

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER



VNiVERSiDAD
DSALAMANCA

Estudio de observables relativistas en diferentes espacio-tiempos esféricamente simétricos

Study of relativistic observables in different spherically symmetric
spacetimes

Autor:

Víctor Ovejero Bermúdez

Tutor:

Álvaro de la Cruz Dombriz

Co-tutor:

Riccardo Della Monica

CURSO 2024/2025

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER



VNiVERSiDAD
DSALAMANCA

Estudio de observables relativistas en diferentes espacio-tiempos esféricamente simétricos

Study of relativistic observables in different spherically symmetric
spacetimes

Autor:

Víctor Ovejero Bermúdez

Tutor:

Álvaro de la Cruz Dombriz

Co-tutor:

Riccardo Della Monica

CURSO 2024/2025

RESUMEN

Se presenta un análisis comparativo de diversas geometrías del espacio-tiempo, con el objetivo de identificar características distintivas de las mismas. El estudio se centra en dos efectos gravitacionales clave: la precesión del pericentro de partículas masivas y la deflexión de la luz. La metodología empleada combina derivaciones analíticas en el límite de campo débil con simulaciones numéricas de alta precisión, llevadas a cabo con el integrador de geodésicas PyGRO. Este enfoque dual permite contrastar las predicciones teóricas y validar su robustez. Se han analizado cuatro modelos esféricamente simétricos: las conocidas soluciones de Schwarzschild y de Reissner-Nordström, y las geometrías de Euler-Heisenberg y Black-Bounce como representantes de correcciones de origen cuántico y topológico, respectivamente. El resultado principal del trabajo es el descubrimiento de una clara dicotomía fenomenológica. Se demuestra que la carga eléctrica clásica (métrica de Reissner-Nordström) ejerce un efecto supresor, atenuando los observables gravitacionales. En contraste directo, tanto las correcciones cuánticas (Euler-Heisenberg) como las modificaciones topológicas (Black-Bounce) actúan como amplificadores, intensificando dichos efectos.

Palabras clave: Relatividad General, geometrías alternativas, precesión del pericentro, deflexión de la luz, métrica de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Euler-Heisenberg, Black-Bounce, simulaciones numéricas, PyGRO.

ABSTRACT

A comparative analysis of various spacetime geometries is presented, with the aim of identifying their distinguishing features. The study focuses on two key gravitational effects: the perihelion precession of massive particles and the deflection of light. The methodology employed combines analytical derivations in the weak-field limit with high-precision numerical simulations, carried out using the geodesic integrator PyGRO. This dual approach allows for the comparison of theoretical predictions and the validation of their robustness. Four spherically symmetric models have been analyzed: the well-known Schwarzschild and Reissner-Nordström solutions, and the Euler-Heisenberg and Black-Bounce geometries as representatives of quantum and topological corrections, respectively. The main result of this work is the discovery of a clear phenomenological dichotomy. It is demonstrated that classical electric charge (Reissner-Nordström metric) exerts a suppressive effect, attenuating gravitational observables. In direct contrast, both quantum corrections (Euler-Heisenberg) and topological modifications (Black-Bounce) act as amplifiers, intensifying these effects.

Keywords: General Relativity, alternative geometries, perihelion precession, light deflection, Schwarzschild metric, Reissner-Nordström, Euler-Heisenberg, Black-Bounce, numerical simulations, PyGRO.

Índice

1. Introducción	2
2. Marco teórico	4
2.1. Relatividad General	4
2.2. Electrodinámica clásica	6
2.3. Electrodinámica no lineal de Euler-Heisenberg	7
3. Objetos compactos	9
4. Espacio-tiempos esféricamente simétricos	12
4.1. Espacio-tiempo de Schwarzschild	13
4.2. Espacio-tiempo de Reissner-Nordström	15
4.3. Espacio-tiempo de Euler-Heisenberg	16
4.4. Espacio-tiempo de Black-Bounce	17
5. PyGRO: un Integrador de Python para Órbitas en Relatividad General	19
5.1. El <i>Motor Métrico</i>	19
5.2. El <i>Motor Geodésico</i>	20
5.3. La API geodésica de bajo nivel: <i>Geodésica</i>	20
5.4. API de alto nivel: órbitas cuasi-elípticas en espacio-tiempos esféricamente simétricos	21
6. Precesión del pericentro	24
6.1. Métrica de Schwarzschild	25
6.2. Métrica de Reissner-Nordström	31
6.3. Métrica electrodinámica no lineal de Euler-Heisenberg	35
6.4. Métrica de Black-Bounce	38
7. Deflexión de la luz	43
7.1. Métrica de Schwarzschild	44
7.2. Métrica de Reissner-Nordström	48
7.3. Métrica electrodinámica no lineal de Euler-Heisenberg	50
7.4. Métrica de Black-Bounce	53
8. Conclusiones	56
Referencias	58

Capítulo 1

Introducción

La Relatividad General, formulada por Albert Einstein en 1915, constituye la estructura conceptual sobre la que descansa nuestra comprensión moderna de la gravedad. Desde su formulación, esta teoría ha superado con un éxito abrumador cada prueba observacional a la que ha sido sometida, desde las predicciones clásicas como la precesión del pericentro de Mercurio [1] hasta las espectaculares confirmaciones contemporáneas, como la detección directa de ondas gravitacionales [2].

No obstante, este triunfo paradigmático coexiste con profundas grietas teóricas y enigmas cosmológicos que sugieren que la Relatividad General podría ser una descripción incompleta de la naturaleza. Desde una perspectiva teórica, su incompatibilidad con la Mecánica Cuántica, evidenciada por su no renormalizabilidad, representa uno de los mayores desafíos de la Física fundamental. Esta limitación se vuelve crítica en los regímenes donde ambas teorías deberían converger.

En el frente cosmológico, el modelo estándar Λ CDM (del inglés: *Lambda-Cold Dark Matter*), aunque extraordinariamente consistente con las observaciones, depende de la existencia de dos componentes misteriosos. Para explicar la expansión acelerada del Universo y la dinámica anómala de las galaxias, se postulan, respectivamente, la existencia de la energía y la materia oscuras, que juntas constituirían el 96 % del contenido energético del cosmos, pero cuya naturaleza fundamental sigue siendo desconocida [3]. La simplicidad aparente del modelo Λ CDM oculta, por tanto, una profunda ignorancia sobre la mayor parte del universo. Este “problema del sector oscuro” ha motivado la exploración de un enfoque alternativo: en lugar de introducir nuevas formas de materia y energía, se podría considerar que es la propia teoría de la gravedad de Einstein la que necesita ser modificada.

Este doble frente de desafíos ha impulsado un gran campo de investigación centrado en el desarrollo y la verificación de teorías gravitacionales alternativas. En este escenario, el estudio de los objetos compactos se revela como un laboratorio cósmico de primer orden. Estos objetos, al albergar campos gravitatorios más intensos que aquellos que aparecen en el Universo tardío cuando se estudia este a grandes escalas, son escenarios ideales para buscar desviaciones medibles en las predicciones de la Relatividad General. Cada teoría de la gravedad, dependiendo de sus características particulares, puede predecir una geometría del espacio-tiempo ligeramente diferente en las proximidades de un objeto masivo. Por tanto, analizar las trayectorias de partículas masivas y no masivas (fotones) que se mueven en estos campos se convierte en una herramienta de alta precisión para sondear cómo es la gravedad.

Para discernir entre la Relatividad General y sus posibles extensiones, este Trabajo de Fin de Máster aborda precisamente un análisis fenomenológico comparativo. El objetivo es estudiar cómo diferentes geometrías del espacio-tiempo, tanto canónicas como alternativas, influyen en

dos de las consecuencias más directas de la curvatura del espacio-tiempo: la precesión del pericentro para partículas masivas en órbitas ligadas y la deflexión de la luz para fotones. Estos fenómenos se estudiarán tomando como referencia las soluciones canónicas de la Relatividad General —las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström— para después contrastarlas con las predicciones de modelos seleccionados por su gran relevancia física: la electrodinámica no lineal de Euler-Heisenberg, que incorpora correcciones cuánticas en la acción del campo electromagnético, y las geometrías de tipo Black-Bounce, que ofrecen una alternativa a la singularidad central basándose en los agujeros negros transitables.

La metodología empleada combinará derivaciones analíticas, a partir de los formalismos de Hamilton-Jacobi y Lagrangiano, con simulaciones numéricas de alta precisión. Para este fin, se utilizará la herramienta computacional de código abierto PyGRO, un integrador de Python desarrollado por uno de mis co-supervisores que está diseñado para el cálculo de geodésicas en espacio-tiempos arbitrarios.

Capítulo 2

Marco teórico

Una vez establecida la motivación de este trabajo es necesario construir nuestro universo teórico. Este capítulo se dedica precisamente a eso: a sentar las bases de los modelos que se van a estudiar.

Partiremos de la Relatividad General, nuestra teoría gravitatoria fundamental. Sobre esta teoría, incorporaremos la Electrodinámica clásica, permitiéndonos estudiar objetos con carga. Finalmente, mostraremos un escenario más profundo al introducir las correcciones cuánticas de la Electrodinámica no lineal de Euler-Heisenberg, el primer paso hacia una descripción más completa.

2.1. Relatividad General

La teoría de la Relatividad General representa una de las revoluciones conceptuales más profundas de la Física [4]. En su núcleo, la teoría postula que la gravedad no es una fuerza en el sentido newtoniano, sino una manifestación intrínseca de la geometría del espacio-tiempo. Este enfoque geométrico se basa, esencialmente, en el Principio de Equivalencia, que establece la indistinguibilidad local entre los efectos de un campo gravitacional y los de un sistema de referencia acelerado. Esta idea es el puente conceptual que permite describir la gravedad utilizando el lenguaje de la geometría diferencial.

La Relatividad General modela pues el espacio-tiempo como una variedad pseudoriemanniana de cuatro dimensiones M , dotada de una métrica $g_{\mu\nu}$ que es un tensor (0,2) simétrico. Esta estructura matemática se define mediante dos elementos clave: el tensor métrico y la conexión afín.

El tensor métrico es el objeto matemático fundamental que dota al espacio-tiempo de una estructura métrica. Este tensor permite calcular distancias, ángulos, volúmenes, el producto escalar entre dos vectores, entre otras magnitudes. Además, permite definir el elemento de línea infinitesimal como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

El término ds^2 , conocido como el intervalo o el elemento de línea infinitesimal, representa el cuadrado de la “distancia” espacio-temporal entre dos eventos infinitamente próximos, cuyas coordenadas son x^μ y $x^\mu + dx^\mu$. Adoptando la signatura $(-, +, +, +)$ para el tensor métrico, lo que refleja la distinción entre las dimensiones temporales y espaciales, la magnitud ds^2 va a poder ser positiva, negativa o nula (a diferencia del espacio euclídeo, donde el intervalo es siempre positivo), determinando así la naturaleza causal de la relación entre los dos eventos:

- $ds^2 > 0$: Intervalo de tipo espacial. Ocurre cuando la separación espacial entre los eventos

es mayor de lo que la luz podría recorrer en el lapso de tiempo que los separa. Ninguna señal causal puede conectar estos dos eventos, ya que para ello se requeriría viajar más rápido que la luz.

- $ds^2 < 0$: Intervalo de tipo temporal. Sucede cuando hay suficiente tiempo para que una señal, viajando a una velocidad menor o igual a la de la luz, conecte los dos eventos. Estos eventos están causalmente conectados, y la trayectoria de una partícula masiva puede unirlos.
- $ds^2 = 0$: Intervalo nulo. Ocurre cuando los dos eventos solo pueden ser conectados por una señal que viaja exactamente a la velocidad de la luz, como un fotón.

En la Relatividad Especial, el espacio-tiempo es plano y la métrica es la de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$. En cambio, en la Relatividad General, la métrica $g_{\mu\nu}$ es un campo dinámico: sus componentes varían de un punto espacio-temporal a otro y su evolución está determinada por la distribución de materia y energía.

Por otra parte, la conexión afín es la estructura que permite comparar vectores en puntos diferentes de la variedad y, por tanto, define el concepto de derivada covariante ∇_μ . En el marco más general, la métrica y la conexión son estructuras independientes. Sin embargo, la Relatividad General impone habitualmente dos condiciones fundamentales sobre la conexión: establece una ausencia de torsión y una compatibilidad con la métrica $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$.

Bajo estas dos suposiciones, la conexión afín queda unívocamente determinada por la métrica y sus derivadas. Esta conexión única se denomina conexión de Levi-Civita, y sus componentes, los símbolos de Christoffel, vienen dados por la conocida expresión

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}), \quad (2.2)$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la inversa de la métrica. En consecuencia, en Relatividad General, toda la información geométrica del espacio-tiempo —cómo se curvan las trayectorias, cómo se transportan los vectores, etc— reside en un único objeto dinámico: el tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Como la mayoría de las teorías de campos fundamentales y teorías efectivas, la Relatividad General puede derivarse de un principio variacional. La acción total del sistema gravitacional se escribe como la suma de la parte gravitacional y la parte material

$$S = \int \left[\frac{1}{16\pi}(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.3)$$

donde $\mathcal{L}_m$ es la densidad lagrangiana de los campos de materia, g es el determinante de $g_{\mu\nu}$, Λ es la constante cosmológica y R es el escalar de Ricci que se define como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

con $R_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Ricci definido por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda. \quad (2.5)$$

La acción en la ecuación (2.3) está expresada en Unidades Naturales ($G = c = 1$), las cuales se han utilizado en todo el trabajo. Si se aplica el principio de mínima acción a la acción de una partícula de prueba $S = \int ds$, las ecuaciones de Euler-Lagrange resultantes describen las

trayectorias que sigue una partícula cuando se mueve o cae libremente en un espacio-tiempo curvo. Estas trayectorias, conocidas como geodésicas, vienen dadas por la ecuación

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.6)$$

donde λ es un parámetro afín que describe el recorrido de la partícula. Para definir completamente estas trayectorias se debe incluir la ecuación de la conservación de la norma de la cuadrivelocidad $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \text{constante}. \quad (2.7)$$

El valor de esta constante define el tipo de geodésica. Para partículas masivas se puede elegir λ como el tiempo propio τ , y la constante toma el valor de -1, siguiendo geodésicas de tipo tiempo. Para partículas sin masa como los fotones la constante es cero y siguen geodésicas nulas.

Al aplicar el principio de mínima acción, variando para ello la acción en (2.3) respecto a la métrica, se obtienen las ecuaciones de Einstein. Las ecuaciones de campo de Einstein son el corazón dinámico de esta teoría. Describen cómo la distribución de materia y energía da forma a la geometría del espacio-tiempo, y cómo esta geometría, a su vez, dicta el movimiento del contenido energético-material. Estas ecuaciones son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

Una propiedad matemática fundamental del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.9)$$

es que su divergencia es idénticamente nula $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, lo que se conoce como segunda identidad de Bianchi. Esto impone una condición de consistencia crucial en la teoría: que el tensor de energía-momento también debe ser localmente conservado, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

2.2. Electrodinámica clásica

Uno de los triunfos de la Relatividad General es su capacidad para incorporar de manera natural las otras interacciones fundamentales de la naturaleza, al menos en el régimen clásico. El Electromagnetismo o Electrodinámica clásica, descrito por las ecuaciones de Maxwell, fue la teoría de campos cuya consistencia inspiró la superación de la Mecánica Galileana por la Relatividad Especial.

En el formalismo covariante, el campo electromagnético se describe mediante el cuadvectores potencial A_μ . Sin embargo, este potencial no es directamente observable debido a su libertad gauge ($A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$). Las magnitudes físicas, los campos eléctrico y magnético, se obtienen a partir del tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$, que es un tensor antisimétrico de rango 2. Se define a partir del potencial vector A_μ como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.10)$$

En el contexto de la Relatividad General, las derivadas parciales se reemplazan por derivadas covariantes, lo cual debido a la ausencia de torsión (simetría de la conexión de Levi-Civita), arroja el mismo $F_{\mu\nu}$. La definición del tensor de campo se puede escribir pues como

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (2.11)$$

Esta definición es fundamental, ya que $F_{\mu\nu}$ es, por construcción, invariante gauge y contiene toda la información sobre los campos eléctrico y magnético medidos por un observador local.

Para describir la dinámica del campo electromagnético, se postula una acción que sea un escalar Lorentz. La acción de Maxwell estándar en un espacio-tiempo curvo, que describe un campo electromagnético libre, viene dada por

$$S_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.12)$$

donde $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$.

El campo electromagnético, al poseer energía y momento, debe actuar como una fuente de curvatura en el espacio-tiempo. Su contribución se describe a través de su tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}^{\text{EM}}$. Este se obtiene variando la acción electromagnética con respecto a la métrica

$$T_{\mu\nu}^{\text{EM}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{EM}}}{\delta g^{\mu\nu}} = F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (2.13)$$

Este tensor es simétrico y de traza nula en 4 dimensiones, una propiedad fundamental del electromagnetismo clásico que refleja la invarianza conforme de su acción, o lo que es lo mismo, que el valor de la acción no cambia bajo la siguiente transformación del tensor métrico

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

donde $\Omega(x)$ es una función escalar que depende de la posición en el espacio-tiempo x . Al incluir este tensor de energía-momento en las ecuaciones de Einstein (2.8), se cierra el círculo de interacciones: el campo electromagnético curva el espacio-tiempo y la curvatura del espacio-tiempo afecta a la propagación del campo electromagnético.

2.3. Electrodinámica no lineal de Euler-Heisenberg

La Electrodinámica clásica, descrita por las ecuaciones de Maxwell, describe una teoría lineal que se acopla de manera mínima a la Relatividad General. Sin embargo, el trabajo fundacional de Euler y Heisenberg [5] reveló que esta visión clásica es incompleta. La teoría cuántica de campos predice que el vacío no es un espacio inerte, sino un medio dinámico. La fluctuación continua de pares virtuales electrón-positrón dota al vacío de propiedades efectivas análogas a las de un medio dieléctrico, un fenómeno conocido como polarización del vacío. Esta polarización se manifiesta como una auto-interacción no lineal del campo electromagnético, lo que implica que, en regímenes de campos intensos, las ecuaciones de Maxwell deben ser modificadas. Esta teoría nos interesa para nuestro estudio ya que representa la primera corrección cuántica al electromagnetismo clásico. Al estudiarla, no solo se analiza una geometría alternativa, sino que se investiga cómo los efectos de la física cuántica modifican el espacio-tiempo de un objeto cargado, generando así predicciones únicas y potencialmente observables para la precesión del pericentro y la deflexión de la luz que la distinguen de la teoría clásica.

El punto de partida para una teoría electrodinámica no lineal es la construcción de un lagrangiano que sea invariante Lorentz y gauge. Dicho lagrangiano debe ser una función de los dos únicos invariantes Lorentz que se pueden construir a partir del tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$

$$F = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \quad ; \quad G = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.15)$$

donde $\star F^{\mu\nu}$ es el dual de Hodge de $F_{\mu\nu}$ y $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son el vector campo eléctrico y magnético respectivamente. En esta teoría la parte no lineal de la densidad lagrangiana total (sin incluir parte lineal) para campos que varían lentamente en el espacio y en el tiempo tiene la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_{\text{NLEM}} = \frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} \left[i\eta^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \frac{\cos\left(\frac{\eta}{|E_k|} \sqrt{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}\right) + \text{conj}}{\cos\left(\frac{\eta}{|E_k|} \sqrt{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}\right) - \text{conj}} - |E_k|^2 - \frac{\eta^2}{3} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right], \quad (2.16)$$

donde $E_k = \frac{m^2}{e}$ es la intensidad de campo crítica, que representa el campo eléctrico necesario para que el trabajo realizado sobre un electrón a lo largo de una longitud de onda Compton sea igual a la energía en reposo del electrón. Esta E_k es pues la escala de campo en la que los efectos no lineales se vuelven de orden uno. Para campos mucho menores que $|E_k|$, la densidad lagrangiana se aproxima a la de Maxwell, pero para campos de intensidad comparable, las desviaciones son significativas. Por otro lado, η es el tiempo propio, interpretación posterior a Euler y Heisenberg y más profunda que surge del trabajo de Schwinger en 1951 [6].

La introducción de una densidad lagrangiana no lineal modifica tanto la dinámica del propio campo como su acoplamiento a la gravedad. El tensor de energía-momento del campo electromagnético no lineal se obtiene variando su acción con respecto a la métrica

$$T_{\mu\nu}^{\text{NLEM}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{NLEM}}}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{NLEM}} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NLEM}}}{\partial F} F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha}. \quad (2.17)$$

Una propiedad fundamental de este tensor, que lo distingue del caso de Maxwell, es que su traza no es necesariamente nula, lo que refleja la ruptura de la invarianza conforme a nivel cuántico.

El sistema completo que describe la interacción entre la gravedad y la electrodinámica no lineal se conoce como las ecuaciones de Einstein-Euler-Heisenberg. Se obtienen al incluir este nuevo tensor de energía-momento junto con la parte lineal del Electromagnetismo como fuentes en las ecuaciones de campo de Einstein (2.8).

Capítulo 3

Objetos compactos

Dentro de la Relatividad General, los agujeros negros emergen como una de sus predicciones más extraordinarias y extremas. No son objetos materiales en el sentido clásico, sino regiones del propio espacio-tiempo cuya curvatura es tan intensa que nada, ni siquiera la luz, puede escapar de su atracción gravitacional una vez cruzada una frontera de no retorno conocida como el horizonte de sucesos.

Las soluciones exactas más célebres de las ecuaciones de Einstein que describen estos objetos son la métrica de Schwarzschild que modela un agujero negro estático y esféricamente simétrico definido únicamente por su masa M ; la métrica de Reissner-Nordström, que añade una carga eléctrica Q ; y la métrica de Kerr, que generaliza la solución de Schwarzschild para incluir la rotación, caracterizada por su masa M y su momento angular a . La existencia de estos objetos, inicialmente una curiosidad matemática, ha sido corroborada por una abrumadora evidencia observacional en las últimas décadas, desde la detección de ondas gravitacionales procedentes de la fusión de agujeros negros binarios [2] hasta las imágenes directas de las sombras de los agujeros negros supermasivos en el centro de la galaxia M87 y, más recientemente, en el centro de nuestra propia galaxia, Sagitario A*, ambas obtenidas por la colaboración del *Event Horizon Telescope* [7, 8]. A pesar de este éxito, la estructura interna de los agujeros negros, con su singularidad central, plantea profundos desafíos teóricos.

La idea de utilizar un agujero negro como un atajo a través del universo es una idea teóricamente atractiva, pero se enfrenta a objeciones insuperables desde la Relatividad General. Las soluciones clásicas, como las tres nombradas con anterioridad, describen geometrías con singularidades espacio-temporales donde las fuerzas de marea son muy grandes, de hecho infinitas en la singularidad central, garantizando la destrucción de cualquier observador.

