

**Influence of teachers' pedagogical knowledge on their classroom practice
when solving arithmetic word problems with their students. An exploratory
study.**

Marta Ramos, Santiago Vicente, Javier Rosales & Jose Chamoso

University of Salamanca

Abstract

When primary school teachers solve arithmetic word problems with their students, they usually do so in a superficial manner, even when their semantic-mathematical structures are challenging and contain solving aids. This could be due to the pedagogical knowledge that teachers have about teaching the resolution of this type of problem. The aim of this work was to explore whether teachers with different levels of this knowledge solved standard problems (nonchallenging and without aids) and rewritten problems (challenging and with aids to reasoning) in different ways. A sample of 8 teachers (4 with high knowledge, 4 with low knowledge) were recorded and analyzed solving two standard and two rewritten problems. The results showed that teachers with high knowledge used more interaction cycles (mainly dedicated to reasoning) to solve the standard problems and, above all, the rewritten ones. This study is a first approach to understanding teachers' problem-solving behavior and highlights the importance of developing their knowledge for teaching problem solving.

Keywords: pedagogical content knowledge, joint problem solving, arithmetic word problems, reasoning.

Resumen

Cuando el profesorado de Primaria resuelve problemas aritméticos verbales con su alumnado suele hacerlo de manera superficial, incluso cuando sus estructuras semántico-matemáticas son desafiantes y contienen ayudas a la resolución. Esto podría deberse al conocimiento pedagógico que el profesorado tiene sobre la enseñanza de la resolución de este tipo de problemas. El objetivo de este trabajo fue explorar si el profesorado con distintos niveles de este conocimiento resolvía de modos diferentes problemas estándar (no desafiantes y sin ayudas) y reescritos (desafiantes y con ayudas al razonamiento). Se partió de una muestra de 8 profesores (4 de nivel de conocimiento alto, 4 de conocimiento bajo), que fueron grabados y analizados resolviendo dos problemas estándar y dos reescritos. Los resultados mostraron que el profesorado con conocimiento alto empleó más ciclos de interacción (principalmente dedicados al razonamiento) para resolver los problemas estándar y, sobre todo, los reescritos. Este estudio es una primera aproximación para comprender el comportamiento del profesorado al resolver problemas y resalta la importancia de desarrollar su conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas.

Palabras clave: conocimiento pedagógico del contenido, resolución conjunta de problemas, problemas aritméticos verbales, razonamiento.

NOTA: VERSIÓN EN ESPAÑOL COMPLETA AL FINAL DE LA VERSIÓN EN INGLÉS

Introduction

The educational practice promoted by teachers when solving mathematics problems with their students is a determinant of learning (Baumert et al., 2010; Charalambous et al., 2020; Kelcey et al., 2019; Siswono et al., 2017). Likewise, one of the elements that most influences this educational practice is the pedagogical content knowledge of each subject (Depaepe et al., 2013). Many studies have been developed on the influence of this knowledge on educational practice in mathematics classes, most of them with qualitative methodologies. However, the works that analyze the influence of teachers' specialized knowledge on problem solving in their educational practices are scarce, even more so if we refer to quantitative studies. This study aims to take a first step in this direction by answering the following question: are there quantitative differences in the way in which primary school teachers with different levels of pedagogical knowledge about problem solving solve arithmetic word problems with their students?

Pedagogical Content Knowledge and Knowledge for Teaching Problem Solving.

To understand what knowledge teachers must have to teach a subject, it is necessary to start from the concept of pedagogical content knowledge (Shulman, 1987). This concept refers to the knowledge that teachers should have, both of a given scientific content and of the pedagogy of that content. There is a consensus in considering the pedagogical content knowledge as knowledge that the teacher activates in a specific educational context (Depaepe et al., 2013). This knowledge is necessary, for example, for teachers to adequately develop their professional vision, i.e., their ability to quickly grasp information about what is happening in class and to interpret it appropriately (Gegenfurtner et al., 2020).

Since it was first defined, a great deal of work has been devoted to the study of pedagogical content knowledge, mainly in the teaching of science (see Schneider and

Plasman, 2011) and mathematics (see Depaepe et al., 2013). For mathematics, most studies have focused on deepening the description of pedagogical knowledge of content through qualitative analysis of samples of teachers, using questionnaires or interviews in which teachers evaluated real classroom situations. Of these studies, the work of Ball et al. (2008) and the subsequent elaborations of their proposals related to knowledge for teaching problem solving stand out. Piñeiro et al. (2019), based on Chapman's (2015) concept of knowledge for teaching problem solving, structured the knowledge included in this knowledge into two elements: knowledge about problem solving and pedagogical knowledge about problem solving. Within the first element, three components would be included: a) knowledge of what a problem is and of the different types of tasks that can be presented as problems; b) knowledge of the problem-solving process (resolution phases and strategies, metacognitive processes); and c) students' willingness to solve the problem. Within the second element of knowledge for teaching problem solving—pedagogical knowledge about problem solving—four components are included: a) the student as a solver; b) problem solving as a school task (e.g., which problems are more suitable for teaching problem solving); c) problem solving as a school task (e.g., which problems are more suitable for teaching problem solving); d) the student's willingness to solve the problem, which problems are most suitable for teaching, models and solving strategies most useful for students); c) noncognitive factors (e.g., the interrelationships between beliefs and conceptions and their influence on the solving process); and d) management of problem-solving teaching (e.g., different solving approaches, handling student blocks).

The studies that have evaluated the level of knowledge for teaching problem solving to teachers are scarce and point out that this level is usually low. This implies that teachers often show limitations in differentiating the semantic-mathematical structure of problems

(Carpenter et al., 1988), in posing resolution strategies according to the nature of the problem (Siswono et al., 2017), or in determining what a problem is, posing a resolution process and accepting nonnumerical results as a solution (Csíkos and Sztányi, 2020). It also seems to have difficulties identifying problems and resolution models that would facilitate students' reasoning (Ramos et al., 2020), understanding resolution as a process, posing problems according to the semantic-mathematical structure and taking into account the characteristics of students as solvers (Piñeiro et al., 2022), or identifying the didactic-mathematical intentions that mobilize teachers' knowledge about problem posing (Chico et al., 2023).

Arithmetic word problems: pedagogical content knowledge and resolution in the classroom.

The paucity of work relating teachers' problem-solving knowledge to its impact in the classroom contrasts with the abundant research on arithmetic word problems. All this research has contributed significantly to the description of the knowledge needed by teachers to teach students to solve them (see Chapman, 2015 and Piñeiro et al., 2019).

Arithmetic word problems are defined as verbal descriptions of problem situations that give rise to one or more questions whose answers can be obtained by applying mathematical operations to the data presented in the problem (Verschaffel et al., 2020). One of the contributions of research on arithmetic word problems to the description of knowledge for teaching problem solving has been the identification of a wide variety of problems, according to different criteria, involving different levels of challenge (see Daroczy et al., 2015). For example, according to their semantic-mathematical structure (Carpenter and Moser, 1984; Greer, 1992; Xin, 2007), there are more than 30 subtypes of additive and multiplicative structure problems. Another important contribution has been the proposal of different models of arithmetic word problem solving. For example,

according to the model of Verschaffel et al. (2000), less challenging problems (those whose resolution hardly requires reasoning) can be solved superficially, selecting the data, then choosing the operation that solves it by means of strategies not based on comprehension, such as the keyword strategy (Hegarty et al., 1995) and finally communicating the result of the operation as an answer to the problem. In contrast, more challenging problems must be solved through the so-called 'genuine mode', in which the choice of operation is supported by reasoning about the situation described in the problem (Verschaffel et al., 2000) and the underlying mathematical structure. It is this reasoning that allows deducing which operation or operations are necessary to solve the problem (Riley and Greeno, 1988; Verschaffel et al., 2000; Xin, 2007) and which should be promoted by teachers to teach students to solve any type of problem through the construction of meanings (e.g., justifying and generalizing, see Hanna, 2020 and Melhuish et al., 2020), encouraging and helping students to perform and communicate such reasoning (Herbert and Williams, 2023).

When teachers focus the resolution process on certain phases and not on others when solving problems with their students, they are promoting one of the two modes of resolution described by Verschaffel et al. (2000): superficial or genuine. Despite the fact that the educational practice that teachers promote when solving problems with their students determines the way in which students learn (Baumert et al., 2010; Charalambous et al., 2020; Kelcey et al., 2019; Siswono et al., 2017), studies that have analyzed how problem solving is promoted in mathematics classes are scarce. The results of these studies indicate that teachers tend to focus their attention on the strictly mathematical aspects of the problem, making it difficult to solve through understanding (Chapman, 2006), and that this behavior occurs when solving both stereotyped problems, which can be solved superficially (Depaepe et al., 2010), and nonstereotyped

problems. In this sense, Rosales et al. (2012) analyzed how eleven elementary school teachers solved challenging semantic-mathematical problems (which also included mathematical and situational reasoning aids) with their students. They obtained results very similar to those found by Depaepe et al. (2010) with stereotyped problems, suggesting that this behavior was not due to the type of problem solved but could be due to limitations in teachers' problem-solving teaching knowledge. This conclusion is compatible with the results of some authors, who found evidence that the level of this type of knowledge possessed by teachers is often low (Carpenter et al., 1988; Csíkos and Sztányi, 2020; Siswono et al., 2017).

Some studies have shown that teachers' pedagogical content knowledge is positively and strongly linked to the quality of their educational practice and that this linkage is moderated by some elements involved in educational practices, such as textbooks or manipulative materials. These studies, mostly qualitative, have focused on general mathematical content (Hill et al., 2008; Hill and Charalambous, 2012a) or on specific content such as operations with whole numbers (Charalambous et al., 2012), comparison of ratios (Hill and Charalambous, 2012b), fractions (Getenet and Callingham, 2021; Koopman et al., 2019) or the learning of the first algebraic aspects in kindergarten (Muñoz- Catalán et al., 2022).

