss (fig. 187), contándola desde S en que $C=o$. Quando $x=Ss=2a$, se reduce dicha expresion á $\frac{2acbb}{3r}$ que es la solidez de todo el elipsoide. Y como la de un cilindro circunscripto á él, sería $\frac{acbb}{r}$; será la del elipsoide los $\frac{2}{3}$ de la de este cilindro, como lo digimos de la esfera (498).

Si se pide la solidez desde un punto H en que $SH=m$; siendo en este punto cero la integral, se tendrá $C=-\frac{cbb}{2raa}\left(amm-\frac{m^3}{3}\right)$: y la solidez de una porcion de elipsoide comprendida entre dos planos paralelos y perpendiculares al ege, cuya distancia es $x-m$, será $\frac{cbb}{2raa}\left(axx-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{cbb}{2raa}\left(amm-\frac{m^3}{3}\right)$. La del *elipsoide aplanado*, ó producido por la revolucion de la semielipse al rededor del ege menor, que es $\frac{2aacb}{3r}$, se saca como la otra, y es tambien los $\frac{2}{3}$ de su cilindro circunscripto; y tiene con ella la razon de los eges $2b:2a$.

Por el mismo camino encontrarémos que la solidez del sólido que engendra una hipérbola al rededor de su primer ege es $\frac{cbb}{2raa}\times\left(axx+\frac{x^3}{3}\right)$, si se cuenta desde el vértice; y $\frac{cbb}{2raa}\left(axx+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{cbb}{2raa}\left(amm+\frac{m^3}{3}\right)$ la de una porcion de *hiperboloide* comprendida entre dos planos paralelos y perpendiculares al ege, cuya distancia es $x-m$.

785 4.° *Hayase de medir el sólido producido por el arco* sp (fig. 184) *de hipérbola que voltea al rededor de su segundo ege* ST, suponiendo este $2a$, el 1.° $2Ss=2b$, $SP=x$, $Pp=y$ y S el vértice. Si hacemos $r:c::1:\frac{c}{r}$, será $\frac{c}{r}\times\frac{1}{2}=\frac{c}{2r}$ que llamarémos m, el area del círculo cuyo radio es 1; y la fórmula $\frac{cyydx}{2r}$ quedará reducida á $myydx$, en donde myy es el area del círculo cuyo radio es y, pues $1^2:y^2::m:myy$ (456). Si en ella ponemos el valor de yy sacado de la equacion $yy=$

$bb + \frac{bbxx}{aa}$ (656), tendremos $myydx = mbbdx + \frac{mbbxxdx}{aa}$, cuya integral es $mbbx + \frac{mbbx^3}{3aa}$ ó $\frac{2}{3}mbbx + \frac{1}{3}myyx$, poniendo en lugar de $\frac{bbxx}{aa}$, $yy - bb$ sacado de la equacion: será pues, $\frac{2}{3}mbbx + \frac{1}{3}myyx$ la solidez del cuerpo que forma el area $SspP$ al rededor de ST.

786 5.° *Para hallar la solidez del cuerpo que se forma de la revolucion de una hipérbola equilátera* QKYN (fig. 169) *al rededor de su asíntota* C*c*; llamaremos CU=UY, a; y será (670) $aa = xy$, ó $yy = \frac{a^4}{xx}$. Puesto este valor en $\frac{cyydx}{2r}$, resulta $\frac{c}{2r} \times \frac{a^4dx}{xx} = \frac{c}{2r} \times a^4x^{-2}dx$, y su integral $\frac{c}{2r} \times -\frac{a^4}{x} + C$ será la solidez que buscamos. Como esta es cero quando $x = a$, será $C = \frac{c}{2r}a^3$, y el valor completo del sólido producido por el area UYN*c*, será $\frac{c}{2r}\left(a^3 - \frac{a^4}{x}\right) = \frac{c}{2r}\left(a^3 \times \left(\frac{x-a}{x}\right)\right)$: de consiguiente suponiendo las abscisas a, $2a$, $3a$, &c. en progresion aritmética, resultarán sólidos iguales á $\frac{c}{2r}a^3$, multiplicados sucesivamente por $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ &c.

Si fuese x infinita, equivaldrá el sólido $\frac{c}{2r}a^3$ al cilindro engendrado en la misma revolucion por el rectángulo CUYH: quando x es menor que a es el sólido negativo, é infinito si $x=o$: de suerte que el sólido producido por el espacio UYNC es finito; pero el que engendra la area MCXK al rededor de la asíntota es infinito.

787 6.° *Midamos ahora un cuerpo parabólico* ACBDA (fig. 188) *producido por la rotacion de la parábola* ACB *al rededor de la ordenada* AB. Sea a la abscisa CM, b la semiordenada AM ó BM, u la distancia MN=EP que hay entre la linea DC y una seccion ENF del sólido, paralela á DC: y tendremos (616) $(AM^2):(EP)^2::CM:CP$, ó $bb:uu::a:CP=\frac{auu}{bb}$; y $EN=CM-CP=a-\frac{auu}{bb}=\frac{a}{bb}\times(bb-uu)$: luego (785) $m\times(EN)^2=\frac{maa}{b^4}\times(b^4-2bbuu+u^4)$ será la expresion del area de la seccion ENF: y si se multiplíca por la diferencial du de MN, dará el elemento del sólido $\frac{maa}{b^4}(b^4du-2bbuudu+u^4du)$. Integrese, y tendremos $\frac{maa}{b^4}(b^4u-\frac{2}{3}bbu^3+\frac{1}{5}u^5)$, que se reduce haciendo $u=b$, á $\frac{8maab}{15}$ mitad del sólido que se busca.

788 7.° *Si se quiere la solidez del cuerpo* ACBDA (fig. 189) *que forma el segmento de circulo* ACB *rotando al rededor de la cuerda ú ordenada* AB; suponiendo el centro en O, y llamando al radio OE, r; OM, n; y EP, u; será $OP = \sqrt{((OE)^2 - (EP)^2)} = \sqrt{(rr-uu)}$, $EN = OP - OM = \sqrt{(rr-uu)} - n$; y la fórmula $myydx$ se transformará en $mdu(\sqrt{(rr-uu)}-n)^2 = mdu(rr-uu+nn-2n\sqrt{(rr-uu)}) = mdu(rr-uu-nn) - mdu(2n\sqrt{(rr-uu)}-2nn)$. Y como la integral de $mdu(2n\sqrt{(rr-uu)}-2nn) = 2nm \times du \times (\sqrt{(rr-uu)}-n) = 2nm \times du \times EN$ es $2mn \times area$ MNEC; será toda la integral $mu(rr-nn-\frac{1}{3}uu) - 2nm \times area$..... $MNEC = m \times MN \times ((AM)^2 - \frac{1}{3}(MN)^2) - 2m \times OM \times area\, MNEC$: que en el supuesto de ser $MN = MA$, es $m \times \frac{2}{3}(AM)^3 - 2m \times OM \times ACM$, valor de la mitad del sólido propuesto.

789 8.° *Para encontrar la solidez de un prismoide* AEGB (fig. 180) *rodeado de superficies planas, y cuyas bases son dos rectángulos paralelos*; hagamos AB, a; AD, b; EH, c; EF, e; h la altura del sólido, y x la distancia variable del plano EG á una seccion IL del sólido paralela á la base. Tirando despues en la superficie AH, la HP paralela á EA, y en la cara BG la HN paralela á GC; tendremos en los triángulos HPB, HRM semejantes $h : x$ ::

$PB = AB - EH : RM = IM - EH = \frac{x(a-c)}{h}$; y en los triángulos HBN, HMQ, tambien semejantes, $h : x :: BN = BC - HG : MQ = ML - HG = \frac{x(b-e)}{h}$: luego $IM = \frac{x(a-c)}{h} + c$, y $ML = \frac{x(b-e)}{h} + c$: y será el area de la seccion IL $\frac{(a-c)(b-e)}{hh} xx + \left(\frac{bc + ae - 2ce}{h}\right) x + ce$. Si multiplicamos esta expresion por dx, y sacamos despues su integral, resultará $\frac{(a-c)(b-e)}{3hh} x^3 + \ldots$ $\left(\frac{bc + ae - 2ce}{2h}\right) xx + cex$ valor del sólido IFGL.

