Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas

SANTIAGO VICENTE[1], JOSETXU ORRANTIA[1]
Y LIEVEN VERSCHAFFEL[2]

[1]*Universidad de Salamanca,* [2]*Katholieke Universiteit Leuven*

Resumen

Partiendo de la doble naturaleza matemática y textual de la tarea de resolver un problema aritmético, hemos diseñado un estudio empírico que incorpora al proceso de resolución dos ayudas diferentes: la reescritura –matemática o situacional– de problemas y las ayudas gráficas (dibujos) matemáticas o situacionales. Se analizó con estadísticos no paramétricos la influencia de estas ayudas en el acierto con el que una muestra de 152 alumnos de 3º a 5º de Educación Primaria resolvió doce problemas aritméticos de dos operaciones. Los resultados mostraron que los dos tipos de reescritura y los dibujos matemáticos incrementan el acierto (especialmente para los alumnos más competentes) mientras que los dibujos situacionales no ejercieron ninguna influencia.

Palabras clave: Resolución de problemas, conocimiento matemático, reescritura de problemas, imágenes y resolución de problemas.

Influence of mathematical and situational knowledge on arithmetic word problem solving: Textual and graphical aids

Abstract

According to the double nature –mathematical and textual– of arithmetic word problem solving, an empirical study has been developed in which two different aids were added to the problem-solving process: 1) (mathematical or situational) rewording, and 2) inclusion of drawings related to the mathematical and situational structure of the problem. Using non-parametric statistics, the effectiveness of these aids on the success rate of a sample of 152 3rd to 5th graders in solving twelve two-step problems was analysed. Our results showed that both textual aids and mathematical drawings lead children (especially high ability children) to better achievement, while situational drawings had no effect.

Keywords: Word problem solving, mathematical knowledge, rewording, drawings and word problem solving.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido realizado gracias al Proyecto de Investigación BSO-2003-05075, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología. Asimismo queremos agradecer a Emilio Sánchez y a J. Ricardo García los comentarios sobre el primer manuscrito de este trabajo, y a los revisores de I&A que evaluaron las versiones previas del trabajo, y cuyas sugerencias nos sirvieron para mejorar sustancialmente el manuscrito.

Correspondencia con los autores: [1]Universidad de Salamanca. Facultad de Educación. Pso. Canalejas, 169. 37008, Salamanca. E-mail: sanvicente@usal.es - orrantia@usal.es
[2]Katholieke Universiteit Leuven. Department of Educational Sciences. Centre for Instructional Psychology and Tecnology. Vesaliusstraat 2. B-3000, Leuven (Bélgica). E-mail: Lieven.Verschaffel@ped.kuleuven.be

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas aritméticos constituye uno de los objetivos prioritarios de la escolaridad elemental, ya que permite desarrollar en los estudiantes las habilidades necesarias para aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones de la vida cotidiana. Asimismo, la resolución de problemas es con frecuencia una tarea compleja para los alumnos, de modo que son necesarias gran número de ayudas. El objetivo del trabajo que aquí presentamos es analizar la influencia que tiene la incorporación de ayudas textuales y gráficas en los enunciados de los problemas en el acierto que los alumnos alcanzan en su resolución.

Para lograr este objetivo partiremos de un análisis de los modelos que han descrito, desde una perspectiva cognitiva, en qué consiste el proceso de resolución de problemas, esto es, cuáles son los distintos componentes implicados en la resolución de un problema aritmético, puesto que estos modelos son la base para diseñar las ayudas que pueden incorporarse al texto de un problema. Seguiremos con una revisión crítica de los trabajos que han estudiado el impacto que ciertas formas de "reescritura" que los enunciados tienen en la ejecución de los estudiantes, teniendo en cuenta que el término reescritura (del inglés *rewording*) se utilizó en los diferentes estudios sobre el tema para indicar las posibles variaciones lingüísticas que pueden utilizarse para presentar un enunciado aritmético estándar. Esto es, en estos estudios no eran los niños quienes tenían que reescribir los problemas, sino que se les presentaban problemas a resolver, ya reescritos por los investigadores. Y terminaremos la revisión teórica considerando la aplicabilidad que el uso de imágenes puede tener en la comprensión de los enunciados. A partir de esta revisión planteamos un estudio empírico que pretende analizar, superando las limitaciones de los estudios previos, cómo ciertas formas de reescritura de los enunciados y la incorporación de imágenes pueden afectar al acierto con el que los alumnos resuelven problemas aritméticos.

EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La tarea de resolver problemas aritméticos verbales ha sido estudiada de manera minuciosa desde el ámbito de la psicología cognitiva durante muchos años. Siguiendo a Heller y Greeno (1978), todos los problemas aritméticos pueden agruparse en tres categorías: problemas de cambio, en los que se parte de una cantidad inicial, sobre la que se opera un cambio (añadir o quitar) que da lugar a una cantidad final; problemas de combinación, en los que se parte de dos cantidades o partes que se combinan entre sí para dar lugar a una cantidad total; y finalmente, problemas de comparación, en los que se compara una cantidad con otra de manera que de esta comparación surge un tercer conjunto, el conjunto diferencia. Algunos autores añaden un cuarto tipo de problemas, de igualación, que suponen una situación de cambio inserta en otra más general de comparación, de manera que el conjunto diferencia se formula en términos de la cantidad que hay que añadir (o quitar) a la primera para que sea igual a la segunda. En función del conjunto desconocido y de los términos (aditivos o sustractivos) en los que se formule el problema, el número total de tipos de problemas es de 20. La tabla I propone un ejemplo de cada uno de ellos.

Estos 20 tipos de problemas pueden asimismo clasificarse, en función de la coincidencia o no de determinados términos verbales del problema con la operación necesaria para resolverlo, en problemas consistentes e inconsistentes (Lewis y Mayer, 1987). Los problemas consistentes son aquellos en los que la estructura superficial del problema coincide con la operación a realizar (por ejemplo, aparece el término "ganar" y hay que sumar). Los problemas inconsistentes son aquellos en los que la estructura superficial del problema no coincide con la operación

TABLA I
Tipos de problemas según su estructura semántica

	CAMBIO
1	Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
2	Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
3	Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó algunas canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?
4	Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió algunas canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas perdió Juan?
5	Juan tenía algunas canicas. En una partida ganó 3 canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?
6	Juan tenía algunas canicas. En una partida perdió 3 canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas perdió Juan?
	COMPARACIÓN
1	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan más que Pedro?
2	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Pedro menos que Juan?
3	Pedro tiene 5 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
4	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
5	Juan tiene 8 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
6	Pedro tiene 5 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
	COMBINACIÓN
1	Juan tiene 3 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene entre los dos?
2	Juan y Pedro tienen 8 canicas entre los dos. Juan tiene 3 canicas (o Pedro tiene 5 canicas). ¿Cuántas canicas tiene Pedro (o Juan)?
	IGUALACIÓN
1	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas le tienen que dar a Pedro para tener las mismas que Juan?
2	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas le tienen que quitar a Juan para tener las mismas que Pedro?
3	Pedro tiene 5 canicas. Si le dieran 3 canicas más tendría las mismas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
4	Juan tiene 8 canicas. Si le quitaran 3 canicas tendría las mismas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
5	Juan tiene 8 canicas. Si Pedro tuviera 3 canicas más tendría las mismas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
6	Pedro tiene 5 canicas. Si a Juan le quitaran 3 canicas tendría las mimas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

a realizar (por ejemplo, aparece el término "ganar" pero hay que restar). De esta manera, los problemas consistentes son más fáciles de resolver que los inconsistentes, ya que pueden resolverse siguiendo estas pistas textuales sin necesidad de comprender en profundidad el enunciado del problema.

Se han propuesto diferentes modelos para explicar el proceso de resolución de problemas (Briars y Larkin, 1984; Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988; Kintsch y Greeno, 1985; Reusser, 1988; Riley, Greeno y Heller, 1983; Riley y Greeno, 1988). Todos ellos coinciden, de una manera u otra, en que la resolución de problemas supone un elaborado proceso en el que hay que poner en marcha sofisticadas estrategias para comprender el enunciado, esto es, para generar a partir del texto verbal una representación interna abstracta en la que se recogen las distintas proposiciones, sus relaciones semánticas, así como la situación cualitativa descrita en el enunciado. Sin embargo, cada uno de los modelos centra su atención en unos aspectos más que en otros.

