

Un curso esquemático de Álgebra lineal y Geometría

Beatriz Graña Otero

27 de septiembre de 2011



VNIVERSIDAD
DSALAMANCA

Índice general

1. ESPACIOS VECTORIALES.	5
1.1. ESPACIOS VECTORIALES.	5
1.1.1. Propiedades elementales de los espacios vectoriales.	5
1.1.2. Subespacios vectoriales.	6
1.1.3. Subvariedades lineales o afines.	7
1.1.4. Aplicaciones lineal.	8
1.2. TEORÍA DE LA DIMENSIÓN.	8
1.2.1. Bases de un espacio vectorial	8
1.2.2. Teorema de la base.	9
1.2.3. Fórmulas de la dimensión.	10
1.3. COORDENADAS.	11
1.3.1. Coordenadas de un vector.	11
1.3.2. Coordenadas de una aplicación lineal.	11
1.4. CAMBIOS DE BASE.	11
1.5. DETERMINANTES.	12
1.5.1. Cálculo del rango	13
1.6. SISTEMAS LINEALES.	13
1.6.1. Transformaciones elementales.	14
1.6.2. Resolución de sistemas de ecuaciones mediante transformaciones elementales.	14
2. ESPACIO DUAL.	19
2.1. ESPACIO DUAL.	19
2.2. SUBESPACIO INCIDENTE.	20
2.3. ECUACIONES IMPLÍCITAS DE UNA SUBVARIEDAD LINEAL.	21
3. ESPACIO EUCLÍDEO.	23
3.1. MÉTRICAS.	23
3.2. ORTOGONALIDAD.	23
3.3. ESPACIOS EUCLÍDEOS.	23
3.3.1. Ángulos y distancias	24
3.4. POLARIDAD.	24
3.4.1. Bases ortonormales	24
3.4.2. Polaridad	25
3.4.3. Cálculo en coordenadas.	25
3.5. DISTANCIA ENTRE SUBVARIEDADES LINEALES.	27
3.6. FÓRMULAS DEL ESPACIO EUCLÍDEO.	28

Capítulo 1

ESPACIOS VECTORIALES.

1.1. ESPACIOS VECTORIALES.

Sea k el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o de los números complejos $\mathbb{C}$. A los elementos de k se les llamará *escalares* y se denotarán con letras griegas λ, μ, γ , etc.

Definición 1. Un k -espacio vectorial es un conjunto E dotado de dos operaciones:

La suma

$$+ : E \times E \longrightarrow E \mid (v, v') \mapsto v + v'$$

y el producto por escalares

$$\cdot : k \times E \longrightarrow E \mid (\lambda, v') \mapsto \lambda \cdot v'.$$

Además, la suma debe verificar las propiedades siguientes:

1. Asociativa $(v + v') + v'' = v + (v' + v'') \quad \forall v, v' \text{ y } v'' \in E$
2. Existencia del elemento neutro, $\exists o \in E$ tal que $o + v = v + o = v \quad \forall v \in E$
3. Existencia del elemento simétrico, $\forall v \in E \quad \exists s \in E$ verificando que $v + s = s + v = o$
4. Conmutativa $v + v' = v' + v$

y el producto por escalares las siguientes:

$$1'. \text{ Asociativa } (\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \quad \forall v \in E \quad \text{y} \quad \forall \lambda, \mu \in k$$

2'. Distributivas:

$$a) (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \forall v \in E \quad \text{y} \quad \forall \lambda, \mu \in k$$

$$b) \lambda \cdot (v + v') = \lambda \cdot v + \lambda \cdot v' \quad \forall v, v' \in E \quad \text{y} \quad \forall \lambda \in k$$

$$3'. 1 \cdot v = v \quad \forall v \in E$$

A los elementos de E se les llamará *vectores* y se denotarán por letras latina e, v, u etc.

1.1.1. Propiedades elementales de los espacios vectoriales.

Proposición 1. Sea E un k -espacio vectorial. Se verifica:

1. El elemento neutro de la suma es único,
2. el elemento opuesto de un vector $v \in E$ es único y se denotará por $-v$,

3. $0 \cdot v = o$ para todo $v \in E$

4. $\lambda \cdot o = o$ para todo $\lambda \in E$

5. $(-1) \cdot v = -v$ para todo $v \in E$

Demostración. 1. Sean o y o' dos elementos neutros, entonces para todo $v \in E$ se verifica que $o + v = v = o' + v$. Luego, en particular cuando $v = o'$, se tiene que $o + o' = o' = o' + o = o$.

2. Sean s_1 y s_2 dos elementos opuestos de v , entonces se verifica que $v + s_1 = o = v + s_2$. Luego $s_2 = s_2 + o = s_2 + (v + s_1) = (s_2 + v) + s_1 = o + s_1 = s_1$

3. Se tiene que $0 \cdot v + v = 0 \cdot v + 1 \cdot v = (0 + 1) \cdot v = 1 \cdot v = v$ para todo $v \in E$. Ahora bien, si a la primera igualdad se le suma el opuesto de v y esto mismo se hace con la última igualdad, se obtiene que $0 \cdot v + v + (-v) = v + (-v)$. Es decir que $0 \cdot v = o$.

4. En este caso, para todo $\lambda \in k$, se verifica que $\lambda \cdot o + \lambda \cdot v = \lambda \cdot (o + v) = \lambda \cdot v$, entonces, como en el apartado anterior, si se suma a la primera y a la última igualdad el opuesto de $\lambda \cdot v = -(\lambda \cdot v)$, se obtiene que $\lambda \cdot o = \lambda \cdot o + \lambda \cdot v + (-\lambda \cdot v) = \lambda \cdot v + (-\lambda \cdot v) = o$

5. Por la propiedad 3), basta probar que $(-1) \cdot v$ para todo $v \in E$ verifica la propiedad de ser el elemento opuesto de v . Pero $(-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = (-1 + 1) \cdot v = 0 \cdot v = o$, por tanto $(-1) \cdot v = -v$.

□

1.1.2. Subespacios vectoriales.

Definición 2. Sea E un k -espacio vectorial, se dirá que un subconjunto E' de E es un *subespacio vectorial* de E , si las operaciones de E están definidas en E' y respecto de ellas E' es un k -espacio vectorial.

Nota 1. Que las operaciones de E estén definidas en E' significa que para todo $v, v' \in E'$ y para todo $\lambda \in k$, se tiene que $v + v' \in E'$ y que $\lambda \cdot v \in E'$.

Proposición 2. Sea E un espacio vectorial y sea $E' \subset E$, entonces E' es un subespacio vectorial si y sólo si $\lambda \cdot v + \mu \cdot v' \in E'$, para todo $v, v' \in E'$ y para todo $\lambda, \mu \in k$.

Nota 2. Toda expresión de la forma $\lambda \cdot v + \mu \cdot v' \in E'$ con $v, v' \in E'$ y $\lambda, \mu \in k$ se denomina *combinación lineal*.

Demostración. Si E' es un subespacio vectorial, entonces para todo $v, v' \in E'$ y para todo $\lambda, \mu \in k$ se tiene, por definición, que $\lambda \cdot v \in E'$, que $\mu \cdot v' \in E'$, que $v + v' \in E'$, y por último que $\lambda \cdot v + \mu \cdot v' \in E'$.

Recíprocamente, si E' verifica que $\lambda \cdot v + \mu \cdot v' \in E'$, entonces las operaciones de E están definidas en E' , puesto que para todo $v, v' \in E'$ se tiene que $v + v' \in E'$, (simplemente particularizando la propiedad para $\lambda = 1 = \mu$). Y para todo $\lambda, \mu \in k$ se tiene que $\lambda \cdot v \in E'$, (particularizando la propiedad para $\mu = 0$). Además, E' verifica las propiedades 1), 4), 1'), 2') y 3') porque lo verifican todos los vectores de E . Veamos que también se verifican la 2) y la 3). En efecto, sea $v \in E'$ y sea $-1, 0 \in k$, entonces $0 \cdot v = o \in E'$ y $(-1) \cdot v = -v \in E'$. Luego existe en E' el elemento neutro y el elemento opuesto de cada vector de E' .

□

Definición 3. Sean E' y E'' dos subespacios vectoriales de un k -espacio vectorial E , se define la *intersección* de E' y de E'' y se denota por $E' \cap E''$, al conjunto de los vectores v que pertenecen a E' y que pertenecen a E'' . Es decir, $\{v \in E \text{ tales que } v \in E' \text{ y } v \in E''\}$

Corolario 1. *La intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.*

Suma de subespacios vectoriales.

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial E .

Definición 4. Se llama *suma de E_1 y de E_2* al subespacio

$$E_1 + E_2 = \{e = e_1 + e_2 \mid e_1 \in E_1 \text{ y } e_2 \in E_2\}.$$

Nota 3. $E_1 + E_2$ es el mínimo subespacio que contiene a E_1 y a E_2 .

Análogamente se define la suma de r subespacios vectoriales $E_1, \dots, E_r$ como el conjunto de los elementos

$$\{e = e_1 + \dots + e_r \mid e_i \in E_i\}.$$

Definición 5. Se llama *subespacio generado por el conjunto de vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$* al subespacio vectorial formado por todas las combinaciones lineales del conjunto. Es decir,

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \mid \forall \lambda_i \in k\} = \langle e_1 \rangle + \dots + \langle e_n \rangle \text{ donde } \langle e \rangle = \{\lambda e, \lambda \in k\}.$$

Definición 6. Se dice que E_1 y E_2 *están en suma directa* si se verifica que $E_1 \cap E_2 = \{o\}$. Se escribe $E_1 \oplus E_2$.

Y

Definición 7. Se dice que E_1 y E_2 *son subespacios suplementarios* si se verifica que $E = E_1 + E_2$ y que $E_1 \cap E_2 = \{o\}$.

Proposición 3. Si E_1 y E_2 son suplementarios entonces todo vector de E , $v \in E$ se puede escribir de forma única como suma de un vector $v_1 \in E_1$ y otro vector $v_2 \in E_2$.

Demostración. En efecto, si $e \in E$ se puede escribir como $e = e_1 + e_2$, con $e_i \in E_i$ para $i \in \{1, 2\}$ y también como $e = u_1 + u_2$, con $u_i \in E_i$ para $i \in \{1, 2\}$, entonces $e_1 - u_1 = u_2 - e_2 \in E_1 \cap E_2$. Ya que $E_1 \cap E_2 = \{o\}$, luego $e_1 - u_1 = u_2 - e_2 = o$, y por tanto $e_i = u_i$, con $i \in \{1, 2\}$. $\square$

Definición 8. Se dirá que $E_1, \dots, E_r$ son *suplementarios* cuando $E = E_1 + \dots + E_r$ y además para cada subespacio vectorial E_i la intersección con $E_1 + \dots + \widehat{E_i} + \dots + E_r$ es igual al elemento neutro de E .

Proposición 4. Decir que $E_1, \dots, E_r$ están en suma directa es equivalente a decir que todo vector v de $E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ se puede expresar de forma única como $v = e_1 + \dots + e_r$ donde $e_i \in E_i$.

1.1.3. Subvariedades lineales o afines.

Sea V un subconjunto de E , se dice que es una *subvariedad lineal* si es de la forma

$$V = v_0 + E' = \{v_0 + v' \mid v' \in E'\},$$

donde E' es un subespacio vectorial de E . Al subespacio vectorial E' se le llama *subespacio director de V* y a sus elementos *vectores directores*.

Se dirá que dos subvariedades lineales $V_1 = v_1 + E_1$ y $V_2 = v_2 + E_2$ son paralelas si los vectores directores de V_1 son también vectores directores de V_2 , o viceversa; es decir, si y sólo si $E_1 \subset E_2$ o bien $E_2 \subset E_1$.

1.1.4. Aplicaciones lineal.

Sean E y E' dos espacios vectoriales sobre k y $T : E \longrightarrow E'$ una aplicación.

Definición 9. Se dice que una aplicación $T : E \longrightarrow E'$ es una *aplicación lineal* si verifica que

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ para todo $v_i \in E$
2. $T(\lambda v) = \lambda \cdot T(v)$ para todo $\lambda \in k$

Es claro que las dos condiciones anteriores se resumen en que $T : E \longrightarrow E'$ es aplicación lineal si y sólo si $T(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot T(v_1) + \lambda_2 \cdot T(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in E$ y para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in k$

Definición 10. Si T es biyectiva se denomina *isomorfismo*.

Cuando $E = E'$, la aplicación lineal T se denomina *endomorfismo*, y si es biyectiva *automorfismo*.

Definición 11. Se llama *núcleo* de la aplicación lineal $T : E \longrightarrow E'$ al subconjunto de elementos de E que tienen imagen igual al elemento neutro de E' . Se denotará por $KerT$ y se escribe

$$KerT = \{v \in E \mid T(v) = o' \in E'\}$$

Definición 12. Se llama *imagen* de la aplicación lineal $T : E \longrightarrow E'$ al subconjunto de elementos de E' que son imágenes de algún vector de E . Se denotará por ImT y se escribe

$$ImT = \{v' \in E' \mid \exists v \in E \text{ con } T(v) = v' \in E'\}$$

Proposición 5. Si $T : E \longrightarrow E'$ es aplicación lineal, entonces se verifica lo siguiente:

1. $KerT$ es un subespacio vectorial de E .
2. ImT es un subespacio vectorial de E' .

Demostración. 1. Si $v_1, v_2 \in KerT$, entonces $T(v_1) = T(v_2) = o'$. Por tanto como para todo $\lambda, \mu \in k$ se tiene que $T(\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2) = \lambda \cdot T(v_1) + \mu \cdot T(v_2) = o'$, resulta que $\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 \in KerT$. Es decir, $KerT$ es un subespacio vectorial de E .

2. Si $v'_1, v'_2 \in ImT$, entonces existen vectores $v_1, v_2 \in E$ tales que $\lambda \cdot v'_1 + \mu \cdot v'_2 = \lambda \cdot T(v_1) + \mu \cdot T(v_2) = T(\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2)$. Es decir, existe un vector en E , sea $\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2$, cuya imagen es $\lambda \cdot v'_1 + \mu \cdot v'_2$. Luego este último pertenece a ImT .

□

Proposición 6. Sea $T : E \longrightarrow E'$ una aplicación lineal. T es inyectiva si y sólo si $KerT = \{o\}$.

Demostración. Supóngase que T es aplicación lineal e inyectiva y sea $v \in KerT$. Como $KerT$ es un subespacio vectorial de E , $T(o) = o'$ (¿por qué?) y por tanto ocurre que $T(v) = o' = T(o)$, luego por la inyectividad de T se concluye que $v = o$. Es decir, $KerT = \{o\}$

Recíprocamente, supongamos que $KerT = \{o\}$ y veamos que T ha de ser inyectiva. En efecto, si $T(v_1) = T(v_2)$, entonces $o' = T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2)$, luego $v_1 - v_2 \in KerT = \{o\}$. Así $v_1 - v_2 = o$, es decir $v_1 = v_2$ y por tanto T es inyectiva. □

1.2. TEORÍA DE LA DIMENSIÓN.

1.2.1. Bases de un espacio vectorial

Sea E un espacio vectorial

Definición 13. Diremos que los vectores $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E son *linealmente independientes* (l.i.) si se verifica que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ si y sólo si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Definición 14. Diremos que un conjunto de vectores $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E son un *sistema de generadores* si todo vector e de E es una combinación lineal de ellos; es decir $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$.

Definición 15. Diremos que un conjunto de vectores $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E es una *base* si son linealmente independientes y un sistema de generadores.

1.2.2. Teorema de la base.

Lema 1. Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base y $e = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + \lambda_n v_n$ donde $\lambda_i \neq 0$ entonces sustituyendo en la base B el vector v_i por el vector e se obtiene otra base $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, e, v_{i+1}, \dots, v_n\}$.

Demostración. Es un sistema de generadores, pues $v_i = \frac{1}{\lambda_i} e - \frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$. Es decir $v_i \in \langle v_1, v_2, \dots, e, \dots, v_n \rangle$. Luego $E = \langle v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n \rangle \subset \langle v_1, v_2, \dots, e, \dots, v_n \rangle$ y por tanto $\langle v_1, v_2, \dots, e, \dots, v_n \rangle = E$.

Son l.i. Sea $0 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu e + \dots + \mu_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + \lambda_n v_n) + \dots + \mu_n v_n = (\mu_1 + \mu \lambda_1) v_1 + (\mu_2 + \mu \lambda_2) v_2 + \dots + (\mu \lambda_i) v_i + \dots + (\mu_n + \mu \lambda_n) v_n$. Como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son l.i., se tiene que $\mu_1 + \mu \lambda_1 = 0 = \mu_2 + \mu \lambda_2 = 0 = \dots = \mu_{i-1} + \mu \lambda_{i-1} = 0 = \mu_{i+1} + \mu \lambda_{i+1} = 0 = \dots = \mu_n + \mu \lambda_n = 0 = \mu \lambda_i = 0$. Como $\lambda_i \neq 0$, se tiene que $\mu = 0$ y por tanto $\mu_j = 0 \quad \forall j \neq i$. $\square$

Lema 2. Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un conjunto de vectores l.i y $B' = \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ una base. En B' se puede sustituir alguno de los vectores $v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ por el vector e_k de modo que siga siendo base.

Demostración. Se tiene que $e_k = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_k v_k + \dots + \lambda_n e_n$ y no puede ocurrir que $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$, pues en ese caso $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ no serían l.i. Luego $\lambda_i \neq 0$ para algún $i \in \{k, \dots, n\}$. Por el lema anterior aplicada a la base B' y al vector e_k se concluye. $\square$

Teorema 1. Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ un conjunto de vectores l.i y $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base. Entonces $s \leq n$.

Demostración. Supongamos que $n \leq s$. Aplicando el Lema 2 se puede ir sustituyendo los n primeros vectores $e_1, e_2, \dots, e_n$ de B sucesivamente por vectores de la base B' obteniendo siempre una base. Así hasta que haya sustituido todos los vectores de B' . Llegaríamos a que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base. Como $e_{s+1}, \dots, e_s$ no pueden ser combinación lineal de los anteriores se concluye que $s \leq n$. $\square$

Corolario 2 (Teorema de la base). Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

Demostración. Sean $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ y $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ dos bases del espacio vectorial. Aplicando el teorema anterior a los conjuntos l.i B y B' respectivamente, se sigue que $n \leq s$ y $s \leq n$. Es decir $n = s$. $\square$

Definición 16. Se llama *dimensión* de un espacio vectorial E al número de elementos de una base.

Corolario 3. Si E' es un subespacio de E y $\dim E' = \dim E$ entonces $E' = E$.

Demostración. Si $E' = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ es una base y $e \in E$ es un vector que no está en E' , entonces $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e\}$ es un conjunto de vectores l.i. Pero entonces por el Teorema, $\dim E \geq n + 1$, lo cual no puede ser. $\square$

Corolario 4. Si $\dim E = n$ entonces todo conjunto de n vectores l.i. es una base.

Demostración. Basta probar que dichos vectores generan. Pero como generan un subespacio vectorial de dimensión n , por el corolario anterior generan el total. $\square$

Corolario 5. Todo conjunto linealmente independiente de vectores es ampliable a una base.

