TRABAJO DE FIN DE GRADO EN MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

PORTADA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LA TEORÍA INTEGRADA DEL DESARROLLO NUMÉRICO: EL USO DE LA RECTA NUMÉRICA PARA ENSEÑAR FRACCIONES EN EDUCACIÓN PRIMARIA

THE INTEGRATED THEORY OF NUMERICAL DEVELOPMENT: THE USE OF THE NUMBER LINE TO TEACH FRACTIONS IN PRIMARY EDUCATION

Autora: Paula Muñoz Moreno de Vega

Tutora: José Orrantia Rodríguez

Salamanca, 3 de junio de 2024

TRABAJO DE FIN DE GRADO

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

D./Dña. Paula Muñoz Moreno de Vega, matriculada en la Titulación de Grado en Maestro en Educación Primaria.

Declaro *que he redactado el Trabajo Fin de Grado titulado "La Teoría Integrada del Desarrollo Numérico: el uso de la recta numérica para enseñar fracciones en Educación Primaria" del curso académico 2023 / 2024 de forma autónoma, con la ayuda de las fuentes y la literatura citadas en la bibliografía, y que he identificado como tales todas las partes tomadas de las fuentes y de la literatura indicada, textualmente o conforme a su sentido.*

En Salamanca, a 3 de junio de 2024.

Fdo.: Paula Muñoz Moreno de Vega.

Paula

RESUMEN

La enseñanza de las fracciones en la etapa de Educación Primaria representa un factor determinante en el desarrollo del pensamiento lógico de los alumnos, así como en su progreso académico, personal y profesional. No obstante, a pesar de su importancia, su comprensión suele resultar, a menudo, complicada, lo que se debe, principalmente, a los métodos abstractos y descontextualizados que suelen emplearse.

Es esencial, por tanto, investigar nuevos enfoques y teorías que faciliten a los alumnos la comprensión de las fracciones de manera más sencilla, significativa y visual, conectando dicho aprendizaje con su entorno, sus experiencias cotidianas y, sobre todo, con sus conocimientos previos.

En este sentido, la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico, propuesta por Siegler, Thompson y Schneider en el año 2011, ofrece una alternativa perfecta para ello, pues sostiene que dicho desarrollo debe fundamentarse en las características comunes a todos los tipos de números reales y, en concreto, en la representación de sus magnitudes, las cuales pueden ser ubicadas, a su vez, en rectas numéricas. Y es que, la capacidad que tienen estas rectas para representar cualquier tipo de número real las convierte, en un recurso sumamente versátil para la enseñanza de las fracciones.

Por ello, tras ofrecer una amplía revisión teórica sobre las fracciones, su comprensión y su enseñanza, se ha llevado a cabo una situación de aprendizaje, donde se promueve el desarrollo de la magnitud de las fracciones por medio del empleo de la recta numérica y, en concreto, a través de la elaboración del videojuego y la propuesta *"Fracciónate"*.

Palabras clave: fracciones, Teoría Integrada del Desarrollo Numérico, recta numérica, comprensión, videojuego.

ABSTRACT

The teaching of fractions in primary education is a determining factor in the development of students' logical thinking, as well as in their academic, personal and professional progress. However, despite its importance, its understanding is often complicated, mainly due to the abstract and decontextualized methods that are usually used.

It is essential, therefore, to investigate new approaches and theories that facilitate students' understanding of fractions in a simpler, more meaningful and visual way, connecting such learning with their environment, their daily experiences and, above all, with their previous knowledge.

In this sense, the Integrated Theory of Numerical Development, proposed by Siegler, Thompson and Schneider in 2011, offers a perfect alternative for this purpose, since it argues that such development should be based on the characteristics common to all types of real numbers and, specifically, on the representation of their magnitudes, which can be located, in turn, in numerical lines. The ability of these lines to represent any type of real number makes them an extremely versatile resource for teaching fractions.

Therefore, after offering an extensive theoretical review on fractions, their understanding and teaching, a learning situation has been carried out, where the development of the magnitude of fractions is promoted through the use of the number line and, specifically, through the development of the video game and the proposal "*Fracciónate".*

Keywords: fractions, Integrated Theory of Numerical Development, number line, comprehension, video game.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la enseñanza de las fracciones ha suscitado un creciente interés y debate entre investigadores y expertos, pertenecientes a diversos campos de estudio, especialmente, al educativo. No obstante, a pesar de las numerosas teorías que se han formulado, existe un consenso claro: el conocimiento temprano de las fracciones predice, de forma única, el éxito tanto a nivel académico, como a nivel personal y profesional (Lortie – Forgues et al., 2015).

Desafortunadamente, son muchos los niños y adultos que enfrentan, a menudo, dificultades significativas para comprender el sentido de estos números, considerando su aprendizaje como el inicio de su deteriorada relación con las matemáticas. Es relevante destacar, que este problema se debe, principalmente, al enfoque de su enseñanza, que se centra en las diferencias entre la adquisición de las fracciones y la de los números enteros, analizando cómo la comprensión previa de estos últimos obstaculiza la de los primeros.

En este contexto, surge la necesidad de explorar nuevas teorías, como la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico que, aunque reconoce estas dificultades y sus consecuencias, no se detiene en ellas. Por el contrario, opta por centrarse en las similitudes comunes a todos los tipos de números y, en concreto, en la representación de sus magnitudes, las cuales se pueden ubicar, a su vez, en rectas numéricas (Siegler et al., 2011).

Y es que, a pesar de ser percibidas como abstractas y distantes, las fracciones están, intrínsecamente, integradas en nuestro día a día, apareciendo incluso en aquellos lugares donde menos nos podríamos imaginar: en los videojuegos. Estos, unidos al empleo de la recta numérica, ofrecen un contexto idóneo para fomentar el interés por las fracciones, a menudo tan odiadas desde una edad temprana.

El trabajo se encuentra organizado, por tanto, en cinco puntos, agrupados, a su vez, en dos partes diferenciadas. La primera es más teórica y presenta tanto los objetivos que se pretenden conseguir, como la base teórica del trabajo; que incluye el análisis del desarrollo numérico, las fracciones, su comprensión y su enseñanza. La segunda es más práctica y busca fomentar el aprendizaje de las fracciones a través de sus magnitudes, y en concreto, por medio del diseño del videojuego y la propuesta *“Fracciónate”*.

2. OBJETIVOS

El presente trabajo persigue la consecución de una serie de objetivos, los cuales pueden clasificarse en generales y específicos.

Los objetivos generales que se plantean son:

- Analizar los desafíos inherentes a la enseñanza de fracciones en la etapa de Educación Primaria.
- Investigar y evaluar nuevos métodos y estrategias dirigidas a mejorar la eficacia en la enseñanza de fracciones en la etapa de Educación Primaria.
- Diseñar una experiencia didáctica innovadora basada en la investigación, que promueva una mayor comprensión y rendimiento de los estudiantes de Educación Primaria en el aprendizaje de fracciones.

Estos objetivos generales pueden desglosarse en los siguientes objetivos específicos:

- Explorar las posibles causas que afectan al aprendizaje de las fracciones de los estudiantes de Educación Primaria.
- Identificar las dificultades comunes que presentan los alumnos de Educación Primaria en la enseñanza de fracciones.
- Analizar y reflexionar sobre las posibilidades que ofrece la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico en la enseñanza de fracciones.
- Contribuir al conocimiento existente en lo referente a la enseñanza de fracciones en la etapa de Educación Primaria.
- Elaborar situaciones didácticas que faciliten la comprensión de las fracciones a los estudiantes de Educación Primaria, a través del empleo de la recta numérica y, en concreto, por medio de la creación de un videojuego.
- Promover el empleo de enfoques innovadores y creativos en la enseñanza de las matemáticas a partir del trabajo con las TIC.

3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

3.1. El desarrollo del pensamiento matemático: la importancia de las fracciones

El pensamiento matemático es la habilidad humana innata, que nos capacita para comprender, razonar y reflexionar sobre las diversas relaciones que existen en nuestro entorno desde que nacemos (Ochoa-Martínez & Díaz-Neri, 2021).

Y es que, aunque parezca mentira, desde que somos muy pequeños desarrollamos destrezas vinculadas con este tipo de pensamiento, las cuales nos permiten desenvolvemos, de manera más eficaz, dentro de la sociedad en la que nos encontramos.

Es, por este motivo, que el desarrollo del pensamiento matemático en los niños es ampliamente reconocido como uno de los principales objetivos de cualquier sociedad avanzada, a cuyo logro se destina una considerable cantidad de recursos de todo tipo.

Para alcanzar este objetivo, la enseñanza de las matemáticas se ha centrado, principalmente, en el dominio del número natural, siendo este considerado como la base de todo el aprendizaje posterior. Pero… ¿es realmente el aprendizaje del número natural la base de todo?

A pesar de que con frecuencia tendamos a pensar que sí, hay estudios recientes que demuestran que no es el número natural el que nos permite acceder al resto del conocimiento matemático y, por tanto, del mundo; sino que es el entendimiento de un número más complejo, el número racional, el que juega un papel fundamental en este proceso (Lortie – Forgues et al., 2015).

Es importante destacar, que se considera un constructo de números más complejo por el hecho de que tiene múltiples interpretaciones y diferentes notaciones o formas de expresión, no por la complejidad en su adquisición, enseñanza o aprendizaje (Lamon, 2007).

Según Kieren (1993) y Lamon (2007), las interpretaciones más frecuentes son, principalmente, las cinco siguientes: parte-todo, medida, razón, operador y cociente. Cada una de ellas, se puede representar, a su vez, mediante tres tipos de notación distintos: la notación de fracción, donde se escribe el número racional como el cociente de dos números enteros; la notación decimal, que representa el número racional en forma de decimal finito o periódico; y la notación de porcentaje, que expresa la relación entre dos cantidades o medidas mediante dos números enteros separados por dos puntos (Siegler & Tian, 2022).

Todas las notaciones e interpretaciones mencionadas nos proporcionan, por tanto, distintas formas de representar y comprender los números racionales en diversos contextos, no solo matemáticos, sino también de la vida cotidiana. Y es que, a diferencia de lo que mucha gente cree, la investigación en psicología del desarrollo ha revelado que desde que nacemos poseemos una predisposición innata para comprender y trabajar con estos números (McCrink y Winn, 2007).

Esta capacidad se evidencia en la forma en que los bebés son capaces de distinguir entre diferentes cantidades o incluso, en situaciones cotidianas, cuando los niños son capaces de saber cómo compartir un pastel entre sus amigos o cómo repartir los juguetes de manera equitativa.

Todo ello, se debe a que, como plantean Lortie – Forgues et al. (2015), los números racionales, a pesar de ser percibidos como abstractos y distantes, están, intrínsecamente, integrados en nuestro día a día. Ya sea cocinando, comprando en el supermercado o, incluso, al decir la hora que es, los números racionales, al igual que las matemáticas, están presentes.

No obstante, a pesar de que los tres tipos de notación representen lo mismo, hay uno de ellos, las fracciones, que debido a su poder expresivo destaca por encima del resto; pues, por definición, cada número racional es una razón entre dos números enteros, numerador y denominador, y, por tanto, puede ser representado como una fracción (Kieren, 1993; Lamon, 2007).

Será, entonces, el conocimiento temprano de este número, del número fraccionario, el que prediga, de forma única, el éxito no solo en las matemáticas más avanzadas, sino también, y más importante aún, a nivel académico, personal y profesional (Lortie – Forgues et al., 2015; Siegler et al., 2012).

Sin embargo, a pesar de su importancia, son muchas las teorías del desarrollo numérico que han decidido no incluir las fracciones en sus marcos conceptuales, alegando que su dominio, a diferencia de los naturales, no se adquiere de manera innata, sino que se produce con mayor dificultad en etapas posteriores (Fazio et al., 2014).

Como acabamos de ver, esta afirmación no es del todo cierta, pues, de acuerdo con Siegler et al. (2013), los números racionales y, por tanto, los números fraccionarios, a pesar de requerir una reestructuración del conocimiento numérico, constituyen una parte integral, innata y fundamental del desarrollo humano.

Desafortunadamente, son muchos los niños y adultos que enfrentan, a menudo, dificultades significativas para dominar y comprender el sentido de estos números, siendo este el verdadero motivo por el cual las teorías del desarrollo numérico deciden no incluir la enseñanza de fracciones en sus marcos conceptuales (Lortie – Forgues et al., 2015).

No obstante, debemos ser conscientes de que dichas dificultades no surgen por la forma en la que se adquieren las fracciones, sino por una serie de factores relacionados, principalmente, con las propias características de la aritmética fraccionaria.

3.2. Características intrínsecas a la aritmética de fracciones

De acuerdo con Braithwaite y Siegler (2021), la aritmética de fracciones se caracteriza, fundamentalmente, por su versatilidad, lo que implica su capacidad para expresar cantidades que no son necesariamente enteras, un aspecto crucial en la mayoría de las situaciones de la vida cotidiana.

Sin embargo, como hemos mencionado anteriormente, dicha versatilidad supone que las fracciones se incluyan dentro de un constructo con diversas interpretaciones y formas de expresión, es decir, con unas características específicas y, en cierto modo, complejas.

Desde el punto de vista de Lortie - Forgues et al. (2015), en el caso de las fracciones estas características se concretan, principalmente, en seis aspectos fundamentales: notación con tres partes, inaccesibilidad a las magnitudes, opacidad de los procedimientos aritméticos estándar, complejidad para establecer relaciones entre procedimientos aritméticos, direccionalidad opuesta en la multiplicación y división de fracciones positivas entre cero y uno, y presencia de un gran número de componentes distintos en los procedimientos aritméticos.

Es importante destacar que, como vamos a ver a continuación, cada una de las características mencionadas se encuentra, a su vez, estrechamente vinculada con cada una de las dificultades que experimentan los alumnos a la hora de comprender y dominar el sentido de los números fraccionarios.

Notación fraccionaria con tres partes

Según lo indicado por Lortie - Forgues et al. (2015), la primera de las características y, por tanto, de las dificultades, es la notación fraccionaria con tres partes, lo que quiere decir que todas las fracciones se componen de tres elementos: un numerador, un denominador y una línea divisoria entre ambos.

Esta estructura particular supone un desafío para la comprensión de muchos de los estudiantes, quienes tienden a interpretar erróneamente las fracciones, reconociéndolas como dos números enteros separados por una línea o como una operación aritmética convencional, la división.

Asimismo, el hecho de que la fracción se componga de tres elementos y, en concreto, de dos términos, numerador y denominador, contribuye a que su procesamiento siga siendo complicado incluso después de haber comprendido su notación.

Esto se debe a que al trabajar con fracciones debemos tener en cuenta y recordar los dos términos que la conforman, lo que implica un consumo de recursos cognitivos considerablemente mayor que el trabajar con problemas equivalentes que solo involucran números enteros y, por tanto, un solo elemento (Lortie-Forgues et al., 2015).

Inaccesibilidad a las magnitudes fraccionarias

En relación con las tres partes o elementos que componen las fracciones, nos encontramos con la segunda de las características de la aritmética fraccionaria: la inaccesibilidad a las magnitudes de las fracciones.

Y es que, como señalan Smith et al. (2005), mientras que las magnitudes de los números enteros son inherentemente accesibles y están directamente relacionadas con su valor numérico, el acceso a las magnitudes de las fracciones implica derivarlas de la relación entre sus componentes.

De este modo, observamos que a diferencia de lo que ocurre con los números enteros, las fracciones requieren una comprensión más profunda de la relación proporcional entre sus partes, lo que supone una dificultad añadida y, por tanto, una menor presión, velocidad y capacidad de acceso automático a la representación de la magnitud (Lortie - Forgues et al., 2015)

Además, es importante reconocer que el hecho de acceder a la magnitud de una fracción implica comprender y, en cierto modo, dominar, la división de números enteros, la cual, a menudo, es considerada como la más difícil de las cuatro operaciones aritméticas básicas (Foley & Cawley, 2003).

Opacidad de los procedimientos aritméticos estándar

Los procedimientos aritméticos estándar o las operaciones aritméticas básicas, tales como la suma, la resta, la multiplicación y la división, constituyen pilares fundamentales en la aritmética de fracciones. Sin embargo, a pesar de su importancia, la tercera característica destacada, y, por tanto, dificultad significativa, es la opacidad de estos procesos.

Desde el punto de vista de Lortie - Forgues et al. (2015), dicha opacidad se refiere a que, en el caso de las fracciones, los procesos utilizados y las reglas establecidas no son inmediatamente evidentes o claras para los estudiantes, lo que dificulta, en gran medida, su comprensión.

Este hecho, provoca el surgimiento de una serie de interrogantes que, a menudo, carecen de respuestas obvias para los alumnos, como por qué se necesitan denominadores iguales para sumar o restar fracciones, pero no para multiplicar o dividir; o por qué se puede aplicar el procedimiento estándar de los números enteros al numerador y denominador en la multiplicación, pero no en la suma o resta de fracciones.

Y es que, aunque sí que existen respuestas a estas preguntas, la comprensión de las mismas requiere de conocimientos de álgebra que, generalmente, se enseñan después de las fracciones. Es, por este motivo, que los estudiantes pueden carecer del contexto necesario cuando aprenden dichos procedimientos y, en consecuencia, es posible que nunca lleguen a entender cómo funcionan realmente (Braithwaite & Siegler, 2021).

Complejidad para establecer relaciones entre los procedimientos aritméticos

Teniendo en cuenta la característica anterior, la opacidad de los procedimientos aritméticos estándar, surge la siguiente de las características de la aritmética fraccionaria: la complejidad para establecer relaciones entre los distintos procedimientos.

Como acabamos de ver, en el caso de las fracciones, las reglas y los pasos establecidos a la hora de realizar operaciones aritméticas no son nada intuitivos, ya que, como afirman Siegler y Pyke (2013), en función de la operación a realizar, estos varían considerablemente.

En el caso de la suma y la resta, una vez que se han conseguido denominadores iguales, los numeradores se suman o restan como si fueran números enteros, mientras que el denominador se incluye en la respuesta sin someterlo a ninguna operación adicional.

En el caso de la multiplicación, independientemente de que los denominadores sean o no iguales, tanto los numeradores como los denominadores de ambas fracciones se multiplican entre ellos como si se tratase de un problema de números enteros.

En el caso de la división, se invierte el denominador de una de las fracciones y, una vez invertidos los términos, se procede a multiplicarlos con los de la otra fracción, de manera similar a como se realizaría una multiplicación de fracciones.

Por tanto, debido a que cada operación sigue reglas y pasos diferentes, resulta casi imposible establecer relaciones lógicas entre cada uno de los procedimientos. Esta dificultad representa uno de los principales desafíos para los estudiantes, quienes tienden a generalizar los procedimientos y, por tanto, a cometer errores.

Direccionalidad opuesta en la multiplicación y división

En relación con las dos últimas operaciones aritméticas, la división y la multiplicación, la cuestión se complica aún más, especialmente, al trabajar con fracciones positivas entre cero y uno, donde la direccionalidad en ambas operaciones es opuesta a la de los números enteros, siendo esta la quinta de las características y, por ende, dificultades de la aritmética fraccionaria.

De este modo, a diferencia de lo que ocurre con los números naturales, donde la multiplicación siempre da como resultado una respuesta mayor que cualquiera de los multiplicandos y la división siempre da como resultado una respuesta menor al dividendo, en el caso de las fracciones este patrón no siempre se mantiene, siendo posible multiplicar dos fracciones y obtener, como resultado, un número menor, o de dividir dos fracciones y obtener, como resultado, un número mayor (Lortie - Forgues et al., 2015).

Es, por este motivo, que conocer los efectos de multiplicar y dividir fracciones entre cero y uno, puede resultar un proceso sumamente difícil para los estudiantes, sobre todo, si tenemos en cuenta que a la hora de sumar y restar fracciones de números entre cero y uno el efecto direccional es el mismo que con los números enteros (Fischbein et al., 1985)

Gran número de componentes distintos de los procedimientos aritméticos

Considerando todas las características y dificultades anteriores, podemos decir que, en último lugar, la aritmética de fracciones se caracteriza por presentar un gran número de componentes distintos, en cada uno de los procedimientos aritméticos básicos.

De este modo, observamos como, al trabajar con fracciones, no solo nos basta con saber cuándo mantener o no los denominadores iguales en la respuesta, sino que también es necesario comprender cuándo y cómo invertir los términos en la división de fracciones, y cuándo y cómo es necesario aplicar la operación a un término o ambos.

Sin embargo, como sostiene Lamon (2007), además de habilidad en los cuatro procedimientos aritméticos básicos, el conocimiento de la aritmética fraccionaria requiere, también, el dominio en la manipulación de fracciones equivalentes, en la simplificación de fracciones y en la conversión entre fracciones y números mixtos.

Todo ello, sumado a cada una de las características mencionadas, trae consigo numerosas dificultades para muchos de los estudiantes. No obstante, aunque es cierto que dichas dificultades son intrínsecas a los propios rasgos de la aritmética de fracciones, es decir, que estarían presentes independientemente de las particularidades del sistema educativo y de las necesidades de los alumnos; estudios recientes han demostrado que existen también una serie de factores externos, que influyen, significativamente, en la comprensión y el manejo de las fracciones.

3.3. Factores externos que influyen en la comprensión de fracciones

En las últimas décadas, diferentes investigaciones y evaluaciones, como el informe TIMSS o los informes de la OCDE, han puesto de manifiesto las notables dificultades que enfrentan numerosos estudiantes de todo el mundo en la comprensión y aplicación de las fracciones (Stigler et al., 2012).

En consecuencia, teniendo en cuenta los datos más recientes de la última edición del informe TIMMS, nos encontramos con que, aproximadamente, el 65% de los alumnos de nuestro país no han sido capaces de alcanzar el nivel requerido para comprender y utilizar las fracciones de manera correcta y eficaz.

Es importante destacar, que este resultado se ve afectado, principalmente, por un factor específico: la igualdad de denominadores. De este modo, observamos como en las operaciones de suma y resta de fracciones con denominadores iguales los alumnos obtuvieron resultados más precisos, que en las de suma y resta de fracciones con denominadores diferentes (Lortie – Forgues et al., 2015).

No obstante, lo más relevante de los resultados no fue este dato, sino el poder ver como la dificultad de los estudiantes no radicaba ni en la falta de comprensión del procedimiento adecuado, ni en una concepción equivocada de las características de la aritmética de fracciones, sino que se debía, en la mayoría de los casos, a la elección del procedimiento correcto (Lortie – Forgues et al., 2015).

Este hecho pone de manifiesto como los problemas en la comprensión no son exclusivamente atribuibles a las características intrínsecas de la aritmética de fracciones, sino que se derivan también de otros factores externos, relacionados, principalmente, con los conocimientos previos de los alumnos y con la forma de enseñar de los docentes.

3.3.1. Factores relacionados con los conocimientos previos de los alumnos

Considerando los conocimientos previos de los alumnos, nos encontramos con cuatro factores clave, que según Lortie – Forgues et al. (2015), influyen, significativamente, a la hora de comprender y trabajar con fracciones.

Y es que, cuando comenzamos el proceso de enseñanza aprendizaje de los números fraccionarios, la mayoría de los alumnos presentan una limitada habilidad aritmética en las operaciones con números enteros, una comprensión insuficiente de las operaciones aritméticas básicas, unas habilidades cognitivas poco desarrolladas y un conocimiento limitado de las magnitudes de las fracciones, aspectos que abordaremos, más en profundidad, a continuación (Siegler & Pyke, 2013; Lortie – Forgues et al., 2015).

- *Habilidad aritmética limitada en las operaciones con números enteros.* Todos los procedimientos aritméticos con fracciones se basan en cálculos con números enteros, por lo que un mal dominio en dichos números puede llevar a los alumnos a operar mal con ellos y, por tanto, a cometer errores a la hora de trabajar y realizar operaciones con fracciones.
- *Comprensión conceptual escasa de las operaciones aritméticas básicas*. La escasa comprensión y dominio de las operaciones aritméticas básicas, por parte de los alumnos, dificulta el entendimiento de algunos de los conceptos principales relacionados con las fracciones, como son la simplificación, la comparación y la conversión.
- *Habilidades cognitivas generales poco desarrolladas.* La aritmética de fracciones supone una carga de recursos cognitivos considerable, ya que implica interpretar correctamente su notación. No obstante, en la mayoría de los casos, cuando comenzamos a trabajar con fracciones, los alumnos aún no han desarrollado lo suficiente estas habilidades, no siendo capaces de considerar los numeradores y denominadores como un solo número en vez de como dos números enteros separados por una línea.

- *Conocimiento limitado de las magnitudes de fracciones individuales.* Tener una representación precisa de las magnitudes de las fracciones resulta fundamental para poder dominar la aritmética fraccionaria, por lo que el conocimiento limitado de las magnitudes de las fracciones que presentan los estudiantes al comenzar a trabajar con ellas dificulta su capacidad de verificar y determinar la lógica de sus respuestas.

Desde el punto de vista de Ni y Zhou (2005), los cuatro factores mencionados se encuentran estrechamente relacionados, con el principal causante de las dificultades que presentan los alumnos a la hora de comprender las fracciones, en relación con sus conocimientos previos: el sesgo del número natural.

El sesgo del número natural, también conocido como Natural Number Bias, hace referencia al uso o aplicación del conocimiento de los números naturales a la hora de realizar operaciones o cálculos con los números racionales, lo que incluye, por tanto, el trabajo con fracciones (Ni & Zhou, 2005).

Este sesgo se debe a que, durante los primeros años de escolaridad, los niños adquieren y establecen conocimientos basados en los números enteros. De este modo, observamos como, cuando se introducen los conceptos de los números fraccionarios, los alumnos tienden a aplicar los principios y reglas de los números enteros, sin darse cuenta de que, en la mayoría de los casos, estos no son aplicables a los números racionales y, por ende, a las fracciones (DeWolf & Vosniadou, 2015).

Como señalan Obersteiner et al. (2016), este fenómeno ha sido estudiado en tres dominios diferentes: la magnitud, las operaciones aritméticas y la densidad de los números racionales.

El primero de los dominios o aspectos analizados es la magnitud, que, en el contexto numérico, hace referencia al valor relativo de un número en relación con otros, es decir, a su posición en la recta numérica.

En el caso de las fracciones, las dificultades que enfrentan los alumnos en la comprensión de sus magnitudes se deben a que, en vez de interpretarlas como una única cantidad, las interpretan como dos números enteros separados por una línea (Braithwaite & Siegler, 2021; Siegler & Pyke 2013).

Por esta razón, es común que muchos de los estudiantes e, incluso, algunos adultos, tiendan a suponer, erróneamente, que el valor numérico de una fracción aumenta cuando el numerador, el denominador o ambos términos aumentan, siendo esto completamente falso (Obersteiner et al., 2016).

De manera similar, surgen las dificultades en el segundo de los aspectos analizados: las operaciones aritméticas con fracciones. En este caso, los estudiantes intentan aplicar los mismos procedimientos y normas que utilizan en las operaciones con números enteros, al operar con números racionales, siendo estos correctos, únicamente, en algunos de los casos (Ni & Zhou, 2005).

Esta falta de distinción entre los diferentes tipos de operaciones y los métodos apropiados para cada uno de ellos, puede llevar a errores y confusiones en el proceso de resolver problemas de aritmética fraccionaria, siendo necesario que los estudiantes comprendan las particularidades de las operaciones con fracciones y así puedan emplear las estrategias adecuadas para cada situación.

En último lugar, mencionar el tercer aspecto analizado, que es la densidad del conjunto de los números racionales, el cual, a diferencia de los números naturales, se caracteriza por ser extremadamente amplio, ya que, entre dos números racionales cualesquiera, existen infinitos números (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

A pesar de ello, debido a la generalización que hacen los estudiantes de las características de los números enteros, la mayoría tiende a pensar que, entre dos números racionales consecutivos, como 1/3 y 2/3, no hay ningún otro número, o que entre 1/4 y 3/4, está, únicamente, el 2/4 (DeWolf & Vosniadou, 2015); lo que refleja su falta de comprensión sobre la densidad de los números racionales.

Esta falta de comprensión da lugar a que muchos alumnos dependan de patrones y regularidades aprendidos cuando trabajan con fracciones, lo que los lleva a aplicar estrategias que son correctas en ciertos problemas, a otros en los que no lo son (Siegler & Lortie – Forgues, 2017).

Observamos, por tanto, como el principal problema que enfrentan los estudiantes a la hora de comprender y aprender fracciones radica en que dicho aprendizaje va en contra de sus conocimientos previos y, en concreto, de su base de conocimiento hasta el momento, que son los números naturales.

3.3.2. Factores relacionados con la forma de enseñar de los docentes

En un escenario de enseñanza ideal, los alumnos serían capaces de generalizar adecuadamente sus conocimientos, aplicándolos no solo a los tipos de problemas que encuentran con frecuencia, sino también a aquellos menos comunes. Sin embargo, esta situación no es la más frecuente, y menos aún, en el ámbito de la aritmética fraccionaria (González – Forte et al., 2019).

Cuando hablamos de fracciones, podemos ver como esta dificultad en la capacidad de generalización está estrechamente relacionada con la forma de enseñar de los docentes, pues los conocimientos previos que tienen los alumnos y la forma en la que los han adquirido dependen, en gran medida, de la escuela y, por tanto, de aquello que les han enseñado los maestros.

De acuerdo con Lortie – Forgues et al. (2015), este hecho se debe a que la calidad en la enseñanza de las fracciones por parte de los docentes es, en la mayoría de los casos, de baja calidad, lo que se debe, principalmente, a los siguientes cuatro factores:

- *Comprensión limitada de los números racionales por parte de los profesores.* Los docentes enfrentan dificultades a la hora de enseñar fracciones debido a la comprensión insuficiente que tienen de las mismas, lo que limita su capacidad para explicar los conceptos de manera efectiva y significativa para los alumnos.
- *Énfasis de la enseñanza en la memorización*. La educación matemática se ha centrado, tradicionalmente, en la memorización de procedimientos, dejando de lado, en la mayoría de los casos, la comprensión significativa de los mismos. Esta tendencia ha dado lugar a que los estudiantes presenten una comprensión superficial de las fracciones, dificultando su aplicación en diversos contextos.
- *Instrucción mínima en división de fracciones.* Con frecuencia, la división de fracciones recibe menos atención que otras operaciones aritméticas, lo que

provoca una falta de práctica y comprensión de las mismas por parte de los estudiantes. Este hecho les puede generar dificultades a la hora de enfrentarse a problemas que involucran la división de fracciones.