Así, para los modelos más clásicos (Briars y Larkin, 1984; Riley *et al*., 1983) el componente fundamental del modelo era el conocimiento matemático, y más concretamente, el conocimiento esquemático de la estructura parte-todo del problema. Este conocimiento esquemático permitiría generar una representación interna de la estructura matemática del problema que organizaría tanto las cantidades del problema como las relaciones matemáticas existentes entre ellas. Esto es, este conocimiento parte-todo permitiría saber que, de los tres conjuntos de que consta un problema de una operación uno actúa como el "todo" mientras que los otros dos actúan como las dos partes dentro de una estructura "parte-parte-todo" (Orrantia, 2003). La aplicación del conocimiento de la estructura parte-todo de los problemas es especialmente necesaria para resolver los problemas más difíciles, esto es, los problemas inconsistentes. Por ejemplo, tomando un problema de cambio 3 (ver Tabla I), la aplicación del conocimiento parte-todo supondría reconocer que el conjunto final es el total y que las partes que lo integran son el conjunto inicial y el de cambio, de modo que para averiguar el conjunto de cambio desconocido es necesario restar la parte conocida (el conjunto inicial) del todo (conjunto final).

Modelos posteriores incluyeron el procesamiento textual del problema en el proceso de resolución. Por ejemplo, el modelo de Kintsch y Greeno (1985) proponía que resolver un problema implica generar dos representaciones diferentes del mismo: un texto base proposicional, y un modelo del problema, a través de la aplicación de esquemas semánticos similares a las superestructuras de los textos, que permitirían procesar el texto del problema organizando la información del texto base.

Por último, los modelos más recientes señalan como elemento fundamental del proceso de resolución la comprensión de la situación cualitativa descrita por el problema. Según los modelos anteriores, la información cualitativa sobre los personajes, sus intenciones o la estructura temporal de la situación descrita por el texto del problema sería información irrelevante. En cambio, esta información es clave para los modelos de Reusser (1988) y Kintsch (1988, 1998; ver también Nathan, Kintsch y Young, 1992). Reusser (1988) propuso el modelo *Situation Problem Solver* (en adelante SPS), que sostiene que para resolver un problema aritmético es imprescindible crear un Modelo Episódico de la Situación (en adelante MES), una representación cualitativa de los personajes y sus intenciones, y de la estructura temporal y causal de la situación en la que está inserto el problema, la cual se generaría entre el texto base y el modelo del problema propuestos por Kintsch y Greeno (1985). Reusser considera imprescindible este paso porque es de esta representación de la que el modelo extrae la estructura matemática (denominada también "modelo del problema" por el autor) que es, finalmente, la representación que permite decidir qué operación aritmética utilizar para resolverlo. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

> Un bodeguero quiere cambiar sus cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que ya tiene entran 158 litros, pero en estas cubas entran 26 litros menos que en las nuevas cubas metálicas que quiere comprar. ¿Cuántos litros de vino entrarán en las nuevas cubas metálicas? (Rosales, Orrantia, Vicente y Chamoso, 2008).

En este problema, el MES representaría el personaje (el bodeguero), sus intenciones (quiere renovar las cubas de vino), la estructura causal (quiere cambiarlas porque tendrá más vino; tendrá más vino porque ha comprado más uvas; las nuevas cubas deberán ser más grandes para que entre más vino) y la estructura temporal (el año pasado tenía menos uvas; este año tiene más). Por otra parte, el modelo del problema estaría formado por tres conjuntos: el conjunto referente (las cubas de metal), el conjunto comparado (las cubas de madera) y la diferencia, así como de las relaciones parte-todo existentes entre ellos (el conjunto comparado y la diferencia son las partes, mientras que el referente es el total).

En la misma línea que el modelo de Reusser (1988), Kintsch (1988, 1998) propuso que para resolver un problema es necesario crear dos representaciones del mismo, un texto base y un modelo del problema, pero de manera radicalmente diferente al modelo de Kintsch y Greeno (1985), ya que en el texto base y en el modelo de la situación no aparece únicamente la información del problema, sino también la información sobre el mundo real que posea el sujeto, de manera que esos conocimientos sobre el mundo contribuyen a que represente (y, por lo tanto, comprenda) los problemas de matemáticas.

En definitiva, los modelos cognitivos de resolución de problemas aritméticos evolucionaron añadiendo el componente situacional al conocimiento matemático como variable que influye en el proceso de resolución. De esta manera, según estos modelos para resolver un problema aritmético es necesario comprender no sólo la estructura matemática del problema, sino también los personajes, sus intenciones, y la estructura temporal y causal de la situación en la que éste se halla inserto.

ESTUDIOS EMPÍRICOS DE REESCRITURA DE PROBLEMAS

Los modelos cognitivos que acabamos de describir proponen que el conocimiento matemático y la comprensión situacional son los dos procesos fundamentales que configuran el proceso de resolución de problemas, más allá de un procesamiento textual básico. Basándose en esta idea se han desarrollado varios estudios empíricos que han utilizado la metodología de reescritura de problemas, la cual se fundamenta en el hecho de que problemas en los que subyace la misma estructura matemática difieren en cuanto a dificultad en función de los términos verbales en los que están expresados y, por lo tanto, de los procesos mentales que promueven las diferentes formulaciones. Estos estudios pueden dividirse en dos grandes grupos: aquellos en los que se reescribieron los problemas resaltando las relaciones matemáticas existentes entre las cantidades (Cummins, 1991; Davis-Dorsey, Ross y Morrison, 1991; De Corte, Verschaffel y De Win, 1985), y los que realizaron modificaciones que, en algún grado, afectaban al MES que suscitaba el problema (Cummins *et al.*, 1988; Davis-Dorsey *et al.*, 1991; Hudson, 1983; Staub y Reusser, 1992; Stern y Lehrndorfer, 1992). La tabla II sintetiza las modificaciones que cada uno de los estudios introdujo en los problemas.

En el primer tipo de trabajos de reescritura las modificaciones fueron relativamente homogéneas a lo largo de los estudios y se definieron claramente las

TABLA II
Ejemplos de reescritura desarrollados por los estudios previos, según el tipo de modificaciones realizadas: dirigidas a aspectos matemáticos o textuales y/o de la situación denotada por el problema

Estudio	Tipo de problema	Ejemplo de reescritura
		REESCRITURA MATEMÁTICA
De Corte *et al*. (1985)	CM5	"*Juan tenía algunas canicas*. Ganó 3 canicas más. Ahora tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Juan al principio?"
	CB2	"Tomás y Ana tenían 9 nueces *entre los dos. Tres de esas nueces* pertenecen a Tomás. *El resto* pertenecen a Ana. ¿Cuántas nueces tiene Ana?"
	CP1	"Hay 6 niños pero solo hay 3 sillas. ¿Cuántos niños *no tendrán* una silla?"
Davis-Dorsey *et al*. (1991)	CM5 CB2 CP1	Idéntico al de De Corte et al. (1985), y personalización de la versión estándar de los problemas con el título de la película favorita del alumno, el de su mascota, comida preferida y nombres de los amigos
Cummins (1991)	CB2	Similar al de De Corte et al., excepto la primera frase: "Hay 9 nueces"
		REESCRITURA SITUACIONAL
Hudson (1983)	CP1	"Aquí hay algunos pájaros y algunos gusanos. *Supón que todos los pájaros compiten y que cada uno intenta conseguir un gusano.* ¿Cuántos pájaros *no tendrán un gusano?"*
Cummins *et al*. (1988)	CB2 CM5 CM6 CP5	*"Ana y Eva juegan juntas al tenis dos veces por semana. Ambas tratan siempre de ganar a la otra. Las dos deciden comprarse raquetas nuevas. Hasta ahora* Ana ha ahorrado 13 euros para su raqueta. Ella ha ahorrado 5 euros más que Eva. ¿Cuántos euros a ahorrado Eva?" (Ejemplo de reescritura para un problema de comparación 5, reescritura similar para los otros tres tipos de problemas).
Davis-Dorsey *et al*. (1991)	CM5 CB2 CP1	*«Mejor amigo»* ha caminado 3/5 de kilómetro para ver *«película favorita»*. Después ha caminado a casa de *«otro amigo»*. *«Mejor amigo»* ha caminado 4/5 de kilómetro en total. ¿Qué distancia ha recorrido *«mejor amigo»* desde el cine hasta la casa de *«otro amigo»?*(Ejemplo de reescritura para un problema de combinación 2, reescritura similar para los otros dos tipos de problemas.)
Stern y Lehrndorfer (1992)	CP1 CP2 CP3 CP4 CP5 CP6	*"Pedro es el hermano mayor de Laura. Como es mayor, su habitación es mayor y sus juguetes son más caros que los de Laura. Pedro además tiene más paga que Laura y tiene una bici nueva mientras que Laura tiene la bici antigua de Pedro. Cuando Pedro hace los deberes, Laura hace unos cuantos garabatos.* Pedro tenía 6 lápices. Laura tenía 4 lápices. ¿Cuántos lápices tenía Laura menos que Pedro?" (Ejemplo de reescritura para un problema de comparación 2, reescritura similar para los otros cinco tipos de problemas).
Staub y Reusser (1992)	CM1 CM2 CM5 CM6	"Pedro tiene 4 manzanas *ahora*. *Hoy* Pedro le dio a Mari 7 manzanas. ¿Cuántas manzanas recogió Pedro ayer?" Ejemplo para un problema de cambio 6. Reescritura similar para las otros tres tipos de problemas