Más fundamentalmente, el horizonte de sucesos actúa como una membrana causal estrictamente unidireccional. Una vez cruzado, todos los caminos futuros posibles apuntan inexorablemente hacia la singularidad, haciendo imposible no solo el regreso, sino cualquier comunicación con el universo exterior. Si bien es cierto que las soluciones matemáticas internas de la métrica de Kerr contienen “túneles” que conectan con otros universos o regiones distantes, estos pasadizos son intrínsecamente inestables [9]. El horizonte de Cauchy que delimita estas regiones es susceptible a sufrir una inestabilidad violenta, la cual colapsaría de forma inmediata el túnel. En consecuencia, los agujeros negros clásicos no son portales, sino trampas sin retorno.

Ante esta realidad, Morris y Thorne invirtieron el enfoque tradicional [10]. En lugar de tomar una solución existente y analizar sus propiedades se cuestionaron la forma que debería tener el espacio-tiempo y el tipo de materia que se necesitaría para construir un túnel que sí sea transitable. De este ejercicio nació la definición formal de un agujero de gusano transitable, que debe satisfacer una serie de criterios de viabilidad. A saber:

- Conexión topológica: la solución debe describir una garganta que conecte dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo, que pueden estar en el mismo universo o en universos distintos.
- Ausencia de horizontes: para garantizar la bidireccionalidad del viaje, la métrica no debe contener horizontes de sucesos. Esto implica que la componente g_{00} de la métrica nunca debe anularse.
- Condiciones de tránsito adecuadas: las fuerzas de marea gravitacionales deben ser tolerables en todo el trayecto. Además, el tiempo de tránsito medido tanto por el viajero como por un observador externo debe ser finito.

La condición geométrica clave para mantener la garganta abierta (Figura 3.1a) es que debe ensancharse hacia fuera. En un diagrama de inmersión, esto significa que la curvatura de la superficie debe ser tal que las geodésicas nulas que convergen al entrar en la garganta deben empezar a diverger para poder salir por el otro extremo (Figura 3.1b). Este efecto es radicalmente opuesto a la acción de la materia ordinaria, que siempre tiende a enfocar las geodésicas.

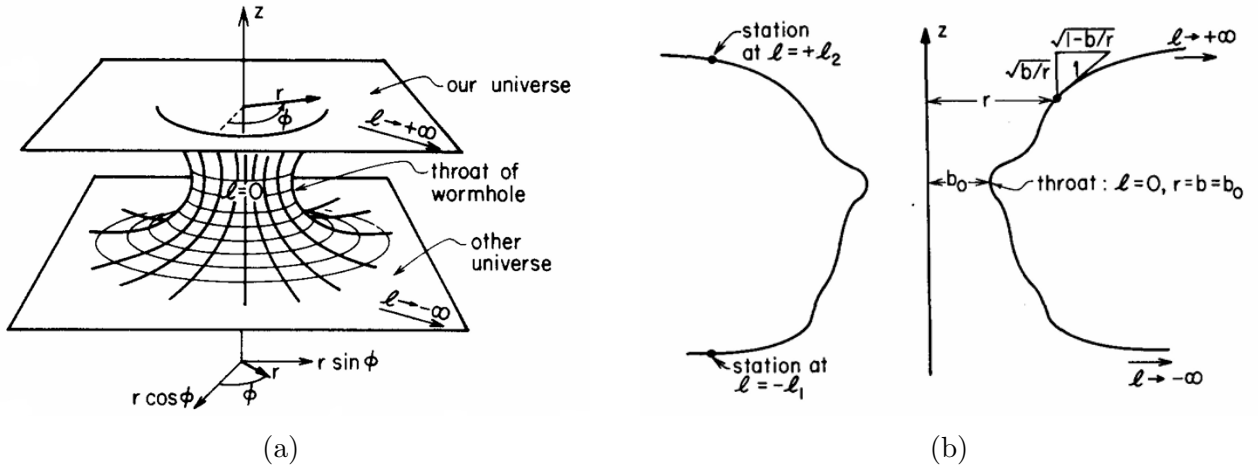


Figura 3.1: (a) Diagrama de inmersión para un agujero de gusano que conecta dos universos diferentes. (b) Diagrama de inmersión para un agujero de gusano general, visto de perfil. Se definen el radio mínimo como b_0 y la coordenada de distancia radial propia como ℓ . [10]

La imposición de esta geometría de ensanchamiento en las ecuaciones de campo de Einstein revela el coste físico de un agujero de gusano transitible: la necesidad de materia exótica. Al resolver las ecuaciones para la garganta, se demuestra que el tensor energía-momento del material que la sostiene debe tener propiedades extraordinarias. Específicamente, debe violar la llamada Condición de Energía Nula (NEC), que postula que para cualquier vector nulo k^μ , se debe cumplir

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (3.1)$$

Físicamente, la NEC establece que la materia ordinaria no puede ejercer una repulsión gravitacional sobre la luz, lo cual es lo que se necesita para desenfocar los rayos de luz y mantener la garganta abierta. A parte de violarse la NEC, a su vez, también se debe violar la Condición de Energía Débil (WEC), que extiende el postulado a todos los vectores de tipo tiempo. Esta última condición es la que da origen a la famosa [11] desigualdad para la tensión radial τ y la densidad de energía ρ en la garganta: $\tau > \rho$.

Clásicamente, la necesidad de materia exótica habría sido el fin de la discusión. Sin embargo, la Teoría Cuántica de Campos demuestra que las condiciones usuales de energía para fluidos clásicos no son universalmente válidas. Fenómenos como el efecto Casimir (donde la energía del vacío entre dos placas conductoras es negativa respecto al vacío exterior) o la radiación de Hawking (que puede interpretarse como un flujo de energía negativa a través del horizonte de un agujero negro) son ejemplos teóricos y, en el caso de Casimir, experimentales de violaciones localizadas de estas condiciones. La Teoría Cuántica de Campos, por tanto, proporciona una justificación teórica para la existencia potencial de la materia exótica, aunque su generación y estabilización a escala macroscópica sigue siendo una cuestión abierta y especulativa.

No obstante, la existencia de un agujero de gusano transitable conlleva una consecuencia aún más profunda y problemática. En su artículo, Morris, Thorne y Yurtsever demostraron que si un agujero de gusano puede ser creado y manipulado, entonces puede ser convertido en una máquina del tiempo [12]. Este resultado no depende de una física especulativa, sino la combinación de la topología del agujero de gusano con un principio bien establecido de la Relatividad General: la dilatación del tiempo.

Consideremos un agujero de gusano con dos bocas, A y B, inicialmente sincronizadas en el tiempo. Si se toma una de las dos bocas, digamos la B, y se la somete a un viaje relativista de ida y vuelta a una velocidad cercana a la de la luz, su reloj interno avanzará más lentamente que el de la boca A, que permanece estacionaria. Al reunir las, aunque estén espacialmente próximas, existiría un desfase temporal entre ellas. Por ejemplo, la boca A podría estar en el año 2050 mientras que la boca B estaría conectada al año 2040.

Un viajero podría entonces entrar por la boca A en 2050, atravesar la garganta en un tiempo insignificante y emerger por la boca B en el año 2040. Al hacerlo, habría completado una trayectoria que termina en su propio pasado, una Curva Temporal Cerrada (CTC). La posibilidad de crear CTCs socava el principio de causalidad, dando lugar a paradojas lógicas como la “paradoja del abuelo”.

Esta implicación ha llevado a muchos físicos a postular alguna forma de Conjetura de Protección Cronológica [13], un principio (aún no demostrado) que sostiene que las leyes de la Física deben impedir la formación de máquinas del tiempo macroscópicas. Se especula que las fluctuaciones cuánticas del vacío se amplificarían hasta el infinito en la entrada de la CTC, destruyendo el agujero de gusano antes de que la causalidad pueda ser violada.

Este marco teórico es el fundamento sobre el que se construyen los modelos de Black-Bounce (de los que hablaremos más adelante). Por lo tanto, estudiar la fenomenología de los modelos de Black-Bounce es equivalente a explorar las consecuencias observables de geometrías sostenidas por materia exótica, siempre que se asuma la Relatividad General como teoría gravitacional.

Capítulo 4

Espacio-tiempos esféricamente simétricos

Cuando Schwarzschild quiso entender la gravedad de un objeto como una estrella (imaginándola perfectamente redonda, es decir, esféricamente simétrica, y sin cambios en el tiempo, es decir, estática) lo primero que se preguntó fue: si la gravedad de esta estrella es siempre la misma y se siente igual en todas direcciones, ¿cómo tiene que ser, en general, la geometría del espacio-tiempo que la rodea? Traducir estas simetrías al elemento de línea (o métrica) fue su primer paso crucial.

Un espacio-tiempo se considera estático si cumple dos condiciones fundamentales [14]. Primero, debe existir una coordenada temporal, que designaremos como $x^0 \equiv t$, tal que todas las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ sean independientes de esta coordenada. Segundo, el elemento de línea ds^2 debe permanecer invariante bajo la transformación de inversión temporal $t \rightarrow -t$. Es crucial distinguir esta propiedad de la de un espacio-tiempo meramente estacionario, el cual solo satisface la primera condición.

Por otro lado, la condición de isotropía espacial implica que, en cualquier instante de la coordenada temporal, el espacio-tiempo no presenta direcciones espaciales privilegiadas. Matemáticamente, esto se traduce en que la parte espacial del elemento de línea ds^2 solo puede depender de invariantes rotacionales construidos a partir de las coordenadas espaciales (x^i , con $i = 1, 2, 3$) y sus diferenciales dx^i . Siguiendo una estrategia derivativa, es conceptualmente ventajoso considerar primero la forma más general de una métrica espacialmente isótropa, sin imponer aún la condición de estaticidad. Los únicos invariantes rotacionales construidos a partir de un vector espacial $\vec{x}$ (desde un origen arbitrario) y su diferencial $d\vec{x}$ son los productos escalares: $\vec{x} \cdot \vec{x}$ (que define el cuadrado de una coordenada radial, r^2), $d\vec{x} \cdot d\vec{x}$ y $\vec{x} \cdot d\vec{x}$. Por lo tanto, la forma más general del elemento de línea que depende de estos invariantes y de la coordenada temporal puede expresarse como

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)dt(\vec{x} \cdot d\vec{x}) + C(t, r)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + D(t, r)d\vec{x}^2, \quad (4.1)$$

donde A, B, C y D son funciones arbitrarias de t y r .

Para simplificar esta expresión, es conveniente transformar las coordenadas espaciales a un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) . En este sistema, los invariantes rotacionales toman formas más simples: $\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2$, $\vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr$ y $d\vec{x} \cdot d\vec{x} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$. Sustituyendo estas expresiones en la métrica general y realizando manipulaciones algebraicas que incluyen la absorción de factores de r en las funciones arbitrarias (redefiniéndolas), la métrica se puede escribir

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)dt dr + C(t, r)dr^2 + D(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.2)$$

donde A , B , C y D son funciones arbitrarias de las coordenadas t y r . Se puede eliminar el término $dt dr$ realizando otro cambio de coordenadas creando una nueva coordenada temporal $\bar{t}$

$$d\bar{t} = \Phi(t, r) \left[A(t, r) dt - \frac{1}{2} B(t, r) dr \right], \quad (4.3)$$

donde $\Phi(t, r)$ es el factor integrante que asegura que $\bar{t}$ sea una diferencial exacta, lo que implica que este cambio de coordenadas es posible al menos de manera local. Elevando al cuadrado la anterior expresión

$$d\bar{t}^2 = \Phi^2(t, r) \left[A^2(t, r) dt^2 + \frac{B^2(t, r)}{4} dr^2 - A(t, r) B(t, r) dt dr \right], \quad (4.4)$$

y simplificando

$$A(t, r) dt^2 - B(t, r) dt dr = \frac{1}{A(t, r) \Phi^2(t, r)} d\bar{t}^2 - \frac{B^2(t, r)}{4A(t, r)} dr^2. \quad (4.5)$$

Introduciendo esto en la ecuación (4.2)

$$ds^2 = -\frac{1}{A(t, r) \Phi^2(t, r)} d\bar{t}^2 + \left[\frac{B^2(t, r)}{4A(t, r)} + C(t, r) \right] dr^2 + D(t, r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.6)$$

Si definimos dos nuevas funciones

$$\bar{A} = \frac{1}{A(t, r) \Phi^2(t, r)} \quad ; \quad \bar{B} = \frac{B^2(t, r)}{4A(t, r)} + C(t, r), \quad (4.7)$$

el elemento de línea se puede escribir de la siguiente forma

$$ds^2 = -\bar{A}(t, r) dt^2 + \bar{B}(t, r) dr^2 + D(t, r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.8)$$

donde se han eliminado las barras para relajar la notación. Una vez realizado el cambio de coordenadas se puede observar que se obtiene una métrica diagonal.

Ahora es cuando el Teorema de Birkhoff [15] ofrece una generalización crucial y una simplificación significativa. Este teorema demuestra que, incluso si no imponemos la condición de estaticidad desde el principio y solo mantenemos la simetría esférica para el espacio-tiempo en el vacío (es decir, buscamos soluciones a $R_{\mu\nu} = 0$ para determinar $A(t, r)$, $B(t, r)$ y $C(t, r)$ de la expresión anterior), se llega ineludiblemente a la conclusión de que estas funciones A , B y C , en Relatividad General, deben ser independientes del tiempo. De esta forma

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + C(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.9)$$

es el elemento de línea más general de un espacio-tiempo con simetría esférica. A continuación, se van a detallar varios espacio-tiempos de este tipo.

4.1. Espacio-tiempo de Schwarzschild

La determinación de la geometría espacio-temporal de vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) en presencia de una fuente de masa esférica se inicia considerando un ansatz general para una métrica con simetría esférica, tal como se presenta en la ecuación (4.9). Al introducir esta forma métrica en las

ecuaciones de campo gravitatorio, es posible resolver unívocamente las funciones desconocidas que la componen. Específicamente, se encuentra que estas funciones adoptan la forma

$$A(r) = B^{-1}(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad ; \quad C(r) = r^2. \quad (4.10)$$

Con estas funciones determinadas, se obtiene la solución de Schwarzschild [16]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.11)$$

Este resultado describe un espacio-tiempo cuya geometría está enteramente caracterizada por un único parámetro: la masa M de la fuente gravitatoria. Una propiedad fundamental de esta solución es su comportamiento asintótico. A medida que la coordenada radial r tiende a infinito, la métrica de Schwarzschild tiende a

$$ds^2 \simeq -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right), \quad (4.12)$$

que no es otra que la métrica del espacio-tiempo plano de Minkowski más correcciones, expresada en un sistema de coordenadas esféricas. Este comportamiento, conocido como planitud asintótica, significa que la influencia gravitatoria de la masa central se desvanece a grandes distancias, y la curvatura del espacio-tiempo tiende a anularse. Además, la ecuación (4.12) permite interpretar la coordenada temporal como el tiempo medido por un reloj a una distancia infinita del origen.

Un análisis detallado de la métrica de Schwarzschild (ecuación (4.11)) revela la existencia de singularidades aparentes o de coordenadas en dos localizaciones: $r = 0$ y $r = 2M$. Esta última define el radio de Schwarzschild. En estos puntos algunos coeficientes de la métrica se anulan o divergen. Es crucial distinguir estas singularidades de coordenadas de las singularidades físicas o de curvatura. Las primeras, a menudo, son artefactos del sistema de coordenadas elegido y pueden eliminarse mediante una transformación adecuada. Por el contrario, una singularidad de curvatura es intrínseca al espacio-tiempo y se manifiesta por la divergencia de escalares de curvatura, siendo por tanto independiente de la elección de coordenadas.

En el contexto de la solución de Schwarzschild, se puede demostrar que en $r = 0$ constituye una auténtica singularidad de curvatura. Un indicador de ello es la divergencia del escalar de Kretschmann

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12M^2}{r^6}. \quad (4.13)$$

En cambio, en el radio de Schwarzschild ($r = 2M$), ninguno de los escalares de curvatura diverge. Esto implica que la superficie esférica definida por $r = 2M$ no corresponde a una singularidad física del espacio-tiempo. El comportamiento anómalo del elemento de línea para $r \leq 2M$ es, más bien, una indicación de que las coordenadas de Schwarzschild no proporcionan una descripción adecuada de la física en el interior de esta región¹.

Generalmente, el radio de Schwarzschild es considerablemente menor que las dimensiones físicas d de los cuerpos astrofísicos comunes. Para estos objetos, la solución de vacío de Schwarzschild es aplicable en la región exterior $r \geq d \gg 2M$, permitiendo el uso de estas coordenadas para describir fenómenos gravitatorios externos. Sin embargo, para objetos esféricos

¹Esta singularidad de coordenadas se elimina mediante un cambio a un sistema que sea regular en el horizonte, como las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Estas se obtienen al introducir una nueva coordenada temporal, como el “tiempo avanzado” $v = t + r^*$ o el “tiempo retardado” $u = t - r^*$, donde r^* es la coordenada tortuga que debe satisfacer $dr^* = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr$. En este sistema la métrica resultante no es singular en $r = 2M$.

ultracompactos, cuya dimensión física d es inferior a $2M$, la superficie $r = 2M$ queda expuesta al exterior. El comportamiento anómalo de los coeficientes métricos en esta región se traduce en propiedades cinemáticas singulares para partículas masivas y luz. La hipersuperficie $r = 2M$ se denomina horizonte de sucesos. Un objeto que posee tal horizonte se denomina agujero negro, caracterizado por una atracción gravitatoria tan intensa que ni siquiera la luz puede escapar de su interior. En particular, dentro del horizonte de eventos, todas las trayectorias nulas y de tipo tiempo solo pueden dirigirse hacia $r = 0$. Una vez que una partícula de prueba ha atravesado el horizonte, moverse a valores de r más pequeños es tan inevitable como avanzar en el tiempo. Esto es una consecuencia del hecho de que dentro del horizonte $g_{11} < 0$, por lo que la coordenada radial r en realidad se comporta como una coordenada temporal.

4.2. Espacio-tiempo de Reissner-Nordström

Así como Schwarzschild consideró la gravedad de un objeto masivo esféricamente simétrico y estático, la solución de Reissner-Nordström [17] extiende este análisis para incluir la presencia de carga eléctrica Q también esféricamente simétrica (por ejemplo una carga puntual, pero no necesariamente). Esta solución surge de resolver las ecuaciones de campo de Einstein acopladas a las ecuaciones de Maxwell para una fuente con masa M y carga Q , manteniendo la simetría esférica y la condición de estaticidad.

Al igual que en el caso de Schwarzschild, se parte de un ansatz general para una métrica con simetría esférica (ecuación (4.9)). Sin embargo, al introducir la carga, el tensor energía-momento del campo electromagnético modifica las ecuaciones de campo. La resolución de estas ecuaciones conduce al siguiente elemento de línea para el espacio-tiempo de Reissner-Nordström

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.14)$$

El comportamiento y la estructura causal de esta métrica están determinados fundamentalmente por la función $\Delta(r) = r^2 - 2Mr + Q^2$, cuyas raíces definen las posiciones de los eventuales horizontes

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (4.15)$$

Esto da lugar a varios escenarios:

- $M > |Q|$: Existen dos horizontes distintos $\{r_{\pm}, r_+ > r_-\}$ y reales. El horizonte exterior r_+ es el horizonte de eventos, análogo al de Schwarzschild. El horizonte interior r_- es un horizonte de Cauchy, que representa una frontera matemática más allá de la cual la estructura causal del espacio-tiempo se rompe, haciendo imposible predecir el futuro de una partícula a partir de datos iniciales conocidos. La región entre r_+ y r_- es dinámicamente similar a la región $r < 2M$ de Schwarzschild.
- $M = |Q|$: Los dos horizontes coinciden en $r_+ = r_- = M$.
- $M < |Q|$: No existen horizontes reales. La singularidad en $r = 0$ estaría “desnuda”, es decir, visible para observadores lejanos. Esto en la realidad es una conjetura llamada Cosmic Censorship Conjecture.

La singularidad en $r = 0$ es una singularidad de curvatura real, como lo indica la divergencia del escalar de Kretschmann. A diferencia de la singularidad de Schwarzschild, que es de tipo espacial (todos los caminos de tipo tiempo terminan en ella), la singularidad de Reissner-Nordström es de tipo temporal, lo que significa que un observador podría, en principio, evitarla.

Si la carga Q se anula, la métrica de Reissner-Nordström se reduce exactamente a la métrica de Schwarzschild.

4.3. Espacio-tiempo de Euler-Heisenberg

Como vimos en la sección 2.3, la teoría de Euler-Heisenberg es una teoría electrodinámica no lineal que surge como una aproximación de baja energía de la electrodinámica cuántica o de la teoría de supercuerdas [18]. Al acoplarla con la Relatividad General, se obtienen soluciones de vacío estáticas y esféricamente simétricas que modifican las predicciones de las soluciones de Schwarzschild o Reissner-Nordström. Los agujeros negros en los que nos vamos a centrar son los agujeros negros de Euler-Heisenberg magnéticamente cargados, cuya métrica se describe con el elemento de línea

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q_m^2}{r^2} - \frac{2\mu q_m^4}{5r^6} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q_m^2}{r^2} - \frac{2\mu q_m^4}{5r^6} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.16)$$

donde μ es una constante que puede relacionarse con las expansiones en serie efectivas de la electrodinámica cuántica [5] y q_m es la carga de un monopolo magnético que se define como [19]

$$q_m = \frac{F_{\theta\varphi}}{\sin \theta}. \quad (4.17)$$

La expresión de los coeficientes g_{00} y g_{11} de la métrica revelan la modificación introducida por esta teoría respecto a la solución de Reissner-Nordström para una distribución esféricamente simétrica con masa y carga magnética (que correspondería a $\mu = 0$). El término $-\frac{2\mu q_m^4}{5r^6}$ es la corrección no lineal característica de la teoría de Euler-Heisenberg. Asumiendo $\mu > 0$, conforme a las consideraciones de la teoría de cuerdas y Born-Infeld, este término es negativo. La contribución de esta teoría se vuelve significativa para distancias cortas debido a su fuerte dependencia r^{-6} , que domina sobre el término de masa r^{-1} y el término de carga de Maxwell r^{-2} a esas escalas.

Los radios de los horizontes r_H se determinan a partir de la condición

$$f(r_H) = 1 - \frac{2M}{r_H} + \frac{q_m^2}{r_H^2} - \frac{2\mu q_m^4}{5r_H^6} = 0, \quad (4.18)$$

lo que conduce a la ecuación

$$r_H^2 - 2Mr_H + q_m^2 - \frac{2\mu q_m^4}{5r_H^4} = 0. \quad (4.19)$$

El término $-\frac{2\mu q_m^4}{5r_H^4}$ influye directamente en la localización de los horizontes. Para una masa M y carga q_m dadas, esta contribución tiende a incrementar el radio del horizonte en comparación con el caso de Reissner-Nordström.

