



VNiVERSIDAD
D SALAMANCA

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

TEOREMAS DEL PUNTO FIJO Y
APLICACIONES

Curso 2022-2023

TRABAJO DE FIN DE GRADO

realizado por

CRISTINA RAMOS MARTÍN

bajo la tutela de

ÁNGEL ANDRÉS TOCINO GARCÍA



**VNiVERSIDAD
D SALAMANCA**

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

**TEOREMAS DEL PUNTO FIJO Y
APLICACIONES**

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Autora: Cristina Ramos Martín



Certificado de los tutores TFG Grado en Matemáticas

D. Ángel Andrés Tocino García, profesor/a del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Salamanca,

HACEN CONSTAR:

Que el trabajo titulado *Teoremas del punto fijo y aplicaciones*, que se presenta, ha sido realizado por Dña. Cristina Ramos Martín, con DNI *****3985V y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas en esta Universidad.

Salamanca, a fecha de firma electrónica.

Fdo.: Ángel Andrés Tocino García

Índice general

Introducción	1
1. Teorema del punto fijo de Banach	3
1.1. Enunciado y demostración del teorema	3
1.2. Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach	7
1.2.1. Ecuaciones diferenciales	7
1.2.2. Programación dinámica	10
2. Teorema del punto fijo de Brouwer	17
2.1. Enunciado y demostración del teorema	17
2.2. Aplicaciones del teorema del punto fijo de Brouwer	23
2.2.1. Equilibrios de Nash en juegos no cooperativos	24
2.2.2. El teorema de Perron-Frobenius	28
2.2.3. El teorema fundamental del Álgebra	32
3. Teorema del punto fijo de Schauder	35
3.1. Enunciado y demostración del teorema	35
3.2. Aplicaciones del teorema del punto fijo de Schauder	38
3.2.1. Teorema de Lomonosov	38
3.2.2. Ecuaciones integrales	45
Apéndice	55
Bibliografía	56

Introducción

Diferentes resultados que permiten determinar bajo qué condiciones una aplicación tiene un punto invariante, es decir, tal que su imagen sea él mismo, pueden englobarse bajo la denominación de teoremas del punto fijo. Los teoremas del punto fijo tienen sus orígenes en el siglo XIX con trabajos de destacados matemáticos como Banach, Brouwer, Schauder, Kakutani o Lefschetz. Este trabajo, como sugiere el título, estudiará tres de dichos teoremas (Banach, Brouwer y Schauder) junto con algunas aplicaciones de cada uno de ellos.

El principio de las aplicaciones contractivas de Banach es posiblemente el teorema del punto fijo más conocido, se tratará en el capítulo 1. Fue enunciado y demostrado en 1922 por el matemático polaco Stefan Banach, conocido por sus contribuciones en la teoría de espacios vectoriales normados y en la teoría de las ecuaciones integrales. Banach presentó el teorema en su trabajo titulado *"Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales"* (sobre las operaciones en conjuntos abstractos y su aplicación en las ecuaciones integrales) publicado en Fundamenta Mathematicae. Este teorema establece que toda función continua y contractiva definida en un espacio de Banach no vacío tiene un único punto fijo. En este trabajo se recoge su demostración y se presentan dos aplicaciones del mismo: una en el contexto de ecuaciones diferenciales y otra en el de programación dinámica. El teorema del punto fijo de Banach permite establecer la existencia y unicidad de soluciones tanto para ciertos tipos de ecuaciones diferenciales como para la ecuación de Bellman en el ámbito de programación dinámica.

El capítulo 2 está dedicado al teorema del punto fijo de Brouwer. Este teorema en su forma más simple establece que toda función continua definida de la bola unidad cerrada de un espacio euclídeo de dimensión finita en sí misma tiene al menos un punto fijo. Alguna versión inicial ya era conocida anteriormente; en 1817, el matemático checo Bernard Bolzano demostró la versión unidimensional del teorema. En 1909, Brouwer probó su versión del teorema del punto fijo para dimensiones 2 y 3; y en 1910, demostró el teorema del punto fijo para cualquier dimensión finita. La demostración de Brouwer fue posteriormente simplificada por el matemático francés Jacques Hadamard. En 1912, Brouwer publicó una serie de formulaciones y demostraciones del teorema del punto fijo de Hadamard, lo que llevó a una mayor comprensión y aplicación del teorema. En el capítulo del teorema del punto fijo de Brouwer, además de detallar su demostración, se estudiarán sus aplicaciones en la teoría de juegos y el álgebra lineal. En el contexto de la teoría de juegos, se estudiará la existencia de puntos de equilibrio en juegos finitos no cooperativos. Por otro lado, en el ámbito del álgebra lineal, se abordarán dos teoremas ampliamente conocidos. En primer lugar, se demostrará el teorema de Perron-Frobenius, acerca de la existencia de vectores y valores propios de matrices positivas. En segundo lugar, se abordará el teorema fundamental del álgebra, que establece que todo polinomio no constante tiene al menos una raíz compleja.

Finalmente, el capítulo 3 está dedicado al teorema del punto fijo demostrado en 1930 por el matemático Juliusz Schauder. Durante su tiempo en la universidad de Lwów, Schauder coincidió con Stefan Banach; ambos trabajaron estrechamente en el desarrollo de las matemáticas. El teorema de Schauder se considera una generalización del teorema de Brouwer para espacios de dimensión arbitraria. Este resultado ha encontrado aplicaciones en diversos campos, en particular, en este trabajo se estudiarán dos de ellas. En primer lugar, se demostrará el teorema de Lomonosov, que establece propiedades sobre ciertas clases de operadores lineales en espacios de Banach. Además como aplicación se presenta aquí, en el contexto de las ecuaciones integrales, un método para determinar la existencia de soluciones a dichas ecuaciones.

Capítulo 1

Teorema del punto fijo de Banach

En esta sección se presenta el teorema del punto fijo de Banach, que establece una condición suficiente para la existencia y unicidad de un punto fijo en una aplicación continua. Además el teorema proporciona de manera explícita una forma de llegar a la solución aproximada mediante un proceso iterativo. Un gran número de teoremas de existencia y unicidad se basan en esta herramienta. Este resultado tiene muchas aplicaciones en diferentes campos de las matemáticas que serán explicados a lo largo del capítulo. Se planteará concretamente su aplicación en la teoría de ecuaciones diferenciales y en la teoría de los sistemas dinámicos.

1.1 Enunciado y demostración del teorema

Banach demostró por primera vez este teorema en [3] en 1922. Es un resultado ampliamente conocido y su demostración también se puede encontrar en [1] o [11].

Definición 1.1. Sea (X, d) un espacio métrico, decimos que es *completo* si verifica que toda sucesión de Cauchy de elementos de X es convergente en X . Un espacio vectorial normado completo recibe el nombre de *espacio de Banach*.

Observación 1.2. Un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Banach es un espacio de Banach.

Definición 1.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que una aplicación $f: X \rightarrow X$ es *lipschitziana* si existe una constante real $M > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq M d(x, y)$ para todo $x, y \in X$. En este caso diremos que M es la *constante de Lipschitz* de f .

Definición 1.4. Sean (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una aplicación lipschitziana con constante de Lipschitz M . Si $M < 1$, se dice que f es *contractiva*.

Observación 1.5. Toda aplicación Lipschitziana es continua.

Teorema 1.6 (Teorema del punto fijo de Banach). Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f: X \rightarrow X$ una aplicación contractiva. Entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración. Sean M la constante de contracción de f y $x_0 \in X$ cualquiera. Construyamos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que esta sucesión es de Cauchy. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, y supongamos por ejemplo $n < m$, entonces aplicando la desigualdad triangular

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m). \quad (1.1)$$

Tengamos en cuenta que f es contractiva,

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i+1}) &= d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \leq M d(x_{i-1}, x_i) \\ &= M d(f(x_{i-2}), f(x_{i-1})) \leq M^2 d(x_{i-2}, x_{i-1}) \\ &= \dots \leq M^i d(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Sustituyendo en (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq (M^n + \dots + M^{m-1}) d(x_0, x_1) \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} M^k \right) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{M^n}{1-M} d(x_0, x_1), \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde al ser $M < 1$, se ha usado la convergencia de la serie geométrica. Como $M < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0$, de modo que

$$\left\{ \frac{M^n}{1-M} d(x_0, x_1) \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

y de (1.3) se deduce que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como (X, d) es un espacio completo, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente; denotemos $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dado que f es continua (por ser lipschitziana),

$$f(y) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = y.$$

Con lo que queda demostrado que la aplicación tiene al menos un punto fijo.

Estudiemos ahora la unicidad del punto fijo. Si existieran dos puntos fijos distintos x_1, x_2 , se verificaría, usando que f es contractiva y que $M < 1$

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq M d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2),$$

lo cual no puede ocurrir ya que $d(x_1, x_2) \neq 0$. Por tanto bajo las condiciones del enunciado la aplicación tiene un único punto fijo. $\square$

Observación 1.7. Por la unicidad del teorema 1.6, se puede afirmar que, dado un elemento cualquiera $y_0 \in X$, si construimos la sucesión $y_j = f(y_{j-1})$, con $j \in \mathbb{N}$, dicha sucesión converge al punto fijo de la aplicación f .

Veamos ahora que se pueden relajar las condiciones del teorema, basta con que alguna potencia de f sea contractiva para que la aplicación tenga un punto fijo.

Corolario 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si para algún $p \in \mathbb{N}$ f^p es una aplicación contractiva, entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración. Se usará la siguiente notación

$$f^p = f \circ \overset{p}{\dots} \circ f.$$

Aplicando el teorema 1.6 a la aplicación f^p , que es contractiva por hipótesis, ésta tiene un único punto fijo $a \in X$, $f^p(a) = a$. Por una parte se tiene que

$$f^{p+1}(a) = f(f^p(a)) = f(a)$$

y por otra

$$f^{p+1}(a) = f^p(f(a)),$$

de donde obtenemos que $f(a) = f^p(f(a))$; como el punto fijo de f^p es único, se debe cumplir que

$$f(a) = a.$$

Es decir, f tiene un punto fijo. □

Corolario 1.9. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f: X \rightarrow X$ una aplicación contractiva (M su constante de contracción) con $w \in X$ su punto fijo. Sea $x_0 \in X$ y tomemos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{f(x_{n-1})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se verifica que

$$d(x_p, w) \leq \frac{M^p}{1 - M} d(x_0, x_1).$$

Demostración. En primer lugar veamos que para todo $y, z \in X$

$$d(y, z) \leq \frac{d(y, f(y)) + d(z, f(z))}{1 - M}. \quad (1.4)$$

Por la desigualdad triangular y teniendo en cuenta que f es contractiva

$$\begin{aligned} d(y, z) &\leq d(y, f(y)) + d(f(y), f(z)) + d(f(z), z) \\ &\leq d(y, f(y)) + M d(x, y) + d(f(z), z), \end{aligned}$$

Operando se llega al resultado deseado. A continuación probemos que dado $x \in X$ se verifica

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq \frac{M^n + M^m}{1 - M} d(x_0, x_1). \quad (1.5)$$

Basta usar (1.4), (1.3) y teniendo en cuenta que f es contractiva

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq \frac{1}{1 - M} (d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + d(f^m(x), f^{m+1}(x))) \\ &\leq \frac{M^n + M^m}{1 - M} d(x_0, x_1). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Finalmente demostremos la desigualdad del enunciado. Observemos que $w = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ y que $M < 1$, entonces sustituyendo en (1.6) y tomando límite cuando n tiende a infinito,

$$\begin{aligned} d(x_p, w) &= d(x_p, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^p + M^n}{1 - M} d(x_0, x_1) \\ &= \frac{M^p}{1 - M} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

□

Observación 1.10. La condición de que la aplicación sea contractiva en el teorema 1.6 es necesaria; no basta con que sea lipschitziana. Como ejemplo ilustrativo consideremos una aplicación f que sea lipschitziana, no contractiva, y probemos que no tiene un punto fijo.

$$\begin{aligned} f: (0, \infty) &\longrightarrow (0, \infty) \\ x &\longmapsto x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Esta aplicación es lipschitziana ya que

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 1$$

para todo $x \in (0, \infty)$, y aplicando el teorema del valor medio podemos afirmar que

$$|f(y) - f(x)| \leq |x - y|.$$

Por lo tanto esta aplicación es lipschitziana con constante de Lipschitz igual a 1. Supongamos que existiera un punto fijo de f , a , entonces

$$a = a + \frac{1}{a},$$

por lo que

$$a^2 = a^2 + 1,$$

despejando llegaríamos a que $0 = 1$, por lo tanto no puede existir dicho punto fijo. La situación se ilustra un poco más con la siguiente figura.

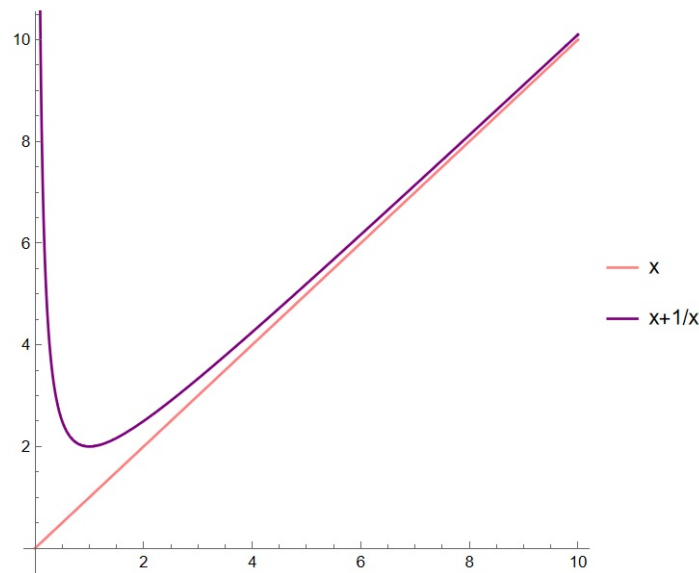


Figura 1.1: Gráfica de la función $f(x) = x + 1/x$ y de la recta $y = x$.

1.2 Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach

Una de las aplicaciones más conocidas del teorema del punto fijo de Banach se encuentra en la teoría de ecuaciones diferenciales. En particular, este teorema se utiliza para demostrar la existencia y unicidad de soluciones para ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. Otra aplicación se encuentra en la programación dinámica. Esta técnica es utilizada para resolver problemas de optimización en los que la solución óptima depende de las decisiones tomadas en el pasado. El teorema del punto fijo de Banach proporciona las condiciones necesarias para garantizar la existencia de una solución óptima en estos problemas.

1.2.1 Ecuaciones diferenciales

Se demostrará en este apartado un teorema de existencia y unicidad de solución del siguiente problema de valor inicial (o de Cauchy)

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo de la recta real, $t_0 \in I$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto con $y_0 \in U$ y $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua. En cuanto a las referencias, se utilizarán [20] y [18]. A lo largo de la sección denotaremos por $\|\cdot\|$ a la norma usual en $\mathbb{R}^n$ y $|\cdot|$ a la de $\mathbb{R}$.

Se dice que una función diferenciable $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución de (1.7) si para todo $t \in I$, $u(t) \in U$ y $u'(t) = f(t, u(t))$. Por el teorema fundamental del cálculo integral, el problema (1.7) es equivalente a

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx. \quad (1.8)$$

Lema 1.11. Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado. El espacio $E = \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$, de las funciones continuas de J en $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in J} \{\|x(t)\|\}$$

es un espacio de Banach.

Demostración. $\|\cdot\|_\infty$ es una norma, está bien definida ya que J está acotado. Veamos que toda sucesión de Cauchy en E es convergente. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de E . Sea $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$

$$\|x_n - x_m\|_\infty \leq \epsilon,$$

por tanto

$$\|x_n(t) - x_m(t)\| \leq \epsilon$$

para todo $t \in J$, $n, m \geq n_0$. Entonces, para cada $t \in J$, la sucesión $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, que es un espacio métrico completo. Consideremos la siguiente función, que está bien definida

$$\begin{aligned} x: J &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t). \end{aligned}$$

Por tanto, podemos afirmar por propia construcción de x que dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \epsilon$$

para todo $n \geq N_0$, $t \in J$. Esto prueba que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x en E . Para terminar la demostración basta con que veamos que $x \in E$, es decir, hay que ver que x es continua. Fijemos $n \geq N_0$, como x_n es continua, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t_1, t_2 \in J$ con $|t_1 - t_2| \leq \delta$, se tiene que $\|x_n(t_1) - x_n(t_2)\| \leq \epsilon$. Por lo tanto, aplicando la desigualdad triangular

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq \|x(t_1) - x_n(t_1)\| + \|x_n(t_1) - x_n(t_2)\| + \|x_n(t_2) - x(t_2)\| \leq 3\epsilon$$

para todo $n \geq N_0$, $t_1, t_2 \in J$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta$. Por lo tanto x es uniformemente continua en J . $\square$

Lema 1.12. Sea J un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y denotemos por $B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ a la bola cerrada de radio R centrada en el origen. El espacio $E' = \mathcal{C}(J, B(0, R))$ dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un subespacio cerrado de $E = \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente de funciones de E' ; para cierto $x \in E$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Veamos que $x \in E'$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica

$$\|x_n - x\|_\infty < \epsilon/3.$$

Como x_n es continua en J , para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $|t_1 - t_2| < \delta$ con $t_1, t_2 \in J$, entonces $\|x_n(t_1) - x_n(t_2)\| < \epsilon/3$. Ahora, dado cualquier $t_1, t_2 \in J$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|x(t_1) - x(t_2)\| &\leq \|x(t_1) - x_n(t_1)\| + \|x_n(t_1) - x_n(t_2)\| + \|x_n(t_2) - x(t_2)\| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto, x es una función continua. Falta por probar que $x(J) \subseteq B(0, R)$. Dado que $x_n \in E'$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $|x_n(t)| \leq R$ para todo $t \in J$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos $|x(t)| \leq R$ para todo $t \in J$. $\square$

Observación 1.13. Se ha demostrado que $\mathcal{C}(J, B(0, R))$ es un cerrado de $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$, el resultado también es válido para cualquier bola que no esté centrada en el origen.

Teorema 1.14 (Existencia y unicidad). Sea f una función continua $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto abierto. Supongamos además que f es lipschitziana en la segunda variable, es decir, existe una constante $M \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ tal que

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq M\|y_1 - y_2\| \quad t \in I, y_1, y_2 \in U.$$

Entonces existe un entorno de $t_0 \in I$ contenido en I donde el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

con $y_0 \in U$, tiene solución única.