However, there are no known studies that have analyzed the relationship between teachers' knowledge of teaching problem solving in relation to solving arithmetic word problems and their educational practice when solving this type of problem with their students. Therefore, the present study aims to achieve two objectives. First, to explore whether the knowledge for teaching teachers' arithmetic word problem solving related to two of its most relevant components (problems and solving models for teaching, see Piñeiro et al., 2019) influences the superficial or genuine mode they promote during

solving. For this purpose, these resolution modes were linked to quantitative measures extracted from the interaction between teachers and students when jointly solving the problem. Second, the aim is to investigate whether teachers with different levels of knowledge for teaching arithmetic word problem solving solve different types of problems differently in relation to their degree of challenge and the presence of aids to reasoning.

Methodology

Participants

An initial sample of 65 teachers was taken from the universe formed by Spanish teachers who teach mathematics in the 6th grade of primary education in public and private schools. The initial sample was selected by nonprobabilistic convenience sampling. The teachers in the sample were given a task to assess their knowledge of teaching arithmetic word problem solving by means of a semistructured interview to assign them a knowledge profile (high or low). Only 4 teachers with high knowledge were identified and included in the final sample. Likewise, among the teachers with low knowledge, 4 were randomly selected. Therefore, the final sample consisted of eight teachers (five women and three men). These teachers taught in urban centers of a medium socioeconomic level, had more than 10 years of teaching experience ($M = 30.6$; $SD = 4.3$), used the textbook as the usual curricular material, and had not received specific training in arithmetic word problem solving.

Measures

Two measures were considered as a function of teacher knowledge and problem type: a) the average number of interaction cycles spent by each type of teacher in solving each type of problem and b) the average number of interaction cycles spent by each type of

teacher in the selection and reasoning processes for each type of problem. A quantitative analysis of the data was performed, despite the small sample, given the need for this type of empirical work to understand the nature of teacher knowledge and its relationship with teaching practices (Charalambous et al., 2020) and considering that quantitative studies tend to be more objective and independent (López, 2002). Recent research claims that these types of studies help, more specifically, to explore pedagogical content knowledge (Sie and Agyei, 2023) in the specific case of problem solving (Piñeiro et al., 2019).

Materials

Task to assess knowledge for teaching arithmetic word problem solving.

The Ramos et al. (2020) task was adapted, which inferentially assessed teachers' pedagogical content knowledge of arithmetic word problem solving as school tasks (Piñeiro et al., 2019). The test allows assessing knowledge in a situated and contextualized way, as it involves teachers in the analysis of real mathematical practice aimed at problem solving (see Charalambous et al., 2020). The test was structured in three blocks: problem, solving model and teacher-student interaction. In each block, teachers were presented with two options: A and B. Teachers had to choose, in each of the three blocks, the option they considered most appropriate to teach their students to solve problems through reasoning and to argue each of their choices.

Option A of each task lent itself to a superficial mode of resolution that did not favor reasoning. In the first block (problem choice), a standard problem was presented, semantically mathematically unchallenging and without aids in the statement (the most frequent in Spanish textbooks, see Tárraga et al., 2021; Vicente et al., 2022). In the second block (solving model), a superficial solving model was presented, with the following steps: data selection, choice of operations, execution of operations and expression of the

result (Sánchez and Vicente, 2015). Finally, in the third block (interaction), an example of interaction consistent with the superficial resolution model was presented. The problem and the resolution model were extracted from a textbook belonging to a frequently used publisher in Spain, while the interaction was obtained from the available sample of a previous study.

Option B of each task lent itself to a genuine mode of resolution: it presented in the first block a rewritten problem (semantically mathematically challenging and with textual aids to comprehension, see Orrantia et al., 2011); in the second block, a genuine resolution model (data selection, situational and mathematical understanding, choice of operations, execution of operations, mathematical and situational checking, and expression of the result); and in the third block, an example of interaction consistent with the genuine resolution model.

Based on the options chosen and the arguments provided in each of the three blocks of the evaluation task, each teacher was assigned to a knowledge profile. Initially, four knowledge profiles were established: high (teachers who chose options with reasoning in the three blocks), medium-high (teachers who chose two options with reasoning), medium-low (teachers who chose only one option with reasoning) and low (teachers who chose options without reasoning in the three blocks). This initial distribution reduced the available teachers in the high knowledge group to only 2. Likewise, an exploratory statistical analysis showed that the problem-solving behavior of teachers with high and medium-high knowledge was similar and that the same was true for teachers with medium-low and low knowledge. For these reasons, and as has been done in previous studies (e.g., Zhang, 2022), two profiles were finally established: teachers with high knowledge (those who, in at least two blocks, opted for option B and provided arguments consistent with the decision) and those with low knowledge (the rest).

Arithmetic word problems

Each teacher solved four problems: two standard problems and two rewritten problems. The first two came from textbooks, were semantically mathematically easy, and did not contain any reasoning aids. An example is the following:

A hospital has 200 rooms; 60% of the rooms have 2 beds, and the rest have 1 bed. How many beds does the hospital have?

The two rewritten problems were taken from the work of Orrantia et al. (2011). They were semantically mathematically difficult (Riley and Greeno, 1988), so it was not possible to solve them through superficial strategies such as keywords (Hegarty et al., 1995), and they contained textual aids to mathematical and situational reasoning. One such problem was the following:

A shepherd had a flock of 57 sheep. The shepherd wanted to increase the size of the flock because this year there was good pasture. To do this, he went to a livestock market, decided to buy some sheep and put them together with the ones he already had. One afternoon, the shepherd saw a pack of wolves in the area, the wolves were hungry and so, of the total number of sheep in the flock they ate 11 and now the flock has 96 sheep. How many sheep did the shepherd buy at the livestock market?

Procedure

The anonymity of the participants was guaranteed after informed consent was obtained. For the evaluation of the teachers' knowledge, the interviews were conducted at times when the teachers had enough time to adequately answer the questions. At the beginning of the interview, they were provided with a booklet containing the three blocks of the test, giving them the time they needed to analyze them one at a time. The interviewer wrote down the answers, encouraging them to argue their decisions by means of minimally invasive heuristics that allowed them to expand or qualify their reasoning. For example,

in the face of a terse response, the question was asked "What are the reasons you have chosen...?". When an argument was not clear, the question was asked: "I am not sure if I understood you, could you explain it again in other words? Finally, illustrative examples were requested when deemed necessary. An example of an argument from the teacher with low knowledge to support his choice for option A in the first task (problem) was: "In the second [problem] there is information that the students are not interested in, why the shepherd decided to increase the herd, and it is obvious that by increasing the number he put them together with the others". An example of an argument provided by teachers with high knowledge for choosing option B of the third task (interaction) was "Interaction 2 starts from the understanding of the situation and through reasoning the students arrive at a solution". A qualitative analysis of the interviews was not carried out since the aim of the study was not to analyze the teachers' arguments in depth but to verify that there were no inconsistencies between the choices they made and the arguments they gave to support them.

In relation to problem solving, the selected teachers solved the four problems with their students on different days during their regular schedule. The sessions were audio-recorded (ranging from 4 minutes and 41 seconds to 13 minutes and 57 seconds). The recordings were transcribed and divided into cycles of interaction. A cycle can be defined as a segment of interaction in which one public content is elaborated (Wells, 1999), i.e., an idea related to the problem or to the resolution process itself. It usually begins with a question and ends when this question is answered, i.e., when an agreement is reached between the teacher and the students. The content made public in each cycle was categorized as selection or reasoning, according to the resolution model of Verschaffel et al. (2000). The 'selection' category included public content in which: a) mathematical information (numerical data, question, key word); b) situational information (description

of characters, their intentions or objectives); c) the operation that solves the problem (and its execution), and d) the result were extracted. In the 'reasoning' category, we included cycles related to a) mathematical relationships between quantities and b) nonmathematical information that helps to understand the relationships between sets (e.g., in the rewritten problem example, the wolves' hunger can be used to justify why the size of the sheep flock is reduced). Table 1 shows an excerpt from one of the interactions in the study to illustrate the analysis procedure.

Cycle	Transcription	Public content	Category
CYCLE 4	Q: We already have a small idea, could you tell me, Alma, what the problem is about, what you have read, just in a nutshell. A: That a shepherd had 57 sheep, bought sheep, and the wolves came and ate 11 and now we have 96.	The problem tells of a shepherd who had 57 sheep, bought sheep, the wolves ate 11 and now there are 96.	Selection
CYCLE 5	Q: so what did the pastor want? A: increase herd size	The shepherd wanted to increase the size of the flock	Selection
CYCLE 6	Q: And what is the question you are asking then, Irene, what is the question? A: How many sheep did she have... Q: How many sheep... A: Purchased Q: Bought.	The question is how many sheep he bought	Selection
CYCLE 7	Q: I mean, a shepherd had a certain number of sheep, he buys more, so now his flock is bigger than at the beginning. Then, some wolves come and kill some sheep and he has so many sheep left that now it is a different number than at the beginning, but smaller.	The shepherd had some sheep, buys more and his flock is bigger than at the beginning. The wolves kill some and he has x sheep left, which is a different number than at the beginning, but smaller.	Reasoning

Table 1. Example of analysis of teacher-student interactions.

The cycles referring to class control and reflection on the more general processes of the

task (18.5% of the total) were not analyzed.

To test the reliability of the analysis system, five independent judges duly familiar with the analysis system categorized the cycles of a session at random, reaching a good degree of agreement (Cohen's κ between .80 and .87). Once all the cycles that made up each of the sessions had been categorized, the number of cycles in each category was calculated.

The chi-square statistic was used, using SPSS Statistic 26 software, to test the statistical significance of the differences found in the distribution of the interaction cycles analyzed (both in general and those dedicated to selection and reasoning) according to the level of knowledge of the teachers and the type of problem solved by each type of teacher.

