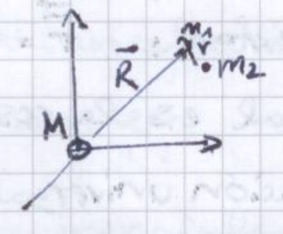
~ Fuerzas de marea

Karina Arnfeld

Consideremos como ejemplo una masa puntual como fuente del campo externo

$$\phi(\vec{R}) = -\frac{GM}{R}$$



Las derivadas son:

$$\partial_i \phi = \frac{GM}{R^3} R_i \qquad \partial_i \partial_j \phi = \frac{GM}{R^3}\delta_{ij} - \frac{3GM}{R^5} R_i R_j$$

$\nabla^2 \phi = 0$ por $R \neq 0$ (ecuacion de Poisson en vacío)

$$\frac{L\partial^2\phi}{\partial\phi} \sim \frac{L\, GM/R^3}{GM/R^2} = \frac{L}{R} \ll 1$$. La condición se cumple.

Tierra-Luna: $L \sim 10^3 - 10^4$ km, $R \sim 10^5$ km : OK!

Para el sistema Tierra-Sol, mucho mejor.

~~Dado que la~~ Cuál es más importante?

$$\frac{M_{moon}}{M_{sun}} \sim \frac{10^{22}\,kg}{10^{30}\,kg} \sim 10^{-8} \qquad \left(\frac{d_{moon-Earth}}{d_{sun-earth}}\right)^3 \approx \left(\frac{10^5}{10^8}\right)^3 \sim 10^{-9}$$

La luna tiene una masa menor, pero un efecto ~~mas largo~~ mayor.

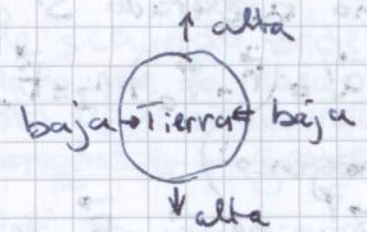
Orientemos el sistema de coordenadas de ahí que $\vec{R} = (R, 0, 0)$

$$\partial_i \partial_j \phi = \frac{GM}{R^3}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{F}_m = -(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi = \frac{GM}{R^3}\begin{pmatrix} 2r_x \\ -r_y \\ -r_z \end{pmatrix}$$

~~Atra~~ Repulsiva en dirección a la fuente: marea alta.

Atractiva en dirección transversa: marea baja.

Las mareas occurren cada 6 horas



PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

- Masa gravitacional (gravitatoria) y masa inercial

2ª ley de Newton: $\vec{F} = m_I \vec{a}$

La masa inercial es la resistencia a cambiar su velocidad

Ley de gravitación universal: la masa m_g mide el acoplo con el campo gravitacional ~~($\vec{F} \propto m_g$)~~. Es la carga gravitacional de un cuerpo: $\vec{F} = m_g \vec{g}$

En principio, $m_I \neq m_g$. No hay ninguna razón teórica para que sean iguales. Observacionalmente se mide que $m_g = m_I$ por cada cuerpo. Este hecho experimental elevado a principio físico se llama

- Principio de equivalencia de Galileo (o débil)

~~(hecho exp. elevado a principio físico)~~

Como se puede comprobar? Pendulo: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_I l}{m_g g}}$

Se puede cambiar la composición sin cambiar l y ver si T varía. Newton y, más tarde, Bessel (1830) concluyeron que $\left| \frac{m_I}{m_g} - 1 \right| < 10^{-3}$

Eötvös en 1889: $< 10^{-9}$. Hoy: 10^{-15}

- Gravedad e inercia

Esto nos permite una interpretación muy interesante.

Considerese un sistema inercial S y uno acelerado S' con aceleración $\vec{a}_0$: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 \Rightarrow m_I \vec{a}' = (\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_0) m_I = \vec{F} - m_I \ddot{\vec{r}}_0$ (fuerzas ficticias)

Por otro lado, en un campo gravitatorio (homogeneo!) $\vec{g}$: $m_I \vec{a} = \vec{F} + m_g \vec{g}$

Si $m_I = m_g$, no se pueden distinguir!

En el sistema en caída libre (acelerado con $\vec{g}$), no hay gravedad: $m_I \vec{a}' = \vec{F} + \cancel{m_g \vec{g} - m_I \vec{g}} = \vec{F}$

~~Podemos~~

Si el campo es inhomogeneo, la cancelación no es completa. Las fuerzas de marea permanecen.

~~Los sistemas en caída libre son inerciales.~~

Esto no se pasa con EM, porque hay cargas diferentes: p y e^- caen de manera diferente en un campo electrico. Porqué para la gravedad sí?

- Principio de equivalencia de Einstein (o fuerte)

Todas las leyes físicas (excepto la gravedad) son las mismas, a escalas suficientemente pequeñas (= localmente), en un sistema en caída libre en un campo grav. o en un sistema inercial sin gravedad.

Alternativamente: las leyes físicas son iguales, localmente, en un sistema inercial con gravedad y en un sistema acelerado

Consequencias:

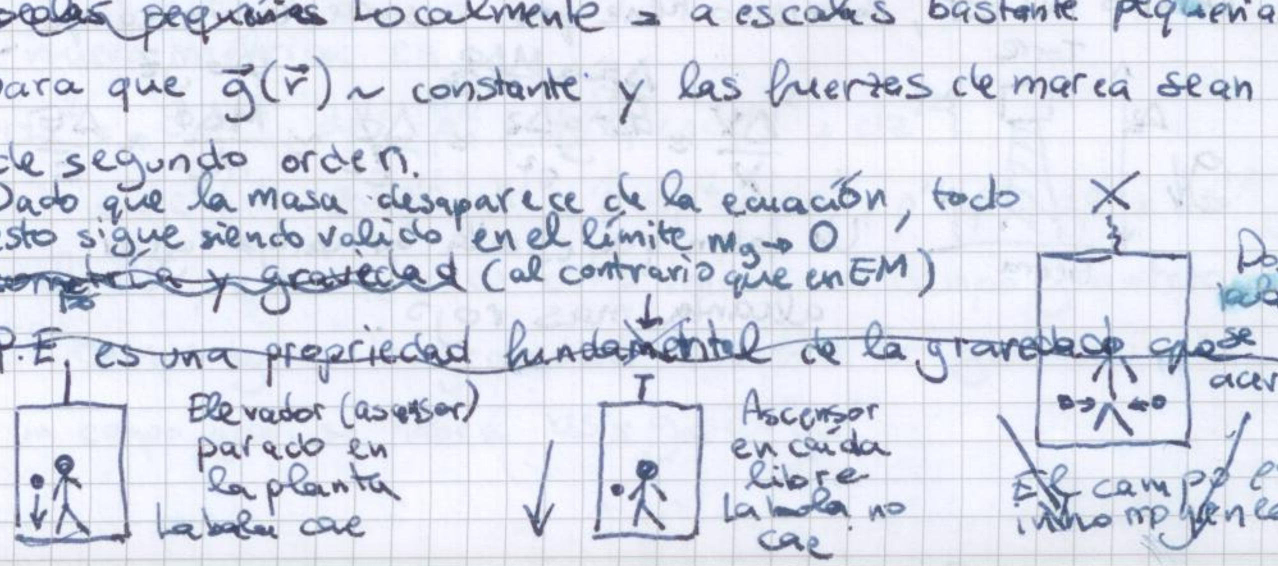
1) Hay una nueva clase de sistemas inerciales: los sistemas en caída libre en un campo gravitatorio
2) Localmente, se puede simular la gravedad con aceleración (excepto las fuerzas de marea)

~~A escalas pequeñas~~ Localmente = a escalas bastante pequeñas para que $\vec{g}(\vec{r}) \sim$ constante y las fuerzas de marea sean de segundo orden.

3) Dado que la masa desaparece de la ecuación, todo esto sigue siendo valido en el límite $m_g \to 0$

- ~~Geometría y gravedad~~ (al contrario que en EM)

~~El P.E. es una propiedad fundamental de la gravedad que~~



4| Gravedad y geometría

Consecuencias del PE: en ~~un si~~ caída libre, la relatividad especial es válida. Fotones se propagan en línea recta.

1) En un sistema rotante (= no inercial) con velocidad angular constante alrededor de un eje paralelo a un rayo de luz, el rayo describe una hélice. Si rota alrededor de un eje $\perp$ al rayo, el rayo describe una espiral.

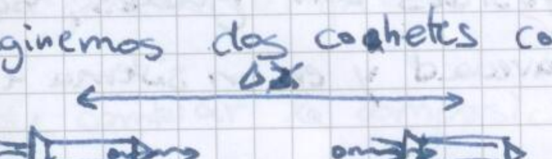
Esto simula un campo gravitatorio $\Rightarrow$ la luz tiene que curvar en un campo grav.

2) Ascensor en caída libre

~~Un~~ fotón se propaga en línea recta

El fotón cae con el ascensor: desde fuera se verá el rayo curvarse

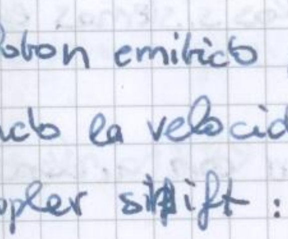
3) Imaginemos dos cohetes con aceleración constante a



Un fotón emitido por A ~~llega~~ alcanza B después $\Delta t = \Delta x/c$ cuando la velocidad se ha incrementado de $\Delta v \approx a\Delta t \approx a\Delta x/c$

Doppler shift: $\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta v}{c} \approx \frac{a\Delta x}{c^2}$

Debido al EP, lo mismo tiene que pasarse en un campo g



$\phi = gz$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{g\Delta z}{c^2} \approx \frac{\Delta\phi}{c^2} \approx \frac{M\Delta\phi}{Mc^2} \approx \frac{\Delta E}{E}$$

Un fotón que escala un campo grav alcanza más rojo.

