MATEMÁTICAS III

Grado en Ingeniería Química
Básica, 7.5 créditos ECTS, 2° Curso, Primer semestre
Mabel Asensio Sevilla

Curso 2025-2026

PROBLEMAS

1. Tema 1. Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones no Lineales.

Localización y separación de raíces

1. Dado el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, acotar las raíces de $P(x) = 0$ tanto como se pueda, construir una sucesión de Sturm para este polinomio y separar las raíces de $P(x) = 0$

2. Dada la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 0$, aplicar Sturm para separar sus raíces y acotarlas en un intervalo de extremos enteros y una unidad de longitud.

3. Dada la ecuación $x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$, aplicar Sturm para separar sus raíces y acotarlas en un intervalo de extremos enteros y una unidad de longitud.

Ecuaciones no lineales

4. Si $\{c_n\}$ es la sucesión de valores obtenida por el método de bisección para aproximar la raiz $\overline{x}$ de una función continua, ¿es cierto que $|c_0 - \overline{x}| \geq |c_1 - \overline{x}| \geq \ldots$?

5. Aplicar el método de Bisección para aproximar la raíz de la ecuación $5x^2 + 7x - 3 = 0$ que está entre -2 y -1, con un error menor que 0.01.

6. Aplicar el método de Bisección a la ecuación $x^3 - 3 = 0$ para localizar la raíz cúbica de 3 sobre un intervalo de longitud menor o igual a 0.1.

7. Aplicar el método de Bisección a la ecuación $x^3 - 17 = 0$ para localizar la raíz cúbica de 17 con un error menor que 0.125. Iniciar con el intervalo $(2, 3)$.

8. A fin de localizar las raíces de la ecuación $x^3 + \sqrt{x} = 6$:

   a) Mediante evaluaciones en enteros determinar un intervalo de longitud 1 que contenga una raíz.

b) Aplicar tres iteraciones del método de Bisección para reducir la longitud de este intervalo en un factor de 0.125.

9. Si nos dicen que hay una raíz de la ecuación $x^3 + x = 6$ entre 1.55 y 1.75 y si usamos el método de bisección para obtener un intervalo de longitud menor o igual a 0.0001, ¿cuántas iteraciones son necesarias?

10. Hallar para cada una de las siguientes funciones un intervalo $[a, b]$ donde se asegure la convergencia del método de la bisección y determinar el número de iteraciones necesarias para que obtener la solución con un error menor que 10^{-6}.

    a) $f(x) = e^x - 2 - x$.

    b) $f(x) = \cos(x) + 1 - x$.

    c) $f(x) = \log(x) - 5 + x$.

11. Dada la ecuación de Kepler $x = y - \epsilon seny$ con $0 < \epsilon < 1$, demostrar que para cada $x \in [0, \pi]$ existe un único y que satisface dicha ecuación.

12. Para la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$:

    a) Evaluando en enteros determinar un intervalo de longitud 1 que contenga una raíz.

    b) Determinar cuál de las siguientes funciones de iteración se puede utilizar para aproximar dicha raíz de forma más precisa:

    $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$
    $g_2(x) = (\frac{10}{x} - 4x)^{1/2}$
    $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$
    $g_4(x) = (\frac{10}{4+x})^{1/2}$

    c) Con la elección de la mejor función de iteración del apartado anterior y comenzando en el punto medio del intervalo encontrado, efectuar 5 iteraciones.

13. Determinar si cada una de las siguientes funciones tiene un único punto fijo en el intervalo dado.

    a) $f(x) = 1 - x^2$, en $[0, 1]$.

    b) $f(x) = 2^{-x}$, en $[0, 1]$.

    c) $f(x) = \frac{1}{x}$, en $[0.5, 0.52]$.

14. Determinar un método de numérico basado en el método de Newton para el cálculo de raíces cuadradas.

15. Dada la función $f(x) = x - \frac{1}{4} - \sin(x)$, se pide:

    a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ posee una única raíz real, determinando razonadamente un intervalo de amplitud $\pi/4$ que contenga dicha solución.

    b) Aplicar la regla de Fourier para encontrar un punto inicial en el que el método de Newton asociado a $f(x)$ tenga garantizada la convergencia. Dar una aproximación de dicha raíz realizando dos iteraciones de dicho método.

16. Usar el método de Newton para hallar las soluciones de los siguientes problemas con una precisión de 10^{-6} (iterar hasta que $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 10^{-6}$),

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & e^x + 2^{-x} + 2cos(x) - 6 = 0 & \text{para } 1 \leq x \leq 2 \\ \text{b)} & (x-2)^2 - \log x = 0 & \text{para } 1 \leq x \leq 2 \text{ y } e \leq x \leq 4 \end{array}$$

17. Para un mol de un gas perfecto, la ecuación de estado $Pv = RT$ establece la relación entre la presión P del gas (en Pascales, Pa), el volumen específico v (en metros cúbicos por kilogramo, $m^3 kg^{-1}$) y su temperatura T (en grados Kelvin, K), siendo R la constante universal de los gases, expresada en $J\,kg^{-1}K^{-1}$.

    Para un gas real, la desviación de la ecuación de estado de los gases perfectos es debida a van der Waals y tiene en cuenta la interacción intermolecular y el espacio ocupado por moléculas de tamaño finito.

    Denotando por α y β las constantes del gas en el modelo de Van der Waals, para determinar el volumen específico v del gas, cuando P y T son conocidos, se debe resolver la ecuación no lineal,

$$f(v) = (P + \alpha/v^2)(v - \beta) - RT = 0.$$

    Usar el método de Newton, en el caso del dioxido de carbono, a presión de $10\,atm$ ($1013250Pa$), y temperatura $T = 300\,K$, donde las constantes $\alpha = 188.33\,Pa\,m^6\,kg^{-2}$ y $\beta = 9.77\,10^{-4}\,m^3\,kg^{-1}$. Usar como dato inicial el volumen específico correspondiente a un gas perfecto.

18. Sea $f \in \mathcal{C}^m(a,b)$ en las condiciones del teorema de existencia y unicidad de punto fijo $\bar{x}$.

    a) Probar que la convergencia es de orden q $(< m)$ si se verifica,

$$f'(\overline{x}) = \ldots = f^{q-1)}(\overline{x}) = 0, \qquad f^{q)}(\overline{x}) \neq 0$$

    b) Utilizar el apartado anterior para probar que el siguiente método modificado de Newton tiene convergencia cuadrática para raíces de multiplicidad m.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{mf(x_n)}{f'(x_n)}$$

19. En una inspección de los sistemas de seguridad de una empresa se ha detectado una irregularidad en las alarmas contra incendios. El mecanismo se basa en dos indicadores que dependen de la concentración de humo x y la temperatura ambiente t, de modo que:

    a) El indicador del humo marca $\frac{e^{x/10} - e^{-x/10}}{100}$.
    b) El indicador de temperatura marca $t^3 + t^2 + t$.

    Se pide:

    a) Trabajando con un intervalo de extremos enteros y amplitud 1, determinar con una precisión de dos cifras decimales la concentración de humo que se registraba si el indicador correspondiente hizo saltar la alarma al tomar el valor 4.

b) Trabajando con un intervalo de extremos enteros y amplitud 1, determinar con una precisión de dos cifras decimales la temperatura que hacía si el indicador correspondiente hizo saltar la alarma al tomar el valor 12000.

c) Sabiendo que los indicadores trabajan con una precisión de dos cifras decimales, calcular a qué valores habría que ajustar los indicadores para que saltaran a una concentración de humo del 30 % y a una temperatura de $50°C$, respectivamente.

Sistemas de ecuaciones no lineales.

20. Dado el siguiente sistema de ecuaciones no lineales,

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 &= 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

a) Escribir el sistema en la forma $\mathbf{X} = G(\mathbf{X})$

b) Elegir un dominio de $\mathbb{R}^3$ donde se asegure la existencia de punto fijo, y decidir su unicidad.

c) Cacular 2 iteraciones del método de punto fijo.

21. Demostrar que el sistema no lineal,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

tiene solución única no trivial. Aproximar la solución gráficamente. Usar la aproximación inicial para una iteración funcional. Determinar la solución para una precisión de 10^{-3} en norma l_2.

22. Para determinar la temperatura máxima del agua X_M a la que varias especies de hidra pueden sobrevivir sin acortar su esperanza de vida, se utiliza una aproximación por mínimos cuadrados ponderada de la forma,

$$f(x) = y = \frac{a}{(x-b)^c},$$

de una colección de datos experimentales. La variable x representa la temperatura del agua, e y la esperanza de vida media a temperatura x, b es la asíntota del gráfico de $f(x)$ y una buena aproximación de X_M.

a) Demostrar que elegir a, b y c que minimicen $\sum_{i=1}^{n}\left(\omega_i y_i - \frac{a}{(x_i-b)^c}\right)^2$, se reduce a resolver,

$$\begin{aligned} a &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i\omega_i}{(x_i-b)^c}\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i-b)^{2c}}\right) \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i\omega_i}{(x_i-b)^c} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i-b)^{2c+1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i\omega_i}{(x_i-b)^{c+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i-b)^{2c}} \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i\omega_i}{(x_i-b)^c} \sum_{i=1}^{n} \frac{\log(x_i-b)}{(x_i-b)^{2c}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i\omega_i \log(x_i-b)}{(x_i-b)^c} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i-b)^{2c}} \end{aligned}$$

b) Resolver el sistema no lineal para los datos siguientes usando $\omega_i = \log y_i$

i	1	2	3	4
x_i	2.4	3.8	4.75	21. 6
y_i	31.8	31.5	31.2	30.2

23. La presión requerida para sumergir un objeto grande y pesado en un terreno suave y homogéneo que se encuentre sobre un terreno de base duro, puede predecirse a partir de la presión requerida para sumergir objetos más pequeños en el mismo suelo.

    En particular la presión P para sumergir una lámina circular de radio r una distancia d en el terreno suave, donde el terreno duro se encuentra a una distancia $D > d$ debajo de la superficie, puede aproximarse por una ecuación de la forma,

$$P = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r,$$

    donde k_1, k_2 y k_3 son constantes que dependen de la consistencia del terreno, pero no del radio de la lámina.

    - Usar el método de Newton para encontrar los valores de k_1, k_2 y k_3 para los siguientes datos,

Radio (r) (pulgadas)	1	2	3
Presión (P)(libras/pulgadas^2)	10	12	15
Distancia (d) (pies)	1	1	1

    - Usar los resultados anteriores para determinar el radio mínimo de una lámina circular que ha de sostener un peso de 50 libras/pulgada^2 en este terreno con un hundimiento de a lo más un pie.

Algunos ejercicios de exámenes anteriores.

24. El problema de búsqueda de soluciones de la ecuación no lineal $x - \pi - \frac{1}{2}sen(\frac{x}{2}) = 0$ lo transformamos en un problema de búsqueda de punto fijo de la función $g(x) = \pi + \frac{1}{2}sen(\frac{x}{2})$; es decir, deseamos encontrar un valor de x cumpliendo $x = g(x)$.

    a) Comprobar que el método de punto fijo converge en este caso para cualquier punto inicial contenido en el intervalo $[0, 2\pi]$.

    b) Comenzando con $x_0 = 0$, realizar dos iteraciones del método de punto fijo.

    c) ¿Cuántas iteraciones del método de punto fijo hay que hacer para obtener una solución aproximada con un error absoluto $\leq 10^{-4}$?

    d) ¿Cuántos pasos del método de bisección necesitaríamos para obtener una solución aproximada con un error absoluto $\leq 10^{-4}$?