Demostración. Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ un conjunto de vectores l.i. y sea $n = \dim E$. Sea e_k un vector de E que no pertenece a $\langle e_1, e_2, \dots, e_{k-1} \rangle$ para $k \in \{s+1, s+2, \dots, n\}$. Los vectores $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ son l.i. y por tanto son una base. $\square$

1.2.3. Fórmulas de la dimensión.

Proposición 7. Si $T : E \longrightarrow E'$ es una aplicación lineal entonces $\dim E = \dim \text{Ker} T + \dim \text{Im} T$.

Demostración. Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ una base de $\text{Ker} T$ que ampliamos hasta tener una base de E ; es decir, $\{e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$. Basta probar que $\{T(e_{k+1}), T(e_{k+2}), \dots, T(e_n)\}$ es una base de $\text{Im} T$.

Es un sistema de generadores, pues $\text{Im} T = \langle T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_k), T(e_{k+1}), T(e_{k+2}), \dots, T(e_n) \rangle$. Como $e_1, \dots, e_k \in \text{Ker} T$ se tiene que $T(e_1) = T(e_2) = \dots = T(e_k) = 0$. Luego $\text{Im} T = \langle T(e_{k+1}), T(e_{k+2}), \dots, T(e_n) \rangle$.

Son l.i. pues supongamos que $\lambda_{k+1}T(e_{k+1}) + \lambda_{k+2}T(e_{k+2}) + \dots + \lambda_nT(e_n) = 0$. Por linealidad $T(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \lambda_{k+2}e_{k+2} + \dots + \lambda_n e_n) = 0$. Luego $\lambda_{k+1}e_{k+1} + \lambda_{k+2}e_{k+2} + \dots + \lambda_n e_n \in \text{Ker} T = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$. Es decir, $\lambda_{k+1}e_{k+1} + \lambda_{k+2}e_{k+2} + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k$. Entonces $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k - \lambda_{k+1}e_{k+1} - \lambda_{k+2}e_{k+2} - \dots - \lambda_n e_n = 0$. Como estos vectores son l.i. se concluye que $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n = 0$. $\square$

Corolario 6. Si E_1 y E_2 son espacios vectoriales, se verifica que $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.

Demostración. La aplicación lineal $p : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_2$ definida por $p(e_1, e_2) = e_2$ es evidentemente epiyectiva y además $\text{Ker} p = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid 0 = p(e_1, e_2) = e_2\} = \{(e_1, 0), e_1 \in E_1\} \cong E_1$. Luego $\dim(E_1 \times E_2) = \dim \text{Ker} p + \dim \text{Im} p = \dim E_1 + \dim E_2$. $\square$

Corolario 7. Si E_1 y E_2 son subespacios de E . Entonces $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$.

Demostración. Sea $T : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 + E_2$ la aplicación lineal definida por $T(e_1, e_2) = e_1 + e_2$ que es evidentemente epiyectiva y además $\text{Ker} T = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2, 0 = T(e_1, e_2) = e_1 + e_2\} = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2, e_1 = -e_2\} = \{(e, -e) \mid e \in E_1 \cap E_2\} \cong E_1 \cap E_2$. Luego $\dim(E_1 \times E_2) = \dim \text{Im} T + \dim \text{Ker} T = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2)$. Aplicando el corolario anterior se concluye. $\square$

Corolario 8. Si $T : E \longrightarrow E'$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de la misma dimensión, entonces T es inyectiva si y sólo si T es epiyectiva si y sólo si T es isomorfismo.

Demostración. T es inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker} T = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Ker} T = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Im} T = \dim E = \dim E' = \dim \text{Im} T \Leftrightarrow \text{Im} T = E' \Leftrightarrow T$ es epiyectiva. $\square$

1.3. COORDENADAS.

1.3.1. Coordenadas de un vector.

Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial E . Todo vector $e \in E$ se expresa de modo único como combinación de los vectores de la base. En efecto, si $e = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = \bar{x}_1e_1 + \bar{x}_2e_2 + \dots + \bar{x}_ne_n$ entonces $0 = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n - (\bar{x}_1e_1 + \bar{x}_2e_2 + \dots + \bar{x}_ne_n) = (x_1 - \bar{x}_1)e_1 + (x_2 - \bar{x}_2)e_2 + \dots + (x_n - \bar{x}_n)e_n$. Luego $0 = x_1 - \bar{x}_1 = x_2 - \bar{x}_2 = \dots = x_n - \bar{x}_n$. Es decir $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2, \dots, x_n = \bar{x}_n$.

Definición 17. Llamaremos *coordenadas* de un vector e respecto de la base B a $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ que verifican que $e = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$.

Nota 4. Esto define una identificación de E con $\mathbb{K}^n$. Es decir $\varphi : E \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n$ es un isomorfismo definido por $\varphi(e) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ son las coordenadas de e respecto de B .

1.3.2. Coordenadas de una aplicación lineal.

Definición 18. Sea $T : E \rightarrow E'$ una aplicación lineal, $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de E y $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ una base de E' . Diremos que la matriz de m filas y n columnas $A = (a_{i,j})$ es la matriz de T respecto de las bases B y B' si $T(e_j) = a_{1,j}e'_1 + a_{2,j}e'_2 + \dots + a_{m,j}e'_m$.

De modo que es poner por columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base B . Toda aplicación lineal queda determinada conociendo su matriz (es decir conociendo $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$), ya que si $e = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ entonces $T(e) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \dots + x_nT(e_n) = y_1e'_1 + y_2e'_2 + \dots + y_me'_m$. Si e tiene coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ respecto de B entonces su imagen $T(e)$, tiene coordenadas $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ respecto de B' donde $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Esto es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La composición de aplicaciones se corresponde con la composición o producto de matrices. Es decir, sean $E \xrightarrow{f} E'$ y $E' \xrightarrow{f'} E''$ sendas aplicaciones lineales, y sean B, B' y B'' bases de E, E' y E'' respectivamente. Llamaremos A a la matriz de f respecto de las bases B y B' y A' a la matriz de f' respecto de las bases B' y B'' . Entonces la matriz de $f' \circ f$ respecto de las bases B y B'' es $A' \cdot A$.

1.4. CAMBIOS DE BASE.

Definición 19. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, y sean $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ y $\bar{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ dos bases de E . Se llama *matriz del cambio de base* de B a $\bar{B}$ a la matriz $P = (p_{i,j})$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$ del morfismo $Id : E \rightarrow E$ respecto de las bases B y $\bar{B}$, donde si $e_j = p_{1,j}\bar{e}_1 + p_{2,j}\bar{e}_2 + \dots + p_{n,j}\bar{e}_n$.

De modo que igual que en el caso de las aplicaciones lineales, es poner por columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base $\bar{B}$. Así, las ecuaciones de cambio de base son

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sea $T : E \rightarrow E'$ una aplicación lineal, sea A su matriz respecto de las bases B y B' de E y E' respectivamente, sea P la matriz de cambio de base de B a B_1 en E y P' la de cambio de base de B' a B'_1 en E' .

Teorema 2. *Entonces la matriz $\bar{A}$ de T respecto de las nuevas bases B_1 y B'_1 de E y E' respectivamente vale*

$$\bar{A} = P' \cdot A \cdot P^{-1}.$$

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} B & E & \xrightarrow{T} & E' & B' \\ & \downarrow Id & & \downarrow Id & \\ B_1 & E & \xrightarrow{T} & E' & B'_1 \end{array}$$

Tomando las matrices de las aplicaciones lineales respecto de las bases escritas al lado de cada espacio vectorial, resulta que $\bar{A} \cdot P = P' \cdot A$, de donde $\bar{A} = P' \cdot A \cdot P^{-1}$. $\square$

1.5. DETERMINANTES.

Definición 20 (Matriz traspuesta). Llamaremos *matriz traspuesta* de $A = (a_{ij})$ a la matriz $A^t = (a_{ji})$; es decir la matriz que consiste en poner las filas de A como columnas.

Definición 21 (Determinantes). Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. Llamaremos *determinante*

de A y lo denotaremos por $|A|$ al siguiente escalar: $|a| = a$; $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$; $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$
 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21} - a_{11}a_{32}a_{23}$

Nota 5. Los determinantes de orden superior a 3 se calculan aplicando las siguientes propiedades:

- a.- $|A| = |A^t|$. Esto dice que todas las propiedades que se enuncien para las columnas también son válidas para las filas.
- b.- $|A| = 0 \Leftrightarrow$ las columnas de la matriz A son linealmente dependientes.
- c.- Al multiplicar una columna de la matriz por un escalar el determinante queda multiplicado por dicho escalar.
- d.- El determinante no varía si a una columna se le suma una combinación lineal de las otras.
- e.- El determinante cambia de signo si se permutan dos columnas.
- f.- Desarrollo por los elementos de la primera columna:

$$|A| = a_{1,1}|A_1| - a_{2,1}|A_2| + a_{3,1}|A_3| - \cdots \pm a_{n,1}|A_n|.$$

Donde A_i es la matriz obtenida tachando la primera columna y la fila i -ésima de la matriz A . Análogamente se puede hacer el desarrollo por cualquier otra columna.

- g.- El determinante de la composición de matrices es el producto de los determinantes: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

$$\text{h.- } \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

Inversa de una matriz

Definición 23 (Menores de una matriz). Sea A una matriz de n filas y m columnas, se llama *menor de orden k* de A a $|B|$ donde B es una matriz obtenida tachando $n - k$ filas y $m - k$ columnas en A .

1.5.1. Cálculo del rango

$$r(A) = \text{máximo} \quad \{\text{orden de los menores de A no nulos}\}.$$

Propiedades

- $r(A) = r(A^t)$. Luego lo que vale para las columnas, vale para las filas.
- El rango de una matriz no varía si a una columna se le suma una combinación lineal de las otras.
- El rango de una matriz no varía si se tacha una columna que es combinación lineal de las otras.
- El rango de una matriz no varía si se permutan dos columnas.
- El rango de una matriz no varía si a una columna se le multiplica por un escalar no nulo.
- Si existe un menor de orden k no nulo en A entonces $r(A) \leq k$.
- $r(A) \leq$ número de columnas y $r(A) \leq$ número de filas.

1.6. SISTEMAS LINEALES.

$$\left. \begin{array}{l} E_1: \quad a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ E_m: \quad a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right\} \equiv S \quad (1.1)$$

Observación 1. Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas también puede ser visto como una aplicación lineal $T : E \longrightarrow E'$, (donde E y E' son espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente), y un vector $b = (b_1, \dots, b_m)$. De modo que un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ es una solución del sistema S cuando $T(x) = b$. Además desde este punto de vista es claro que si x_0 es una solución del sistema (T, b) , entonces todas las soluciones x del sistema son $x_0 + KerT$.

Teorema 3 (Teorema de Rouché-Frobenius.). *Un sistema S de ecuaciones lineales tiene al menos*

una solución si y sólo si se verifica que si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ es la matriz de S (dicho de otro modo, A es la matriz de T respecto de un par de bases de E y E') y B es el vector columna de los términos independientes (es decir, las coordenadas de $b \in E'$), entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(\overline{AB})$.

Demostración. Veamos la implicación hacia la derecha. En efecto, si $(x_1, \dots, x_n)$ es solución de

S , entonces se tiene que $T(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ que se puede

reescribir como $x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Así, en E_m , el vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ es linealmente dependiente con los otros, y por tanto el rango por columnas coincide en ambas matrices.

La implicación inversa se sigue porque si $\text{rg}(A) = \text{rg}(\overline{AB})$, entonces los rangos por columnas son iguales, y así se verifica que existen los escalares $(x_1, \dots, x_n)$ que permiten escribir la siguiente

combinación lineal $x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ □

1.6.1. Transformaciones elementales.

Definición 26. Hacerle a S una *transformación elemental* es:

- a.- Intercambiar dos ecuaciones.
- b.- Multiplicar una ecuación por un $\lambda \neq 0$.
- c.- Sustituir una ecuación E_i por $E_i + \lambda_1 E_1 + \cdots + \widehat{\lambda E_i} + \cdots + \lambda_n E_n$

1.6.2. Resolución de sistemas de ecuaciones mediante transformaciones elementales.

Proposición 8. *Sea S un sistema de ecuaciones y S' un sistema obtenido a partir de S mediante una serie de transformaciones elementales. Entonces las soluciones de S y de S' son las mismas.*

Como ejemplos de resolución de sistemas por medio de transformaciones elementales damos los siguientes:

Método de Gauss.

El método de resolución de ecuaciones por eliminación (método de Gauss) es un procedimiento que admite una fácil programación y, por consiguiente, permite resolver una sistema de ecuaciones con la ayuda de ordenadores.

La idea del método es aplicar, a la matriz ampliada del sistema, operaciones elementales sobre filas, obteniendo de esta forma sistemas equivalentes al dado cada vez más manejables. Mediante estas operaciones se consigue obtener un sistema equivalente que tiene por matriz de los coeficiente una matriz triangular.

Dado el sistema de ecuaciones lineales en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$:

$$\left. \begin{array}{l} E_1 : a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ E_m : a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right\} \equiv S \quad (1.2)$$

se puede suponer que los coeficientes de la primera ecuación no son todos nulos y que, por tanto, $a_{1,1} \neq 0$ (si fuese cero se cambiaría la forma de designar a las incógnita y se llamaría x_1 a una que tuviese coeficiente no nulo). Si la ecuación i -ésima, con $i \in \{2, \dots, m\}$, se sustituye por la que se obtiene de restarle la primera ecuación multiplicada por $\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$, el sistema así obtenido es equivalente al de 1.2 y tiene la particularidad de que sus ecuaciones segunda, tercera, ..., m -ésima tienen nulo el primero de sus coeficientes, es decir, el sistema es de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} E'_1 : a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ E'_m : a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{2,n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ E'_m : a'_{m,2}x_2 + \cdots + a'_{m,n}x_n = b'_m \end{array} \right\} \equiv S' \quad (1.3)$$

Tomando ahora el sistema formado por las segunda, tercera, ..., m -ésima ecuaciones y repitiendo para él el proceso anterior, se obtiene una sistema equivalente al de 1.3 que ofrece el siguiente aspecto:

$$\left. \begin{array}{l} E'_1 : a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ E'_2 : a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \cdots + a'_{2,n}x_n = b'_2 \\ E''_3 : a''_{3,3}x_3 + \cdots + a''_{3,n}x_n = b''_3 \\ \vdots \\ E''_m : a''_{m,3}x_3 + \cdots + a''_{m,n}x_n = b''_m \end{array} \right\} \equiv S'' \quad (1.4)$$

Aplicando sucesivamente este proceso se llega, o bien a una incompatibilidad, entonces el sistema no tiene solución, o bien a un sistema cuya última ecuación es elementalmente resoluble. En este último caso, una vez resuelta la última ecuación, la penúltima proporciona el valor de la solución para la incógnita anterior, y avanzando de este manera se van obteniendo sucesivamente los valores solución de las distintas incógnitas.

Método de Cramer.

Definición 27. Un sistema de Cramer es un sistema de ecuaciones lineales que tiene el mismo número de incógnitas que de ecuaciones y además que la matriz de coeficientes es no singular.

Así que dado un sistema de Cramer

$$\left. \begin{array}{l} E_1 : a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ E_n : a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right\} \equiv S \quad (1.5)$$

con $\text{rango} A = n$ su solución única es

$$x_j = \frac{\det(M_j)}{\det(A)}$$

con $j = \{1, \dots, n\}$ y donde la matriz M_j es la obtenida sustituyendo en la matriz A la submatriz columna A_j por la matriz columna B de los términos independientes.

En general, considérese un sistema de ecuaciones lineales

$$\left(\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right) = A \cdot \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \} \equiv S$$

donde A es una matriz de n columnas y m filas y coeficientes en $\mathbb{R}$. Es decir, S es un sistema de m ecuaciones y n incógnitas, que escrito de modo explícito será:

$$\left. \begin{array}{l} E_1 : a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ E_m : a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right\} \equiv S \quad (1.6)$$

Es conocido que el conjunto de soluciones del sistema (solución general) es la subvariedad afín o lineal de $\mathbb{R}^n$, de dimensión $n - r$, $x_0 + N$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es una de las soluciones (solución particular) y su espacio de direcciones N es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ que forman las soluciones del sistema homogéneo asociado

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\} \equiv S_0$$

es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{array} \right\} \equiv S_0. \quad (1.7)$$

Para que este sistema tenga alguna solución es necesario y suficiente (Teorema de Rouché-Fröbenius) que $\text{rango}A = \text{rango}\overline{AB}$; supongamos pues que esto ocurre y sea

$$r = \text{rango}(A) = \text{rango}(\overline{AB})$$

Si $r = \text{rango}A$, existe una submatriz cuadrada de tamaño r de A que es no singular (tiene determinante no nulo). Supondremos que dicha matriz es la formada por las r primeras filas y r primeras columnas de A . Así, el sistema dado es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_1 : a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,r}x_r = b_1 - (a_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1,n}x_n) \\ \vdots \\ E'_m : a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,r}x_r = b_m - (a_{m,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{m,n}x_n) \end{array} \right\} \equiv S \quad (1.8)$$

con $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} \end{pmatrix}$ no singular y donde para cada conjunto arbitrario de valores que se de a las variables $x_{r+1}, \dots, x_n$ se obtiene un sistema de Cramer que determina de modo único los valores de las incógnitas $x_1, \dots, x_r$.

Para hallar todas las soluciones del sistema S se puede proceder de la siguiente manera:

- 1.- Haciendo $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$ y resolviendo el sistema correspondiente de Cramer, se obtiene la solución

$$(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0)$$

que es una solución (particular) del sistema dado.

- 2.- Tomando para $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ los valores $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, 1)$ y haciendo nulos los términos independientes ($b_1 = b_2 = \cdots = b_r = 0$), se obtiene $n - r$ sistemas de

Cramer que tienen solución única. Se resuelven estos sistemas, y sean, respectivamente, sus soluciones:

$$\begin{aligned}
 (x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, x_{r+1}, \dots, x_n) &= (k_{1,1}, \dots, k_{r,1}, 1, 0, \dots, 0) &= k_1 \in \mathbb{R}^n \\
 (x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, x_{r+1}, \dots, x_n) &= (k_{1,2}, \dots, k_{r,2}, 0, 1, \dots, 0) &= k_2 \in \mathbb{R}^n \\
 &\vdots &\vdots \\
 (x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, x_{r+1}, \dots, x_n) &= (k_{1,n-r}, \dots, k_{r,n-r}, 0, \dots, 1) &= k_{n-r} \in \mathbb{R}^n
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

que son $n - r$ soluciones del sistema homogéneo asociado al sistema dado. Además, son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$, ya que la matriz de sus coordenadas tiene rango $n - r$, pues su submatriz formada por las últimas $n - r$ columnas y todas sus $n - r$ filas es la matriz unidad que es no singular de tamaño $n - r$. Es decir, $\{k_1, k_2, \dots, k_{n-r}\}$ es una base del subespacio vectorial N de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Por tanto, puede asegurarse que el conjunto de las soluciones del sistema dado es la variedad afín

$$\{x = c + \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \dots + \lambda_{n-r} k_{n-r} \mid \lambda_i \in \mathbb{K}^n\}.$$

Es decir, las soluciones del sistema pueden escribirse en la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = c_1 + \lambda_1 k_{1,1} + \lambda_2 k_{1,2} + \dots + \lambda_{n-r} k_{1,n-r} \\ x_2 = c_2 + \lambda_1 k_{2,1} + \lambda_2 k_{2,2} + \dots + \lambda_{n-r} k_{2,n-r} \\ \vdots \\ x_r = c_r + \lambda_1 k_{r,1} + \lambda_2 k_{r,2} + \dots + \lambda_{n-r} k_{r,n-r}, (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}) \in \mathbb{K}^{n-r} \\ \vdots \\ x_{r+1} = \lambda_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda_{n-r} \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Nota 7. Nótese que la parte 2 del método anterior dice simplemente que se busque una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de las soluciones del sistema homogéneo asociado a S , es decir de

$$\left. \begin{array}{cccc} a_{1,1}x_1 + & \cdots & + a_{1,n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + & \cdots & + a_{m,n}x_n & = 0 \end{array} \right\} \equiv S_0. \tag{1.11}$$

Capítulo 2

ESPACIO DUAL.