Suponiendo en él $x = h$, saldrá el de todo el prismoide, que es $\frac{1}{3}h(a-c)(b-e) + \frac{1}{2}h(bc + ae - 2ce) + ceh = \frac{1}{6}h(2ab + ae + bc + 2ce) = \frac{1}{6}h(AB \times AD + EH \times EF + (AB + EH)(AD + EF))$. Si EF fuese nula, EH y FG coincidirían formando un ángulo en la parte superior del sólido, que tendria entonces la forma de la armadura de un tejado, y su solidez sería $\frac{1}{6}h(2ab + bc) = \frac{1}{6}h(2AB + EH)AD$. En el caso de ser EF=EH y AD=AB, sería el sólido un trozo de pirámide cuadrada, cuya solidez es $\frac{1}{3}h(aa + ac + cc) = \frac{1}{3}h((AB)^2 + AB \times EH + (EH)^2)$: y finalmente haciendo $EH = 0$, resultaría una pirámide con la base $(AB)^2$ y la altura h, que tendria por solidez $(AB)^2 \times \frac{1}{3}h$.

790 9.° *La solidez del cuerpo* que los Ingleses llaman *Groin* (fig. 191), cuyas secciones paralelas á la base son cuadrados, y las dos secciones hechas perpendicularmente á la base por el medio de los dos lados opuestos, son semicírculos; la encontrarémos snponiendo x la distancia Ab del vértice A á una seccion $cfeg$ paralela á la base, a el radio AB ó BN de la seccion circular ANBMA perpendicular á la base; y será $bn = \sqrt{(2ax - xx)}$ (603), el lado del cuadrado $cfeg$ $2\sqrt{(2ax - xx)}$, y su area $4(2ax - xx)$: luego el elemento del groin es $4dx(2ax - xx)$. Si en su integral $4axx - \frac{4}{3}x^3$ suponemos $x = a$, resulta $\frac{(2a)^3}{3}$ solidez de todo el groin; que sacaríamos del mismo modo aun quando las secciones paralelas á la base fuesen rectángulos, y las perpendiculares otras curvas distintas del círculo.

791 10.° *Si se hubiese de calcular la solidez de la pirámide ó cono* ABCD (fig. 192), formado de rectas tiradas de todos los puntos de un plano DBC dado á un punto A: llamarémos x la distancia perpendicular AQ de A á una seccion EFG paralela á BDC, a la altura AP del sólido, b la area conocida de la base BDC: y pues que los planos BDC, EFG deben ser semejantes (489), tendremos

$(AP)^2:(AQ)^2::BDC:EFG$, ó $aa:xx::b:EFG=\frac{bxx}{aa}$. Esta expresion multiplicada por la diferencial dx dará el elemento $\frac{bxxdx}{aa}$ del sólido, que será $S\frac{bxxdx}{aa}=\frac{bx^3}{3aa}$, que se reduce á $\frac{1}{3}ab$ quando $x=a$.

792 11.° *Si á un cilindro* ABCD (fig. 176) *lo corta un plano oblicuo á la base, y se pregunta la solidez del cuerpo* SARH *que resulta*, que se llama *Ungula cilindrica;* suponiendo para hacer mas sencillo el cálculo, que la seccion pase por el centro de la base; se considerará la úngula cortada por planos paralelos infinitamente próxîmos y perpendiculares á la base RAH; y debiendo ser las secciones triángulares semejantes, se tendrá llamando r el radio AO de la base, a la altura AS, y la base del triángulo PMN; $OAS:PMN::rr:yy$ (455), y siendo $OAS=\frac{1}{2}ar$, será $PMN=\frac{aryy}{2rr}=\frac{ayy}{2r}$. Luego si se llama x la PH, será dx el grueso de la rebanada comprendida entre dos planos paralelos, cuyo valor será $\frac{ayydx}{2r}$, ó poniendo $2rx-xx$ en lugar de yy (603), $\frac{adx(2rx-xx)}{2r}=\frac{a}{2r}(2rxdx-xxdx)$. Su integral, contando la solidez desde

el punto H, es $\frac{a}{2r}\left(rxx-\frac{x^3}{3}\right)$; de donde se saca suponiendo $x=2r$ el valor de todo el sólido que es $\frac{2}{3}arr=\frac{ar}{2}\times\frac{4}{3}r=AOS\times\frac{4}{3}HO=$ AOS$\times\frac{2}{3}$RH; que son los $\frac{2}{3}$ de un prisma cuya base sería el triángulo AOS y la altura el diámetro RH.

793 12.° *Encontremos por último, la solidez de una úngula cónica* EFGD (fig. 177), que corta en el cono ABD un plano EFG que pasa por su base. Siendo BC la altura perpendicular del cono, y BO una perpendicular tirada á HE ege de la seccion EFG; si suponemos que sea FBG otra seccion del cono hecha por un plano que pasa por el vértice B y la linea FG; los dos sólidos DBFG, EBFG cuyas bases son FDG, FEG tendrán por solidez (791) á FDG$\times\frac{1}{3}$BC y FEG$\times$ $\frac{1}{3}$BO: restese la segunda de la primera, y su diferencia será el valor de la úngula cónica. Si las bases FDG, FEG fuesen secciones cónicas, se buscarán sus areas (771 *y sig.*), y se resolverá la cuestion. Sea por egemplo, EH paralela á BA; siendo entonces (610) la seccion una parábola cuya area es $\frac{2}{3}$FG$\times$EH, será la solidez del segmento EFGB$=\frac{2}{9}\times$FG$\times$ EH$\times$BO, y rebajando esta cantidad del sólido DFGB, será el residuo el valor de la úngula.

Medida de las superficies curvas de los sólidos.

794 Si imaginamos que el lado infinitamente pequeño Mm de una curva $SB=u$ (fig. 186), traze una zona, faja ó porcion de cono truncado quando toda la curva voltéa al rededor de ST, la superficie de dicha zona que es elemento de la total, será el producto de $Mm=du$ por una circunferencia cuyo radio es PM: luego si llamamos m la razon entre la circunferencia y el diámetro, será $2my$ la circunferencia del círculo cuyo diámetro es ML, y $2my\times du = 2my\times\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ será el elemento de la superficie de los sólidos de revolucion.

795 Egemplo 1.° *Comencemos por el cono recto* ABD (fig. 177), y suponiéndole cortado por un plano MN paralelo á la base, y tirado el ege BC; llamemos AB, a; AC, b; PM, y; BM, u; y tendremos en los triángulos semejantes BAC, BMP, BA:AC::BM:MP ó $a:b::u:y=\frac{bu}{a}$; luego $2mydu=\frac{2mbudu}{a}$, y su integral $\frac{mbuu}{a}$ será la expresion de la superficie de una porcion qualquiera de cono. Si en ella hacemos $u=a$, se reduce á $abm=m\times AC\times AB$ que es la de todo el sólido.

796 2.° *Para encontrar la superficie de*

la esfera; sea el radio $CM=a$ (fig. 181), $SP=x$, $PM=y$, $SM=u$; será $Mm=du$, $Pp=Mr=dx$; y en los triángulos semejantes CPM, Mmr tendremos PM:MC::Mr:Mm, ó $y:a::dx:du=\frac{adx}{y}$. Sustituyendo este valor en $2mydu$, resulta $2madx$; y su integral $2max=SP\times$ *circunf.* SDBM'S será la superficie del segmento esférico SPMM'. Si se hace $x=2a$, $2max$ se convierte en $4maa$ que es la superficie de toda la esfera, cuadrupla de maa superficie del círculo máxîmo SDBM'S (480): y como $2max:4maa::x:2a$; será la superficie de un segmento á la de toda la esfera, como la altura del segmento á todo el ege.