Demostración. Fijemos un intervalo $J = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq I$ con $a \in \mathbb{R}^+$, sin especificar inicialmente. Por simplificar notación, también denotaremos por y_0 a la función constante y_0 . Elijamos $\delta > 0$ de manera que :

$$B_\infty(y_0, \delta) = \{v \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n) : \|v - y_0\|_\infty \leq \delta\} \subset \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}$$

$$B(y_0, \delta) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - y_0\| \leq \delta\} \subset U \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Llamemos L a la cota superior de f en $J \times B(y_0, \delta)$, que existe por ser f una función continua y el conjunto considerado un compacto. Denotemos por $E = \mathcal{C}(J, B(y_0, \delta))$ al conjunto de las funciones continuas que valoran de J en $B(y_0, \delta)$ y fijemos a verificando:

$$0 < a < \min \left\{ \frac{\delta}{L+1}, \frac{1}{M} \right\}.$$

Sea $x \in E$, para cada $t \in J$ definamos T :

$$T(x)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Con esta elección de a se cumple

$$\begin{aligned} \|T(x)(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L ds = L(t - t_0) \\ &\leq L \cdot a < (L+1)a < \delta \end{aligned}$$

para todo $t \in J$. En concreto, tomando supremos podemos afirmar que $\|T(x) - y_0\|_\infty < \delta$. Por otra parte, con esta elección de a , también se verifica que T es contractiva ya que para todo $u, v \in E$,

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(v)\|_\infty &= \sup_{t \in J} \left\{ \left\| \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right\| \right\} \\ &\leq \sup_{t \in J} \left\{ \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \right\} \\ &\leq \sup_{t \in J} \left\{ \int_{t_0}^t M \|u(s) - v(s)\| ds \right\} \\ &\leq \sup_{t \in J} \left\{ \int_{t_0}^t M \|u - v\|_\infty ds \right\} \\ &\leq a M \|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

y como $aM < 1$, T es contractiva. Por tanto la aplicación T queda definida correctamente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T: E &\longrightarrow E \\ x &\mapsto T(x): J \longrightarrow B(y_0, \delta) \\ t &\mapsto T(x)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

Observese además que E es un espacio de Banach, ya que es un cerrado de $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ por la observación 1.13; por el lema 1.11 es un espacio de Banach. Por el teorema 1.6, T tiene un único punto fijo, es decir el problema de valor inicial (1.9) tiene solución única. $\square$

1.2.2 Programación dinámica

La programación dinámica es una técnica que permite encontrar una solución de un problema de optimización de manera secuencial. El matemático Richard Bellman introdujo el concepto en el siglo XX y enunció el principio de optimalidad, "*una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que sea el estado inicial y la decisión inicial, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión*". El objetivo de esta sección será plantear un modelo básico de crecimiento económico y utilizar la programación dinámica y el teorema del punto fijo de Banach para demostrar que el problema propuesto tiene solución. Comencemos modelando la situación matemáticamente, supongamos que se cuenta inicialmente con una cantidad x_0 . Se debe tomar una decisión acerca de cuánto puede consumir y cuánto no para poder invertir en un futuro. Después se deberá tomar la misma decisión, pero esta vez habrá un saldo distinto sobre el que decidir, y así sucesivamente. El problema que se plantea es tomar las decisiones de manera que el sistema funcione de manera óptima. Se usará la denominada *ecuación de Bellman* para encontrar la estrategia óptima, se verá en esta sección que esta ecuación tiene solución usando como referencia el capítulo 3 de [19] y la sección II.6 de [11]. Las variables que se van a usar para plantear el problema son las siguientes:

- Tiempo: Denotemos por $\mathcal{T}$ al conjunto de momentos en los cuales se tiene que tomar una decisión, podría ser un conjunto discreto o continuo; por simplificar, consideramos que es un conjunto discreto: $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$.
- Estados: Se denotará por $\mathcal{K} = \{k_0, k_1, k_2, \dots\}$, simboliza de qué información se dispone en cada instante: k_i es la información de la que se dispone en tiempo t_i . Esta información condicionará a la toma de decisiones.
- Decisiones: Se observa el estado k_i en el que nos encontramos y se toma una decisión, que denotaremos por c_i , simboliza el consumo en el instante t_i : $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$.
- Función de utilidad: Se cuenta con una función de utilidad $u(c)$, que da información de qué beneficios da una decisión c . Es una función continua, diferenciable y estrictamente creciente

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}^+ = [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c &\longmapsto u(c). \end{aligned}$$

Supongamos además que existe una razón de descuento, $\beta \in [0, 1)$, un factor que simboliza que cuanto antes se reciba la ganancia, más valor tiene. Se busca maximizar la recompensa, tomar las decisiones $\{c_0, c_1, \dots\}$ tales que el resultado de la serie

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sea máximo. Se debe tener en cuenta una serie de restricciones en cada periodo, si consideramos una tasa de interés r , el estado del individuo en el instante t tiene la siguiente forma:

$$k_t = k_{t-1} \cdot r - c_{t-1} \cdot r + k_{t-1} - c_{t-1} = (1+r)(k_{t-1} - c_{t-1})$$

para cada $t \in \mathbb{N}$. Supongamos también, por simplificar, que no se puede consumir más de lo que se tiene, es decir, $0 \leq c_t \leq k_t$ para todo $t \in \mathbb{N}$. En conclusión, el problema a estudiar queda planteado de así:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ \text{sujeto a } \equiv \text{s.a } & \begin{cases} k_t = (1+r)(k_{t-1} - c_{t-1}) & \text{para todo } t \in \mathbb{N}, t \geq 1 \\ 0 \leq c_t \leq k_t & \text{para todo } t \in \mathbb{N} \\ k_0 = x_0 \end{cases}, \end{aligned}$$

donde recordemos que x_0 es el capital inicial. El objetivo es encontrar una elección de $\mathcal{C}$ para que el sistema sea óptimo. Dado $k \in \mathbb{R}$, definamos para cada $T \in \mathbb{N}$ la siguiente función, conocida como *función valor*,

$$\begin{aligned} V_T(k) &= \max_{\{c_t\}} \sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ \text{s.a } & \begin{cases} k_t = (1+r)(k_{t-1} - c_{t-1}) & \text{para todo } t \in \mathbb{N}, t \geq T+1 \\ 0 \leq c_t \leq k_t & \text{para todo } t \in \mathbb{N}, t \geq T \\ k_T = k \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

V_T simboliza el valor máximo de las ganancias que se espera obtener cuando se comienza a tomar decisiones en el instante T . Veamos que la función V_T definida como antes satisface la que se conoce como *ecuación de Bellman*:

$$\begin{aligned} V_T(k) &= \max_{0 \leq c_T \leq k} \{u(c_T) + \beta V_T(k')\} \\ \text{s.a } & \left\{ k' = (1+r)(k - c_T) \right\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Partimos de (1.10) para llegar a (1.11) y supongamos por ejemplo $T = 0$:

$$\begin{aligned}
& \max_{\substack{0 \leq c_t \leq k_t \\ k_t = (1+r)(k_{t-1} - c_{t-1})}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
&= \max_{\substack{0 \leq c_t \leq k_t \\ k_t = (1+r)(k_{t-1} - c_{t-1})}} \{ \beta^0 u(c_0) + \beta^1 u(c_1) + \beta^2 u(c_2) + \beta^3 u(c_3) \dots \} \\
&= \max_{\substack{0 \leq c_t \leq k_t \\ k_t = (1+r)(k_{t-1} - c_{t-1})}} \{ \beta^0 u(c_0) + \beta(\beta^0 u(c_1) + \beta^1 u(c_2) + \beta^2 u(c_3) \dots) \} \\
&= \max_{0 \leq c_0 \leq k} \{ u(c_0) + \beta V_0(k') \}.
\end{aligned}$$

siendo $k' = (1+r)(k - c_0)$. Por tanto, el problema de encontrar una elección de decisiones que optimicen el sistema, $\{c_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, se transforma en encontrar una función $V = V_0$ que satisfaga (1.11). V describe el mejor valor que se puede dar en cada estado. Sea $k \in \mathcal{K}$ un estado, $V(k)$ simboliza la ganancia óptima que se puede dar en k . Con el valor $V(k)$ podremos deducir cuál es el valor óptimo de consumo en ese momento, y se podrá calcular el siguiente estado. Estamos resolviendo el problema inicial de manera secuencial, de aquí el uso de la programación dinámica. Para estudiar la existencia de solución de (1.11), se usarán los siguientes conceptos y resultados:

Definición 1.15. Una *correspondencia* entre dos conjuntos X e Y es una aplicación $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, donde $\mathcal{P}(Y)$ es el conjunto partes de Y .

Definición 1.16. Dada una correspondencia entre dos conjuntos X e Y , $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, diremos que es *compacta* si para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ es un conjunto compacto.

Definición 1.17. Dada una correspondencia entre dos conjuntos X e Y , $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, se dice que φ es *semicontinua inferior* en un punto $x \in X$ si $\varphi(x)$ es no vacío, y para cada $y \in \varphi(x)$, y toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converja a x , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{y_n\}_{n \geq n_0}$ con $y_n \in \varphi(x_n)$ tal que $y_n \rightarrow y$.

Definición 1.18. Dada una correspondencia entre dos conjuntos X e Y , $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, se dice que φ es *semicontinua superior* en un punto $x \in X$ si es compacta, $\varphi(x)$ es no vacío y para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converja a x y toda sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $y_n \in \varphi(x_n)$, se verifica que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión convergente en $\varphi(x)$.

Definición 1.19. Dada una correspondencia entre dos conjuntos X e Y , $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, se dice que φ es *continua* si es semicontinua superior e inferior en todo $x \in X$.

Teorema 1.20 (Teorema del máximo). Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos también $\Gamma: X \rightarrow Y$ una correspondencia compacta y continua. Entonces la función $\max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y)$ es continua.

La demostración de este teorema se puede encontrar en el capítulo 3 de [19].

En lo que sigue, como se ha hecho en apartados anteriores, se denotará por $|\cdot|$ a la norma en $\mathbb{R}$, $\|\cdot\|$ a la norma en $\mathbb{R}^n$ y dada una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \{f(t)\}$.

Lema 1.21 (Condiciones suficientes de Blackwell para contracciones). Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y denotemos por E al conjunto de las funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{R}$, dotemos a E de la norma del supremo. Sea $T: E \rightarrow E$ un operador satisfaciendo las siguientes condiciones:

- i) Dadas $v_1, v_2 \in E$ con $v_1(k) \leq v_2(k)$ para todo $k \in X$, entonces $T(v_1)(k) \leq T(v_2)(k)$ para todo $k \in X$.
- ii) Existe $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$T(v + a)(k) \leq T(v)(k) + \beta a \quad \text{para todo } v \in E, a \geq 0, k \in X,$$

donde $(v + a)(k) = v(k) + a$.

Entonces T es una aplicación contractiva.

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in E$. Por definición de la norma, $v_1 \leq v_2 + \|v_1 - v_2\|_\infty$. Aplicando el operador en ambos lados de la desigualdad y utilizando la segunda de las condiciones, se obtiene

$$T(v_1) \leq T(v_2 + \|v_1 - v_2\|_\infty) \leq T(v_2) + \beta \|v_1 - v_2\|_\infty.$$

Repetiendo al mismo argumento sustituyendo v_1 por v_2 ,

$$T(v_2) \leq T(v_1) + \beta \|v_1 - v_2\|_\infty \implies T(v_1) - T(v_2) \geq -\beta \|v_1 - v_2\|_\infty.$$

Combinando ambas desigualdades:

$$\|T(v_1) - T(v_2)\|_\infty \leq \beta \|v_1 - v_2\|_\infty.$$

□

Teorema 1.22 (Existencia y unicidad de solución para la ecuación de Bellman). Sea E el espacio de las funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$. Existe una única función $V \in E$ tal que es solución de la siguiente ecuación funcional

$$\begin{aligned} V(k) &= \max_{0 \leq c \leq k} \{u(c) + \beta V(k')\} \\ \text{s.a. } &\left\{ \begin{aligned} k' &= (1+r)(k-c) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Demostración. Observemos que E dotado con la norma del supremo es un espacio de Banach. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E . Para todo $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_0$, entonces

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon.$$

Por definición de la norma del supremo, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. En particular, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, que es completo. Por lo tanto, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto en $\mathbb{R}$, que llamaremos $f(x)$. Ahora definamos la siguiente función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \end{aligned}$$

Veamos que $f \in E$ y que $f_n \rightarrow f$ con la norma del supremo. Primero, debemos demostrar que f está acotada. Como f_n es acotada para todo $n \in \mathbb{N}$, existe M tal que $\|f_n\|_\infty \leq M$ para todo n , entonces para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leq M$. Por lo tanto, f es acotada.

Para todo $\epsilon > 0$, existe un entero n_0 tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon/2$ para todo $m, n > n_0$. Además, fijado $x \in \mathbb{R}^+$, por la definición de f existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$ para todo $n > n_x$. Teniendo en cuenta estas desigualdades, para todo $n > n_0$, $m > \max\{n_0, n_x\}$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Como esto es válido para cualquier $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$$

para todo $n > n_0$. Queda demostrado que E es un espacio de Banach. Consideremos la aplicación T , definida por

$$\begin{array}{ccc} T: E & \longrightarrow & E \\ V & \longmapsto & T(V): \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+ \\ & & k \longrightarrow T(V)(k) \end{array},$$

donde

$$\begin{aligned} T(V)(k) &= \max_{0 \leq c \leq k} \{u(c) + \beta V(\bar{k})\} \\ \text{s.a. } \bar{k} &= (1+r)(k-c) \end{aligned}.$$

En primer lugar comprobemos que T está bien definida, sea $v \in E$ cualquiera, veamos que $T(v)$ es continua y acotada. Observemos en primer lugar que el conjunto sobre el cual se está maximizando es un compacto, y la función a maximizar es continua por composición de funciones continuas, por lo que $T(v)$ está acotada. Por otro lado, consideremos la siguiente correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \Gamma: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ k & \longmapsto & \Gamma(k) = \{c \in \mathbb{R} : 0 \leq c \leq k\}, \end{array}$$

veamos que es compacta y continua. Dado $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, $\Gamma(x)$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, es decir, un compacto, por lo que Γ es una correspondencia compacta. Para ver que es continua debemos ver que es semicontinua superior e inferior. Observemos que dado $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma(x)$ siempre es no vacío.

Veamos que Γ es inferiormente semicontinua. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x . Sea $y \in \Gamma(x)$, es decir, $0 \leq y \leq x$. Entonces, se puede elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq y \leq x_n$ para cada $n \geq n_0$. Luego, para cada $n \geq n_0$, definamos $y_n = y$. Así que, $y_n \in \Gamma(x_n)$ para todo $n \geq n_0$, porque $0 \leq y \leq x_n$ para todo $n \geq n_0$. Además, la sucesión $\{y_n\}$ es constante, y por lo tanto converge a y . En definitiva, Γ es inferiormente semicontinua.

Veamos a continuación que Γ es superiormente semicontinua. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a $x \in \mathbb{R}$, y sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión verificando $y_n \in \Gamma(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Debemos demostrar que existe una subsucesión de $\{y_n\}$ que converge a algún

elemento de $\Gamma(x)$. Por definición de Γ , sabemos que $\Gamma(x)$ es el intervalo cerrado $[0, x]$, que es un conjunto compacto. Ahora, supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión convergente a x , y $\{y_n\}$ es una sucesión en $\Gamma(x_n)$. Entonces, cada y_n es un número real tal que $0 \leq y_n \leq x_n$. Por lo tanto, $0 \leq y_n \leq x$ para todo n , y así $\{y_n\}$ es una sucesión acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, sabemos que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. Por lo tanto, existe una subsucesión de $\{y_n\}$, que denotaremos también como $\{y_n\}$ por simplicidad, que converge a algún número real y . Ahora, debemos demostrar que $y \in \Gamma(x)$, es decir, que $0 \leq y \leq x$. Para ello, tengamos en cuenta que $0 \leq y_n \leq x_n$, tomando límite cuando n tiende a infinito, se obtiene que $0 \leq y \leq x$, por tanto $y \in \Gamma(x)$.

Por el teorema 1.20,

$$\begin{aligned} & \max_{c \in \Gamma(k)} \{u(c) + \beta v(\bar{k})\} \\ \text{s.a. } & \bar{k} = (1+r)(k-c) \end{aligned}$$

es continua. En resumen, T está bien definido.

Veamos que T es un operador contractivo, es suficiente ver que satisface las condiciones del lema 1.21. Sean $v_1, v_2 \in E$ con $v_1(k) \leq v_2(k)$ para todo $k \in \mathbb{R}^+$. Entonces

$$\begin{aligned} T(v_1)(k) &= \max_{c \leq k} \{u(c) + \beta v_1((1+r)(k-c))\} \leq \max_{c \leq k} \{u(c) + \beta v_2((1+r)(k-c))\} \\ &= T(v_2)(k), \end{aligned}$$

por lo que se cumple la primera de las condiciones. Para la segunda, dado $a \geq 0$, para todo $v \in E$

$$\begin{aligned} T(v+a)(k) &= \max_{c \leq k} \{u(c) + \beta(v+a)((1+r)(k-c))\} \\ &= \max_{c \leq k} \{u(c) + \beta v((1+r)(k-c))\} + \beta a \\ &= T(v)(k) + \beta a. \end{aligned}$$

Por lo tanto el operador T es una aplicación contractiva. Por el teorema del punto fijo de Banach, T tiene un único punto fijo $V \in E$, esta es la función que es solución de la ecuación de Bellman (1.11). $\square$

Ejemplo 1.23. Estudiemos un caso particular, fijemos, por ejemplo, la tasa de interés $r = 0,01$, el factor de descuento $\beta = 0,85$ y la función utilidad $u(c) = \ln(c+1)$. El problema quedaría planteado así:

$$\begin{aligned} T(V)(k) &= \max_{0 \leq c \leq k} \{\ln(c+1) + 0,85 V(\bar{k})\} \\ \text{s.a. } & \bar{k} = (1+0,01)(k-c) \end{aligned}$$

Utilizando el código incluido en el apéndice se puede representar la figura 1.2, que muestra cómo se va aproximando la solución al punto fijo de T , partiendo de una función inicial $V(k) = 0$ y aplicando el operador T repetidamente.

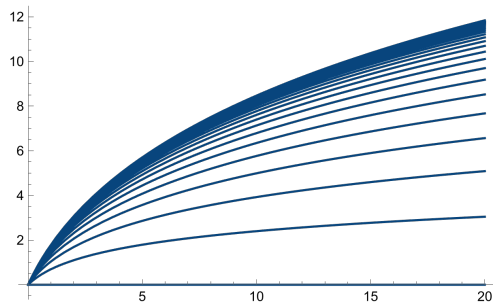


Figura 1.2: Aproximación al punto fijo por reiteración del operador T

Además, se puede calcular la norma infinito de la diferencia entre las aproximaciones de la solución obtenidas en iteraciones consecutivas.

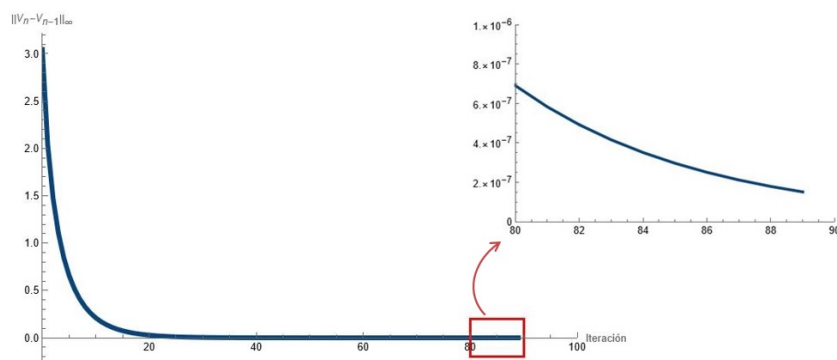


Figura 1.3: Representación gráfica del error en función del número de iteraciones n con $n \in [0, 90]$ y con $n \in [80, 90]$.

Capítulo 2

Teorema del punto fijo de Brouwer

El teorema del punto fijo de Brouwer establece que cualquier función continua del disco unidad cerrado de un espacio euclídeo de dimensión finita en sí mismo tiene al menos un punto fijo. El teorema fue demostrado por primera vez en [6]. En este trabajo se generalizará este resultado, probando que cualquier función continua de un subespacio compacto y convexo de un espacio euclídeo de dimensión finita en sí mismo tiene como mínimo un punto fijo. Es un teorema de existencia (asegura que bajo ciertas condiciones la función considerada tiene al menos un punto fijo), pero no proporciona ninguna forma de hallarlo, a diferencia del teorema del punto fijo de Banach estudiado anteriormente, que provee un algoritmo concreto para encontrarlo.

2.1 Enunciado y demostración del teorema

A lo largo del tiempo se han proporcionado diversas pruebas, se demostrará en esta sección el teorema de una manera analítica usando resultados conocidos del análisis real. Entre las fuentes que se han utilizado para la demostración se encuentran [16], [10] y el capítulo 10 de [20]. Durante esta sección se utilizarán la norma y el producto interior usual en $\mathbb{R}^n$, se denotará la norma de un vector x de $\mathbb{R}^n$ como $\|x\|$ y el producto interior entre dos vectores x e y de $\mathbb{R}^n$ como $\langle x, y \rangle$. Se usará la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^n &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}, \\ \mathring{\mathbb{D}}^n &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}, \\ \mathbb{S}^{n-1} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.\end{aligned}$$

Teorema 2.1 (Teorema de la función inversa). Sea $f = (f_1, \dots, f_n)$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Si el determinante del jacobiano de la función en un punto $x_0 \in U$ es distinto de cero, entonces existen abiertos $X \subseteq U$, $Y \subseteq f(U)$ y una función g única tales que:

1. $x_0 \in X$ y $f(x_0) \in Y$.
2. $Y = f(X)$.
3. f es biyectiva en X .
4. g está definida en Y , $g(Y) = X$ y $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.

