ISSN: 0214-3402

LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS EN ESCOLARES DE PRIMARIA. UN ESTUDIO EVOLUTIVO

The invention of school primary problems. An evolution study

Jorge A. CÁZARES SOLÓRZANO
Estudiante del Programa de Doctorado. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Becario del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACYT)

Encarnación CASTRO MARTÍNEZ
Profesora Investigadora del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

Luis RICO ROMERO
Profesor Investigador del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

RESUMEN: Presentamos la investigación realizada para estudiar la actuación aritmética de 14 niños de entre 6 y 13 años, cuando resuelven tareas de invención de problemas a partir de una situación cotidiana de compraventa. A través de los enunciados propuestos por los estudiantes pretendemos descubrir la coherencia global del enunciado, la utilización de datos numéricos, las relaciones que establece entre ellos, la identificación del tipo de problema inventado y los procedimientos propuestos para resolverlo. El análisis de cada componente ha permitido profundizar en la comprensión de la competencia aritmética general en la generación de problemas. A través de los resultados obtenidos describimos una secuencia global sobre el desarrollo y la evolución de dicha competencia, explicada mediante la definición de una serie de niveles de desempeño organizados y presentados de acuerdo con el orden de adquisición.

Palabras clave: invención de problemas, escuela primaria, competencia aritmética, desarrollo cognitivo.

ABSTRACT: The aim of this paper is to introduce a research work carried out in order to study the arithmetic competence of a group of fourteen children from 6 to 13 years old when they pose mathematical problems associated to a supermarket situation. Written answers are examined to determine patterns in the global coherence of statements, the use of numerical data, the relationships considered, the kind of problem and the strategies proposed to solve them. Analysing these components we will better understand the arithmetic competence of the student in the problem posing activity. From the known results on we describe a global sequence of their cognitive development in this competence, explained by means of a several behaviour levels frame.

Key words: problem posing, primary school, arithmetic competence, cognitive development.

1. Introducción

Los estudios relacionados en los que intervienen problemas matemáticos están entre las principales fuentes del conocimiento científico. Estudiar un problema en todas sus dimensiones puede ir más allá de los límites de la vida humana (Halmos, 1980). Esta afirmación general es aplicable a la Educación Matemática donde la investigación sobre resolución de problemas ha sido uno de los ejes principales desde su fundación como disciplina científica (Castro, Rico y Gil, 1992).

Dentro de la línea de estudio que centra su objetivo en los problemas matemáticos una parte importante la constituye la indagación sobre los procesos seguidos por los individuos para la resolución de problemas. En muchos casos los autores han centrado su interés en delimitar qué es un problema matemático. Entre las distintas respuestas a este interrogante encontramos unas dadas desde la Educación Matemática y otras que se aportan desde la Psicología. Para este trabajo destacamos algunas de ellas.

En lo que respecta a la Educación Matemática consideramos la descripción que hacen Bouvier y George y las delimitaciones hechas por autores españoles como Castro por un lado y Puig y Cerdán, por otro, sobre lo que se entiende por problema matemático escolar.

Bouvier y George (1979) indican que un problema matemático es una «cuestión de la que se conocen algunos datos, los cuales hay que manejar convenientemente para encontrar otro que se busca». Castro (1995, p. 12) considera que un problema incluye: a) una proposición: enunciado oral o escrito; b) unos datos conocidos; c) una intención: movilizar una o más personas para que averigüen; d) una meta: obtener un resultado y e) un proceso: el modo de actuación para alcanzar el resultado. Para Puig y Cerdán (1989, p. 17), un problema aritmético consiste en un enunciado, cuya información viene dada casi siempre en cantidades definidas numéricamente, la condición del enunciado expresa relaciones cuantitativas entre los datos y la pregunta se refiere al descubrimiento de una o varias cantidades o relaciones entre ellos.

Desde la Psicología se considera que resolver un problema es «una especie de reto mental que, a diferencia de las tareas en sentido estricto, se caracteriza por tres componentes: 1) Estado inicial no deseado. 2) Estado final deseado. 3) Barrera que impide la transformación de 1) en 2)» (Dorsch, 1985).

Nosotros estamos interesados en los problemas matemáticos escolares, desde una perspectiva particular y vamos a considerar para nuestra investigación la definición de problema siguiente como síntesis de las anteriores: *enunciado oral o escrito en el que intervienen datos numéricos los cuales el resolutor ha de relacionar mediante operaciones aritméticas para obtener el resultado pedido.* Consideramos que un problema aritmético está siempre unido a un resolutor que actuará sobre los datos para dar una respuesta. La perspectiva especial desde la que vamos a trabajar con los problemas matemáticos escolares es desde la invención. El interés de la investigación centrada en este tópico se puede encontrar en las recomendaciones que contienen numerosos currículos/currícula escolares actuales. A partir de los años ochenta la resolución de problemas recibió un gran énfasis en los documentos y currículos oficiales de distintos países, argumentándose que su aprendizaje debería ser fundamental en la enseñanza de la matemática escolar; como ejemplos podemos citar los documentos de NCTM (1980, 1989, 1998) y NRC (1989). A partir de este hecho la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) es investigada bajo diferentes perspectivas (Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Hiebert, 1982; Nesher, 1982; Carpenter y Moser, 1982; Fuson, 1983; De Corte y Verschaffel, 1987; Baroody, 1988; Vergnaud, 1991; Castro, 1991; Figueras y Nemirovsky, 1991).

En lo referente a investigación sobre resolución de problemas, Castro (2000) distingue ocho campos en dicha investigación, uno de los cuales lo constituye la invención de problemas, en esta línea de trabajo se encuentran las investigaciones realizadas por Kochen, Badre y Badre (1976); Walter y Brown (1977, 1980); O'Brien y Casey (1983a); Moses, Bjork y Goldenberg (1990); Schwartz (1991); Winograd (1991); Malara y Gherpelli (1994); Silver (1994) y English (1997, 1998). Nuestro trabajo se centra en este campo y estudiamos los problemas aritméticos de enunciado verbal inventados por estudiantes que cursan Educación Primaria.

