ISSN: 0214-3402

UNA APROXIMACIÓN A LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LIBROS DE BACHILLERATO Y SU RESOLUCIÓN CON LA TI-92[1]

An approach to optimization problems in Higher Secondary-education textbooks and theri resolution with the TI-92

Matías CAMACHO MACHÍN y Alejandro S. GONZÁLEZ MARTÍN

Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna

RESUMEN: Los problemas de optimización, como aplicación del Cálculo Diferencial, siguen formando parte en la actualidad del currículo de los nuevos Bachilleratos. En este artículo se presenta una primera clasificación de los tipos de problemas que aparecen en los libros de texto, desarrollando a continuación algunas sugerencias didácticas para su resolución utilizando como recurso la calculadora gráfica TI-92. Se trata, en definitiva, de combinar los distintos entornos de trabajo que provee esta clase de calculadoras con el objeto de facilitar el estudio de estos problemas propios de la Secundaria postobligatoria.

Palabras clave: didáctica de las Matemáticas, enseñanza del Cálculo Diferencial, resolución de problemas de optimización, nuevas tecnologías, calculadoras gráficas, TI-92.

ABSTRACT: Nowadays, optimization problems, as an application of Differential Calculus, continue formins part of the new Higher Secondary-education curriculum. In this paper we present a first classification of types of problems that use to appear in Higher Secondary-education textbooks as well as we develop some didactic suggestions for their resolution using the graphic calculator TI-92 as a didactical resource. In short, we aim to combine the different frameworks this kind of calculators provides in order to facilitate the study of these particular problems of post-obligatory Secondary.

Key words: didactics of Mathematics, teaching of Differential Calculus, solving problems of optimization, new technologies, graphic calculators, TI-92.

1. Este trabajo ha sido realizado en el marco del Proyecto BXX2000-0069 del Programa Nacional de Promoción General del Conocimiento.

INTRODUCCIÓN

Como es sabido, la introducción de los elementos del Cálculo Diferencial en el sistema escolar se hace en los cursos de Bachillerato. Habitualmente, la secuencia que aparece en los libros de texto es la siguiente: funciones, límites, continuidad y derivabilidad, de manera que cuando han sido tratados estos elementos básicos del Cálculo Diferencial nos encontramos como aplicaciones del mismo el estudio de las gráficas de las funciones y, a continuación, la resolución de problemas de optimización utilizando principalmente el concepto de derivada de una función.

Cada vez más aparece en los libros de texto la alusión al uso de las calculadoras, en especial las gráficas, para complementar el estudio tradicional y algorítmico que usualmente se hace de estos problemas. Abordamos aquí el estudio y resolución de los problemas de optimización utilizando la calculadora TI-92; conjugaremos diferentes sistemas de representación (numérico, gráfico y algebraico) que servirán para enriquecer el planteamiento y resolución de los problemas y trataremos de establecer una primera clasificación de los diferentes tipos que podemos encontrar en los actuales textos de Bachillerato.

En general, los problemas de optimización piden calcular una distancia mínima, un coste mínimo o un área, altura o beneficio máximo. Si trabajamos en primer lugar los problemas con enunciado de tipo numérico-funcional y los de carácter geométrico, tendremos gran parte del camino recorrido, porque el resto de los enunciados, por lo general, pueden ser reducidos a estos casos.

Queremos decir con esto que el planteamiento de la mayoría de los problemas de optimización lleva a una situación de carácter numérico-funcional o de carácter geométrico; si los alumnos ya han adquirido destreza en la resolución de problemas con un enunciado explícitamente de este tipo, tan sólo deberán aprender a traducir el resto de los enunciados a estos casos.

Así, se deberá enseñar a los alumnos a traducir bien el enunciado del problema para que sean capaces de plantear una situación del tipo numérico o geométrico. Una vez que se ha hecho esto, sólo queda aplicar el Cálculo Diferencial a la función hallada y saber interpretar la solución obtenida.

Tal como señalan Azcárate et al. ([3]) es preciso que el alumno se percate de que:

1. «Debe ser capaz de traducir correctamente el enunciado del problema al lenguaje de las funciones para poder aplicar después las herramientas del cálculo.
2. En general existe más de una manera de resolver un problema y que una elección conveniente de las variables dependiente/independiente puede simplificar considerablemente los cálculos».
3. «No debe olvidar las restricciones que puede haber sobre las variables, lo que puede ocasionar que, habiendo hallado extremos relativos, no sean solución del problema.

4. Ciertas situaciones admiten una simplificación. Por ejemplo:
   - Una distancia d entre dos puntos será mínima o máxima cuando lo sea su cuadrado. Por tanto, basta con hallar los extremos de la función d^2, lo que simplifica bastante los cálculos.
   - El ángulo bajo el que se ve un objeto será máximo o mínimo cuando lo sea su tangente. Podemos, pues, trabajar con la función tag α.
5. No en todas las funciones que presentan máximo y mínimo relativo la imagen del primero es mayor que la del segundo; así ocurre si se trata de funciones continuas, pero no siempre si existen discontinuidades (p. 115)».

Desde el punto de vista de la enseñanza, diferentes organismos abogan por el uso de estas nuevas tecnologías accesibles a los estudiantes. Así, en [6] se recomienda que:

«... Todos los alumnos utilicen calculadoras para desarrollar y consolidar conceptos tales como estimación, cálculo, representación gráfica y análisis de datos.