Nota: CM: Cambio; CB: Combinación; CP: comparación. En cursiva se señalan las modificaciones introducidas por cada estudio modificaciones introducidas en los enunciados: señalar explícitamente la existencia de un conjunto inicial en los problemas de cambio con conjunto inicial desconocido; resaltar la estructura parte-todo de los problemas de combinación con los términos "entre los dos" y "X de esos…"; y sustituir la expresión "Cuántos ____ más que ____" por "Cuántos ______ no tendrán ______" en los problemas de comparación. Tal y como se muestra en la tabla III los resultados indicaron claras mejorías en el acierto de los alumnos en los estudios de De Corte *et al*. (1985) y de Cummins (1991) mientras que en el estudio de Davis-Dorsey *et al*. (1991) no se apreciaron mejoras significativas.

En cambio, el segundo tipo de estudios, los centrados en las modificaciones situacionales, fueron muy heterogéneos en cuanto al modo de reescribir los problemas. Esto es, cada estudio sobre reescritura situacional propuso un modo diferente de modificar los enunciados: Hudson (1983) sustituyó la pregunta de los problemas de comparación del modo que acabamos de describir para los estudios de reescritura matemática; Cummins *et al*. (1988) introdujeron información que enriquecía la situación propuesta; Stern y Lehrndorfer (1992) describieron situaciones comparativas antes del enunciado de problemas de comparación; Davis-Dorsey *et al*. (1991) personalizaron los problemas con nombres y situaciones conocidas por el alumno; y Staub y Reusser (1992) modificaron la estructura temporal de los problemas, los roles sintácticos del protagonista, señalaron el conjunto inicial y evitaron el uso de pronombres, todo ello en problemas de

TABLA III

Resultados obtenidos por los estudios previos de reescritura, por tipo de problema y curso

ESTUDIO	CURSO	Cambio					Comparación			Combinación
		1	2	3	5	6	1	3	5	2
		REESCRITURA MATEMÁTICA								
De Corte *et al.* (1985)	1º				.13 Vs .33		.47 Vs .70			.43 Vs .57
	2º				.61 Vs .79		.76 Vs .90			.71 Vs .83
Cummins (1991)	1º									.30 Vs .85
Davis-Dorsey *et al.* (1991)	2º			.20 Vs .26	.34 Vs .29		.24 Vs .25			.20 Vs .23
	5º			.52 Vs .78	.64 Vs .65		.59 Vs .67			.62 Vs .63
		REESCRITURA SITUACIONAL								
Hudson (1983)	Infantil						.17 Vs .83			
	1º						.64 Vs 1			
Davis-Dorsey *et al.* (1991)	2º			.20 Vs .15	.35 Vs .34		.23 Vs .25			.20 Vs .15
	5º			.52 Vs .85	.64 Vs .85		.60 Vs .85			.62 Vs .84
Stern y Lehrndorfer (1992)	1º						.28; .61; .66	.64; .73; .77	.25; .30; .55	
Staub y Reusser (1992)	1º	1 Vs .63	1 Vs .31		.33 Vs .10	.39 Vs .32				
	3º	1 Vs .69	1 Vs .47		.95 Vs .15	.90 Vs .30				

Nota: el primer valor de cada casilla corresponde al índice de acierto de las versiones estándar de los problemas, mientras que el segundo corresponde a la versión reescrita. En el estudio de Stern y Lehrndorfer el primer valor corresponde a la versión estándar, el segundo al problema con contexto incompatible y la tercera al problema con contexto compatible. En el estudio de Staub y Reusser el primer valor es el índice de acierto obtenido por Riley y Greeno (1988) en problemas estándar. El estudio de Cummins *et al*. (1988) no ha sido incluido ya que en su trabajo no aportan datos del índice de acierto por tipo de problema, sino la media agrupada de todo los problemas reescritos (en torno al 55% en problemas de cambio 5 y 6, combinación 2 y comparación 5, en alumnos de 2º y 3er curso de Primaria) cambio. Los resultados obtenidos, que se presentan en la tabla III, mostraron diferencias a favor de las versiones reescritas en los estudios de Hudson (1983), Stern y Lehrndorfer (1992) y Davis-Dorsey *et al*. (1991), pero no en los de Cummins *et al*. (1988).

Por otra parte, el diseño de estos estudios basados en la reescritura situacional contaba con dos limitaciones que hacen que tomemos los resultados obtenidos con ciertas reservas. En primer lugar, en algunos de estos estudios las modificaciones que los autores consideraron estrictamente situacionales en realidad afectaban a la estructura matemática del problema; por ejemplo, al modificar el contexto situacional de los problemas, se modificaba (Hudson, 1983) o explicitaba (Staub y Reusser, 1992; Stern y Lehrndorfer, 1992) parte de la estructura matemática de los problemas[1]. En segundo lugar, las modificaciones introducidas en los estudios de Davis-Dorsey *et al*. (1991) y Staub y Reusser (1992) aludían a procesos ajenos a la estructura intencional, temporal y causal de los problemas y, por lo tanto, ajenos al MES. Además, estudios más recientes que sí han diferenciado con claridad los dos tipos diferentes de reescritura, matemática y situacional (Coquin-Viennot y Moreau, 2007; Moreau y Coquin-Viennot, 2003; Vicente, Orrantia y Verschaffel, 2007, en prensa) han mostrado que incluir en los problemas información situacional relativa a las intenciones y a la estructura causal de la situación quizá sea eficaz para que los alumnos distingan entre información necesaria para *comprender la situación* del problema y la necesaria para *resolverlo* (Moreau y Coquin-Viennot, 2003), o incluso que contextos situacionales incompatibles con la estructura matemática del problema dificultan su comprensión (Coquin-Viennot y Moreau, 2007), pero no han mostrado la eficacia de la reescritura situacional para resolver mejor los problemas (Vicente *et al*., 2007, en prensa).

IMÁGENES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La idea que subyace a los estudios de reescritura es que modificar los enunciados de los problemas para resaltar determinados aspectos matemáticos o situacionales ayuda a los alumnos a comprenderlos y resolverlos mejor. Un segundo tipo de ayuda frecuentemente utilizada para facilitar la comprensión y resolución de los problemas han sido las imágenes. Al analizar de qué manera las imágenes pueden ayudar a los alumnos a comprender y resolver mejor los problemas matemáticos, es necesario considerar la doble dimensión –matemática y situacional– de los mismos.

La influencia de las imágenes en la comprensión matemática de los problemas ha sido estudiada fundamentalmente desde dos perspectivas diferentes. La primera procede del ámbito de la visualización (Arcavi, 2003; Booth y Thomas, 2000; Presmeg, 1985, 1997), y sostiene que las capacidades viso-espaciales de los sujetos influyen de manera determinante en el modo en que acometen la resolución de problemas. De esta manera, los sujetos con altas capacidades viso-espaciales ("visualizadores" en términos de Presmeg, 1985) son capaces de generar imágenes mentales de los problemas y utilizarlas para resolverlos, de modo que preferirán el formato visual al verbal para resolver los problemas. Sin embargo, el tipo de problemas que ha sido estudiado por esta perspectiva (geométricos, representaciones de funciones, propiedades de las fracciones) se alejan de nuestro objeto de estudio.