Results

For knowledge for teaching teacher's arithmetic word problem solving.

Significant differences were found in the distribution of the cycles analyzed according to the type of teacher knowledge, $\chi^2 (1, N = 352) = 24.04, p < .001$. Teachers with low knowledge devoted a lower average number of cycles to problem solving than teachers with high knowledge (8.13 and 13.88, respectively, see Table 2).

Table 2. Average number of cycles dedicated by each type of teachers of both types of knowledge to each process in each type of problem.

Level knowledge	Professor	STANDARD		REWRITTEN	
		Selection	Reason	Selection	Reason
Low	1	7.5	0.5	5	1
	2	9	0.5	7.5	1
	3	9	1	5	1
	4	9.5	1.5	5	1
Average		8.75	0.88	5.62	1
High	1	8.5	4	10.5	6.5
	2	11.5	5	8.5	6
	3	9	3.5	12	7.5
	4	6.5	2.5	6	3.5

Average	8.875	3.75	9.25	5.88
Total average	8.815	2.315	7.44	3.438

Regarding the distribution of cycles by selection and reasoning (Table 2), teachers with low knowledge dedicated an average of 7.19 cycles to selection and 0.94 to reasoning, while those with high knowledge dedicated a higher average number of cycles to both selection (9.06) and, especially, reasoning (4.81) than those with low knowledge. Significant differences were found in the distribution of selection and reasoning cycles as a function of teachers type, $\chi^2 (1, N = 352) = 22.75$ $p < .001$. Comparisons of column proportions indicated that teachers with high knowledge devoted a higher proportion of cycles to reasoning, and teachers with low knowledge devoted a higher proportion of cycles to selection.

By teacher knowledge and type of problem.

Significant differences were found in the number of cycles each type of teachers devoted to solving each type of problem, $\chi^2 (1, N = 352) = 6.19$, $p < .02$. Comparisons of column proportions indicated that teachers with low knowledge devoted more cycles to solving standard problems than to solving rewritten problems (9.63 and 6.63, respectively), while teachers with high knowledge devoted a higher proportion of cycles to solving rewritten problems than to solving standard problems (15.13 and 12.63, respectively, see Table 2). Regarding the distribution of cycles devoted to selection and reasoning, teachers with low knowledge included more selection cycles in the standard problems than in the rewritten problems, $\chi^2 (1, N = 115) = 5.43$ $p = .02$. In the standard problems, teachers with low knowledge devoted an average of 8.75 cycles to selection and 0.88 to reasoning, compared to 5.62 cycles to selection and 1 cycle to reasoning in the rewritten problems. For their part, teachers with high knowledge included more reasoning cycles in the rewritten problems than in the standard problems, and this difference was marginally significant, $\chi^2 (1, N = 77) = 3.75$ $p = .053$. These teachers devoted an average

of 8.88 cycles to selection and 3.75 to reasoning in the standard problems, compared to 9.25 and 5.88 cycles to selection and reasoning in the rewritten ones (see Table 2).

Finally, if we focus on the cycles devoted to reasoning, it is interesting to note that teachers with high knowledge devoted more cycles than teachers with low knowledge in both standard problems, $\chi^2(1, N = 37) = 14.28$ $p < .001$, and rewritten problems, $\chi^2(1, N = 55)$

$= 27.66$ $p < .001$. In the case of the standard problems, the reasoning was devoted to finding alternative ways of resolution or posing and solving questions different from those initially posed. An example is the following:

[Q: Let us see, how else could we have solved it?

A: I have multiplied the rooms in the whole hospital by 0.6 and 0.4, and then I multiplied the rooms on the board.

P: Great because you know that the percentage was found in many ways: in fractional form, in decimal form, with the same operation of the percentage...].

Discussion

The relationship between a high pedagogical content knowledge and an adequate educational practice of teachers has been described in previous studies in relation to certain mathematical content, such as operations with whole numbers, comparison of ratios, fractions, or precursor knowledge of algebra in kindergarten (Charalambous et al., 2012; Getenet and Callingham, 2021; Hill et al., 2008, Hill and Charalambous, 2012ab; Koopman et al., 2019; Muñoz-Catalán et al., 2022). Although there is no known evidence of the existence of this relationship in the case of arithmetic word problem solving, it has been described that teachers, when solving this type of problem with their students, show superficial behavior and poor reasoning (Verschaffel et al., 2000), regardless of whether the problems they solve are standard and unchallenging (Chapman, 2006;

Depaepe et al., 2010) or rewritten and challenging (Rosales et al., 2012). To test whether this behavior is related to teachers' pedagogical knowledge about problem solving, this paper proposes an exploratory quantitative analysis with the aim of analyzing whether teachers' knowledge of problem solving influences the way they solve arithmetic word problems with their students and whether the type of problems solved moderates this influence.

For this purpose, we analyzed the way in which teachers with different levels (high and low) of knowledge in teaching arithmetic word problem solving solved two different types of problems: standard (nonchallenging and without aids) and rewritten (challenging and with aids to reasoning). We started with an initial sample of 65 practicing teachers, whose knowledge was assessed using an adaptation of the Ramos et al. test (2020). Of these, only 4 showed a high level of knowledge and were included in the final sample together with another 4 randomly selected teachers with a low level of knowledge. The teachers were recorded while solving each type of problem (standard and rewritten). Once the sessions were transcribed, two quantitative measures of the resolution mode of each type of teacher were obtained: mean number of interaction cycles dedicated to solving each type of problem, according to the type of teacher; and mean number of cycles dedicated to selection processes and reasoning, according to the type of teacher, in each type of problem.

The results of this exploratory study show that in the case of arithmetic word problem solving, there seems to be a link between teachers' pedagogical knowledge about problem solving and their teaching practices. More specifically, our findings suggest that teachers with low knowledge solve problems in a superficial manner, whether they are challenging and contain aids to reasoning or are not challenging and do not provide aids to reasoning; in contrast, teachers with high knowledge solve problems in a genuine way,

through reasoning, even when the task is not challenging and does not include aids to facilitate reasoning. In this sense, teachers with high knowledge dedicated more cycles of interaction in general and reasoning in particular to solving problems than their peers with low knowledge, regardless of the type of problem being solved.

In addition, each type of teachers placed special emphasis on solving those problems that allowed them to implement the modes of solving with which they were most familiar. Relative to teachers with low knowledge, they devoted significantly fewer cycles to solving the rewritten problems. To this, it must be added that, in both types of problems, these teachers devoted most of the interaction to the most basic processes (selection); in fact, teachers devoted virtually the same number of cycles to reasoning for solving both types of problems. This implies two things: first, that both types of problems were solved in a superficial way (Verschaffel et al., 2000), for example, using strategies such as the key word in standard problems (Hegarty et al., 1995) or selecting the information and asking the student for the operation that solves the problem, with no special emphasis on reasoning. Second, teachers with low knowledge, far from perceiving rewritten problems as an opportunity to solve problems in a different way, act as if they want to finish the task as soon as possible, reflecting the tendency of this type of teacher to avoid tasks that challenge students (Lester and Cai, 2016). This idea seems to contradict some previous results that pointed to the fact that complex material can compensate for teachers' lack of knowledge (Charalambous et al., 2012), at least in the specific case of arithmetic word problem solving.

In contrast, teachers with high knowledge not only devoted more cycles in general to solving both types of problems than teachers with low knowledge; they also devoted more cycles than these teachers to reasoning when solving both standard and rewritten problems. In relation to the standard problems, a qualitative interpretation of these cycles

allowed us to identify that teachers with high knowledge dedicated this discourse space to additional reasoning by searching for alternative ways of solving or to pose and solve questions different from those initially posed by the problem. In this sense, looking for other modes of resolution (Chapman, 2015) and being able to complement textbook problems with meaningful instructional activities (Hatisary and Erbas, 2017) requires high knowledge for teaching problem solving. Additionally, by devoting more cycles to reasoning in the rewritten problems than in the standard problems, teachers with high knowledge proved to be able to identify the difficulty level of the problems and the usefulness of the aids included in the problems to help students' reasoning. It should be remembered that the most difficult problems involve the implementation of complex cognitive processes that go beyond the mere selection of information (Verschaffel et al., 2000).

Taken together, the results of this study help us to understand the behavior of the teachers in the Depaepe et al. (2010) study when faced with standard problems and to qualify the behavior of the teachers in the Rosales et al. (2012) study when faced with rewritten problems. In the latter case, it would have been interesting to evaluate the knowledge of the teachers in the sample, which, in light of the results obtained here, would probably have shown low knowledge.

Finally, the present study allows us to draw two other conclusions. First, our findings suggest that if the vast majority of the initial sample of this study showed low knowledge even though it was selected by convenience sampling, probably in the general population of primary school teachers, the number of teachers with low knowledge is even higher than that found in this sample, which would corroborate previous findings (Carpenter et al., 1988; Csíkos & Szitányi, 2020; Siswono et al., 2017). Such a reality reflects the difficulty in finding highly knowledgeable teachers who can be incorporated into studies

such as the one described in the present work and helps to understand why teachers samples tend to be small in this field of study.

Second, it is necessary to highlight the usefulness of assessment tools such as the one used in the present study, since they make it possible to obtain real information on teachers' knowledge of arithmetic word problem solving by involving them in the analysis of real or simulated mathematical teaching practice through a dynamic and situated approach (Charalambous et al., 2020). Moreover, this work—one of the few studies of these characteristics in our country—responds to the manifest need for empirical studies that help explore pedagogical content knowledge (Charalambous et al., 2020; Sie and Agyei, 2023) in problem solving (Piñeiro et al., 2019). Research such as the one presented here allows us to develop a more comprehensive view of the relationships between teacher knowledge, teaching practice, and the development of mathematical competencies related to problem solving.