797 3.° *Saquemos ahora la superficie del paraboloide* ASB (fig. 186). La equacion $yy=px$ de la parábola da $x=\frac{2ydy}{p}$, y $dx^2=\frac{4yydy^2}{pp}$: luego $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{\sqrt{pp}}$: y $2mydu$ se reducirá á $\frac{2mydy}{p}\times(pp+4yy)^{\frac{1}{2}}$. Supongamos para integrar esta diferencial, $(pp+4yy)^{\frac{1}{2}}=z$, será $pp+4yy=zz$, y diferenciando, $8ydy=2zdz$ ó $2ydy=\frac{zdz}{2}$. Sustituyase este valor en $\frac{2mydy}{p}(pp+4yy)^{\frac{1}{2}}$, y quedará redu-

cida á $\frac{mz \times zdz}{2p}$, cuya integral es $\frac{mz^3}{6p}$, ó $\frac{m \times (pp+4yy)^{\frac{3}{2}}}{6p}$, poniendo $(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}$ en lugar de z^3. Quando $y=o$, se tiene $C=-\frac{1}{6}mpp$; de consiguiente $\frac{m(pp+yy)^{\frac{3}{2}}}{6p}-\frac{1}{6}mpp$ será la integral completa, que pudo tambien haberse sacado por lo dicho (750).

798 4.° *Para hallar la superficie del esferoide ó elipsoide* (fig. 187); suponiendo $SC=a$, $CB=b$, $CP=x$ y $BM=u$; sacarémos de la equacion á la curva $y=\frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, $dy=-\frac{bxdx}{a\sqrt{(aa-xx)}}$: y será $du=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{\left(dx^2+\frac{bbxxdx^2}{aa(aa-xx)}\right)}=\frac{dx\sqrt{(a^4-(aa-bb)xx)}}{a\sqrt{(aa-xx)}}=\frac{dx\sqrt{(a^4-ccxx)}}{a\sqrt{(aa-xx)}}$ (suponiendo $\sqrt{(aa-bb)}=c$) $=\frac{cdx\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}}{a\sqrt{(aa-xx)}}$: de consiguiente $2mydu$ será $\frac{2mbcdx}{aa}\times\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}$; cuya integral expresada en série infinita es $2mbx\left(1-\frac{ccxx}{2\times3a^4}-\frac{c^4x^4}{2\times4\times5a^8}-\frac{3c^6x^6}{2\times4\times6\times7a^{12}}-\text{\&c.}\right)$

Esta integral se encuentra mas facilmente por medio de la cuadratura del círculo; pues si desde C con un radio $\frac{aa}{c}$, se traza un círculo IER, y se alarga hasta E la ordenada PM; es claro (607) que PE$=\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}$, y que el elemento del area EICP será....... $dx\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}$, que tendrá con el elemento $\frac{2mbcdx}{aa}\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}$ de la superficie bMM'B la razon de $1:\frac{2mbc}{aa}\times$EIPC$=2m\times\frac{Cb}{CI}\times$EICP.

Si para aplicar esta solucion al elipsoide aplanado supusieramos Ss el ege menor, siendo CS menor que Cb, sería imposible el valor de $c=\sqrt{(aa-bb)}$. Con que hagamos $c=\sqrt{(bb-aa)}$, y $p=\frac{aa}{c}$; quedará $\frac{2mbcdx}{aa}\times$... $\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}$ convertida en $\frac{2mbdx}{p}\sqrt{(pp+}$.. $xx)=\frac{2mb}{p}\times dx\sqrt{(pp+xx)}$. Siendo $dx\sqrt{(pp+}$ $xx)=\frac{dx\times(pp+xx)}{\sqrt{(pp+xx)}}=\frac{ppdx+xxdx}{\sqrt{pp+xx)}}=$........ $\frac{ppxdx+x^3dx}{\sqrt{(ppxx+x^4)}}=\frac{\frac{1}{2}ppxdx+x^3dx}{\sqrt{(ppxx+x^4)}}+\frac{\frac{1}{2}ppxdx}{\sqrt{(ppxx+x^4)}}$: cuyo primer término tiene por integral (750) á $\frac{1}{2}\sqrt{(ppxx+x^4)}$, y el segundo $\frac{\frac{1}{2}ppxdx}{\sqrt{(ppxx+x^4)}}$ ó $\frac{\frac{1}{2}ppdx}{\sqrt{(pp+xx)}}$ integrado por los logarítmos (760), da $\frac{1}{2}pp\times l(x+\sqrt{(pp+xx)})$; será la integral de $dx\sqrt{(pp+xx)}$, $\frac{1}{2}x\sqrt{(pp+xx)}+\frac{1}{2}pp\times l(x+\sqrt{(pp+xx)})$: multiplíquese por $\frac{2mb}{p}$, y completándola despues (754), será la superficie del elipsoide aplanado $\frac{mbx}{p}\times\sqrt{(pp+xx)}+pbm\times l\left(\frac{x+\sqrt{(pp+xx)}}{p}\right)$.

799 5.° *En el conoide hiperbólico*, siendo a y b los semieges, y x la distancia entre la ordenada y el centro de la curva, sacarémos de su equacion $y=\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}$, $dy=$ ...... $\frac{bdx}{a\sqrt{(xx-aa)}}$: y será $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$ .... $\frac{dx\sqrt{((aa+bb)xx-a^4)}}{a\sqrt{(xx-aa)}}$: luego $2mydu=\frac{2mbdx}{aa}\times(\sqrt{aa+bb})(xx-a^4)$, que con suponer ... $\frac{a^4}{aa+bb}=p$, se reduce á $\frac{2mbdx}{p}\sqrt{(xx-pp)}$. A su integral $\frac{mbx\sqrt{(xx-pp)}}{p}-pbm\,l(x+\sqrt{(xx-pp)})$ que se encuentra por el mismo camino que la anterior, se ha de añadir la constante que resulta de suponer $x=a$: y será finalmente $\frac{mbx}{p}\sqrt{(xx-pp)}-mbb-pbm\times$

$l\left(\frac{x+\sqrt{(xx-pp)}}{a+\frac{bp}{a}}\right)$, el verdadero valor de la superficie del hiperboloide.

800 6.° *Para hallar la superficie del groin* (fig. 191); supondremos x la distancia á que está del vértice A una seccion $cgef$ paralela á la base, u el arco An correspondiente á la seccion semicircular NnA, y su radio AB ó BN$=a$. Siendo $du=\frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ (961), multiplicando esta cantidad por $2\sqrt{(2ax-xx)}$ valor de $ge=2gn$, resultará $2adx$ (794), elemento de una de las quatro superficies iguales que terminan al sólido: luego la superficie de todo él, no contando la de la base, será $8aa$, esto es, dupla de la dicha base.

Método inverso de las Tangentes.

801 Por este método se viene en conocimiento de la equacion de una curva por la expresion de su tangente ó subtangente ó normal &c. de su rectificacion, cuadratura &c. que se nos dé. Para esto se forma una equacion de la expresion dada y de la correspondiente fórmula de las halladas (721 *y sig.* 768, 776 &c.) y si se puede integrar se tendrá la de la curva que se busca.

802 Para encontrar la equacion á la curva cuya subtangente es $\frac{2yy}{a}$: igualaré á ella la fórmula $\frac{ydx}{dy}$ (721), sacaré de $\frac{2yy}{a} = \frac{ydx}{dy}$, $adx = 2ydy$, é integrando tendré $ax = yy$, equacion á la parábola (616). Si la subtangente es tercera proporcional á $a-x$, y; harémos $a-x : y :: y : \frac{yy}{a-x}$: de consiguiente será $\frac{yy}{a-x} = \frac{ydx}{dy}$, $ydy = adx - xdx$, que integrada da $yy = 2ax - xx$, equacion del círculo (603).

803 Para encontrar la curva cuya subnormal es $a-x$; harémos (721) $\frac{ydx}{dx} = a-x$, $ydy = adx - xdx$; y su integral $\frac{1}{2}yy = ax - \frac{1}{2}xx$ ó $yy = 2ax - xx$ nos muestra que es el círculo. Si la subnormal ha de ser constante ó igual á 1; tendremos $\frac{ydy}{dx} = 1$, $ydy = dx$, y $yy = 2x$, equacion á una parábola cuyo diámetro es 2.