5. g es una función de clase $\mathcal{C}^1$.

Teorema 2.2 (Teorema del valor medio). Sea $f: K \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde K es compacto y convexo y f es continua en K y diferenciable en el interior de K . Para todo $a, b \in K$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in K} \|J(f)(x)\| \|b - a\|,$$

donde el operador J denota el jacobiano de la función.

Teorema 2.3 (Teorema de cambio de variable). Sea $f = (f_1, \dots, f_n): U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$, biyectiva y con el determinante del jacobiano distinto de cero en todo U . Sea $g = (g_1, \dots, g_n): f(U) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si X es un subconjunto medible compacto de U se tiene que

$$\int_X g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{f^{-1}(X)} g(f(y_1, \dots, y_n)) \cdot |Det J(g(y_1, \dots, y_n))| dy_1 \dots dy_n,$$

donde el operador J denota el jacobiano de la función.

Teorema 2.4 (Aproximación de Weirstrass). Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un polinomio $p(x_1, \dots, x_n)$ de manera que

$$\|f(x) - p(x)\| < \epsilon$$

para todo $x \in K$.

Definición 2.5. Sean X un espacio métrico, Y, Z subconjuntos de X tales que $Z \subseteq Y$. Una aplicación $f: Y \rightarrow Z$ continua se dice que es un *retracto* de Y en Z si verifica que $f(Y) = Z$ y la restricción de f a Z es la identidad en Z .

Lema 2.6. No existe un retracto de clase $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{D}^n$ en $\mathbb{S}^{n-1}$.

Demostración. Supongamos que existiera $f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ retracto de clase $\mathcal{C}^1$. Definamos la función auxiliar

$$\begin{aligned} g = (g_1, \dots, g_n): \mathbb{D}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto g(x) = f(x) - x, \end{aligned}$$

que es continua y diferenciable por serlo f . Consideremos para cada $t \in [0, 1]$ la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \Gamma_t = (\Gamma_{t,1}, \dots, \Gamma_{t,n}): \mathbb{D}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \Gamma_t(x) = x + t g(x) = (1-t)x + t f(x). \end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que f es un retracto, para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$\Gamma_t(x) = x. \tag{2.1}$$

Tomando normas y por la desigualdad triangular, para todo $x \in \mathbb{D}^n$

$$\|\Gamma_t(x)\| \leq (1-t)\|x\| + t\|f(x)\| \leq 1-t+t=1,$$

por lo que $\Gamma_t(\mathbb{D}^n) \subseteq \mathbb{D}^n$. Veamos que para ciertos valores de t , Γ_t es una biyección en $\mathbb{D}^n$. Empecemos estudiando su inyectividad. Supongamos que dos puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{D}^n$ tienen la misma imagen; $\Gamma_t(x_1) = \Gamma_t(x_2)$. Por la definición de Γ_t se obtiene la siguiente cadena de igualdades

$$x_1 - x_2 = \Gamma_t(x_1) - t g(x_1) - \Gamma_t(x_2) + t g(x_2) = t(g(x_2) - g(x_1)). \quad (2.2)$$

La función g es de clase $\mathcal{C}^1$ por serlo f , por lo que $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ son funciones continuas definidas sobre $\mathbb{D}^n$ para todo $1 \leq i \leq n$, en particular son acotadas. Por el teorema del valor medio,

$$\|g(x) - g(y)\| \leq M\|x - y\|$$

para todo $x, y \in \mathbb{D}^n$ y cierto $0 \leq M < \infty$. Entonces, tomando normas en ambas partes de la igualdad (2.2)

$$\|x_1 - x_2\| = t\|g(x_2) - g(x_1)\| \leq M t\|x_2 - x_1\|.$$

Eliendo $0 < t < 1/M$, debe ser $x_1 = x_2$, lo que prueba que Γ_t es inyectiva. Llamemos $\delta = \min\{1, 1/M\}$ y supongamos a partir de ahora que $t \in [0, \delta]$. Continuemos estudiando la epiyectividad de Γ_t . Si $J(\cdot)$ denota el Jacobiano de una función, $J(\Gamma_t) = Id + tJ(g)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma_{t,1}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{t,1}}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \Gamma_{t,2}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{t,2}}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Gamma_{t,n}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{t,n}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Las funciones continuas $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ están acotadas en el compacto $\mathbb{D}^n$ para cada $1 \leq i \leq n$. Se puede escoger t_0 en $[0, \delta]$ de modo que el determinante de $J(\Gamma_{t_0}(x))$ sea mayor que 0 para todo $x \in \mathbb{D}^n$, ya que al desarrollar por menores el determinante de $J(\Gamma_t)$, se obtendrá una expresión polinómica del siguiente tipo para cada $x \in \mathbb{D}^n$

$$1 + P_1(x)t + \dots + P_n(x)t^n,$$

donde $P_1, \dots, P_n$ son funciones continuas definidas sobre $\mathbb{D}^n$. En consecuencia, $\lim_{t \rightarrow 0} 1 + P_1(x)t + \dots + P_n(x)t^n = 1$. Por continuidad, en un entorno del 0, $[0, t_0]$, el determinante de $J(\Gamma_t)$ es estrictamente positivo para todo $x \in \mathbb{D}^n$. Por el teorema de la función inversa, $\Gamma_t(\mathring{\mathbb{D}}^n)$ es un abierto para todo $t \in [0, t_0]$. Como

$$\|\Gamma_t(x)\| \leq (1-t)\|x\| + t\|x\| < 1, \quad x \in \mathring{\mathbb{D}}^n, \quad t \in [0, t_0],$$

entonces $\Gamma_t(\mathring{\mathbb{D}}^n) \subseteq \mathring{\mathbb{D}}^n$. Veamos que

$$\Gamma_t(\mathring{\mathbb{D}}^n) = \mathring{\mathbb{D}}^n. \quad (2.3)$$

Supongamos que no fuera así; entonces $\Gamma_t(\mathring{\mathbb{D}}^n) \neq \mathring{\mathbb{D}}^n$, y por tanto la frontera de $\Gamma_t(\mathring{\mathbb{D}}^n)$ interseca a $\mathring{\mathbb{D}}^n$ en algún punto, denotemos por a a alguno de esos puntos. Como está en la frontera de la imagen, podemos afirmar que existe una sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ con $x_m \in \mathring{\mathbb{D}}^n$ tal

que $\lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma_t(x_m) = a$. $\mathbb{D}^n$ es un compacto, por lo que podemos tomar una subsucesión de $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $\{x_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, que converja a un elemento de $\mathbb{D}^n$:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{m_j} = x \in \mathbb{D}^n,$$

y por continuidad, $\Gamma_t(x) = a$. Como se mencionó antes, $\Gamma_t(\mathring{\mathbb{D}}^n)$ es un abierto; puesto que los conjuntos abiertos son disjuntos a su frontera y a está en la frontera de $\Gamma_t(\mathring{\mathbb{D}}^n)$, $a \notin \Gamma_t(\mathring{\mathbb{D}}^n)$. Entonces $x \in \mathbb{D}^n \setminus \mathring{\mathbb{D}}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. Pero en este caso, $\Gamma_t(x) = x$ por (2.1), luego

$$a = \Gamma_t(x) = x \in \mathbb{S}^{n-1},$$

llegando a contradicción, ya que a no puede estar simultáneamente en $\mathring{\mathbb{D}}^n$ y $\mathbb{S}^{n-1}$. En definitiva, se ha demostrado que para todo $t \in [0, t_0]$, $\Gamma_t(\mathring{\mathbb{D}}^n) = \mathring{\mathbb{D}}^n$.

Por (2.1), $\Gamma_t(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1}$. De aquí junto con (2.3) se deduce que $\Gamma_t: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ es epiyectiva, concluyendo que es una biyección, para cualquier $t \in [0, t_0]$.

Denotemos por $\det(\cdot)$ al determinante y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} I: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto I(t) = \int_{\mathbb{D}^n} \det(J(\Gamma_t(x))) dx. \end{aligned}$$

Para $t \in [0, t_0]$, por la fórmula de cambio de variable, $I(t)$ representa el volumen de $\mathbb{D}^n$. Entonces $I(t)$ es un polinomio en t constante en un intervalo, luego es una función constante. En particular se verifica que $I(1) = \text{Vol}(\mathbb{D}^n)$ que es un número mayor que 0.

Por otro lado,

$$\langle \Gamma_1(x), \Gamma_1(x) \rangle = \|\Gamma_1(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 = 1$$

para todo $x \in \mathbb{D}^n$ por ser f un retracts de $\mathbb{D}^n$ en $\mathbb{S}^{n-1}$. Además, usando las propiedades del producto interior

$$2 \left\langle \frac{\partial \Gamma_1(x)}{\partial x_i}, \Gamma_1(x) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \Gamma_1(x), \Gamma_1(x) \rangle = 0, \quad x \in \mathbb{D}^n, 1 \leq i \leq n.$$

Se tiene entonces que

$$\left\{ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x_n}(x) \right\}$$

son n vectores ortogonales a $\Gamma_1(x)$ para cada $x \in \mathbb{D}^n$. Se deduce de aquí que esta familia de vectores es linealmente dependiente para cada $x \in \mathbb{D}^n$. Por tanto el determinante del jacobiano es igual a 0, y entonces $I(1) = 0$, llegando a contradicción. En conclusión, no existe ningún retracts diferenciable de $\mathbb{D}^n$ en $\mathbb{S}^{n-1}$. $\square$

Teorema 2.7 (Teorema del punto fijo de Brouwer). Si $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ es una aplicación continua, entonces tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Por el teorema de aproximación de Stone-Weierstrass f puede aproximarse uniformemente por polinomios. Es decir, podemos considerar una sucesión $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ donde $p_m: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son polinomios, $m \in \mathbb{N}$, de modo que $\|f(x) - p_m(x)\| < 1/m$ para todo $x \in \mathbb{D}^n$ y cada $m \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$\|p_m(x)\| = \|f(x) + p_m(x) - f(x)\| \leq \|f(x)\| + \|p_m(x) - f(x)\| \leq 1 + 1/m.$$

Consideremos la función auxiliar para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g_m: \mathbb{D}^n &\longrightarrow \mathbb{D}^n \\ x &\mapsto g_m(x) = \frac{1}{1+1/m} p_m(x). \end{aligned}$$

Observemos que g_m es una función continua porque por definición es un polinomio. Además haciendo uso de la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \|f(x) - g_m(x)\| &\leq \|f(x) - p_m(x)\| + \|p_m(x) - g_m(x)\| \\ &= \|f(x) - p_m(x)\| + \|p_m(x) - \frac{1}{1+1/m} p_m(x)\| \\ &= \|f(x) - p_m(x)\| + \frac{1}{1+m} \|p_m(x)\|. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando m tiende a infinito en la desigualdad anterior, se deduce que $\{f - g_m\}$ tiende uniformemente a 0, por lo que $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f .

Veamos que cada g_m tiene algún punto fijo. Supongamos que no fuera así. Para cada $x \in \mathbb{D}^n$ consideremos la semirrecta que pasa por x y $g_m(x)$:

$$g_m(x) + t(x - g_m(x)) \quad t \in [0, \infty),$$

y busquemos para qué valor de t la recta corta $\mathbb{S}^{n-1}$. Es decir, busquemos el valor de t que satisfaga

$$1 = \|g_m(x) + t(x - g_m(x))\|^2 = \|g_m(x)\|^2 + 2t\langle g_m(x), x - g_m(x) \rangle + t^2\|x - g_m(x)\|^2.$$

Reordenamos, obteniendo la ecuación $\|g_m(x)\|^2 - 1 + 2\langle g_m(x), x - g_m(x) \rangle t + \|x - g_m(x)\|^2 t^2 = 0$, cuya única solución positiva es

$$t = \frac{-\langle g_m(x), x - g_m(x) \rangle + \sqrt{\langle g_m(x), x - g_m(x) \rangle^2 - \|x - g_m(x)\|^2 \|g_m(x)\|^2}}{\|x - g_m(x)\|^2}, \quad (2.4)$$

que da lugar al único punto de corte de la semirrecta considerada con $\mathbb{S}^{n-1}$. Observemos que está bien definido ya que se está suponiendo que g_m no tiene ningún punto fijo, por lo que el denominador nunca se anula. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos $G_m(x) = g_m(x) + t(x - g_m(x))$, donde $t = t(m, x)$ es el valor de (2.4). En otras palabras, $G_m(x)$ es el punto en $\mathbb{S}^{n-1}$ que interseca a la semirrecta que une $g_m(x)$ con x . Se muestra en la Figura 2.1 una representación de la función.

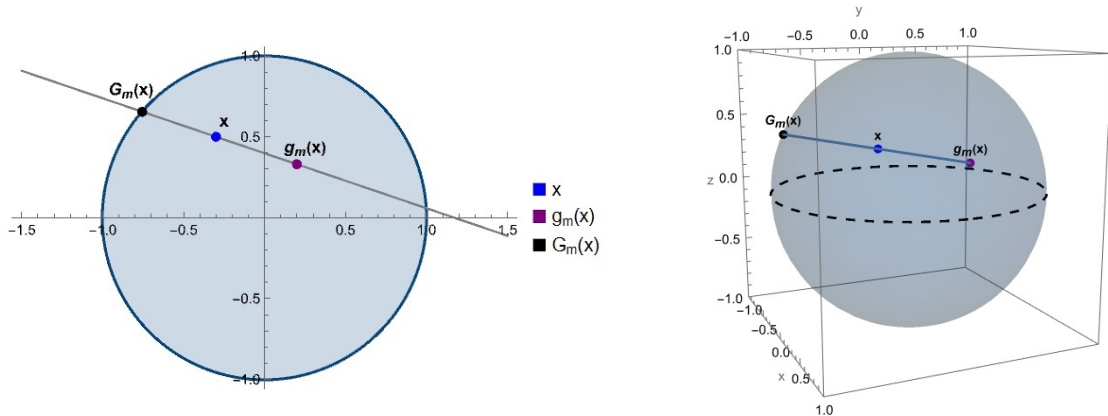


Figura 2.1: Gráficas de las funciones G_m para dimensiones 2 (izquierda) y 3 (derecha).

La función $G_m: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ es continua y de clase $\mathcal{C}^1$ por serlo g_m , además es la identidad sobre $\mathbb{S}^{n-1}$. Es decir, G_m es un retracts continuo de clase $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{D}^n$ en $\mathbb{S}^{n-1}$, contradiciendo el lema 2.6. Por tanto g_m tiene algún punto fijo, $g_m(c_m) = c_m$ para algún $c_m \in \mathbb{D}^n$ y cada $m \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{D}^n$ es un compacto, $\{c_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión convergente,

$$\{c_{m_i}\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} c$$

para cierto $c \in \mathbb{D}^n$. Como además $\{g_m\}$ converge uniformemente a f ,

$$f(c) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_{m_i}(c_{m_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} c_{m_i} = c.$$

Concluimos que f tiene al menos un punto fijo. $\square$

Podría parecer que este teorema está limitado porque solamente es válido para aplicaciones continuas de una bola cerrada en un espacio euclídeo de dimensión finita en sí misma. Sin embargo, este resultado puede generalizarse a otros subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Veámoslo. Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}^+$, denotaremos por

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}.$$

Lema 2.8. Sea $B(a, r)$ la bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ con centro a y radio $r > 0$. Existe una función $g: \mathbb{D}^n \rightarrow B(a, r)$ continua, biyectiva y con inversa continua.

Demostración. La función

$$\begin{aligned} g: \mathbb{D}^n &\longrightarrow B(a, r) \\ x &\longmapsto g(x) = a + r x \end{aligned}$$

es continua. Además es biyectiva porque es la combinación lineal de una traslación con una homotecia. Su inversa es

$$\begin{aligned} h: B(a, r) &\longrightarrow \mathbb{D}^n \\ y &\longmapsto h(y) = \frac{y-a}{r} \end{aligned}$$

que también es continua. $\square$

Corolario 2.9. Sea $B(a, r) = B$ la bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ con centro a y radio $r > 0$, si $f: B \rightarrow B$ es una aplicación continua entonces tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Consideremos la aplicación g definida como en el lema 2.8, y definamos

$$\begin{aligned} G: \mathbb{D}^n &\longrightarrow \mathbb{D}^n \\ x &\longmapsto G(x) = g^{-1}(f(g(x))). \end{aligned}$$

G es continua por ser composición de funciones continuas. Por el teorema 2.7 podemos afirmar que existe al menos un punto fijo $c \in \mathbb{D}^n$ de G

$$c = G(c) = g^{-1}(f(g(c))),$$

es decir

$$g(c) = f(g(c));$$

por tanto $g(c) \in B$ es un punto fijo para f . $\square$

Corolario 2.10. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto y convexo. Toda aplicación continua de K en sí mismo tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Sea $f: K \rightarrow K$ continua. Como K es compacto en $\mathbb{R}^n$, es cerrado y acotado. Sea $B(a, r)$ una bola cerrada que contiene a K . Denotemos por $d(\cdot, \cdot)$ a la distancia entre dos puntos y consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} g: B(a, r) &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto g(x), \end{aligned}$$

donde $g(x)$ es el punto de K que verifica que $d(g(x), x) < \{d(x, z) : z \in K, z \neq g(x)\}$. La aplicación g está bien definida, supongamos que dos puntos distintos $x_1, x_2 \in K$ equidistan de $x \in B(a, r)$, $d(x, x_1) = d(x, x_2)$, entonces

$$\begin{aligned} d\left(x, \frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} - x \right\| \leq \frac{1}{2} (\|x - x_1\| + \|x - x_2\|) \\ &= \frac{1}{2} (d(x, x_1) + d(x, x_2)) = \frac{1}{2} (d(x, x_1) + d(x, x_1)) \\ &= d(x, x_1) \end{aligned}$$

hemos demostrado que $d(x, (x_1 + x_2)/2) \leq d(x, x_1)$. Sin embargo x_1 y $(x_1 + x_2)/2$ son puntos distintos de K , tenemos que $d(x, (x_1 + x_2)/2) < d(x, x_1)$. De manera que $(x_1 + x_2)/2$ sería un punto más cercano a x , llegando a contradicción. Además si $x \in K$, $g(x) = x$. Veamos que g es una función continua. Sea $x \in B(a, r)$ y $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $B(a, r)$ convergente a x . Supongamos que no fuera continua, no se verifica $g(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} g(x)$. Como $\{g(x_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de K , por compacidad contiene una subsucesión $\{g(x_{m_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a algún elemento $y \in K$ (estamos suponiendo distinto de $g(x)$). Ahora bien, por definición de la función g ,

$$\|x_{m_k} - g(x_{m_k})\| \leq \|x_{m_k} - g(x)\|. \quad (2.5)$$

Tomando límite cuando k tiende a infinito en (2.5),

$$\|x - y\| \leq \|x - g(x)\|,$$

en contradicción con que $y \neq g(x)$, por tanto g es continua. La siguiente composición también será continua

$$\begin{aligned} f \circ g: B(a, r) &\longrightarrow K \subseteq B(a, r) \\ x &\longmapsto f(g(x)). \end{aligned}$$

Por el corolario 2.9, existe un punto $c \in B(a, r)$ tal que

$$f(g(c)) = c.$$

Como la imagen $(f \circ g)(K)$ está contenida en K , entonces $c \in K$ y $g(c) = c$ por definición de g . Se obtiene que $f(c) = c$, es decir, c es el punto fijo buscado. $\square$

2.2 Aplicaciones del teorema del punto fijo de Brouwer

El teoría del punto fijo de Brouwer tiene aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas. En este trabajo se explicará en la sección 2.2.1 su aplicación en teoría de juegos, en 2.2.2 en el teorema de Perron-Frobenius y en 2.2.3 en el teorema fundamental del álgebra.