Silver (1994) indica que se puede considerar una amplia gama de propósitos para la que se ha estudiado la invención de problemas, así: como un elemento importante de la actividad matemática general, para apreciar la actividad cognitiva de los sujetos que aprenden (Brueckner, 1932; Krutetskii, 1976; Hart, 1981; Ellerton, 1986; Greer y McCaan, 1991; Simon, 1993; Silver y Burkett, 1993); como estrategia para mejorar los procedimientos de resolución de problemas (Cannor y Hawkings, 1936; Murray, Olivier y Human, 1998); para el diseño curricular (Van den Brink, 1987; Streefland, 1987, 1991; Healy, 1993); y para mejorar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas (Winograd, 1991; Moses, Bjork y Goldenberg, 1990; Brown y Walter, 1993; Pérez, 1985; Healy, 1993).

2. Generación de problemas

Los términos más utilizados, en la literatura específica, para identificar la generación de problemas matemáticos son la formulación y la reformulación. El primer término se usa para describir la actividad del sujeto ante un hecho cualquiera susceptible de ser matematizado (Pollak, 1987). Por el contrario el término reformulación hace referencia y explica las acciones que un resolutor realiza para resolver un problema planteado, que pueden dar origen a problemas diferentes al inicial (Silver, 1994). En el primer caso, un individuo se encuentra con una situación para la cual no existe una formulación matemática (Kochen, Badre y Badre, 1976; Pollak, 1987), con una operación aritmética ya resuelta (O'Brien y Casey, 1983a), o simplemente con la exploración de conjeturas ante una nueva situación (Schwartz, 1991). Por ejemplo, al hacer una compra es necesario tener en cuenta el coste de los productos, el dinero disponible, el porcentaje de descuento, entre otros aspectos. Estas circunstancias nos obligan a plantear y resolver uno o varios problemas, cuya formulación original no ha sido propuesta matemáticamente. En el segundo caso, el sujeto tiene que resolver un problema ya propuesto para lo que utilizará distintos procedimientos o estrategias que faciliten su resolución: dividir el problema en problemas más sencillos, modificar los atributos (Walter y Brown, 1977), variar las condiciones del problema (Moses, Bjork y Goldenberg, 1990), plantear y explorar conjeturas (Schwartz, 1991), etcétera. Estas acciones permiten la reformulación del problema original. Vemos que la invención de un problema puede ocurrir durante el proceso llevado a cabo para su resolución o cuando el individuo se enfrenta a una situación cualquiera que no cuenta con una formulación matemática. La segunda opción es la que hemos considerado para nuestro estudio.

Nuestro interés por profundizar en el estudio sobre la invención de problemas en niños de Educación Primaria se fundamenta principalmente en dos ideas: una relacionada con la intención de aportar información relevante para la realización de los diseños curriculares en este nivel educativo. La otra, basada en el hecho de que actualmente no existen investigaciones que hayan trabajado esta temática desde la perspectiva de su desarrollo y evolución. Tratamos de encontrar evidencias que permitan caracterizar la existencia de un desarrollo cognitivo y evolutivo en el aprendizaje de la invención de problemas aritméticos por parte de los escolares de Primaria, proporcionar más información sobre su competencia en la generación y resolución de problemas nuevos y estar en condiciones de describir el desarrollo global de dicha competencia. Más concretamente, el objeto de nuestra investigación es: estudiar los procesos de invención de problemas aritméticos verbales de estudiantes mexicanos de 6 a 13 años pertenecientes a la Educación Primaria, con el propósito de caracterizar el conocimiento numérico subyacente y explicar su contenido en relación con su desarrollo. Este planteamiento nos llevó a definir los objetivos generales y parciales de la investigación.

Objetivos generales

- Caracterizar la actuación aritmética de los escolares en la invención de problemas, en términos de la coherencia global del enunciado, la utilización de los datos, la estructura semántica, la coherencia del procedimiento de resolución y los argumentos utilizados para validarlo.
- Establecer niveles de desarrollo evolutivo en la competencia aritmética de los estudiantes en la invención de problemas aritméticos.

Objetivos parciales

- Describir y explicar el comportamiento aritmético de los escolares al resolver tareas de invención de problemas.
- Caracterizar los diferentes tipos de problemas que los estudiantes inventan.
- Identificar significados de números, cantidades y relaciones entre ellos.
- Describir las dificultades observadas en la ejecución de los procedimientos.
- Definir categorías de análisis para valorar y establecer niveles de actuación aritmética de los estudiantes en la invención de problemas.

Y abordar el tema desde tres aspectos fundamentales:

- La formulación de problemas a partir de una situación de compraventa.
- El desarrollo de los procedimientos para resolver los problemas.
- La valoración del procedimiento empleado para resolver el problema.

3. Marco teórico

Partimos de la hipótesis de que la descripción y explicación del conocimiento aritmético utilizado por los estudiantes al resolver la tarea de inventar problemas, aplicar procedimientos de resolución y argumentar a favor de éstos, permitirá una caracterización global del desarrollo evolutivo de su competencia aritmética en la formulación de problemas. Por otra parte asumimos la perspectiva cognitiva en investigación (Carpenter, 1980), desde la cual pretendemos explicar el comportamiento inteligente, es decir, el desarrollo de la competencia aritmética demostrada por los estudiantes en su actuación en la formulación de problemas originales. Las investigaciones sobre desarrollo estudian los sistemas cognitivos, los mecanismos psicológicos y las estructuras de conocimiento que permiten al individuo un determinado nivel de competencia de un determinado conocimiento (Wolhwill, 1973; citado en Carpenter, 1980). También hemos adoptado la perspectiva constructivista sobre la construcción del conocimiento (Gómez-Granell y Coll, 1993). El análisis del desarrollo cognitivo debe incorporar la distinción entre actuación y competencia. Flavell y Wolhwill (citados en Carpenter, 1980) definen la competencia como la estructura lógico matemática del dominio, una representación abstracta idealizada de lo que se conoce, y la actuación como el proceso psicológico mediante el cual se alcanzan las estructuras de competencia y se aplican en tareas específicas, ésta debe contar con las variaciones del estímulo, la información disponible y las limitaciones de la memoria.