Educational implications

Despite being an exploratory study, the results obtained suggest that it would be necessary to increase the knowledge for teaching arithmetic word problem solving of primary education teachers, first, because of the high percentage of teachers in the initial sample who showed low knowledge; and second, because teachers' knowledge affects both what happens in their classrooms and their professional development. Teachers perceive and interpret what happens in the classroom through the pedagogical knowledge they possess; if this knowledge is inadequate, they will have difficulties in making the necessary reasoning to interpret what happens in the classroom and to improve their educational practice (Gegenfurtner et al., 2020). This improvement in teacher training should include at least two elements. First, an awareness on the part of teachers of their own level of knowledge since teachers often assume that they are providing students with the right

way to solve problems through reasoning, but what they identify as this reasoning may not, in fact, be desirable (Leung et al., 2023; Melhuish et al., 2020). In this sense, a joint analysis between teachers and researcher-trainers of teachers' educational practices and of the pedagogical knowledge emanating from them could be an excellent tool (Muñoz-Catalán et al., 2022). Second, it would be advisable to help teachers become aware of the limitations of the textbooks they usually use in class since, in countries such as Spain, the books most commonly used in classrooms could contribute to the low knowledge of teachers by including almost exclusively standard problems and superficial models of resolution (Tárraga et al., 2021; Vicente et al., 2020). On the other hand, to implement with fidelity those books and materials more effective for teaching, teachers would need continuous professional development (Stylianou et al., 2019) and specific initial training (Piñeiro et al., 2022).

Limitations and future studies

The results of the present study should be considered as a first approach to the quantitative analysis of the influence of primary school teachers' knowledge of teaching arithmetic word problem solving in their educational practice. Given the sense of these results, their coherence and complementarity with previous qualitative studies, it would be highly recommendable to carry out additional studies that, based on larger random samples of teachers, would report more valid and reliable results. In this same sense, it would be interesting to compare the knowledge of Spanish teachers with that of other countries such as Singapore, whose students seem to be especially skilled in problem solving. Likewise, it would be convenient to complement the quantitative data of our study with a qualitative analysis of the arguments provided by teachers to justify their choices in the task of knowledge assessment. Finally, it would be interesting to carry out instructional studies on problem solving with teachers with low knowledge, with the aim of improving

their pedagogical knowledge on problem solving.

Influencia del conocimiento pedagógico del profesorado en su práctica de aula cuando resuelve problemas aritméticos verbales con su alumnado. Un estudio exploratorio.

Introducción

La práctica educativa que promueve el profesorado al resolver problemas de matemáticas con su alumnado es determinante para el aprendizaje (Baumert et al., 2010; Charalambous et al., 2020; Kelcey et al., 2019; Siswono et al., 2017). Asimismo, uno de los elementos que más influye en esa práctica educativa es el conocimiento pedagógico de contenido de cada materia (Depaepe et al., 2013). Se han desarrollado multitud de estudios sobre la influencia de este conocimiento en la práctica educativa en clase de matemáticas, la mayoría con metodologías cualitativas. Sin embargo, los trabajos que analizan la influencia del conocimiento especializado del profesorado sobre resolución de problemas en sus prácticas educativas son escasos, más aún si nos referimos a estudios cuantitativos. Este estudio pretende dar un primer paso en ese sentido, respondiendo a la siguiente pregunta: ¿existen diferencias cuantitativas en el modo en que el profesorado de Primaria con diferentes niveles de conocimiento pedagógico sobre resolución de problemas resuelve problemas aritméticos verbales con su alumnado?

Conocimiento Pedagógico del Contenido y Conocimiento para la Enseñanza de la Resolución de Problemas

Para comprender qué conocimientos debe tener el profesorado para enseñar una materia es necesario partir del concepto de conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1987). Este concepto se refiere al conocimiento del que debe disponer el profesorado,

tanto de un contenido científico determinado como de la pedagogía de ese contenido. Existe un consenso en considerar el conocimiento pedagógico del contenido como un conocimiento que el profesorado activa en un contexto educativo concreto (Depaepe et al., 2013). Este conocimiento es necesario, por ejemplo, para que el profesorado desarrolle adecuadamente su visión profesional, es decir, su capacidad para captar rápidamente la información sobre lo que sucede en clase e interpretarla adecuadamente (Gegenfurtner et al., 2020).

Desde que se definió por primera vez, se ha dedicado un gran número de trabajos al estudio del conocimiento pedagógico del contenido, fundamentalmente, en la enseñanza de las ciencias (ver Schneider y Plasman, 2011) y las matemáticas (ver Depaepe et al., 2013). En el caso de las matemáticas, la mayoría de los estudios se han centrado en profundizar en la descripción del conocimiento pedagógico del contenido, mediante el análisis cualitativo de muestras de profesorado, a través de cuestionarios o entrevistas en las que realizaban valoraciones de situaciones reales de aula. De estos estudios destacan los trabajos de Ball et al. (2008) y las elaboraciones posteriores de sus propuestas relacionadas con el conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas. Piñeiro et al. (2019), basándose en el concepto de conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas de Chapman (2015), estructuraron los conocimientos incluidos en este conocimiento en dos elementos: conocimiento sobre resolución de problemas y conocimiento pedagógico sobre resolución de problemas. Dentro del primer elemento se incluirían tres componentes: a) conocimiento de qué es un problema y de los diferentes tipos de tareas que pueden presentarse como problemas; b) conocimiento del proceso de resolución de problemas (fases y estrategias de resolución, procesos metacognitivos); y c) disposición del alumnado para resolver el problema. Dentro del segundo elemento del conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas —el conocimiento

pedagógico sobre resolución de problemas—, se incluyen cuatro componentes: a) el estudiante como resolutor; b) la resolución de problemas como tarea escolar (p.e., qué problemas son más adecuados para la enseñanza, modelos y estrategias de resolución más útiles para el alumnado); c) factores no cognitivos (p.e., las interrelaciones entre las creencias y las concepciones, y su influencia en el proceso de resolución); y d) gestión de la enseñanza de la resolución de problemas (p.e., diferentes enfoques de resolución, manejo de los bloqueos del alumnado).

Los estudios que han evaluado el nivel de conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas del profesorado son escasos, y apuntan a que este nivel suele ser bajo. Esto implica que el profesorado suele mostrar limitaciones para diferenciar la estructura semántico-matemática de los problemas (Carpenter et al., 1988), para plantear estrategias de resolución en función de la naturaleza del problema (Siswono et al., 2017), o para determinar qué es un problema, plantear un proceso de resolución y aceptar resultados no numéricos como solución (Csíkos y Szitányi, 2020). También parece tener dificultades para identificar problemas y modelos de resolución que facilitarían el razonamiento del alumnado (Ramos et al., 2020), para entender la resolución como un proceso, plantear problemas en función de la estructura semántico-matemática y tener en cuenta las características del alumnado como resolutor (Piñeiro et al., 2022), o para identificar las intenciones didáctico-matemáticas que movilizan el conocimiento sobre el planteamiento de problemas del profesorado (Chico et al., 2023).

Problemas aritméticos verbales: conocimiento pedagógico del contenido y resolución en el aula

La escasez de trabajos que relacionan el conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas del profesorado con su impacto en las aulas contrasta con la abundante investigación existente sobre los problemas aritméticos verbales. Toda esta investigación

ha contribuido notablemente a la descripción de los conocimientos que necesita el profesorado para enseñar al alumnado a resolverlos (ver Chapman, 2015 y Piñeiro et al., 2019).

Los problemas aritméticos verbales se definen como descripciones verbales de situaciones problemáticas que dan lugar a una o más preguntas cuyas respuestas pueden obtenerse aplicando operaciones matemáticas a los datos presentados en el problema (Verschaffel et al., 2020). Una de las contribuciones de la investigación sobre los problemas aritméticos verbales a la descripción del conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas ha sido la identificación de una amplia variedad de problemas, en función de diferentes criterios, que implican diferentes niveles de desafío (ver Daroczy et al., 2015). Por ejemplo, de acuerdo con su estructura semántico-matemática (Carpenter y Moser, 1984; Greer, 1992; Xin, 2007), existen más de 30 subtipos de problemas de estructura aditiva y multiplicativa. Otra contribución importante ha sido la propuesta de diferentes modelos de resolución de problemas aritméticos verbales. Por ejemplo, de acuerdo con el modelo de Verschaffel et al. (2000), los problemas menos desafiantes (aquellos cuya resolución apenas requiere razonamiento) pueden resolverse de manera superficial, seleccionando los datos, eligiendo después la operación que lo resuelve mediante estrategias no basadas en la comprensión, como la estrategia de la palabra clave (Hegarty et al., 1995) y comunicando finalmente el resultado de la operación como respuesta al problema. En cambio, los problemas más desafiantes deben resolverse a través del denominado ‘modo genuino’, en el que la elección de la operación se sustenta en el razonamiento acerca de la situación descrita en el problema (Verschaffel et al., 2000) y de la estructura matemática subyacente. Es ese razonamiento el que permite deducir qué operación u operaciones son necesarias para resolver el problema (Riley y Greeno, 1988; Verschaffel et al., 2000; Xin, 2007), y el que debería promover el profesorado para

enseñar al alumnado a resolver cualquier tipo de problema a través de la construcción de significados (p.e., justificando y generalizando, ver Hanna, 2020 y Melhuish et al., 2020), animando y ayudando al alumnado a realizar y comunicar esos razonamientos (Herbert y Williams, 2023).