2.1. ESPACIO DUAL.

Definición 28. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Llamaremos *espacio dual* de E y lo denotaremos por E^* al conjunto de las aplicaciones lineales de E en $\mathbb{K}$.

$$E^* = \{\text{aplicaciones } w : E \longrightarrow \mathbb{K} \text{ lineales}\}.$$

A los elementos de E^* se les suele denominar *formas lineales* y anotar por w .

La estructura de espacio vectorial es la siguiente: para todo $w, w' \in E^*$ y todo $\lambda \in k$ la suma de formas lineales es $(w + w')(e) = w(e) + w'(e)$ y el producto por escalares $(\lambda w)(e) = \lambda w(e)$. Con esta definición de suma y producto por escalares, E^* es un espacio vectorial. El elemento neutro es la forma lineal cero: $0(e) = 0$ para todo $e \in E$.

Bases en E^* Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de E . Llamaremos base dual de la base B al conjunto de las funciones coordenadas; es decir $B^* = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ donde $w_i(e) =$ coordenada i -ésima de e respecto de la base B . Luego

$$w_i(e_j) = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq j; \\ 1, & \text{para } i = j. \end{cases} \quad (2.1)$$

Veamos que es una base:

Son l.i. : $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0$. Aplicando e_i para todo i a cada una de las partes de la igualdad se tiene :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = 0(e_i) & = & \lambda_1 w_1(e_i) & + & \lambda_2 w_2(e_i) & + & \dots + \lambda_i w_i(e_i) + \dots + \lambda_n w_n(e_i) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & 0 & & 0 & & \lambda_i & & 0 \end{array} \quad (2.2)$$

Luego $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Son un sistema de generadores: $w \in E^*$. Llamaremos $w(e_i) = a_i$. Veamos que $w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n$ con lo que se concluye. Para ver que $\bar{w} = w - (a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n) = 0$ basta probar que $\bar{w}$ se anula sobre los vectores de una base. Como antes, $\bar{w}(e_i) = w(e_i) - (a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n)(e_i) = w(e_i) - a_i = 0$.

Además hemos probado que las coordenadas de w en la base dual son precisamente $(w(e_1), w(e_2), \dots, w(e_n))$.

En conclusión hemos probado que una vez hemos identificado E con $\mathbb{K}^n$ mediante una base, obtenemos que $E^* = \{w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}$ donde $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es la base dual y $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ son las coordenadas de w respecto de la base dual.

Proposición 9. Si $w \neq 0$ entonces w es epiyectiva y $\dim(\text{Ker}(w)) = \dim E - 1$.

Demostración. $\dim(\text{Ker}(w)) = \dim E - \dim(\text{Im}(w))$. Como $\text{Im}(w) \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $\dim(\text{Im}(w)) \leq \dim \mathbb{R} = 1$. Luego si $\dim(\text{Im}(w)) = 0$ entonces $\text{Im}(w) = 0$ y $w = 0$, lo cual no puede ser por hipótesis. Si $\dim(\text{Im}(w)) = 1$ entonces $\text{Im}(w) = \mathbb{R}$ y w es epiyectiva y $\dim(\text{Ker}(w)) = \dim E - 1$. $\square$

Esto dice que si $w = a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_nw_n$ y $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, entonces las soluciones de la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ forman un hiperplano de E .

2.2. SUBESPACIO INCIDENTE.

Definición 29. Sea E' un subespacio de E . Llamaremos *subespacio incidente* a E' al subespacio de las formas lineales que restringidas a E' son nulas;

$$\begin{aligned} (E')^o &= \{w \in E^* / w(e) = 0 \text{ para todo } e \in E'\} \\ &= \{w \in E^* / w(E') = 0\} = \{w \in E^*, E' \subset \text{Ker}(w)\}. \end{aligned}$$

Proposición 10. Si E_1, E_2 son subespacios vectoriales de E , entonces se verifica que:

- 1.- Si $E_1 \subset E_2$ entonces $(E_2)^o \subset (E_1)^o$.
- 2.- $(E_1 + E_2)^o = (E_1)^o \cap (E_2)^o$.

Demostración. 1.- Si $w \in (E_2)^o$ entonces $w(e) = 0$ para todo $e \in E_2$ y además $w(e) = 0$ para todo $e \in E_1$. De modo que $w \in (E_1)^o$.

- 2.- Como $E_1, E_2 \subset E_1 + E_2$, entonces por 1.-, $(E_1 + E_2)^o \subset (E_1)^o$ y $(E_1 + E_2)^o \subset (E_2)^o$. Por tanto $(E_1 + E_2)^o \subset (E_1)^o \cap (E_2)^o$. Veamos que $(E_1)^o \cap (E_2)^o \subset (E_1 + E_2)^o$ con lo que se concluye. En efecto, si $w \in (E_1)^o \cap (E_2)^o$ entonces $w \in (E_1)^o$ y $w \in (E_2)^o$; es decir $w(E_1) = 0 = w(E_2)$ y como $w(E_1 + E_2) = w(E_1) + w(E_2) = 0 + 0 = 0$, se sigue que $w \in (E_1 + E_2)^o$. $\square$

Teorema 4. Sea E' un subespacio de E . Se verifica:

- 1.- $\dim((E')^o) = \dim E - \dim E'$.
- 2.- $E' = \{e \in E / w(e) = 0 \text{ para todo } w \in (E')^o\}$
- 3.- Si $W \subset E^*$ es un subespacio y $W^o = \{e \in E / w(e) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$ entonces $\dim(W^o) = \dim E - \dim W$. En particular $W = (W^o)^o$.

Demostración. 1.- Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ una base de E' . Elegimos $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$ de modo que $\{e_1, \dots, e_n\}$ sea una base de E . Basta tomar $e_{k+i} \notin \langle e_1, e_2, \dots, e_{k+i-1} \rangle$. Sea $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ la base dual de esta base y calculamos $E'^o = \{w = \lambda_1w_1 + \lambda_2w_2 + \dots + \lambda_nw_n \in E^* \mid w(e_i) = 0 \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, k\}\} = \{w = \lambda_1w_1 + \lambda_2w_2 + \dots + \lambda_nw_n \in E^* \mid 0 = \lambda_1w_1(e_i) + \lambda_2w_2(e_i) + \dots + \lambda_iw_i(e_i) + \dots + \lambda_nw_n(e_i) = \lambda_i \text{ con } i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$. Es decir, $E'^o = \{w = \lambda_{k+1}w_{k+1} + \lambda_{k+2}w_{k+2} + \dots + \lambda_nw_n \mid w \in \langle w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n \rangle\}$. De modo que $(E')^o = \langle w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n \rangle$ y por tanto $\dim((E')^o) = n - k$.

- 2.- Claramente $E' \subset \{e \in E / w(e) = 0 \forall w \in (E')^o\}$. Veamos el otro contenido. Sea $e = \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \dots + \lambda_ne_n$. Para que el vector e verifique que $w(e) = 0$ para todo $w \in (E')^o = \langle w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n \rangle$ ha de ocurrir que $0 = w_j(e) = \lambda_j$ para todo $j > k$. De modo que $e = \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \dots + \lambda_ke_k$ y por tanto $e \in \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle = E'$.

3.- Es evidente que $W \subset (W^o)^o$, luego $s = \dim W \leq \dim((W^o)^o) = \dim E - \dim(W^o)$. Por otra parte si $\{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ es una base de W , entonces W^o es el núcleo de la aplicación lineal $T : E \rightarrow \mathbb{K}^s$ dada por $T(e) = (w_1(e), w_2(e), \dots, w_s(e))$. Así que $\dim(W)^o = \dim(\text{Ker} T) = \dim E - \dim(\text{Im} T) \geq \dim E - \dim \mathbb{K}^s = \dim E - s$, que con la otra desigualdad se concluye. $\square$

Corolario 9. $(E_2)^o + (E_2)^o = (E_1 \cap E_2)^o$.

Demostración. $E_1 \cap E_2 \subset E_1$ y $E_1 \cap E_2 \subset E_2$, luego $(E_1)^o + (E_2)^o \subset (E_1 \cap E_2)^o$. Además, por la Proposición anterior $\dim((E_1)^o + (E_2)^o)^o = n - \dim((E_1)^o + (E_2)^o)$. Por otra parte, por la Proposición 10 apartado 2.-, $((E_1)^o + (E_2)^o)^o = ((E_1)^o)^o \cap ((E_2)^o)^o = E_1 \cap E_2$, luego $\dim(E_1 \cap E_2) = n - \dim((E_1)^o + (E_2)^o)$. Despejando, se obtiene que $\dim((E_1)^o + (E_2)^o) = n - \dim(E_1 \cap E_2) = \dim((E_1 \cap E_2)^o)$. $\square$

2.3. ECUACIONES IMPLÍCITAS DE UNA SUBVARIETAD LINEAL.

Sea $V = p + E'$ una subvariedad lineal de E . Si en E elegimos un sistema de coordenadas, se tiene que $p = (p_1, \dots, p_n)$ y $(E')^o = \langle \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_s \rangle$, entonces $s = \dim E - \dim V$. Sea $e = (x_1, \dots, x_n) \in V$ entonces $e = p + e'$ para algún $e' \in E'$ y así $e - p \in E'$ y $\bar{w}_j(e - p) = 0$ para todo $j = \{1, 2, \dots, s\}$. De modo que $\bar{w}_j(e) - \bar{w}_j(p) = 0 = \bar{w}_j(e) - b_j = 0$ donde $\bar{w}_j(p) = b_j$ que respecto de las coordenadas de e se escribe, $\bar{w}_j(e) = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n$. Así, se obtiene V como soluciones de un sistema de ecuaciones o como intersección de s hiperplanos. Esto es

$$\begin{pmatrix} H_1 : & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n - b_1 & = 0 \\ H_2 : & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n - b_2 & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_s : & a_{s,1}x_1 + a_{s,2}x_2 + \dots + a_{s,n}x_n - b_s & = 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

que se denominan ecuaciones implícitas de V .

Ecuación implícita de un hiperplano

Sea H un hiperplano que pasa por el punto $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ y que tiene como vectores directores $H_0 = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$; es decir $H = p + H_0$. Así, si $v_j = (v_{1,j}, v_{2,j}, \dots, v_{n,j})$ y $e = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$, entonces $e - p \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$ y por tanto $e - p, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ son vectores linealmente dependientes, o dicho de otra manera, el determinante formado por las coordenadas de dichos vectores es cero. Es decir

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & \cdots & x_n - p_n \\ v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación continua de un recta

Sea r una recta que pasa por $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ y tiene como vector director $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda v_1 \\ x_2 = p_2 + \lambda v_2 \\ \vdots \\ x_n = p_n + \lambda v_n \end{cases}$$

Despejando λ en cada una de las ecuaciones se obtiene que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{x_1 - p_1}{v_1} \\ \lambda &= \frac{x_2 - p_2}{v_2} \\ &\vdots \\ \lambda &= \frac{x_n - p_n}{v_n} \end{aligned}$$

y así

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \dots = \frac{x_n - p_n}{v_n} \quad (2.4)$$

es la ecuación continua de la recta u otra forma de poner las ecuaciones implícitas de r .

Hiperplanos que pasan por una subvariedad lineal.

Sea V como antes. Queremos calcular los hiperplanos H que pasan por V . Así que H vendrá dado por un punto $p \in V$ y un subespacio de direcciones $E_1 \subset E$. Como $p + E' \subset p + E_1$ se tiene que $E' \subset E_1$ y por tanto $(E_1)^o = \langle w \rangle \subset E'^o$. Es decir $w = \lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_2 \bar{w}_2 + \dots + \lambda_s \bar{w}_s$ y $w(p) = \lambda_1 \bar{w}_1(p) + \lambda_2 \bar{w}_2(p) + \dots + \lambda_s \bar{w}_s(p) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_s b_s$. Luego la ecuación implícita del

hiperplano es $H : \bar{w} = w - (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_2 \bar{w}_2 + \dots + \lambda_s \bar{w}_s - (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_s b_s) =$

$\lambda_1 (\bar{w}_1 - b_1) + \lambda_2 (\bar{w}_2 - b_2) + \dots + \lambda_s (\bar{w}_s - b_s) = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \dots + \lambda_s H_s$. Es decir si $s = \dim E - \dim(V)$ entonces todo hiperplano que pasa por V es una combinación de s hiperplanos linealmente independientes que pasan por V .

Capítulo 3

ESPACIO EUCLÍDEO.

3.1. MÉTRICAS.

Definición 30. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Diremos que $T_2 : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es una *métrica* si es lineal en ambos factores. Es decir,

$$T_2(e, \lambda e_1 + \mu e_2) = \lambda T_2(e, e_1) + \mu T_2(e, e_2)$$

y

$$T_2(\lambda e_1 + \mu e_2, e) = \lambda T_2(e_1, e) + \mu T_2(e_2, e)$$

para todo $\lambda, \mu \in k$ y $e_1, e_2, e \in E$.

Nota 8. Pondremos $T_2(e, e') = e \cdot e'$.

Como $e \cdot 0 + e \cdot 0 = e \cdot (0 + 0) = e \cdot 0$, restando $e \cdot 0$ en ambos miembros se concluye que $e \cdot 0 = 0$.

Definición 31. Diremos que una métrica T_2 es *simétrica* si $e \cdot e' = e' \cdot e$ para todo $e, e' \in E$.

3.2. ORTOGONALIDAD.

Sea T_2 una métrica simétrica en E .

Definición 32. Diremos que dos vectores e_1 y e_2 son *ortogonales* si $e_1 \cdot e_2 = 0$.

Definición 33. Sea E_1 un subespacio de E . Llamaremos *subespacio ortogonal* de E_1 al subespacio de los vectores de E que son ortogonales a todos los vectores de E_1 :

$$E_1^\perp = \{e \in E / e \cdot e_1 = 0 \text{ para todo } e_1 \in E_1\}.$$

Definición 34. Diremos que dos subespacios E_1 y E_2 son *ortogonales* cuando $E_1 \cdot E_2 = 0$; es decir $E_2 \subseteq E_1^\perp$.

Definición 35. Diremos que *dos subvariedades lineales son ortogonales* cuando lo sean sus subespacios directores.

3.3. ESPACIOS EUCLÍDEOS.

Definición 36. Sea E un espacio vectorial real. Diremos que una métrica simétrica T_2 en E es una *métrica euclídea* o un *producto escalar* si $e \cdot e > 0$ para todo $0 \neq e \in E$. Llamaremos *espacio euclídeo* a un espacio vectorial real dotado de un producto escalar.

3.3.1. Ángulos y distancias

Definición 37. Sea $(E, \cdot)$ un espacio euclídeo y $e \in E$.

- i.- Llamaremos *módulo* de e a $\|e\| = +\sqrt{e \cdot e}$.
- ii.- Llamaremos *distancia* entre e_1 y e_2 a $d(e_1, e_2) = \|e_1 - e_2\|$.
- iii.- Llamaremos *coseno* del ángulo que forman e_1 y e_2 a $\cos(e_1, e_2) = \frac{e_1 \cdot e_2}{\|e_1\| \|e_2\|}$

Así la condición de que e_1 y e_2 sean ortogonales es equivalente a que el ángulo que forman e_1 y e_2 sea de 90° ya que $\cos 90^\circ = 0$.

En el caso de una métrica euclídea se usa muchas veces la palabra perpendicular en vez de la palabra ortogonal.

Proposición 11 (Propiedades).

- i.- *Desigualdad de Minkowski.* $|e_1 \cdot e_2| \leq \|e_1\| \|e_2\|$. Es decir $|\cos(e_1, e_2)| \leq 1$.
- ii.- *Lema de Schwartz.* $\|e_1 + e_2\| \leq \|e_1\| + \|e_2\|$

Demostración.

- i.- Si $e_1 = \mu e_2$ se comprueba que la desigualdad es una igualdad. Supongamos que $e_1 + \lambda e_2 \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que $(e_1 + \lambda e_2) \cdot (e_1 + \lambda e_2) > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego $e_1^2 + \lambda^2 e_2^2 + 2\lambda e_1 \cdot e_2 > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Si llamamos $A = e_2^2$, $B = e_1 \cdot e_2$, $C = e_1^2$, se tiene que la ecuación $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ no tiene soluciones reales.

Las soluciones son $x = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$. Para que no tenga soluciones reales ha de verificarse que $B^2 - AC < 0$; $B^2 < AC$. Es decir $(e_1 \cdot e_2)^2 < e_2^2 \cdot e_1^2 = \|e_2\|^2 \|e_1\|^2$. Tomando raíces cuadradas en las dos partes de la desigualdad se concluye.

- ii.- $\|e_1 + e_2\| = \sqrt{(e_1 + e_2) \cdot (e_1 + e_2)} = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + 2e_1 \cdot e_2} = \sqrt{\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + 2e_1 \cdot e_2} \leq \sqrt{\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + 2\|e_1\| \cdot \|e_2\|} = \sqrt{(\|e_1\| + \|e_2\|)^2} = \|e_1\| + \|e_2\|$.

□

3.4. POLARIDAD.

3.4.1. Bases ortonormales

Definición 38.

- i.- Diremos que una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de un espacio euclídeo es una base *ortogonal* si los vectores son ortogonales entre sí.
- i.- Diremos que la base es *ortonormal* si es ortogonal y los vectores de la base tienen módulo 1. Es decir

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ 1 & \text{para } i = j \end{cases}$$

Teorema 5 (Teorema de Gram-Schmidt). Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de un espacio euclídeo E . A partir de esta base podemos construir una base ortogonal como sigue:

$$e'_1 = e_1, \quad e'_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{e_k \cdot e'_i}{e'_i \cdot e'_i} \right) e'_i$$

Y por tanto una base ortonormal tomando $\bar{e}_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}$.

Demostración. Veamos que $e'_s \cdot e'_k = 0$ para $s < k$. La demostración se hace por inducción sobre k . Para $k = 1$ no hay nada que decir, así que supongamos que $e'_s \cdot e'_i = 0$ para $s < i \leq k - 1$ y probemos que entonces también es cierto que si $s < k$ se verifica que $e'_s \cdot e'_k = 0$. En efecto,

$$e'_s \cdot e'_k = e'_s \cdot e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{e_k \cdot e'_i}{e'_i \cdot e'_i} \right) e'_s \cdot e'_i = e'_s \cdot e_k - \left(\frac{e_k \cdot e'_s}{e'_s \cdot e'_s} \right) e'_s \cdot e'_s = 0$$

□

3.4.2. Polaridad

Definición 39. Dada una métrica simétrica T_2 en E , llamaremos *polaridad* asociada a dicha métrica a la aplicación lineal $\phi : E \rightarrow E^*$ definida por $\phi(e)(e') = e \cdot e'$.