La existencia y multiplicidad de los horizontes dependen críticamente del valor del parámetro μ en relación con la carga magnética q_m . El análisis de las condiciones para un horizonte extremo ($f(r_H) = 0$ y $f'(r_H) = 0$) lleva a la definición de un parámetro crítico $\mu_{\text{crit}} = \frac{2}{27} q_m^2$, el cual permite hacer la siguiente clasificación:

- Caso $\mu < \mu_{\text{crit}}$: La estructura de horizontes es cualitativamente similar a la de un agujero negro de Reissner-Nordström, pudiendo presentar un horizonte de eventos externo y un

horizonte de Cauchy interno, así como una solución extrema con horizontes degenerados que ocurre cuando el mínimo de la función $f(r)$ sea exactamente cero. No obstante, se evidencia que pueden existir soluciones de horizonte interno que se extienden a radios menores que el correspondiente al caso extremo de Reissner-Nordström, alcanzando el límite $r_H \rightarrow 0$.

- Caso $\mu = \mu_{\text{crit}}$: Existe una única solución de horizonte extremo degenerado.
- Caso $\mu > \mu_{\text{crit}}$: No se presenta una solución de horizonte extremo en el sentido convencional. Generalmente, existe un único horizonte de eventos.

La singularidad de curvatura se mantiene en $r = 0$, donde los escalares de curvatura, como el escalar de Kretschmann, divergen. A medida que $r \rightarrow 0$, el término de Euler-Heisenberg añadido a la métrica domina sobre los términos de masa y de carga de Maxwell.

Una de las consecuencias más relevantes del término de Euler-Heisenberg es su impacto en la termodinámica del agujero negro. Específicamente la temperatura de Hawking del agujero negro magnéticamente cargado en la teoría de Euler-Heisenberg presenta una divergencia en el límite $r_H \rightarrow 0$ para cualquier valor de μ . Este comportamiento contrasta marcadamente con el de un agujero negro de Reissner-Nordström extremo, cuya temperatura es nula y se considera un estado final estable de la evaporación de Hawking para agujeros negros cargados.

4.4. Espacio-tiempo de Black-Bounce

Cuando buscamos geometrías capaces de simular las características observables de los agujeros negros, una alternativa que ha ganado atención es la métrica de Black Bounce. A. Simpson y M. Visser la introdujeron en 2019 [20] como una familia de soluciones a las ecuaciones de campo de la Relatividad General. Su descripción matemática se concreta en el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2}} \right) dt^2 + \frac{d\xi^2}{1 - \frac{2m}{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2}}} + (\xi^2 + \alpha^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.20)$$

Estas soluciones presentan dos rasgos fundamentales: son estáticas y poseen simetría esférica. Toda la familia se ajusta mediante un único parámetro (el parámetro α). El sistema de coordenadas empleado, $(t, \xi, \theta, \varphi)$, mantiene la misma definición para el tiempo t y los ángulos θ y φ que el sistema de Schwarzschild (ilustrado en la Sección 4.1). La clave, sin embargo, está en la coordenada radial ξ . Esta se define en un rango desde menos infinito a más infinito, $\xi \in (-\infty, +\infty)$. Para captar bien esta distinción con la coordenada radial de Schwarzschild, es útil fijarse en el elemento de línea bidimensional $ds_{(2)}^2 = (\xi^2 + \alpha^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$. Este describe una 2-esfera en hipersuperficies con $\{t = \text{constante}; \xi = \text{constante}\}$, y su radio viene dado por $r^2(\xi) = \xi^2 + \alpha^2$, dependiendo así de ξ . Si calculamos el área de esta esfera, $A = \int ds_{(2)}^2 = 4\pi r^2$, vemos que $r(\xi)$ funciona como el radio areal estándar, igual que en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Si bien la anulación del parámetro α reduce la ecuación (4.20) exactamente a la métrica de Schwarzschild (ecuación (4.11)), haciendo que ξ coincida con r , la región de los valores de interés del parámetro α es aquello en la que estos valores son positivos. En este caso, α representa la denominada garganta de la geometría, $r_{\text{th}}^2 = \alpha^2$, que constituye un mínimo absoluto para el radio areal alcanzándose en $\xi = 0$. Esta característica posibilita una interpolación suave entre un agujero negro de Schwarzschild y un agujero de gusano transitado en ambos sentidos, según

la concepción de Morris-Thorne [12]. La estructura causal de la geometría, que se obtiene calculando explícitamente las raíces del término g_{00} , revela esta interpolación. Para el caso del Black-Bounce, se tiene

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_H = \pm\sqrt{4M^2 - \alpha^2}. \quad (4.21)$$

De esta manera, para que un horizonte se manifieste—y, con ello, para que la solución exhiba un comportamiento de agujero negro—es imperativo que se cumpla la relación $\alpha \leq 2M$. Siempre que esta desigualdad se mantenga, cualquier elección de α dentro de este intervalo resultará en una geometría con dos horizontes, situados a uno y otro lado de la garganta en $\xi = 0$. En consecuencia, la situación particular donde $\alpha = 2M$ actúa como un punto de inflexión, un parteaguas que segmenta la familia de soluciones de Black-Bounce en tipos de geometrías con naturaleza fundamentalmente distintas. Estos casos específicos se detallan a continuación:

- Recordemos que, al establecer $\alpha = 0$, obtenemos $\xi_H = 2M$. En este escenario, la geometría no es otra que la del agujero negro de Schwarzschild convencional de masa M , caracterizado por una singularidad de curvatura real en el punto $\xi = r = 0$.
- Si nos movemos al intervalo $0 < \alpha < 2M$, la métrica describe un espacio-tiempo que posee tanto un horizonte como una garganta no nula (esta última siendo una hipersuperficie de tipo espacial). Sin embargo, dado que $r^2(\xi_H) = 4M^2$ es mayor que r_{th}^2 , el “rebote” queda efectivamente resguardado frente al horizonte. Estamos, pues, ante una geometría de un agujero negro regular [21, 22, 23]. De hecho, una análisis detallado en [20] de las componentes no nulas del tensor de Riemann y de varios invariantes de curvatura reveló que, si bien estos términos se maximizan, no divergen al aproximarse a $\xi \rightarrow 0$, gracias a que sus denominadores contienen potencias de $(\xi^2 + \alpha^2)$. Esto confirma la auténtica regularidad de la geometría en $\xi = 0$.
- Alcanzado el valor crítico $\alpha = 2M$, nos encontramos ante una situación donde el horizonte y la garganta se fusionan. Esto se traduce en una geometría que representa un agujero de gusano transitable en una única dirección. Aquí, la garganta en $\xi = 0$ es una hipersuperficie de tipo nulo, lo que significa que también funciona como un horizonte de eventos [20]. Las partículas pueden, por tanto, atravesar la garganta desde un lado—aunque, debido al carácter nulo de la garganta, un observador exterior estacionario mediría un tiempo infinito para este cruce—para luego emerger en un horizonte nulo pasado en la región opuesta (concebible como una manifestación futura del universo origen).
- Finalmente, para valores de $\alpha > 2M$, la geometría se transforma radicalmente: desaparecen los horizontes. El rebote, ahora una hipersuperficie temporal, queda completamente expuesto a ambos lados. Esto configura un agujero de gusano transitable en ambas direcciones [12, 24, 10, 25], estableciendo una conexión entre dos regiones espacio-temporales distintas: un Universo 1 (para $\xi > 0$) y un Universo 2 (para $\xi < 0$). Las partículas pueden viajar para cualquiera de los lados, cruzar la garganta (incluso repetidamente) y dirigirse en cualquier sentido.

Capítulo 5

PyGRO: un Integrador de Python para Órbitas en Relatividad General

A lo largo de nuestro estudio se ha utilizado PyGRO. Este es un proyecto de código abierto distribuido como un paquete de Python que integra órbitas de Relatividad General [26]. PyGRO opera a nivel numérico y simbólico. La estructura del código de Pygro se basa en: un motor métrico, un motor geodésico y unas Interfaces de Programación de Aplicaciones (APIs) de bajo y alto nivel.

5.1. El *Motor Métrico*

El objeto *Métrica* sirve como herramienta fundamental para definir métricas espacio-temporales de cuatro dimensiones en PyGRO. A diferencia de otras herramientas computacionales, como GYOTO [27], que están diseñadas para unas métricas analíticas determinadas, la clase *Métrica* en PyGRO está diseñada con la generalidad en mente. Esto permite al usuario utilizar todo tipo de sistemas de coordenadas $\{x^\mu\}_{\mu=0\dots 3}$ y cualquier expresión del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, lo que hace que se puedan estudiar gran variedad de geometrías del espacio-tiempo. Convencionalmente, PyGRO adopta la signatura $(-, +, +, +)$.

La clase *Métrica* se basa en *sympy* [28] que permite obtener todas las cantidades necesarias para la posterior integración de las geodésicas en el espacio-tiempo definido por la expresión simbólica del tensor métrico introducido por el usuario. De hecho, al inicializarse, el objeto *Métrica* obtiene la métrica inversa $g^{\mu\nu}$, los símbolos de Christoffel de la métrica, que en la conexión de Levi-Civita toman la forma de la ecuación (2.2), a partir de los cuales se obtienen las ecuaciones de las geodésicas que gobiernan el movimiento de las partículas en caída libre en el espacio-tiempo dado

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0, \quad (5.1)$$

donde los puntos representan derivadas con respecto al parámetro afín τ en las geodésicas. Además, PyGRO obtiene simbólicamente funciones ayuda que permiten normalizar el cuadvector tangente inicial a la geodésica, definiendo su carácter causal

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \begin{cases} -1 & \text{time-like} \\ 0 & \text{null} \end{cases}. \quad (5.2)$$

Esto permite estudiar el movimiento de partículas masivas y de rayos de luz. Específicamente, estas funciones ayuda permiten obtener una componente del cuadvector tangente a la geodésica fijando con anterioridad las otras tres, resolviendo la ecuación (5.2) para la componente desconocida, una vez que el carácter causal esté definido.

El objeto *Métrica* también permite obtener el Lagrangiano de la partícula test

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (5.3)$$

que es particularmente útil para obtener cantidades conservadas que son necesarias para las APIs de alto nivel.

5.2. El *Motor Geodésico*

Esta clase constituye la herramienta numérica principal para integrar las ecuaciones geodésicas dentro de una métrica del espacio-tiempo específica. Su funcionamiento se basa en la vinculación con un objeto *Métrica* previamente inicializado (descrito en la sección 5.1). De esta forma, el *Motor Geodésico* utiliza las cantidades simbólicas precalculadas por el objeto *Métrica* (como los símbolos de Christoffel) para llevar a cabo la integración numérica de las trayectorias geodésicas.

Los usuarios disponen de flexibilidad para configurar el proceso de integración. En primer lugar, pueden especificar el *backend* simbólico que se utilizará:

1. El *backend* por defecto, *autowrap*, convierte las expresiones simbólicas de las ecuaciones geodésicas en funciones C precompiladas. Esto resulta en una mejora significativa del rendimiento durante la fase de integración.
2. Alternativamente, se puede optar por el *backend lambdify*, que transforma las expresiones simbólicas en funciones llamables de Python. Esto es ventajoso en entornos que no dispongan de un compilador C, o cuando la métrica del espacio-tiempo se define a partir de funciones auxiliares de Python que no poseen una expresión analítica cerrada.

En cuanto a los métodos de integración, PyGRO permite seleccionar entre diversos integradores explícitos de ecuaciones diferenciales ordinarias con tamaño de paso adaptativo pertenecientes a la familia Runge-Kutta [29]. Los usuarios pueden configurar parámetros clave como los tamaños de paso máximo y mínimo, así como los objetivos de exactitud AG y precisión PG que definen las tolerancias absolutas ($\text{tol}_a = 10^{-AG}$) y relativa ($\text{tol}_r = 10^{-PG}$). En cada paso de la integración, el algoritmo adapta el tamaño del paso para asegurar que el error de truncamiento estimado ε , obtenido a partir de las fórmulas embebidas de Runge-Kutta, se mantenga por debajo de un umbral de tolerancia definido como $\text{tol} = \text{tol}_a + \text{tol}_r \|y\|$, donde $\|y\|$ es la norma del vector de estado actual.

Una característica destacada del *Motor Geodésico* es su capacidad para manejar criterios de detención durante la integración. Los usuarios pueden definir condiciones específicas bajo las cuales la integración debe concluir. Un ejemplo práctico es detener la integración cuando una partícula alcanza una región particular del espacio-tiempo.

5.3. La API geodésica de bajo nivel: *Geodésica*

Dentro de PyGRO, la clase *Geodésica* ofrece la interfaz de programación más elemental (conocida como API de bajo nivel) para definir y trabajar con trayectorias geodésicas individuales. Cada objeto *Geodésica* funciona como un almacén de datos que guarda toda la información clave que caracteriza una trayectoria particular en un espacio-tiempo determinado. En concreto, una instancia de *Geodésica* almacena:

- El tipo de geodésica: especificando si se trata de una partícula con masa (trayectoria temporal o *time-like*) o sin masa como un fotón (trayectoria nula o *null*).
- Las condiciones iniciales: esto incluye la posición de partida (expresada en las coordenadas del sistema de referencia o carta elegida) y el cuadvivector tangente inicial a dicha geodésica. Este cuadvivector se normaliza internamente para asegurar que sea coherente con la naturaleza causal de la trayectoria, tal como se indica en la ecuación (5.2).
- Los resultados de la integración: una vez que el *Motor Geodésico* ha calculado la trayectoria, esta instancia de *Geodésica* también almacenará los puntos resultantes de dicha integración.

El término “bajo nivel” referido a esta API significa que el usuario debe proporcionar las condiciones iniciales de manera explícita y directa. Es decir, es necesario especificar las coordenadas espacio-temporales de inicio y las componentes del cuadvivector tangente en la base asociada al sistema de coordenadas que se esté utilizando. Es relevante mencionar que estas componentes, al estar expresadas directamente en la base de coordenadas, no siempre tienen una interpretación física inmediata o intuitiva.

Para facilitar la correcta definición de estas condiciones iniciales, especialmente en lo que respecta a la normalización del cuadvivector tangente, la clase *Geodésica* utiliza las funciones simbólicas de apoyo que el objeto *Métrica* calcula previamente. Estas funciones permiten, por ejemplo, obtener una de las componentes del cuadvivector tangente inicial si se conocen las otras tres y se ha definido el carácter causal de la geodésica, resolviendo para ello la ecuación (5.2) para la componente faltante.

5.4. API de alto nivel: órbitas cuasi-elípticas en espacio-tiempos esféricamente simétricos

Para facilitar el estudio de trayectorias de partículas masivas en escenarios gravitatorios con simetría esférica [30], PyGRO implementa una interfaz de alto nivel que permite definir las condiciones iniciales de una órbita de manera más intuitiva y físicamente relevante que la simple especificación de coordenadas y componentes de velocidad. Esta aproximación se inspira en los elementos orbitales keplerianos, familiares en la órbita celeste clásica [31].

El punto de partida es reconocer que, en un espacio-tiempo esféricamente simétrico, el movimiento de una partícula de prueba está gobernado por la métrica subyacente (expresada, por ejemplo, en coordenadas (t, r, θ, φ)). La integración numérica de las ecuaciones geodésicas requiere, en principio, especificar la posición inicial $(t_0, r_0, \theta_0, \varphi_0)$ y la cuadvivelocity inicial $(\dot{t}_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0, \dot{\varphi}_0)$ en un instante de tiempo propio τ_0 . Sin embargo, la simetría esférica permite simplificaciones significativas:

- Movimiento planar: Siempre es posible, mediante una rotación adecuada, confinar el movimiento orbital a un plano, típicamente el plano ecuatorial $(\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0)$.
- Libertad temporal: Dado que la métrica no depende explícitamente de la coordenada temporal t , el instante inicial t_0 puede elegirse arbitrariamente.
- Normalización de la cuadvivelocity: La condición de que la norma de la cuadvivelocity sea -1 para partículas masivas (ecuación (5.2)) impone una ligadura entre sus componentes, permitiendo que una de ellas se determine a partir de las otras tres.

Aprovechando estas simplificaciones, la trayectoria en el plano ecuatorial queda determinada por la energía E y el momento angular L de la partícula, que son constantes del movimiento y, en particular, en espacio-tiempos esféricamente simétricos para el Lagrangiano relativista de una partícula de prueba expresado como en la ecuación (5.3) se definen como

$$E = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \quad ; \quad L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (5.4)$$

Estas dos cantidades, a su vez, definen de forma única la evolución de la coordenada radial r a través de un potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r; L)$. Para órbitas ligadas (cuasi-elípticas), este potencial efectivo da lugar a dos puntos de retorno radial: el pericentro r_p (distancia mínima al centro) y el apocentro r_a (distancia máxima). En lugar de especificar E y L directamente, PyGRO permite definir la órbita mediante parámetros más intuitivos: el semieje mayor a y la excentricidad e , relacionados con el pericentro y el apocentro mediante las expresiones clásicas

$$r_p = a(1 - e) \quad ; \quad r_a = a(1 + e). \quad (5.5)$$

Aunque en Relatividad General el significado preciso de a y e puede depender del sistema de coordenadas y del régimen gravitatorio, esta parametrización resulta muy conveniente y familiar. La clase *Órbita* de PyGRO se encarga de calcular numéricamente los valores de E y L correspondientes a un par (a, e) dado para la métrica esféricamente simétrica en cuestión. Una vez obtenidos E y L , se pueden derivar las componentes iniciales de la cuatriveLOCIDAD $\dot{t}$ y $\dot{\phi}$.

Para definir completamente la órbita tridimensional, se introducen los ángulos kleperianos estándar:

- **Inclinación i :** Ángulo entre el plano orbital y el plano ecuatorial de referencia.
- **Longitud del nodo ascendente Ω :** Orientación de la línea donde el plano orbital cruza el plano ecuatorial (de sur a norte) respecto a una dirección de referencia.
- **Argumento del pericentro ω :** ángulo, medido en el plano orbital, desde el nodo ascendente hasta la dirección del pericentro.

Estos tres ángulos definen una serie de rotaciones que se aplican a la posición y velocidad iniciales (calculadas en el plano ecuatorial) para orientar la órbita en el espacio tridimensional. En la Figura 5.1 se puede ver claramente la configuración geométrica de la órbita.

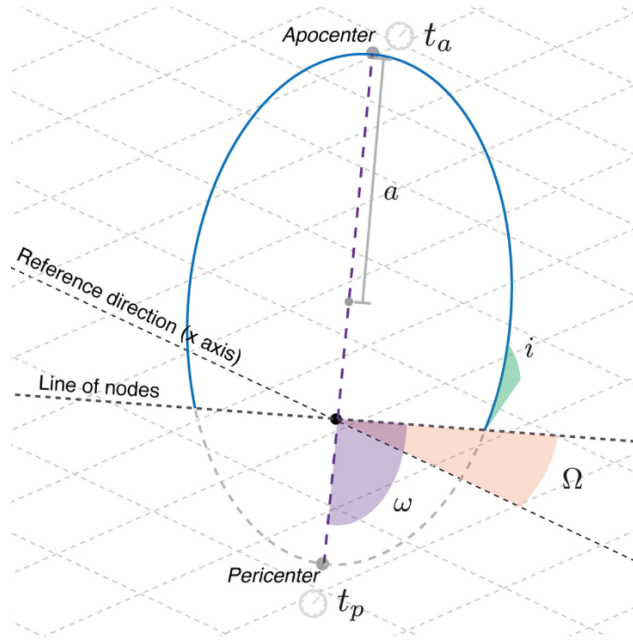


Figura 5.1: Ilustración de los elementos orbitales angulares para una órbita Kepleriana.

Capítulo 6

Precesión del pericentro

Una vez establecido el andamiaje geométrico para los espacio-tiempos de interés encontrados en las secciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4, resulta imperativo analizar algunas de sus consecuencias observables más relevantes. Uno de los fenómenos más emblemáticos en este contexto es la precesión del pericentro. A diferencia de la Mecánica newtoniana, que postula, entre otras, órbitas elípticas cerradas para un sistema aislado de dos cuerpos, la Relatividad General introduce correcciones que provocan que el punto de máximo acercamiento no retorne a la misma posición en cada ciclo, sino que experimente un avance angular.

En la presente sección, se abordará este problema mediante la derivación de las ecuaciones del movimiento que, en este caso, se reducen a la ecuación de la trayectoria orbital. Para ello, se empleará el formalismo de Hamilton-Jacobi, una herramienta analítica potente que permite obtener las ecuaciones del movimiento a partir de la propia estructura métrica [32]. El análisis se aplicará a las diferentes métricas estáticas y esféricamente simétricas introducidas previamente en las secciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4, con el fin de obtener una expresión de la precesión en campo débil en cada caso y poner de manifiesto cómo este efecto observable emana directamente de las particularidades geométricas de cada solución.

Vamos a comenzar definiendo el cuádrimomento p_α como

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}, \quad (6.1)$$

y, debido a que

$$p_\alpha p^\alpha = -m^2, \quad (6.2)$$

donde m es la masa de la partícula en movimiento, la ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} + m^2 = 0, \quad (6.3)$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la inversa de la métrica del espacio-tiempo. Si nos restringimos a $\theta = \frac{\pi}{2}$ que, debido a la invarianza por rotaciones de una métrica esféricamente simétrica, no implica una pérdida de generalidad, por lo que la ecuación de Hamilton-Jacobi para una métrica esféricamente simétrica queda

$$-A(r)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + B(r)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + C(r)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + m^2 = 0, \quad (6.4)$$

donde $A(r)$, $B(r)$ y $C(r)$ son los coeficientes de la métrica. Esto se puede reescribir como

$$A(r)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - B(r)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - C(r)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = m^2. \quad (6.5)$$

Como la energía E y el momento angular L son constantes, tal y como se ha especificado en la sección 5.4, la acción se puede expresar como

$$S = -Et + L\phi + S_r(r), \quad (6.6)$$

donde $S_r(r)$ es una función de r . Sustituyendo esta acción en la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{E^2}{A(r)} - B(r)^{-1} \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 - \frac{L^2}{C(r)} = m^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S_r}{\partial r} = \sqrt{B(r) \left[\frac{E^2}{A(r)} - \frac{L^2}{C(r)} - m^2 \right]}. \quad (6.7)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación de la acción

$$S = -Et + L\phi + \int \sqrt{B(r) \left[\frac{E^2}{A(r)} - \frac{L^2}{C(r)} - m^2 \right]} dr. \quad (6.8)$$

Debido a que $\frac{\partial S}{\partial L} = \text{cte}$, lo podemos fijar a cero y, por lo tanto,

$$\phi = \int \left\{ B(r)^{-1} \left[\frac{E^2}{A(r)} - \frac{L^2}{C(r)} - m^2 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{L}{C(r)} dr. \quad (6.9)$$

Realizando el cambio de variable $r = \frac{1}{u}$, $dr = -\frac{du}{u^2}$

$$\phi = - \int \left\{ B(u)^{-1} \left[\frac{E^2}{A(u)} - \frac{L^2}{C(u)} - m^2 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{L}{C(u)} \frac{du}{u^2}. \quad (6.10)$$

Si diferenciamos con respecto a u

$$\frac{d\phi}{du} = - \frac{L}{C(u)u^2} \left\{ B(u)^{-1} \left[\frac{E^2}{A(u)} - \frac{L^2}{C(u)} - m^2 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.11)$$

e invertimos y elevamos al cuadrado

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \frac{C(u)^2 u^4}{L^2} B(u)^{-1} \left[\frac{E^2}{A(u)} - \frac{L^2}{C(u)} - m^2 \right]. \quad (6.12)$$

Ahora, con esta ecuación general, vamos a obtener la precesión del pericentro para las diferentes métricas.

