
INTRODUCCIÓN

En la transmisión del conocimiento matemático, ha constituido un hito importante la aparición del libro escolar como elemento cultural reflejo de la manipulación social que selecciona unos contenidos frente a otros, que impone una determinada forma de estructurarlos y que propone a la siguiente generación cierto tipo de problemas con unas herramientas semióticas y no otras. Hay que destacar, además que el papel de los libros de texto es doble e irreducible uno a otro: (Otte, 1996): por un lado, poseen una función comunicativa y de interpretación, que les dotará de un carácter subjetivo tanto desde el punto de vista del autor como del lector, y por otro, se presenta como una estructura materializada del conocimiento dotándoles de carácter eminentemente objetivo. Esta doble faceta de los libros de texto, hace que su estudio aporte gran información tanto acerca de las concepciones en relación con el contenido matemático que desarrollan, como acerca del proceso educativo con el que están relacionados.

La implementación y utilización del libro de texto en el aula de matemáticas, se ha producido de forma generalizada desde los inicios de la educación obligatoria hasta nuestros días ejerciendo para ello diferentes papeles: como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como colección de ejercicios y problemas a resolver,... Esto ha originado una práctica escolar determinada por su uso, así como una organización de la enseñanza que se mantiene en la actualidad salvo casos aislados.

La implementación de las nuevas tecnologías en la enseñanza debe producir una reconsideración de la estructura de la enseñanza más tradicional: desde la organización del centro escolar, la gestión y control del aula, la formación del profesorado, la formulación de los objetivos de aprendizaje, la selección de las estrategias de enseñanza y de los instrumentos de evaluación, la influencia de estos nuevos medios en el aprendizaje, la variación de creencias y actitudes tanto del profesor como del alumno,...

Los cambios más significativos que se están produciendo en el paso del libro de texto a la incorporación de otros recursos didácticos relacionados con las nuevas tecnologías son:

- En relación con los **diseñadores**: se pasa de los matemáticos de los últimos siglos que constituían una élite intelectual y que desarrollaron una determinada notación en función de propósitos conceptuales y comunicativos, a una clase de individuos más amplia (ingenieros, informáticos,...) que desarrollan nuevos lenguajes con los que expresar el contenido matemático con funciones de tipo práctico y didáctico esencialmente.
- En relación con el **medio**: se pasa de un *medio estático* en el que los objetos notacionales no pueden cambiar en función del tiempo, que se compensa mediante la utilización de diagramas organizados espacialmente, hacia *medios dinámicos*, en los que el tiempo es la dimensión esencial a partir de la que se obtiene la información y que por lo tanto será un medio ideal para presentar fenómenos en los que está involucrada la noción de variación, como es el caso de los pertenecientes al Análisis Matemático.
- En relación con la **interacción** entre el medio físico utilizado y el sistema de notación: se pasa de un *medio inerte* en el que los símbolos permanecen fijos, manteniendo indefinidamente su presencia física, buscando siempre la economía espacial, incorporando una sintaxis implícita y sin producir ninguna reacción en el usuario, hasta un *medio interactivo*, que reacciona mostrando elementos representacionales no introducidos directamente, sino como resultado de cálculos numéricos, transformaciones dentro de un sistema de notación, traslaciones entre diferentes sistemas, ayudas, mensajes, búsqueda de información, comprobación de resultados, memorización,...
- En relación con los **destinatarios**, pasando de la servidumbre a las necesidades de una élite intelectual reducida hasta considerar que prácticamente toda la población debe adquirir potencia matemática significativa.

La influencia de estos cambios, se están sintiendo en prácticamente todas las ramas de las matemáticas, aunque en diferente grado y sentido en cada una de ellas, siendo una de las más sobresalientes el Análisis Matemático, tanto por su carácter variacional, que hemos indicado anteriormente, como por la cantidad de software y aplicaciones que se han desarrollado en torno a ella. Por ello, hemos optado por centrar nuestra atención en esta parte de las matemáticas, y más particularmente, en los conceptos relativos a los puntos críticos, entre otras razones, por la ausencia de investigaciones realizadas en este campo desde el punto de vista didáctico.