Es la aplicación que manda cada vector a su hiperplano perpendicular. En efecto, si $\phi(e) = \omega$, entonces el hiperplano $\omega = 0$ es el ortogonal a e ya que $\omega(e') = 0 \Leftrightarrow \phi(e)(e') = 0 \Leftrightarrow e \cdot e' = 0 \Leftrightarrow e' \in \langle e \rangle^\perp$.

Si la métrica es euclídea, entonces ϕ es isomorfismo. En efecto, por ser una aplicación lineal entre espacios vectoriales de la misma dimensión basta ver que $\text{Ker } \phi = \{0\}$. Pero $e \in \text{Ker } \phi \Rightarrow \phi(e) \equiv 0 \Rightarrow 0 = \phi(e)(e') = e \cdot e' = 0$ para todo $e' \in E$. En particular $e \cdot e = 0$. Luego $e = 0$.

3.4.3. Cálculo en coordenadas.

Matriz de una métrica

Llamaremos matriz de la métrica T_2 en la base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a la matriz $G = (g_{ij})$ donde $g_{ij} = e_i \cdot e_j$. Sean $e = (x_1, \dots, x_n)$ y $e' = (x'_1, \dots, x'_n)$ las coordenadas de dos vectores de E respecto de la base B , la expresión del producto escalar $T_2(e, e')$ es

$$T_2(e, e') = T_2\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x'_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x'_j e_i \cdot e_j = \sum_{i,j} x_i x'_j g_{i,j}$$

es decir,

$$T_2(e, e') = T_2(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Si la métrica es simétrica, entonces G es una matriz simétrica, $G = G^t$.

La condición necesaria y suficiente para que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sea una base ortonormal es que la matriz de la métrica en esta base sea

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición 12. Sea $(E, \cdot)$ un espacio euclídeo y sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ su base dual. La matriz de la polaridad en estas bases coincide con la matriz de la métrica en la base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Demostración. Si ϕ tiene matriz $(p_{i,j})$ respecto de estas bases, entonces

$$\phi(e_j) = p_{1,j}\omega_1 + p_{2,j}\omega_2 + \cdots + p_{n,j}\omega_n.$$

Luego

$$e_j \cdot e_i = \phi(e_j)(e_i) = p_{1,j}\omega_1(e_i) + p_{2,j}\omega_2(e_i) + \cdots + p_{i,j}\omega_i(e_i) + \cdots + p_{n,j}\omega_n(e_i) = p_{i,j}.$$

De donde se concluye $g_{i,j} = p_{j,i} = e_j \cdot e_i = p_{i,j}$. $\square$

De esta proposición, la definición y propiedades se deducen las siguientes fórmulas:

Sea $(E, \cdot)$ un espacio euclídeo, sean $e = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $e' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ las coordenadas respecto de la base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ y sea G la matriz de la métrica respecto de la base B , entonces

$$\text{Producto escalar de } e' \text{ y } e = e' \cdot e = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Hiperplano ortogonal a } e = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \text{ donde } G \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y recíprocamente:

$$\text{vector ortogonal al hiperplano } b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = G^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cuando la base es ortonormal, entonces $G = Id$ y las fórmulas quedan, si $e = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $e' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$, en

$$\begin{array}{l} \text{Producto escalar de } e' \text{ y } e = a'_1 \cdot a_1 + a'_2 \cdot a_2 + \cdots + a'_n \cdot a_n \\ \text{Hiperplano ortogonal a } e \text{ es } a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ \text{vector ortogonal al hiperplano } b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0 \text{ es } (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{array}$$

Cálculo del subespacio ortogonal

Sea $E_1 = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k \rangle$ un subespacio de dimensión k de un espacio euclídeo $(E, \cdot)$. Queremos calcular el ortogonal a E_1 , $e \in E_1^\perp \Leftrightarrow 0 = \bar{e}_1 \cdot e = \bar{e}_2 \cdot e = \cdots = \bar{e}_k \cdot e \quad 0 = \phi(\bar{e}_1)(e) = \phi(\bar{e}_2)(e) = \cdots = \phi(\bar{e}_k)(e)$

Si llamamos $\bar{\omega}_i = \phi(\bar{e}_i)$ se tiene que

$$E_1^\perp = \begin{cases} \bar{\omega}_1 = 0 \\ \bar{\omega}_2 = 0 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_k = 0 \end{cases}$$

que son sus ecuaciones implícitas porque al ser $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k\}$ linealmente independientes y ϕ un isomorfismo se tiene que $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_k\}$ son linealmente independientes.

En particular se obtiene que el incidente a $E_1^\perp$ tiene dimensión k y por tanto $\dim E_1^\perp = \dim E - \dim E_1$.

Corolario 10. Si E_1 es un subespacio de un espacio euclídeo $(E, \cdot)$, entonces $E = E_1 \oplus E_1^\perp$. Es decir todo elemento $e \in E$ se puede expresar de modo único como suma de un elemento de E_1 y otro de $E_1^\perp$.

Demostración. $E_1 \cap E_1^\perp = \{0\}$ pues si $e \in E_1$ y $e \in E_1^\perp$, entonces $e \cdot e = 0$ y por tanto $e = 0$.

Para probar que $E = E_1 + E_1^\perp$ basta ver que tienen la misma dimensión $\dim(E_1 + E_1^\perp) = \dim(E_1) + \dim(E_1^\perp) - \dim(E_1 \cap E_1^\perp) = \dim E_1 + \dim E - \dim E_1 - 0 = \dim E$. $\square$

3.5. DISTANCIA ENTRE SUBVARIETADES LINEALES.

Sea $V_1 = p_1 + E_1$ y $V_2 = p_2 + E_2$ dos subvariedades lineales de E . Llamaremos distancia entre V_1 y V_2 al mínimo de las distancias entre los puntos de V_1 y V_2

$$\begin{aligned} d(V_1, V_2) &= \min\{d(q_1, q_2) \mid q_1 \in V_1, q_2 \in V_2\} \\ &= \min\{\|q_1 - q_2\| \mid q_1 \in V_1, q_2 \in V_2\} \\ &= \min\{\|(p_1 + e_1) - (p_2 + e_2)\| \mid e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\} \\ &= \min\{\|(p_1 - p_2) + (e_2 - e_1)\| \mid e_2 - e_1 \in E_2 + E_1\} = d(l, E_2 + E_1) \end{aligned}$$

donde $l = p_1 - p_2$.

Es decir el cálculo de la distancia entre dos subvariedades se reduce al cálculo de la distancia entre un punto y una subvariedad lineal.

Pie de la perpendicular. Sea $p \in E$ y V una subvariedad afín. Llamaremos *pie de perpendicular desde p a V* al punto $q \in V$ tal que $p - q$ es perpendicular V .

Veamos que existe y es único. En efecto, sea $V = p_1 + E_1$. Si $q \in V$, entonces $q = p_1 + e_1$ para algún $e_1 \in E_1$. Además $p - q = v \in E_1^\perp$, luego $v = p - (p_1 + e_1)$ y $p - p_1 = e_1 + v$. Se concluye sabiendo que el vector $p - p_1$ se escribe de modo único como suma de un vector de E_1 y otro de $E_1^\perp$.

Proposición 13. La distancia de p a V es igual a la distancia de p al pie de la perpendicular desde p a V .

Demostración. Sea q el pie de la perpendicular. Por definición de distancia de p a V sólo hay que probar que $d(p, q) \leq d(p, q')$ para todo $q' \in V$. Es decir, $\|p - q'\|^2 = (p - q')^2 = (p - q + q - q')^2 = (p - q)^2 + (q - q')^2 + 2(p - q) \cdot (q - q') \geq (p - q)^2 = \|p - q\|^2$. La última desigualdad es porque al ser $p - q$ perpendicular a E_1 se tiene que $(p - q) \cdot (q - q') = 0$ y además $(q - q')^2 \geq 0$. Tomando raíces cuadradas se concluye. $\square$

Proposición 14 (Distancia de un punto a un hiperplano). Sea G la matriz de la métrica en una base, $p \in E$ y $H \equiv \omega - a$ la ecuación de un hiperplano. Se verifica que

$$d(p, H) = \frac{|H(p)|}{\sqrt{\omega G^{-1} \omega}}$$

Demostración. Si $G^{-1}\omega = e$, entonces $Ge = \omega$ y por tanto $\omega(e') = \phi(e)(e') = e \cdot e'$. Sea q el pie de la perpendicular desde p a H , entonces $p - q \in H^\perp = \langle e \rangle$. Luego $p - q = \lambda e$. Además $q \in H$; es decir $H(q) = \omega(q) - a = 0$ y por tanto $\omega(q) = a$.

Veamos cuanto vale λ . Por una parte $\omega(p - q) = \omega(p) - \omega(q) = \omega(p) - a = H(p)$ y por otra parte $\omega(p - q) = \omega(\lambda e) = \lambda \omega(e) = \lambda e \cdot e = \lambda \|e\|^2$. Luego $\lambda = \frac{H(p)}{\|e\|^2}$. Así

$$d(p, H) = \|p - q\| = |\lambda| \|e\| = \frac{H(p)}{\|e\|^2} \|e\| = \frac{H(p)}{\|e\|} = \frac{H(p)}{\sqrt{\omega(e)}} = \frac{|H(p)|}{\sqrt{\omega G^{-1} \omega}}$$

ya que $\|e\| = +\sqrt{e \cdot e} = \sqrt{\phi(e) \cdot e} = +\sqrt{\omega(e)}$ y $\phi^{-1}(w) = e$. $\square$

3.6. FÓRMULAS DEL ESPACIO EUCLÍDEO.

Sea E un espacio euclídeo donde denotaremos el producto escalar por $e \cdot e'$.

Sea $G = (e_i \cdot e_j)$ la matriz de la métrica respecto de la base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Si $e = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $e' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, entonces

$$e \cdot e' = (x_1, \dots, x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$\|e\| = \sqrt{(x_1, \dots, x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Si B es ortonormal, entonces

$$e \cdot e' = x_1 \cdot x'_1 + x_2 \cdot x'_2 + \dots + x_n \cdot x'_n$$

y

$$\|e\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Cálculo del subespacio perpendicular a un subespacio.

Sea E_1 un subespacio de E . Si tenemos una base de $E_1 = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_s \rangle$, entonces calculamos las ecuaciones implícitas de $E_1^\perp$ como sigue

$$E_1^\perp = \begin{cases} \bar{w}_1 = 0 \\ \bar{w}_2 = 0 \\ \vdots \\ \bar{w}_s = 0 \end{cases}$$

donde $G\bar{e}_i = \bar{w}_i$.

Si B es ortonormal y $\bar{e}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$ entonces

$$E_1^\perp = \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{2,1}x_1 + b_{2,2}x_2 + \dots + b_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{s,1}x_1 + b_{s,2}x_2 + \dots + b_{s,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Recíprocamente, si $E_1 = \begin{cases} \bar{w}_1 = 0 \\ \bar{w}_2 = 0 \\ \vdots \\ \bar{w}_r = 0 \end{cases}$ son las ecuaciones implícitas de E_1 , entonces

$$E_1^\perp = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_r \rangle$$

donde $\bar{e}_i = G^{-1}\bar{w}_i$.

Si B es ortonormal y $\bar{w}_i = b_{i,1}x_1 + b_{i,2}x_2 + \dots + b_{i,n}x_n$ entonces

$$E_1^\perp = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_r \rangle,$$

donde $\bar{e}_i = (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,n})$

Distancias

Si $H \equiv w - c = 0$ es la ecuación implícita de un hiperplano y p es un punto, entonces

$$\text{distancia de } p \text{ a } H = \frac{|H(p)|}{\sqrt{w(G^{-1}w)}}.$$



VNIVERSIDAD
D SALAMANCA

PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Grado en Ingeniería Informática. Curso 2011/12

Hoja 1

ÍNDICE

1. Espacios vectoriales	1
1.1. Espacios y subespacios vectoriales	1
1.2. Aplicaciones lineales: primeras propiedades	3
1.3. Independencia lineal y sistemas generadores	4
1.4. Bases y coordenadas	5
1.5. Aplicaciones lineales: representación matricial	7

1. ESPACIOS VECTORIALES

1.1. Espacios y subespacios vectoriales.

1. Dado un cuerpo k y $n \in \mathbb{N}$, en el conjunto $k^n = k \times \dots \times k$ se define la siguiente operación:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Además se define el siguiente producto por un escalar $\lambda \in k$:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Estudia si $(k^n, +, \cdot)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre k .

2. Demuestra que el conjunto $C = \{(x, y, y, -x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ con la operación:

$$(x, y, y, -x) + (w, z, z, -w) = (x + w, y + z, y + z, -(x + w)),$$

y con el producto escalar para $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot (x, y, y, -x) = (\lambda x, \lambda y, \lambda y, -\lambda x),$$

es un espacio vectorial.

3. Prueba que el conjunto $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios en una variable x con coeficientes reales tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Prueba también que $\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$, el subconjunto de polinomios de grado menor o igual que n , es un subespacio vectorial.
4. Prueba que el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ sobre un cuerpo k con la suma de matrices usual y el producto por un escalar usual es un k -espacio vectorial.
5. Con las operaciones naturales, demuestra que $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial.
6. Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo k . Demuestra que:
- Para todo $e \in E$, se cumple $0 \cdot e = 0$.
 - Para todo $\lambda \in k$, se cumple $\lambda \cdot 0 = 0$.
 - $\lambda \cdot e = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ó $e = 0$.

7. En el conjunto $\mathbb{Q}^2$ se definen las siguientes operaciones:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$$

Estudia si $\mathbb{Q}^2$ con las operaciones así definidas es un espacio vectorial racional.

8. Sea $\mathbb{R}^2$ el conjunto de los pares de números reales. Se definen las operaciones:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^2 x, \lambda^2 y)$$

Estudia las propiedades de espacio vectorial que se verifican.

9. Sea $\mathbb{R}^2$ el conjunto de los pares de números reales. Se definen las operaciones:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\lambda \cdot (x, y) = (x, y)$$

Estudia las propiedades de espacio vectorial que se verifican.

10. Determina si $V \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio vectorial real, donde:

a) $V = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$

b) $V = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}.$

c) $V = \{(a, b, c) \mid a^2 + b^2 + c^2 \geq 1\}.$

d) $V = \{(a, b, c) \mid a = b + c\}.$

e) $V = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$

11. Determina cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales:

a) $E_1 = \{(0, x_2, \dots, x_n) \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$

b) $E_2 = \{(1, x_2, \dots, x_n) \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$

c) $E_3 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}\}.$

d) $E_4 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}.$

e) $E_5 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = 5\}.$

12. Sea $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones suma (+) y producto por un escalar ($\cdot$) definidas de la forma:

$$\forall f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall \lambda, x \in \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Demuestra que $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Analiza si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

a) $E_1 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(3) = 0\}.$

b) $E_2 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = f(2)\}.$

c) $E_3 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x)\}.$

d) $E_4 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-x) = -f(x)\}.$

e) $E_5 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ es continua}\}.$

13. Determina si los siguientes subconjuntos de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:

a) $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$

b) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$

c) El conjunto de las matrices simétricas.

d) El conjunto de las matrices A que cumplen $A^2 = A$.

e) El conjunto de matrices cuyo determinante no es cero.

14. En el conjunto de matrices cuadradas con coeficientes en un cuerpo k , $\text{Mat}_{n \times n}(k)$, prueba que los siguientes subconjuntos tienen estructura de k -espacio vectorial:

a) Las matrices diagonales.

b) Las matrices triangulares superiores.

15. Estudia si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}^2$ son $\mathbb{C}$ -subespacios vectoriales:

a) $U = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \bar{z}_1 = z_2\}.$

b) Si $\alpha \in \mathbb{C}$, $V_\alpha = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 = \alpha \cdot z_2\}.$

16. Sean E_1 y E_2 dos subespacios de un k -espacio vectorial E . Demuestra que E_1 y E_2 están en suma directa si y solo si la descomposición de cualquier vector de $E_1 + E_2$ como suma de uno de E_1 y otro de E_2 es única.

17. Demuestra que $\mathbb{R}^3 = E \oplus E'$ donde E y E' son los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

- a) $E = \{(a, b, c) \mid a = b = c\}$ y $E' = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$.
 b) $E = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ y $E' = \{(t, 2t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

18. Sean E, E', E'' los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}, \quad E' = \{(a, b, c) \mid a = c\} \text{ y } E'' = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Demuestra que $\mathbb{R}^3 = E + E', \mathbb{R}^3 = E + E''$ y $\mathbb{R}^3 = E' + E''$. ¿En qué casos se trata de suma directa?

19. Prueba que en $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ el subespacio de las matrices simétricas está en suma directa con el de las matrices antisimétricas.

20. Sea E el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por $E = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$. Determina un suplementario de E . Expresa el vector $(1, 2, 1)$ como suma de un vector de E y otro del suplementario escogido.

1.2. Aplicaciones lineales: primeras propiedades.

21. Demuestra que las siguientes aplicaciones son lineales:

- a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_1(x, y) = (-x + 4y, \frac{1}{3}x - 2y, \sqrt{2}x + y)$.
 b) $f_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R}), f_2(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} 2a+b & b-c+d & 3a+3c+d \\ a+b-d & 2b+c & 4a-2b+2c+d \end{pmatrix}$.
 c) $f_3 : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2, f_3(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (-a_0 + \frac{5}{3}a_1, 2a_0 + 10a_1 - \frac{1}{5}a_2)$.
 d) $f_4 : (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^3, f_4(a, b, c, d) = (b + 4c + d, 3a + 3c + d, a + 2b + 4d)$.
 e) $tr : \text{Mat}_{n \times n}(k) \rightarrow k, tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ donde $A = (a_{ij})$.

22. Estudia cuales de las siguientes aplicaciones son lineales:

- a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, 0, x_2 + x_3)$.
 b) $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x], F(p(x)) = xp'(x)$, donde $\mathbb{R}_3[x]$ es el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3 y $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$ respecto la variable x .
 c) $g : k^n \rightarrow k^n, g(u) = u_0$, con $u_0 \neq 0$ un vector fijo de k^n .
 d) $\det : \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \det(A) = ad - bc$ donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

23. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por:

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + y - z, 2x).$$

Probar que es una aplicación lineal. Hallar el núcleo, la imagen.

24. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por:

$$T(x, y, z) = (y - z, -x + 4z, y - z).$$

Probar que es una aplicación lineal. Hallar el núcleo y la imagen.

25. Dada una aplicación lineal $f : E \rightarrow F$ y dos subespacios vectoriales $E' \subset E$ y $F' \subset F$, se definen los conjuntos:

$$f(E') = \{f(e) \mid e \in E'\} \subset F, \\ f^{-1}(F') = \{e \mid f(e) \in F'\} \subset E.$$

Prueba que $f(E')$ es un subespacio vectorial de F que $f^{-1}(F')$ es un subespacio vectorial de E .

26. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 3, y sea $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación definida por:

$$T(p(x)) = (x - 3)p'(x),$$

donde $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$. Prueba que T es una aplicación lineal. Calcula los polinomios invariantes por T .

27. Sea la aplicación $T : \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + 2c + d, a + 3b + 5c - 7d, a - b + c - d).$$

Prueba que T es lineal. Calcula su núcleo e imagen.

28. Sea $\mathbb{R}_4[x]$ el espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual que 4. Se define $f : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x], f(p(x)) = p'(x)$.

- a) Prueba que f es una aplicación lineal.