6.1. Métrica de Schwarzschild

Los coeficientes de la métrica (4.11) para $\theta = \frac{\pi}{2}$ escritos en función de la variable u quedan de la siguiente forma

$$A(u) = 1 - 2Mu \quad ; \quad B(u) = (1 - 2Mu)^{-1} \quad ; \quad C(u) = u^{-2}, \quad (6.13)$$

donde M es la masa de la fuente esféricamente simétrica. Si utilizamos la expresión de estos coeficientes y los introducimos en la ecuación (6.12) conseguimos

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{h^2} + \frac{2M}{h^2} u - u^2 + 2Mu^3, \quad (6.14)$$

donde se ha definido h como el momento angular por unidad de masa. Si diferenciamos con respecto de φ , obtenemos

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{h^2} + 3Mu^2. \quad (6.15)$$

Para una órbita general no circular en teoría newtoniana la ecuación del movimiento es

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{h^2}. \quad (6.16)$$

Esta ecuación tiene como solución general

$$u = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{M}{h^2}, \quad (6.17)$$

donde A y B son constantes de integración. Realizamos ahora un cambio de variable

$$A = k \cos \phi \quad ; \quad B = k \sin \phi, \quad (6.18)$$

donde k es una constante y ϕ una fase. De esta forma

$$\begin{aligned} u &= k \cos \phi \cos \varphi + k \sin \phi \sin \varphi + \frac{M}{h^2} \\ &= k \cos(\varphi - \phi) + \frac{M}{h^2}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Si utilizamos que $\dot{u}(0) = 0$, es decir, colocamos la partícula incidente en el pericentro (o equivalentemente en el apocentro), obtenemos que $\phi = 0$, por lo que

$$u_N^{\text{Schw}} = k \cos \varphi + \frac{M}{h^2}. \quad (6.20)$$

Por otro lado, el valor más alto de u coincide con el pericentro de la órbita y el valor más bajo con el apocentro, por lo tanto

$$k + \frac{M}{h^2} = [a(1 - e)]^{-1}, \quad (6.21)$$

$$-k + \frac{M}{h^2} = [a(1 + e)]^{-1}, \quad (6.22)$$

donde a es el semieje mayor y e la excentricidad de la órbita, que para órbitas elípticas $0 < e < 1$ con $e = 0$ una circunferencia y $e = 1$ una parábola. Al resolver este sistema se obtiene

$$k = \frac{M}{h^2} e \quad ; \quad a = \frac{h^2}{M(1 - e^2)}. \quad (6.23)$$

Conociendo la expresión para k ya se puede escribir completamente u

$$u_N^{\text{Schw}} = \frac{M}{h^2} (1 + e \cos \varphi). \quad (6.24)$$

Por otro lado, la ecuación general relativista del movimiento es (6.15). Si el campo gravitacional es débil, como es para órbitas planetarias alrededor del Sol, esperamos que la gravedad newtoniana ofrezca una aproximación excelente al movimiento en Relatividad General. Por ello,

podemos tratar la solución newtoniana (6.24) como la solución de orden cero de la ecuación general relativista del movimiento y la solución para esta ecuación se va a poder escribir como

$$u_{\text{Schw}} = \frac{M}{h^2}(1 + e \cos \varphi) + \Delta u_{\text{Schw}}, \quad (6.25)$$

donde Δu_{Schw} es una perturbación de la solución (6.24). Sustituyendo esta expresión en la ecuación (6.15) encontramos que a primer orden en Δu

$$\frac{d^2 \Delta u_{\text{Schw}}}{d\varphi^2} + \Delta u_{\text{Schw}} = A \left(1 + e^2 \cos^2 \varphi + 2e \cos \varphi + 2 \frac{h^2}{M} \Delta u_{\text{Schw}} + 2 \frac{h^2}{M} e \cos \varphi \Delta u_{\text{Schw}} \right), \quad (6.26)$$

donde $A = \frac{3M^3}{h^4}$ es muy pequeña. Al ser A y Δu_{Schw} magnitudes muy pequeñas, los términos que contienen ambas magnitudes multiplicándose se pueden despreciar y la ecuación diferencial perturbativa queda

$$\frac{d^2 \Delta u_{\text{Schw}}}{d\varphi^2} + \Delta u_{\text{Schw}} = A(1 + e^2 \cos^2 \varphi + 2e \cos \varphi). \quad (6.27)$$

Como la solución de la ecuación newtoniana está formada por un coseno, se va a proponer la siguiente solución para la ecuación perturbativa

$$\Delta u_{\text{Schw}} = a_0 + a_1 \cos(2\varphi) + a_2 \varphi \sin \varphi, \quad (6.28)$$

donde a_0 , a_1 y a_2 son constantes de integración a determinar. Si introducimos esta solución en la ecuación (6.27)

$$-4a_1 \cos(2\varphi) + 2a_2 \cos \varphi + a_0 + a_1 \cos(2\varphi) = A \left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e^2 \cos(2\varphi)}{2} + 2e \cos \varphi \right), \quad (6.29)$$

y comparamos ambos lados de la igualdad

$$a_0 = A \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) \quad ; \quad a_1 = -A \frac{e^2}{6} \quad ; \quad a_2 = Ae. \quad (6.30)$$

Teniendo en cuenta estas constantes, la solución completa es

$$u_{\text{Schw}} = \frac{M}{h^2}(1 + e \cos \varphi) + A \left\{ 1 + e^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos(2\varphi) \right] + e \varphi \sin \varphi \right\}. \quad (6.31)$$

Debido a que la constante A es muy pequeña los primeros dos términos de la perturbación son minúsculos, y sin ningún uso en la prueba de la teoría. En cambio, el último término podría ser muy pequeño al principio pero gradualmente crecerá con el tiempo, debido a que el factor φ significa que es acumulativo. Por lo tanto, debemos conservarlo

$$u_{\text{Schw}} = \frac{M}{h^2} \left(1 + e \cos \varphi + 3 \frac{M^2}{h^2} e \varphi \sin \varphi \right). \quad (6.32)$$

Se conoce que

$$\cos[\varphi(1 - \alpha)] = \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) + \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \approx \cos(\varphi) + \alpha\varphi \sin(\varphi), \quad (6.33)$$

para $\alpha \ll 1$. Nuestro $\alpha = \frac{3M^2}{h^2} \ll 1$, por lo que

$$u_{\text{Schw}} \approx \frac{M}{h^2} \left\{ 1 + e \cos \left[\varphi \left(1 - \frac{3M^2}{h^2} \right) \right] \right\}. \quad (6.34)$$

Podemos ver que la órbita es periódica, pero con un periodo de $\frac{2\pi}{1-\alpha_{\text{Schw}}}$. El resultado es que la órbita no puede cerrarse, por lo que la elipse precesa. En una revolución la elipse rotará alrededor de los dos focos una cantidad

$$\Delta\phi_{\text{Schw}} = \frac{2\pi}{1-\alpha_{\text{Schw}}} - 2\pi \approx 2\pi\alpha_{\text{Schw}} = \frac{6\pi M^2}{h^2}. \quad (6.35)$$

Si se sustituye la expresión de h obtenida a partir de la expresión del semieje mayor en la ecuación (6.23), obtenemos

$$\Delta\phi_{\text{Schw}} = \frac{6\pi M}{a(1-e^2)}. \quad (6.36)$$

Para complementar el análisis analítico desarrollado en esta sección, es fundamental recurrir a la visualización gráfica de los resultados. Para ello, las figuras que se presentan a continuación ilustran las órbitas en el espacio-tiempo de Schwarzschild, obtenidas mediante PyGRO. Su objetivo es desentrañar cómo la morfología de las órbitas y la magnitud de la precesión dependen de los parámetros físicos clave del sistema. Específicamente, se examina el impacto de la masa del objeto central M , el semieje mayor a y la excentricidad e . La Figura 6.1 presenta una ilustración numérica de las órbitas de un cuerpo de prueba alrededor de un agujero negro variando su masa. La gráfica izquierda corresponde al campo gravitatorio menos intenso de los tres. La precesión es perceptible pero sutil. La órbita se asemeja a una elipse que rota lentamente sobre uno de sus focos. Cada paso por el pericentro ocurre en una posición angular ligeramente adelantada respecto de la anterior. Al triplicar la masa (gráfica central), el efecto de la curvatura del espacio-tiempo se magnifica considerablemente. La precesión es mucho más rápida y pronunciada. Se puede observar que la partícula realiza varias revoluciones radiales antes de que la órbita se aproxime a cerrarse. La gráfica derecha representa el escenario de campo fuerte. La precesión es tan extrema que la partícula realiza todavía más revoluciones radiales que en los otros casos. En este caso, la partícula experimenta un movimiento de “remolino”.

Este aumento en la precesión cuando se incrementa la masa del agujero negro se puede corroborar con la ecuación (6.36), cuya dependencia es lineal en campo débil.

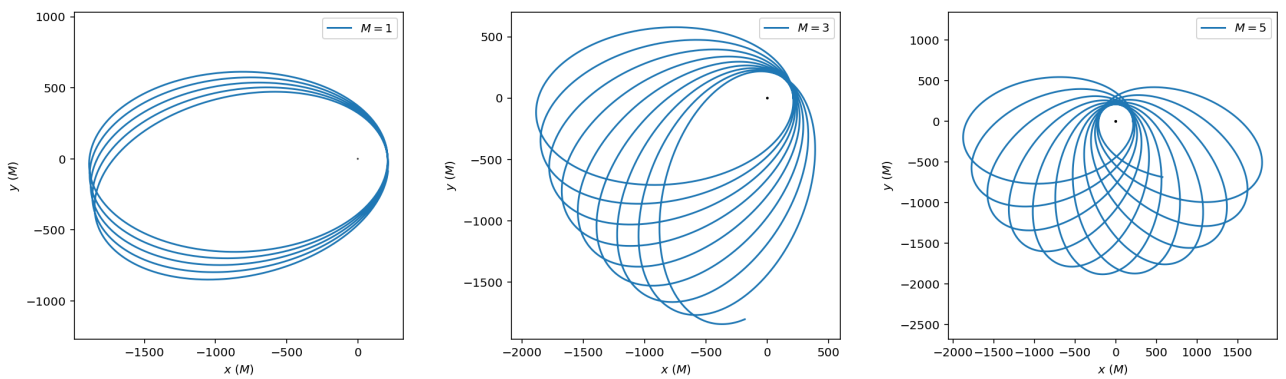


Figura 6.1: Órbitas de un cuerpo alrededor de un agujero negro para una masa de este cuerpo de $M=1$, $M=3$ y $M=5$ (de izquierda a derecha) con $a = 1050$ y $e = 0.8$. Todas las magnitudes están escritas en unidades de código.

La Figura 6.2 presenta también las órbitas de un cuerpo alrededor de un agujero negro pero, en este caso, variando el semieje mayor. La figura izquierda representa la órbita más cercana y compacta de las tres. El efecto de la precesión es extremadamente acusado. Esta órbita indica un rápido avance angular del pericentro en cada ciclo orbital. Este comportamiento es

representativo de un régimen de campo gravitatorio fuerte, donde las correcciones relativistas no son una mera perturbación, sino que dominan la dinámica del sistema. En la gráfica central se puede observar que, al aumentar el tamaño de la órbita, el efecto se atenúa notablemente. La precesión sigue siendo claramente visible, pero el avance angular por órbita es mucho menor que en el caso anterior. La forma elíptica de cada revolución individual es más reconocible. La gráfica derecha se corresponde con la órbita más alejada. Aquí la precesión es mucho más sutil. La trayectoria se asemeja bastante a la de una elipse que rota muy lentamente. Este escenario ilustra la transición hacia el régimen de campo débil. A medida que la órbita se aleja, las correcciones relativistas pierden importancia y la descripción clásica se vuelve una aproximación cada vez más precisa.

El descenso del valor de la precesión al aumentar el semieje mayor se puede verificar con la ecuación (6.36) de campo débil al tener una dependencia de $\frac{1}{a}$.

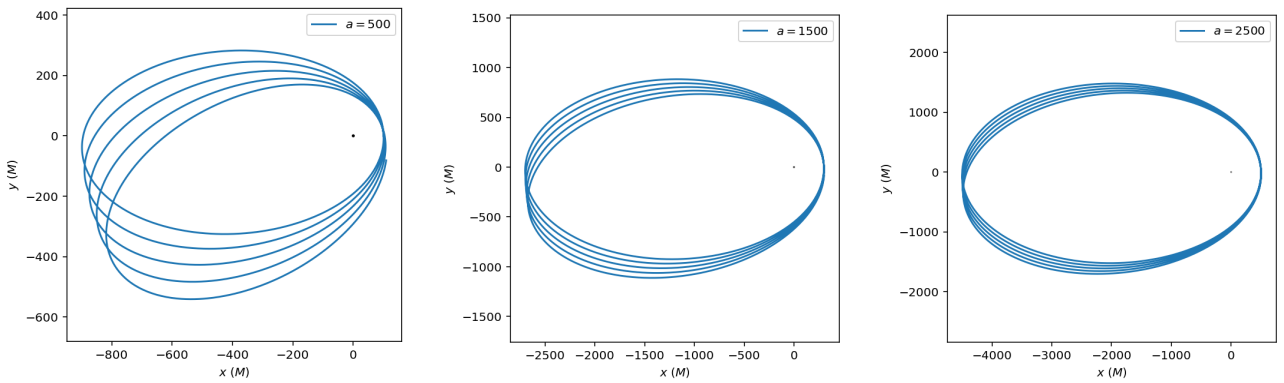


Figura 6.2: Órbitas de un cuerpo alrededor de un agujero negro de $M = 1$ para semiejes mayores $a = 500M$, $a = 1500M$ y $a = 2500M$ (de izquierda a derecha), con $e = 0.8$.

La Figura 6.3 completa el estudio paramétrico de la precesión en la métrica de Schwarzschild, centrándose en el papel que desempeña la excentricidad orbital. La gráfica izquierda representa una órbita con baja excentricidad $e \approx 0$, muy próxima a ser circular. Aunque la precesión está ocurriendo, su visualización es difícil. Una órbita circular que precesa es indistinguible de una que no lo hace, ya que carece de un eje mayor definido cuya rotación se pueda investigar. El patrón que realiza la órbita se confunde con un simple anillo grueso, evidenciando que la precesión es un fenómeno más sutil en trayectorias casi circulares. En la gráfica central, con una excentricidad moderada, la forma elíptica de la órbita es inconfundible. Esto permite identificar claramente el eje mayor (la línea que une el pericentro y el apocentro). Como resultado, la rotación de este eje se vuelve evidente y el patrón que origina la órbita del cuerpo es mucho más abierto y discernible que en el caso anterior. La gráfica derecha corresponde a una órbita muy alargada. Aquí, la precesión es visualmente más dramática y el ángulo es muy pronunciado. La estructura es la más abierta de las tres, lo que facilita enormemente la apreciación cualitativa del fenómeno. Este aumento en la precesión debido al incremento en la excentricidad se puede verificar con la ecuación (6.36) de campo débil por su dependencia de $\frac{1}{1-e^2}$.

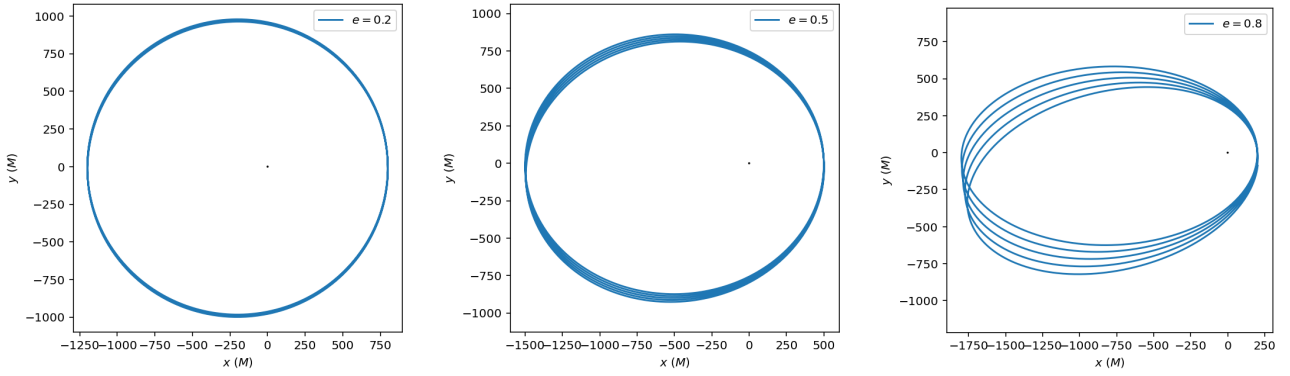


Figura 6.3: Órbitas de un cuerpo alrededor de un agujero negro de $M = 1$ para excentricidades $e=0.2$, $e=0.5$ y $e=0.8$, con $a = 1050M$.

Si bien las figuras anteriores han ofrecido una valiosa intuición visual sobre la dinámica orbital, el siguiente paso ineludible es cuantificar, para cada caso, la tasa de precesión obtenida mediante la integración numérica de las órbitas y los resultados analíticos obtenidos anteriormente. La Figura 6.4 aborda directamente esta cuestión al contrastar los resultados de la integración numérica de PyGRO (línea continua azul), que presenta la solución completa, con la ecuación analítica de campo débil (línea discontinua negra, ecuación (6.36)). El objetivo es delinear con precisión el régimen de validez de esta aproximación, cuantificando su error relativo en función de los parámetros orbitales.

Al examinar la dependencia con la masa del agujero negro (gráfica izquierda), se observa que aunque ambas curvas predicen un aumento de la precesión, el recuadro del error (o diferencia) relativo desvela una discrepancia que crece linealmente. El error, que es de apenas un $\sim 1\%$ para $M = 1$, se dispara por encima del 20% para $M = 20$. Este resultado evidencia que la aproximación de campo débil, por su propia naturaleza, subestima sistemáticamente la precesión real a medida que el campo gravitatorio se intensifica. Un comportamiento análogo se manifiesta al variar el semieje mayor (gráfica central). En la escala semilogarítmica, es patente cómo la solución numérica y la teórica convergen para órbitas lejanas $a > 10^3 M$, donde el error es inferior al 1% . Sin embargo, a medida que la órbita se adentra en regiones más cercanas, la divergencia se vuelve drástica. El error crece de manera pronunciada, superando el 13% para $a = 100M$, lo que confirma que la aproximación solo es fiable en el límite de campo lejano. Finalmente, el análisis de la excentricidad (gráfica derecha) revela una dinámica interesante. El error relativo es mínimo para casi todo el rango de excentricidades aumentando a medida que se incrementa dicha excentricidad, hasta llegar a valores cercanos a $e = 1$ donde este error se hace muy grande de una manera bastante pronunciada. La razón física es directa: una mayor excentricidad, para un mismo semieje mayor, implica un pericentro ($r_p = a(1 - e)$) mucho más cercano al objeto central. Son estas incursiones periódicas en zonas de alta curvatura las que provocan que la aproximación de campo débil falle de forma más acusada.

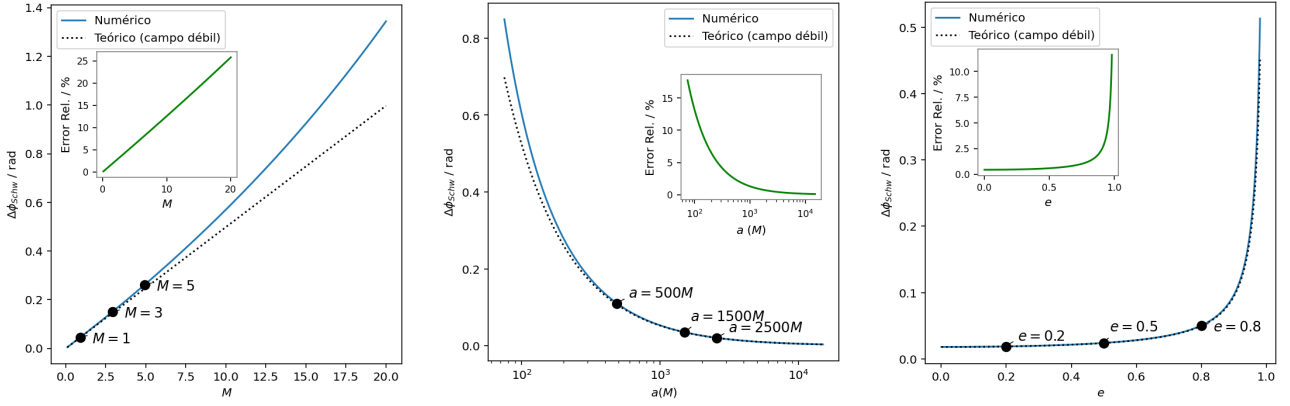


Figura 6.4: Gráficas de la precesión en función de los diferentes parámetros orbitales. Los valores de los parámetros que se han mantenido fijos en la primera gráfica son $a = 1050$ y $e = 0.8$ (en unidades de código), en la segunda $M = 1$ y $e = 0.8$, y en la tercera $M = 1$ y $a = 1050M$. La línea continua azul es el cálculo numérico realizado mediante PyGRO y la línea discontinua negra es la representación teórica para campo débil a partir de la ecuación (6.36). Se incluye además un recuadro interior en cada gráfica en el que se representa el error relativo en tanto por ciento frente al parámetro orbital correspondiente. El eje del semieje mayor en la gráfica central se encuentra en escala logarítmica.