La revisión de la literatura sobre la invención de problemas sitúa este estudio bajo dos perspectivas claramente diferenciadas: los estudios de corte cognitivo y los dedicados a la indagación curricular.

Estudios cognitivos

Algunos investigadores han estudiado la invención de problemas con el propósito de elaborar un marco teórico cognitivo que permita una mejor comprensión de la actividad intelectual del individuo en la generación y resolución de problemas nuevos (Silver, 1994). En 1976, Kochen, Badre y Badre, crearon un modelo de tres etapas para las situaciones que requieren una formulación matemática: 1) la persona se enfrenta a una dificultad, 2) transforma el enunciado en una formulación matemática y 3) divide el problema en subproblemas para su resolución. Según Moses, Bjork y Goldenberg (1990), una de las estrategias para generar problemas a partir de uno dado consiste en preguntarse acerca de la información que nos proporciona, la desconocida y las restricciones implícitas en la respuesta. Moses, Bjork y Goldenberg también sugieren cuatro principios para la formulación de problemas: 1) centrar la atención en la información conocida, desconocida y las restricciones de un problema y considerar qué pasaría si fueran cambiadas, 2) un ambiente matemático confortable, 3) animar a los estudiantes a plantear nuevos problemas y 4) propiciar la idea de dominio de un determinado contenido.

Por su parte, O'Brien y Casey (1983b) postulan la existencia de dos tipos de conocimiento matemático necesarios en la invención de problemas multiplicativos. Un conocimiento estático, que tienen los niños acerca de los hechos numéricos y un conocimiento lógico matemático en el cual se memorizan hechos numéricos y procedimientos para resolver problemas. En esa misma línea Hiebert y Lefevre (1986) establecen la necesidad de un conocimiento conceptual y uno procedimental. El primero es caracterizado como una red de información que se constituye en una unidad de conocimiento conceptual. El segundo se compone del lenguaje formal o los sistemas de representación simbólica de las matemáticas y de reglas para resolver tareas matemáticas. La generación de problemas se apoya en los conocimientos conceptual y procedimental, ya que permite utilizar conceptos matemáticos aprendidos para formular un enunciado y seleccionar los procedimientos para resolverlo.

English (1997) postula la necesidad de un marco de conocimiento que permita la comprensión de las actividades cognitivas que tienen lugar al inventar problemas, para ello sugiere: a) comprender qué es un problema, b) reconocer los diferentes tipos de problemas y los procedimientos para resolverlos y c) percibir e interpretar las situaciones matemáticas de diversas maneras.

Estudios curriculares

La invención de problemas en el contexto escolar ha sido explorada desde varios puntos de vista, indicamos algunos de ellos. Walter y Brown (1977) y Walter (1980) utilizan problemas ya formulados y sus modificaciones como una estrategia para la generación de nuevos problemas y para la construcción del conocimiento matemático. O'Brien y Casey (1983a) abordan la invención de problemas a partir de una operación aritmética. Moses, Bjork y Goldenberg (1990) describen la atmósfera escolar ideal para la generación de problemas originales. Winograd (1991) estudia el comportamiento cognitivo de los estudiantes durante el proceso de inventar problemas. Malara y Gherpelli (1994) indagan sobre el aprendizaje cooperativo en el contexto de la formulación de problemas nuevos. English (1997, 1998) experimenta con la aplicación en la escuela de programas en los cuales el interés principal es la comprensión y el desarrollo de las habilidades relacionadas con la invención de problemas por parte de los niños. El estudio de situaciones consideradas como reales por los estudiantes, el planteamiento de problemas a partir de ellas y el uso de la aritmética en ese contexto (Cobo, Fernández y Rico, 1986; García, Sevilla y Valenzuela, 1986), el papel que juegan los verbos en los enunciados de problemas y cómo estas palabras pueden indicar el uso de una determinada operación en su proceso de resolución (González, Gutiérrez, Rico y Tortosa, 1986), la investigación sobre los procedimientos y resultados de los problemas y su coherencia con el enunciado y las habilidades demostradas por el resolutor para hacer una estimación adecuada de la respuesta (Segovia, 1986), la invención y resolución de problemas para caracterizar los enunciados generados por los niños, sus estrategias de resolución, su comprensión y comunicación matemática (Tortosa, 1998).

4. Metodología

La investigación se puede enmarcar en los denominados estudios de desarrollo cognitivo (Carpenter, 1980). Debido al tratamiento y presentación de los datos se considera una investigación descriptiva y cualitativa. La explicación de la evolución de la competencia aritmética de los escolares en relación con la edad, la maduración y otros factores de aprendizaje indican que se trata de una investigación evolutiva (Baltes, Reese y Nesselroade, 1981). Es transversal, ya que han sido evaluados simultáneamente 14 estudiantes de diferentes edades y grado escolar.

Diseño

Se seleccionaron 14 estudiantes de 6 a 13 años de Educación Preescolar y Primaria, dos de cada grado escolar, una niña y un niño. A los cuales se les aplicó un cuestionario en el que se les propuso inventar un enunciado de problema a partir de situaciones de compraventa y buscar procedimientos para su resolución.

El cuestionario utilizado consta de 4 folios y 11 tarjetas con recortes de publicidad de lápices, refrescos, leche, cuadernos, mochilas, duraznos, uvas, plátanos, colores y el dibujo de una cancha de basquet-ball. Cada ilustración contiene datos numéricos sobre la calidad, precio, descuento y medida de los objetos en cuestión.