- b) Calcula $f^{-1}(3x^2 - 1)$ y $f^{-1}(\langle 3x^2 - 1 \rangle)$.
 c) Determina $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ y $\ker f \cap \operatorname{Im} f$.

1.3. Independencia lineal y sistemas generadores.

29. Estudia si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes:

$$(2, -1, 4), (4, 1, 8) \text{ y } (1, 0, 3).$$

30. Demuestra que los vectores $(-5, 2, 8, -16)$, $(-5, 3, 17, -14)$ y $(1, 1, 11, 6)$ de $\mathbb{Q}^4$ son linealmente dependientes.

31. Estudia si los siguientes vectores de $\operatorname{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

32. Prueba que:

- a) Los vectores de $\mathbb{R}^2$ $\{(3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), (7, 1 + 2\sqrt{2})\}$ son linealmente dependientes sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ pero no sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$.
 b) Los vectores de $\mathbb{C}^2$ $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ son linealmente dependientes sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ pero no sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

33. Demuestra que para cualquier valor de $m \in \mathbb{R}$ los vectores $(m, 1, 0)$, $(-1, m, 0)$ y $(0, 1, 1)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Comprueba que esta propiedad no se cumple en $\mathbb{C}^3$ con $m \in \mathbb{C}$.

34. Considera las matrices $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & x \\ -3 & y \end{pmatrix}$. Determina x e y para que dichas matrices sean linealmente independientes.

35. Estudia si los vectores de $\mathbb{R}[x]$: $p(x) = \sqrt{5} + x + x^2$, $q(x) = 3x^2$ y $r(x) = 1 - x^3$, son linealmente independientes.

36. En el espacio vectorial $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, estudia si las funciones:

- a) $\sqrt{1 + x^2}$ y e^x ,
 b) $(x - 1)^2 - 1$ y $\frac{x}{3}(x - 2)$,
 c) x , $\sin x$ y $\cos x$,
 d) $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ y la función constante 1,
 son linealmente independientes.

37. Demuestra que el subespacio $E = \{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ está generado por las siguientes familias de vectores:

- a) $e_1 = (1, 1, 0)$ y $e_2 = (1, 0, 0)$.
 b) $e'_1 = (2, -1, 0)$ y $e'_2 = (-1, -1, 0)$.
 c) $e''_1 = (1, -1, 0)$, $e''_2 = (3, 2, 0)$ y $e''_3 = (-\frac{2}{3}, 1, 0)$.

38. Determina x e y para que el vector $(3, 2, x, y) \in \mathbb{Q}^4$ pertenezca al subespacio generado por $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, 1)$.

39. Prueba que el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 1)$ y $(0, 1, 0)$ coincide con el subespacio generado por $(2, 3, 2)$ y $(1, 0, 1)$.

40. Halla un vector común a los subespacios $E_1 = \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$ y $E_2 = \langle (1, 0, 1), (3, 4, 3) \rangle$.

41. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ considera el subconjunto:

$$M = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z + t = 0\}.$$

- a) Demuestra que M es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
 b) Encuentra en M tres vectores e, e', e'' que sean linealmente independientes y demuestra que todo vector de M se puede poner como combinación lineal de ellos.

42. Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^3$ (como $\mathbb{C}$ -espacio vectorial):

$$V_1 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid 2z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 0\},$$

$$V_2 = \langle (1, i, 3i), (0, 2 + i, \frac{1}{2}) \rangle.$$

¿Pertenece el vector $(1 + i, -4 - i, -2 + 3i) \in \mathbb{C}^3$ a dichos subespacios?

43. En $\mathbb{R}^4$ considera los subespacios E y V generados, respectivamente, por las parejas de vectores $e = (1, 0, 1, 0)$, $e' = (0, 1, 0, 1)$ y $v = (0, 0, 1, 3)$ y $v' = (1, 0, 0, 1)$. Prueba que $\mathbb{R}^4$ es suma directa de E y V . Expresa el vector $(3, -2, \frac{4}{3}, 0)$ como suma de uno de E y otro de V .

44. Sean los subespacios de $\mathbb{C}^3$:

$$E = \langle (1, 2i, -1 + i), (2, 0, 1 + 2i) \rangle \quad \text{y} \\ F = \langle (3 + i, 1 - i, 1), (-3, 1 + 4i, 5i) \rangle.$$

Describe $E + F$ y $E \cap F$. ¿Están E y F en suma directa? ¿Pertenece $e = (i, 2 + 2i, 1 - 3i)$ a alguno de estos subespacios?

45. Sean los subespacio de $\mathbb{R}^3$, $F = \langle (1, 1, -1) \rangle$ y $G = \{(x, y, z) \mid 3x - y = 0, 2x + z = 0\}$. Determina $F \cap G$.

46. Sean los subespacios de $\mathbb{R}^3$: $E_1 = \langle (2, 3, 1) \rangle$ y $E_2 = \langle (0, 1, 2), (1, 1, 1) \rangle$. Prueba que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ y expresa el vector $(1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ como suma de un vector de E_1 y otro de E_2 .

47. Determina en $\mathbb{R}^3$ un subespacio suplementario de cada uno de los subespacios engendrados por los siguientes vectores:

- a) $v_1 = (-3, 1, 0)$.
- b) $v_2 = (-1, 2, 1)$ y $v_3 = (2, -4, 3)$.
- c) $v_4 = (-1, 2, 1)$, $v_5 = (2, 1, -2)$ y $v_6 = (1, 1, -1)$.

1.4. Bases y coordenadas.

48. Comprueba que los vectores $e = (1, -1, 0)$, $e' = (2, 1, 0)$ y $e'' = (0, 1, 1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Encuentra las coordenadas respecto de la misma del vector $(1, 1, 1)$.

49. Considera la familia de vectores de $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

- a) Demuestra que B es una base de $\mathbb{R}^3$.
- b) Halla la matriz de cambio de base de la canónica $B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a B .
- c) Da las coordenadas de los vectores de $(2, 2, -1)_{B_c}$, $(4, 0, 1)_{B_c}$ y $(3, -1, 2)_{B_c}$ en la base B .

50. Determina en $\mathbb{Q}^5$ una base del subespacio generado por los vectores $(1, 2, -4, 3, 1)$, $(6, 17, -7, 10, 22)$, $(2, 5, 0, -3, 8)$ y $(1, 3, -3, 2, 0)$.

51. Comprueba que las matrices reales $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman una base del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2. Calcula las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de esta base.

52. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$, demuestra que $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = (x + 1)^2$ y $p_3(x) = (x + 1)^3$ forman una base. Calcula las coordenadas del polinomio $2x^3 + x^2 - 4x - 4$ en dicha base.

53. Demuestra que el subconjunto $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{3}{4}x + 2y - z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y calcula una base del mismo. ¿Cuál es su dimensión?

54. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

- a) Halla una base que contenga al vector $(1, 2, 1, 1)$.
- b) Halla una base que contenga a los vectores $(1, 1, 0, 2)$ y $(1, -1, 2, 0)$.
- c) Halla una base que contenga a los vectores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 2, 2)$ y $(0, 3, 3, 0)$.

55. Considera el espacio vectorial de los polinomios de grado menor que 3, $\mathbb{R}_2[x]$.

- a) Demuestra que los polinomios $1 + x$, $x + x^2$, $1 + x^2$ forman una base.
- b) Da la matriz de cambio de base de la estándar $\{1, x, x^2\}$ a esta nueva base.
- c) Halla las coordenadas del polinomio $3 + 2x + 5x^2$ en dicha base.

56. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- a) Encuentra el valor de m para que existan matrices cuadradas no nulas B tales que $AB = 0$.
- b) Demuestra que dichas matrices (incluida la matriz cero) forman un subespacio vectorial. Encuentra una base del mismo.

57. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios en una variable, de grado menor o igual que 2. Sea $M = \langle x^2 - 1, x + 1, x^2 - 7x - 8 \rangle \subset \mathbb{R}_2[x]$. Halla una base de $\mathbb{R}_2[x]$ que contenga a una base de M .
58. Encuentra una base del subespacio de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 2x \\ 0 & x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

¿Cual es la dimensión de E ? Estudia si los vectores $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ pertenecen a E .

59. Sea $B = \{e, e', e''\}$ una base de un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial E y v un vector cuyas coordenadas respecto de B son $(1, -1, 2)_B$.
- Demuestra que el conjunto $S = \{e + e', e + e' + e''\}$ es linealmente independiente.
 - Completa S a una base B' tal que las coordenadas de v respecto de B' sean $(1, 1, 1)_{B'}$.
60. Considera en $\mathbb{R}^4$ los vectores: $(1 + \lambda, 1, 1, 1)$, $(1, 1 + \lambda, 1, 1)$, $(1, 1, 1 + \lambda, 1)$ y $(1, 1, 1, 1 + \lambda)$. Determina en función de λ la dimensión del subespacio que generan y calcula una base.
61. Determina $\lambda \in \mathbb{R}$ para que los vectores $(2, 4, 1)$, $(1, 0, 3)$, $(5, \lambda, -5)$ estén en un mismo plano (subespacio de dimensión 2) de $\mathbb{R}^3$.
62. Considera en $\mathbb{R}^4$ el subespacio E de los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que $2x_1 + 3x_2 = 2x_3 + 3x_4$. Prueba que los vectores $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ y $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ son linealmente independientes y pertenecen a E . Extiéndelos a una base de E .
63. En $\mathbb{R}_n[x]$ sea el subconjunto:

$$E = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid \int_0^1 p(x) dx = 0 \right\}.$$

Demuestra que E es un subespacio vectorial. Encuentra una base de E e indica cual es su dimensión.

64. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial E y $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ donde:

$$v_1 = 2u_1 - u_2 + u_3, \quad v_2 = u_1 + u_3 \quad \text{y} \quad v_3 = 3u_1 - u_2 + 3u_3.$$

- Prueba que C es base de E .
 - Calcula la matriz de cambio de base de B a C .
 - Halla las coordenadas respecto de B del vector $e = -2v_1 + 3v_2 + v_3$.
65. Demuestra que el siguiente conjunto de matrices:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

es una base del espacio vectorial $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Calcula la matriz de cambio de base de la base estándar de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ a la base B . Da las coordenadas de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en la base B .

66. Sean los vectores de $\mathbb{R}^3$: $\{(x, 1, 1), (0, -2, 1), (3, -1, 2)\}$. Determina para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ dichos vectores constituyen una base.
67. Determina los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que la familia:

$$\{(3, 2, a), (4, a, 3), (1, 2, 0)\},$$

sea una base de $\mathbb{R}^3$. Para $a = 0$, da las coordenadas del vector $e = (-2, 4, 3)$ en la nueva base.

68. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ considera la familia de vectores:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ estos vectores forman base? Para $\lambda = 1$, da las coordenadas de $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ en la nueva base.

69. Analiza para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ los siguientes vectores de $\mathbb{C}^3$ (como $\mathbb{C}$ -espacio vectorial) son base:

$$\{e_1 = (0, i, 1), e_2 = (1, 0, -3 + 2i), e_3 = (1, i, z)\}.$$

70. Sean los subconjuntos de $\mathbb{R}^4$:

$$E_1 = \langle (1, 2, -3, 0), (2, 1, 1, 3), (5, 4, -1, 6) \rangle,$$

$$E_2 = \{(x, y, z, t) \mid x - 2y - z = 0, t = 0\}.$$

- Calcula bases de E_1 y E_2 e indica cuales son sus dimensiones.
- Encuentra bases y las dimensiones de $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$.
- Obtén un suplementario de E_2 .

71. Se consideran los siguientes subespacios de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- Halla las dimensiones de E_1 , E_2 , $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$.
- Halla las dimensiones de los espacios $E_1 \times E_2$ y $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2)$.
- Estudia si $E_1 + E_2 = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ¿Es directa la suma de E_1 y E_2 ? Razona la respuesta.

72. Considera los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$:

$$E_1 = \langle 1 - x^2, 2 - x + 2x^2, 3 - 2x + 3x^2 \rangle,$$

$$E_2 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid 2a + b - c + 4d = 0\}.$$

- Calcula bases y dimensiones de E_1 , E_2 , $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$.
- ¿Se cumple $\mathbb{R}_3[x] = E_1 \oplus E_2$?

73. Sean E y F dos k -espacios vectoriales, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E y $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ una familia de vectores cualesquiera de F . Se define $\varphi : E \rightarrow F$ del siguiente modo:

$$\text{si } e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \in E \quad \text{entonces} \quad \varphi(e) = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \dots + \lambda_n e'_n \in F.$$

Demuestra que φ es lineal y que es la única que cumple $\varphi(e_i) = e'_i$, $i = 1, \dots, n$.

74. Halla las ecuaciones de la aplicación lineal $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\psi(1, 2) = (1, 1, 0)$ y $\psi(0, 1) = (1, 0, 1)$.

75. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación definida por:

$$\varphi(x, y, z) = (y - z, -x + 4z, 2x + y, x + y - z).$$

Prueba que es una aplicación lineal. Halla el núcleo y la imagen, dando una base de cada subespacio. ¿Es φ inyectiva o epiyectiva?

76. Se define la aplicación $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ mediante $\varphi(p(x)) = p'(x)x - p(x)$.

- Como aplicación, ¿está φ bien definida? Comprueba que φ es un endomorfismo.
- Calcula bases de $\ker(\varphi)$ y de $\text{Im}(\varphi)$.
- Estudia el núcleo de $\ker(\varphi^2)$ y analiza con ello si φ^2 es un automorfismo.

1.5. Aplicaciones lineales: representación matricial.

77. Calcula la matriz de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $f(x, y, z) = (x, y, z - x, y)$ en las bases canónicas de cada espacio.

78. Calcula la matriz asociada a la aplicación lineal:

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + 3y - 2z, y - z)$$

en las bases $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{(1, -1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

79. Sean V y W dos espacios vectoriales, con $\dim V = 3$, $\dim W = 4$. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ bases de V y W respectivamente. Se define $f : V \rightarrow W$ por:

$$f(v_1) = 2w_1 - w_2 + w_3 + w_4, \quad f(v_2) = w_2 - 2w_3 + w_4, \quad f(v_3) = 4w_1 - w_2 + 3w_4.$$

Hallar las ecuaciones de f , su matriz, y determinar su núcleo e imagen.

80. Para cada número real θ , sea $\tau_\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por la fórmula:

$$\tau_\theta(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z).$$

- a) Pruébese que τ_θ es un automorfismo del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y hállese su matriz en la base usual del espacio.
 b) Interpretese geoméricamente la aplicación τ_θ y calcúlense sus subespacios invariantes.

81. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor que 3. Se define la aplicación $T: E \rightarrow E$ por:

$$T(p(x)) = p(0) + p'(0)(x-1) + p''(0)(x-1)^2$$

- a) Demuestra que T es lineal y calcula su matriz respecto de la base $\{1, x, x^2\}$.
 b) ¿Es T un isomorfismo? Razona la respuesta.
82. Considérese la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (2x + y, -z, 0)$. Calcular su matriz y a partir de ella:
 a) Determinar $\ker f$ y hallar una base de dicho subespacio.
 b) Hallar $\operatorname{Im} f$ y el rango de f .
 c) ¿Pertenece $(6, -2, 0)$ al $\ker f$?
83. En $\operatorname{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, sea el subespacio vectorial:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a + b + c = 0 \right\}.$$

Calcula una base de E y respecto de la misma, obtén la matriz del endomorfismo $T: E \rightarrow E$ definido por:

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a - 2b \\ 2b - 3c & 3c - a \end{pmatrix}.$$

Halla también bases de $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

84. Halla la matriz de una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por las siguientes condiciones:

- a) $f(1, 0, 0)$ es proporcional a $(0, 0, 1)$.
 b) $f^2 = f$.
 c) $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.
 ¿Es f única?

85. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Halla la matriz de T en la base $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, siendo:

$$e_1 = e'_1, \quad e_2 = \frac{1}{2}e'_2, \quad e_3 = e'_3 + e'_1 - \frac{1}{2}e'_3.$$

86. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \operatorname{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ la aplicación lineal $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - z & z - x \\ x + 2y - z & 2x + y \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) Calcula la matriz de T en las bases usuales.
 b) Sean las bases $C = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (-1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $C' = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ de $\operatorname{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Calcula la matriz de T en estas bases.
 c) Halla una base de $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$, precisando sus dimensiones.

87. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y, z - y).$$

- a) Calcular la matriz de T , y decir de ella $\ker T$, $\operatorname{Im} T$, $\ker T^2$, $\operatorname{Im} T^2$.
 b) Hallar bases de dichos subespacios vectoriales.
 c) ¿Se cumple $\mathbb{R}^3 = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$?

88. Sea $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la aplicación dada por:

$$f(z_1, z_2, z_3) = ((1 + i)z_1 - z_2 + 2iz_3, 3z_1 + iz_2).$$

- a) Demuestra que f es lineal.
 b) Da la matriz de f asociada a alguna pareja de bases.
 c) Calcula el núcleo de f dando una base e indica su dimensión.
 d) Calcula la imagen de f .

89. Como $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales, sea la aplicación lineal $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ donde

$$f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 + iz_2 & -\frac{3}{2}iz_1 \\ (1-i)z_2 & (2+i)z_1 - 3z_2 \end{pmatrix}.$$

Calcula la matriz de f en alguna base de cada espacio.

90. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(p(x)) = (p(-1), p(\frac{1}{2}), p(3)).$$

Demuestra que f es un isomorfismo. Calcula su matriz asociada en alguna base. Calcula también la inversa de f . ¿Qué significado geométrico tiene esta aplicación?

91. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prueba que $B' = \{e_3, f(e_3), f^2(e_3)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y calcula la matriz asociada a f respecto de esta base.

92. Sea E un espacio vectorial de dimensión 3 y $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del mismo. Un endomorfismo T de E verifica que:

$$T(e_1) = e_1 + e_2, \quad T(e_3) = e_3 \quad \text{y} \quad \ker T = \langle e_1 + e_2 \rangle.$$

Encuentra la matriz de T y describe $\text{Im } T$, $\ker T^2$ y $\ker T^3$.

93. Calcular la matriz de la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ y cuyo núcleo está generado por los vectores $(0, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 3)$.

94. Sea E un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 4 y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base del mismo. Dado el endomorfismo T de E definido por:

$$T(e_1) = e_1 - e_2, \quad T(e_2) = e_2 - e_3 + e_4, \quad T(e_3) = e_1 - e_3 + e_4, \quad e_1 + e_4 \in \ker T.$$

Calcular la matriz de T , y deducir bases de $\ker T$ e $\text{Im } T$. ¿Se verifica que $E = \ker T \oplus \text{Im } T$?

95. Dado el endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2\lambda & \lambda \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, demuestra que para cualquier valor de λ la dimensión del subespacio imagen es 2. Halla el núcleo y la imagen para $\lambda = -2$.

96. Considera el endomorfismo T de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$T(x, y, z) = ((m-2)x + 2y - z, 2x + my + 2z, 2mx + 2(m-1)y + (m+1)z).$$

Encuentra los valores de m para los cuales la dimensión del núcleo es distinta de cero. Para dichos valores de m , estudia T .