- *Malas explicaciones de los libros de texto.* Los libros de texto presentan, a menudo, explicaciones poco claras o insuficientes sobre el manejo de fracciones. Además, estas se centran, principalmente, en el concepto parte-todo, lo que dificulta tanto la aplicación, como la enseñanza de los conceptos presentados.

Por todo ello, autores como Braithwaite y Siegler (2021), opinan que la enseñanza actual de los números racionales, y más concretamente de las fracciones, debe abandonar el enfoque memorístico de los procedimientos, la diferencia de instrucción entre operaciones y la representación parte-todo.

En su lugar, abogan por un enfoque centrado en la comprensión, la instrucción equitativa de todos los procedimientos y la importancia de la representación de la magnitud. Por tanto, de acuerdo con Siegler et al. (2011), ¿qué mejor manera de lograrlo que empleando la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico como base central del aprendizaje?

3.4. Teoría Integrada del Desarrollo Numérico

A diferencia de lo que las destacadas teorías del desarrollo numérico habían planteado hasta la fecha, la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico, propuesta por Siegler, Thompson y Schneider en el año 2011, y completada, por Siegler y Lortie - Forgues en el año 2014, así como por otros artículos posteriores, sostiene que dicho desarrollo debe fundamentarse en las características comunes a todos los tipos de números reales y, especialmente, en la representación de su magnitud.

No obstante, aunque es cierto que todas las propuestas convergen en esta idea central, siendo las siguientes una expansión de la primera, para poder comprender plenamente el alcance y las contribuciones de esta teoría en el campo del desarrollo numérico, es necesario abordar los detalles planteados en cada una de ellas.

3.4.1. *Teoría Integrada del Desarrollo Numérico propuesta por Siegler, Thompson y Schneider en el año 2011*

La Teoría Integrada del Desarrollo Numérico, presentada por Siegler, Thompson y Schneider en el año 2011, se basa en un estudio realizado con cuarenta y ocho estudiantes, veinticuatro de sexto y veinticuatro de octavo, procedentes, todos ellos, de dos distritos de escuelas públicas situadas cerca de Pittsburgh.

El propósito de esta investigación era examinar cómo se producía el desarrollo numérico en los niños, y los resultados obtenidos fueron realmente reveladores, pues no solo desafiaron las ideas propuestas hasta la fecha, sino que cambiaron el paradigma del desarrollo numérico de la época (Siegler et al., 2011).

Hasta ese momento, todas las teorías que examinaban cómo se producía el desarrollo numérico en los niños se habían enfocado, exclusivamente, en el conocimiento de los números enteros, considerándolos la base sobre la cual desarrollar todo el conocimiento numérico posterior y, por tanto, relegando el conocimiento de otros tipos de números a un segundo plano (Leslie et al., 2008).

En consecuencia, nos encontramos con multitud de teorías, como la de los dominios privilegiados o los enfoques de cambio evolutivo y conceptual que, aunque difieren en muchos aspectos, comparten un punto en común. Todas ellas, afirman que la adquisición de los números enteros es natural y temprana, mientras que la del resto de números es compleja y posterior.

De acuerdo con Geary (2006) y Wynn (2002), es por este motivo, por el que cuando estas teorías tratan de abordar la comprensión de los números racionales y, en concreto, de las fracciones, lo hacen centrándose en las diferencias que hay entre su adquisición y la de los enteros, analizando como la comprensión previa de estos números, de los enteros, puede obstaculizar la comprensión de los demás.

Es, por tanto, la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico, la que marca un punto de inflexión en esta concepción, ya que, aunque reconoce y comprende estas dificultades y sus consecuencias, no se detiene en ellas, pues considera que no son el único factor determinante en el desarrollo numérico.

De este modo, observamos como, a diferencia de las teorías de desarrollo descritas anteriormente, Siegler, Thompson y Schneider optan por dejar a un lado las diferencias en la adquisición de los distintos tipos de números, y pasan a centrarse en las similitudes comunes a todos ellos y, en concreto, en la representación de magnitudes.

Y es que, como indica Siegler (2016), tanto los números enteros, como los números fraccionarios, decimales y negativos comparten la propiedad de poder representar magnitudes, las cuales se pueden ubicar, a su vez, en rectas numéricas.

Partiendo de esta idea, la influyente Teoría Integrada del Desarrollo Numérico formulada por Siegler et al. (2011), sostiene que es el crecimiento del conocimiento de esta magnitud la base principal del desarrollo numérico; que pasa a ser considerado como el proceso mediante el cual una persona llega a comprender y reconocer, que todos los números reales tienen magnitudes, que pueden ser ordenadas y ubicadas en rectas numéricas específicas.

No obstante, para lograr un desarrollo numérico adecuado, no basta solo con comprender las similitudes que hay entre los distintos tipos de números, sino que es necesario entender, también, las diferencias que los distinguen (Siegler et al., 2011). Y es que, muchas de las propiedades que caracterizan a los números naturales no son compartidas por los números en general.

Por este motivo, los niños necesitan aprender que cada magnitud de un número natural se representa con un único símbolo, mientras que la magnitud de una fracción no; o que la multiplicación de dos números naturales siempre da como resultado un número mayor o igual que cualquiera de los operandos, mientras que la multiplicación de dos fracciones no tiene por qué.

Teniendo en cuenta todo esto, Siegler et al. (2011) proponen un cambio gradual en nuestra forma de comprender los números, pasando de una caracterización inicial basada en ciertas propiedades específicas, que es como se venía haciendo hasta el momento, a una distinción más precisa, centrada en la diferenciación entre aquellas características que son comunes a todos los números y aquellas que son exclusivas de ciertos tipos de números, como los números naturales.

Es, por tanto, en este momento, cuando entran en juego las fracciones y su importancia, ya que, con el surgimiento de esta teoría, dejan de ser consideradas un componente secundario en el desarrollo numérico, y se convierten en la primera oportunidad que tienen los estudiantes de comprender que las características de los números naturales no definen, completamente, el concepto de número.

Por consiguiente, debido a la importancia que Siegler et al. (2011) atribuyen a las fracciones en el desarrollo numérico de los niños, la Teoría Integrada postula, en un principio, las dos siguientes predicciones:

a. Si las fracciones son fundamentales para la comprensión matemática en su totalidad, entonces entender las magnitudes de las fracciones debería estar estrechamente vinculado con dominar la aritmética de fracciones.

b. Si entender las magnitudes es esencial para comprender las fracciones, entonces la comprensión de las magnitudes de las fracciones debería estar estrechamente vinculada con el conocimiento matemático general.

La ausencia de relaciones evidentes entre las ideas planteadas subraya la necesidad de respaldar estas predicciones con evidencia empírica. Para ello, los autores de la teoría optan, en un primer momento, por exponer una serie de hallazgos y estudios que sustentan estas afirmaciones.

En relación con la primera de ellas, señalan que, aunque muchos docentes sugieren que la mayoría de los estudiantes memorizan los algoritmos aritméticos de fracciones sin comprender sus magnitudes, de acuerdo con Brainerd et al. (1991), es crucial reconocer que la memorización sin comprensión tiende a ser imprecisa a corto plazo y, aún más errónea, a largo plazo.

De este modo, con frecuencia, se observa cómo los procedimientos aritméticos de fracciones parecen ser recordados con mayor asiduidad y precisión por los estudiantes que comprenden las magnitudes de las fracciones utilizadas que, por aquellos que, por el contrario, no las comprenden.

Este hecho se debe a que, gracias a la precisión en las representaciones de la magnitud de la fracción los alumnos pueden estimar los resultados de las operaciones aritméticas y, por tanto, descartar aquellas soluciones que sean imposibles. Como consecuencia, rechazarán los procedimientos que producen resultados inviables y buscarán nuevos procedimientos que generen respuestas válidas.

Otro de los argumentos que emplean los autores de la teoría integrada para argumentar la veracidad de la primera de las predicciones, se basa en el trabajo realizado por Booth y Siegler (2008), quienes afirman que la competencia en la aritmética de números enteros está positivamente relacionada con la comprensión de las magnitudes de estos números.

Por consiguiente, Siegler et al. (2011) consideran que, si las magnitudes son igual de importantes en el contexto de las fracciones, como sugiere su teoría, existirían, entonces, relaciones análogas entre el conocimiento de las magnitudes y las habilidades aritméticas de ambos tipos de números.

Siguiendo esta misma línea, a la hora de respaldar la segunda de las predicciones se basan, principalmente, en los estudios e investigaciones llevadas a cabo por Booth y Siegler (2008), por Siegler y Ramani (2009), por Geary et al. (2008), y por Thompson y Siegler (2010).

En base a los resultados obtenidos por ellos, destacan que, aunque es cierto que el desarrollo numérico abarca múltiples habilidades más allá de la comprensión de las magnitudes, se ha demostrado que esta comprensión resulta fundamental, tanto para el desarrollo de la aritmética, la memoria numérica y el desempeño en evaluaciones matemáticas, como para entender la esencia de los números en su totalidad (Geary et al., 2008).

Una vez expuestos los diversos argumentos que respaldan cada una de las predicciones planteadas al inicio de la teoría, Siegler et al. (2011) optan por realizar un estudio detallado con el fin de validar, de manera más efectiva, la veracidad de cada una de ellas.

Como hemos mencionado anteriormente, el estudio fue llevado a cabo con cuarenta y ocho estudiantes, veinticuatro de sexto y veinticuatro de octavo, procedentes, todos ellos, de dos distritos de escuelas públicas, situadas cerca de Pittsburgh.

Dado que el objetivo era examinar cómo se producía el desarrollo numérico en los niños y, en concreto, la representación de la magnitud de fracciones, las pruebas estuvieron destinadas a la estimación en recta numérica, una tarea que ya había demostrado ser eficaz en el estudio del desarrollo de las representaciones de magnitud de números enteros.

Es importante destacar que, tras la ejecución de las pruebas, Siegler et al. (2011) analizaron, detalladamente, tres aspectos específicos: la precisión en las estimaciones realizadas, la linealidad en la representación de la magnitud numérica en la recta, y las estrategias utilizadas por los participantes durante la realización de la tarea.

Finalmente, en base a los resultados obtenidos en cada uno de los aspectos considerados, formularon las seis siguientes predicciones que, de acuerdo con Siegler et al. (2011), constituyen las conclusiones finales del estudio.

- La comprensión de las magnitudes de las fracciones seguirá siendo limitada en sexto y octavo grado, a pesar de la instrucción prolongada en cursos inferiores.
- La comprensión de las magnitudes de las fracciones aumentará, entre sexto y octavo grado, debido a la resolución de problemas de proporciones y porcentajes.
- La transición logarítmica con las fracciones no será lineal, ya que la frecuencia de encuentro de fracciones, difícilmente se relaciona con su comprensión en el rango 0-1.
- La calidad de las estrategias utilizadas para resolver problemas de fracciones y aritmética por parte de los estudiantes influirá en su precisión y velocidad.
- Las diferencias individuales en el conocimiento de las magnitudes de las fracciones se reflejarán en el éxito en la resolución de problemas aritméticos de fracciones.
- Las discrepancias individuales en la comprensión de las magnitudes de las fracciones estarán relacionadas con las puntuaciones generales de las pruebas de rendimiento matemático.

Como podemos observar, las dos primeras predicciones se fundamentan en investigaciones previas, que ponen de manifiesto la escasa comprensión de las fracciones por parte de los estudiantes; mientras que las cuatro últimas reflejan la suposición actual de que la comprensión de las magnitudes de las fracciones está intrínsecamente ligada a otros aspectos del conocimiento, tanto fraccional, como matemático y general.

Son estas últimas cuatro predicciones, por tanto, algunas de las razones fundamentales por las que, tras su publicación en el año 2011, investigadores y expertos, pertenecientes a distintos campos de estudio e investigación, comenzaron a interesarse por la teoría y sus implicaciones, especialmente, dentro del contexto educativo.

3.4.2. Ampliaciones de la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico

Tras el creciente interés surgido en torno a la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico presentada en el año 2011, uno de sus autores originales, Robert Siegler, opta por continuar su investigación. En esta ocasión, se une a un nuevo colaborador, Lortie - Forgues, junto a quien, en el año 2014, propondrá una ampliación de la teoría original, actualizando las conclusiones expuestas hasta el momento.

Como ya hemos visto en el apartado anterior, la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico propuesta por Siegler et al. (2011), plantea que dicho desarrollo es la progresiva ampliación del conjunto de números, cuyas magnitudes se pueden ordenar y ubicar en rectas numéricas.

Contrario a lo que podríamos suponer, el origen de las rectas numéricas se sitúa mucho antes de lo que solemos tender a pensar. De hecho, su uso se remonta a culturas tanto occidentales como del Lejano Oriente, donde solía estar orientada horizontalmente, ubicando los números más pequeños a la izquierda y los más grandes a la derecha (Dehaene, 2011).

Diferentes investigaciones, como las realizadas por Rugani et al. (2015), han demostrado que esta disposición espacial no es exclusiva de los seres humanos. Y es que, después de acostumbrarse a una cantidad específica de puntos, los polluelos recién nacidos, al igual que los bebés, son capaces de vincular, de forma espontánea, grupos mayores de puntos con el lado derecho y grupos menores, con el lado izquierdo. Se puede concluir, por tanto, que, al igual que pasa con los humanos, en el caso de los polluelos, los mapeos numérico-espaciales reflejan el contexto numérico.

Como señalan Moyer y Landauer (1967), Galton (1880), y Platt y Johnson (1971), esta afirmación se fundamenta en una gran variedad de campos de estudio, como la investigación sobre cognición en adultos, la psicometría y el comportamiento animal; lo que le otorga una amplia base de conocimiento, que es respaldada, a su vez, por una variedad de evidencias, entre las que destacan el efecto distancia y la SNARC efecto.

El efecto distancia establece que cuanto mayor sea la separación entre dos números situados en una recta numérica, más rápida y precisa será la comparación de sus magnitudes (Moyer y Landauer, 1967).

La SNARC efecto, por su parte, demuestra como las personas tienden a ser más rápidas, cuando indican "menor" pulsando un botón ubicado a su izquierda y "mayor" pulsando un botón ubicado a su derecha, que cuando se invierte la ubicación de los pulsadores (Wood et al., 2008).

De acuerdo con Siegler et al. (2011), es la representación de la recta numérica, por tanto, la que permite ampliar el rango de edades y tipos de números que pueden abordarse en una única teoría del desarrollo numérico; siendo este uno de los motivos por los que la influyente Teoría Integrada del Desarrollo Numérico inicia su propuesta destacando, que las magnitudes de todos los números reales pueden ser representadas en una recta numérica mental.

Desde esta perspectiva, son Siegler y Lortie – Forgues (2014), quienes ofrecen un análisis más detallado, al destacar que dicho desarrollo en el conocimiento de las representaciones numéricas implica, a su vez, cuatro logros principales: expresar, cada vez con mayor precisión, magnitudes de números no simbólicos; relacionar representaciones numéricas no simbólicas con simbólicas; ampliar la comprensión hacia números enteros de magnitudes cada vez mayores; y ampliar la comprensión a todos los números racionales.

Aspectos, todos ellos, que son analizados en profundidad, por ambos autores, con el objetivo de demostrar cómo la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico proporciona coherencia a los numerosos detalles presentes en su descripción.

Teniendo en cuenta los resultados, es Siegler (2016), quien dos años después, revela como, según la versión actual de la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico, además de la representación de la magnitud, existen otros dos procesos, que desempeñan roles considerablemente significativos en el desarrollo numérico: el proceso de asociación y el proceso de analogía.

En relación con el primero de ellos, se considera que, al vincular los símbolos numéricos con diferentes conjuntos de objetos, así como con experiencias sensoriales, tales que gestos y sonidos, los estudiantes pueden comprender mejor el significado y la magnitud de los números enteros pequeños (Siegler, 2016).

Siguiendo esta misma línea, se argumenta que la analogía y, en concreto, la comparación de patrones mentales es fundamental para ampliar el conocimiento numérico desde las magnitudes de números enteros más pequeños, hacia las magnitudes de aquellos números con los que tenemos menos experiencia (Siegler, 2016).

Por este motivo, a pesar de la importancia de ambos procesos, Siegler (2016) decide enfocar su atención en evidenciar la importancia de la analogía en la ampliación del conocimiento numérico, destacando, en todo momento, su papel en la transición de los números más pequeños a los números más grandes e inusuales.

En definitiva, considerando todos los hallazgos encontrados hasta la fecha, la actual Teoría Integrada del Desarrollo Numérico, que no solo abarca las predicciones planteadas en la versión original, sino también las actualizaciones posteriores, se puede resumir en los siguientes seis puntos (Siegler, 2016):

- Todos los números racionales se representan en una línea numérica mental, que empieza con los números enteros más pequeños y se extiende, progresivamente, hacia la derecha para incluir números más grandes, hacia la izquierda para abarcar los negativos, y en medio para incorporar las fracciones y los decimales.

- Dentro de rangos particulares de números enteros, como, por ejemplo, 0–10, 0–100 o 0–1000, las representaciones de las magnitudes pasan de una distribución, aproximadamente logarítmica, a una distribución lineal. Además, esta transición sucede más pronto en los rangos numéricos pequeños que en los grandes, coincidiendo, a su vez, con la experiencia adquirida por los niños en dichos rangos.

- El desarrollo en el entendimiento de los números racionales supone comprender que las características y propiedades de los enteros no se aplican a otros tipos de números, a pesar de que todos los números reales tienen magnitudes y pueden ser representados y, por tanto, ordenados, en una recta numérica.

- En el desarrollo del conocimiento de la magnitud y su representación intervienen varios procesos, sin embargo, hay dos de ellos que, sin lugar a duda, destacan por encima del resto: el proceso de asociación y el proceso de analogía.

- Dado que el entendimiento de la magnitud es crucial para el desarrollo, la comprensión de las magnitudes de los números enteros y racionales debe estar estrechamente vinculada con el conocimiento matemático general, incluidos los resultados en pruebas de aritmética y demás aspectos matemáticos.

- Dado que la comprensión de la magnitud es fundamental para el desarrollo, las actuaciones destinadas a mejorar este conocimiento y, en concreto, el entendimiento de las magnitudes de los números enteros y racionales, deberían tener consecuencias significativamente positivas en diversos aspectos matemáticos.

Estas son, por tanto, algunas de las razones por las que la actual Teoría del Desarrollo Numérico concede tanta importancia a la adquisición de conocimientos sobre las magnitudes de los números, ya que considera que, para poder unificar el desarrollo numérico de todos los números reales, dicha comprensión no solo es necesaria, sino también fundamental.

Como consecuencia, tanto los números racionales como los enteros pasan a ser considerados componentes igualmente importantes del proceso de desarrollo numérico. De ahí, que las fracciones dejen de estar relegadas a un segundo plano y se conviertan en la primera oportunidad que tienen los alumnos de comprender que las propiedades de los números naturales no definen el concepto de número en su totalidad; aprendizaje que, como ya hemos visto a lo largo de este trabajo, aunque no es sencillo, debe ser priorizado, tanto en la etapa de educación primaria, como en la etapa de educación secundaria (Torbeyns et al., 2015).

Para lograrlo, Siegler (2016) propone un enfoque centrado en la enseñanza de magnitudes mediante el empleo de su representación en la recta numérica, una estrategia educativa y visualmente efectiva, para plasmar la relación entre los diferentes tipos de números de un modo concreto y visual.

3.5. Ventajas de emplear las rectas numéricas en la enseñanza de fracciones en la etapa de Educación Primaria

De acuerdo con Holloway y Ansari (2009), podemos definir la recta numérica, también llamada recta real, como una estructura geométrica unidimensional, es decir, una línea recta, formada por diferentes intervalos y puntos, que refleja la disposición ordenada de todos los números reales.

Generalmente, se divide en dos partes iguales y simétricas respecto al origen, que, por consenso, se considera el número cero. Esta disposición permite representar los números como puntos equidistantes, facilitando la localización, comparación y realización de operaciones aritméticas.

Por consiguiente, podemos decir que, en contraposición al enfoque tradicional de entender las fracciones como partes de un todo, la recta numérica se revela como una herramienta fundamental. Y es que, como sostiene Siegler (2016), el hecho de que puedan ser utilizadas para representar cualquier tipo de número real, ya sea grande o pequeño; positivo o negativo; entero o fraccionario; racional o irracional, las convierte en un recurso sumamente versátil para la enseñanza, tanto de fracciones, como de conceptos matemáticos en general.

Citando a Fazio y Siegler (2011), es esta versatilidad, la que, en el contexto de las fracciones, permite a los estudiantes visualizar cualquier tipo de fracción como una magnitud específica, lo que no solo facilita la comprensión de su relación con otros números, sino también su ubicación dentro del espectro numérico.

Y es que, al colocar las fracciones en la recta numérica, las relaciones de orden se vuelven más visibles, simplificando, tanto el reconocimiento de fracciones mayores o menores, como su comparación. Todo ello, conduce a la identificación de fracciones equivalentes y proporcionales, es decir, aquellas que, aunque se escriben de manera diferente, su posición en la recta es igual.

Además, gracias a la continuidad de las rectas numéricas, los alumnos son capaces de comprender la densidad de fracciones existentes dentro del conjunto de los números reales, al evidenciar, de un modo más sencillo y visual, que entre dos números cualesquiera existen infinitas fracciones (Siegler et al., 2011).

Son la continuidad y versatilidad de las rectas numéricas, por tanto, las que permiten a los niños visualizar y comprender, de manera más tangible, conceptos como el orden, la comparación, y la identificación de equivalencias o proporcionalidades; conocimientos, todos ellos, fundamentales para la realización de operaciones aritméticas de manera efectiva.

Como consecuencia, la utilidad de la recta numérica en la enseñanza de la adición y sustracción de fracciones se hace evidente. Teniendo en cuenta las palabras de Geary et al. (2008), gracias a su uso, los estudiantes pueden visualizar cómo combinar fracciones sumando segmentos, lo que, sin lugar a duda, facilita su comprensión del proceso.

En base a todo lo mencionado, Rugani et al. (2015) destacan la eficacia de las rectas numéricas como un recurso que estimula el desarrollo del pensamiento espacial, ayudando a los estudiantes a conceptualizar y manipular conceptos matemáticos en un espacio bidimensional.

Esta actividad implica, a su vez, una participación activa por parte de los alumnos, fomentando un enfoque práctico y experiencial, que puede mejorar su retención y comprensión de los conocimientos adquiridos.

Por tanto, aunque es cierto que la recta numérica se utiliza con menos frecuencia, en comparación con habilidades como el conteo y la aritmética, considerando todos los aspectos mencionados, podemos afirmar que su empleo en la enseñanza de fracciones, durante la etapa de Educación Primaria, trae consigo numerosas ventajas y beneficios (Fazio & Siegler, 2011).

Sin embargo, como indican Braithwaite y Siegler (2021), son pocos los docentes y escuelas que, en la actualidad, utilizan la recta numérica para enseñar fracciones, lo que se debe, en gran medida, al desconocimiento de estrategias para su puesta en práctica.

3.6. El uso de la recta numérica para enseñar fracciones en Educación Primaria: estrategias para su puesta en práctica

La enseñanza de fracciones a través del empleo de la recta numérica en la etapa de Educación Primaria vendrá determinada por muy diversos factores, como son la formación del docente sobre el tema; las estrategias seleccionadas para trabajarlo; las características, tanto de los alumnos, como del aula, del centro educativo y de su entorno; los recursos disponibles; etc.

Se trata, por tanto, de una tarea muy compleja que, a pesar de poder ser llevada a cabo por múltiples vías, necesita de un proceso estructurado y paulatino. De este modo, autores como Siegler et al. (2011), detallan una serie de estrategias y consideraciones dirigidas a orientar dicha enseñanza. Todas ellas, se basan en las propuestas planteadas en la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico y están relacionadas, principalmente, con tres cuestiones clave: qué contenidos enseñar, a qué edades y de qué manera.

Cuando se trata de determinar qué contenidos enseñar y a qué edades hacerlo, es pertinente referirse al trabajo realizado por Siegler y Braithwaite (2017), quienes proporcionan una representación, visual y clara, de las edades específicas a las que los estudiantes pueden comenzar a adquirir una comprensión adecuada sobre las magnitudes de los diferentes tipos de números (Figura 1, Anexo A, pág. 67[1]).

De acuerdo con la propuesta, es alrededor de los ocho años, es decir, en el tercer curso de educación primaria, cuando es recomendable empezar a introducir las magnitudes de las

[1] Para hacer la lectura más fluida se han incorporado hipervínculos para pasar del texto a los anexos y viceversa.

fracciones y, en concreto, de aquellas que se sitúan entre cero y uno, conocidas, también, bajo el nombre de fracciones propias.

Dentro del conjunto de este tipo de fracciones, Siegler y Braithwaite (2017) consideran que es crucial comenzar con aquellas que son más comunes y relevantes en la vida cotidiana de los niños, como pueden ser 1/2, 1/4 o 3/4. Estas fracciones están presentes en multitud de actividades del día a día, lo que permite a los estudiantes establecer conexiones directas con situaciones de su entorno y facilita, en gran medida, su comprensión.

Posteriormente, una vez afianzado el conocimiento sobre las fracciones más comunes, es fundamental y necesario introducir, de manera gradual, fracciones menos comunes, las cuales, a pesar de ser menos frecuentes y, por lo tanto, más desafiantes, son igual de importantes, desde el punto de vista matemático.

De este modo, no será hasta alrededor de los diez u once años, después de haber trabajado las fracciones propias, cuando, según Siegler y Braithwaite (2017), se considerará apropiado empezar a abordar las fracciones mayores de uno, también conocidas como fracciones impropias (Figura 1, Anexo A, pág. 68).

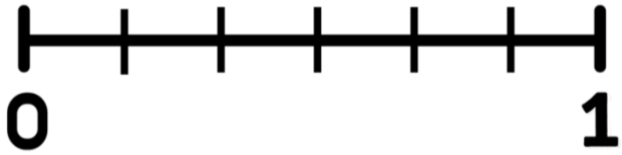
Una vez abordados los interrogantes de cuándo y por dónde empezar, es el momento de responder una cuestión fundamental: cómo hacerlo. Según Fazio y Siegler (2011), el enfoque inicial debe centrarse en ilustrar el concepto de densidad que caracteriza el conjunto de las fracciones, un aspecto que, como ya hemos visto anteriormente, lo diferencia de los números enteros.

Una de las actividades que proponen para ello, es dividir una recta numérica que vaya del cero al uno, en partes iguales, primero en dos, luego en cuatro, en ocho, y así sucesivamente. Este enfoque gradual permite a los estudiantes visualizar cómo los intervalos pueden fraccionarse en segmentos cada vez más pequeños, lo que les ayudará a comprender que entre dos fracciones cualesquiera existen infinitas otras.

Siguiendo las recomendaciones de Fazio y Siegler (2011), es importante destacar, que todas las actividades y tareas deben realizarse utilizando rectas numéricas con subdivisiones claramente indicadas, tal y como se muestra en la figura 2.

Figura 2

Recta numérica de cero a uno con subdivisiones



Nota. La figura representa el ejemplo de una recta numérica de cero a uno subdividida en seis partes iguales.

Esta medida adicional tiene como objetivo superar las posibles dificultades que los estudiantes puedan enfrentar a la hora de dividir, adecuadamente, la recta numérica. No obstante, en la medida que vayan progresando, este apoyo puede ser sustituido, gradualmente, por el empleo de rectas numéricas con etiquetas mínimas, donde solo se muestren las marcas finales o solo a partir de la mitad, incluyendo este punto como referencia.

Tras abordar el concepto de densidad, Lamon (2020) propone continuar la enseñanza con la realización de actividades destinadas a la identificación y representación de fracciones en la recta numérica; dos tareas tan necesarias como fundamentales a la hora de adquirir la magnitud de un número.

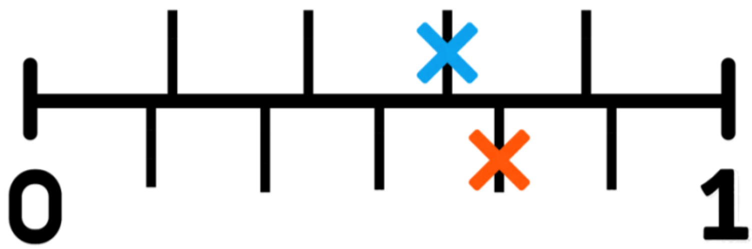
Una vez que los alumnos hayan conseguido las habilidades necesarias para ubicar y reconocer fracciones, se introducirá la comparación de las mismas. Teniendo en cuenta las consideraciones de Fazio y Siegler (2011), se comenzará, preferiblemente, por aquellas fracciones que comparten denominadores; abordando, en segundo lugar, aquellas que tienen denominadores diferentes.

Esta secuenciación se debe a que, al comparar fracciones con el mismo denominador, solo es necesario el empleo de una recta numérica con marcas específicas; mientras que, al comparar fracciones con denominadores diferentes, las divisiones también varían, lo que puede dificultar la comparación directa.

De este modo, con el fin de facilitar su comparación, a menudo, se utilizan dos rectas numéricas diferentes o una sola en la que se marcan las divisiones de una fracción por encima y las de la otra por debajo, tal y como se ilustra en la figura 3.

Figura 3

Comparación de fracciones con distinto denominado empleando una recta numérica de cero hasta uno con subdivisiones



Nota. La figura representa un ejemplo de cómo comprar dos fracciones con distinto denominador, en este caso 3/5 y 4/6, empleando el apoyo de marcar las divisiones de una de las fracciones por encima de la recta y las de la otra por debajo.

Como podemos observar, al ubicar las distintas fracciones en la recta numérica, los estudiantes pueden comparar sus magnitudes de manera más sencilla y visual, lo que les permite, a su vez, identificar fracciones equivalentes de manera clara y directa, En consecuencia, es esta tarea, la identificación de equivalencias, la siguiente que Fazio y Siegler (2011) proponen para secuenciar la enseñanza de fracciones.

En relación con la equivalencia, es muy importante que, a la hora de ubicar fracciones para compararlas, los estudiantes consideren, tanto aquellas con posiciones marcadas, como aquellas cuyo denominador es un múltiplo de la fracción señalada en la recta (Fazio

& Siegler, 2011). De esta forma, podrán darse cuenta al observarlas que, a pesar de su diferencia, representan lo mismo y, por tanto, son equivalentes.