... Los profesores de todos los niveles promuevan la utilización de las calculadoras para mejorar la enseñanza de las matemáticas».

En los nuevos *Principles and Standards for School Mathematics* se establece un *Technology Principle*:

«Las tecnologías electrónicas —calculadoras y ordenadores— son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Proporcionan imágenes visuales de las ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y calculan correcta y eficientemente. También pueden apoyar la investigación de los estudiantes en cada área de las matemáticas, incluyendo la geometría, estadística, álgebra, medida y números. Cuando las herramientas tecnológicas están disponibles, los alumnos se pueden concentrar en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas ([8], p. 24)».

En varios países se han desarrollado cursos y proyectos de investigación dirigidos a generalizar su uso en la enseñanza de las matemáticas. En los Estados Unidos se desarrolla desde 1986 el proyecto C^2PC *(Calculator and Computer Pre-Calculus Project),* cuyo objetivo principal consiste en el desarrollo de un currículum de matemáticas para la Secundaria analizando para ello las destrezas necesarias para la comprensión del concepto de función, gráficas de funciones y geometría analítica ([4] y [5]). Uno de los aspectos más interesantes de este trabajo consiste en el desarrollo de un proceso sistemático en la resolución de problemas, atendiendo a las conexiones existentes entre las distintas representaciones que se pueden obtener en el proceso de resolución de una situación problemática, para lo cual las calculadoras gráficas son de gran utilidad.

Otro proyecto de investigación importante a nivel nacional es el proyecto que sobre la utilización de la TI-92 en el aula se desarrolló en Francia durante los años 1997 y

1998 ([2]) como continuación de otro proyecto sobre la viabilidad de implementación del software DERIVE ([1]). También el Ministerio de Educación francés subvencionó un proyecto nacional desde el año 1995 que cubre diferentes niveles de Secundaria, mediante el cual trata de analizar la viabilidad de introducir desde el punto de vista institucional las calculadoras en el aula. Los objetivos generales de la dimensión de instrumentación del proyecto son:

- Entender cómo se contruye la instrumentación de la calculadora, poniendo ésta en relación con las estrategias desarrolladas por los profesores, las condiciones institucionales y las características personales de los alumnos.
- Analizar los conocimientos que fundamentan esta instrumentación y analizar sus relaciones con los conocimientos esperados por la institución, investigar posibles conflictos y su manejo por parte de los profesores y alumnos.

No podemos hacer oídos sordos a la proliferación de nuevas calculadoras con posibilidades gráficas y simbólicas impensables hace algunos años y fabricadas con objetivos principalmente educativos. Un buen remedio a la dificultad de habilitar una sala de ordenadores puede ser el uso más generalizado de estas calculadoras. En particular, la TI-92 tiene implementados parcialmente dos programas informáticos ampliamente utilizados en la enseñanza de las matemáticas: el *DERIVE* (programa de cálculo simbólico) y el *Cabri Geometre* (programa de geometría dinámica).

Algunas de sus posibilidades que utilizaremos en este artículo son:

- La capacidad de operar con números enteros, racionales y reales (tanto en su forma exacta como aproximada).
- Definir funciones y obtener sus representaciones gráficas.
- Construir tablas para los valores de las funciones de una variable.
- Resolver ecuaciones.
- Construir y explorar dinámicamente objetos geométricos de forma interactiva.
- Analizar datos.

UNA CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Un estudio detallado de los enunciados de los problemas de optimización que suelen aparecer en muchos libros de texto nos puede llevar a encontrar similitudes entre ellos y a esbozar una primera clasificación de los mismos.

Tal como hemos señalado, todos estos problemas son reducibles en último término al tipo de problema «numérico» y también veremos que muchos de estos problemas pueden ser identificados a partir de otros. La siguiente clasificación no pretende en ningún momento ser exhaustiva, sino simplemente reflejar lo que un primer análisis de los libros de texto puede arrojar. Consideraremos siete clases de problemas que pasaremos a describir a continuación: problemas de números, de ángulos, del nadador, de inscribir/circunscribir unas figuras a otras, de construcción de figuras minimizando el costo del material, de cálculo de la distancia de puntos a funciones y de la valla.

1.– Problemas de números

Son los clásicos enunciados de la forma:

> Queremos encontrar dos números positivos tales que su suma sea 25 y de manera que el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo ([9], p. 258).

En muchos libros de texto se utiliza un problema de este tipo para ejemplificar las técnicas necesarias para resolver los problemas de optimización.

Algunos enunciados originales tratan de dar a estos problemas un nuevo atractivo mediante la forma de plantearlos, por ejemplo:

> Los topacios son piedras preciosas cuyo valor en pesetas es proporcional al cuadrado de su masa. Un topacio de 20 g se cae y se rompe en dos. ¿Cuánto se podrá obtener, al menos, de la venta de estos dos trozos? ([10], p. 322).

2.– Problemas de ángulos

En esta categoría enmarcamos los clásicos problemas de la estatua y del futbolista. Tal como hemos señalado, hemos de hacer ver a los alumnos que maximizar un ángulo es equivalente a maximizar la tangente de dicho ángulo. Los enunciados son los que siguen:

> Una escultura de 2 metros de altura descansa sobre un pedestal de 4,80 metros. ¿A qué distancia del eje de la estatua se ha de situar un hombre de 1,80 m de altura para que vea la estatua bajo el mayor ángulo posible? ([10], p. 321).
>
> ¿Desde qué punto de la banda se ve la portería de un campo de fútbol bajo un ángulo máximo, siendo por lo tanto el punto de la banda óptimo para golear? ([3], p. 118).