Una segunda perspectiva, que ha estudiado la influencia de las imágenes en la resolución de problemas aritméticos, procede de los estudios instruccionales que proponen el uso de las imágenes como parte de la dieta instruccional para la mejora del acierto con el que los alumnos resuelven problemas aritméticos. Estos estudios instruccionales (Aguilar, Navarro y Alcalde, 2003; Assink y Verloop, 1977; Bermejo, 2002; Fuson y Willis, 1989; Jitendra, 2002; Jitendra, Hoff y Beck, 1999; Jitendra *et al*., 1998; Lewis, 1989; Lindvall, Tamburino y Robinson, 1982; Orrantia, 2003; Orrantia, Morán y Gracia, 1997; Willis y Fuson, 1988; Xin y Jitendra, 1999; Zwerts, 1984, citado por De Corte y Verschaffel, 1985) han mostrado que enseñar a los alumnos a representar esquemáticamente la estructura matemática de los problemas es un modo muy eficaz de ayudarles a resolver los problemas con más acierto.

En cuanto a la comprensión situacional de los problemas, y siguiendo las ideas de Reusser (1988), podemos considerar que este tipo de comprensión es muy similar a la que requiere cualquier texto, ya que implica la creación de un modelo mental cualitativo de la situación descrita. Y aunque en la resolución de problemas no ha sido considerada esta cuestión, en el ámbito de la comprensión de textos varios autores han estudiado en profundidad cómo las imágenes contribuyen a comprender los textos. En primer lugar, Mayer (2001) ha comprobado que imágenes que cumplen con una serie de principios (coherencia, contigüidad, personalización, modalidad, segmentación y diferencias individuales) mejoran la comprensión de los textos a los que acompañan. En segundo lugar, Schnotz (2002, 2003; Schnotz y Barnett, 1999) propone una explicación para este efecto facilitador: textos e imágenes se basan en sistemas representacionales cualitativamente diferentes, simbólicos y analógicos respectivamente. Teniendo en cuenta que los modelos de la situación son analógicos, y no mediados directamente por la representación proposicional del texto, las imágenes permiten construir más fácilmente una representación mental de los aspectos situacionales del texto.

Los trabajos de Schnotz se basan en buena parte en la Teoría de la Carga Cognitiva (Sweller, 1994), según la cual el procesamiento de cualquier ayuda (ya sea ésta textual o gráfica) implica una carga cognitiva. Esta teoría establece tres tipos de procesamiento: intrínseco (impuesto por la tarea), pertinente (asociado al procesamiento de información que ayuda a resolver la tarea más eficazmente) y extraño (asociado al procesamiento de información irrelevante para la tarea). Para que una ayuda sea eficaz no sólo ha de ser relevante para la tarea, sino que además la carga cognitiva asociada a su procesamiento, unida a la carga intrínseca de la tarea, no debe en ningún caso superar los recursos cognitivos de los alumnos.

Finalmente, Carney y Levin (2002) sostienen que las imágenes pueden cumplir diferentes funciones respecto al texto. Esas funciones son: decoración, cuando el cometido de la imagen es únicamente enriquecer estéticamente el texto al que acompaña; representación, cuando supone una fuente de información alternativa al texto; transformación, cuando modifica una información difícil de mantener en la memoria facilitando su recuerdo, por ejemplo, a través de una mnemotecnia; organización, cuando permite visualizar claramente la estructura subyacente a la información del texto; y por último, interpretación, cuando presenta al sujeto una imagen visual de contenidos que de otra manera sería mucho más difícil de representarse, y que favorece de manera profunda la comprensión.

Sintetizando lo expuesto hasta ahora, los modelos teóricos proponen que el proceso de resolución de problemas tiene una doble naturaleza, matemática (Briars y Larkin, 1984; Kintsch y Greeno, 1985; Riley *et al*., 1983) y situacional (Kintsch, 1988, 1998; Reusser, 1988). Varios estudios de reescritura han dado cuenta de esta doble naturaleza (Cummins, 1991; Cummins *et al*, 1988; Davis-Dorsey *et al*, 1991; De Corte *et al*., 1985; Hudson, 1983; Staub y Reusser, 1992; Stern y Lehrndorfer, 1992). Sin embargo, la implicación del componente situacional, que alude a la necesidad de crear un modelo mental que represente a los personajes, sus intenciones, y la estructura causal y temporal de la situación propuesta por el problema, no ha sido suficientemente avalada por los estudios de reescritura. Además, a pesar de que parece claro que las imágenes pueden contribuir a generar modelos mentales para comprender un texto, esta idea no ha sido aplicada a la comprensión de los aspectos cualitativos de un problema aritmético.

EL PRESENTE TRABAJO

Teniendo en cuenta el marco que acabamos de exponer, en este artículo proponemos un estudio basado en la reescritura que trata de sortear algunas de las limitaciones de los estudios previos para responder dos cuestiones. La primera de ellas es si la información de tipo situacional (y más concretamente, temporal) puede ser útil para que los alumnos sean capaces de resolver los problemas con más facilidad. Ya hemos visto que el modelo SPS de Reusser (1988) establece claramente la necesidad de crear un modelo mental cualitativo de la situación del problema después de generar el texto base y antes de generar el modelo del problema. Sin embargo, los estudios de reescritura que fueron diseñados e implementados para comprobar la validez de este modelo consideraban como reescritura situacional modificaciones que afectaban tanto al MES como al modelo matemático del problema, de manera que la validez de los resultados se veía comprometida. Y los estudios que diferenciaban con claridad ambos tipos de reescritura no han mostrado la eficacia de la inclusión de información situacional para resolver mejor los problemas.

La segunda cuestión que queremos responder con nuestro estudio está relacionada con el uso de imágenes en el contexto de la resolución de un problema aritmético, esto es, si la incorporación de imágenes que resalten tanto la estructura matemática como la situacional contribuyen a una mejor comprensión, y por lo tanto, resolución, de los problemas a través de la elaboración de un modelo matemático y/o situacional más completo. De esta manera, nuestro interés principal no es sólo el de comprobar si los dibujos mejoran el acierto de los alumnos, sino el de comprobar cuáles son los procesos implicados en la comprensión de un problema (matemáticos o situacionales) que se ven beneficiados en mayor medida de la introducción de imágenes.

A la luz del marco teórico expuesto esperamos que la incorporación a los enunciados de ambos tipos de ayudas mejore el acierto de los alumnos, especialmente en los problemas más difíciles. Asimismo, siguiendo la Teoría de la Carga Cognitiva de Sweller, esperamos que estas ayudas afecten de forma diferencial a alumnos de distinto nivel de competencia: si las ayudas de nuestros estudios imponen una carga cognitiva baja es más probable que todos los alumnos se beneficien de ellas, mientras que si la carga asociada a su procesamiento es elevada sólo los alumnos de alta competencia serán capaces de beneficiarse de ellas. Por último, los resultados por nivel y curso nos permitirán concluir si en el aprovechamiento de las ayudas influye el nivel de competencia, el curso o ambos, en función de si se encuentran diferencias significativas en alguna o en ambas variables.

MÉTODO

Participantes

En este estudio han participado 152 alumnos, 70 niños y 82 niñas, de dos centros diferentes de la provincia de Salamanca. De estos alumnos 48 cursaban 3º de Educación Primaria (edad media 8 años y 9 meses), 50 alumnos cursaban 4º (edad media 9 años y 9 meses) y 54 alumnos cursaban 5º (edad media 10 años y 11 meses). Uno de los centros era público, mientras que el otro era concertado.