Para la aplicación del cuestionario se pidió que los estudiantes eligieran sólo 4 de las 11 tarjetas utilizadas, a partir de las cuales formularon un problema, aplicaron uno o varios procedimientos de resolución y respondieron varias preguntas sobre la calidad del enunciado y la validez y comprobación de sus respuestas. Cuando los niños no sabían leer y escribir se les ayudó leyendo las instrucciones y preguntas y escribiendo lo expresado por ellos. No se hicieron comentarios acerca de sus producciones para no interferir en sus respuestas y garantizar la fidelidad de la información obtenida en la ejecución de la tarea. Una vez aplicados los cuestionarios se transcribieron los resultados de los 14 alumnos, obteniendo 56 producciones distintas que fueron evaluadas mediante la aplicación de las categorías de análisis para describir su desempeño o actuación aritmética en cada problema inventado y por cada uno de los participantes. Organizamos los resultados en grupos de respuesta semejante de tal manera que nos permitiera caracterizar y explicar el desarrollo evolutivo de la competencia aritmética global, vinculada con la invención de problemas, a través de una serie de niveles progresivos de desempeño.

Realizamos un primer análisis global, en el cual consideramos la estructura semántica de los enunciados formulados (Carpenter y Moser, 1982; De Corte y Verschaffel, 1987; Nesher, 1982; Vergnaud, 1991; Castro, 1998), la interpretación de los números como cantidades, el significado asignado a los números, el tipo de números utilizados, el dominio de las operaciones y las dificultades observadas en su realización.

Para el análisis fundamental de nuestro estudio, es decir, la valoración de los problemas formulados por los estudiantes, se definieron cinco categorías de análisis junto con una escala de evaluación que consta de cinco valores distintos (1 a 5), que van desde los niveles menos elaborados hasta cuestiones que definen un mayor dominio en la tarea. Las categorías en cuestión son las siguientes: 1) la coherencia global del enunciado del problema, 2) la estructura semántica del problema, 3) la utilización de los datos numéricos que aparecen en la imagen, 4) la coherencia de las operaciones con la estructura del problema y 5) la justificación sobre la validez del procedimiento de resolución.

5. Resultados

Estudio global de la actuación aritmética de los estudiantes

En nuestro estudio sostenemos que la comprensión de los estudiantes al inventar un problema puede ser identificada por su estructura semántica, los distintos significados asignados a los números, las relaciones posibles entre ellos y los procedimientos desarrollados para resolverlos. El dominio de estas habilidades conforma una base de conocimiento que permite abordar la tarea con mayor o menor éxito y ser una fuente para la construcción de nuevos conocimientos.

a) Estructura semántica de los enunciados propuestos

La tabla 1 muestra los resultados obtenidos de este primer análisis, en ella se puede apreciar los diferentes tipos de enunciados encontrados y la frecuencia de su aparición. En general los niños de Preescolar y primero de Primaria tienen dificultades para formular un enunciado de problema, no así el resto de los sujetos estudiados.

En los problemas de estructura aditiva aparecen los cuatro tipos de relaciones semánticas: Igualación, Comparación, Combinación y Cambio. Los problemas de Cambio aparecen con mayor frecuencia, es posible que ello se deba a las situaciones reales que viven los niños donde la compraventa implica casi siempre este tipo de relaciones. No se pudieron observar las veinte combinaciones posibles señaladas por Carpenter y Moser (1982), las cuales dependen del lugar en que se ubica el dato desconocido, si la transformación es de aumento o disminución en el caso de los problemas de Cambio, Comparación e Igualación y si se pregunta por una de las partes o el todo en el caso de los de Combinación.

Con respecto a los problemas de estructura multiplicativa se pueden apreciar las dos categorías principales: Isomorfismo de Medida y Producto de Medida (Vergnaud, 1991). Pero no se observaron las diferentes combinaciones posibles de acuerdo con el lugar que ocupa el dato desconocido, el tipo de relación que se establece entre los datos y el conocimiento o no del valor unitario.

También se obtuvieron problemas encadenados que combinaron las estructuras aditiva y multiplicativa y cuya resolución requiere del establecimiento de más de una relación entre los datos (Castro, 1998).

Los problemas yuxtapuestos en los que su resultado final no depende de la resolución de cada una de sus partes aparecieron únicamente tres veces.

Tipo de problema			Frecuencia
Enunciados sin estructura reconocida			17
Enunciados de estructura aditiva			17
	Cambio disminución	9	
	Combinación	6	
	Comparación aumento	1	
	Igualación aumento	1	
Enunciados de estructura multiplicativa			11
	Isomorfismo de medida	8	
	Producto de medida	3	
Enunciados de dos etapas			8
	Isomorfismo de medida y Cambio disminución	3	
	Combinación y Producto de medida	2	
	Isomorfismo de medida e Isomorfismo de medida	3	

Enunciados yuxtapuestos			3
	Combinación e Isomorfismo de medida	1	
	Combinación y Cambio Disminución	1	
	Cambio disminución e Isomorfismo de medida	1	
Totales			56

Tabla 1. Estructura semántica de los problemas

A partir de la gran variedad de enunciados encontrados podemos suponer que los estudiantes de Educación Primaria cuentan con el conocimiento aritmético escolar necesario para formular sus propios problemas matemáticos. Queda por indagar acerca de las variedades que surgen en la combinación de los criterios ya mencionados.

b) Interpretación de los números como cantidades

En la tabla 2 se describen las diferentes interpretaciones hechas por los alumnos al operar con las cantidades para enunciar y resolver el problema inventado. En general puede decirse que a partir de la interpretación número tres las estrategias aritméticas desarrolladas por los estudiantes sirven para resolver la tarea de investigación con éxito.