25. La ecuación no lineal $e^x = 4x^2$ tiene una solución $\bar{x}$ en $[0, 1]$.

    a) Comprobar que $\bar{x}$ es punto fijo de las funciones $g_1(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$ y $g_2(x) = ln(4x^2)$.

    b) Para cada una de estas funciones decidid si la iteración es convergente o no cuando se toma un dato inicial en el intervalo $[0, 1]$.

    c) Si converge, ¿cuál es el orden de convergencia?

    d) Describir un método para hallar $\bar{x}$ que tenga orden de convergencia mayor que 1.

26. Considerese la ecuación no lineal $xe^x - 1 = 0$. Se pide:

   a) Demostrar que tiene una única solución en el intervalo $[-3, 3]$.

   b) Determinar un intervalo de amplitud uno y extremos enteros que contenga dicha solución.

   c) Determinar un valor de ese intervalo que, usado como valor inicial, asegure la convergencia del método de Newton.

   d) Realizar dos iteraciones del método de Newton, con el valor inicial del apartado anterior.

27. Dada la función $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$, se pide:

   a) Demostrar que $f(x) = 0$ tiene una única solución real, es decir, $f(x)$ tiene una única raíz real.

   b) Establecer un intervalo de longitud uno que contenga dicha raíz y determinar la cantidad de pasos necesarios para obtener una solución aproximada con un error $< 10^{-8}$, utilizando el método de bisección.

   c) Determinar un intervalo $[a, b]$ en que convergerá la iteración de punto fijo $x = \frac{2-e^x+x^2}{3}$ a la raíz de $f(x)$, y determinar cuántas iteraciones son necesarias para calcular dicha raíz con un error $< 10^{-5}$.

   d) Resolver $f(x) = 0$ utilizando el método de Newton con 2 iteraciones comenzando con $x_0 = 0$.

   (Nota: $e^x > 2x, \forall x \in \Re$)

2. Tema 2. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Generalidades sobre matrices y vectores.

28. Determinar si la siguiente matriz es simétrica y definido positiva.

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 & 11 \\ 11 & 13 & 11 \\ 11 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

29. ¿Para que valores de a es definido positiva la siguiente matriz ?.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

30. Demostrar las siguientes propiedades del $cond(A)$, $(\kappa(A))$,

    a) $cond(\alpha A) = cond(A) \qquad \forall A,\ \forall \alpha \neq 0.$
    b) $cond(A) \geq 1.$
    c) $cond_2(A) = \frac{\mu_{max}}{\mu_{min}}$ donde $\mu_{min},\ \mu_{max}$ son respectivamente el mayor y menor valor singular de A.

31. Se desea resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$. Las entradas de la matriz A se conocen de forma exacta, no así el segundo miembro b. De éste se tienen valores $\bar{b}$ y errores $\delta b = \bar{b} - b$.

    a) Probar que el error relativo de la solución está acotado por,

    $$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

    b) Considerar,

    $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1.108 \\ -0.625 \\ 1.625 \\ -0.098 \\ 2.001 \end{pmatrix},$$

    con $\bar{b}$ correctamente redondeado a 3 cifras decimales. La inversa de A

    $$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

    Acotar el error relativo en la normas $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$.

32. Se desea resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$. Demostrar que si se perturban las entradas de la matriz de coeficientes, es decir, si en la práctica se resuelve $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$, se verifica:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Métodos directos.

33. Resolver por medio del método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

34. Usar Gauss para cacular la inversa y el determinante de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

35. Considerar el siguiente sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   a) Resolver por medio del método de Gauss.

   b) Calcular el determinante y la inversa de A.

36. Dado el sistema

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & +4x_2 & & = & -2 \\ & x_2 & -x_3 & = & -5 \end{array}$$

   a) Calcular la factorización LU de la matriz del sistema? ¿Has necesitado llevar a cabo alguna permutación?

   b) ¿En qué circunstancias es más aconsejable utilizar el método LU en lugar de la eliminación gaussiana?

   c) Resolver el sistema utilizando la factorización LU previamente calculada.

37. Calcular la factorización LU de la siguiente matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

   y usarla para resolver el sistema $Ax = b$, con $b = (1, 1, 1, 1)^t$.

38. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

   a) Calcular su factorización LU.

   b) Calcular su factorización LDL^t.

c) Calcular su inversa aprovechando cualquiera de las factorizaciones anteriores.

39. Calcular la factorizaciones LDL^t y de Cholesky de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 & 11 \\ 11 & 13 & 11 \\ 11 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

40. Calcular la factorización de Cholesky de las siguientes matrices y usarla para resolver los correspondientes sistemas $Ax = b$,

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = (1,1,0)^t$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $b = (2,6,6,2)^t$.

41. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} p & -p & 2p \\ -p & p+2 & -1 \\ 2p & -1 & 6p-1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar para qué valores de p la matriz es simétrica y definido positiva.

b) Para $p = 1$, efectuar la descomposición de Choleski y utilizarla para resolver el sistema $Ax = b$ siendo $b = (1,0,3)^t$.

42. Una compañía minera trabaja en tres minas, cada una de las cuales produce minerales de tres clases, A, B y C. La primera mina puede producir 4Tn del mineral A, 3Tn del B y 5Tn del C por hora de trabajo. La segunda mina puede producir 1Tn de cada mineral por hora de trabajo, y la tercera mina 2Tn del A, 4Tn del B y 3Tn del C por hora de trabajo. ¿Cuántas horas se ha de trabajar en cada mina para satisfacer un pedido de 19Tn de mineral A, 25Tn de B y 25Tn de C? Resolver el correspondiente sistema lineal mediante eliminación gaussiana.

Métodos iterativos.

43. Dado el siguiente sistema,

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

a) Escribir la iteración correspondiente al método de Jacobi, y justificar si el método es convergente.

b) Calcular $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ si $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.

c) Calcular el número de iteraciones para reducir el error absoluto por debajo de 10^{-4}, si se verifica,

$$\|x^{(k+1)} - x\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

44. Dado el siguiente sistema,

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

   a) Escribir la iteración correspondiente al método de Gauss-Seidel y justificar si el método es convergente.

   b) Calcular $x^{(1)},\ x^{(2)}$ si $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.

   c) Calcular el número de iteraciones para reducir el error absoluto por debajo de 10^{-4}, si se verifica,

$$\|x^{(k+1)} - x\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

45. Demostrar que para el sistema,

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & p \\ cx & + & dy & = & q \end{array} \right.$$

una condición necesaria y suficiente de convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel es $|bc| < |ad|$.

46. Aplicar el método de Jacobi para resolver el sistema,

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 7x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & -8x_2 & +2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & +x_2 & -6x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Realizar los cálculos redondeando a tres cifras decimales e iterar hasta que se cumpla $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty \leq 0.03$.

47. Repetir el ejercicio anterior aplicando el método de Gauss-Seidel.

48. La solución del sistema,

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & -3 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 12 \end{array} \right.$$

es $(1,2,3)^t$. Determinar el número mínimo de iteraciones necesarias para obtener un error 10^7 veces inferior al error inicial si se resuelve el sistema anterior mediante el método de Jacobi. Para estimar el error utilizar la norma $\|\ \ \|_1$.

49. Resolver, utilizando el método de S.O.R., el siguiente sistema,

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

tomando como vector inicial $x^{(0)} = (0,0)^t$ y teniendo en cuenta que el máximo error admisible en el sentido de la norma $\|\ \ \|_\infty$ es 0.05. Como parámetros de relajación, tomar aquel que proporcione una mayor velocidad de convergencia en el sentido de la norma $\|\ \ \|_\infty$ entre los valores 0.3, 0.4, 0.5 y 0.6.

50. Dada la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3/2 & 3/4 \\ 0 & 2 & 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & 31/8 & 5/8 \\ 3/4 & 0 & 5/8 & -37/16 \end{pmatrix}$$

a) Resolver el sistema $Ax = b$ usando el método de Gauss, donde $b = (0, 1, 17/4, 2)^t$.

b) Calcular las factorizaciones LU, LDL^t de A.

c) Calcular el determinante de A.

d) A la vista de los resultados obtenidos, ¿ es A definido positiva ?. ¿ Por qué?.

e) ¿Es convergente el método de Jacobi?, ¿Por qué?. Escribir su algoritmo para el sistema del apartado a), y calcular dos iteraciones si $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$.

51. Se considera una matriz del tipo siguiente, $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Escribir las correspondientes matrices de iteración de los métodos de Jacobi y Gauss Seidel.

b) Calcular el radio espectral de dichas matrices de iteración.

c) ¿Qué relación hay entre ambos radios espectrales?. ¿Convergen o divergen simultáneamente ambos métodos iterativos?. ¿Cuándo se da la convergencia?. En caso de convergencia, ¿cuál converge más deprisa?.

Algunos ejercicios de exámenes anteriores.

52. Utilizar el método de factorización LU para calcular el determinante de la matriz A y resolver el sistema $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 4+\alpha^2 & -2-\alpha^2 & \alpha^2 \\ -\alpha & -2-\alpha^2 & 2+\alpha^2 & -1-\alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & -1-\alpha^2 & 2+\alpha^2 \end{pmatrix},$$

$b = (1, \alpha - 2, -\alpha + 1, \alpha + 1)^t$.

53. Se considera el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; b = (1, 2, 3)^t.$$

a) Sin realizar previamente la factorización LU, ¿puedes afirmar que se puede realizar dicha factorización sin pivotaje?, ¿por qué?.

b) Calcular la factorización LU de A.

c) ¿Es la matriz A definido positiva? Razona tu respuesta y calcula la factorización de Cholesky de A si es posible.

d) Demostrar razonadamente que el método de Gauss-Seidel es convergente para este sistema.

e) Si $\|L_1\|_2 = 0.570$, $x^{(0)} = (0,0,0)^t$ y

$$\|x^{(k)} - x\|_2 \leq \frac{\|L_1\|_2^k}{1 - \|L_1\|_2} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2$$

calcular el número de iteraciones necesarias para que el error en la norma 2 sea menor que 10^{-4}.

54. Se considera el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \ b = (-2, 5, 4)^t.$$

a) Dar la matriz L de la factorización LU de A.

b) Dar la solución parcial del sistema $Ly = b$.

c) Demostrar razonadamente que el método de Jacobi es convergente para este sistema.

d) Dar la matriz de iteración del método de Jacobi para este sistema.

3. Tema 3. Interpolación.

55. Dada la función,

$$f(x) = \sin(x)$$

   a) Calcular su desarrollo de Taylor, $P_n(x)$ en $x = 0$.
   b) Comprobar que si $|x| < 1$, entonces el $E_9(x) = |\sin(x) - P_n(x)| \leq 1/10!$.
   c) Calcular el grado del polinomio para el cual se tiene, $E_n(x) \approx 10^{-6}$.