97. Sea E un espacio vectorial de dimensión 2 y T un endomorfismo no nulo de E y nilpotente (es decir, $T^n \equiv 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$). Prueba que existe una base de E en la que la matriz de T es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Aplica lo anterior al endomorfismo T de $\mathbb{C}$ definido por $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

98. Sean las aplicaciones lineales $\varphi_1 : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $\varphi_2 : \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ dadas por:

$$\varphi_1(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(-1) + p(1) & p'(1) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - b + c + d, a + c + d, a, 2b - c - d).$$

Considera las bases $B_{st} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$, $C = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $B_c = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

- Calcula la matriz de φ_1 asociada a las bases B_{st} y C .
- Calcula la matriz de φ_2 asociada a las bases C y B_c .
- Calcula la matriz de $\varphi_2 \circ \varphi_1$ asociada a las bases B_{st} y B_c .

d) ¿Están $\text{Im}(\varphi_1)$ y $\text{Ker}(\varphi_2)$ en suma directa?

99. Considera la aplicación:

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

$$p(x) \mapsto p(-1) + p(1)(x-1) + p(0)(x-1)^2$$

- a) Demuestra que f es lineal.
- b) Da la matriz de f asociada a la base estándar $\{1, x, x^2\}$.
- c) Da la matriz de f asociada a la base $B' = \{-1, (x-1), (x-1)^2\}$.
- d) Da las coordenadas en la base B' del vector $f((2, 1, 1)_{B'})$.



PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA
Grado en Ingeniería Informática. Curso 2011/12

Hoja 2

ÍNDICE

2. Geometría afín	13
2.1. Espacio dual y bases duales	13
2.2. Incidente de un subespacio, aplicación transpuesta	14
2.3. Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio vectorial	16
2.4. Subvariedades afines de un espacio vectorial	17
2.5. Posiciones relativas: corte y paralelismo	18
2.6. Construcción de variedades lineales	19

2. GEOMETRÍA AFÍN

2.1. Espacio dual y bases duales.

131. Sea $\text{Mat}_{n \times n}(k)$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en k . Para cada $A \in \text{Mat}_{n \times n}(k)$ se definen las aplicaciones:

$$D_A, I_A : \text{Mat}_{n \times n}(k) \rightarrow k$$

mediante $D_A(B) = \text{traza}(BA)$, $I_A(B) = \text{traza}(AB)$. Prueba que son formas lineales.

132. Demuestra que toda forma lineal no nula es epiyectiva e indica la dimensión de su núcleo. Prueba que todo hiperplano es el núcleo de una forma lineal no nula. Concluye que si dos formas lineales tienen el mismo núcleo, entonces son proporcionales.

133. Sean las formas lineales de $\mathbb{R}^3$:

$$\omega_1(x, y, z) = x + 2y + 3z, \quad \omega_2(x, y, z) = x + 6y + 8z \quad \text{y} \quad \omega_3(x, y, z) = x + 10y + 14z.$$

Demuestra que $\{\omega_i\}_{i=1}^3$ forma una base de $(\mathbb{R}^3)^*$. Calcula las coordenadas de $\theta(x, y, z) = 3x + 4y + 10z$ en dicha base.

134. Comprueba que $\{e_1 = (0, 1, 1, -1), e_2 = (1, 0, 0, 2), e_3 = (2, -1, 0, 1), e_4 = (1, 1, 1, 0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ y calcula su base dual.

135. Calcula la base dual de $\{(i, 1 + i), (2, 1 - i)\}$ y las coordenadas de $\omega(z_1, z_2) = -z_1 + (1 + i)z_2$.

136. En $\mathbb{R}_2[x]$ considera la base estándar $B = \{1, x, x^2\}$ y su base dual B^* en el espacio correspondiente. Sea $C = \{1 - x, 2x - x^2, 1 + 3x^2\}$ otra base de $\mathbb{R}_2[x]$ y la forma lineal ω dada por $\omega(p(x)) = p(1) - p'(2)$.

a) Expresa la base dual de C , $C^* = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, en coordenadas de la base B^* .

b) Calcula las coordenadas de ω en las bases B^* y C^* . ¿Qué relación hay entre dichas coordenadas?

137. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial real de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Prueba que para toda forma lineal $\omega \in \mathbb{R}_3[x]^*$ existe un único polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ de manera que:

$$\omega(q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx \quad \forall q(x) \in \mathbb{R}_3[x].$$

¿Es cierto el resultado para el espacio vectorial real de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n ?

138. Considera la base del espacio $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Encuentra su base dual en $(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}))^*$.

139. Demuestra que $\{(1, 2, 3), (2, 1, 1), (0, 4, 3)\}$ es base de $(\mathbb{Z}_5)^3$ y calcula su base dual. Da las coordenadas en dicha base de la forma $\theta(a, b, c) = 4a + 2b + c$.

140. Sea $\{e_{ij}\}$ la base de $\text{Mat}_{n \times n}(k)$ formada por las matrices cuyos términos son todos nulos excepto el que ocupa el lugar (i, j) , que vale 1. Denota por $\{\omega_{ij}\}$ su base dual. Halla las coordenadas de D_A e I_A en la base $\{\omega_{ij}\}$ (ver ej. 131) y deduce que la traza de AB coincide con la de BA .

141. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ sea $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la base dual de la base $\{1, x, x^2\}$. Se definen las aplicaciones $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3 : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ por las fórmulas:

$$\bar{\omega}_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx, \quad \bar{\omega}_2(p(x)) = \int_0^1 xp(x)dx, \quad \bar{\omega}_3(p(x)) = \int_0^1 x^2p(x)dx.$$

Prueba que $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]^*$. Halla las coordenadas de dichos elementos respecto de la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Determina en $\mathbb{R}_2[x]$ una base para la cual $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ sea su base dual.

2.2. Incidente de un subespacio, aplicación transpuesta.

142. Sean E_1 y E_2 subespacios de E . Prueba las siguientes propiedades de los espacios incidentes:

- a) $E_1^{\circ\circ} = E_1$.
- b) $(E_1 + E_2)^\circ = E_1^\circ \cap E_2^\circ$.
- c) $(E_1 \cap E_2)^\circ = E_1^\circ + E_2^\circ$.

143. Considera los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} E_1 &= \langle (1, -1, 2, 1) \rangle, \\ E_2 &= \langle (1, -1, 2, 1), (2, 0, -1, -1) \rangle \quad \text{y} \\ E_3 &= \langle (1, -1, 2, 1), (2, 0, -1, -1), (3, 3, 1, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Obtén una base de cada uno de los incidentes. Analiza si la forma $\omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4$, pertenece a alguno de esos incidentes.

144. En un espacio vectorial de dimensión 5, sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ una base y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ su base dual. Sea F el subespacio generado por los vectores:

$$u_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad u_2 = e_2 - e_4, \quad u_3 = e_3 + 2e_4 - e_5.$$

Halla la dimensión de F y calcula una base de su espacio incidente.

145. Sea E el subespacio de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ generado por $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Considera las formas lineales θ_1 y θ_2 dadas por:

$$\theta_1 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}a + 3b + \frac{1}{2}c - d \quad \text{y} \quad \theta_2 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = a - 2b - c + d.$$

- a) Calcula una base del incidente de E e indica su dimensión.
- b) Estudia si θ_1 o θ_2 pertenecen a $\overset{\circ}{E}$.

146. Considera $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$ -espacio vectorial y sea $E = \langle (1 + i, 0, 1), (1, 2i, 1) \rangle$. Calcula el incidente de E . Estudia si alguna de las siguientes formas pertenece a E° :

$$w(z_1, z_2, z_3) = z_1 + iz_2 \quad \text{y} \quad \theta(z_1, z_2, z_3) = 2iz_1 + iz_2 + (2 - 2i)z_3.$$

147. En $\text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, sea E el subespacio vectorial definido por:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ a + b + c & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Calcula su incidente dando una base.

148. Considera los subespacios de $(\mathbb{Z}_3)^4$ dados por $E_1 = \langle (1, 1, 2, 1) \rangle$ y $E_2 = \langle (0, 0, 2, 2), (1, 2, 0, 1) \rangle$. Encuentra una base de cada subespacio incidente y analiza si la forma lineal $\theta(a, b, c, d) = b + 2c + d$ pertenece a algunos de estos incidentes.

149. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 con indeterminada x y coeficientes reales. Considera los subespacios:

$$E_1 = \langle 3 + x - x^2, 1 + 2x \rangle \quad y$$

$$E_2 = \{p(x) \mid p(-2) + p'(\frac{1}{2}) = 0, \quad p(0) + 2p'(-2) - p''(1) = 0\}.$$

Calcula una base de los siguientes subespacios del dual: E_1° , E_2° y $(E_1 \cap E_2)^\circ$. Analiza si la siguiente forma lineal pertenece a alguno de estos incidentes: $\theta(a + bx + cx^2) = 3a + \frac{1}{5}b - c$.

150. Sea E_1 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (2, 5, 4, 0)$ y sea E_2 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $u_1 = (0, 5, 5, 0)$, $u_2 = (5, 5, 7, 0)$, $u_3 = (-10, 1, 5, 1)$. Halla el subespacio incidente de $E_1 \cap E_2$.

151. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Sea la aplicación lineal $T: E^* \rightarrow E$ definida por:

$$T(\omega_1) = e_1 - e_2, \quad T(\omega_2) = 2e_1 + e_2 + e_3, \quad T(\omega_3) = 3e_2 + e_3.$$

Calcula bases de $\ker T$, $\text{Im } T$, $(\ker T)^\circ$ y $(\text{Im } T)^\circ$.

152. Sea $\omega \in E^*$ una forma lineal no nula y $e \in E$ un vector no nulo incidente con ω . Se define $T: E \rightarrow E$ por $T(x) = x + \omega(x)e$.

- Prueba que T es un automorfismo y calcula T^{-1} .
- Prueba que existe una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E de manera que en dicha base T se expresa:

$$T(e_1) = e_1 + e_n, \quad T(e_2) = e_2, \dots, \quad T(e_n) = e_n.$$

153. Sea E un espacio vectorial real de dimensión 4 y B una base. Sea E_1 el espacio generado por los vectores $(1, 0, 1, 0)_B$ y $(2, -3, 4, 0)_B$ y $T: E \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal dada por:

$$T((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)_B) = -3\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_3 + 2\lambda_4.$$

- Calcula una base del incidente de E_1 .
- Estudia si $T \in E_1^\circ$.
- Calcula $\ker(T) \cap E_1$.
- Da las coordenadas de T en la base dual a B .

154. Sea f un automorfismo de un k -espacio vectorial E . Prueba que f induce un automorfismo en el dual. Estudia sus propiedades.

155. Sea la aplicación lineal:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$(a, b, c) \mapsto \begin{pmatrix} a - c & 2a + b + c \\ b + 3c & a - 2b - 7c \end{pmatrix}$$

- Obtén la matriz de la aplicación traspuesta, f^t , indicando las bases que utilizas.
- Calcula el núcleo y la imagen de f^t dando una base de cada espacio.
- Sea $\omega: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la forma lineal definida por $\omega(A) = \text{traza}(A)$. Calcula la expresión de $f^t(\omega)$. Calcula también el valor de $f^t(\omega)(2, 2, -1)$.

156. Sea $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación lineal dada por:

$$\phi(a, b, c) = (a + b + c) + (2a - c)x + (b + 2c)x^2.$$

Denota por B la base canónica de $\mathbb{R}^3$, por C la base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$ y por B^* y C^* sus respectivas bases duales en los espacios correspondientes. Denota por θ la forma lineal sobre $\mathbb{R}_2[x]$ que actúa del siguiente modo:

$$\theta(p(x)) = p(1) + p'(-1).$$

- Calcula la matriz de ϕ asociada a las bases B y C .
- Calcula la matriz de ϕ^t asociada a las bases C^* y B^* .
- Obtén las coordenadas de θ en la base C^* .
- Encuentra las coordenadas de $\phi^t(\theta)$ en la base B^* y su expresión como aplicación entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}$.

157. Sean E y F dos espacios vectoriales reales tales que $\dim E = 3$ y $\dim F = 2$. Considera las bases $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de E y $C = \{u_1, u_2\}$ de F . Se define la aplicación $\varphi: E \rightarrow F$ dada por:

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)u_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)u_2.$$

Se definen las bases B' de E y C' de F mediante las expresiones $B' = \{v_1 + v_3, v_1 + v_2, v_2 + v_3\}$ y $C' = \{u_1 + u_2, u_1 - u_2\}$. Se pide:

- Calcula la matriz de φ^t asociada a las bases duales C^* de F^* y B^* de E^* respectivamente.
 - Calcula la matriz de φ^t asociada a las bases duales $(C')^*$ de F^* y $(B')^*$ de E^* respectivamente.
158. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales.
- Demuestra que los polinomios $1 + x^2$, $x + x^2$, $1 + x + x^2$ forman una base de E .
 - Sea $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ la base dual de la base anterior y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la base dual de $\{1, x, x^2\}$. Calcula las coordenadas de $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ en la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.
 - Considera la aplicación derivada $D: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dada por $D(p(x)) = p'(x)$. Calcula las coordenadas de $D^t(\omega_1)$ en la base $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ donde D^t es la aplicación traspuesta de D .
159. Considera en $\mathbb{R}^3$ las bases canónica B_c y $C = \{(1, 0, 1), (3, 1, 3), (2, 1, 1)\}$. Sean en $(\mathbb{R}^3)^*$ sus bases duales B_c^* y C^* . Utiliza la traspuesta de la aplicación identidad para obtener la matriz de cambio de base de B_c^* a C^* y úsala para dar las coordenadas de $\theta(x, y, z) = 3x - 2y - z$ en la base C^* .
160. En $\mathbb{R}_2[x]$ sean:

$$B = \{p_1(x) = 1, p_2(x) = x + 1, p_3(x) = (x + 1)^2\} \text{ y}$$

$$B' = \{q_1(x) = 2, q_2(x) = x + 2, q_3(x) = (x + 2)^2\}$$

dos bases. Sean $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ y $\{\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3\}$ sus respectivas bases duales.

- Da la fórmula de cambio de base de B a B' .
- Indica la expresión de $\{\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3\}$ en términos de la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.
- Si $D: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ es el operador lineal derivada (es decir, $D(p(x)) = p'(x)$), calcula en la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la aplicación lineal inducida en el espacio dual $D^t: \mathbb{R}_2[x]^* \rightarrow \mathbb{R}_2[x]^*$.

2.3. Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio vectorial.

161. Calcula las ecuaciones implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por los vectores $(1, 0, 1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0, 1, 1)$.
162. Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$E_1 = \langle (-2, 1, 0, 1), (3, 3, 0, 2), (1, -2, 1, -2) \rangle,$$

$$E_2 = \langle (1, 2, 3, 4), (-1, 0, 1, 3), (0, 1, -1, 2), (1, 2, -1, 4) \rangle,$$

$$E_3 = \langle (1, 2, 3, 0), (1, 0, 1, 0), (0, -1, 2, 0), (-1, 1, 3, 0) \rangle,$$

$$E_4 = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle.$$

¿Pertenece $e = (1, 1, 2, 0)$ a alguno de estos subespacios?

163. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ considera la base estándar $\{(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})\}$. En estas coordenadas, halla las ecuaciones implícitas del subespacio $\langle (\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}) \rangle$. ¿Pertenece $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{smallmatrix})$ a dicho subespacio?
164. Encuentra las ecuaciones paramétricas e implícitas de los siguientes subespacios de $\mathbb{C}^3$:

$$E = \langle (1 + i, -2, i) \rangle \text{ y } F = \langle (3 - i, -1, 0), (i, 0, 1 - 2i) \rangle.$$

165. Calcula las ecuaciones implícitas de $E = \langle 1 + x, 2x - x^3 \rangle \subset \mathbb{R}_3[x]$ en coordenadas de la base estándar $\{1, x, x^2, x^3\}$.
166. Sean $E = \langle (1, -1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, -2, 1, 2) \rangle$ y $E' = \langle (0, -1, 1, 1), (1, -2, 1, 2) \rangle$ subespacios de $\mathbb{R}^4$.
- Calcula $\dim(E \cap E')$.
 - Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de $E \cap E'$.
167. Considera en $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ los subespacios $E = \langle (\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}) \rangle$ y $E' = \langle (\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}) \rangle$. Calcula:
- Dimensión y ecuaciones de $E + E'$.
 - Dimensión y ecuaciones de $E \cap E'$.

168. Sea E el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^5$ determinado por las ecuaciones $2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0$, $4x_1 + 2x_2 + x_5 = 0$ y $3x_2 - x_4 + 2x_5 = 0$. Determina las ecuaciones paramétricas de E y calcula un suplementario.

169. Calcula las ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^3$:

$$E = \langle (3, 1, 2) \rangle \quad \text{y} \quad E' = \langle (2, 0, 3), (1, 1, 4) \rangle.$$

170. Halla las ecuaciones paramétricas del subespacio $E = \{a + bx + cx^2 \mid 2a - b + c = 0\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Encuentra una base de E y calcula respecto de ella las coordenadas del vector $1 + 3x + x^2$.

171. Encuentra las ecuaciones paramétricas del subespacio de $\mathbb{C}^2$ determinado por la ecuación $(1-i)z_1 - iz_2 = 0$.

172. Considera en $\mathbb{R}^3$ la base canónica B_c y la base $B' = \{(1, 1, -1), (2, 0, 1), (0, -1, 1)\}$. Sea E el espacio generado por el vector $(3, 1, 1)_{B_c}$. Calcula las ecuaciones implícitas de E en coordenadas de B_c y también de B' .

173. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sea el subespacio:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+2b \\ -b+3c & 2a-c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Calcula las ecuaciones implícitas de V en coordenadas de la base estándar y también en coordenadas de la base $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. ¿Pertenece el vector $(5, 1 - 4, 3)_C$ a V ?

2.4. Subvariedades afines de un espacio vectorial.

174. Sean $H_1 = P_1 + E_1$ y $H_2 = P_2 + E_2$ dos subvariedades afines de un espacio vectorial. Demuestra que:

- H_1 y H_2 se cortan si y solo si $P_1 - P_2 \in E_1 + E_2$.
- Si $Q \in H_1 \cap H_2$ entonces $H_1 \cap H_2 = Q + E_1 \cap E_2$.

175. Determina si los puntos $e_1 = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ y $e_2 = (2, 1, 1)$ pertenecen a las siguientes subvariedades de $\mathbb{R}^3$:

$$r = (2, 0, 1) + \langle (1, 1, 2) \rangle \quad \text{y} \quad \pi = (-1, 1, 2) + \langle (3, 0, -1), (1, -2, 2) \rangle.$$

176. Estudia si $P_1 = (-1, -6i, -3 + 3i)$, $P_2 = (-1 + 5i, 1, -2i)$ y $P_3 = (3, 2i, 2 + i)$ pertenecen a alguna de las siguientes variedades lineales de $\mathbb{C}^3$:

$$L_1 = (i, 1 - i, 2) + \langle (1, 1, 2i), (3, -i, 0) \rangle \quad \text{y} \\ L_2 = (1 + i, -3, 2i) + \langle (1, 3i, 1 - i) \rangle.$$

177. Sea $H = e_0 + E$ una subvariedad afín de un espacio afín cualquiera. Demuestra que el espacio director de H , es decir E , coincide con el conjunto $\{\overrightarrow{e_0 e} = e - e_0 \mid e \in H\}$.