Uno de los inconvenientes que presentan ese tipo de enunciados es el uso, para su resolución, de fórmulas trigonométricas, en concreto la de la tangente de la suma de ángulos.

3.– Problema del nadador

En este tipo de problemas se plantea, en general, la situación de una persona que en un medio puede alcanzar una velocidad y en otro medio otra velocidad diferente. Aquí la dificultad está en plantear la suma de distancias recorridas en función de la velocidad. Un enunciado «clásico» es el siguiente:

> Juan se encuentra en un punto A al borde de una piscina rectangular y percibe una señal de socorro de su amigo que se baña en B. Juan puede nadar a 1 m/s y, sobre el borde, puede correr a 2 m/s. ¿Cuál es el tiempo mínimo en el que puede socorrer a su amigo? ([10], p. 324).

El siguiente problema tiene un enunciado equivalente:

> Una persona se encuentra a 8 km de distancia de una carretera recta y su coche está en dicha carretera a 15 km de él en línea recta. Si esta persona puede caminar a 4 km/h fuera de la carretera y a 5 km/h por la carretera, ¿a qué distancia del coche deberá abandonar la carretera para tardar el menor tiempo posible? ([10], p. 324).

4.– Inscribir/circunscribir unas figuras a otras

La dificultad de estos problemas radica en la mayor o menor dificultad para expresar la característica geométrica de la figura pedida (ya sea su longitud, área o volumen) en relación a las medidas de la figura de referencia. Además, los estudiantes deben «conocer las fórmulas» para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas.

> Encuentra las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de 5 cm de radio ([9], p. 259).
>
> Halla las dimensiones del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de 2 dm de diámetro ([3], p. 116).

5.– Construcción de figuras minimizando el costo del material

En este caso los estudiantes se encuentran con la dificultad de representar e interpretar cómo idear un modelo para la construcción que se les pide utilizando el material que se les da. Enunciados de este tipo podrían ser:

> Un pastor quiere vallar un campo rectangular de 3.600 m^2 de superficie para hacer un aprisco. ¿Cómo le indicaríamos las dimensiones para que el coste fuera mínimo? ([13], p. 227).
>
> Un jardinero ha de construir un parterre en forma de sector circular con perímetro de 20 m. ¿Cuál será el radio que da el parterre de área máxima? ([13], p. 229).

6.– Distancia de puntos a funciones

Aquí los alumnos se encuentran con la dificultad de plantear las ecuaciones de la distancia en función de los datos de partida. También les cuesta darse cuenta de que optimizar la función distancia es equivalente a optimizar esta función al cuadrado, lo que simplifica mucho los cálculos.

> Hallar los puntos de la curva $y^2 = 6x$ cuya distancia al punto (4, 0) sea mínima ([12], p. 146).
>
> Calcula la distancia mínima del punto (0, 1) a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ ([10], p. 320).

7.– Problema de la valla

Estos problemas pueden ser reducidos al tipo 5, aunque por lo general cuentan con el dato de que la valla está junto a algún elemento que hace que no sea necesario vallar un lado de la figura.

Un hombre dispone de 300 m de alambre para cerrar un campo de forma rectangular. Uno de los lados del rectángulo se situará sobre una valla que ya hay. Busca las dimensiones del área máxima de campo que se podrá cerrar ([9], p. 277).

8.– Problemas de enunciado variado

Aunque en general también acaban reduciéndose a alguno de los casos anteriores, estos problemas presentan un enunciado no encuadrable tan fácilmente entre alguno de los tipos 1-7 establecidos.

Algunos ejemplos de estos enunciados podrían ser:

Una empresa de ordenadores tiene unos ingresos y unos costes de producción que se ajustan a las siguientes funciones:

$I(x) = 60x - x^2$ (función de ingresos; *x* es el número de unidades producidas).

$(cx) = x^2 - 12x + 120$ (función de costes).

Se desea saber cuál es el beneficio máximo de la empresa y qué número de unidades es preciso producir para obtenerlo ([10], p. 319).

(Problema reducible al estudio del máximo de una función).

Para realizar el transporte público entre dos puntos de una ciudad una compañía ofrece sus servicios en las siguientes condiciones:

- Si el número de viajeros es menor o igual que 20, el billete costará 40 pesetas por persona.
- Si el número de viajeros es mayor que 20, cada uno deducirá de las 40 pesetas tantas como viajeros superen las 20 plazas.

Calcula el número de viajeros que proporciona mayores ingresos a la empresa ([11], p. 181).

(También reducible al estudio del máximo de una función definida a trozos).

También podemos encontrar en algunos libros de texto de hace algunos años problemas con un enunciado relacionado con la Física:

Una pila eléctrica de resistencia interna r = 0,2 ohmios y de fuerza electromotriz E = 1 voltio está unida a un circuito de resistencia R. Se desea saber el valor que ha de tener R para que la potencia P de la corriente suministrada sea máxima ([14], p. 153).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON LA TI-92

Abordamos ahora el estudio y resolución de estos problemas utilizando la calculadora TI-92. En particular, combinaremos los distintos marcos (numérico, gráfico y algebraico) para plantear y resolver algunos de estos problemas.