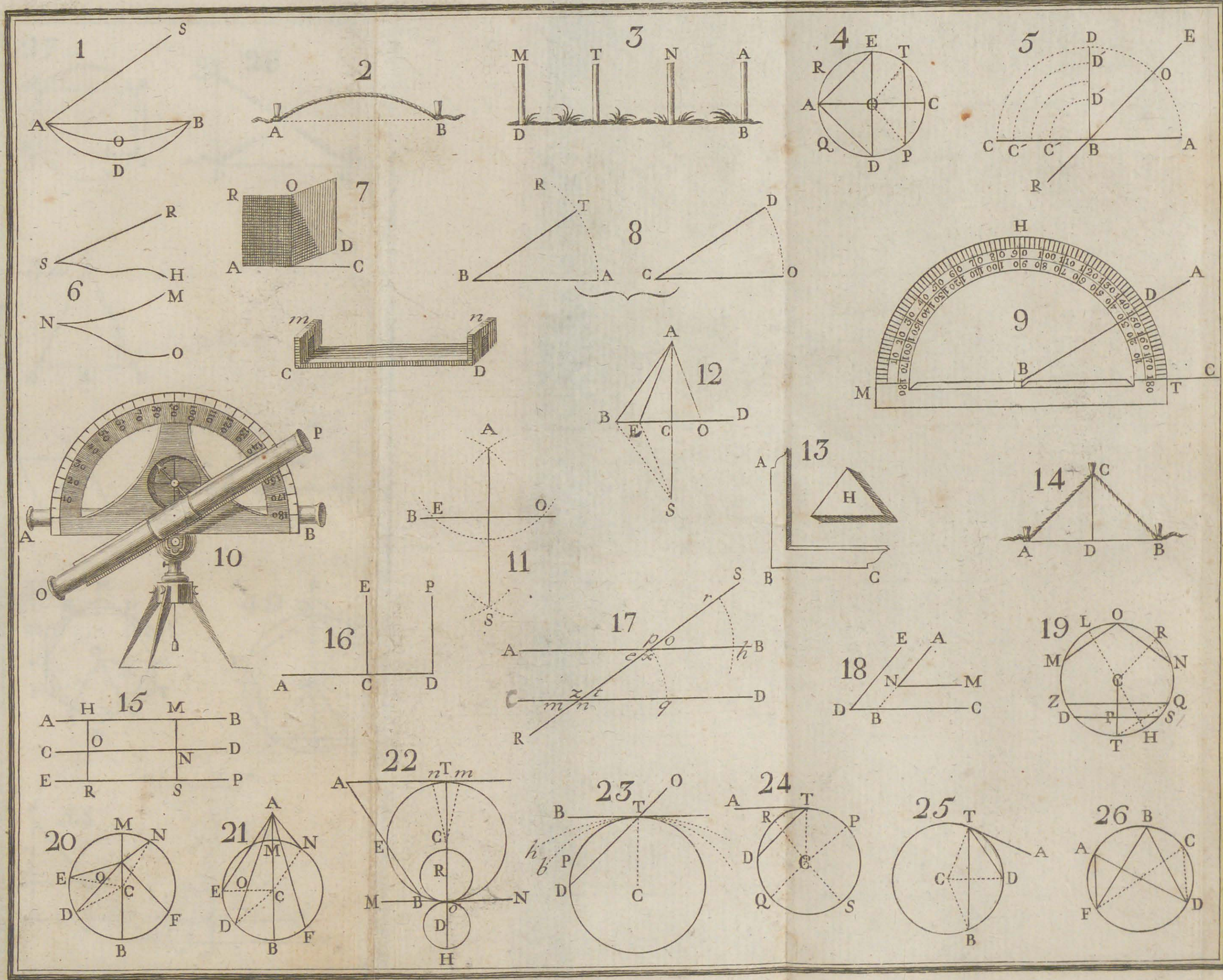
804 *Hayase de hallar ahora la curva cuya area es* $\frac{x^3}{3a}$. Diferencio esta expresion, é igualando el resultado $\frac{xxdx}{a}$ á la fórmula general ydx del elemento del area (768), tendré $\frac{xxdy}{a} = ydx$: de donde se saca $xx = ay$, equacion á la parábola. Finalmente, si dado

el valor $\frac{c}{2r}\left(axx-\frac{x^3}{3}\right)$ de una solidez, se pidiese la equacion de la curva que produjo el sólido; formarémos la equacion $\frac{cyydx}{2r}=\frac{c}{2r}\times(2axdx-xxdx)$, de la fórmula de la solidez y de la diferencial de la expresion dada; y sacarémos de ella $yy=2ax-xx$, equacion al círculo: de consiguiente la expresion dada será la de la solidez de la esfera.

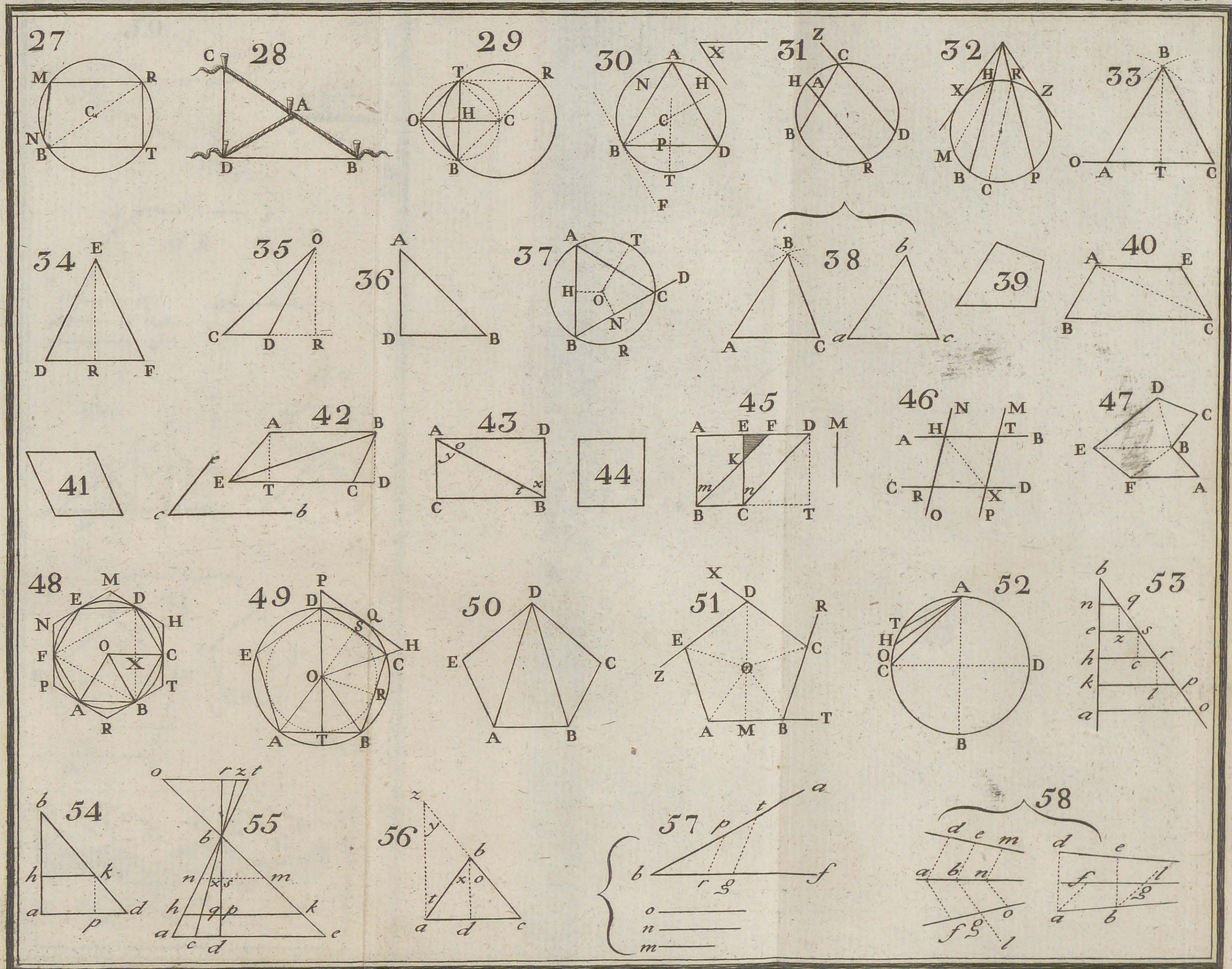
ERRATAS.