N.º	Interpretación	Frecuencia
1	No proporciona suficiente información	4
2	Las cantidades son una colección de objetos que pueden ser iguales o diferentes. Recurre al dibujo para representarlas	4
3	Las cantidades se consideran como el coste o la longitud de los objetos sin indicar el valor unitario. Pregunta por el valor de una cantidad pero no menciona el número de unidades ni el valor de la unidad	8
4	Las cantidades significan el coste o la longuitud de los objetos, pero a diferencia del anterior conoce una medida. Pregunta por el valor o cantidad a partir de un objeto o unidad de los cuales conoce su medida	20

5	Se consideran varias cantidades con sus medidas. Pregunta por un valor o cantidad a partir de dos o más objetos o medidas	18
6	Cambia las cantidades sobre el coste y medida de los objetos a números enteros para facilitar la formulación del problema y su resolución	14

Tabla 2. Interpretación de los números como cantidades

c) Significados del número

La mayoría de las veces el significado otorgado ha estado en función del contexto en el cual se solicitó la formulación del enunciado del problema. Esto significa que de las 56 producciones obtenidas, 49 fueron realizadas considerando adecuadamente los datos proporcionados en el cuestionario y sólo en 7 ocasiones se identificaron dificultades para comprender los números que ahí aparecían.

N.°	Significados	Frecuencia
1	Una colección de objetos sin cuantificar. Los alumnos dibujan los objetos que aparecen en la imagen que se les presenta	4
2	Se centran en los atributos de los objetos, mencionan sus características pero no utilizan números	3
3	Identifican los números como el precio o la medida de la longitud	49

Tabla 3. Significados atribuidos al número

d) Tipo de números empleados

En general, se observa una tendencia a cambiar los números decimales por números enteros, suponemos que ello se debe a que los estudiantes se sienten más seguros si trabajan con números naturales, pero esto es sólo una conjetura que podrá ser confirmada en un estudio posterior.

N.°	Tipo de números	Frecuencia
1	No utilizan números	7
2	Copian los números del precio y la longitud tal y como aparecen en la imagen	9

3	Utilizan números enteros tanto en la formulación del enunciado como para el procedimiento de resolución	21*
4	Utilizan números decimales para formular el enunciado y enteros en el procedimiento de resolución	4
5	Utilizan números decimales tanto para formular el problema como para resolverlo	14
6	Formula el problema con un número fraccionario y resuelve con decimales	1

* Esta frecuencia incluye todos los problemas formulados en el contexto de la cancha de *basquet-ball.*

Tabla 4. Tipo de números empleados

e) Dominio de las operaciones

Durante el proceso de resolución de los problemas planteados los estudiantes mostraron una amplia gama de procedimientos de cálculo en los cuales utilizaron las cuatro operaciones básicas, algunas de ellas apoyadas por la utilización de distintas estrategias de conteo.

N.º	Dominio de las operaciones	Frecuencia
1	Ninguna	16
2	Adición con números enteros	18
3	Sustracción con números enteros	10
4	Multiplicación con números enteros	10
5	División con números enteros	2
6	Adición con números enteros y decimales	2
7	Sustracción con números enteros y decimales	2
8	Multiplicación con números enteros y decimales	11
9	División con números enteros y decimales	1

Tabla 5. Dominio de las operaciones

f) Dificultades observadas

Las dificultades observadas no representaron un obstáculo para la actuación aritmética de los estudiantes en la formulación de sus propios problemas, ellos transforman todos los números en números enteros sobre todo en la ejecución del procedimiento de resolución, como decíamos anteriormente, pero parece no molestarles el empleo de números con decimales en los enunciados que generan.

N.º	Dificultades en la realización de las operaciones	Frecuencia
1	Para operar con los números considerados en el enunciado del problema elimina los decimales e intenta resolver únicamente con los números enteros	7
2	Para operar con números decimales considera el punto como una separación cualquiera entre dos números enteros y por lo tanto los suma independientemente como si se tratara de dos números distintos	2
3	Tiene dificultades para colocar las cifras alineadas de acuerdo con el punto decimal o de derecha a izquierda si se trata de números enteros	1
4	Escribe el algoritmo convencional, pero en el momento de resolver la operación lo hace mediante una estrategia de conteo, sobre todo en números pequeños de una o dos cifras	3
5	Se equivoca al colocar las cifras	3

Tabla 6. Dificultades en la realización de las operaciones

6. Análisis

Niveles de actuación de cada estudiante en la invención de problemas

Uno de los principales objetivos de esta investigación es analizar la actuación de los estudiantes de Educación Preescolar y Primaria en la formulación de enunciados de problemas aritméticos verbales. Con este propósito definimos cinco categorías de análisis y una escala de evaluación. La aplicación de las categorías y los distintos valores asignados muestran la actuación de los alumnos. Estas actuaciones ponen de manifiesto diversos niveles de desempeño en la competencia de invención de problemas. El estudio comparado permite mostrar evidencias del desarrollo de la competencia aritmética necesaria para la invención de problemas.

La aplicación de la escala de evaluación ha permitido constatar que algunas categorías tenían más peso que otras. Es decir, definen mejor el nivel de actuación aritmética de los estudiantes en las tareas de invención de problemas y nos permiten una mejor descripción del desarrollo evolutivo de su competencia aritmética en ese contexto. La categoría denominada estructura semántica del problema resulta ser la de mayor importancia para caracterizar los distintos niveles de desarrollo identificados en las valoraciones de las actuaciones de los alumnos. Es importante profundizar en este aspecto y perfeccionar las categorías de análisis para caracterizar mejor el desarrollo de la competencia aritmética en la invención de problemas.

Niveles de desarrollo

Uno de los propósitos en la realización de estudios desde una perspectiva cognitiva es describir el desarrollo de los conceptos a lo largo de un periodo determinado. En nuestro estudio lo hemos hecho a través de la caracterización de las diferentes actuaciones numéricas de los estudiantes en las tareas de invención de problemas. Los resultados obtenidos de este análisis permiten una clasificación en grupos de respuestas semejantes para explicar el desarrollo a través de patrones de respuesta que pueden ser diferenciados cualitativamente de acuerdo con un orden progresivo (Wolhwill, 1973; citado en Carpenter, 1980).