2.2.1 Equilibrios de Nash en juegos no cooperativos

La teoría de juegos fue introducida por el matemático Von Neumann y el economista Oskar Morgenstern con su libro *The Theory of Games Behavior*.

Definición 2.11. Un *juego* es un modelo matemático con el que se describe una situación donde dos o más jugadores toman una serie de decisiones en busca de maximizar su ganancia. Un *jugador* es una entidad que participa en un juego. En términos más específicos, es un agente que toma decisiones estratégicas en el contexto del juego. Un juego *no cooperativo* es aquel en el que no existe comunicación directa entre los jugadores. No tratan de coordinar sus acciones, esto no impide que en algunas ocasiones la toma de decisiones favorezca a varios jugadores. Un juego *finito* es un juego con un número finito de jugadores y cada uno de ellos con un número finito de estrategias.

Definición 2.12. Una *estrategia* es un plan de acción o un conjunto de decisiones que un jugador adopta en un juego para obtener un cierto resultado.

Las estrategias se clasifican en puras y mixtas. Una *estrategia pura* es una elección específica que un jugador toma en cada situación posible. En otras palabras, es una estrategia determinista en la que el jugador elige una acción sin ninguna componente de azar. Una *estrategia mixta*, por otro lado, permite una combinación de diferentes acciones con ciertas probabilidades asignadas a cada una de las posibles elecciones. En lugar de tomar una elección determinista, el jugador elige diferentes acciones con probabilidades específicas.

A lo largo de la sección se denotará por $\mathcal{N}$ al conjunto de jugadores: $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$, con $N < \infty$. A_i será el conjunto de las posibles elecciones del jugador $i \in \mathcal{N}$, $A_i = \{a_{i,1}, \dots, a_{i,n_i}\}$, siendo $n_i < \infty$ el número de estrategias que tiene el jugador i . El conjunto global de estrategias se denotará por $A = A_1 \times \dots \times A_N$. En esta sección nos centraremos en el caso en que cada jugador elige mediante un procedimiento aleatorio, estrategias mixtas. Denotaremos por M al conjunto de estrategias mixtas: $M = M_1 \times \dots \times M_N$, donde M_i es el conjunto de estrategias mixtas del jugador $i \in \mathcal{N}$ definido por

$$M_i = \left\{ m_i = (m_{i,1}, \dots, m_{i,n_i}) \in \mathbb{R}^{n_i} : \sum_{j=1}^{n_i} m_{i,j} = 1, m_{i,j} \geq 0 \text{ para todo } 0 \leq j \leq n_i \right\}.$$

Cada $m_{i,j}$ simboliza la probabilidad de que el jugador i elija la estrategia $a_{i,j}$. Para cada jugador también se considera una función de pago, que simboliza la recompensa de cada jugador en el juego,

$$\begin{aligned} \varphi_i: A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\mapsto \varphi_i(a) \end{aligned} \quad i \in \mathcal{N}.$$

La función llamada función de pago esperado definida también para cada jugador cuando se trabaja con estrategias mixtas se definirá por

$$\begin{aligned} p_i: M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m = (m_1, \dots, m_N) &\mapsto p_i(m_1, \dots, m_N) \end{aligned} \quad \text{para cada } i \in \mathcal{N},$$

donde

$$p_i(m_1, \dots, m_N) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_N=1}^{n_N} m_{1,k_1} \cdot \dots \cdot m_{N,k_N} \varphi_i(a_{1,k_1}, \dots, a_{N,k_N}).$$

Observación 2.13. Las funciones p_i son continuas por ser una combinación lineal de las componentes de cada estrategia mixta.

Se usará también la siguiente notación

$$p_{i,j}^k: \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (m_1, \dots, m_N) & \mapsto & p_{i,j}^k(m_1, \dots, m_N) = p_i(m_1, \dots, m_{j-1}, \delta^k, m_{j+1}, \dots, m_N), \end{array}$$

donde $i \in \mathcal{N}$, $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq n_j$ y $\delta^k \in \mathbb{R}^{n_j}$ es el vector con todas las componentes 0 salvo en el lugar k -ésimo con un 1.

Definición 2.14. Un vector de estrategias mixtas $m^* = (m_1^*, m_2^*, \dots, m_N^*) \in M$ se llama *equilibrio de Nash* si cumple la siguiente condición para cada jugador $i \in \mathcal{N}$:

$$p_i(m_1^*, m_2^*, \dots, m_i^*, \dots, m_N^*) \geq p_i(m_1^*, m_2^*, \dots, m_i, \dots, m_N^*)$$

La existencia de equilibrios de Nash es un resultado fundamental en la teoría de juegos porque nos permite predecir cómo se comportarán los jugadores en una situación dada y encontrar soluciones óptimas para los juegos. Uno de los enfoques para demostrar la existencia de este tipo de estrategia en juegos finitos no cooperativos es a través del teorema del punto fijo de Brouwer, que se desarrollará en esta sección usando como referencia [15], [13] y el capítulo 25 de [14].

Lema 2.15. Sea $m = (m_1, \dots, m_N) \in M$ con $m_i = (m_{i,1}, \dots, m_{i,n_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}$ para cada $i \in \mathcal{N}$. Se verifica que dado $1 \leq j \leq N$

$$p_i(m) = \sum_{k=1}^{n_j} m_{j,k} p_{i,j}^k(m).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} p_{i,j}^k(m) &= p_i(m_1, \dots, m_{j-1}, \delta^k, m_{j+1}, \dots, m_N) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_{j-1}=1}^{n_{j-1}} \sum_{k_{j+1}=1}^{n_{j+1}} \dots \sum_{k_N=1}^{n_N} m_{1,k_1} \cdot \dots \cdot m_{j-1,k_{j-1}} \cdot 1 \cdot m_{j+1,k_{j+1}} \cdot \dots \cdot m_{N,k_N} \varphi_i(a), \end{aligned}$$

donde $a = (a_{1,k_1}, \dots, a_{j-1,k_{j-1}}, a_{j,k}, a_{N,k_N})$. Por lo que

$$\sum_{k=1}^{n_j} m_{j,k} p_{i,j}^k(m) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_N=1}^{n_N} m_{1,k_1} \cdot \dots \cdot m_{N,k_N} \varphi_i(a_{1,k_1}, \dots, a_{N,k_N}) = p_i(m).$$

□

Lema 2.16. El conjunto de las estrategias $m = (m_1, \dots, m_N) \in M$ es un equilibrio de Nash si y solo si para cada $i \in \mathcal{N}$ se verifica para todo $1 \leq k \leq n_i$:

$$p_i(m) \geq p_{i,i}^k(m). \quad (2.6)$$

Demostración. Si m es un equilibrio de Nash, la desigualdad se cumple por definición ya que $p_{i,i}^k(m)$ es el valor de la función de pago cuando el jugador i cambia de estrategia. Supongamos que $p_i(m) \geq p_{i,i}^k(m)$ para todo $k \leq n_i$. Consideremos una estrategia mixta $s = (s_1, \dots, s_{n_i}) \in M_i$ para el jugador i . Se verificará para todo $1 \leq k \leq n_i$

$$s_k p_i(m) \geq s_k p_{i,i}^k(m).$$

Tomando sumatorios en ambas partes de la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n_i} s_k p_i(m) \geq \sum_{k=1}^{n_i} s_k p_{i,i}^k(m). \quad (2.7)$$

Ahora teniendo en cuenta que como $s \in M$, $\sum_{k=1}^{n_i} s_k = 1$;

$$\sum_{k=1}^{n_i} s_k p_i(m) = p_i(m). \quad (2.8)$$

En vista del lema 2.15, sustituyendo en 2.8 m_i por s

$$\sum_{k=1}^{n_i} s_k p_{i,i}^k(m) = p_i(m_1, \dots, m_{i-1}, s, m_{i+1}, \dots, m_N). \quad (2.9)$$

Usando (2.9) en (2.7), se obtiene

$$p_i(m) \geq p_i(m_1, \dots, m_{i-1}, s, m_{i+1}, \dots, m_N).$$

Como esta desigualdad es cierta para cualquier $s \in M_i$ y todo $i \in \mathcal{N}$, m es un equilibrio de Nash. $\square$

Lema 2.17. Cualquier conjunto de estrategias mixtas en un juego no cooperativo es un conjunto compacto y convexo.

Demostración. Sea M el conjunto de estrategias mixtas. Por definición

$$M_i = \left\{ m_i = (m_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i} : \sum_{j=1}^{n_i} m_{i,j} = 1, m_{i,j} \geq 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n_i};$$

por tanto $m_{i,j} \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq N$, con lo que M es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_N}$. A continuación, se verá que es un cerrado; consideremos $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{(\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,N})\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de M tal que

$$\{\mu_i\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \mu = (\mu_1, \dots, \mu_N).$$

Obsérvese que para cada $1 \leq j \leq N$ y cada $i \in \mathbb{N}$, $\mu_{i,j}$ es un elemento de $\mathbb{R}^{n_j}$ que denotaremos por $(\mu_{i,j}^1, \dots, \mu_{i,j}^{n_j})$. De igual forma para cada $1 \leq j \leq N$, μ_j es un elemento de $\mathbb{R}^{n_j}$, que se denotará por $(\mu_j^1, \dots, \mu_j^{n_j})$. Por tanto $\{\mu_i\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \mu$ quiere decir que para cada $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq n_j$

$$\{\mu_{i,j}^k\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \mu_j^k.$$

Observemos que $\mu_{i,j}^k \geq 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathcal{N}$ $1 \leq k \leq n_j$, ya que estamos suponiendo que $\mu_i \in M$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mu_j^k \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq n_j$. Y para $j \in \mathcal{N}$ se verifica que

$$\sum_{k=1}^{n_j} m_j^k = \sum_{k=1}^{n_j} \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{i,j}^k = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_j} \mu_{i,j}^k = 1,$$

lo que prueba que $\mu \in M$. Queda probado por lo tanto M es un conjunto cerrado.

Por último se debe probar que es un conjunto convexo. Para ello debemos probar que dadas dos estrategias mixtas $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in M$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) \in M$, entonces $t\gamma + (1-t)\rho$ con $t \in [0, 1]$ pertenece a M . Razonando igual que antes, para cada $1 \leq j \leq N$ es

$$\begin{aligned} \rho_j &= (\rho_{j,1}, \dots, \rho_{j,n_j}), \\ \gamma_j &= (\gamma_{j,1}, \dots, \gamma_{j,n_j}). \end{aligned}$$

Por tanto $t\gamma + (1-t)\rho = (t\gamma_1 + (1-t)\rho_1, \dots, t\gamma_N + (1-t)\rho_N)$ y a su vez para cada $1 \leq j \leq n$,

$$t\gamma_j + (1-t)\rho_j = (t\gamma_{j,1} + (1-t)\rho_{j,1}, \dots, t\gamma_{j,n_j} + (1-t)\rho_{j,n_j}).$$

Tanto $\gamma_{j,k}$ como $\rho_{j,k}$ son no negativos para todo $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq n_j$ por lo tanto la suma $t\gamma_{j,k} + (1-t)\rho_{j,k}$ también será no negativa si $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq n_j$. Luego todos los elementos de $t\gamma + (1-t)\rho$ son no negativos. Por otro lado, si $1 \leq j \leq N$,

$$\sum_{i=1}^{n_j} t\gamma_{j,i} + (1-t)\rho_{j,i} = t \left(\sum_{i=1}^{n_j} \gamma_{j,i} \right) + (1-t) \left(\sum_{i=1}^{n_j} \rho_{j,i} \right) = 1$$

para todo $t \in [0, 1]$. Por tanto M es convexo. $\square$

Teorema 2.18 (Existencia de equilibrios de Nash). Todo juego finito no cooperativo tiene al menos un equilibrio de Nash.

Demostración. Sean M un conjunto de estrategias mixtas de un juego, $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ su conjunto de jugadores y p_i su función de pago para cada $i \in \mathcal{N}$. Sea $m = (m_1, \dots, m_N)$ una estrategia mixta. Definamos para cada $i \in \mathcal{N}$, $1 \leq k \leq n_i$ la siguiente función

$$\Gamma_{i,k}(m) = \max \{0, p_{i,i}^k(m) - p_i(m)\}.$$

$\Gamma_{i,k}$ es una función continua ya que $p_{i,i}^k$ y p_i son funciones continuas en M por ser combinación lineal de estrategias mixtas y el máximo de dos funciones continuas es una función continua. Recordemos que $m_i = (m_{i,1}, \dots, m_{i,n_i})$ para cada $i \in \mathcal{N}$. Definamos para cada $i \in \mathcal{N}$ y $1 \leq j \leq n_i$

$$\overline{m}_{i,j} = \frac{m_{i,j} + \Gamma_{i,j}(m)}{1 + \sum_{k=1}^{n_i} \Gamma_{i,k}(m)}.$$

Veamos que $\overline{m}_i = (\overline{m}_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i}$ es un elemento de M_i . Es inmediato que $\overline{m}_{i,j} \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq n_i$, ya que $m_{i,j} \geq 0$, y por definición $\Gamma_{i,j}(m) \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq n_i$. Por otra parte

$$\sum_{j=1}^{n_i} \overline{m}_{i,j} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{m_{i,j} + \Gamma_{i,j}(m)}{1 + \sum_{k=1}^{n_i} \Gamma_{i,k}(m)} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} m_{i,j} + \sum_{j=1}^{n_i} \Gamma_{i,j}(m)}{1 + \sum_{k=1}^{n_i} \Gamma_{i,k}(m)} = 1.$$

Queda probado que $\overline{m}_i \in M_i$. Denotemos $\overline{m} = (\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_n) \in M$. Definamos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{aligned} T: M &\longrightarrow M \\ m &\mapsto T(m) = \overline{m}, \end{aligned}$$

T es continua por serlo $\Gamma_{i,j}$; además M es compacto y convexo por el lema 2.17. Se puede afirmar por el corolario 2.10 que T tiene al menos un punto fijo. Sea $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in M$ un punto fijo de T . Veamos para concluir que ρ es un equilibrio de Nash. Sea $i \in \mathcal{N}$ un jugador y elijamos $1 \leq l \leq n_i$ tal que

$$p_i(\rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \delta^l, \rho_{i+1}, \dots, \rho_n) = \min_{1 \leq k \leq n_i} \{p_i(\rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \delta^k, \rho_{i+1}, \dots, \rho_n)\}.$$

Se verifica que $p_{i,i}^l(\rho) \leq p_{i,i}^k(\rho)$ para todo $1 \leq k \leq n_i$. Si $\sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k = 1$, entonces

$$p_{i,i}^l(\rho) \leq \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k p_{i,i}^k(\rho).$$

En particular, por el lema 2.15

$$p_{i,i}^l(\rho) \leq \sum_{k=1}^{n_i} \rho_k p_{i,i}^k(\rho) = p_i(\rho).$$

Por tanto $\Gamma_{i,l}(\rho) = 0$. Entonces

$$\rho_{i,l} = \frac{\rho_{i,l} - \Gamma_{i,l}(\rho)}{1 + \sum_{k=1}^{n_i} \Gamma_{i,k}(\rho)} = \frac{\rho_{i,l}}{1 + \sum_{k=1}^{n_i} \Gamma_{i,k}(\rho)},$$

con lo que $1 + \sum_{k=1}^{n_i} \Gamma_{i,k}(\rho) = 1$, es decir $\Gamma_{i,k}(\rho) = 0$ para todo $1 \leq k \leq n_i$. En consecuencia, $p_i(\rho) \geq p_{i,i}^k(\rho)$ para todo $1 \leq k \leq n_i$ y por el lema 2.16, se concluye que ρ es un equilibrio de Nash. $\square$

2.2.2 El teorema de Perron-Frobenius

El teorema de Perron-Frobenius establece propiedades de ciertas matrices cuadradas, como la existencia de un vector propio asociado. Inicialmente el resultado se demostró por el matemático alemán Oskar Perron, en el contexto de matrices positivas, en 1907. Posteriormente, en 1912, Ferdinand Georg Frobenius generalizó el resultado a matrices cuadradas no negativas. En esta sección se demostrará el teorema usando el teorema del punto fijo de Brouwer apoyándonos en el primer capítulo de [5] y también en el primer capítulo de [8].

Sea $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathbb{M}_n$ al conjunto de todas las matrices cuadradas de orden $n \times n$ con coeficientes reales.

Definición 2.19. Una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{M}_n$, se dice que es *positiva* si $a_{ij} \geq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Utilizaremos la notación $A \geq 0$.

Análogamente se dice que A es *estrictamente positiva* si $a_{ij} > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Utilizaremos la notación $A > 0$.

Definición 2.20. Se llama *espectro* de una matriz cuadrada A de orden n , denotado por $\sigma(A)$, al conjunto de todos los valores propios de A .

Definición 2.21. Dada una matriz cuadrada A de orden n , el *radio espectral* de A , denotado por $\rho(A)$, es el mayor de los valores absolutos de sus valores propios.

El espectro de una matriz proporciona información sobre las propiedades y el comportamiento de la matriz. Por ejemplo, puede ser utilizado para determinar si una matriz es invertible o diagonalizable, entre otras cosas.

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la norma definida por

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

y en $\mathbb{M}_n$ la determinada por

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{M}_n.$$

Dado un vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, usaremos la siguiente notación $x^T = (x_1, \dots, x_n)$.

De manera similar, dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{M}_n$, se denotará por A^T a $A^T = (a_{ji})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{M}_n$. Dados dos vectores $x = (x_1, \dots, x_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, decimos que x es menor o igual que y (denotado como $x \leq y$) si $x_i \leq y_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Teorema 2.22 (de Perron). Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{M}_n$ una matriz estrictamente positiva. Entonces:

- i) Existe un vector propio positivo $v > 0$ de valor propio positivo $\lambda > 0$.
- ii) $\rho(A) = \lambda$.
- iii) v es el único vector propio (salvo proporcionales) positivo.
- iv) λ es un valor propio de A no degenerado.

Demostración. Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}^n$

$$T = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_1 = 1, v \geq 0\}.$$

Sea $w \in T$, entonces $\frac{Aw}{\|Aw\|_1} \in T$ ya que

$$\left\| \frac{Aw}{\|Aw\|_1} \right\|_1 = \sum_{i=1}^n \frac{|(Aw)_i|}{\|Aw\|_1} = \frac{\|Aw\|_1}{\|Aw\|_1} = 1$$

y como A es estrictamente positiva y $w \in T$, $\frac{Aw}{\|Aw\|_1} \geq 0$. Esto permite definir la función continua

$$f: \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & T \\ w = (w_1, \dots, w_n)^T & \mapsto & f(w) = \frac{Aw}{\|Aw\|_1}. \end{array}$$

Veamos que f está bien definida, para ello debemos probar que $\|Aw\|_1$ es distinto de cero para todo $w \in T$. Por hipótesis $a_{ij} > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, además $w \geq 0$ y $\|w\|_1 = 1$, por lo que $w_{i_0} > 0$ para algún $1 \leq i_0 \leq n$. Como

$$Aw = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}w_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}w_j \right)^T,$$

se verifica que $\|Aw\|_1 \neq 0$ para todo $w \in T$.

Observemos que T es cerrado ya que es la intersección de dos conjuntos $\{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_1 = 1\}$ y $\{v \in \mathbb{R}^n : v \geq 0\}$, ambos cerrados. Es obvio que T es acotado, está contenido en la bola cerrada de radio 1 centrada en el origen. Por otra parte T es convexo, pues si $v = (v_1, \dots, v_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in T$ y $\lambda \in [0, 1]$, como $v, w \geq 0$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces $\lambda v + (1 - \lambda)w \geq 0$. Además $\|\lambda v + (1 - \lambda)w\|_1 = \sum_{i=1}^n \lambda v_i + (1 - \lambda)w_i = \lambda \sum_{i=1}^n v_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n w_i = 1$, donde se usa que $\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n w_i = 1$. Entonces $\lambda v + (1 - \lambda)w \in T$. En definitiva, T es compacto y convexo.

Por el teorema del punto fijo de Brouwer existe al menos un punto $v \in T$ tal que $f(v) = v$; es decir,

$$Av = \|Av\|_1 v.$$

En resumen, $\lambda = \|Av\|_1$ es un valor propio de A positivo.