6.2. Métrica de Reissner-Nordström

En este caso, los coeficientes de la métrica (4.14) para $\theta = \frac{\pi}{2}$ escritos en función de la variable u quedan de la forma

$$A(u) = 1 - 2Mu + Q^2u^2 \quad ; \quad B(u) = (1 - 2Mu + Q^2u^2)^{-1} \quad ; \quad C(u) = u^{-2}. \quad (6.37)$$

Si introducimos estos coeficientes en la ecuación (6.12) obtenemos

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{h^2} + \frac{2M}{h^2}u - \left(1 + \frac{Q^2}{h^2}\right)u^2 + 2Mu^3 - Q^2u^4, \quad (6.38)$$

donde se ha definido $h = \frac{L}{m}$. Si ahora realizamos el siguiente cambio de variable $u = \frac{M\xi}{h^2}$ tenemos

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2 h^2}{M^2} - \frac{h^2}{M^2} + 2\xi - \left(1 + \frac{Q^2}{h^2}\right)\xi^2 + \frac{2M^2}{h^2}\xi^3 - \frac{Q^2 M^2}{h^4}\xi^4, \quad (6.39)$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía por unidad de masa de la partícula. Vamos a denotar ahora al parámetro de perturbación como $\sigma = \frac{M^2}{h^2}$ y, escribiendo la anterior ecuación a primer orden de este parámetro, queda

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\sigma}(\mathcal{E}^2 - 1) + 2\xi - \left(1 + \frac{Q^2}{h^2}\right)\xi^2 + 2\sigma\xi^3. \quad (6.40)$$

Si diferenciamos esto último con respecto a φ

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} = 1 - \left(1 + \frac{Q^2}{h^2}\right)\xi + 3\sigma\xi^2 = 1 - \left(1 + \sigma\frac{Q^2}{M^2}\right)\xi + 3\sigma\xi^2, \quad (6.41)$$

por lo que la ecuación diferencial que se necesita resolver es

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \xi = 1 + 3\sigma\xi^2 - \sigma\frac{Q^2}{M^2}\xi. \quad (6.42)$$

En la teoría Newtoniana, la ecuación del movimiento se expresa como

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \xi = 1. \quad (6.43)$$

Si se realiza el mismo proceso que en la métrica de Schwarzschild aplicando la condición inicial de $\dot{\xi}(0) = 0$, se obtiene que

$$\xi_N^{\text{RN}} = k \cos(\varphi) + 1. \quad (6.44)$$

Por otro lado, el valor más alto de ξ coincide con el pericentro de la órbita y el valor más bajo con el apocentro, por lo tanto

$$k + 1 = \frac{h^2[a(1 - e)]^{-1}}{M}, \quad (6.45)$$

$$-k + 1 = \frac{h^2[a(1 + e)]^{-1}}{M}, \quad (6.46)$$

donde a es el semieje mayor y e la excentricidad de la órbita. Resolviendo este sistema

$$k = e \quad ; \quad a = \frac{h^2}{M(1 - e^2)}. \quad (6.47)$$

Incluyendo la expresión de k en ξ

$$\xi_N^{\text{RN}} = e \cos(\varphi) + 1. \quad (6.48)$$

La ecuación general del movimiento es la ecuación (6.42). Podemos escribir la solución general relativista como

$$\xi_{\text{RN}} = e \cos(\varphi) + 1 + \Delta\xi_{\text{RN}}, \quad (6.49)$$

donde $\Delta\xi_{\text{RN}}$ es una perturbación. Sustituyendo esta expresión en la ecuación general relativista encontramos que, a primer orden en $\Delta\xi_{\text{RN}}$ y en σ

$$\frac{d^2\Delta\xi_{\text{RN}}}{d\varphi^2} + \Delta\xi_{\text{RN}} = 3\sigma - \sigma\frac{Q^2}{M^2} + \left(6\sigma - \sigma\frac{Q^2}{M^2}\right) e \cos(\varphi), \quad (6.50)$$

donde se han eliminado los términos que contiene $\sigma\Delta\xi_{\text{RN}}$ debido a que $\Delta\xi_{\text{RN}}$ contiene el parámetro de perturbación. Como la solución de la ecuación del movimiento Newtoniana contiene un coseno, proponemos una solución para la ecuación diferencial perturbativa de la siguiente forma

$$\Delta\xi_{\text{RN}} = a_0 + a_1\varphi \sin(\varphi), \quad (6.51)$$

donde a_0 y a_1 son constantes de integración a determinar. Si introducimos esta solución en la ecuación diferencial

$$2a_1 \cos(\varphi) - a_1\varphi \sin(\varphi) + a_0 + a_1\varphi \sin(\varphi) = 3\sigma - \sigma\frac{Q^2}{M^2} + \left(6\sigma - \sigma\frac{Q^2}{M^2}\right) e \cos(\varphi), \quad (6.52)$$

encontramos que

$$a_0 = 3\sigma - \sigma\frac{Q^2}{M^2} \quad ; \quad a_1 = \left(6\sigma - \sigma\frac{Q^2}{M^2}\right) \frac{e}{2}. \quad (6.53)$$

De esta forma, la solución completa es

$$\xi_{\text{RN}} = 1 + e \cos(\varphi) + \sigma \left(3 - \frac{Q^2}{M^2} \right) + \sigma \left(6 - \frac{Q^2}{M^2} \right) \frac{e}{2} \sin(\varphi). \quad (6.54)$$

Haciendo uso de la ecuación (6.33) para $\alpha \ll 1$ se obtiene que, para nuestro $\alpha = \frac{\sigma}{2} \left(6 - \frac{Q^2}{M^2} \right) \ll 1$

$$\xi_{\text{RN}} = 1 + \sigma \left(3 - \frac{Q^2}{M^2} \right) + e \cos \left\{ \varphi \left[1 - \frac{\sigma}{2} \left(6 - \frac{Q^2}{M^2} \right) \right] \right\}. \quad (6.55)$$

De esta expresión podemos ver que la órbita es periódica, pero con un periodo $\frac{2\pi}{1-\alpha_{\text{RN}}}$. En una revolución, la elipse rotará alrededor de los dos focos una cantidad

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\text{RN}} &= \frac{2\pi}{1-\alpha_{\text{RN}}} - 2\pi \approx 2\pi\alpha_{\text{RN}} \\ &\approx 2\pi \frac{\sigma}{2} \left(6 - \frac{Q^2}{M^2} \right). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Recordamos que $\sigma = \frac{M^2}{h^2}$ y obteniendo que $h^2 = aM(1-e^2)$ a partir de la expresión del semieje mayor de la ecuación (6.47) se consigue una ecuación de la precesión en campo débil para la métrica de Reissner-Nordström de la forma

$$\Delta\phi_{\text{RN}} = \frac{6\pi M}{a(1-e^2)} - \frac{Q^2\pi}{aM(1-e^2)}, \quad (6.57)$$

donde el segundo término es siempre negativo, lo que reduce el valor de la precesión en Schwarzschild.

Al pasar del espacio-tiempo de Schwarzschild al de Reissner-Nordström, se introduce una carga Q . Esta altera la propia geometría del espacio-tiempo. La Figura 6.5 se adentra precisamente en el impacto de esta carga sobre la dinámica orbital.

Lo que revela esta figura es, a primera vista, sorprendente y contrasta de manera directa con lo observado en el caso sin carga. El resultado más evidente es que la precesión se ve atenuada a medida que la carga aumenta. La trayectoria más externa $Q = 0.2M$ muestra una precesión más rápida. A medida que la carga se incrementa a $Q = 0.5M$ y luego a $Q = 0.8M$, la rotación de la órbita se vuelve progresivamente más lenta.

Este comportamiento observado numéricamente encaja a la perfección con la predicción teórica de campo débil proporcionada por la ecuación (6.57). Esta muestra cómo la precesión de Schwarzschild (el primer término) se ve contrarrestada por un nuevo término dependiente de Q^2 que es siempre negativo. Al aumentar Q , esta contribución crece en magnitud, cancelando una parte mayor del avance gravitacional y reduciendo la precesión neta.

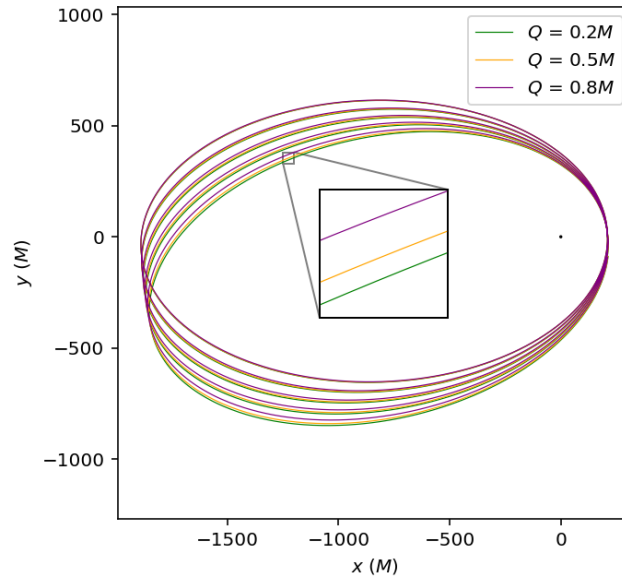


Figura 6.5: Órbitas de un cuerpo alrededor de un agujero negro de $M = 1$ para cargas de $Q = 0.2M$, $Q = 0.5M$ y $Q = 0.8M$, con $a = 1050M$ y $e = 0.8$.

La Figura 6.6 nos permite profundizar en el análisis de la precesión en el espacio-tiempo de Reissner-Nordström, esta vez desde una perspectiva cuantitativa. Con ella podemos medir cómo la precesión varía con la carga y, por otro lado, evaluar qué tan bien la ecuación teórica de campo débil encontrada se ajusta a los resultados de la simulación numérica.

Lo que la gráfica principal nos muestra de manera concluyente es el efecto supresor de la carga. Para las tres escalas orbitales estudiadas ($a = 500M$, $a = 1500M$, $a = 2500M$) la tendencia es la siguiente: a medida que Q aumenta, la precesión del pericentro disminuye. Notablemente, las predicciones teóricas se ajustan de manera excelente a los cálculos numéricos, lo que sugiere que nuestra aproximación teórica es muy robusta en este escenario.

El recuadro del error relativo, calculado como el valor absoluto de la diferencia entre el valor numérico y el valor teórico de la precesión dividido entre su valor numérico y multiplicado por 100 para obtener un porcentaje, nos permite afinar esta conclusión. Vemos que el error de esta aproximación es, en general, muy bajo, manteniéndose por debajo del 3%. Esto nos da una gran confianza en la validez de la ecuación (6.57). Sin embargo, podemos extraer dos matices interesantes. Primero, el error tiende a disminuir muy sutilmente con Q . Segundo, y más importante, el error depende claramente del semieje mayor: es sistemáticamente más alto para la órbita más cercana. Esto es un resultado que ya nos es familiar y refuerza una idea central: las aproximaciones de campo débil pierden precisión cuanto más nos adentramos en regiones de alta curvatura.

El otro recuadro interior de la Figura 6.6, si lo interpretamos bajo la perspectiva de comparar el cálculo numérico de Reissner-Nordström con la predicción teórica de Schwarzschild, nos ofrece una visión completamente nueva y de gran relevancia práctica. Nos permite cuantificar el error que se comete al modelar un objeto cargado como si no lo estuviera.

Por definición, cuando la carga es cero, la métrica de Reissner-Nordström se reduce a la de Schwarzschild. Por tanto, el error de usar el modelo de Schwarzschild es, trivialmente, cero. La curva del error en el inset debería de partir desde (o muy cerca de) cero en el eje $Q = 0$. A medida que se aumenta la carga, el error llega a un valor exacto de cero y, a partir del mismo, el error crece de manera drástica cuando se aumenta más la carga, lo cual es totalmente esperable. La teoría de Schwarzschild predice una precesión constante, mientras que la precesión real

disminuye debido al efecto supresor de la carga. La discrepancia entre una predicción constante y un valor real decreciente se agranda a medida que Q aumenta.

Por otro lado, el recuadro interior muestra que, para cualquier valor de Q por encima del valor que hace cero el error relativo, el error de usar el modelo de Schwarzschild es sistemáticamente menor para órbitas más grandes y mayor para las más cercanas.

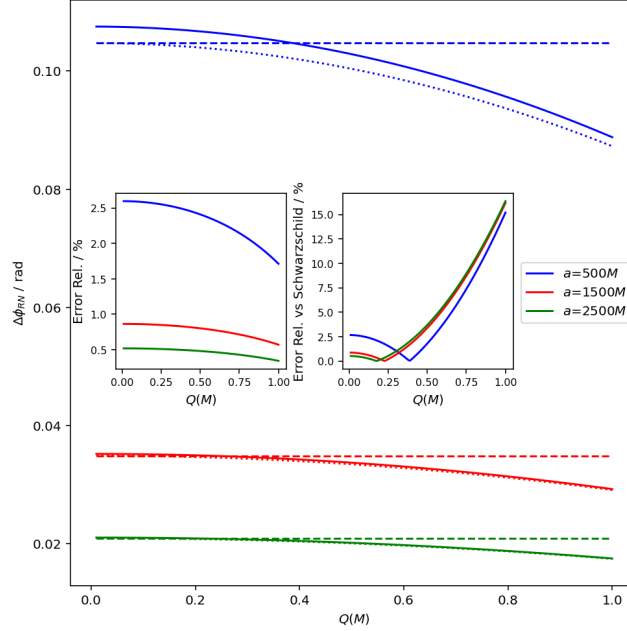


Figura 6.6: Gráfica de la precesión en función de la carga para $M = 1$ y $e = 0.8$. Las líneas continuas son el cálculo numérico realizado mediante PyGRO, las líneas de puntos son la representación teórica para campo débil a partir de la ecuación (6.57) y las líneas discontinuas son la representación teórica para campo débil de la métrica de Schwarzschild a partir de la ecuación (6.36). Se incluye además un recuadro interior en el que se representa el error relativo en tanto por ciento frente a Q y otro recuadro interior en el que se representa el error relativo en tanto por ciento entre el cálculo numérico de Reissner-Nordström y la expresión de Schwarzschild.

6.3. Métrica electrodinámica no lineal de Euler-Heisenberg

Los coeficientes de la métrica (4.16) para $\theta = \frac{\pi}{2}$ escritos en función de la variable u quedan de la forma

$$A(u) = 1 - 2Mu + q_m^2 u^2 - \frac{2}{5} \mu q_m^4 u^6 \quad ; \quad B(u) = \left(1 - 2Mu + q_m^2 u^2 - \frac{2}{5} \mu q_m^4 u^6 \right)^{-1} \quad ; \quad C(u) = u^{-2}. \quad (6.58)$$

Si utilizamos la ecuación (6.12) con los anteriores coeficientes obtenemos

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{h^2} + \frac{2M}{h^2} u - \left(1 + \frac{q_m^2}{h^2} \right) u^2 + 2Mu^3 - q_m^2 u^4 + \frac{2\mu q_m^4}{h^2} u^6 + \frac{2}{5} \mu q_m^4 u^8, \quad (6.59)$$

donde se ha utilizado la definición de h . Si se cambia de variable a ξ al igual que se hizo en la métrica de Reissner-Nordström

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 = \frac{E^2 h^4}{L^2 M^2} - \frac{h^2}{M^2} + 2\xi - \left(1 + \frac{q_m^2}{h^2} \right) \xi^2 + \frac{2M^2}{h^2} \xi^3 - \frac{q_m^2 M^2}{h^4} \xi^4 + \frac{2\mu q_m^4 M^4}{h^{10}} \xi^6 + \frac{2\mu q_m^4 M^6}{5h^{12}} \xi^8. \quad (6.60)$$

Vamos a hacer depender esta última ecuación del parámetro de perturbación $\sigma = \frac{M^2}{h^2}$ y, escribiéndola a segundo orden de este parámetro

$$\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\sigma}(\mathcal{E}^2 - 1) + 2\xi - \left(1 + \frac{q_m^2}{h^2}\right)\xi^2 + 2\sigma\xi^3 - \frac{q_m^2\sigma}{h^2}\xi^4 + \frac{2\mu q_m^4\sigma^2}{h^6}\xi^6, \quad (6.61)$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía por unidad de masa de la partícula en movimiento. Ahora, si diferenciamos con respecto a φ y utilizamos la expresión del parámetro de perturbación para eliminar la dependencia de h

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \xi = 1 - \sigma\frac{q_m^2}{M^2}\xi + 3\sigma\xi^2 - \frac{2q_m^2\sigma^2}{M^2}\xi^3 + \frac{6\mu q_m^4\sigma^5}{M^6}\xi^5. \quad (6.62)$$

En la teoría Newtoniana, la ecuación del movimiento es (6.43), siendo su solución la ecuación (6.48). La ecuación general del movimiento es la ecuación (6.62), cuya solución general se puede expresar como

$$\xi_{\text{NLEM}} = e \cos(\varphi) + 1 + \Delta\xi_{\text{NLEM}}, \quad (6.63)$$

donde $\Delta\xi_{\text{NLEM}}$ es una perturbación. Sustituyendo esta expresión en la ecuación general relativista encontramos que, a primer orden en $\Delta\xi_{\text{NLEM}}$ y e y a quinto orden en σ

$$\frac{d^2\Delta\xi_{\text{NLEM}}}{d\varphi^2} + \Delta\xi_{\text{NLEM}} = \sigma \left(3 - \frac{q_m^2}{M^2} - \frac{2q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{6\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right) + \sigma \left(6 - \frac{q_m^2}{M^2} - \frac{6q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{30\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right) e \cos(\varphi), \quad (6.64)$$

donde se han eliminado todos los términos que contienen potencias de $\sigma\Delta\xi_{\text{NLEM}}$. Como la solución Newtoniana contiene un coseno, proponemos una solución para la ecuación diferencial perturbativa de la siguiente forma

$$\Delta\xi_{\text{NLEM}} = a_0 + a_1\varphi \sin(\varphi), \quad (6.65)$$

donde a_0 y a_1 son constantes de integración a determinar. Si aplicamos esta solución a la ecuación diferencial

$$2a_1 \cos(\varphi) + a_0 = \sigma \left(3 - \frac{q_m^2}{M^2} - \frac{2q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{6\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right) + \sigma \left(6 - \frac{q_m^2}{M^2} - \frac{6q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{30\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right) e \cos(\varphi), \quad (6.66)$$

encontramos que

$$a_0 = \sigma \left(3 - \frac{q_m^2}{M^2} - \frac{2q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{6\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right) \quad ; \quad a_1 = \sigma e \left(3 - \frac{q_m^2}{2M^2} - \frac{3q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{15\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right). \quad (6.67)$$

Teniendo en cuenta la expresión de estas constantes, la solución completa es

$$\xi_{\text{NLEM}} = e \cos(\varphi) + 1 + \sigma \left(3 - \frac{q_m^2}{M^2} - \frac{2q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{6\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right) + \sigma e \left(3 - \frac{q_m^2}{2M^2} - \frac{3q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{15\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right) \varphi \sin(\varphi). \quad (6.68)$$

Prestando atención a la expresión (6.33) para nuestro $\alpha = \sigma \left(3 - \frac{q_m^2}{2M^2} - \frac{3q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{15\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right) \ll 1$

$$\xi_{\text{NLEM}} = 1 + \sigma \left(3 - \frac{q_m^2}{M^2} - \frac{2q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{6\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right) + e \cos \left\{ \varphi \left[1 - \sigma \left(3 - \frac{q_m^2}{2M^2} - \frac{3q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{15\mu q_m^4\sigma^4}{M^6}\right) \right] \right\}. \quad (6.69)$$

Podemos ver que la órbita es periódica con un periodo $\frac{2\pi}{1-\alpha_{\text{NLEM}}}$. En una revolución, la elipse rotará alrededor de los dos focos una cantidad

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{\text{NLEM}} &= \frac{2\pi}{1-\alpha_{\text{NLEM}}} - 2\pi \approx 2\pi\alpha_{\text{NLEM}} \\ &\approx 2\pi\sigma \left(3 - \frac{q_m^2}{2M^2} - \frac{3q_m^2}{M^2}\sigma + \frac{15\mu q_m^4}{M^6}\sigma^4 \right).\end{aligned}\quad (6.70)$$

Si se utiliza la expresión del parámetro de perturbación y la expresión de h encontrada a partir de la expresión del semieje mayor de la ecuación (6.47) se obtiene la ecuación de la precesión en campo débil para la métrica de Euler-Heisenberg

$$\Delta\phi_{\text{NLEM}} = \frac{6\pi M}{a(1-e^2)} - \left(\frac{\pi}{aM(1-e^2)} + \frac{6\pi}{a^2(1-e^2)^2} \right) q_m^2 + \frac{30\pi\mu q_m^4}{a^5 M(1-e^2)^5}. \quad (6.71)$$

La Figura 6.7 nos permite visulizar las consecuencias de esta interacción a través del parámetro μ .

Lo que emerge de la simulación es un aumento en la precesión del pericentro al incrementar el parámetro μ . Esto se observa al comparar las trayectorias: la órbita con el μ más bajo es la que tiene una precesión más lenta, mientras que al aumentar μ a valores muy grandes, la rotación del pericentro se acelera. Cabe destacar que para observar algún cambio en la precesión se necesita que μ sea del mismo orden que los valores representados o superior.

Este comportamiento se puede verificar a partir de la ecuación (6.71) obtenida analíticamente para campo débil. La corrección de Euler-Heisenberg a la precesión es aditiva contribuyendo de forma lineal, lo que corrobora el aumento de la precesión al aumentar el valor de la constante μ .

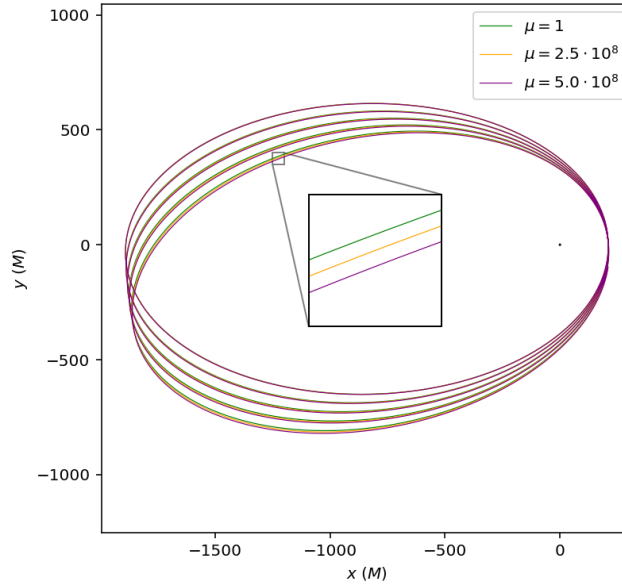


Figura 6.7: Órbitas de un cuerpo alrededor de un agujero negro de $M = 1$ y $q_m = 1M$ para $\mu = 1M^2$, $\mu = 2.5 \cdot 10^8 M^2$ y $\mu = 5 \cdot 10^8 M^2$, con $a = 1050M$ y $e = 0.8$.

Finalmente, la Figura 6.8 nos permite realizar un análisis cuantitativo de la dinámica en el espacio-tiempo de Euler-Heisenberg, poniendo a prueba los límites de nuestros modelos teóricos perturbativos frente a la complejidad de la electrodinámica no lineal. Lo primero que salta a la

vista en la gráfica principal es la existencia de dos regímenes claramente diferenciados. Para un rango muy extenso de valores de μ , la precesión del pericentro se mantiene prácticamente constante, lo que confirma la idea de que al ser la modificación de la teoría de naturaleza cuántica, el impacto sobre los observables es muy reducido, sobre todo en órbitas con un semieje mayor grande. Sin embargo, este comportamiento se rompe drásticamente en órbitas más compactas, como la de $a = 500M$, donde para valores muy grandes de μ , la precesión comienza a aumentar de forma abrupta, indicando que la corrección de Euler-Heisenberg ha pasado de ser una perturbación a convertirse en el factor dominante de la dinámica.