De manera más relativista. Energía del foton en el sistema acelerado $p^{0'}$ es

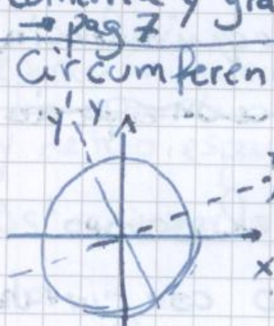
$$p^{0'} = \gamma\left(p^0 - \frac{v p^x}{c^2}\right) = \gamma p^0\left(1 - \frac{at}{c}\right) = \gamma p^0\left(1 - \frac{ax}{c^2}\right)$$

$cp^0 = |\vec{p}|$, $v = at$

- Geometría y gravedad. Consideremos el siguiente ejemplo:

→ pag 7

4) Circumferencia en un sistema ~~rotante~~ que rote:



Tanto S como S' veen una circumferencia. Cuando miden el diametro, regla ⊥ al movimiento

$\Rightarrow d = d'$.

Al medir la circ., regla // al movimiento. La regla L' de S', para S medirá $L < L'$ (contracción de Lorentz)

Para los dos la circumferencia mide n reglas

$$n = \frac{\ell}{L}, \quad n = \frac{\ell'}{L'} \Rightarrow \frac{\ell'}{d'} = \frac{\ell}{d}\frac{L'}{L} = \pi\frac{L'}{L} > \pi$$

S' vee una geometría no Euclidea!

Por el PE, la gravedad modifica la geometría!

~~⇒ pag 7~~

En general, la métrica de Minkowski (SR) es

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\vec{x}^2 = -c^2dt^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 + d\rho^2$$

(en coordenadas cilíndricas)

Un punto sigue la trayectoria

$\rho = \rho'$, $\phi = \phi' + \omega t$, $z = z'$, $t = t'$

La nueva métrica es

$$ds^2 = -c^2dt'^2 + d\rho'^2 + \rho'^2(d\phi' + \omega dt')^2 + dz'^2$$

$$= -c^2\left(1 - \frac{\omega^2\rho'^2}{c^2}\right)dt'^2 + 2\omega\rho'^2 dt' d\phi' + \rho'^2 d\phi'^2 + d\rho'^2 + dz'^2$$

Por el P.E., esta métrica debe imitar un campo gravitatorio

~~El campo grav~~ La gravedad modifica la geometría!

En un campo grav. se habrá $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$

6| Para describir la gravedad tenemos que modificar la métrica
~~Consi Algunas consideraciones.~~

1) ~~Campo grav. ⇒ $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$~~ $\eta_{\mu\nu}$ sin gravedad → $g_{\mu\nu}$ con grav.

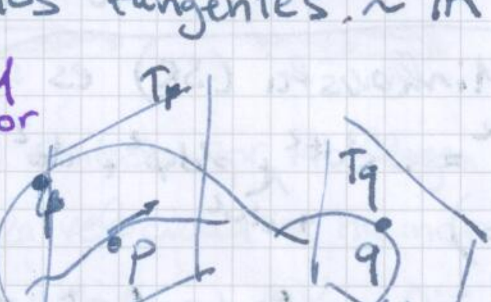
2) ~~No es simplem~~ Un campo gravitatorio no es completamente equivalente a un cambio global de coordenadas (como ~~en~~ sería en ~~este~~ el ejemplo precedente). El PE solo habla de equivalencia local. ~~Veremos que la gravedad se asocia a un espacio~~

3) Como se pueden distinguir? Veremos que el campo gravitatorio es asociado ~~a~~ a un espacio-tiempo con curvatura.
"Localmente" significa ~~que~~ en un entorno del punto: debemos poder ~~eliminar~~ transformar $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ y $\partial g_{\mu\nu} \to 0$.
Veremos que no hay grados de libertad bastantes para ~~poner~~ eliminar $\partial^2 g_{\mu\nu}$ ~~a 0~~. Las derivadas segundas nos darán la curvatura (⇒ fuerzas de marea!)

La idea es de aproximar localmente el espacio-tiempo curvo $\mathcal{M}$ con hyperplanos tangentes $\sim \mathbb{R}^n$.

Cerca de p, $\mathcal{M}$ está descrita por $x^\mu \in \mathbb{R}^n$

Todo lo que es definido sobre $\mathcal{M}$ se puede linealizar



1) curvas ~~en~~ sobre $\mathcal{M}$ en p
2) Vectores tangentes
3) ~~p~~ hyperplano tangente T_p

$f \simeq f(p) + \left.\frac{df}{d\lambda}\right|_p d\lambda$ $\quad \left.\frac{df}{d\lambda}\right|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right|_p \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ $\quad$ otra curva $\tilde{x}^\mu(\eta)$: $\frac{d}{d\eta} = \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\eta} \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p$

En ~~el~~ T_p, la SR es válida. La curvatura de $\mathcal{M}$ permanece accesible a través de las derivadas segundas (⇒ mareas!)

Un espacio donde esto es posible en cada punto se llama variedad diferenciable.

Esta ~~va~~ generalisación del concepto de derivadas, sin hacer referencia a que estén inmersas en $\mathbb{R}^n$, es el sujeto de la geometría diferencial.

Ejemplos 1) superficie esférica inmersa en $\mathbb{R}$: variedad de dimensión 2
2) no tienen que ser inmersas: grupo SO(3) de matrices invertibles con det = 1
Rotaciones parametrizadas por θ y $\hat{n}$. Podemos hacer geom. y cálculo ~~sobre~~ en SO(3)

Repaso de SR ... nos dice que en caída libre localmente la SR es ~~válida~~ válida.
No hay gravedad. Efectos sólo a través de fuerzas de marea. (de segundo orden en ∂)

Teoría del espacio-tiempo en 4 dim: eventos $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$

Separación entre eventos: $\Delta s^2 \equiv -c^2\Delta t^2 + \Delta\vec{x}^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$

$\Delta x^0 \equiv c\Delta t$, $\eta_{\mu\nu} \equiv \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, $\mu,\nu = 0,1,2,3$

Separación puede ser: de tipo tiempo $(\Delta s^2 < 0)$, de tipo luz $(\Delta s^2 = 0)$ y de tipo espacio $(\Delta s^2 > 0)$

Δs^2 es <u>invariante</u> bajo <u>transformaciones de Poincaré</u>:

$$x^\mu \longrightarrow \begin{cases} x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu & \text{(translaciones temporales y espaciales)} \\ x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu & \text{(rotaciones y boost de Lorentz)} \end{cases}$$

Translación: $\Delta x^\mu = 0 \Rightarrow \Delta s^2 = 0$

Boost: $\Delta s'^2 = (\Lambda\Delta x)^T \eta \Lambda \Delta x = \Delta x^T(\Lambda^T\eta\Lambda)\Delta x$

La condición necesaria y suficiente es que $\boxed{\Lambda^T\eta\Lambda = \eta}$

Con índices: $\Lambda^{\mu'}{}_\mu \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$

Parecido a R^TR para rotaciones

Forman el grupo de Poincaré: $O(3,1)$

Rotaciones y boosts forman el grupo de Lorentz $SO(3,1)$

Ejemplo: $\Lambda^{\mu'}{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ rotación alrededor de $\hat{z}$ $(0 < \theta < 2\pi)$

$\Lambda^{\mu'}{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & & \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ boost en dirección $\hat{x}$ $(-\infty < \phi < \infty)$

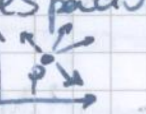
$\Delta t' = \cosh\phi(\Delta t - \tanh\phi\,\Delta x)$, $\Delta x' = \cosh\phi(\Delta x - \tanh\phi\, c\Delta t)$

Podemos identificar $v = \tanh\phi$, $\phi = \tanh^{-1} v$, $\gamma = \cosh\phi$

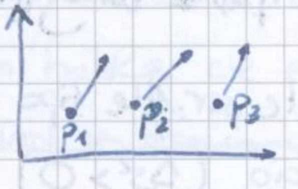
Los sistemas inerciales en SR forman una clase de equivalencia, conectados por transf. de Poincaré

~~Transformación inversa: $\Lambda_{\nu'}{}^\mu \equiv (\Lambda^{-1})^\mu{}_{\nu'}$~~

<u>Vectores</u> en $\mathbb{R}^4$. ~~Para~~ cada $p \in \mathbb{R}^4$ ~~podemos~~ las separaciones Δx^μ forman un espacio vectorial real T_p. Estos espacios son también $\mathbb{R}^4$



Un conjunto de vectores que contenga un vector por cada $p \in \mathbb{R}^4$ ($v \in T_p$) se llama campo vectorial:



<u>Base</u> de T_p: conjunto de $n=4$ vectores linealmente indep. La base natural es $\hat{e}_{(\mu)}$ ($\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$), <u>la misma por todos</u> los T_p. $v(p) = v^\mu(p)\,\hat{e}_{(\mu)}$ $\forall v \in T_p$
↑ componentes

<u>Ejemplo</u> Curva en $\mathbb{R}^4$ $x^\mu(\lambda)$

El vector tangente en p tiene componentes $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$

Bajo Lorentz, $v^\mu \to v^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} v^\mu$, pero v es invariante

<u>Ejemplo</u> Cambio de coordenadas: cartesianas (inercial) $\to$ cilíndricas (no inercial)

↳ pag 5-6

~~Repaso de álgebra lineal~~ → pag 9

~~Después~~ Tras haber definido T_p, podemos definir su dual T_p^* (espacios de las 1-formas / covectores) y los tensores:

Tensor de ~~orden~~ rango (k, l): transformación multilineal desde T_p y T_p^* en $\mathbb{R}$:

$$T: T_p^* \times \dots \times T_p^* \times T_p \times \dots \times T_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

Vector: rango $(1,0)$ Covector: $(0,1)$

Matriz: rango $(2,0)$

(when $\phi \to -\phi$, $v \to -v$

Transformación inversa: $\Lambda_{\nu'}{}^{\mu} \equiv (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu'}$ (será claro más tarde

Un vector (objeto geométrico) es invariante:

$$v = v^\mu \hat{e}_{(\mu)} = v^{\mu'} \hat{e}_{(\mu')} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} v^\nu \hat{e}_{(\mu')} \Rightarrow \hat{e}_{(\mu)} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \hat{e}_{(\mu')}$$

$$\Rightarrow \hat{e}_{(\mu')} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu'} \hat{e}_{(\nu)} = \Lambda_{\mu'}{}^{\nu} \hat{e}_{(\nu)}$$ the basis transforma con Λ^{-1}