Cuando el profesorado, al resolver problemas con su alumnado, pone el foco del proceso de resolución en unas determinadas fases y no en otras, están promoviendo uno de los dos modos de resolución descritos por Verschaffel et al. (2000): superficial o genuino. A pesar de que la práctica educativa que promueve el profesorado al resolver problemas con su alumnado determina el modo en que este aprende (Baumert et al., 2010; Charalambous et al., 2020; Kelcey et al., 2019; Siswono et al., 2017), los estudios que han analizado cómo se promueve la resolución de problemas en las clases de matemáticas son escasos. Los resultados de esos estudios indican que el profesorado suele centrar su atención en los aspectos estrictamente matemáticos del problema, dificultando la resolución a través de la comprensión (Chapman, 2006), y que este comportamiento se produce al resolver tanto problemas estereotipados, que pueden resolverse de manera superficial (Depaepe et al., 2010), como no estereotipados. En este sentido, Rosales et al. (2012) analizaron cómo once profesores de Primaria resolvían con su alumnado problemas semántico-matemáticamente desafiantes que incluían ayudas al razonamiento matemático y situacional, y obtuvieron resultados muy similares a los hallados por Depaepe et al. (2010) con problemas estereotipados, sugiriendo que este comportamiento no se debía al tipo de problema que se resuelve, sino que podría deberse a las limitaciones en el conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas del profesorado. Esta conclusión es compatible con los resultados de algunos autores, que encontraron evidencias de que el nivel de este tipo de conocimiento que posee el profesorado suele ser bajo (Carpenter et al., 1988; Csíkos y Szitányi, 2020; Siswono et al., 2017).

Algunos estudios han mostrado que el conocimiento pedagógico del contenido del profesorado se vincula de manera positiva y fuerte con la calidad de su práctica educativa, y que esta vinculación está moderada por algunos elementos implicados en las prácticas educativas, como los libros de texto o los materiales manipulativos. Estos estudios, en su mayoría cualitativos, se han centrado en contenidos matemáticos generales (Hill et al., 2008; Hill y Charalambous, 2012a), o en contenidos concretos como las operaciones con números enteros (Charalambous et al., 2012), la comparación de ratios (Hill y Charalambous, 2012b), las fracciones (Getenet y Callingham, 2021; Koopman et al., 2019) o el aprendizaje de los primeros aspectos algebraicos en Infantil (Muñoz-Catalán et al., 2022).

Sin embargo, no se conocen estudios que hayan analizado la relación entre el conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas del profesorado relativo a la resolución de problemas aritméticos verbales y su práctica educativa al resolver con su alumnado este tipo de problemas. Por ello, con el presente estudio se pretende alcanzar dos objetivos. En primer lugar, explorar si el conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos verbales del profesorado, relacionado con dos de sus componentes más relevantes (problemas y modelos de resolución para la enseñanza, ver Piñeiro et al., 2019) influye en el modo superficial o genuino que promueven durante la resolución. Para ello se vincularon esos modos de resolución a medidas cuantitativas extraídas de la interacción entre el profesorado y el alumnado al resolver conjuntamente el problema. En segundo lugar, se pretende indagar si el profesorado con distinto nivel de conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos verbales resuelve de manera diferente problemas de distintos tipos, en relación con su grado de desafío y la presencia de ayudas al razonamiento.

Metodología

Participantes

Se tomó una muestra inicial de 65 profesores del universo formado por el profesorado español que imparte la materia de matemáticas en 6º de Educación Primaria, en centros públicos y concertados. La muestra inicial se seleccionó mediante un muestreo no probabilístico por conveniencia. Al profesorado de la muestra se le aplicó una prueba para evaluar su conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante una entrevista semi-estructurada, con el fin de asignarles un perfil de conocimiento (alto o bajo). Se identificaron únicamente 4 profesores con un conocimiento alto, que fueron incluidos en la muestra final. Asimismo, entre el profesorado con un conocimiento bajo, se seleccionaron 4 al azar. Por tanto, la muestra final la formaron ocho profesores (cinco mujeres y tres hombres). Este profesorado impartía docencia en centros urbanos de un nivel socioeconómico medio, tenía una experiencia docente superior a 10 años ($M= 30.6$; $SD= 4.3$), utilizaba el libro de texto como material curricular habitual, y no había recibido formación específica en resolución de problemas aritméticos verbales.

Medidas

Se consideraron dos medidas en función del conocimiento del profesorado y el tipo de problema: a) el promedio de ciclos de interacción que dedicaba cada tipo de profesorado a la resolución de cada tipo de problema y b) el promedio de ciclos de interacción que dedicaba cada tipo de profesorado a los procesos de selección y de razonamiento, en cada tipo de problema.

Se realizó un análisis cuantitativo de los datos, a pesar de la reducida muestra, dada la necesidad de este tipo de trabajos empíricos para comprender la naturaleza del conocimiento del profesorado y su relación con las prácticas docentes (Charalambous et al., 2020), y considerando que los estudios cuantitativos tienden a ser más objetivos e independientes (López, 2002). Investigaciones recientes reivindican que este tipo de

estudios ayudan, más específicamente, a explorar el conocimiento pedagógico del contenido (Sie y Agyei, 2023) en el caso concreto de la resolución de problemas (Piñeiro et al., 2019).

Materiales

Prueba para evaluar el conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos verbales.

Se adaptó la prueba de Ramos et al. (2020), que evaluaba de manera inferencial el conocimiento pedagógico del contenido del profesorado sobre la resolución de problemas aritméticos verbales como tareas escolares (Piñeiro et al., 2019). La prueba permite evaluar el conocimiento de forma situada y contextualizada, ya que implica a los docentes en el análisis de la práctica matemática real dirigida a la resolución de problemas (ver Charalambous et al., 2020). La prueba estaba estructurada en tres bloques: problema, modelo de resolución e interacción profesorado- alumnado. En cada uno de ellos se presentaba al profesorado dos opciones: A y B. El profesorado debía elegir, en cada uno de los tres bloques, la opción que consideraba más adecuada para enseñar a su alumnado a resolver problemas razonadamente, y argumentar cada una de sus elecciones.

La opción A de cada tarea se prestaba a un modo superficial de resolución que no favorecía el razonamiento. En el primer bloque (elección del problema), se presentaba un problema estándar, semántico-matemáticamente no desafiante y sin ayudas en el enunciado (los más frecuentes en los libros de texto españoles, ver Tárraga et al., 2021; Vicente et al., 2022). En el segundo bloque (modelo de resolución), se presentaba un modelo superficial de resolución, con los siguientes pasos: selección de datos, elección de operaciones, ejecución de operaciones y expresión del resultado (Sánchez y Vicente, 2015). Finalmente, en el tercer bloque (interacción), se presentaba un ejemplo de interacción coherente con el modelo de resolución superficial. El problema y el modelo

de resolución se extrajeron de un libro de texto perteneciente a una editorial de uso frecuente en España, mientras que la interacción se obtuvo de la muestra disponible de un estudio previo.

La opción B de cada tarea se prestaba a un modo genuino de resolución: presentaba en el primer bloque un problema reescrito (semántico-matemáticamente desafiante y con ayudas textuales a la comprensión, ver Orrantia et al., 2011); en el segundo bloque, un modelo de resolución genuino (selección de datos, comprensión situacional y matemática, elección de operaciones, ejecución de operaciones, comprobación matemática y situacional, y expresión del resultado); y en el tercer bloque, un ejemplo de interacción coherente con el modelo de resolución genuino.

En función de las opciones elegidas y los argumentos aportados en cada uno de los tres bloques de la tarea de evaluación, cada profesor fue asignado a un perfil de conocimiento. Inicialmente se establecieron cuatro perfiles de conocimiento: alto (profesorado que eligió opciones con razonamiento en los tres bloques), medio-alto (profesorado que eligió dos opciones con razonamiento), medio-bajo (profesorado que eligió solo una opción con razonamiento) y bajo (profesorado que eligió las opciones sin razonamiento en los tres bloques). Esta distribución inicial reducía a solo 2 los profesores disponibles en el grupo de conocimiento alto. Asimismo, un análisis estadístico exploratorio mostró que el comportamiento a la hora de resolver problemas del profesorado con conocimiento alto y medio-alto era similar, y que sucedía lo mismo con el profesorado de conocimiento medio-bajo y bajo. Por estos motivos, y tal y como se ha hecho en otros estudios previos (p.e., Zhang, 2022) se establecieron finalmente dos perfiles: profesorado con conocimiento alto (aquel que, en al menos dos bloques, se decantó por la opción B y aportó argumentos coherentes con la decisión); y de conocimiento bajo (el resto).

Problemas aritméticos verbales

Cada profesor resolvió cuatro problemas: dos problemas estándar y dos reescritos. Los dos primeros procedían de los libros de texto, eran semántico-matemáticamente fáciles y no contenían ninguna ayuda al razonamiento. Un ejemplo es el siguiente:

Un hospital tiene 200 habitaciones, el 60% de las habitaciones tienen 2 camas y el resto una. ¿De cuántas camas dispone el hospital?

Los dos problemas reescritos fueron tomados del trabajo de Orrantia et al. (2011). Eran semántico-matemáticamente difíciles (Riley y Greeno, 1988), de modo que no era posible resolverlos a través de estrategias superficiales como la palabra clave (Hegarty et al., 1995), y contenían ayudas textuales al razonamiento matemático y situacional. Uno de estos problemas fue el siguiente:

Un pastor tenía un rebaño con 57 ovejas. El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño porque este año había buenos pastos. Para ello se fue a una feria de ganado, decidió comprar algunas ovejas y las juntó con las que ya tenía. Una tarde el pastor vio una manada de lobos por la zona, los lobos estaban hambrientos y entonces, del total de ovejas del rebaño se comieron 11 y ahora el rebaño tiene 96. ¿Cuántas ovejas compró el pastor en la feria?