En este apartado hemos optado por elegir dos de los problemas de nuestra clasificación. Para el Problema 1, que podemos clasificar dentro de los del Tipo 3, haremos un estudio detallado de su resolución indicando los diferentes pasos necesarios para la misma, combinando los diferentes entornos de trabajo que facilita la TI-92. Para la resolución del Problema 2 presentaremos únicamente un modelo geométrico que ayude a interpretarlo. A la hora de trabajar en los demás entornos de la calculadora, las sugerencias que se presentan permiten, de modo análogo al Problema 1, utilizar las distintas capacidades de la TI-92.

PROBLEMA 1:

> Un socorrista se encuentra al comienzo del borde de una piscina rectangular de 5 metros de largo y percibe una señal de socorro de un nadador que se halla a tres metros del comienzo de la piscina, a una distancia de 2 metros del borde. Si el socorrista puede nadar a 1 m/s y, sobre el borde, puede correr a 2 m/s, ¿cuál es el tiempo mínimo en el que puede socorrer al nadador?

Planteamos la situación en el entorno geométrico de la calculadora (tecla, [APPS] opción [8]). En el menú Formato ([♦] [F]) activamos la opción *Cuadrícula* (fig. 1).

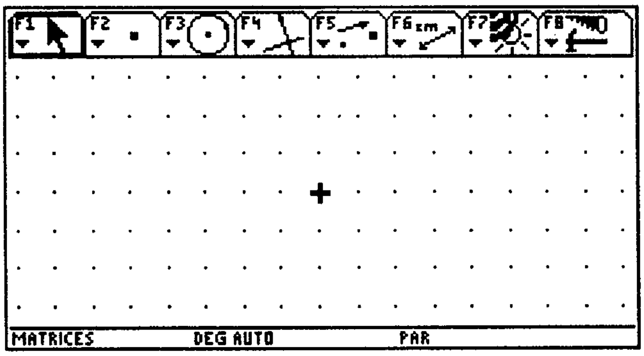

Figura 1

Dibujamos ahora la situación. Tomamos una recta de longitud 5 y, a las tres unidades del comienzo, situamos un punto a dos unidades de distancia (fig. 2).

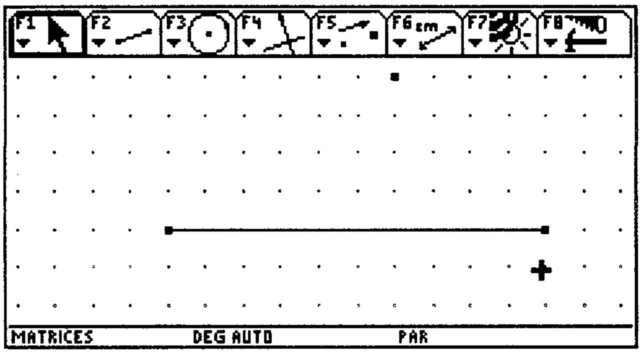

Figura 2

Situamos ahora un punto móvil sobre el segmento que representa el borde de la piscina; este punto indicará el lugar exacto en el que el socorrista se lanza al agua. Lo unimos al punto que representa al nadador para calcular luego la distancia (fig. 3).

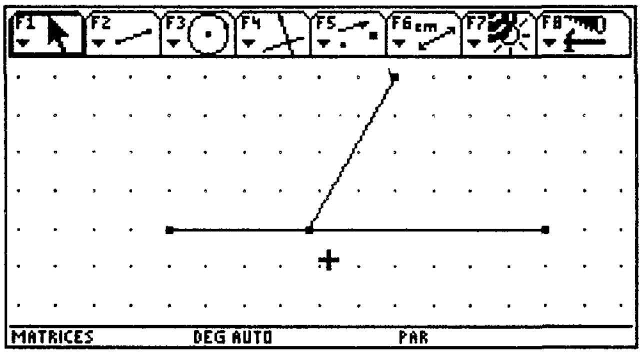

Figura 3

Calculamos ahora la longitud de los dos segmentos que define el punto móvil. Para ello, nos vamos al menú F6 opción 1. Observamos que, en el entorno geométrico, cada dos puntitos definen un centímetro; de ahí la conveniencia de haber hecho el dibujo a doble escala (fig. 4).

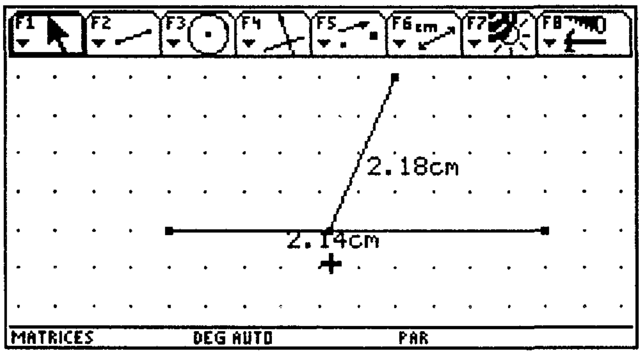

Figura 4

El tiempo total vendrá dado por la suma de la longitud del segmento sobre el borde de la piscina dividido entre 2 (que es la velocidad en tierra) más la longitud del segmento en el agua dividido entre 1 (que es la velocidad en agua). Realizamos esta operación en la calculadora del entorno geométrico pulsando las teclas F6 6 y aparece el resultado en pantalla (figs. 5 y 6).