La muestra fue dividida en tres grupos según su nivel matemático: nivel bajo, nivel medio y nivel alto. Para evaluar la competencia matemática de los alumnos se aplicó el test de aptitud matemática BADYG (Yuste, 1985), en sus formas para 3º, 4º y 5º de Primaria. Esta prueba evalúa la aptitud matemática general de los alumnos, esto es, tanto la ejecución de operaciones como la resolución de problemas. Consta de 32 ítems para 3º y para 4º, y de 25 para 5º, ordenados por nivel de dificultad, y con 5 respuestas alternativas para cada ítem. La prueba es idéntica para 3º y para 4º, y consta de 7 problemas de sumas, 11 de restas, 6 de multiplicación, 3 de división y otros 5 que miden otros conceptos numéricos. La fiabilidad de la prueba es de .91. En cuanto a la prueba para 5º, ésta incluye 10 ítems relacionados con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, 10 ítems son problemas simples a resolver a través de alguna de las 4 operaciones básicas, 2 ítems aluden a problemas geométricos simples y 3 ítems están relacionados con otros conceptos matemáticos. La fiabilidad de esta prueba para 5º es de .88.

Se consideraron alumnos con nivel bajo aquellos cuya puntuación en el test fue inferior al centil 30 (n = 35, 11 de ellos de 3º, 11 de 4º y 13 de 5º); alumnos de nivel medio aquellos con puntuaciones comprendidas entre el centil 30 y el 70 (n = 42, 14 de ellos de 3º, 15 de 4º y 13 de 5º); y de nivel alto los que obtuvieron puntuaciones superiores al centil 70 (n = 75, 23 de ellos de 3º, 24 de 4º y 28 de 5º).

Variables y medidas

En nuestro estudio se incluyeron problemas de dos operaciones con estructura de cambio. Decidimos optar por problemas de dos operaciones, en primer lugar porque implicaban situaciones más complejas, cuya comprensión podría ser más susceptible de verse beneficiada por la inclusión de información situacional, y en segundo lugar, porque conocemos la efectividad de la reescritura matemática de los estudios previos en los problemas más sencillos de una operación, pero no sabemos si será efectiva en problemas más complejos.

Niveles de dificultad de los problemas

Los problemas se dividieron en fáciles o difíciles en función de cuál fuera el conjunto por cuyo cardinal preguntara el problema. Se consideraron problemas fáciles aquellos compuestos por un problema de cambio 1 y por un problema de cambio 4 (ambas situaciones consistentes), mientras que los problemas difíciles estaban compuestos por una situación de cambio 3 y una situación de cambio 6 (ambas inconsistentes), siguiendo la terminología de Heller y Greeno (1978) (ver Tabla I). Los problemas fáciles podían resolverse siguiendo la secuencia temporal descrita por el enunciado del problema (resolviendo primero la primera situación y después la segunda), mientras que en los problemas difíciles era necesario resolver primero la segunda situación problemática para resolver después la primera. La tabla IV presenta un ejemplo de cada uno de los tipos de problemas.

TABLA IV
Ejemplos de problemas fáciles y difíciles

FÁCIL	DIFÍCIL
Pedro tenía 47 metros de cable. Compró 100 metros de cable más. Ha gastado algunos metros y le han sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros de cable ha gastado?	Pedro tenía 47 metros de cable. Compró algunos metros de cable más. Ha gastado 126 metros y le han sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros de cable compró?

Tipos de reescritura

Los problemas del estudio podían estar escritos de tres modos diferentes: estándar, con información matemática, y con información situacional. Los problemas estándar contenían únicamente la información imprescindible para resolver el problema (personajes, objetos, acciones que ejecutaban los primeros sobre los segundos y cantidades), sin añadir información adicional alguna:

> Pedro tenía 47 metros de cable. Compró X metros de cable más. Ha gastado Y metros y le han sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros de cable compró/ha gastado?

Los problemas con información matemática resaltaban el rol matemático del conjunto total compartido por ambas situaciones de cambio:

> Pedro tenía 47 metros de cable. Compró X metros de cable más *y los junto con los que ya tenía. Del total de metros de cable que juntó* ha gastado Y metros y le han sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros de cable compró/ha gastado?

Esta información adicional indica cuál es el conjunto total en ambas situaciones de cambio, y el alumno debe inferir que los otros dos conjuntos implicados en cada una de ellas son las partes que conforman ese todo.

Finalmente, los problemas con información situacional se centraban exclusivamente en la dimensión temporal del MES, a través de marcadores temporales que señalaban explícitamente cada uno de los momentos en que podía dividirse la secuencia de eventos que componían la situación del problema:

> *Hace dos días* Pedro tenía 47 metros de cable. *Ayer* compró X metros de cable más. *Esta mañana ha comenzado una instalación. Al hacer la instalación* ha gastado Y metros y *cuando acabó* le habían sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros de cable compró/ha gastado?

De esta manera, pretendíamos que la estructura temporal de la situación del problema fuera lo suficientemente explícita como para que el alumno pudiera construir un MES que le llevara a un incremento en su acierto respecto a los problemas estándar.

Formato de la tarea: diseño de las imágenes

El formato de la tarea podía ser únicamente textual o incluir un dibujo. Los dibujos que acompañaban a las versiones estándar de los problemas fueron diseñados de manera que no contribuyeran a la comprensión matemática o situacional del problema. Estos dibujos representaban los personajes y los objetos que se mencionaban en el enunciado de los problemas, pero no aportaban estructura alguna al problema, y estaban compuestos por dos imágenes acompañadas por un pequeño "bocadillo" en el que se incluía la información numérica del problema (ver Apéndice).

Los dibujos matemáticos resaltaban gráficamente la estructura parte-todo subyacente al problema de cambio. Como se muestra en el Anexo, la representación matemática constaba de dos dibujos, uno por cada situación de cambio. El primer dibujo representa la unión de las dos partes (conjunto inicial y conjunto de cambio de la primera situación, representadas por dos rectángulos con trazos discontinuos) para formar el todo (conjunto final de la primera situación de cambio e inicial de la segunda, representado por un rectángulo de trazo grueso), mientras que el segundo representa cómo ese todo, previamente juntado, se reparte en las otras dos partes que son el conjunto de cambio y el conjunto final de la segunda situación de cambio (representados de igual modo que las partes de la primera situación de cambio). Optamos por la representación de la estructura parte-todo del problema ya que, como apunta Orrantia (2003), el razonamiento parte-todo es necesario para resolver los problemas de cambio (especialmente los inconsistentes), de manera que este tipo de representación probablemente ayudaría a los alumnos a operar con la estructura matemática del problema y les permitiría resolver los problemas con más facilidad.

Por último, en el caso de los problemas con información situacional, optamos por insertar los dibujos en una secuencia de viñetas que describieran cada uno de los momentos de la situación planteada por el enunciado. Hemos optado por las viñetas porque este formato es bien conocido por los alumnos y porque permite mantener la coherencia sintáctica entre el enunciado del problema y las imágenes. Para la generación de estos dibujos consideramos los 3 principios de Mayer aplicables al diseño de imágenes estáticas: principio de coherencia (eliminando cualquier información no pertinente para la tarea), principio de contigüidad (el texto y los datos numéricos correspondientes a cada parte del enunciado del problema aparecían próximos a la imagen que les representaba) y principio de segmentación. Para seguir este último los dibujos situacionales fueron segmentados en función la estructura temporal del problema por lo que se dividieron en cinco momentos diferentes: al principio de la secuencia, el primer cambio, una acción que marca el paso de la primera situación de cambio a la segunda, el cambio de la segunda situación, y el momento final.

Finalmente, creemos conveniente señalar la función para cuyo cumplimiento fue diseñado cada tipo de dibujo. Siguiendo la clasificación de Carney y Levin (2002) que hemos mencionado en la revisión, los dibujos estándar fueron diseñados para cumplir una función decorativa ya que no aportaban ninguna información relevante al problema, mientras que los dibujos añadidos a las versiones matemáticas y situacionales cumplían una función organizacional, ya que añadían una *estructura,* los primeros organizando la información del problema en un esquema parte-todo, y los segundos organizando temporalmente la secuencia.

En resumen, la presentación de los problemas incluía tres variables: nivel de dificultad (fácil o difícil), tipo de información adicional añadida (estándar, situacional y matemática) y formato de presentación de la tarea (con dibujo-sin dibujo). De esta manera el número de problemas experimentales fue de 12, tal y como se muestra en la tabla V.

TABLA V
Diseño experimental de la prueba de resolución de problemas.