Procedimiento

El anonimato de los participantes quedó garantizado tras aceptar un consentimiento informado. Para la evaluación del conocimiento del profesorado, se realizaron las entrevistas en momentos en que el profesorado disponía del tiempo necesario para responder adecuadamente a las cuestiones. Al comienzo de la entrevista se les facilitó un cuadernillo con los tres bloques de la prueba, dándoles el tiempo que necesitaron para que los analizaran de uno en uno. El entrevistador anotó las respuestas, animándolos a argumentar sus decisiones mediante heurísticos mínimamente invasivos que permitieron

ampliar o matizar sus razonamientos. Por ejemplo, ante una respuesta escueta, se preguntó “¿Cuáles son las razones por los que has elegido...?”. Cuando algún argumento no quedó claro, se preguntó: “No estoy seguro de haberte comprendido, ¿podrías explicármelo de nuevo con otras palabras?”. Finalmente, se solicitaron ejemplos ilustrativos cuando se estimó necesario. Un ejemplo de argumento del profesorado con conocimiento bajo para sustentar su elección por la opción A en la primera tarea (problema) fue: “En el segundo [problema] hay información que al alumnado no le interesa, por qué el pastor decidió aumentar el rebaño, y es obvio que al aumentar el número las juntase con las demás”. Un ejemplo de argumento aportado por el profesorado con conocimiento alto para elegir la opción B de la tercera tarea (interacción) fue: “La interacción 2 parte de la comprensión de la situación y a través del razonamiento llega el alumnado a una solución”. No se realizó un análisis cualitativo de las entrevistas dado que el objetivo del trabajo no era el análisis en profundidad de los argumentos del profesorado, sino comprobar que no existían incoherencias entre las elecciones que hacía y los argumentos que daba para sustentarlas.

En relación con la resolución de problemas, el profesorado seleccionado resolvió los cuatro problemas con su alumnado, en días diferentes, en su horario habitual. Las sesiones se grabaron en audio (variaron entre 4 minutos y 41 segundos y 13 minutos y 57 segundos). Las grabaciones fueron transcritas y divididas en ciclos de interacción. Un ciclo puede definirse como un segmento de interacción en el que se elabora un contenido público (Wells, 1999), es decir, una idea relacionada con el problema o con el propio proceso de resolución. Suele comenzar con una pregunta y terminar cuando se responde esta pregunta, es decir, cuando se alcanza un acuerdo entre el profesorado y el alumnado. El contenido que se hizo público en cada ciclo se categorizó como selección o razonamiento, de acuerdo con el modelo de resolución de Verschaffel et al. (2000).

Dentro de la categoría ‘selección’ se incluyeron los contenidos públicos en los que se extraía: a) información matemática (datos numéricos, pregunta, palabra clave); b) información situacional (descripción de personajes, sus intenciones u objetivos); c) la operación que resuelve el problema (y su ejecución), y d) el resultado. En la categoría ‘razonamiento’ se incluyeron los ciclos relacionados con: a) las relaciones matemáticas entre las cantidades; y b) la información no matemática que ayuda a comprender las relaciones entre los conjuntos (p.e., en el ejemplo de problema reescrito, el hambre de los lobos puede utilizarse para justificar por qué se reduce el tamaño del rebaño de ovejas). La Tabla 1 muestra un fragmento de una de las interacciones del estudio para ilustrar el procedimiento de análisis.

Tabla 1. Ejemplo de análisis de las interacciones profesorado- alumnado

Ciclo	Transcripción	Contenido público	Categoría
CICLO 4	P: Ya tenemos una pequeña idea, podrías decirme, Alma, de qué va el problema, qué es lo que has leído, así por encima A: Que un pastor tenía 57 ovejas, compró ovejas, y vinieron los lobos y se comieron 11 y ahora tenemos 96.	El problema habla de un pastor que tenía 57 ovejas, compró ovejas, los lobos se comieron 11 y ahora hay 96	Selección
CICLO 5	P: entonces ¿qué es lo que quería el pastor? A: aumentar el tamaño del rebaño	El pastor quería aumentar el tamaño del rebaño	Selección
CICLO 6	P: Y ¿cuál es la pregunta que le hace entonces, Irene?, ¿cuál es la pregunta? A: Cuántas ovejas tenía... P: Cuántas ovejas... A: Compró P: Compró.	La pregunta es cuántas ovejas compró	Selección
CICLO 7	P: Es decir, un pastor tenía un número determinado de ovejas, compra más, así que ahora su rebaño es mayor que al principio. Después vienen unos lobos matan a ciertas ovejas y le quedan tantas	El pastor tenía algunas ovejas, compra más y su rebaño es mayor que al inicio. Los lobos matan algunas y le quedan x, que es un n°	Razonamiento

ahora que es un nº diferente al que tenía al principio, pero más pequeño.	diferente a las del principio, pero más pequeño.
---	--

Los ciclos referidos al control de la clase y a la reflexión acerca de los procesos más generales de la tarea (el 18.5% del total) no fueron analizados.

Para comprobar la fiabilidad del sistema de análisis, cinco jueces independientes y debidamente familiarizados con el sistema de análisis categorizaron los ciclos de una sesión al azar, alcanzando un buen grado de acuerdo (κ de Cohen entre .80 y .87). Una vez categorizados todos los ciclos que componían cada una de las sesiones, se calculó el número de ciclos de cada categoría.

Se utilizó el estadístico Chi cuadrado, mediante el software SPSS Statistic 26, para comprobar la significatividad estadística de las diferencias encontradas en la distribución de los ciclos de interacción analizados (tanto en general como los dedicados a selección y razonamiento) en función del nivel de conocimiento del profesorado y tipo de problema resuelto por cada tipo de profesorado.

Resultados

Por conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos verbales del profesorado

Se encontraron diferencias significativas en la distribución de los ciclos analizados en función del tipo de conocimiento del profesorado, χ^2 (1, N = 352) = 24.04, $p < .001$. El profesorado con conocimiento bajo dedicó a la resolución de los problemas un promedio de ciclos inferior al del profesorado con conocimiento alto (8.13 y 13.88, respectivamente, ver Tabla 2).

Tabla 2. Media de ciclos dedicados por cada tipo de profesorado de ambos tipos de conocimiento a cada proceso en cada tipo de problema.

Nivel conocimiento	Profesor	PROBLEMA			
		ESTÁNDAR		REESCRITO	
		Selección	Razonar	Selección	Razonar
Bajo	1	7.5	0.5	5	1
	2	9	0.5	7.5	1
	3	9	1	5	1
	4	9.5	1.5	5	1
	Promedio	8.75	0.88	5.62	1
Alto	1	8.5	4	10.5	6.5
	2	11.5	5	8.5	6
	3	9	3.5	12	7.5
	4	6.5	2.5	6	3.5
	Promedio	8.875	3.75	9.25	5.88
Promedio total		8.815	2.315	7.44	3.438

Respecto a la distribución de los ciclos por selección y razonamiento (Tabla 2), el profesorado con conocimiento bajo dedicó una media de 7.19 ciclos a la selección y 0.94 al razonamiento, mientras que el de conocimiento alto dedicó un promedio mayor de ciclos tanto a la selección (9.06) como –especialmente– al razonamiento (4.81) que el de conocimiento bajo. Se encontraron diferencias significativas en la distribución de ciclos de selección y razonamiento en función del tipo de profesorado, $\chi^2 (1, N = 352) = 22.75$ $p < .001$. Comparaciones de proporciones de columna indicaron que el profesorado con conocimiento alto dedicó una proporción mayor de ciclos al razonamiento, y el profesorado con conocimiento bajo, una mayor proporción de ciclos a la selección.

Por conocimiento del profesorado y tipo de problema.

Se encontraron diferencias significativas en la cantidad de ciclos que cada tipo de profesorado dedicó a resolver cada tipo de problema, $\chi^2 (1, N = 352) = 6.19, p < .02$. Comparaciones de proporciones de columnas indicaron que el profesorado con conocimiento bajo dedicó más ciclos a resolver problemas estándar que reescritos (9.63 y 6.63, respectivamente), mientras que el profesorado con conocimiento alto dedicó una proporción mayor de ciclos a resolver problemas reescritos que problemas estándar (15.13 y 12.63, respectivamente, ver Tabla 2).

Respecto a la distribución de ciclos dedicados a selección y razonamiento, el profesorado con conocimiento bajo incluyó más ciclos de selección en los problemas estándar que en los reescritos, $\chi^2 (1, N = 115) = 5.43 p = .02$). En los problemas estándar, el profesorado con conocimiento bajo dedicó una media de 8.75 ciclos a selección y 0.88 a razonamiento, frente a los 5.62 ciclos a selección y 1 ciclo a razonamiento que le dedicaron a los problemas reescritos. Por su parte, el profesorado con conocimiento alto incluyó más ciclos de razonamiento en los problemas reescritos que en los problemas estándar, siendo esta diferencia marginalmente significativa, $\chi^2 (1, N = 77) = 3.75 p = .053$). Este profesorado dedicó una media de 8.88 ciclos a selección y de 3.75 a razonamiento en los problemas estándar, frente a los 9.25 y 5.88 ciclos a selección y razonamiento en los reescritos (ver Tabla 2).

Finalmente, si nos centramos en los ciclos dedicados a razonamiento, es interesante señalar que el profesorado con conocimiento alto dedicó más ciclos que el profesorado con conocimiento bajo tanto en los problemas estándar, $\chi^2 (1, N = 37) = 14.28 p < .001$, como en los reescritos, $\chi^2 (1, N = 55) = 27.66 p < .001$. En caso de los problemas estándar, el razonamiento se dedicó a buscar modos alternativos de resolución o a plantear y resolver cuestiones diferentes a las inicialmente planteadas. Un ejemplo es el siguiente:

[P: vamos a ver, ¿de qué otra forma podríamos haberlo resuelto?

A: he multiplicado las habitaciones que hay en todo el hospital por 0.6 y 0.4, y luego ya como en la pizarra.

P: fenomenal porque ya sabéis que el porcentaje se hallaba de muchas maneras: de forma fraccionaria, de forma decimal, con la misma operación del porcentaje...].