Tal y como señala Lamon (2020), a la hora de trabajar con fracciones equivalentes por medio del empleo de la recta numérica es esencial incluir, también, fracciones equivalentes a números enteros, como por ejemplo 4/4. Así, los estudiantes comprenderán, de un modo visual, como los números enteros también pueden expresarse en forma de fracciones, lo cual representa un desafío significativo en la educación actual.

Después de todas las tareas mencionadas, cuando los alumnos hayan dominado las fracciones situadas entre cero y uno, será el momento de ampliar su comprensión del concepto, incluyendo, en un primer momento, las fracciones impropias y, posteriormente, las fracciones negativas (Fazio & Siegler, 2011). Para ello, se pueden emplear rectas numéricas que abarquen, por ejemplo, de cero a cinco, en las que los estudiantes tengan que ubicar 9/2; o rectas con -1 a la izquierda, 1 a la derecha y cero en el centro, donde tengan que colocar fracciones tanto positivas como negativas.

Antes de terminar, es necesario destacar que, a lo largo de todo el proceso de enseñanza de fracciones mediante el empleo de la recta numérica, será crucial establecer conexiones entre este concepto, los de decimales y porcentajes Fuchs et al. (2023).

Será conveniente, por tanto, que, durante todas las actividades propuestas, se enseñe a los alumnos a ubicar, en la misma recta numérica, tanto el número en forma de fracción, como su representación en forma de decimal y de porcentaje; resaltando así, en todo momento, como las tres representaciones reflejan la misma magnitud (Figura 2, Anexo A, pág.68).

En definitiva, podemos afirmar que el uso de las rectas numéricas para enseñar matemáticas en la etapa de Educación Primaria se trata de una tarea tan versátil, motivadora y necesaria, como compleja. No obstante, como dice Lamon (2020), el razonamiento proporcional es de tan gran importancia, que merece la pena todo el tiempo y esfuerzo que se deban gastar para conseguirlo.

4. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: *“Fracciónate”*

La presente situación de aprendizaje *“Fracciónate”,* busca promover el conocimiento de las magnitudes de las fracciones de los alumnos de la etapa de Educación Primaria, a través de sus representaciones en la recta numérica y, en concreto, por medio de un videojuego educativo, el cual recibe el mismo nombre que la propuesta.

Todo ello, tiene como objetivo fundamental ampliar, de manera progresiva, el conjunto de números cuyas magnitudes pueden ser ordenadas y ubicadas en rectas numéricas, lo que contribuirá a mejorar las competencias matemáticas de los alumnos de Educación Primaria y, por ende, su pensamiento lógico en general.

Como ya hemos mencionado, esta intervención está dirigida a la etapa de Educación Primaria y, más concretamente, a los niños y niñas del tercer curso, es decir, de ocho años, ya que, de acuerdo con Siegler y Braithwaite (2017), es este el momento en el que es recomendable empezar a introducir las magnitudes de las fracciones y, en particular, de aquellas que se sitúan entre cero y uno, conocidas, también, bajo el nombre de fracciones propias.

A pesar de establecer un grupo de edad concreto al que va dirigida la propuesta, es necesario mencionar que esta puede ser fácilmente adaptable a otras edades, debido a que un mismo videojuego, en función de cómo se trabaje y los apoyos que se proporcionen durante su aplicación, puede utilizarse tanto con niños de tercero, como con niños de cursos superiores o inferiores, e incluso, con alumnos de etapas educativas posteriores, como la etapa de Educación Secundaria.

“Fracciónate” es una situación de aprendizaje formada por una amplia gama de actividades dinámicas y lúdicas, en las que se trabajan, de una forma integral y diferente, las fracciones propias, tanto su identificación y representación en la recta numérica, como su orden, comparación y establecimiento de relaciones.

Por consiguiente, todas ellas se encuentran organizadas en diferentes sesiones, agrupadas, a su vez, en cinco grandes bloques temáticos: identificación, representación, comparación, ordenación y establecimiento de relaciones.

Cada uno de estos bloques está destinado al desarrollo de la habilidad concreta a la que hace referencia su nombre, para lo que se compone, a su vez, de tres sesiones específicas: sesión de activación; sesión de implementación y sesión de repaso.

Asimismo, es relevante señalar que, al comienzo y al final de la situación de aprendizaje se llevarán a cabo, tanto una sesión introductoria, destinada a presentar el videojuego y, por ende, el desafío que guiará la intervención en su totalidad; como una sesión final, diseñada para abordar, de manera global y transversal, todos los contenidos trabajados.

A continuación, con el fin de poder conocer en profundidad la situación de aprendizaje *"Fracciónate",* se abordarán cada uno de los aspectos esenciales que la conforman, es decir, la justificación, los objetivos, los contenidos, la metodología, la temporalización, las actividades y las propuestas futuras.

4.1. Justificación

Todas y cada una de las opciones que se han adoptado para el diseño y elaboración de la presente situación de aprendizaje tienen un claro por qué, el cual se encuentra estrechamente vinculado con la fundamentación teórica expuesta anteriormente.

Será en base a ella, por tanto, como a continuación, se explicarán, detalladamente, las principales razones que han guiado la selección de los contenidos a desarrollar, las características del videojuego diseñado y la metodología elegida para su implementación.

Contenidos seleccionados

La situación de aprendizaje *"Fracciónate"* se centra en el desarrollo de diversos contenidos, relacionados, principalmente, con las fracciones propias y su representación, identificación, comparación, ordenación y establecimiento de relaciones, por medio del empleo de la recta numérica.

Como hemos mencionado anteriormente, la selección de estos contenidos no es arbitraria, sino que tiene un claro por qué. Y es que, independientemente, de la legislación vigente, del autor o de la teoría a la que hagamos referencia, el desarrollo de estas cinco habilidades siempre va a estar presente en las aulas de Educación Primaria, por lo que la implementación de esta situación de aprendizaje siempre va a ser posible y relevante.

Todo ello se debe a que, para construir de manera adecuada el concepto de número fraccionario; considerado por Siegler et al. (2011) uno de los contenidos matemáticos más importantes de la educación, no solo primaria, sino también infantil y secundaria; es imprescindible adquirir el concepto de magnitud de una fracción, siendo esencial, para ello, el desarrollo de todas y cada una de las habilidades mencionadas. Es por este motivo, debido a la universalidad e importancia de dichas habilidades, por lo que se ha optado por trabajar estos contenidos y no otros.

De acuerdo con Siegler y Braithwaite (2017), es importante destacar que, para comprender adecuadamente la magnitud de un número fraccionario, es necesario entender primero las magnitudes de las fracciones propias (Siegler & Braithwaite, 2017). Por esta razón, la intervención se centrará en este tipo de fracciones, cuyo trabajo, como se ha expuesto anteriormente, se considera adecuado para niños de ocho años, que sería, en un principio, la de edad de los alumnos para los que está dirigida esta propuesta.

Además, se destaca la necesidad de trabajar todo ello por medio del empleo de la recta numérica, ya que, teniendo en cuenta las palabras de Siegler (2016), se pueden representar en ella las magnitudes de todos los números reales.

Por consiguiente, a lo largo de todas las sesiones y actividades que componen la situación de aprendizaje, las cinco habilidades mencionadas se trabajarán empleando, constantemente, la representación de las fracciones propias en la recta numérica.

Asimismo, es relevante destacar que este trabajo se llevará a cabo siguiendo las indicaciones de Fazio y Siegler (2011), quienes consideran que la manera más idónea para abordar el desarrollo de las fracciones propias a través del empleo de la recta numérica es dividiendo este en cinco momentos clave: identificación, representación, comparación, ordenación y establecimiento de relaciones.

A pesar de su aparente simplicidad, el desarrollo de todas y cada una de estas habilidades no es, en absoluto, una tarea para nada fácil. Por este motivo, dado que la inclusión de los contenidos matemáticos en el marco de una historia facilita la comprensión de los conceptos abstractos pertenecientes a este campo de estudio, se ha optado por diseñar un videojuego educativo como herramienta principal para trabajarlos.

<u>Características que presenta el videojuego diseñado</u>

El videojuego *"Fracciónate"* se caracteriza por presentar una estructura repetitiva y progresiva, con cinco mundos, divididos, a su vez, en tres niveles similares de dificultad gradual. Siguiendo las recomendaciones de Fazio y Siegler (2011), cada uno de estos cinco mundos se relaciona con cada uno de los cinco momentos clave, identificados como la manera óptima de estructurar el trabajo de las fracciones propias, a través del empleo de la recta numérica.

Es relevante destacar que estos momentos coinciden, a su vez, con cada uno los cinco bloques temáticos en los que se divide la situación de aprendizaje. En consecuencia, el mundo uno se corresponde con el bloque de identificación; el mundo dos con el boque de representación; el mundo tres con el bloque de comparación; el mundo cuatro con el bloque de ordenación y; el mundo cinco con el bloque de establecimiento de relaciones.

Como resultado de todo lo mencionado, nos encontramos con que los tres niveles, de cada uno de estos mundos, están diseñados para abordar, de manera secuencial, la habilidad específica correspondiente a cada uno de ellos.

Por tanto, en todos los bloques temáticos, la sesión de implementación del videojuego se llevará a cabo de la misma manera: jugando a los tres niveles del mundo correspondiente al bloque que se está desarrollando (Figura 1, Anexo B, pág.69).

No obstante, es importante destacar, que la estructura de los tres niveles variará en función de la habilidad que se trabaje. En el caso de los bloques de identificación y representación el primer nivel se centrará en el trabajo de las fracciones propias presentes, con frecuencia, en contextos cercanos a la realidad del alumnado; el segundo se destinará al trabajo de las fracciones menos comunes; y el tercero se enfocará en el trabajo conjunto de las fracciones más y menos frecuentes.

Por otra parte, en el caso de las habilidades de comparación, ordenación y establecimiento de relaciones, el primer nivel se enfocará en las fracciones propias con denominadores iguales; el segundo; en las fracciones propias con denominadores diferentes; y el tercero y último, en las fracciones propias con denominadores tanto iguales como diferentes.

Según Fazio y Siegler (2011), es esta estructura repetitiva, evidenciada en el trabajo secuencial de una misma habilidad la que contribuye a reforzar la coherencia y comprensión de todas ellas.

Por tanto, el hecho de que los niveles del videojuego sean repetitivos y vayan aumentando de dificultad no es casualidad, sino una estrategia intencionada, que potencia su efectividad como herramienta de aprendizaje y, en concreto, como recurso para enseñar las cinco habilidades mencionadas anteriormente.

Continuando con esta idea, es necesario destacar el importante papel que desempeñan las ilustraciones a la hora de captar y mantener la atención de los alumnos, contribuyendo, significativamente, en la efectividad que tienen los videojuegos como herramientas educativas.

En consecuencia, todas y cada una de las ilustraciones integradas en el videojuego *"Fracciónate"* se caracterizan por presentar una amplia gama de colores vivos, destinados, tanto a captar la atención visual de los jugadores, como a facilitar la comprensión de los conceptos presentados.

Es relevante destacar que, en el caso de los dos personajes principales, "Cero" y "Uno", las ilustraciones fueron creadas a mano (Figura 2, Anexo B, pág.69), mientras que las correspondientes a los distintos mundos y niveles del juego fueron creadas utilizando la plataforma *Canva* y puestas en marcha por medio de la plataforma *Scratch*.

Metodología escogida

A pesar de la aparente idoneidad del videojuego diseñado, para garantizar una implementación efectiva de la propuesta, no basta con tener, únicamente, un recurso de calidad, sino que es fundamental contar, también, con una metodología apropiada.

En consecuencia, la metodología adoptada para la puesta en marcha de la presente situación de aprendizaje, descrita en su apartado correspondiente, se basará, principalmente, en la aplicación de las estrategias expuestas en el último apartado de la fundamentación teórica "El uso de la recta numérica para enseñar fracciones en Educación Primaria: estrategias para su puesta en práctica".

4.2. Objetivos

La situación de aprendizaje *"Fracciónate"* persigue la consecución de una serie de objetivos, los cuales pueden clasificarse en generales y específicos.

El objetivo general es:

Fomentar la comprensión de las magnitudes de las fracciones propias a través de sus representaciones en la recta numérica y, en concreto, por medio del empleo de un videojuego educativo, complementado con actividades adicionales, situadas en contextos cercanos al alumnado.

Este objetivo general se puede desglosar, a su vez, en los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollar la habilidad de identificación de fracciones propias, situadas en contextos cercanos a la realidad del alumnado.
- Dominar la representación de fracciones propias en la recta numérica.
- Mejorar la habilidad de ordenar fracciones propias en la recta numérica.
- Fomentar la habilidad de comparar fracciones propias, ya sea con denominadores iguales o diferentes, utilizando la representación visual de la recta numérica.
- Establecer relaciones de equivalencia entre fracciones propias.
- Despertar el interés por los videojuegos educativos, considerándolos no solo una experiencia de disfrute, sino también de aprendizaje.

4.3. Contenidos

Por medio de la presente situación de aprendizaje se trabajan muy diversos contenidos, relacionados, principalmente, con las fracciones propias y su representación, identificación, comparación, ordenación y establecimiento de relaciones por medio del empleo de la recta numérica. Y es que, para construir de forma adecuada el concepto de número fraccionario es imprescindible comprender su magnitud, siendo esencial para ello, en primera instancia, el dominio de la recta numérica.

A continuación, se exponen, por tanto, los contenidos que se abordarán a lo largo de la propuesta *"Fracciónate"*, en relación con cada una de las cinco habilidades mencionadas.

En relación con la habilidad de identificación:

- Identificación de fracciones propias mediante diferentes representaciones.
- Identificación de conjuntos u objetos que representan distintas fracciones propias en la recta numérica.
- Identificación del nombre y la grafía de distintas fracciones propias.

En relación con la habilidad de representación:

- Representación de distintas fracciones propias por medio de la recta numérica.
- Relación entre la representación simbólica y gráfica de las fracciones propias en la recta numérica.

En relación con la habilidad de comparación:

- Comparación de fracciones propias, tanto con el mismo, como con distinto denominador, utilizando la recta numérica.
- Uso de modelos visuales para comparar fracciones propias y explicar las diferencias que hay entre ellas.

En relación con la habilidad de ordenación:

- Ordenación de fracciones propias en la recta numérica.
- Uso de la recta numérica para ordenar fracciones, tanto con el mismo como con distinto denominador.
- Justificación del orden de fracciones propias a través de la recta numérica.

En relación con la habilidad de establecimiento de relaciones:

- Visualización de fracciones propias equivalentes en la recta numérica.
- Establecimiento de fracciones propias equivalentes mediante la simplificación y ampliación.
- Creación de fracciones propias equivalentes utilizando la recta numérica.

Es importante señalar, que todos los contenidos mencionados se restringen al trabajo de las fracciones propias por una cuestión de espacio. Sin embargo, lo ideal sería no poner límites al aprendizaje del alumnado, abordando las magnitudes de estos números por medio de sus tres tipos de notación. Es, por este motivo, por lo que, en el último apartado de la propuesta, se incluye una forma de mejorar la comprensión del número racional utilizando, simultáneamente, sus tres tipos de notación: fracción, decimal y en porcentaje.

4.4. Metodología

La metodología seleccionada para implementar la situación de aprendizaje *"Fracciónate"* se fundamenta, principalmente, en las estrategias y recomendaciones propuestas por Fazio y Siegler (2011), así como por Lamon (2020) y Fuchs et al. (2023), en el último apartado de la fundamentación teórica.

A nivel general, todos ellos, plantean cinco estrategias fundamentales: la introducción gradual de las habilidades y los tipos de fracciones; el empleo de materiales versátiles, adecuados y, en ocasiones, específicos; la aplicación de apoyos adicionales, como el uso de divisiones claramente marcadas en la recta numérica; la utilización de un número ilimitado de contextos numéricos; y la realización de demostraciones y prácticas guiadas por parte del docente.

Todas ellas, están estrechamente vinculadas con la enseñanza de la magnitud de una fracción y, cuando se aplican de manera conjunta, potencian la comprensión del concepto por parte de los alumnos. Por este motivo, su integración en cualquier propuesta que utilice la recta numérica para mejorar la comprensión de las magnitudes de las fracciones es esencial y, en consecuencia, su aplicación durante esta propuesta será fundamental.

En relación con la primera de las estrategias planteadas, Fazio y Siegler (2011) consideran que la manera más idónea para estructurar el trabajo de las fracciones propias, a través del empleo de la recta numérica, es dividiendo este en cinco momentos clave: identificación, representación, comparación, ordenación y establecimiento de relaciones.

Por tanto, todas las actividades de la propuesta estarán destinadas, principalmente, a la identificación de fracciones propias situadas en contextos cercanos al alumnado, al establecimiento y ordenamiento de patrones físicos por medio del empleo de la recta numérica, a la comprensión de la diversidad de apariencias que pueden tener las fracciones propias y, por último, a la comparación de las mismas (Fazio & Siegler, 2011).

Como consecuencia, destacar que, en términos generales, el proceso educativo adoptará un enfoque constructivista, basado en la idea de que el aprendizaje tiene lugar cuando los estudiantes participan activamente en la resolución de problemas, experimentan con diversas estrategias, enfrentan desafíos, superan obstáculos, se equivocan. De ahí, que todas las actividades de la propuesta partan del planteamiento de una situación problemática, la cual debe ser resulta por los estudiantes.

Por este motivo, es fundamental considerar, constantemente, las particularidades, necesidades e intereses individuales de cada uno de ellos. De este modo, lograremos que todas las actividades y desafíos planteados, no solo fomenten actitudes relacionadas con la resolución de problemas, sino que también brinden a los alumnos la oportunidad de autocorregirse y, por consiguiente, de ser los constructores de su propio aprendizaje.

Los alumnos serán considerados, por tanto, el centro del proceso educativo, en el cual deberán participar activamente. Para ello, contarán con la ayuda del docente, quien desempeñará un papel fundamental, como como guía y mediador del proceso, ayudando a los alumnos a adquirir nuevos conocimientos y habilidades.

La integración de estos nuevos conocimientos y habilidades con los contenidos y experiencias ya adquiridas, así como la conexión con su entorno a través de un videojuego educativo, promoverá la construcción gradual de un aprendizaje útil y funcional por parte de los estudiantes, en definitiva, de un aprendizaje significativo.

Como podemos observar, para el diseño e implementación de la presente propuesta didáctica, en vez de adoptar una metodología rígida y estanca, se ha optado por seleccionar las estrategias más efectivas de varias de ellas. Este enfoque no solo enriquece la forma de enseñar de los docentes y la manera de aprender de los alumnos, sino que también crea situaciones de aprendizaje más adaptables y realistas. Y es que, como sostiene Fortea (2019), no hay una metodología más idónea que aquella que es creada por el docente, mediante la combinación de distintos elementos procedentes de diferentes enfoques.

4.5. Temporalización

"Fracciónate" tiene una duración aproximada de cinco semanas lectivas, destinadas, cada una de ellas, al desarrollo de una de las cinco habilidades mencionadas anteriormente y, por tanto, a la implementación de uno de los cinco bloques temáticos que conforman la propuesta. En consecuencia, debido a que cada bloque se compone, a su vez, de tres sesiones específicas, cada semana, se dedicará a la puesta en marcha de todas ellas.

En primer lugar, se llevará a cabo la sesión de activación, orientada tanto activar los conocimientos previos y aumentar la motivación de los alumnos, como a introducir y explicar la habilidad específica que se abordará a lo largo de todo el bloque. En segundo lugar, se desarrollará la sesión de implementación; centrada en la puesta en marcha del videojuego, y, en concreto, del mundo correspondiente a la habilidad que se está trabajando. En tercer y último lugar, se realizará la sesión de repaso, destinada a la recapitulación y reflexión de todo lo trabajado durante el bloque en cuestión.

Asimismo, el hecho de que la propuesta se desarrolle a lo largo de, aproximadamente, cinco semanas lectivas, ha dado lugar a la siguiente organización del contenido. Durante la primera semana, se llevarán a cabo tanto la sesión introductoria, como las tres sesiones dedicadas a la habilidad de identificación. En las semanas dos, tres y cuatro, se realizarán las tres sesiones correspondientes a los bloques de representación, comparación y ordenación, respectivamente. Finalmente, en la quinta semana, se llevarán a cabo tanto las tres sesiones del bloque de establecimiento de relaciones, como la sesión final.

De este modo, para facilitar una comprensión más clara y visual de la estructura y duración de la propuesta, se ha optado por elaborar una tabla (Figura 3, Anexo B, pág.70), en la que se presente, de manera ordenada y secuencial, toda la información expuesta anteriormente. No obstante, es importante señalar, que cada docente tendrá plena libertad para ajustar tanto la propuesta, como la temporalización, a las particularidades y requerimientos de sus alumnos, a su situación del aula, a su forma de abordar el contenido, así como a otros factores relevantes, que puedan influir en el proceso de enseñanza.

Por consiguiente, aunque la intervención esté diseñada con una temporalización específica, esta puede ser flexible y adaptarse según se prefiera, dedicando una semana entera a cada habilidad y, por ende, profundizando más en cada una ellas; trabajando cada habilidad, tanto en días consecutivos como alternos; desarrollando algunas de las actividades planteadas y omitiendo otras; o incluso enfocándose, únicamente, en el trabajo específico de alguna de las cinco habilidades.

4.6. Desarrollo de la situación de aprendizaje

En este apartado, se desarrollarán, en profundidad, todas las actividades que componen la situación de aprendizaje *"Fracciónate"*. Todas ellas, giran en torno a un tema central, las fracciones propias, y se encuentran organizadas en cinco grandes bloques temáticos: identificación, representación, comparación, ordenación y establecimiento de relaciones.

Cada uno de estos bloques, se compone, a su vez, de tres sesiones específicas, destinadas a trabajar, en profundidad, la habilidad correspondiente al bloque en cuestión. Por consiguiente, la situación de aprendizaje cuenta con un total de diecisiete sesiones: una sesión introductoria, quince sesiones centrales y una sesión final.

La sesión introductoria marcará el comienzo de la propuesta, pues en ella se presentará el videojuego a los alumnos por primera vez. Será durante su implementación, por tanto, cuando se revelará el gran dilema que enfrentan los protagonistas, lo que despertará el interés de los estudiantes por sumergirse en la trama planteada para, de esta forma, poder descubrir qué es aquello que les está sucediendo.

Las sesiones centrales son el conjunto de sesiones específicas destinadas a desarrollar cada una de las cinco habilidades de identificación, representación, comparación, ordenación y establecimiento de relaciones. Son, por tanto, todas las sesiones de activación, implementación y repaso, que componen cada uno de los bloques temáticos en los que se encuentra organizada la situación de aprendizaje.

La sesión final constituirá el cierre de la intervención, por lo que se centrará, principalmente, en la recapitulación y el repaso de todo lo aprendido, a lo largo de cada una de las sesiones realizadas previamente. Para ello, se promoverá la integración de los conocimientos adquiridos y su aplicación en contextos prácticos, consolidando así el aprendizaje de manera significativa.

Teniendo en cuenta todo lo mencionado, a continuación, se explicará, detalladamente, tanto el procedimiento de cada una de las sesiones descritas, como el desarrollo de las actividades que las componen. No obstante, antes de hacerlo, es importante destacar que, todas ellas, girarán en torno a la trama planteada en el videojuego educativo diseñado, el cual servirá, por tanto, como hilo conductor de la situación de aprendizaje.

SESIÓN INTRODUCTORIA: Somos Cero y Uno, ¿nos recuerdas?

Esta sesión inicial, cuya duración aproximada es de una hora y media, está destinada tanto a activar los conocimientos previos de los alumnos, como a aumentar el interés y la motivación por el tema que se va a abordar, siendo, en este caso, las fracciones propias. De esta manera, se busca fomentar la construcción de aprendizajes más significativos por parte de todos y cada uno de los estudiantes a los que va dirigida la propuesta.

Para lograrlo, de manera previa a la sesión, el docente descolocará el aula, haciendo como si de otro lugar se tratase. En medio de todo el caos, dispondrá a "Cero" y "Uno", los protagonistas de la historia y, por ende, del videojuego educativo diseñado. Junto a ellos, situará, tanto la carátula del videojuego (Figura 4, Anexo B, pág.70), cuya trama servirá como hilo conductor de la propuesta; como una maleta, en cuyo interior se encontrarán diversos materiales, que serán necesarios durante el desarrollo de esta nueva aventura.

Al entrar al aula, los alumnos se encontrarán con esta situación tan extraña y desconcertante, lo que no solo llamará su atención, sino que despertará en ellos la intriga y el deseo por descubrir, tanto qué ha sucedido, como quiénes son los personajes que allí se encuentran.

Tras explorar el caos en busca de pistas sobre lo ocurrido, el docente pedirá a los alumnos que se sienten formando un círculo y les planteará una serie de preguntas relacionadas con lo encontrado en medio del desorden.

En un primer momento, comenzará indagando sobre "Cero" y "Uno", después sobre la misteriosa maleta que acompañaba a los personajes y, finalmente, sobre la carátula del videojuego que se hallaba entre sus piernas; pues será esta carátula, y más concretamente, la trama que presenta, la que dará paso a la explicación del hilo conductor que guiará toda la situación de aprendizaje.

A continuación, se exponen algunos ejemplos de las preguntas que el docente puede plantear a los alumnos, en relación con cada uno de los objetos encontrados:

- Preguntas relacionadas con "Cero" y "Uno". *¿Quiénes son estos personajes?, ¿se parecen u os recuerdan a alguien?, ¿quiénes pueden ser?, ¿cómo creéis que se llamarán?, ¿qué características tienen?, ¿por qué creéis que han podido venir hasta aquí?, ¿qué llevan consigo?*

- Preguntas relacionadas con la maleta. *¿Para qué pueden llevar una maleta?, ¿qué creéis que puede haber en su interior?, ¿lo descubrimos?, ¿qué son todos estos materiales?, ¿para qué podrán servir?, ¿qué es este cuento?, ¿os recuerda a algo?, ¿y este mapa?*

- Preguntas relacionadas con la carátula del videojuego. *¿Qué creéis que puede ser esto?; ¿de qué puede tratar el videojuego?; ¿habrá que resolver un problema?; parece que en la portada están los mismos personajes que nos hemos encontrado en el aula, ¿por qué creéis que será?, ¿vendrán a contarnos su historia?;¿nos dará alguna pista el título del videojuego?*

Será basándose en estas preguntas, como el docente iniciará una conversación abierta y guiada con los alumnos, quienes irán expresando sus ideas, opiniones y vivencias, de forma ordenada. Y es que, como hemos podido observar, las preguntas formuladas, no solo buscan aumentar la motivación y el interés de los estudiantes, sino también, activar sus conocimientos y experiencias previas.

Asimismo, es importante señalar que la trama presentada en el videojuego diseñado está directamente relacionada con el cuento *"Un amigo de diez"* (Figura 5, Anexo B, pág.71), a través del cual se busca trabajar el conteo, la cadena numérica y la representación gráfica de los diez primeros números.

Como consecuencia, si los estudiantes a los que se dirige la propuesta han abordado los contenidos de este relato previamente, tanto los personajes, como la trama les resultarán familiares; y, por tanto, esta primera parte de la sesión introductoria no solo les motivará, sino que les servirá, principalmente, como activación de sus conocimientos previos.

Por el contrario, si los estudiantes no han trabajado nunca por medio del empleo de este cuento, tanto los personajes, como la trama les resultarán desconocidos, por lo que, esta parte inicial, aunque también servirá para activar sus conocimientos previos, estará destinada, principalmente, a aumentar su interés y motivación por el nuevo tema. Además, será importante enfatizar un poco más en la historia, empleando, tanto el cuento, como el mapa principal del mismo (Figura 6, Anexo B, pág.71).

En ambos casos, una vez que todos los discentes hayan participado y los interrogantes formulados hayan sido resueltos, el docente concluirá la conversación planteando la siguiente cuestión:

¿Queréis que escaneemos el código QR del videojuego para ver si descubrimos quiénes son estos personajes y por qué han venido hasta aquí?

Tras recibir una respuesta afirmativa por parte de los alumnos, el profesor procederá a escanear el código QR (Figura 4, Anexo B, pág.69) y a mostrar su contenido en la pantalla digital. Al hacerlo, se iniciará un breve vídeo con la introducción del videojuego, donde, haciendo referencia a la historia del cuento *"Un amigo de diez"*, se expondrá, tanto quiénes son "Cero" y "Uno", como qué es aquello que les ha sucedido: que no saben dónde están.

Para terminar la sesión, el profesor les preguntará si quieren ayudar a "Cero" y "Uno" a descubrir donde están, embarcándose, así, en esta emocionante aventura. Todo ello, dará lugar a la realización de una actividad destinada a introducir el conjunto de las fracciones y, en concreto, de las fracciones propias. Dicha actividad recibe el nombre de *"Un nuevo mundo, un nuevo lugar"* (Tabla 1, Anexo C, pág.84), y se explicará más detalladamente en el Anexo C.

SESIONES CENTRALES: "Bloque temático de…"

Las sesiones centrales son el conjunto de sesiones específicas destinadas a desarrollar las habilidades de identificación, representación, comparación, ordenación y establecimiento de relaciones; correspondientes a cada uno de los cinco bloques temáticos que conforman la situación de aprendizaje *"Fracciónate"*.

Teniendo en cuenta lo mencionado en apartados anteriores, para lograr este desarrollo es necesario que cada uno de estos bloques se componga, a su vez, de tres sesiones específicas: una sesión de activación, una sesión de implementación y una sesión de repaso. Cada una de estas sesiones específicas constituyen, por tanto, una sesión central de la propuesta.

Como consecuencia, todas las sesiones centrales, se encuentran agrupadas de tres en tres, presentando una estructura común en cada uno de los cinco bloques temáticos mencionados (Figura 7, Anexo B, pág.71).

Dicha estructura se desarrollará de la siguiente forma: en primer lugar, se llevará a cabo la sesión de activación, orientada tanto activar los conocimientos previos y aumentar la motivación de los alumnos, como a introducir y explicar la habilidad específica que se abordará a lo largo de todo el bloque; en segundo lugar, se desarrollará la sesión de implementación, centrada en la puesta en marcha del videojuego, y, en concreto, del mundo correspondiente a la habilidad que se está trabajando; finalmente, en tercer y último lugar, se realizará la sesión de repaso, destinada a la recapitulación y reflexión de todo lo trabajado durante el bloque temático en cuestión.