Lo hemos organizado en cuatro niveles principales. En cada uno de ellos se identifican también algunos subniveles, que se consideran necesarios para una mejor descripción del desarrollo de la competencia aritmética en la invención de problemas.

NIVEL I. AUSENCIA DEL ENUNCIADO

NIVEL Ia. Representación gráfica de los objetos que se muestran

Los niños de este nivel no escriben, ni enuncian verbalmente un enunciado de problema, en su lugar, reproducen las imágenes de los objetos que aparecen en la ilustración y no escriben números; por tanto, no proponen ninguna operación, ni realizan cálculos y no justifican su desempeño.

NIVEL Ib. Cuestionamientos sobre los objetos y escritura de números

Los niños que se pueden ubicar en este nivel enuncian verbalmente o por escrito una pregunta relacionada con las características de los objetos. Es decir, plantean cuestiones sobre la cualidad y/o el precio de los objetos que aparecen en la imagen, algunas veces los dibujan y siempre copian los números para dar respuesta a su pregunta. Para ellos, la interrogante constituye un problema, aunque no sea un problema aritmético. En consecuencia, no generan operaciones, ni realizan cálculos puesto que no los necesitan para resolver el cuestionamiento que proponen. Algunos de estos niños suelen justificar la validez de sus respuestas argumentando que pensaron.

> Oscar (6.0). Elige la tarjeta donde aparece el anuncio de la leche y le dicta al entrevistador: *«¿Cuánto cuesta la leche?»*. Enseguida copia el precio de la tarjeta: *$5.50.*

NIVEL II. ENUNCIADO SIMPLE DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA

NIVEL IIa. Enunciado incipiente

Enunciado de un problema de estructura aditiva sin cerrarlo con una pregunta. En estos casos los niños son capaces de construir un problema en el cual se requiere de una adición o una sustracción para resolverlo. Aunque no plantean una pregunta de manera explícita, los datos hacen suponer su existencia; esto se puede constatar por el hecho de idear un procedimiento para resolver el problema. En este proceso consideran los datos que aparecen en la imagen y durante la solución desarrollada pueden tener dificultades al realizar el algoritmo. Suelen justificar la validez de sus respuestas argumentando que hicieron la operación y/o contaron. Un ejemplo de este caso es el siguiente:

> Luis Adrián (7.3). Elige la tarjeta donde aparecen las mochilas y escribe: *«mi mama compro dos mochilas y costo 59.90»*. Su respuesta incluye una adición de 59 + 59 = 118.

NIVEL IIb. Enunciado completo

Enunciado de un problema simple de estructura aditiva. Los niños de este nivel son capaces de inventar un problema, en el cual proporcionan los datos y plantean una pregunta. Generalmente, trabajan con números naturales, aunque la imagen contenga cantidades con decimales, esto se puede apreciar fácilmente en su proceso de resolución. Algunos niños no obtienen un resultado correcto debido a errores cometidos en la realización del algoritmo, aunque este último sea el adecuado. Suelen justificar su respuesta argumentando que han revisado la operación y/o contado. Los problemas de medida de una dimensión (longitud) son tratados en términos aditivos.

> Anabel (8.8). Elige la tarjeta que contiene los lápices de colores y escribe: *«llo compre una caja de colores chica y me costo 7 y le di 20 cuanto me sobra?»*. Su respuesta es la sustracción: 20 - 7 = 13.

NIVEL IIc. Enunciado de dos o más etapas

Enunciado de un problema en el que se requieren dos o más operaciones para su resolución. Los niños que se ubican en este nivel son capaces de inventar un problema en el cual proporcionan los datos y plantean una o dos preguntas; lo importante aquí no es la cantidad de preguntas, sino la necesidad de realizar dos o más operaciones subordinadas para encontrar la respuesta. En estos casos la resolución final está condicionada o depende de un dato intermedio que se obtiene realizando una o varias operaciones, las cuales pueden ser adiciones o sustracciones. Los algoritmos propuestos para su resolución son coherentes con el enunciado del problema. Suelen argumentar la validez de su respuesta aludiendo a la revisión de las operaciones.

> Paulina C. (8.10). Elige la tarjeta que contiene los plátanos y escribe: *«la mamá de pepé va a comprar platanos y lleva 40 pesos ¿si los platanos cuestan*

10 pesos el quilo y ay 3 X siento de descuento cuanto cuestan los platanos? y cuanto le sobro a la mamá de pepé». Para resolverlo utiliza dos sustracciones: 10 - 3 = 7 y 40 - 7 = 33.

NIVEL III. ENUNCIADO DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

NIVEL IIIa. Enunciados de una etapa

Los niños de este nivel son capaces de inventar y proponer un procedimiento para resolver un problema simple de estructura aditiva. Además, pueden plantear un problema de estructura multiplicativa. El enunciado del problema implica el uso de una multiplicación o una división para su resolución. Por tanto, la operación que sugieren es coherente. Sin embargo, algunas veces los resultados que obtienen no son adecuados, debido a dificultades en el conteo en ciertas partes del algoritmo, aunque esté bien planteado. Estos niños trabajan, generalmente, sólo con números naturales, aunque en el texto consideren los decimales. Argumentan que llevan a cabo la operación o la revisaron para cerciorarse de que está bien hecha. Los problemas con cantidades continuas se plantean en función del tamaño del perímetro.

Jorge Arturo (9.1). Elige la tarjeta con la ilustración de la leche y escribe: *«Si mi mamá compro 15 litros de leche y cuesta 10 pesos ¿cuánto fue?».* Para resolverlo realiza una suma iterada, pero después recurre a una multiplicación de los dos números para obtener el resultado.