Página 37, *linea* 17, dice trecientos: lease trecientas. *Pag.* 46, *lin.* 3, dice 24: lease 48. *Pag.* 47, *lin.* 24, dice 20626200 83: lease 20626283. *Pag.* 68, *lin.* 11, dice $\frac{ab^2}{b^2}$: lease $\frac{ad^2}{b^2}$. *Pag.* 128, *lin.* 25, dice (183): lease (172). *Pag.* 139, *lin.* 2, dice (176): lease (177). *Pag.* 143, *lin.* 10, dice (169): lease (170). *Pag.* 144, *lin.* 24 y 28, dice (179)....(169): lease (180)....(170). *Pag.* 236, *lin.* 5, dice $\frac{1}{2}$+BR: lease $\frac{1}{2}$BR. *Pag.* 241, *lin.* 21, dice B, C iguales á b, c: lease A, C iguales á a, c.

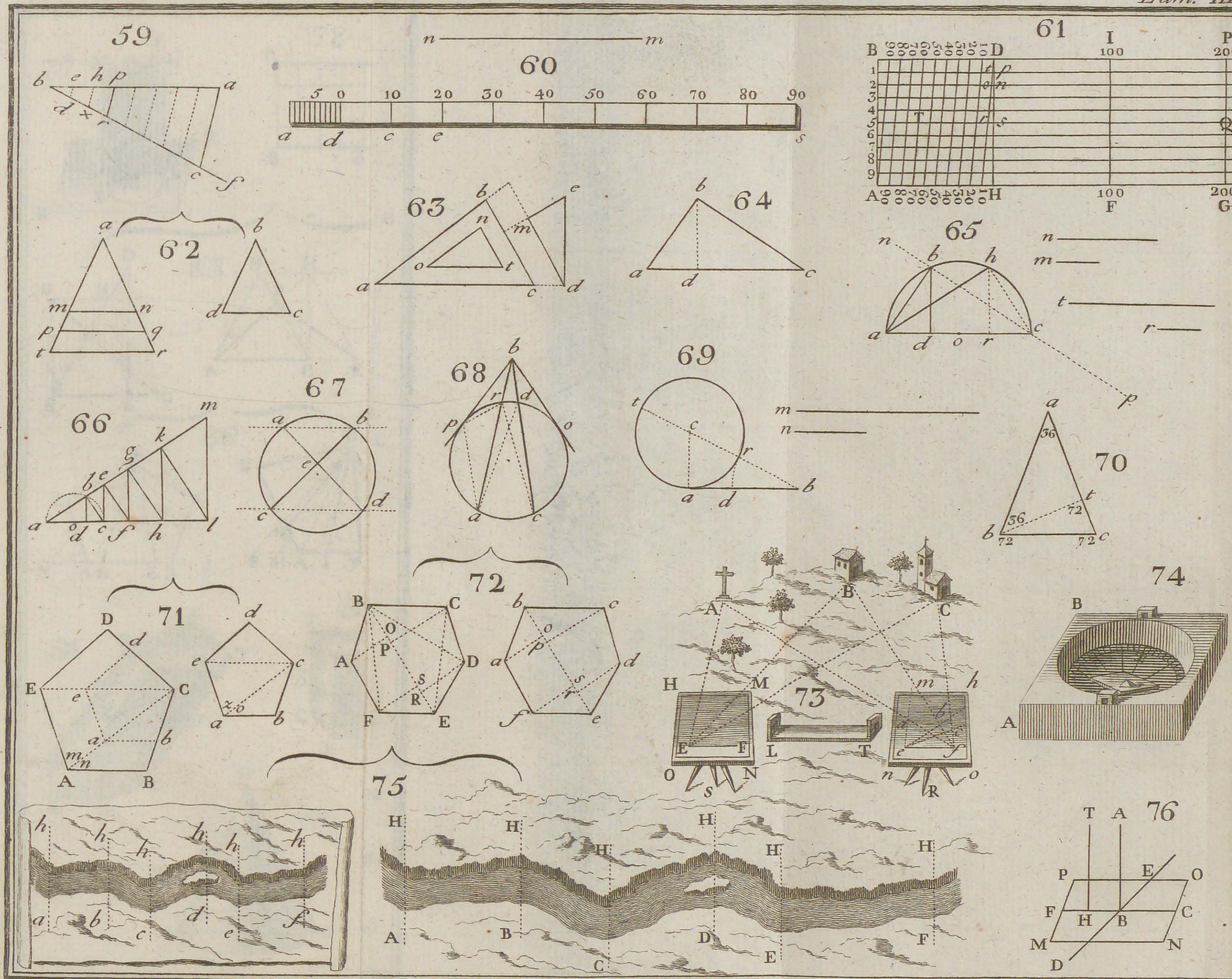
*Pag.*251, *lin.* 14, dice AD: lease AT. *Pag.* 253, *lin.*5, dice la *bk*: lease la *hk*. *Pag.id. lin.* 11, dice (374): lease (373). *Pag.* 257, *lin.* 23 y 24, dice SQ..T*r*..TQ: lease SQ..*tr*..*t*Q. *Pag.*258, *lin.penult.* dice *bdc*: lease *bdc* (fig. 62). *Pag.* 259, *lin.* 1, dice $at:bd::ar:dc$: lease $at:bd::ar:bc$. *Pag.* 269, *lin.* 8, dice B', *b*': lease B, *b*. *Pag.* 304, *lin.* 17, dice CFAHT: lease CFAHT (fig. 97). *Pag.id. lin.* 25, dice EQPT: lease EQPT (fig. 100). *Pag.*310, *lin.*5, dice, pentágonos: lease pentágonas. *Pag.* 320, *lin.* 26 y 27, dice 31067 y 3108: lease 3106 y 3107. *Pag.* 345, *lin.* 24, dice (570): lease (571). *Pag.* 383, *lin.* 12, dice $\frac{aa-xx}{aa}$: lease $\frac{aa-xx}{x}$. *Pag.* 394, *lin.* 11, dice TD: lease T*d*. *Pag.* 397, *lin.* 16, dice SD: lease S*d*. *Pag.* 403, *lin.* 9, dice NQ$-m$: lease NQ$-$Q*m*. *Pag. id. lin.* 10, dice NQ+Q*n*: lease NQ+Q*m*. *Pag.*423, *lin.* 2, dice S$=$: lease $s=$. *Pag.* 477, *lin.* 1, dice que es: lease es.