La doble posibilidad de utilización en el aula del libro escolar o/y de las nuevas tecnologías, ha hecho que nos preguntemos acerca de las características de los dos tipos de medios especificados, las aportaciones que puede ofrecer cada uno de ellos, las diferencias existentes, ... para que en el proceso educativo se pueda optar en el momento preciso por el medio más idóneo.

Hemos tenido, por lo tanto, que desarrollar una metodología de análisis tanto de libros de texto como de utilización de los nuevos medios para caracterizar cada uno de ellos. El que sean los aspectos representacionales aquéllos que aparecen indiscutiblemente en ambos medios y que son los que les conceden mayor potencia, ha hecho que enmarquemos esta investigación en torno a estos aspectos. Hay que hacer notar, además, la gran cantidad de investigaciones (Duval, 1999; Hiebert y Carpenter, 1992; Janvier, 1986; Kaput, 1987 y 1992; y otros) que como veremos están relacionadas con la representación en la enseñanza de las matemáticas, y la importancia que le conceden, por lo que hemos de considerar el papel indiscutible que tienen en relación con la adquisición del conocimiento matemático.

Parecía aconsejable, asimismo, buscar los orígenes tanto de la estructura, como de los conceptos y notaciones incluidos en la enseñanza del Análisis Matemático en los primeros libros de texto utilizados. Libros que actualmente consideramos históricos y que han sido las fuentes a partir de las cuales se han escrito y organizado los libros utilizados con posterioridad en la enseñanza secundaria. Este tipo de investigaciones iniciadas por Dhombres (1985) y Schubring (1987) en relación con la enseñanza de las matemáticas y con el objetivo de delinear los cambios producidos dentro de la comunidad de matemáticos, se ha ampliado posteriormente (Filloy y Rojano, 1984), considerando no sólo este tipo de libros, sino también el análisis de “textos clásicos de la historia de la matemática para analizar la historia de las ideas matemáticas, con el fin de elaborar secuencias didácticas que tengan en cuenta lo determinado teóricamente en tal análisis, y poner a prueba tales secuencias didácticas en los actuales sistemas educativos para después volver al análisis de la historia de las ideas con los resultados prácticos obtenidos con los estudiantes intentando leer de nuevos los textos en busca de posibles equivalentes de los resultados didácticos” (Puig, 1994). Creemos que ambas cosas tienen su importancia, por lo cual estudiando las diferentes aportaciones que han hecho los matemáticos a lo largo de la historia, pensamos que podemos establecer la historia de los cambios y por lo tanto delinearemos la evolución que se ha producido. Asimismo, este estudio aportará o recuperará aspectos “antiguos” de la enseñanza del Análisis Matemático que podrán volver a ser válidos actualmente para diseñar secuencias de enseñanza con los medios disponibles en el presente.

Pretendemos, por lo tanto, mediante esta investigación, estudiar, analizar y caracterizar la evolución que han sufrido los sistemas simbólicos de representación a lo largo de la enseñanza del Análisis Matemático, y más concretamente en relación con los denominados puntos críticos.

El desarrollo de esta investigación se presenta en esta memoria diseñada en siete capítulos, siendo su estructura la siguiente:

- Capítulo 1: Marco teórico.
- Capítulo 2: Diseño de la investigación.
- Capítulo 3: Análisis de los libros de texto históricos.
- Capítulo 4: Análisis de libros de texto desde la introducción del Análisis Matemático en la educación secundaria en España.

- Capítulo 5: La introducción de las nuevas tecnologías en la enseñanza del Análisis Matemático.
- Capítulo 6: Aportaciones y conclusiones finales.

Damos a continuación una visión general de cada uno de ellos, presentando para ello, sus aspectos más identificativos.