Cabe destacar que, todas y cada una de estas sesiones están programadas para tener una duración total de, aproximadamente, una hora. Y es que, independientemente, del bloque temático o la habilidad específica a la que correspondan, todas ellas, se abordarán de una forma similar. De este modo, para evitar que resulte repetitivo, en lugar de explicarlas, minuciosamente, en cada uno de los bloques, a continuación, se describirá, de manera general, tanto la forma de proceder, como las estrategias utilizadas en todos ellos.

Sesiones de activación

En los cinco bloques temáticos las sesiones de activación tienen un doble propósito. En primer lugar, activar los conocimientos previos y estimular la motivación de los alumnos; y, en segundo lugar, introducir y explicar la habilidad específica que se abordará a lo largo de todo el bloque.

Para conseguir ambos objetivos, cada sesión de activación partirá del planteamiento de una situación problemática. En consecuencia, de manera previa a la sesión, el docente colocará una carta que describa dicha situación, junto a “Cero” y “Uno”, los protagonistas del hilo conductor que guía la situación de aprendizaje.

Además, siempre que sea posible, ambientará la clase en base a la temática que tiene, en el videojuego, el mundo correspondiente a la habilidad que se va a trabajar. De este modo, no solo se despertará la curiosidad de los alumnos, sino que también se aumentará su interés y motivación por aprender los nuevos contenidos.

En vista de lo expuesto, cuando los alumnos entren al aula para llevar a cabo cada una de las sesiones de activación, se encontrarán tanto con una nueva ambientación, como con una nueva carta, en la que se describirá la problemática concreta que presentan, en cada caso, "Cero" y "Uno".

Es relevante mencionar que esta situación estará directamente relacionada con la solución encontrada en la última de las sesiones abordadas, por lo que su planteamiento no solo servirá para motivar a los alumnos, sino también para activar sus conocimientos previos y, al mismo tiempo, dar paso a la introducción y explicación de cada una de las habilidades.

Por consiguiente, dado que cada bloque temático se enfoca en el desarrollo de una habilidad distinta, la problemática planteada variará en función de las características particulares que presentan cada una de ellas. Como consecuencia, cada uno de los bloques contará con una sesión previa, concreta y diferente; las cuales se encuentran recogidas y desarrolladas, en profundidad, en el Anexo D.

Cabe destacar que, en caso de que se considere, cada vez que se descubra un nuevo mundo se podrá ambientar un espacio del aula diferente. Así, al finalizar la situación de aprendizaje *“Fracciónate”*, toda la clase estaría decorada según los mundos del videojuego, abriendo la posibilidad de trabajar cada habilidad con mayor profundidad; e incluso, de plantear una propuesta que aborde todas las áreas de manera integral.

Para lograr este objetivo, además de decorar cada espacio en base a la temática de un mundo específico, se dispondrán en él diversos materiales y actividades, que trabajen tanto la habilidad asociada a ese mundo, como aspectos de otras áreas y competencias (vocabulario específico, características del entorno, el clima, los tipos de animales que habitan y su clasificación…).

Sesiones de implementación del videojuego

El videojuego *"Fracciónate"* se caracteriza por presentar una estructura repetitiva, con cinco mundos, divididos, a su vez, en tres niveles similares, de dificultad gradual (Figura 1, Anexo B, pág.68).

Como hemos mencionado en el apartado de justificación, cada uno de estos cinco mundos se corresponde con cada uno de los cinco bloques temáticos que conforman la propuesta, por lo que los tres niveles de cada uno de ellos están diseñados para trabajar, de manera secuencial, la habilidad correspondiente a dicho bloque.

Este hecho, permite que, en todos y cada uno de los bloques temáticos, la sesión de implementación se lleve a cabo de la misma manera: jugando a los tres niveles del mundo correspondiente al bloque que se está desarrollando. De este modo, se busca trabajar y reforzar los contenidos introducidos en la sesión de activación.

Una forma efectiva de hacer que esto sea posible es llevando a cabo una serie de estrategias, las cuales estarán localizadas en momentos puntuales de la sesión y se explicarán, más detalladamente, a continuación.

Cuando los alumnos entren al aula, el docente iniciará una conversación guiada y abierta con ellos, donde, por medio de la realización de una serie de preguntas y empleando los materiales utilizados hasta el momento, tratará de hacerles recordar los contenidos abordados en la sesión de activación, realizada previamente. De este modo, todas las preguntas realizadas estarán relacionadas con la habilidad trabajada en cada caso, siendo algunos ejemplos los siguientes: *¿quiénes son todas estas criaturas?, ¿os acordáis de qué nombre recibe cada una de ellas?, ¿qué características tienen?, ¿podrías decirme algo de tu entorno que se identifique con la criatura…?, ¿cómo se puede representar la criatura… en la recta numérica?, ¿sabrías ordenar…?, ¿cuál de estas criaturas es más mayor?, ¿podrías decirme algo equivalente a la criatura…?*

Tras abordar, detalladamente, cada una de las cuestiones planteadas y, por tanto, una vez activados los conocimientos previos de los alumnos, se pasará a la introducción del videojuego. Para ello, el docente pedirá a los estudiantes que busquen por el aula una carátula similar a la que “Uno” y “Cero” trajeron el primer día. La única diferencia será la portada, que cambiará en cada sesión, representando la imagen del mundo correspondiente a la habilidad que se va a trabajar (Figura 8, Anexo B, pág.72).

En el momento en el que uno de los alumnos encuentre la carátula, el profesor les pedirá que cojan sus ordenadores portátiles. Cuando todos lo tengan, procederá a escanear el código QR que viene en la parte trasera de la carátula encontrada y mostrará su contenido en la pantalla digital. Al hacerlo, se iniciará el videojuego y, en concreto, el mundo al que se va a jugar, cuyo enlace compartirá con los alumnos.

Una vez que todos estén en la pantalla inicial del mundo correspondiente a la habilidad que se va a trabajar, el docente irá explicando, de manera progresiva, la forma de proceder en cada uno de los niveles: primero del nivel uno, luego del nivel dos y, por último, del nivel tres.

Para asegurarse de que todos lo comprenden, a mayores de las explicaciones orales, realizará una demostración práctica de la puesta en marcha de cada uno de ellos. En consecuencia, la dinámica a seguir será la siguiente: explicación del nivel, demostración práctica por parte del docente y, finalmente, puesta en marcha por parte de los alumnos durante un tiempo determinado.

Con el fin de aumentar su motivación, se les podrá dividir en grupos y proponerles la idea de que, al finalizar el tiempo que el docente considere destinar a la puesta en marcha del mundo en su totalidad, recojan las puntaciones más altas, que han logrado obtener en cada uno de los niveles, y las sumen.

De este modo, cada día se hará un ranking con las puntuaciones obtenidas por cada uno de los grupos. Es relevante destacar que, en caso de que se lleve a cabo esta estrategia, habrá que dejarles claro a los estudiantes que en ningún momento se trata de competir, ni de ver quiénes son los mejores, sino de aprender jugando.

Finalmente, una vez completado el videojuego y realizado el ranking, se podrá llevar a cabo una reflexión conjunta sobre el mundo jugado. Así, los alumnos tendrán la oportunidad de compartir, con sus compañeros, las dificultades que han encontrado, las partes que más les han gustado y aquello que han aprendido. Esto, no solo reforzará su aprendizaje, sino que también proporcionará al docente una retroalimentación sobre el videojuego diseñado y su implementación.

Sesiones de repaso

Las sesiones de repaso están destinadas al trabajo y consolidación de los contenidos abordados a lo largo de las sesiones de activación e implementación, correspondientes al bloque temático que se esté llevando a cabo.

Por consiguiente, en todas las sesiones de repaso, de todos y cada uno de los bloques, el docente comenzará planteando a los alumnos una serie de preguntas, las cuales seguirán siempre el mismo orden y patrón: primero preguntará sobre la sesión de activación y, posteriormente, sobre la sesión de implementación.

Esta estructura permitirá a los estudiantes identificar y comprender las conexiones que hay entre las sesiones de cada bloque, lo que promoverá, a su vez, el desarrollo de una visión integral sobre el mismo. Además, el uso de un patrón repetitivo en todas las sesiones ayudará a los alumnos a acostumbrarse al formato y, por tanto, a participar de manera más efectiva.

A continuación, se exponen algunos de los ejemplos de las preguntas que se pueden realizar, en relación con cada una de las sesiones realizadas previamente:

- Preguntas relacionadas con la sesión de activación. *¿Qué conceptos clave se introdujeron en la sesión de activación?, ¿qué ejemplos se emplearon para ello?, ¿cuál fue la situación problemática planteada?*
- Preguntas relacionadas con la sesión de implementación. *¿En qué temática estaba ambientado el mundo del videojuego?; ¿en qué consistían los niveles?; ¿habéis tenido dificultades para aplicar los conceptos abordados en la sesión de activación?; si es que sí, ¿cómo las habéis superado?*

Será en base a estas preguntas, por tanto, como el docente iniciará una conversación abierta y guiada con los alumnos, quienes irán expresando sus ideas, opiniones y vivencias, de forma ordenada. De este modo, no solo se comprobará si han comprendido los contenidos abordados en ambas sesiones, sino que también se identificarán las áreas donde han encontrado, más y menos, dificultades.

Finalmente, una vez que todos hayan participado y las cuestiones planteadas hayan sido resueltas, el docente concluirá la conversación formulando la siguiente pregunta: *¿hemos logrado resolver la situación problemática planteada en la sesión de activación?*

Tras recibir una respuesta afirmativa por parte de los alumnos, el profesor les pedirá que representen la solución encontrada a través de un dibujo, un vídeo o una carta. De este modo, podrán entregársela a "Cero" y "Uno", ayudándoles así a estar un paso más cerca de averiguar su ubicación.

SESIÓN FINAL: Todo un mundo por descubrir

Esta sesión final, cuya duración aproximada es de una hora y media, está destinada al repaso y consolidación de todo lo aprendido a lo largo de todas las sesiones y, por tanto, los bloques temáticos que componen la situación de aprendizaje.

Para ello, de manera similar a las sesiones centrales, la sesión final se desarrollará en base a la siguiente estructura: preguntas de activación, implementación del videojuego y repaso final, destinado a introducir el concepto de densidad del conjunto de fracciones. Por consiguiente, tanto el desarrollo de la sesión, como de las actividades que se realizarán durante la misma, se encuentran recogidas en el Anexo E.

4.7. Propuestas futuras

La decisión de concluir la implementación de la situación de aprendizaje *"Fracciónate"* abordando el concepto de densidad, tiene un claro por qué: facilitar la introducción al estudio de las fracciones impropias y, por ende, de todo el conjunto de las fracciones.

Y es que, aunque lo ideal hubiera sido introducir este tipo de fracciones en el desarrollo de esta intervención, dado que la extensión del trabajo es limitada, esto no ha sido posible.

Por consiguiente, a continuación, se plantea una propuesta en la que se sugiere una forma de trabajar las fracciones impropias, a partir de la última actividad de repaso mencionada en la sesión final.

La idea de esta propuesta futura se alinea, por tanto, con el tema central de "*Fracciónate*" y, como hemos mencionado anteriormente, tiene como objetivo trabajar las fracciones impropias mediante el diseño de nuevos mundos y niveles. En ellos, "Cero" y "Uno", después de haber descubierto la existencia de nuevos lugares, deciden embarcarse en una nueva aventura para hallar todos los sitios y criaturas que se encuentran entre todos y cada uno de los mundos del planeta de los números.

Para ello, se crearían cinco nuevas pantallas con tres niveles cada una, donde, al igual que en esta propuesta, se trabajarían cada una de las cinco habilidades que Fazio y Siegler (2011) consideran fundamentales para el desarrollo de la magnitud de una fracción: identificación, representación, comparación, ordenación y establecimiento de relaciones.

Asimismo, cabe destacar, que resultaría idóneo incluir en esta nueva propuesta, así como en la ya planteada, el trabajo con fracciones y, específicamente, la magnitud del número racional, utilizando sus tres tipos de notación: fracciones, decimales y porcentajes.

Finalmente, es importante mencionar que, como ya se indicó en el desarrollo de las sesiones de activación, en base a la trama planteada en el videojuego *"Fracciónate",* se podrían sugerir dos futuras propuestas de trabajo: una más específica, centrada en la temática de un solo mundo y, por tanto, en el desarrollo de una sola habilidad; y otra más global, destinada a abordar todas las áreas de manera integral.

5. CONCLUSIONES

La necesidad de renovar la enseñanza de las fracciones, dejando atrás las metodologías, teorías y enfoques tradicionales para adoptar nuevos paradigmas educativos, es imprescindible. En este sentido, la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico se presenta como un pilar ideal para promover dicha evolución, pues permite a los alumnos comprender las similitudes entre los distintos tipos de números reales, especialmente, mediante la representación de sus magnitudes en rectas numéricas.

En consecuencia, a lo largo de este trabajo, se ha llevado a cabo un análisis detallado de los fundamentos teóricos relacionados con el desarrollo, la comprensión, la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Mediante una revisión bibliográfica completa y siguiendo las propuestas planteadas por Siegler, Thompson y Schneider, se ha demostrado cómo esta teoría, junto con el uso de la recta numérica para representar magnitudes, puede mejorar significativamente la comprensión y el aprendizaje de las fracciones.

Por consiguiente, este análisis teórico no solo nos ha servido para enriquecer y, por tanto, contribuir al conocimiento ya existente sobre el tema; sino que también nos ha ayudado, a establecer una base sólida para entender el papel que juega la Teoría Integrada del Desarrollo Numérico en la enseñanza, aprendizaje y comprensión de las fracciones.

Además, al desarrollar una situación de aprendizaje en torno a la elaboración de un videojuego educativo, se ha generado un entorno de enseñanza que facilita la comprensión y aplicación de los conceptos de menara atractiva y motivadora; ajustándose, tanto al nivel de desarrollo, como a las necesidades específicas de cada estudiante. Para lograrlo, se han investigado y sugerido diversas estrategias que permiten a los profesores variar sus métodos de enseñanza, aumentando el interés y la motivación de los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones y, al mismo tiempo, fomentando el uso de enfoques innovadores y creativos por parte de todos los docentes.

Esta iniciativa ha permitido desarrollar una situación de aprendizaje innovadora, en la cual, tanto el videojuego, como la representación de las magnitudes en la recta numérica, han sido empleadas como herramientas principales para la enseñanza de fracciones. Este hecho ha permitido demostrar, por tanto, la posibilidad de emplear un enfoque diferente, más accesible y significativo para la enseñanza de fracciones.

Teniendo en cuenta todo lo mencionado, podemos decir que la integración de videojuegos en el proceso de enseñanza ofrece nuevas oportunidades para captar el interés de los alumnos, consiguiendo un aprendizaje más lúdico y significativo. En este sentido, es relevante destacar que tanto el videojuego como la representación de fracciones en la recta numérica, han demostrado ser estrategias pedagógicas innovadoras, capaces de promover un aprendizaje más dinámico; adaptado a las necesidades y desafíos de la educación actual.

BIBLIOGRAFÍA

Booth, J.L. y Siegler, R.S. (2008). Numerical Magnitude Representations Influence Arithmetic Learning. *Child Development*, *79* (4), 1016 – 1031. http://www.jstor.org/stable/27563535

Braithwaite, D.W. y Siegler, R.S. (2021). Putting fractions together. *Journal of Educational Psychology, 113* (3), 556–571. https://doi.org/10.1037/edu0000477

Brainerd, C. J., Reyna, V. F., Howe, M. L. y Kevershan, J. (1991). Fuzzy-trace theory and cognitive triage in memory development. *Developmental Psychology*, *27* (3), 351 – 369. https://doi.org/10.1037/0012-1649.27.3.351

Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics* (Rev. and updated ed.). Oxford University Press.

DeWolf, M. y Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction, 37,* 39–49. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002

Fazio, L. K. y Siegler, R.S. (2011). *Teaching fractions* (Educational Practices Series-22). International Academy of Education. http://iaoed.org/downloads/EdPractices_22.pdf

Fazio, L.K., Bailey, D.H., Thompson, C.A. y Siegler, R.S. (2014). Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *123*, 53–72. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.01.013

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16 (1),* 3–17. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.16.1.0003

Foley, T.E. y Cawley, J.F. (2003). About the Mathematics of Division: Implications for Students With Disabilities. *Exceptionality*, *11* (3), 131–149. https://doi.org/10.1207/S15327035EX1103_02

Fortea, M.A. (2019). *Metodologías didácticas para la enseñanza/aprendizaje de competencias*. Unitat de Suport Educatiu de la Universitat Jaume I. http://dx.doi.org/10.6035/MDU1

Fuchs, L.S., Malone, A.S., Preacher, K.J., Cho, E., Fuchs, D. y Changas, P. (2023). Next-Generation Fraction Intervention and the Long-Term Advantage of Interleaved Instruction. *Exceptional Children*, *89* (3), 332 - 352. https://doi.org/10.1177/00144029221135565

Galton, F. (1880). Visualised Numerals. *Nature*, *21*, 252 – 256 https://doi.org/10.1038/021252a0

Geary, D. C. (2006). Development of Mathematical Understanding. En D. Kuhn, R. S. Siegler, W. Damon, & R. M. Lerner (Eds.), *Handbook of child psychology: Cognition, perception, and language* (6º ed., pp. 777 – 810). John Wiley & Sons.

Geary, D.C., Hoard, M.K., Nugent, L. y Byrd-Craven, J. (2008). Development of Number Line Representations in Children With Mathematical Learning Disability. *Developmental Neuropsychology*, *33* (3), 277 – 299. https://doi.org/10.1080/87565640801982361

Gónzalez – Forte, J.M., Fernández – Verdú, C. y Llinares, S. (2019). El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante*, *28* (2), 32 – 52. http://hdl.handle.net/10045/100918

Holloway, I.D. y Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children’s mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103* (1), 17 – 29. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.04.001

Kieren, T.E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49–84). Lawrence Erlbaum Associates, Inc. https://psycnet.apa.org/record/1993-97206-001

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lamon, S.J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003008057

Leslie, A.M., Gelman, R. y Gallistel, C.R. (2008). The generative basis of natural number concepts. *Trends in Cognitive Sciences, 12* (6), 213 – 218. https://doi.org/10.1016/j.tics.2008.03.004

Lortie – Forgues, H., Tian, J. y Siegler, R.S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38*, 201 – 221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

McCrink, K. y Winn, K. (2007). Ratio abstraction by 6-month-old infants. *Psychological Science, 18*, 740-745. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2007.01969.x

Moyer, R.S. y Landauer, T.K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature, 215* (5109), 1519 – 1520. https://doi.org/10.1038/2151519a0

Ni, Y. y Zhou, Y.D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40* (1), 27 – 52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Obersteiner, A., Van Hoff, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology, 107* (3), 537 – 555. https://doi.org/10.1111/bjop.12161

Ochoa-Martínez, O.L. y Díaz-Neri, N.M. (2021). Implementación de una narrativa digital para facilitar el aprendizaje de fracciones en la escuela primaria. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 11* (3), 533 - 544. https://doi.org/10.19053/20278306.v11.n3.2021.13350

Platt, J.R. y Johnson, D.M. (1971). Localization of position within a homogeneous behavior chain: Effects of error contingencies. *Learning and Motivation, 2* (4), 386 – 414. https://doi.org/10.1016/0023-9690(71)90020-8

Rugani, R., Vallortigara, G., Priftis, K. y Regolina, L. (2015). Number-space mapping in the newborn chick resembles humans' mental number line. *Science*, *347* (6221), 534 – 536. 10.1126/science.aaa1379

Schiller, L.K. y Siegler, R.S. (2023). Integrated knowledge of rational number notations predicts children's math achievement and understanding of numerical magnitudes. *Cognitive Development, 68* (10138), 1 - 47. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2023.101380

Siegler, R.S. y Ramani, G.B. (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology, 101* (3), 545 – 560. https://doi.org/10.1037/a0014239

Siegler, R.S., Thompson, C.A. y Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62* (4). 273 – 296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Siegler, R.S., Duncan, G.J., Davis-Kean, P.E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M.I. y Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, *23* (7), 691 – 697. https://doi.org/10.1177/0956797612440101

Siegler, R.S. y Pyke, A.A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49* (10), 1994 – 2004. https://doi.org/10.1037/a0031200

Siegler, R.S. y Lortie – Forgues, H. (2014). An Integrative Theory of Numerical Development. *Child Development Perspectives*, *8* (3), 144 – 150. https://doi.org/10.1111/cdep.12077

Siegler, R.S. (2016). Magnitude knowledge: the common core of numerical development. *Developmental science*, *19* (3), 341 – 361. https://doi.org/10.1111/desc.12395

Siegler, R. S. y Braithwaite, D.W. (2017). Numerical development. *Annual Review of Psychology*, *68*, 187 – 213. https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010416-044101

Siegler, R. S. y Lortie - Forgues, H. (2017). Hard Lessons: Why Rational Number Arithmetic Is So Difficult for So Many People. *Current Directions in Psychological Science*, *26* (4), 346 - 351. https://doi.org/10.1177/09637214177001

Siegler, R.S. y Tian, J. (2022). Why do we have three rational number notations? The importance of percentages. En J.J. Lockman (Ed.), *Advances in Child Development and Behavior* (1º ed., Vol. 65, pp. 1-33). Academic Press. https://doi.org/10.1016/bs.acdb.2022.05.001

Smith, C., Solomon, G., y Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, *51* (2), 101–140. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2005.03.001

Stigler, J. W., Givvin, K. B., & Thompson, B. (2010). What community college developmental mathematics students understand about mathematics. *The MathAMATYC Educator*, 1 *(3)*, 4–16.

Torbeyns, J., Gilmore, C. y Verschaffel, L. (2015). The Acquisition of Preschool Mathematical Abilities: Theoretical, Methodological and Educational Considerations. *Mathematical Thinking and Learning*, *17* (2–3), 99 – 115. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1016810

Thompson, C. A. y Siegler, R. S. (2010). Linear numerical-magnitude representations aid children's memory for numbers. *Psychological Science, 21* (9), 1274 – 1281. https://doi.org/10.1177/0956797610378309

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14* (5), 453–467. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Wood, G., Willmes, K., Nuerk, H.-C. y Fischer, M. H. (2008). On the cognitive link between space and number: A meta-analysis of the SNARC effect. *Psychology Science, 50* (4), 489 – 525.

Wynn, T. (2002). Archaeology and cognitive evolution. *Behavioral and Brain Sciences*, *25* (3), 389 – 402. https://doi.org/10.1017/S0140525X02000079

ANEXOS

Anexo A. Fundamentación teórica.

Anexo B. Elementos de la propuesta.

Anexo C. Sesión introductoria: Somos Cero y Uno, ¿nos recuerdas?

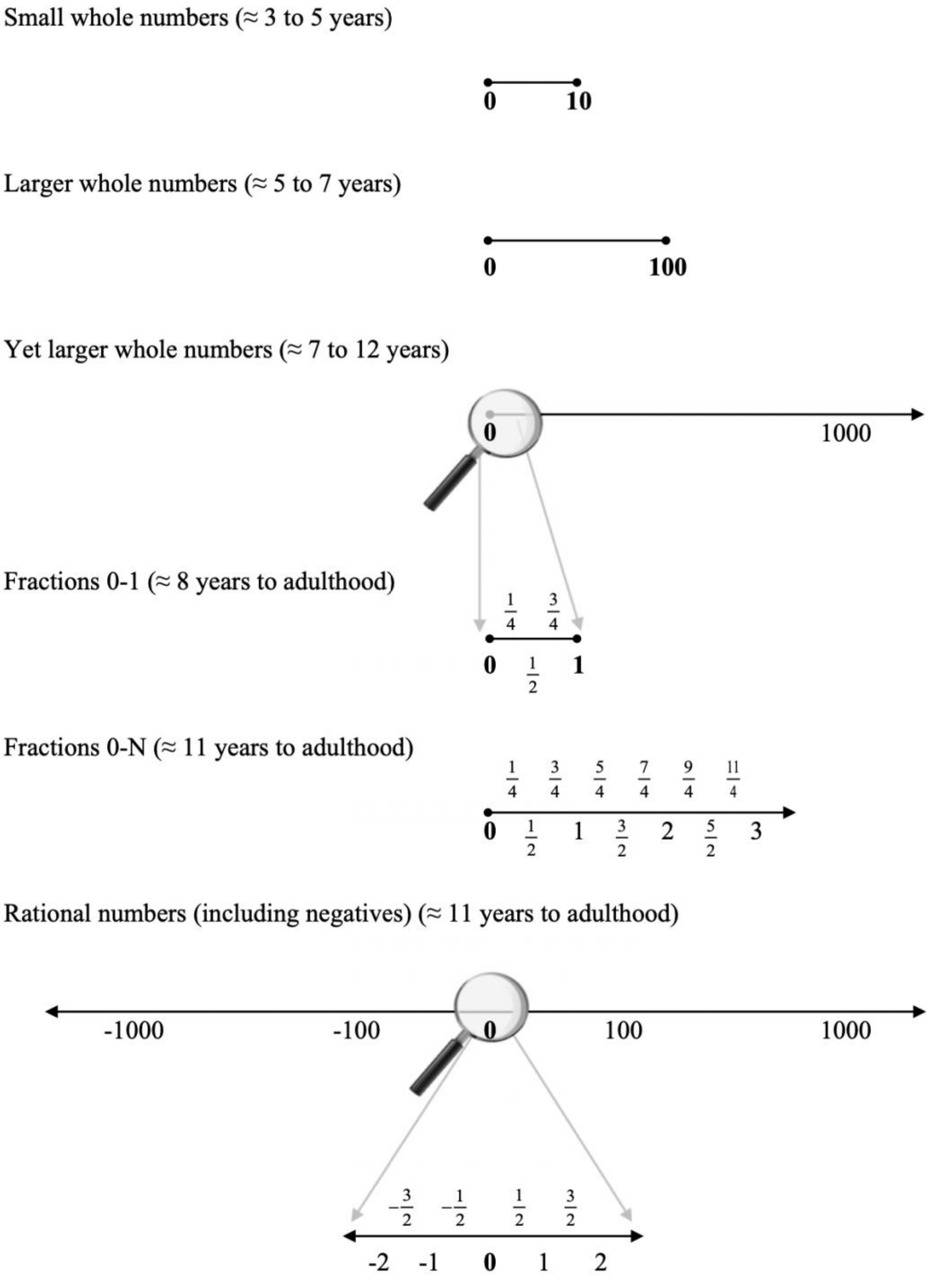
Anexo D. Sesiones centrales de activación: “Bloque temático de…”

Anexo E. Sesión final: Todo un mundo por descubrir.

Anexo F. Materiales de las actividades.

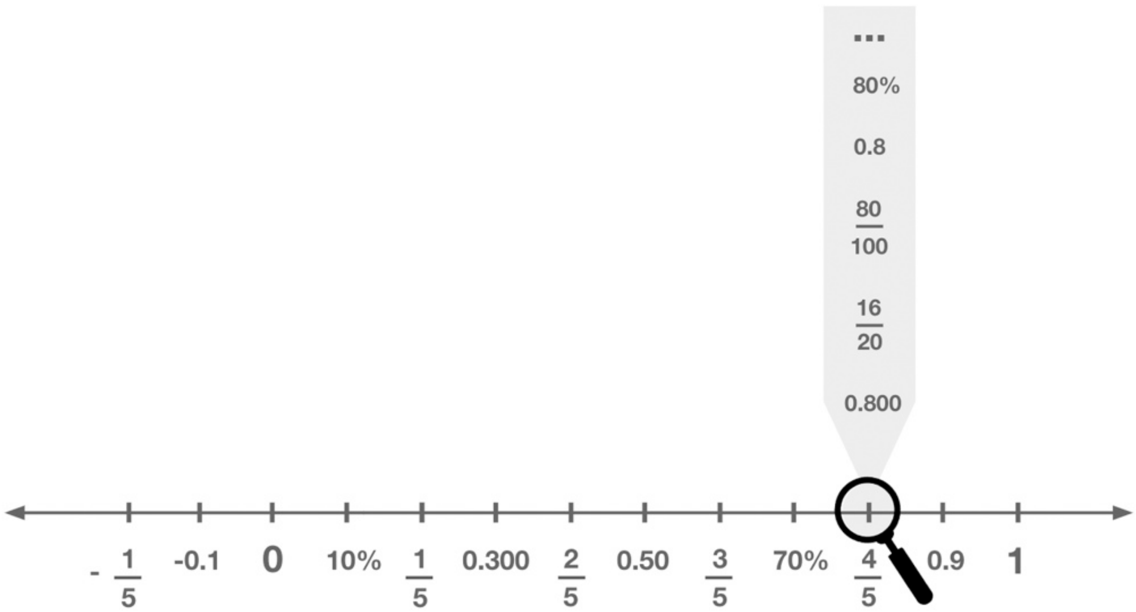
ANEXO A. Fundamentación teórica

Figura 1. Tipo de magnitud en función de la edad de adquisición.



Nota. Adaptado de "Magnitude knowledge: the common core of numerical development" (p. 35), por R.S. Siegler, 2016, *Developmental science, 19* (3).

Figura 2. Reflejo de la conexión entre fracciones, decimales y porcentajes.



Nota. Adaptado de "Integrated knowledge of rational number notations predicts children's math achievement and understanding of numerical magnitudes" (p. 4), por L.K. Schiller y R.S. Siegler, 2023, *Cognitive Development, 68 (10138).*

ANEXO B. Elementos de la propuesta

Figura 1. Niveles correspondientes a cada bloque temático. [Creación personal].