56. Usar el polinomio interpolador de Lagrange para estimar $f(0.14)$ en la siguiente tabla,

x_k	0	0.1	0.2
f_k	0	0.1002	0.2013

57. Dada la función $f(x) = e^x$, calcular, utilizando la forma de Newton, el polinomio interpolador en los nodos, $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, y $x_2 = 1$. Acotar el error cometido en $x = 3/4$, y el cometido al estimar cualquier valor del intervalo.

58. Dada la siguiente tabla,

x_k	0	1	2	3	4	5
f_k	1	2	5	4	2	-2

   a) Calcular la tabla de diferencias divididas.
   b) Escribir P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.
   c) Aproximar $f(x)$ en $x = 2.5$ y $x = 6$.

59. Calcular un polinomio de tercer grado que pase por los puntos $(1, 3)$, $(2, 2)$ con pendientes respectivas 1 y 4.

60. Considerando la siguiente tabla,

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	2	3	
2	6	7	8

   Construir la tabla de diferencias divididas de Newton, y calcular el polinomio interpolador de Hermite.

61. Sea,

$$f(x) = 3xe^x - e^{2x}.$$

   a) Aproximar $f(1.03)$ por medio del polinomio interpolador de Hermite de grado 3, utilizando $x_0 = 1$, y $x_1 = 1.05$.
   b) Comparar el error real con la cota de error.

62. Dada la siguiente tabla de la función $f(x) = e^x$,

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$f(x)$	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221

Hallar el valor aproximado de $\sqrt[3]{e}$ por interpolación cúbica, usando el método de diferencias divididas de Newton.

63. Construir el polinomio de menor grado que interpole a f y f' en dos puntos distintos x_0 y x_1. ¿Existe tal polinomio?. Si existe, ¿es único?, ¿de qué grado es?. ¿Cómo se llama este tipo de interpolación?. Como aplicación, aproximar $tan 22.5°$ usando este tipo de interpolación en 0° y 45°. Nota: Observar que los datos están dados en grados, no en radianes.

64. Para los datos de la siguiente tabla,

x	1	2.5	5
y	55	160	250
y'	80	75	70

interpolar el valor de $y(3)$ mediante interpolación de Hermite.

65. (Viscosidad del petroleo crudo ligero en función de la temperatura). Se dispone de la siguiente tabla de viscosidades a diferentes temperaturas.

T(F)	40	50	60	70
Viscosidad	6.0	5.0	4.1	3.7

Calcular la viscosidad a $T = 55F$ usando el polinomio interpolador de Newton.

66. (Solubilidad del H_3BO_3 en función de la temperatura). Se dispone de la siguiente tabla de solubilidad del H_3BO_3 a diferentes temperaturas.

T(C)	0	10	30	40	60	70	80	100
S(g/100g de H_20)	2.66	3.57	6.60	8.72	14.81	16.73	23.75	40.25

Calcular la solubilidad para T=20, T=50, y T=90 C. Especificar el número de puntos usados en la iterpolación. ¿Qué ocurre si se emplean los 8 puntos?. Comparar los resultados con los valores reales: S(20) = 5.04, S(50) = 11.54, S(90) =30.38.

67. La siguiente tabla muestra los litros de gasolina de un depósito de un coche de carreras dependiendo del número de vueltas realizadas a un circuito:

Número de vueltas	2	4	6	8
Gasolina (litros)	152.2	119.3	93.4	73.2

a) Construir el polinomio interpolador mediante la tabla de diferencias divididas de Newton.

b) Estimar con dicho polinomio los litros que llevaba el depósito al empezar la carrera.

Algunos ejercicios de exámenes anteriores.

68. Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

    a) Existe un único polinomio de grado exactamente 3 que interpola a f y f' en dos puntos distintos x_0 y x_1.

    b) Los coeficientes del vector solución del sistema de ecuaciones normales asociado a un problema de mínimos cuadrados son iguales, independientemente de la base de funciones elegida para el espacio vectorial donde se busca la mejor aproximación.

    c) Las rectas que mejor aproximan la curva $y(x) = cos\pi x$ en el sentido de los mínimos cuadrados para el conjunto de abscisas $\{-1/2.-1/4, 0, 1/4, 1/2\}$ y para el intervalo $[-1/2, 1/2]$ son iguales.

69. El movimiento de un coche que se desplaza por una carretera ha sido estimado por un radar. Los datos de las observaciones se muestran en la siguiente tabla,

$Tiempo(seg)$	0	3	5	8	13
$Distancia(m)$	0	69	117	189	304

    Usar dichos datos para estimar la velocidad del coche y averiguar si supera en algún momento la velocidad máxima permitida de 90km/h?

    Pautas para la resolución:

    a) Construir el triángulo de diferencias divididas de Newton.

    b) Dar el correspondiente polinomio interpolador (de las distancias recorridas).

    c) Dar el correspondiente polinomio de las velocidades.

    d) Buscar la máxima velocidad (en metros/seg).

    e) Comprobar si esta velocidad máxima supera los 90Km/h.

70. Conocido el valor de una función $f(x)$ en los puntos $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h$, para cierto $h > 0$,

    a) Construir el polinomio interpolador de orden 2, $p_2(x)$, usando los polinomios de Lagrange.

    b) Escribir una fórmula para el error, $f(x) - p_2(x)$.

    c) Deducir, utilizando el apartado a), una fórmula de integración numérica para calcular el valor aproximado de $\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx$. ¿A qué conocida fórmula de Newton-Cotes corresponde?

4. Tema 4. Aproximación.

71. Dada una nube de puntos $(x_k, y_k)_{k=0,\dots,m}$, con $m > 2$ calcular la recta $y = a_0 + a_1 x$, que los aproxime de modo que,

$$\sum_{k=0}^{m} d_k^2, \qquad d_k = y_k - a_0 - a_1 x_k,$$

sea mínimo.

72. Hallar la mejor aproximación por mínimos cuadrados de los puntos,

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right), (0,0), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right), (\pi, 1),$$

que sea del tipo $f(\theta) = a + r\sin(\theta + \alpha)$, con $a, r \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in [0, 2\pi]$.

73. Ajustar por mínimos cuadrados la siguiente tabla de datos

x	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
y	0.40	0.50	0.90	1.28	1.60	1.66	2.02

a funciones del tipo,

a) $y = a_0 + a_1 x$.

b) $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

c) $y = a x^{\alpha}$.

74. Encontrar la mejor aproximación polinomial de primer y segundo grado de $f(x) = sen(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ mediante mínimos cuadrados.

75. Repetir el ejercicio anterior utilizando una base ortogonal.

76. Determinar las rectas que aproximan la curva $y(x) = cos(\pi x)$ haciendo que:

a) la norma euclídea discreta del error en el conjunto de abscisas $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ sea mínima.

b) la norma euclídea del error en intervalo $[-1/2, 1/2]$ sea mínima.

77. El cometa Tentax, descubierto en 1968, en un sistema de coordenadas polares (r, φ) centrado en el sol ocupa las siguientes posiciones medidas experimentalmente,

r	2.70	2.00	1.61	1.20	1.02
φ	48°	67°	83°	108°	126°

Las leyes de Kepler garantizan que el cometa se moverá en una órbita que en dichas coordenadas polares tendrá por ecuación,

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

donde p es un parámetro y e es la excentricidad. Ajustar por mínimos cuadrados los valores de p y e a partir de dichas medidas.

78. La ecuación de Clasius-Clapeyron es muy útil para la determinación de calores de vaporización y/o sublimación,

$$P_v = Ae^{B/T}, \quad \text{donde } B = -\frac{\Delta H}{R}$$

Ajustar A y B considerando los siguientes datos de presión de vapor del benceno en función de la temperatura, para ello linealizar previamente la ecuación.

T (K)	P_v (mm Hg)
236.4	1
270.4	20
288.5	60
299.2	100
315.3	200

Una vez calculado B, calcular la entalpía de cambio de fase ΔH ($R = 8.314473 J/molK$).

79. Los pesos atómicos del O y N son 16 y 14 aproximadamente. Utilizar los pesos moleculares de los seis óxidos de nitrógeno dados a continuación para ajustarlos por mínimos cuadrados.

NO	N_20	$N0_2$	N_20_3	N_20_5	N_20_4
30.006	44.013	46.006	76.012	108.010	92.011

80. Utilizar los pesos moleculares de los siguientes ácidos para ajustar por mínimos cuadrados los pesos atómicos del Hidrógeno, Fósforo y Oxígeno.

HPO	HPO_2	H_3PO_3	$H_4P_20_7$
47.067	64.042	81.987	178.031

81. En los procesos termoadiabáticos de los gases, la presión P y el volumen V siguen una ley del tipo $PV^\gamma = C$ donde C es constante a lo largo del proceso. Ajustar por mínimos cuadrados los valores de C y γ en un proceso termoadiabático según la tabla de medidas experimentales

P (atm)	1.62	1.00	0.75	0.62	0.52	0.46
V (litros)	0.5	1	1.5	2	2.5	3

82. El nivel del agua en el Mar del Norte está determinado principalmente por la marea llamada M2, cuyo periodo es de aproximadamente 12 horas. Se han realizado las siguientes mediciones:

t (horas)	0	2	4	6	8	10
H(t) (metros)	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

a) Ajustar la serie de mediciones usando una aproximación por mínimos cuadrados mediante una función del tipo:

$$H^*(t) = a_0 + a_1 sen(2\pi t/12)$$

(1.5 puntos)

b) Calcular el error que se comete en el apartado anterior, es decir, calcular la norma euclidea de la distancia entre los valores exactos en los nodos y los valores aproximados por $H^*(t)$. (1 punto)

83. Ajustar una curva del tipo $y = \frac{Ax}{B+x}$, donde A y B son constantes, a la tabla de datos

x	7	15	40	100
y	0.29	0.48	0.80	0.99

linealizando para ello previamente la expresión de la curva.

84. Para un conjunto de $N+1$ puntos del espacio $(x_0, y_0, z_0), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$, buscamos la ecuación del plano $z = Ax + By + C$ que mejor ajusta en el sentido de los mínimos cuadrados dicho conjunto de puntos. Deducir las correspondientes ecuaciones normales.

Pautas para la resolución:

a) Dar el espacio vectorial de funciones donde buscamos la función aproximadora.

b) Dar una base de funciones de este espacio vectorial.

c) Dar el correspondiente producto escalar.

d) Construir las correspondientes ecuaciones normales.

Algunos ejercicios de exámenes anteriores.

85. Según la ley de Beer, la absorbancia de un complejo se obtiene a partir de la concentración mediante técnicas espectrofotométricas. Se dispone de los datos indicados en la siguiente tabla:

Concentración	1	2	3	5	10
Absorbancia	0.1	0.36	0.57	1.09	2.05

Realizar un ajuste lineal en el sentido de los mínimos cuadrados para estimar la absorbancia a partir de la concentración. Aproximar la absorbancia que correspondería a una concentración igual a 7.