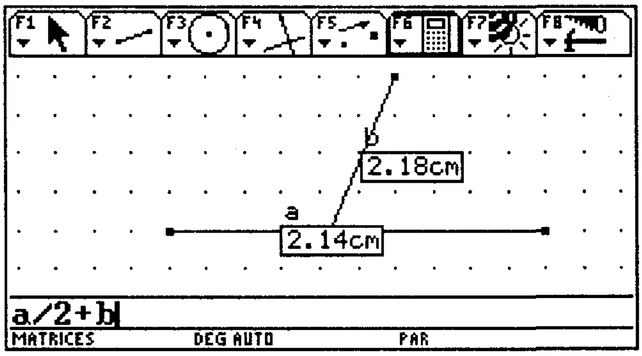

Figura 5

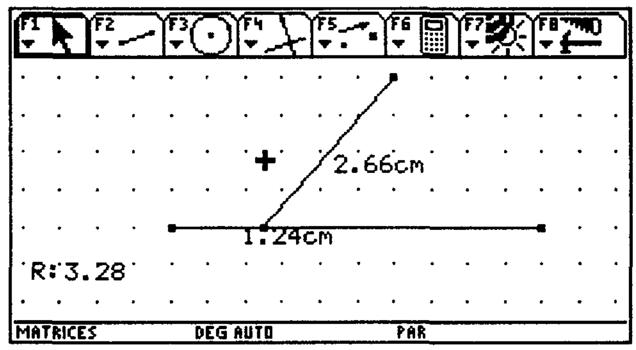

Figura 6

Observamos que, al ir moviendo el punto que indica desde dónde se lanza el socorrista, vamos obteniendo diferentes tiempos para el rescate (fig. 7).

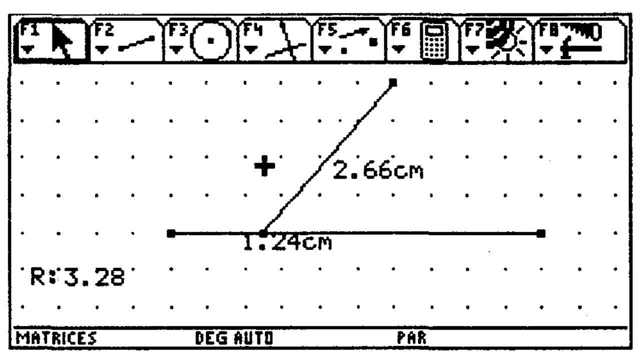

Figura 7

Vamos ahora a realizar una animación en la que moveremos el punto sobre el borde de la piscina y recogeremos los diferentes tiempos que le corresponden; después representaremos gráficamente estos pares de datos.

Hemos de definir primero qué datos queremos recoger en el menú *Agrupar Datos: Definir entrada* ($\boxed{F6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$); en nuestro caso, la distancia al punto en que el socorrista se encuentra (longitud del segmento sobre el borde de la piscina) y el tiempo que se obtiene (fig. 8).

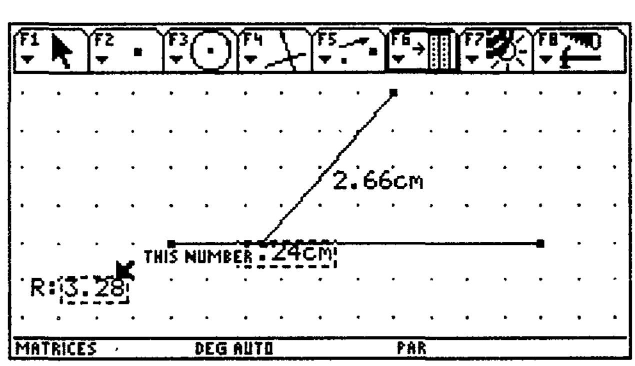

Figura 8

Una vez definidas las entradas, seleccionamos la opción *Almacenar Datos* ([F6] [7] [1] o, abreviadamente, [◆] D) para recoger cada par de valores. Realizamos ahora la animación escogiendo la opción [3] del menú [F7]. Seleccionamos el punto móvil y lo movemos ligeramente; automáticamente comienza a moverse solo. Para detenerlo pulsamos [ESC].

Los datos se han almacenado en la pantalla *sysdata*, a la que se accede pulsando [APPS] [6] y *Open* (fig. 9).

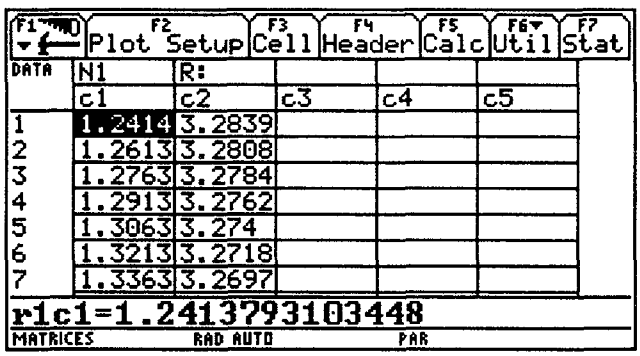

Figura 9

Para dibujar la nube de puntos nos vamos a la opción (y especificamos que la variable *x* sean los datos de la columna 1 (escribimos *C1* en el cuadradito correspondiente) y que la variable *y* sean los datos de la columna 2 (fig. 10).