NIVEL IIIb. Enunciado de dos o más etapas

Los niños de este nivel pueden generar y resolver problemas simples de estructura aditiva y multiplicativa. Además, son capaces de combinar ambas estructuras en un solo problema. El enunciado del problema conlleva la necesidad de realizar varias operaciones para su resolución: adición, sustracción, multiplicación y división. El resultado de una primera operación constituye un dato del problema, por lo que se hace necesaria su realización para la resolución. Los algoritmos propuestos son coherentes con la estructura del problema. Para argumentar la validez de sus respuestas suelen revisar las operaciones y/o recurrir a su comprobación aritmética. Incluyen los decimales tanto en el texto como en la resolución. En el problema con cantidades continuas se pregunta por el perímetro, el cual se trata en términos multiplicativos.

Luz María (9.11). Elige la tarjeta donde aparecen las mochilas y escribe lo siguiente: *«Si cada mochila cuesta $59.90, compro 4 mochilas si llevo $450 pesos ¿me faltaría o me sobraría? Si te sobra pon cuanto te sobraría».* Su respuesta implica el establecimiento de dos relaciones, una para saber el costo de las mochilas y otra para saber cuánto dinero le sobró.

NIVEL IV. OPERATIVIDAD DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS ESCOLARES

Los niños que se ubican en este nivel inventan y resuelven adecuadamente problemas de estructura aditiva y multiplicativa; son capaces de combinar dichas estructuras en un solo problema, dando lugar a problemas encadenados donde se requiere la realización de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones para llegar a su resolución. En sus planteamientos proporcionan los datos que dan lugar a la realización de las distintas operaciones que solucionan el problema. Los algoritmos propuestos son coherentes con el enunciado y, en consecuencia, obtienen un resultado correcto. Generalmente, están seguros de que la respuesta encontrada es adecuada. No muestran dificultades en el manejo de cantidades con decimales. En este nivel aparecen los problemas relacionados con la medida del área.

> Adrián (13.0). Elige la tarjeta donde se ilustran los lápices y expresa: «*si quiero comprar 200 lápices de $16.90 ¿cuántas cajas necesito y cuanto me costara*». Al resolverlo establece dos relaciones multiplicativas y realiza una división y una multiplicación en ese orden. La primera para obtener el número de cajas y la segunda para saber el coste.

La descripción anterior explica los niveles de desarrollo de la competencia aritmética manifestada por los estudiantes en la invención de problemas, permite afirmar que hemos logrado el objetivo principal de investigación. Empero, la caracterización de dicho proceso junto con la descripción de cada uno de los niveles y subniveles identificados tienen un carácter provisional. Esperamos en un futuro próximo poder confirmar estos hallazgos.

7. Discusión

Es posible afirmar que a medida que avanza la edad de los niños y su escolarización tendrán una mayor competencia aritmética para inventar y resolver problemas. La caracterización de los distintos niveles de desarrollo en dicha competencia permitirá decidir en qué momento de su escolaridad es apropiado, pedagógicamente hablando, plantear, formular y resolver un determinado tipo de problemas y si éstos serán abordados con éxito por los escolares. Es decir, adecuar la enseñanza al conocimiento aritmético de los alumnos constituye un gran avance y garantizaría un mejor desempeño en esta clase de actividades. En este sentido el profesor de Educación Primaria dispondrá de una mayor información sobre la competencia aritmética en la invención y resolución de problemas en general y sobre algunos de los procesos que tienen lugar durante el desarrollo de estas actividades que, por otro lado, representan una gran riqueza de posibilidades para continuar explorando no sólo en el nivel teórico sino también en el campo de la innovación curricular.

Los resultados obtenidos sobre los niveles de desarrollo en la formulación de enunciados de problemas aritméticos de formato verbal abren nuevas perspectivas de investigación y las personas interesadas en este tema tienen un amplio campo de trabajo en la experimentación de este contenido en el marco del desarrollo curricular y, por supuesto, en la obtención de nueva información teórica que profundice en su análisis. Por nuestra parte esperamos en un futuro cercano poder verificar estos niveles, caracterizar ampliamente el conocimiento aritmético que los estudiantes necesitan para abordar con éxito las tareas de inventar problemas y averiguar cómo estos conocimientos inciden en la construcción de otros más elaborados. Para ello será necesario perfeccionar los instrumentos de recogida de información y de análisis a fin de contar con más elementos para profundizar en su conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALTES, P.; REESE, H. y NESSELROADE, J. (1981): *Métodos de investigación en psicología evolutiva: enfoque del ciclo vital.* Madrid: Ediciones Morata.

BAROODY, A. (1988): *El pensamiento matemático en el niño. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial.* Madrid: Aprendizaje Visor.

BOUVIER, A. y GEORGE, M. (1979): *Diccionario de matemáticas.* Madrid: Akal Editor.

BROWN, S. y WALTER, M. (1990): *The art of problem posing.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

— (1993): *Problem posing.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

CARPENTER, T. (1980): «Research in cognitive development». En R. SHUNWAY (ed.): *Research in mathematics education.* N. C. T. M. Reston VA.

— y MOSER, J. (1982): «The development of addition and sustraction problem-solving skills». En T. Carpenter, J. Moser, y T. Romberg, (eds.): *Addition and sustraction: A cognitive perspective.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 9-24.

— HIEBERT, J. y MOSER, J. (1981): «Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple adition and subtraction problems». *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME), 12, 27-39.

CASTRO, E.; RICO, L.; CASTRO, E.; VALENZUELA, J.; GARCÍA, A.; PÉREZ, A.; SERRANO, M.; GONZÁLEZ, E.; SEVILLA, J.; GUTIÉRREZ, J.; IBÁÑEZ, B.; MIÑÁN, A.; MORCILLO, N.; SEGOVIA, I.; TORTOSA, A.; FERNÁNDEZ, F.; TAMAYO, R. y TORRES, C. (1988): *Resolución de problemas en el tercer ciclo de E.G.B.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Granada: Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias de la Educación.

CASTRO, E.; SEGOVIA, I.; CASTRO, E. y RICO, L. (1989): *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Editorial Síntesis.