Esta transición se ve confirmada al examinar el recuadro del error relativo. Observamos que la predicción teórica de la ecuación (6.71) describe con gran precisión el primer régimen, pero falla en la región donde μ se vuelve dominante, lo que sugiere que la ecuación (6.71) no captura adecuadamente la física no lineal. Además, la figura reafirma una tendencia ya conocida: la precesión es siempre mayor para las órbitas más cercanas. Es interesante notar que el punto exacto de la transición donde μ toma el control depende ligeramente del valor de a .

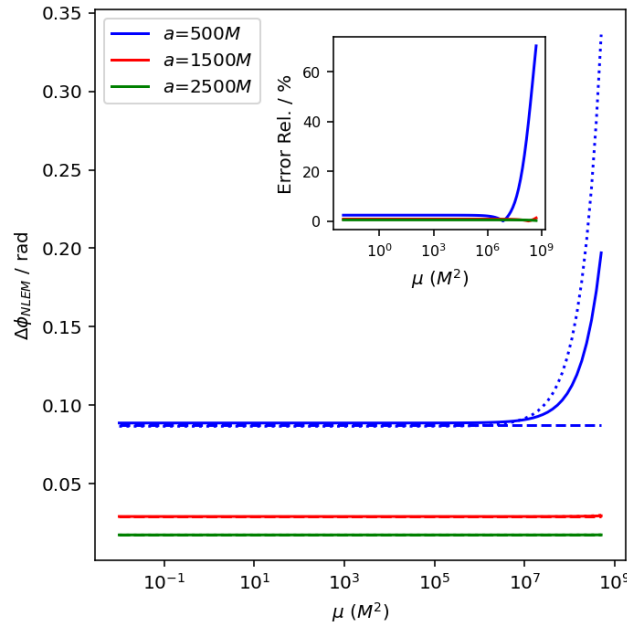


Figura 6.8: Gráfica de la precesión en función de μ para $M = 1$, $q_m = 1$ y $e = 0.8$. Las líneas continuas son el cálculo numérico realizado mediante PyGRO, las líneas de puntos son la representación teórica para campo débil a partir de la ecuación (6.71) y las líneas discontinuas son la representación teórica para campo débil de la métrica de Reissner-Nordström ($\mu = 0$, $Q = q_m$) a partir de la ecuación (6.57). Se incluye además un recuadro interior en el que se representa el error relativo en tanto por ciento frente a μ . El eje de abscisas se encuentra en escala logarítmica.

6.4. Métrica de Black-Bounce

Lo primero que se necesita realizar es el cambio de variable $r = \sqrt{\xi^2 + \alpha^2}$, $dr = \frac{\xi}{r} d\xi$ en la métrica (4.20) para escribirla en función del radio areal

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{r^3}{(r^2 - \alpha^2)(r - 2M)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.72)$$

Teniendo en cuenta esta última métrica, los coeficientes de la misma para $\theta = \frac{\pi}{2}$ escritos en función de la variable u son

$$A(u) = 1 - 2Mu \quad ; \quad B(u) = \frac{1}{(1 - \alpha^2 u^2)(1 - 2Mu)} \quad ; \quad C(u) = u^{-2}. \quad (6.73)$$

Si introducimos estos coeficientes en la ecuación (6.12) obtenemos

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{h^2} + \frac{2M}{h^2}u - \left(1 + \frac{E^2\alpha^2}{L^2} - \frac{\alpha^2}{h^2}\right)u^2 + \left(2M - \frac{2M\alpha^2}{h^2}\right)u^3 + \alpha^2 u^4 - 2M\alpha^2 u^5, \quad (6.74)$$

donde se ha utilizado la definición anterior para h . Si se realiza el cambio de variable $u = \frac{M\lambda}{h^2}$, la anterior ecuación queda

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2 h^4}{L^2 M^2} - \frac{h^2}{M^2} + 2\lambda - \left(1 + \frac{E^2\alpha^2}{L^2} - \frac{\alpha^2}{h^2}\right)\lambda^2 + 2\left(1 - \frac{\alpha^2}{h^2}\right)\frac{M^2}{h^2}\lambda^3 + \frac{\alpha^2 M^2}{h^4}\lambda^4 - \frac{2\alpha^2 M^4}{h^6}\lambda^5. \quad (6.75)$$

Ahora, si hacemos depender esta ecuación del parámetro de perturbación σ hasta primer orden

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\sigma}(\mathcal{E}^2 - 1) + 2\lambda - \left(1 + \frac{\mathcal{E}^2\alpha^2\sigma}{M^2} - \frac{\alpha^2\sigma}{M^2}\right)\lambda^2 + 2\sigma\lambda^3, \quad (6.76)$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía por unidad de masa de la partícula que se encuentra en movimiento. Diferenciando esta última expresión con respecto a φ obtenemos

$$\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \lambda = 1 + \left(\frac{\alpha^2\sigma}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2\alpha^2\sigma}{M^2}\right)\lambda + 3\sigma\lambda^2. \quad (6.77)$$

En la teoría Newtoniana, la ecuación del movimiento es la ecuación (6.43), cuya solución es la ecuación (6.48). La ecuación general del movimiento es (6.77), con una solución general que se puede escribir como

$$\lambda_{\text{BB}} = 1 + e \cos(\varphi) + \Delta\lambda_{\text{BB}}, \quad (6.78)$$

donde $\Delta\lambda_{\text{BB}}$ es una perturbación. Sustituyendo esta expresión en la ecuación general relativista, obtenemos a primer orden en $\Delta\lambda_{\text{BB}}$, σ y e

$$\frac{d^2\Delta\lambda_{\text{BB}}}{d\varphi^2} + \Delta\lambda_{\text{BB}} = \sigma \left(\frac{\alpha^2}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2\alpha^2}{M^2} + 3\right) + \sigma \left(\frac{\alpha^2}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2\alpha^2}{M^2} + 6\right) e \cos(\varphi), \quad (6.79)$$

donde se han despreciado los términos que contienen $\sigma\Delta\lambda_{\text{BB}}$ por el mismo razonamiento que en las demás métricas. Proponemos una solución a esta ecuación diferencial del siguiente tipo, ya que la solución Newtoniana está formada por un coseno

$$\Delta\lambda_{\text{BB}} = a_0 + a_1\varphi \sin(\varphi), \quad (6.80)$$

donde a_0 y a_1 son constantes de integración a determinar. Si introducimos esta solución obtenemos que

$$2a_1 \cos(\varphi) + a_0 = \sigma \left(\frac{\alpha^2}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2\alpha^2}{M^2} + 3\right) + \sigma \left(\frac{\alpha^2}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2\alpha^2}{M^2} + 6\right) e \cos(\varphi), \quad (6.81)$$

por lo que la expresión de cada coeficiente es

$$a_0 = \sigma \left(\frac{\alpha^2}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2\alpha^2}{M^2} + 3\right) \quad ; \quad a_1 = \sigma \frac{e}{2} \left(\frac{\alpha^2}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2\alpha^2}{M^2} + 6\right). \quad (6.82)$$

Teniendo en cuenta estas constantes, la solución completa es

$$\lambda_{\text{BB}} = 1 + e \cos(\varphi) + \sigma \left(\frac{\alpha^2}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2 \alpha^2}{M^2} + 3 \right) + \sigma \frac{e}{2} \left(\frac{\alpha^2}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2 \alpha^2}{M^2} + 6 \right) \varphi \sin(\varphi). \quad (6.83)$$

Si se utiliza la ecuación (6.33) para nuestro $\alpha = \sigma \left(\frac{\alpha^2}{2M^2} - \frac{\mathcal{E}^2 \alpha^2}{2M^2} + 3 \right) \ll 1$

$$\lambda_{\text{BB}} = 1 + \sigma \left(\frac{\alpha^2}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2 \alpha^2}{M^2} + 3 \right) + e \cos \left\{ \varphi \left[1 - \sigma \left(\frac{\alpha^2}{2M^2} - \frac{\mathcal{E}^2 \alpha^2}{2M^2} + 3 \right) \right] \right\}. \quad (6.84)$$

La órbita es periódica con un periodo $\frac{2\pi}{1-\alpha_{\text{BB}}}$. En una revolución, la elipse rotará alrededor de los dos focos una cantidad

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\text{BB}} &= \frac{2\pi}{1-\alpha} - 2\pi \approx 2\pi\alpha_{\text{BB}} \\ &\approx \pi\sigma \left(\frac{\alpha^2}{M^2} - \frac{\mathcal{E}^2 \alpha^2}{M^2} + 6 \right). \end{aligned} \quad (6.85)$$

Con la expresión del parámetro de perturbación y de h obtenida a partir de la expresión del semieje mayor de la ecuación (6.47) se consigue la ecuación de la precesión en campo débil para la métrica de Black-Bounce

$$\Delta\phi_{\text{BB}} = \frac{6\pi M}{a(1-e^2)} + \frac{\pi\alpha^2}{aM(1-e^2)}(1-\mathcal{E}^2). \quad (6.86)$$

Una vez establecida la formulación teórica para la precesión del pericentro en la geometría de Black-Bounce en campo débil, resulta imperativo contrastarla con resultados numéricos. El propósito es analizar el impacto de α en la dinámica orbital de una partícula de prueba.

La Figura 6.9 está diseñada para visualizar esta influencia de manera directa. Para ello, se han simulado tres trayectorias que comparten condiciones orbitales idénticas variando únicamente el valor del parámetro α . Este enfoque permite aislar su efecto y responder a una pregunta fundamental: ¿deja esta modificación en la estructura profunda del espacio-tiempo una huella observable en el movimiento de los cuerpos celestes? La figura revela una relación inequívoca y no trivial entre la geometría de Black-Bounce y la precesión orbital, ofreciendo una signatura fenomenológica potencialmente distinguible.

Una inspección detallada de las órbitas representadas en la Figura 6.9 conduce a una conclusión clara y físicamente significativa: el parámetro α actúa como un amplificador de la precesión del pericentro. Lejos de estabilizar la órbita o reducir su rotación, la presencia de una “garganta” finita intensifica este fenómeno relativista.

En efecto, se observa una correlación directa entre el valor de α y la velocidad de avance del pericentro. La trayectoria correspondiente de $\alpha = 15M$ (verde) presenta la precesión más lenta, mientras que la órbita para $\alpha = 25M$ (morada) exhibe una rotación de su eje mayor más rápida y pronunciada.

Este resultado numérico es de particular importancia porque constituye una validación empírica robusta de la derivación analítica presentada en la ecuación (6.86). La expresión teórica para la precesión incluye un término correctivo de signo positivo y proporcional a α^2 , sumado al término estándar de Schwarzschild. La perfecta concordancia entre la predicción teórica y la simulación numérica refuerza la consistencia interna del modelo.

Desde una perspectiva física, este efecto aditivo sugiere que la geometría de Black-Bounce modifica el campo gravitatorio de una manera fundamentalmente distinta a otros modelos. A

diferencia de la métrica de Reissner-Nordström, donde la carga introduce un efecto supresor en la precesión, el parámetro α genera una modificación en el potencial que, en la práctica, intensifica la curvatura efectiva experimentada por la partícula en las fases más cercanas de su órbita. por consiguiente, la amplificación de la precesión del pericentro emerge como una firma fenomenológica característica y distintiva de esta clase de geometrías.

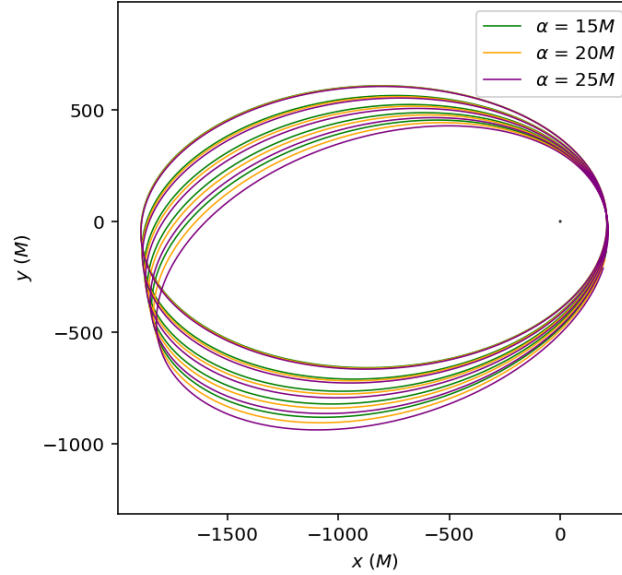


Figura 6.9: Órbitas de un cuerpo alrededor de un agujero negro de $M = 1$ para $\alpha = 15M$, $\alpha = 20M$ y $\alpha = 25M$, con $a = 1050M$ y $e = 0.8$.

Después de haber visualizado el efecto de α en las órbitas, el siguiente paso lógico es realizar un análisis cuantitativo. La Figura 6.10 está diseñada para cumplir precisamente este propósito. Su objetivo es ir más allá de la simple observación de trayectorias y comparar de forma sistemática los resultados numéricos de la precesión con las predicciones de las ecuaciones teóricas que hemos derivado.

Con esta figura se busca responder a dos preguntas clave. Primero, ¿cómo de grande es el efecto del parámetro α sobre la precesión y cómo cambia este efecto si la órbita es más grande o más pequeña? Segundo, y quizás lo más importante, ¿qué tan buena es nuestra ecuación teórica (la ecuación (6.86))? El recuadro interior que muestra el error relativo entre la teoría y la simulación es fundamental aquí, ya que nos permitirá medir con precisión qué tan fiable es nuestro modelo y si las desviaciones que predice podrían llegar a ser observables.

Al examinar la Figura 6.10, se pueden extraer varias conclusiones importantes sobre la dinámica de precesión en la geometría de Black-Bounce. En primer lugar, la gráfica principal confirma de manera clara lo que ya habíamos intuido a partir de la Figura 6.9: la precesión del pericentro aumenta a medida que el parámetro α se hace mayor. Esta tendencia se mantiene para los tres tamaños de órbita que hemos estudiado ($a = 500M$, $a = 1500M$ y $a = 2500M$). Un detalle importante es que las predicciones del modelo de Black-Bounce siempre se encuentran por encima de las del modelo de Schwarzschild, lo que afirma que la corrección introducida por α es aditiva, es decir, se suma al efecto ya existente.

En segundo lugar, la concordancia entre los cálculos numéricos y la ecuación teórica es notablemente buena. La ecuación (6.86), a pesar de ser una aproximación de campo débil, predice el comportamiento de la precesión con una precisión excelente en casi todo el rango de α analizado. Esta coincidencia es especialmente evidente en las órbitas más grandes ($a = 1500M$

y $a = 2500M$), donde la curva teórica y numérica son prácticamente idénticas. El intervalo de α donde la curva teórica se desacopla de forma más pronunciada de la numérica es debido a que el aumento en el tamaño de la “garganta” implica que nos encontramos en una situación de campo fuerte y, por lo tanto, nuestra ecuación analítica falla.

Finalmente, el recuadro interior nos permite analizar las pequeñas discrepancias con más detalle. El error relativo depende ligeramente de α , aunque se mantiene bastante bajo (por debajo del 13 % para las órbitas más grandes), lo que nos dice que nuestra aproximación funciona bastante bien. Por otro lado, la dependencia más clara del error es con el tamaño de la órbita. El error es mucho mayor para la órbita más cercana y compacta ($a = 500M$), llegando a superar el 20 %, mientras que es bastante más bajo para las órbitas lejanas. Este resultado tiene sentido ya que cualquier aproximación de campo débil fallará en regímenes de gravedad fuerte.

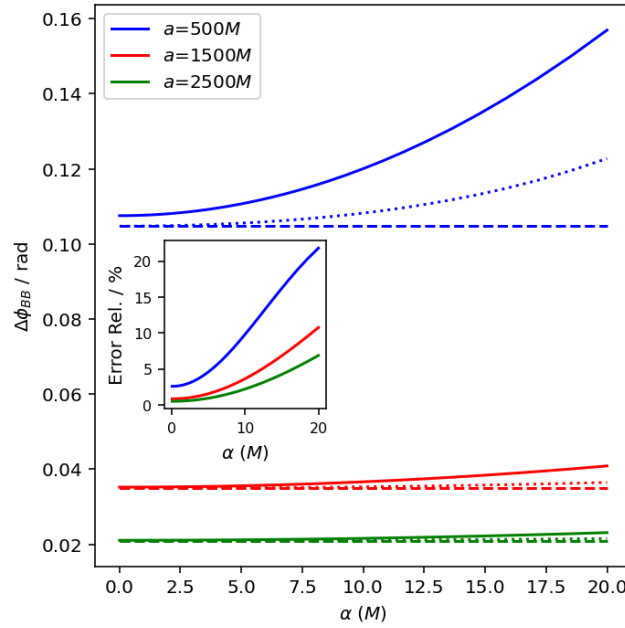


Figura 6.10: Gráfica de la precesión en función de α para $M = 1$ y $e = 0.8$. Las líneas continuas son el cálculo numérico realizado mediante PyGRO, las líneas de puntos son la representación teórica para campo débil a partir de la ecuación (6.86) y las líneas discontinuas son la representación teórica para campo débil de la métrica de Schwarzschild a partir de la ecuación (6.36). Se incluye además un recuadro interior en el que se representa el error relativo en tanto por ciento frente a α .

Para terminar este capítulo, la Tabla 6.1 presenta un resumen con las ecuaciones para la precesión en campo débil de las diferentes métricas estudiadas.

Métrica	$\Delta\phi$
Schwarzschild	$\frac{6\pi M}{a(1-e^2)}$
Reissner_Nordström	$\frac{6\pi M}{a(1-e^2)} - \frac{Q^2\pi}{aM(1-e^2)}$
Euler-Heisenberg	$\frac{6\pi M}{a(1-e^2)} - \left(\frac{\pi}{aM(1-e^2)} + \frac{6\pi}{a^2(1-e^2)^2} \right) q_m^2 + \frac{30\pi\mu q_m^4}{a^5 M(1-e^2)^5}$
Black-Bounce	$\frac{6\pi M}{a(1-e^2)} + \frac{\pi\alpha^2}{aM(1-e^2)}(1 - \mathcal{E}^2)$

Tabla 6.1: Ecuaciones obtenidas de la precesión en campo débil para las diferentes métricas estudiadas.

Capítulo 7

Deflexión de la luz

Habiendo explorado la dinámica de las partículas masivas, es natural preguntarse cómo la curvatura del espacio-tiempo afecta a la luz. Este interrogante nos lleva a uno de los fenómenos más célebres y visualmente intuitivos de la Relatividad General: la deflexión de la trayectoria de los fotones.

Para abordar este problema, cambiaremos nuestro enfoque metodológico hacia el formalismo Lagrangiano [14]. A partir de aquí, derivaremos la ecuación que gobierna la trayectoria de un rayo de luz en un campo estático y esféricamente simétrico. Nuestro objetivo final será calcular el ángulo de deflexión en campo débil para las distintas métricas que hemos considerado.

La trayectoria de un fotón es una geodésica nula, para la cual necesitamos utilizar algún parámetro afín λ a lo largo de la geodésica y no el tiempo propio τ . Vamos a considerar el Lagrangiano $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, donde $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Utilizando la ecuación (4.9), $\mathcal{L}$ está dado por

$$\mathcal{L} = -A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + C(r)(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \quad (7.1)$$

Las ecuaciones de las geodésicas se obtienen sustituyendo esta forma para $\mathcal{L}$ en las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (7.2)$$

Realizando este cálculo, encontramos las cuatro ecuaciones geodésicas finales

$$A(r)\dot{t} = E, \quad (7.3)$$

$$A'(r)\dot{t}^2 + B'(r)\dot{r}^2 + 2B(r)\ddot{r} - C'(r)(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) = 0, \quad (7.4)$$

$$C(r)(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2) + C'(r)\dot{r}\dot{\theta} = 0, \quad (7.5)$$

$$C(r)\sin^2\theta\dot{\varphi} = L, \quad (7.6)$$

donde las primas hacen referencia a derivadas con respecto de la coordenada radial. Las ecuaciones (7.3) y (7.6) se obtienen directamente ya que el Lagrangiano no depende de t ni de φ . Si nos restringimos a $\theta = \frac{\pi}{2}$, la ecuación (7.5) se satisface directamente. Debido a la simetría de este tipo de métricas, nos podemos concentrar en las partículas que se mueven en este plano ecuatorial, sin pérdida de generalidad. En este caso, las ecuaciones de las geodésicas se reducen a

$$A(r)\dot{t} = E, \quad (7.7)$$

$$A'(r)\dot{t}^2 + B'(r)\dot{r}^2 + 2B(r)\ddot{r} - C'(r)\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (7.8)$$

$$C(r)\dot{\varphi} = L. \quad (7.9)$$

Es más fácil reemplazar la ecuación (7.8) por una primera integral de las ecuaciones geodésicas. Para las geodésicas nulas, la primera integral es

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0, \quad (7.10)$$

por lo que, finalmente, las ecuaciones geodésicas son

$$A(r)\dot{t} = E, \quad (7.11)$$

$$-A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + C(r)\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (7.12)$$

$$C(r)\dot{\varphi} = L. \quad (7.13)$$

Para trayectorias de fotones, una ecuación para la energía puede ser obtenida sustituyendo las ecuaciones (7.11) y (7.13) en la (7.12), consiguiendo

$$E^2 = A(r) \left[B(r)\dot{r}^2 + \frac{L^2}{C(r)} \right]. \quad (7.14)$$

Por otro lado, sustituyendo $L = C(r)\dot{\varphi}$ en la ecuación (7.14) y usando el hecho de que

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{L}{C(r)} \frac{dr}{d\varphi}, \quad (7.15)$$

queda

$$E^2 = A(r) \left[B(r) \frac{L^2}{C(r)^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{L^2}{C(r)} \right], \quad (7.16)$$

y, haciendo la sustitución $u \equiv \frac{1}{r}$

$$E^2 = A(u) \left[\frac{B(u)L^2}{C(u)^2u^4} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{L^2}{C(u)} \right]. \quad (7.17)$$

Con esta ecuación general vamos a obtener el ángulo de deflexión para las mismas métricas anteriores. Otro desarrollo para obtener otra ecuación general se ha llevado a cabo en [33], donde se ha utilizado una definición del potencial efectivo para ello.