Comprobemos que $v > 0$. Como $Av = \lambda v$, la i -ésima coordenada de Av es

$$\lambda v_i = (Av)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j > 0$$

ya que A es estrictamente positiva y $v_{i_0} > 0$ para algún $1 \leq i_0 \leq n$. Por tanto $v > 0$ y queda probado el primero de los apartados.

Verifiquemos que $\lambda = \rho(A)$. Sea μ un vector propio cualquiera de A y $z = (z_1, \dots, z_n)$ un vector propio asociado a μ . Llamemos $\bar{z} = (|z_1|, \dots, |z_n|)$, asumamos sin pérdida de generalidad que es unitario. Dado que

$$\mu z = Az$$

por lo tanto

$$\mu z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}z_j$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces $|\mu z_i| = |\sum_{j=1}^n a_{ij}z_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}|z_j|$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto $|\mu|\bar{z} \leq A\bar{z}$. Por las propiedades del espectro de una matriz, la matriz A^T también tiene como valor propio λ , sea u un vector propio de A^T asociado a λ . Además, como $A > 0$, $A^T > 0$ y razonando igual que antes se deduce que $u > 0$.

$$u^T |\mu| \bar{z} \leq u^T A \bar{z} = (A^T u)^T \bar{z} = \lambda u^T \bar{z}.$$

Es decir, hemos obtenido que

$$\lambda \sum_{i=1}^n u_i \bar{z}_i \geq |\mu| \sum_{i=1}^n u_i \bar{z}_i;$$

como todas las componentes de u y $\bar{z}$ son no negativas, $\lambda \geq |\mu|$.

Veamos que v es el único vector propio positivo linealmente independiente de v . Sea, como antes, u un vector propio para A^T de valor propio λ . Si existiera otro vector propio positivo w de A con valor propio $\mu \neq \lambda$,

$$\mu u^T w = u^T \mu w = u^T A w = \lambda u^T w.$$

lo cual no es posible por ser u y w positivos y $\mu \neq \lambda$.

Comprobemos para terminar que λ solo tiene un único vector propio asociado (salvo multiplicación por constantes). Supongamos que λ tuviera asociado otro vector propio linealmente independiente de v , $A w = \lambda w$. Como son linealmente independientes, podemos afirmar que si tomamos la constante $a = \min_{1 \leq i \leq n} \{v_i/w_i\}$, entonces $v - a w$ es un vector propio de valor propio λ , es no nulo, con al menos una coordenada igual a cero y el resto no negativas. Como $A > 0$ y

$$A(v - a w) = \lambda(v - a w),$$

entonces debe ser $v - a w > 0$, en contradicción con que al menos una de las coordenadas de $v - a w$ es igual a 0. Por tanto w es linealmente dependiente de v . $\square$

Definición 2.23. Una matriz estocástica es una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ tal que $a_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Estas matrices son útiles para representar probabilidades en diversos contextos. A continuación, vamos a demostrar un resultado análogo al teorema 2.22 para matrices estocásticas.

Teorema 2.24. Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M$ una matriz estocástica, entonces

- i) La matriz A posee $\rho(A) = 1$ como valor propio.
- ii) Existe un vector propio positivo asociado al valor propio 1.

Demostración. Para probar i) consideremos el vector $v = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$A v = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = v.$$

Con esto probamos que v es un vector propio de A de valor propio 1 y que $\rho(A) \geq 1$. Probemos que $\rho(A) \leq 1$, razonemos por reducción al absurdo, supongamos que existiera un valor propio de A , $\mu > 1$. Sea $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ un vector propio de valor propio μ con la suma de todas sus componentes es igual a 1. Por lo tanto

$$1 < \mu = \sum_{i=1}^n \mu u_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} u_j \right) = 1$$

Entonces $\rho(A) = 1$. Para demostrar ii) consideremos el siguiente subconjunto

$$T = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_1 = 1, v \geq 0\}.$$

T es un subconjunto compacto y convexo (ver demostración del teorema 2.22). Consideremos también la aplicación

$$\begin{aligned} f: T &\longrightarrow T \\ w = (w_1, \dots, w_n)^T &\mapsto f(w) = Aw. \end{aligned}$$

Por el teorema del punto fijo de Brouwer existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(v) = Av = v$. Por tanto, como la coordenada i -ésima de v es

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j > 0,$$

se demuestra lo deseado. □

2.2.3 El teorema fundamental del Álgebra

El teorema fundamental del álgebra garantiza la existencia de raíces para ciertos tipos de polinomios. En 1949 Arnold intentó demostrar el teorema fundamental del álgebra basándose en el teorema del punto fijo de Brouwer en [2], sin embargo, su demostración fue errónea. Poco después, en 1952, Fort consiguió hacerlo en [9].

Denotemos por $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Para $z \in S$, $A(z)$ será el conjunto de todos los argumentos de z .

Definición 2.25. Una función continua definida sobre un subconjunto del plano complejo $X \subseteq \mathbb{C}$ y que toma valores en S se dice que tiene un *logaritmo continuo* en X si existe una función continua $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $z \in X$, $f(z) = e^{i\phi(z)}$.

Observación 2.26. Dos propiedades de los números complejos que usó Fort en [9] y que se usarán a lo largo de la sección son las siguientes:

- (i) Para $z_1, z_2 \in S$, $|z_1 - z_2| < 2$ y $\theta_1 \in A(z_1)$ existe un único $\theta_2 \in A(z_2)$ con $|\theta_1 - \theta_2| < \pi$.
- (ii) Sean $z_1, z_2 \in S$, $\theta_1 \in A(z_1)$, $\theta_2 \in A(z_2)$ con $|\theta_1 - \theta_2| < \pi$, entonces $|\theta_1 - \theta_2| < \pi|z_1 - z_2|$.

Teorema 2.27 (de Heine-Cantor). Si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua entre dos espacios métricos X e Y y X es compacto, entonces f es uniformemente continua.

Proposición 2.28. Sea $B = \{z \in \mathbb{C} : |q - z| \leq r\} \subseteq \mathbb{D}$ un disco cerrado de centro $q \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$. Sea $f: B \rightarrow S$ una función continua, entonces f tiene un logaritmo continuo.

Demostración. Como f es continua y B es compacto, por el teorema de Heine-Cantor, f es uniformemente continua. Por la continuidad uniforme, existe $\delta > 0$ tal que para $z_1, z_2 \in D$ con $|z_1 - z_2| < \delta$, $|f(z_1) - f(z_2)| < 1/3$. Elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $r/n < \delta$ y definamos para cada $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$

$$B_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q| \leq \frac{rk}{n} \right\}.$$

Construiremos ϕ , el logaritmo continuo de f definiendolo sucesivamente en $B_0, B_1, \dots, B_n$. $\phi(B_0)$ está definido por $\phi(q) := \theta \in A(f(q))$ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. Si ϕ está definido en B_k , lo definiremos en B_{k+1} de la siguiente manera: sea $z \in B_{k+1}$ y $\bar{z} \in B_k$ el punto de B_k más cercano a z . Por la construcción de los conjuntos B_k , tenemos que $|z - \bar{z}| \leq r(k+1)/n - rk/n < \delta$, y entonces $|f(z) - f(\bar{z})| < 1/3$; por (i) de la observación 2.26, se puede definir $\phi(z)$ como el único número de $A(f(z))$ que difiere con $\phi(\bar{z})$ en menos de π .

Veamos que se verifica la siguiente afirmación para todo $1 \leq k \leq n$: Si $z_1, z_2 \in B_k$ con $|z_1 - z_2| < \delta$, entonces $|\phi(z_1) - \phi(z_2)| < \pi$. Para B_0 es obvio pues solo contiene un punto. Supongámoslo cierto para B_k . Sean $z_1, z_2 \in B_{k+1}$ con $|z_1 - z_2| < \delta$. Sean $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ respectivamente los puntos más cercanos a z_1, z_2 en B_k . Por construcción, $|\phi(z_1) - \phi(\bar{z}_1)| < \pi$ y $|\phi(z_2) - \phi(\bar{z}_2)| < \pi$. Entonces haciendo uso de (ii) de la observación 2.26 y teniendo en cuenta que la afirmación es cierta para B_k ,

$$\begin{aligned} |\phi(z_1) - \phi(z_2)| &\leq |\phi(z_1) - \phi(\bar{z}_1)| + |\phi(\bar{z}_1) - \phi(\bar{z}_2)| + |\phi(\bar{z}_2) - \phi(z_2)| \\ &\leq \pi|f(z_1) - f(\bar{z}_1)| + \pi|f(\bar{z}_1) - f(\bar{z}_2)| + \pi|f(\bar{z}_2) - f(z_2)| \\ &< \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi \end{aligned}$$

Como $B_n = B$, se ha visto que para todo $z_1, z_2 \in B$ con $|z_1 - z_2| < \delta$, entonces $|\phi(z_1) - \phi(z_2)| < \pi$. Por (ii) de la observación 2.26, se puede afirmar que particularmente para todo $z_1, z_2 \in B$ con $|z_1 - z_2| < \delta$, $|\phi(z_1) - \phi(z_2)| < \pi|f(z_1) - f(z_2)|$, y como f es continua, lo es ϕ . Por tanto se ha construido un logaritmo continuo de f , $\phi: B \rightarrow \mathbb{R}$. $\square$

Proposición 2.29. La identidad en S , $I: S \rightarrow S$ no tiene logaritmo continuo.

Demostración. Supongamos que $I: S \rightarrow S$ tuviera un logaritmo continuo, $z = e^{i\phi(z)}$ para cada $z \in S$. Entonces la aplicación definida por

$$\begin{array}{ccc} h: [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \phi(e^{it}) - t. \end{array}$$

es continua. Dado $t_0 \in [0, 2\pi]$, $\phi(e^{it_0}) = t_0 + 2\pi n_0$ para algún número entero n_0 . Por lo tanto, podemos escribir $g(t_0) = t_0 + 2\pi n_0 - t_0 = 2\pi n_0$, en definitiva, la imagen de todo punto por la aplicación es un múltiplo entero de 2π . Lo cual llevaría a una contradicción ya que como h es constante, entonces $0 = h(0) = h(2\pi) = h(1) = \phi(1) - 1$, y

$$h(2\pi) = \phi(e^{i2\pi}) - 2\pi = \phi(1) - 2\pi.$$

$\square$

Proposición 2.30. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un disco cerrado. Si $f: D \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ es continua, entonces existen funciones continuas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tales que $(\varphi_k(z))^n = f(z)$ para todo $z \in D$, $k = 1, \dots, n$.

Demostración. Para cada $z \in D$, $f(z) = |f(z)| \frac{f(z)}{|f(z)|}$. Si consideramos la aplicación $z \mapsto f(z)/|f(z)|$ para cada $z \in D$, por la proposición 2.28 tiene logaritmo continuo, es decir, $f(z)/|f(z)| = e^{i\phi(z)}$ para cierta $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$. Definamos para cada $1 \leq k \leq n$

$$h_k(z) = \sqrt[n]{|f(z)|} e^{\frac{i(\phi(z) + 2k\pi)}{n}}.$$

Evalutando $(h_k(z))^n$, obtenemos $(h_k(z))^n = |f(z)| e^{i(\phi(z) + 2k\pi)}$. Dado que $f(z) = |f(z)| e^{i\phi(z)}$, podemos concluir que $(h_k(z))^n = f(z)$. Por lo tanto, la función $h_k(z)$ satisface la propiedad deseada para todo $z \in D$ y cada $1 \leq k \leq n$. $\square$

Teorema 2.31 (fundamental del álgebra). Si p es un polinomio de grado $n > 0$, entonces p tiene al menos una raíz compleja.

Demostración. Supongamos que p es un polinomio tal que el coeficiente de z^n es $1/k$ con $k > 1$, podemos escribir

$$p(z) = z^n/k + Q(z)$$

donde $Q(z)$ es un polinomio de grado menor que n . Observemos que cuando z tiende a infinito,

$$P(z) \approx \frac{z^n}{k}. \quad (2.10)$$

Esto significa que a medida que z tiende a infinito, el argumento de $p(z)$ se acerca al argumento de z^n/k , que es el mismo que el argumento de z^n . Por (2.10), también se deduce que para z suficientemente grande, $|p(z)|$ es aproximadamente igual a $|z|^n/k < |z|^n$. En definitiva, se puede encontrar $r_1 > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq r_1$, $p(z)$ y z^n tienen argumentos que difieren en menos de $\pi/3$ y $|p(z)| < |z|^n$.

Elijamos $r_2 > r_1$ tal que $\sqrt[n]{|p(z)|} + |z| < r_2$ para $|z| \leq r_1$. Sea $D = B(0, r_2)$ el disco de centro 0 y radio r_2 . Supongamos que p no se anula en ningún punto, por la proposición 2.30, p tiene raíces n -ésimas, elijamos una, φ_{n_0} tal que los argumentos de $\varphi_{n_0}(r_1)$ y r_1 difieran en menos de $\pi/(3n)$. Observemos que por la elección de r_1 , para $|z| \geq r_1$ $\varphi_{n_0}(z)$ y z tienen argumentos que difieren en menos de $\pi/(3n)$.

Entonces para $|z| \geq r_1$, $|p(z)| < |z|^n$ y por tanto $|\varphi_{n_0}(z)| < |z|$. Se deduce que para $|z| \geq r_1$, $\varphi_{n_0}(z)$ y z se encuentran en un sector circular de radio $|z|$ y ángulo $\pi/(3n)$. Luego $|z - \varphi_{n_0}(z)| \leq ||z|e^{i\theta_1} - |z|e^{i\theta_2}| = |z||e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| \leq |z||e^{i\theta_1}||1 - e^{i\pi/3}|$, donde θ_1, θ_2 son los argumentos de z y $\varphi_{n_0}(z)$ respectivamente y en la última desigualdad se usa que difieren en menos de $\pi/(3n)$, como $n > 1$ difieren en particular en menos de $\pi/3$. Ahora bien, como

$$\begin{aligned} |1 - e^{i\pi/3}| &= |1 - \cos(\pi/3) - i \sin(\pi/3)| \\ &= |1/2 - (i\sqrt{3})/2| \\ &= \sqrt{(1/4 + 3/4)} = 1, \end{aligned}$$

$|z - \varphi_{n_0}(z)| < |z|$ para $|z| \geq r_1$. Por otro lado si $|z| \leq r_1$, $|z - \varphi_{n_0}(z)| \leq |z| + |\varphi_{n_0}(z)| < r_2$. Por tanto la siguiente aplicación está bien definida y es continua

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D \\ z & \mapsto & z - \varphi_{n_0}(z). \end{array}$$

Por el teorema del punto fijo de Brouwer, tiene al menos un punto fijo, $z_0 = z_0 - \varphi_{n_0}(z_0)$ para cierto $z_0 \in D$. Por tanto $\varphi_{n_0}(z_0) = 0$ y entonces $p(z_0) = 0$. $\square$

Capítulo 3

Teorema del punto fijo de Schauder

El teorema de Brouwer tiene como limitación el no poder usarse en espacios de dimensión infinita. Para ilustrar esta limitación consideremos el espacio de las sucesiones cuyos términos, salvo un número finito de ellos, son cero,

$$c_{00} = \{(\xi_n) : \xi_i \neq 0 \text{ para un número finito de } i \in \mathbb{N}\}.$$

Dotemos a c_{00} de la norma $\|(\xi_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|\xi_n|\}$ y definamos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{ccc} \varphi: & c_{00} & \longrightarrow \\ & (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) & \longmapsto (1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots). \end{array}$$

Veamos que φ es continua. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de c_{00} convergente a $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \in c_{00}$, donde $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^n, \dots)$. Como $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0$ cuando n tiende a infinito.

$$\|\varphi(x_n) - \varphi(x)\|_\infty = \|(0, \xi_1^n - \xi_1, \xi_2^n - \xi_2, \dots)\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{\xi_i^n - \xi_i\} = \|x_n - x\|_\infty$$

por lo que $\|\varphi(x_n) - \varphi(x)\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. En conclusión, φ es continua en c_{00} con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Consideremos la restricción de φ a la bola unidad cerrada $B = \{x \in c_{00} : \|x\|_\infty \leq 1\}$. Tengamos en cuenta que por definición $\varphi(B) \subseteq B$. Supongamos que $\varphi|_B$ tuviera algún punto fijo $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \in B$, es decir, $\varphi(x) = x$. Por lo que x verificaría

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1 \\ \xi_2 &= \xi_1 = 1 \\ \xi_3 &= \xi_2 = 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Pero en este caso $x \notin c_{00}$ llegando a contradicción. Este contraejemplo prueba que el teorema 2.7 no es válido en dimensión infinita. Schauder proporcionó una versión de teorema de punto fijo para espacios de dimensión arbitraria.

3.1 Enunciado y demostración del teorema

Originalmente, este teorema se demostró para espacios normados de dimensión arbitraria; la sección se centrará en esta versión. Se usará una demostración clásica de este

resultado basada en el teorema del punto fijo de Brouwer apoyándonos en el capítulo 4 de [1]. En 1935 Tychonoff demostró una versión del teorema para espacios topológicos. Más recientemente, en el 2001, R. Cauty demostró una versión más general del teorema de Tychonoff.

Definición 3.1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subseteq X$ un subconjunto. A es *relativamente compacto* en X si su cierre, $\overline{A}$, es compacto. Equivalentemente A es *relativamente compacto* si para cualquier sucesión de elementos de A , existe una subsucesión convergente en X .

Observación 3.2. Todo subconjunto de un conjunto relativamente compacto es relativamente compacto.

Definición 3.3. Sean X e Y dos espacios de Banach. Una aplicación lineal $T: X \rightarrow Y$ es *compacta* si es continua y para cada conjunto acotado $K \subseteq X$, su imagen $T(K)$ es un conjunto relativamente compacto en Y .

Definición 3.4. Sea X un espacio vectorial y $B \subseteq X$ un subconjunto. La *envolvente convexa* o *componente convexa* de B es el conjunto convexo más pequeño en X que contiene a B . Es el conjunto formado por la intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a B . Se denotará por $co(B)$.

Lema 3.5. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $K = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ un subconjunto finito de X . Entonces $co(K)$ es un conjunto compacto.