Nivel de dificultad	Información añadida	Formato de la tarea
FÁCIL	Estándar	sólo texto
		texto + dibujo
	Situacional	sólo texto
		texto + dibujo
	Matemático	sólo texto
		texto + dibujo
DIFÍCIL	Estándar	sólo texto
		texto + dibujo
	Situacional	sólo texto
		texto + dibujo
	Matemático	sólo texto
		texto + dibujo

Codificación de las respuestas

Para determinar el nivel de acierto suscitado por cada uno de los tipos de problemas las respuestas de los alumnos se puntuaron como acierto, con una puntuación de 1, cuando el alumno realizaba las operaciones correctas utilizando los datos adecuados del problema, independientemente del resultado de la ejecución del algoritmo. En el caso contrario se consideraba como error, y se puntuaba con un 0. Decidimos realizar esta codificación ya que lo que pretendíamos evaluar no eran tanto las capacidades de cálculo de los alumnos como el grado de comprensión suscitado por cada uno de los tipos y versiones de los problemas.

Procedimiento

El test de resolución de problemas incluía 18 problemas, de los cuales 12 eran experimentales y 6 de relleno. Estos problemas fueron divididos en 3 aplicaciones diferentes, cada una de las cuales incluía 4 problemas experimentales y 2 de relleno. El orden de los problemas fue contrabalanceado, generando 4 versiones diferentes de la prueba, de manera que, en la medida de lo posible, no aparecieran de manera sucesiva dos problemas que preguntaran por la misma cantidad, ni con el mismo tipo de ayuda, ni con el mismo formato de presentación. La aplicación de las tres partes de la tarea de resolución de problemas se desarrolló en tres días diferentes, uno por cada aplicación. El test era de aplicación colectiva y de resolución individual por parte de los alumnos. No había limitación de tiempo para la tarea, de manera que cada alumno disponía del tiempo que necesitara para completarla. Los problemas fueron aplicados en el aula ordinaria y en el horario habitual dedicado al área de Matemáticas.

El test de aptitud numérica se administró tras la tercera aplicación de la tarea de resolución de problemas, una vez concluida ésta, y tras un breve descanso. Considerando que la tarea experimental difería considerablemente de los ítems del test de aptitud numérica y que entre ambas pruebas se realizó un descanso, no esperamos que la realización previa de la tarea experimental influyera en ningún sentido en el resultado obtenido por los alumnos en el test.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos en este estudio se presentan en la tabla VI. Estos resultados se analizaron mediante la aplicación de estadísticos no paramétricos: test Kruskal-Wallis para el análisis general del curso y el nivel de competencia; test Friedman para el análisis de la reescritura como efecto principal; Wilcoxon para muestras independientes para comparaciones entre cursos y entre niveles de competencia, y Wilcoxon para muestras relacionadas en el caso del análisis de los resultados por dificultad, reescritura y formato de la tarea.

Las diferencias significativas que se encontraron en el análisis se presentan en la tabla VII. En esta tabla se incluyen únicamente las diferencias que alcanzaron el nivel de significatividad.

Los resultados obtenidos en el estudio pueden sintetizarse de la siguiente manera. En primer lugar, de acuerdo con nuestras predicciones, tanto la reescritura matemática como la situacional incrementaron el acierto de los alumnos respecto a los problemas estándar, especialmente en los problemas difíciles. En segundo lugar, respecto a las ayudas gráficas, y de acuerdo con nuestras predicciones, los dibujos matemáticos contribuyeron a que los alumnos resolvieran con más acierto los problemas difíciles, pero no los fáciles. En tercer lugar, en contra de nuestras predicciones, los dibujos situacionales no ejercieron ninguna influencia en los resultados. En cuarto lugar, en los problemas fáciles fueron los

TABLA VI

Índices de acierto obtenidos por tipo de reescritura, formato de la tarea y nivel de competencia

	FÁCIL						DIFÍCIL						
	Sin dibujo			Con dibujo			Sin dibujo			Con dibujo			
	Est.	Mate.	Sit.	Est.	Mate.	Sit.	Est.	Mate.	Sit.	Est.	Mate.	Sit.	Media (Nivel)
Bajos	0,69	0,69	0,63	0,83	0,60	0,51	0,14	0,23	0,29	0,20	0,23	0,20	0,44
Medios	0,90	0,95	0,85	0,93	0,90	0,86	0,22	0,31	0,29	0,32	0,41	0,29	0,60
Altos	0,86	0,93	0,95	0,91	0,90	0,88	0,38	0,53	0,52	0,45	0,59	0,43	0,69
Media (reescr.)	0,82	0,86	0,81	0,89	0,80	0,75	0,25	0,36	0,36	0,32	0,41	0,31	
Media (formato)		0,83			0,81			0,32			0,35		

Nota: Est: problemas estándar; Mate.: problemas con información matemática; Sit: problemas con información situacional

TABLA VII

Diferencias entre las variables del estudio que alcanzaron la significación estadística

Efectos Principales		
	Estadístico (χ^2/ z)	p
Rendimento	χ^2 = (2, 152) = 21,18,	< .001
Alto-bajo	z = 4,39	< .001
Alto-medio	z = 2,29	< .03
Bajo-medio	z = 2,98	< .004
Dificultad	z = 9,41	< .001
Reescritura	χ^2 = (2, 152) = 97,30	< .001
Estandar-matemático	z = 7,80	< .001
Reescritura * Formato		
Reescritura (estándar) * formato (con/sin dibujo)	z = 3,05	< .003
Reescritura (situacional- estándar) * formato (sin dibujo)	z = 8,10	< .001
Reescritura (matemático-Estándar) * formato (sin dibujo)	z = 3,79	< .001
Reescritura * Formato * Dificultad		
Reescritura (estándar) * formato (con/sin dibujo) * dificultad (fáciles)	z = 2,35	< .02
Reescritura (estándar) * formato (con/sin dibujo) * dificultad (difíciles)	z = 2,12	< .04
Reescritura (situacional-estándar) * formato (sin dibujo) * dificultad (difíciles)	z = 3,10	< .003
Reescritura (situacional-estándar) * formato (sin dibujo) * dificultad (fáciles)	z = -3,27	< .002
Reescritura (matemático-estándar) * formato (sin dibujo) * dificultad (difíciles)	z = 3,05	< .003
Reescritura (matemático-estándar) * formato (con dibujo) * dificultad (difíciles)	z = 2,55	< .02
Reescritura (matemático- estándar) * formato (con dibujo) * dificultad (fáciles)	z = -2,29	< .03
Reescritura * Formato * Dificultad * Nivel		
Reescritura (situacional- estándar) * formato (sin dibujo) * dificultad (difíciles) * nivel (alto)	z = 2,30	< .03
Reescritura (situacional- estándar) * formato (sin dibujo) * dificultad (fáciles) * nivel (bajo)	z = -3,31	< .002
Reescritura (matemático-estándar) * formato (sin dibujo) * dificultad (difíciles) * nivel (alto)	z = 3,05	< .003
Reescritura (matemático-estándar) * formato (con dibujo) * dificultad (difíciles) * nivel (alto)	z = 2,13	< .04
Reescritura (matemático-estándar) * formato (con dibujo) * dificultad (fáciles) * nivel (bajo)	z = -3,31	< .002

dibujos estándar los que facilitaron más el acierto de los alumnos, especialmente para los de baja competencia. Por último, mientras que se encontraron diferencias en el acierto entre los alumnos con distinto nivel de competencia, no se encontraron diferencias por nivel escolar.

DISCUSIÓN

Los modelos cognitivos que explican la resolución de problemas y los estudios de reescritura previos (Cummins, 1991; Cummins *et al*., 1988; Davis-Dorsey *et* *al.*, 1991; De Corte *et al.*, 1985; Hudson, 1983; Staub y Reusser, 1992; Stern y Lehrndorfer, 1992), proponen que la tarea de resolver un problema aritmético de estructura aditiva tiene una doble naturaleza, matemática y situacional. Siguiendo estos trabajos previos en nuestro estudio proponemos que el acierto de los alumnos mejoraría, especialmente en los problemas difíciles, incluyendo en los problemas, por un lado, ayudas textuales matemáticas y situacionales claramente delimitadas, y por otro, representaciones gráficas que ilustraran la dimensión matemática y la situacional de los problemas de acuerdo con los modelos teóricos y los estudios instruccionales previos. Además, al incluir el nivel matemático y el curso como variables independientes, y teniendo en cuenta la Teoría de la Carga Cognitiva (Sweller, 1994) podremos constatar la carga de procesamiento asociada a cada una de estas ayudas, en función de qué alumnos se benefician de ellas (si la carga es baja se beneficiarán fundamentalmente los de baja competencia, si es alta los alumnos más competentes serían los más beneficiados), así como la influencia de la experiencia escolar en la compresión de las diferentes ayudas.