Bloque temático	**IDENTIFICACIÓN**	**REPRESENTACIÓN**	**COMPARACIÓN**	**ORDENACIÓN**	**ESTABLECIMIENTO DE RELACIONES**
Mundo	Mundo uno (Figura 9, Anexo B, pág. 72)	Mundo dos (Figura 13, Anexo B, pág. 74)	Mundo tres (Figura 17, Anexo B, pág. 76)	Mundo cuatro (Figura 21, Anexo B, pág. 78)	Mundo cinco (Figura 25, Anexo B, pág. 82)
Juego	*Memory*	*Atrapa los objetos*	*Clasifica cada elemento*	*Supera el laberinto y ordena correctamente*	*Relaciona cada elemento con su equivalente*
Nivel 1	Memory de criaturas y elementos cotidianos que representan la misma fracción (Figura 10, Anexo B, pág. 73)	Atrapa los objetos que se correspondan con la criatura que representa 1/2 (Figura 14, Anexo B, pág. 75)	Clasifica cada elemento en base a las características similares que tenga con cada criatura (Figura 18, Anexo B, pág. 77)	Recoge las fracciones con el mismo denominador del laberinto y ordénalas de menor a mayor, con el apoyo de la recta numérica (Figura 22, Anexo B, pág. 79)	Relaciona cada criatura con su equivalente (Figura 26, Anexo B, pág. 82)
Nivel 2	Memory de criaturas y representaciones simbólicas del mismo color, donde ambas reflejan la misa fracción (Figura 11, Anexo B, pág. 73)	Atrapa los objetos, elementos y grafías que se correspondan con la criatura que representa la fracción 1/3 (Figura 15, Anexo B, pág. 75)	(Clasifica cada elemento en base a las características similares que tenga con cada criatura (Figura 19, Anexo B, pág. 77)	Recoge las fracciones del laberinto, dos con distinto denominador y dos con el mismo. Después, ordénalas de menor a mayor, con el apoyo de la recta numérica y con el apoyo del código de colores (Figura 23, Anexo B, pág. 80)	Relaciona cada recta numérica con su equivalente, teniendo en cuenta el código de colores (Figura 27, Anexo B, pág. 83)
Nivel 3	Memory de criaturas y la grafía de nueve fracciones (Figura 12, Anexo B, pág. 74)	Atrapa los objetos, elementos y grafías que se correspondan con la representación en la recta numérica de 1/6 (Figura 16, Anexo B, pág. 76)	Clasifica cada elemento en base a las características similares que tenga con cada criatura (Figura 20, Anexo B, pág. 78)	Recoge las fracciones del laberinto, dos con distinto denominador y dos con el mismo. Después, ordénalas de menor a mayor, con el apoyo de la recta numérica (Figura 24, Anexo B, pág. 81)	Relaciona cada recta numérica con su equivalente (Figura 28, Anexo B, pág. 83)

Figura 2. Ilustraciones de “Cero” y “Uno” creadas a mano. [Creación personal].

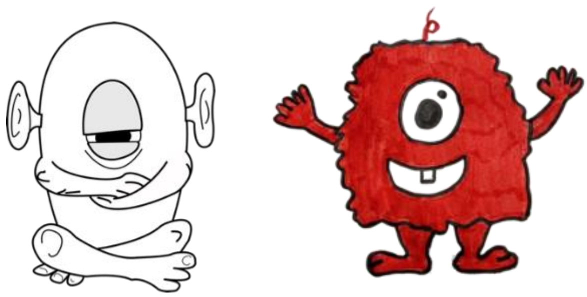


Figura 3. Temporalización de la situación de aprendizaje. [Creación personal].

	SEMANA 1	SEMANA 2	SEMANA 3	SEMANA 4	SEMANA 5
DÍA 1	Sesión introductoria: Somos Cero y Uno, ¿nos recuerdas?				
DÍA 2	Bloque temático de identificación. Sesión de **activación**: “*¿Sabéis cómo se llaman?*”	Bloque temático de representación. Sesión de **activación**: “*Todo marcado*”.	Bloque temático de comparación. Sesión de **activación**: “*Criaturas ocultas*”.	Bloque temático de ordenación. Sesión de **activación**: “*Cada criatura en su lugar*”.	Bloque temático de establecimiento de relaciones. Sesión de **activación**: “*¿Quién eres tú?*”
DÍA 3	Bloque temático de identificación. Sesión de **implementación**.	Bloque temático de representación. Sesión de **implementación**.	Bloque temático de comparación. Sesión de **implementación**.	Bloque temático de ordenación. Sesión de **implementación**.	Bloque temático de establecimiento de relaciones. Sesión de **implementación**.
DÍA 4	Bloque temático de identificación. Sesión de **repaso**.	Bloque temático de representación. Sesión de **repaso**.	Bloque temático de comparación. Sesión de **repaso**.	Bloque temático de ordenación. Sesión de **repaso**.	Bloque temático de establecimiento de relaciones. Sesión de **repaso**.
DÍA 5					Sesión final: Todo un mundo por descubrir.

Figura 4. Videojuego *“Fracciónate”*. [Creación personal].

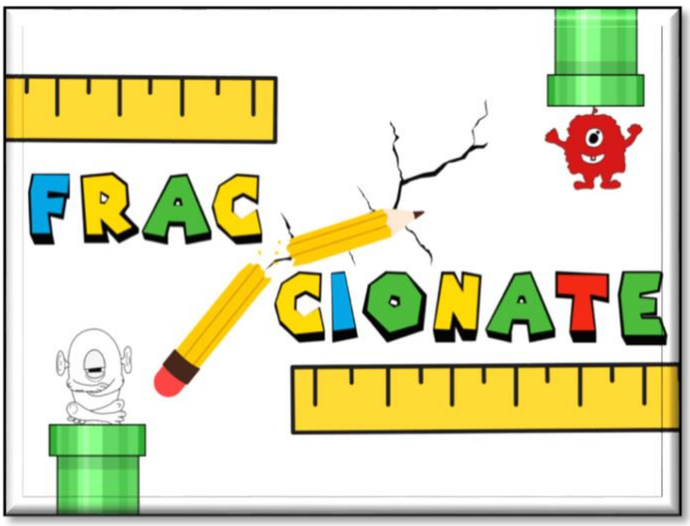


Figura 5. Cuento *“Un amigo de diez”*. [Creación personal].

Figura 6. Mapa principal del cuento *“Un amigo de diez”*. [Creación personal].

Figura 7. Estructura sesiones centrales. [Creación personal].

BLOQUE IDENTIFICACIÓN	BLOQUE REPRESENTACIÓN	BLOQUE COMPARACIÓN	BLOQUE ORDENACIÓN	BLOQUE ESTABLECIMIENTO DE RELACIONES
Sesión C de **activación**: “*¿Sabéis cómo se llaman?*”	Sesión de **activación**: “*Todo marcado*”.	Sesión de **activación**: “*Criaturas ocultas*”.	Sesión de **activación**: “*Cada criatura en su lugar*”.	Sesión de **activación**: “*¿Quién eres tú?*”
Sesión de **implementación**.	Sesión de **implementación**.	Sesión de **implementación**.	Sesión de **implementación.**	Sesión de **implementación.**
Sesión de **repaso.**	Sesión de **repaso.**	Sesión de **repaso.**	Sesión de **repaso.**	Sesión de **repaso.**

Figura 8. Carátulas del videojuego en función del bloque temático: portada inicial, bloque de identificación, bloque de representación, bloque de comparación, bloque de ordenación y bloque de establecimiento de relaciones. [Creación personal].

Figura 9. Mundo uno del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de identificación. [Creación personal].

Figura 10. Nivel uno del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de identificación. [Creación personal].

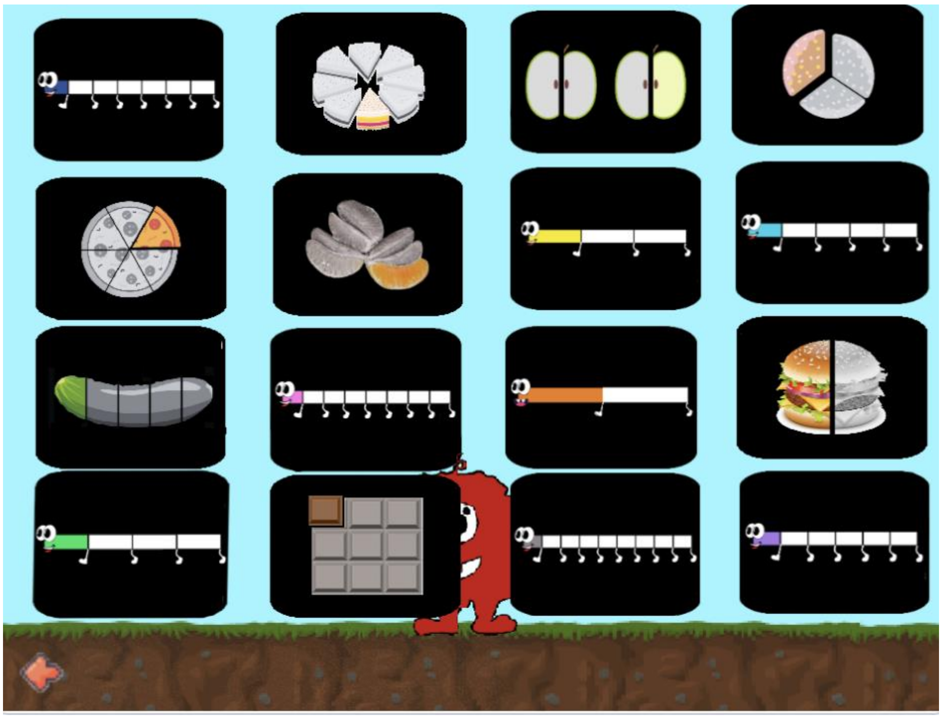


Figura 11. Nivel dos del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de identificación. [Creación personal].

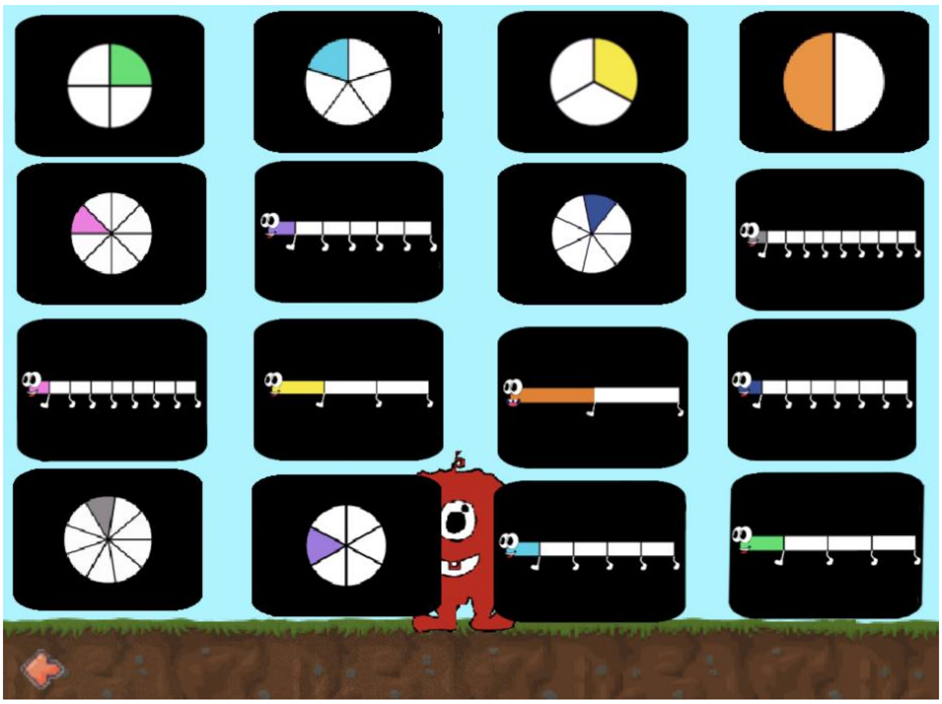


Figura 12. Nivel tres del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de identificación. [Creación personal].

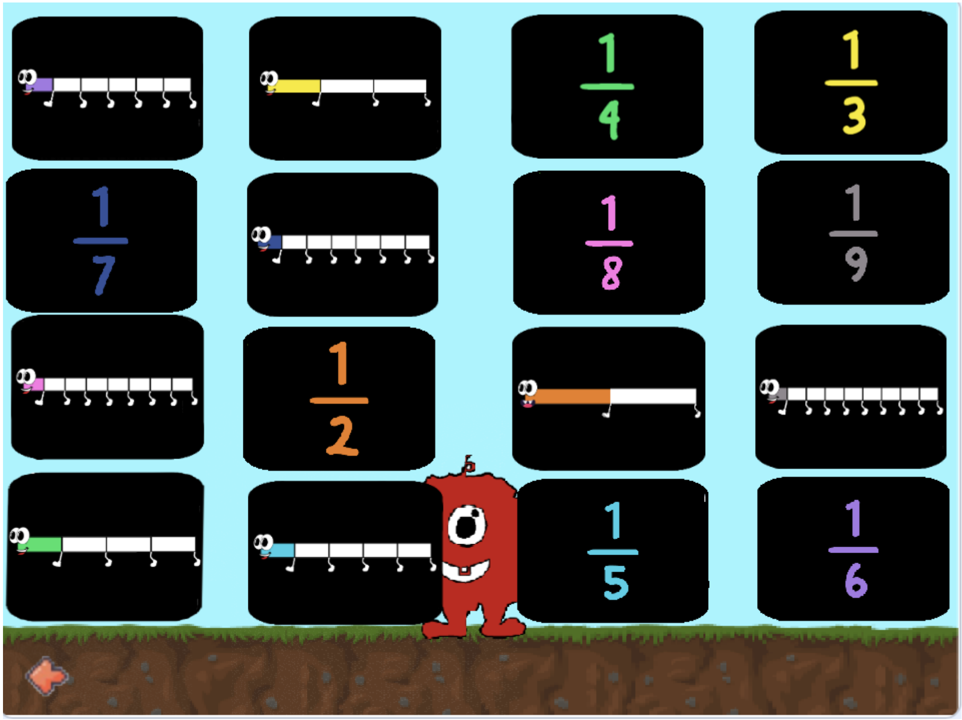


Figura 13. Mundo dos del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de representación. [Creación personal].

Figura 14. Nivel uno del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de representación. [Creación personal].

Figura 15. Nivel dos del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de representación. [Creación personal].

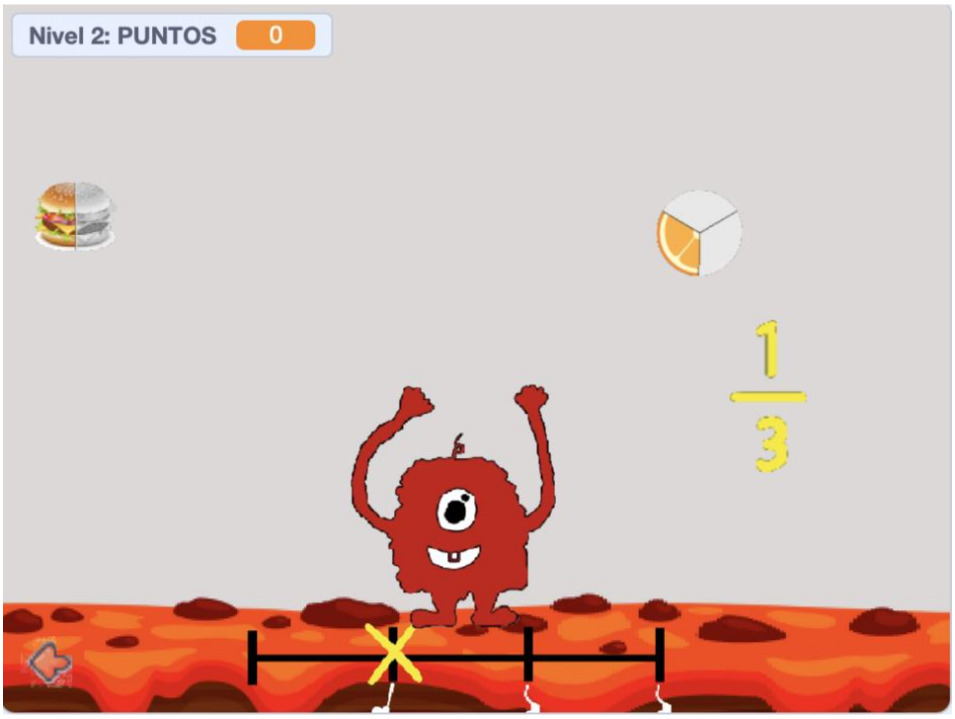


Figura 16. Nivel tres del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de representación. [Creación personal].

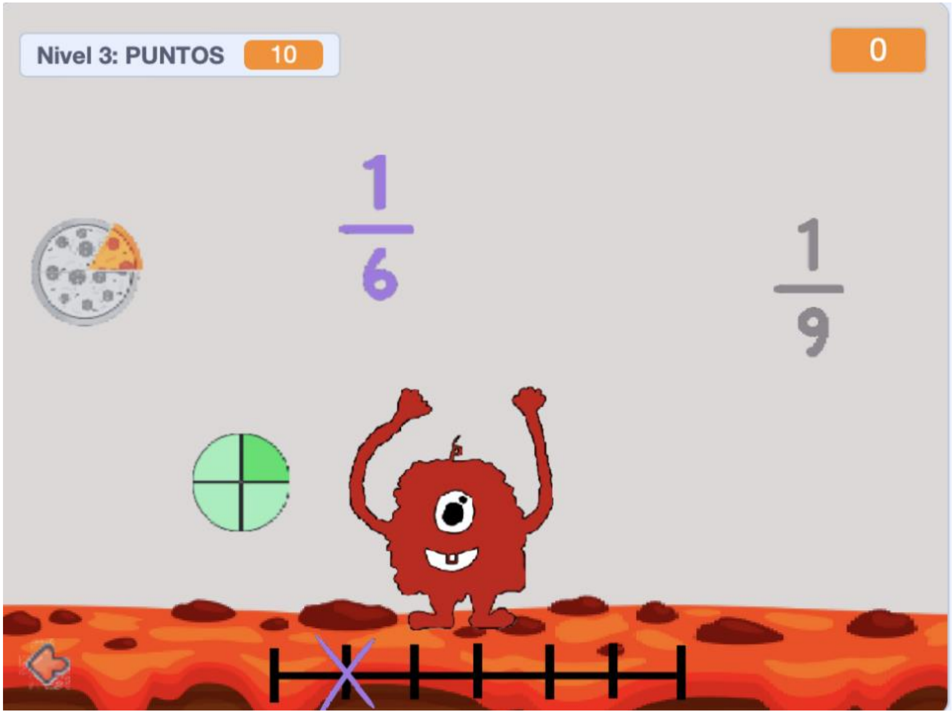


Figura 17. Mundo tres del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de comparación. [Creación personal].

Figura 18. Nivel uno del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de comparación. [Creación personal].

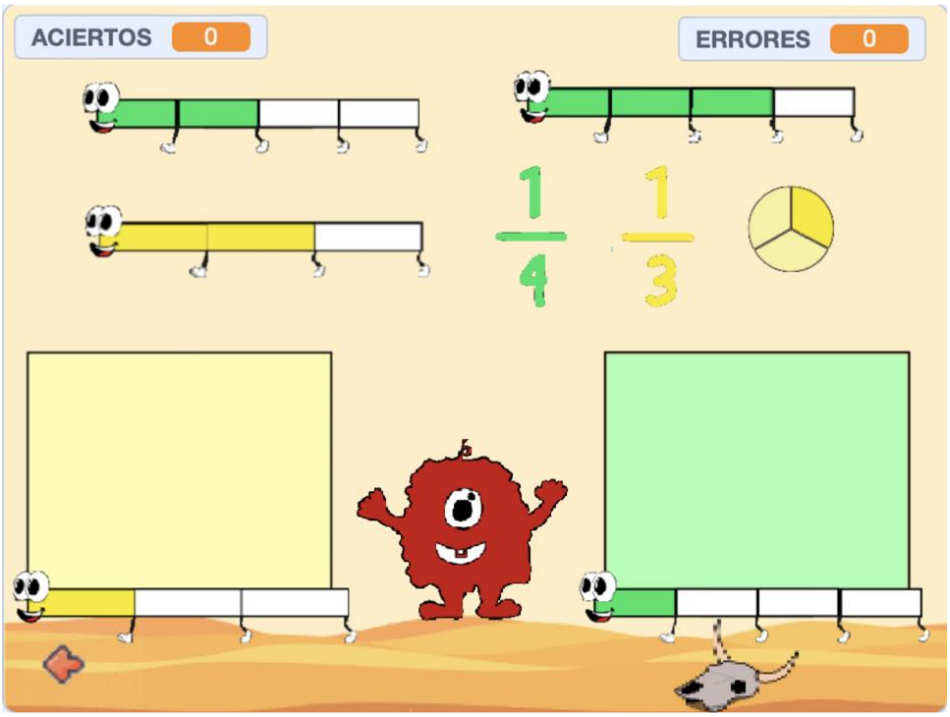


Figura 19. Nivel dos del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de comparación. [Creación personal].

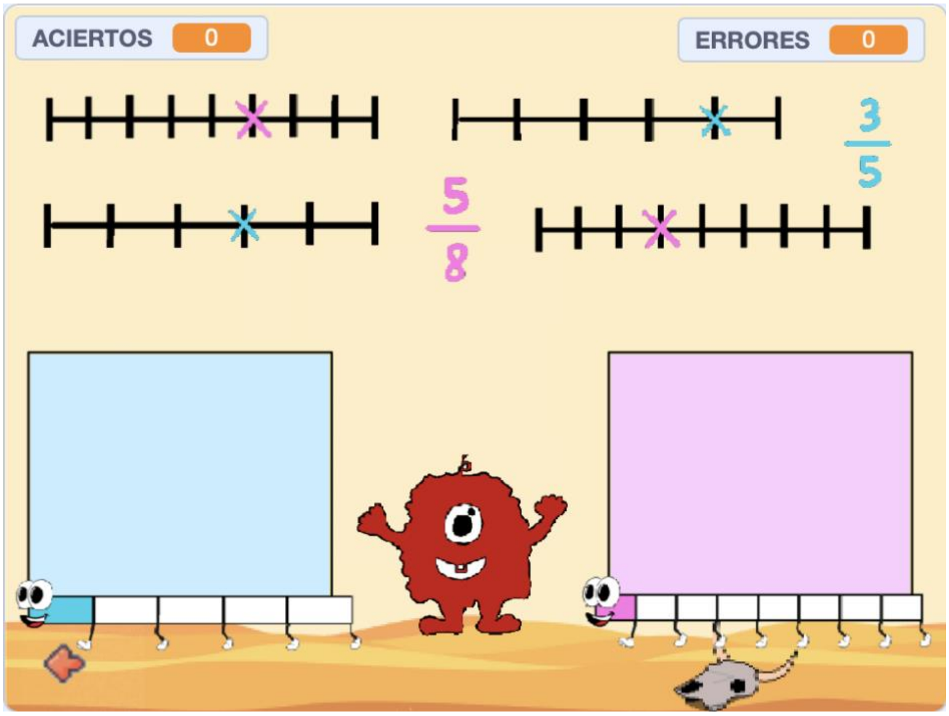


Figura 20. Nivel tres del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de comparación. [Creación personal].

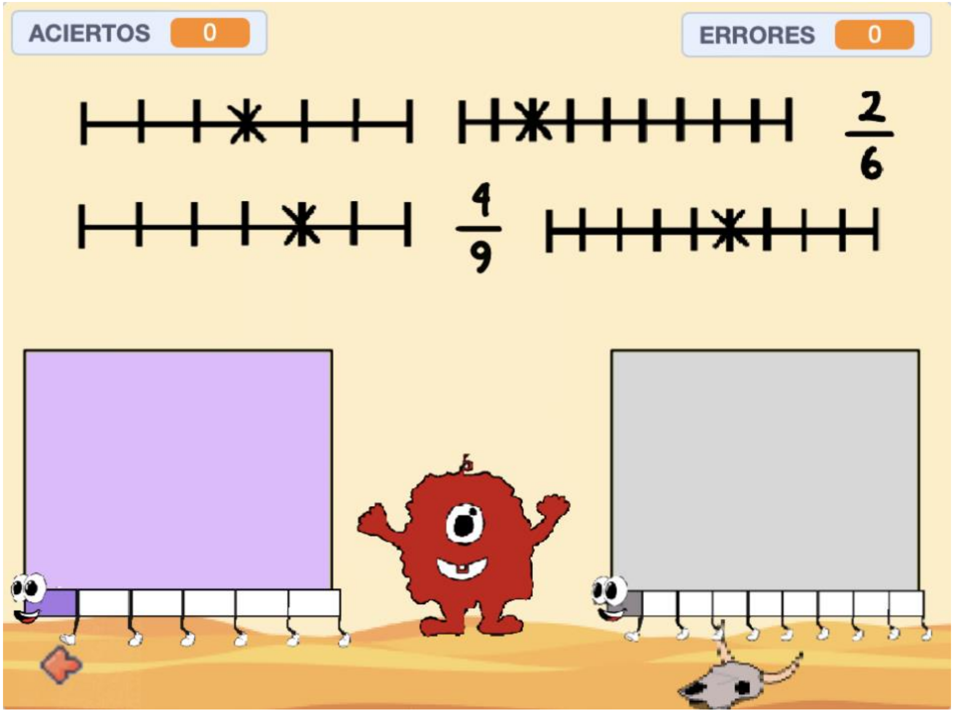


Figura 21. Mundo cuatro del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de ordenación. [Creación personal].

Figura 22. Nivel uno del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de ordenación. [Creación personal].

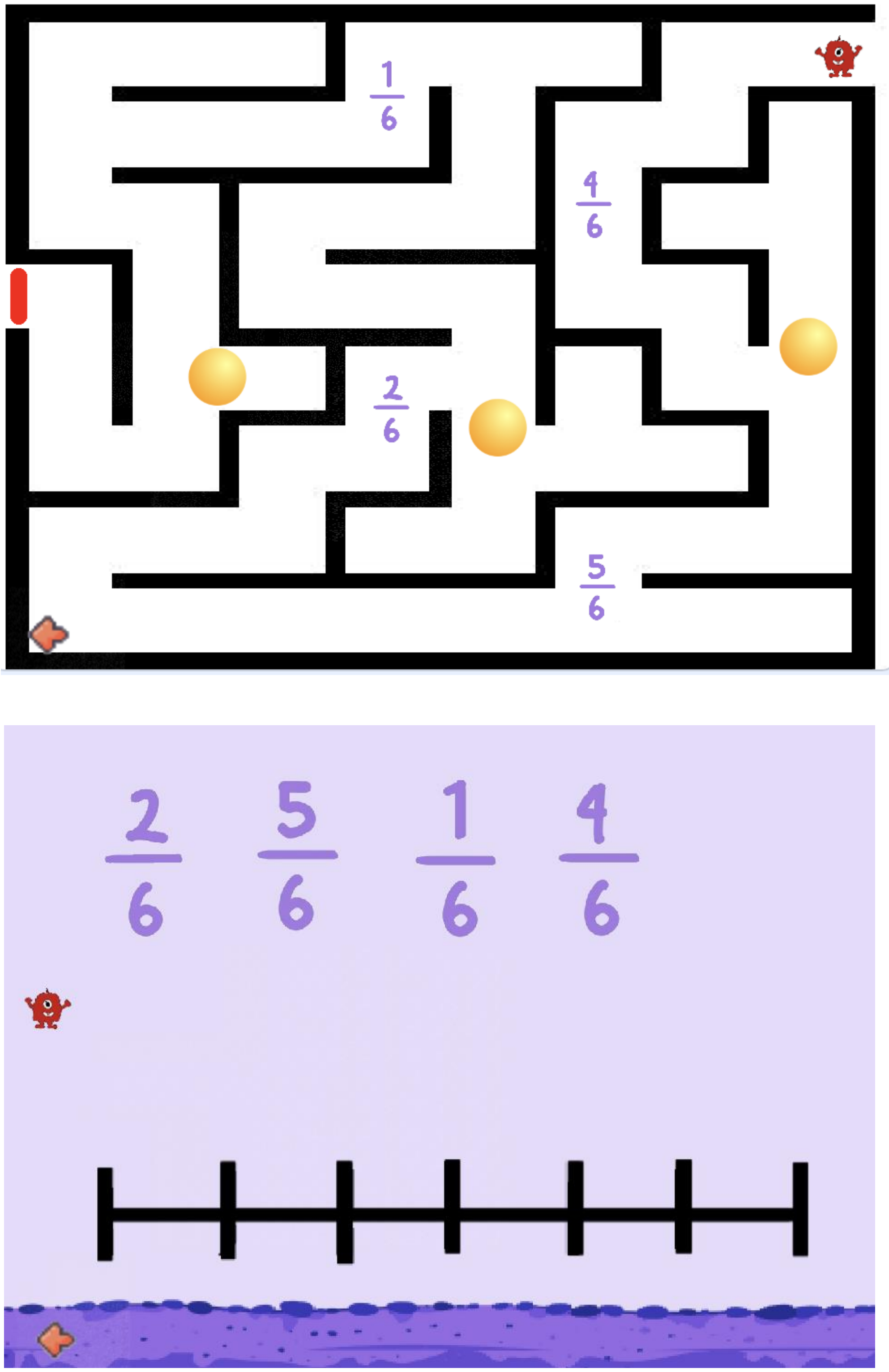


Figura 23. Nivel dos del videojuego *“Fracciónate”*, correspondiente al bloque temático de ordenación. [Creación personal].