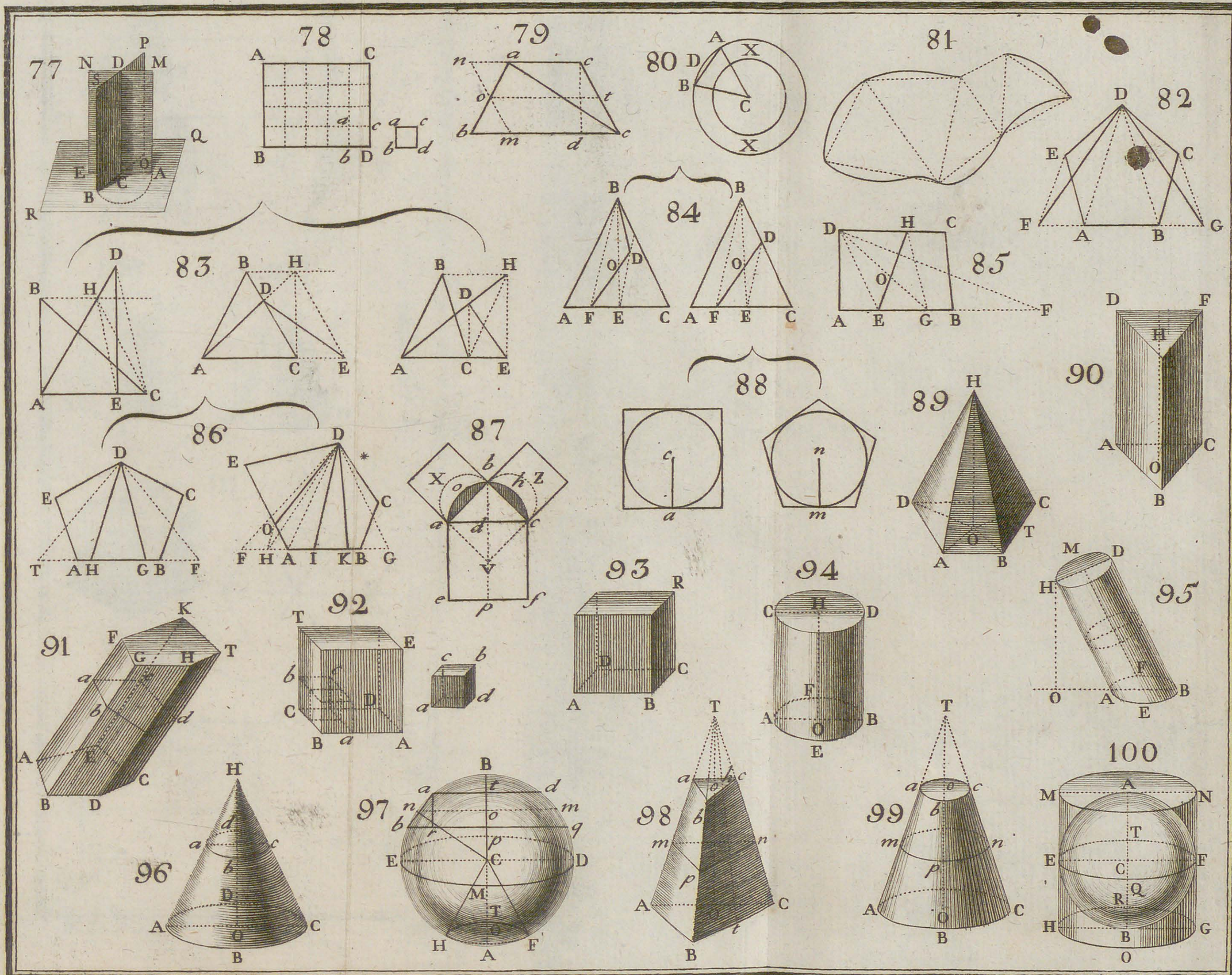
Felix Prieto lo Grabó, en Salamanca.


27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58

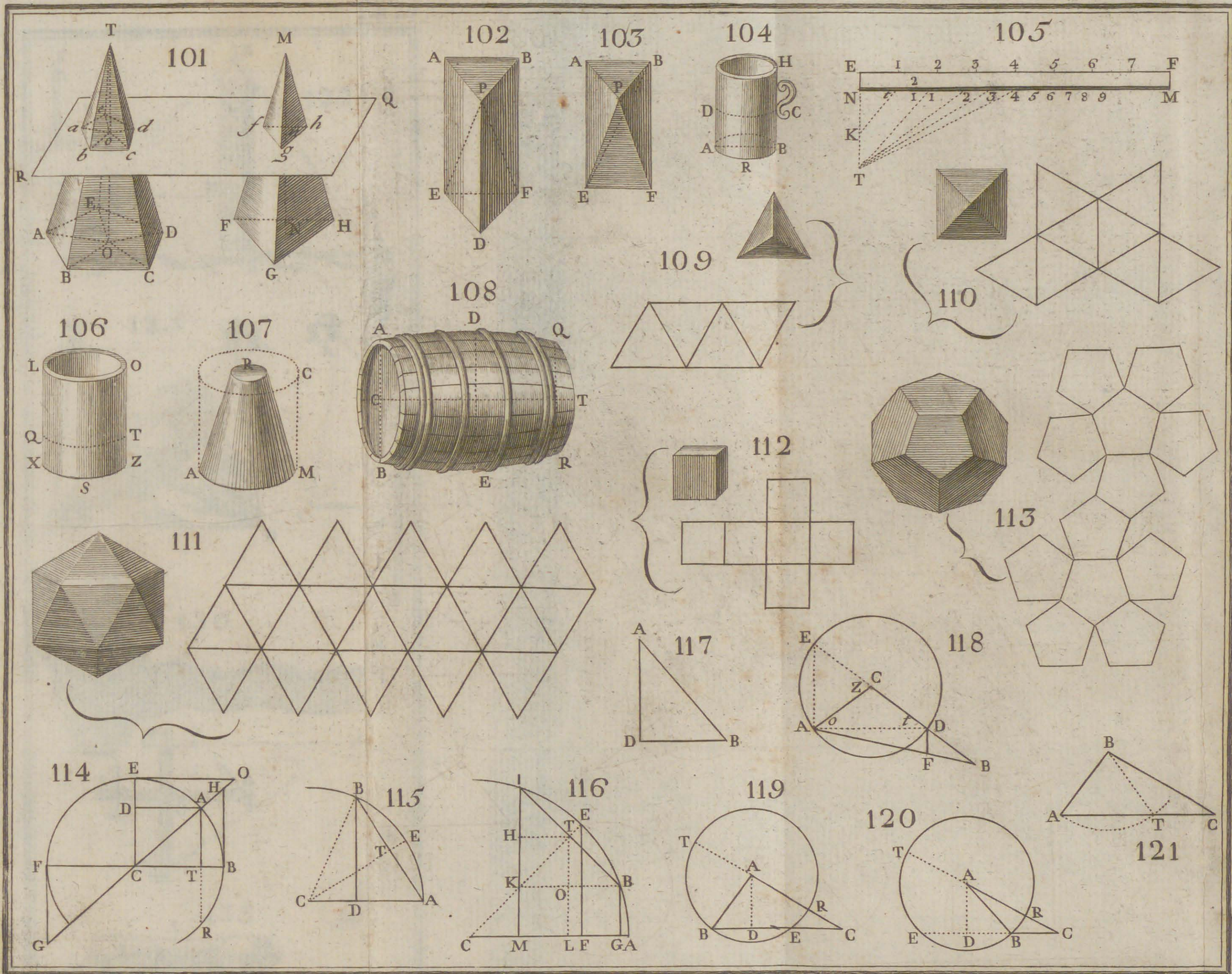
Felix P.