Los resultados generales de nuestro estudio suponen un apoyo empírico a los modelos cognitivos más recientes (Kintsch, 1988, 1998; Reusser, 1988), que abogan por la necesidad de comprender tanto la estructura matemática del problema como la situación cualitativa propuesta por el mismo, y están en la línea de la mayoría de los estudios de reescritura previos, que encontraron diferencias significativas en problemas reescritos tanto matemática como situacionalmente. De acuerdo con nuestra primera predicción, tanto las versiones matemáticas como las situacionales de los problemas sin dibujo fueron resueltas de manera significativamente más efectiva que las versiones estándar de los problemas sin dibujo. Esto quiere decir que tanto la información matemática añadida, que explicitaba la estructura parte-todo de los problemas, como la situacional, que favorecía la creación de un MES a través de una marcada secuencia temporal, ayudaron a los alumnos a resolver mejor los problemas difíciles, que fueron aquellos en los que los alumnos necesitaron ayudas para mejorar significativamente su acierto. Además, aunque algunos de los estudios previos no encontraron diferencias significativas a favor de las versiones reescritas situacionalmente, nuestros resultados son perfectamente compatibles con los de esos estudios. Tal y como sostienen Vicente y Orrantia (2007), no todos los modelos cualitativos de la situación que el sujeto puede generar sobre el problema facilitan el acceso a su estructura matemática del problema, de manera que en los estudios sobre reescritura situacional que no obtuvieron mejoras en el acierto de los alumnos la información añadida probablemente no fuera pertinente para la creación del MES del problema. Esto es, la información introducida en los problemas reescritos del estudio de Cummins *et al.* (1988) y buena parte de la de los problemas de los estudios de Vicente *et al.* (2007, en prensa) era irrelevante para la construcción de un MES del que los alumnos pudieran inferir la estructura matemática del problema, mientras que en nuestro estudio la definición nítida de la estructura temporal de los problemas de cambio puede considerarse pertinente para que los alumnos extraigan de ella la estructura matemática del problema (al igual que en el estudio de Stern y Lehrndorfer (1992), en el que la estructura causal era pertinente para resolver los problemas de comparación).

En segundo lugar, la introducción del nivel de competencia y del curso como variables independientes nos permitió constatar, por un lado, la carga cognitiva impuesta por la tarea y por otro, la influencia de la experiencia escolar en el aprovechamiento de las ayudas. Los resultados apuntan a que tanto las ayudas textuales matemáticas como las situacionales como los dibujos matemáticos implican una elevada carga de procesamiento, ya que son los alumnos con alta competencia los que en mayor medida se benefician de estas ayudas, mientras que el procesamiento cognitivo implicado en el aprovechamiento los dibujos estándar es mínimo, ya que sólo los alumnos de baja competencia se beneficiaron de esta ayuda. Los resultados relativos a la alta carga cognitiva impuesta por las ayudas textuales matemáticas y situacionales están en la línea de los resultados obtenidos por Davis-Dorsey *et al*. (1991) respecto a las versiones matemáticas. Este resultado probablemente se deba en parte a que el nivel de dificultad de los problemas difíciles fue elevado, de manera que los alumnos de competencia baja no se beneficiaron de las ayudas en la misma medida que los de alta competencia al no disponer de los recursos cognitivos necesarios para procesar eficazmente esa información. Es decir, sólo los alumnos de alta competencia conservaban recursos cognitivos suficientes para procesar de manera eficaz las ayudas textuales, tanto matemáticas como situacionales, y pudieron beneficiarse de manera significativa de la introducción de las ayudas.

Respecto a la ausencia de diferencias significativas por curso, este resultado implica que la experiencia escolar, a diferencia del nivel de competencia, no parece influir en el aprovechamiento de las ayudas.

En cuanto a la utilización de los dibujos, los resultados replicaron los obtenidos en las ayudas textuales sólo en el caso de los dibujos matemáticos. De esta manera, los dibujos ayudaron a los alumnos a generar un modelo matemático del problema en las versiones matemáticas de los problemas difíciles, esto es, las versiones matemáticas con dibujo de los problemas difíciles resultaron más fáciles a los alumnos que las versiones estándar. Además, al igual que en el caso de las ayudas textuales matemáticas sólo los alumnos de alta competencia se beneficiaron de la inclusión de dibujos matemáticos, lo cual demuestra, de nuevo, que su procesamiento impone una carga cognitiva elevada. Por otra parte los resultados obtenidos en los problemas situacionales con dibujo sugieren que los dibujos situacionales introducidos en este estudio no favorecieron la creación del MES del problema y, como consecuencia, no incrementaron el índice de acierto de los alumnos. Los motivos por los cuales estos dibujos no incrementaron el acierto de los alumnos pueden ser dos. El primero de ellos es que el formato elegido para representar la estructura temporal de los dibujos (viñetas) o bien el modo de representar los personajes y las acciones que llevaban a cabo no fue el adecuado. Es posible que al tratar de representar los personajes, las acciones o la propia secuencia temporal añadiéramos elementos irrelevantes a la tarea. Sin embargo, el diseño de estos dibujos se realizó siguiendo los principios de Mayer para las imágenes estáticas, lo cual nos lleva a pensar en un segundo motivo por el cual los dibujos situacionales no fueron efectivos, esto es, que sólo los dibujos que representan la estructura matemática de los problemas mejoran el acierto de los alumnos en resolución de problemas. Sin embargo, este aspecto necesita de estudios adicionales para poder ser esclarecido.

Por último, creemos conveniente analizar la efectividad de los dibujos que acompañaban los problemas estándar ya que, a pesar de haber sido diseñados para no aportar ayuda alguna al proceso de resolución, sí ayudaron a los alumnos menos competentes a resolver mejor los problemas. Los dibujos añadidos a las versiones estándar de los problemas no proporcionaban información alguna sobre la *estructura* matemática o temporal del problema. Sin embargo, estos dibujos sí incluían una ayuda que, sin haber sido diseñada como tal, los alumnos habrían aprovechado para resolver el problema con más acierto aún sin comprender en profundidad el problema. Como señalamos en el método, en los todos los dibujos incluimos pequeños ''bocadillos" en los que se señalaban los datos numéricos del problema. Mientras que en los problemas temporales y matemáticos dentro de cada "bocadillo" se presentaba un solo dato del problema, en los dibujos estándar se presentaban dos "bocadillos", de manera que en uno de ellos aparecían dos datos, mientras que en el otro aparecía sólo uno. Para resolver los problemas a partir de estos dibujos, el alumno únicamente tenía que sumar los dos números del mismo bocadillo y restarle al resultado el número del otro. De esta manera, estos dibujos proporcionaban a los alumnos una valiosa pista de cómo seleccionar los datos para solucionar el problema, pero esta ayuda es superficial, similar a lo que Orrantia *et al*. (1997) denominaban "ayudas textuales", que ayudan a organizar los datos del problema en función de lo que se conoce y de la pregunta del problema, pero que no conlleva una comprensión profunda de la estructura parte-todo del mismo, ni mucho menos de la situación propuesta. De hecho, es lógico que fueran los alumnos menos competentes los que se sirvieran de esta ayuda ya que, como hemos visto, el procesamiento de las ayudas textuales y gráficas es cognitivamente costoso ya que requiere comprender el problema, mientras que esta ayuda gráfica es superficial y su procesamiento supone un coste cognitivo mínimo.

En definitiva, los resultados sugieren dos ideas generales. La primera de ellas es que para resolver problemas difíciles reescribir los enunciados de los problemas de cambio de dos operaciones explicitando la estructura matemática del problema o su estructura situacional (al menos la estructura temporal para los problemas de cambio) es útil para que los alumnos los comprendan y resuelvan mejor, tal y como señalaron la mayoría de estudios de reescritura previos. Además, hemos comprobado que la reescritura es útil para mejorar el acierto de los alumnos en la resolución de problemas no sólo en problemas de una sola operación, como mostraron los estudios previos, sino también para problemas más complejos, de dos operaciones.