Demostración. El conjunto

$$S = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_1, \dots, t_n \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\},$$

es compacto en $\mathbb{R}^n$. La siguiente aplicación,

$$\begin{aligned} f: S &\longrightarrow X \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto f(t_1, \dots, t_n) = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n, \end{aligned}$$

es continua. Además $f(S) = co(\{x_1, \dots, x_n\})$, por lo que como la imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua es un conjunto compacto (ver teorema 4.14 de [17]), $co(K)$ es compacto. $\square$

Teorema 3.6 (Teorema del punto fijo de Schauder). Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ y $K \subseteq X$ un subconjunto cerrado, acotado y convexo. Sean $T: X \rightarrow X$ una aplicación compacta y $f = T|_K$. Si $f(K) \subseteq K$, entonces $f: K \rightarrow K$ tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Como K es un subconjunto acotado y T es compacta, $T(K) = f(K)$ es relativamente compacto, es decir, $\overline{f(K)}$ es compacto. Por compacidad, de todo recubrimiento por abiertos de $\overline{f(K)}$ se puede extraer un subrecubrimiento finito. Fijemos $\epsilon > 0$, entonces existen $\{x_1, \dots, x_n\} \in \overline{f(K)} \subseteq \overline{K} = K$ tales que para todo $x \in \overline{f(K)}$ se tiene que para algún $1 \leq j \leq n$

$$x \in \mathring{B}(x_j, \epsilon) = \{y \in K : \|y - x_j\| < \epsilon\},$$

es decir,

$$\overline{f(K)} \subseteq \bigcup_{j=1}^n \mathring{B}(x_j, \epsilon).$$

Definamos la siguiente función auxiliar para cada $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \mu_i: \overline{f(K)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mu_i(x) = \begin{cases} \epsilon - \|x - x_i\| & \text{si } \|x - x_i\| < \epsilon \\ 0 & \text{si } \|x - x_i\| \geq \epsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Las funciones μ_i son continuas porque $\lim_{\|x-x_i\| \rightarrow \epsilon^+} \mu_i(x) = \lim_{\|x-x_i\| \rightarrow \epsilon^-} \mu_i(x) = 0$. Consideremos también la siguiente función, conocida como *proyección de Schauder*

$$\begin{aligned} \varphi: \overline{f(K)} &\longrightarrow \text{co}(\{x_1, \dots, x_n\}) \\ x &\mapsto \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i(x)}{\sum_{j=1}^n \mu_j(x)} x_i. \end{aligned}$$

La función φ está bien definida porque si $x \in \overline{f(K)}$, entonces $x \in B(x_{i_0}, \epsilon)$ para algún $1 \leq i_0 \leq n$, por lo que $\mu_{i_0}(x) = \epsilon - \|x - x_{i_0}\| \neq 0$. Por otro lado, si $x \notin B(x_j, \epsilon)$, $\mu_j(x) = 0$. φ es continua pues μ_j es continua para todo $1 \leq j \leq n$. Observemos que $\|\varphi(x) - x\| < \epsilon$ para todo $x \in \overline{f(K)}$ ya que

$$\begin{aligned} x - \varphi(x) &= x - \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j(x) x_j}{\sum_{i=1}^n \mu_i(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j(x) x - \sum_{j=1}^n \mu_j(x) x_j}{\sum_{i=1}^n \mu_i(x)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j(x) (x - x_j)}{\sum_{i=1}^n \mu_i(x)}. \end{aligned}$$

Si tomamos normas en ambas partes de la igualdad

$$\|x - \varphi(x)\| = \left\| \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j(x) (x - x_j)}{\sum_{i=1}^n \mu_i(x)} \right\| \leq \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j(x) \|x - x_j\|}{\sum_{i=1}^n \mu_i(x)} < \epsilon$$

para todo $x \in \overline{f(K)}$. En particular se verifica para todo $y \in K$

$$\|\varphi(f(y)) - f(y)\| < \epsilon. \quad (3.1)$$

Se puede considerar la restricción de $\varphi \circ f$ a la envolvente convexa de $\{x_1, \dots, x_n\}$,

$$\begin{aligned} \varphi \circ f: \text{co}(\{x_1, \dots, x_n\}) &\longrightarrow \text{co}(\{x_1, \dots, x_n\}) \\ y &\mapsto (\varphi \circ f)(y). \end{aligned}$$

De nuevo, por composición, $\varphi \circ f$ es una aplicación continua definida sobre un conjunto compacto y convexo de dimensión finita, por el corolario 2.10, la aplicación tiene un punto fijo, $\varphi(f(y_\epsilon)) = y_\epsilon$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, tomemos $\epsilon = 1/m$ y construyamos $\{f(y_{1/m})\}_{m \in \mathbb{N}}$. Por la compacidad de K , esta sucesión admite una subsucesión convergente, $\{f(y_{1/m_i})\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y$ para algún $y \in \overline{f(K)} \subseteq K$. Y también por (3.1)

$$\|y_{1/m_i} - f(y_{1/m_i})\| = \|\varphi(f(y_{1/m_i})) - f(y_{1/m_i})\| < \frac{1}{m_i} \rightarrow 0.$$

Podemos concluir que $\{y_{1/m_i}\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow y$, ya que $\{f(y_{1/m_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a y , y se tiene que

$$\|y_{1/m_i} - y\| \leq \|y_{1/m_i} - f(y_{1/m_i})\| + \|f(y_{1/m_i}) - y\| \rightarrow 0.$$

Por continuidad, $f(y) = f(\lim_{i \rightarrow \infty} y_{1/m_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(y_{1/m_i}) = y$. $\square$

Observación 3.7. Dado que una aplicación lineal continua definida sobre un conjunto compacto siempre es compacta, se puede deducir un resultado similar al teorema 3.6; que se usará en las aplicaciones de este capítulo: Si K es un subconjunto compacto y convexo de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, entonces toda aplicación continua, f tal que $f(K) \subseteq K$ tiene un punto fijo. Para obtener una demostración de esta versión particular, consultar el capítulo 4 de [20].

3.2 Aplicaciones del teorema del punto fijo de Schauder

El teorema del punto fijo de Schauder es un resultado de análisis funcional con múltiples aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas; una de ellas permite demostrar el teorema de Lomonosov, un resultado relevante en la teoría de operadores que estudia la existencia de espacios invariantes. Otra de las aplicaciones que se estudiará en este trabajo es en la demostración de la existencia de soluciones para cierto tipo de ecuaciones integrales.

3.2.1 Teorema de Lomonosov

En la década de los 30, J. von Neumann demostró, aunque no publicó, que los operadores compactos definidos en espacios de Hilbert tienen subespacios invariantes no triviales. Posteriormente, en 1954, N. Aronszajn y K. T. Smith generalizaron este resultado para espacios de Banach. Poco después, en 1973, Victor Lomonosov logró probar, véase [12], que cualquier operador que no sea múltiplo de la identidad que conmute con un operador compacto no nulo tiene un subespacio hiperinvariante, es decir, invariante para todos los operadores que conmutan con él. Es interesante destacar que Lomonosov utilizó el teorema del punto fijo de Schauder en su demostración.

Sean X e Y dos espacios de Banach, se denotará por $\mathcal{L}(X, Y)$ a los operadores lineales continuos de X en Y . A los operadores lineales continuos de X en X se les denotará por $\mathcal{L}(X)$. Consideremos $T: X \rightarrow Y \in \mathcal{L}(X, Y)$, la norma de T , denotada por $\|T\|$, se define por

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0 \in X} \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \right\}.$$

Proposición 3.8. Sean X e Y dos espacios de Banach y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal continuo. T es compacto si y solo si transforma una bola cualquiera, por ejemplo la bola unidad cerrada $B(0, 1)$, en un conjunto relativamente compacto.

Demostración. Por definición, si T es compacto, entonces transforma la bola unidad cerrada en un conjunto relativamente compacto.

Recíprocamente si T transforma la bola unidad cerrada en un conjunto relativamente compacto, dado un conjunto acotado $A \subset X$, tomando $r > 0$ tal que $A \subset B(0, r) \subset X$, se tiene que $T(A) \subset T(B(0, r)) = rT(B(0, 1))$, por linealidad, y $T(B(0, 1))$ es relativamente compacto por hipótesis. Entonces $T(A)$ es relativamente compacto por estar contenido en un conjunto relativamente compacto. $\square$

Definición 3.9. Se dice que un operador lineal $T: X \rightarrow Y$ entre dos espacios vectoriales normados X e Y tiene *rango finito* si la imagen de X por T es un subespacio de Y de dimensión finita.

Proposición 3.10. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si $T: X \rightarrow X$ es un operador lineal continuo de rango finito, entonces T es compacto.

Demostración. Consideremos un conjunto acotado $A \subset X$. Como T es continuo, $T(A)$ es un subconjunto acotado de X . Además, como el rango de T es finito, la imagen de A bajo T tiene dimensión finita. Como en dimensión finita los conceptos de relativamente compacto y acotado son equivalentes, $T(A)$ es un conjunto relativamente compacto en X . $\square$

Lema 3.11. Sean X un espacio normado e Y un subespacio cerrado distinto de X . Entonces, para cada $\rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho < 1$, existe $x \in X$, con $\|x\| = 1$, tal que $d(x, Y) \geq \rho$. Como consecuencia si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores linealmente independientes de X y $E_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, existe $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|y_n\| = 1$, $y_n \in E_n$ y $d(y_n, E_{n-1}) \geq \rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $x_0 \in X$, y $x_0 \notin Y$. Denotemos por $d = d(x_0, Y)$. Como $d < d/\rho$, existe $y_0 \in Y$ tal que $\|x_0 - y_0\| \leq d/\rho$. Veamos que $(x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$ cumple lo pedido: es obvio que tiene norma igual a 1, y para todo $y \in Y$ se tiene

$$\left\| \frac{(x_0 - y_0)}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \frac{\|x_0 - (y_0 + y\|x_0 - y_0\|)\|}{\|x_0 - y_0\|} \geq \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \geq \rho.$$

Para la segunda parte basta tomar $y_1 = x_1/\|x_1\|$ y para $n > 1$, tomamos $X = E_n$ e $Y = E_{n-1}$. $\square$

Proposición 3.12. La bola unidad cerrada de un espacio normado X es un compacto si y solo si X tiene dimensión finita.

Demostración. Si el espacio es de dimensión finita, como la bola unidad cerrada es un cerrado y acotado, entonces es compacto. Veamos la implicación recíproca. Si X no tuviera dimensión finita, por el lema 3.11, dado $0 < \rho < 1$, se puede elegir una sucesión $\{y_n\}$ de elementos de $B(0, 1)$ tal que $\|y_i - y_j\| \geq \rho$ para $i \neq j$, esta sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente, por lo tanto $B(0, 1)$ no es un compacto. $\square$

Proposición 3.13. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, la identidad $I: X \rightarrow X$ es un operador compacto si y solo si X tiene dimensión finita.

Demostración. El recíproco es inmediato por la proposición 3.10. Para demostrar la implicación directa, asumamos que $I: X \rightarrow X$ es compacto. En tal caso, la imagen de la bola unidad cerrada por T , $T(B(0, 1))$ es sí misma. Por la proposición 3.12 X debe tener dimensión finita. $\square$

Proposición 3.14. Sean X, Y, Z espacios normados, $T: X \rightarrow Y$ y $U: Y \rightarrow Z$ dos operadores; uno de ellos continuo y el otro compacto. Entonces $U \circ T$ es compacto.

Demostración. Supongamos en primer lugar que T es continuo y U compacto. Sea un subconjunto acotado $A \subseteq X$, entonces como T es continuo, $T(A)$ es acotado y $U(T(A))$ relativamente compacto porque U es compacto, lo que equivale a que $U \circ T$ es compacto.

A continuación, consideremos el caso en el que T es compacto y U es continuo. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto acotado. Se quiere demostrar que $T(A)$ es relativamente compacto. Sea $\{U(T(x_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $U(T(A))$. Debido a que T es compacto, $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente, $\{T(x_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$. Por continuidad de U , $\{U(T(x_{n_k}))\}_{k \in \mathbb{N}}$ también será convergente, es decir, $U \circ T$ es compacto. $\square$

Observación 3.15. Toda aplicación lineal sobre un espacio vectorial de dimension finita tiene algún valor propio. Es consecuencia del teorema 2.31, ya que los valores propios de una aplicación lineal son precisamente las raíces del polinomio característico asociado.

Definición 3.16. Sea X un espacio de Banach y $T: X \rightarrow X$ un operador lineal. Un subespacio invariante para T es un subespacio cerrado $M \subseteq X$ tal que para todo $x \in M$, $T(x) \in M$. Denotaremos $\text{Lat}(T)$ al conjunto de todos los subespacios invariantes para T . Si consideramos un subconjunto de operadores $U \subseteq \mathcal{L}(X)$, se puede definir $\text{Lat}(U) = \bigcap \{\text{Lat}(T) : T \in U\}$

Definición 3.17. Sea X un espacio de Banach y $P, Q \in \mathcal{L}(X)$. Se dice que los operadores conmutan si $P \circ Q = Q \circ P$.

Definición 3.18. Sean X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Un subespacio $M \subseteq X$ se dice que es *hiperinvariante* para T si para todo operador lineal continuo P que conmute con T se verifica que $P(M) \subseteq M$.

Observación 3.19. Todo subespacio hiperinvariante para un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ es invariante para T .

Definición 3.20. Sea X un espacio métrico. Se dice que X es *totalmente acotado* si para todo $\epsilon > 0$ existe un número finito de bolas de radio ϵ que recubren X .

Proposición 3.21. Sea X espacio métrico completo y totalmente acotado, entonces es compacto.

Demostración. Denotemos $d(\cdot, \cdot)$ a la distancia asociada a X . En términos de sucesiones, que el espacio métrico X sea compacto equivale a que de toda sucesión de elementos de X se puede extraer una subsucesión convergente. Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X . Como X es totalmente acotado, existen $a_1, \dots, a_n \in X$ tales que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(a_i, 1).$$

Al menos una de las bolas $B(a_1, 1), \dots, B(a_n, 1)$ contiene a infinitos p_i , denotémosla por B_1 . Sea $p_{n_1} \in B_1$ un elemento de $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por definición, cualquier subespacio de un espacio totalmente acotado es totalmente acotado, por lo que existen $a'_1, \dots, a'_m \in B_1 \subseteq X$ tales que

$$B_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(a'_i, 1/2).$$

De nuevo, por construcción, una de las bolas contendrá a infinitos términos de la sucesión original, denotémosla por $B_{1/2}$. Elijamos $p_{n_2} \in B_{1/2}$ un elemento de $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $n_2 > n_1$. Si se continua razonando de esta manera, se encontrará una bola B_k de radio $1/k$ que contiene infinitos términos de $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Este espacio se puede recubrir con un número finito de bolas de radio $1/(k+1)$, y una de esas bolas, B_{k+1} , contendrá a infinitos p_n , elijamos $p_{n_{k+1}} \in B_{k+1}$ tal que $n_{k+1} > n_k$.

Como $p_{n_j} \in B_k$ para todo $j \geq k$,

$$d(p_{n_i} - p_{n_j}) \leq \frac{2}{k}$$

para todo $i, j \geq k$, la sucesión $\{p_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, $\{p_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge. $\square$

Lema 3.22 (Lema de Mazur). Sea X un espacio de Banach y $K \subseteq X$ un subconjunto compacto de X , entonces el cierre de $co(K)$, $\overline{co(K)}$, es compacto.

Demostración. Como K es compacto, dado $\epsilon > 0$, existen $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon/3)$ para cierto $\epsilon > 0$. Ahora bien, como $co(\{x_1, \dots, x_n\})$ es compacto por 3.5, existen $y_1, \dots, y_m$ en $co(\{x_1, \dots, x_n\})$ tales que $co(\{x_1, \dots, x_n\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \epsilon/3)$. Sea $a \in \overline{co(K)}$, existe $b \in co(K)$ tal que $\|a - b\| < \epsilon/3$. Como $b \in co(K)$, entonces $b = \sum_{j=1}^l \lambda_j b_j$, con $b_j \in K$, $\lambda_1, \dots, \lambda_l \geq 0$ y $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = 1$. Ahora para cada b_j existe $x_k(j) \in \{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $\|b_j - x_k(j)\| < \epsilon/3$, por lo que

$$\left\| b - \sum_{j=1}^l \lambda_j x_k(j) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^l \lambda_j (b_j - x_k(j)) \right\| \leq \sum_{j=1}^l \lambda_j \|b_j - x_k(j)\| < \epsilon/3.$$

Además, como $\sum_{j=1}^l \lambda_j x_k(j) \in co(\{x_1, \dots, x_n\})$, entonces existe $y_{i_0} \in \{y_1, \dots, y_m\}$ tal que $\|\sum_{j=1}^l \lambda_j x_k(j) - y_{i_0}\| < \epsilon/3$. Usando la desigualdad triangular,

$$\|a - y_{i_0}\| \leq \|a - b\| + \left\| b - \sum_{j=1}^l \lambda_j x_k(j) \right\| + \left\| \sum_{j=1}^l \lambda_j x_k(j) - y_{i_0} \right\| < \epsilon$$

Es decir, $\overline{co(K)} \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \epsilon)$. Como X es un espacio de Banach y $\overline{co(K)}$ es cerrado y totalmente acotado, entonces por la proposición 3.21 es compacto. $\square$

Para demostrar los siguientes resultados se razonará de manera similar a las ideas planteadas en [7].

Lema 3.23 (de Lomonosov). Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\mathcal{S}$ una subálgebra de $\mathcal{L}(X)$ tal que la identidad, $I: X \rightarrow X$, está en $\mathcal{S}$ y supongamos $Lat(\mathcal{S}) = \{\emptyset, X\}$. Si P es un operador compacto no nulo sobre X , existe $Q \in \mathcal{S}$ tal que $\ker(QP - Id) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea P un operador compacto no nulo. Supongamos por simplicidad que $\|P\| = 1$, ya que si no fuera así tomaríamos el operador $P/\|P\|$ que sería un operador compacto no nulo sobre X . Fijemos $x_0 \in X$ tal que $\|P(x_0)\| > 1$ y definamos

$$B = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq 1\} = B(x_0, 1).$$

Veamos que $0 \notin B$: supongamos que fuera así, entonces $\|0 - x_0\| \leq 1$ y en consecuencia

$$1 < \|P(x_0)\| \leq \|P\| \cdot \|x_0\| \leq 1,$$

llegando a contradicción. Observemos también que para todo $x \in B$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &= \|P(x_0 + (x - x_0))\| \\ &= \|P(x_0) + P(x - x_0)\| \\ &\geq \|P(x_0)\| - \|P(x - x_0)\| \\ &\geq \|P(x_0)\| - 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Supongamos que $0 \in \overline{P(B)}$. Entonces, existiría una sucesión $\{y_n\}$ de elementos de B tal que

$$P(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por (3.2), para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|P(y_n)\| \geq \|P(x_0)\| - 1$. Pero si $P(y_n) \rightarrow 0$, entonces por continuidad $\|P(x_0)\| \leq 1$, lo cual es una contradicción con la elección de x_0 . En definitiva, se ha visto que

$$0 \notin B, 0 \notin \overline{P(B)}. \tag{3.3}$$

Para cada $x \in X$ no nulo, $M_x := \overline{\{T(x) : T \in \mathcal{S}\}}$ es un subespacio invariante de $\mathcal{S}$ porque si $T_1, T_2 \in \mathcal{S}$, entonces $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{S}$ por ser $\mathcal{S}$ una álgebra, y por lo tanto, $(T_1 \circ T_2)(x) = T_1(T_2(x)) \in M_x$, lo cual demuestra que M_x es un subespacio invariante de $\mathcal{S}$. Además M_x es no vacío ya que $I \in \mathcal{S}$. Es decir, se ha visto que $M_x \in \text{Lat}(\mathcal{S})$ y es no vacío, por tanto por hipótesis debe ser para cada $x \in X$, $x \neq 0$

$$X = M_x. \tag{3.4}$$

Entonces para cada $x \in X$ no nulo, existe $T \in \mathcal{S}$ tal que $\|T(x) - x_0\| < 1$. En particular, dado $y \in \overline{P(B)}$, como puede aproximarse arbitrariamente por una sucesión de elementos de $P(B) \subseteq X$ existe $T_y \in \mathcal{S}$ tal que $\|T_y(y) - x_0\| < 1$. Por tanto

$$\overline{P(B)} \subseteq \bigcup_{T \in \mathcal{S}} \{y \in X : \|T(y) - x_0\| < 1\}.$$

Por compacidad de $\overline{P(B)}$, se puede extraer un subrecubrimiento finito, existe un subconjunto finito de operadores $T_1, \dots, T_n$ de $\mathcal{S}$ de manera que

$$\overline{P(B)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{y \in X : \|T_i(y) - x_0\| < 1\}. \tag{3.5}$$

Definamos la siguiente función auxiliar para cada $1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} g_j: \overline{P(B)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_j(x) = \begin{cases} 1 - \|T_j(x) - x_0\| & \text{si } \|T_j(x) - x_0\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|T_j(x) - x_0\| \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Cada g_j es continua por serlo T_j para todo $1 \leq j \leq n$. Además, para cada $y \in \overline{P(B)}$, $\sum_{j=1}^n g_j(y) > 0$ por (3.5). Tomemos ahora la función definida por

$$\begin{aligned} \gamma_j: \overline{P(B)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \gamma_j(x) = \frac{g_j(x)}{\sum_{i=1}^n g_i(x)}. \end{aligned}$$

Observemos que γ_j es una función continua por serlo g_j para todo $1 \leq j \leq n$. Consideremos por último

$$\begin{aligned} \Gamma: B &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \Gamma(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(P(x))T_i(P(x)), \end{aligned}$$

que es una aplicación continua por ser composición de funciones continuas.

El objetivo llegado a este punto es probar que B es convexo, cerrado acotado, que Γ es compacto y verifica que $\Gamma(B) \subseteq B$, en resumen, que cumple las hipótesis del teorema del punto fijo de Schauder.