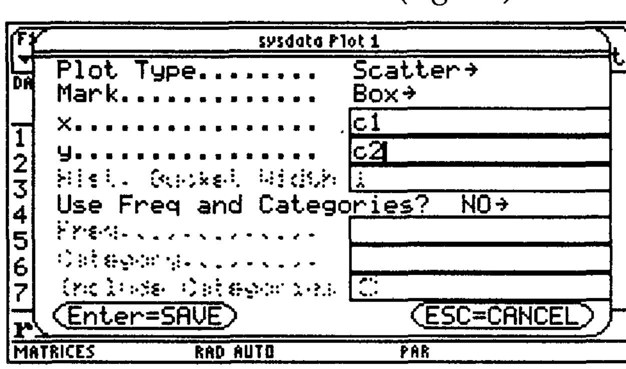

Figura 10

Si vamos al entorno gráfico ([◆] R) podremos ver la nube de puntos obtenida. Si hacemos un zoom en los datos (menú *Zoom*, opción *Zoomdata*: ([F2] [9]) tendremos una imagen como la siguiente (fig. 11).

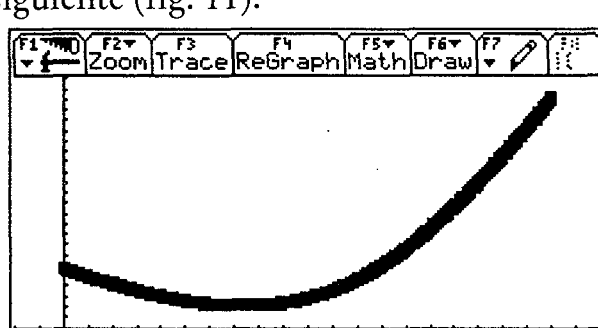

Figura 11

Ya podemos visualizar la relación entre las variables dadas. Pulsando la opción *Trace* ($\boxed{\text{F3}}$) nos situamos sobre la curva y podemos desplazarnos hasta su mínimo, que parece el punto (1.84685, 3.23205) (fig. 12).

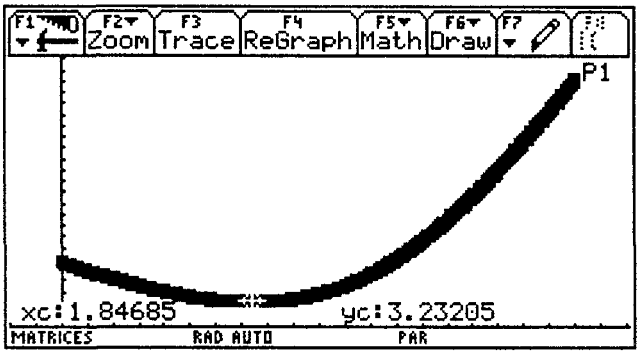

Figura 12

Ahora ya sólo quedaría comprobarlo algebraicamente, utilizando las herramientas del cálculo que los alumnos han aprendido.

En el entorno de cálculo algebraico de la TI-92 ($\boxed{\blacklozenge}$ Q) hemos de escribir la función que define el tiempo, que viene dada por la suma de los tiempos en tierra (espacio recorrido entre velocidad) y en agua (hipotenusa del triángulo entre velocidad) (fig. 13).

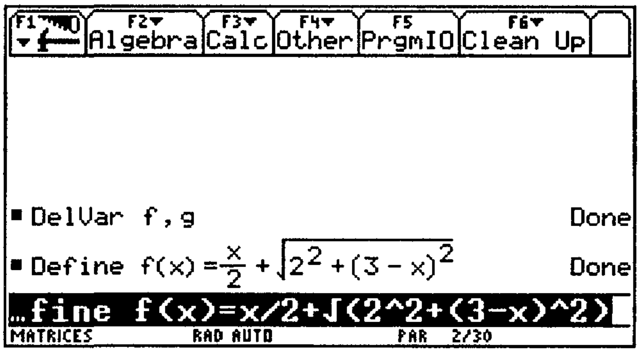

Figura 13

Calculamos su derivada con el menú ($\boxed{\text{F3}}$ opción ($\boxed{1}$) (fig. 14).

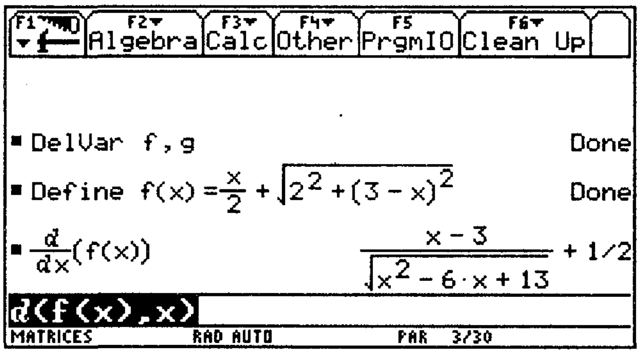

Figura 14

Y calculamos los valores que anulan esta derivada con el comando *solve* (fig. 15).