7.1. Métrica de Schwarzschild

Si se hace uso de los coeficientes (6.13), la ecuación (7.17) queda

$$E^2 = L^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + L^2 u^2 (1 - 2Mu), \quad (7.18)$$

y, derivando con respecto de φ

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2. \quad (7.19)$$

Para un espacio sin materia, la solución de esta ecuación es

$$u = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad (7.20)$$

y, realizando el mismo proceso que en la sección 6.1, se consigue

$$u = k \cos(\phi + \varphi). \quad (7.21)$$

Ahora, al aplicar la condición inicial $\dot{u}(\frac{\pi}{2}) = 0$, implica que $\phi = -\frac{\pi}{2}$, y como el valor máximo de esta función, es decir, $u = \frac{1}{b}$, se produce en ese mismo ángulo; la solución que se obtiene es

$$u_0^{\text{Schw}} = \frac{\sin \varphi}{b}, \quad (7.22)$$

donde b es el parámetro de impacto. Tratamos esta solución como una solución de orden cero de la ecuación del movimiento. Escribimos la solución general relativista como

$$u_{\text{Schw}} = \frac{\sin \varphi}{b} + \Delta u_{\text{Schw}}, \quad (7.23)$$

donde Δu_{Schw} es una perturbación. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial general, obtenemos que, a primer orden de Δu_{Schw}

$$\frac{d^2 \Delta u_{\text{Schw}}}{d\varphi^2} + \Delta u_{\text{Schw}} = \frac{3M}{b^2} \sin^2 \varphi, \quad (7.24)$$

donde se ha despreciado el término que contiene $\frac{\Delta u_{\text{Schw}}}{b}$ ya que estamos considerando campo débil. Como $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$, la ecuación diferencial se expresa como

$$\frac{d^2 \Delta u_{\text{Schw}}}{d\varphi^2} + \Delta u_{\text{Schw}} = \frac{3M}{b^2} \left(\frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \right). \quad (7.25)$$

Para resolver esta ecuación diferencial se va a proponer la siguiente solución

$$\Delta u_{\text{Schw}} = a_0 + a_1 \cos(2\varphi), \quad (7.26)$$

donde a_0 y a_1 son constantes de integración a determinar. Si introducimos esta solución en la ecuación diferencial

$$-3a_1 \cos(2\varphi) + a_0 = \frac{3M}{b^2} \left(\frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \right). \quad (7.27)$$

Comparando ambos lados de la expresión conseguimos la expresión de cada coeficiente

$$a_0 = \frac{3M}{2b^2} \quad ; \quad a_1 = \frac{M}{2b^2}, \quad (7.28)$$

obteniendo la siguiente solución completa

$$u_{\text{Schw}} = \frac{\sin \varphi}{b} + \frac{3M}{2b^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right]. \quad (7.29)$$

Ahora vamos a considerar el límite $r \rightarrow \infty$, es decir, $u_{\text{Schw}} \rightarrow 0$. Para ligeras deflexiones podemos tomar $\sin \varphi \approx \varphi$ y $\cos(2\varphi) \approx 1$ en el infinito. Obtenemos de esta forma que

$$\varphi_{\text{Schw}} = -\frac{2M}{b}, \quad (7.30)$$

y, por lo tanto, la deflexión total es

$$\Delta \varphi_{\text{Schw}} = 2|\varphi_{\text{Schw}}| = \frac{4M}{b}. \quad (7.31)$$

Tras derivar las ecuaciones que gobiernan la trayectoria de los fotones, la Figura 7.1 ofrece una representación visual y directa del fenómeno de la deflexión de la luz. La simulación muestra

las trayectorias de los rayos de luz que se aproximan a un agujero negro de Schwarzschild desde una gran distancia, interactúan con su campo gravitatorio y se alejan.

El objetivo principal de esta visualización es demostrar cómo la intensidad del campo gravitatorio, representada por la masa del agujero negro, influye en el ángulo de deflexión de la luz.

La gráfica muestra tres trayectorias de fotones cada una interactuando con un agujero negro de masa diferente. Para $M = 1$ la deflexión es la menor. La trayectoria se desvía de una línea recta, pero la curvatura es relativamente sutil. Para $M = 3$, una mayor masa provoca un campo gravitatorio más intenso, y la trayectoria del fotón se curva de manera más pronunciada. Para $M = 5$, que representa el campo más fuerte, la deflexión es muy grande. El fotón es curvado significativamente por la gravedad del agujero negro.

Este comportamiento se puede corroborar con la ecuación (7.31) de campo débil ya que, para un parámetro de impacto fijo, el ángulo de deflexión aumenta con la masa.

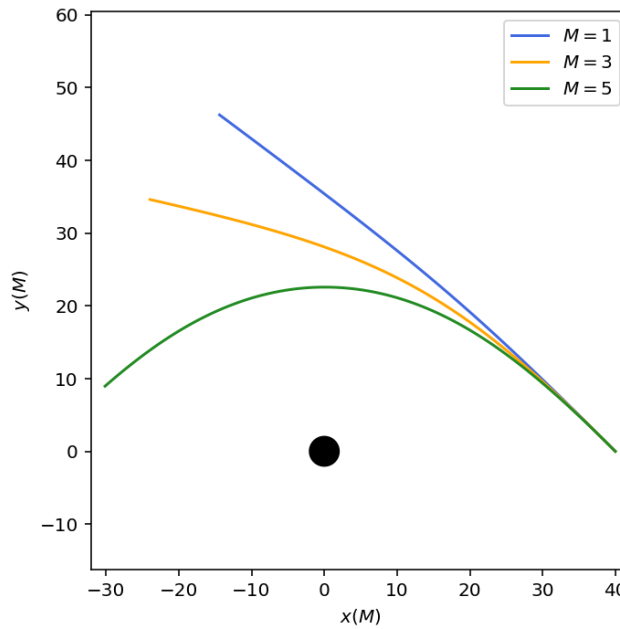


Figura 7.1: Trayectorias de los fotones cuya distancia inicial al agujero negro es $r = 40$ y tienen una velocidad inicial espacial de $u^i = (-1, 0, 0,025)$ para masas del agujero negro de $M = 1$, $M = 2$ y $M = 3$ (todas las magnitudes están escritas en unidades de código).

La Figura 7.2 presenta un análisis cuantitativo de la deflexión de la luz en la métrica de Schwarzschild, contrastando los resultados de la integración numérica completa, llevada a cabo con PyGRO, con la predicción analítica de campo débil derivada en la ecuación (7.31). El objetivo de esta comparación es doble: por un lado, validar el comportamiento de nuestro integrador numérico frente a un resultado canónico y, por otro, delinear con precisión el régimen de validez de la aproximación analítica, cuantificando su desviación en función de los parámetros clave del sistema: la masa del agujero negro M y el parámetro de impacto b .

Un primer examen de las trayectorias revela dos comportamientos fundamentales, acordes con la intuición física. En primer lugar, se observa una fuerte correlación inversa entre el ángulo de deflexión y el parámetro de impacto: a mayor distancia de paso, menor es la desviación, tal y como cabe de esperar. En segundo lugar, la influencia de la masa es directa y pronunciada. Para un b constante, un agujero negro más masivo genera una deflexión significativamente mayor, subrayando su capacidad para curvar el espacio-tiempo de forma más intensa.

Más allá de estas tendencias generales, el análisis comparativo desvela una discrepancia cuya magnitud depende críticamente del parámetro de impacto b . En el régimen de campo fuerte, es decir, para valores pequeños de b , la solución numérica (líneas continuas) predice una deflexión notablemente superior a la calculada por la aproximación analítica. Sin embargo, a medida que b aumenta y nos adentramos en el límite de campo débil, esta diferencia se atenúa hasta volverse despreciable, provocando que ambas curvas converjan de forma asintótica. Este análisis cuantitativo, encapsulado en el gráfico insertado recuadro interior, permite cuantificar rigurosamente esta desviación. Cabe destacar que el límite izquierdo de las líneas corresponde con el valor de b para el cual el fotón cae en el agujero negro.

Es el análisis detallado del recuadro interior lo que nos permite comprender a fondo esta dinámica. Las curvas de error relativo muestran un decaimiento monótono y pronunciado, confirmando que la discrepancia entre el modelo numérico y el analítico no es un valor fijo, sino una función directa de la intensidad del campo gravitatorio experimentado por el fotón. El valor máximo del error se localiza, como era de esperar, en los valores más bajos de b , donde los efectos no lineales de la gravedad son más intensos. Este gráfico, por tanto, no solo cuantifica el fallo de la aproximación, sino que cartografía con precisión la frontera entre el régimen de campo fuerte, donde la integración numérica es indispensable, y el régimen de campo débil, donde la ecuación analítica es suficiente.

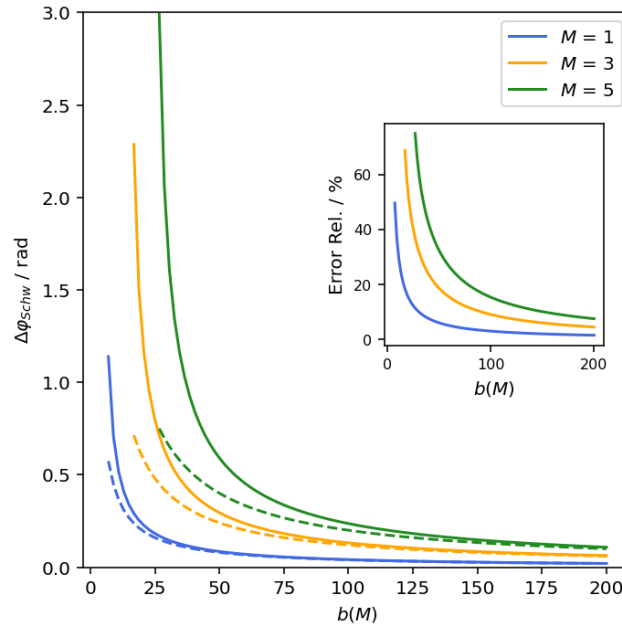


Figura 7.2: Ángulo de deflexión frente al parámetro de impacto para fotones cuya distancia inicial al agujero negro es de $r = 2000$ y tienen una velocidad espacial inicial de $u^i = (-1, 0, 0.025)$ para masas del agujero negro de $M = 1$, $M = 2$ y $M = 3$. Las líneas continuas son el cálculo numérico realizado por PyGRO y las discontinuas son la representación teórica para campo débil a partir de la ecuación (7.31). Se ha realizado un recuadro interior en el que se representa el error relativo en tanto por ciento entre la curva numérica y la teórica para cada masa frente al parámetro de impacto. Todas las magnitudes se encuentran en unidades de código.

7.2. Métrica de Reissner-Nordström

Si se hace uso de los coeficientes (6.37), la ecuación (7.17) queda de la forma

$$E^2 = L^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + L^2 u^2 (1 - 2Mu + Q^2 u^2). \quad (7.32)$$

Derivando esta ecuación con respecto a φ

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2 - 2Q^2 u^3. \quad (7.33)$$

En ausencia de materia, la solución a la ecuación diferencial es la misma que (7.22). Tratamos esta solución como una solución de orden cero de la ecuación del movimiento. Escribimos la solución general relativista como

$$u_{\text{RN}} = \frac{\sin \varphi}{b} + \Delta u_{\text{RN}}, \quad (7.34)$$

donde Δu_{RN} es una perturbación. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial general, encontramos que, a primer orden en Δu_{RN}

$$\frac{d^2 \Delta u_{\text{RN}}}{d\varphi^2} + \Delta u_{\text{RN}} = \frac{3M}{b^2} \sin^2 \varphi - \frac{2Q^2}{b^3} \sin^3 \varphi, \quad (7.35)$$

donde se han eliminado los términos que dependen de potencias de $\frac{1}{b}$ junto con Δu_{RN} ya que son muy pequeños debido a que estamos considerando campo débil. Como $\sin^3 \varphi = \frac{3 \sin \varphi - \sin(3\varphi)}{4}$, la ecuación diferencial se puede expresar como

$$\frac{d^2 \Delta u_{\text{RN}}}{d\varphi^2} + \Delta u_{\text{RN}} = \frac{3M}{b^2} \left(\frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \right) - \frac{2Q^2}{b^3} \left(\frac{3 \sin \varphi - \sin(3\varphi)}{4} \right). \quad (7.36)$$

Para resolver esta ecuación diferencial proponemos una solución del siguiente tipo incluyendo el término compuesto por $\varphi \cos \varphi$ debido a que la solución de la ecuación diferencial sin materia está formada por un seno

$$\Delta u_{\text{RN}} = a_0 + a_1 \cos(2\varphi) + a_2 \varphi \cos \varphi + a_3 \sin(3\varphi), \quad (7.37)$$

donde a_0 , a_1 , a_2 y a_3 son constantes de integración a determinar. Si introducimos esta propuesta en la ecuación diferencial

$$-3a_1 \cos(2\varphi) - 2a_2 \sin \varphi - 8a_3 \sin(3\varphi) + a_0 = \frac{3M}{b^2} \left(1 - \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \right) - \frac{2Q^2}{b^3} \left(\frac{3 \sin \varphi - \sin(3\varphi)}{4} \right). \quad (7.38)$$

Comparando ambos lados de la igualdad, podemos conocer la expresión de cada coeficiente de la perturbación

$$a_0 = \frac{3M}{2b^2} \quad ; \quad a_1 = \frac{M}{2b^2} \quad ; \quad a_2 = \frac{3Q^2}{4b^3} \quad ; \quad a_3 = -\frac{Q^2}{16b^3}. \quad (7.39)$$

Teniendo en cuenta estos coeficientes, la solución completa es

$$u_{\text{RN}} = \frac{\sin \varphi}{b} + \frac{3M}{2b^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right] + \frac{3Q^2}{4b^3} \left[\varphi \cos \varphi - \frac{1}{12} \sin(3\varphi) \right]. \quad (7.40)$$

Vamos a considerar ahora el límite $r \rightarrow \infty$, es decir, $u_{\text{RN}} \rightarrow 0$. Para una ligera deflexión podemos tomar $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos(2\varphi) \approx 1$ y $\sin(3\varphi) \approx 3\varphi$ en el infinito, para obtener

$$\varphi_{\text{RN}} = -\frac{2M}{b^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{9Q^2}{16b^3} \right)}. \quad (7.41)$$

Por lo tanto, la deflexión total es

$$\Delta\varphi_{\text{RN}} = 2|\varphi| = \frac{4M}{b \left(1 + \frac{9Q^2}{16b^2} \right)}. \quad (7.42)$$

En campo débil, $Q^2 \ll b^2$, por lo que el denominador se puede expandir hasta primer orden y la expresión final queda

$$\Delta\varphi_{\text{RN}} = \frac{4M}{b} - \frac{9MQ^2}{4b^3}. \quad (7.43)$$

A continuación, en la Figura 7.3, se presenta un análisis cuantitativo que contrasta los resultados de la integración numérica de las trayectorias de fotones (líneas continuas), obtenida mediante PyGRO, con la predicción analítica de campo débil derivada en la ecuación (7.43) (líneas discontinuas). El propósito de esta comparativa es doble: por un lado, validar la expresión teórica en su régimen de aplicabilidad y, por otro, desentrañar la fenomenología distintiva que introduce la carga en la deflexión de la luz.

El análisis de la figura revela varias características fundamentales. En primer lugar, se observa una clara correlación inversa entre el ángulo de deflexión y el parámetro de impacto para todas las cargas estudiadas. Este comportamiento es el esperado, ya que los fotones que pasan más lejos del objeto masivo experimentan una curvatura del espacio-tiempo menos intensa y, por tanto, son desviados en menor medida. El aspecto más relevante, sin embargo, es el efecto supresor de la carga. A diferencia del caso de Schwarzschild, donde una mayor masa siempre implica una mayor deflexión, aquí se manifiesta que, para un mismo parámetro de impacto y una misma masa del agujero negro, un aumento en la carga del mismo resulta en una menor deflexión. Este resultado confirma visualmente la predicción de la ecuación (7.43), donde el término $\sim -\frac{Q^2}{b^3}$ contrarresta parcialmente el efecto de la masa.

El recuadro interior, que representa el error relativo entre el modelo numérico y la aproximación teórica, nos permite cuantificar la validez de nuestro análisis de campo débil. Como era de esperar, el error es máximo para valores pequeños de b , donde los efectos no lineales de la gravedad son más pronunciados y la aproximación teórica pierde precisión. A medida que b aumenta, el error disminuye drásticamente y las curvas teórica y numérica convergen, demostrando que la ecuación (7.43) es una excelente descripción en el límite de campo débil (grandes distancias).

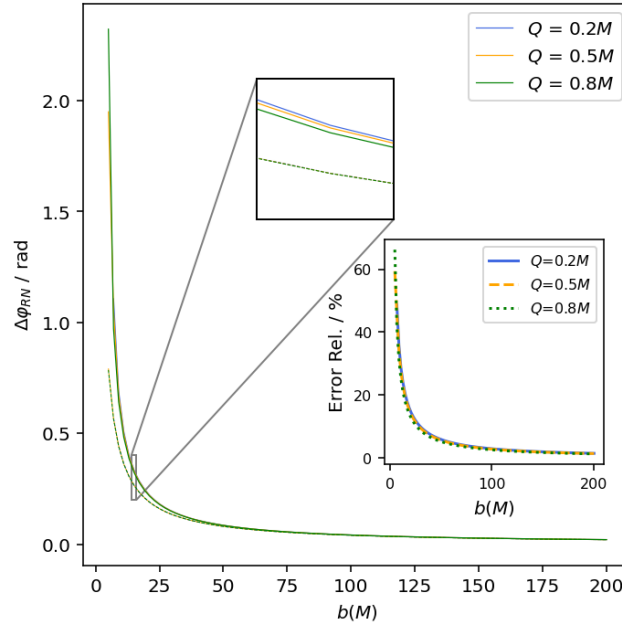


Figura 7.3: Ángulo de deflexión frente al parámetro de impacto para fotones partiendo desde una distancia al agujero negro de $r = 2000M$ y con una velocidad espacial inicial de $u^i = (-1, 0, 0, 0.25)$ para cargas del agujero negro de $Q = 0.2M$, $Q = 0.5M$ y $Q = 0.8M$ y una masa de $M = 1$. Las líneas continuas son el cálculo numérico realizado por PyGRO y las discontinuas son la representación teórica para campo débil a partir de la ecuación (7.43). Dentro de la figura se ha incluido un recuadro interior del error relativo entre la curva numérica y la teórica para cada carga en función del parámetro de impacto.

7.3. Métrica electrodinámica no lineal de Euler-Heisenberg

Si se hace uso de los coeficientes (6.58), la ecuación (7.17) queda de la forma

$$E^2 = L^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + L^2 u^2 \left(1 - 2Mu + q_m^2 u^2 - \frac{2}{5} \mu q_m^4 u^6 \right). \quad (7.44)$$

Ahora, si se deriva con respecto de φ

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2 - 2q_m^2 u^3 + \frac{8}{5} \mu q_m^4 u^7. \quad (7.45)$$

En ausencia de materia, la solución de la ecuación diferencial es (7.22). Al igual que en los casos anteriores, tratamos esta solución como una solución de orden cero de la ecuación del movimiento y escribimos la solución general relativista como

$$u_{\text{NLEM}} = \frac{\sin \varphi}{b} + \Delta u_{\text{NLEM}}, \quad (7.46)$$

donde Δu_{NLEM} es una perturbación. Sustituyendo esta solución en la ecuación diferencial general, encontramos que, a primer orden en Δu_{NLEM}

$$\frac{d^2 \Delta u_{\text{NLEM}}}{d\varphi^2} + \Delta u_{\text{NLEM}} = \frac{3M}{b^2} \sin^2 \varphi - \frac{2q_m^2}{b^3} \sin^3 \varphi + \frac{8\mu q_m^4}{5b^7} \sin^7 \varphi, \quad (7.47)$$

donde se han eliminado los términos que están formados por potencias de $\frac{1}{b}$ y Δu_{NLEM} debido a que en la aproximación de campo débil son muy pequeños. Ya que $\sin^7 \varphi = \frac{1}{64}[35 \sin \varphi - 21 \sin(3\varphi) + 7 \sin(5\varphi) - \sin(7\varphi)]$ la ecuación diferencial se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta u_{\text{NLEM}}}{d\varphi^2} + \Delta u_{\text{NLEM}} = & \frac{3M}{b^2} \left(\frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \right) - \frac{2q_m^2}{b^3} \left(\frac{3 \sin \varphi - \sin(3\varphi)}{4} \right) + \\ & + \frac{8\mu q_m^4}{5b^7} \frac{1}{64} [35 \sin \varphi - 21 \sin(3\varphi) + 7 \sin(5\varphi) - \sin(7\varphi)]. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Con el fin de resolver esta ecuación diferencial, proponemos una solución del tipo

$$\Delta u_{\text{NLEM}} = a_0 + a_1 \varphi \cos \varphi + a_2 \sin(3\varphi) + a_3 \cos(2\varphi) + a_4 \sin(5\varphi) + a_5 \sin(7\varphi), \quad (7.49)$$

donde a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 son constantes de integración a determinar y se ha incluido el término formado por $\varphi \cos \varphi$ por el mismo razonamiento anterior. Si introducimos esta propuesta en la ecuación diferencial y comparamos ambos lados del igual obtenemos que la expresión para cada coeficiente es

$$a_0 = \frac{3M}{2b^2} \quad ; \quad a_1 = \frac{3q_m^2}{4b^3} - \frac{7\mu q_m^4}{16b^7} \quad ; \quad a_2 = -\frac{q_m^2}{16b^3} + \frac{21\mu q_m^4}{320b^7} \quad ; \quad a_3 = \frac{M}{2b^2} \quad (7.50)$$

$$a_4 = -\frac{7\mu q_m^4}{960b^7} \quad ; \quad a_5 = \frac{\mu q_m^4}{1920b^7}. \quad (7.51)$$

Con estos coeficientes en mente, la solución completa es

$$\begin{aligned} u_{\text{NLEM}} = & \frac{\sin \varphi}{b} + \frac{3M}{2b^2} + \left(\frac{3q_m^2}{4b^3} - \frac{7\mu q_m^4}{16b^7} \right) \varphi \cos \varphi + \left(\frac{21\mu q_m^4}{320b^7} - \frac{q_m^2}{16b^3} \right) \sin(3\varphi) + \\ & + \frac{M}{2b^2} \cos(2\varphi) - \frac{7\mu q_m^4}{960b^7} \sin(5\varphi) + \frac{\mu q_m^4}{1920b^7} \sin(7\varphi). \end{aligned} \quad (7.52)$$

En el límite $r \rightarrow \infty$, es decir, $u_{\text{NLEM}} \rightarrow \infty$, consideramos una ligera deflexión con la que podemos tomar $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, $\cos(2\varphi) \approx 1$, $\sin(3\varphi) \approx 3\varphi$ y $\cos(4\varphi) \approx 1$ en el infinito, con lo que se obtiene

$$\varphi_{\text{NLEM}} = -\frac{2M}{b^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{9q_m^2}{16b^3} - \frac{35\mu q_m^4}{128b^7} \right)}. \quad (7.53)$$

Por lo tanto, la deflexión total es

$$\Delta \varphi_{\text{NLEM}} = 2|\varphi_{\text{NLEM}}| = \frac{4M}{b \left(1 + \frac{9q_m^2}{16b^2} - \frac{35\mu q_m^4}{128b^6} \right)}. \quad (7.54)$$

En campo débil, $Q^2 \ll b^2$ y $Q^4 \ll b^6$, por lo que podemos expandir hasta primer orden el denominador y, entonces, $\Delta \varphi_{\text{NLEM}}$ se puede expresar como

$$\Delta \varphi_{\text{NLEM}} = \frac{4M}{b} - \frac{9q_m^2 M}{4b^3} + \frac{35\mu q_m^4 M}{32b^7}. \quad (7.55)$$

Prosiguiendo con el análisis, la Figura 7.4 nos adentra en el espacio-tiempo de Euler-Heisenberg, con el objetivo de explorar cómo las correcciones de la electrodinámica no lineal modifican la deflexión de la luz. La gráfica principal contrasta la predicción analítica de campo débil, descrita por la ecuación (7.55) (líneas discontinuas), con los resultados numéricos de alta precisión obtenidos mediante PyGRO (líneas continuas). Se examina el ángulo de deflexión

en función del parámetro de impacto para distintos valores del parámetro de acoplamiento no lineal μ .