Veamos en primer lugar que B es convexo: sean $x, y \in B$ y $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y - x_0\| &= \|\lambda(x - x_0) + (1 - \lambda)(y - x_0)\| \\ &\leq \lambda\|x - x_0\| + (1 - \lambda)\|y - x_0\| \\ &\leq \lambda + (1 - \lambda) = 1. \end{aligned}$$

$\lambda x + (1 - \lambda)y \in B$ y concluimos que B es convexo.

Probemos a continuación que $\Gamma(B) \subseteq B$. Sea $x \in B$, entonces $P(x) \in P(B) \subseteq \overline{P(B)}$. Observemos que $\gamma_j(P(x))$ es no negativa. Si $\gamma_j(P(x)) > 0$ para cierto $1 \leq j \leq n$, entonces $g_j(P(x)) > 0$, por la definición de g_j se tiene que $\|T_j(P(x)) - x_0\| < 1$, por tanto $T_j(P(x)) \in B$. Además

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i(P(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i(P(x))}{\sum_{k=1}^n g_k(P(x))} = 1,$$

por lo que $\Gamma(x)$ es una combinación convexa de elementos de B . Se tiene así que $\Gamma(B) \subseteq co(B)$, como $co(B) \subseteq B$ por ser B convexo, $\Gamma(B) \subseteq B$.

Probemos finalmente que Γ es compacto: tengamos en cuenta que, por la proposición 3.14, $T_j \circ P$ es un operador compacto para cada $1 \leq j \leq n$. Por tanto, para cada $1 \leq j \leq n$ $T_j(P(B))$ es un conjunto relativamente compacto. Además como la unión de conjuntos relativamente compactos es un conjunto relativamente compacto, $\cup_{j=1}^n T_j(P(B))$ es relativamente compacto. En consecuencia $\overline{\cup_{j=1}^n T_j(P(B))}$ es un subconjunto compacto de X . Por el lema de Mazur,

$$\overline{co(\overline{\cup_{j=1}^n T_j(P(B))})}$$

es compacto, y por tanto también lo es

$$\overline{co(\cup_{j=1}^n T_j(P(B)))}.$$

Este conjunto contiene a $\Gamma(B)$, por lo que $\overline{\Gamma(B)}$ es compacto. Por la proposición 3.8, Γ es un operador compacto.

En resumen, $\Gamma: B \rightarrow \Gamma(B) \subseteq B$ es un operador compacto definido sobre un subconjunto cerrado, acotado y convexo, B . Por el teorema del punto fijo de Schauder existe $\beta \in B$ tal que $\Gamma(\beta) = \beta$. Observemos que $\beta \neq 0$ por (3.3).

Definamos el operador $Q = \sum_{i=1}^n \gamma_i(P(\beta))T_i$. $Q \in \mathcal{S}$ porque $T_i \in \mathcal{S}$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $\mathcal{S}$ es una subálgebra. Además

$$Q(P(\beta)) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(P(\beta))T_i(P(\beta)) = \Gamma(\beta) = \beta,$$

por tanto

$$(QP - Id)(\beta) = 0,$$

lo que prueba la existencia de un operador $Q \in \mathcal{S}$ tal que $\ker(QP - Id) \neq \emptyset$. $\square$

Observación 3.24. De la demostración del lema anterior 3.23 también se deduce que en particular $\ker(QP - Id) \neq \{0\}$.

Teorema 3.25 (de Lomonosov). Sean X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Si T no es múltiplo de la identidad y existe algún operador compacto $P: X \rightarrow X$ que conmute con T , entonces T tiene algún subespacio hiperinvariante no trivial.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de los operadores que conmutan con T . Si $\text{Lat}(\mathcal{C}) \neq \{\emptyset, X\}$, entonces hay subespacios propios de X que son invariantes bajo todo $\mathcal{C}$, en particular, existe algún subespacio hiperinvariante para T , con lo que queda probado el enunciado.

Estudiemos ahora el caso en que $\text{Lat}(\mathcal{C}) = \{\emptyset, X\}$. Veamos en primer lugar que $\mathcal{C}$ es una subálgebra de $\mathcal{L}(X)$: sean $P, Q \in \mathcal{C}$ y α un escalar.

$$(P + \alpha Q)T = PT + \alpha QT = TP + \alpha TQ = T(P + \alpha Q),$$

por tanto $P + \alpha Q \in \mathcal{C}$. Además el operador identidad conmuta con cualquier operador lineal. Por tanto $\mathcal{C}$ es una subálgebra de $\mathcal{L}(X)$.

Por el lema 3.23 existe un operador $Q \in \mathcal{C}$ tal que $\ker(QP - I) \neq \emptyset$. Probemos que $\ker(QP - I) \in \text{Lat}(QP)$, es decir, $\ker(QP - I)$ es un subespacio invariante por QP : sea $x \in \ker(QP - I)$,

$$(QP - I)QP(x) = QP(QP(x)) - QP(x) = QP(x) - x = x - x = 0.$$

También se verifica que QP es el operador identidad sobre $\ker(QP - I)$: si $x \in \ker(QP - I)$

$$QP(x) = QP(x) + x - x = (QP - I)(x) + x = x.$$

Además como P es compacto y Q es continuo, QP es compacto por la proposición 3.14. Como la identidad

$$I: \ker(QP - I) \rightarrow \ker(QP - I)$$

es compacto si y solo si el espacio tiene dimensión finita por la proposición 3.13, necesariamente $\ker(QP - I)$ tiene dimensión finita.

Veamos que $\ker(QP - I)$ es invariante por T . Sea $x \in \ker(QP - I)$,

$$QP(T(x)) - T(x) = T(QP(x)) - T(x) = T(x) - T(x) = 0.$$

Como $\ker(QP - I)$ tiene dimensión finita y es invariante por T , se tiene que

$$T|_{\ker(QP-I)}: \ker(QP - I) \longrightarrow \ker(QP - I)$$

por la observación 3.15 tiene al menos un valor propio λ . Existe un vector $x \in \ker(QP - I)$ tal que $T(x) = \lambda x$. Esto implica que $M := \ker(T - \lambda I) \neq \emptyset$. Además $M \neq X$ ya que T no es múltiplo de la identidad.

Sea S un operador que conmute con T . Veamos que $S(M) \subseteq M$, con lo que quedaría probado que existe un subespacio hiperinvariante para T no trivial. Sea $x \in M$

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)(S(x)) &= T(S(x)) - \lambda S(x) \\ &= S(T - \lambda I)(x) \\ &= S(0) = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in M$. De manera que $S(x) \in M$, y por tanto $S(M) \subseteq M$. $\square$

3.2.2 Ecuaciones integrales

Consideremos la siguiente ecuación

$$x(t) = f(t) + x(t) \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)d\tau, \quad (3.6)$$

denominada ecuación integral de Fredholm de segunda especie, donde $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $k: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas. Las posibles soluciones son funciones continuas $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo la igualdad (3.6) para todo $t \in [a, b]$. Se puede demostrar que bajo ciertas condiciones (ver II.2 de [11]) (3.6) tiene una única solución en el espacio de las funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. El objetivo de esta sección será estudiar algunos casos específicos en los que se puede afirmar que existe solución de (3.6). En el teorema de existencia que se planteará despues, se estudiará particularmente el caso en el que $a = 0$ y $b = 1$ haciendo uso del teorema del punto fijo de Schauder, tomando como referencia [4].

Denotaremos por $\mathcal{C}([a, b])$ y $\mathcal{U}([a, b])$ a los espacios de las funciones continuas y uniformemente continuas respectivamente en $[a, b]$ que valoran en $\mathbb{R}$. Dotaremos a $\mathcal{C}([a, b])$ la siguiente norma, llamada norma de la convergencia uniforme, que ya ha sido usada anteriormente,

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} \{|x(t)|\}, \quad x \in \mathcal{C}([a, b]).$$

Fijemos $0 < \alpha \leq 1$. Denotaremos por $H_\alpha([a, b])$ al espacio de las funciones reales definidas en $[a, b]$ y que verifiquen lo que se conoce por *condición de Hölder*: dada $x \in H_\alpha([a, b])$ existe una constante real positiva H_α^x tal que para cada $t, s \in [a, b]$

$$|x(t) - x(s)| \leq H_\alpha^x |t - s|^\alpha. \quad (3.7)$$

Dada una función $x \in H_\alpha([a, b])$, se define H_α^x como

$$H_\alpha^x = \sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} \right\}.$$

Observemos que dada una función, x , que cumpla (3.7), sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{H_\alpha^x}\right)^{1/\alpha}$ y consideremos dos puntos arbitrarios $t, s \in [a, b]$ tales que $|t - s| < \delta$,

$$|x(t) - x(s)| \leq H_\alpha^x |t - s|^\alpha < H_\alpha^x \delta^\alpha = H_\alpha^x \left(\left(\frac{\varepsilon}{H_\alpha^x}\right)^{1/\alpha}\right)^\alpha = \varepsilon.$$

Esto confirma que la función x que cumple la condición de Hölder es uniformemente continua en el intervalo $[a, b]$. Es decir, se verifica la siguiente cadena de inclusiones

$$H_\alpha([a, b]) \subset \mathcal{U}([a, b]) \subset \mathcal{C}([a, b]).$$

Proposición 3.26. Sea $0 < \alpha \leq 1$. La aplicación definida por

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\alpha: H_\alpha([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_\alpha = |x(a)| + H_\alpha^x \end{aligned}$$

es una norma en $H_\alpha([a, b])$.

Demostración. Es inmediato que $\|x\|_\alpha \geq 0$ y la igualdad se da si y solo si $x = 0$. La implicación directa es inmediata porque $\|x\|_\alpha = |x(a)| + H_\alpha^x$, ambos términos son negativos, supongamos que $\|x\|_\alpha = 0$, entonces $|x(a)| = 0$ y $H_\alpha^x = 0$, por lo que $x(t) = x(s)$ para todo $s, t \in [a, b]$, por lo tanto x es la función constante cero.

Por otra parte $\|\lambda x\|_\alpha = |\lambda| \|x\|_\alpha$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in H_\alpha([a, b])$, ya que

$$\|\lambda x\|_\alpha = |\lambda| |x(a)| + H_\alpha^{\lambda x} = |\lambda| (|x(a)| + H_\alpha^x) = |\lambda| \|x\|_\alpha.$$

Finalmente, comprobemos que $\|x + y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$ para todo $x, y \in H_\alpha([a, b])$.

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\alpha &\leq |x(a)| + |y(a)| + \sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|x(t) + y(t) - x(s) - y(s)|}{|t - s|^\alpha} \right\} \\ &\leq |x(a)| + |y(a)| + \sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} \right\} + \sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|y(t) - y(s)|}{|t - s|^\alpha} \right\} \\ &\leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha, \end{aligned}$$

Por tanto $\|\cdot\|_\alpha$ es una norma en $H_\alpha([a, b])$. □

Proposición 3.27. Sea $0 < \alpha \leq 1$, $(H_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Veamos que toda sucesión de Cauchy en $H_\alpha([a, b])$ converge en $H_\alpha([a, b])$. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $H_\alpha([a, b])$. Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$, se tiene $\|x_n - x_m\|_\alpha < \epsilon / (2 \max\{1, (b - a)^\alpha\})$. Dado que $\|x_n - x_m\|_\alpha = |x_n(a) - x_m(a)| + H_\alpha^{x_n - x_m}$,

$$|x_n(a) - x_m(a)| + \sup_{t, s \in [a, b]} \left\{ \frac{|x_n(t) - x_m(t) - (x_n(s) - x_m(s))|}{|t - s|^\alpha} \right\} \leq \frac{\epsilon}{2 \max\{1, (b - a)^\alpha\}}. \quad (3.8)$$

De (3.8) se deduce que $\{x_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por tanto convergente, denotemos $x(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(a)$. De (3.8) también se deduce que para todo $n, m \geq N$

$$\sup_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{|x_n(t) - x_m(t) - (x_n(a) - x_m(a))|}{|t - s|^\alpha} \right\} \leq \frac{\epsilon}{2 \max\{1, (b-a)^\alpha\}},$$

por lo que, en particular, $|x_n(t) - x_m(t)| - |x_n(a) - x_m(a)| \leq \epsilon |t - s|^\alpha / (2 \max\{1, (b-a)^\alpha\}) \leq \epsilon/2$. Es decir,

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq |x_n(a) - x_m(a)| + \frac{\epsilon}{2} \quad (3.9)$$

para todo $t \in [a, b]$, $n, m \geq N$. De (3.9) se deduce que para todo $n, m \geq N$ y para cada $t \in [a, b]$, $|x_n(t) - x_m(t)| \leq \epsilon$. Entonces, $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, definamos $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ para cada $t \in [a, b]$. Veamos que x está en $H_\alpha([a, b])$, se deduce de que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\sup_{t \neq s \in [a, b]} \{(|x_n(t) - x_n(s)|)/(|t - s|^\alpha)\} < \infty$, tomando límites se deduce que $x \in H_\alpha([a, b])$. Continuemos probando que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x en el sentido de la norma $\|\cdot\|_\alpha$. Razonando de manera similar, para todo $n \geq N$

$$\sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|x_n(t) - x(t) - (x_n(s) - x(s))|}{|t - s|^\alpha} \right\} \leq \frac{\epsilon}{2 \max\{1, (b-a)^\alpha\}} \quad (3.10)$$

y

$$|x_n(a) - x(a)| \leq \frac{\epsilon}{2 \max\{1, (b-a)^\alpha\}}. \quad (3.11)$$

Combinando (3.10) y (3.11), se puede concluir que $\|x_n - x\|_\alpha \leq \epsilon$. $\square$

Lema 3.28. Si $0 < \alpha \leq 1$. Dado $x \in H_\alpha([a, b])$, se verifica $\|x\|_\infty \leq \max\{1, (b-a)^\alpha\} \|x\|_\alpha$. En particular si $b-a=1$, entonces $\|x\|_\infty \leq \|x\|_\alpha$.

Demostración. Para todo $t \in [a, b]$ y $x \in H_\alpha([a, b])$, se tiene que

$$|x(t)| \leq |x(t) - x(a)| + |x(a)| \leq H_\alpha^x |t - a|^\alpha + |x(a)| \leq H_\alpha^x (b-a)^\alpha + |x(a)|.$$

Tomando supremo respecto a $t \in [a, b]$,

$$\|x\|_\infty \leq H_\alpha^x (b-a)^\alpha + |x(a)| \leq \max\{1, (b-a)^\alpha\} (H_\alpha^x + |x(a)|) = \max\{1, (b-a)^\alpha\} \|x\|_\alpha.$$

$\square$

Lema 3.29. Si $0 < \alpha < \beta \leq 1$, entonces $H_\beta([a, b]) \subseteq H_\alpha([a, b])$. Además para todo $x \in H_\beta([a, b])$, se cumple

$$\|x\|_\alpha \leq \max\{1, (b-a)^{\beta-\alpha}\} \|x\|_\beta.$$

Demostración. Sea $x \in H_\beta([a, b])$, entonces existe $H_\beta^x > 0$ tal que para todo $t \neq s \in [a, b]$

$$|x(t) - x(s)| \leq H_\beta^x |t - s| = H_\beta^x |t - s|^{\beta-\alpha} |t - s|^\alpha \leq (b-a)^{\beta-\alpha} H_\beta^x |t - s|^\alpha.$$

Por tanto $x \in H_\alpha([a, b])$. Además como $\|x\|_\alpha = |x(a)| + H_\alpha^x$, y

$$H_\alpha^x = \sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} \right\} = \sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\beta} |t - s|^{\beta-\alpha} \right\} \leq H_\beta^x (b-a)^{\beta-\alpha},$$

podemos concluir que $\|x\|_\alpha = |x(a)| + H_\alpha^x \leq \max\{1, (b-a)^{\beta-\alpha}\} \|x\|_\beta$. $\square$

A continuación vamos a estudiar propiedades y algunas condiciones de compacidad en los espacios de Hölder, que serán de utilidad posteriormente para poder aplicar el teorema del punto fijo de Schauder para demostrar la existencia de solución de (3.6).

Lema 3.30. Sean $0 < \alpha \leq 1$ y $A \subset H_\alpha([a, b])$ un subconjunto acotado tal que para todo $x \in A$, se verifica la siguiente propiedad: para todo $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que si $t, s \in [a, b]$ con $|t - s| \leq \delta$,

$$\frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq \epsilon. \quad (3.12)$$

Entonces A es relativamente compacto en $H_\alpha([a, b])$.

Demostración. Por el teorema de Arzelà-Ascoli (ver capítulo 3 de [7]) basta probar que A es equicontinuo y puntualmente acotado. Veamos en primer lugar que A es equicontinuo. Por la propiedad del enunciado, para cualquier $\epsilon' > 0$, podemos elegir un $\delta > 0$ tal que si $|t - s| < \delta$, entonces $\frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq \epsilon'$ para todo $x \in A$ y $t, s \in [a, b]$ con $t \neq s$. Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $|t - s|^\alpha$, obtenemos

$$|x(t) - x(s)| \leq \epsilon' |t - s|^\alpha.$$

Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\epsilon' = \epsilon/\delta^\alpha$; si $|t - s| < \delta$, entonces $|x(t) - x(s)| \leq \epsilon$ para todo $x \in A$ y $t, s \in [a, b]$ con $t \neq s$.

Además está puntualmente acotado ya que si $x \in A$, como A es acotado, existe $M > 0$ tal que

$$\|x\|_\alpha = |x(a)| + \sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} \right\} \leq M. \quad (3.13)$$

Particularmente $|x(a)| \leq M$ y

$$\frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq M$$

para todo $x \in A$ y $t, s \in [a, b]$, y por tanto $|x(t) - x(s)| \leq M|t - s|^\alpha \leq M(b - a)^\alpha$ para todo $x \in A$ y $t, s \in [a, b]$. Haciendo uso de la desigualdad triangular, para cualquier $t \in [a, b]$, por (3.13)

$$|x(t)| - |x(s)| \leq |x(t) - x(s)| \leq M|t - s|^\alpha \leq M(b - a)^\alpha.$$

En particular para $s = a$,

$$|x(t)| \leq |x(a)| + |x(t) - x(s)| \leq M + M(b - a)^\alpha.$$

Por tanto A está puntualmente acotado. Queda probado que A es relativamente compacto en $\mathcal{C}([a, b])$.

Dada una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A , por el teorema de Arzelà-Ascoli se puede afirmar que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a un elemento $x \in \mathcal{C}([a, b])$. Veamos que $x \in H_\alpha([a, b])$. Sabemos que

$$|y_n(t) - y_n(s)| \leq M|t - s|^\alpha \quad (3.14)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $t, s \in [a, b]$. Tomando límite cuando n tiende a infinito,

$$|x(t) - x(s)| \leq M|t - s|^\alpha \quad (3.15)$$

para todo $t, s \in [a, b]$. De manera similar sabemos que $|y_n(a)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto, tomando el límite cuando n tiende a infinito, $|x(a)| \leq M$. Entonces

$$|x(a)| + \sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} \right\} \leq 2M$$

lo que prueba que $x \in H_\alpha([a, b])$.

Veamos para finalizar que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x en el sentido de la norma $\|\cdot\|_\alpha$, es decir, que

$$\|y_n - x\|_\alpha = |y_n(a) - x(a)| + \sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|y_n(t) - x(t) - (y_n(s) - x(s))|}{|t - s|^\alpha} \right\} \rightarrow 0.$$

Sea $\epsilon > 0$, denotemos por δ a la constante que verifica la condición del enunciado asociada a $\epsilon/4$, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \sup_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \frac{|y_n(t) - x(t) - (y_n(s) - x(s))|}{|t - s|^\alpha} \right\} \\ &= \max_{t \neq s \in [a, b]} \left\{ \sup_{|t-s| \leq \delta} \left\{ \frac{|y_n(t) - x(t) - (y_n(s) - x(s))|}{|t - s|^\alpha} \right\}, \sup_{|t-s| \geq \delta} \left\{ \frac{|y_n(t) - x(t) - (y_n(s) - x(s))|}{|t - s|^\alpha} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Sea $\beta = \min\{\epsilon/2, \epsilon\delta^\alpha/4\}$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n(t) - x(t)| \leq \beta$ para todo $n \geq N$, $t \in [a, b]$. Acotemos cada uno de los posibles máximos, dados $t \neq s \in [a, b]$, si $n \geq N$

$$\sup_{|t-s| \geq \delta} \left\{ \frac{|y_n(t) - x(t) - (y_n(s) - x(s))|}{|t - s|^\alpha} \right\} \leq \frac{2\beta}{\delta^\alpha} \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.16)$$

Por otra parte, por la elección de δ y teniendo en cuenta la propiedad del enunciado

$$\sup_{|t-s| \leq \delta} \left\{ \frac{|y_n(t) - x(t) - (y_n(s) - x(s))|}{|t - s|^\alpha} \right\} \leq \sup_{|t-s| \leq \delta} \left\{ \frac{|y_n(t) - y_n(s)|}{|t - s|^\alpha} + \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha} \right\} \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.17)$$

En resumen, con (3.16) y (3.17) se ha visto que para todo $n \geq N$, $\|y_n - x\|_\alpha \leq \epsilon$. $\square$

Lema 3.31. Sean $0 < \alpha < \beta \leq 1$ y $A \subseteq H_\beta([a, b])$ un subconjunto acotado, entonces A es relativamente compacto en $H_\alpha([a, b])$.