5. Tema 5. Integración numérica.

86. Hallar la fórmula de integración numérica

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosxdx \approx A_0 f(-3\pi/4) + A_1 f(-\pi/4) + A_2 f(\pi/4) + A_3 f(3\pi/4)$$

que sea exacta para polinomios de grado ≤ 3.

87. Deducir la fórmula de Newton-Cotes para $\int_0^1 f(x)dx$ usando como nodos $0, 1/3, 2/3, 1$.

88. Encontrar la fórmula

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$$

que sea exacta para todas las funciones de la forma $f(x) = ae^x + bcos(\pi x/2)$.

89. Encontrar una expresión del tipo

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(\pi)$$

que sea exacta para todas las funciones de la forma $f(x) = a + bcos(x)$.

Demostrar que la fórmula resultante es exacta para cualquier función de la forma $f(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k cos(2k+1)x + b_k sen2kx)$

90. Encontrar una regla de cuadratura gaussiana para el intervalo $[-1, 1]$, con función de peso $w(x) = 1$ y tres nodos, es decir,

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

91. Repetir el ejercicio anterior con cuatro nodos.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$$

92. Determinar la fórmula de integración numérica,

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

que sea exacta para polinomios de grado ≤ 3.

93. Si $\int_0^{0.8} y(x)dx = 2$ y tenemos los datos de la siguiente tabla:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8
y	5	8	6	3	0	-3	-3	5

Utilizar la regla de Simpson compuesta para estimar $y(0.7)$.

94. Suponiendo que todos los pesos son iguales $W_0 = W_1 = W_2 = W$, hallar el valor W de éstos y las abscisas de la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^1 g(x)dx \simeq W_0 g(x_0) + W_1 g(x_1) + W_2 g(x_2)$$

para que sea exacta para todos los polinomios de grado ≤ 3.

95. Encontrar las constantes c_0, c_1, y x_1 de modo que la siguiente fórmula de cuadratura tenga el grado de precisión más alto posible.

$$\int_0^1 f(x)dx \approx c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$$

96. Para calcular la integral de una función f en el intervalo $[t, t+h]$ se propone una fórmula numérica del tipo

$$\int_t^{t+h} f \approx A\, f(t) + B\, f(t + \frac{2}{3}h)$$

Calcular los valores de las constantes A y B de modo que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible.

Algunos ejercicios de exámenes anteriores.

97. Sea una fórmula de integración numérica de la forma

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(a) + A_1 f(b)$$

a) Hallar A_0 y A_1 para que su grado de precisión sea máximo. ¿Cómo se llama esta fórmula?

b) Aplicar dicha fórmula para el cálculo de la integral en el intervalo $[-2, 2]$ de la función $f(x) = x^3 e^x$.

c) Utilizando la fórmula obtenida en el primer apartado, obtener una fórmula de integración si se subdivide el intervalo de integración en $n-1$ subintervalos equidistantes. ¿Cómo se llama esta fórmula?

d) Empleando la fórmula anterior, calcular el valor de la integral de $f(x)$ si se conocen los valores de $f(-2)$,$f(-1)$,$f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.

98. Usando la fórmula de integración siguiente

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0 f(-s) + A_1 f(s)$$

a) Calcular, en función de s fijo, las constantes A_0 y A_1 para que la fórmula sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

b) Encontrar el valor óptimo de s tal que la fórmula sea exacta también para polinomios de grado 2.

c) Encontrar el máximo valor de n tal que la fórmula es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que n.

99. Se considera una fórmula de cuadratura del tipo:

$$\int_1^2 f(x)dx \simeq a_0 f(1) + a_1 f(2) + a_2 f'(1)$$

a) Determinar los coeficientes a_0, a_1 y a_2, para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible.

b) Sea $P_2(x)$ el polinomio de interpolación de Hermite tal que:

$$P_2(1) = f(1), \quad P_2(2) = f(2), \quad P_2'(1) = f'(1).$$

Demostrar que la fórmula de integración obtenida en el apartado a) es la misma que la que se obtendría integrando el polinomio $P_2(x)$.

c) Utilizar la fórmula de integración obtenida en el apartado a) para aproximar $ln2$. (Pista: determinar los extremos de integración y la función $f(x)$ adecuados en la expresión $\int_{\star}^{\star} f(x) = ln2$)

6. Tema 6. Ecuaciones diferenciales y soluciones.

100. Clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales (EDO, EPD), indicar el orden, las variables independientes y dependientes, si son lineales o no.

   a) $5\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 9x = 2\cos 3t$
   (vibraciones mecánicas, circuitos eléctricos, sismología)

   b) $y\left[1 + (\frac{dy}{dx})^2\right] = C$ donde C es una constante
   (problema de la braquistocrona, cálculo de variaciones)

   c) $8\frac{d^4x}{dt^4} = x(1-x)$ (deflexión de vigas)

   d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
   (ecuación de Laplace, teoría del potencial, electricidad, calor, aerodinámica)

   e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2-3x)}{x(1+3y)}$
   (competencia entre dos especies, ecología)

   f) $\frac{dx}{dt} = k(4-x)(1-x)$ donde k es una constante
   (velocidades de las reacciones químicas)

   g) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2py = 0$ donde p es una constante
   (ecuaión de Hermite, mecánica cuántica, oscilador armónico)

   h) $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$
   (aerodinámica, análisis de esfuerzos)

   i) $-\pi(y\tan\alpha)^2\frac{dy}{dt} = 12(2gy)^{1/2}$ donde α, g son constantes
   (flujo de un líquido que sale de un recipiente)

   j) $\frac{dp}{dt} = kp(P-p)$ donde k y P son constantes
   (curva logística, epidemiología, economía)

   k) $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial r} + kN$ donde k es una constante
   (fisión nuclear)

   l) $\frac{d^2y}{dx^2} - \epsilon(1-y^2)\frac{dy}{dx} + 9y = 0$donde ϵ es una constante
   (ecuación de Van der Pol, tríodo de vacío)

   m) $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + x(y^2 - C)^{3/2} = 0$ donde C es una constante
   (ecuación de las estrellas enanas blancas, potencial gravitacional en estrellas degeneradas)

   n) $\sqrt{1-\alpha y}\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$ donde α es una constante
   (ecuación de Kidder, flujo de gases a través de un medio poroso)

101. En los siguientes problemas trazar las isoclinas con sus indicadores de dirección, así como varias curvas solución, incluida la curva que satisfaga la condición inicial.

   a) $y' = x - y, \quad y(0) = 1$

   b) $y' = x^2 - y, \quad y(0) = 0$

   c) $y' = 2x, \quad y(0) = -1$

   d) $y' = y, \quad y(0) = 1$

   e) $y' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 4$

   f) $y' = \frac{x}{y}, \quad y(0) = -1$

g) $y' = x + y, \quad y(0) = 1$

h) $y' = y(2 - y), \quad y(0) = 3$

102. Cuáles de las siguientes ecuaciones son de variables separadas:

a) $\frac{dy}{dx} = y^3 + y$

b) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{x+y}}{x^2+2}$

d) $\frac{ds}{dt} = t \ln(s^{2t}) + 8t^2$

e) $s^2 + \frac{ds}{dt} = \frac{s+1}{st}$

f) $(xy^2 + 3y^2)dy - 2xdx = 0$

103. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de variables separadas.

a) $xy' + y = y^2$, Solución: $y = \frac{1}{1-cx}, \quad c \in \Re$

b) $y' = t \operatorname{sen}^2 y$, Solución: $\tan y = \frac{-2}{t^2+c}, \quad c \in \Re$

c) $y' = \cos^2 y$, Solución: $\tan y = t + c, \quad c \in \Re$

d) $3e^x \tan y dx + (2 - e^x) \sec^2 y dy = 0$, Solución: $(e^x - 2)^3 = c \tan y, \quad c \in \Re$

e) $y' = \frac{x^2-1}{y^2}$, Solución: $y^3 - x^3 + 3x = c, \quad c \in \Re$

f) $y' = \frac{1}{xy^3}$, Solución: $y^4 = 4 \ln x + c, \quad c \in \Re$

g) $y' = 3xy^2$, Solución: $y = -\frac{2}{3(x^2+c)}, \quad c \in \Re$

h) $y' = y(2 + \operatorname{sen} x)$, Solución: $y = ce^{2x - \cos x}, \quad c \in \Re$

i) $y' = 3x^2(1 + y^2)$, Solución: $y = \tan(x^3 + c), \quad c \in \Re$

j) $y' = \frac{\cos^2 y}{1+x^2}$, Solución: $\tan y = \arctan x + c, \quad c \in \Re$

k) $(1 + y^2)dx + xydy = 0$, Solución: $1 + y^2 = \frac{1}{(cx)^2}, \quad c \in \Re$

l) $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$, Solución: $\frac{y^2-x^2}{2} + y + x = \ln(\frac{x+1}{y-1}) + c, \quad c \in \Re$

m) $(1 + y^2)dx = xdy$, Solución: $y = \tan(\ln x + c), \quad c \in \Re$

n) $e^{-y}(1 + y') = 1$, Solución: $e^y - 1 = ce^{x+y}, \quad c \in \Re$

104. Calcular las soluciones de los siguientes problemas de Cauchy:

a) $\frac{dy}{dx} = 2x \cos^2 y, \quad y(0) = \pi/4$

b) $\frac{dy}{dx} = (1 + y^2) \tan x, \quad y(0) = \sqrt{3}$

c) $\frac{dy}{dx} = x^2(1 + y), \quad y(0) = 3$

d) $\frac{dy}{dx} = y \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = -3$

e) $\frac{dy}{dx} = y \cos x, \quad y(\pi/2) = -2$

Algunos ejercicios de exámenes anteriores.

105. Averiguar si las siguientes funciones son solución de las correspondientes EDO's

    a) $y = \frac{1}{\cos x}$ de $y' - y \tan x = 0$

    b) $x = \cos(t), y = 2 \sin t$ de $yy' + 4x = 0$ (Nota: $y' = \frac{dy}{dx}$, y la solución es paramétrica)

106. Averiguar si las siguientes funciones son solución de las correspondientes EDO's

    a) $y = \frac{\sin x}{3x}$ de $xy' + y = \cos x$

    b) $x = \cos(t), y = e^t$ de $y' + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ (Nota: $y' = \frac{dy}{dx}$, y la solución es paramétrica)

107. Dada la EDO $xy' = 7$ y la condición inicial $y(1) = 7$, elegir la opción correcta,

    a) $y = 7 \ln |x| + c, \quad c = 7$

    b) $y = \frac{7}{2}x^2 + c, \quad c = \frac{7}{2}$

    c) $y = \ln |x| + c, \quad c = 7$

    d) $y = \ln |cx^7|, \quad c = e^{-7}$

108. Elegir la opción que contiene la solución de la ecuación diferencial $\left(y - \frac{1}{y}\right) dx + \left(x + \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$

    a) $1 + \frac{1}{y^2}$

    b) $xy - \frac{y}{x} = c$

    c) $xy - \frac{x}{y} = c$

    d) $1 - lny + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2y^2} = c$

109. Demostrar que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

    tiene solución única en un entorno de la condición inicial. ¿Qué resultado teórico has utilizado para demostrarlo?. Enúncialo.

7. Tema 7. EDO de primer orden y aplicaciones.

Teoremas de existencia y unicidad.