La segunda idea general es que la utilización de representaciones esquemáticas de la estructura matemática beneficia especialmente a los alumnos de competencia alta, mientras que representar gráficamente la dimensión situacional del problema no parece tener influencia en el índice de acierto de los problemas, bien porque nuestros dibujos no se ajustaron a la tarea de resolver el problema, bien porque esta ayuda no es eficaz.

Finalmente, creemos conveniente señalar que estos resultados deben ser tomados con cautela ya que nuestro estudio cuenta con una limitación fundamental. A la hora de considerar la implicación del componente situacional en la resolución de problemas debemos considerar que la inclusión de ayudas textuales o gráficas en el enunciado de los problemas es una medida indirecta de esa implicación. Consideramos necesario diseñar e implementar estudios posteriores que recojan medidas directas de la necesidad de comprender la situación del problema y, por lo tanto, de que al menos una parte de las dificultades que el niño experimenta al resolver los problemas procede de la dificultad para comprender la situación.

Notas

[1] En el caso de Hudson, al cambiar la pregunta se introducía una acción que el sujeto podía seguir –igualar las dos cantidades– para resolver el problema, esto es, transformando el problema de comparación en un problema de igualación. En el estudio de Stern y Lehrndorfer se reforzaba la idea de que la situación era una comparación de cantidades.

Referencias

AGUILAR, M., NAVARRO, J. I. & ALCALDE, C. (2003). El uso de esquemas figurativos para ayudar a resolver problemas aritméticos. *Cultura y Educación, 15* (4), 385-397.

ARCAVI, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215–241.

ASSINK, E. M. H. & VERLOOP, N. (1977). Het aanleren van deel-geheel relaties in het aanvankelijk rekenonderwijs. *Pedagogische Studien, 54*, 130–142.

BERMEJO, V. (2002). *Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid: Editorial Complutense.
BOOTH, R. & THOMAS, M. (2000). Visualization in math learning: arithmetic problem solving and student difficulty. *Journal of Math Behaviour, 18* (2), 169-190.
BRIARS, D. J. & LARKIN, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245-296.
CARNEY, R. N. & LEVIN, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review, 14* (1), 5-26.
COQUIN-VIENNOT, D. & MOREAU, S. (2007). Arithmetic problems at School: When there is an apparent contradiction between the situation model and the problem model. *British Journal of Educational Psychology, 77*, 69-80
CUMMINS, D. D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word-problems. *Cognition and Instruction, 8*, 261-289.
CUMMINS, D. D., KINTSCH, W., REUSSER, K. & WEIMER, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20*, 405-438.
DAVIS-DORSEY, J., ROSS, S. M. & MORRISON, G. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word-problems. *Journal of Educational Psychology, 83*, 61-68.
DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (1985). Working with simple word problems in early mathematics instruction. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1. Individual contributions* (pp. 304-309). Utrech: Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Center, Subfacultad de Matemáticas, Universidad de Utrech.
DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. & DE WIN, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77*, 460-470.
FUSON, K. & WILLIS, G. B. (1989). Second grader´s use of schematic drawing in solving addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 81* (4), 514-520.
HELLER, J. I. & GREENO, J. G. (1978). *Semantic processing in arithmetic word problem solving*. Comunicación presentada en la Midwestern Psychological Association Convention, Chicago.
HUDSON, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54*, 84-90.
JITENDRA, A. K. (2002). Teaching students math problem solving through graphic representations. *Teaching Exceptional Children, 34* (4), 34–38.
JITENDRA, A. K., HOFF, K. & BECK, M. (1999). Teaching middle school students with learning disabilities to solve multistep word problems using a schema-based approach. *Remedial and Special Education, 20* (1), 50-64.
JITENDRA, A. K., GRIFFIN, C., MCGOEY, K., GARDILL, C., BHAT, P. & RILEY, T. (1998). Effects of mathematical word problem solving by students at risk or with mild disabilities. *Journal of Educational Research, 91* (6), 345–356.
KINTSCH, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: a Construction-Integration model. *Psychological Review, 95* (2), 163-182.
KINTSCH, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition.* Cambridge: Cambridge University Press.
KINTSCH, W. & GREENO, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problem. *Psychological Review, 92*, 109-129.
LEWIS, A. B. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 81* (4), 521-531.
LEWIS, A. B. & MAYER, R. E. (1987). Students's miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79* (4), 363-371.
LINDVALL, C. M., TAMBURINO, J. L. & ROBINSON, L. (1982). *An exploratory study of the effect of teaching primary grade children to use specific problem solving strategies in solving simple arithmetic story problems*. Comunicación presentada en el Annual Meeting of the American Educational Research Association, Nueva York.
MAYER, R. E. (2001). *Multimedia Learning.* Nueva York: Cambridge University Press.
MOREAU, S. & COQUIN-VIENNOT, D. (2003). Comprehension of arithmetic word problems by fifth-grade pupils: representations and selection of information. *British Journal of Educational Psychology, 73*, 109-121.
NATHAN, M. J., KINTSCH, W. & YOUNG, E. (1992). A theory of algebra-word problem comprehension and its implications for the design of Learning Environments. *Cognition and Instruction, 9* (4), 329-389.
ORRANTIA, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y Aprendizaje, 26* (4), 451-468.
ORRANTIA, J. MORÁN, M. C. & GRACIA, A. D. (1997). La resolución de problemas de matemáticas: Dificultades e instrucción. *Siglo Cero, 28*, 25-38.
PRESMEG, N. C. (1985). *The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation.* Tesis Doctoral no publicada. University of Cambridge, U.K.
PRESMEG, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. En L. English (Ed.), M*athematical reasoning. Analogies, metaphors and images* (pp. 299–312). Mahwah, NJ: Erlbaum.
REUSSER, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science, 17*, 309–338.
RILEY, N. S., GREENO, J. & HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in aritmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). Nueva York: Academic Press.
RILEY, M. S. & GREENO, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities of solving problems. *Cognition & Instruction, 5* (1), 49-101.
ROSALES, J., ORRANTIA, J., VICENTE, S. & CHAMOSO, J. M. (2008). Studying Mathematics Problem-Solving Classrooms. A comparison between the discourse of in-service teachers and student teachers. *European Journal of Psychology of Education, 32* (3), 275-294.
SCHNOTZ, W. (2002). Towards an Integrated View of Learning from Text and Visual Displays. *Educational Psychology Review, 14* (2), 101-120.
SCHNOTZ, W. (2003). External and Internal Representations in Multimedia Learning. *Learning and Instruction, 13* (2), 117-23.
SCHNOTZ, W. & BARNETT, M. (1999). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction, 13*, 141-156.
STAUB, F. C. & REUSSER, K. (1992). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. En C. A. Weaver III, S. Mannes & C. R. Fletcher (Eds.), *Discourse Comprehension: Essays in honour of Walter Kintsch* (pp. 285-305). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

STERN, E. & LEHRNDORFER, A. (1992). The role of situational context in solving word-problems. *Cognitive Development*, *7*, 259-268.
SWELLER, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty and instructional design. *Learning and Instruction*, *4*, 295-312.
VICENTE, S. & ORRANTIA, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura & Educación, 19* (1), 61-88
VICENTE, S., ORRANTIA, J. & VERSCHAFFEL, L. (2007). Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving. *British Journal of Educational Psychology, 77* (4), 829-840.
VICENTE, S., ORRANTIA, J. & VERSCHAFFEL, L. (en prensa). Influence of situational and mathematical information on situationally difficult word problems. *Studia Psychologica.*
WILLIS, G. B. & FUSON, K. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80* (2), 192-201.
XIN, Y. P. & JITENDRA, A. K. (1999). The effects of instruction in solving mathematical word problems for students with learning problems: A meta-analysis. *Journal of Special Education*, *32* (4), 207–225.
YUSTE, C. (1985). *BADYG (gráficos C, D y E)*. Madrid: Ciencias de la Educación Preescolar y Especial.
ZWERTS, R. (1984). *Probleemrepresentatie in een experimenteel leerprogramma va eenyoudige optel- en aftrekvraagstukken in een eerste leejaar*. Hasselt: Limburgse School voor Pegagogische Weteschappen. Hoger Instituut voor Opvoedkunde.