Discusión

La relación entre un elevado conocimiento pedagógico del contenido y una adecuada práctica educativa del profesorado ha sido descrita en estudios previos en relación con determinados contenidos matemáticos, como las operaciones con números enteros, la comparación de ratios, las fracciones, o los conocimientos precursores del álgebra en Infantil (Charalambous et al., 2012; Getenet y Callingham, 2021; Hill et al., 2008, Hill y Charalambous, 2012ab; Koopman et al., 2019; Muñoz-Catalán et al., 2022). Aunque no se conocen evidencias de la existencia de esta relación en el caso de la resolución de problemas aritméticos verbales, sí se ha descrito que el profesorado, cuando resuelve este tipo de problemas con su alumnado, muestra un comportamiento superficial y con escaso razonamiento (Verschaffel et al., 2000), independientemente de si los problemas que resuelven son estándar y poco desafiantes (Chapman, 2006; Depaepe et al., 2010) o reescritos y desafiantes (Rosales et al., 2012). Para comprobar si este comportamiento está relacionado con el conocimiento pedagógico del profesorado sobre resolución de problemas, en el presente trabajo se plantea un análisis cuantitativo exploratorio con el objetivo de analizar si el este conocimiento del profesorado influye en el modo en que resuelve problemas aritméticos verbales con su alumnado, y si el tipo de problemas que se resuelve modera esa influencia.

Para ello se analizó el modo en el que profesorado con distinto nivel (alto y bajo) de conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos verbales resolvía dos tipos diferentes de problemas: estándar (no desafiantes y sin ayudas) y reescritos (desafiantes y con ayudas al razonamiento). Se partió de una muestra inicial de 65 profesores en ejercicio, cuyo conocimiento se evaluó mediante una adaptación de la prueba de Ramos et al. (2020). De todos ellos, únicamente 4 mostraron un conocimiento alto, que fueron incluidos en la muestra final junto a otros 4 profesores con nivel bajo seleccionados aleatoriamente. Se grabó al profesorado mientras resolvía cada uno de los tipos de problemas (estándar y reescritos). Una vez transcritas las sesiones, se obtuvieron dos medidas cuantitativas del modo de resolución de cada tipo de profesorado: media de ciclos de interacción dedicados a resolver cada tipo de problemas, según el tipo de profesorado; y media de ciclos dedicados a procesos de selección y a razonamiento, en función del tipo de profesorado, en cada tipo de problema.

Los resultados de este estudio exploratorio muestran que también en el caso de la resolución de problemas aritméticos verbales parece haber un vínculo entre el conocimiento pedagógico del profesorado sobre resolución de problemas y sus prácticas docentes. Más concretamente, nuestros hallazgos apuntan a que el profesorado con conocimiento bajo resuelve los problemas de manera superficial, tanto si son desafiantes y contienen ayudas al razonamiento, como si no son desafiantes y no proporcionan ayudas al razonamiento; en cambio el profesorado con conocimiento alto resuelve los problemas de manera genuina, a través del razonamiento, incluso cuando la tarea no es desafiante y no incluye ayudas que faciliten ese razonamiento. En este sentido, el profesorado con conocimiento alto dedicó más ciclos de interacción en general y de razonamiento en particular a resolver los problemas que sus compañeros con conocimiento bajo, independientemente del tipo de problema que se resolviera.

Además, cada tipo de profesorado puso un énfasis especial en la resolución de aquellos problemas que les permitían implementar los modos de resolución con los que estaba más familiarizados. En relación con el profesorado con conocimiento bajo, éste dedicó significativamente menos ciclos a resolver los problemas reescritos. A esto hay que añadir que, en ambos tipos de problemas, este profesorado dedicó la mayor parte de la interacción a los procesos más básicos (selección); de hecho, el profesorado dedicó prácticamente el mismo número de ciclos al razonamiento para la resolución de ambos tipos de problemas. Esto implica dos cosas; en primer lugar, que ambos tipos de problemas fueron resueltos de manera superficial, (Verschaffel et al., 2000), por ejemplo, utilizando estrategias como la palabra clave en los problemas estándar (Hegarty et al., 1995), o seleccionando la información y preguntando al alumnado por la operación que resuelve el problema, sin hacer un énfasis especial en el razonamiento. Y, en segundo lugar, que el profesorado con conocimiento bajo, lejos de percibir los problemas reescritos como una oportunidad para resolver problemas de un modo diferente, actúa como si quisiera terminar la tarea cuanto antes, reflejando la tendencia de este tipo de profesorado a evitar las tareas que suponen un desafío al alumnado (Lester y Cai, 2016). Esta idea parece contradecir algunos resultados previos que apuntaban a que un material complejo pueda compensar la falta de conocimientos del profesorado (Charalambous et al., 2012), al menos en el caso concreto de la resolución de problemas aritméticos verbales.

En cambio, el profesorado con conocimiento alto no solo dedicó más ciclos en general a resolver ambos tipos de problemas que el profesorado con conocimiento bajo; también dedicó más ciclos que ese profesorado al razonamiento al resolver tanto los problemas estándar como los reescritos. En relación con los problemas estándar, una interpretación cualitativa de esos ciclos permitió identificar que el profesorado con conocimiento alto

dedicó ese espacio del discurso a realizar razonamientos adicionales buscando modos alternativos de resolución o a plantear y resolver cuestiones diferentes a las inicialmente planteadas por el problema. En este sentido, buscar otros modos de resolución (Chapman, 2015) y ser capaz de complementar los problemas de los libros de texto con actividades instructivas significativas (Hatisary y Erbas, 2017), requiere un elevado conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas. Asimismo, al dedicar más ciclos al razonamiento en los problemas reescritos que en los problemas estándar, el profesorado con conocimiento alto demostró ser capaz de identificar el nivel de dificultad de los problemas y la utilidad de las ayudas incluidas en los problemas para ayudar al razonamiento del alumnado. Cabe recordar que los problemas más difíciles implican la puesta en marcha de procesos cognitivos complejos, que van más allá de la mera selección de información (Verschaffel et al., 2000).

Tomados en conjunto, los resultados de este estudio nos ayudan a comprender el comportamiento del profesorado del trabajo de Depaepe et al. (2010) ante problemas estándar y matizar el comportamiento del profesorado del estudio de Rosales et al. (2012) ante problemas reescritos. En este último caso, habría sido interesante evaluar el conocimiento del profesorado de la muestra que, a la luz de los resultados aquí obtenidos, probablemente hubiera mostrado un conocimiento bajo.

Finamente, el presente trabajo permite extraer otras dos conclusiones. En primer lugar, nuestros hallazgos invitan a pensar que, si la inmensa mayoría de la muestra inicial de este estudio mostró un conocimiento bajo aun habiendo sido seleccionada mediante un muestreo por conveniencia, probablemente en la población general del profesorado de Educación Primaria el profesorado con conocimiento bajo sea incluso mayor al encontrado en esta muestra, lo cual corroboraría los hallazgos previos (Carpenter et al., 1988; Csíkos y Sztányi, 2020; Siswono et al., 2017). Tal realidad refleja la dificultad

para encontrar profesorado con alto conocimiento que pueda incorporarse a estudios como el descrito en el presente trabajo y ayuda a entender por qué en este campo de estudio las muestras de profesorado suelen ser reducidas.

En segundo lugar, es necesario resaltar la utilidad de herramientas de evaluación como la empleada en el presente estudio, ya que permiten obtener una información real del conocimiento del profesorado sobre la resolución de problemas aritméticos verbales al involucrarle en el análisis de la práctica matemática docente real o simulada mediante un enfoque dinámico y situado (Charalambous et al., 2020). Además, este trabajo -uno de los escasos estudios de estas características en nuestro país- responde a la necesidad manifiesta de realizar estudios empíricos que ayuden a explorar el conocimiento pedagógico del contenido (Charalambous et al., 2020; Sie y Agyei, 2023) en resolución de problemas (Piñeiro et al., 2019). Investigaciones como la que aquí se ha presentado permiten desarrollar una visión más completa de las relaciones entre el conocimiento del profesorado, la práctica docente y el desarrollo de las competencias matemáticas relacionadas con la resolución de problemas.

Implicaciones educativas

A pesar de ser un estudio exploratorio, los resultados obtenidos sugieren que sería necesario incrementar el conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos verbales del profesorado de Educación Primaria, primero, por el alto porcentaje de profesorado de la muestra inicial que mostraron un conocimiento bajo; y segundo, porque el conocimiento del profesorado afecta tanto a lo que ocurre en su aula como a su desarrollo profesional. El profesorado percibe e interpreta lo que sucede en el aula a través de los conocimientos pedagógicos que posee; si estos no son adecuados, tendrán dificultades para realizar los razonamientos necesarios para interpretar lo que ocurre en el aula y para mejorar su práctica educativa (Gegenfurtner et al., 2020). Esta

mejora de la formación del profesorado debería incluir, al menos, dos elementos. En primer lugar, una toma de conciencia por parte del profesorado de su propio nivel de conocimiento, puesto que, con frecuencia, el profesorado asume que está proporcionando al alumnado el modo adecuado de resolver los problemas mediante el razonamiento, pero lo que ellos identifican como este razonamiento puede, de hecho, no ser lo deseable (Leung et al., 2023; Melhuish et al., 2020). En este sentido, un análisis conjunto entre profesorado e investigadores-formadores de las prácticas educativas del profesorado, y de los conocimientos pedagógicos que emanan de ellas, podría ser una excelente herramienta (Muñoz-Catalán et al., 2022). En segundo lugar, sería recomendable ayudar al profesorado a tomar conciencia de las limitaciones de los libros de texto que suelen utilizar en clase ya que, en países como España, los libros más utilizados en las aulas podrían estar contribuyendo al bajo conocimiento del profesorado al incluir de manera casi exclusiva problemas estándar y modelos superficiales de resolución (Tárraga et al., 2021; Vicente et al., 2020). Por otra parte, para implementar con fidelidad aquellos libros y materiales más eficaces para la enseñanza, el profesorado necesitaría una formación profesional continua (Stylianou et al., 2019) y una formación inicial específica (Piñeiro et al., 2022).