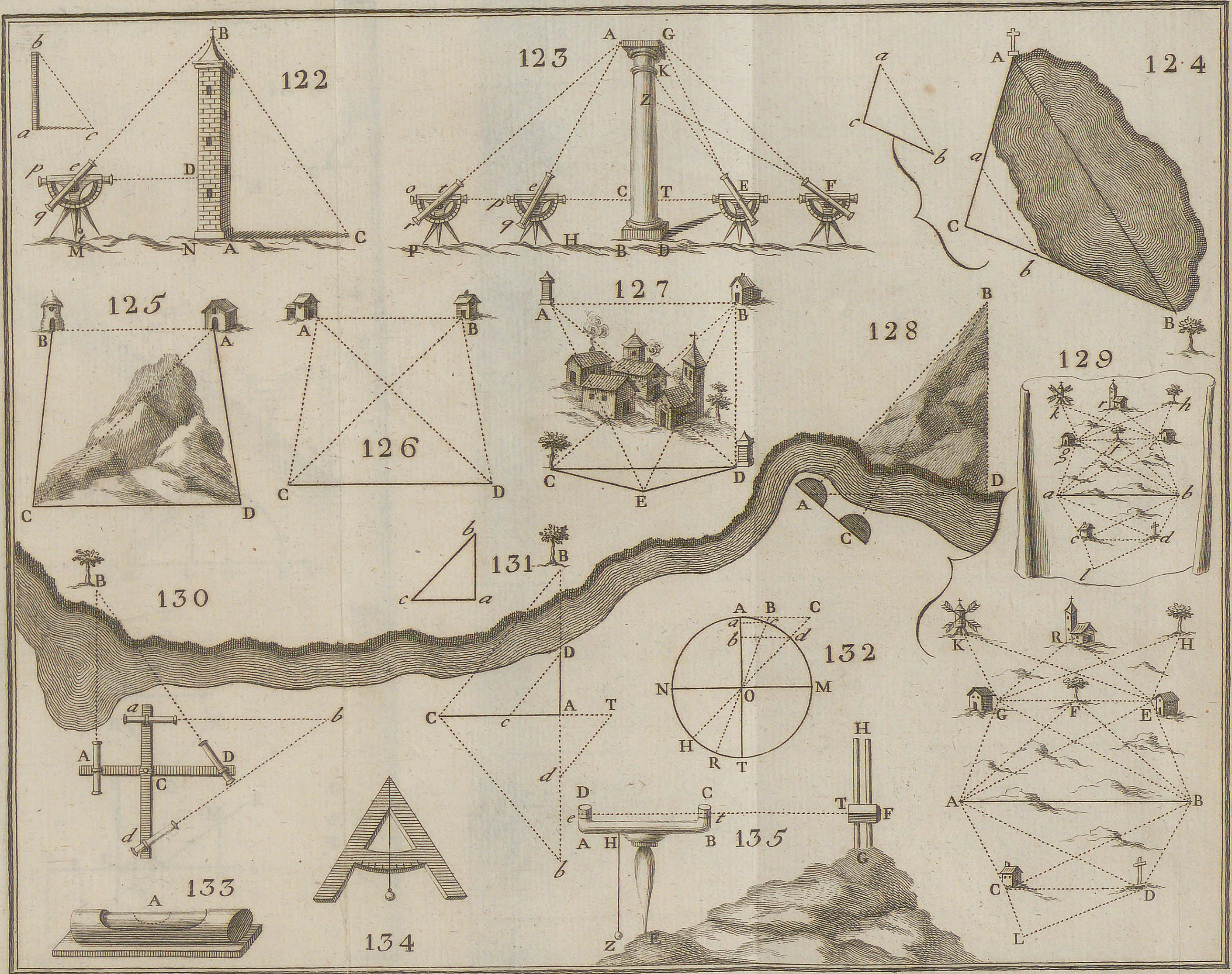
Felix P.



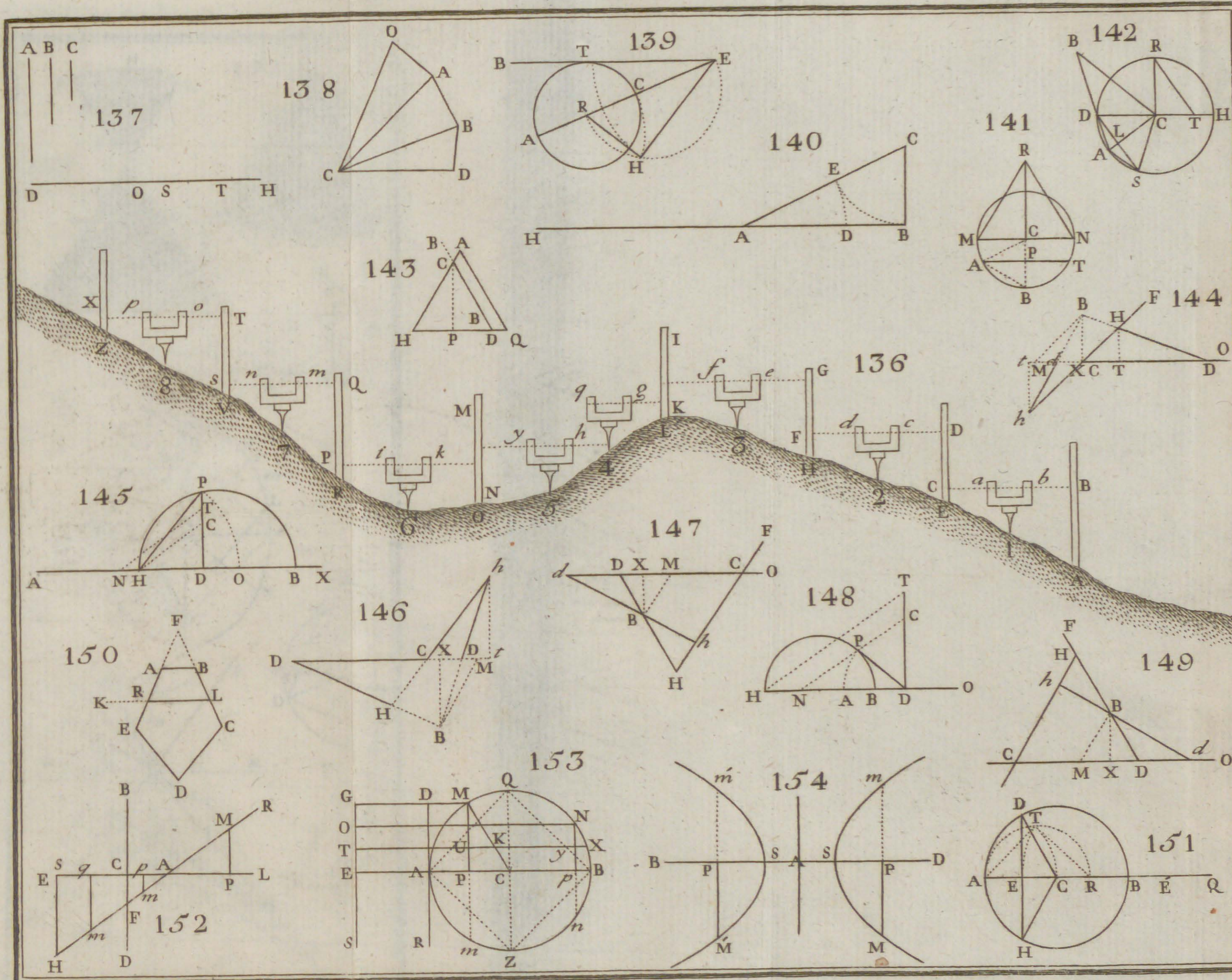
Felix Prieto.