110. Considerar la ecuación $y' = y^{1/3}$.

   a) Demostrar que $y = (\frac{2x}{3} + C)^{3/2}$ es una solución.

   b) Demostrar que el problema de valor inicial dado por dicha EDO y la condición inicial $y(0) = 0$ se satisface para $C = 0$ por $y = (\frac{2x}{3})^{3/2}$.

   c) Demostrar que la función constante $y = 0$ también satisface dicho problema de valor inicial. Por tanto, este problema de valor inicial no tiene solución única.

   d) Demostrar que las condiciones el teorema de Picard no se satisfacen.

Resolución práctica.

111. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales o reducibles a lineales.

   a) $ty' + (2t+1)y = te^{-2t}$, Solución: $y = \frac{1}{2}e^{-2t}(t + \frac{c}{t})$, $c \in \Re$

   b) $(t^2+1)y' + 4ty = t$, Solución: $y = (t^2+1)^{-2}(\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + c)$, $c \in \Re$

   c) $y' = \frac{y}{x} + x^2$, Solución: $y = cx + \frac{x^3}{2}$, $c \in \Re$

   d) $xy' + (1-x)y = e^{2x}$, Solución: $y = \frac{e^x}{x}(c + e^x)$, $c \in \Re$

   e) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, Solución: $y = e^{-x^2}(x^2 + c)$, $c \in \Re$

   f) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \operatorname{sen}(2y)}$, Solución: $x = ce^{\operatorname{sen} y} - 2\operatorname{sen} y - 2$, $c \in \Re$

   g) $y' + y\cos t = \operatorname{sen} t \cos t$, Solución: $y = \operatorname{sen} t - 1 + ce^{-\operatorname{sen} t}$, $c \in \Re$

   h) $y' + \frac{y}{t} = 3t$, Solución: $y = t^2 + \frac{c}{t}$, $c \in \Re$

   i) $y' + y = b(t)$, Solución: $y = e^{-t}(c + \int e^t b(t)dt)$, $c \in \Re$

   j) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3}$, Solución: $x = \frac{y^3}{2} + cy$, $c \in \Re$

   k) $y' = \frac{2y+(t+1)^4}{t+1}$, Solución: $y = (\frac{t^2}{2} + t + c)(t+1)^2$, $c \in \Re$

   l) $3xy^2y' + y^3 - 2x = 0$, Solución: $y = (x + \frac{c}{x})^{1/3}$, $c \in \Re$

112. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de Bernoulli.

   a) $y' - \frac{3}{x}y + x^3y^2 = 0$, Solución: $y = \frac{7x^3}{c+x^7}$, $c \in \Re$

   b) $xy' + y = y^2 \ln x$, Solución: $y = \frac{1}{\ln x + cx + 1}$, $c \in \Re$

   c) $y' + \frac{y}{2t} = \frac{t}{y^3}$, Solución: $t^2y^4 = c + t^4$, $c \in \Re$

   d) $t^2y' + 2t^3y = y^2(1+2t^2)$, Solución: $y = (ce^{t^2} + \frac{1}{t})^{-1}$, $c \in \Re$

   e) $2\operatorname{sen} xy' + y\cos x = y^3(x\cos x - \operatorname{sen} x)$, Solución: $y = \frac{1}{\sqrt{x + c\operatorname{sen} x}}$, $c \in \Re$

   f) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$, Solución: $x^2 = cy - y^2 + a^2$, $c \in \Re$

113. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de Ricatti.

   a) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$, $y_1 = \frac{1}{x}$, Solución: $y = \frac{3x^2}{3c - x^3} + \frac{1}{x}$, $c \in \Re$

b) $y' = \cos x - y - y^2 \tan x \sec x$, $\quad y_1 = \cos x$, Solución: $\frac{2\cos^2 x}{2ce^x - \cos x - senx} + \cos x$, $c \in \Re$

c) $y' = (1-t)y^2 + (2t-1)y - t$, $\quad y_1 = 1$, Solución: $y = \frac{1}{t-2+ce^{-t}} + 1$, $c \in \Re$

d) $y' = \frac{y}{t} + t^3y^2 - t^5$, $\quad y_1 = t$, $\quad$ Solución: $y = \frac{t}{ce^{-\frac{2}{5}t^5} - \frac{1}{2}} + t$, $\quad c \in \Re$

114. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden homogéneas o reducibles a homogéneas.

a) $y' = \frac{(x+y)y}{x^2}$, $\quad$ Solución: $y = \frac{x}{c - \ln x}$, $\quad c \in \Re$

b) $y' = \frac{xy+y^2+x^2}{x^2}$, $\quad$ Solución: $y = x\tan(c + \ln x)$, $\quad c \in \Re$

c) $(x^2+y^2)dx + 2xydy = 0$, $\quad$ Solución: $x^2 + 3y^2 = c/x$, $\quad c \in \Re$

d) $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$, $\quad$ Solución: $y = \frac{x}{c+\ln x}$, $\quad c \in \Re$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + x\sqrt{x^2+y^2}}{xy}$, $\quad$ Solución: $y^2 = x^2((\ln x + c)^2 - 1)$, $\quad c \in \Re$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y^2}{3xy}$, $\quad$ Solución: $y^2 = \frac{x^2}{4} + cx^{-2/3}$, $\quad c \in \Re$

g) $y' = \frac{y-x}{y+x}$, Solución: $x = \frac{ce^{-\arctan u}}{\sqrt{u^2+1}}$, $y = \frac{cue^{-\arctan u}}{\sqrt{u^2+1}}$, $c \in \Re$

h) $y' = \frac{x+y-3}{1-x+y}$, $\quad$ Solución: $x = \frac{c}{\sqrt{u^2-2u+1}} + 2$, $y = \frac{cu}{\sqrt{u^2-2u+1}} + 2 + 1$, $\quad c \in \Re$

i) $y' = \frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$, $\quad$ Solución: $ce^{x-y} = 3x - 4y + 1$, $\quad c \in \Re$

115. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden exactas.

a) $(\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy))dx + x^2\cos(xy)dy = 0$, Solución: $x\operatorname{sen}(xy) = c$, $c \in \Re$

b) $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$, $\quad$ Solución: $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = c$, $\quad c \in \Re$

c) $y' = -\frac{\tan y}{\tan t}$, factor integrante $\cos t \cos y$, Solución: $\operatorname{sen} y \operatorname{sen} t = c$, $c \in \Re$

d) $3x(xy-2)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$, $\quad$ Solución: $x^3y + y^2 - 3x^2 = c$, $\quad c \in \Re$

e) $(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy = 0$, Solución: $x^4 - x^2y^2 - 4xy + 6x = c$, $c \in \Re$

f) $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$, $\quad$ Solución: $x^3 + 2x^2y + y^2 = c$, $\quad c \in \Re$

g) $2ty + (y^2 - 3t^2)y' = 0$, factor integrante $1/y^4$, Solución: $\frac{t^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$, $c \in \Re$

h) $2tydt + (1+t^2)dy = 0$, $\quad$ Solución: $t^2y + y = c$, $\quad c \in \Re$

i) $2t\cos y + 3t^2y + (t^3 - t^2\operatorname{sen} y - y)y' = 0$, Solución: $t^2\cos y + t^3y - \frac{y^2}{2} = c$, $c \in \Re$

116. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

a) $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$, $\quad$ Solución: $y = \frac{e^{3x}}{2} + ce^x$, $\quad c \in \Re$

b) $\frac{dy}{dx} = x^2e^{-4x} - 4y$, $\quad$ Solución: $y = \frac{x^3}{3}e^{-4x} + ce^{-4x}$, $\quad c \in \Re$

c) $r'(\theta) + \tan(\theta)r(\theta) = sec(\theta)$, $\quad$ Solución: $r = \operatorname{sen}\theta + c\cos\theta$, $\quad c \in \Re$

d) $y' = \frac{e^{x+y}}{y-1}$, $\quad$ Solución: $-ye^{-y} = e^x + c$, $\quad c \in \Re$

e) $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y^{-3})dy = 0$, $\quad$ Solución: $x^2y - x^3 + \frac{1}{y^2} = c$, $\quad c \in \Re$

f) $2xy^3dx - (1-x^2)dy = 0$, $\quad$ Solución: $\frac{1}{2y^2} = \ln(1-x) + \ln(1+x) + c$, $\quad c \in \Re$

g) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 2x^2y^2$, $\quad$ Solución: $y = \frac{1}{cx^2 - 2x^3}$, $\quad c \in \Re$

h) $y' = \frac{12t+5y-9}{-5t-2y+3}$, Solución: $t = \frac{c}{\sqrt{u^2+5u+6}} - 3$, $y = \frac{cu}{\sqrt{u^2+5u+6}} + 9$, $c \in \Re$

i) $y' + \frac{y}{t+1} = -\frac{1}{2}(t+1)^3y^3$, Solución: $y = \frac{1}{(t+1)\sqrt{\frac{1}{2}t^2+t+c}}$, $c \in \Re$

j) $y' = \frac{3t-y+2}{6t-2y}$, Solución: $e^{\frac{2}{5}(3t-y)}(15t-3y)^{4/25} = ce^t$, $c \in \Re$

k) $y' = \frac{y(2ty+1)}{t(ty-1)}$, Solución: $ye^{1/yt} = ct^2$, $c \in \Re$

l) $3ty' - 2y = \frac{t^3}{y^2}$, Solución: $y^3 = t^3 + ct^2$, $c \in \Re$

m) $y' = 2\tan t \sec t - y^2 \operatorname{sen} t$, $y_1 = \sec t$, Solución: $y = \frac{3\cos^2 t}{c-\cos^3 t} + \sec t$, $c \in \Re$

n) $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$, Solución: $x + \frac{x^2}{y} = c$, $c \in \Re$

117. Resolver los siguientes problemas de valor inicial.

a) $ty' + (2t+1)y = te^{-2t}$, $y(1) = 0$

b) $y' + ycost = sentcost$, $y(0) = 0$

c) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^x$, $y(1) = e - 1$

d) $senxy' + ycosx = xsenx$, $y(\pi/2) = 2$

e) $x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x$, $y(2) = 0$

Aplicaciones.

Decaimiento radioactivo

118. La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Se define como semivida o periodo de semidesintegración al tiempo transcurrido para que se desintegre la mitad de la cantidad original.

En una cueva de Sudáfrica se encontró un cráneo humanoide junto con los restos de una fogata. Los arqueólogos creen que la edad del cráneo es igual a la de la fogata. Se ha establecido que solamente un 2 % de la cantidad original de Carbono 14 queda en la madera quemada de la fogata. Calcule la edad del cráneo si la semivida del C-14 es aproximadamente 5600 años.

119. En 1977 la tasa de carbono 14 radiactivo de un pedazo de carbón que se encontró en Stonehenge, en el sur de Inglaterra, era de 4,16 desintegraciones por minuto por gramo. Dado que la tasa de carbono 14 radiactivo de un árbol vivo es de 6,68 desintegraciones por gramo por minuto y suponiendo que el árbol que se quemó para producir el carbón que se cortó durante la construcción de Stonehenge, estimar la fecha de dicha construcción. (Semivida C-14=5600)

120. Si en un instante dado tenemos 300 gramos de sustancia radiactiva y al cabo de 5 años quedan 200 gramos. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir antes de que queden solamente 10 gramos?