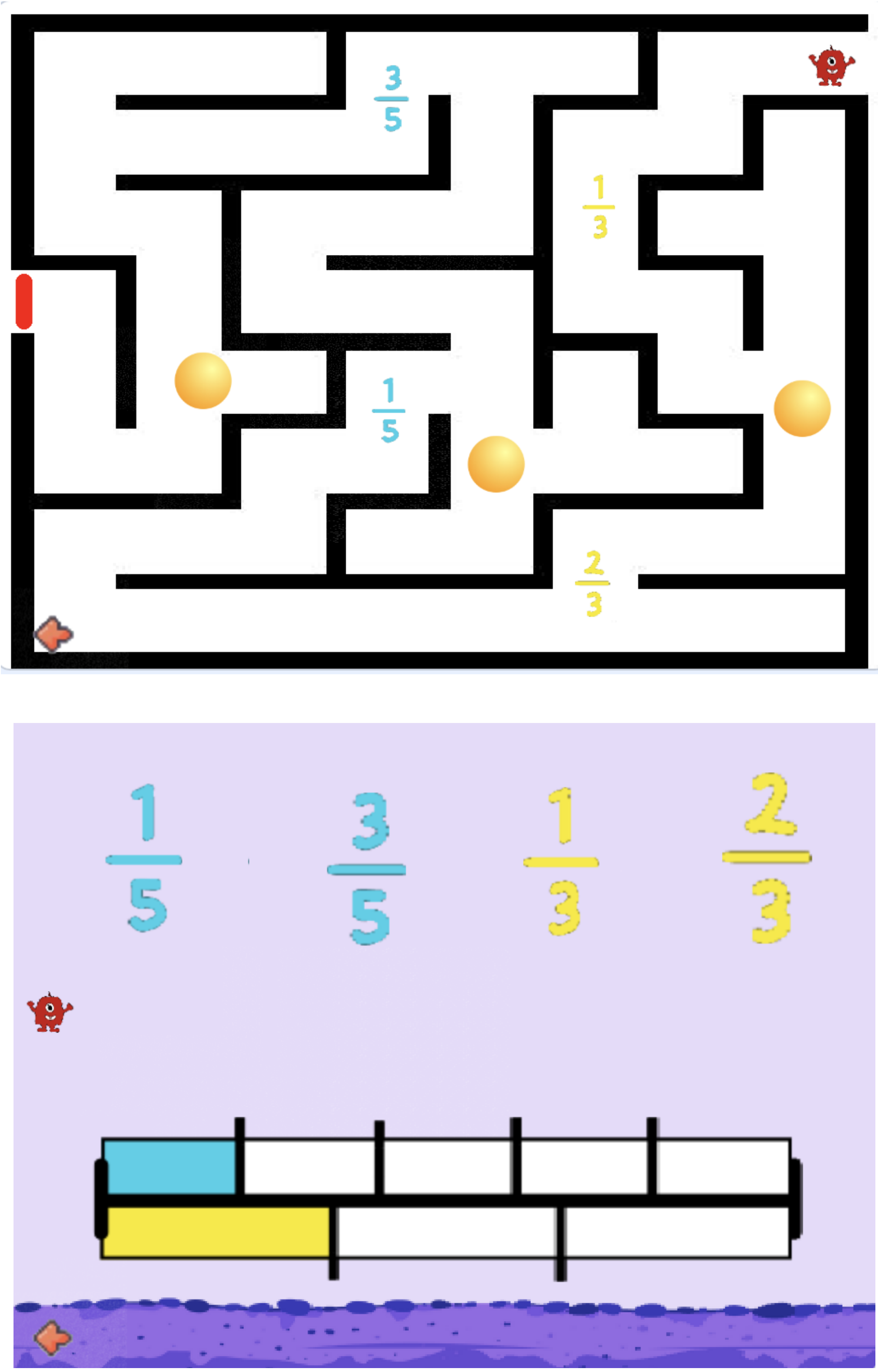
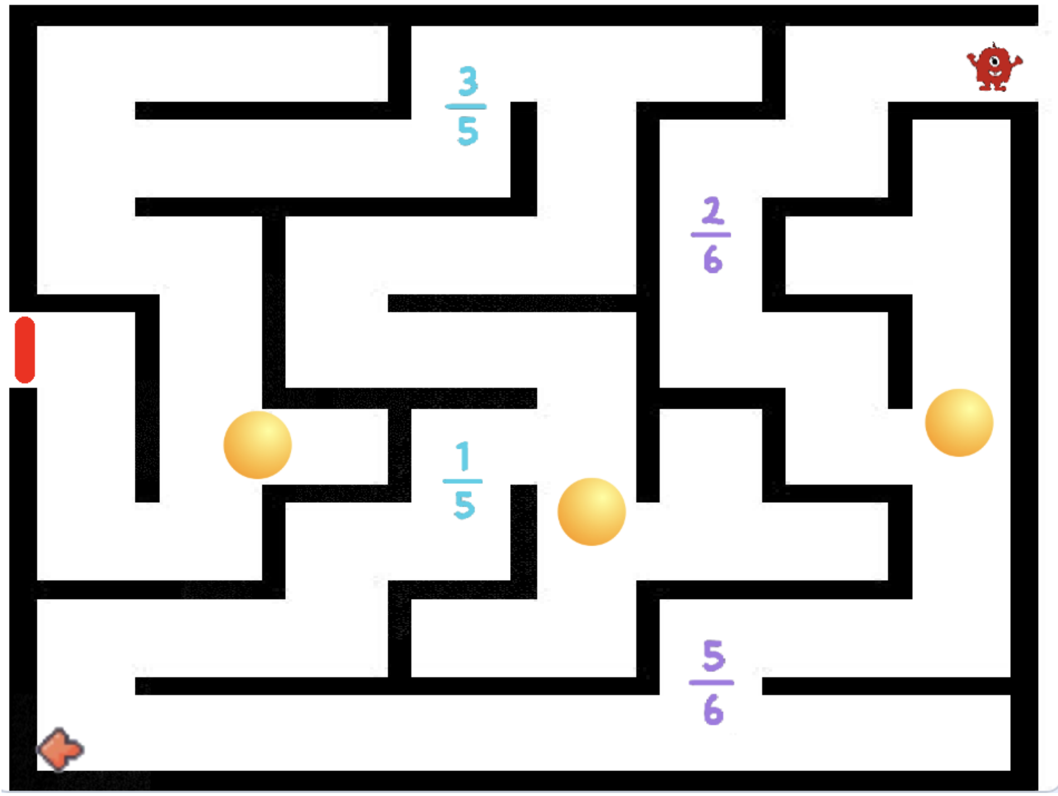


Figura 24. Nivel tres del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de ordenación. [Creación personal].



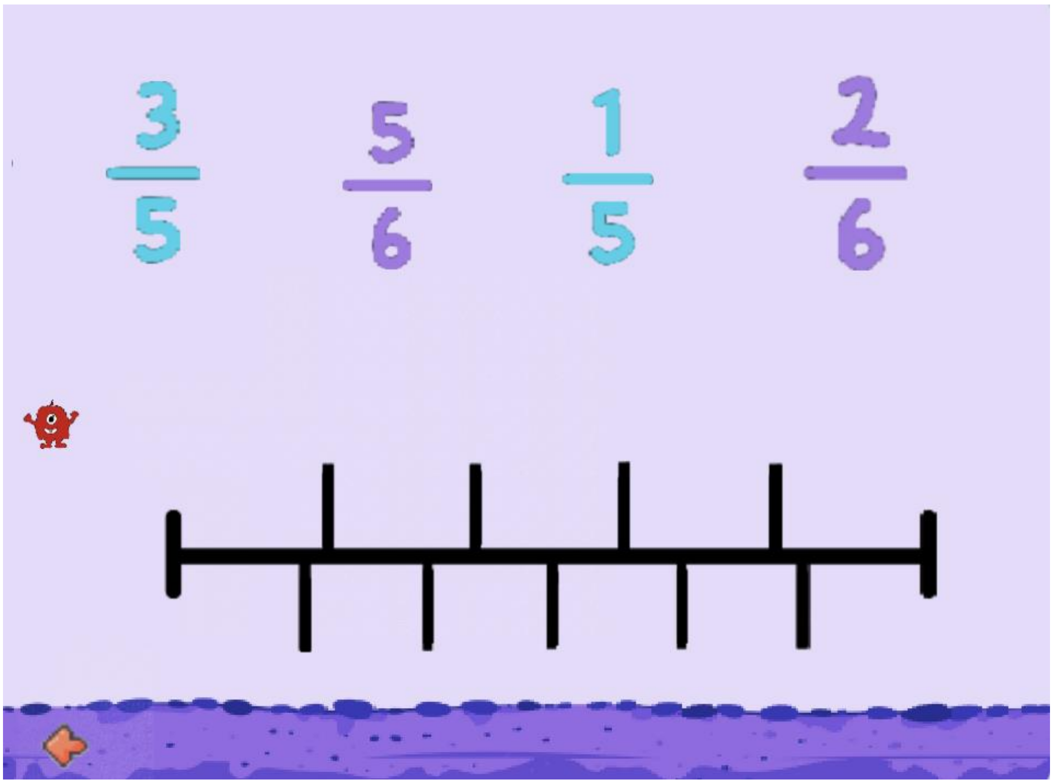


Figura 25. Mundo cinco del videojuego *"Fracciónate",* correspondiente al bloque establecimiento de relaciones. [Creación personal].

Figura 26. Nivel uno del videojuego *"Fracciónate",* correspondiente al bloque temático de establecimiento de relaciones. [Creación personal].

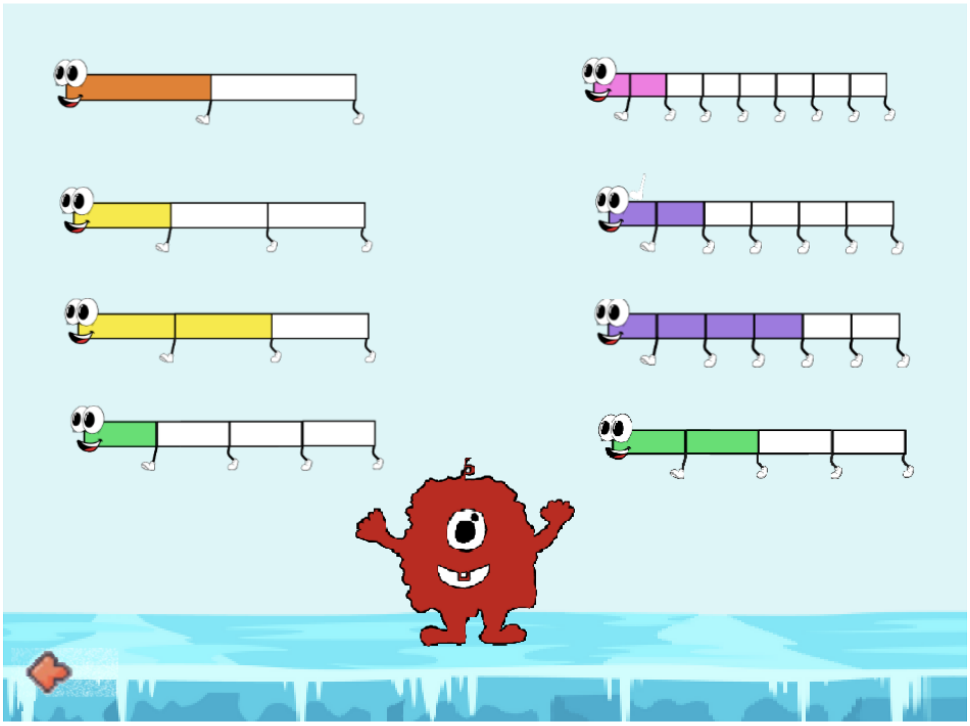


Figura 27. Nivel dos del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de establecimiento de relaciones. [Creación personal].

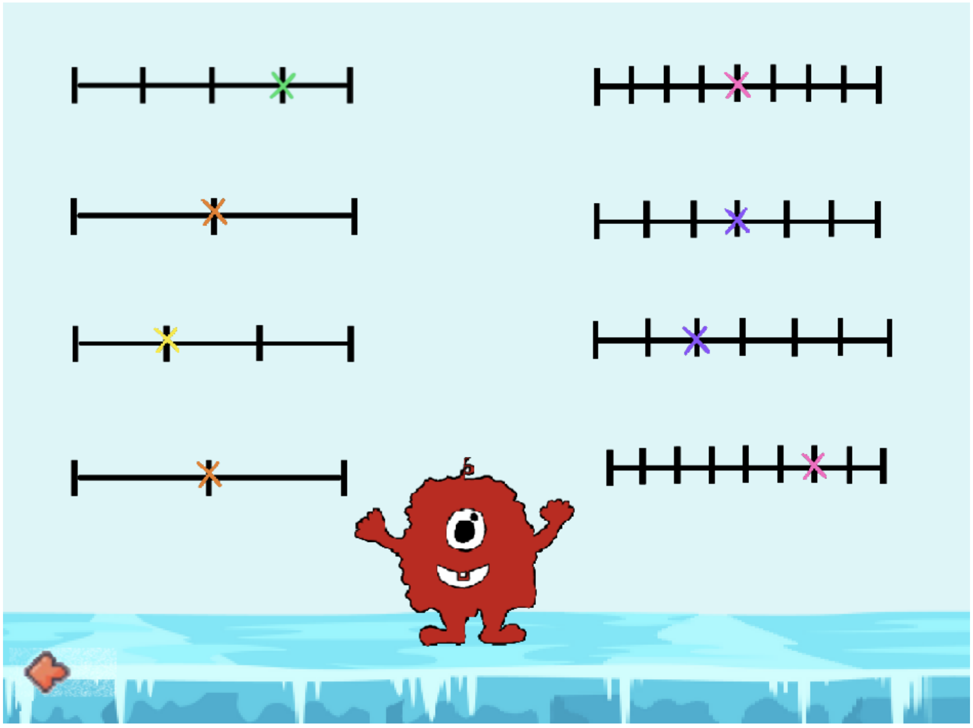
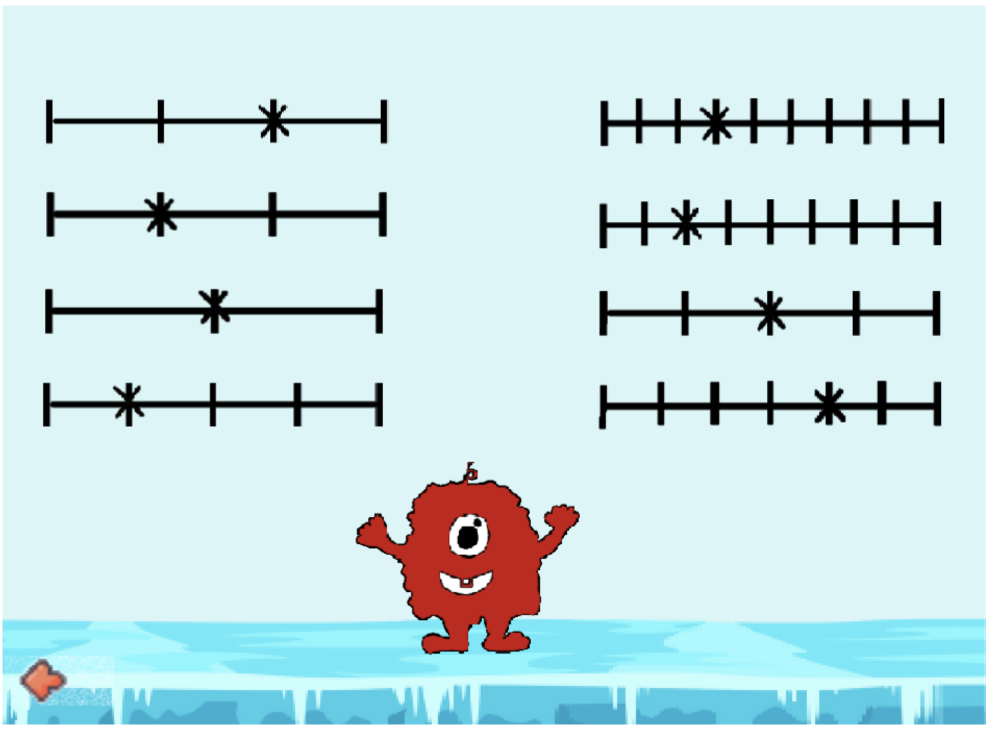


Figura 28. Nivel tres del videojuego *"Fracciónate"*, correspondiente al bloque temático de establecimiento de relaciones. [Creación personal].



ANEXO C. Sesión introductoria: Somos Cero y Uno, ¿nos recuerdas?

Tabla 1. Actividad *"Un nuevo mundo, un nuevo lugar".* [Creación personal]

SESIÓN INTRODUCTORIA: Somos Cero y Uno, ¿nos recuerdas?
TÍTULO: *"Un nuevo mundo, un nuevo lugar"*
OBJETIVOS: • Identificar las similitudes entre distintas representaciones de fracciones propias. • Identificar las diferencias entre distintas representaciones de fracciones propias. • Comprender el lugar que ocupa el conjunto de las fracciones propias en la recta numérica.
RECURSOS HUMANOS: Todo el grupo o clase.
RECURSOS MATERIALES: Peluche de "Cero", peluche de "Uno", nueve criaturas que representan las fracciones propias (Figura 1, Anexo F, pág. 100), vídeo introductorio del videojuego (Figura 2, Anexo F, pág.100), mapa de los mundos del cuento *"Un amigo de diez"* (Figura 6, Anexo B, pág. 71), recta numérica del cero al diez (Figura 3, Anexo F, pág.100), folios, pinturas y rotuladores.
RECURSOS ESPACIALES: El aula.
DURACIÓN: 40 minutos.
DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD: En un primer momento, con el fin de comprobar si todos los alumnos han sido capaces de comprender la información más relevante del vídeo visualizado (Figura 2, Anexo F, pág.100), el docente les pedirá que, por grupos, parejas o de manera individual, recojan las respuestas a las siguientes preguntas: *¿quiénes son "Cero" y "Uno" ?, ¿qué características tienen? y ¿cuál es su gran problema?* En base a la respuesta de esta última pregunta y, por tanto, para poder ayudar a "Cero" y "Uno" a descubrir dónde están, el docente solicitará a los alumnos que, entre todo el caos del aula, traten de buscar si hay más criaturas escondidas que nos puedan proporcionar pistas sobre su ubicación. En consecuencia, será durante esta búsqueda cuando los alumnos comenzarán a sentirse parte de la historia, ya que parecerá como si la clase se hubiese convertido en el misterioso y desconocido lugar en el que se encuentran los protagonistas. Es relevante destacar que las criaturas que deben encontrar los alumnos, las cuales, al igual que "Cero" y "Uno", habrán sido colocadas de manera previa al inicio de la sesión; son, concretamente, nueve, cada una de las cuales representa una fracción propia diferente (Figura 1, Anexo F, pág.100). Una vez que hayan conseguido encontrarlas todas, se iniciará un diálogo, en el que, de manera conjunta y guiada por el docente, reflexionarán sobre las características generales que presentan, centrándose,

principalmente, en las similitudes (mismo tamaño, mismo número de patas que de partes…) y las diferencias (el número de patas, el color de la cabeza…) que hay entre cada una de ellas.

Posteriormente, con el fin de descubrir si las criaturas encontradas pertenecen a alguno de los mundos que "Cero" y "Uno" habían descubierto hasta llegar a este nuevo lugar, el docente sacará el mapa de los mundos (Figura 6, Anexo B, pág. 71) perteneciente al cuento *"Un amigo de diez",* e irá preguntando, criatura por criatura, si pertenecen o no a cada uno de ellos y por qué no pueden pertenecer. Cabe destacar que, además del mapa, se usará una recta numérica de los números enteros del uno al diez (Figura 3, Anexo F, pág.100), donde cada división se corresponderá con uno de los mundos del cuento.

Una vez que todos los alumnos, hayan reflexionado y entendido, a través de diversos ejemplos. por qué el lugar en el que se encuentran los personajes no puede ser ni el "mundo del uno", ni el "mundo del cero", ni tampoco ninguno de los conocidos hasta el momento, deberán de intentar averiguar de qué lugar se trata.

Para ello, se recordará a los alumnos que, tal y como se muestra en la historia del vídeo visualizado, "Cero" y "Uno" se perdieron de camino al "mundo del cero". De este modo, se les hará reflexionar sobre la idea de que es entre esos dos mundos, por tanto, donde deben hallarse.

Dicha reflexión terminará de la siguiente manera: *parece que "Cero" y "Uno" han descubierto un nuevo lugar, ¿existirán más mundos que los conocidos hasta el momento?*

Finalmente, tomando como referencia la pregunta planteada, el docente pedirá a los alumnos que dibujen cómo creen que podría ser el nuevo lugar descubierto por "Cero" y "Uno", donde habitan las nueve criaturas encontradas, a quienes iremos conociendo a lo largo de toda la propuesta.

ANEXO D. Sesiones centrales de activación: "Bloque temático de…"

Tabla 1. Sesión central de activación: *"¿Sabéis cómo se llaman?"* Bloque temático de identificación. [Creación personal].

SESIÓN CENTRAL DE ACTIVACIÓN: Bloque de **IDENTIFICACIÓN**
TÍTULO: *"¿Sabéis cómo se llaman?"*
OBJETIVOS: • Comprender la necesidad y utilidad del conjunto de las fracciones. • Asociar diferentes representaciones de fracciones propias. • Conocer el nombre y la grafía de 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8 y 1/9. • Comprender la relación entre numerador y denominador en una fracción propia, y cómo esta relación se refleja en su representación en la recta numérica. • Construir conjuntos equivalentes a unos dados.
RECURSOS HUMANOS: Todo el grupo o clase.
RECURSOS MATERIALES: Carta con la situación de la sesión de activación del bloque temático de identificación (Figura 4, Anexo F, pág.101), nueve criaturas que representan las fracciones propias (Figura 1, Anexo F, pág.100), objetos o flashcards que representen 1/2, 1/3,1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8 y 1/9 (Figura 5, Anexo F, pág. 101), folios, pinturas, rotuladores, tijeras, pegamentos, plastilina y gomets.
RECURSOS ESPACIALES: El aula.
DURACIÓN: 1 hora.
DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN: Cuando los alumnos entren al aula se encontrarán una carta en la que se describe la siguiente situación (Figura 4, Anexo F, pág.101): *"Cero" y "Uno" ya han conocido a las nueve criaturas encontradas en este nuevo lugar. Saben que no pertenecen a ninguno de los mundos por los que ellos han pasado hasta el momento y que, probablemente, el lugar donde se encuentran está entre el "mundo del cero" y el "mundo del uno".* *Ya están un paso más cerca de descubrir cuál es este nuevo y desconocido sitio. Sin embargo, aún les queda mucho por averiguar, ya que ni siquiera saben los nombres de las criaturas encontradas, algo que es verdaderamente importante. Por ese motivo, nos han escrito a nosotros, para que les ayudemos a descubrir los nombres de cada una de ellas. ¿Creéis que seremos capaces de ayudarles?* Tras la respuesta afirmativa de los alumnos, con el fin de activar sus conocimientos previos, así como de reforzar los contenidos trabajados en la sesión introductoria, el docente sacará las nueve criaturas encontradas durante la puesta en marcha de la actividad *"Un nuevo mundo, un nuevo lugar"* (Tabla 1, anexo C, pág. 84) y realizará las siguientes preguntas sobre cada una de ellas: *¿qué características tiene esta criatura?; ¿en qué*

se parece a…?; ¿en qué se diferencia de….?; ¿podría pertenecer al mundo del…?; ¿por qué motivo no podría?; teniendo en cuenta todo lo mencionado, ¿cómo crees que se podría llamar? Partiendo de esta última pregunta, el docente sacará de la maleta que se encontraba el primer día junto "Cero" y "Uno" nueve elementos cotidianos o flashcards (Figura 5, Anexo F, pág. 101), que representen la misma cantidad que cada una de las criaturas. De este modo, los alumnos deberán averiguar con qué objeto se identifica cada criatura. Será por medio de esta actividad, por tanto, como el profesor tratará de hacerles entender a los alumnos la necesidad de los números fraccionarios. Y es que, para poder representar la cantidad exacta de cada una de las imágenes y, por ende, de cada una de las criaturas, es necesario utilizar números que nos permitan expresar cantidades no necesariamente enteras, siendo estos números, entre otros, el conjunto de las fracciones. Una vez establecidas todas las relaciones, se les hará reflexionar sobre el nombre que reciben cada uno de los objetos o de las representaciones de las flashcards en la vida real, llevándoles así a deducir el nombre que reciben cada una de las criaturas encontradas. Cabe destacar que, además del nombre de cada una de ellas, se les indicará la grafía, relacionando esta con sus principales características (mismo número de patas y de partes que el denominador, mismo número de partes destacadas que el numerador). Después de abordar el nombre, la grafía y las características de cada una de las nueve criaturas se pedirá a los alumnos que, de manera individual, dibujen objetos o personajes con características similares a las criaturas y a los objetos vistos. Para ello, el docente pondrá a disposición de todos ellos diferentes materiales, como folios, pinturas, rotuladores, tijeras, pegamentos, plastilina y gomets. Y es que, se les dejará total libertad en la selección del formato, pudiendo ser tanto un dibujo, como estar hecho con plastilina o con recortes de papel. Finalmente, una vez que todos los alumnos de la clase hayan realizado su creación, por turnos, deberán ir explicando al resto de sus compañeros cuáles son las características que tiene, por las cuales se considera que puede formar parte de este nuevo y desconocido mundo. Asimismo, deberán indicar, tanto el nombre, como la grafía. Cabe destacar que, durante las explicaciones, se podrán ir comparando las diferentes elaboraciones, tanto entre ellas, como con las nueve criaturas encontradas por el aula. De esta forma, los alumnos deberán ser capaces de detectar las similitudes y las diferencias que hay entre ellos, y, por tanto, irán identificando las características de los diferentes tipos de fracciones propias. Asimismo, es relevante señalar que, al finalizar esta sesión, se habrán creado diversos objetos y criaturas pertenecientes a este nuevo lugar, los cuales serán necesarios para el trabajo de los siguientes bloques y, por tanto, de las siguientes sesiones, tanto de activación, como de repaso.

Tabla 2. Sesión central de activación: *"Todo marcado"*. Bloque temático de representación. [Creación personal].

SESIÓN CENTRAL DE ACTIVACIÓN: Bloque de **REPRESENTACIÓN**
TÍTULO: *"Todo marcado"*

OBJETIVOS:

- Interpretar e identificar fracciones propias en diferentes contextos visuales.
- Representar las fracciones propias de 1/2, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8 y 1/9 en la recta numérica.
- Asociar diferentes representaciones de fracciones propias con sus correspondientes representaciones en la recta numérica.
- Identificar patrones en la representación de fracciones propias en la recta numérica.

RECURSOS HUMANOS: Todo el grupo o clase.

RECURSOS MATERIALES: Carta con la situación de la sesión de activación del bloque temático de representación (Figura 6, Anexo F, pág. 102), nueve criaturas que representan las fracciones propias (Figura 1, Anexo F, pág.100), recta numérica del cero al uno (Figura 7, Anexo F, pág.102), folios, rotuladores, pinturas, cartones de bingo con rectas numéricas representadas (Figura 8, Anexo F, pág.103), tarjetas con fracciones propias (Figura 9, Anexo F, pág.103) para el bingo, bolsa de tela.

RECURSOS ESPACIALES: El aula.

DURACIÓN: 1 hora.

DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN:

Cuando los alumnos entren al aula se encontrarán una carta en la que se describe la siguiente situación (Figura 6, Anexo F, pág.102): *"Cero" y "Uno" ya han descubierto los nombres de las nueve criaturas encontradas en este nuevo y desconocido lugar. Saben cómo se escriben cada uno de estos nombres, tanto en letras como en números, y conocen las características principales que definen a cada una de las criaturas encontradas.*

Están seguros de que todas ellas se encuentran en algún punto entre el "mundo del cero" y el "mundo del uno", sin embargo, aún no saben la ubicación exacta de cada una de ellas. Por esta razón, nos han escrito a nosotros de nuevo, para ver si podemos ayudarles a determinar el lugar exacto dónde se ubican cada una de estas nueve misteriosas criaturas. ¿Creéis que seremos capaces de ayudarles?

Tras la respuesta afirmativa de los alumnos, y con el objetivo de activar sus conocimientos previos y reforzar los contenidos trabajados en las sesiones del bloque anterior, el docente sacará las nueve criaturas encontradas. Después, pedirá a los alumnos que saquen las creaciones realizadas durante la sesión de activación titulada *"¿Sabéis cómo se llaman?"* (Tabla 1, Anexo D, pág. 87), y comenzará a realizarles las siguientes preguntas sobre cada una de ellas: *¿con qué criatura se identifica el personaje u objeto que has creado?, ¿qué características tienen ambas representaciones?, ¿cómo se llama la criatura con la que se identifica? y ¿cuál es su grafía?*

Una vez que todos hayan respondido a las preguntas planteadas, se les formulará, de manera general, la siguiente cuestión: *¿en qué lugar del nuevo mundo, creéis que podría encontrarse el personaje u objeto que habéis creado y, por tanto, la criatura con la cual se identifica?*

Para responder a esta pregunta, el docente sacará una recta numérica, a modo de camino, y pedirá a los alumnos que, siguiendo sus indicaciones creen su propia recta, la cual deberá ir desde el cero hasta el uno (Figura 7, Anexo F, pág.102), ya que, como ya vimos en la actividad de la sesión introductoria, es en este tramo donde se encuentran todas y cada una de las nueve criaturas encontradas.

Será una vez creada la recta, por tanto, cuando cada uno de los alumnos deberán colocar un gomet en el lugar que crean que corresponde, tanto al personaje u objeto creado, como a la criatura con la que se relaciona. Cabe destacar que, aquellos que quieran, tendrán la oportunidad de explicar dónde lo han colocado y el motivo por el que lo han puesto allí. Además, el resto de los alumnos podrán hacer intervenciones a los compañeros que van saliendo, exponiendo si están o no de acuerdo y por qué. Tras las explicaciones de los alumnos, el docente mostrará la manera correcta de ubicar tanto las criaturas, como cualquier tipo de representación: dividiendo la recta que va del cero al uno, en tantas divisiones como objetos o partes haya, y marcando la división que se corresponda con el número de partes u objetos que están destacados. Finalmente, para comprobar que han entendido la explicación y que son capaces de reconocer las representaciones de las criaturas, los personajes y los objetos en la recta numérica, se llevará a cabo un juego, el cual se explica, detalladamente, a continuación. Para comenzar, se entregará a cada alumno un cartón de bingo con varias rectas numéricas representadas en él (Figura 8, Anexo F, pág.103). Una vez que todos tengan su cartón, el docente irá sacando de una bolsa diferentes tarjetas, cada una de las cuales contendrá la representación de uno de los objetos, criaturas o personajes, es decir, de una fracción diferente, la cual se mostrará junto con su grafía (Figura 9, Anexo F, pág.103). En consecuencia, a medida que el docente vaya sacando cada una de las tarjetas de la bolsa, irá diciendo el nombre de la fracción en voz alta y mostrará su representación en la pizarra digital. Será al escuchar el nombre y al ver la representación, por tanto, cuando los alumnos deberán comprobar si pueden marcar dicha fracción en alguna de las rectas numéricas de su cartón. En caso de que sí que puedan, deberán marcarla correctamente y, en caso de que no, deberán esperar a que el docente saque la siguiente tarjeta. El primero que complete todas las casillas, deberá gritar "todo marcado" y salir a la pizarra a explicar cada una de las fracciones que ha marcado y como lo ha hecho. De esta forma, todos los alumnos podrán comprobar si el bingo cantado es o no correcto. En el caso de que no lo sea, se corregirá al alumno el fallo que ha tenido y se continuará con la partida que se estaba llevando a cabo. Por el contrario, en caso de que sí que lo sea, la partida que se estaba jugando se dará por finalizada y, si sobra tiempo, se podrá llevar a cabo una nueva partida.

Tabla 3. Sesión central de activación: *“Criaturas ocultas*” Bloque temático de comparación. [Creación personal].