T_p^* (espacio cotangente) es el dual de T_p. Espacio de todas las aplicaciones lineales $\omega: T_p \to \mathbb{R}$

Base de T_p^* $\hat{\theta}^{(\mu)}$ tal que $\hat{\theta}^{(\nu)}(\hat{e}_{(\mu)}) = \delta^{\nu}{}_{\mu}$

Por todos covectores $\omega \in T_p^*$, $\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}$

componentes

Acción de ω sobre $v \in T_p$:

$$\omega(v) = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}(v^\nu \hat{e}_{(\nu)}) = \omega_\mu v^\nu \underbrace{\theta^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)})}_{\delta^{\mu}_{\nu}} = \omega_\mu v^\mu$$

linealidad (producto escalar)

Bajo Lorentz:

invariante

$$\omega(v) = \omega_\mu v^\mu = \omega_{\mu'} v^{\mu'} = \omega_{\mu'} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} v^\mu \Rightarrow \omega_\mu = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \omega_{\mu'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\nu} \omega_\nu} \quad \boxed{\hat{\theta}^{(\mu')} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \hat{\theta}^{(\nu)}}$$

con Λ^{-1} — con Λ

Considérese un tensor de rango (1,1). Es un mapa $T: T_p^* \otimes T_p \to \mathbb{R}$

Hagamos actuar sobre $v \in T_p$. Ahora es un mapa $T(\ldots, v): T_p^* \to \mathbb{R} \Rightarrow$ es un vector

De la misma manera, $T(\omega, \ldots): T_p \to \mathbb{R}$ con $\omega \in T_p^*$ es un covector.

$T(\ldots, v)$ tiene que descomponerse como $[T(\ldots, v)]^\mu \hat{e}_{(\mu)}$

y $T(\omega, \ldots)$ como $[T(\omega, \ldots)]_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}$

$$\Rightarrow T = \underbrace{T^{\mu}{}_{\nu}}_{\text{componentes}} \underbrace{\hat{e}_{(\mu)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu)}}_{\text{base}}$$

In general, una base de los tensores de rango (k, l) es

$$\hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \ldots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \ldots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)} \quad (\text{dimensión } 4^{k+l})$$

Bajo Lorentz, para que T sea invariante, $T^{\mu_1' \ldots \mu_k'}{}_{\nu_1' \ldots \nu_l'} = \Lambda^{\mu_1'}{}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\mu_k'}{}_{\mu_k} \Lambda_{\nu_1'}{}^{\nu_1} \cdots \Lambda_{\nu_l'}{}^{\nu_l} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l}$

Cada índice arriba/abajo transforma como un vector/cov.

Ej. $T^{\mu}{}_{\nu} v^\nu \to \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \underbrace{\Lambda_{\nu'}{}^{\nu} \Lambda^{\nu'}{}_{\rho}}_{=\delta^{\nu}{}_{\rho}} T^{\mu}{}_{\nu} v^\rho = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} v^\nu$ (como un vector) ~~(contracción)~~ Índices repetidos son invariantes!

~~Ej. $\eta_{\mu\nu}$: (0,2)~~ → pag 12

Geometría differencial

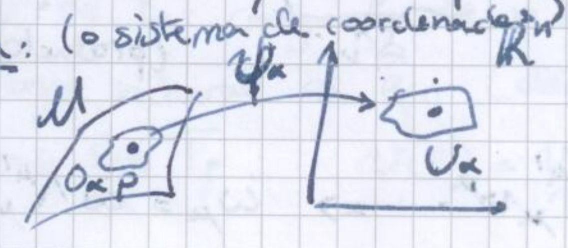
Tema 3

El objeto central es la variedad diferenciable

Def Una variedad dif. $\mathcal{M}$ es un espacio topológico conexo localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (n = dimensión de $\mathcal{M}$)

Localmente homeomorfo ≡ hay una ~~conjunto~~ colección de cartas con empalmes suaves que lo cubren y lo mapean en $\mathbb{R}^n$

Carta: (o sistema de coordenadas)



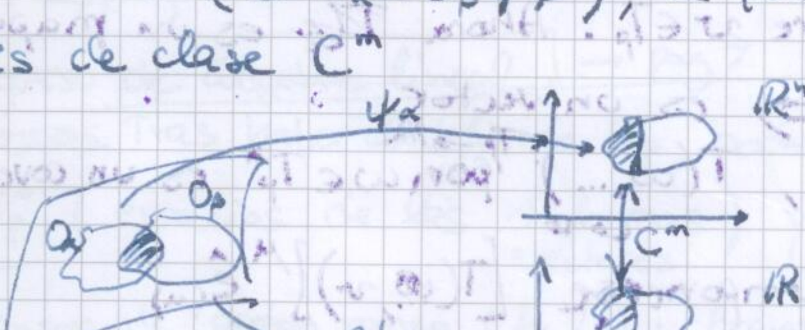
$O_\alpha \subset \mathcal{M}$ conjunto abierto de $\mathcal{M}$

$U_\alpha = \psi_\alpha(O_\alpha)$ (imagen de O_α)

ψ_α es invertible y continua

1) Las cartas cubren $\mathcal{M}$: ~~cada~~ cualquier $p \in \mathcal{M}$ se encuentra en al menos un O_α. De forma equivalente $\mathcal{M} = \bigcup O_\alpha$

2) las cartas son suavemente ~~cosidas~~ empalmadas: por cada O_α y O_β con ~~si hay~~ intersección no nula (si $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$), la función $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^m



La colección de cartas $\{(O_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$ es un atlas

3) El atlas es maximal (contiene todas las posibles cartas que satisfacen 1) y 2))

Una variedad diferenciable de clase C^m es un espacio topológico junto con un atlas maximal de clase C^m (en $\mathbb{R}^n$)

El espacio hereda la estructura diferencial de $\mathbb{R}^n$: una función $f: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ ($f(p) \in \mathbb{R}$) es diferenciable si $f \circ \psi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable

- Vectores ~~sobre~~ sobre $\mathcal{M}$

Consideremos una curva en $\mathcal{M}$.

$$\gamma : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$$
$$\lambda \longmapsto \gamma(\lambda) \in \mathcal{M}$$

Como tenemos un sistema de coordenadas sobre $\mathcal{M}$ (cartas), esto da lugar a una curva en $\mathbb{R}^n$

$$\gamma_\alpha \circ \psi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{e.g. } x^\mu(\lambda))$$

Ahora podemos hablar de vector tangente a la curva

Es conveniente introducir los vectores de manera más ~~formal~~ intrínseca.

Un campo escalar sobre $\mathcal{M}$ es una función

$$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto f(p) \in \mathbb{R}$$

La carta nos da $f \circ \psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que sabemos derivar. Por abuso de lenguage se habla de $f(x^\mu)$.

<u>Def</u> Un <u>vector</u> en p es un objeto que actúa sobre campos escalares para producir un número : $v(f)|_p \in \mathbb{R}$ y satisface

1) linealidad $v(af+bg)|_p = a\, v(f)|_p + b\, v(g)|_p$
2) Leibniz : $v(fg)|_p = v(f)|_p\, g + f\, v(g)|_p$

Dada una curva $\gamma(\lambda)$ y un campo escalar f, tenemos $f \circ \gamma = \underbrace{(f \circ \psi_\alpha^{-1})}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} \circ \underbrace{(\psi_\alpha \circ \gamma)}_{(a,b) \to \mathbb{R}^n}$

Vector tangente a la curva γ en p:

$$\dot{\gamma}|_p^{(f)} \equiv \frac{d f(\gamma(\lambda))}{d\lambda} = \left.\frac{\partial f(x^\alpha)}{\partial x^\mu}\right|_{\psi_\alpha(p)} \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

Satisface la def de vector. Una otra curva $\tilde{\gamma}(\eta)$ daría un otro $\dot{\tilde{\gamma}}|_p$ ~~$\dot{\tilde\gamma}|_p = \frac{\partial f(x^\alpha)}{\partial x^\mu}\Big|_{\psi_\alpha(p)} \frac{dx}{d\eta}$~~, pero ambos contienen

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right|_{\psi_\alpha(p)}$$

 ~~Definición~~ Base

Podemos definir ~~$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p (f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Big|_{\varphi_\alpha(p)}$~~ los vectores

$\partial_\mu|_p = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p$ ~~como~~ a traves su accion sobre un dado f:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Big|_{\varphi_\alpha(p)}.$$

Forman una <u>base</u> ~~de~~ de T_p

<u>Ejemplo</u> Superficie ellipsoidal inmersa en $\mathbb{R}^3$, localmente homeom. a $\mathbb{R}^2$

$\vec{r} = (a\cos\phi\cos\theta, b\sin\phi\cos\theta, c\sin\theta)$ $\left.\begin{array}{l}\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \varphi \in [0, 2\pi)\end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^2$

curva $\vec{r}(\lambda) \to \{\phi(\lambda), \theta(\lambda)\}$

$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\lambda} + \frac{d\vec{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{d\lambda}$ $\left\{\begin{array}{l}\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = (-a\sin\phi\cos\theta, b\cos\phi\cos\theta, 0) \\ \frac{d\vec{r}}{d\theta} = (-a\cos\phi\sin\theta, -b\sin\phi\sin\theta, \cos\theta)\end{array}\right.$

derivadas de $f(\vec{r})$:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\cdot\vec{\nabla} f + \frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\vec{r}}{d\theta}\cdot\vec{\nabla} f$$

Componentes del vector tangende: $\left\{\frac{d\varphi}{d\lambda}, \frac{d\theta}{d\lambda}\right\}$

Vectores de base: $\frac{d}{d\varphi} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\cdot\vec{\nabla}$, $\frac{d}{d\theta} = \frac{d\vec{r}}{d\theta}\cdot\vec{\nabla}$

Son derivadas direccionales tangentes a la superficie. No tenemos que saber nada de la estructura diferencial de $\mathbb{R}^3$

(de pag. 9)

<u>Ejemplo</u> $\delta^\mu{}_\nu$ es un tensor de rango $(1,1)$

$\eta_{\mu\nu}$ de rango $(0,2)$, y $\eta^{\mu\nu}$ de rango $(2,0)$

Podemos utilisar $\eta^{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu}$ para obtener nuevos tensores.