Farmacología

121. El Amparax es un ansiolítico indicado para el alivio a corto plazo de la ansiedad. Se administra por vía oral y se absorbe perfectamente. Las concentraciones en sangre máximas tienen lugar 2 horas después de la administración. La vida media del Amparax es entre 12 y 16 horas aproximadamente. Estimar el tiempo a partir del cual su concentración en sangre está por debajo del 10 %.

Crecimiento bacteriano

122. Un cultivo tiene una cantidad inicial de P_0 de bacterias. Cuando $t = 1$ hora, la cantidad de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$. Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacteria presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de bacterias.

123. En un cierto cultivo de bacteria se sabe que la velocidad de crecimiento de la población es en cada momento directamente proporcional al número de bacterias existentes en dicho momento. Se sabe también que el tamaño de la pobalción al cabo de 4 horas es el triple de la población inicial. Hallar el número de bacterias que habrá en el cultivo transcurridas 10 horas.

Diseminación de una enfermedad

124. Una epidemia se desarrolla en una población de forma tal que en cada instante de tiempo, la velocidad de desarrollo de la infección es directamente proporcional al número de personas infectadas por el número de personas sanas. Si la población tiene 10000 habitantes, el número de personas infectadas inicialmente es 50 y al cabo de tres dias es 250 personas, averiguar el número de personas que se habrán contagiado al cabo de 12 días.

Modelos de población

125. *a*) Utilizar los datos de la tabla sobre el censo de población de España para ajustar mediante el método de mínimos cuadrados un modelo de crecimiento malthusiano.

   b) Con el método anterior predecir la población española en el año 2050 y calcular el período en que se duplica la población.

   c) Calcular el error cometido en el año 2000 con este modelo. Censo de la población española (INE) (en millones de habitantes)

1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930
15.6	16.2	16.8	17.76	18.5	19.8	21.2	23.4

1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
25.7	27.8	30.3	33.6	37.5	38.9	40.0

126. Repetir los apartados b) y c) del ejercicio anterior utilizando la población española en 1900 como dato inicial y la de 1950 como dato para ajustar la constante el modelo malthusiano.

127. Para s_0=0.02 ajustar un modelo logístico al caso de la población española utilizando: a) Los datos correspondientes a 1860 (condición inicial) y 1900 b) Los datos correspondientes a 1920 (condición inicial) y 1980 c) ¿Cuál sería la población de equilibrio en cada uno de los apartados anteriores? d) ¿En qué año se alcanzaría según el modelo del apartado b) los 50 millones de habitantes?

128. En 1974, se introdujo en el Parque Nacional de Doñana un lote de 1000 ejemplares de cangrejo rojo (Procambarus clarkii) de una partida de esta especie importada desde

Louisiana. En 1980, se comprobó que la especie se había adaptado con tanto éxito que su población se había quintuplicado. a) Estimar mediante un modelo malthusiano su población actual. b) Según este modelo en qué año había en Doñana un millón de cangrejos americanos.

129. En el año 1970 la población de la Tierra era de 3.600 millones de personas. En 1980 había alcanzado la cifra de 4.500 millones. a) Usando la ley de Malthus, calcule la población estimada para el año 2010. b) ¿En qué año se alcanzaron o se alcanzarán los 7.000 millones de habitantes? c) ¿Cuánto tiempo tarda la población terrestre en doblarse según el modelo?

130. La población en Estados Unidos era de 226,5 millones de habitantes en 1990 y de 275 millones en el año 2000. Predecir la población en el año 2050 utilizando un modelo logístico (s_0=0.02)

Problemas de mezclas

131. En un lago que contiene un millón de metros cúbicos de agua contaminada, a razón de 0,2 partes de contaminante en cada millón de partes de masa, se descarga un río con agua descontaminada fluyendo a una velocidad de 3 m3/min y sale del lago con el mismo caudal. ¿Cuánto tiempo tardará en reducirse a la mitad la concentración de contaminante?

132. Considérese un gran tanque que contiene 1000 litros de agua, dentro del cual una solución de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de 6 litros por minuto. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior del tanque con el mismo caudal. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de un gramo por litro, determina cuándo la concentración de sal en el tanque será de medio gramo por litro.

133. Una solución salina que contiene 2 g de sal por litro fluye hacia el interior de un tanque que se encuentra inicialmente lleno con 500 litros de agua que contiene disuelta 50 g de sal. La solución fluye a razón de 5 litros por minuto. La mezcla se mantiene uniforme mediante agitación, sale del tanque a la misma velocidad.

    a) Determina la concentración de sal en el tanque al cabo de 10 minutos.

    b) Transcurridos 10 minutos, se presenta una fuga en el tanque por donde sale un litro adicional por minuto. Calcula la concentración de sal contenida en el tanque en g/litro al cabo de 20 minutos.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

134. Considerando la ley de Newton del calentamiento de un cuerpo, que establece que la razón de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio y la del propio cuerpo:

    a) Dar la relación de la temperatura con el tiempo, siendo T_0 la temperatura inicial del cuerpo y M la del medio. ($M > T_0$)

b) Un vino rojo se saca de una bodega, que es un lugar frío a $10°C$, y se deja reposar en un cuarto a temperatura de $23°C$. ¿En qué momento la temperatura del vino llegará a ser de $18°C$, si transcurren 10 minutos para alcanzar los $15°C$?

135. Una taza de chocolate caliente, que inicialmente se encuentra a $90°C$ de temperatura, se enfría hasta $75°C$ en 10 minutos mientras permanece servida en una habitación con temperatura de $20°C$. Usando la ley de Newton del enfriamiento, calcule la temperatura de la taza al cabo de 1 hora.

136. Por razones obvias, la sala de disección de un forense se mantiene fría a una temperatura constante de $5°C$. Mientras se encontraba realizando la autopsia de la víctima de un asesinato, el propio forense es asesinado, y el cuerpo de la víctima robado. A las 10 de la mañana el ayudante del forense descubre el cadáver a una temperatura de $23°C$. A las 12 del mediodía, su temperatura es de $18,5°C$. Supuesto que el forense tenía en vida la temperatura normal de $37°C$ ¿A qué hora fue asesinado el forense?

137. En la mañana de un sábado caluroso, mientras los empleados se encuentran trabajando, el acondicionador de aire mantiene la temperatura interior del edificio a $24°C$. A mediodía se apaga el acondicionador y la gente regresa a casa. La temperatura externa permanece constante en $35°C$ durante el resto de la tarde. Si la constante de tiempo del edificio es de 4 horas, ¿cuál será la temperatura interior del edificio a las 2:00 PM? ¿y a las 6:00 PM? ¿En qué momento la temperatura interior será de $27°C$?

138. Se va a construir un almacén que no contará con sistema de climatización. Dependiendo de la cantidad de aislamiento, la constante de tiempo del edificio podrá variar de 1 a 5 horas. Se supone que la temperatura exterior varía en forma de una onda senoidal, durante un período de 24 horas, con un mínimo de $15°C$ a las 2:00 AM y un máximo de $32°C$ a las 2:00 PM. Despreciando el término exponencial en la expresión de temperatura, comparar las temperaturas mínimas y máximas en el interior del edificio para constantes de tiempo de 1 y 5 horas.

139. Suponer que en el ejemplo anterior se instala un termostato que se utiliza para comparar la temperatura interior del edificio con la temperatura deseada TD.

    - Si $T < T_D$ se pone en marcha el sistema de calefacción.
    - Si $T \geq T_D$ se activa el sistema de refrigeración.

    La fuente específica de calor, $U(t)$, viene dada entonces por $U(t) = K_U(T_D - T(t))$. Repetir el ejercicio anterior con $K_U = 2, T_D = 22°C$.

Mecánica newtoniana

140. Calcular la velocidad con la que cae un cuerpo en caída libre (con velocidad inicial nula) sometido a la fuerza de gravedad y a la resistencia del aire que supondremos proporcional a su velocidad y opuesta a su movimiento.

141. Un objeto con masa de 3 kg se suelta a partir del reposo, a 500 m del suelo, y cae por efecto de la gravedad. Suponiendo que la fuerza gravitacional es constante, esto es $g = 9.81m/seg^2$, y que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto con constante de proporcionalidad $k = 3kg/seg$, determinar en qué momento el objeto golpea contra el suelo.

142. Un paracaidista cuyo peso (masa en realidad) es de 75 kg se deja caer desde un avión a 4000 m de altura, y caeo por efecto de la gravedad. Supóngase que la fuerza gravitacional es constante, esto es $g = 9.81 m/seg^2$, y que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista con constante de proporcionalidad $k_1 = 15 kg/seg$ cuando el paracaídas está cerrado y $k_2 = 105 kg/seg$ cuando el paracaídas está abierto. Si el paracaídas se abre un minuto después de abandonar el avión, ¿al cabo de cuanto tiempo toma tierra el paracaidista?

143. Un objeto con masa de 2 kg se suelta partiendo del reposo desde una plataforma de 30 metros sobre el agua y se le deja caer bajo la influencia de la gravedad. Después de que el objeto golpea la superficie del agua, empieza a sumergirse con la gravedad atrayéndole hacia abajo y la fuerza de boyanza empujándolo hacia arriba. Suponiendo que la fuerza de la gravedad es constante (g = 9.81 m/seg2), que la fuerza de boyanza para este objeto es 1/2 de su peso, y que la fuerza debida a la resistencia del aire o a la resistencia del agua es proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad de 10 en el aire y de 100 en el agua, encontrar la ecuación del movimiento del objeto en cada medio. ¿Cuál será la velocidad del objeto 1 minuto después de haberse soltado?, ¿a qué profundidad bajo el agua estará en ese instante?

Procesos bioquímicos

144. La secreción de hormonas en la sangre suele ser una actividad periódica. Si se supone un ciclo de 24 horas, entonces la tasa de variación de la cantidad de una determinada hormona e la sangre se puede representar por medio del siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha - \beta cos\frac{\pi t}{12} - kx \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde $x(t)$ es la cantidad de dicha hormona contenida en la sangre a tiempo t, $\alpha - \beta cos\frac{\pi t}{12}$ representa la cantidad de hormona segregada por unidad de tiempo (siendo α la secreción media por unidad de tiempo), y kx es la velocidad con la que el organismos elimina la hormona. Resolver este problema para $\alpha = \beta = 1$, $k = 2$ y $x_0 = 10$.

Algunos ejercicios de exámenes anteriores.

145. Elegir la opción que contiene la solución de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\arcsin x + \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

   a) $y \arcsin x + \frac{y}{x} = c$
   b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x^2} = c$
   c) $y \arcsin x + \frac{y}{x} = 1$
   d) No es diferencial exacta.

146. Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$y' - xy = 2xy^{1/2}$$

147. Se llama reacción autocatalítica a aquella en la que uno de los productos actúa como catalizador. La reacción autocatalítica más sencilla es, $A + R \to R + R$, para la que la cinética es,

$$-\frac{dC_A(t)}{dt} = kC_A C_R$$

donde C_A y C_R son las concentraciones de las sustancias A y R. Sabiendo que la suma de los moles de las especies A yR permanece constante en el tiempo a medida que A va desapareciendo, y suponiendo que las concentraciones iniciales de A y R son $C_A(0) = a$ y $C_R(0) = r$, plantear y resolver el correspondiente problema de valor inicial que de la evolución de la concentración de A en cada instante de tiempo.

148. Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = xdy$$

149. Un cuerpo con una masa de 9.7 kg se suelta de una altura de 300 m sin velocidad inicial. El cuerpo encuentra una resistencia al aire proporcional a su velocidad. Si la velocidad límite debe ser 95 m/s, encontrar:

    a) La velocidad del cuerpo a tiempo t.

    b) La posición del cuerpo a tiempo t.

    c) El tiempo que necesita el cuerpo para alcanzar la velocidad de 50 m/s.

    (Nota: la velocidad límite es $\lim_{t\to\infty} v(t)$ y permite calcular la constante de proporcionalidad de la resistencia al aire.)

150. Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$xy' + 2y = 8x^2\sqrt{y}$$

151. De acuerdo con una teoría cosmológica, había igual cantidad de los dos isótopos de Uranio ^{235}U y ^{238}U en el momento del *Big Bang*. En el momento actual hay 137,7 átomos de ^{238}U por cada átomo de ^{235}U. Considerando como vida media para el ^{238}U $4,5 \times 10^9$ a nos y para el ^{235}U $0,71 \times 10^9$ a nos, dar una estimación de la edad del universo.

152. Dada la ecuación diferencial ordinaria siguiente

$$y' = \frac{3t^2y^2 - 2ye^{at}}{e^{at} - 2yt^3}$$

    a) Encontrar el valor de la constante a para que sea una ecuación diferencial ordinaria exacta.

    b) Hallar la solución general de dicha ecuación diferencial ordinaria exacta.

    c) Hallar la solución particular que pasa por el punto $(1, 0)$.

153. En una habitación que contiene $300m^3$ de aire limpio se va a celebrar una fiesta. En un instante dado $t = 0$ algunas personas comienzan a fumar, de modo que el humo empieza a invadir la habitación a una velocidad de $3m^3/h$, conteniendo una concentración de $0.04gr/m^3$ de monóxido de carbono. Al mismo tiempo, abrimos una ventana por la que sale el humo a la misma velocidad. Si pide:

a) Establecer el problema de Cauchy que modeliza la cantidad de monóxido de carbono $y(t)$ que hay en la habitación en cada instante de tiempo t.

b) Resolver dicho problema de Cauchy, es decir, encontrar una expresión para la cantidad de monóxido de carbono $y(t)$ que hay en la habitación en cada instante de tiempo t.

c) ¿Cuándo debería abandonar una persona prudente la fiesta considerando que el monóxido de carbono comienza a ser peligroso con una concentración superior a $0.0002 gr/m^3$?

8. Tema 8. Métodos numéricos de resolución de EDO de primer orden.

154. Dado el problema de valor inicial $y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 0$, con solución exacta $y(t) = t^2(e^t - e)$,

   a) Usar el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compararla con los valores reales de $y(t)$.
   b) Usar los valores obtenidos para aproximar por interpolación lineal $y(1.04)$, $y(1.55)$ y $y(1.97$.
   c) Calcular el valor de h necesario para que $|y(t_i) - w_i| \leq 0.1$ en $t_i = 2$.

155. La ley de Stefan de radiación de un cuerpo viene dada por la ecuación:

$$\frac{dT}{dt} = \sigma(M^4 - T^4)$$

donde T es la temperatura del cuerpo que radia, M es la temperatura (constante) del medio que le rodea y σ es la constante de Stefan-Boltzman ($\sigma = 40^{-4}(°C)^{-4}(seg)^{-1}$). Aproximar $T(1)$ mediante el método de Euler con $h = 0.1; M = 70; T(0) = 100$.

156. Aplicando el método de Euler (h=0.25), calcule una aproximación de y(1):

$$y' = y(2 - y) \quad y(0) = 3$$

157. Utilice 5 iteraciones del método de Euler para aproximar el valor de la solución en $t = 1$:

$$y' = t^2 - y \quad y(0) = 2$$

158. Usar el método de Euler para aproximar las soluciones de cada unos de los problemas de valor inicial siguientes y comparar con la solución exacta.

   a) $y' = te^{3t} - 2y,\ 0 \leq t \leq 1,\ y(0) = 0,\ h = 0.5,\ y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$
   b) $y' = 1 + (t - y)^2,\ 2 \leq t \leq 3,\ y(2) = 1,\ h = 0.5,\ y(t) = t + (1 - t)^{-1}$
   c) $y' = 1 + y/t,\ 1 \leq t \leq 2,\ y(1) = 2,\ h = 0.25,\ y(t) = t\,lnt + 2t$
   d) $y' = cos2t + sen3t,\ 0 \leq t \leq 1,\ y(0) = 1,\ h = 0.25,\ y(t) = \frac{1}{2}sen2t - \frac{1}{3}cos3t + \frac{4}{3}$

159. Repetir el ejercicio anterior usando el método de Taylor de orden 2.

160. Repetir el ejercicio anterior usando el método de Taylor de orden 4.

161. Repetir el ejercicio anterior usando el método de Punto Medio.

162. Repetir el ejercicio anterior usando el método de Euler modificado.

163. Probar que los métodos de Punto Medio, Euler modificado y Heun dan las mismas aproximaciones para el problema de valor inicial

$$y' = -y + t + 1,\ 0 \leq t \leq 1,\ y(0) = 0$$

164. Escribir el tablero de Butcher para los métodos de Runge-Kutta de orden 2: Punto Medio, Euler Modificado y Heun.

165. Probar que el método de Runge-Kutta de tablero,

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ \hline & 2/9 & 1/3 & 4/9 \end{array}$$

es de orden 3.

166. Demostrar que el método de Punto Medio es consistente, estable y convergente, suponiendo que se aplica a un problema de valor inicial con las condiciones necesarias para que esté bien condicionado.

167. Demostrar que el método de Euler modificado es consistente, estable y convergente, suponiendo que se aplica a un problema de valor inicial con las condiciones necesarias para que esté bien condicionado.

9. Tema 9. EDO de segundo orden y aplicaciones.

Reducción del orden.

168. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, reduciendo el orden.

   a) $xy'' - y' = 3x^2$ Solución: $y = x^3 + c_1x^2 + c_2, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   b) $y'' + k^2y = 0$ Solución: $y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   c) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ Solución: $y = \ln((x + c_1)^2 - c_2), \quad c_1, c_2 \in \Re$

EDO de segundo orden lineales.

169. Encuentra la solución general de la ecuación diferencial dada:

   a) $y'' + 8y' - 9y = 0$ Solución: $y = c_1e^{-9x} + c_2e^x, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   b) $6y'' - 11y' + 3y = 0$ Solución: $y = c_1e^{x/3} + c_2e^{3x/2}, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   c) $y'' + 11y = 0$ Solución: $y = c_1 \cos(\sqrt{11}x) + c_2 \sin(\sqrt{11}x), \quad c_1, c_2 \in \Re$
   d) $y'' - 2y' + y = 0$ Solución: $y = c_1e^x + c_2xe^x, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   e) $y'' + 2y' + 4y = 0$ Solución: $y = c_1e^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + c_2e^{-x} \sin(\sqrt{3}x), \quad c_1, c_2 \in \Re$

170. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden lineales con coeficientes constantes. Para calcular una solución particular, utilizar el método de los coeficientes indeterminados cuando sea posible, en caso contrario, utilizar el método de variación de constantes.

   a) $y'' + 3y' + 2y = 3x + 1$ Solución: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + (6x - 4)/4, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   b) $y'' + 3y' + 2y = e^{3x}$ Solución: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + e^{3x}/20, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   c) $y'' + y' = 5$ Solución: $y = c_1 + c_2e^{-x} + 5x, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   d) $y'' - y' - 12y = e^{4x}$ Solución: $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x} + xe^{4x}/7, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   e) $y''+y = tanx$ Solución: $y = c_1 \cos(x)+c_2 \sin(x)-\cos(x) \ln|\sec(x)+\tan(x)|, c_1, c_2 \in \Re$
   f) $y'' - y' - y = senx$ Solución: $y = c_1e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\cos(x)}{5} - \frac{2\sin(x)}{5}, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   g) $y'' + 2y' - 3y = x^2cos\pi x$
   h) $y'' + 2y' - 3y = 5e^{-3x}$ Solución: $y = c_1e^x + c_2e^{-3x} - 5xe^{-3x}/4, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   i) $y'' - y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + 10cos2x$ Solución: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + x^2e^{-x} - 2\cos(2x), \quad c_1, c_2 \in \Re$
   j) $y''+y = sec(x)$ Solución: $y = c_1 \cos(x)+c_2 \sin(x)+\cos(x) \ln|\cos(x)|+x \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \Re$
   k) $y'' - 8y' - 33y = 546 \sin(x)$ Solución: $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{11x} + 273(4 \cos(x) - 17 \sin(x))/305, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   l) $4y'' - 12y' + 9y = e^{5x} + e^{3x}$ Solución: $y = (c_1 + c_2x)e^{3x/2} + \frac{e^{5x}}{49} + \frac{e^{3x}}{9}, \quad c_1, c_2 \in \Re$
   m) $y'' + 6y' + 5y = e^{-x} + x^2 - 1$ Solución: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-5x} + xe^{-x}/4 + \frac{x^2}{5} - \frac{12x}{25} + \frac{37}{125}, \quad c_1, c_2 \in \Re$

n) $y'' + 2y' - 3y = e^x + 1$ Solución: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + xe^x/4 - 1/3, \quad c_1, c_2 \in \Re$

ñ) $y'' + 6y' + 9y = x^2 - \sin(x) + e^x$ Solución: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + \frac{x^2}{9} - \frac{4x}{27} + \frac{2}{27} + \frac{3}{50}\cos(x) - \frac{2}{25}\sin(x) + \frac{e^x}{16}, \quad c_1, c_2 \in \Re$

171. Encuentre la solución del problema de valor inicial:

a) $4y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -11/2$ Solución: $y = e^{x/2}(\cos(x) - 6\sin(x))$

b) $y'' + 4y' + 7y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$ Solución: $y = e^{-2x}\cos(\sqrt{3}x)$

c) $y'' + 5y' - 14y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 1$ Solución: $y = e^{-7x} + 4e^{2x}$

d) $y'' + y = sec(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ Solución: $y = \cos(x) + 2\sin(x) + x\sin(x) + \cos(x)\ln|\cos(x)|$

e) $y'' - y' - 2y = \sinh(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ Solución: $y = \frac{1}{9}e^{2x} - \frac{1}{4}e^x + \frac{5}{36}e^{-x} + \frac{x}{6}e^{-x}$

172. Encontrar las soluciones particulares de la ecuación $y'' + 2y' - 3y = g(x)$ donde $g(x)$ es

a) $7\cos(3x)$

b) $5e^{-x}$

c) $x^2\cos(\pi x)$

d) $2xe^x\sin(x) - e^x\cos(x)$

e) $x^2e^x + 3xe^x$

Aplicaciones.