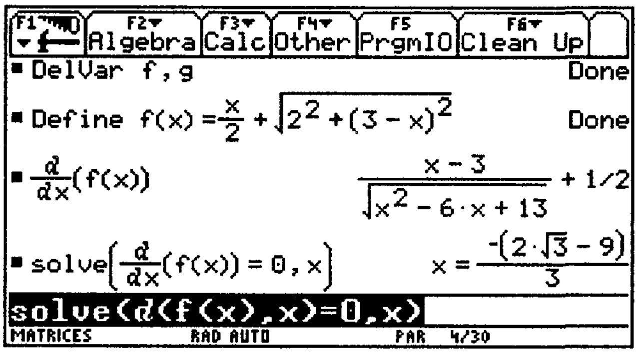

Figura 15

Para calcular su valor aproximado utilizamos *aprox* ($\boxed{\text{F2}}$ $\boxed{5}$) y podemos comprobar cómo el valor es bastante cercano al obtenido de forma gráfica (fig. 16).

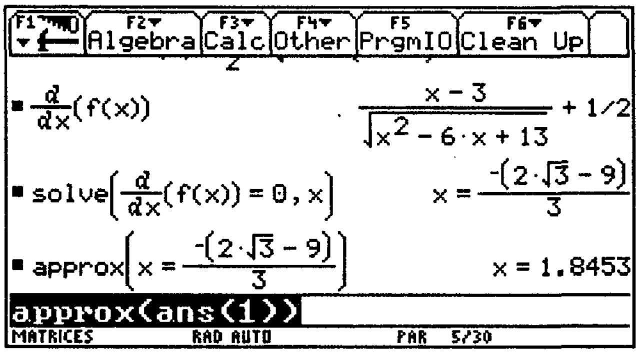

Figura 16

Ahora sólo faltaría calcular la derivada segunda y sustituir; el método gráfico ya nos ha asegurado que esta solución será un mínimo.

Pasamos a mostrar el planteamiento del otro problema de optimización con la TI-92 que hemos elegido:

PROBLEMA 2:

> Sabiendo que el precio de un diamante es proporcional al cubo de su peso, calcular cuál es el peso de las dos partes en que se divide un diamante de 100 g. que produce un menor beneficio.

Aunque en este caso pueda parecer difícil encontrar una representación geométrica de este problema, podemos pensar en dibujar un segmento que represente el peso total del diamante con un punto móvil que represente la división en dos partes (fig. 17).

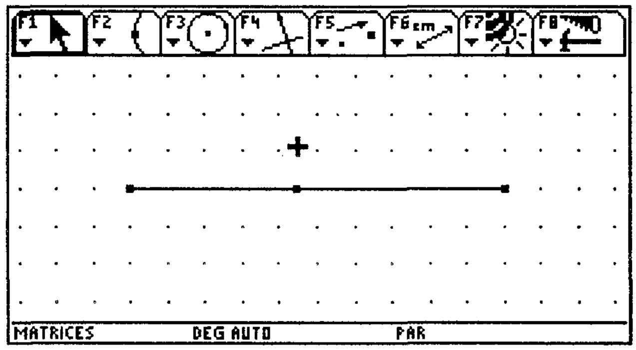

Figura 17

Multiplicando por los factores convenientes, podemos representar los pesos de cada parte (en este caso, debemos multiplicar por veinte, ya que dos puntos representan un centímetro) y calcular la suma de sus cubos (figs. 18 y 19).

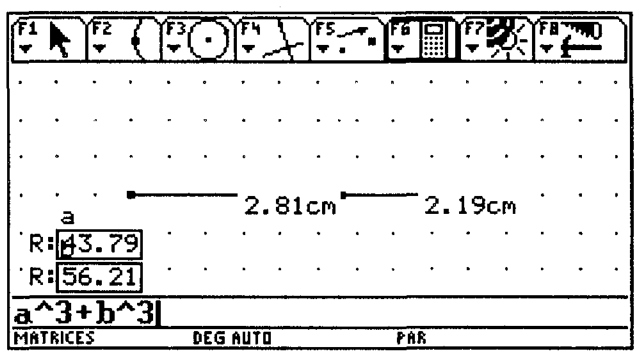

Figura 18

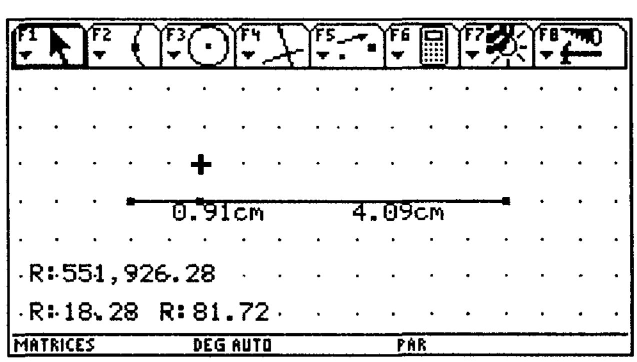

Figura 19

Nuevamente, haciendo una animación podemos recoger los pares de valores *peso de la primera parte-precio total* y representarlos gráficamente (fig. 20).