178. Determina si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial correspondiente son subvariedades afines:

- En k^4 , $L_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in k^4 \mid x_2 = x_4 = 1, \quad x_1 + x_3 = -1\}$.
- En k^n , $L_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$.
- En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $L_3 = \{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A + 2A^t = \text{Id}_2\}$.
- En $\text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $L_4 = \{A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \mid a_{11}a_{22} = 0, \quad a_{13}a_{23} = 1\}$.
- En $\mathbb{R}_2[x]$, $L_5 = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(x) \cdot (1 + x - x^2) = 2 - 4x + 16x^3\}$.
- En $\mathbb{R}_2[x]$, $L_6 = \{p(x) \mid \text{grado de } p(x) \text{ es exactamente } 1\}$.
- En $\mathbb{R}_n[x]$, $L_7 = \{p(x) \mid \text{coeficiente de } p(x) \text{ de grado } n \text{ es } 1\}$.
- En $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $L_8 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(2) = -3\}$.
- En $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $L_9 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = \sin x + ax, \text{ donde } a \in \mathbb{R}\}$.

179. En $(\mathbb{Z}_3)^2$, ¿cuántos puntos hay? ¿cuántas rectas hay? ¿cuántos puntos tiene cada recta?

180. Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $(2, 1, -2)$ y tiene como espacio director $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$.

181. En $\mathbb{R}^3$, si $P = (4, -1, 1)$, $E_1 = \langle (2, -3, 1), (1, 4, 0) \rangle$ y $E_2 = \langle (1, -1, 1), (2, 2, -1) \rangle$, encuentra las ecuaciones implícitas de las subvariedades lineales $P + E_1$, $P + E_2$ y $P + (E_1 \cap E_2)$.

182. Determina las ecuaciones implícitas de la variedad lineal de $\mathbb{R}^4$ que pasa por los puntos $P_1 = (1, 1, 0, -2)$, $P_2 = (2, 0, 0, 3)$, $P_3 = (0, -1, 1, 1)$. ¿Cuál es su dimensión?

183. En $\mathbb{C}^3$, determina las ecuaciones implícitas de las variedades lineales:

$$L_1 = (i, 1 - i, 2) + \langle (1, 1, 2i), (3, -i, 0) \rangle \quad \text{y} \\ L_2 = (1 + i, -3, 2i) + \langle (1, 3i, 1 - i) \rangle.$$

¿Pertenecen $P_1 = (-1, -6i, -3 + 3i)$, $P_2 = (-1 + 5i, 1, -2i)$ y $P_3 = (3, 2i, 2 + i)$ a L_1 o L_2 ?

184. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, considera los subespacios:

$$E_1 = \{A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} = a_{22}, a_{21} = 0\} \quad \text{y}$$

$$E_2 = \left\{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0\right\}.$$

Determina las ecuaciones implícitas (en las coordenadas usuales) de las variedades lineales que pasan por $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con espacio director E_1 y E_2 respectivamente.

185. En $\mathbb{R}_3[x]$ sea $p(x) = 1 + x - x^3$ y el subespacio $E = \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(-1) = q'(-1) = 0\}$. Determina las ecuaciones implícitas (en las coordenadas usuales) de la variedad $L = p(x) + E$ e indica su dimensión. Analiza si los polinomios $r_1(x) = 3 + 2x + 3x^2$ y $r_2(x) = 4 + 3x - x^2 - x^3$ pertenecen a L .

186. En el espacio $(\mathbb{Z}_5)^3$, calcula las ecuaciones implícitas de las variedades lineales $H = (1, 1, 1) + \langle (4, 1, 2) \rangle$ y $L = (0, 3, 2) + \langle (1, 3, 3), (2, 4, 1) \rangle$. Además, determina si los puntos $P = (2, 0, 4)$ y $Q = (3, 1, 1)$ pertenecen a H o L .

187. Halla las ecuaciones de la subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que pasa por el punto $(1, 0, 0, 0)$ y cuyo subespacio director es el núcleo del endomorfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

188. Determina las ecuaciones paramétricas de la variedad lineal $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 1, \quad x - y + 3z = -2\}$.

2.5. Posiciones relativas: corte y paralelismo.

189. Halla la posición relativa de las siguientes parejas de planos de $\mathbb{R}^3$:

a) $\pi_1 \equiv x + y - 2z = -1$ y $\pi_2 \equiv -2x - 2y + 4z = 5$.

b) $\pi_3 \equiv x - 2y = 4$ y $\pi_4 \equiv 2x + y + z = -4$.

c) $\pi_5 \equiv -x + y - z = 2$ y $\pi_6 \equiv 2x - 2y + 2z = -4$.

190. Halla la posición relativa de la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 1 \\ 2x + z = -2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv -x + y + 2z = -1$.

191. Sean las siguientes subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$:

$$r \equiv (1, 0, -1, 2) + \langle (2, 3, 1, -1) \rangle,$$

$$L \equiv (0, -2, -1, 4) + \langle (0, 2, 0, 1), (1, -1, 1, 0) \rangle \quad \text{y}$$

$$\pi \equiv (1, 0, 2, 1) + \langle (1, 5, 4, 0), (1, 1, 1, 1), (3, 0, -1, 1) \rangle.$$

Determina las posiciones relativas de r y L , L y π , r y π .

192. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sean las subvariedades:

$$r \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad \pi \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Calcula sus ecuaciones implícitas y su posición relativa.

193. En $\mathbb{R}_3[x]$, determina la posición relativa de:

$$H_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = p(-1) + 2, \quad p'(-2) = 0\} \quad \text{y}$$

$$H_2 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid 3a + 2b - 4c = -3\}.$$

194. Calcula la posición relativa de las rectas de $(\mathbb{Z}_5)^3$ dadas por las ecuaciones:

$$r \equiv 3x + 2y = 3 \quad \text{y} \quad s \equiv x + 2y = 4.$$

195. Estudia la posición relativa de las siguientes variedades de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

196. Determina la posición relativa en $(\mathbb{Z}_5)^4$ de la recta y el plano dados por las ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x + z + t &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ y + 2z + 2t &= 1 \end{cases} \quad y \quad \Pi \equiv \begin{cases} x + z + t &= 4 \\ x + 4y + z &= 0 \end{cases}.$$

197. Discute la posición relativa de las siguientes subvariedades afines de $\mathbb{R}^3$ en función de los parámetros reales α y β :

$$H_\alpha \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ x + \frac{1}{2}y + \alpha z = -2 \end{cases} \quad y \quad L_\beta \equiv \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 7x - 7y - 3z = \beta \end{cases}.$$

198. Dada la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$, halla el valor de α para que el plano $\pi \equiv -x + \alpha y + z = 4$ sea paralelo a la recta r .

199. Dadas las subvariedades de $\mathbb{R}^3$:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv 2x + y + \alpha z = -\beta,$$

encuentra los valores de α y β para que el plano π contenga a la recta r .

200. Halla los valores de α, β para que la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = \beta \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv \alpha x + y + 2z = -1$ no tengan ningún punto en común.

201. Encuentra los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de modo que las subvariedades de $\mathbb{R}_2[x]$:

$$\pi = \left\{ p(x) \mid \int_0^1 p(x) = \alpha \right\} \quad y \quad r = 2 + x - x^2 + \langle 1 + \beta x + 3x^2 \rangle,$$

tengan cada una de las siguientes posiciones relativas:

- Se cortan en un único punto.
- r está contenida en π .
- r es paralela a π .

202. Determina las ecuaciones implícitas en $\mathbb{R}^4$ de:

$$H \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu + 3\gamma \\ y = 2 + \mu - \gamma \\ z = \lambda + \mu + 2\gamma \\ t = 1 - \lambda - \gamma \end{cases}, \quad L \equiv \begin{cases} x = 2\gamma \\ y = 1 + 2\lambda - \mu + \gamma \\ z = -\lambda + \mu \\ t = 1 + \lambda - 2\mu + \gamma \end{cases} \quad y \quad r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 2 + \lambda \end{cases}.$$

Estudia todas sus posiciones relativas dando en los casos posibles la intersección que definan.

2.6. Construcción de variedades lineales.

203. Encuentra las ecuaciones paramétricas e implícitas de la intersección de las siguientes variedades lineales de $\mathbb{R}^3$:

$$a) \quad r_1 \equiv \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3y + z = 2 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = -1 \end{cases}.$$

$$b) \quad r_1 \quad y \quad r_3 \equiv \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}.$$

$$c) \quad r_2 \quad y \quad \pi \equiv y - z = 5.$$

204. Calcula la intersección de las siguientes subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$:

$$a) \quad L_1 = (3, 2, \frac{5}{2}, 3) + \langle (1, 1, -2, 2), (2, 0, 0, 3) \rangle \quad y \quad L_2 = (1, 4, 3, -1) + \langle (2, 2, 1, 0), (1, 3, 0, -1), (0, 0, 1, 0) \rangle.$$

$$b) \quad L_2 \text{ del apartado anterior y } L_3 = (0, 3, \frac{1}{2}, -1) + \langle (1, 9, -\frac{5}{2}, -4) \rangle.$$

205. Determina las ecuaciones paramétricas de la intersección de los planos de $\mathbb{C}^3$:

$$\pi_1 \equiv z_1 - 2iz_2 + (1 - i)z_3 = 2 \quad y \quad \pi_2 \equiv 2z_1 - (1 + 2i)z_2 + z_3 = 3 + i.$$

206. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ considera las subvariedades:

$$L_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 2\mu \\ -2\lambda + \mu & \lambda - \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \\ L_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda - \mu \\ \lambda + 3\mu & 2\lambda + \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

- a) Da las ecuaciones implícitas de cada una de ellas e indica su dimensión.
 b) Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de $L_1 \cap L_2$. ¿Qué dimensión tiene $L_1 \cap L_2$?
 c) Estudia si los puntos $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pertenecen a L_1 , L_2 , o $L_1 \cap L_2$.

207. En $\mathbb{R}_3[x]$ considera las variedades lineales:

$$H = \{p(x) \mid p(1) = 0, p'(0) = -1\} \quad \text{y} \quad L = x^3 + \langle 1, x, x^2 \rangle.$$

Determina las ecuaciones implícitas de H , L y $H \cap L$. Indica la dimensión de cada uno de ellos.

208. En un espacio vectorial E , sean dos variedades lineales $L_1 = P_1 + E_1$ y $L_2 = P_2 + E_2$. Demuestra que la mínima subvariedad que las contiene es $H = P_1 + (E_1 + E_2 + \langle \overrightarrow{P_1 P_2} \rangle)$.

209. Da las ecuaciones de la mínima subvariedad afín de $\mathbb{R}^3$ que contiene a las rectas:

$$a) \quad r_1 \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z & = -1 \\ x + y - z & = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x - 2y & = -10 \\ y + z & = 8 \end{cases} \\ b) \quad s_1 \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z & = 3 \\ x + y - z & = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s_2 \equiv \begin{cases} x - 2y & = -2 \\ y + z & = 3 \end{cases}.$$

210. Halla la mínima subvariedad de $\mathbb{R}^4$, indicando sus dimensiones, que contiene a las subvariedades:

$$a) \quad r_1 \equiv \begin{cases} 2x - y & = 0 \\ x + z & = 0 \\ 3x - t & = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + y & = 3 \\ 2x - z & = -1 \\ t & = 0 \end{cases} \\ b) \quad \pi_1 \equiv \begin{cases} 6x - 5y + 3t & = 1 \\ -3x + 2y + 3z & = -4 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_3 \equiv (1, 3, -1, 2) + \langle (1, 2, 1, 0) \rangle. \\ c) \quad \pi_1 \text{ del apartado anterior y } \pi_2 \equiv \begin{cases} 6x - 3y + t & = -1 \\ x - y + z + t & = -1 \end{cases}.$$

211. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ considera las subvariedades:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}.$$

Obtén las ecuaciones de la mínima subvariedad que las contiene y también de la máxima subvariedad que está contenida en ambas indicando además las dimensiones. Determina si los puntos $P = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ pertenece a alguna de las subvariedades obtenidas.

212. En $\mathbb{R}_4[x]$ considera las rectas:

$$r \equiv 1 - x^2 + \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \mid a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4\}, \\ s \equiv 2x + x^3 + \langle 3 + x^2 - x^3 + x^4 \rangle.$$

Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de la mínima subvariedad afín que pasa por r y s .

213. Calcula la máxima subvariedad contenida y la mínima que contiene a:

$$L = (i, 1 + i, 1 - i) + \langle (i, i, -2) \rangle \quad \text{y} \quad L' \equiv \begin{cases} 3z_1 - (1 + i)z_2 & = 2 - 4i \\ -2iz_2 + z_3 & = 3 - 3i \end{cases}.$$

Indica sus dimensiones y si los puntos $(1 - i, 1, 3 - i)$ y $(2, 2 - i, 5 + i)$ pertenece a alguna de ellas.

214. Halla la dimensión de la mínima subvariedad afín que contiene dos planos bidimensionales que se cruzan.

215. Calcula la dimensión de la mínima subvariedad afín que pasa por los puntos:

$$(-1, 2, -1, 0, 4), \quad (0, -1, 3, 5, 1), \quad (4, -2, 0, 0, -3) \quad \text{y} \quad (3, -1, 2, 5, 2).$$

216. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x + y - z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= 1 \end{cases}$ y al punto $P = (1, -1, 2)$.

217. Halla la ecuación del plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $A = (-1, 2, 1)$ y $B = (1, 0, 2)$ y por el punto de intersección de r y π :

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - z &= 1 \\ -2x - 2y + z &= -3 \end{cases}, \quad \pi \equiv x + y - 3z = -1.$$

218. Halla la ecuación del plano de $\mathbb{R}_2[x]$ que pasa por $p(x) = 2 + x^2$ y contiene a la recta $1 - 3x + \langle 2 + x - x^2 \rangle$.

219. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (1, -2, 1)$ y es paralela a los planos:

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y - z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv x - y - 2z = -1.$$

220. Una recta está contenida en el plano $x + y + z = 4$ y pasa por el punto $(2, 1, 1)$. Halla su ecuación sabiendo que es paralela al plano $x - y + z = 0$.

221. La recta r de $\mathbb{C}^3$ está contenida en el plano $\pi_1 \equiv z_1 + (1 + i)z_2 - 3z_3 = 2i$ y es paralela al plano $\pi_2 \equiv z_1 - z_2 - 2z_3 = i$. Encuentra las ecuaciones implícitas y paramétricas de r sabiendo que $(-i, 3, 1) \in r$.

222. Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ y es paralelo a la recta $x = 3\lambda$, $y = 1 + 2\lambda$, $z = \lambda$.

223. Halla la ecuación del haz de hiperplanos que contiene al plano que pasa por los puntos $P_1 = (1, -2, -3, 1)$, $P_2 = (0, 0, 1, 5)$ y $P_3 = (3, -1, 5, 0)$.

224. Una recta pasa por el punto $(1, 1, 1)$, es coplanaria con la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ y es paralela al plano $-x + 2y + z = 0$. Calcula sus ecuaciones implícitas.

225. Dados dos planos $\pi_1 \equiv 3x + 4y + 5z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x + y + z = 2$ y los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 4, 2)$, halla la ecuación del plano que pasa por la intersección de los dos planos y por el punto medio del segmento AB .

226. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, encuentra la ecuación del hiperplano que pasa por los puntos $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

227. Encuentra la ecuación de la recta que pasando por el punto $(1, 0, 2)$ se apoya en las rectas:

$$\frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$$

228. Determina la ecuación del 2-plano de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ que contiene a la recta $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rangle$ y pasa por el punto $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

229. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta que pasa por los puntos $A = (1, 2, 1)$ y $B = (1, -3, -2)$ y además es paralelo a la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x + 2y + z &= 4 \\ 2x + 4y + z &= -1 \end{cases}$.

230. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(1, 1, 1)$ y son paralelas a los ejes coordenados.

231. Los puntos $A = (1, 1, -1)$, $B = (2, -1, 2)$, $C = (0, 2, 2)$ y $D = (-1, -2, -2)$ son vértices de un paralelepípedo. Sabiendo que los segmentos AB , AC y AD determinan tres aristas del mismo, calcula los restantes vértices.

232. En un espacio vectorial de dimensión 3 considérese una recta r y un plano π paralelo a r . Probar que el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos que tienen un vértice en r y los dos restantes sobre π es un plano paralelo a π .

233. En un espacio vectorial de dimensión 4, calcula la recta que pasa por el origen y corta a las dos rectas siguientes:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \\ t = 3 - 2\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 7\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + \lambda \\ t = -1 + 2\lambda \end{cases}.$$

234. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Sea E' el plano de los polinomios de grado menor o igual que 1. Sea $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$ la forma lineal definida por $\omega(p(x)) = \int_0^1 x \cdot p(x) dx$. Considerando la base $\{1, x, x^2\}$, calcular las ecuaciones de la recta que pasa por $1 + x^2$ y es paralela a la recta intersección del plano $\omega^{-1}(2)$ con E' .

235. Calcular el plano que contiene a la recta $s \equiv x = y = z = t + 1$ y corta a las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ z + 3t = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \frac{x-2}{2} = y = \frac{z}{-1} = t + 1.$$



PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Grado en Ingeniería Informática. Curso 2011/12

Hoja 3

ÍNDICE

3. Geometría euclídea	22
3.1. Métricas, expresión matricial	22
3.2. Ortogonalidad, normas y ángulos	23
3.3. Distancias y proyecciones	26
3.4. Problemas métricos	27

3. GEOMETRÍA EUCLÍDEA

3.1. Métricas, expresión matricial.

236. Dado un k -espacio vectorial E de dimensión 3, estudia si las siguientes expresiones, dadas en coordenadas de una base:

$$\begin{aligned} g_1((x, y, z), (x', y', z')) &= xx' + yy' + 3zz' - 2xz' - 2zx', \\ g_2((x, y, z), (x', y', z')) &= xx'(y - y') + yy'(z - z') + zz'(x - x') \quad y \\ g_3((x, y, z), (x', y', z')) &= xy' + yz' + zx', \end{aligned}$$

definen aplicaciones bilineales de $E \times E \rightarrow k$. Analiza cuáles de ellas son simétricas.

237. Sea E un k -espacio vectorial y ω_1, ω_2 dos formas lineales. Demuestra que $\varphi : E \times E \rightarrow k$ dada por $\varphi(e, e') = \omega_1(e) \cdot \omega_2(e')$ es bilineal.

238. Sea E un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión n , B una base cualquiera y $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Dados $e = (x_1, \dots, x_n)_B$ y $e' = (y_1, \dots, y_n)_B$ dos vectores arbitrarios de E , demuestra que la expresión:

$$\phi(e, e') = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

define una aplicación bilineal en E . Demuestra además que ϕ es simétrica (respec. antisimétrica) si y solamente si la matriz A es simétrica (respec. antisimétrica).

239. Demuestra que la aplicación $\varphi : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \times \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(A, B) = \text{traza}(A \cdot B^t)$ define un producto escalar euclídeo.

240. En el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial E de los polinomios reales de grado menor o igual que n se define $T_2 : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ como $T_2(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Demuestra que T_2 es bilineal, simétrica y definida positiva. Calcula la matriz de T_2 asociada a la base $\{1, x, \dots, x^n\}$.

241. Demuestra que las siguientes aplicaciones bilineales son definidas positivas:

- En $\mathbb{R}^2$, $\phi((x, y), (x', y')) = xx' + xy' + yx' + 2yy'$.
- En $\mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 2y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2 + z_1z_1$.
- En $\mathbb{R}_2[x]$, $\psi(p(x), q(x)) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$.

242. Justifica por qué las siguientes expresiones en los espacios correspondientes no determinan métricas euclídeas:

- En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\varphi_1(A, B) = \det(A \cdot B)$.