173. Una masa que pesa 2 kg estira un resorte 8 cm al llegar al reposo en equilibrio. Se tira luego de la masa a 15 cm debajo del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad de 30 cm/s dirigida hacia abajo. Despreciando todas las fuerzas de amortiguación o externas que puedan estar presentes, determine la ecuación de movimiento de la masa junto con su amplitud, periodo y frecuencia natural. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se suelta la masa hasta que pasa por la posición de equilibrio?

174. Una masa de 100kg se sujeta a un resorte suspendido del techo y hace que ese resorte se estire 20cm al llegar al reposo en equilibrio. Se tira luego de la masa 5cm por debajo de la posición de equilibrio y se suelta (velocidad incicial 0). Despreciando todas las fuerzas de amortiguación o externas que puedan presentarse, determinar la ecuación del movimiento de la masa, su amplitud, periodo y frecuencia natural y trazar la gráfica de este movimiento armónico simple.

175. Una masa de 5kg se sujeta a un resorte suspendido del techo y hace que ese resorte se estire 2m al llegar al reposo en equilibrio. Se eleva luego la masa 1m sobre el punto de equilibrio y se se le aplica una velocidad dirigida hacia arriba de 1/3 m/seg. Despreciando todas las fuerzas de amortiguación o externas que puedan presentarse, determinar la ecuación del movimiento armónico simple de la masa. ¿Cuándo alcanzará la masa por primera vez su altura máxima después de haberse puesto en movimiento?

176. Una masa que pesa 4 kg estira un resorte 50 cm al llegar al reposo en equilibrio. Luego se levanta la masa a 15 cm arriba del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad dirigida hacia abajo, de 30 cm/s. Determina el movimiento armónico simple de la masa. ¿Con qué velocidad y en qué dirección se moverá la masa 10 segundos después de haber sido soltada?

177. El movimiento de un sistema resorte-masa con amortiguación está regido por

$$x''(t) + bx'(t) + 25x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Encontrar la ecuación del movimiento para b=8, 10 y 12.

178. El movimiento de un sistema resorte-masa con amortiguación está regido por

$$x''(t) + bx'(t) + 16x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Encontrar la ecuación del movimiento para b=6, 8 y 10.

179. Un circuito RLC en serie tiene una fuerza electromotriz dada por $E(t) = sen100tV$, un resistor de 0.02Ω, un inductor de $0.001H$ y un condensador de $2F$. Si la corriente inicial y la carga inicial del condensador son cero, determinar la corriente del circuito para $t > 0$.

180. Un sistema resorte-masa con amortiguación consta de una masa de $7kg$, un resorte con constante $3N/m$, una componente de fricción con constante de amortiguación de $2Ns/m$ y una fuerza externa dada for $f(t) = 10cos10tN$. Usando un resistor de 10Ω, construir un circuito RLC en serie que sea análogo a este sistema mecánico, en el sentido que ambos sistemas estén regidos por la misma ecuación diferencial.

181. Una masa de 20 kg. estira un resorte 98 cm. al llegar al reposo en equilibrio. La constante de amortiguación del sistema es de 140 N seg/m. Si la masa se tira 25 cm hacia abajo de la posición de equilibrio y se le aplica una velocidad dirigida hacia arriba de 1 m/seg, ¿En qué momento regresará a su posición de equilibrio?

182. Una masa de 1kg estira un resorte 9,8 cm al llegar al reposo en equilibrio. La constante de amortiguación del sistema es de 0,2 N seg/m. Si la masa es impulsada hacia abajo a partir de la posición de equilibrio con una velocidad de 1m/seg, ¿en qué momento alcanzará su máximo desplazamiento debajo de la posición de equilibrio?

183. Una masa de 10 kg se sujeta a un resorte suspendido del techo. Esto ocasiona que el resorte se estire 2 m al llegar al reposo en equilibrio. En el instante t=0, se le aplica una fuerza externa $f(t) = 20\cos(4t)$ N al sistema. La constante de amortiguación del sistema es de 3 N seg/m. Determine la solución estacionaria del sistema.

184. Una masa de 2 kg se sujeta a un resorte suspendido del techo. Esto ocasiona que el resorte se estire 20 cm al llegar al reposo en equilibrio. En el instante t=0 la masa se desplaza 5 cm debajo de la posición de equilibrio y se suelta. En el mismo instante, se aplica una fuerza externa $f(t) = 0.3\cos(t)$ N al sistema. La constante de amortiguación del sistema es 5 N seg/m. Determine la ecuación de movimiento de la masa.

185. Un circuito RLC en serie tiene una fuerza electromotriz dada por $E(t) = 40cos2tV$, un resistor de 2Ω, un inductor de $0.25H$ y un condensador de $1/13F$. Si la corriente inicial es cero y la carga inicial del condensador es $3.5C$, determinar la carga del condensador para $t > 0$.

Algunos ejercicios de exámenes anteriores.

186. Una masa que pesa 4 kg estira un resorte 50 cm al llegar al reposo en equilibrio. Luego se levanta la masa a 15 cm arriba del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad dirigida hacia abajo, de 30 cm/s. Determina el movimiento armónico simple de la masa. ¿Con qué velocidad y en qué dirección se moverá la masa 10 segundos después de haber sido soltada?. ¿Cual es la altura máxima que alcanza la masa?

187. Reducir el orden de la siguiente EDO y resolverla

$$y'' = \frac{(y')^2}{y}$$

188. Elegir la opción que contiene el conjunto fundamental de soluciones de la EDO de segundo orden lineal y homogénea $y'' - 2y' + y = 0$.

    a) $y_1(x) = c_1 e^x, \quad y_2 = c_2 e^{-x}$
    b) $y_1(x) = c_1 e^x, \quad y_2 = c_2 e^{x}$
    c) $y_1(x) = c_1 e^x, \quad y_2 = c_2 x e^{x}$
    d) $y_1(x) = c_1 e^x, \quad y_2 = c_2 e^{2x}$

189. Encontrar una solución particular mediante el método de coeficientes indeterminados para la EDO de segundo orden lineal $y'' - 2y' + y = 4\cos 3x - 2\sin 2x$. Observar que la correspondiente EDO homogénea es la misma que en el problema anterior.

190. Un partícula se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ley:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 13x = 0$$

    Si esa partícula empieza su movimiento en $x = 0$, con una velocidad inicial de 6 m/s hacia la izquierda, hallar:

    a) x en función de t.
    b) Los tiempos en que se producen las paradas.

191. Calcular la solución general $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ de la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden (utilizar el principio de superposición),

$$y'' - 8y' - 9y = -10e^{-x} - 425cos2x.$$

    Encontrar la solución que verifica $y(0) = 13$ e $y'(0) = -7$.

192. Una caja de 196 N cuelga de un resorte suspendido del techo. Una vez en equilibrio se tira hacia abajo de la caja haciéndola desplazar 0.25 m y se suelta. Sabiendo que la constante de restitución es $k = 80\, N/m$ y no hay amortiguación, hallar:

    a) la ecuación del movimiento de la caja,
    b) el tiempo necesario para que la caja se mueva desde la posición inicial hasta 0.0625 m por debajo de la posición de equilibrio.

    Nota: observar que se da el peso y no la masa, usar $g = 9.8m/s^2$.

10. Tema 10. Sistemas lineales de EDO de primer orden y aplicaciones.

Resolución práctica.

193. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:

$a)$ $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x-3y \\ y' & = & x-2y \end{array}\right.$

$b)$ $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+y \\ y' & = & 4x-2y \end{array}\right.$

$c)$ $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x-4y \\ y' & = & x+y \end{array}\right.$

$d)$ $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x-y \\ y' & = & y-4x \end{array}\right.$

$e)$ $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x-y \\ y' & = & x+3y \end{array}\right.$

$f)$ $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+y \\ y' & = & x+y+t \end{array}\right.$

$g)$ $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+2y+e^t \\ y' & = & 2x+y+e^{3t} \end{array}\right.$

$h)$ $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+2y+t-1 \\ y' & = & 3x+2y-5t-2 \end{array}\right.$

Aplicaciones.

194. Dos grandes tanques (A y B), cada uno de ellos con 100 litros, se encuentran interconectados por medio de tubos. El líquido fluye del tanque A hacia el B a razón de 3 litros por minuto y de B hacia A a razón de 1 litros por minuto. El líquido contenido en el interior de cada tanque se mantiene bien agitado. Una solución de salmuera con una concentración de 2 kg por litro fluye hacia el tanque A a razón de 6 litros por minuto. La solución (diluida) fluye hacia fuera del sistema del tanque A a razón de 4 litros por minuto y del tanque B a razón de 2 litros por minuto. Si inicialmente el tanque A solo tiene agua y el tanque B contiene 200 kg de sal, determine la cantidad de sal contenida en cada tanque en cada instante t.

195. Dos grandes tanques (A y B), cada uno de ellos con 400 litros, se encuentran interconectados por medio de tubos. El líquido fluye del tanque A hacia el B a razón de 12 litros por minuto y de B hacia A a razón de 2 litros por minuto. El líquido contenido en el interior se mantiene bien agitado. Una solución de salmuera con una concentración de 20 gramos por litro fluye hacia el tanque A a razón de 25 litros por minuto. La solución (diluida) fluye hacia fuera del sistema del tanque A a razón de 15 litros por minuto y del tanque B a razón de 10 litros por minuto.

   $a)$ Si inicialmente el tanque A solo tiene agua y el tanque B contiene 8 kg de sal, determine la cantidad de sal contenida en cada tanque en cada instante t.

   $b)$ ¿Cuál será la concentración de sal cuando $t \to \infty$?

196. Un edificio consta de dos zonas A y B. Solamente la zona A es calentada por un calefactor, que genera 11000 Cal por hora. La capacidad calorífica de la zona A es de $(0.25 \cdot 10^{-3})°C$ por Cal. Las constantes de tiempo de transferencia de calor son: entre la zona A y el exterior, 4 horas, entre la zona no calentada B y el exterior, 5 horas; y entre ambas zonas, 2 horas. Si la temperatura exterior permanece constante a $0°C$ y ambas estancias se encuentran inicialmente a $20°C$.

   a) Determine la temperatura de ambas zonas.

   b) ¿A qué temperatura puede llegar a enfriarse a lo sumo la zona B?

197. Si en el ejemplo anterior el aislamiento entre las zonas A y B fuera mejor, digamos si la constante de tiempo de la transferencia de calor entre las zonas A y B fuera de 3 horas, entonces, ¿a qué temperatura podría enfriarse la zona no calentada?.

Algunos ejercicios de exámenes anteriores.

198. Resolver el siguiente problema de Cauchy,

$$\begin{aligned} x' + y &= 0 \\ 4x + y' &= 3 \end{aligned}$$

con la condición inicial $x(0) = 7/4$, $y(0) = 4$.

199. Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{dx}{dt} = x - y + e^{3t},$$

$$\frac{dy}{dt} = y - x.$$

200. Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{dx}{dt} = x + y + 3e^{t},$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y + 2x.$$