Un examen detallado revela que el parámetro μ introduce una modificación fundamental en la dinámica. A diferencia del efecto supresor de la carga en la métrica de Reissner-Nordström, un aumento en el parámetro μ resulta en un incremento del ángulo de deflexión para un mismo parámetro de impacto, una misma masa y una misma carga magnética. Este comportamiento, aunque sutil para los valores de μ seleccionados, es cualitativamente inequívoco y corrobora la naturaleza aditiva de la corrección en la ecuación (7.55), cuyo término dependiente de μ es positivo. Este hallazgo es físicamente significativo, pues sugiere que los efectos cuánticos del vacío, modelados por la teoría de Euler-Heisenberg, tienden a potencial la capacidad de la materia para curvar el espacio-tiempo, en lugar de atenuarla.

El recuadro interior, que cuantifica el error relativo, refuerza las conclusiones obtenidas en los análisis previos. Se observa un decaimiento del error a medida que el parámetro de impacto aumenta, lo que confirma que la aproximación de campo débil es excepcionalmente precisa en el régimen de grandes distancias, pero pierde validez en las proximidades del objeto compacto, donde la no linealidad de la gravedad se vuelve dominante.

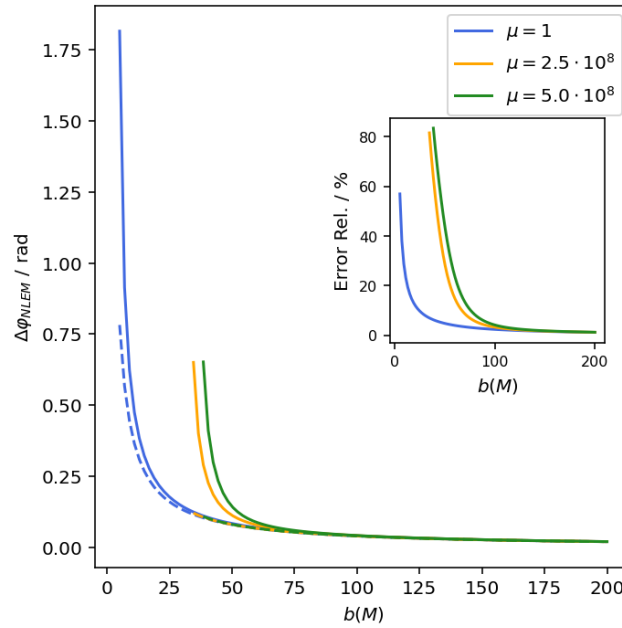


Figura 7.4: Ángulo de deflexión frente al parámetro de impacto para fotones partiendo desde una distancia al agujero negro de $r = 2000M$ y con una velocidad espacial inicial de $u^i = (-1, 0, 0, 0.25)$ para valores de la constante μ de $\mu = 1M^2$, $\mu = 2.5 \cdot 10^8 M^2$ y $\mu = 5 \cdot 10^8 M^2$ y una masa del agujero negro de $M = 1$. Las líneas continuas son el cálculo numérico realizado por PyGRO y las discontinuas son la representación teórica para campo débil a partir de la ecuación (7.55). Dentro de la figura se ha incluido un recuadro interior del error relativo entre la curva numérica y la teórica para cada constante μ en función del parámetro de impacto.

7.4. Métrica de Black-Bounce

Se va a hacer uso de la métrica (6.72) que depende del radio areal. Utilizando los coeficientes (6.73), la ecuación (7.17) se escribe como

$$E^2 = \frac{L^2}{1 - \alpha^2 u^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + L^2 u^2 (1 - 2Mu). \quad (7.56)$$

Si derivamos esta ecuación con respecto de φ

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2 - \frac{\alpha^2}{b^2} u + 2\alpha^2 u^3 - 5M\alpha^2 u^4, \quad (7.57)$$

donde el parámetro de impacto b se ha definido como $b = \frac{L}{E}$. Como estamos en campo débil vamos a despreciar el término formado por $\alpha^2 u^4$ y la ecuación diferencial que necesitamos resolver es

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2 - \frac{\alpha^2}{b^2} u + 2\alpha^2 u^3. \quad (7.58)$$

En ausencia de materia, la solución de la ecuación diferencial es (7.22). Tal y como hemos realizado anteriormente, vamos a tratar esta solución como una solución de orden cero de la ecuación del movimiento, escribiendo la solución general relativista como

$$u_{\text{BB}} = \frac{\sin \varphi}{b} + \Delta u_{\text{BB}}, \quad (7.59)$$

donde Δu_{BB} es una perturbación. Sustituyendo esta solución en la ecuación diferencial general obtenemos a primer orden en Δu_{BB}

$$\frac{d^2 \Delta u_{\text{BB}}}{d\varphi^2} + \Delta u_{\text{BB}} = \frac{3M}{b^2} \sin^2 \varphi - \frac{\alpha^2}{b^3} \sin \varphi + \frac{2\alpha^2}{b^3} \sin^3 \varphi, \quad (7.60)$$

donde se han eliminado los términos formados por potencias de $\frac{1}{b}$ y Δu_{BB} debido a que estamos considerando campo débil. Para resolver esta ecuación diferencial proponemos la siguiente solución

$$\Delta u_{\text{BB}} = a_0 + a_1 \varphi \cos \varphi + a_2 \cos(2\varphi) + a_3 \sin(3\varphi), \quad (7.61)$$

donde a_0, a_1, a_2 y a_3 son constantes de integración a determinar. Introduciendo esta solución en la ecuación diferencial y comparando ambos lados del igual obtenemos la expresión para cada una de las constantes

$$a_0 = \frac{3M}{2b^2} \quad ; \quad a_1 = -\frac{\alpha^2}{4b^3} \quad ; \quad a_2 = \frac{M}{2b^2} \quad ; \quad a_3 = \frac{\alpha^2}{16b^3}. \quad (7.62)$$

Con estos coeficientes la solución completa es

$$u_{\text{BB}} = \frac{\sin \varphi}{b} + \frac{3M}{2b^2} - \frac{\alpha^2}{4b^3} \varphi \cos \varphi + \frac{M}{2b^2} \cos(2\varphi) + \frac{\alpha^2}{16b^3} \sin(3\varphi). \quad (7.63)$$

Al tomar le límite $r \rightarrow \infty$, es decir, $u_{\text{BB}} \rightarrow 0$, consideramos una pequeña deflexión en la que podemos considerar $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, $\cos(2\varphi) \approx 1$ y $\sin(3\varphi) \approx 3\varphi$ en el infinito, con lo que se obtiene

$$\varphi_{\text{BB}} = -\frac{2M}{b \left(1 - \frac{\alpha^2}{16b^2} \right)}. \quad (7.64)$$

De esta forma, la deflexión total es

$$\Delta\varphi_{\text{BB}} = 2|\varphi_{\text{BB}}| = \frac{4M}{b \left(1 - \frac{\alpha^2}{16b^2}\right)}. \quad (7.65)$$

Como en campo débil $\alpha^2 \ll b^2$, podemos expandir el denominador hasta primer orden y expresar la deflexión total como

$$\Delta\varphi_{\text{BB}} = \frac{4M}{b} + \frac{M\alpha^2}{4b^3}. \quad (7.66)$$

Para culminar nuestro análisis fenomenológico de la deflexión de la luz, la Figura 7.5 aborda la métrica de Black-Bounce. Esta figura es de particular importancia, ya que nos permite investigar cómo una modificación topológica del espacio-tiempo —la presencia de una “garganta” regular en lugar de una singularidad— impacta una observable astrofísica fundamental. La gráfica principal presenta la deflexión angular en función del parámetro de impacto, comparando los resultados numéricos de PyGRO (líneas continuas) con la predicción teórica de campo débil obtenida en la ecuación (7.66) (líneas discontinuas). Se analizan tres valores distintos del parámetro de “garganta” α .

La inspección de la figura revela un comportamiento inequívoco y físicamente revelador: el parámetro α actúa como un amplificador de la deflexión de la luz. Para un mismo parámetro de impacto y una misma masa, un valor mayor de α (es decir, una “garganta” más ancha) produce una desviación angular sistemáticamente mayor. Este resultado contrasta de manera fundamental con el efecto de la carga eléctrica en la métrica de Reissner-Nordström, que actuaba como un supresor de la deflexión. La perfecta concordancia entre las simulaciones numéricas y nuestra derivación analítica confirma que este efecto aditivo, gobernado por el término $\sim \frac{\alpha^2}{b^3}$, es una predicción robusta del modelo. Esta concordancia no ocurre para $\alpha = 5M$ como se puede observar en la gráfica. La existencia de un máximo y la enorme discrepancia con la ecuación analítica puede ser debido a que el fotón esté atravesando a otro universo y la física es mucho más complicada de analizar.

El recuadro interior que muestra el error relativo entre la teoría y la simulación nos permite validar la precisión de nuestro modelo. Al igual que en los casos anteriores, el error es mínimo para grandes valores de b y aumenta en el régimen de campo fuerte, donde la aproximación de campo débil pierde su validez. Para el caso especial de $\alpha = 5M$ nuestro modelo también es válido para valores grandes del parámetro de impacto pero para valores pequeños no sirve.

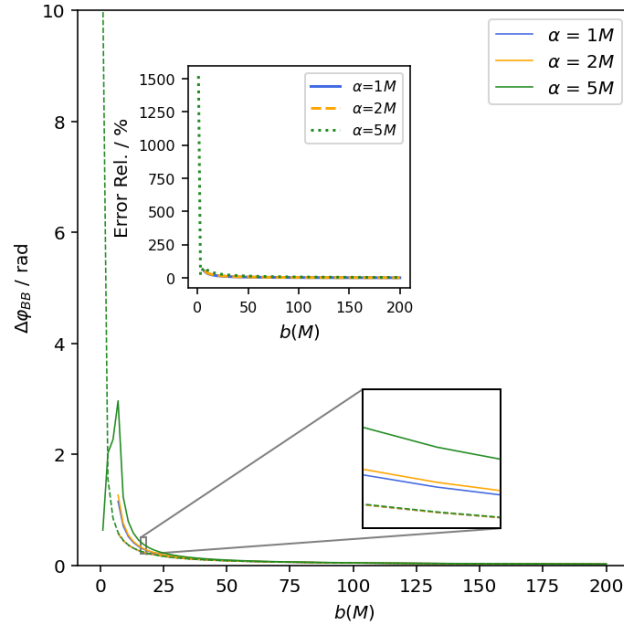


Figura 7.5: Ángulo de deflexión frente al parámetro de impacto para fotones partiendo desde una distancia al agujero negro de $r = 2000M$ y con una velocidad espacial inicial de $u^i = (-1, 0, 0, 0.25)$ para valores de α de $\alpha = 1M$, $\alpha = 2M$ y $\alpha = 5M$ y una masa del agujero negro de $M = 1$. Las líneas continuas son el cálculo numérico realizado por PyGRO y las discontinuas son la representación teórica para campo débil a partir de la ecuación (7.66). Dentro de la figura se ha incluido un recuadro interior del error relativo entre la curva numérica y la teórica para cada α en función del parámetro de impacto.

Para terminar este capítulo, en la Tabla 7.1 se presenta un resumen con las ecuaciones de la deflexión en campo débil para las diferentes métricas estudiadas.

Métrica	$\Delta\varphi$
Schwarzschild	$\frac{4M}{b}$
Reissner-Nordström	$\frac{4M}{b} - \frac{9MQ^2}{4b^3}$
Euler-Heisenberg	$\frac{4M}{b} - \frac{9q_m^2 M}{4b^3} + \frac{35\mu q_m^4 M}{32b^7}$
Black-Bounce	$\frac{4M}{b} + \frac{M\alpha^2}{4b^3}$

Tabla 7.1: Ecuaciones obtenidas de la precesión en campo débil para las diferentes métricas estudiadas.

Capítulo 8

Conclusiones

En el presente Trabajo de Fin de Máster, se ha llevado a cabo un análisis fenomenológico comparativo de las consecuencias observacionales de diversas geometrías del espacio-tiempo, con el objetivo principal de identificar características distintivas que permitan diferenciar la Relatividad General de algunas de sus extensiones más relevantes. El estudio se ha centrado en dos de los efectos más emblemáticos de la interpretación relativista de la gravedad: la precesión del pericentro de partículas masivas y la deflexión de la luz para fotones.

Para alcanzar este objetivo, la metodología ha combinado derivaciones analíticas en el límite de campo débil con simulaciones numéricas de alta precisión, implementadas a través de la herramienta computacional de código abierto PyGRO. Este enfoque dual ha permitido no solo obtener predicciones cuantitativas de los efectos orbitales, sino también validar tanto la robustez como el grado de validez de las aproximaciones teóricas y delimitar con precisión sus regímenes de validez.

Los principales resultados y conclusiones derivados de este estudio se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Validación del marco de trabajo: El análisis inicial sobre la métrica de Schwarzschild sirvió como un caso de referencia fundamental. Los resultados numéricos obtenidos con PyGRO para la precesión del pericentro y la deflexión de la luz mostraron una excelente concordancia con las predicciones canónicas de la Relatividad General en el límite de campo débil. La cuantificación del error relativo demostró la fiabilidad del integrador numérico, validando así la metodología empleada para los análisis posteriores de geometrías más complejas y también evidenciando la necesidad de ir más allá de las aproximaciones de campo débil cuando el objeto considerado está en campo fuerte.
2. El efecto supresor de la carga clásica: El estudio del espacio-tiempo de Reissner-Nordström reveló una signatura fenomenológica clave: el efecto supresor de la carga sobre los efectos gravitacionales. Se demostró analítica y numéricamente que, para una misma masa y parámetro de impacto, un aumento en la carga del objeto central conduce a una menor precesión del pericentro y a un menor ángulo de deflexión de la luz. Este resultado, atribuible al término de signo opuesto que introduce la carga en la métrica (véase ecuación (6.57)), representa una predicción cualitativamente distinta a la del caso sin carga.
3. Efecto amplificador de las diversas correcciones cuánticas y topológicas: En contraste directo con el efecto supresor de la carga, la investigación de geometrías alternativas motivadas por la electrodinámica no lineal y los agujeros negros regulares o de gusano reveló una fenomenología de amplificación.

- En la métrica de Euler-Heisenberg, se observó que el parámetro de acoplamiento no lineal μ intensifica la precesión orbital y la deflexión de la luz.
- De manera análoga, en las geometrías de tipo Black-Bounce, el parámetro α , que caracteriza la “garganta” del agujero de gusano, también actúa como un amplificador de estos efectos relativistas.

Esta dicotomía entre la supresión (clásica) y la amplificación (alternativa) constituye el hallazgo más significativo de este trabajo.

Como conclusión principal, este trabajo establece que diferentes extensiones de la Relatividad General dejan huellas observables, cualitativamente distintas, en la dinámica orbital. Mientras que la carga eléctrica clásica tiende a “apantallar” el campo gravitatorio, reduciendo los efectos de curvatura, las modificaciones inspiradas en la física cuántica o en topologías exóticas tienden a intensificarlos. Esta distinción ofrece una poderosa herramienta fenomenológica para poner a prueba los fundamentos de la gravedad, utilizando observaciones de alta precisión como las de las estrellas S en órbita alrededor de Sgr A*, los datos del *Event Horizon Telescope* o futuras mediciones de ondas gravitacionales.

A pesar de los resultados obtenidos, este trabajo presenta ciertas limitaciones que, a su vez, abren nuevas y prometedoras líneas de investigación:

- Inclusión de la rotación: El análisis se ha restringido a espacio-tiempos estáticos y esféricamente simétricos. Una extensión natural y de gran relevancia astrofísica sería aplicar esta misma metodología a geometrías rotatorias, como las métricas de Kerr-Newman, Euler-Heisenberg rotante o Black-Bounce con espín. Esto permitiría estudiar fenómenos adicionales como el arrastre marcos de referencia (frame-dragging) y comparar las predicciones con objetos astrofísicos realistas, que inherentemente poseen momento angular.
- Análisis de otros observables: El estudio podría ampliarse para investigar otros observables, como la forma y el tamaño de la sombra del objeto compacto o los anillos de fotones. Comparar cómo los efectos de supresión y amplificación se manifiestan en estos observables proporcionaría una prueba cruzada y más robusta de estas teorías.
- Modelos de gravedad modificada más complejos: Si bien este trabajo se centró en extensiones bien definidas, la metodología desarrollada con PyGRO es lo suficientemente flexible como para ser aplicada a una gama más amplia de teorías de gravedad modificada, como las teorías $f(R)$ o los modelos con campos escalares adicionales.
- Conexión directa con datos observacionales: Un paso final y crucial sería realizar un análisis estadístico riguroso (e.g., mediante técnicas bayesianas) para comparar directamente las predicciones orbitales de este trabajo con los datos astrométricos de alta precisión ya disponibles, con el fin de imponer restricciones cuantitativas sobre los parámetros de los modelos estudiados (Q, μ, α) .

En definitiva, este trabajo sienta las bases para un programa de investigación sistemático destinado a usar la dinámica orbital como un laboratorio de precisión para la física fundamental en los entornos más extremos del universo.

Referencias

- [1] C. Bambi, *Introducción a la relatividad general: un curso para estudiantes de física*. Reverte, 2021.
- [2] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari *et al.*, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Physical review letters*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [3] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “f (r) theories of gravity,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 82, no. 1, pp. 451–497, 2010.
- [4] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, “Modified gravity and cosmology,” *Physics reports*, vol. 513, no. 1-3, pp. 1–189, 2012.
- [5] W. Heisenberg and H. Euler, “Folgerungen aus der diracschen theorie des positrons,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 98, no. 11, pp. 714–732, 1936.
- [6] J. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” *Physical Review*, vol. 82, no. 5, p. 664, 1951.
- [7] K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, R. Azulay, A. Baczko, D. Ball, M. Baloković, J. Barrett, E. H. T. Collaboration *et al.*, “First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 875, 2019.
- [8] The Event Horizon Telescope Collaboration *et al.*, “First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole in the center of the milky way,” *Astrophysical Journal Letters*, vol. 930, no. 2, May 2022, publisher Copyright: © 2022. The Author(s). Published by the American Astronomical Society.
- [9] P. R. Brady, “The internal structure of black holes,” *Progress of Theoretical Physics Supplement*, vol. 136, pp. 29–44, 1999.
- [10] M. S. Morris and K. S. Thorne, “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity,” *American Journal of Physics*, vol. 56, no. 5, pp. 395–412, 1988.
- [11] M. Visser, “Lorentzian wormholes. from einstein to hawking,” *Woodbury*, 1995.
- [12] M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, “Wormholes, time machines, and the weak energy condition,” *Physical Review Letters*, vol. 61, no. 13, p. 1446, 1988.
- [13] S. W. Hawking, “Chronology protection conjecture,” *Physical Review D*, vol. 46, no. 2, p. 603, 1992.

-
- [14] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge university press, 2006.
 - [15] N. V. Johansen and F. Ravndal, “On the discovery of birkhoff’s theorem,” *arXiv preprint physics/0508163*, 2005.
 - [16] C. Vishveshwara, “Stability of the schwarzschild metric,” *Physical Review D*, vol. 1, no. 10, p. 2870, 1970.
 - [17] F. I. Cooperstock and V. De La Cruz, “Sources for the reissner-nordström metric,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 9, no. 9, pp. 835–843, 1978.
 - [18] H. Yajima and T. Tamaki, “Black hole solutions in euler-heisenberg theory,” *Physical Review D*, vol. 63, no. 6, p. 064007, 2001.
 - [19] S. Wen, W. Hong, and J. Tao, “Observational appearances of magnetically charged black holes in born–infeld electrodynamics,” *The European Physical Journal C*, vol. 83, no. 4, p. 277, 2023.
 - [20] A. Simpson and M. Visser, “Black-bounce to traversable wormhole,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2019, no. 02, p. 042, 2019.
 - [21] S. A. Hayward, “Formation and evaporation of nonsingular black holes,” *Physical review letters*, vol. 96, no. 3, p. 031103, 2006.
 - [22] T. A. Roman and P. G. Bergmann, “Stellar collapse without singularities?” *Physical Review D*, vol. 28, no. 6, p. 1265, 1983.
 - [23] P. A. Cano, S. Chimento, T. Ortín, and A. Ruipérez, “Regular stringy black holes?” *Physical Review D*, vol. 99, no. 4, p. 046014, 2019.
 - [24] M. Visser, “Traversable wormholes: Some simple examples,” *Physical Review D*, vol. 39, no. 10, p. 3182, 1989.
 - [25] —, “Traversable wormholes from surgically modified schwarzschild spacetimes,” *Nuclear Physics B*, vol. 328, no. 1, pp. 203–212, 1989.
 - [26] R. Della Monica, “Pygro: a python integrator for general relativistic orbits,” *arXiv preprint arXiv:2504.20152*, 2025.
 - [27] F. H. Vincent, T. Paumard, E. Gourgoulhon, and G. Perrin, “Gyoto: a new general relativistic ray-tracing code,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 28, no. 22, p. 225011, 2011.
 - [28] A. Meurer, C. P. Smith, M. Paprocki, O. Čertík, S. B. Kirpichev, M. Rocklin, A. Kumar, S. Ivanov, J. K. Moore, S. Singh *et al.*, “SymPy: symbolic computing in python,” *PeerJ Computer Science*, vol. 3, p. e103, 2017.
 - [29] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery *et al.*, “Numerical recipes in c,” 1992.
 - [30] S. Chandrasekhar and K. S. Thorne, “The mathematical theory of black holes,” 1985.

- [31] L. G. Taff, “Celestial mechanics: a computational guide for the practitioner,” *A Wiley-Interscience Publication*, 1985.
- [32] T. Padmanabhan, *Gravitation: foundations and frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [33] L. F. D. da Silva, F. S. Lobo, G. J. Olmo, and D. Rubiera-Garcia, “Photon rings as tests for alternative spherically symmetric geometries with thin accretion disks,” *Physical Review D*, vol. 108, no. 8, p. 084055, 2023.