SESIÓN CENTRAL DE ACTIVACIÓN: Bloque de COMPARACIÓN
TÍTULO: *“Criaturas ocultas”*
OBJETIVOS: • Identificar y reconocer diferentes fracciones propias. • Representar fracciones propias en la recta numérica con precisión. • Reconocer las características de la representación, en la recta numérica, de fracciones propias. • Establecer relaciones de similitud y diferencia entre fracciones propias diferentes. • Asociar representaciones de fracciones propias en la recta numérica con las características de otras representaciones.

RECURSOS HUMANOS: Todo el grupo o clase.
RECURSOS MATERIALES: Carta con la situación de la sesión de activación del bloque temático de comparación (Figura 10, Anexo F, pág. 104), nueve criaturas que representan las fracciones propias (Figura 1, Anexo F, pág.100), recta numérica del cero al uno (Figura 7, Anexo F, pág.102), pistas sobre las ubicaciones de cada criatura (Figura 11, Anexo F, pág.104), nuevas criaturas (Figura 12, Anexo F, pág.105), fichas con las representaciones de distintas fracciones propias en la recta numérica (Figura 13, Anexo F, pág.105).
RECURSOS ESPACIALES: El aula.
DURACIÓN: 1 hora.
DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN: Cuando los alumnos entren al aula se encontrarán una carta en la que se describe la siguiente situación (Figura 10, Anexo F, pág. 104): *"Cero" y "Uno" ya han descubierto los lugares específicos donde se ubican cada una de las nueve criaturas. Por este motivo, han decidido llevar a cada una de ellas a su sitio correspondiente.* *Al llegar, se encontraron con una gran sorpresa: no estaban solos. Resulta que estas nueve criaturas no vivían aisladas, sino que en este mundo había muchas más criaturas, escondidas alrededor de cada uno de los lugares específicos en los que se ubicaban cada una de las nueve encontradas inicialmente.* *¿Quiénes serán estas nuevas y misteriosas criaturas? Con el fin de averiguarlo, nos han escrito a nosotros para pedirnos nuestra ayuda, ¿creéis que seremos capaces de averiguar quiénes son y dónde se esconden?* Tras la respuesta afirmativa de los alumnos, y con el objetivo de activar sus conocimientos previos y reforzar los contenidos trabajados en las sesiones del bloque anterior, el docente sacará las nueve criaturas encontradas. Después, pedirá a los alumnos que saquen la recta numérica realizada durante la sesión de activación titulada *"Todo marcado"* (Tabla 2, Anexo D, pág. 87). A continuación, les realizará las siguientes preguntas sobre cada criatura: *¿quién es?, ¿cómo se llama?, ¿qué características tiene? y ¿cuál es el sitio exacto en el que se ubica?* Para responder a esta última pregunta, en cada uno de los nueve casos, el docente pedirá a un alumno distinto que, apoyándose en la recta numérica pintada en la pizarra (Figura 7, Anexo F, pág.101), indique cuál es el lugar exacto en el que se ubica la criatura en cuestión, así como cuál es su correspondiente grafía. De esta forma, no solo se trabajará la representación de la ubicación exacta, sino también la correspondencia de dicha representación con su grafía. Cabe destacar que, mientras el alumno seleccionado marca el lugar exacto en el que se ubica la criatura que le ha tocado, el resto de los alumnos podrán ir realizando el mismo proceso, individualmente, en una pequeña pizarra blanca. Posteriormente, cuando se hayan colocado todas las criaturas en la ubicación exacta y, por tanto, una vez que se hayan activado los conocimientos previos de los alumnos, el docente dividirá a la clase en nueve parejas o tríos. Una vez divididos, les pedirá que busquen a las nuevas criaturas alrededor de cada una de las ubicaciones en las que se encuentran las criaturas que ya conocen. Para ello, les dará a cada pareja o trío una tarjeta con una serie de pistas (Figura 11, Anexo F, pág.103), en las que se indicará el lugar exacto del aula correspondiente a cada una de estas nueve ubicaciones.

Con las pistas en mano, los alumnos comenzarán su búsqueda. Como hemos mencionado anteriormente, deberán explorar alrededor del lugar de cada criatura principal para encontrar las nuevas criaturas (Figura 12, Anexo F, pág.105). Por ejemplo, cerca del lugar donde se encuentra la criatura 1/3, encontrarán a la nueva criatura 2/3; de manera similar, alrededor del lugar de la criatura 1/4, podrán encontrar las criaturas 2/4 y 3/4; y así sucesivamente para cada personaje.

Una vez que todas las nuevas criaturas hayan sido encontradas, se iniciará un diálogo, en el que, de manera conjunta y guiada por el docente, reflexionarán sobre las características que presentan cada una de ellas en comparación con las nueve criaturas encontradas inicialmente. Este análisis se centrará, principalmente en las similitudes, como el mismo tamaño, el mismo número de patas, y el mismo número de partes, y en las diferencias, como el color y el número de partes coloreadas. Para ello, el docente irá haciendo preguntas como las siguientes*: ¿qué características tiene esta nueva criatura?, ¿en qué se parece a…?, ¿en qué se diferencia de…?*

De este modo, a medida que los alumnos vayan comparando cada una de las criaturas, se les pedirá que las vayan agrupando en base a características similares, como pueden ser el color y el número de patas. Por consiguiente, la criatura 1/2, puede quedarse sola, mientras que la criatura 1/3 se agrupará con la criatura 2/3, y la criatura 1/4 se agrupará con las criaturas 2/4 y 3/4, y así sucesivamente.

Una vez establecidas todas las relaciones, se les hará reflexionar sobre el nombre que creen que podrían recibir cada una de las nuevas criaturas. Para ello, se les recordará la lógica detrás del nombre de las nueve criaturas encontradas inicialmente: el número de patas y partes corresponde al denominador, mientras que el número de partes destacadas corresponde al numerador. De este modo, los alumnos podrán deducir el nombre de cada nueva criatura. Además, se les mostrará la grafía correspondiente a cada uno de estos nombres, reforzando así su comprensión y conexión entre el nombre, la grafía y las características de cada criatura.

Finalmente, el docente explicará cómo representar cada nueva criatura en la recta numérica, y se realizará un breve juego para consolidar todos estos conocimientos. El objetivo de dicho juego será que los alumnos se agrupen con aquellos compañeros cuyas tarjetas tengan representaciones que compartan características similares. En consecuencia, de manera previa al inicio del juego, el docente repartirá a cada alumno una tarjeta con la representación en la recta numérica de una de las nuevas criaturas (Figura 13, Anexo F, pág.105). En cada una de las tarjetas se mostrará, por tanto, la representación en la recta numérica de diferentes fracciones, como pueden ser 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, entre otras.

Una vez que todos tengan su tarjeta, el docente explicará las reglas del juego: cada alumno debe observar su tarjeta y buscar a otros compañeros, cuyas tarjetas tengan alguna similitud con la suya. Para conseguirlo, tendrán un tiempo determinado en el que, caminando por el aula, deberán observar las tarjetas de sus compañeros y formar grupos basados en las similitudes identificadas. De este modo, un alumno con la tarjeta de 1/3 buscará a alguien con la tarjeta de 2/3, ya que ambas fracciones tienen el mismo denominador y, por tanto, pueden ser representadas de manera sencilla utilizando una sola recta numérica. De manera similar, un alumno con la tarjeta de 1/4 podría formar un grupo con quienes tienen las tarjetas de 2/4 y 3/4; y así sucesivamente.

Después de que todos los alumnos se hayan agrupado correctamente, el docente pedirá a cada grupo que explique por qué sus tarjetas están juntas, destacando las similitudes en sus representaciones. Este proceso ayudará a reforzar la comprensión de los conceptos adquiridos durante la sesión, así como la representación de diferentes fracciones en la recta numérica. Además, fomentará el trabajo colaborativo y el pensamiento crítico entre los alumnos.

Tabla 4. Sesión central de activación: *"Cada criatura en su lugar"* Bloque temático de ordenación. [Creación personal].

SESIÓN CENTRAL DE ACTIVACIÓN: Bloque de **ORDENACIÓN**
TÍTULO: *"Cada criatura en su lugar"*
OBJETIVOS: • Ubicar fracciones propias en la recta numérica con precisión. • Identificar, agrupar y ubicar fracciones propias con el mismo denominador en la recta numérica. • Ordenar fracciones de menor a mayor con el mismo denominador. • Ordenar fracciones de menor a mayor con distinto denominador. • Comprender la correspondencia entre la representación en la recta numérica de fracciones propias y sus grafías.
RECURSOS HUMANOS: Todo el grupo o clase.
RECURSOS MATERIALES: Carta con la situación de la sesión de activación del bloque temático de ordenación (Figura 14, Anexo F, pág.106), nueve criaturas que representan las fracciones propias (Figura 1, Anexo F, pág.100) nuevas criaturas (Figura 12, Anexo F, pág.105), recta numérica del cero al uno (Figura 7, Anexo F, pág.102), pizarras blancas, rotuladores de pizarra blanca.
RECURSOS ESPACIALES: El aula.
DURACIÓN: 1 hora.
DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN: Cuando los alumnos entren al aula se encontrarán una carta en la que se describe la siguiente situación (Figura 14, Anexo F, pág.105): *"Cero" y "Uno" ya saben de la existencia de nuevas criaturas. Conocen que cada una tiene su nombre, unas características únicas y, además, un lugar específico en el que esconderse. Sin embargo, para comprender completamente este nuevo mundo, toda esta información no es suficiente, deben determinar el orden correcto en el que se esconden cada una de ellas.* *"Cero" y "Uno" eran expertos en ordenar, habían ido hacia adelante y hacia atrás por todo el planeta de los números. Sin embargo, esta tarea es más compleja. Las pistas sobre el orden no son evidentes a primera vista y ellos solos no son capaces ordenar a las criaturas en su secuencia correcta. Por esta razón, han decidido escribirnos a nosotros, para ver si podemos ayudarles a ordenarlas. ¿Creéis que seremos capaces?* Tras la respuesta afirmativa de los alumnos, y con el objetivo de activar sus conocimientos previos y reforzar los contenidos trabajados en las sesiones del bloque anterior, el docente sacará, tanto a las nueve criaturas encontradas inicialmente, como a las nuevas criaturas encontradas en la sesión titulada *"Criaturas ocultas"* (Tabla 3, Anexo D, pág. 88). Después, pedirá a los alumnos que saquen la recta numérica realizada durante la sesión de activación *"Todo marcado"* (Tabla 2, Anexo D, pág.86).

A continuación, realizará las siguientes preguntas sobre todas y cada una de las criaturas encontradas en ambas sesiones: *¿quién es esta criatura?, ¿cómo se llama?, ¿qué características tiene? y ¿cuál es el sitio exacto en el que se ubica o esconde?*

Al igual que en la secesión de activación del bloque anterior, para responder a esta última pregunta, en cada caso, el docente pedirá a un alumno distinto que, apoyándose en la recta numérica de la pizarra, indique cuál es el lugar exacto en el que se ubica la criatura en cuestión, así como cuál es su correspondiente grafía. De este modo, cada vez que los alumnos vayan saliendo, este proceso se llevará a cabo en una recta numérica diferente.

Cabe destacar que, mientras el alumno seleccionado marca el lugar exacto en el que se ubica la criatura que le ha tocado, el resto de los alumnos podrán ir realizando el mismo proceso, individualmente, en una pequeña pizarra blanca. De esta forma, todos y cada uno de los alumnos trabajarán, tanto la representación de la ubicación exacta de cada criatura, como la correspondencia de dicha representación con su grafía.

Una vez que se hayan colocado todas las criaturas en la ubicación exacta de sus correspondientes rectas, el docente pedirá a los alumnos que las agrupen en base a características similares y, específicamente, en base al número de divisiones que hay en la recta. Por consiguiente, la representación de 1/2, se quedará sola; mientras que la representación de 1/3 se agrupará con 2/3; y la de 1/4 se agrupará con las de 2/4 y 3/4; y así sucesivamente.

Cuando todas las representaciones estén agrupadas, se les pedirá que, por grupos, traten de ordenar, de menor a mayor, las representaciones de una misma agrupación, es decir, de aquellas que comparten el mismo número de divisiones en la recta; así como sus correspondientes grafías. Cada grupo deberá trabajar en conjunto, por tanto, para decidir el orden correcto.

Después de que todos los grupos hayan acabado de ordenarlas, deberán elegir un representante. Este saldrá a la pizarra para explicar cómo su grupo ha ordenado las criaturas de cada agrupación y el motivo por el cual lo ha hecho así. En caso de que no todos los grupos coincidan, tendrán la oportunidad de debatir para tratar de llegar a un consenso, estableciendo un orden claro y compartido.

En consecuencia, será cuando todos los grupos se hayan puesto de acuerdo o en el caso de que todos hubiesen coincidido desde el principio, cuando el docente les explicará cuál es la manera correcta de ordenar todas las criaturas (Figura 15, Anexo F, pág.106): colocando las representaciones de cada agrupación en sus rectas numéricas correspondientes y marcando el lugar exacto en el que se ubica cada una. De esta forma, se visualizará, claramente, el orden de todas ellas.

No obstante, la sesión no acabará ahí, pues cuando los alumnos hayan comprendido y ordenado las representaciones de las criaturas agrupadas por características similares, el docente pedirá a los alumnos que, manteniendo los mismos grupos, traten ahora de ordenar, de menor a mayor, las representaciones en las rectas numéricas de las nueve criaturas encontradas inicialmente.

Una vez que todos los alumnos hayan acabado de ordenarlas, se procederá de la misma forma que en el caso anterior. En un primer momento, cada grupo elegirá a un representante que explique el porqué del orden seguido. Después, todos deberán ponerse de acuerdo y, para terminar, el docente explicará cuál es la manera correcta de ordenarlas: colocando las representaciones en las rectas numéricas de todas ellas, unas exactamente encima de las otras. De esta forma, se visualizará, claramente, cuál es el fragmento más pequeño, luego el siguiente más pequeño, y así sucesivamente.

Finalmente, para comprobar que todos los alumnos han entendido las explicaciones realizadas por el docente, así como para ver si son o no capaces de ordenar las representaciones en las rectas numéricas de diferentes fracciones propias, se llevará a cabo se llevará a cabo una breve actividad.

Para su realización, el docente entregará a cada grupo de alumnos cinco tarjetas que muestran diferentes representaciones de fracciones propias. Las fracciones pueden ser, por ejemplo, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4 y 3/4. El

objetivo del juego será, por tanto, que los grupos ordenen estas tarjetas de menor a mayor lo más rápido posible. Para comenzar, el docente repartirá las tarjetas a los grupos de manera aleatoria. Cada grupo deberá discutir y colaborar para colocar cada tarjeta en la recta numérica correcta, asegurándose de que la secuencia de las fracciones esté en orden ascendente. Una vez que un grupo cree haber ordenado correctamente sus tarjetas, deberá levantar la mano para que el docente revise su trabajo. Después de que todos los grupos hayan completado la tarea, se seleccionará a un representante de cada grupo para que salga a la pizarra y explique cómo ordenaron sus fracciones y por qué lo hicieron de esa manera. Este paso permitirá a los alumnos justificar sus razonamientos y comparar sus resultados con los de otros grupos. Cabe destacar que, en caso de que haya discrepancias, se fomentará un diálogo para llegar a un consenso sobre el orden correcto de las fracciones. Además, el docente podrá intervenir para clarificar cualquier duda, asegurándose, así, de que todos los alumnos entienden el proceso.

Tabla 5. Sesión central de activación: *"¿Quién eres tú?"* Bloque temático de establecimiento de relaciones. [Creación personal].

SESIÓN CENTRAL DE ACTIVACIÓN: Bloque de **ESTABLECIMIENTO DE RELACIONES**
TÍTULO: *"¿Quién eres tú?"*
OBJETIVOS: • Determinar la relación de equivalencia entre distintas fracciones propias. • Identificar fracciones propias equivalentes mediante la comparación de sus posiciones en la recta numérica. • Representar fracciones propias equivalentes en una recta numérica. • Crear nuevas fracciones propias equivalentes mediante la ampliación y simplificación de fracciones dadas.
RECURSOS HUMANOS: Todo el grupo o clase.
RECURSOS MATERIALES: Carta con la situación de la sesión de activación del bloque temático de establecimiento de relaciones (Figura 16, Anexo F, pág.107), nueve criaturas que representan las fracciones propias (Figura 1, Anexo F, pág.100), nuevas criaturas (Figura 12, Anexo F, pág.105), recta numérica del cero al uno (Figura 7, Anexo F, pág.102), papel grande o mural, folios en blanco, lápices, pinturas, rotuladores y reglas.
RECURSOS ESPACIALES: El aula.
DURACIÓN: 1 hora.

DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN:

Cuando los alumnos entren al aula se encontrarán una carta en la que se describe la siguiente situación (Figura 16, Anexo F, pág.107): *"Cero" y "Uno" ya sabían cómo ordenar a todas las criaturas encontradas en este nuevo y cada vez menos desconocido mundo. Sin embargo, mientras lo hacían, se encontraron con un gran problema: había algunas criaturas que, aunque parecían diferentes, ocupaban el mismo lugar. ¿Cómo podría ser eso? ¿Se habrían equivocado? No sabían qué hacer, por lo que decidieron escribirnos a nosotros, para ver si podíamos ayudarles de nuevo. ¿Creéis que seremos capaces de resolverlo juntos?*

Tras la respuesta afirmativa de los alumnos, y con el objetivo de activar sus conocimientos previos y reforzar los contenidos trabajados en las sesiones del bloque anterior, el docente sacará, tanto a las nueve criaturas encontradas inicialmente, como a las nuevas criaturas encontradas en la sesión titulada "*Criaturas ocultas"* (Tabla 3, Anexo D, pág.89). Después, pedirá a los alumnos que saquen la recta numérica realizada durante la sesión de activación "*Todo marcado"* (Tabla 2, Anexo D, pág.87).

A continuación, realizará las siguientes preguntas sobre todas y cada una de las criaturas encontradas en ambas sesiones: *¿quién es esta criatura?, ¿cómo se llama?, ¿cómo se escribe su nombre con números?, ¿qué características tiene? y ¿cuál es el sitio exacto en el que se ubica o esconde?*

Para responder a esta última pregunta, en cada caso, el docente pedirá a un alumno distinto que, apoyándose en la recta numérica pintada en la pizarra, indique cuál es el lugar exacto en el que se ubica la criatura en cuestión, así como cuál es su correspondiente grafía.

Una vez que todas las criaturas han sido colocadas en la recta numérica, el docente pedirá a los alumnos que las ordenen de menor a mayor, creando un gran mural de manera colaborativa. Para ello, los alumnos deberán debatir y decidir juntos cómo deben ser ordenadas cada una de las criaturas. En consecuencia, el mural no solo servirá como una herramienta visual poderosa, sino que también como una herramienta efectiva para fomentar el trabajo en equipo y el intercambio de ideas.

Al finalizar el mural, quedarán ordenadas, por tanto, todas y cada una de las criaturas encontradas en este nuevo y cada vez menos desconocido lugar. Sin embargo, se encontrarán con un problema, hay algunas de ellas que, a pesar de ser distintas, ocupan la misma posición en la recta: *¿cómo puede ser esto posible?*

Será esta problemática, por tanto, el punto de partida para introducir el concepto de fracciones equivalentes. No obstante, antes de explicarlo, el docente pedirá a los alumnos que reflexionen, de manera conjunta, cuál puede ser el motivo de este suceso.

Cuando todos los alumnos hayan expresado sus opiniones y creencias, el docente les explicará que se debe al hecho de que diferentes fracciones pueden representar una misma cantidad, recibiendo así el nombre de fracciones equivalentes. Para asegurarse de que todos comprenden el concepto, les pedirá que, fijándose en el mural, representen en un folio las rectas numéricas de las fracciones que se ubican en el mismo lugar. De este modo, podrán observar, de un modo claro y visual, el cómo diferentes representaciones pueden expresar una misma cantidad.

Es relevante destacar, que no solo explicará por qué estas fracciones son equivalentes, sino también la forma en la que se simplifican o amplían. Al fijarse en las representaciones realizadas, los alumnos podrán observar cómo 1/2 se puede ampliar dividiendo la recta numérica en dos partes iguales más para obtener 2/4; así como 2/4 se puede simplificar uniendo cada parte de la recta en dos únicas partes iguales, obteniendo 1/2.

Al terminar las explicaciones, con el fin de reforzar, visualmente, el concepto de equivalencia se pedirá a los alumnos que marquen todas las fracciones equivalentes en el mural final, utilizando, para ello, colores o símbolos distintivos. Cabe destacar, que esta estrategia ayudará a los alumnos a ver claramente las conexiones entre las diferentes fracciones.

Finalmente, para comprobar que todos los alumnos han entendido las explicaciones realizadas por el docente, así como para ver si son o no capaces de establecer relaciones de equivalencia entre las representaciones en las rectas numéricas de diferentes fracciones propias, se llevará a cabo se llevará a cabo una breve actividad.

En un primer momento, el docente repartirá, a cada alumno, un folio en blanco, donde deberán dibujar la representación en la recta numérica de una de las nueve criaturas encontradas inicialmente. Posteriormente, una vez que todos los alumnos tengan representada su criatura, les indicará que la corten en partes iguales más pequeñas, haciendo tantas como quieran.

Cuando todos los alumnos hayan terminado de dibujar sus fracciones, se les dará un tiempo determinado para caminar por el aula, buscando compañeros que hayan dibujado una fracción equivalente a la suya. Por tanto, durante el tiempo establecido, los alumnos deberán comparar sus fracciones, con el fin de comprobar si son o no equivalentes.

Al finalizar el tiempo, los alumnos que se hayan agrupado deberán explicar el porqué de su agrupación, indicando el sitio en el que se ubican todas sus fracciones equivalentes en la recta numérica. En consecuencia, deberán mostrar cómo han identificado las equivalencias y qué características comparten sus fracciones.

Los alumnos que no hayan encontrado pareja o grupo deberán salir a la pizarra para que, entre todos los alumnos de la clase, traten de encontrar fracciones equivalentes entre las fracciones individuales de cada uno de ellos. En caso de que no las encuentren, la clase trabajará en conjunto para crear fracciones equivalentes a las que tienen cada uno de los alumnos que han salido, utilizando la recta numérica y las técnicas de simplificación y ampliación aprendidas.

De esta manera, todos los alumnos comprenderán mejor el concepto de fracciones equivalentes, al mismo tiempo que podrán visualizar y, por tanto, entender cómo diferentes fracciones pueden ocupar el mismo lugar en la recta numérica, ya que, como se ha mencionado anteriormente, aunque parezcan diferentes representan la misma cantidad.

ANEXO E. Sesión final: Todo un mundo por descubrir.

SESIÓN FINAL: Todo un mundo por descubrir

OBJETIVOS:

- Reconocer y representar fracciones propias en la recta numérica.
- Comparar y ordenar fracciones propias en una secuencia adecuada empleando la recta numérica.
- Identificar y colocar fracciones que se encuentren entre dos fracciones ya dadas, mostrando la densidad de las fracciones.
- Interiorizar el concepto de que las que las fracciones son infinitas.

RECURSOS HUMANOS: Todo el grupo o clase.

RECURSOS MATERIALES: Nueve criaturas que representan las fracciones propias (Figura 1, Anexo F, pág.100), nuevas criaturas (Figura 12, Anexo F, pág.105), recta numérica del cero al uno (Figura 7, Anexo F, pág.102), pizarras blancas, rotuladores de pizarra blanca, una cuerda larga, varias pinzas de ropa, flashcards o tarjetas de fracciones propias (Figura 17, Anexo F, pág.107), rotuladores y tijeras.

RECURSOS ESPACIALES: El aula.

DURACIÓN: 1 hora y media.

DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN:

En un primer momento, con el objetivo de activar sus conocimientos previos y reforzar los contenidos trabajados en las sesiones del bloque anterior, el docente sacará, tanto a las nueve criaturas encontradas inicialmente, como a las nuevas criaturas encontradas en la sesión titulada "*Criaturas ocultas*" (Tabla 3, Anexo D, pág. 89). Después, pedirá a los alumnos que saquen la recta numérica realizada durante la sesión de activación *"Todo marcado"* (Tabla 2, Anexo D, pág.87).

A continuación, con el fin de repasar el contenido referente a todos y cada uno de los bloques temáticos y, por tanto, de cada una de las habilidades, realizará las siguientes preguntas sobre las criaturas encontradas en ambas sesiones: *¿quién es esta criatura?, ¿cómo se llama?, ¿cuáles son sus características principales?, ¿cómo se escribe su nombre con números?, ¿cómo se representa en la recta numérica?, ¿sabríais agrupar las criaturas que tienen el mismo número de divisiones en la recta?, ¿y ordenarlas?, ¿podrías ordenar todas las criaturas de menor a mayor?, ¿e indicar cuáles son equivalentes?, ¿por qué sabéis que lo son?, ¿podrías poner algún ejemplo más de equivalencia?*

Será en base a estas preguntas, por tanto, como el docente iniciará una conversación abierta y guiada con los alumnos, quienes irán expresando sus ideas, opiniones y vivencias, de forma ordenada. De este modo, no solo se comprobará si han comprendido los contenidos abordados en todas las sesiones, sino que también se identificarán las áreas donde han encontrado, más y menos, dificultades.

Cabe destacar que, para responder a todas las preguntas, además de hacerlo de manera oral y conjunta, se le proporcionará a cada alumno una pequeña pizarra blanca, donde deberá ir anotando sus respuestas. De esta forma, nos aseguraremos de que todos los alumnos responden a todas las preguntas planteadas. Asimismo, es relevante señalar que otra opción para garantizar la participación de todos podría ser la realización de las preguntas planteadas por medio de un *Kahoot*.

Posteriormente, una vez que todos los alumnos hayan participado, los interrogantes hayan sido resueltos y los conocimientos previos hayan sido activados, se procederá a la puesta en marcha del videojuego en su totalidad. Para ello, el docente pedirá a los estudiantes que, al igual que en las sesiones de implementación de cada uno de los bloques temáticos, busquen por el aula una carátula similar a la que “Uno” y “Cero” trajeron el primer día (Figura 4, Anexo B, pág.70).

En el momento en el que uno de los alumnos encuentre la carátula, el profesor les pedirá que cojan sus ordenadores portátiles. Cuando todos lo tengan, procederá a escanear el código QR que viene en la parte trasera de la carátula encontrada y mostrará su contenido en la pantalla digital. Al hacerlo, se iniciará el videojuego, cuyo enlace compartirá con los alumnos, a quienes permitirá jugar libremente durante, aproximadamente, media hora.

Durante este tiempo de juego, el profesor supervisará y estará disponible para ayudar con cualquier duda o problema técnico que pueda surgir, fomentando así un ambiente de aprendizaje interactivo y divertido. Por consiguiente, esta parte de la sesión no solo permitirá a los alumnos divertirse con el contenido educativo del videojuego, sino que también promoverá el aprendizaje y la participación activa de todos los estudiantes.

Al terminar, se iniciará una pequeña reflexión conjunta sobre lo jugado. Así, los alumnos tendrán la oportunidad de compartir, con sus compañeros, las dificultades que han encontrado, las partes que más les han gustado y aquello que han aprendido. Esto, no solo reforzará su aprendizaje, sino que también proporcionará al docente una retroalimentación sobre el videojuego diseñado y su implementación.

Finalmente, se llevará a cabo una actividad final de repaso, la cual estará dirigida tanto al trabajo conjunto de todas las habilidades, como a la introducción del concepto de densidad. El objetivo será, por tanto, que los alumnos comprendan que entre dos fracciones cualesquiera hay infinitas otras, empleando, para ello, un enfoque lúdico y didáctico.

Para comenzar, el docente colocará una cuerda extendida en el suelo, fijando sus extremos para que quede bien tensa. Una vez que la cuerda esté colocada, se explicará a los estudiantes que esta representa el trayecto entre el "mundo del cero" y el "mundo del uno", por lo que cada punto a lo largo de ella se corresponderá con una fracción distinta y, por tanto, con una de las criaturas encontradas.

Posteriormente, se dispondrán una serie de tarjetas o flashcards en el centro del aula (Figura 17, Anexo F, pág.107). En el anverso de cada una de ellas se mostrará la representación simbólica de una fracción y en el reverso, la grafía de la misma. Cabe destacar que, con el fin de asegurar la presencia de una amplia variedad de fracciones, se utilizarán tantas representaciones como sea posible. Además, es relevante señalar que se marcarán el inicio y el final de la cuerda con los peluches que representan a cero y a uno, respectivamente.

Cuando todo esté colocado, se invitará a los alumnos a situar las pinzas con las fracciones en el lugar de la cuerda que consideren adecuado. Para ello, deberán utilizar las estrategias aprendidas a lo largo de todas y cada una de las sesiones que conforman la propuesta.

Una vez situadas todas las tarjetas, se seleccionarán dos fracciones cualesquiera, como por ejemplo 1/4 y 1/2, y se preguntará a los estudiantes si pueden identificar una fracción que se encuentre entre ellas. Tras la respuesta afirmativa de los alumnos, se les pedirá que traten de encontrar, por tanto, alguna fracción que se sitúe entre 1/3 y 1/4. Para ello, se les animará a pensar en cómo conseguir estas fracciones: dividiendo la cuerda en partes cada vez más pequeñas.

Al finalizar la actividad, se reflexionará sobre lo aprendido, reforzando la idea a los alumnos de que entre dos fracciones cualesquiera siempre se puede encontrar otra, sin importar lo próximas que estén las fracciones iniciales. Esto les ayudará a comprender la densidad del conjunto de las fracciones, dando paso al siguiente cierre de la propuesta:

Después de un largo viaje de exploración y aprendizaje, "Cero" y "Uno" por fin han descubierto donde están: en el gigantesco mundo de las fracciones. Todo el camino entre sus mundos ha quedado ordenado, y ambos ahora conocen los nombres, las grafías, las características principales y la ubicación exacta de muchas de las criaturas que habitan este amplio territorio. Han aprendido que este lugar, antes desconocido, está lleno de fracciones y, por tanto, de criaturas diferentes.

Sin embargo, a pesar de todo lo que han aprendido, se dan cuenta de que conocer todas las fracciones es imposible, ya que estas son infinitas, por lo que siempre va a haber más fracciones entre cualquier par ya conocido. Ha sido esta idea, por tanto, la que los ha llevado a preguntarse si también habrá más lugares y criaturas entre el "mundo del dos" y el "mundo del tres". ¿Y entre el "mundo del tres" y el "mundo del cuatro"? La idea de que cada segmento de su planeta podría estar lleno de nuevas fracciones les emociona y motiva a seguir explorando.