Por ejemplo dados v^μ y ω_μ, definimos

$$\underset{(\text{covector})}{v_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} v^\nu}, \quad \omega^\mu \equiv \eta^{\mu\nu}\omega_\nu \ (\text{vector})$$

Esta operación se dice bajar y subir indices.

Transf. de Lorentz: $\eta^{\rho\mu}(\Lambda^{\mu'}{}_\mu \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_\nu) = \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\mu} = \delta^\rho{}_\nu$

$\Rightarrow \eta^{\rho\mu}\Lambda^{\mu'}{}_\mu \eta_{\mu'\nu'} \equiv \Lambda_{\nu'}{}^\rho$. $\quad \Lambda_{\nu'}{}^\rho \Lambda^{\nu'}{}_\nu = \delta^\rho{}_\nu$

Eso es porque definimos $\Lambda_{\nu'}{}^\rho \equiv (\Lambda^{-1})^\rho{}_{\nu'}$

<u>Definición</u> Dado un sistema de coordenadas x^μ, los vectores $\{\partial_\mu|_p\}_{\mu=1,\dots,n}$ se llaman base natural (o coordenada) de T_p.

También se indican como $e_\mu|_p \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p$

Cualquier $v \in T_p$ se puede expresar como $v = v^\mu \partial_\mu|_p$

<u>Espacio cotangente</u> Como en Minkowski, el dual T_p^* de T_p es el espacio de aplicaciones lineales sobre T_p. Sus miembros $\omega \in T_p^*$ se llaman covectores (o 1-formas).

$$\omega : T_p \to \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto \omega(v) \in \mathbb{R}$$

Base dual de T_p en T_p^* : $\theta^\alpha(e_\beta) \equiv \delta^\alpha_\beta$

<u>Definición:</u> la diferencial de una función escalar $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ es un elemento de T_p^* tal que

$$df|_p(v|_p) \equiv v(f) = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Big|_p$$

Asocia a un vector la derivada ~~direcciona~~ de f tangente a este vector.

Tomando $f(x^\mu) = x^\alpha$ ~~se toma~~ y $v = \partial_\beta|_p$

$$dx^\alpha|_p(\partial_\beta|_p) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}\Big|_p = \delta^\alpha_\beta$$

definición

$\theta^\alpha|_p \equiv dx^\alpha|_p$ es la base dual (diferenciales de las coordenadas)

Cada 1-forma $\omega \in T_p^*$ se expresa como $\omega = \underset{\text{componentes}}{\omega_\mu}\, dx^\mu$.

Su acción sobre $v \in T_p$ es

$$\omega(v) = \omega_\mu dx^\mu\left(v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \omega_\mu v^\nu \underbrace{dx^\mu(\partial_\nu)}_{\delta^\mu_\nu} = \omega_\mu v^\mu$$

~~Pro~~ $\Rightarrow$ producto escalar de las componentes (como en Minkowski)

La diferencial $df|_p$ se expresa como $df|_p = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\, dx^\mu|_p$

<u>Transformación</u> bajo <u>cambios de coordenadas</u> $x^{\mu} \to \tilde{x}^{\mu'}$ (genérico!)

$\partial_{\mu} \to \tilde{\partial}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\mu'}} \partial_{\mu}$, pero $v \in T_p$ es invariante

$v = v^{\mu}\partial_{\mu} = \tilde{v}^{\mu'}\tilde{\partial}_{\mu'} = \tilde{v}^{\mu'}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\mu'}}\partial_{\mu} \Rightarrow v^{\mu} = \tilde{v}^{\mu'}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\mu'}}$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{v}^{\mu'} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} v^{\mu}}$

Para que $\underbrace{\omega(v)}_{=\omega_{\mu}v^{\mu}}$ sea invariante $\Rightarrow \boxed{\tilde{\omega}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\mu'}} \omega_{\mu}}$

Para que $\omega = \omega_{\mu} dx^{\mu}$ sea invariante $\Rightarrow \boxed{d\tilde{x}^{\mu'} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}}$

<u>Tensores</u> Como en Minkowski, un tensor de rango (k, l) es una aplicación multilineal

$$T : \underbrace{T_p^* \times \dots T_p^*}_{k} \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_{l} \to \mathbb{R}$$

Puede expresarse como

$$T = \underbrace{T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}}_{\text{componentes}} \underbrace{\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}}_{\text{base}}$$

Dada la transf. de ∂_{μ} y dx^{ν}, ~~tran~~ las componentes se transforman como

$$\tilde{T}^{\mu_1' \dots \mu_k'}{}_{\nu_1' \dots \nu_l'}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_k'}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1'}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu_l'}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x)$$

Para ~~campo~~ un escalar : $\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x)$

Simetrías Si $T_{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_k} = \pm T_{\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_k}$, el tensor T es simétrico / antisimétrico en ij.
(bajo cambio $i \leftrightarrow j$)

Un tensor (anti-) simétrico con respecto a cualquier par de índices ⇒ totalmente (anti-) simétrico
Def (Anti-) simetrisación ⇒ (*)
Un tensor totalmente antisimétrico con p índices se llaman p-forma, y constituyen un espacio vectorial Λ^p

Por ejemplo, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}$ es una 2-forma
Una función escalar: 0-forma, y su diferencial: 1-forma

Derivadas de tensores

Vimos que $\partial f / \partial x^\mu$ es una 1-forma. ¿Y $\partial_\mu \omega_\nu$?

$$\tilde{\partial}_\mu \tilde{\omega}_\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \partial_\alpha \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \omega_\beta \right) = \underbrace{\frac{\partial x^\alpha \partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \partial_\alpha \omega_\beta}_{\text{ok}} + \underbrace{\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \omega_\beta}_{???}$$

El término adicional ~~se anula~~ desaparece para transf. de Lorentz ($\Lambda^\mu{}_\nu$ const) pero no aquí. Las bases en puntos diferentes no están alineadas, y los tensores transforman de manera diferente.

∂T es un tensor de rango $(k, l+1)$. $\tilde{\partial} \tilde{T}$ todavía es un tensor $(k, l+1)$, ~~pero es~~ (mapa multilineal), pero es un otro tensor, no el transformado de ∂T.

Sin embargo, $\tilde{\partial}_\mu \tilde{\omega}_\nu - \tilde{\partial}_\nu \tilde{\omega}_\mu = \frac{\partial x^\alpha \partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} (\partial_\alpha \omega_\beta - \partial_\beta \omega_\alpha)$.
El término adicional es (simétrico) y desaparece.

(*) Def. (Anti-) simetrisación

$$T_{(\mu_1 \dots \mu_n)\rho \dots}{}^{\sigma \dots} = \frac{1}{n!} \left(T_{\mu_1 \dots \mu_n \rho \dots}{}^{\sigma \dots} + \text{permutaciones de } \mu_1 \dots \mu_n \right)$$

$$T_{[\mu_1 \dots \mu_n]\rho \dots}{}^{\sigma \dots} = \frac{1}{n!} \left(T_{\mu_1 \dots \mu_n \rho \dots}{}^{\sigma \dots} + \text{permutaciones con signo} \right)$$

Todo lo dicho se extiende a campos tensoriales: un tensor en cada $p \in \mathcal{M}$. Un campo tensorial nos da un campo escalar en lugar de un numero. Por ejemplo, dada $f \in \mathcal{F}: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ (función escalar) y un campo vectorial ~~tens.~~ X,

$$X(f): \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$
$$p \to X(f)(p) \equiv X|_p(f)$$

es una nueva función escalar. Un campo vectorial actúa sobre un campo escalar para dar un otro campo escalar.
~~Un campo tens. actúa sobre f para dar un otro campo escalar.~~

~~Densidad tensoriales~~ Campo de 1 formas: actúa sobre campo vectorial para dar un esc.

$$\omega(X): \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto \omega(X)(p) \equiv \omega(X_p)|_p$$

Por ejemplo, $df(X) = X(f)$ es la diferencial.

No están necesariamente definidos en toda $\mathcal{M}$. Por ejemplo, dada una carta (O_α, ψ_α), los $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ solo están definidos en O_α

Densidad tensoriales Supongamos un tensor $(0,2)$ $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ y tomemos su determinante $\det(g_{\mu\nu})$.

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \Rightarrow \det(\tilde{g}_{\mu\nu}) = |J|^{-2} \det g_{\alpha\beta}$$

$J = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta}$ matriz Jacobiana

Una densidad tensorial transforma adicionalmente con $|J|^w$ (w = peso de la densidad) ∴ $\det(g_{\mu\nu})$ = densidad escalar de peso -2

Def. La <u>derivada exterior</u> de una campo de p-formas $A_{\mu_1\dots\mu_p}$ es la $(p+1)$-forma

$$(dA)_{\mu_1\dots\mu_{p+1}} \equiv (p+1)\,\partial_{[\mu_1}A_{\mu_2\dots\mu_{p+1}]} \qquad \text{(totalmente antisimetrisada)}$$

Las derivadas exteriores (e.g. $F_{\mu\nu}=(dA)_{\mu\nu}$) transforman como tensores.

<u>Derivada de Lie</u>

Dado un campo vectorial, queremos ver como otros campos ~~los~~ tensoriales cambian ~~transforman~~ a lo largo del flujo generado por él.

$p,q\in\mathcal{M}$ $\quad \cancel{x^\mu(p)\ \ \tilde{x}^\mu(q)\equiv x^\mu+\xi^\mu}$ (infinitesimalment)

~~A lo largo de una curva de coordenadas~~, $\tilde{x}^\mu = x^\mu+\xi^\mu$ (infinitesimalmente)

$x^\mu=\varphi_\alpha(p) \quad \varphi_\alpha(q)=x^\mu+\xi^\mu\equiv\tilde{x}^\mu$

Para un campo escalar φ,

$$\delta\varphi \equiv \tilde{\varphi}(x)-\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}-\xi)-\varphi(x) \approx \cancel{\tilde{\varphi}(\tilde{x})} - \xi^\mu\partial_\mu\tilde{\varphi} - \cancel{\varphi(x)}$$

$$\approx -\xi^\mu\partial_\mu\varphi = -\xi(\varphi)$$ Cambio intrinseco, no debido a las coordenadas

Queremos generalizar esta idea.