CASTRO MARTÍNEZ, E. (1991): *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

CASTRO MARTÍNEZ, E.; RICO R. L. y GIL C. F. (1992): «Enfoque de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos». *Enseñanza de las ciencias* (EC), 10, 3, 243-253.

CASTRO MARTÍNEZ, E. (1995): *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Granada, España: Comares.

CASTRO, E.; CASTRO E.; RICO, L.; GUTIÉRREZ, J.; TORTOSA, A.; SEGOVIA, I.; GONZÁLEZ, E.; MORCILLO, N. y FERNÁNDEZ, F. (1998): «Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones». En L. Rico y M. Sierra. (eds.): *Primer Simposio Nacional de la SEIEM.* Granada: SEIEM, 69-82.

CASTRO, E. (2000): *Investigación sobre resolución de problemas.* IV Simposio del Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. Universidad de Granada.

COBO, F.; FERNÁNDEZ, G. y RICO, L. (1986): «Las situaciones reales de los problemas aritméticos». *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas.* Sociedad Thales. Almería: Artes Gráficas Gutenberg, 249-257.

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. (1987): «The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and sustraction words problems». *Journal for Research in Mathematics Educations* (JRME), 18, 5, 363-381.

DORSCH, F. (1985): *Diccionario de Psicología.* Barcelona: Editorial Herder.

ENGLISH, L. (1997): «The development of fifth-grade children's problem-posing abilities». *Educacional Studies in Mathematics* (ESM). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 34, 183-217.

— (1998): «Children's problem posing within formal and informal contexts». *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME), 29, 1, 83-106.

FIGUERAS, O. y NEMIROVSKY, M. (1991): *Una investigación sobre el conocimiento etnomatemático de los conceptos de número y de las operaciones.* Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN). México.

FUSON, K. y HALL, J. (1983): «The adquisition of early number word meanig: A conceptual analysis and review». En H. GINSBURG (com.): *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press, 49-107.

GARCÍA, A.; SEVILLA, F. y VALENZUELA, J. (1986): «Invención y enunciado de preguntas que originan problemas aritméticos». *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas.* Sociedad Thales. Almería: Artes Gráficas Gutenberg, 278-287.

GÓMEZ-GRANELL, C. y COLL, C. (1993): «De qué hablamos cuando hablamos de constructivismo». *Infancia y Aprendizaje* (IA), 62-63.

GONZÁLEZ, E.; GUTIÉRREZ, J.; RICO, L. y TORTOSA, A. (1986): «Relación verbo-operación en los problemas de aritmética del tercer ciclo de E.G.B.». *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas.* Sociedad Thales. Almería. Artes Gráficas Gutenberg, 258-267.

HALMOS, P. (1980): «The hear of mathematics». *American Mathematical Monthly,* 87, 519-524.

HIEBERT, H. (1982): «The position of the unknown set and children's solutions of verbal problems». *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME), 13, 2, 341-349.

HIEBERT, J. y LEFEVRE, P. (1986): «Conceptual and procedural knowledge in Mathematics». En J. HIEBERT (ed.): *Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics.*

LEA. Trad. L. Rico. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

KILPATRICK, J. (1987): «Problem formulating: Where do good problem come from?». En A. SCHOENFELD (ed.): *Cognitive science and mathematics education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 123-148.

KOCHEN, M.; BADRE, A. y BADRE, B. (1976): «On recognizing and formulating mathematical problems». *Instruccional Sciencie.* Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 5, 115-131.

MALARA, N. y GHERPELLI, L. (1994): «El planteamiento de problemas y el razonamiento hipotético en geometría». *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 1, 57-74.

MOSES, B.; BJORK, E. y GOLDENBERG, E. P. (1990): «Beyond problem solving: problem posing». En T. J. COONEY y C. R. HIRSCH (ed.): *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s.* Yearbook: National Council of Teachers of Mathematics, 83-91.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1980): *An agenda for action.* Reston, VA: NCTM.

— (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

— (1998): *Principles and standards for school mathematics 2000.* Reston, VA: NCTM.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1989): *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.* Washington, DC: National Academy Press.

NESHER, P. (1982): «The development of semantic categories for addition and subtraction». *Educational Studies in Mathematics* (ESM), 13, 373-394.

O'BRIEN, T. y CASEY, S. (1983a): «Children learning multiplication. Part I». *School Sciencie and Mathematics* (SSM), 83, 3, 247-251.

— (1983b): «Children learning multiplication. Part II». *School Sciencie and Mathematics* (SSM), 83, 3, 407-413.

POLLAK, H. (1987): «Cognitive science and Mathematics Education: A mathematician's perspective». En A. SCHOENFELD, (1987): *Cognitive science and Mathematics Education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 253-264.

PUIG, L. y CERDÁN, F. (1989): *Problemas aritméticos.* Madrid: Editorial Síntesis.

SEGOVIA, I. (1986): «Sentido del resultado en los problemas aritméticos. Idea de aproximación». *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas.* Sociedad Thales. Almería, Artes Gráficas Gutenberg, 268-277.

SCHWARTZ, J. L. (1991): «Can we solve the problem solving problem without posing the problem posing problem?». *Information Technologies and Mathematical Problem Solving Research.* Oporto, Portugal.

SILVER, E. A. (1994): «On mathematical problem posing». *For the Learning of Mathematics* (FLM). Vancouver, British Columbia, Canadá: FLM Publishing Association, 14, 1, 19-28.

VERGNAUD, G. (1991): *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Editorial Trillas.

WALTER Y BROWN (1977): «Problem posing and problem solving: an illustration of their interdependence». *Mathematics Teacher* (MT), 70, 1, 5-13.

WALTER, M. (1980): «Frame Geometry: An example in posing and solving problems». *Arithmetic Teacher* (AT), 6-18.

WINOGRAD, K. (1991): «Writing, solving and sharing original math story problems: Case studies of fifth grade children's cognitive behavior». *Annual Meeting of the American Educational Research Association.* Chicago.