Por este motivo, "Cero" y "Uno" han decidido que deben embarcarse en una nueva aventura. Están determinados a explorar más allá, a descubrir todos los lugares y criaturas que se encuentran entre el "mundo del uno" y el "mundo del dos", entre el "mundo del dos" y el "mundo del tres", y así sucesivamente. Saben que cada paso los llevará a nuevos descubrimientos y, por tanto, a un mayor entendimiento de las fracciones y del universo matemático en el que viven.

ANEXO F. Materiales de las actividades.

Figura 1. Nueve criaturas que representan las fracciones de 1/2, 1/3, 1/4, 1/5. 1/6, 1/7, 1/8 y 1/9. Sesión introductoria: Somos Cero y Uno, ¿nos recuerdas? Actividad *"Un nuevo mundo, un nuevo lugar"*. [Creación personal]

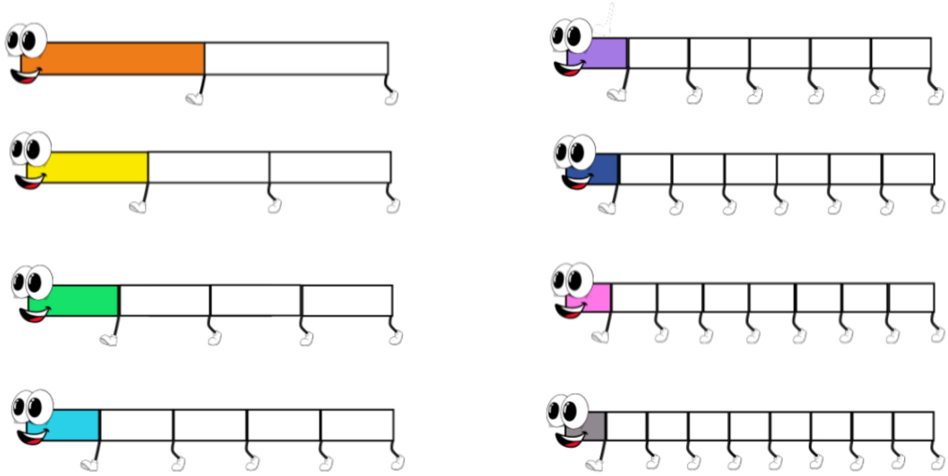


Figura 2. Vídeo de introducción al videojuego *"Fracciónate"*. Sesión introductoria: Somos Cero y Uno, ¿nos recuerdas? Actividad *"Un nuevo mundo, un nuevo lugar"*. [Creación personal].

Figura 3. Recta numérica del cero al diez. Sesión introductoria: Somos Cero y Uno, ¿nos recuerdas? Actividad *"Un nuevo mundo, un nuevo lugar"*. [Creación personal].

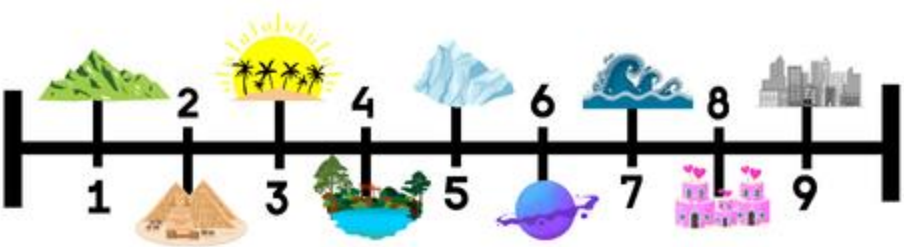
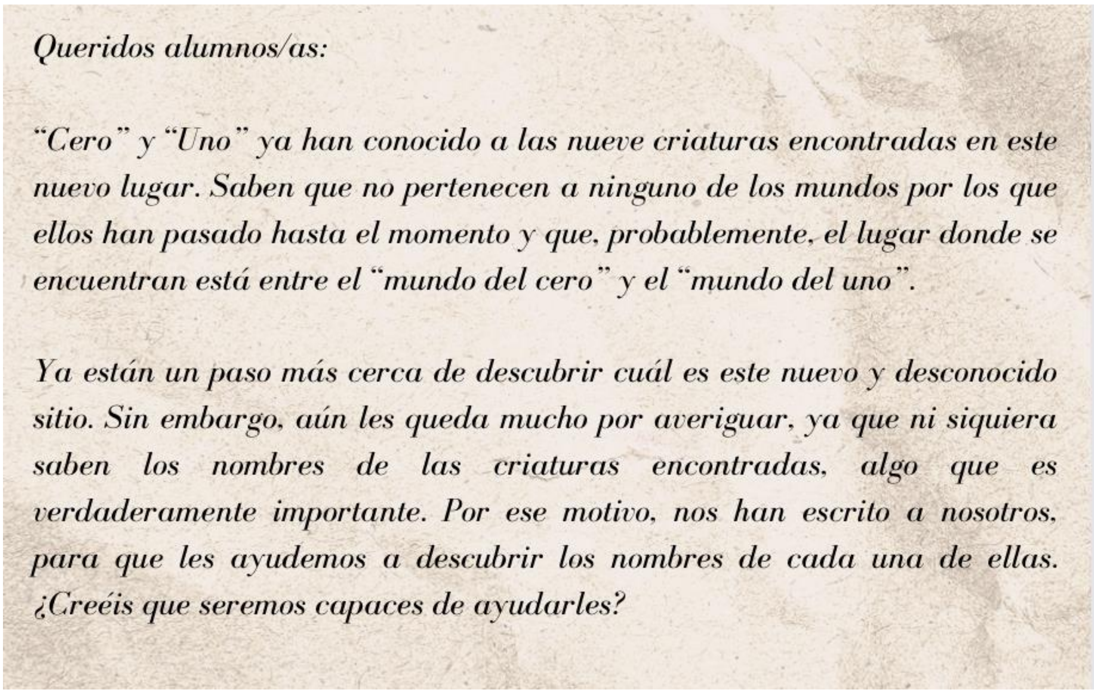


Figura 4. Carta con la situación del bloque de identificación. Sesión de activación: bloque de identificación. *"¿Sabéis cómo se llaman?"*. [Creación personal].



Queridos alumnos/as:

"Cero" y "Uno" ya han conocido a las nueve criaturas encontradas en este nuevo lugar. Saben que no pertenecen a ninguno de los mundos por los que ellos han pasado hasta el momento y que, probablemente, el lugar donde se encuentran está entre el "mundo del cero" y el "mundo del uno".

Ya están un paso más cerca de descubrir cuál es este nuevo y desconocido sitio. Sin embargo, aún les queda mucho por averiguar, ya que ni siquiera saben los nombres de las criaturas encontradas, algo que es verdaderamente importante. Por ese motivo, nos han escrito a nosotros, para que les ayudemos a descubrir los nombres de cada una de ellas. ¿Creéis que seremos capaces de ayudarles?

Figura 5. Flashcards de elementos que representen la misma fracción propia que cada una de las criaturas. Sesión de activación: bloque de identificación. *"¿Sabéis cómo se llaman?"*. [Creación personal].

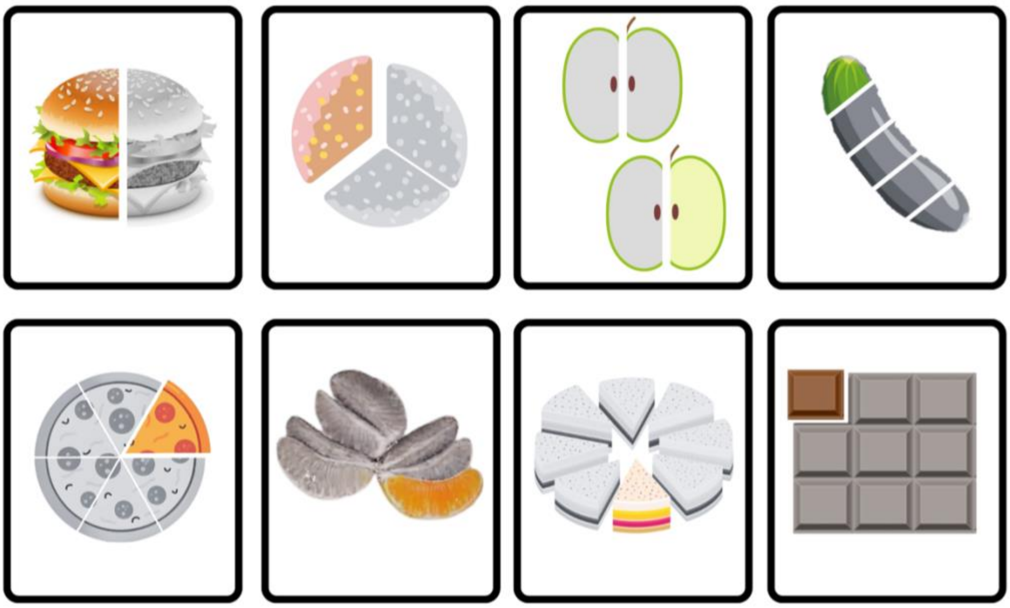


Figura 6. Carta con la situación del bloque temático de representación. Sesión de activación: bloque de representación. *“Todo marcado”.* [Creación personal].

Queridos alumnos/as:

"Cero" y "Uno" ya han descubierto los nombres de las nueve criaturas encontradas en este nuevo y desconocido lugar. Saben cómo se escriben cada uno de estos nombres, tanto en letras como en números, y conocen las características principales que definen a cada una de las criaturas encontradas.

Están seguros de que todas ellas se encuentran en algún punto entre el "mundo del cero" y el "mundo del uno", sin embargo, aún no saben la ubicación exacta de cada una de ellas. Por esta razón, nos han escrito a nosotros de nuevo, para ver si podemos ayudarles a determinar el lugar exacto dónde se ubican cada una de estas nueve misteriosas criaturas. ¿Creéis que seremos capaces de ayudarles?

Figura 7. Recta numérica del cero al uno. Sesión de activación: bloque de representación. *“Todo marcado”.* [Creación personal].

Figura 8. Cartones de bingo con rectas numéricas. Sesión de activación: bloque de representación. *"Todo marcado"*. [Creación personal].

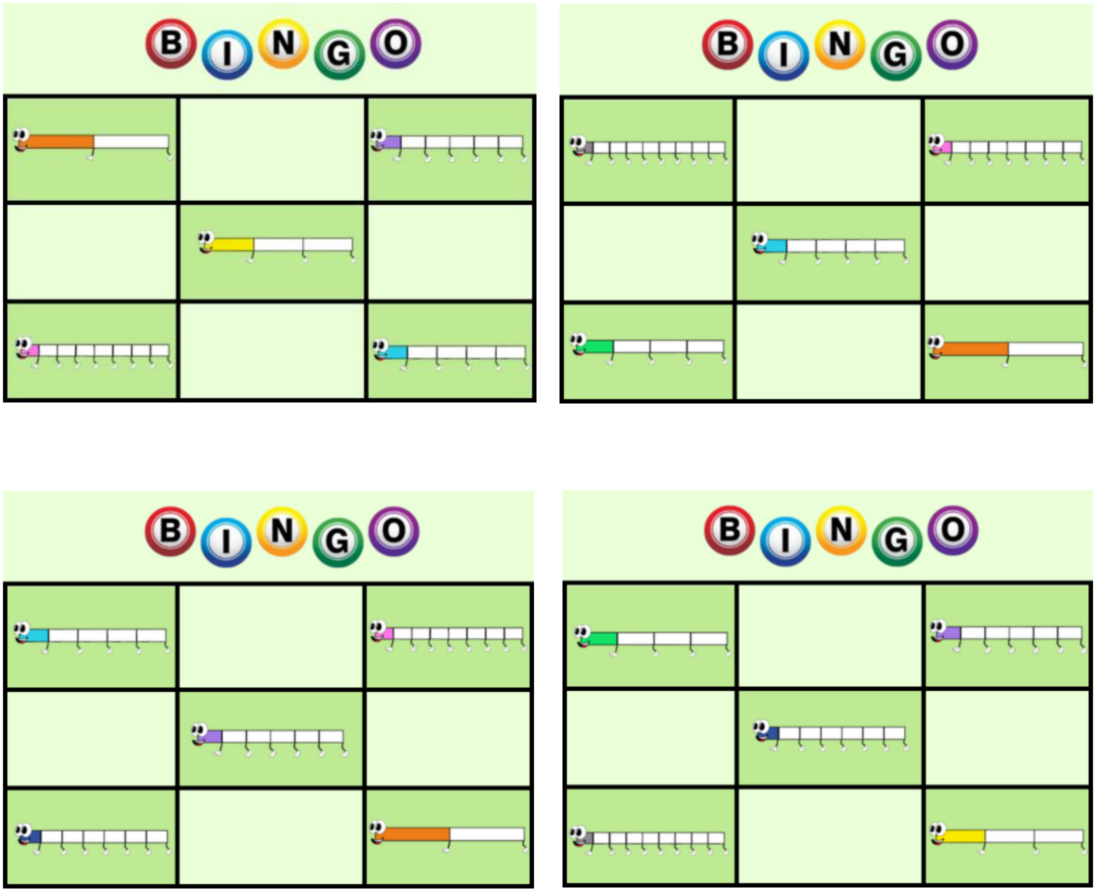


Figura 9. Tarjetas con fracciones propias (objetos y grafías). Sesión de activación: bloque de representación. *"Todo marcado"*. [Creación personal].

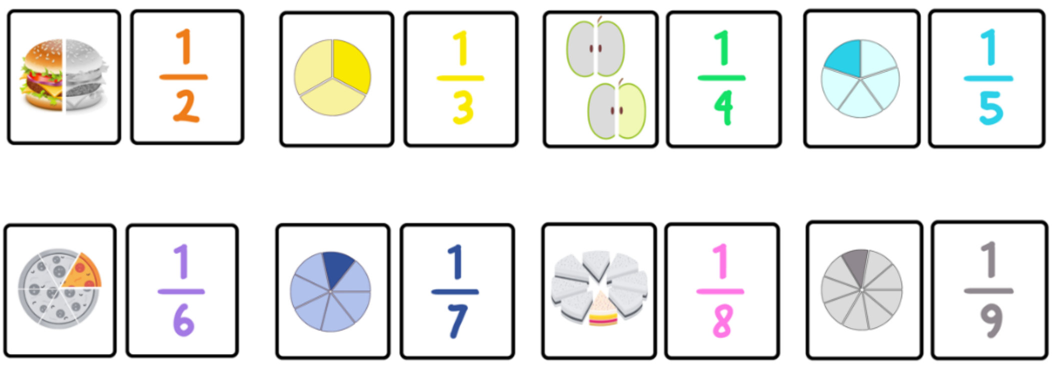
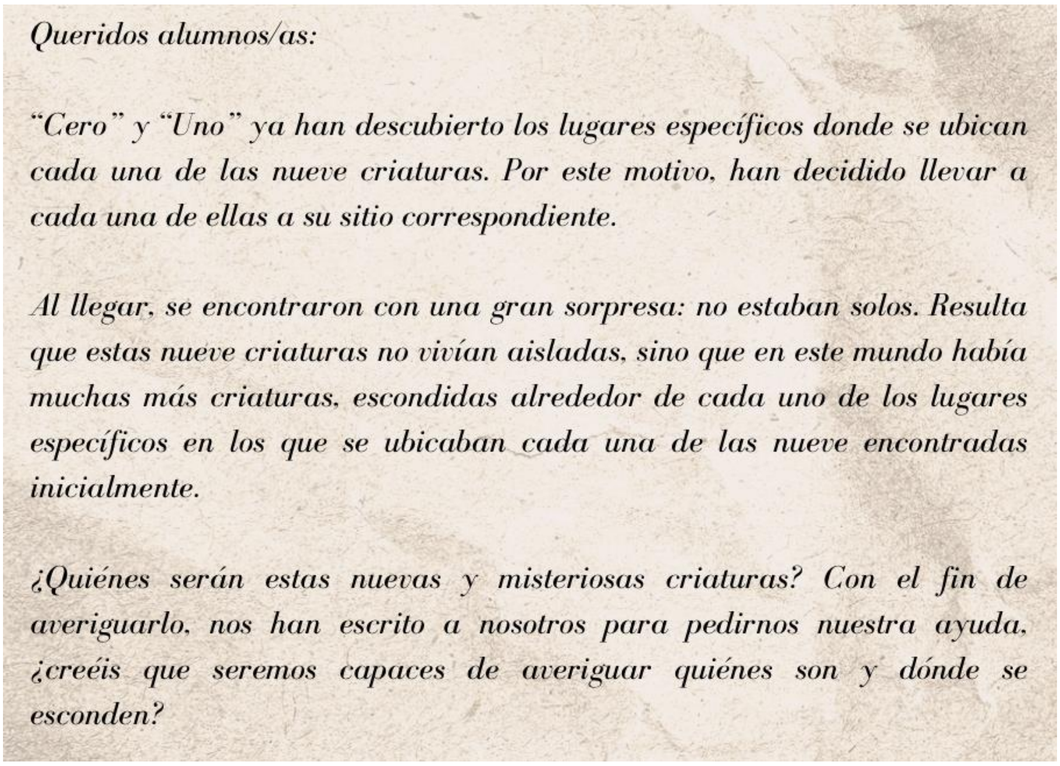


Figura 10. Carta con la situación del bloque temático de comparación. Sesión de activación: bloque de comparación. *"Criaturas ocultas".* [Creación personal].



Queridos alumnos/as:

"Cero" y "Uno" ya han descubierto los lugares específicos donde se ubican cada una de las nueve criaturas. Por este motivo, han decidido llevar a cada una de ellas a su sitio correspondiente.

Al llegar, se encontraron con una gran sorpresa: no estaban solos. Resulta que estas nueve criaturas no vivían aisladas, sino que en este mundo había muchas más criaturas, escondidas alrededor de cada uno de los lugares específicos en los que se ubicaban cada una de las nueve encontradas inicialmente.

¿Quiénes serán estas nuevas y misteriosas criaturas? Con el fin de averiguarlo, nos han escrito a nosotros para pedirnos nuestra ayuda, ¿creéis que seremos capaces de averiguar quiénes son y dónde se esconden?

Figura 11. Pistas sobre la ubicación de cada criatura. Sesión de activación: bloque de comparación. *"Criaturas ocultas".* [Creación personal].

Figura 12. Nuevas criaturas. Sesión de activación: bloque de comparación. *"Criaturas ocultas".* [Creación personal].

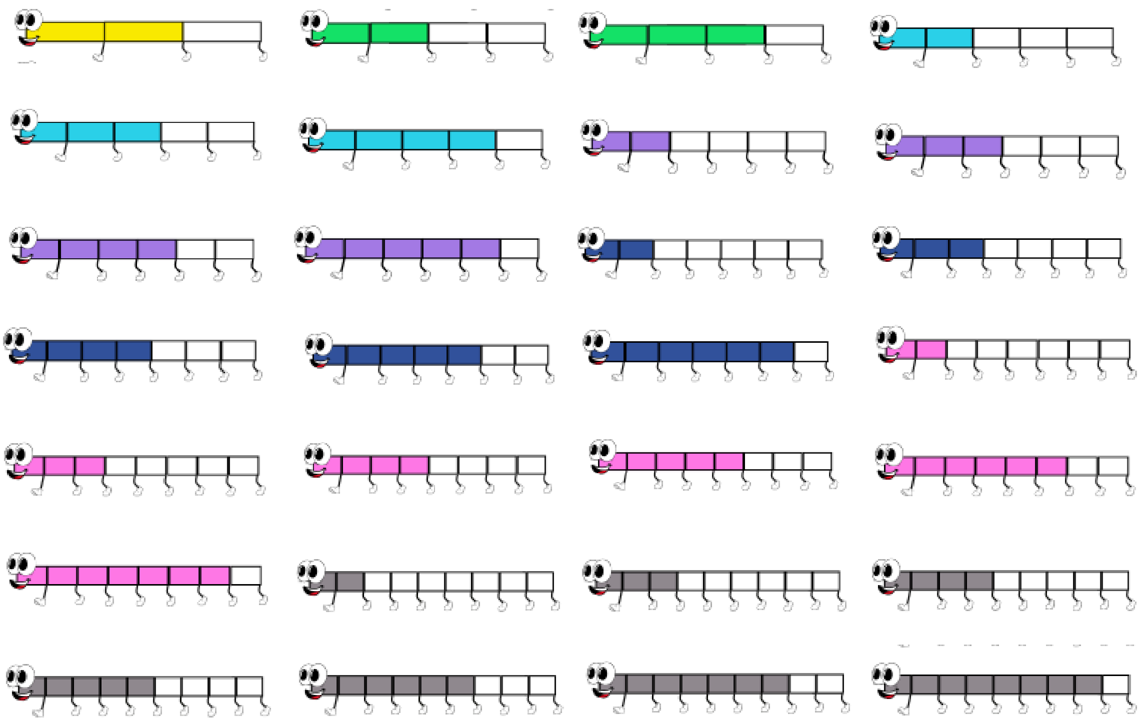


Figura 13. Flashcards con las representaciones de distintas fracciones propias en la recta numérica. Sesión de activación: bloque de comparación. *"Criaturas ocultas".* [Creación personal].

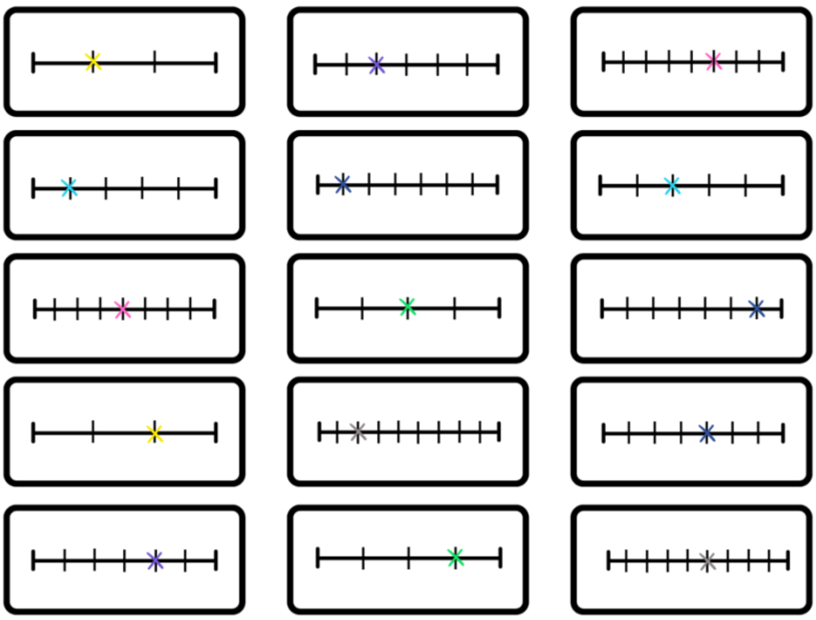
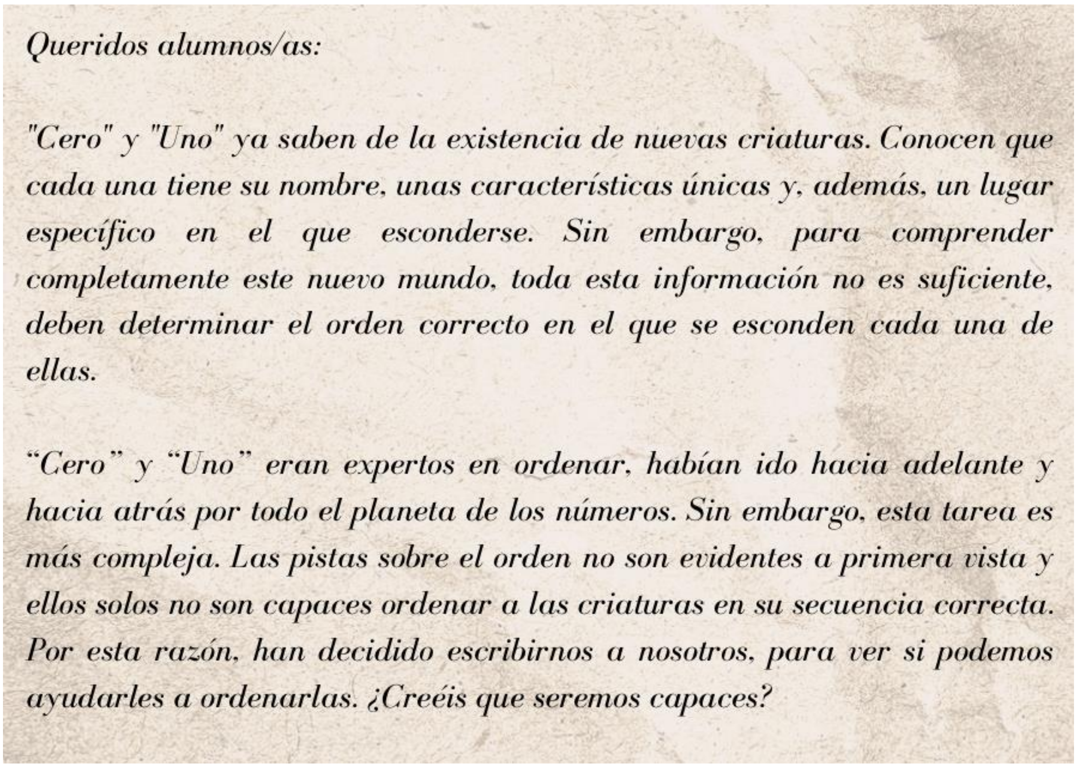


Figura 14. Carta con la situación del bloque temático de ordenación. Sesión de activación: bloque de ordenación. *"Cada criatura en su lugar"*. [Creación personal].



Queridos alumnos/as:

"Cero" y "Uno" ya saben de la existencia de nuevas criaturas. Conocen que cada una tiene su nombre, unas características únicas y, además, un lugar específico en el que esconderse. Sin embargo, para comprender completamente este nuevo mundo, toda esta información no es suficiente, deben determinar el orden correcto en el que se esconden cada una de ellas.

"Cero" y "Uno" eran expertos en ordenar, habían ido hacia adelante y hacia atrás por todo el planeta de los números. Sin embargo, esta tarea es más compleja. Las pistas sobre el orden no son evidentes a primera vista y ellos solos no son capaces ordenar a las criaturas en su secuencia correcta. Por esta razón, han decidido escribirnos a nosotros, para ver si podemos ayudarles a ordenarlas. ¿Creéis que seremos capaces?

Figura 15. Ejemplo de la manera correcta de ordenar las criaturas de una misma agrupación. Sesión de activación: bloque de ordenación. *"Cada criatura en su lugar"*. [Creación personal].

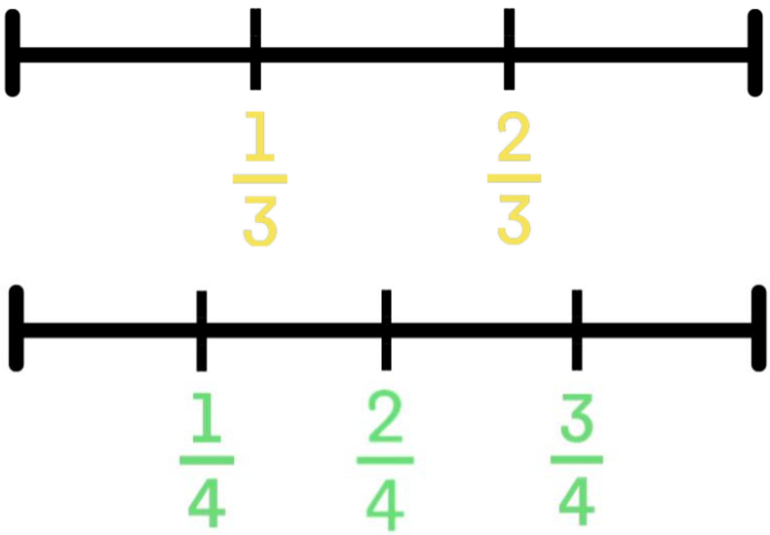
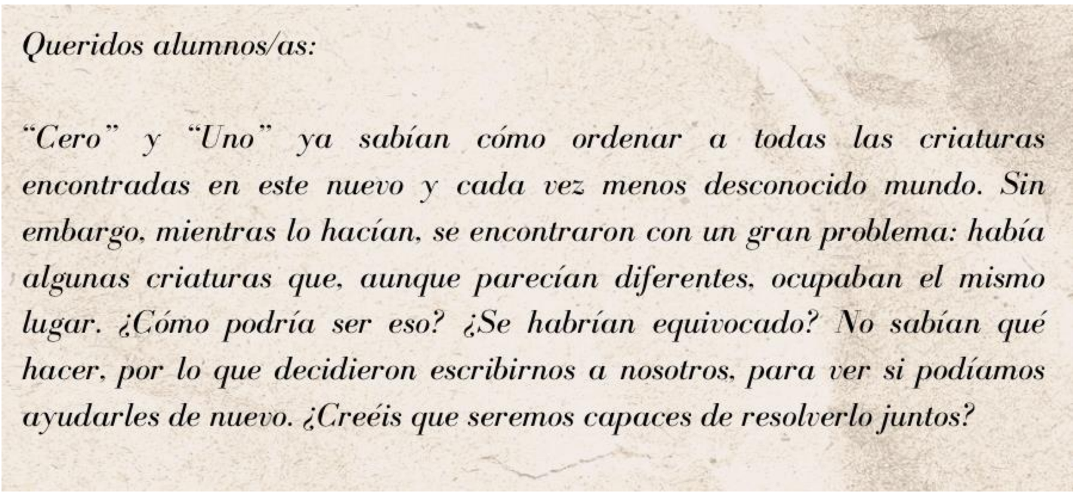


Figura 16. Carta con la situación del bloque temático de establecimiento de relaciones. Sesión de activación: bloque de establecimiento de relaciones. *"¿Quién eres tú?"*. [Creación personal].



Queridos alumnos/as:

"Cero" y "Uno" ya sabían cómo ordenar a todas las criaturas encontradas en este nuevo y cada vez menos desconocido mundo. Sin embargo, mientras lo hacían, se encontraron con un gran problema: había algunas criaturas que, aunque parecían diferentes, ocupaban el mismo lugar. ¿Cómo podría ser eso? ¿Se habrían equivocado? No sabían qué hacer, por lo que decidieron escribirnos a nosotros, para ver si podíamos ayudarles de nuevo. ¿Creéis que seremos capaces de resolverlo juntos?

Figura 17. Flashcards de elementos que representen diferentes fracciones propias. Sesión final: Todo un mundo por descubrir. [Creación personal].