Para un campo escalar f y un campo vectorial X, definimos

$$\boxed{\mathcal{L}_X(f) \equiv X(f)}$$ Transporte de f a lo largo de X

Para un campo vectorial v,

$$\delta v^\mu \equiv \tilde{v}^\mu(x) - v^\mu(x) \approx \tilde{v}^\mu(\tilde{x}) - \xi^\nu\partial_\nu\tilde{v}^\mu - v^\mu(x)$$

$$\approx \underbrace{\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}}_{\approx\,\delta^\mu_\nu+\partial_\nu\xi^\mu} v^\nu(x) - \xi^\nu\partial_\nu v^\mu - v^\mu(x) \approx v^\nu\partial_\nu\xi^\mu - \xi^\nu\partial_\nu v^\mu$$

Como $v(f)$ y $\xi(f)$ definen campos escalares, podemos tomar

$$\xi(v(f)) - v(\xi(f)) = \cancel{\xi^\mu\partial_\mu(v^\mu\partial_\mu f) - v^\mu\partial_\mu(\xi^\mu\partial_\mu f)} =$$

$$= \xi^\nu\partial_\nu(v^\mu\partial_\mu f) - v^\nu\partial_\nu(\xi^\mu\partial_\mu f) = \left[\xi^\nu\partial_\nu v^\mu - v^\nu\partial_\nu\xi^\mu\right]\partial_\mu f$$

Es un nuevo campo vectorial con componentes $-\delta v^\mu$

Derivada de Lie

Describe como campos tensoriales cambian a lo largo del flujo de un dado campo vectorial ξ (= a lo largo de curvas cuya tangente es ξ ~~el campo vectorial~~)

Tomemos $p, q \in \mathcal{M}$ con coordenadas x^μ y $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ (infinitesimalmente)

En q, tanto el tens ~~el campo vectorial~~ como las coordenadas son diferentes, pero ξ establece un diffeomorfismo entre un entorno de q y de p. Podemos utilizar $\tilde{x}^\mu$ para describir p, como un cambio de coordenadas.

$$\cancel{\delta T^{\alpha_1\dots\alpha_r}{}_{\beta_1\dots\beta_s} \equiv \underbrace{T^{\alpha_1\dots\alpha_r}{}_{\beta_1\dots\beta_s}(x^\mu+\xi^\mu)\big|_p}_{\text{campo en } q} - \underbrace{\tilde{T}^{\alpha_1\dots\alpha_r}{}_{\beta_1\dots\beta_s}(\tilde{x})\big|_q}_{\text{campo en } p \text{ descrito en las coordenadas de } q} \equiv (\mathcal{L}_\xi T)^{\mu}{}_{\dots}}$$

$$\cancel{\approx T^{\alpha_1\dots}{}_{\beta_1\dots}(x) + \xi^\mu \partial_\mu T^{\alpha_1\dots}{}_{\beta_1\dots} - \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}}_{\delta^{\alpha_1}_{\mu_1} + \partial_{\mu_1}\xi^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \tilde{x}^{\nu_1}} T^{\mu_1\dots}{}_{\nu_1\dots}(x)}$$

Campo escalar:

$$\delta f \equiv f(x+\xi) - \tilde{f}(\tilde{x}) \approx \cancel{f(x)} + \xi^\mu \partial_\mu f - \cancel{\tilde{f}(\tilde{x})}$$

"viejo" campo en el "nuevo" punto q — "nuevo" campo en el "viejo" punto p en las "nuevas" coordenadas

Campo vectorial v:

$$\delta v^\mu \equiv v^\mu(x+\xi) - \tilde{v}^\mu(\tilde{x}) \approx v^\mu(x) + \xi^\nu \partial_\nu v^\mu - \overbrace{\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}}^{\approx\, \delta^\mu_\nu + \partial_\nu \xi^\mu} v^\nu(x)$$
$$\approx \xi^\nu \partial_\nu v^\mu - v^\nu \partial_\nu \xi^\mu$$

Campo de covectores ω:

$$\delta \omega_\mu \equiv \omega_\mu(x+\xi) - \tilde{\omega}_\mu(\tilde{x}) \approx \omega_\mu(x) + \xi^\nu \partial_\nu \omega_\mu - \overbrace{(\delta_\mu^\nu - \partial_\mu \xi^\nu)}^{J \text{ inverso}}\omega_\nu$$
$$\approx \xi^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu \xi^\nu$$

Índices contravariantes con $-$, covariantes con $+$

Campo vectorial generico:

$$\delta T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} \equiv T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}(\tilde{x}) - \tilde{T}^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}(\tilde{x}) \equiv \underbrace{(\mathcal{L}_\xi T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}_{\text{componentes de la derivada de Lie}}$$

$$= \xi^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} - \sum_{i=1}^{k} T^{\mu_1\cdots\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\partial_\lambda \xi^{\mu_i} + \sum_{i=1}^{l} T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\lambda\cdots\nu_l}\partial_{\nu_i}\xi^\lambda$$

Por ejemplo, $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda}\partial_\nu\xi^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\xi^\lambda$

Cambio intrinseco de las componentes, "menos" el cambio de las coordenadas. ¿Como se espresa geometricamente?

Escalar: $\mathcal{L}_\xi(f) = \xi^\mu\partial_\mu f = \xi(f)$

vector: intentamos $\xi(v(f)) - v(\xi(f)) = \xi^\nu\partial_\nu(v^\mu\partial_\mu f) - v^\nu\partial_\nu(\xi^\mu\partial_\mu f)$

$$= [\xi^\nu\partial_\nu v^\mu - v^\nu\partial_\nu\xi^\mu]\partial_\mu f = \delta v^\mu\partial_\mu f = (\mathcal{L}_\xi v)(f)$$

$$\Rightarrow \cancel{(\mathcal{L}_\xi(v))(f)\;(\mathcal{L}_\xi v)(f) =}$$

Covector: actua sobre v (también: $\xi(\omega_\mu v^\mu) = \mathcal{L}_\xi^{\delta}(\omega_\mu v^\mu) \overset{\text{Leibnitz}}{=} \delta\omega_\mu v^\mu + \omega_\mu\delta v^\mu$)

$$\xi(\omega(v)) = \xi(\omega_\mu v^\mu) = \xi^\nu\partial_\nu(\omega_\mu v^\mu) = \xi^\nu v^\mu\partial_\nu\omega_\mu + \xi^\nu\omega_\mu\partial_\nu v^\mu$$

$$= \delta\omega_\mu v^\mu + \delta v^\mu\omega_\mu = (\mathcal{L}_\xi\omega)(v) + \omega(\mathcal{L}_\xi v)$$

$$\Rightarrow (\mathcal{L}_\xi\omega)(v) = \xi(\omega(v)) - \omega(\mathcal{L}_\xi v)$$

También se puede escribir (dado que $\omega(v) = v(\omega)$, $\omega(\mathcal{L}_\xi v) = (\mathcal{L}_\xi(v))(\omega)$ y $(\mathcal{L}_\xi\omega)(v) = v(\mathcal{L}_\xi\omega)$) ~~como~~

$$(\mathcal{L}_\xi v)(\omega) = \xi(v(\omega)) - v(\mathcal{L}_\xi\omega)$$

En general: $(\mathcal{L}_\xi T)(\omega_1,\ldots,\omega_k,v_1,\ldots,v_l) = \xi(T(\omega_1,\ldots,v_l)) - T(\mathcal{L}_\xi(\omega_1\otimes\ldots\otimes v_l))$

donde $\mathcal{L}_\xi$ satisface

1) Linealidad: $\mathcal{L}_\xi(a_1T_1 + a_2T_2) = a_1\mathcal{L}_\xi T_1 + a_2\mathcal{L}_\xi T_2$
2) Leibnitz: $\mathcal{L}_\xi(T_1\otimes T_2) = (\mathcal{L}_\xi T_1)\otimes T_2 + T_1\otimes(\mathcal{L}_\xi T_2)$

or un vector, también definimos $\xi(v(f)) - v(\xi(f)) = [\xi, v](f)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_\xi v = [\xi, v] \qquad \underline{\text{corchete de Lie}}$$

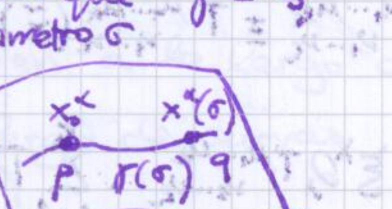
El corchete satisface

1) Antisim.
2) Linealidad
3) Leibnitz: $[\xi, fv] = f[\xi, v] + \xi(f)v$
4) Jacobi: $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

Curvas integrales del campo : $\gamma(\sigma)$ tal que $\dot{\gamma} = \xi$

Familia de Difeomorfismos $x_0^\alpha \xrightarrow{\phi_\sigma} x^\alpha(\sigma, x_0)$ con parametro σ

define una acción natural en los espacios tangentes.



$$v^\mu(x_0) \xrightarrow{\phi_\sigma^*} (\phi_\sigma^* v)^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^\alpha} v^\alpha(x_0)$$

$$v^\mu(x(\sigma)) \xrightarrow{(\phi_\sigma^*)^{-1}} ((\phi_\sigma^*)^{-1} v)^\mu = \frac{\partial x_0^\mu}{\partial x^\alpha(\sigma)} v^\alpha(x(\sigma)) \quad \text{con } (\phi_\sigma^*)^{-1} = \phi_{-\sigma}^*$$

Derivada de Lie : $\mathcal{L}_\xi v = \frac{d}{d\sigma} \phi_{-\sigma}^* v \Big|_{\sigma=0}$ (verificar!)

Lo mismo para tensores

<u>Def</u> Si $\phi_\sigma^* T = T$, ϕ_σ se dice es una <u>simetría</u> de T

$\boxed{\text{Derivada covariante}}$

La derivada de Lie no es una derivada direccional : depende no solo de ξ^μ sino tambien $\partial\xi$. Bajo reparametrisación de la curva, $\mathcal{L}_{f\xi} \neq f\mathcal{L}_\xi$

$\xi^\mu \partial_\mu$ es una derivada direccional, pero es covariante solo con escalares.