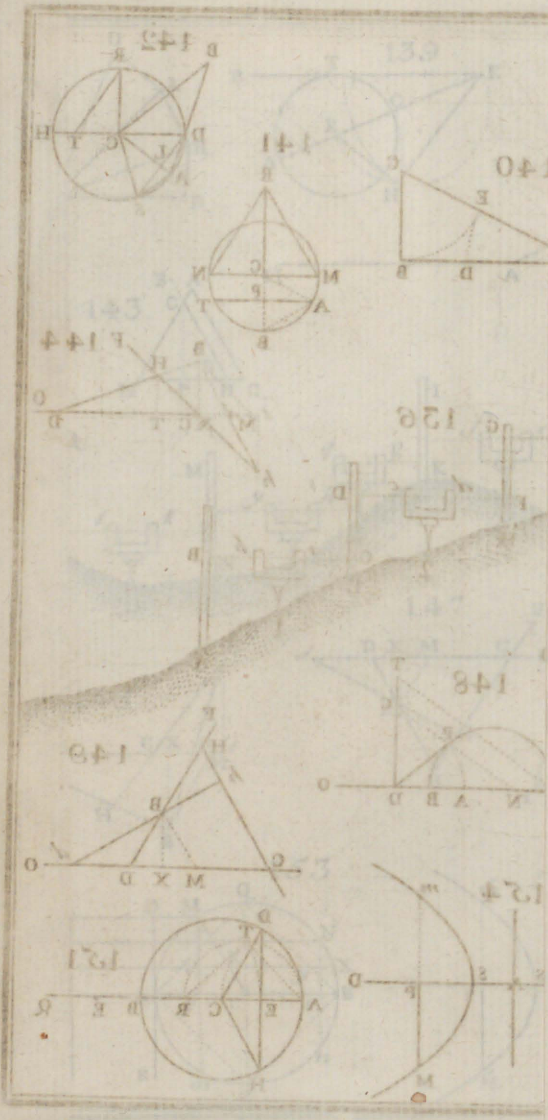
Felix Prieto f.t

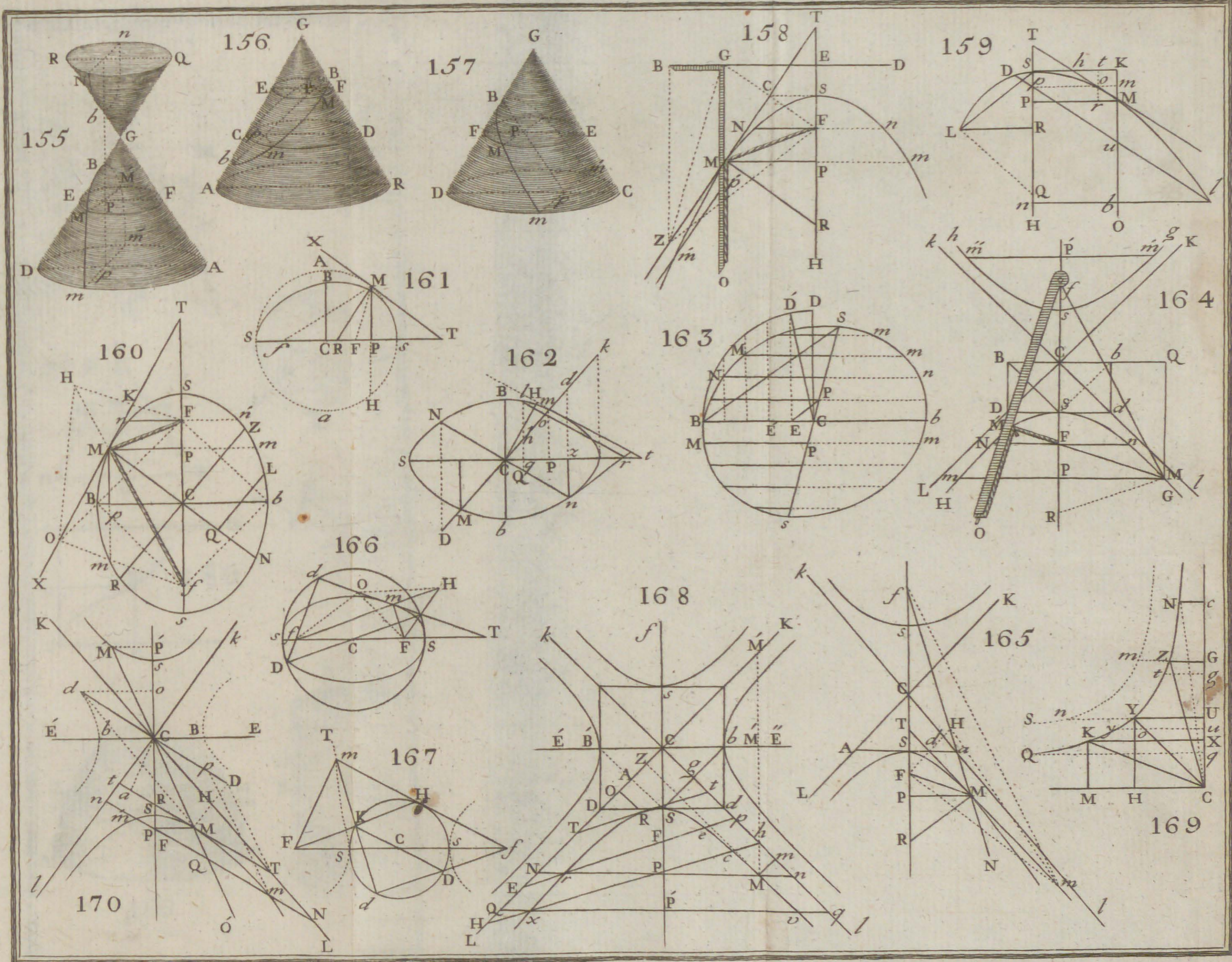


Felix Prieto esc.

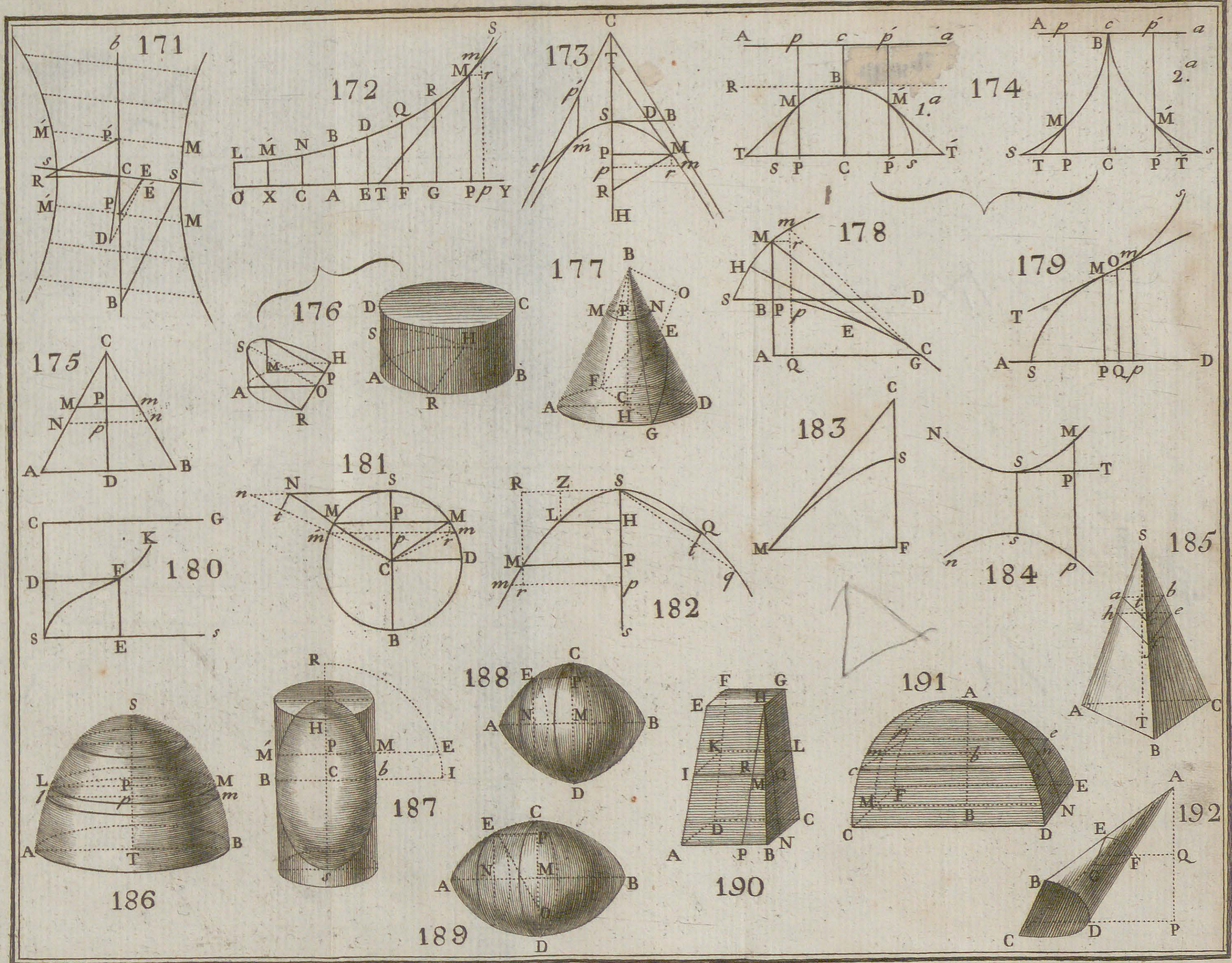


Felix Prieto esculp.





Felix Prieto esculp.



Felix Prieto las Grabó en Salamca

44287

6 2 4 8

4

68 | 18
54 | $3\frac{14}{18}$
14

6
3
18

76

4

48

443

4