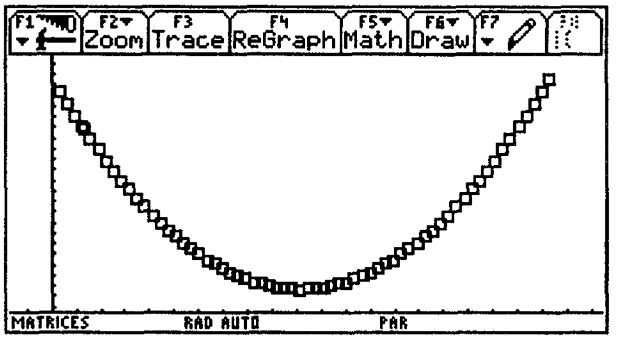

Figura 20

y calcular el mínimo relativo desplazándonos sobre la curva (fig. 21).

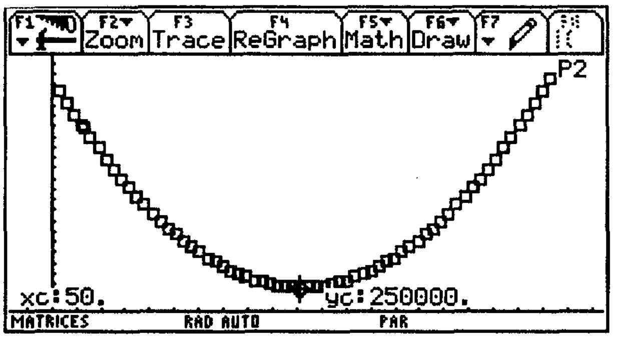

Figura 21

A MODO DE CONCLUSIÓN

El uso de un recurso didáctico como este tipo de calculadoras gráficas nos obliga a analizar el currículo de Secundaria y Bachillerato desde otra perspectiva. No se pueden plantear las situaciones y problemas de matemáticas de la misma manera que se hace en la enseñanza tradicional, dado que los aspectos exclusivamente instrumentales propios de las matemáticas, con una de estas calculadoras, no tendrán sentido si no se orientan de una forma adecuada. Se hace necesario el desarrollo de investigaciones dirigidas a articular los conocimientos de los alumnos en torno a este nuevo instrumento.

Además, desde el punto de vista institucional, existen grandes dificultades para disponer de ordenadores en los centros, pese a que aparezca explícitamente mencionado su uso en el currículo de Bachillerato. Las calculadoras de esta última generación podrían resolver de alguna forma los problemas de dotación de ordenadores.

Por otro lado, diversas investigaciones en las que se comparan las destrezas de los alumnos instruidos de forma tradicional y preparados con calculadoras gráficas a la hora de resolver problemas arrojan resultados interesantes. Los estudiantes suelen mostrar preferencia por las representaciones simbólicas o gráficas; en general, después de haber participado en un trabajo experimental con calculadoras gráficas, obtienen una mayor comprensión conceptual que aquellos con los que se desarrolla un trabajo tradicional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARTIGUE, M.; ABBOUD, M.; DROUHARD, J. P. y LAGRANGE, J. B. (1995): «Une recherche sur le logiciel DERIVE. Rapport». *Cahier DIDIREM* spécial n.º 3, Edition IREM, Paris 7.

[2] ARTIGUE, M.; DEFOUAD, B.; DUPERIER, M.; JUGE, G. y LAGRANGE, J. B. (1998): «Integration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathematiques au lycee». *Cahier DIDIREM* spécial n.º 5, Edition IREM, Paris 7.

[3] AZCÁRATE, C.; CASADEVALL, M.; CASELLAS, E. y BOSCH, D. (1996): *Cálculo Diferencial e Integral*, (ed.): Madrid: Síntesis.

[4] DUNHAM, P. H. y DICK, T. P. (1994): «Research on graphic calculators». *Mathematics Teacher*, 87, 440-445.

[5] DUNHAM, P. H. y OSBORNE, A. (1991): «Learning how to see: Students graphic difficulties». *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13 (4), 35-49.

[6] CALLEJO, M. L.; PAZ, M. L. y VIDAL, M. D. (1994): *La función de las funciones*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Narcea, S.A. de ediciones.

[7] KILPATRICK, J.; RICO, L. y SIERRA, M. (1992): *Educación Matemática e Investigación*, Madrid: Ed. Síntesis.

[8] THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*. Inc., United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

LIBROS DE TEXTO UTILIZADOS

[9] BAILO, C.; CASALS, R.; GOMA, A. y TUDURÍ, J. (1998): *Matemáticas. 2.º de Bachillerato/Ciencias de la Naturaleza y de la Salud-Tecnología*, Barcelona: Ed. Teide.

[10] PRIMO, A.; PÉREZ, C.; SERRANO, G. y SUÁREZ, L. et al. (1998): *Matemáticas. Modalidad Tecnología, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, 2.º de Bachillerato*, Salamanca: Ed. Hespérides.

[11] — (1998): *Matemáticas. Modalidad Humanidades y Ciencias Sociales, 2.º de Bachillerato*. Salamanca: Ed. Hespérides.

[12] VIZMANOS, J. y ANZOLA, M. (1990): *Problemas de Matemáticas II, COU y Selectividad, Opción C: Ciencias Sociales y Opción D: Humanística/ Lingüística*, Madrid: Ed. SM.

[13] — (1996): *Matemáticas 1 (Bachillerato), Ciencias de la Naturaleza y de la Salud-Tecnología*. Madrid: Ed. SM.

[14] SIN AUTOR (1972): Matemáticas. Sexto Curso. Zaragoza: Ed. Luis Vives.