Un operador de derivacion ∇ es un mapa que asocia a un campo tensorial $T \in \mathcal{T}(k,l)$ de rango (k,l) un otro campo de rango $(k, l+1)$, y que satisfaga :

1) Linealidad 2) Leibnitz : $\nabla(T_1 T_2) = (\nabla T_1) T_2 + T_1 (\nabla T_2)$

3) ~~Leibnitz~~ Consistencia con la def. de vectores como derivadas direccionales de escalares : $t(f) = t^\mu \nabla_\mu f$ (es decir, $\nabla_\mu f = \partial_\mu f$)

4) Conmuta con contracción, por ej.: $\nabla_\mu(T^{\alpha\gamma}{}_{\beta\gamma}) = (\nabla_\mu T^{\alpha\gamma}{}_{\beta\gamma})$

<u>Notación</u>: $\nabla_\mu T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \beta_l} \equiv (\nabla T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\mu \beta_1 \dots \beta_l}$

(no es la derivada de la componente)

La derivada parcial ∂ es una "buena" derivada, pero depende de las coordenadas, $\partial' \neq \partial$, sus componentes no transf. de manera covariante.

~~Recorde~~

Recordemos EM. Campo escalar cargado, $\phi(x) \to e^{i\alpha(x)}\phi(x)$.

$$\partial_\mu\phi \to e^{i\alpha}(\partial_\mu\phi + i\phi\partial_\mu\alpha) \neq e^{i\alpha}\partial_\mu\phi$$

Añadimos un campo A_μ tal que $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha$, y definimos

$$D_\mu\phi \equiv (\partial_\mu - iA_\mu)\phi \to (\partial_\mu - iA_\mu - i\alpha_\mu)e^{i\alpha}\phi = e^{i\alpha}D_\mu\phi$$

$D_\mu\phi$ es covariante (= transforma como ϕ)

Vamos a hacer lo mismo. Añadimos algo a ∂_μ de ahí que las componentes del total sean covariantes. Definamos

$$\nabla_U v = U^\mu\nabla_\mu v \quad \text{con} \quad \cancel{(\nabla_U v)^\alpha = \theta^\alpha(\nabla_U v)} \quad \text{y} \quad v = \underset{\text{escalar}}{v^\nu}\,\underset{\text{vector}}{e_\nu}$$

$$(\nabla_U v)^\alpha = \theta^\alpha(U^\mu\nabla_\mu v) = U^\mu\theta^\alpha\big(\underbrace{\nabla_\mu v^\nu}_{\partial_\mu v^\nu} e_\nu + v^\nu\nabla_\mu e_\nu\big)$$

$$= U^\mu\big(\underbrace{\partial_\mu v^\nu\delta^\alpha_\nu}_{\partial_\mu v^\alpha} + v^\nu\underbrace{\theta^\alpha(\nabla_\mu e_\nu)}_{\equiv\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}\big) \quad \text{(símbolos de Christoffel)}$$

Definamos $\nabla_\mu v^\alpha = (\nabla v)^\alpha_\mu \equiv \partial_\mu v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}v^\nu$

(o conexión)

El simb. de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ es lo que faltaba para que $\nabla_\mu v^\alpha$ sea contravariante en α.

Covectores:

$$\nabla_\mu(\omega_\alpha v^\alpha) = \nabla_\mu\omega_\alpha v^\alpha + \omega_\alpha\nabla_\mu v^\alpha = \nabla_\mu\omega_\alpha v^\alpha + \omega_\alpha(\partial_\mu v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}v^\nu)$$

y también $\nabla_\mu(\omega_\alpha v^\alpha) = \partial_\mu(\omega_\alpha v^\alpha) = \partial_\mu\omega_\alpha v^\alpha + \omega_\alpha\partial_\mu v^\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla_\mu\omega_\alpha = \partial_\mu\omega_\alpha - \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\omega_\beta}$$

(no conocemos ∇e)

Todavía no sabemos lo que Γ es, pero sabemos cómo transforma:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \theta^\alpha(\nabla_\mu e_\nu) \to \tilde\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{\partial\tilde x^\alpha}{\partial x^\beta}\theta^\beta\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial\tilde x^\mu}\nabla_\rho\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde x^\nu}e_\sigma\right)\right)$$

$$= \frac{\partial\tilde x^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\rho}{\partial\tilde x^\mu}\theta^\beta\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde x^\nu}\underset{\hookrightarrow\delta^\beta_\sigma}{e_\sigma} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde x^\nu}\nabla_\rho e_\sigma\right)$$

$$= \frac{\partial\tilde x^\alpha}{\partial x^\beta}\Bigg[\underbrace{\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial\tilde x^\mu\partial\tilde x^\nu}}_{\text{inhomogéneo}} + \underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial\tilde x^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde x^\nu}\Gamma^\beta_{\rho\sigma}}_{\text{covariante}}\Bigg]$$

El término inhomogéneo elimina la parte no covariante que sale de $\partial_\mu\omega_\nu$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\omega_\alpha \to \frac{\partial x^\rho}{\partial\tilde x^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde x^\nu}\Gamma^\beta_{\rho\sigma}\omega_\beta + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\tilde x^\mu\partial\tilde x^\nu}\omega_\alpha$$

Para tensores:

$$\nabla_\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_l} = \partial_\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_l} + \sum_{i=1}^{k} \Gamma^{\alpha_i}_{\mu\lambda} T^{\alpha_1\cdots\lambda\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_l} - \sum_{i=1}^{l} \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta_i} T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\lambda\cdots\beta_l}$$

La parte inhomogénea desaparece bajo ~~cambios~~ transformaciones afines:

$\tilde{x}^\alpha = M^\alpha{}_\beta x^\beta + b^\alpha$ con M y b constantes

Transporte paralelo:

Por una dada ~~conexión~~ Γ, la derivada direccional $U^\mu\nabla_\mu$ permite de realizar el transporte paralelo a lo largo de una curva con $\dot{\gamma} = U$:

$U^\mu \nabla_\mu V^\nu = 0$ (y en general $U^\mu\nabla_\mu T = 0$)

Only depends on v on the curve (no need of a field)

La conexión Γ proporciona a M una estructura afine (noción de paralelismo de vectores). Es algo ~~que~~ externo a la variedad, pero que no necesita una métrica.

Torsion:

Sobre un escalar:

$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] f = \nabla_\alpha \partial_\beta f - \nabla_\beta \partial_\alpha f = \ldots - (\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\alpha})\partial_\mu f \equiv -\underbrace{T^\mu_{\alpha\beta}}_{\text{torsión}} \partial_\mu f$

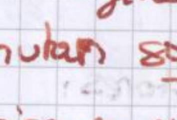
Covariante bajo cualquier transformación (no parte inhomogénea)

Si $T^\mu_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow$ las derivadas covariantes conmutan sobre escalares $\Leftrightarrow \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ (conexión simétrica en α, β)

En GR, $T^\mu_{\alpha\beta} = 0$

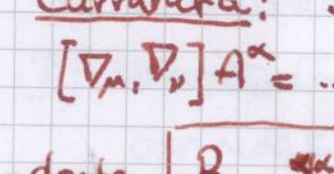
Curvatura: Sobre un vector

$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha = \ldots = R_{\mu\nu\beta}{}^{\alpha} A^\beta \; (- T^\rho_{\mu\nu}\nabla_\rho A^\alpha)$



donde $\boxed{R_{\mu\nu\beta}{}^{\alpha} \equiv \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\beta}}$ En otra convención $R^\alpha{}_{\rho\mu\nu}$

tensor de Riemann (o de curvatura)



$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha$ describe el transporte paralelo de A^α de p a q a lo largo de dos curvas coordenadas infinitesimas. Si hay curvatura, el transporte depende de la curva.

También, A^μ transportado a lo largo de un camino cerrado no vuelve en si mismo

Como $\nabla_\alpha(g_{\mu\rho}g^{\rho\nu}) = 0$ ~~esto tambie~~ $\Rightarrow \nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$ también
~~Cuando ocurre~~, Bajar / subir índices conmuta con ∇

Si la conexión es simétrica (no torsión):

$$0 = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} g_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} g_{\lambda\nu}$$

$$\Rightarrow -\nabla_\alpha g_{\mu\nu} + \nabla_\mu g_{\nu\alpha} + \nabla_\nu g_{\alpha\mu} = -\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha}(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})}$$ Conexión de Levi-Civita

La compatibilidad con $g_{\mu\nu}$ determina la conexión y ∇. Hay infinitas derivadas cov., pero sólo una da $\nabla g_{\mu\nu}$

Simetrías del tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta \equiv \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\beta}$$

~~Es el tensor de curvatura de la Γ de Levi-Civita~~

1) $R_{\nu\mu}{}^\alpha{}_\beta = -R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta$ 2) $R_{[\mu\nu}{}^\alpha{}_{\beta]} = 0$

Bajando el índice: $R_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\lambda} R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\beta$

3) $R_{\mu\nu\beta\alpha} = -R_{\mu\nu\alpha\beta}$

4) $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$ $\left(\Rightarrow R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta = -R_{\mu\nu\beta}{}^\alpha\right)$

5) Bianchi Identity $\nabla_{[\mu} R_{\nu\rho]}{}^\alpha{}_\beta = 0$

En general, 3 trazas. Para Levi-Civita, sólo una independiente

$\boxed{R_{\beta\nu} \equiv R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu} = R_{\beta\alpha\nu}{}^\alpha}$ tens. de Ricci

$\boxed{R \equiv R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R_\mu{}^\mu}$ escalar de Ricci

~~Defin~~ $\boxed{G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}$ tens. de Einstein

Contraer dos veces Bianchi implica

$$\boxed{\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0}$$ (sólo una identidad geométrica!)