Demostración. Como A está acotado en $H_\beta([a, b])$, entonces existe una constante real positiva M tal que para todo $x \in A$

$$\|x\|_\beta = |x(a)| + \sup_{t, s} \left\{ \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\beta} \right\} \leq M.$$

En particular, por el lema anterior 3.29 se deduce que A es un subconjunto acotado de $H_\alpha([a, b])$. Sea $\epsilon_1 > 0$, se puede encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < t \leq \delta$,

$$t^{\beta-\alpha} \leq \epsilon_1.$$

Fijado $\epsilon > 0$, si tomamos $\epsilon_1 = \epsilon/M$ y elegimos δ del modo anterior, para todo $t, s \in [a, b]$ tal que $|t - s| < \delta$, se tiene que

$$|t - s|^{\beta-\alpha} \leq \frac{\epsilon}{M},$$

con lo que

$$|t - s|^\beta \leq \frac{\epsilon}{M} |t - s|^\alpha.$$

Tomando entonces $t, s \in [a, b]$ tal que $|t - s| \leq \delta$,

$$|x(t) - x(s)| \leq M |t - s|^\beta \leq \epsilon |t - s|^\alpha$$

lo que prueba que el conjunto A cumple la condición del lema 3.30, por lo que A es un subconjunto relativamente compacto de $H_\alpha([a, b])$. $\square$

En lo que sigue, dados $\theta \in H_\alpha([a, b])$, $r > 0$, y $0 < \alpha \leq 1$, se denotará

$$B_\alpha(\theta, r) = \{x \in H_\alpha([a, b]) : \|x - \theta\|_\alpha \leq r\}.$$

De manera análoga se definiría $B_\beta(\theta, r)$ en $H_\beta([a, b])$.

Lema 3.32. Sea $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Entonces $B_\beta(\theta, r)$ es un subconjunto cerrado de $H_\alpha([a, b])$.

Demostración. Consideraremos $B_\beta(\theta, r)$ como un subconjunto de $H_\alpha([a, b])$. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente de elementos de $B_\beta(\theta, r)$,

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha} x.$$

Veamos que $x \in B_\beta(\theta, r)$. Como $x_n \in B_\beta(\theta, r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para todo $t \neq s \in [a, b]$

$$\frac{|x_n(t) - x_n(s)|}{|t - s|^\beta} \leq r.$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos que para todo $t \neq s \in [a, b]$

$$\frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\beta} \leq r.$$

Por tanto $x \in B_\beta(\theta, r)$. $\square$

Observación 3.33. Sea $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Entonces dados $\theta \in H_\beta([a, b])$ y $r > 0$, $B_\beta(\theta, r)$ es un subconjunto compacto de $H_\alpha([a, b])$.

Teorema 3.34 (Existencia de solución). Sean $0 < \alpha < \beta \leq 1$ y la ecuación integral

$$x(t) = f(t) + x(t) \int_0^1 k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (3.18)$$

donde $f \in H_\beta([0, 1])$, $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que para todo $t_1, t_2, s \in [0, 1]$ existe $k_\beta < \infty$ verificando

$$|k(t_1, s) - k(t_2, s)| \leq k_\beta |t_1 - t_2|^\beta.$$

Denotemos por $K = \sup_{s \in [a, b]} \left\{ \int_0^1 |k(s, \tau)| d\tau \right\}$ y supongamos además que $\|f\|_\beta (2K + k_\beta) < 1/4$. Entonces 3.18 tiene al menos una solución en $H_\alpha([0, 1])$.

Demostración.

Parte 1: Definición de la función a la que vamos a aplicar el teorema del punto fijo de Schauder.

Sea $x \in H_\beta([0, 1])$ y denotemos por $T(x)$ a la función

$$T(x)(t) = f(t) + x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau$$

para cada $t \in [0, 1]$. Veamos que $T(H_\beta([0, 1])) \subseteq H_\beta([0, 1])$. Sean $t, s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |T(x)(t) - T(x)(s)| &= \left| f(t) + x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau - f(s) - x(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(\tau)d\tau \right| \\ &\leq |f(t) - f(s)| + \left| x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau - x(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(\tau)d\tau \right|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por una parte,

$$|f(t) - f(s)| \leq H_\beta^f |t - s|^\beta. \quad (3.20)$$

Y por otra,

$$\begin{aligned} &\left| x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau - x(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(\tau)d\tau \right| \\ &= \left| x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau - x(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(\tau)d\tau \right. \\ &\quad \left. + x(s) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau - x(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(\tau)d\tau \right| \\ &\leq |x(t) - x(s)| K \|x\|_\infty + |x(s)| \int_0^1 k_\beta |t - s|^\beta x(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dividiendo en (3.19) por $|t - s|^\beta$ y usando (3.20) y (3.21) junto con las relaciones que tenemos respecto de las distintas normas,

$$\begin{aligned} \frac{|T(x)(t) - T(x)(s)|}{|t - s|^\beta} &\leq H_\beta^f + \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\beta} K \|x\|_\infty + k_\beta \|x\|_\infty^2 \\ &\leq H_\beta^f + H_\beta^x K \|x\|_\infty + k_\beta \|x\|_\infty^2 \leq H_\beta^f + H_\beta^x K \|x\|_\beta + k_\beta \|x\|_\beta^2 < \infty. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como esta desigualdad es cierta para cualesquiera $t, s \in [0, 1]$, $T(x) \in H_\beta([a, b])$, es decir,

$$\begin{array}{ccc} T: H_\beta([0, 1]) & \longrightarrow & H_\beta([0, 1]) \\ x & \mapsto & T(x): \quad [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & t \mapsto T(x)(t) = f(t) + x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau. \end{array}$$

Parte 2: Búsqueda de subconjunto que verifique las hipótesis del teorema del punto fijo de Schauder.

De (3.22) se puede deducir que

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_\beta &\leq |T(x)(0)| + x(0) \int_0^1 k(0, \tau)x(\tau)d\tau + H_\beta^f + H_\beta^x K \|x\|_\beta + k_\beta \|x\|_\beta^2 \\ &\leq \|f\|_\beta + K \|x\|_\infty^2 + K \|x\|_\beta^2 + k_\beta \|x\|_\beta^2 \\ &\leq \|f\|_\beta + (2K + k_\beta) \|x\|_\beta^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Busquemos ahora para qué valores de $r \in \mathbb{R}$ se verifica que $T(B_\beta(0, r)) \subseteq B_\beta(0, r)$. Sea $x \in B_\beta(0, r)$; por (3.23) si $\|f\|_\beta + (2K + k_\beta)r^2 \leq r$, se cumplirá que $T(x) \subseteq B_\beta(0, r)$. Es decir, para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4(2K + k_\beta)\|f\|_\beta}}{2(2K + k_\beta)} \leq r \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4(2K + k_\beta)\|f\|_\beta}}{2(2K + k_\beta)},$$

se verifica que $T(B_\beta(0, r)) \subseteq B_\beta(0, r)$. Observemos que la raíz existe porque $\|f\|_\beta(2K + k_\beta) < 1/4$ por hipótesis.

Parte 3: $T|_{B_\beta(0, r)}$ es continua respecto $\|\cdot\|_\alpha$.

Sea $\epsilon > 0$ y $0 < \delta \leq \epsilon/(2(2K + 3k_\beta)r)$. Sean $x, y \in B_\beta(0, r)$ tales que $\|x - y\|_\alpha < \delta$. Por una parte se tiene

$$\begin{aligned} & |T(x)(0) - T(y)(0)| \\ &= \left| x(0) \int_0^1 k(0, \tau)x(\tau)d\tau - y(0) \int_0^1 k(0, \tau)y(\tau)d\tau \right| \\ &\leq \left| x(0) \int_0^1 k(0, \tau)x(\tau)d\tau - x(0) \int_0^1 k(0, \tau)y(\tau)d\tau \right| \\ &\quad + \left| x(0) \int_0^1 k(0, \tau)y(\tau)d\tau - y(0) \int_0^1 k(0, \tau)y(\tau)d\tau \right| \\ &= \left| x(0) \int_0^1 k(0, \tau)(x(\tau) - y(\tau))d\tau \right| + \left| (x(0) - y(0)) \int_0^1 k(0, \tau)y(\tau)d\tau \right| \\ &\leq \|x\|_\infty \|x - y\|_\infty K + \|x - y\|_\infty \|y\|_\infty K \\ &\leq \|x\|_\beta \|x - y\|_\alpha K + \|x - y\|_\alpha \|y\|_\beta K \\ &\leq 2K r \delta \leq \frac{2K r \epsilon}{2(2K + 3k_\beta)r} \leq \frac{2K r \epsilon}{2(2K)r} \\ &= \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Y por otra,

$$\begin{aligned} & \frac{|T(x)(t) - T(y)(t) - (T(x)(s) - T(y)(s))|}{|t - s|^\alpha} \\ &= \frac{1}{|t - s|^\alpha} \left| x(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau - y(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau \right. \\ &\quad \left. + y(t) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau - y(t) \int_0^1 k(t, \tau)y(\tau)d\tau \right. \\ &\quad \left. - \left(x(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(\tau)d\tau - y(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(\tau)d\tau \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(y(s) \int_0^1 k(s, \tau)x(\tau)d\tau - y(s) \int_0^1 k(s, \tau)y(\tau)d\tau \right) \right| \\ &= \frac{1}{|t - s|^\alpha} \left| (x(t) - y(t)) \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau + y(t) \int_0^1 k(t, \tau)(x(\tau) - y(\tau))d\tau \right. \\ &\quad \left. - (x(s) - y(s)) \int_0^1 k(s, \tau)x(\tau)d\tau - y(s) \int_0^1 k(s, \tau)(x(\tau) - y(\tau))d\tau \right| \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|(x(t) - y(t)) - (x(s) - y(s))|}{|t - s|^\alpha} \left| \int_0^1 k(t, \tau) x(\tau) d\tau \right| \\
&\quad + \frac{|x(s) - y(s)|}{|t - s|^\alpha} \left| \int_0^1 (k(t, \tau) - k(s, \tau)) x(\tau) d\tau \right| \\
&\quad + \frac{1}{|t - s|^\alpha} \left| y(t) \int_0^1 k(t, \tau) (x(\tau) - y(\tau)) d\tau - y(s) \int_0^1 k(s, \tau) (x(\tau) - y(\tau)) d\tau \right|.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si acotamos cada uno de los sumandos obtendremos para el primero de ellos

$$\begin{aligned}
&\frac{|(x(t) - y(t)) - (x(s) - y(s))|}{|t - s|^\alpha} \left| \int_0^1 k(t, \tau) x(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \|x - y\|_\alpha \|x\|_\infty K \\
&\leq \delta r K,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

donde se ha usado el lema 3.28 en la última desigualdad. El segundo de los términos de (3.25) se puede acotar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{|x(s) - y(s)|}{|t - s|^\alpha} \left| \int_0^1 (k(t, \tau) - k(s, \tau)) x(\tau) d\tau \right| \\
&\leq (|x(s) - y(s) - (x(0) - y(0))| + |x(0) - y(0)|) \|x\|_\infty \int_0^1 \frac{|k(t, \tau) - k(s, \tau)|}{|t - s|^\alpha} d\tau \\
&\leq \left(\sup_{t \neq s \in [0, 1]} \left\{ \frac{|x(t) - y(t) - (x(s) - y(s))| |t - s|^\alpha}{|t - s|^\alpha} \right\} + |x(0) - y(0)| \right) \|x\|_\infty k_\beta |t - s|^{\beta - \alpha} \\
&\leq 2k_\beta \|x\|_\beta \|x - y\|_\alpha \leq 2k_\beta r \delta.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

El tercer y último sumando de (3.25) lo acotaremos así:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|t - s|^\alpha} \left| y(t) \int_0^1 k(t, \tau) (x(\tau) - y(\tau)) d\tau - y(s) \int_0^1 k(s, \tau) (x(\tau) - y(\tau)) d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{|t - s|^\alpha} \left| y(t) \int_0^1 k(t, \tau) (x(\tau) - y(\tau)) d\tau - y(s) \int_0^1 k(t, \tau) (x(\tau) - y(\tau)) d\tau \right| \\
&\quad + \frac{1}{|t - s|^\alpha} \left| y(s) \int_0^1 k(t, \tau) (x(\tau) - y(\tau)) d\tau - y(s) \int_0^1 k(s, \tau) (x(\tau) - y(\tau)) d\tau \right| \\
&\leq \frac{|y(t) - y(s)|}{|t - s|^\alpha} K \|x - y\|_\infty + |y(s)| \|x - y\|_\infty k_\beta |t - s|^{\beta - \alpha} \\
&\leq H_y^\alpha K \|x - y\|_\alpha + k_\beta \|y\|_\beta \|x - y\|_\alpha \\
&\leq \|y\|_\alpha K \|x - y\|_\beta + k_\beta \|y\|_\beta \|x - y\|_\alpha \\
&\leq K r \delta + k_\beta r \delta.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Usando (3.26), (3.27) y (3.28) en (3.25) junto con la elección de δ , obtendremos que

$$\begin{aligned}
&\frac{|T(x)(t) - T(y)(t) - (T(x)(s) - T(y)(s))|}{|t - s|^\alpha} \leq K r \delta + 2k_\beta r \delta + K r \delta + k_\beta r \delta \\
&= (2Kr + 3k_\beta r) \delta \\
&< \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Por lo que, teniendo en cuenta (3.24) y (3.29), se obtiene que

$$\|T(x) - T(y)\|_\alpha < \epsilon$$

si $\|x - y\|_\alpha < \delta$; en conclusión, T es continua en $B_\beta(0, r)$.

Parte 4: Aplicamos el teorema del punto fijo de Schauder.

Se tiene, por los apartados anteriores, una aplicación continua, T que restringida al conjunto compacto y convexo (por la observación 3.33) $B_\beta(0, r)$ valora en sí mismo. El teorema del punto fijo de Schauder afirma que T tiene al menos un punto fijo, $x \in H_\alpha([0, 1])$, y por tanto (3.18) tiene al menos una solución en $H_\alpha([0, 1])$. $\square$

Apéndice

A continuación se muestra el código en lenguaje Mathematica del algoritmo utilizado en el ejemplo 1.23.

```
ClearAll["Global`*"]
NormInf[f_, g_, {x_, a_, b_}] := NMaximize[{Abs[f[x] - g[x]], a<=x<=b}, x][[1]];(*Norma infinito*)

u[c_] := Log[c + 1]
beta= 0.85;
r = 0.01;
kmax = 20;
T[V_][k_] := Maximize[{u[c]+beta V[(1 + r)(k - c)], 0<=c<=k}, c][[1]]
initialGuess[k_] := 0;
numIter = 91;
fList = NestList[T, initialGuess, numIter];
normDiff = Table[NormInf[fList[[i]], fList[[i + 1]], {k, 0, kmax}], {i, 1, numIter - 1}];
```

3.04452	0.074467	0.00425307	0.000287455	0.0000210385	1.61324×10^{-6}
2.04205	0.0609492	0.00354077	0.000240998	0.0000177065	1.36104×10^{-6}
1.47788	0.0499789	0.00294966	0.000202115	0.0000149052	1.14841×10^{-6}
1.10798	0.0410531	0.00245873	0.000169559	0.0000125494	9.69127×10^{-7}
0.848422	0.033774	0.00205069	0.00014229	0.0000105679	8.17931×10^{-7}
0.659087	0.0278253	0.00171131	0.000119441	8.90085×10^{-6}	6.90406×10^{-7}
0.51744	0.0229546	0.00142884	0.000100289	7.49809×10^{-6}	5.82833×10^{-7}
0.409561	0.0189596	0.0011936	0.0000842312	6.31747×10^{-6}	4.92077×10^{-7}
0.326296	0.0156776	0.000997555	0.0000707628	5.32362×10^{-6}	4.15499×10^{-7}
0.261359	0.0129773	0.000834091	0.0000594631	4.48684×10^{-6}	3.50878×10^{-7}
0.210291	0.0107527	0.000697716	0.00004998	3.78217×10^{-6}	2.96338×10^{-7}
0.169855	0.00891765	0.000583881	0.0000420191	3.18866×10^{-6}	2.50302×10^{-7}
0.137652	0.00740213	0.000488814	0.0000353344	2.68868×10^{-6}	2.11439×10^{-7}
0.111882	0.00614913	0.000409382	0.0000297197	2.26742×10^{-6}	1.78628×10^{-7}
0.0911719	0.00511213	0.000342983	0.0000250026	1.91244×10^{-6}	1.50924×10^{-7}

Figura 1: Lista normDiff

Bibliografía

- [1] Agarwal, R.; Meehan, M. ; O’regan, D., *Fixed point theory and applications*, vol. 141, Cambridge university press, 2001.
- [2] Arnold, B.H., *A topological proof of the fundamental theorem of algebra*, The American Mathematical Monthly **56** (1949), no. 7, 465–466.
- [3] Banach, S., *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta mathematicae **3** (1922), no. 1, 133–181.
- [4] Banaś, J.; Nalepa, R., *On the space of functions with growths tempered by a modulus of continuity and its applications*, 2013.
- [5] Bapat, R.; Bapat, R.; Raghavan, T.E.S., *Nonnegative matrices and applications*, no. 64, Cambridge university press, 1997.
- [6] Brouwer, L., *Über abbildung von mannigfaltigkeiten*, Mathematische annalen **71** (1911), no. 1, 97–115.
- [7] Conway, J.B., *A course in functional analysis*, vol. 96, Springer, 2019.
- [8] Farmakis, I.; Moskowitz, M., *Fixed point theorems and their applications*, World Scientific, 2013.
- [9] Fort, M.K., *Some properties of continuous functions*, The American Mathematical Monthly **59** (1952), no. 6, 372–375.
- [10] Howard, R., *The Milnor-Rogers proof of the Brouwer fixed point theorem*, 2004.
- [11] Loayza, J.R., *Aplicaciones del teorema del punto fijo de banach*, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2006.
- [12] Lomonosov, V., *Invariant subspaces for the family of operators which commute with a completely continuous operator*, Funktsional’nyi Analiz i ego Prilozheniya **7** (1973), no. 3, 55–56.
- [13] Nash, J., *Non-cooperative games*, Essays on Game Theory, Edward Elgar Publishing, 1996, pp. 22–33.
- [14] Pata, V., *Fixed point theorems and applications*, vol. 116, Springer, 2019.
- [15] Pérez, J.M., *Teoremas de punto fijo y la existencia de equilibrios de Nash para juegos no cooperativos*, 2018.

- [16] Rogers, C.A., *A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem*, The American Mathematical Monthly **87** (1980), no. 7, 525–527.
- [17] Rudin, W., *Principles of mathematical analysis*, vol. 3, McGraw-hill New York, 1976.
- [18] Rueda, D.A., *Introducción a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias*, 2018.
- [19] Stokey, N.L., *Recursive methods in economic dynamics*, Harvard University Press, 1989.
- [20] Subrahmanyam, P.V., *Elementary fixed point theorems*, Springer, 2018.