Limitaciones y estudios futuros

Los resultados del presente estudio deben ser considerados como un primer acercamiento al análisis cuantitativo de la influencia del conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas aritméticos verbales del profesorado de Primaria en su práctica educativa. Dado el sentido de esos resultados, su coherencia y complementariedad con los estudios cualitativos previos, resultaría muy recomendable realizar estudios adicionales que, partiendo de muestras aleatorias mayores de profesorado, reportaran resultados más válidos y fiables. En este mismo sentido, sería interesante contrastar los

conocimientos del profesorado español con el de otros países como Singapur, cuyo alumnado parece ser especialmente hábil en la resolución de problemas. Asimismo, sería conveniente complementar los datos cuantitativos de nuestro estudio con un análisis cualitativo de los argumentos proporcionados por el profesorado para justificar sus elecciones en la tarea de evaluación de conocimiento. Finalmente, sería interesante realizar estudios instruccionales sobre resolución de problemas con profesorado con conocimiento bajo, con el objetivo de mejorar sus conocimientos pedagógicos sobre resolución de problemas.

Referencias

- Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389–407.
<https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., y Tsai, Y.M. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133–180.
<https://doi.org/10.3102/0002831209345157>
- Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P., y Carey, D. (1988). Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Students' Problem Solving in Elementary Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(5), 385-401. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/749173>
- Carpenter, T.P., y Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *The acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 7–44). Academic Press.

- Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational studies in mathematics*, 62, 211-230. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1>
- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT*, 3, 19-36
- Charalambous, C.Y., Hill, H.C., Chin, M.J., y McGinn, D. (2020). Mathematical content knowledge and knowledge for teaching: exploring their distinguishability and contribution to student learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, 579–613. <https://doi.org/10.1007/s10857-019-09443-2>
- Charalambous, C.Y., Hill, H.C., y Mitchell, R.N. (2012). Two negatives don't always make a positive: Exploring how limitations in teacher knowledge and the curriculum contribute to instructional quality. *Journal of curriculum studies*, 44(4), 489-513. <https://doi.org/10.1080/00220272.2012.716974>
- Chico, J., Martín-Díaz, J.P., Montes, M.A., y Badillo, E. (2023). ¿Qué intenciones didácticas muestran los futuros maestros cuando transforman problemas? En C. Jiménez-Gestal, A.A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 203-210). SEIEM.
- Csíkó, C., y Szitányi, J. (2020). Teachers' pedagogical content knowledge in teaching word problem solving strategies. *ZDM Mathematics Education* 52, 165–178. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01115-y>
- Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W.D., y Nuerk, H.C. (2015). Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology*, 6, 348. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348>

- Depaepe, F., De Corte, E., y Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher education*, 26, 151-160. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2009.03.016>
- Depaepe, F., Verschaffel, L., y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12–25. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.03.001>
- Gegenfurtner, A., Lewalter, D., Lehtinen, E., Schmidt, M., y Gruber, H. (2020). Teacher expertise and professional vision: Examining knowledge-based reasoning of pre-service teachers, in-service teachers, and school principals. *Frontiers in Education*, 5, 59. <https://doi.org/10.3389/educ.2020.00059>
- Getenet, S., y Callingham, R. (2021) Teaching interrelated concepts of fraction for understanding and teacher's pedagogical content knowledge. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 201–221. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00275-0>
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D.A. Grouws, (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 276–295). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Hanna, G. (2020). Mathematical proof, argumentation, and reasoning. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 561-566. SpringerLink.
- Hatisaru, V., y Erbas, A.K. (2017). Mathematical knowledge for teaching the function concept and student learning outcomes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(4), 703-722. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9707-5>

- Hegarty, M., Mayer, R.E., y Monk, C.A. (1995). Comprehension of arithmetic word problem: a comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of educational psychology*, 87(1), 18-32. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18>
- Herbert, S., y Williams, G. (2023). Eliciting mathematical reasoning during early primary problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 35(1), 77-103. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00376-9>
- Hill, H.C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., y Ball, D.L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511. <https://doi.org/10.1080/07370000802177235>
- Hill, H.C., y Charalambous, C.Y. (2012a). Teacher knowledge, curriculum materials, and quality of instruction: Lessons learned and open issues. *Journal of Curriculum Studies*, 44(4), 559-576. <https://doi.org/10.1080/00220272.2012.716978>
- Hill, H.C., y Charalambous, C.Y. (2012b). Teaching (un)Connected Mathematics: Two teachers' enactment of the Pizza problem. *Journal of Curriculum Studies*, 44(4), 467-487. <https://doi.org/10.1080/00220272.2012.716972>
- Kelcey, B., Hill, H.C., y Chin, M.J. (2019). Teacher mathematical knowledge, instructional quality, and student outcomes: A multilevel quantile mediation analysis. *School Effectiveness and School Improvement*, 30(4), 1-34. <https://doi.org/10.1080/09243453.2019.1570944>
- Koopman, M., Thurlings, M., y den Brok, P. (2019). Factors influencing students' proficiency development in the fraction domain: the role of teacher cognitions and behaviour. *Research Papers in Education*, 34(1), 14-37. <https://doi.org/10.1080/02671522.2017.1390595>

- Lester, F.K., y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Springer.
- Leung, S.K.Y., Wu, J., y Li, H. (2023). Explaining kindergarten teachers' beliefs and practices regarding early visual arts education: a perspective from the theory of planned behavior. *Journal for the Study of Education and Development*, 46(1), 190-224. <https://doi.org/10.1080/02103702.2022.2133400>
- López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación*, 4, 167-179.
- Melhuish, K., Thanheiser, E., y Guyot, L. (2020). Elementary school teachers' noticing of essential mathematical reasoning forms: Justification and generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, 35-67. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-9408-4>
- Muñoz-Catalán, M.C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N., y Carrillo-Yáñez, J. (2022). Early childhood teachers' specialised knowledge to promote algebraic thinking as from a task of additive decomposition. *Journal for the Study of Education and Development*, 45(1), 37-80, <https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1946640>
- Orrantia, J., Tarín, J., y Vicente, S. (2011). El uso de la información situacional en la resolución de problemas aritméticos. *Infancia y aprendizaje*, 34(1), 81-94. <https://doi.org/10.1174/021037011794390094>
- Piñeiro, J.L., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. *PNA*, 13(2), 104-129. <https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7876>
- Piñeiro, J.L., Chapman, O., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2022). Prospective primary teachers' initial mathematical problem-solving knowledge. *International*

- Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-24. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2107958>
- Ramos, M., Rosales, J., y Vicente, S. (2020). Conocimiento de maestros en servicio y en formación sobre resolución de problemas aritméticos. *Universitas Psychologica*, 19, 1-15. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.upsy19.cmsf>
- Riley, M.S., y Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities of solving problems. *Cognition y Instruction*, 5(1), 49–101. http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci0501_2
- Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J.M., Muñoz, D., y Orrantia, J. (2012). Teacher-student interaction in joint word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and teacher education*, 28, 1185-1195. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2012.07.007>
- Sánchez, M.R., y Vicente, S. (2015). Modelos y procesos de resolución de problemas aritméticos verbales propuestos por los libros de texto de matemáticas españoles. *Cultura y Educación*, 27(4), 695-725. <https://doi.org/10.1080/11356405.2015.1089389>
- Schneider, R.M., y Plasman, K. (2011). Science Teacher Learning Progressions: A Review of Science Teachers' Pedagogical Content Knowledge Development. *Review of Educational Research*, 81(4), 530–565. <https://doi.org/10.3102/0034654311423382>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Sie, C.H., y Agyei, D.D. (2023). Relationship between pre-service teachers' mathematical knowledge for teaching fractions and their teaching practices: what is the role of

teacher anxiety? *Contemporary Mathematics and Science Education*, 4(2), ep.23017.

Siswono, T.Y.E., Kohar, A.W., Rosyidi, A.H, y Hartono, S. (2017). Primary school teachers' beliefs and knowledge about mathematical problem-solving and their performance in a problem-solving task. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 15(2), 126-131.

Stylianou, D.A., Stroud, R., Cassidy, M., Knuth, A., Stephens, A., Gardiner, A., y Demers, L. (2019). Putting early algebra in the hands of elementary school teachers: examining fidelity of implementation and its relation to student performance. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 523-569, <https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604021>

Tárraga, R., Tarín, J., y Lacruz, I. (2021). Analysis of word problems in primary education mathematics textbooks in Spain. *Mathematics*, 9(17), 2123. <https://doi.org/10.3390/math9172123>

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swerts y Zeitlinger Publishers.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., y Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM Mathematics Education*, 52(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>

Vicente, S., Sánchez, R., y Verschaffel, L. (2020). Word problem solving approaches in mathematics textbooks: a comparison between Singapore and Spain. *European Journal of Psychology of Education*, 35(3), 567-587. <https://doi.org/10.1007/s10212-019-00447-3>

- Vicente, S., Verschaffel, L., Sánchez, R., y Muñoz, D. (2022). Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 111, 375-397. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10169-x>
- Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education*. CUP.
- Xin, Y.P. (2007). Word problem solving tasks in textbooks and their relation to student performance. *The Journal of Educational Research*, 6, 347–359. <https://doi.org/10.3200/JOER.100.6.347-360>
- Zhang, Q. (2022). Understanding Chinese mathematics teaching: how secondary mathematics teachers' beliefs and knowledge influence their teaching in mainland China. *ZDM Mathematics Education*, 54, 693–707. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01336-8>