(Wald 3.2.10)

Como $[\nabla_\mu, \nabla_\nu](\omega_\alpha v^\alpha) = 0 \quad \forall v \Rightarrow \boxed{[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\omega_\alpha = -R_{\mu\nu}{}^\beta{}_\alpha \omega_\beta}$

En general, por inducción

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} = \sum_i^k R_{\mu\nu}{}^{\alpha_i}{}_\lambda T^{\alpha_1 \ldots \lambda \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l} - \sum_{i=1}^{l} R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_{\beta_i} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \lambda \ldots \beta_l}$$

Métrica

La estructura afín permite el transporte paralelo de vectores.
Para medir ~~de~~ ángulos y distancias necesitamos una métrica.
Es un tensor (0,2) simétrico y no degenerado, ~~(con $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$)~~

$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ y $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$

Producto escalar de vectores: $g(u,v) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$

~~Sea~~ Denotemos su invesa con $g^{\mu\nu} \Rightarrow g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu$

Isomorfismo entre T_p y T_p^*: $v^\mu \to v_\mu \equiv g_{\mu\nu} v^\nu$, $\omega_\mu \to \omega^\mu \equiv g^{\mu\nu}\omega_\nu$
(subir y bajar índices)

En una base coordenada:

$$g = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\left(dx^\alpha \otimes dx^\beta + dx^\beta \otimes dx^\alpha\right) = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

También se denota $ds^2 \equiv g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ (≡ elemento de línea)

Como ds^2 define una forma cuadrática, por la ley de inercia de Sylvester (hay J invertible tal que $J^T g J =$) hay una base en la que $g_{\alpha\beta}$ es diagonal con ~~sol~~ únicamente $+1$ y -1 (no 0 porque $\det \neq 0$):

$$ds^2 = \underbrace{-(\theta^0)^2 - \dots - (\theta^{p-1})^2}_{p} + \underbrace{(\theta^p)^2 + \dots + (\theta^n)^2}_{n-p}$$

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(\underbrace{-1,\dots,-1}_{p}, \underbrace{1,\dots,1}_{n-p}) \quad - \quad g_{\mu\nu}(e_\alpha)^\mu (e_\beta)^\nu = \eta_{\alpha\beta}$$

$n-2p \equiv$ signatura de la métrica ~~(= (n-p) - p)~~ $(= (n-p)1 + p(-1))$
(también (p,n))

$p=0$: métrica Riemanniana $\quad g(X,X) > 0 \quad \forall X \neq 0$

$p=1$: métrica Lorentziana, como en GR $(1,3)$

¿Qué pasa con el transporte paralelo del producto escalar?

$$u^\alpha \nabla_\alpha (g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu) = u^\alpha \left[(\nabla_\alpha g_{\mu\nu}) X^\mu Y^\nu + g_{\mu\nu}(\nabla_\alpha X^\mu Y^\nu + X^\mu \nabla_\alpha Y^\nu)\right] \overset{?}{=} 0$$

Si X, Y transportados por // ($\nabla_u X = \nabla_u Y = 0$), el producto esc. es conservado $\iff \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$

La conexión es compatible con la métrica

Sistemas localmente inerciales

En cada $p \in \mathcal{M}$ podemos escojer coordenadas tales que

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_p = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad y \quad \hat{\partial}_{\hat{\alpha}} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_p = 0$$ "local flatness theorem"

(pero ~~[illegible]~~ siempre tendremos $\partial^2 \hat{g}_{\mu\nu} \neq 0$!) ~~se ve~~

Esto se llama sistema localm. inercial (entorno bastante cercano de p descrito por la SR). Curvatura y gravedad en las derivadas 2ndas ($\rightarrow$ Tensor de Riemann $\neq 0$), despreciables

Esbozo de la prueba (se vea Schutz 149-150)

Desarrollo de Taylor del cambio de coord. $x^\mu(\hat{x})$ alrededor de $\hat{x}^{\hat{\mu}} = 0$

$$x = \cancel{x}|_p + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \hat{x}}\Big|_p}_{\hat{\partial} x} \cdot \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{x} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x}^2}}_{\hat{\partial}^2 x} \cdot \hat{x} + \dots$$

$$\hat{\partial} x \equiv \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} = \hat{\partial} x|_p + \hat{\partial}^2 x|_p \cdot x + \frac{1}{2} \hat{x} \cdot \hat{\partial}^3 x|_p \hat{x}$$

$$\hat{g} = \hat{g}|_p + \hat{\partial} \hat{g}|_p \cdot \hat{x} + \dots \qquad g = g|_p + \hat{\partial} g \cdot \hat{x} + \dots$$

expresada en $\hat{x}$

Dado que $\hat{g} = (\hat{\partial} x)^T \cdot g \cdot \hat{\partial} x$, se ha al orden leading:

$$\hat{g}|_p = (\partial x^T \cdot g \cdot \hat{\partial} x)_p$$

$\Rightarrow$ 10 ecuaciones ($\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_p = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$), en 16 incógnitas $\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^{\hat{\mu}}}\Big|_p\right)$

simétrico ~~(6 que restan)~~ Quedan 6. realizan la ley de Sylvester

Hay siempre solución. Los ~~restantes 6 grados de libertad~~ ~~(se realiza la ley de Sylvester)~~

Son los parametros de $\Lambda^\mu{}_{\hat{\mu}}$ de Lorentz (que no cambia $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$) una transf. residual

Primero orden: $\hat{\partial} \hat{g}|_p = (\hat{\partial} x \cdot \partial g \cdot \hat{\partial} x + 2 \hat{\partial} x \cdot g \cdot \hat{\partial}^2 x)|_p$

4×10 ecuaciones ($\partial_{\hat{\alpha}} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$) en 40 incógnitas $\left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \hat{x}^{\hat{\alpha}} \partial \hat{x}^{\hat{\beta}}}\Big|_p\right)$

Segundo orden: $\partial_{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\beta}} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ tiene $10 \times 10 = 100$ componentes indep.

Cuantas tiene $\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial \hat{x}^\mu \partial \hat{x}^\nu \partial \hat{x}^\rho}$? m indices tot. sim. en n dim.

$$\Rightarrow \binom{n+m-1}{m} = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20 \quad \Rightarrow 4 \times 20 = 80 \text{ comp.}$$

Faltan 20 (= componentes ind. del Tensor de Riemann)

Coordenadas de Riemann: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$ (pero $R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta \neq 0$)

$R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta = 2 \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \neq 0$ $\qquad 2 \partial_{[\mu} \Gamma^\alpha_{\nu]\beta}$

~~Geodésicas~~

En estas coordenadas $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 2 g_{\alpha\gamma}\{\partial_{[\mu}\Gamma^{\gamma}_{\nu]\beta} \cancel{- \partial_\nu \Gamma}$

$$\cancel{= \tfrac{1}{2}\partial_{[\mu}\left(\partial_{\nu]} g_{\beta\alpha} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\beta}\right)}$$

$$\cancel{= \partial_{[\mu}\partial_{\nu]} g_{\beta\alpha} + \partial_\mu \partial} \quad \cancel{= \tfrac{1}{2}\left[\partial_\mu \partial_\nu g_{\beta\alpha} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial\right.}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\left(\partial_\nu g_{\beta\alpha} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\beta\nu}\right) - \mu \leftrightarrow \nu$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\nu \partial_\alpha g_{\mu\beta}\right)$$

Simetrías del Riemann: $\longrightarrow$

Geodesicas

Generalisación de líneas rectas al espacio curvo.

En espacio plano una partícula ~~sin fuerzas~~ no acelerada se propaga en línea recta: $d^2x/d\lambda^2$

Por el PE, también una partícula subjeta solo a la gravedad en el marco loc. inercial: $d^2\hat{x}^\mu/d\lambda^2 = 0$

En coord. genéricas,

$$\frac{d^2\hat{x}^\mu}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial\hat{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial\hat{x}^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} + \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{\partial^2\hat{x}^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu}$$

$$= \frac{\partial\hat{x}^\mu}{\partial x^\nu}\left[\frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} + \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial\hat{x}^\lambda}\frac{\partial^2\hat{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}}_{(*)}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right]$$

Como $\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$, la ley de transf. de Γ implica que $(*) = \Gamma^\nu_{\alpha\beta}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0} \quad \text{Ecuación geodésica}$$

Para una curva con tangente $t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, el transp. paralelo nos da

$$\boxed{t^\nu \nabla_\nu t^\mu = 0}$$

Una geodésica es una curva cuya tangente se transporta paralelamente a si misma.

Definición: El tiempo propio de una curva de tipo temporal es

$$\tau \equiv \int_A^B d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} \qquad d\tau = d\lambda\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$

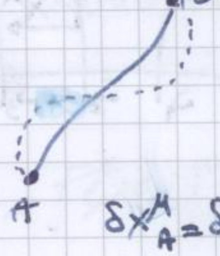
y la distancia propia de una de tipo espacial es

$$L \equiv \int_A^B d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$

entre A y B

Una geodésica maximisa τ (o minimisa L). Variaciones $x^\mu(\lambda)+\delta x^\mu(\lambda)$

$$\boxed{t^\mu \nabla_\mu t^\nu = 0 \iff \delta\tau = 0 \quad \forall \delta x^\mu}$$



$\delta x^\mu_A = \delta x^\mu_B = 0$

$$\delta\tau = \int_A^B d\lambda \frac{1}{2\sqrt{\ }}\left(-2g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d\delta x^\nu}{d\lambda} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\delta x^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)$$

$$= \int_A^B d\tau\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d\delta x^\nu}{d\tau} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{\delta x^\rho}{2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)$$

$$= \int_A^B d\tau\left[\frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right]\delta x^\rho$$

$$= \int_A^B d\tau\left[\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}g_{\mu\rho} + \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right]\cancel{\delta x^\rho}\, g^{\rho\alpha}\delta x_\alpha$$

$$= \int_A^B d\tau\left(\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)\delta x_\alpha$$

Lo mismo con la acción $S \equiv -\frac{1}{2}\int_A^B d\tau\, g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$

En general, sería bastante que $t^\mu\nabla_\mu t^\nu = f(\lambda)t^\nu$ (el cambio en t^ν es $\parallel$ a t^ν). Bajo una reparametrisación $\lambda \to \alpha(\lambda)$, $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\alpha}$,

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = \frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\frac{dx^\mu}{d\alpha} + \left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^2\frac{d^2x^\mu}{d\alpha^2}$$

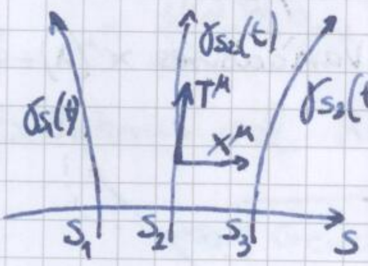
$$\Rightarrow \left[\frac{d^2x^\mu}{d\alpha^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\alpha}\frac{dx^\sigma}{d\alpha}\right]\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^2 = \overbrace{\left(f\frac{d\alpha}{d\lambda} - \frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right)}^{\tilde{f}}\frac{dx^\mu}{d\alpha}$$

Es igual a 0 si $\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} = f\frac{d\alpha}{d\lambda}$. Esta se llama parametrisación afín. Esta forma se conserva bajo transf. afines.