El primer capítulo, en el que se establece el marco teórico, proporciona el marco conceptual en el que se desarrolla esta investigación. Para ello se ha dividido en seis secciones que abarcan los diferentes ámbitos con los que se relaciona esta investigación, concretando y acotando en cada uno de ellos aquellos aspectos que resultan relevantes y necesarios para su desarrollo. La primera está centrada en la teoría cognitiva que desarrollan Tall y Dreyfus denominada “pensamiento matemático avanzado”, que trata de los procesos cognitivos involucrados en el paso del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático más avanzado. Esta teoría cognitiva nos resultará sumamente útil, ya que describe los procesos mentales que necesitan desarrollar los alumnos para adquirir los conceptos matemáticos incluidos en el Análisis Matemático. Uno de los términos esenciales dentro de esta teoría, lo constituye la noción de “representación”, a la que dedicamos dos secciones, una en la que desarrollamos este concepto de forma amplia en el sentido de relacionarlo con cualquier ámbito del conocimiento humano, y otra en la que particularizamos para el caso de las matemáticas. En otra sección, consideramos lo que se ha dado en llamar “transposición didáctica” que va a dotar de la importancia que merece el estudio de los libros de texto, enmarcando su posición dentro del sistema educativo. Finalmente dedicamos una sección al establecimiento del concepto de punto crítico, para lo cual no sólo se establece su definición matemática, sino que se indica su importancia desde el punto de los puntos de vista histórico, matemático y didáctico.

En el segundo capítulo se pretende dar una visión global del trabajo realizado. Al ser una investigación de tipo histórico, la estructura que posee viene determinada por su carácter, por ello partiendo de los objetivos que nos impusimos al inicio de la investigación, se establecen las hipótesis y se determina la metodología usada, especificando las etapas en las que se ha llevado a cabo el trabajo, el proceso de selección de las fuentes y el método de análisis utilizado. En este tipo de investigaciones, resulta esencial la selección de fuentes documentales ya que al ser una investigación histórica, este tipo de documentación es esencial para poder llevarla a cabo. El trabajo que va desde la localización de las fuentes, pasando por los criterios de selección, hasta establecer los documentos utilizados finalmente en la investigación, resulta una de las fases más importantes.

A partir del tercer capítulo, comienza ya el análisis de los libros escogidos y de los posibles desarrollos del contenido, utilizando las diferentes posibilidades que nos ofrece el software existente en el mercado, así como las calculadoras gráficas. Se dedica este capítulo, al estudio de los libros de texto históricos, analizándose en cada una de las secciones en que se ha dividido, uno de los siete libros seleccionados. Además de llevar a cabo un estudio de tipo histórico-epistemológico en relación con cada uno de los autores y de los libros, se analizan los tipos de representaciones utilizadas en el desarrollo del

contenido, de esta forma, cada uno de los libros queda caracterizado por una conceptualización diferente del contenido, un cierto desarrollo y determinadas representaciones simbólicas utilizadas.

En el cuarto capítulo, se abarca la enseñanza del Análisis Matemático desde que fue implantada su enseñanza en España en 1934 hasta nuestro días, para lo cual se ha dividido este lapso de tiempo en diferentes periodos que se corresponden a grandes rasgos con los diferentes planes educativos implantados desde entonces. En cada uno de dichos periodos, se han analizado varios libros respecto de los diferentes tipos de representación que han utilizado, para poder realizar finalmente en función de éstos, un perfil que caracterice a cada uno de los libros.

El capítulo quinto está dedicado a la introducción de las nuevas tecnologías en la enseñanza, de forma que se plantean las diferentes alternativas de la inclusión de estos medios para la enseñanza de los puntos críticos y se caracteriza cada una de ellas tanto respecto del tipo de representaciones utilizadas, como de los procesos que requiere su uso. Incluso se aporta situaciones novedosas relacionadas con la recuperación de los textos clásicos, de algunas de las funciones y representaciones utilizadas en ellos, desde una metodología más acorde con los tiempos actuales.

Finalmente, el último capítulo, esta dedicado a las conclusiones generales, a las aportaciones docentes y a tareas futuras de investigación.

Después de los capítulos, se incluyen las referencias bibliográficas, haciendo notar, que hemos optado por escribir sólo la que ha sido citada en la memoria dado que es la que, en su mayoría, ha influido directamente en el trabajo, lo cual no representa en su totalidad todos los artículos, libros y capítulos que han sido leídos y trabajados.

En cuanto a los Anexos, se presentan:

- Reproducciones de los apartados de los libros de texto históricos que han sido estudiados.
- Los planes de estudio de la enseñanza secundaria en España correspondientes a los diferentes periodos considerados.