- b) En $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\varphi_2(A, B) = \text{traza}(A \cdot B)$.
 c) En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\varphi_3(A, B) = \text{traza} \left(A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B^t \right)$.
 d) En $\mathbb{R}^3$, $\varphi_4((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \max \{|x_1|, |x_2|, |x_3|, |y_1|, |y_2|, |y_3|\}$.
 e) En $\mathbb{R}_n[x]$, $\varphi_5(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 xp(x)q(x)dx$.
 f) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\varphi_6(p(x), q(x)) = p(1)q'(1) + p'(1)q(1)$.
 g) En $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$, $\varphi_7(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

243. Sea g una aplicación bilineal simétrica de un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial E de dimensión finita. Demuestra que si existe una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ tal que $g(e_i, e_i) > 0$ para $i = 1, \dots, n$ y tal que $g(e_i, e_j) = 0$ donde $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$ entonces g es definida positiva.
244. Sea E un espacio vectorial euclídeo y denota por T_2 su producto escalar. Demuestra que la restricción de T_2 a cualquier subespacio vectorial F dota a este subespacio de estructura de espacio euclídeo.
245. Sea E un espacio vectorial euclídeo y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $f(e) = \langle e, e \rangle$. Demuestra que $f(e + e') + f(e - e') = 2(f(e) + f(e'))$.
246. Determina la expresión general del producto escalar (simétrico) de $\mathbb{R}^3$ sabiendo que sobre los elementos de la base canónica actúa del siguiente modo:

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= 2, & e_1 \cdot e_2 &= -1, & e_1 \cdot e_3 &= 1, \\ e_2 \cdot e_2 &= 2, & e_2 \cdot e_3 &= 0, & e_3 \cdot e_3 &= 4. \end{aligned}$$

247. Dada una aplicación bilineal T de un espacio vectorial E , demuestra que se puede expresar como suma de una aplicación bilineal simétrica y otra antisimétrica.
248. En el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$, $a < b$, demuestra que $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ define una métrica euclídea.
249. Sea $B = \{e_1, e_2\}$ una base de un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial E y T_2 la métrica cuya matriz asociada a dicha base es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz de T_2 en la base $B' = \{e'_1 = 3e_1 + 2e_2, e'_2 = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2\}$.
250. Sea g el producto escalar euclídeo de $\mathbb{R}^3$ dado por $g((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' + yy' + 3zz' - xy' - yx' + xz' + zx'$. Da la matriz de g asociada a la base canónica y calcula su matriz asociada a la base $\overline{B} = \{(1, 2, 0), (0, 1, -3), (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Calcula el producto de $(1, 1, 0)_{\overline{B}}$ consigo mismo y con $(0, \frac{1}{2}, 1)_{\overline{B}}$.
251. Sobre el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial E de dimensión 4, sea la métrica cuya matriz asociada a la base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcula la matriz de esta métrica asociada a la base $C = \{v_1 = e_1 - e_3, v_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_3), v_3 = -e_1 + e_2 + e_3, v_4 = e_3 - e_4\}$. ¿Es la métrica definida positiva?

252. Da la matriz del producto escalar de $\mathbb{R}_n[x]$, $T_2(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)$ en la base $\{1, x - 1, (x - 1)^2, \dots, (x - 1)^n\}$.
253. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ considera el producto escalar $\langle A, B \rangle = \text{traza}(AB^t)$. Da la matriz del producto escalar en la base estándar y también en la base $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
254. En $\mathbb{R}^3$ considera la métrica T_2 cuya matriz asociada a la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula la restricción de T_2 al subespacio $\langle u = (1, 1, -1), v = (2, 0, -1) \rangle$.

3.2. Ortogonalidad, normas y ángulos.

255. Sea E un k -espacio vectorial y φ una forma bilineal simétrica. Demuestra que si los vectores $\{e_1, \dots, e_k\}$ son ortogonales dos a dos (es decir $\varphi(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$) de modo que $\varphi(e_i, e_i) \neq 0$ entonces son linealmente independientes. Además, da un ejemplo de que la implicación contraria no es cierta.
256. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, determina mediante una base los subespacios ortogonales a:
- a) $E_1 = \langle (1, 1, -1), (2, -1, 1) \rangle$.
 b) $E_2 = \{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0\}$.

c) $E_3 = \{(x, y, z) \mid x + y + 2z = x - 2y + 3z = 0\}$.

257. Expresa el vector $(1, 3, -1, 4) \in \mathbb{R}^4$ como suma de dos vectores: uno perteneciente al subespacio $E = \langle (2, 1, 0, 1), (0, 3, 1, 1) \rangle$ y otro a $E^\perp$ (considera el producto escalar usual).

258. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sea el producto escalar $T_2(A, B) = \text{traza}(AB^t)$ y E el subespacio:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 2x \\ 0 & x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Determina $E^\perp$ dando una base del mismo. ¿Pertenece $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ a $E^\perp$?

259. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar definido en la base canónica por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

determina $W^\perp$ donde $W = \langle (3, 1, -1) \rangle$.

260. En $\mathbb{R}_3[x]$ considera la métrica euclídea dada por $T_2(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Sea $E = \langle 3 - 4x, 1 + 2x - 5x^3 \rangle$. Calcula el subespacio ortogonal a E y estudia si alguno de los vectores de la base estándar $\{1, x, x^2, x^3\}$ pertenece a $E^\perp$.

261. Sea E un k -espacio vectorial y ϕ una forma bilineal simétrica. Si F y F' son subespacios vectoriales de E , demuestra las siguientes propiedades:

- Si $F \subset F'$ entonces $(F')^\perp \subset F^\perp$.
- $F \subset (F^\perp)^\perp$.
- $(F + F')^\perp = F^\perp \cap (F')^\perp$.
- $F^\perp + (F')^\perp \subset (F \cap F')^\perp$.
- Si $k = \mathbb{R}$ y ϕ es definida positiva, $F \cap F^\perp = \{0\}$.

262. Con el producto escalar usual de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ demuestra que las matrices simétricas y antisimétricas son ortogonales.

263. Sea E el plano real y $\{e_1, e_2\}$ una base del mismo. Determina la métrica simétrica para la que la base $\{e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$ sea ortonormal. ¿Es esa métrica definida positiva? Calcula también los tensores simétricos para los que el triángulo determinado por e_1 y e_2 sea equilátero.

264. En un espacio vectorial real de dimensión 2, sea una base $B = \{e_1, e_2\}$. Determina la matriz de la métrica euclídea que hace que $\|e_1\| = 2$, $\|e_1\| = 3$ y los vectores e_1 y $2e_1 + e_2$ sean ortogonales.

265. En un espacio vectorial euclídeo E tenemos una base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de la que sabemos:

- $e_1 \cdot e_1 = 1$.
- $\|e_2\| = \sqrt{5}$.
- $e_2 \cdot e_3 = 0$.
- Si $e = (-1, 0, 0)_B$, el vector $e_3 - e$ es ortogonal a e_1 .
- Si $F = \langle e_1 + e_2 \rangle$ entonces $2e_1 - e_2 - e_3 \in F^\perp$.
- $e_3 \cdot e_3 = 6$.

Calcula la matriz de la métrica asociada a la base B . Comprueba que la métrica es, efectivamente, definida positiva.

266. En $\mathbb{R}^3$ calcula las normas y el ángulo que forman los vectores $u = (1, 0, 0)$ y $v = (-1, 1, 0)$ con el producto escalar usual y también con el dado por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

267. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con el producto escalar usual, determina las normas y los ángulos que forman los vectores: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

268. En el espacio de las funciones continuas definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$, $C([0, 2\pi]) = \{f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$, con el producto escalar $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ determina las normas y los ángulos que forman los vectores $\{\cos x, \sin x, x\}$.

269. Calcula el ángulo formado por las rectas $r \equiv \begin{cases} x = y \\ y = 2z \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$.

270. Halla los ángulos que forma la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ con los ejes coordenados según la métrica usual y también según la métrica $\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{2} & 16 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

271. Calcula el ángulo formado por la recta $r = (2, 1, -1, -1) + \langle (2, 0, 1, 0) \rangle$ y el hiperplano $\Pi \equiv 6x - \frac{3}{2}y + 3z + \frac{\sqrt{3}}{2}t = 5$.

272. Demuestra el Teorema de Pitágoras: Sea E un espacio vectorial euclídeo y $\| \cdot \|$ la norma asociada al producto escalar. Entonces, si $e_1, e_2 \in E$:

$$\|e_1 + e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 \quad \text{si y solo si} \quad e_1 \text{ y } e_2 \text{ son ortogonales.}$$

273. Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de un espacio euclídeo E . Si las coordenadas de $e \in E$ en la base B son $e = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)_B$, demuestra que $\lambda_i = \varphi(e, e_i)$ donde φ denota el producto escalar. ¿Qué ocurre si la base B es tan solo ortogonal?

274. Dado el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con su métrica habitual, ortonormaliza la base $B = \{e_1 = (1, 1, 0), e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (0, 1, 1)\}$.

275. Sea la métrica de $\mathbb{R}^3$ dada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Obtén una base ortonormal y concluye que la métrica es definida positiva.

276. Considera en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar que en la base canónica tiene como matriz asociada $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra una base ortonormal y en dicha base calcula las coordenadas de los vectores $e = (1, 1, -1)$ y $e' = (2, 0, 3)$.

277. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con el producto escalar $\varphi(A, B) = A \cdot B^t$ obtén una base ortonormal a partir de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Utiliza el producto escalar para dar las coordenadas de los elementos de la base estándar $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en la nueva base ortonormal.

278. Sea E un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 3. Prueba que la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ define una métrica definida positiva en E . Calcula una base de E ortonormal respecto a este producto.

279. Ortonormaliza la base $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar dado por la integral en $[0, 1]$ del producto de polinomios.

280. Encuentra una base ortonormal para el espacio euclídeo tridimensional definido sobre una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ por:

$$\|e_1\| = 1, \|e_2\| = 2, \|e_3\| = \sqrt{2}, \angle(e_1, e_2) = 90^\circ, \angle(e_1, e_3) = 45^\circ, \angle(e_2, e_3) = 60^\circ.$$

281. Calcula una base ortonormal de los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $E = \langle (0, 1, 1, -2), (1, 4, -1, \frac{1}{2}) \rangle$ y $F = \{(x, y, z, t) \mid x - 2y + 3z - t = 0\}$.

282. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con la métrica euclídea $T_2(A, B) = \text{traza}(AB^t)$, calcula una base ortonormal del subespacio:

$$H = \{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\}.$$

283. En $\mathbb{R}^3$ con su producto escalar usual, considera los subespacios $U = \langle (1, 0, 2), (-3, 1, 1) \rangle$ y $V = \langle (2, -1, 1) \rangle$. Determina $U^\perp$ y $V^\perp$ mediante una base ortonormal de cada subespacio.

284. Calcula una base ortogonal del subespacio $\langle 1+x \rangle^\perp \subset \mathbb{R}_2[x]$ según el producto escalar $\int_0^1 p(x)q(x)$.

285. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar que en la base canónica viene determinado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

calcula los valores de α y β de modo que los subespacios $E = \{(x, y, z, t) \mid 2x + y + 4z - 2t = -x + y + 2z + 2t = -\frac{1}{2}x - y + z + 4t = 0\}$ y $F_{\alpha\beta} = \{(x, y, z, t) \mid \alpha x + 7y + \beta z + t = 0\}$ sean ortogonales.

3.3. Distancias y proyecciones.

286. Calcula la distancia entre los puntos $A = (1, 2, 1)$ y $B = (5, 2, 7)$ de $\mathbb{R}^3$ según el producto escalar usual y también según el producto escalar que en la base canónica viene determinado por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
287. Calcula las normas y las distancias de los vectores de la base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar dado por $\varphi(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)$.
288. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ tres puntos de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Calcula las longitudes y los ángulos internos del triángulo que forman según el producto escalar usual.
289. Halla la distancia del punto $P = (1, 4, 5) \in \mathbb{R}^3$ a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$ y calcula el punto de mínima distancia.
290. Calcula la distancia del punto $P = (1, 2, 5) \in \mathbb{R}^3$ al plano $2x + 2y - z = 5$.
291. En $\mathbb{R}^3$ considera el producto escalar que en la base usual viene dado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcula la distancia del punto $(0, 2, 2)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$. ¿Qué punto de la recta realiza la distancia?

292. Se considera una base de vectores unitarios $\{e_1, e_2, e_3\}$ de un espacio euclídeo E que verifica las condiciones $\angle(e_1, e_2) = 60^\circ$, $\angle(e_1, e_3) = \angle(e_2, e_3) = 90^\circ$. Calcula la distancia entre el punto $P = 7e_1 + 2e_2 + 4e_3$ y la recta que pasa por los puntos $Q_1 = 2e_1 - 3e_2 - e_3$ y $Q_2 = 2e_1 + 3e_3$.
293. Sea $E = \langle (-3, 1, 1, 1), (1, -3, 0, 1), (1, 1, -3, 1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Calcula la proyección ortogonal de $e = (8, 4, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ utilizando la métrica euclídea usual.
294. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con el producto escalar usual, calcula la proyección ortogonal de $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ en el subespacio de las matrices simétricas y también en el de las antisimétricas.
295. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 con la métrica euclídea $T_2(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x) dx$. Calcula la proyección ortogonal del polinomio $p(x) = x + x^2$ en el plano $\mathbb{R}_1[x]$.
296. En $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ considera el producto escalar dado por $T_2(A, B) = \text{traza}(AB^t)$. Sea el subespacio:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

y la subvariedad afín $L = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + V$. Calcula la distancia de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ a L y también el punto de la mínima distancia.

297. En $\mathbb{R}_2[x]$ con la métrica euclídea dada por la integral sobre el intervalo $[0, 1]$ del producto de los polinomios, calcula la distancia de $p(x) = \frac{13}{2} - 8x^2$ a la recta que pasa por $1 - \frac{1}{2}x$ con dirección $x - 2x^2$. Calcula también el polinomio que da la mínima distancia.
298. Calcula el $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $P = (4, 1, \lambda)$ diste $\sqrt{14}$ del plano $\pi \equiv 2x - y + 3z = 1$.
299. En $\mathbb{R}_2[x]$ considera el producto escalar $T_2(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x) dx$. Calcula $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la distancia del polinomio $\alpha + 2x + x^2$ a la recta que pasa por los puntos $1 + x + x^2$ y $1 + x^2$ sea exactamente 1.
300. Calcula la proyección ortogonal de un punto genérico $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en el plano $\Pi \equiv x + y + z = 1$.
301. Halla la distancia entre los planos de $\mathbb{R}^3$: $\Pi_1 \equiv 2x + y - z = 3$ y $\Pi_2 \equiv 4x + 2y - 2z = 7$.
302. Halla la distancia entre las rectas de $\mathbb{R}^3$: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$ y $x = y = z - 1$.
303. Halla la distancia de la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$ al plano $x + y + z = 1$.

304. En $\mathbb{R}^3$ con la métrica usual y en coordenadas de la base canónica, sean la recta r y el plano Π que tienen como ecuaciones:

$$r = \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad \Pi \equiv 4x + y + z - 9 = 0.$$

Calcula las ecuaciones de la proyección ortogonal de r sobre Π .

305. En $\mathbb{R}^4$ considera la métrica euclídea de matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considera el hiperplano Π y la recta r de ecuaciones:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu + 3\gamma \\ y = 2 + \mu - \gamma \\ z = \lambda + \mu + 2\gamma \\ t = 1 - \lambda - \gamma \end{cases} \quad r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 2 + \lambda \end{cases}$$

Calcula el ángulo que forman Π y r y también la distancia de cada subvariedad al origen de coordenadas.

3.4. Problemas métricos.

306. Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, -3, -4) \in \mathbb{R}^3$ y es perpendicular a la recta $\frac{x-7}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-4}$.

307. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, 4, 1) \in \mathbb{R}^3$ y corta perpendicularmente a la recta $\frac{x-7}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$.

308. Dado el plano π de ecuación $4x - 3y + z + 2 = 0$, halla la recta ortogonal al plano XY que pasa por el punto de intersección de π y la recta $z = 0, x = y$.

309. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, sea la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases}.$$

Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas del hiperplano Π ortogonal a r que pasa por $(1, 1, -1, 0)$. ¿Pertenece el punto $(0, -1, 3, 0)$ a Π ?

310. Determina las ecuaciones paramétricas e implícitas del 2-plano de $\mathbb{R}^4$ que es ortogonal (simultáneamente) a las rectas:

$$r = (5, -2, 0, 3) + \langle (1, 1, -2, 2) \rangle \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2t = \frac{5}{2} \\ 3x - z + t = 2 \\ x + 2y + z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

y pasa por el punto $(-1, -1, 0, \frac{3}{2})$, según:

a) El producto escalar usual.

b) El producto escalar dado por la matriz $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

311. En un espacio euclídeo de dimensión 3 se considera una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ definida por las condiciones:

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1, \quad \angle(e_1, e_2) = 60^\circ, \quad \angle(e_1, e_3) = \angle(e_2, e_3) = 90^\circ.$$

Considera las rectas:

$$r = \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}, \quad s = \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-2}.$$

Calcula la ecuación de la perpendicular común.

312. En $\mathbb{R}^3$, sea $P = (1, 0, 0)$, $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$, $\Pi \equiv x + 3y - z = 2$ y la métrica $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la recta que pasa por P , es paralela a Π y perpendicular a r .

313. En un plano euclídeo se tenemos una base con las siguientes condiciones:

$$\|e_1\| = 1, \|e_2\| = 2, \angle(e_1, e_2) = 60^\circ.$$

Calcula las ecuaciones de las bisectrices de las rectas $3x + 2y = 0$, $x - y = 0$.

314. Describe el conjunto de puntos del eje OY de $\mathbb{R}^3$ que equidistan de los planos $2x + 3y + 6z = 0$ y $8x + 9y - 72z = -73$.

315. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $(2, 1, 3)$ y del plano $x + y + z = 3$.

316. En un plano euclídeo se da una base con las condiciones $\|e_1\| = 2$, $\|e_2\| = \sqrt{2}$, $\angle(e_1, e_2) = 45^\circ$. Calcula la ecuación de la circunferencia de centro el punto $P = 2e_1 + e_2$ y de radio unidad.

317. Hállese la altura relativa al origen del tetraedro definido por las condiciones:

$$\|e_1\| = 1, \|e_2\| = 2, \|e_3\| = \sqrt{2}, \angle(e_1, e_2) = 90^\circ, \angle(e_1, e_3) = 45^\circ, \angle(e_2, e_3) = 60^\circ$$

318. Halla el punto simétrico a $P = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ respecto de la recta $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$.

319. En un espacio euclídeo de dimensión 3 sea la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ definida por las condiciones:

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1, \angle(e_1, e_2) = 60^\circ, \angle(e_1, e_3) = \angle(e_2, e_3) = 90^\circ.$$

Halla las coordenadas del punto simétrico a $P = (1, 2, 3)$ respecto de la recta $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$.

320. Encuentra la expresión de las simetrías de $\mathbb{R}^4$ respecto de las siguientes subvariedades:

- La recta $r = (1, 0, -1, 2) + \langle (2, -2, 1, 3) \rangle$.
- El plano $L = (1, 0, -1, 2) + \langle (2, -2, 1, 3), (1, 1, -2, 0) \rangle$.
- El hiperplano $\Pi \equiv 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1$.