Desviación geodésica

Describe el acercarse / alejarse de partículas en caída libre siguiendo geodesicas diferentes ($\Rightarrow$ fuerzas de marea).

Consideremos una familia de geodésicas $\gamma_s(t)$, donde s indica la coordenada de la posición inicial



$T^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu$ tangente $\qquad X^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^\mu$ ← desplazamiento a la siguiente geodésica

s y t son las coordenadas de una subvariedad bidimensional: $[T,X]^\mu = 0$

$v^\alpha \equiv T^\mu \nabla_\mu X^\alpha$ variación de la distancia entre geodesicas con t
velocidad relativa

$$a^\alpha = T^\mu \nabla_\mu v^\alpha = T^\mu \nabla_\mu (T^\nu \nabla_\nu X^\alpha) \quad \text{aceleración relativa}$$
$$= T^\mu \nabla_\mu \left(X^\nu \nabla_\nu T^\alpha + \cancel{[T,X]^\alpha} \right) = (T^\mu \nabla_\mu X^\nu)(\nabla_\nu T^\alpha) + T^\mu X^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu T^\alpha$$
$$= \left(X^\mu \nabla_\mu T^\nu + \cancel{[T,X]^\nu} \right)(\nabla_\nu T^\alpha) + T^\mu X^\nu \left(\nabla_\nu \nabla_\mu + [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \right) T^\alpha$$
$$= X^\mu \nabla_\mu (\underbrace{T^\nu \nabla_\nu T^\alpha}_{=0}) + T^\mu X^\nu R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta T^\beta = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} T^\beta T^\mu X^\nu$$

Symmetries and conserved quantities

En las derivadas de Lie se pueden poner ∇ en lugar de ∂: los Γ se cancelan (si no hay torsión)

$$(\mathcal{L}_\xi v)^\mu = \xi^\nu \partial_\nu v^\mu - v^\nu \partial_\nu \xi^\mu = \xi^\nu \nabla_\nu v^\mu - \cancel{\xi^\nu \Gamma^\mu_{\nu\rho} v^\rho} - v^\nu \nabla_\nu \xi^\mu + \cancel{v^\nu \Gamma^\mu_{\nu\rho} \xi^\rho}$$

Definición Una simetría de $g_{\mu\nu}$ (familia de difeomorfismos ϕ_s cuyas tangentes a las curvas integrales dan $\mathcal{L}_\xi g = 0$) es una isometría. El campo ξ que la genera es un campo de Killing

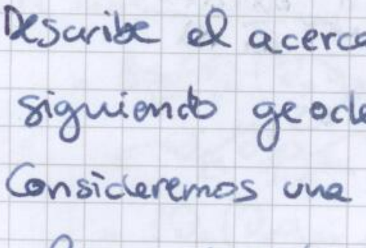
$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\alpha \underbrace{\nabla_\alpha g_{\mu\nu}}_{=0} + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu \xi^\alpha = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$$

~~Un campo vectorial ξ que genera una isometría ($\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$) se~~

Desviación geodésica

Describe el acercarse / alejarse de partículas en caída libre siguiendo geodésicas diferentes ($\Rightarrow$ fuerzas de marea).

Consideremos una familia de geodésicas $\gamma_s(t)$, donde s indica la coordenada de la posición inicial



$T^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu$ tangente $\qquad X^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^\mu$ desplazamiento a la siguiente geodésica

s y t son las coordenadas de una subvariedad bidimensional: $[T, X]^\mu = 0$

$v^\alpha \equiv T^\mu \nabla_\mu X^\alpha$ variación de la distancia entre geodésicas con t
velocidad relativa

$$a^\alpha = T^\mu \nabla_\mu v^\alpha = T^\mu \nabla_\mu (T^\nu \nabla_\nu X^\alpha) \quad \text{aceleración relativa}$$
$$= T^\mu \nabla_\mu \left(X^\nu \nabla_\nu T^\alpha + \cancel{[T, X]^\alpha} \right) = (T^\mu \nabla_\mu X^\nu)(\nabla_\nu T^\alpha) + T^\mu X^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu T^\alpha$$
$$= \left(X^\mu \nabla_\mu T^\nu + \cancel{[T, X]^\nu} \right)(\nabla_\nu T^\alpha) + T^\mu X^\nu \left(\nabla_\nu \nabla_\mu + [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \right) T^\alpha$$
$$= X^\mu \nabla_\mu \big(\underbrace{T^\nu \nabla_\nu T^\alpha}_{=0} \big) + T^\mu X^\nu R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta T^\beta = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} T^\beta T^\mu X^\nu$$

Symmetries and conserved quantities

En las derivadas de Lie se pueden poner ∇ en lugar de ∂: los Γ se cancelan (si no hay torsión)

$$(\mathcal{L}_\xi v)^\mu = \xi^\nu \partial_\nu v^\mu - v^\nu \partial_\nu \xi^\mu = \xi^\nu \nabla_\nu v^\mu - \cancel{\xi^\nu \Gamma^\mu_{\nu\rho} v^\rho} - v^\nu \nabla_\nu \xi^\mu + \cancel{v^\nu \Gamma^\mu_{\nu\rho} \xi^\rho}$$

Definición Una simetría de $g_{\mu\nu}$ (familia de difeomorfismos ϕ_s cuyas tangentes a las curvas integrales dan $\mathcal{L}_\xi g = 0$) es una isometría. El campo ξ que la genera es un campo de Killing

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\alpha \underbrace{\nabla_\alpha g_{\mu\nu}}_{=0} + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu \xi^\alpha = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$$

~~Un campo vectorial ξ que genera una isometría ($\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$) se~~

es un campo
~~dice vector~~ de Killing $\Leftrightarrow$ satisfaga ~~y satisface~~ la ecuación de Killing

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$$

Dada una geodésica con tangente U^μ y ξ^μ de Killing, la cantidad $\xi_\mu U^\mu$ es conservada a lo largo de la curva:

$$U^\mu \nabla_\mu (U^\alpha \xi_\alpha) = \underbrace{\cancel{(U^\mu \nabla_\mu U^\alpha)}}_{=0} \xi_\alpha + U^\alpha U^\mu \nabla_\mu \xi_\alpha = \frac{1}{2} U^\alpha U^\mu (\nabla_\mu \xi_\alpha + \nabla_\alpha \xi_\mu) = 0$$

Cada simetría proporciona una cantidad conservada, tanto para partículas ~~masa~~ con masa como para rayos de luz.

Ejemplo ~~Sea ξ un vector~~ $\mathbb{R}^3$, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, ~~Flat~~ $\Gamma^k_{ij} = 0$

Ecuación de Killing: $\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i = 0$

$\hat{x}^i = (1,0,0)$, $\hat{y}^i = (0,1,0)$, $\hat{z}^i = (0,0,1)$ ~~son Kill~~ de Killing

~~Generaban~~ translaciones. Conservación de v^i/mom. lineal.

El generador de rotaciones alrededor de $\hat{z}$ es ∂_ϕ en coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \partial_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \phi}\partial_y = -y\partial_x + x\partial_y$$

En cartesianas, $R^i = (-y, x, 0)$

También $S^i = (z, 0, -x)$, $T^i = (0, -z, x)$

Satifacen Killing y generan rotaciones. Cons. del momento angular. En esféricas,

~~R=∂φ~~ $\partial_x = \frac{\partial r}{\partial x}\partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial x}\partial_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial x}\partial_\phi$

Ejemplo: El corchete de Lie $[X,Y]$ de dos vectores de Killing es un vector de Killing. Los vect. de K. con el $[\,,\,]$ forman una álgebra.

Ejemplo: Si las componentes de $g_{\mu\nu}$ son independientes de ~~una dada~~ la i-esima coordenada x^i ~~(sprage)~~, $K^\mu \equiv \delta^\mu_i$ es un ~~cam~~ vector de Killing.

$p^\mu = mU^\mu$; $p^\mu K_\mu = p_\mu K^\mu = p_i$ es conservado

Principio de covariancia general

Todas ~~las~~ ecuaciones covariantes de SR permanecen validas en GR con la ~~substituci~~ sostitución

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}\,, \quad \partial_\mu \to \nabla_\mu}$$

-) sastisface automaticamente el PE
-) no nueva física, solo cambio de coordenadas (por ahora!)
-) todavía ~~no~~ falta una ~~parte~~ dinámica para $g_{\mu\nu}$

Ejemplo ~~Por ej~~

*) $\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = U^\mu \partial_\mu U^\alpha = 0 \to U^\mu \nabla_\mu U^\alpha = 0$

*) $\mathcal{L}^{(sphere)}_{free} = \frac{m}{2}(r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\phi^2) = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \qquad g_{\mu\nu} = r^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2\theta\end{bmatrix}$

*) Fluido perfecto : $T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu}\,, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} =$

$\to T^{\mu\nu} = (\rho+p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}\,, \quad \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$

U^μ ~~tangente~~ $= \frac{dx^\mu}{d\tau}$ "quadrivelocidad" $U^\mu U_\mu = -1$

*) $d^4x \to d^4x\sqrt{-g}$

*) campo escalar : $\Box\phi - m^2\phi = 0 \to \nabla^\mu\nabla_\mu\phi - m^2\phi = 0$

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi + m^2\phi\right]$$